В. М. БРАДИС

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ
В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Под редакцией
А. И. МАРКУШЕВИЧА

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ

Допущено
Министерством высшего образования СССР
в качестве учебного пособия
для педагогических институтов и государственных
университетов

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Москва * 1954

ПРЕДИСЛОВИЕ

Работая над этой книгой, автор преследовал две цели. Во-первых, надо было дать изложение основных идеи науки методики преподавания математики, освещая принципиальные её вопросы, указывая различные её течения, по необходимости касаясь и самой математики, и её истории. Предназначая книгу для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов, автор предполагал у читателя знание тех математических дисциплин, какие изучаются на I и II курсах, не говоря уже о курсе элементарной математики, изучаемом в средней школе. Во-вторых, в книге, предназначенной для студентов, будущих учителей математики, нельзя было не отвести много места тем вопросам, которые неизбежно встают перед молодым советским учителем средней школы, призванным вести обучение математике в тех конкретных условиях в смысле учебного плана, программы, учебников, какие мы имеем в настоящее время. Начинающего учителя интересует вопрос о том, как лучше всего провести работу по действующей программе и по принятым в нашей школе учебникам, и автор считал, что учителю надо помочь и в этом отношении, что книга по методике должна быть и практическим руководством, хотя есть опасность, что такое руководство может быстро устареть, так как в стране ведётся интенсивная работа по улучшению программ и обновлению используемых учебников. Имея в виду работу по действующей ныне программе математики для средней школы и по принятым в настоящее время учебникам, автор считал целесообразным указывать на возможность введения некоторых новшеств, уже проверенных на опыте отдельных учителей.

Ставя перед собой две эти цели, автор сознаёт, что полностью не достиг ни той, ни другой, но надеется, что при всех наличных недочётах книги она всё же облегчит первые шаги начинающего учителя, поможет ему избежать некоторых часто допускаемых ошибок.

Настоящее, третье, издание является частичной переработкой первых двух. Заново написан § 13 первой части «Школьная математика в свете задач политехнического обучения». Учтено большое количество замечаний, высказанных по поводу отдельных мест книги. Автор приносит глубокую благодарность всем товарищам, поделившимся своими пожеланиями об исправлениях в книге. Особой признательностью он обязан проф. И. Я. Депману и Н. М. Бескину, выступившим с большими и содержательными докладами на организованном издательством обсуждении книги, а также кафедре математики Ростовского-на-Дону

государственного педагогического института, С. М. Чуканцову (Калуга) и Н. И. Благовещенскому (Владивосток), приславшим подробные рецензии, одна из которых была опубликована в журнале «Математика в школе» (№ 3 за 1951 г.). Подавляющее большинство пожеланий, не требующих коренной переработки книги, автором выполнено. Коренную переработку книги, особенно в геометрической части, автор считает необходимой, но по ряду причин вынужден отложить её до следующего издания, если в таком окажется надобность.

16 января 1954 г. В. Брадис

г. Калинин, Государственный педагогический институт имени М. И. Калинина

Часть первая
ОБЩАЯ МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Глава I
МАТЕМАТИКА КАК НАУКА

§ 1. Зарождение математики. Первый основной этап её развития: математика как наука о числах, величинах, геометрических фигурах.

Содержание и происхождение математической науки точно и полно характеризуется следующими словами Фридриха Энгельса:

«Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть — весьма реальный материал. Тот факт, что этот материал принимает чрезвычайно абстрактную форму, может лишь слабо затушевать его происхождение из внешнего мира. Но чтобы быть в состоянии исследовать эти формы и отношения в чистом виде, необходимо совершенно отделить их от их содержания, оставить это последнее в стороне как нечто безразличное; таким путём мы получаем точки, лишённые измерений, линии, лишённые толщины и ширины, разные a и b, x и y, постоянные и переменные величины... Как и все другие науки, математика возникла из *практических нужд* людей: из измерения площадей земельных участков и вместимости сосудов, из счисления времени и механики» (Ф. Энгельс, Анти-Дюринг, 1948, стр. 37).

Следуя схеме, предложенной академиком А. Н. Колмогоровым в его статье «Математика» [I, 30] *, всю историю математики можно разбить на три основных этапа: первый, когда шло образование и разработка понятий действительного числа, величины, геометрической фигуры; второй, главным содержанием которого являлось изучение изменения величин и геометрических преобразований; третий, когда математика стала наукой о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира во всей их общности. Рассмотрим последовательно эти три этапа.

* Ссылки в прямоугольных скобках здесь и в дальнейшем относятся к спискам литературы, приведённым в конце каждой части. Римская цифра означает номер части, арабская — номер работы по списку.

Первобытный человек, размышляя, например, о том, хватит ли наличного запаса оружия для всех участников намеченной охоты, ещё не умея считать, уже выполнял одну простейшую математическую операцию: он устанавливал соответствие между элементами двух множеств, множества копий и множества охотников. Много раз выполняя подобную операцию в процессе удовлетворения самых различных своих потребностей, человек замечал нечто общее во всех множествах, для которых это соответствие оказывалось взаимно однозначным. Общественный характер жизни людей заставлял давать этому общему некоторое название. Так, все множества, допускающие взаимно-однозначное соответствие элементов с множеством пальцев руки (короче — эквивалентные, или равносильные, этому множеству), характеризовались словом «пять» (от слова «пясть» — кисть руки). Не обращая внимания на свойства элементов, входящих в рассматриваемое множество в каждом отдельном случае, т. е. отвлекаясь от них, человек постепенно выработал понятие о числах 1, 2, 3, 4, 5 ..., о натуральном числе вообще как характеристике того общего, что имеется во всех равносильных конечных множествах. Человек научился считать.

Аналогично возникли и другие математические понятия: о действиях над натуральными числами, о дробях, о прямой линии, о длине отрезка, о площади, об объёме и т. д. Первый основной этап развития математики, охватывающий длинный ряд веков от первых шагов человека на этом пути математической абстракции примерно до начала XVII в., можно в самых общих чертах характеризовать тем, что математика овладела понятием натурального, а затем рационального числа; научилась называть и записывать произвольно большие числа; освоила арифметические действия, установила свойства и способы измерения таких величин, как длина, угол, площадь, объём, признав существование иррационального числа; установила свойства простейших геометрических фигур и тел — многоугольников, круга, многогранников, цилиндра, конуса, сферы, некоторых кривых. На протяжении этого первого этапа математика была призвана удовлетворять непосредственные потребности, возникавшие в хозяйственной и военной деятельности человека: простой счёт голов скота, разного рода дележи, сравнение длин различных путей, разбивка земельных участков и измерение их площади, определение объёмов, всевозможные денежные расчёты и т. д. Большие требования к математике уже на весьма ранних ступенях её развития предъявила астрономия, что привело к созданию тригонометрии, в первую очередь сферической. Ещё большие требования к математике со стороны механики и физики сказались значительно позже. Исключением являлись работы Архимеда (III в. до н. э.), которые не укладывались в рамки этих простейших понятий математики и которые, далеко опередив свою эпоху, относятся по существу к следующему этапу развития математики.

История не сохранила сведений о самых первых шагах развития математики. О них можно только догадываться. Но имеются идущие весьма далеко в глубь веков совершенно достоверные сведения о математическом творчестве в Египте (со второго тысячелетия до н. э.) и в Месопотамии (центр — Вавилон), примерно такой же древности. До нас дошли многочисленные задачи арифметического, геометрического и алгебраического содержания, которые решались египтянами и вавилонянами по определённым правилам, иногда с помощью специальных таблиц; но общих теорий, из которых вытекали бы эти правила, ещё не существовало. Поэтому не удивительно, что среди этих правил были и такие, которые давали при некоторых условиях хорошие результаты, при других — ошибочные. Например, для определения площади равнобедренного треугольника египтяне брали половину произведения основания не на высоту, а на боковую сторону.

Существенно иное направление развитие математики получило в Греции, где, начиная с VII в. до н. э., стала разрабатываться математическая теория, сперва рассматривавшая на основе дошедших из Египта и Вавилона сведений отдельные, не связанные друг с другом вопросы, а затем приводившая эти отрывки в систему. Из науки *эмпирической*, устанавливавшей свои результаты только через опыт и наблюдение, математика трудами Фалеса, Пифагора, Гиппократа, Эвдокса, Евклида, Архимеда, Аполлония и ряда других греческих учёных превратилась в науку *дедуктивную*, получающую свои результаты как логические выводы из немногих исходных предложений (аксиом), принимаемых — конечно, на основании опыта — за истинные. Вершины своего расцвета греческая математика достигла в работах Евклида и Аполлония по геометрии, Диофанта по арифметике и алгебре, Птолемея по тригонометрии, Архимеда по геометрии и механике. Весьма многие блестящие достижения греческой математики не потеряли своего значения до настоящего времени, но были и недостатки, обусловленные в конечном счёте особенностями рабовладельческого общества, существенно тормозившие дальнейшие успехи. Прежде всего это был отрыв теории от практики, убеждение, что истинная наука не должна интересоваться жизненными потребностями людей, что применять науку на практике — значит унижать её. Господствовала идеалистическая философская школа Платона, установившая в математике ряд запретов и ограничений, из которых некоторые сохранили своё отрицательное значение до настоящего времени (например, искусственное ограничение циркулем и линейкой при геометрических построениях). Лишь немногие учёные, как Демокрит, Архимед и некоторые другие, правильно рассматривали взаимоотношение теории и практики, опыта и логической дедукции. Инженерная деятельность, получившая невиданный до того времени размах в Римской империи, использовала греческую математику далеко не полностью. Так, крупнейший римский архитектор Витрувий, живший в I в. до н. э., брал отношение длины окружности к диаметру равным $3\frac{1}{8}$, хотя ещё за два столетия до него Архимед дал более точное и не менее удобное значение этого отношения $\left(3\frac{1}{7}\right)$.

Одновременно с греческой и в основном независимо от неё развивалась индусская математическая наука. В Индии не было характерного для греческой математики отрыва теории от практики, логики от опыта, и хотя индусская математика далеко не достигла того уровня, каким отличалась математика греков, она создала много ценного, прочно вошедшего в мировую науку и сохранившегося до нашего времени. Сюда относится общепринятая десятичная система счисления с основанной на ней техникой арифметических действий, разработка правил над отрицательными числами и радикалами, правила решения общих уравнений 1-й и 2-й степени, введение синуса и т. д.

Наследниками как греческой, так и индусской математической культуры стали народы, объединённые в VII в. н. э. арабским халифатом. Среди них чрезвычайно важную роль в истории культуры сыграли народы, населяющие Среднюю Азию и Закавказье (хорезмийцы, узбеки, таджики, азербайджанцы и др.) и ныне входящие в СССР. Научные работы писались тогда на арабском языке, который был международным языком стран Ближнего и Среднего Востока. Это и послужило поводом называть «арабами» всех учёных этих стран. Они сохранили и существенно пополнили греческую и индусскую математику в течение средневековья, когда европейская наука после распространения враждебного ей христианства переживала длительный период упадка. Начиная с VIII в. н. э. на арабский язык переводятся сочинения индусских и греческих математиков, и в дальнейшем европейцы ознакомились со многими такими работами только через арабские переводы.

К важнейшим из оригинальных работ этого времени принадлежат сочинения знаменитого хорезмского математика IX в. Магомета-ибн-Мусы-аль-Ховарезми (по другому начертанию Мухаммед-бен-Муса аль-Хорезми), т. е. Магомета сына Мусы из Хорезма.

От его работы «Альджебр альмукабала» ведёт начало самое название науки алгебры. Искажённое в латинском переводе прозвище Альховарезми превратилось в слово алгорифм, обозначающее совокупность математических операций, при помощи которых решается данная общая задача.

Лишь в недавнее время стали известны замечательные достижения таджикского математика XV в. Гияс-эддина, открывшего и систематически применявшего десятичные дроби за 150 лет до того, как к ним пришли в Западной Европе; он первым, задолго до Ньютона, дал формулу бинома для любого натурального показателя [I, 59]. Отметим ещё азербайджанского математика XIII в. Насир-эддина Туси, много сделавшего для геометрии и тригонометрии.

Время с XII по XV в. является периодом освоения Европой древней математической науки. Этого требовали и развивающиеся торговые операции крупного масштаба, связанные с денежными расчётами, постройкой кораблей, вождением их через моря, а потом и океаны, вообще потребности богатевшей буржуазии, особенно итальянской. Наряду с переводами математических сочинений с арабского и греческого на латинский язык, интернациональный язык науки того времени, появилось и несколько оригинальных математических сочинений, имевших преимущественно характер учебников. Лучшими из них были книги Леонардо Пизанского (Фибоначчи), опубликованные в начале XIII в., а именно: «Книга об абаке» и «Практика геометрии».

В конце XV в. было изобретено книгопечатание, существенно ускорившее развитие математики и науки вообще. В XVI в. было сделано несколько крупных математических открытий: найдено решение уравнений 3-й и 4-й степени в радикалах, установлены методы приближённого вычисления действительных корней уравнений любой степени с численными коэффициентами, сделаны первые шаги по введению комплексных чисел, достигнуты большие успехи в деле создания алгебраической символики и т. д.

Древнейшее дошедшее до нас русское математическое сочинение написано в 1134 г. Это «Кирика диакона и доместика Новгородского Антониева монастыря учение им же ведати человеку числа всех лет». Оно посвящено преимущественно различным расчётам, относящимся к календарю, в частности к определению сроков религиозных праздников. По ряду других источников («Русская Правда» Ярослава Мудрого, летописи, международные договоры, данные археологии) можно заключить, что общий уровень математических познаний русских людей XII — XVI вв. был не ниже, чем в Западной Европе того же времени, несмотря на татарское иго, долго тормозившее дальнейшее развитие русской культуры вообще.

Первый основной этап развития мировой математической науки имеет для учителя математики в средней школе большой интерес, так как здесь дело идёт преимущественно об элементах математики, о той базе всего дальнейшего развития математики, которая под названием «элементарная математика» является объектом изучения в школе (начальной и средней). Читателю, желающему подробнее ознакомиться с историей математики на этом и следующем этапах, рекомендуется обратиться к упомянутой статье академика А. Н. Колмогорова и к специальной литературе по истории математики, указанной в конце настоящей первой части.

§ 2. Второй основной этап развития математики: математика как наука об изменении величин и о геометрических преобразованиях.

Научное творчество в области элементарной математики продолжалось и после XVI в. Достаточно напомнить открытие логарифмов, доведение до современного вида школьной алгебры и тригонометрии, работу над геометрической системой Евклида. Но господствующую линию развития математики в XVII и XVIII вв., а также в первой половине XIX в. определяют две новые основные идеи: движение и изменение. «...вся природа,— говорит Ф. Энгельс,— начиная от мельчайших частиц её до величайших тел, начиная от песчинки и кончая солнцем, начиная от протиста и кончая человеком, находится в вечном возникновении и уничтожении, в непрерывном течении, в неустанном движении и изменении» (К. Маркс и Ф. Энгельс, т. XIV, стр. 484). Но математика первого этапа, занимавшаяся числами, величинами и фигурами, брала лишь отдельные моменты существования тех или других вещей, лишь несовершенно отображала количественные отношения и пространственные формы действительности, представляла собой нечто вроде моментального фотоснимка с этих текущих, движущихся отношений и форм. В связи с развитием производительных сил и общественных отношений, вызвавшим бурный рост естественных наук, в XVII в. основным объектом изучения стали зависимости между переменными величинами — от изучения чисел наука перешла к изучению функций.

«Изучение переменных величин и функциональных зависимостей приводит далее к основным понятиям математического анализа, вводящим в математику в явном виде идею бесконечного,— к понятиям предела, производной, дифференциала и интеграла. Создаётся анализ бесконечно малых, в первую очередь в виде дифференциального и интегрального исчислений, позволяющий связывать конечные изменения переменных величин с их поведением в непосредственной близости отдельных принимаемых ими значений. Основные законы механики и физики записываются в форме дифференциальных уравнений, и интегрирование этих уравнений выдвигается в виде одной из важнейших задач математики... Таким образом, рядом с уравнениями, в которых неизвестными являются числа, появляются уравнения, в которых неизвестны и подлежат определению функции. Предмет изучения геометрии также существенно расширяется с проникновением в геометрию идей движения и преобразования фигур. Одно и то же движение и одно и то же преобразование может перемещать или преобразовывать самые различные фигуры. Поэтому геометрия начинает изучать движение и преобразования сами по себе» (академик А. Н. Колмогоров, статья в БСЭ, т. 38, стр. 368—369).

Принципиальную важность перехода математики от первого ко второму основному её этапу, от изучения отдельных моментов существования вещей к изучению процессов их изменения и развития, хорошо характеризуют следующие слова Ф. Энгельса: «Поворотным пунктом в математике была декартова *переменная величина*. Благодаря этому в математику вошли *движение* и *диалектика* и благодаря этому же стало *немедленно необходимым дифференциальное* и *интегральное исчисление*, которое тотчас и возникает и которое было в общем и целом завершено, а не изобретено, Ньютоном и Лейбницем» («Диалектика природы», 1948, стр. 208).

XVII и XVIII вв.— период величайших завоеваний математической науки на этом новом этапе её развития, связанный с именами Декарта, Ферма, Ньютона, Лейбница, Эйлера, Лагранжа, Лапласа и ряда других исследователей. Эти завоевания были подготовлены всем предшествующим развитием математики и обусловлены теми требованиями со стороны естествознания (астрономии, механики, физики) и техники (применения машин), какие были поставлены перед математикой XVII в. в связи с ростом буржуазного общества и развитием капитализма, имевшим тогда прогрессивный характер. «Авторы XVII в. понимают и любят подчёркивать большое практическое значение математики. XVII век был эпохой, когда рост буржуазного общества позволил ему выдвинуть перед наукой задачи на несколько веков вперёд с полным сознанием их практической ценности. Опираясь на свою тесную связь с математическим естествознанием, математика XVII в. смогла подняться на новый этап диалектического развития. Новые понятия, не укладывающиеся в старые формально-логические категории математики, получили своё первое оправдание в соответствующих соотношениях действительного мира. Так, например, реальность понятия производной вытекала из реальности понятия скорости в механике. Поэтому вопрос заключался не в том, можно ли логически оправдать это понятие, а в том лишь, как это сделать» (БСЭ, т. 38, стр. 370).

Понятие функции, являясь основным понятием математики на рассматриваемом этапе, полностью сохранило своё первостепенное значение и до настоящего времени, но за истекшее время оно существенно эволюционировало. Первоначально функцию рассматривали как переменную величину, значения которой определяются в зависимости от выбираемых по произволу значений другой переменной (независимой переменной, или аргумента) по некоторой формуле, называемой аналитическим выражением этой функции. Так, Л. Эйлер в своём «Введении в анализ» говорит: «Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого переменного количества и чисел или постоянных количеств» (перевод с латинского Е. Л. Пацановского, ОНТИ, 1936, стр. 30). Дальнейшее развитие математики привело к значительно более общему пониманию функции, основанному на понятиях множества, элемента множества, соответствия элементов двух множеств: если каждому элементу x множества M поставлен в соответствие некоторый элемент y множества N, то говорят, что на множестве M задана однозначная функция, и пишут $y = f(x)$. При этом элементы M называются значениями аргумента, а элементы N — значениями функции. Элементами множеств M и N могут быть объекты любой природы, но наиболее важен тот случай, когда это — числа. Если это не числа, а точки, то мы имеем простейший случай геометрического преобразования (точечное преобразование). Примером последнего может служить изображение на чертеже, т. е. на куске плоскости, какого-нибудь сооружения (здания, машины): каждой точке сооружения соответствует получаемая по определённому закону, различному для различных методов изображения определённая, точка чертежа.

Развитие математики в России в XVII и XVIII вв. характеризуется следующими фактами. Появляется много рукописей математического содержания, посвящённых частью арифметике, частью геометрии и её приложениям в землемерии. Учреждаются школы: «Математических и навигацких, т. е. мореходно-хитростных наук школа» в Москве, переведённая в 1715 г. в Петербург и преобразованная в Морскую академию («Академию Морской Гвардии»), «цифирные школы» в разных городах, «гарнизонные» и другие военные школы. Появляется замечательное руководство элементарной математики, составленное Л. Ф. Магницким и вышедшее в 1703 г. под названием «Арифметика»; наряду с арифметикой оно содержало начатки алгебры, геометрии и тригонометрии. В 1724 г. была основана Петербургская академия наук, в которой с первых же лет работали крупнейшие математики того времени: братья Николай и Даниил Бернулли, Христиан Гольдбах, а с 1727 г. знаменитый Леонард Эйлер, проведший в Петербурге в общей сложности 30 лет своей жизни и опубликовавший большую часть своих работ в изданиях Академии (473 мемуара). В 1755 г. заботами величайшего русского учёного Михаила Васильевича Ломоносова был основан первый русский университет (в Москве). Появились многочисленные русские переводы лучших иностранных учебников математики, появился и ряд оригинальных учебников арифметики, алгебры, геометрии, тригонометрии, анализа, не уступавших по научному уровню лучшим западноевропейским учебникам того времени. Всего за первую половину XVIII в. на русском языке вышло 30 учебников, посвящённых математике целиком или имеющих специальные математические разделы, а за вторую половину этого века таких книг вышло уже 98 (см. статью А. П. Юшкевича «Математика и её преподавание в России в XVIII—XIX вв.» в журнале «Математика в школе» за 1947—1948 гг.).

Если содержание математической науки на первом основном этапе её развития можно кратко, хотя и не совсем точно, охарактеризовать термином «элементарная математика», которым обычно обозначают весь материал, изучаемый в начальной и средней школе, то математику второго основного этапа можно назвать (тоже не вполне точно) «классической высшей математикой». Именно ей посвящены в основных своих частях курсы высшей алгебры, математического анализа, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии, изучаемые на 1-м и 2-м годах обучения в пединститутах.

До сравнительно недавнего времени изучение математики в средней школе не выходило сколько-нибудь существенно за рамки того, что математическая наука установила до начала XVII в., а в высшей школе — за рамки того, что вошло в неё до середины XIX в. В настоящее время всеми передовыми работниками в области преподавания математики общепризнано, что основное понятие математики XVII—XVIII вв., а именно понятие функции, должно прочно войти в круг вопросов, изучаемых в средней школе. Высшая же школа должна знакомить будущих учителей математики и с важнейшими завоеваниями математической науки на третьем, современном нам основном этапе её развития, к рассмотрению которого и переходим.

§ 3. Третий основной этап развития математики: математика как наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира во всей их общности.

С XIX в. до наших дней продолжается интенсивное дальнейшее развитие классической высшей математики.

В теснейшей связи со многими блестящими достижениями на старых путях развития математики перед математикой открылись новые горизонты: оказалось, что математика переросла прежние рамки, ограничивающие её изучением чисел, величин и процессов их изменения, геометрических фигур и их преобразований, что она является наукой о более общих количественных отношениях, для которых числа и величины оказываются лишь весьма частными случаями, и о более общих пространственных формах, частный случай которых представляют обычные геометрические образы пространства одного, двух, трёх измерений.

Поясним это обстоятельство, имеющее первостепенное значение для правильного понимания современной математики, двумя примерами.

Изучая в арифметике и в алгебре разного рода числа (целые, рациональные, действительные, комплексные, гиперкомплексные), мы имеем дело со множествами, для элементов которых установлены некоторые операции (сложение, умножение и др.), обладающие определёнными свойствами. Оказалось, что во многих вопросах математики, механики и физики мы встречаемся со множествами, элементами которых являются объекты иной природы (например, подстановки в алгебре, движения и преобразования в геометрии и т. п.), для которых существует некоторая операция, позволяющая по любым двум элементам данного множества однозначно определять третий его элемент. Операция эта имеет черты сходства с умножением (или сложением) чисел, а именно: если элементы обозначать буквами A, B, C,..., а результат операции, применённой к любым двум элементам A и B, через AB, то основные свойства операции выражаются следующим образом: 1) $(AB)C = A(BC)$; 2) существует элемент E такой, что $AE = A$, каков бы ни был элемент A; 3) для каждого элемента A существует обратный элемент A^{-1} такой, что $AA^{-1} = E$. Каждое множество элементов, для которых существует подобная операция, называется *группой*. Теория групп, созданная сначала для нужд алгебры, скоро нашла применение в самых разнообразных отделах математики и естествознания (геометрия, анализ, физика). Таким образом, в теории групп рассматриваются с единой точки зрения количественные и пространственные отношения объектов весьма разнообразной природы (числа, функции, движения, преобразования), лишь бы только для них имела смысл операция, удовлетворяющая описанным выше требованиям.

В качестве другого примера следует указать на переворот в науке, вызванный открытиями гениального русского математика Н. И. Лобачевского, установившего, что наряду с геометрией Евклида существуют ещё и другие геометрии, отличающиеся от евклидовой и вместе с тем изучающие пространственные отношения реального мира в такой же мере, как и евклидова геометрия. В исследованиях Лобачевского, коренится основная для всего дальнейшего развития математики идея о различных «пространствах» как объектах математического исследования. В наиболее общем виде понятие «пространства» изучается теперь в топологии, под именем *топологического* пространства. Так называется любое множество, для элементов которого установлено понятие окрестности, имеющее черты сходства с окрестностями точек на плоскости или в обычном пространстве (евклидовом), а именно: окрестностями данного элемента должны быть некоторые совокупности элементов данного множества, обладающие следующими свойствами: 1) окрестность данного элемента a содержит элемент a; 2) в каждой из двух любых окрестностей одного и того же элемента a содержится некоторая третья окрестность того же элемента; 3) если элемент b содержится в данной окрестности элемента a, то в той же окрестности содержится и некоторая окрестность b.

Элементы топологического пространства называются точками. Созданное сначала в интересах геометрии понятие «пространства» приобрело чрезвычайно важное значение в других отделах математики и естествознания (анализ, физика и механика).

Третий основной этап развития математики столь богат крупнейшими открытиями во всех её областях, что мы не можем в рамках этой книги даже пытаться охарактеризовать их хотя бы в самом сжатом виде. Приведём лишь некоторые имена русских дореволюционных и советских математиков.

Кроме уже упомянутого Н. И. Лобачевского, назовём ещё, ограничиваясь крупнейшими деятелями, П. Л. Чебышева (1821—1894), прославившегося своими исследованиями по анализу (теория наилучшего приближения), теории чисел (закон распределения простых чисел) и теории вероятностей; С. В. Ковалевскую (1850—1891), которая, по общему признанию, является крупнейшим математиком среди женщин всего мира; А. М. Ляпунова (1857—1918), блестяще разработавшего труднейшие проблемы современной механики — теорию устойчивости движения и теорию фигур равновесия вращающихся жидких тел; Н. Е. Жуковского (1847—1921), основоположника современной аэромеханики и создателя школы советских авиаконструкторов; Героя Социалистического Труда академика А. Н. Крылова (1863—1945), с исключительным успехом разработавшего ряд вопросов математики, имеющих первостепенное значение для кораблестроения; С. А. Чаплыгина (1870—1942), продолжавшего и развивавшего дело Н. Е. Жуковского; Н. Н. Лузина (1883—1950), — основателя теоретико-множественной московской школы.

Недостаток места не позволяет остановиться на крупнейших достижениях ныне здравствующих советских математиков, в первую очередь И. М. Виноградова, С. Н. Бернштейна, А. Н. Колмогорова, П. С. Александрова, И. Г. Петровского, М. В. Келдыша, М. А. Лаврентьева, Н. И. Мусхелишвили и др.

Для большинства исследований выдающихся русских математиков характерна глубина и смелость творческой мысли, соединённая с проникновенным пониманием потребностей практики. Роль сближения теории и практики в математическом творчестве прекрасно выражена П. Л. Чебышевым в его знаменитой речи «Черчение географических карт» (1856). «Сближение теории с практикой даёт самые благотворные результаты, и не одна только практика от этого выигрывает; сами науки развиваются под влиянием её; она открывает им новые предметы для исследования, или новые стороны в предметах, давно известных. Несмотря на ту высокую степень развития, до которой доведены математические науки трудами великих геометров трёх последних столетий, практика обнаруживает ясно неполноту их во многих отношениях; она предлагает вопросы, существенно новые для науки, и таким образом вызывает на изыскание совершенно новых метод. Если теория много выигрывает от новых приложений старой методы или от новых развитий её, то она ещё более приобретает открытием новых метод, и в этом случае наука находит себе верного руководителя в практике».

§ 4. Математика и другие науки. Приложения математики. Идеализм в математике.

Все науки, изучая различные стороны действительности, имеют в большей или меньшей степени дело с количественными отношениями и пространственными формами, и используют в силу этого математику. «Математический метод в применении к изучению того или иного специального круга явлений (будь то физических, биологических или социальных) состоит... в выделении формы изучаемых явлений и исследований этой формы в чистом виде» (А. Н. Колмогоров). Например, изучая колебательное движение в самых различных случаях (колебания груза, подвешенного на пружине, или колебания уровня жидкости, перетекающей из одного сосуда в другой по широкой короткой трубке, или колебания частиц воздуха, воспринимаемые ухом как звук, или колебания электрические, используемые в радио, и т. д.), физика выделяет простейшую их форму, а именно: гармонические колебания движущейся точки, вполне характеризуемые дифференциальным уравнением $\frac{d^2y}{dx^2}+k^2y=0$ и надлежащими начальными условиями. Изучение функции y, определяемой таким образом, даёт абстрактную математическую базу всех конкретных случаев колебательного движения (в первом приближении).

«Типичным примером полного господства математического метода является небесная механика, в частности учение о движении планет. Очень просто выражающийся математический закон всемирного тяготения почти полностью определяет собой изучаемый здесь круг явлений. За исключением теории движения луны, законно, в пределах доступной нам точности наблюдений, пренебрежение формой и размерами небесных тел — замена их «материальными точками». Но возникающая здесь задача движения материальных точек под действием сил тяготения уже в случае $n = 3$ представляет колоссальные трудности. Зато каждый результат, добытый математическим анализом принятой схемы явления, с огромной точностью осуществляется в действительности: логически очень простая схема хорошо отражает избранный круг явлений, и все трудности лежат в извлечении математических следствий из раз принятой схемы» (академик А. Н. Колмогоров, [I, 30a]).

Однако чем качественно сложнее изучамые явления, чем больше качественно новых сторон появляется при каждом новом шаге исследования, тем труднее выделить чистые количественные формы и отношения и тем менее существенными они являются, тем ограниченнее применение математического метода. В своём конспекте «Науки логики» Гегеля В. И. Ленин характеризует, как «меткое замечание», следующую мысль Гегеля: «Чем богаче определённостью, а тем самым и отношениями, становятся мысли, тем, с одной стороны, более запутанным, а с другой, более произвольным и лишённым смысла становится их изображение в таких формах, как числа» (Ленин, Философские тетради, конспект книги Гегеля «Наука логики», 1947, стр. 91). Поэтому, например, в науках биологических математический метод применяется несравненно меньше, чем в механике и физике, и ещё в меньшей степени в науках общественных.

Вопрос о приложениях математики имеет первостепенное значение для преподавания математики: нельзя плодотворно изучать математику, отрывая теорию от её практических приложений. Важно правильно понимать связь между «чистой» математической наукой и её приложениями. Первые шаги в развитии математики были сделаны, как уже не раз отмечалось выше, под давлением непосредственных требований житейской практики. В дальнейшем, по мере развития астрономии, механики, физики, техники, установилось деятельное и в высшей степени плодотворное сотрудничество между этими науками и математикой. Математика полнее, точнее, глубже разрабатывала свои методы, находившие себе самое широкое применение в других науках, а эти последние, в свою очередь, выдвигали новые математические проблемы, нередко существенно двигавшие вперёд математику.

Здесь необходимо остановиться на вопросе о том, как сами математики в различные эпохи и с различных идеологических позиций относились к вопросу об отношениях своей науки к познанию действительности.

Единственно научный взгляд на этот вопрос принадлежит советской науке, исходящей из общих принципов диалектического материализма, разработанных Марксом, Энгельсом, Лениным, Сталиным.

В его основе лежит фундаментальное положение философского материализма, утверждающее, что «...материя, природа, бытие представляет объективную реальность, существующую вне и независимо от сознания, что материя первична, так как она является источником ощущений, представлений, сознания, а сознание вторично, производно, так как оно является отображением материи, отображением бытия...» («История Всесоюзной Коммунистической партии (большевиков). Краткий курс», 1945, стр. 106—107). Математика, как и всякая наука, имеет предметом изучения объективную реальность. Её отличие от других наук, её специфика, заключается в том, что, как уже говорилось выше, изучая объективную реальность, математика абстрагируется, отвлекается, от всего того, что не относится к наиболее общим сторонам действительного мира: его количественным и пространственным формам и отношениям. Такая крайняя степень абстракции не представляет собой порока математического метода, который следовало бы как-то исправлять. Напротив, именно в этой абстракции заключается основное условие существования и сила математической науки. Но абстрактный характер математической науки создаёт в иных головах иллюзию независимости математики от действительности. Со времён Платона идеалисты всех мастей, ведя борьбу с материализмом, пытались опираться на математику как на своего союзника. Идеалистические взгляды на математику чрезвычайно распространены в современной буржуазной науке. Автор недавнего обзора зарубежных исследований по основаниям математики прямо заявляет, что «в одном отношении они* согласны между собой — и это сейчас можно считать почти единодушным мнением всех математиков,— что положения чистой математики ничего не говорят о действительности...» (А. Гейтинг, Обзор исследований по основаниям математики. Перевод с немецкого А. П. Юшкевича, ОНТИ, 1936, стр. 84). Указанный автор ссылается при этом на авторитет известного французского математика и физика А. Пуанкаре, способствовавшего «обоснованию» указанного взгляда. Действительно, А. Пуанкаре, «крупный физик и мелкий философ», по выражению В. И. Ленина, имел в своё время большой успех своими популярно-философскими книгами: «Реакционнейшая идеалистическая философия с определённо фидеистическими выводами сразу ухватилась за его теорию» (В. И. Ленин, Материализм и эмпириокритицизм, 1948, стр. 273—274). Однако В. И. Ленин в своей знаменитой книге неопровержимо доказал, в какой мере мало оригинальными были философские взгляды А. Пуанкаре, повторявшего лишь зады идеалистической философии, плохо увязанные между собой. Следовательно, «философская база», лежащая в основе взглядов, формулированных Гейтингом, весьма и весьма мало почтенна.

Взглядам современных буржуазных эпигонов идеализма противостоят материалистические взгляды классиков науки. Галилей

* Буржуазные философы и математики.

в следующих образных выражениях утверждал объективную значимость математики: «философия* написана в грандиознейшей книге, которая всегда открыта для всех и каждого, — я говорю о вселенной, но не может понять её тот, кто раньше не научится понимать язык и знаки, которыми она написана. Написана же она на математическом языке и знаки её суть треугольники, круги и прочие математические фигуры».

Для Ньютона характерно утверждение об объективном существовании времени и пространства («абсолютное» время и «абсолютное» пространство), изучение которых есть задача математики и механики. Взгляды Эйлера с большой подробностью излагаются в его научно-популярном сочинении «Письма к одной немецкой принцессе о различных вопросах физики и философии». Он неоднократно подчёркивает, что «чувства представляют нам только объекты, действительно существующие вне нас». Правда, оспаривая идеалистов и «эгоистов» (по современной терминологии, солипсистов), Эйлер попутно нападает и на материалистов. Но это не мешает ему самому, в основных вопросах, стоять на почве материализма. Он говорит, что «душа** обнаруживает способность, называемую *абстракцией*, действующую, когда душа фиксирует внимание только на количестве или качестве объекта, которое отделяется ею от объекта и рассматривается, как если бы оно не было связано с объектом». Именно этим путём образуются *понятия* и, в частности, понятия числа и фигуры. В другом письме, посвящённом пространству, Эйлер пишет: «Известно, что пространство (протяжение) есть подлинный объект геометрии, где тела рассматриваются постольку, поскольку они протяжённы, абстрагируясь от непроницаемости и инерции...» Далее Эйлер замечает, что «имеются философы и их даже большинство в настоящее время, которые явно отрицают, что свойства, соответствующие пространству, вообще, т. е. в том виде, в котором их рассматривают в геометрии, имеют место в действительно существующих телах. Они говорят, что геометрическое пространство есть сущность, лишённая свойств, от которой ничего нельзя заключать о свойствах действительных вещей...» И далее Эйлер вступает в полемику с этими философами. Мы видим, что то, что современные буржуазные учёные выдают за последнюю новинку (см. выше высказывание Гейтинга), опровергалось ещё в XVIII в. Эйлером.

Ознакомившись с воззрениями знаменитого швейцарца, избравшего Россию своим вторым отечеством, мы обратимся далее к взглядам двух крупнейших русских математиков XIX в.— Лобачевского и Чебышева. Открытие Лобачевского нанесло смертельный удар кантианской философии, имевшей весьма большое хождение среди математиков. Кант, утверждая, что «*пространство не есть что-либо объективное* и реальное, ни субстанция, ни

* Имеется в виду механика, физика и астрономия.
** То-есть интеллект.

акциденция, ни отношение, но оно *субъективно* и идеально...» («О форме и принципах чувственного и умопостигаемого мира», 1770), добавлял: «Ведь если все свойства пространства только путём опыта заимствованы из внешних отношений, то... можно надеяться, что, как это бывает в эмпирических науках, некогда будет открыто пространство, обладающее другими изначальными свойствами...» Это соображение, приводимое Кантом как неотразимый аргумент, для нас звучит как пророчество гибели кантовской системы от руки Лобачевского. Изучение величественного научного наследства Лобачевского неопровержимо свидетельствует, что этот гениальный мыслитель вполне сознательно шёл на борьбу против кантианства. И в этом отношении, как и во многих других, он стоял неизмеримо выше тех западных учёных, как, например, Гельмгольца, которые, развивая дальше идеи, вызванные открытием неевклидовых геометрий, пытались в то же время подновить, подправить философию Канта*.

Мы приведём несколько высказываний Лобачевского, характеризующих его глубокие материалистические взгляды. «Всем известно, что в геометрии теория параллельных до сих пор оставалась несовершенной. Напрасное старание со времени Евклида, в продолжение двух тысяч лет, заставило меня подозревать, что в самых понятиях ещё не заключается той истины, которую хотели доказывать и которую проверить, подобно другим физическим законам, могут лишь опыты, каковы, например, астрономические наблюдения» («Новые начала геометрии»), и ещё:

«... не может быть никакого противоречия, когда мы допускаем, что некоторые силы в природе следуют одной, другие своей особой геометрии...»

Вся жизнь и деятельность другого русского гениального математика, П. Л. Чебышева, представляет целостный, чрезвычайно последовательный и глубокий ответ на вопрос об отношении математики к материальной действительности. Сам Чебышев, например, в следующих словах резюмирует свой отчёт о первой заграничной командировке: «Предметы наиболее важные исследованы мною с подробностью, как-то: устройство паровых машин различных систем, ход этих машин под влиянием различных обстоятельств, гидравлические колёса вообще и турбины в особенности, устройство ветряных мельниц по голландской системе, различные органы передачи движения, также различные производства, в особенности писчей бумаги, прядения льна и обработки железа. Кроме того, для меня весьма интересно было общее расположение различных частей фабрик, предмет весьма важный в практическом отношении». Таким образом, П. Л. Чебышев, посвятивший всю свою жизнь математике и только ей одной, и притом весьма абстрактным её частям, совершенно сознательно черпал математическое вдохновение

---

* Гельмгольц — один из родоначальников неокантианства — подчёркивал, что он не опровергает взгляды Канта на пространство, как на трансцендентальную форму воззрения.

в материальной действительности, в передовой практике его времени. Из этого же отчёта видно, как размышления над наивыгоднейшей формой ветряных мельниц, над наименьшим уклонением от прямолинейного движения, превращаемого в круговое движение в передаточных механизмах паровых машин, привели его к основным задачам теории наилучшего приближения, представляющей ныне одну из наиболее замечательных глав математического анализа. Выше мы уже цитировали глубокие мысли П. Л. Чебышева о взаимоотношении теории и практики, высказанные в речи «Черчение географических карт».

Ограничимся приведёнными цитатами, из которых вытекает, что взгляды современных буржуазных математиков, опирающихся на Пуанкаре (а также на Вейля, Брауэра и др.), представляют несомненный шаг назад по отношению к взглядам таких подлинных корифеев науки, как Эйлер, Лобачевский и Чебышев.

Математика была и остаётся могущественнейшим средством познания действительного мира, оказывающим величайшую помощь человеку на всех ступенях культуры, начиная от первобытного человека, например кочевника-скотовода, который, подсчитав число голов в своём стаде утром и вечером, убеждается, что столько-то голов исчезло и их надо искать, до современных учёных, предвычисляющих, например, все детали предстоящего солнечного затмения. Математики-идеалисты бессильны объяснить это могущество математики, и в этом одно из самых простых опровержение их измышлений.

§ 5. Математические понятия (определяемые и основные). Род и вид. Определения и описания. Классификация.

Первым основным требованием, которое предъявляется к изложению любой науки, является требование определённости (ясности, чёткости) всех тех понятий, с какими данная наука имеет дело: употребляя какой-либо специальный термин, выражающий некоторое новое, ранее не рассмотренное понятие, необходимо обеспечить правильное понимание этого термина, установить точный его смысл, раскрыть, как говорят, содержание соответствующего понятия.

Содержание подавляющего большинства математических понятий раскрывается через *определения*: впервые употребляя новый математический термин, мы обязаны определить его, т. е. разъяснить его смысл, пользуясь при этом так называемыми *первичными терминами*: «каждый», «всё» «существует», «нет», «и», «или», «если..., то», «если и только если» («тогда и только тогда») и т. д., а также теми математическими понятиями, смысл которых является ранее установленным. Например, определяя составное число как такое натуральное число, которое имеет по крайней мере один собственный делитель, мы устаналиваем понятие составного числа на основе понятий натурального числа и собственного делителя, предполагаемых известными.

Обычная форма определения — указание *рода и видового признака*, т. е. указание более общего понятия, частным случаем которого является определяемое, и какого-нибудь признака, отличающего новое понятие от всех других, объединяемых этим более общим. В приведённом примере с составным числом определение указывает род — натуральное число, и видовой признак — наличность по крайней мере одного собственного делителя. Словесная формулировка определения не всегда содержит явное указание на род и видовой признак, но анализ определения всегда позволяет их установить. Например, определяя ортогональную проекцию точки на ось как основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на ось, мы можем легко видеть, что здесь род — точка, видовой признак — связь с данной точкой, устанавливаемая указанным построением.

Вовсе не касаясь важного и интересного вопроса о том, как вырабатываются понятия на основе представлений, рассмотрим те требования, какие предъявляются к определениям.

Во-первых, определения не должны содержать ссылок на новые, ещё не определённые понятия. Нельзя допускать, чтобы при объяснении смысла непонятного термина употреблялись термины столь же или ещё более непонятные (obscurum per obscurius), т. е. тёмное через ещё более тёмное. Это, однако, отнюдь не исключает ссылок на основные понятия, содержание которых раскрывается иными путями и о которых речь будет ниже. Например, попытка определения угла как меры наклона одной прямой к другой ничего не даёт, так как понятие наклона требует, в свою очередь, определения и раскрывается только с помощью понятия угла: получается порочный круг в определении (circulus vitiosus). Другой пример порочного круга: на вопрос, что представляет собой столь употребительное в анализе число e — 2,7182818..., нельзя отвечать указанием на то, что это число e является основанием натуральных логарифмов, так как на законный и неизбежный вопрос о том, что же называется натуральными логарифмами, приходится отвечать, что это логарифмы, взятые по основанию e. Правильное определение числа e даётся формулой $e = \text{пред.}_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Чтобы сделать определение числа e как основания натуральных логарифмов законным, надо дать натуральному логарифму какое-либо другое определение, не зависящее от числа e, например, определяя $\ln x$ как $\int\limits_1^x \frac{dx}{x}$.

Во-вторых, определение должно быть соразмерным определяемому понятию, «адекватным» ему, не должно быть ни чрезмерно широким, ни слишком узким. Например, грубой ошибкой является определение иррационального числа как корня из рационального числа, при условии, что этот корень точно не извлекается:

существует бесконечное множество иррациональных чисел, которые не допускают представления в виде корней из рациональных чисел, как числа π, e, $\lg 2$ и т. д. Это определение недопустимо узко, оно не охватывает всех иррациональных чисел. Но неправильно и определение иррационального числа как бесконечной десятичной дроби: оно слишком широко, так как все периодические десятичные дроби бесконечны, но выражают рациональные числа. Из нескольких известных правильных определений иррационального числа в средней школе применяется его определение как бесконечной непериодической десятичной дроби.

В-третьих, определение не должно содержать указаний на такие свойства определяемых понятий, какие вытекают из определений. Хотя подобные указания могут и не нарушать адекватности определения, они излишни. Например, определяя параллелограм как плоский четырёхугольник с двумя парами соответственно равных и параллельных сторон, мы смешиваем здесь определение параллелограма с одной теоремой о нём: если четырёхугольник имеет две пары соответственно параллельных сторон, то эти стороны попарно равны, в чём легко убедиться, проводя диагональ и сравнивая два полученных треугольника. Следовательно, указание на равенство сторон надо исключить. Исключить надо и термин «плоский», так как любой четырёхугольник даже с одной парой параллельных сторон (трапеция) всегда плоский.

Одно и то же понятие часто допускает разные определения, так как любое характеристическое для рассматриваемых объектов свойство, т. е. свойство, имеющееся у них всех и только у них, может служить основой для определения. Так, возможно второе, тоже совершенно правильное определение параллелограма как плоского четырёхугольника с двумя парами соответственно равных и не пересекающихся сторон. Легко видеть, что пропуск указания на расположение в одной плоскости и на отсутствие пересечения здесь недопустим. Пользование различными определениями одного и того же понятия обязывает нас проверять их равносильность (эквивалентность): надо доказать, что всякий объект, удовлетворяющий первому определению, удовлетворяет и второму, и обратно. Например, если бы мы пожелали определить параллельные прямые как равноотстоящие, т. е. такие, что каждая точка одной имеет одно и то же расстояние до другой, что возможно, если предварительно доказать, что множество точек плоскости, отстоящих на одно и то же расстояние от данной прямой и расположенных по одну её сторону, есть прямая, то мы обязаны были бы доказать, что всякие две равноотстоящие прямые находятся в одной плоскости и не пересекаются, и обратно, что прямые, параллельные в смысле обычного определения, т. е. находящиеся в одной плоскости и не пересекающиеся, являются равноотстоящими. Без такого доказательства мы не имеем права, основываясь на одном определении, использовать выводы, полученные с помощью другого. Отметим, что два только что указанных определения параллельных равносильны лишь в геометрии Евклида. Как устанавливается в курсе «Оснований геометрии», в геометрии Лобачевского множество точек плоскости, равноотстоящих от данной прямой и расположенных по одну её сторону, образует не прямую, а кривую («гиперцикл»).

Установив точный смысл какого-нибудь термина, мы должны и в дальнейшем толковать его всегда в этом смысле. Этому отнюдь не противоречит то, что, поднимаясь на более высокую ступень, для которой предыдущая является лишь частным случаем, часто приходится обобщать многие прежние понятия и в связи с этим давать им новые определения, нередко сохраняя прежнее наименование понятия. Например, умножение натуральных чисел определяется как сложение равных слагаемых, но когда от изучения натуральных чисел мы переходим к изучению чисел рациональных, необходимо дать новое определение произведения, которое заключает в себе старое как частный случай.

Высказав какое-либо определение, надо установить, что объекты, ему удовлетворяющие, действительно существуют, что это определение не является пустым, бессодержательным. Так, определяя иррациональное число как бесконечную непериодическую десятичную дробь, мы обязаны показать, что такие дроби существуют. Устанавливая определение того или другого геометрического образа, надо оправдать это определение, доказывая реальность этого образа, что делается обычно через указание построения, к нему приводящего. Например, определяя известным образом правильный многоугольник и правильный многогранник, сейчас же рассматривают способы их построения, очень простые для многоугольника (через деление окружности на n равных частей) и значительно более сложные для многогранника.

Разумеется, предпочтительнее по ряду соображений обратный порядок: сперва обнаружить существование объектов, имеющих некоторые определённые свойства, показать важность их изучения, а затем дать этим объектам название и точное определение.

Всякое определение раскрывает содержание нового понятия, устанавливая его связь с понятиями, определёнными ранее. Но с чего-то надо начинать: дать определения всем понятиям какой бы то ни было науки невозможно. Отсюда необходимость выделения *основных* или *первоначальных понятий* данной науки, понятий, содержание которых раскрывается не через определения, сводящиеся к указанию рода и вида, а иными способами, из которых укажем три важнейших, а именно: описание, косвенное определение через аксиомы, косвенное определение через абстракцию. Так все попытки дать определение через указание рода и видового признака таким понятиям геометрии, как точка, прямая, плоскость и некоторые другие, являются несостоятельными. Оставаясь в рамках первого основного этапа развития математики, т. е. занимаясь в геометрии изучением фигур, мы устанавливаем точный общепринятый в науке смысл этих терминов, указывая объекты, более или менее близкие к этим (полученным в результате абстракции) точным геометрическим образам (остриё иглы, туго натянутая тонкая нить, спокойная поверхность жидкости в небольшом сосуде т. д.), и выясняя, что нужно делать с этими более или менее грубыми моделями, чтобы они всё лучше и лучше соответствовали этим образам (предельный переход). Для школьного курса математики описания такого рода имеют первостепенное значение. Лучше, если они являются *конструктивными*, т. е. если в них устанавливается способ получения соответствующих объектов. Ещё лучше, если учащиеся не только знакомятся с такими конструктивными описаниями, но и сами создают, руководствуясь ими, более или менее совершенные модели. Например, понятие плоскости может быть раскрыто через описание способа её получения посредством движения одной прямой (рейки) по двум другим неподвижным пересекающимся прямым (рейкам).

Несравненно меньшее значение для школы, но большее для науки, имеет косвенное определение основных понятий через аксиомы. Все теоремы геометрии выводятся здесь при этом логически из аксиом, а в аксиомах говорится лишь о немногих свойствах основных геометрических образов. Например, изучая точки и прямые, мы исходим из таких фактов, как возможность двух и только двух случаев взаимного расположения точки и прямой (точка либо лежит на прямой, «инцидентна» ей, либо не лежит на ней, ей «не инцидентна»), как существование одной и только одной прямой, инцидентной любым двум данным точкам, и т. д. Все эти факты формулированы в виде аксиом, которые в совокупности дают все нужные для построения геометрии свойства точек и прямых, не прибегая к прямому определению этих понятий. В аксиомах ничего не говорится о таких, казалось бы, весьма существенных вещах, как толщина прямой, свойство прямолинейного отрезка быть кратчайшим путём, соединяющим его концы, и о многих других свойствах, имеющих первостепенное значение для нашего наглядного представления о геометрических образах. Отсюда неизбежен вывод, что основные понятия, с которыми имеет дело данная математическая дисциплина, относятся к любым объектам, удовлетворяющим данным аксиомам, независимо от конкретных особенностей этих объектов. Указанный способ раскрытия содержания основных понятий, чрезвычайно расширяющий поле применения каждой математической дисциплины, не применим в средней школе в сколько-нибудь последовательном и полном виде.

Так же велико для науки значение определений через абстракцию, устанавливающих содержание нового понятия как того общего, что имеют объекты самой разнообразной природы, объединяемые в один класс по какому-либо признаку. Отвлекаясь (абстрагируясь) от всех свойств этих объектов, отличающих их друг от друга, мы приходим в конце концов к свойству, общему им всем (это свойство есть принадлежность к данному классу), что и является содержанием соответствующего понятия. Так, любое натуральное число можно рассматривать как выражение того общего, что имеют все эквивалентные (т. е. допускающие хотя бы одним способом взаимно-однозначное соответствие элементов) конечные множества. Но следует заметить, что понятие натурального числа формируется у всякого нормального ребёнка ещё в дошкольном возрасте, и средняя школа может считать, что каждый учащийся уже владеет этим понятием. Достаточно сказать чтобы внести ясность в употребление термина, что натуральными числами называются числа 1, 2, 3, 4,..., ряд которых можно продолжать неограниченно. Вообще, определения через абстракцию служат для раскрытия содержания самых общих основных понятий, связанных с углублённым их изучением, и в средней школе к ним не приходится прибегать.

Вопрос об определяемых и основных понятиях решается по-разному в зависимости от условий и целей научного или учебного изложения. Например, при научном изложении элементарной геометрии понятия «внутри», «вне» определяются, но в средней школе эти определения не даются; считается, что каждый имеет ясное представление о смысле этих терминов, в случае необходимости обращаются к показу на примерах. Дать эти определения нетрудно; по крайней мере в таких простейших случаях, как для окружности, треугольника, выпуклого многоугольника, но надобности в них в средней школе нет. Всё значение этих и подобных определений заключается в уменьшении числа основных понятий, определяемых косвенно через аксиомы, и для начинающих изучать математику их рассмотрение непосильно; здесь совершенно достаточно соответствующих описаний.

Переходим к вопросу о *классификации*. Как при изложении математической науки, так и во многих случаях практического её применения приходится производить *деление* понятия: всю совокупность (всё множество) вещей, охватываемых данным понятием, приходится подразделять (классифицировать) на два или более классов. Классификация, или, как её ещё называют, «дизъюнкция», должна быть полной, исчерпывающей: каждый рассматриваемый объект должен попасть в один и только один из классов. Например, совокупность всех натуральных чисел можно подразделить на множество чисел простых, каждое из которых имеет два и только два делителя, и на множество чисел составных, каждое из которых имеет по крайней мере три делителя. Эта классификация будет, однако, неполной, не охватывающей всего множества натуральных чисел, если мы забудем про число 1, имеющее лишь одного делителя и не являющееся поэтому ни простым, ни составным. Полным будет подразделение натуральных чисел по числу делителей на три класса: числа простые, числа составные, единица.

Разумеется, наряду с этой классификацией натуральных чисел возможны и многие другие логически правильные их классификации. Так, в теории чисел часто применяется классификация натуральных чисел по остаткам от деления на некоторое определённое число — модуль. Например, по модулю 5 все натуральные числа распадаются на 5 классов, выражаемых формулами $5a$, $5a+1$, $5a+2$, $5a+3$, $5a+4$, где a — любое целое неотрицательное число.

Требование полноты будет также нарушено, если будем классифицировать треугольники на прямоугольные и равнобедренные, так как при этом косоугольные разносторонние треугольники не попадут ни в один из классов, а каждый треугольник со сторонами a, a, $a\sqrt{2}$ попадёт в оба эти класса. Нельзя классифицировать действительные числа на целые и рациональные, так как всякое целое число является в то же время рациональным, а кроме того, существуют действительные иррациональные числа. Очень часто производится неправильное противопоставление действительных чисел комплексным. Множество комплексных чисел, т. е. чисел вида $a+bi$, где a и b — любые действительные числа, а i — мнимая единица, распадается на два класса, а именно: на числа действительные, или вещественные (при $b=0$), и числа мнимые (при $b\neq 0$).

Поэтому надо говорить не о действительных и комплексных числах, а о комплексных действительных и о комплексных мнимых числах.

Решение многих математических задач требует умения классифицировать все случаи, какие могут представиться. Например, занимаясь построением треугольника ABC по данному его основанию AB, высоте h_a и углу при вершине C, равному α $(0<\alpha<180°)$, мы должны различать три следущих возможных и единственно возможных случая: круговой сегмент, построенный на отрезке AB и вмещающий вписанный угол α, может иметь стрелку, меньшую h_a, равную h_a, бо́льшую h_a. В первом случае решений нет; во втором имеется одно решение; в третьем — два решения, симметричные относительно срединного перпендикуляра отрезка AB.

Классификация должна проводиться по существенному для данного вопроса признаку. Например, в приведённом примере было бы бесполезно проводить классификацию по величине угла α. Но если бы, однако, угол α предполагался в этом примере заданным произвольно, нам пришлось бы различать два случая: первый, когда $0<\alpha<180°$ и когда, следовательно, треугольники с углом α существуют, и второй, когда $\alpha \leq 0$ или $\alpha \geq 180°$ и когда таких треугольников вообще нет; в первом случае мы имеем три указанных выше «подслучая».

Трудности классификации растут при увеличении числа признаков, по которым она проводится. Так, если по признаку I мы имеем a классов, а по признаку II то же множество объектов распадается на b классов, то, принимая во внимание оба признака одновременно, мы получим всего, вообще говоря, ab классов (возможно снижение этого числа в отдельных случаях). Так, классифицируя треугольники по величине углов на остроугольные (у которых все три угла острые), прямоугольные (у которых один из углов прямой) и тупоугольные (один из углов тупой), а по сравнительной величине сторон на равносторонние, равнобедренные и разносторонние (считая равнобедренным треугольник со сторонами a, a, b, если $a \neq b$), мы получим, принимая во внимание оба признака, всего $3 \cdot 3 = 9$ классов, но два из них оказываются пустыми, так как равносторонних прямоугольных и равносторонних тупоугольных треугольников не существует.

В случае такой более сложной классификации очень удобна «дихотомия», т. е. последовательное подразделение всего рассматриваемого множества на два класса, когда в один класс относят все объекты, имеющие некоторый признак, а во второй все остальные, и этот второй класс в дальнейшем снова подразделяют на два класса. Например, при исследовании всех возможных случаев, какие могут представиться при решении системы $ax + by = c$, $a_1x + b_1y = c_1$, когда приходится принимать во внимание различные значения определителей $D = ab_1 - ba_1, D_1 = cb_1 - bc_1, D_2 = ac_1 - ca_1$, коэффициентов a, b, a_1, b_1 и, наконец, значения свободных членов c и c_1, выгодно сперва взять случай, когда $D \neq 0$, и случай, когда $D = 0$. Констатируя, что при $D \neq 0$ система всегда имеет единственное решение, для случая $D=0$, проводим новую дихотомию: если при $D=0$ имеем $D_1 \neq 0$, или если $D = 0$, $D_1=0$, $D_2 \neq 0$, то система несовместна. Если же $D = 0$, $D_1 = 0$, $D_2 = 0$, проводим следующую дихотомию: различаем, во-первых, случай, когда хотя бы один из коэффициентов a, b, a_1, b_1 отличен от нуля и когда система сводится к одному уравнению и является неопределённой с одним свободным неизвестным (одно из неизвестных можно взять по произволу), и, во-вторых, случай, когда $a = b = a_1 = b_1 = 0$. Этот последний случай подвергается новой дихотомии: если $c \neq 0$ или $c = 0$, $c_1 \neq 0$, то система несовместна, а если $c = c_1 = 0$, то система неопределённа, имея два свободных неизвестных.

Искусство проводить классификацию весьма существенно и для усвоения теоретической стороны курса математики, и для успешного решения задач, когда приходится заниматься исследованием решения.

§ 6. Математические предложения (теоремы и аксиомы). Предложения обратные, противоположные, обратные противоположным. Условия необходимые и достаточные.

Располагая рядом понятий, наука устанавливает относительно них различные суждения, составляющие основное её содержание.

«Суждением называется мысль, которая утверждает или отрицает что-либо относительно предметов и их признаков. Так, например, в суждении «СССР есть Советское социалистическое государство рабочих и крестьян» мы утверждаем, что Советский Союз есть Советское социалистичекое государство рабочих и крестьян. В суждении «советские люди не хотят войны» мы отрицаем то, что советские люди стремятся к войне» (С. Н. Виноградов и А. Ф. Кузьмин, Логика. Учебник для средней школы, Учпедгиз, 1949, стр. 51).

Математические суждения обычно называются *предложениями*. Если истинность предложения допускается, но не доказывается на основании других предложений, его называют *аксиомой* (от греческого *αξιωμα* — признание, почёт, общепризнанное положение), или *постулатом* (от латинского «постуляре» — требовать; постулат — предложение, признание истинности которого требуется для проведения данного рассуждения). Если истинность данного предложения доказывается, т. е. устанавливается как логическое следствие других математических предложений, принимаемых за истинные, то его называют *теоремой* (греческое *θεωρέω* — созерцать, рассматривать). Теорему, легко доказываемую с помощью другой теоремы, называют её «следствием»; нередко следствие отмечает просто какой-либо частный случай соответствующей теоремы (например, из теоремы о том, что сумма внутренних углов любого треугольника равна двум прямым углам, вытекает следствие, что сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна прямому углу). Теорему, представляющую интерес только как ступень к доказательству какой-либо другой теоремы, называют «леммой» (буквально греческое слово λημμα обозначает взятку, прибыль).

Несмотря на самую разнообразную словесную форму математических предложений, их можно всегда привести к следующему стандартному виду: «Если некоторый элемент определённого множества имеет свойство A, то он имеет также свойсто B», или короче: «Если есть A, то есть и B». Здесь мы имеем две явно выраженные части: первую («если есть A»), называемую условием, и вторую («то есть и B») — заключение. Например, теорема о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника представляется в этой стандартной форме так: «Если два угла треугольника лежат против равных его сторон, то эти два угла равны». Нередко предложение содержит не одно, а два или более условий. Возьмём, например, теорему: «Если радиус окружности перпендикулярен к данной её хорде, то он делит эту хорду пополам». Здесь речь идёт о прямой, которая, во-первых, лежит в одной плоскости с данной окружностью, во-вторых, проходит через её центр, в-третьих, перпендикулярна к данной хорде. Налицо три условия, из которых первое на занятиях планиметрией можно только подразумевать, не формулируя его явно. Если предложение содержит не одно, а два или более заключений, его лучше рассматривать как сооветствующее число отдельных предложений, соединённых в одно. Так, теорема «Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, равен половине третьей стороны и параллелен ей» является соединением двух теорем с одним и тем же условием.

Для всякого предложения можно указать так называемое «обратное», получаемое в результате перестановки местами условия и заключения. Для предложения «Если есть A, то есть и B» обратным является предложение «Если есть B, то есть и A». Ясно, что обращение последнего предложения опять возвращает нас к первому: эти два предложения взаимно-обратны. Истинность какого-либо предложения ещё ничего не говорит об истинности или ложности обратного предложения. Для теоремы «Если два угла треугольника равны, то противолежащие им стороны тоже равны» имеет место обратная теорема, а именно: «Если две стороны треугольника равны, то противолежащие им углы тоже равны». Но для предложения «Если человек живёт в городе Калинине, то он живёт в Калининской области» обратное: («Если человек живёт в Калининской области, то он живёт в городе Калинине»), очевидно, неверно. Ввиду этого в каждом отдельном случае приходится выяснять, истинно ли обратное предложение или нет.

Всякое предложение, данное в утвердительной форме, можно представить в форме отрицательной: предложение «Если есть A, то есть и B» совершенно равносильно предложению «Если нет B, то нет и A». Действительно, если истинно первое, то истинно и второе: если нет B, то не может быть и A, так как существование A, согласно первому предложению, влечёт за собой существование B. С другой стороны, если истинно второе, то истинно и первое: раз есть A, то должно быть и B, так как отсутствие B, согласно второму предложению, влечёт за собой отсутствие A. Следовательно, эти два предложения или одновременно истинны, или одновременно ложны: это по существу не два разных предложения, а одно и то же предложение в двух разных формах. Для получения отрицательной формы любого предложения надо поставить отрицание как перед условием, так и перед заключением и поменять их местами. Возьмём, например, предложение: сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым. В стандартной форме оно читается так: если три угла являются внутренними углами треугольника, то их сумма равна двум прямым. Переводя его в отрицательную форму, получаем предложение: если сумма трёх углов не равна двум прямым, то эти три угла не являются внутренними углами треугольника.

Отрицая условие и заключение данного предложения, но не переставляя их, мы получаем новое предложение, называемое «противоположным» данному. Это противоположное предложение в некоторых случаях оказывается истинным, в некоторых — ложным. Так, для предложения «Если человек живёт в городе Калинине, он живёт в Калининской области» противоположное ложно («Если человек не живёт в городе Калинине, он не живёт в Калининской области»), а для предложения «Если сумма цифр натурального числа кратна 9, то и само число кратно 9» противоположное истинно («Если сумма цифр натурального числа не кратна 9, то и само число не кратно 9»).

Легко видеть, что предложение, противоположное данному, является не чем иным, как отрицательной формой предложения, обратного этому данному. Действительно, для предложения «Если есть A, то есть и B» обратным является предложение «Если есть B, то есть и A». Переводя его в отрицательную форму, т. е. отрицая условие и заключение и меняя их местами, приходим к предложению «Если нет A, то нет и B», т. е. к предложению, противоположному данному. Отсюда заключаем, что предложения противоположное и обратное либо одновременно истинны, либо одновременно ложны. Замечаем также, что данное предложение в отрицательной форме («Если нет B, то нет и A») можно рассматривать как предложение, противоположное обратному, так как оно получается в результате отрицания условия и заключения предложения «Если есть B, то есть и A, и с таким же правом как предложение, обратное противоположному, так как его можно получить, меняя местами условие и заключение в предложении «Если нет A, то нет и B». Таким образом, всего мы имеем четыре предложения:

I. Если есть A, то есть и B.

II. Если есть B, то есть и A (обратное для I).

III. Если нет A, то нет и B (противоположное для I).

IV. Если нет B, то нет и A (противоположное обратному для I или обратное противоположному для I).

По существу здесь не 4, а только 2 предложения, а именно: I и II. Предложение IV есть не что иное, как предложение I, приведённое в отрицательную форму, а предложение III не что иное, как предложение II в отрицательной форме.

В теснейшей связи с вопросом об истинности или ложности обратного предложения стоит вопрос об *условиях необходимых и достаточных*. Допустим, что мы выясняем, при каком условии U имеет место факт V. Если выполнение условия U обеспечивает наличие факта V, то говорят, что условие U *достаточно* для V. Если отсутствие условия U влечёт за собой отсутствие V, то говорят, что это условие U *необходимо* для V. Таким образом, истинность предложения «Если есть U, то есть и V» указывает на достаточность условия U для факта V, а истинность предложения «Если нет U, то нет и V», противоположного первому,— на необходимость этого условия. Но предложение, противоположное данному, равносильно, как мы видели, предложению, ему обратному (это то же обратное, представленное в отрицательной форме), а потому всякое достаточное условие совпадает с необходимым тогда и только тогда, когда для предложения, выражающего достаточность этого условия, истинно обратное. Подобным же образом убеждаемся, что всякое необходимое условие является вместе с тем и достаточным тогда и только тогда, когда для предложения, выражающего необходимость этого условия, истинно обратное.

Итак, приходится различать условия трёх видов: 1) условие достаточное, но не необходимое, когда предложение «Если есть U, то есть и V» истинно, а предложение «Если нет U, то нет и V» ложно; 2) условие необходимое, но не достаточное, когда предложение «Если нет U, то нет и V» истинно, а предложение «Если есть U, то есть и V» ложно; 3) условие достаточное и необходимое, когда оба эти предложения истинны. Так, например, достаточным условием равновеликости фигур является их равенство, но это условие не необходимо, так как две фигуры могут иметь одинаковую площадь и не будучи равными. Необходимым условием равенства двух треугольников является равенство одной из сторон первого и одной из сторон второго, но это условие ещё недостаточно. Условием делимости натурального числа, записанного по десятичной системе счисления, на 9 является кратность 9 суммы его цифр; это условие и необходимо и достаточно. Другой пример: для того чтобы корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, где p и q—действительные числа, были оба положительными, необходимы три условия, а именно: $p < 0$, $q > 0$, $p^2 - q \geqslant 0$; каждое из них необходимо, так как если нарушено хотя бы одно из них, оба корня положительными быть не могут, но ни одно из них, взятое в отдельности, ещё не достаточно; совокупность же этих трёх условий представляет собой условие достаточное.

§ 7. Индукция и дедукция. Интуиция. Аналогия. Анализ и синтез. Доказательство от противного. Доказательство по методу совершенной индукции.

На первых ступенях математического развития, как в жизни каждого отдельного человека, так и в жизни всего человечества, единственным источником познания математических истин являются наблюдение и опыт, объединяемые в одном общем понятии *индукции* (латинское «индукцио» — наведение); только путём наблюдения человек убеждается, например, в том, что два да три составляют пять, только на опыте узнаёт, что прямолинейный путь, ведущий из одной точки в другую, короче всякого другого, соединяющего эти две точки. Опыт, повторённый миллионы раз, выработал у людей особую способность мысленного наблюдения — так называемую *интуицию*; во многих простых случаях человек бывает в состоянии устанавливать математические истины, не обращаясь непосредственно к показаниям своих внешних чувств, а только на основании своих представлений о действительном положении вещей. Так, имея в одной плоскости прямую a и три точки A, B, C, из которых две первые лежат по одну сторону, а третья по другую сторону этой прямой, человек не нуждается ни в каких наблюдениях, основанных на использовании внешних чувств, чтобы с полной уверенностью утверждать, что отрезок AB прямой a не пересекает, а отрезки AC и BC её пересекают. Это заключение делается на основе интуиции, но никогда не следует упускать из виду, что все такие интуитивно постигаемые истины имеют в конечном счёте своим источником индукцию — наблюдение и опыт.

Необходимо различать индукцию *полную*, когда вывод делается на основании рассмотрения всех без исключения частных случаев и когда никакого сомнения в его истинности быть не может, и *неполную*, когда такого полного охвата нет и когда истинность вывода остаётся под вопросом. Например, установив, что $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $10 = 3 + 7 = 5 + 5$, $12 = 5 + 7$, $14 = 3 + 11 = 7 + 7$, $16 = 3 + 13 = 5 + 11$, $18 = 5 + 13 = 7 + 11$, $20 = 3 + 17 = 7 + 13$, мы утверждаем с полнейшей уверенностью, что всякое чётное число, большее 2 и не превосходящее 20, можно представить в виде суммы двух простых чисел по крайней мере одним способом. Здесь мы имеем полную индукцию. Но заключение, что любое чётное число, большее 2, обладает таким свойством, является, если ограничиваться указанными наблюдениями, лишь более или менее вероятной *гипотезой*. Здесь лишь *неполная* индукция, которая позволяет высказывать лишь догадки. Отметим, что вопрос о возможности представления любого чётного числа хотя бы одним способом в виде суммы двух простых чисел составляет содержание известной «проблемы Гольдбаха», поставленной свыше 200 лет назад, но не разрешённой до сегодня. Ближе других к её разрешению подошёл академик И. М. Виноградов, доказавший в 1937 г., что любое нечётное число, превосходящее некоторое определённое очень большое число, допускает представление в виде суммы трёх простых чисел. Отсюда следует, что любое чётное число, начиная с некоторого места, можно представить в виде суммы четырёх простых.

Метод индукции является первичным. Он наиболее доступен и понятен для начинающих изучать математику, какую бы её отрасль мы ни взяли. Этим методом можно подойти ко всем предложениям, изучаемым в средней школе, получая их как более или менее вероятные догадки, гипотезы, как истины, общность которых остаётся под вопросом. Так, проводя в треугольнике три медианы, ученик убеждается, что они пересекаются в одной или почти в одной точке, причём в последнем случае три точки пересечения тем ближе одна к другой, чем аккуратнее выполнен чертёж. Замечая, что это имеет место во всех треугольниках, какие он брал по произволу, ученик склонен «по аналогии» заключить, что так будет всегда, во всяком треугольнике. Но полной уверенности никакой индивидуальный опыт дать не может: догадка, гипотеза о том, что при идеально точном чертеже три медианы любого треугольника пересекаются в одной точке, ещё нуждается в дальнейшей проверке. Надо либо убедиться, что так будет не всегда, либо доказать, основываясь на ранее установленных истинах, что это обстоятельство при идеально точном чертеже всегда имеет место.

По мере накопления устанавливаемых индуктивным путём математических истин постепенно уясняются различные существующие между ними связи: если верны некоторые предложения, то не могут быть ложными некоторые другие, являющиеся выводами из них. Так, опираясь на то, что через каждые две точки проходит одна и только одна прямая, приходится признать, что не может существовать двух прямых, обладающих двумя точками пересечения. Если сумма внутренних углов любого треугольника равна двум прямым углам, то сумма внутренних углов любого выпуклого n-угольника равна $2d(n-2)$. Изучение подобных связей между различными предложениями даёт не только уверенность в истинности одних при условии истинности других, но и приводит к новым истинам, не требуя обращения к индукции. Так, зная, что сумма двух смежных углов равна двум прямым и что тому же равна сумма внутренних углов любого треугольника, мы легко заключаем, что сумма внешних его углов, получаемых при продолжении каждой его стороны в одном направлении, равна $2d\times\times 3-2d=4d$. Наряду с индукцией, появляется, таким образом, новый источник познания математических истин, называемый «дедукцией» (от латинского слова «дедукцио»— выведение). Рассужение, показывающее истинность какого-либо предложения при условии истинности некоторых других предложений, используемых в этом рассуждении, носит в математике название *дедуктивного доказательства*, или просто *доказательства*, а эти используемые предложения — *его предпосылками*.

Дедуктивное доказательство представляет бóльшие трудности для понимания, чем опытная проверка, но обладает двумя такими крупными достоинствами сравнительно с ней, что именно к нему сводится основное содержание каждой математической дисциплины: во-первых, дедукция позволяет делать точные заключения (в предположении, что таковы и предпосылки); во-вторых, её выводы являются общими, охватывающими всё множество возможных случаев, в то время как индукция говорит лишь о тех частных случаях, какие были рассмотрены.

Открытие новых математических истин идёт обычно смешанным индуктивно-дедуктивным путём с большим участием интуиции, позволяющей высказывать догадки (гипотезы), которые в дальнейшем проверяются либо на опыте, либо через рассуждение, и в зависимости от результатов проверки или отбрасываются как неверные, или сохраняются, получая уже более высокую, но далеко не всегда сразу полную меру достоверности. Так, желая выяснить, какие числа вида 2^x-1 являются простыми и какие составными, дают показателю x ряд последовательных натуральных значений и рассматривают получаемые в результате вычисления числа:

$x=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$2^x-1=$	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023

Легко замечаем, что все значения 2^x-1, соответствующие простым значениям x (2, 3, 5, 7), оказались — в пределах проделанного опыта — простыми, а составным (4, 6, 8, 9, 10) — составными. Дальнейшая проверка показывает, что первая естественно возникающая гипотеза, а именно, что всякое число вида 2^x-1 при простом показателе x является простым, неверна, так как уже при $x=$ $=11$ получается составное число $2^{11}-1=2047=23\cdot 89$; вторая же гипотеза, а именно, что всякое число этого вида при составном значении показателя x является составным, при показателях 12 и 14 оправдывается. Чтобы довести дело до конца, надо найти дедуктивное (логическое) доказательство истинности этой второй гипотезы, что нетрудно сделать, используя одно известное из курса алгебры X класса следствие из теоремы Безу: разность двух одинаковых степеней всегда делится на разность первых степеней тех же чисел. Действительно, если показатель x есть натуральное составное число, то можно положить $x=uv$, где u и v — натуральные числа, отличные от единицы, а потому $2^x-1=$ $=2^{uv}-1=(2^u)^v-1$ делится нацело на разность 2^u-1, которая является натуральным числом, не меньшим $2^2-1=3$, так как наименьшее возможное значение u есть 2. Теперь мы имеем уже теорему: «Всякое число вида 2^x-1, где показатель x — число составное, само является составным».

Вопрос же о том, какие числа вида 2^x-1 при x простом являются простыми и какие составными, до сих пор в общем виде не решён. Неизвестно даже, существует ли конечное или бесконечное число простых чисел этого вида («чисел Мерсенна»).

Строя гипотезы, человек руководствуется прежде всего *аналогией*, т. е. заключением по сходству: вполне естественно предположение, что при сходных условиях получаются одни и те же результаты. Но всякий результат порождается целой совокупностью условий, и при суждении по аналогии обращают внимание только на некоторые из них, поэтому суждения по аналогии никогда не бывают доказательными. На основании того, что пять дней подряд была хорошая погода, можно высказать догадку, что она будет хорошей и на шестой день, но, как известно, такая догадка часто оказывается неверной.

Дедуктивное доказательство любого предложения заключается в том, что устанавливаются связи между этим новым предложением и одним или несколькими ранее рассмотренными, истинность которых была или логически доказана (теоремы), или постулирована, т. е. принята без доказательства (аксиомы). Различают два метода логического доказательства: *анализ* и *синтез*. При анализе мы идём от неизвестного к известному, от искомого к данным, при синтезе — обратным путём, т. е. от известного к неизвестному, от данных к искомым. Положим, что мы подметили индуктивным путём, рассматривая ряд частных случаев, что среднее арифметическое двух любых неравных положительных чисел больше их среднего геометрического, т. е. что $\frac{1}{2}(a+b) > \sqrt{ab}$ при $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$. В поисках доказательства этого неравенства заменяем его последовательным рядом других, более простых, каждое из которых равносильно предыдущему, т е. связано с ним двусторонней связью: каждое последующее есть следствие предыдущего, и обратно: каждое предыдущее есть следствие последующего. Этот ряд неравенств заканчивается неравенством $(a - b)^2 > 0$, истинность которого усматривается непосредственно. Следовательно, истинны и все предшествующие неравенства, в том числе и первое, подлежащее доказательству. Это рассуждение, записанное ниже в левом столбце, представляет собой пример применения аналитического метода. Проводя его в обратном порядке, получаем синтетическое доказательство, записанное в правом столбце.

$\frac{1}{2}(a+b > \sqrt{ab}$ (?)	$(a-b)^2 > 0$
$(a+b) > 2\sqrt{ab}$ (?)	$a^2 - 2ab + b^2 > 0$
$(a+b)^2 > 4ab$ (?)	$a^2 + 2ab + b^2 > 4ab$
$a^2 + 2ab + b^2 > 4ab$ (?)	$(a+b)^2 > 4ab$
$a^2 - 2ab + b^2 > 0$ (?)	$a + b > 2\sqrt{ab}$
$(a-b)^2 > 0$	$\frac{1}{2}(a+b) > \sqrt{ab}$

Применяя аналитический метод, мы не утверждаем, что последовательно рассматриваемые вспомогательные промежуточные предложения истинны: устанавливается только их равносильность с доказываемым предложением. Об этом важном обстоятельстве в приведённой выше записи напоминают знаки вопроса, поставленные во всех строчках, кроме последней. Только дойдя до неё, мы получаем уверенность в правильности всех предшествующих. Отметим, что неравенства $(a+b)^2 > 4ab$ и $a + b > 2\sqrt{ab}$ равносильны только в случае положительных не равных друг другу чисел a и b и при условии, что рассматриваются только арифметические (положительные) значения квадратного корня.

Иначе обстоит дело при применении синтетического метода: правильно выбрав отправной пункт, истинность которого бесспорна, мы выводим из него ряд бесспорных же предложений, последним из которых и является то, которое мы хотим доказать.

Аналитический метод имеет преимущество большей естественности и преобладает в рассуждениях, когда надо установить новый, ещё неизвестный результат. Он применяется преимущественно в тех случаях, когда человек не знает истины, но только ищет её. Это метод, особенно пригодный для исследования. Синтетический метод производит впечатление большей стройности, законченности. Он применяется, когда человек знает истину и хочет показать её другим, хочет убедить в ней других. Это метод, особенно пригодный для доказательства. Чтобы его применить, надо правильно найти отправной пункт, надо как-то догадаться, с чего начать. Чаще всего, встречаясь с новым вопросом, ищут его решение аналитическим методом, а затем излагают найденное решение методом синтетическим.

Большое применение имеют в математике *доказательства от противного* (приведение к нелепости, reductio ad absurdum), когда обнаруживают ложность предложения, противоречащего доказываемому. Желая установить истинность предложения «Если есть A, то есть и B», допускают, что оно ложно и что истинно, следовательно, предложение «Если есть A, то B может и не быть», а затем устанавливают, что это допущение приводит к абсурду. Тогда из невозможности допущения отсутствия B при наличии A вытекает, что наличие A обусловливает наличие B и данное предложение доказано. Так, если предварительно установлено, что внешний угол любого треугольника больше каждого из внутренних, с ним не смежных, то теорема о параллельности двух прямых при равенстве двух внутренних накрест лежащих углов, получаемых в пересечении с третьей прямой, легко доказывается от противного: допустив, что эти две прямые пересекаются, мы должны признать, что они вместе с третьей прямой образуют треугольник, у которого есть внешний угол, равный одному из внутренних, с ним не смежных, что невозможно. Допущения о пересечении двух данных прямых, таким образом, делать нельзя; они никогда не пересекаются, а так как они лежат в одной плоскости, то они параллельны.

Отметим, что доказательство от противного основано на «законе исключённого третьего», гласящем, что при двух суждениях: «A есть B» и «A не есть B»—не может быть никакого третьего и что одно из двух суждений истинно, а другое ложно.

Тот метод индукции, о котором шла речь выше, нельзя смешивать с методом *совершенной индукции*, иначе называемым *математической индукцией*, представляющим собой важную разновидность дедуктивного метода. Основой метода совершенной индукции является аксиома («принцип совершенной индукции»): если некоторое множество M натуральных чисел содержит 1 и вместе с натуральным числом n содержит также и непосредственно следующее за ним натуральное число $n' = n + 1$, то это множество M есть множество всех натуральных чисел. В средней школе применение метода совершенной индукции обычно ограничивается доказательством формулы бинома Ньютона для любого натурального значения показателя n, когда сперва посредством простой индукции, т. е. путём простого рассмотрения формул:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a+b)^4 = (a+b)^3 \cdot (a+b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

и т. д., приходят к гипотезе, что $(a+b)^n = a^n + \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$, а затем, допустив справедливость этой формулы для какого-нибудь показателя n, доказывают её справедливость и для показателя $n' = n + 1$; так как при $n = 1$ доказываемая формула даёт $(a + b)^1 = a^1 + C_1^1 a^0 b^1 = a + b$ и, следовательно, оправдывается, то по принципу совершенной индукции заключаем, что она верна всегда. В этом примере множество M состоит из всех тех натуральных показателей степени, для которых справедлива формула бинома Ньютона.

Можно указать и много других возможных применений этого метода совершенной индукции, доступных учащимся средней школы.

Рассмотрим один из примеров. Полагая $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = S_n$, докажем, что $S_n = \frac{1}{6} n(n + 1)(2n + 1)$. При $n = 1$ эта формула даёт $S_1 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$, как и должно быть. Допустив, что она верна при некотором n, устанавливаем, что при $n' = n + 1$ она тоже верна: $S'_n = S_n + (n + 1)^2 = \frac{1}{6} n(n + 1)(2n + 1) + (n + 1)^2 = \frac{1}{6}(n' - 1)n'(2n' - 1) + n'^2 = \frac{1}{6} n' [2n'^2 + 3n' + 1] = \frac{1}{6} n'(n' + 1)(2n' + 1)$. Следовательно, формула $S_n = \frac{1}{6} n(n + 1)(2n + 1)$ верна для любого n. Методом совершенной индукции легко доказывается и формула $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{1}{2} n(n + 1)\right]^2$, и теорема о возможности представления любого составного натурального числа в виде произведения простых множителей (см. [II, 36]), и знаменитая теорема Эйлера о связи между числами вершин, рёбер и граней любого многогранника нулевого рода (см. [IV, 1]), и многие другие. Научить учащихся самостоятельно применять этот метод — значит дать им в руки весьма сильное средство математического доказательства, являющееся основой рассуждений о множестве натуральных чисел, но необходимо иметь в виду, что метод математической индукции является только методом доказательства предложений, уже найденных в качестве правдоподобных гипотез каким-либо иным путём, обычно через простую проверку при нескольких малых значениях натурального числа, т. е. через неполную индукцию.

Преобладание дедукции над индукцией — характернейшая черта математики, резко отличающая её от всех других наук. Но было бы грубой ошибкой отказываться от применения индукции как в математических исследованиях, так и в преподавании математики. Рассмотрение частных случаев должно предшествовать общим заключениям. Разного рода подсчёты, измерения, построения должны подготовлять дедуктивные доказательства.

§ 8. Математическая система. Строгость в определениях и доказательствах.

Математические предложения, образующие содержание любой математической науки, не изолированы, а теснейшим образом связаны друг с другом, представляя собой стройную систему. При наиболее совершенном построении, идеал которого был в общих чертах намечен ещё в древней Греции, но полное понимание которого было достигнуто лишь в XX в., за фундамент науки берётся некоторое число основных понятий и аксиом; последние раскрывают содержание основных понятий, представляют косвенные их определения. Когда эти элементы данной математической дисциплины, т. е. основные понятия и аксиомы, установлены, всё дальнейшее построение её ведётся дедуктивно. Каждое новое понятие науки вводится через надлежащее определение, базирующееся на основных понятиях и тех определениях, какие уже были введены раньше. Каждое новое предложение доказывается, т. е. выводится из аксиом и ранее доказанных предложений. Таким образом, каждое понятие данной науки либо вносится в список основных, косвенно определяемых через аксиомы, либо определяется, ничего третьего быть не может. Каждое предложение либо вносится в список аксиом, либо доказывается, т. е. признаётся за теорему. Здесь тоже не может быть ничего третьего, никаких ссылок на «очевидность». Как уже было выяснено выше (§ 3), при таком изложении науки обеспечивается наибольший возможный охват её предложениями объектов действительного мира. Основные понятия приобретают самый широкий смысл: они начинают обозначать уже не только то, что мы привыкли связывать с ними, основываясь на обычных описаниях, но и что угодно, удовлетворяющее аксиомам.

К системе аксиом предъявляют три требования: во-первых, аксиомы должны быть *совместны* (*непротиворечивы*); они не только не должны противоречить друг другу, но и среди всех теорем, которые могут быть из них выведены, не должно быть двух, из которых одна отрицает другую, т. е. если одна теорема гласит: «A есть B», то другая не может утверждать, что «A не есть B». Во-вторых, аксиомы должны быть *независимыми* друг от друга, т. е. ни одна из них не должна быть следствием остальных, не должна выводиться из них, так как в этом случае она была бы не аксиомой, а теоремой. В-третьих, система аксиом должна обладать *полнотой*, т. е. этих аксиом должно быть достаточно для доказательства всех теорем данной дисциплины; точнее: из двух любых отрицающих друг друга предложений, формулированных в терминах данной математической дисциплины, одно должно быть выводимо из данной системы аксиом, а другое должно ей противоречить. Обычно даётся несколько иное разъяснение понятия полноты системы аксиом, основанное на понятии «изоморфизма» двух систем объектов и отношений между объектами.

Подобное аксиоматическое изложение любой математической дисциплины оказывается непосильно трудным для средней школы. Кроме того, и это ещё важнее, есть веские соображения за то, чтобы вообще не считать аксиоматическое изложение науки идеалом, как это по традиции ведётся со времён Евклида. Требование ясности понимания всех понятий изучаемой математической дисциплины, обеспечиваемое надлежащими описаниями для основных понятий и соответствующими определениями для всех остальных, сохраняет полную силу на всех ступенях обучения, но выделение аксиом возможно далеко не всегда. Когда аксиомы выделяются, они должны быть совместными, но нельзя требовать, чтобы их система обладала независимостью: в школе к аксиомам приходится относить все предложения, истинность которых не возбуждает сомнений с точки зрения здравого смысла, хотя бы они допускали логические доказательства на основе других аксиом. Равным образом неукоснительное требование полноты системы аксиом сделало бы школьное изложение любого раздела школьного курса математики слишком громоздким. Приходится, формулируя некоторые более трудные и более важные аксиомы, лишь подразумевать многие другие, фактически используя их по мере надобности в доказательствах.

Ко всему сказанному остаётся добавить, что до сего времени ещё не установлена окончательно непротиворечивость системы аксиом арифметики. В этом направлении ведут исследования советские математики П. С. Новиков и Д. А. Бочвар. Заметим, кроме того, что в настоящее время доказана неполнота всех известных систем аксиом арифметики.

Итак, те требования к изложению математических дисциплин, какие были указаны выше и какие объединяются в понятии «строгости» изложения, в школе (не только в средней, но и в высшей) могут быть реализованы лишь частично, тем полнее, чем старше учащиеся и чем выше их развитие, причём, несомненно, существующая школьная практика может быть во многих случаях в этом отношении улучшена. Во всяком случае от любого математического рассуждения (доказательства) следует требовать, во-первых, чтобы было раскрыто содержание каждого понятия, используемого в этом доказательстве, либо через определение, либо через описание, и, во-вторых, чтобы было точно установлено, какие математические предложения принимаются в этом рассуждении за истинные (либо потому, что они были доказаны раньше, либо потому, что мы убедились в их истинности на опыте).

Глава II

МАТЕМАТИКА КАК УЧЕБНЫЙ ПРЕДМЕТ

§ 9. Две цели изучения математики в школе.

Изучение математики, как и любого другого предмета в советской школе, имеет основной задачей воспитание всесторонне развитого человека, строителя коммунистического общества, и преследует для этого две цели: во-первых, приобретение определённого запаса систематизированных знаний и навыков и, во-вторых, воспитание определённых качеств ума, воли, характера.

Повседневная жизнь каждого человека требует наряду с общей грамотностью также и элементарной математической грамотности: уменья производить арифметические действия над целыми и дробными числами, знакомства с мерами, знакомства с простейшими геометрическими формами, овладения различными способами наглядного изображения количественных соотношений (диаграммы и графики) и т. д. Весьма определённые и вообще довольно высокие требования к математической подготовке предъявляют многие массовые профессии, требования тем более значительные, чем выше общий уровень культуры, чем совершеннее техника производства. Так, например, шофёру или члену правления колхоза математическая наука нужна в объёме значительно большем, чем, скажем, конюху или крестьянину-единоличнику. Ещё выше требования к математике со стороны других предметов, изучаемых как в средней школе (физики, химии, астрономии, черчения и др.), так и в разного рода профессиональных учебных заведениях, средних и высших, особенно со стороны технических дисциплин. В советской системе народного просвещения семилетняя школа открывает для молодёжи двери в техникумы, а десятилетняя в вузы, и требования, предъявляемые техникумами и вузами к математической подготовке поступающих, имеют первостепенное значение в определении объёма и характера тех знаний и навыков, какие должна обеспечить семилетняя и средняя школа.

Каждый учитель математики должен отдавать себе ясный отчёт в том, какие именно требования к математической подготовке своих учеников он призван обеспечить. Ныне действующая программа по математике для средней школы, утверждённая Министерством просвещения РСФСР, следующим образом определяет конкретные задачи математических дисциплин, изучаемых в средней школе:

«Задача преподавания арифметики имеет целью научить учащихся сознательно, быстро, уверенно и наиболее рационально производить действия с целыми и дробными числами и применять полученные знания к решению задач и выполнению простейших расчётов практического характера».

«Задачи преподавания алгебры — расширить у учащихся представление о числе, научить сознательно, быстро и наиболее рационально производить тождественные преобразования алгебраических выражений, развить идею функциональной зависимости и её графического представления, научить приёмам составления уравнений и методам их решения, а также применению знаний к решению простейших задач из смежных дисциплин: физики, химии, астрономии, из области техники, сельского хозяйства».

«Преподавание геометрии имеет целью систематическое изучение свойств фигур на плоскости и в пространстве и применение этих свойств к решению задач вычислительного и конструктивного характера, развитие у учащихся логического мышления, пространственного воображения и умения применять полученные знания к выполнению практических работ: измерения на местности, определение поверхности и объёма различных сооружений, простейшие измерения, применяемые в топографии, и т. д.».

«Цель преподавания тригонометрии заключается в изучении тригонометрических функций и их свойств, решении треугольников прямоугольных и косоугольных и в практическом приложении тригонометрии к вопросам геометрии, физики, техники и т. д.» (Программы средней школы, «Математика», Учпедгиз, 1952).

Всякая программа, определяя материал для изучения, по необходимости даёт лишь самые краткие указания о круге вопросов, какие должны быть более или менее глубоко затронуты. Бо́льшую детализацию обеспечивают рекомендуемые учебники, руководства и задачники. Но хороший учитель математики, настоящий мастер своего дела, руководствуется, кроме того, и сведениями о том, какие требования к математической подготовке его учеников, настоящих и бывших, предъявляют другие изучаемые ими дисциплины, что с них спрашивают на экзаменах при поступлении в техникумы и вузы, какие знания и навыки нужны им в их практической деятельности. Недопустимо, чтобы учитель говорил (или думал): «Я выполняю требования программы, а что из этого получается, это меня не касается».

Но этой чисто образовательной стороной, т. е. приобретением некоторого запаса знаний и навыков, цель изучения математики в общеобразовательной средней школе далеко не исчерпывается: обучая любому предмету, в том числе и математике, школа должна воспитывать, вырабатывая у учащихся определённые свойства ума, воли и характера. Правильное понимание философской стороны математики как науки об определённых свойствах действительного мира существенно содействует выработке научного материалистического мировоззрения вообще. Изучение математики много помогает приобретению и укреплению логических навыков, т. е. навыков правильного мышления. Решение математических задач воспитывает волю, приучает к систематическому умственному труду, к самоконтролю, развивает сообразительность. Удачный подбор задач, особенно по курсу арифметики, позволяет попутно сообщить много полезных и прочно запоминающихся данных о нашем социалистическом строительстве и тем самым содействовать воспитанию советского патриотизма.

Некоторые дальнейшие соображения о том, какую политико-воспитательную работу можно и должно вести на уроках математики, читатель найдёт ниже, в § 16.

Вся работа учителя математики должна быть построена так, чтобы эти две цели преподавания математики, образовательная и воспитательная, гармонически сочетались: надо, обучая, воспитывать.

§ 10. Преподавание математики после постановлений ЦК ВКП(б) о школе. Содержание и задачи методики математики.

В мире нет другой страны, где люди так много учились бы, как в СССР. «Число обучающихся в СССР в настоящее время составляет 57 миллионов человек»,— указал Г. М. Маленков в своём отчётном докладе XIX съезду КПСС 5 ноября 1952 г. Почти все они изучают и математику.

При таком размахе работы вопрос о наилучшей постановке обучения математике становится делом огромной, государственной важности.

Прежде всего возникает вопрос об объёме тех математических знаний и навыков, какие должны усваиваться, т. е. вопрос об учебных планах и программах. Школа имеет возможность взять лишь весьма малую часть того колоссального запаса сведений, каким располагает современная математика.

Надо, чтобы эта малая часть содержала действительно важнейшие элементы науки, подлинные её основы. Далее должны быть установлены принципы организации учебной работы, которые, как и учебные планы и программы, оказываются, конечно, различными в различных учебных заведениях и для различных возрастов. Для начальной и средней общеобразовательной школы оба эти вопроса для настоящего времени разрешены на основе исторических постановлений ЦК ВКП(б) от 5 сентября 1931 г. «О начальной и средней школе» и от 25 августа 1932 г. «Об учебных программах и режиме в начальной и средней школе». В предшествующие годы в преподавании математики было много неправильного, основанного на ложном понимании задач школы, на выводах лженауки педологии, на ошибочных представлениях о взаимосвязи математики с другими учебными предметами. Постановления ЦК констатируют, что «коренной недостаток школы в данный момент заключается в том, что обучение в школе не даёт достаточного объёма общеобразовательных знаний и неудовлетворительно разрешает задачу подготовки для техникумов и высшей школы вполне грамотных людей, хорошо владеющих основами наук», и точно указывают пути к изжитию этого коренного недостатка, несколько раз специально отмечая положение с преподаванием математики. В дальнейшем на основе этих постановлений были разработаны учебные планы, распределившие время школьника между отдельными предметами, составлены программы всех предметов, точно очерчивающие круг систематических знаний, которые должен приобрести каждый учащийся, пересмотрены и исправлены школьные учебники, обеспечивающие продуктивность самостоятельной работы учащихся, устранены всякие сомнения в вопросе о тех формах, в каких должно происходить обучение («основной формой организации учебной работы в начальной и средней школах должен являться урок со строго определённым расписанием занятий и твёрдым составом учащихся»). Само собой разумеется, что ни учебные планы, ни программы, ни стабильные учебники не являются чем-то раз навсегда установленным, неподвижным, застывшим. Постепенный подъём школы вызывает необходимость периодического пересмотра всех этих документов и пособий, что и делается Министерством просвещения на основе опыта работы школ.

В настоящее время (1954 г.) такой пересмотр ведётся во исполнение директивы XIX съезда КПСС о подготовке перехода к политехническому обучению. Некоторые сведения о его ходе будут даны в § 13.

Методика преподавания математики занимается прежде всего изучением, разработкой, усовершенствованием различных методов и форм преподавания математики в школах, а также многообразными организационными вопросами, возникающими при применении этих методов и форм на практике. Эта дисциплина выясняет, как обеспечить прочные систематизированные знания и навыки в объёме, установленном программой, тратя на это минимум времени и сил, и как обеспечить достижение тех воспитательных целей, какие ставит себе изучение математики. Методика преподавания математики изучает и систематизирует опыт лучших учителей и даёт возможность начинающему учителю избежать многих ошибок, легко допускаемых на первых порах и приводящих к большим потерям для учащихся. Исходя из конкретных задач, стоящих перед учителем математики, имеющим класс с определённым составом учащихся, определённую программу, определённые учебники, твёрдое расписание, методика устанавливает способы наилучшего использования всех этих конкретных условий для достижения поставленной цели. Кроме того, она накопляет также опыт учителей, говорящий о желательности тех или иных изменений в учебных планах, программах, учебниках.

Нередко поднимается вопрос, является ли методика преподавания математики, как и любого другого учебного предмета, наукой или искусством. Любая наука, исследуя некоторый круг явлений, устанавливает закономерности и разрабатывает вытекающие из них практические правила, которые применяются одними более, другими менее удачно: на основе науки вырастает искусство. Такое положение мы имеем, например, в медицинской науке и врачебном искусстве. Так же обстоит дело с методикой, в частности с методикой математики; это наука, выводы которой немедленно и самым широким образом применяются на практике и являются базой искусства преподавания. Однако приходится признать, что наука методика далеко ещё не достигла той высокой степени совершенства, какая характерна, например, для самих математических дисциплин; в ней немало чисто эмпирических выводов, нередко основанных на ограниченном ряде наблюдений. Всякое изложение методики преподавания любой дисциплины, в том числе и математики, наряду с общепризнанными выводами, в какой-то мере отражает личные взгляды автора, иногда оспариваемые другими. Отсюда необходимость всестороннего освещения важнейших спорных вопросов, необходимость критического отношения к её выводам, необходимость проверки на опыте всех её предложений.

Настоящее руководство методики преподавания математики ставит себе целью осветить вопросы преподавания математики в V—X классах общеобразовательной советской средней школы, имея в виду прежде всего потребности студента и начинающего учителя, призванного заниматься математикой по существующей государственной программе с использованием существующих школьных учебников.

В настоящей, первой части рассматриваются вопросы общей методики математики, т. е. такие, которые в большей или меньшей мере касаются всех разделов школьного курса. Последующие части посвящены специальным (частным) методикам: методике преподавания арифметики, алгебры, геометрии, тригонометрии.

§ 11. Крупнейшие русские и зарубежные методисты-математики.

Каждый учитель математики должен интересоваться тем, как постепенно складывались современные методы преподавания математики. Почти каждый учёный, сделавший сколько-нибудь заметный вклад в дело продвижения самой математической науки, содействовал вместе с тем и успеху дела преподавания математики, но есть целый ряд учёных, для которых вопросы, связанные с проблемой распространения математических знаний, были основными в их деятельности и которые особенно много сделали для улучшения дела усвоения математики подрастающим поколением. Не имея возможности подробно рассматривать здесь историю математического образования, ограничимся только приведением кратких сведений о крупнейших методистах-математиках как русских, так и зарубежных, работы которых относятся к XIX и началу XX в. Из более ранних имён возьмём только три: Л. Ф. Магницкого, Л. Эйлера и С. Е. Гурьева.

Леонтий Филиппович Магницкий (1669—1739) родился в семье крестьянина в Осташковском уезде (в нынешней Калининской области) и учился в Московской славяно-греко-латинской академии, где математика вовсе не преподавалась. Он изучил её самостоятельно, используя русские математические рукописи, а также математическую литературу на иностранных языках (он владел языками немецким, итальянским, голландским, латинским и греческим). Боярин Головин, ведавший в то время Московской математико-навигацкой школой, где преподавание математики было в руках англичан Фархварсона, Гвина, Гриза, приглашённых Петром в Россию, привлёк к работе в ней и молодого русского математика-самоучку, представив его царю. Есть сведения, что Пётр, восхищённый его математическими знаниями, сравнил его с магнитом и велел именоваться Магницким.

Работая в Навигацкой школе, Магницкий показал себя как отличный преподаватель математики и воспитатель молодёжи. Вот что пишет начальнику школы его помощник Курбатов: «По 16 июля прибрано и учится 200 человек. Англичане учат их той науке чиновно, а когда временем и загуляются или по своему обыкновению почасту и долго проспят. Имеем по приказу милости твоей определённого им помоществователя Леонтия Магницкого, который непрестанно при той школе бывает и всегда имеет тщание не токмо к единому ученикам в науке радению, но и ко иным к добру поведениям, в чём те англичане, видя в школе его управление не последнее, обязали себя к нему, Леонтию, ненавидением».

Для учеников Навигацкой школы Магницкий написал учебник математики, напечатанный в 1703 г. под названием «Арифметика сиречь наука числительная», представляющий собой целую энциклопедию элементарной математики. По этой книге математику изучали в первой половине XVIII в. несколько поколений русской молодёжи, приобщаясь к передовой математической культуре того времени. В этой книге, составлявшей том большого формата, содержавший около 600 страниц, даётся ряд сведений по арифметике, алгебре, геометрии, тригонометрии. Всё изложение тщательно продумано, сделано доступным для начинающих. Приведено много примеров. Всё, подлежащее запоминанию, облечено в стихотворную форму. Например, под таблицей сложения однозначных чисел читаем:

«К двум един то есть три,
Два же к трём — пять смотри,
Так и всё назирай,
Таблицу разбирай».

Большое внимание Магницкий уделяет закреплению знаний учеников. Так, объяснив правило умножения дробей, он приводит около 60 задач на его применение, советуя перерешать их и указывая ответы.

«Арифметика» Магницкого ярко свидетельствует о таланте русского математика-самоучки и представляет собой замечательную методическую разработку ряда вопросов преподавания математики [I, 46].

Огромное влияние на учебную литературу по арифметике и алгебре во всём мире оказали учебники *Леонарда Эйлера*, изданные впервые в Петербурге на русском и немецком языках: «Руководство к арифметике» (ч. I, СПБ, 1740; ч. II, 1760) и двухтомная «Универсальная арифметика» (СПБ, 1768—1769), представлявшая серьёзный и оригинальный курс алгебры. Последняя книга затем многократно переиздавалась и переводилась на другие языки.

Из большого количества учебников математики, вышедших на русском языке во второй половине XVIII и в начале XIX в., необходимо особо отметить работы члена Петербургской академии наук *Семёна Емельяновича Гурьева* (1760—1813), много сделавшего для улучшения постановки преподавания математики. Разрабатывая проект реформы преподавания математики в Морском кадетском корпусе, С. Е. Гурьев делил весь её курс на три части: 1) «Детская арифметика и геометрия», 2) «Настоящая геометрия» и «Наука исчисления», включающая арифметику и алгебру, 3) «Высшая математика». В работах С. Е. Гурьева впервые ставятся и разрешаются многие общие вопросы методики преподавания математики.

Начиная с 30-х годов XIX в., стали выходить в свет работы по методике преподáвания арифметики Петра Семёновича Гурьева, сына С. Е. Гурьева. Первой из них была книга «Арифметические листки, постепенно расположенные от легчайшего к труднейшему, содержащие в себе 2523 задачи с решением оных и кратким руководством к исчислению, составленные П. Гурьевым» (1832). Главной методической работой П. С. Гурьева является его «Руководство к преподаванию арифметики малолетним детям» (1839—1842).

Большое значение для постановки преподавания арифметики в русской школе имели работы *Василия Андриановича Евтушевского* (1836—1883), много сделавшего для улучшения подготовки учителей начальных школ и военно-учебных заведений в России. В 1872 г. вышел из печати его «Сборник арифметических задач», получивший огромное распространение (в 1902 г. óн был выпущен 76-м изданием), а также его «Методика арифметики». Обе книги построены на методе «монографического изучения» чисел первой сотни: каждое число первой сотни изучается отдельно и всесторонне, причём устанавливается его состав как суммы и произведения других чисел, ранее изученных. Основная идея этого метода заслуживает внимания: надо помочь ребёнку приобрести ясные и полные представления о различных частных случаях, чтобы, основываясь на них, изучать общие свойства и правила; однако педантичное его проведение создавало искусственную задержку детского мышления.

Следующий этап в развитии русской методики математики связан с именем *Александра Ивановича Гольденберга* (1837—1902), автора ряда книг по математике для учащих и учащихся («Арифметический задачник для начальной школы», «Сборник арифметических упражнений для гимназий и реальных училищ», «Методика начальной арифметики», «Беседы по счислению» и др.), практического деятеля по подготовке и переподготовке учителей. В противовес монографическому методу изучения чисел, А. И. Гольденберг горячо пропагандировал метод «изучения действий». В предисловии к своей «Методике начальной арифметики» он пишет: «Сознательное усвоение приёмов вычисления, обдуманное применение арифметических действий к решению задач, хотя бы и не замысловатых, уверенность в средствах, которые всегда приводят к цели, должная оценка этих средств и, наконец, неизменное к ним доверие— всё это, по нашему крайнему разумению, представляет драгоценные стороны обучения детей счётной мудрости».

Крупнейшим методистом-математиком дореволюционной России был *Семён Ильич Шохор-Троцкий* (1853—1923). Его важнейшие работы: «Арифметический задачник для учителей начальных школ», «Арифметика для начальных школ», «Геометрия на задачах для учащихся начальных и средних школ», «Геометрия на задачах — книга для учителей», «Арифметический задачник для учителей средних учебных заведений», «Методика арифметики для учителей средних школ», «Наглядность и наглядные пособия при обучении арифметике». С. И. Шохор-Троцкий разработал «метод целесообразных задач». По его мнению, заставлять ребёнка начинать с прáвил, а потом предлагать ему задачи — значит идти против естественного хода развития человеческого духа. Исходным пунктом работы учителя во всякий момент обучения математике должны быть целесообразно подобранные задачи. Во всех методических работах С. И. Шохор-Троцкого видна прежде всего забота об ученике. «При чтении их,— пишет И. Н. Кавун в предисловии к одной из работ С. И. Шохор-Троцкого,— бросается в глаза одно, пожалуй, самое главное их качество, которое возвышает их надо всем, что написано у нас по методике математики. Это—внимание к ребёнку. Не техническая выучка была у него на первом плане, а воспитание. Поэтому он подходит к тому душевному фонду, которым обладают ребята, чрезвычайно осторожно, бережно. Его методы обучения и рассчитаны на то, чтобы сберечь силы ребёнка, пробудить в нём интерес и любознательность, поддержать самодеятельность и самостоятельность».

С. И. Шохор-Троцкий был передовым педагогом-общественником. Он не ограничивался преподавательской и литературной работой, а был всегда активным участником научных обществ, съездов, учительских курсов. За деятельное участие в революционном движении он подвергся в 1905 г. репрессиям — был отстранён от работы в некоторых учебных заведениях.

Профессор математики Московского университета *Август Юльевич Давидов* (1823—1885), состоявший в 1860 г. инспектором, наблюдавшим за частными учебными заведениями г. Москвы, написал ряд учебников элементарной математики, из которых два, а именно: «Элементарная геометрия в объёме гимназического курса», выпущенная 1-м изданием в 1863 г., и «Элементарная алгебра», изданная вскоре после первого, получили самое широкое распространение, будучи основным школьным пособием не только при жизни автора, но и многие годы после его смерти (новые издания обоих этих учебников выходили даже после Октябрьской революции). Кроме этих двух книг, А. Ю. Давидов написал ещё «Руководство к арифметике», «Геометрию для уездных училищ», «Начальную тригонометрию». Все эти учебники отличаются высоким научным уровнем, тщательной обработкой всего предлагаемого материала, ясностью и доступностью изложения, большим вниманием к различным приложениям математики. Учебник геометрии построен довольно близко к «Началам» Евклида, имея многие достоинства этой знаменитой книги, но освобождён от ряда её недостатков. Два главных учебника А. Ю. Давидова и сейчас ещё не потеряли интереса для учителя математики.

В настоящее время наибольшее распространение в советских средних школах имеют руководства по арифметике, алгебре, геометрии, которые составил *Андрей Петрович Киселёв* (1852—1940). Его «Систематический курс арифметики для средних учебных заведений» вышел первым изданием ещё в 1884 г. Далее, в 1888 г., выходит его «Элементарная алгебра», а в 1892 г.— «Элементарная геометрия». Достоинства этих трёх руководств, их точность, простота, сжатость, оказались столь значительными, что они постепенно завоевали себе первое место среди всех учебников элементарной математики в русской средней школе конца XIX и начала XX в. и оказались наиболее приемлемыми по сравнению со всеми другими и для советской средней школы. Общий тираж каждого из этих трёх руководств за время до Октябрьской революции составил около миллиона экземпляров, а после неё — свыше десяти миллионов. Кроме этих трёх книг, А. П. Киселёв написал ещё ряд других, тоже имевших большое распространение. В каждом новом издании он вносил в них исправления и добавления, учитывая опыт работы и стремясь усвоить всё лучшее, передовое, а в течение последних лет они перерабатывались другими авторами. В 1934 г. Советское правительство отметило выдающиеся заслуги А. П. Киселёва в деле математического образования, наградив его орденом Трудового Красного Знамени.

На рубеже XIX и XX вв. ряд русских методистов-математиков и прежде всего *В. П. Шереметевский*, получивший широкую известность своими работами по истории математики, выдвинули проект глубокой реформы преподавания математики, исходя из совершенно правильной мысли о необходимости введения в школу нескольких основных понятий современной математической науки, особенно понятия функции. В этом отношении русская наука на целое десятилетие опередила западноевропейскую методику математики.

Из большого числа других методистов-математиков за недостатком места назовём только имена профессора *Иоасафа Ивановича Чистякова*, оставившего большой след в истории русского математического образования журналом «Математическое образование», которым он руководил с 1912 по 1917 и с 1928 по 1930 гг., и профессора *Ивана Никитича Кавуна*, автора ряда учебников и методических пособий по арифметике и геометрии.

Обзор истории развития русской методики преподавания математики содержит книга [I. 33б]. Отдельным деятелям посвящён ряд статей, опубликованных за последние годы в журнале «Математика в школе».

За 30 лет советской власти в СССР развернулась широкая работа по изучению вопросов методики преподавания математики, работа, в которой принимают участие и многие рядовые учителя математики, и некоторые выдающиеся учёные, как, например, академики А. Н. Колмогоров, П. С. Александров, проф. А. Я. Хинчин и др. Вопросам методики преподавания математики посвящён журнал «Математика в школе», издаваемый Министерством просвещения РСФСР. Другим центром разработки вопросов методики преподавания математики является созданная в годы Великой Отечественной войны Академия педагогических наук РСФСР, в которой имеется Институт методов обучения, уделяющий много внимания математике. Работа АПН по вопросам методики преподавания освещается в «Известиях Академии педагогических наук» и в отдельных книгах, издаваемых в «Педагогической библиотеке учителя». Статьи по методике математики появляются также в «Учёных записках» и «Известиях», издаваемых педагогическими институтами. Отметим два содержательных томика «Математика в школе», изданных Ленинградским областным институтом усовершенствования учителей (вып. 1 и 2, 1947).

Из зарубежных методистов-математиков нового времени на первое место надо поставить *Феликса Клейна* (1849—1925). Этот крупный учёный, сделавший большой вклад в математическую науку своими исследованиями в разных её отраслях, особенно в геометрии, возглавил в начале XX в. борьбу за реформу математического образования. С методическими идеями Ф. Клейна, имеющими в основном несомненно прогрессивный характер, можно ознакомиться по большой его работе [I, 28], но необходимо отметить, что значение его работ для реформы преподавания математики часто переоценивается и что он систематически замалчивал достижения русской математической науки.

Упомянем ещё о другом движении за реформу современного обучения математике, получившем в конце XIX и в начале XX в. некоторое распространение в Англии под названием «движение Перри». Английский инженер *Джон Перри* выдвинул требование изучения в школе только «применимой математики», т. е. только тех разделов математической науки, какие действительно используются в практической жизни, прежде всего в технике. Представляя собой естественную реакцию на то пренебрежение к вопросам практических применений математики, которое нередко имело место в зарубежной школе, движение Перри недооценивало и снижало роль теории, без которой не может быть и хорошей практики.

§ 12. Основные принципы обучения математике.

Советская педагогика выработала несколько принципов, на которых строится обучение любому предмету, изучаемому в школе. Это принципы сознательности, наглядности, систематичности, доступности и прочности. Отметим некоторые детали проведения этих принципов в обучении математике.

а) *Принцип сознательности.* Первейшей заботой учителя должна быть его забота об ясном и полном понимании учениками всего того, что они изучают. Во что бы то ни стало должно быть обеспечено понимание точного смысла каждого термина, какой ученики употребляют, каждой теоремы, каждого правила. Сознательному усвоению правил противопоставляется заучивание без понимания, зубрёжка. В школьном курсе математики есть немало вещей, подлежащих запоминанию, но изучение надо начинать с полного их уяснения, с такого их рассмотрения, при котором ученикам становится вполне понятным их смысл и значение, и уже только после того, как это понимание достигнуто, начинается работа по закреплению, работа памяти. Прежде чем требовать от ученика, например, запоминания того, что умножение 7 на 8 даёт 56, надо обеспечить ясное понимание того, что значит умножить 7 на 8, для чего и когда надо это делать, как это сделать. Обеспечить полную сознательность при обучении математике легче, чем при изучении любого другого предмета, но это не приходит само собой, а получается лишь в результате упорной, систематической, умелой работы учителя.

Противоположностью обучения, основанного на принципе сознательности, является «догматическое обучение», когда учитель требует механического усвоения и запоминания, когда он не устраняет естественно возникающих у учеников сомнений, когда он не отвечает на законные их вопросы. От такого учителя ученик слышит требование: «Делай, как сказано, и поменьше рассуждай». В противоположность этому учитель, обеспечивающий сознательность усвоения, на каждом шагу ставит вопрос «почему?», требует приведения примеров, показывающих понимание, требует обоснования, т. е. указания тех соображений, какие оправдывают данный шаг. Вот, например, идёт речь об измерении площади треугольника, и ученик правильно говорит, что эта площадь равна полупроизведению основания на высоту. Но понимает ли он, что такое высота треугольника, в частности, умеет ли он найти все три высоты в прямоугольном или тупоугольном треугольнике? Ясно ли ему, что в этой краткой формулировке текста теоремы речь идёт о произведении чисел, выражающих длины основания и высоты в одних и тех же единицах, что в результате получается число, выражающее искомую площадь в соответствующих квадратных единицах? Заучил ли он это правило механически или вывел его, рассматривая, например, превращение треугольника в равновеликий прямоугольник с тем же основанием и половинной высотой?

Знание, приобретённое механически, без понимания, неизмеримо менее ценно, чем знание сознательное, прежде всего потому, что оно либо вовсе не используется, либо при его применении допускаются грубейшие ошибки (например, площадь прямоугольного треугольника с основанием в 5 *см* и высотой в 2 *дм* определяется равной 5 *кв. см*), а кроме того, оно всегда менее прочно.

б) *Принцип наглядности.* Наглядным, как известно, называется такое обучение, которое построено не на отвлечённых понятиях, а на конкретных образах, непосредственно воспринятых учащимся. Обеспечить постоянное соблюдение принципа наглядности в обучении математике легче, чем в обучении любой другой науке, так как конкретные образы, в которых реализуются отвлечённые математические понятия, имеются везде вокруг нас. К сожалению, нарушения принципа наглядности учителями математики допускаются очень часто.

Вопрос о средствах обеспечения наглядности в обучении математике рассмотрен ниже, в § 21.

в) *Принцип систематичности.* Те связи, какие существуют между отдельными предложениями любой науки и которые обусловливают изложение этой науки в виде стройной системы, где каждый следующий шаг основан на предшествующих, связи, в математической науке более прочные, чем в любой другой (о них уже была речь выше, в § 8), не могут не учитываться при изложении науки в школе. В истории советской педагогики был период, когда это требование систематичности обучения недооценивалось, когда, в частности, предлагалось строить изучение математики, исходя только из тех практических задач, какие ставит окружающая действительность («метод проектов»). Математическая система была восстановлена в своих правах после постановлений ЦК ВКП(б) о школе от 5 сентября 1931 г. и 25 августа 1932 г., где было сказано, что «преподаватель обязан систематически, последовательно излагать преподаваемую дисциплину». Школьный курс математики излагается в системе, воспроизводящей в основных чертах систему, сложившуюся в истории науки. Допускаемые разумные отступления сводятся к введению особых пропедевтических курсов, о которых речь будет ниже, в § 14, но и эти пропедевтические курсы должны излагаться систематически, в некоторой стройной, продуманной последовательности, а не быть нагромождением случайных, не связанных друг с другом эпизодов.

г) *Принцип доступности.* В средней школе мы имеем дело с различными возрастными группами учащихся, от 11—12 лет до 16—18 лет, весьма отличающимися одна от другой и по способности восприятия, и по способности к абстракции, и по преобладающим интересам, и по умению самостоятельно работать, да и в пределах одной возрастной группы наблюдаются значительные индивидуальные колебания. Учитель должен изучить своих учеников и избирать те из многочисленных имеющихся в его распоряжении способов работы, какие оказываются в данных условиях наилучшими. Здесь очень трудно дать какие-либо общие указания, кроме следующих двух: 1) надо всегда помнить, что общее и отвлечённое даётся всегда труднее, чем частное и наглядное, и вводить это общее и отвлечённое лишь постепенно, осторожно, не обременяя учащихся непосильным материалом; 2) надо всегда зорко следить, как доходит излагаемый материал до каждого учащегося, чтобы во-время вносить необходимые поправки в намеченный план, пробовать разные пути и находить наилучшие. И у опытных учителей при работе с новым для них составом класса бывают временные неудачи, но конечно реже, чем у начинающих, и притом быстрее преодолеваемые. Знакомство с данными возрастной психологии, понимание особенностей восприятия математической абстракции учащимися разных классов, самое тщательное, продуманное во всех деталях планирование работы, индивидуальный подход к учащимся и уменье быстро вносить поправки в свою работу — всё это нужно в первую очередь, чтобы обеспечить успех в обучении математике.

д) *Принцип прочности.* Те полезные знания и навыки, какие ученик приобретает в процессе изучения математики, должны стать прочным его достоянием: мало толку в таких знаниях и навыках, какие исчезают немедленно вслед за экзаменом, где надо было их демонстрировать, а такое положение, к сожалению, нередко имеет место. Знания тем прочнее, чем сознательнее работал ученик, приобретая их, чем богаче и разнообразнее запас наглядных образов, ярких примеров, с ними связанных, чем больше связей было установлено между отдельными фактами и правилами, т. е. чем совершеннее та система, в какой они изучались, чем больше они соответствовали уровню развития и интересам учащихся. Осуществление в процессе обучения четырёх рассмотренных выше принципов в значительной степени обеспечивает и прочность достигаемых обучением результатов, но надо учесть и ещё ряд моментов, от которых она существенно зависит. Слишком поспешное изучение нового материала влияет на прочность его усвоения резко отрицательно: новому надо дать устояться, войти в прочную и многостороннюю связь с изученным ранее. Но и слишком медленный темп работы, когда между последовательными возвращениями к изучению той же цепи вопросов проходит так много времени, что сделанное в предшествующий раз уже забывается, также вредит прочности усвоения. Важнейшее значение имеет правильная организация повторения. К этому вопросу мы ещё вернёмся ниже, в § 28.

Прочность усвоения существенно повышается, если от пассивного приобретения знаний и навыков перейти к активным методам работы. Дело в том, что есть два пути в сообщении учащимся математических знаний и навыков. Первый характеризуется пассивным восприятием готового материала: учащийся получает от учителя или из учебника готовые теоремы, определения, правила и должен понять и запомнить их. Второй предполагает самостоятельное, творческое усвоение: в готовом виде даётся лишь часть материала, и учащийся, усвоив эту часть, делает дальнейшие шаги самостоятельно, проверяя правильность их с помощью учителя или по книге и внося в случае надобности необходимые исправления. Нечего и говорить, насколько этот второй путь лучше первого, как он развивает инициативу, сообразительность, как повышается при следовании ему ясность и прочность усвоения, как он страхует от механического запоминания, как повышается интерес учащихся к предмету.

Решение задач, предлагаемых учащимся для самостоятельного решения, является простейшей формой движения по второму пути.

Всемерное развитие *активности* и *самостоятельности* учащихся, обеспечиваемое осторожными, хорошо продуманными заданиями всё возрастающей, но посильной для них трудности — вот ещё один принцип преподавания математики, каким должен руководствоваться учитель во всей своей работе.

Отметим ещё три принципа, постоянное соблюдение которых необходимо, чтобы обучение математике было полноценным.

Генетический характер изложения. Опыт преподавания с полной определённостью говорит, что качество усвоения математического материала существенно выигрывает, если каждое новое понятие, каждое новое предложение вводить так, чтобы была видна его связь с уже известными учащимся вещами и чтобы была понятна целесообразность его изучения. Для учащихся убедительнее всего оправдание каждого нового понятия и предложения соображениями, относящимися к практической деятельности, по возможности близкой им. Так, изучение деления целых чисел в начальной школе полезно связать с дележом каких-либо интересных для школьников вещей, составление и решение уравнений на первых шагах изучения алгебры — с более трудными арифметическими задачами, для решения которых в V классе приходилось изобретать особые приёмы и которые теперь решаются одним общим приёмом, многие геометрические теоремы — с простейшими задачами землемерия и черчения и т. д. Генетический характер изложения приносит особенно хорошие результаты в младших классах, но и при работе в старших классах школы его применение надо всячески рекомендовать. Нередко бывает, что какой-либо вопрос, изложенный абстрактно, вдруг как бы озаряется новым светом, когда учитель укажет его связь с другими вопросами и его происхождение.

Термин «генетический» происходит от греческого слова «генезис» — происхождение. Генетический характер изложения противополагается аксиоматическому, при котором наука излагается в её наиболее совершенном, законченном виде. Обеспечить генетический характер изложения легче всего на основе истории данного раздела науки, поэтому исторический элемент в деле преподавания представляет собой огромную ценность. Недаром говорят, что полное понимание любого теоретического вопроса достигается лишь тогда, когда становится ясной его история. Как выигрывает урок, если на нём даются хотя бы краткие указания на разные обстоятельства, связанные с историей рассматриваемого вопроса, указания, которые могут быть подробнее развиты на занятиях математического кружка! Литература по истории математики велика. Некоторые особенно ценные для учителя работы указаны в «Списке документов, статей и книг по вопросам, относящимся к первой части», помещённом на стр. 103—104.

Единство теории и практики. Всякое приобретённое знание не должно оставаться мёртвым капиталом: его надо использовать для тех или иных полезных целей, и чем скорее, тем лучше. Применяя теорию на практике, мы прежде всего проверяем её правильность, так как выясняется, оправдываются ли сделанные на основе этой теории заключения. Для школы, кроме того, очень большое значение имеет то обстоятельство, что теория, применением которой учащиеся овладели, становится для них несравненно более ясной и прочнее запоминается. Переход от теории к практике совершается в математике проще, чем в любой другой науке, и решение самых разнообразных задач, начиная с простейших примеров, иллюстрирующих каждое новое определение, каждую новую теорему, с постепенным увеличением сложности и трудности должно быть органической составной частью каждого урока математики. Изучение теории и её приложений на практике должно идти согласованно, гармонично. Никуда не годится такое положение, когда учитель, занимаясь теорией, вовсе не находит времени для решения задач, что нередко имеет место на занятиях геометрией. Качество усвоения теории бывает при этом неизменно весьма низким. Не менее плохо, если изучение предмета сводится к одному лишь решению задач, как это, к сожалению, довольно часто бывает при работе по алгебре, когда учащиеся механически производят указанные им выкладки, не отдавая себе отчёта ни в их назначении, ни в их обосновании.

Но связь теории с практикой надо понимать шире, а не только как решение задач из задачника: необходимо упражнять учащихся в непосредственном применении приобретённых математических знаний к решению различных практических вопросов, выдвигаемых жизнью.

Рассмотрим, наконец, *принцип научности*. Его можно формулировать как категорическое требование не сообщать учащимся ничего, отвергаемого современной наукой, ничего такого, от чего при углублённом изучении вопроса приходится отказываться. Чаще всего нарушения принципа научности бывают обусловлены просто недостаточной осведомлённостью учителя в данном вопросе. Например, учитель иногда называет аналитическое выражение функции «аналитической функцией», противополагая её функции, заданной таблицей значений или графиком («эмпирической функции»), и не зная, что в современном анализе аналитическими называются функции, представимые степенными рядами. Учитель, плохо разобравшийся в теореме алгебры о существовании по крайней мере одного комплексного корня у всякой целой рациональной функции одного аргумента степени I и выше, вводит учеников в заблуждение, говоря им, что всякое уравнение имеет по крайней мере один корень, действительный или мнимый, и попадает в неловкое положение, встречаясь, например, с уравнением $|x| = -1$, не имеющим никакого корня, ни действительного, ни мнимого. Желая доказать некоторое предложение, учитель иногда думает достичь этого, показывая истинность какого-либо следствия из этого доказываемого предложения, забывая что из ложного предложения могут получаться правильные (истинные) заключения. Например, неверное равенство $+5 = -5$ после почленного возведения в квадрат даёт правильный вывод $(+5)^2 = (-5)^2$. Так, неправильно думать, что можно доказать справедливость формулы $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ простым возведением обеих частей в квадрат и указанием на истинность получаемого равенства.

Конечно, нельзя считать нарушением принципа научности такие случаи, когда учитель не делает надлежащих оговорок при формулировке какого-либо общего предложения, если эти оговорки на данной ступени обучения не нужны и будут сделаны в своё время, при переходе к следующей ступени. Например, занимаясь в V классе арифметикой и говоря, что вычитание возможно только при условии, что уменьшаемое больше вычитаемого, учитель совершенно прав, не делая никаких оговорок, так как учащиеся знакомы в этом классе только с положительными числами. Знакомя в VI классе с отрицательными числами, учитель должен будет вернуться к этому вопросу и дать новую формулировку.

Спорным является вопрос о том, представляют ли собой нарушения принципа научности такие случаи, когда по тем или иным причинам учащимся сообщается неполная истина. Например, при изучении тригонометрии в X классе учащимся доказывают, что $\alpha - \frac{1}{4}\alpha^3 < \sin\alpha < \alpha$, где α — радианная мера дуги первой четверти, и не сообщают, что справедливо и более сильное неравенство $\alpha - \frac{1}{6}\alpha^3 < \sin\alpha < \alpha$, не допускающее дальнейшего усиления через изменение числовых коэффициентов. Казалось бы, что если нет возможности доказать это последнее неравенство, то надо хотя бы указать на него, чтобы устранить законное недоумение учащихся, встречающих его в своей дальнейшей работе.

§ 13. Школьная математика в свете задач политехнического обучения.

Успехи дела народного просвещения в нашей стране общеизвестны.

В целях дальнейшего подъёма культурного уровня жизни советского народа XIX съезд КПСС дал следующие директивы по народному просвещению.

«Завершить к концу пятилетки переход от семилетнего образования на всеобщее среднее образование (десятилетка) в столицах республик, городах республиканского подчинения, в областных, краевых и крупнейших промышленных центрах. Подготовить условия для полного осуществления в следующей пятилетке всеобщего среднего образования (десятилетка) в остальных городах и сельских местностях».

«В целях дальнейшего повышения социалистического воспитательного значения общеобразовательной школы и обеспечения учащимся, заканчивающим среднюю школу, условий для свободного выбора профессий приступить к осуществлению политехнического обучения в средней школе и провести мероприятия, необходимые для перехода к всеобщему политехническому обучению» (Директивы XIX съезда КПСС по пятому пятилетнему плану развития СССР на 1951—1955 годы, Госполитиздат, 1952, стр. 27—28).

Полное осуществление политехнического обучения примет конкретные формы, когда Министерством просвещения РСФСР будут даны школе новые программы и учебники. Но передовые школы и учителя уже сейчас приступили к введению в преподавание элементов политехнического обучения.

Советская школа вступила в первый период политехнического обучения, и каждый год работы школы в выполнении этой задачи будет обогащать содержание политехнического обучения.

Что же должно быть в первую очередь сделано при преподавании математики для выполнения решений XIX съезда партии о политехническом обучении? По этому вопросу было много разнообразных устных и письменных высказываний, но все они в одном пункте были совершенно единодушны: содержание и методы преподавания тех основ математической науки, которые под названием «элементарной математики» изучаются в советской средней школе, в основном получили полную устойчивость и не могут быть в настоящее время сколько-нибудь существенно изменены при переходе к политехническому обучению. Однако некоторые частичные изменения программы и методов преподавания вполне назрели и могут быть произведены и в ближайшее время, причём некоторые довольно существенные улучшения зависят целиком от доброй воли и желания учителя математики и могут быть проведены до каких бы то ни было изменений в действующей программе и в применяемых в школе учебниках.

Коренное и весьма существенное изменение при переходе к политехническому обучению должна претерпеть вся прикладная часть школьного курса математики, т. е. те задачи, решение которых должно сопровождать изучение теоретической части этого курса. Без приобретения прочного навыка в решении задач не может быть вполне сознательного и сколько-нибудь прочного овладения теорией, причём содержание задач далеко не безразлично. Наряду с задачами тренировочного характера, школьники должны решать разнообразные задачи, какие действительно приходится решать в жизни, понимая её в самом широком смысле: задачи бытовые, задачи всевозможных отраслей техники, задачи, какие ставят другие изучаемые в средней школе дисциплины — физика, химия, география, астрономия, черчение.

Конечно, жизненные задачи встречаются в школьном курсе математики и теперь, но их очень мало в курсе арифметики, а в курсах алгебры, геометрии и тригонометрии они встречаются только в виде редких исключений. Вовсе отказаться от задач тренировочного характера в курсе математики нельзя, нельзя требовать, чтобы каждая предлагаемая школьникам задача была жизненно практически ценной, но соотношение между задачами жизненными и задачами тренировочными должно быть иным, чем сейчас.

Недостатки в преподавании математики особенно ярко сказываются в отсутствии вычислительных навыков, вырабатываемых у учащихся. В школьном курсе математики современная вычислительная техника полностью игнорируется, мы держим учащихся на уровне техники XVIII в., когда передовым средством вычисления были логарифмы. В старших классах должны широко и сознательно применяться различные математические таблицы, среди которых таблицы логарифмов должны занимать довольно скромное место, и счётная логарифмическая линейка, а в младших — обыкновенные конторские счёты. В современной технике всё больше и больше используются «считающие чертежи»— так называемые номограммы, применение которых так ускоряет очень многие расчёты, в том числе самые сложные. Изучение устройства и употребления весьма многих номограмм вполне посильно для учащихся, изучающих геометрию и алгебру, и включение элементов номографии в программу несомненно — дело недалёкого будущего. Однако и сейчас можно рекомендовать знакомство с простейшими номограммами в порядке решения задач.

Требование жизненности тех задач, которые решаются в школьном курсе математики, приводит к необходимости борьбы с «безответственными» вычислениями, приводящими к результатам, в которых имеются цифры, не заслуживающие никакого доверия, и в которых вообще неизвестно, какие цифры верны, какие нет. Изжить эту безответственность можно только путём включения в теоретическую часть курса арифметики небольшого раздела, который можно назвать «правилами округления результатов действий над приближёнными данными» (см. ниже главу V первой части), а также раздела «высшая и низшая границы приближённого результата и их вычисление».

Подавляющее большинство данных, с которыми мы имеем дело в жизненных задачах, представляют собой результаты измерений, и измерениями величин разного рода должен заниматься не только учитель физики, а и учитель математики. Нельзя мириться, например, с тем, что учащиеся, пройдя курс геометрии, не знают, как измерить площадь поля, площадь древесного листа, объём тела по результатам измерений линейных его размеров. Учащиеся должны отдавать себе отчёт о происхождении и точности каждого числа, с которым они встречаются в задачах, должны критически к таким числам относиться. Вся трудность здесь в том, чтобы учителя признали необходимость такого критического отношения к результатам измерений и сами постоянно его проявляли. Школьный транспортир, например, даёт возможность измерять углы с точностью до полуградуса, при очень аккуратной работе — до десятой доли градуса (6 минут), а хороший технический прибор—до 2 минут. Зачем в задачах будто бы практического характера давать углы с точностью до секунд, как это имеет место в сборнике задач по тригонометрии Рыбкина, не выясняя, какие исключительные обстоятельства оправдывают указание значения угла со столь высокой точностью. Нередки случаи, когда в одной и той же задаче некоторые данные указаны с весьма высокой, некоторые с очень малой точностью, что является несообразностью, ведущей к целому ряду нехороших следствий.

Особое внимание требуется уделить изучению именованных чисел. Математика учит производить действия над отвлечёнными числами, но во всех её приложениях мы имеем дело с различными физическими истолкованиями отвлечённых чисел, и надо постоянно требовать от учащихся ясного понимания того, значения каких физических величин он берёт и получает. В этом отношении школьной математике надо многое заимствовать из курса физики, где столь основательно разработана теория размерности.

Школа должна изучать не только отношения однородных величин, как это делается в курсе арифметики, но и разнородных, например отношение значений длины к времени, т. е. скорость, а также произведения разнородных именованных чисел, как, например, числа рабочих на число дней работы, что даёт количество работы — число рабочих дней.

При политехническом обучении должно возрасти значение черчения. Чертежи — язык техники, и в политехнической школе черчение должно быть поставлено на высоту, значительно превосходящую ту, на какой оно стоит сейчас. Но математика должна дать теоретическую базу для хорошего чертежа и должна постоянно поддерживать те навыки, какие будут вырабатываться у учащихся в результате занятий черчением. Требования к чертежу на уроках математики и черчения должны быть согласованы. Особого внимания со стороны математики требует проекционный чертёж, имеющий столь большое значение во всех технических приложениях математики и так сильно развивающий пространственное воображение учащихся.

Математика, как и всякая истинная наука, имеет своей целью изучение некоторых определённых сторон материального мира. В школьном преподавании эта важная сторона изучения математики нередко затушёвывается, не доходит до сознания учащихся, которым эта наука, по крайней мере в некоторых своих частях, представляется чем-то вроде игры с произвольно установленными правилами: соблюдай эти правила, и всё будет хорошо, будет обеспечена оценка высоким баллом, т. е. игра будет выиграна. Яркий пример — тот туман, который остаётся в головах у всех почти десятиклассников после прохождения главы о комплексных числах.

Чтобы улучшить положение, надо показывать, как математика позволяет познавать действительность, в частности, как с помощью математики можно косвенным образом измерять то, что непосредственно измерить затруднительно или даже невозможно, как математика облегчает достижение тех целей, какие люди ставят себе на практике. Надо давать задачи, в которых требуется с помощью математического расчёта узнать значение некоторой величины, причём желательно доводить дело до экспериментальной проверки тем или иным способом истинности найденного результата. В связи с этим особое значение приобретают работы на местности, давно включённые в число работ, рекомендуемых по курсу математики, но редко где реализуемые из-за недостатков подготовки самого учителя и трудностей организационного порядка.

Не менее велико значение экскурсий на производства, но при условии, что математическая сторона таких экскурсий подготовляется заранее: учитель вместе с работником производства выясняет, на какие стороны производственного процесса, связанные с математикой, следует обратить внимание учащихся. Основная мысль: математика — не праздная выдумка досужих людей, а мощное орудие в борьбе за познание материального мира и за его покорение, т. е. его использование для блага людей.

Решительного осуждения требует практика изложения математики, придающая в глазах учащихся этой науке субъективный характер: «условились, что...»,— так нередко начинает изложение нового вопроса учитель математики. Необходимо, наоборот, подчёркивать, что все понятия и предложения математики отнюдь не являются результатом того или иного соглашения, определяемого субъективными желаниями и вкусами, а является отражением объективно существующих вещей и отношений между вещами. Показ объективного характера математической теории и её практических приложений лучше всего обеспечивается решением надлежаще подобранных задач с обязательной проверкой правильности получаемых с её помощью результатов. В этом — залог заинтересованности учащихся в занятиях математикой, а следовательно, и сильнейшее средство поднятия успеваемости. Нужна высокая математическая культура, редко достигаемая учащимися средней школы, чтобы оценить такие важные стороны математической науки, как её стройность, логическую безупречность, исчерпывающий характер получаемых решений, вообще всё то, что составляет красоту математической науки, взятой независимо от её приложений. Именно практические приложения и оцениваются в первую очередь широкими массами учащихся средней школы.

Чтобы вытравить из школьного преподавания математики всякие следы субъективного характера её изложения, необходимо обеспечить у самого учителя правильное понимание математики как науки, отражающей пространственные формы и количественные отношения действительного мира. Учитель должен понимать, что существуют два пути изложения любой математической дисциплины: генетический, показывающий, как исторически вырабатывались абстрактные понятия и предложения науки в процессе решения разнообразных практических задач, встававших перед людьми, и аксиоматический, дающий систему науки в наиболее законченном виде, когда её изложение начинается с перечня основных понятий и с перечня тех аксиом, которые представляют собой косвенное определение этих понятий, а всё дальнейшее получается дедукцией из этих элементов науки. Учитель математики политехнической средней школы должен в первую очередь знать и ценить генетическое изложение своей науки. Желательно, чтобы аксиоматическое изложение завершало изучение каждой математической дисциплины учителем, но ни в коем случае не заменяло генетического её изложения. Политехническая школа нуждается не в таком изложении математики, когда она представляется в виде замкнутой в себе логической системы, ничем не связанной с материальным миром, полностью порождённой человеческим умом, а в таком, когда на каждом шагу видна её связь с материальным миром, когда изучение всех абстрактных её понятий и предложений начинается с рассмотрения конкретных задач, встающих перед людьми в их практической деятельности, и завершается показом использования этих понятий и предложений для наилучшего решения более трудных задач этого рода.

В некоторых изменениях нуждается и применяемый в настоящее время метод преподавания математики в средней школе. Наиболее существенным представляется уменьшение объёма материала, подносимого в готовом виде с той целью, чтобы учащиеся его хорошо поняли и прочно запомнили. Необходимо усиление активности самих учащихся в деле ознакомления с новым материалом; многие новые для них теоремы могут с успехом переоткрываться ими самими в результате решения целесообразно подобранных задач, после чего возникает потребность в их обобщении и доказательстве. Огромное значение имеет та проверка на опыте правильности получаемых заключений, о которой речь была выше.

Многое из того, о чём была речь выше, может быть сделано учителем математики в рамках существующей в настоящее время программы и при использовании существующих в настоящее время учебников. Но назрели и некоторые изменения в программе, желательна некоторая её перестройка. Необходимо усиление разделов, относящихся к технике вычислений, прежде всего внимание к правилам округления результатов действий над приближёнными числами, к вычислениям по способу границ, к применяемым в технике и физике способам оценки точности приближённых чисел, к различным счётным приборам, таблицам, номограммам, приближённым формулам и т. д. Должна быть усилена связь между геометрией и черчением, особенно в стереометрии (проекционные чертежи). Программу следует разгрузить от таких явно устаревших разделов, как теория соединений, и от подробного изучения комплексных чисел, остающихся в средней школе без применения, от излишне подробного изучения обратных тригонометрических функций и некоторых других разделов, не имеющих ни теоретического, ни практического значения, но зато добавить некоторые новые разделы. Так, например, изучение теории пределов, остающееся в настоящее время почти без применения, желательно дополнить изучением понятия производной функции, что позволит существенно повысить идейно-теоретический уровень изучения элементарных функций, с которыми учащиеся имеют дело в курсах алгебры и тригонометрии.

В настоящее время ведётся интенсивная работа по пересмотру действующей программы школьного курса математики в сторону политехнизации. Академия педагогических наук разработала проект программы, этот проект напечатан и распространён среди учителей для обсуждения, которое развернулось самым широким образом.

Переработка программы должна повлечь за собой и замену по крайней мере части существующих учебников, как руководств, так и задачников, новыми. После уже состоявшейся замены старого задачника по алгебре, составленного Н. А. Шапошниковым и Н. К. Вальцовым ещё в последней четверти XIX в., задачником П. А. Ларичева, на очереди — замена арифметического задачника Е. С. Березанской новым сборником арифметических задач для

V и VI классов, составленным С. А. Пономарёвым и Н. И. Сырневым и получившим уже утверждение Министерства просвещения РСФСР. В дальнейшем можно ожидать и других замен принятых в настоящее время стабильных учебников.

В заключение настоящего параграфа перечислим некоторые статьи и книги, рассматривающие вопросы преподавания математики при переходе к политехническому обучению.

1. Мельников М., Маркушевич А., Леонтьев А., Скаткин М., Малышев М., Политехническое обучение в средней школе, «Учительская газета», № 88 от 1 ноября 1952 г.

2. Андронов И., Требования жизни, «Учительская газета», № 102 от 24 декабря 1952 г. В этом же номере газеты несколько статей других авторов по отдельным вопросам, связанным с преподаванием математики в политехнической школе.

3. Калашников А. Г., редактор, Вопросы политехнического обучения в школе. Сборник статей, в том числе статьи по вопросам преподавания математики Н. Н. Никитина, П. Я Дорфа, В. П. Анисимова, П. И. Сорокина, С. Н. Андреева (последняя статья рассматривает вопрос о преподавании черчения, которое в политехнической школе должно быть очень тесно связано с математикой), изд. Академии педагогических наук, 1953.

4. Фетисов А. И., Шевченко И. Н., Гончаров В. Л., Гибш И. А., Преподавание математики в школе в свете задач политехнического обучения. Материалы в помощь учителю, изд. Академии педагогических наук, 1953.

5. Пономарёв С. А., К вопросу о политехническом обучении в преподавании математики, «Математика в школе», 1953, № 3, стр. 1—10.

6. Задачи с практическим содержанием, «Математика в школе», 1953, № 6, стр. 81—83.

7. Азия А. П., К вопросу об элементах политехнизма на уроках математики, «Математика в школе», 1954, № 1, стр. 54—57.

Из работ более раннего времени полезные сведения для политехнизации преподавания математики дают статьи С. М. Чуканцова (важнейшие перечислены на стр. 109).

§ 14. Начальный (пропедевтический) и основной (систематический) курсы.

Взяв какой-либо вопрос курса математики, мы можем изучить его в рамках установленной программы полностью, во всей его общности, включая и все предусмотренные программой его приложения, а затем перейти к следующему вопросу, который также изучается полностью, и т. д. В противоположность этому «линейному» или «поступательному» изложению существует другой способ, именуемый «концентрическим», когда к одному и тому же вопросу приступают два и более раз, сперва рассматривая более лёгкие его части или применяя более доступный, но менее совершенный метод изложения и доводя дело до практических приложений приобретённых небольших сведений, а потом на более или менее значительный срок оставляя этот вопрос с тем, чтобы впоследствии вновь к нему вернуться, подвергая его более глубокому изучению. Такие концентры естественно получаются, например, при изучении дробей: в начальной школе учащиеся приобретают первое знакомство с половинами, четвертями, десятыми и некоторыми другими долями, накопляют необходимые наглядные представления, с ними связанные, решают простейшие задачи на них, а в дальнейшем, в V классе, вновь обращаются к изучению дробей, рассматривая дроби с произвольными знаменателями, действия над которыми уже нельзя выполнять «по свободному соображению», и усваивают соответствующую теорию.

Если такое разделение на концентры затрагивает целый ряд связанных между собой вопросов, говорят о «начальном», или «пропедевтическом» (подготовительном), курсе и о курсе «основном», или «систематическом». Последний термин надо признать неудачным: противопоставлять пропедевтическому курсу систематический нельзя, так как и пропедевтический курс должен излагаться в определённой системе. В начальной школе учащиеся проходят начальный курс дробей, а в V классе — основной их курс. В VIII классе изучается начальный курс тригонометрии, в котором рассматриваются только функции острого угла, а в IX и в X классах — основной её курс, в котором углы берутся уже любой величины. Существуют разные взгляды на целесообразность введения в среднюю школу начального курса геометрии, о чём будет речь в IV части настоящей книги, но необходимость самых кратких сведений по геометрии в начальной школе, обеспечивающих уменье сознательно пользоваться мерами длины, площади, объёма, общепризнана.

При концентрическом изложении: 1) получается возможность больше считаться с возрастными особенностями учащихся, выбирая для каждого класса только посильный материал; 2) передвигается на более ранний срок использование изученной части теоретического материала для практических его приложений в простейших задачах; 3) обеспечивается более прочное усвоение программного материала, так как к одним и тем же вопросам приходится возвращаться два и более раз. Таковы положительные стороны концентрического расположения. Отрицательными его сторонами являются: 1) большая затрата времени; 2) опасность потери целостного представления о данной дисциплине, изучаемой по частям с более или менее значительными интервалами; 3) возможность путаницы в головах учащихся, если изучение отдельных концентров недостаточно продумано и согласовано. При правильном планировании работы отрицательные стороны концентрического расположения сводятся к минимуму, но тем не менее вопрос о преимуществах линейного или концентрического расположения некоторых разделов среднешкольного курса математики представляет собой большую сложность и решается разными методистами по-разному.

Мы будем подробно рассматривать его в нескольких конкретных случаях при рассмотрении частных методик. Сейчас отметим лишь одно категорическое требование ко всякому первому концентру: как бы упрощённо он ни излагался, нарушение принципа научности недопустимо. Большая доступность изложения должна обеспечиваться надлежащим отбором материала, часто заменой логического доказательства проверкой на опыте, но отнюдь не искажением существа дела.

При изучении первого концентра учащиеся получают неполные знания, но не должны получать ничего такого, от чего в дальнейшем пришлось бы отказываться.

§ 15. Учебный план и программа математики в средней школе.

Советская средняя школа отводит на изучение математики очень много времени, а именно свыше 1 200 уроков, т. е. примерно 20% всего предусмотренного учебным планом числа уроков (по всем предметам). Если прибавить сюда время, затрачиваемое каждым учащимся на выполнение домашних заданий по математике, что составляет в среднем около получаса на урок, а всего около 600 часов, а также время на подготовку к экзаменам по математике и проведение их, то окажется, что каждый учащийся средней школы тратит на работу по математике в течение 6 лет (с V класса по X включительно) примерно 2 000 часов. При правильной постановке дела за это время можно сделать очень много, и жалобы учителей на недостаток времени в большинстве случаев совершенно неосновательны. Они оправданы только тогда, когда класс в силу тех или иных причин, например из-за длительного перерыва в занятиях по математике, сильно запущен, и приходится серьёзно заниматься исправлением недочётов предыдущих лет, иногда начиная очень издалека.

В V класс учащиеся приходят (должны приходить) с твёрдым знанием арифметики целых чисел, включающей нумерацию, 4 действия над натуральными числами любой величины, метрическую систему мер, уменье решать несложные текстовые задачи, с небольшими сведениями о дробях и с некоторыми сведениями по геометрии.

Объём материала, который должен быть изучен по математике в V—X классах средней школы, точно установлен государственной программой, которая является законом для учителя. В программе указано недельное число часов, отводимых учебным планом на математику, дан перечень тем с краткими указаниями по каждой, указано число часов, отводимых на отдельные темы как в классе, так и дома. Общие установки о характере изучения материала каждого класса даны в объяснительной записке, которая предпослана программе.

Министерство просвещения ежегодно переиздаёт программу, внося в неё на основе опыта школ некоторые (очень небольшие) изменения, и начинающий учитель должен прежде всего обзавестись экземпляром программы текущего года.

§ 16. Политико-воспитательная работа на уроках математики.

В. И. Ленин говорил, что коммунизму нужно учиться, «только связывая каждый шаг деятельности в школе, каждый шаг воспитания, образования и учения неразрывно с борьбой всех трудящихся против эксплуататоров» (В. И. Ленин, Соч., т. 31, изд. 4-е, стр. 271).

Следовательно, основной принцип, каким должно руководствоваться учителю при выборе тех или иных методов коммунистического воспитания,— это воспитание молодёжи в духе беззаветной преданности и служения интересам советского народа, тесная связь воспитания с повседневной борьбой трудящихся за коммунизм.

Борьба за отличную успеваемость, за прочное овладение основами наук — решающее звено в деле коммунистического воспитания учащихся.

Первейшей обязанностью школьника является его отличная учёба. Товарищ Сталин в своей речи на VIII Всесоюзном съезде ВЛКСМ 16 мая 1928 г. сказал: «... Чтобы строить, надо знать, надо овладеть наукой. А чтобы знать, надо учиться. Учиться упорно, терпеливо» (И. В. Сталин, Соч., т. 11, стр. 76—77.)

Основная роль в деле коммунистического воспитания учащихся принадлежит учителю. Учитель математики в борьбе за прочное овладение основами наук должен вести преподавание так, чтобы у учащихся:

1) воспитывалось материалистическое мировоззрение;

2) воспитывалось чувство советского патриотизма и национальной гордости;

3) развивалось логическое мышление;

4) развивались волевые качества (смелость, настойчивость, самостоятельность, ответственность, аккуратность и т. д.).

Вся история развития математических понятий показывает ложность положения идеализма о математике как о продукте свободного творчества мышления математиков. На уроках математики при обзорах отдельных тем учитель должен показать условия и причины, вызвавшие те или другие понятия или давшие толчок развитию того или другого раздела. Эти примеры учитель всегда может привести из истории математики. Ученики должны понять, что математика, как и всякая другая наука, имеет предметом изучения объективную реальность. Отличие математики от других наук состоит в том, что она изучает только количественные и пространственные формы реального мира, абстрагируется от их материального содержания.

Мы знаем, что первейшей обязанностью перед народом, первейшим патриотическим долгом каждого ученика перед родиной является его отличная учёба в школе.

Если мы говорим об изучении математики, то в современных условиях для советской учащейся молодёжи её изучение является, как указал М. И. Калинин, совершенно необходимым. Необходимым потому, что: «Во-первых, математика дисциплинирует ум, приучает к логическому мышлению. ... Во-вторых, ... диапазон практического применения математики огромен. Какую бы науку вы ни изучали, в какой бы вуз ни поступали, в какой бы области ни работали, если вы хотите оставить там какой-нибудь след, то для этого везде необходимо знание математики... И потому, если вы хотите участвовать в большой жизни, то наполняйте свою голову математикой, пока есть к тому возможность. Она окажет вам потом огромную помощь во всей вашей работе»,— говорил Михаил Иванович Калинин учащимся восьмых, девятых и десятых классов средних школ Ленинского района Москвы 17 апреля 1941 г.*.

Надо обратить особое внимание на вопрос о выработке у учащихся умений и навыков применения полученных знаний на практике, ибо знания сами по себе ещё недостаточны для того, чтобы быть готовым всегда выполнить свой патриотический долг перед советской родиной. Нужно ещё уметь применять полученные знания, а знать и уметь — это не одно и то же. Не только сказать или рассказать о применении того или иного раздела математики должен учитель, а и научить своих учащихся применять полученные знания — вот что должен всегда иметь в виду учитель математики и что он обязательно должен делать. Надо привить ученику критическое отношение к получаемым ответам, т. е. привить ему уверенность в безошибочности решения.

К сожалению, не все учителя уделяют должное внимание этому вопросу, и особенно мало проявляют свою инициативу в этом отношении учителя математики. Не все отделы математики в должной мере используются преподавателями математики в целях привития учащимся умений и навыков активной деятельности, практического применения полученных знаний. Вот два примера.

Несколько учащихся VII класса установили в зале Дворца пионеров новогоднюю ёлку.

— Семнадцать метров высотой,— заявляет один ученик.

— Ну, этого быть не может,— возражают ему,— в зале невозможно вместить ёлку семнадцати метров высотой.

— Ну, не семнадцать, так пятнадцать обязательно будет,— уверенно отвечает другой.

Это говорит о том, что у этих учащихся нет конкретного представления о метре, а также и о том, какова средняя высота классной комнаты (зал двусветный, значит, примерно, в два раза выше).

Другой пример. Умножая на 26 сумму в 28 руб. 5 коп., 11 учащихся V класса одной средней школы из 14 решавших получили в ответе 74 руб. 10 коп. вместо 729 руб. 30 коп. Здесь дело не только в том, что учащиеся допустили ошибку в вычислении. Более печальным является тот факт, что учащиеся не проверили полученный ответ, что они сочли возможным сдать учителю работу с таким «ответом». А ведь так легко прикинуть в уме: 20 руб. × 20 уже даёт 400, следовательно, умножая 28 руб. 5 коп. на 26 мы должны получить во всяком случае более 400 руб., а уж никак не 74 руб. Очевидно, никто из 11 учащихся, допустивших в данном вычислении ошибку, не сделал хотя бы приблизительной (на глаз) проверки результата.

Формализм знаний, механическое усвоение правил, отрыв преподавания математики от задач воспитания активных строителей коммунистического обще-

* М. И. Калинин, О коммунистическом воспитании, 1948, стр. 128.

ства — вот причина подобных недостатков в знаниях учащихся. На все такие вопросы практического применения получаемых учащимися знаний учителю математики необходимо обратить серьёзное внимание.

Конечно, было бы неправильным из случаев, подобных приведённым, делать вывод, что наши учащиеся вообще плохо знают математику: отмечаемые недостатки относятся к отдельным классам и даже к отдельным учащимся.

Переходим ко второму из указанных выше разделов политико-воспитательной работы — к воспитанию чувства советского патриотизма и национальной гордости. «Проповедь советского патриотизма не может быть оторванной, не связанной с корнями прошлой истории нашего народа... Ведь советский патриотизм является прямым наследником творческих дел предков, двигавших вперёд развитие нашего народа»*.

Вот почему, заботясь о формировании большевистской идеологии у молодого поколения, школа должна показывать великие достижения нашей страны, нашего народа в прошлом и особенно в настоящем, раскрывать перед учащимися заслуги лучших наших деятелей математической науки, сделавших в прошлом такие огромные вклады в мировую науку, делающих ещё большие вклады в наше время. Совершенно правильно делают те учителя, которые на своих уроках или в математическом кружке знакомят молодёжь с «Арифметикой» Л. Ф. Магницкого, с книгой, которую гениальный М. В. Ломоносов относил к «вратам своей учёности», с жизнью и деятельностью Н. И. Лобачевского, который имел смелость порвать с многовековыми традицями в геометрии и выступить против идеалистической философии Канта. Это мог сделать только человек с передовым материалистическим мировоззрением, человек, для которого материализм был орудием отыскания истины. В некоторых школах стало хорошей традицией в день 8 марта ставить доклады о жизни и трудах С. В. Ковалевской, показывая молодёжи на ярком примере разницу в положении женщин в царской России и теперь.

Учителю математики невозможно не ознакомить своих учащихся с работой основателя русской математической школы П. Л. Чебышева, так много сделавшего и в самой математической науке, и в её приложениях на практике. Не пытаясь за недостатком места даже перечислить имена русских математиков первой величины, которых стало так много в советское время и с которыми можно знакомить школьников, отметим несколько статей и книг, которые следует рекомендовать учителю участникам кружка для подготовки к такой работе.

1. Член-корреспондент АН СССР Делоне Б. Н., Математика и её развитие в России, изд. «Правда», 1948.

2. Леонард Эйлер, Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти, изд. АН СССР, 1938.

---

* М. И. Калинин, О коммунистическом воспитании, 1948.

3. Профессор Кузнецов Б. Г., Ломоносов, Лобачевский, Менделеев, изд. АН СССР, 1945.

4. Александров П. С., Н. И. Лобачевский — великий русский математик, изд. «Молодая гвардия», 1946.

5. Молодший В. Н., Новые книги о Николае Ивановиче Лобачевском, «Математика в школе», 1946, № 1.

6. Член-корреспондент АН СССР Делоне Б. Н., Петербургская школа теории чисел, изд. АН СССР, 1947.

7. Молодший В. Н., Пафнутий Львович Чебышев, «Математика в школе», 1946, № 3.

8. Ковалевская С. В., Воспоминания и письма, очерки, изд. АН СССР, 1951.

9. Люди русской науки. Очерки о выдающихся деятелях естествознания и техники. С предисловием и вступительной статьёй акад. С. И. Вавилова, т. I и II, Огиз, Гостехиздат, 1948.

10. Математика в СССР за 30 лет (1917—1947). Сборник статей под редакцией А. Г. Куроша, А. И. Маркушевича, П. К. Рашевского, Огиз, Гостехиздат, 1948*.

11. Вопросы истории отечественной науки (общее собрание Академии наук СССР 5. I. 1949), изд. АН СССР, 1949. Статьи П. С. Александрова, В. И. Смирнова, Б. Н. Делоне и др.

12. Иосифу Виссарионовичу Сталину Академия наук СССР, изд. АН СССР, 1949. Статьи И. М. Виноградова, Н. М. Мусхелишвили и др.

В этот перечень не вошли произведения, указанные в списке, приведённом в конце настоящей 1-й части.

Одной из постоянных форм коммунистического воспитания учащихся является воспитание их на содержании задач, показывающих великие достижения нашей страны.

При решении задач учитель математики может показать учащимся грандиозные темпы нашего социалистического строительства, колоссальный размах восстановительных работ народного хозяйства районов и областей нашей страны, подвергшихся варварскому нашествию фашистских извергов, и дальнейшее развитие в них, как и во всей стране, всего народного хозяйства родины, энтузиазм советских людей и сопоставить это с тем упадком, который сейчас переживают капиталистические страны и т. д. Приведём несколько примеров таких задач.

Задача 1. Законом о пятилетнем плане восстановления и развития народного хозяйства СССР на 1946—1950 гг. был установлен план восстановления и нового строительства государственного жилого фонда на пятилетие в размере 72,4 млн. *кв. м* жилой площади. Если считать, что на каждого человека требуется 9 *кв. м* жилой площади, сколько граждан СССР будут обеспечены новой жилой площадью за пятилетие? Сколько таких городов, как Калуга, в котором в 1939 г. было 89,4 тысячи жителей (см. Большую советскую энциклопедию, изд. 2, т. 19), можно было бы заново построить за счёт этой новой жилой площади?

Ответ: 8,05 миллиона человек, 90 городов.

Задача 2. В 1914 г. в начальных и средних школах России училось 8 025 тыс. человек, а в 1940 г. количество учащихся в начальных и средних школах СССР достигло 34 800 тыс. На сколько процентов увеличилось число школьников?

Ответ: на 334%.

---

* Книга рассчитана на научного работника-математика. Её чтение требует специальных математических знаний.

Задача 3. Указом Президиума Верховного Совета СССР от 7 января 1948 г. присвоены звания Героя Социалистического Труда 85 передовым работникам сельского хозяйства Красноярского края, в том числе С. Ф. Белоусову, колхознику колхоза «Завет Ленина», получившему урожай пшеницы в 31,1 *ц* с гектара с площади в 32 *га*, и Д. М. Бондарю, старшему агроному Идринской МТС Идринского района, получившему в обслуживаемых колхозах урожай пшеницы в 22,52 *ц* с гектара с площади в 612 *га*. Взяв средний урожай пшеницы с гектара в 20 *ц*, найти, сколько пшеницы сверх этой средней нормы получили на своих посевных площадях оба награждённых?

Ответ: первый 355,2 *ц*, второй 1 542 *ц*.

Газеты и журналы, повседневная производственная жизнь колхоза, района, области ежедневно дают нам богатый материал для составления подобного рода задач с конкретным содержанием, решение которых помогает ученику более глубоко понять окружающие явления, героику наших повседневных дел, пафос строительства рабочих и крестьян, сравнить это с тем, что происходит за границей, в капиталистических странах. Но для успеха этой своей работы учитель сам должен быть глубоким патриотом своей родины, знать свою родину, не жалея сил отдаться делу коммунистического воспитания подрастающего поколения.

Глава III

МЕТОДЫ И ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

§ 17. Систематическое изложение материала преподавателем. Лекция и урок.

Основная форма организации учебной работы в советской начальной и средней школе — урок, на котором применяются разнообразные методы обучения. Из них важнейший — систематическое изложение материала преподавателем. Если вся работа построена на таком изложении, мы имеем лекционный метод, широко применяемый в высшей школе и предполагающий способность учащихся (слушателей) к длительному сосредоточенному вниманию, а также уменье фиксировать всё существенное, изложенное на лекции, в виде конспекта, который служит основой для дальнейшей работы. Учащихся старших классов средней школы постепенно приучают к слушанью лекций, предлагая их изредка, как по вопросам, входящим в программу, так и в порядке внеклассной работы. Применение лекционного метода особенно уместно при обзоре пройденного с целью его повторения. Если средняя школа научила своих выпускников слушать лекции (это не приходит само собой, а требует осторожной, хорошо продуманной работы учителя), то она сделала большое дело по части их подготовки к занятиям в вузе.

Противоположностью лекционному методу является метод самостоятельного изучения нового материала по книгам, при котором руководитель лишь указывает, что надо сделать, помогает при затруднениях, контролирует результаты. В какой-то очень скромной мере метод самостоятельного изучения нового материала применим и в средней школе, о чём будет идти речь в § 20.

Новый материал даётся на уроке не только в форме, приближающейся к лекционной, когда учитель говорит, а учащиеся слушают и записывают, но и в форме живой беседы, когда идёт диалог между учителем и классом и новые знания приобретаются как ответы на вопросы, рассмотренные в беседе. Этот «катехизический» метод, применяемый тем шире, чем младше ученики, рассматривается в следующем параграфе.

Кроме сообщения новых знаний, урок преследует еще такие цели: 1) контроль результатов самостоятельной работы учащихся; 2) закрепление изученного нового материала посредством беседы о нём, посредством повторения учащимися объяснений учителя, решения примеров на его применение и т. д.; 3) упражнение в решении задач, преследующее не одну только цель закрепления только что приобретённых знаний, а и выработку навыка в применении всех имеющихся знаний к разрешению новых вопросов как чисто практического, так и теоретического характера; 4) планирование дальнейшей самостоятельной работы учащихся (чаще всего в виде очередного задания на дом); 5) повторение ранее изученного материала (за более или менее длительный промежуток времени).

Иногда весь урок посвящается одной из этих целей: урок по изучению нового материала, урок по упражнению в решении задач, урок-опрос, урок — контрольная работа, урок-повторение. Но чаще урок строится по смешанному типу, когда в начале несколько минут отводится контролю, проверке выполнения очередного домашнего задания, дальше идёт рассмотрение нового материала, потом он закрепляется, и, наконец, даётся задание на дом.

Главная задача учителя — так построить урок, чтобы ни одна его минута не проходила бесполезно ни для одного из учащихся, чтобы класс интенсивно работал, максимально используя общение с учителем. Уроки начинающего учителя чаще всего страдают двумя следующими недостатками: либо не все учащиеся работают по материалу урока, либо они работают по материалу урока, но так, как могли бы работать и без учителя, дома.

Искусство планировать и проводить полноценные уроки есть одна из важнейших составных частей педагогического мастерства. Такие уроки должны захватывать всех учеников, объединять их в одной общей работе, организовывать их дальнейшую самостоятельную работу.

§ 18. Эвристический метод. Катехизический метод.

Эвристическим (от греческого слова «эврика» — нашёл) называют такой метод обучения, когда руководитель не сообщает учащимся готовых подлежащих усвоению сведений, а подводит учащихся к самостоятельному переоткрытию соответствующих предложений и правил. Например, вместо того, чтобы сообщать учащимся правило вычисления площади прямоугольника в готовом виде («Чтобы найти площадь прямоугольника в некоторых квадратных единицах, надо перемножить числа, выражающие длины основания и высоты этого прямоугольника в соответствующих линейных единицах»), учитель может предложить такую задачу: «Дан прямоугольник с основанием 6 *см* и высотой 5 *см*; если его разрезать на квадратики со сторонами по 1 *см*, сколько таких квадратиков получится?» Добавляется указание — начертить этот прямоугольник, показав линии разреза, и найти самый короткий способ решения. Обычно уже в III классе начальной школы ученики быстро соображают, что нет надобности пересчитывать все получившиеся квадратики, а достаточно выполнить умножение числа 6 на число 5. Когда все поняли, что это действительно так, надо добиться уменья отчётливо описать то, что здесь делается: прямоугольник разрезается сперва на прямоугольные же полоски, каждая длиной в 6 *см* и шириной в 1 *см*, а затем каждая такая полоска разрезается на квадратики и даёт 6 квадратиков. Все полоски одинаковы, а потому для ответа на вопрос задачи надо повторить число 6 столько раз, сколько получено полосок, т. е. 5 раз. Затем задача обобщается на произвольные целые значения сторон и вырабатывается точная и краткая формулировка подлежащего запоминанию правила.

Преимущества эвристического метода перед методом сообщения готовых знаний заключаются в обеспечении большей ясности понимания (здесь совершенно исключается механическое запоминание фраз без понимания фактов, о которых идёт речь), большей прочности усвоения, большего интереса к изучаемому материалу и уверенности в своих силах. Эвристический метод развивает сообразительность, инициативу, привычку к самоконтролю, это метод активного, а не пассивного приобретения знаний. Его недостаток — в необходимости тратить время на поиски тех приёмов и заключений, какие приводят к цели, в невозможности поставить дело так, чтобы все учащиеся сразу получили правильные результаты. При его применении индивидуальные различия учащихся сказываются особенно резко: то, что один улавливает сразу, другому никак не даётся, несмотря на ряд дополнительных указаний. Неосторожное применение эвристического метода, когда никто или почти никто из класса не в состоянии выполнить задания, действует крайне отрицательно: зря тратится время, теряется вера в успех. Однако вдумчивое, осторожное применение наряду с другими методами и метода эвристического вполне уместно на любой ступени обучения математике.

Чем больше посильной эвристики, укладывающейся в предусмотренные планом работы сроки, тем лучше. Надо только иметь в виду, что результаты самостоятельной работы учащихся должны быть тщательно проверены и надлежащим образом исправлены в классе, притом безотлагательно, иначе в памяти учащихся могут быть закреплены неправильные выводы.

Катехизическим, или *вопросо-ответным*, методом называют такой, когда учащиеся приходят к новым для них выводам, отвечая на надлежаще подобранные вопросы учителя. Это тот же эвристический метод, но осуществляемый без сколько-нибудь длительной самостоятельной работы учащихся. Пользуясь им, необходимо иметь в виду следующее:

1. Вопросо-ответный метод имеет успех далеко не всегда и не везде. Он уместен, если получение нужных выводов обеспечивается концентрацией внимания учащихся на фактах, уже им известных, и на сопоставлении таких фактов. Планируя урок, надо хорошо продумать, какие его части лучше построить на вопросах учителя и ответах учащихся, а какие выгоднее изложить самому учителю.

2. Иногда наблюдаются уродливые извращения вопросо-ответного метода, когда учитель бракует ответы учащихся, хотя они правильны, но не таковы, какие запланировал учитель. Класс недоумевает и томится, тщетно стараясь угадать, чего же хочет учитель. Ответ, по существу правильный, никогда нельзя отвергать, и если он уводит в нежелательную сторону, учащихся надо вывести на требуемый путь дополнительными вопросами.

3. Главная ценность вопросо-ответного метода в том, что он активизирует мысль учащихся, и работу надо строить так, чтобы в ней участвовал весь класс. Ошибку делает учитель, сперва указывающий, кто должен ответить, а потом формулирующий вопрос. Если поступать наоборот, все ученики больше думают над вопросом. Когда вопрос поставлен, надо выждать, пока не поднимется несколько рук, но спрашивать надо не только тех, кто готов отвечать, а и остальных, всячески вовлекая их в общую работу. Получив несколько ответов, как правильных, так и неправильных, надо добиваться, чтобы учащиеся сами в них разобрались и во всяком случае хорошо поняли, в чём ошибка. Яркие примеры неправильного применения вопросо-ответного метода описаны в педагогических статьях Л. Н. Толстого.

§ 19. Решение задач.

Прежде всего установим точный смысл самого термина «математическая задача». Оставляя совершенно в стороне большой методологический вопрос о взаимоотношениях математической теории и математической практики, о чём была речь выше, в § 4, ограничим себя рамками методики преподавания математики в самом тесном смысле слова: что такое «задача» для школьника, изучившего или изучающего некоторый раздел школьного курса математики?

У проф. С. О. Шатуновского в его введении к переводу книги А. Адлера «Теория геометрических построений» (Учпедгиз, 1940) читаем следующее: «Задача есть изложение требования «найти» по «данным» вещам другие, «искомые» вещи, находящиеся друг к другу и к данным вещам в указанных соотношениях». Под это определение, однако, не подойдут многие задачи на доказательство.

Более правильным представляется следующий ответ: «задачей» следует называть любой математический вопрос, для ответа на который недостаточно простого воспроизведения чего-либо из пройденного курса — какого-нибудь определения, текста или доказательства теоремы, текста аксиомы или правила.

Если принять это определение, т. е. считать, что термины «задача» и «упражнение» равнозначны, то вопрос, например, о том, как с помощью линейки и циркуля разделить данный отрезок пополам, не является «задачей» для школьника, изучившего по учебнику раздел «Основные задачи на построение». Вопрос же о том, например, как доказать, что биссектрисы двух смежных углов взаимно-перпендикулярны, является задачей, а именно задачей на доказательство. Наиболее простые задачи, состоящие в одном лишь применении того или другого установленного в теоретической части курса предложения (правила, формулы, теоремы) к данному частному случаю, будем называть «примерами», независимо от того, выражено ли условие задачи формулой или словесным текстом, причём существенно, чтобы выбор применяемого предложения подсказывался условием задачи и не вызывал затруднений. Все задачи, не сводящиеся к примерам, можно назвать задачами в собственном смысле слова». Итак, примеры мы будем рассматривать как простейшие задачи, а не противополагать их задачам.

Бывают задачи, решение которых требует расширения существующей теории, но школьные задачи обычно решаются на основе известных из теоретической части курса предложений. Вся трудность здесь в надлежащем выборе этих предложений, в комбинировании их, во введении разного рода дополнительных преобразований, дополнительных элементов фигуры, делающих возможным применение тех или иных предложений. Иногда вся трудность сводится к математическому оформлению её условий, к переводу их, так сказать, на общепринятый математический язык (решение задач на составление уравнений). В то время как решение задач-примеров имеет целью либо содействие лучшему усвоению теории, либо тренировку в технике применения того или иного приёма, решение задач в собственном смысле слова имеет целью развитие математического мышления и является первичной формой творческой исследовательской работы. В этом и заключается значение задач в школьном курсе математики.

Задачу можно считать решённой тогда и только тогда, когда найденное решение: 1) безошибочно, 2) обосновано, 3) имеет исчерпывающий характер. Эти три требования являются совершенно категорическими: если не выполнено хотя бы одно из них, то решение или вовсе непригодно (если оно неверно), или неполноценно (если оно верно, но не обосновано, или верно и обосновано, но не полно). Кроме этих трёх обязательных требований, можно указать ещё следующие четыре необязательных, но весьма желательных: 4) решение должно быть по возможности простым, 5) оно должно быть надлежащим образом оформлено (запись решения), 6) желательно, чтобы был ясен путь, приводящий к решению, 7) иногда желательно обобщение решённой задачи.

Рассмотрим подробно каждое из этих семи требований.

1. Безошибочность решения. Прежде всего возникает вопрос, как убедиться, что найденное решение правильно. К сожалению, в глазах большинства школьников единственное средство проверить себя — это заглянуть в ответ, данный в конце книги. Конечно, ответы в задачниках — вещь очень полезная, дающая большую экономию времени и сил, и их надо использовать. Необходимо, однако, приучать школьников к самопроверке: жизнь, ставя задачу, обычно не даёт никакого готового ответа на неё, да и в задачниках ответы бывают не всегда. Особенно важно, чтобы школьник сумел с честью выйти из того затруднения, в какое он попадает в случае неверного ответа, указанного в книге (опечатка или ошибка в ответе или в тексте задачи). Надо знакомить учеников с приёмами проверки (контрольные формулы, подстановка найденного корня в данное уравнение, проверка решения аккуратным чертежом, повторное вычисление по возможности другим способом и т. д.) и от времени до времени упражнять учеников в их применении. Весьма полезна предварительная грубо приближённая оценка искомой величины («прикидка»), позволяющая сразу обнаружить неправильность ответа во многих случаях. Приучать к самопроверке следует уже на занятиях по арифметике, где это особенно просто, но на практике её применяют, к сожалению, сравнительно редко.

Из-за чего бывают ошибки при решении задач и как с ними бороться? Наиболее часто — это простые недосмотры, борьба с которыми есть борьба за внимательное, вдумчивое отношение ко всему, что школьник говорит и пишет. Далее идут ошибки в применении различных правил и теорем, обусловленные недостаточным их усвоением. Они тем реже, чем лучше изучена теория. Немало встречается ошибок логического характера; прямую теорему смешивают с обратной, не понимают связи прямой теоремы с обратной и противоположной, берут частный случай и делают из него неправильный общий вывод и т. д. Анализ допущенных учащимися ошибок, указания на способы их разыскания, исправления, предупреждения — одна из очень важных задач, стоящих перед учителем математики. Имеют некоторое значение и меры предупредительного свойства: разбор типичных распространённых ошибок, в частности разбор математических софизмов (ложных доказательств).

Основное значение имеет воспитание чувства ответственности учащихся за полученное ими решение. Достоверность получаемых результатов есть одна из характерных особенностей математики, и надо добиваться, чтобы школьник действительно гарантировал правильность своих утверждений или, по крайней мере, чтобы он ясно различал то, что им безусловно установлено, от того, что является лишь более или менее вероятной догадкой. Когда на приёмном экзамене в вуз экзаминатор предлагает выяснить, является ли простым или составным число 899, то в 9 случаях из 10 экзаменующийся, убедившись, что данное число не кратно 2, 3, 5, 7, 11, утверждает, что оно простое. На вопрос, ручается ли он за правильность своего утверждения, обычно получается утвердительный ответ, после чего следует предложение экзаминатора представить данное число в виде разности 30^2-1^2 и заключение, что $899 = 31 \cdot 29$. Как назвать такого рода положение иначе, как отсутствием у отвечающего чувства ответственности за свои высказывания?

2. *Обоснованность решения.* Получить правильное решение задачи ещё недостаточно: надо доказать, что оно правильно, так как пока доказательства нет, не может быть и уверенности в том, что оно правильно. А ведь нередко приходится слышать от учеников и даже от учителей: «Я задачу решил, но затрудняюсь доказать, что это решение правильно». Вот характерный случай: требуется установить, при каких значениях x трёхчлена $y = 2x^2 - 8x + 8{,}5$ имеет положительные значения. После нескольких пробных подстановок учащийся делает заключение, что $y > 0$ при любом действительном значении x. На предложение учителя доказать, что это действительно так, ученик выдвигает контрпредложение: нет, докажите вы, что это не так; я знаю, что это вам не удастся. В результате поучительный разговор, который заканчивается признанием необходимости дать доказательство утверждения, что $y > 0$ при любом x, и разысканием этого доказательства: $y = 2x^2 - 8x + 8{,}5 = 2\ (x-2)^2 + 0{,}5 \geqslant 0{,}5$. Хорошим доводом в пользу необходимости доказательства является в данном случае рассмотрение той же задачи для трёхчлена $y = 8x^2 - 166x + 861$, для которого подсказываемое опытом заключение, что $y > 0$ при любом x, оказывается неверным, так как $y = 8(x - 10{,}25)(x - 10{,}5)$, $y < 0$ для значений x между 10,25 и 10,5, $y = 0$ при $x = 10{,}25$ и при $x = 10{,}5$.

Доказательство принято выделять в особую часть при решении геометрических задач на построение. Нет никакой надобности требовать такого выделения при решении каждой задачи, но совершенно необходимо как можно чаще спрашивать «почему»? Ответ может состоять либо в простой, но точной ссылке на то или иное предложение, доказанное ранее, или в более или менее пространном рассуждении. Решение задачи должно быть не оторванным от теории, а во всех своих частях основываться на ней.

Здесь, однако, необходимо предостеречь от излишней торопливости в требовании обоснования. При поисках решения мысль отливается в чёткие формы не сразу, громадное значение здесь имеет интуиция, суждение по аналогии, догадки, пусть иногда неправильные. Чёткости надо добиваться при окончательном оформлении рассуждения, считая, что решение не закончено, пока нет соображений, доказывающих правильность каждого его шага.

3. *Исчерпывающий характер решения.* Если найден один ответ задачи, её нельзя считать решённой полностью: надо найти и все другие ответы, если они существуют, или доказать, что их нет; надо рассмотреть все особые случаи, какие могут представиться при решении. Это требование обычно соблюдается в некоторых, но не во всех разделах курса. Так, имея уравнение третьей степени и найдя один его корень, десятиклассники знают, что они обязаны найти и два других корня, что и делают. Но если дать им решить систему $ax + by = a^2 + b^2$, $x + y = a + b$, то, получив решение $x = a$ и $y = b$ и сделав проверку, они считают своё дело законченным. Между тем это решение является единственным только при $a \neq b$. Если же $a = b$, то данная система уравнений имеет бесчисленное количество решений, выражаемых формулами $x = t$, $y = 2a - t$, где t — любое число. Если учитель не хочет осложнять решение данной системы этим маленьким исследованием, он должен, задавая эту систему, указать, что $a \neq b$. Другой пример: записывая формулу $+\sqrt{a^2} = a$, надо делать оговорку, что она верна только при $a \geqslant 0$; при $a < 0$ она заменяется другой, а именно: $+\sqrt{a^2} = -a$. Для всех случаев верна формула $+\sqrt{a^2} = |a|$. Аналогичные осложнения возникают на каждом шагу при выполнении геометрических построений.

При решении геометрических задач на построение рассмотрение условий существования решений, а также выяснение их числа и особых случаев, какие могут представиться, принято выделять в особую заключительную часть, проводимую под названием «исследования» после анализа, построения, доказательства. Рассмотрение различных случаев, какие могут представиться при решении уравнений, проводится в X классе при изучении специального раздела программы («Исследование уравнений»). В результате учащиеся выносят из школы неправильное представление, что только здесь и надо заниматься исследованием решения. Представляется совершенно необходимым, чтобы учащиеся проводили исследование (т. е. ставили вопрос о существовании решения, о числе решений, об особых случаях, какие могут представиться) при решении каждой задачи, особенно такой, какая ставится в общем виде. Так, относительно решения уравнения $ax = b$ учащийся должен твёрдо знать, что это действие выполнимо и даёт единственный результат лишь при условии $a \neq 0$ и что при $a = 0$ оно либо вовсе невыполнимо (при $b \neq 0$), либо выполнимо, но даёт бесконечно много значений (при $b = 0$).

4. *Простота решения.* В большинстве случаев можно указать не один, а несколько различных способов решения данной задачи. Отсюда естественно вытекает требование — из нескольких возможных решений указать то, которое скорее и проще ведёт к цели. Особенно ценны так называемые «изящные» решения,

т. е. решения более сложных задач исключительно простыми средствами.

Необходимо обращать внимание учащихся на возможность различных вариантов решения одной и той же задачи, всячески поощрять поиски таких вариантов, заниматься сравнительной их оценкой, останавливаться на лучших. Общие методы решения задач должны стать прочным достоянием учащихся, но наряду с этим должно быть налицо и уменье использовать особенности каждой частной задачи, позволяющие решить её проще. Нередко задача очень упрощается от одного лишь удачного выбора той неизвестной величины, через которую выражаются другие неизвестные. Например, чтобы найти четыре последовательных целых числа, произведение которых a дано, можно обозначить буквой x наименьшее из них, и для решения задачи придётся решать уравнение $x(x+1)(x+2)(x+3)=a$, содержащее после раскрытия скобок x, x^2, x^3, x^4. Если же обозначить буквой x среднее арифметическое искомых чисел, то получаем уравнение $(x-1{,}5)(x-0{,}5)(x+0{,}5)(x+1{,}5)=a$, содержащее только x^2 и x^4. Иногда такое упрощение обеспечивается привлечением какой-нибудь вспомогательной величины, не упоминаемой в условии задачи. Так, например, при решении прямоугольного треугольника по сумме катетов s и высоте h, проведённой к гипотенузе, полезно взять площадь этого треугольника. Обозначив катеты через x и y, гипотенузу через z, получаем систему трёх уравнений $x+y=s$, $xy=zh$, $x^2+y^2=z^2$, из которой легко исключается x и y. На удачном преобразовании данных и искомых основаны некоторые методы решения геометрических задач на построение.

Вот пример задачи, которую ученик IX класса может решать, используя геометрическую прогрессию, а ученик V класса станет решать несравненно проще: из пунктов *А* и *Б*, отстоящих друг от друга на 36 *км*, навстречу друг другу одновременно выходят два пешехода и двигаются равомерно со скоростью 4 и 5 *км* в час; одновременно с ними начинает своё движение велосипедист, который едет с постоянной скоростью 10 *км* в час от *А* до встречи со вторым пешеходом, потом обратно до встречи с первым, затем обратно до встречи со вторым и т. д. до тех пор, пока пешеходы не встретятся; требуется узнать, какое расстояние покроет за всё это время велосипедист. Задача решается на основе того соображения, что до встречи пешеходов пройдёт $36:(4+5)=4$ часа, а поэтому велосипедист покроет всего $10 \cdot 4 = 40$ *км*. Как поучительно сопоставить это решение с первым (в котором используется геометрическая прогрессия), проведя его полностью!

Много вариантов, рассмотрение которых весьма полезно, доставляют уже простейшие арифметические задачи-примеры. Так, например, для получения суммы $13\frac{3}{4}+7\frac{8}{15}+8\frac{7}{15}+21\frac{1}{2}$ можно привести все четыре слагаемых к общему знаменателю 60, а можно взять порознь сумму двух средних слагаемых, равную 16, и сумму двух крайних, равную $35\frac{1}{4}$; этим способом окончательный результат, равный $51\frac{1}{4}$, получается гораздо проще.

Говоря об особой ценности «изящных» решений сложных задач, надо предостеречь учителя от чрезмерного увлечения ими, приводящего к тому, что ученик начинает бояться таких задач, «складывать» руки перед ними, так как «изящного» решения он не видит, а «не изящное» не будет одобрено учителем. Нужно приучать ученика брать задачу любыми доступными ему средствами, находить любое правильное решение её, пусть весьма далёкое от изящества, и лишь потом, когда решение получено, стараться упрощать его.

5. Рациональная запись решения. Кроме особенно простых задач, разрешаемых без всякой записи, решение задачи требует выполнения разного рода письменных выкладок, иногда чертежа. Существующая в подавляющем большинстве случаев практика, которую нельзя одобрить, такова: учащийся делает задачу «начерно», записывает выкладки кое-как, в беспорядке, столь же небрежно выполняет чертёж; понять что-либо в черновике другому лицу невозможно, да и сам автор разбирается в нём с трудом; затем идёт переписка решения «набело», причём выкладки сопровождаются более или менее пространными пояснениями, часто излишне многословными, чертежи выполняются более аккуратно.

По поводу записи решения можно высказать следующие общие пожелания:

а) Запись решения, где бы она ни производилась, в черновике или набело, должна быть аккуратной: цифры и другие знаки должны записываться правильно и чётко, строки должны идти параллельно друг другу и краю листа, всё неверное и ненужное аккуратно зачёркивается, различные части решения отделяются одна от другой.

б) Следует различать два вида записи: запись краткую, без пояснений, когда фиксируется только то, что не может быть удержано в голове и что нужно для дальнейшего развития решения, и запись более полную — с пояснениями. При краткой записи человек думает только о том, как провести решение и получить ответ, при полной — как это решение сохранить для последующего использования, как сделать его понятным для других. Хотя краткая запись есть большей частью запись только для себя, она, разумеется, должна быть настолько аккуратной и упорядоченной, чтобы по ней можно было восстановить весь ход решения, например, с целью проверки и отыскания допущенной где-то ошибки.

в) Полная запись решения требует гораздо большей затраты времени, чем краткая, но она очень полезна и как средство выработки навыка в чётком оформлении проводимого рассуждения и как средство контроля сознательности в решении. При занятиях арифметикой обычно требуют от учеников постановки вопросов к каждому выполняемому действию. Эта хорошая, но не единственно возможная форма полной записи решения арифметической задачи. При дальнейшем продвижении полную запись с целью экономии времени можно применять всё реже и реже, но всё же от времени до времени следует к ней возвращаться во всех изучаемых в школе отделах математики.

г) Нужно всемерно бороться за такое качество черновика, при котором его переписка набело становится излишней. Это вполне возможно в случае, если не требуется полной записи, и получается само собой, если твёрдо держаться требования аккуратности всякой записи; при этом обеспечивается большая экономия времени.

Полезно указать учащимся несколько продуманных образцов краткой и полной записи решения разного рода задач, но было бы ошибкой требовать от них неукоснительного соблюдения какой-либо обязательной формы. Пусть каждый вносит свои усовершенствования в запись, добиваясь полной ясности, удобообозримости, экономии. Чем старше учащийся, тем более самостоятельным он должен быть в выборе формы записи, но требования к упорядоченности всякой записи должны оставаться в силе всегда.

6. Ясность пути, приводящего к решению. Решение задачи иногда бывает весьма искусственным, основанным на особых приёмах, хорошо приводящих к цели, но неожиданных, не связанных ни с какой общей теорией. Никаких возражений против использования таких приёмов делать не приходится; можно даже сказать, что в них-то и заключается математическое творчество. Однако учащиеся, знакомясь с такими искусственными приёмами, обычно спрашивают: «А как догадаться, что здесь надо применить именно этот приём, а не какой-нибудь другой?» Конечно, уменье находить такие приёмы даётся только путем большой практики, но всё же можно высказать пожелание о том, чтобы при решении задачи освещался и путь, каким автор пришёл к указанному им решению. При решении геометрических задач на построение путь, приводящий к требуемому результату, выясняется в анализе, когда мы, предполагая задачу решённой, ищем связи между данными и искомыми элементами. Подобный анализ осуществим и во многих других случаях. Очень часто путь к общему решению уясняется из рассмотрения ряда частных случаев. Вот пример: требуется найти все простые числа, которые после прибавления к ним 10 и 14 дают простые же числа. Для решения рассмотрим отдельно числа, кратные 3, затем числа вида $3n+1$; наконец, числа вида $3n+2$. Среди чисел, кратных 3, есть только одно простое, а именно само число 3, удовлетворяющее и двум остальным требованиям задачи, так как $3+10=13$ и $3+14=17$ — числа простые. Все числа вида $3n+1$ после прибавления к ним 14 дают числа вида $3n+15$, кратные 3, а все числа вида $3n+2$ после прибавления к ним 10 дают числа вида $3n+12$, тоже кратные 3. Таким образом, требованиям задачи удовлетворяет одно только число 3. Чтобы прийти к этому простому решению, а именно, чтобы догадаться рассмотреть отдельно числа вида $3n$, $3n+1$, $3n+2$, достаточно внимательно рассмотреть несколько пар чисел, получаемых в результате испытания небольших простых, например, $5+10=15$, $5+14=19$, затем $7+10=17$, $7+14=21$ и т. д. Легко заметить, что одно из чисел каждой пары кратно 3, а после этого естественно получается и приведённое выше решение.

7. Обобщение отдельных задач.

Иногда полезно *обобщать* решённые задачи. Так, после решения любой задачи с числовыми данными полезно рассматривать ту же задачу с данными, выраженными в общем виде. Например, от решения уравнения $5x+6=2x+18$ естественно перейти к решению уравнения $ax+b=cx+d$, различая случаи, когда $a \neq c$ (существует единственный корень), когда $a=c$, $b \neq d$ (корня нет), когда $a=c$, $b=d$ (корень — любое число). Научившись разлагать на множители такие трёхчлены, как $x^2+8x+24$ или $x^2+8x-20$, можно поставить вопрос об общем их виде и прийти к полезным формулам $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ и $x^2+(a-b)x-ab=(x+a)(x-b)$. Вычислив значение объёма цилиндра V по данным числовым значениям радиуса его основания r и высоты h, ставим вопрос о других задачах, в которых из трёх чисел V, r, h два даны, а третье разыскивается. Соблюдая должное чувство меры, считаясь с общим уровнем математического развития учащихся, учитель может сделать вполне естественной постановку многих теоретических вопросов, идя этим путём обобщения решаемых задач, именно этим путём и шло развитие самой науки.

Если математическая теория изучается без практики в решении задач, получаемое знание не действенно и не прочно. Но чтобы эта практика приносила всю ту пользу, какую она может и должна приносить, к решению задач надо предъявлять рассмотренные семь требований. Ученик, умело и привычно их соблюдающий, будет обладать не только некоторой суммой математических сведений, но и будет находиться на довольно высокой ступени математической культуры.

Разобрав важный вопрос о требованиях, какие надлежит предъявлять к решению математических задач, посмотрим, как вырабатываются навыки в решении задач в условиях работы с классом.

Первый шаг в этом направлении естественно образует *показ* учителем образцов решения типичных задач. Этот показ проводится при разумном использовании вопросо-ответного метода, но всё же в нём основное — изложение самого учителя: он выступает здесь как мастер, демонстрирующий своё искусство с тем, чтобы передать его своим ученикам. Сформулировав чётко и ясно как условие задачи, так и её вопрос, надо убедиться, что это содержание задачи ясно для всех, а для этого полезно практиковать повторение полного текста задачи кем-либо из учащихся. Тратить время на диктовку всего текста задачи нет надобности: совершенно достаточна краткая запись числовых данных. Далее идёт решение задачи, начинающееся с соображений о плане решения, после которых делаются попытки его осуществления. Отнюдь не обязательно, чтобы они сразу приводили к желаемому результату. Очень полезно рассматривать различные возможные пути решения, выбирать наилучший из них, после чего идёт проверка и надлежащее оформление решения.

За показом решения следует работа по усвоению решения задачи учащимися. В случае более сложной и трудной задачи полезно повторение решения, данного учителем, одним из учащихся, но большей частью можно сразу перейти к решению аналогичных задач: у доски уже не учитель, а ученик, каждый шаг решения обсуждается при активном участии всего класса.

Дальше идёт задание на дом с целью закрепления и развития усвоенного способа решения. Очень полезно практиковать задание на дом задач, аналогичных решённым в классе. Постепенно и осторожно вводится новый материал, заставляющий искать самостоятельно выход из затруднений. Каждое задание на дом должно быть очень тщательно продумано учителем. Оно должно быть посильным для большинства учеников, но не слишком простым. Лучше всего, если в нём есть часть, вполне посильная для всех, невыполнение которой есть просто свидетельство того, что ученик не работал, и есть часть более трудная, с которой справятся самостоятельно только более сильные и которая даётся как необязательная с тем, однако, чтобы на следующем уроке при проверке домашнего задания и её усвоили все.

Тренировке в решении задач рассмотренного типа и близких к ним приходится нередко отводить целые занятия. Их можно строить двояко: либо на сообщениях учащихся о той работе, какая ими была проделана дома, с обсуждением этих сообщений, с проведением проверки, с выяснением и исправлением ошибок, с проведением решений иными способами, либо на решении новых задач. Первый путь вообще предпочтительнее, но не исключается и второй. Основное — чтобы весь класс участвовал в решении, чтобы каждый выносил что-то полезное для себя из любого такого урока. Плохо, если в классе есть ученики, не понимающие того, что делает на доске их более сильный товарищ, но не менее плохо, если часть класса скучает, потому что на доске делается то, что им хорошо знакомо и неинтересно. Избежать этих двух крайностей — предмет величайшей заботы учителя. Отметим, что чем старше класс, тем лучше проходят уроки, главное содержание которых — рассмотрение сообщений учащихся о найденных ими самостоятельно решениях задач. Решившие выступают как докладчики, остальные критикуют, дополняют, улучшают. В конце концов по каждой задаче делаются некоторые общие выводы. Заключительную часть работы по решению задач на каждый пройденный раздел программы составляют контрольные мероприятия, лучше всего — письменные контрольные работы, домашние и классные.

Отметим ещё важность выработки навыков в устном решении более лёгких задач, т. е. решении без записи, когда или вообще ничего не записывается (ни условие, ни выкладки, ни результаты, в руках у учащихся нет никаких письменных принадлежностей), или записываются только условия и результаты, а все операции (действия) производятся в уме (иногда эти два вида работы различают, называя последний «полуписьменным»). При устном решении всегда обеспечивается большая сознательность, и практиковать такие решения полезно на всех ступенях обучения математике, а не только на занятиях арифметикой, как это обычно делается.

§ 20. Самостоятельная работа учащихся.

Самостоятельная работа учащихся, т. е. их работа в отсутствии учителя или по крайней мере без обращения к его помощи в течение какого-то промежутка времени, является важнейшей частью всей работы по изучению математики. При отсутствии правильной организации самостоятельной работы самые интересные, захватывающие уроки приносят сравнительно мало пользы.

Каждый учащийся приобретает навык в самостоятельной работе путём опыта, постепенно устанавливая наиболее рациональные её формы, различные для разных типов памяти и внимания, весьма зависящие от возраста. Но от учителя зависит сделать процесс приобретения этого навыка более или менее успешным: *надо учить учиться*. Прежде всего учитель должен всегда обеспечивать всех учащихся заданиями для самостотельной работы, выполняемой как в классе, так и дома. Задания для самостоятельной работы в классе даются очень краткие, на 10—15 минут, чтобы тут же на уроке проверить результаты, выяснить трудности, дать необходимые дополнительные разъяснения. Они широко практикуются в младших классах, но не следует отказываться от них и в старших. Пройдя какой-либо новый трудный вопрос, иногда бывает полезно тотчас же проверить, насколько он усвоен, проведя в классе небольшую самостоятельную работу, которая может состоять или в ответе на вопросы теоретического характера, или в решении несложных задач, письменных или даже устных. Пока идёт работа, учитель имеет возможность выяснить, как с ней справляются отдельные учащиеся. Последующая проверка и исправления существенно облегчаются, если два-три лучших ученика выполняют решение на классной доске. Конечно, надо принять меры к тому, чтобы эта самостоятельная работа не превратилась в простое списывание с доски готового появляющегося на ней решения.

Самостоятельная работа, как в классе так и на дому, состоит в изучении определённого материала, когда задачей учащегося является понять и запомнить этот материал, и из получения новых для учащихся результатов, из ответов на поставленные вопросы.

При изучении и усвоении нового материала, объяснённого учителем в классе, ученик должен прежде всего самым тщательным образом разобраться в этом материале по книге и по своим записям, сделанным на уроке. Такие записи никогда не бывают полными, и работа над ними тем производительнее, чем они свежее: разобраться в записях в тот же день, когда они были сделаны, несравненно проще, чем через несколько дней. Разбираясь в них, делают поправки и добавления, лучше на полях, которые для этого надо оставлять достаточной ширины. Ещё лучше, если вся запись переписывается набело с необходимыми добавлениями и исправлениями. Очень важно выяснить точные формулировки определений и теорем, восстановить ход рассуждения в доказательствах, устанавливая основания для каждого шага в виде ссылок на ранее изученные определения, теоремы, правила, стараясь дать себе отчёт в том, почему сделан именно такой, а не иной шаг. Крайне вредна поверхностность, когда человек не даёт себе труда разобраться в каждой детали полностью, однако не следует и слишком долго задерживаться на отдельных пунктах. Отметив, что такой-то пункт в таком-то отношении неясен, двигаются дальше с тем, чтобы впоследствии к нему вернуться и устранить неясность. Большую пользу приносит придумывание собственных примеров.

Когда весь материал разобран, его надо усвоить, т. е. запомнить настолько, чтобы быть в состоянии его воспроизвести в связной форме, не нуждаясь в наводящих вопросах. Надо представить себе слушателя, вполне подготовленного к пониманию этого материала, но незнакомого с ним и настроенного самым критическим образом, внимательно слушающего объяснение, и излагать ему этот материал, отвечая на все вопросы, какие он может поставить. Обычно после нескольких первых шагов наступает остановка — неясно, что делать дальше, требуется наведение справки в источнике (книге или тетради). Пока объяснение не дойдёт до конца, таких справок может понадобиться несколько. Повторяя объяснение, ученик убеждается, что остановок произошло уже меньше. В конце концов он добивается полного овладения материалом — при изложении не понадобилось ни одной справки. Имея и записи, и книгу, надо использовать и то и другое, так как в записях нередко бывают ошибки, замечаемые лишь при сличении с книгой, но бывают и такие указания учителя, каких в книге нет вовсе. Работу можно считать законченной, если всё изложение проходит гладко, если найдены объяснения ко всем тёмным местам, если ко всем определениям и теоремам найдены примеры.

Очень полезны взаимопроверка и взаимопомощь учащихся. Нередко неясное одному хорошо понял другой, а отсутствие недочётов в пробном изложении обеспечивается в большей мере, если налицо не воображаемый, а реальный внимательный и придирчивый слушатель. Сначала один излагает, другой слушает, потом роли меняются.

При самостоятельном решении задач надо, во-первых, уяснить себе суть дела, тщательно разобравшись в данных условиях и в поставленном вопросе, во-вторых, полезно подумать, не было ли раньше аналогичных задач, и если были, то нельзя ли использовать те же способы решения, внося в них надлежащие изменения; в-третьих, если приходится искать решение заново, надо вспомнить, что известно о тех вещах, о каких идёт речь в задаче, наводя в случае надобности и справки по книгам; в-четвёртых, надо искать путь к решению, применяя либо прямой (синтетический) метод, когда идут от данного к искомому, либо косвенный (аналитический) метод, когда исходят из допущения, что задача решена, чтобы потом, выяснив путь решения, пройти по нему ещё раз, уже от данных к искомым. Тщательно выясняется, является ли найденное решение исчерпывающим. Найдя один путь, приводящий к цели, смотрят, нет ли других. Сопоставляя полученные результаты, взаимно проверяя их, думают о других способах проверки. Наконец, выбрав лучший вариант решения, оформляют его, применяя краткую, но ясную и точную запись, и снабжают её, если это требуется, необходимыми пояснениями.

Коллективная работа при решении задач приносит меньше пользы, чем при изучении готового материала, так как здесь инициатива каждого участника работы либо мешает инициативе других, либо подавляется (когда силы очень различны). Лучше ограничить коллективное решение задач совместной их постановкой и совместным обсуждением результатов, полученных в порядке индивидуальной работы каждым.

Самостоятельная работа учащихся даёт полный эффект только в том случае, если она своевременно тщательно проверяется, и учитель математики должен обращать на эту сторону дела не меньше внимания, чем на подбор материала для заданий. Навыки систематической и продуктивной самостоятельной работы даются учащимся далеко не сразу. Помимо указаний, которые учитель даёт целому классу, много раз возвращаясь к этому вопросу, рассматривая примеры правильной и неправильной самостоятельной работы отдельных учащихся, большую пользу приносят беседы учителя на эту тему с отдельными учащимися, имеющие целью выяснить, как каждый работает, и помочь устранить недостатки. Многого можно добиться, если взять за правило беседовать ежедневно с каждым, не выполнившим в этот день очередного задания. Много интересного по вопросу о выработке навыка в самостоятельной работе учитель найдёт в статье [I,54 а].

§ 21. Наглядность при обучении математике.

Как известно, наглядным называется такое обучение, которое основывается на конкретных образах, воспринимаемых непосредственно, а не на отвлечённых понятиях, лишь постепенно вырабатываемых из этих конкретных образов. Значение принципа наглядности для плодотворности обучения осознано давно, и в каждом учебнике педагогики подробно рассматриваются различные стороны его применения. Наглядность при обучении математике обеспечить легче, чем при изучении любой другой науки, и тем не менее на практике нередко встречаются и случаи недостаточного внимания к принципу наглядности, и случаи злоупотребления им. Правильное применение принципа наглядности обеспечивает в процессе обучения тот переход от живого созерцания к абстрактному мышлению, о котором говорится в знаменитой формулировке, данной Лениным для выражения сущности теории познания («от живого созерцания к абстрактному мышлению и от него к практике — таков диалектический путь познания истины, познания объективной реальности»). Нельзя перешагнуть через первую ступень, ступень живого созерцания, так как только на её основе можно выработать полноценное абстрактное мышление, но и нельзя чрезмерно задерживаться на первой ступени, так как без своевременного развития элементов абстрактного мышления усвоение основ любой науки невозможно.

Чем выше общий уровень умственного развития учащихся, тем легче совершается этот переход от живого созерцания к абстрактному мышлению; забота учителя об обеспечении должной меры наглядности преподавания постепенно уменьшается по мере того, как учащиеся переходят из одного класса в следующий, и в этом отношении разница между работой в V и X классах очень велика. Но полностью эта забота не должна исчезать никогда: на любой ступени обучения учитель должен выяснить, имеется ли у его учеников достаточно прочная база наглядных представлений, вполне чётких и ярких, и помогать созданию такой базы. Если эта база отсутствует, знания учащихся становятся бесплодными, формальными. Это не знания действительного мира, обеспечивающие возможность его покорения, его использования для блага людей, а бесполезное знание слов и фраз, за которыми для ученика не стоит никакой реальности.

Наглядность в обучении математике обеспечивается следующими мерами:

1. Надо как можно полнее использовать окружающую нас действительность. Вот в VII классе идёт урок геометрии, первое ознакомление с параллелограмом. Как не обратить внимание учащихся на те фигуры, какие рисуют на полу классной комнаты солнечные лучи, попадающие в неё через оконные стёкла? Как не спросить, какую форму имеет окрашенная масляной краской часть стены («панель») в лестничной клетке? Используются вещи, находящиеся перед глазами, а также вещи, которых перед глазами нет, но которые каждый знает, например, фигуры, имеющиеся в тетрадях, графлёных в «косую клетку».

2. Надо применять специальные математические наглядные пособия, как самодельные, так и покупные. Первые в большом количестве могут быть изготовлены из подручного материала, последние приобретаются в магазинах. Например, полоска бумаги после повторного складывания иллюстрирует понятие половины, четверти, восьмой доли т. д. Применение вырезанного из картона

круга, разделённого на равные секторы, позволяет составить яркое, прочно запоминающееся представление о связи между длиной окружности и площадью круга. Трудная теорема о возможности разрезать любую треугольную призму на три равновеликие пирамиды становится гораздо более доступной, если при её рассмотрении пользоваться не только чертежом, но и моделью. Модель треугольный призмы, разрезанной на три равновеликие пирамиды, может изготовить каждый десятиклассник из какого-нибудь подходящего материала: умеющие пилить — из дерева, умеющие клеить — из картона, все прочие — из большой картофелины или брюквы.

3. Надо добиваться, чтобы учащиеся умели свободно пользоваться простейшими математическими инструментами. Линейка с делениями на сантиметры и миллиметры, угольник, циркуль, транспортир — эти вещи должны быть всегда в распоряжении учащихся. Если их нельзя купить, их надо сделать, что всегда возможно (суррогат циркуля изготовляется из полоски плотной бумаги или картона с дырочками для булавки и карандаша). Труднее, но всё же вполне возможно обеспечить учащихся самодельными счётными логарифмическими линейками, изготовляемыми из полоски миллиметровой бумаги и позволяющими получать результаты с двумя значащими цифрами, хорошо уясняя теорию этого несложного, но столь ценного счётного прибора.

Есть ряд простых математических инструментов и приборов, знакомство с которыми весьма полезно и которые нетрудно изготовить своими силами. К ним относятся отвес, ватерпас, эккер, палетка (прозрачная пластинка с нанесённой на неё сеткой из квадратиков, служит для приближённого определения площадей фигур с неправильным контуром), палочки Непера (простейший прибор, механизирующий умножение) и др. Отметим, однако, что наряду с более или менее точными чертежами, выполняемыми с помощью инструментов, учащиеся должны уметь делать приличные чертежи от руки для решения задач и доказательства теорем (как в тетради, так и на доске). Учитель должен показывать им в этом отношении пример, избегая без особой необходимости применять инструменты при выполнении чертежей мелом на классной доске.

4. Своеобразными наглядными математическими пособиями являются всевозможные чертежи и рисунки, выполняемые и учителем, и учащимися в целях лучшего уяснения многих вопросов. О значении чертежа в геометрии говорить не приходится (о некоторых трудностях, связанных с выполнением чертежей в стереометрии, речь будет в 4-й части). Но нередко применение чертежей и рисунков полезно и на занятиях арифметикой (см. § 4 2-й части).

Каково бы ни было наглядное математическое пособие, будет ли оно вещью, имеющей своё собственное назначение, но используемой при обучении математике, или специально для этой цели изготовленной, оно приносит тем больше пользы, чем больше ученик с ним работает. Простой показ его на уроке даёт мало. Гораздо лучше, если учащиеся проделают с ним какие-либо манипуляции, необходимые для выполнения некоторого относящегося к нему задания. Ещё лучше, если учащиеся сами такое наглядное пособие изготовят. Так, хотя готовыми угольниками нетрудно обеспечить всех учащихся, полезно предварительно предложить им изготовить самим угольники из бумаги посредством её складывания: здесь практически используется и усваивается определение прямого угла как угла, равного своему смежному.

Хотя и редко, но в деле использования наглядных пособий всё же бывают увлечения, перегибы. Нельзя забывать о том, что одной из задач обучения математике, да и образования вообще, является выработка навыков абстрактного мышления, и всевозможные наглядные пособия имеют целью облегчить выработку этих навыков. Применяя наглядные пособия, учитель математики помогает ученику лучше разобраться в том или ином сложном вопросе. Но если при некотором напряжении учащийся хорошо уяснит себе дело и без наглядных пособий, их применение может только повредить. Чем старше класс, тем вообще меньше нужды в наглядных пособиях.

§ 22. Внеклассная и внешкольная работа по математике.

Работа учителя математики в средней школе не ограничивается учебными занятиями по обычному расписанию и проверкой приготовления домашних заданий: с большой пользой для дела проводятся некоторые внеклассные и внешкольные мероприятия, из которых важнейшие — дополнительные занятия с отстающими, научный кружок для сильнейших, математические олимпиады, геодезические работы на местности, математические экскурсии.

Дополнительные занятия с отстающими представляют собой весьма сильное средство борьбы за повышение успеваемости. Очень часто наблюдаются случаи, когда ученик, пропустив несколько уроков по болезни или в силу другой причины, теряет нить, не понимает объяснений учителя, не справляется с домашними заданиями, оказывается отстающим, и, если во-время не принять надлежащих мер, то незначительный пробел может иметь весьма серьёзные последствия, вплоть до потери года. В таких случаях необходимы дополнительные индивидуальные занятия, быстро исправляющие положение. Очень важно, чтобы эта помощь оказывалась непременно в индивидуальном порядке с точным учётом того, что именно требуется данному ученику. Занятия с группой отстающих обычно приносят мало пользы, так как причины отставания бывают весьма различными, и общие занятия могут оказаться столь же мало продуктивными, как и лечение группы больных разными болезнями одним и тем же лекарством. Занимаясь с отстающим в индивидуальном порядке и притом достаточно часто, лучше всего ежедневно, можно быстро преодолеть его отставание, после чего он пойдёт наравне со своими успевающими товарищами по классу. Начинающему учителю надо усиленно рекомендовать лично проводить такие индивидуальные занятия с отстающими; они очень помогают понять те трудности, какие мешают успешной работе по математике, очень помогают лучше проводить уроки. Если такие занятия проводят старшие товарищи отстающих, то учитель должен тщательно планировать и контролировать эту работу. Надо иметь в виду, что такие занятия полезны не только для отстающего, но и для помогающего ему товарища и нередко приводят к выявлению педагогических дарований.

Большого внимания требуют также учащиеся, проявляющие особую склонность к математике и легче других справляющиеся с обязательной работой над программным материалом; желательно использовать имеющийся у них интерес к математике для углублённой работы по материалу, выходящему за рамки обязательной программы. Здесь тоже необходим индивидуальный подход: выявление интересов, индивидуальные задания, консультации. Если набирается несколько учащихся, выполняющих такие индивидуальные дополнительные задания, рекомендуется организовать математический кружок, периодически собирающийся для заслушивания сообщений о результатах работы.

За последние годы в ряде городов СССР ежегодно проводятся математические олимпиады, в которых участвуют сильнейшие математики — учащиеся средних школ. Обычно такие олимпиады слагаются из лекций, читаемых на популярно-научные математические темы, выходящие за рамки среднешкольного курса, из консультаций, из соревнований по решению более трудных и интересных задач. Каждый учитель математики должен содействовать вовлечению лучших своих учеников в такие олимпиады, сам принимать участие в их организации, использовать эти олимпиады для повышения интереса к математике среди своих учеников.

Работа школьных математических кружков и городских математических олимпиад освещена в ряде журнальных статей.

Хорошим средством разнообразить работу по математике является организация некоторых занятий на открытом воздухе. Они могут быть самого различного содержания: здесь и измерение расстояний как непосредственное, шагами или рулеткой, так и косвенное, с использованием некоторых рассматриваемых в курсе геометрии и тригонометрии приёмов, измерение недоступных высот, разбивка фигур на местности (например, площадки для игр, огорода), простейшие работы по съёмке планов, нивелирование. Часть таких работ можно проводить, не имея никакого специального инвентаря, часть — с применением кое-каких самодельных инструментов. Главное условие — знакомство самого учителя с теоретической и практической стороной дела, которое можно почерпнуть из многочисленных книг и журнальных статей, например [IV, 29].

Интересный, но редко применяемый вид внешкольной работы по математике представляют собой математические экскурсии: учитель, совершая прогулку с группой учеников, останавливает их внимание на различных вещах, в которых можно наблюдать какие-либо проявления математических свойств. Вот длинный ряд уходящих в даль телеграфных столбов, установленных по прямой; возникает ряд вопросов. Как обеспечить строго прямолинейное их расположение? Каково расстояние между каждыми двумя соседними столбами (глазомерное определение с последующей проверкой измерением)? Как использовать счёт столбов для измерения расстояний? Как найти высоту столба, не влезая на него? Каковы те кривые, по которым располагаются подвешенные к столбам провода? Вот закругление трамвайного пути; каков радиус дуги окружности, по которой идёт рельс (вопрос легко решается, если измерить хорду a и стрелку b, используя уравнение $(2x - b)\,b = \frac{1}{4}a^2$, где x — искомый радиус)? Вот водосточная труба, в которой ночью замёрзла вода, сбегавшая с крыши дома; сколько будет весить лёд, если он заполнит эту трубу полностью? Не беда, если не на все возникшие вопросы удастся сразу получить исчерпывающие ответы; сделанные измерения и наблюдения позволят вернуться к этим вопросам в дальнейшем и решить их, наведя надлежащие справки. Но лучше, если задача тут же, на экскурсии, доводится до конца, что всегда возможно, если руководитель заранее продумал все её детали и заблаговременно запасся необходимыми данными.

Материал для математических наблюдений и выводов встречается на каждом шагу: расстояния до недоступных предметов, расстояния между недоступными точками, высóты, углы наклона, площади, объёмы, веса́ — всё это даёт возможность ставить и разрешать, часто с последующей проверкой непосредственным измерением, множество интересных, поучительных, посильных для учащихся вопросов, теснейшим образом связанных с физикой, техникой, астрономией. Часто один и тот же вопрос решается разными, более или менее совершенными способами. Так, расстояние до некоторого ориентира можно оценить на глаз, затем измерить его шагами, наконец, рулеткой. Какое оживление вносят такого рода экскурсии! Как они поднимают интерес к математике, мобилизуя на преодоление неизбежных трудностей!

Примеры того, какой математический материал можно использовать во время экскурсии, читатель найдёт в брошюре Я. Сергеева [I, 50].

Глава IV

ОРГАНИЗАЦИЯ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

§ 23. Распределение программного материала. Календарный план.

Работа учителя математики по проведению занятий в том или ином классе начинается с тщательного планирования, без которого невозможны ни правильная дозировка заданий, ни контроль их выполнения. Ознакомившись с установками о характере и задачах курса математики в данном классе по объяснительной записке к действующей программе и с самой программой, устанавливающей перечень подлежащих изучению тем и содержание каждой из них, учитель, кроме того, должен точно выяснить положение с итогами работы по математике в этом классе за предшествующий год. Полностью ли пройдена программа? Каковы результаты весенних экзаменов? Что дали осенние экзамены? Каковы знания и навыки учеников, вновь принятых в данный класс? Учитывая все эти обстоятельства, учитель составляет план работы на полугодие, распределяя материал по четвертям, предусматривая повторение и контроль. В основу кладётся то примерное распределение часов по темам, которое дано в программе, но в него вносятся поправки, обусловленные особенностями данного класса. Начинающему учителю очень полезно при планировании работы посоветоваться со своими старшими товарищами. В итоге работы по планированию должен получиться документ, именуемый «календарным планом» и представляемый на утверждение директора. Желательно, чтобы между составлением плана и его утверждением прошёл некоторый срок, чтобы учитель мог внести в первоначальный проект поправки, целесообразность которых выясняется лишь постепенно, но надо иметь в виду, что календарный план должен получить утверждение до 25 августа на 1-ое полугодие, до 5 января на 2-ое.

Утверждённый календарный план является официальным документом и хранится у завуча. Учителю надо иметь у себя под руками его копию. Жизнь нередко требует внесения поправок, но их надо серьёзно продумывать, получать на них санкцию лица, утвердившего рабочий план, фиксировать их как для предстоящего отчёта за истекший год, так и для учёта своего опыта работы на будущее.

Приводим пример календарного плана.

Калининская С. Ш. № 30. Учитель Александров Б. В.

Календарный план по алгебре для VIII класса на первую четверть 1947/48 учебного года (4 часа в неделю, а всего 38 час.)

№№ тем	Содержание работы		Число часов	Календарные сроки	Отметки о выполнении
	Новый материал	Повторение			
1	Раздел «Степени и корни» Степени с натуральными числовыми и буквенными показателями. Степени отрицательного числа	Относительные числа	2	Сентябрь 1, 2	
2	Степень произведения, частного, степени. Квадрат многочлена	Четыре действия над многочленами	3	4, 6, 8	
3	Контрольная работа № 1 и её разбор		2	9, 11	
4	Извлечение квадратного корня из чисел	Формулы сокращённого умножения.	4	13, 15, 16, 18	
5	Понятие об иррациональном числе. Действия над иррациональными числами	Разложение многочленов на множители	2	20, 22	
6	Контрольная работа № 2 и её разбор		2	23, 25	
7	Корень из произведения, частного, степени. Преобразование радикала	Уравнения 1-й степени с 1 неизвестным	3	29, 30 Октябрь 2	

8	Основное свойство корня. Приведение корней к общему показателю. Подобные корни и их приведение	Задачи на составление уравнений	4	Октябрь 4, 6, 7, 9	
9	Контрольная работа № 3 и её разбор		2	11, 13	
10	Шесть действий над радикалами	Системы уравнений 1-й степени и задачи на их составление	4	14, 16, 18, 20	
11	Освобождение от иррациональности в знаменателе		3	21, 23, 26	
12	Решение задач на всё пройденное за четверть		4	27, 28, 30 и 1 ноября	
13	Контрольная работа № 4 и её разбор		2	Ноябрь 3, 4	
14	Подведение итогов работы за четверть		1	6	
		Всего . . .	38		

Примечания.

1. На изучение раздела «Степени и корни» запланировано 38 час. вместо рекомендованных программой 30 час. ввиду пестроты подготовки класса, укомплектованного учениками, ранее обучавшимися в разных школах, и необходимости повторения некоторых предшествующих разделов алгебры. Недостающие 8 час. будут покрыты за счёт уменьшения часов на два следующих раздела, а именно: на «Квадратные уравнения» — до 38 час. вместо 42 и на «Системы уравнений 2-й степени» — до 16 час. вместо 18, а также за счёт общего повторения, на которое предполагается взять 14 час. вместо 16.

2. Большое количество контрольных работ, а именно 4 за четверть, запланировано с целью добиться как можно скорее систематической самостоятельной работы всех учащихся.

3. После каждой контрольной работы предполагается проведение дополнительных занятий с теми, кто выполнит её неудовлетворительно (по понедельникам от 17 до 19 час.). Для учащихся, обнаруживших большие пробелы в знании предшествующих разделов, предполагается организовать регулярные дополнительные занятия не менее трёх раз в неделю.

4. Для учащихся, показавших отличные успехи, после проведения контрольной работы № 1 организуется математический кружок, который будет собираться еженедельно по пятницам от 17 до 19 час., начиная с 12 сентября. Участники кружка получают индивидуальные задания (главным образом по книге Я.И.Перельмана «Живая математика»).

24.VIII. 47. Учитель Б. Александров.

План утверждаю. Для проведения дополнительных занятий отводится комната № 14 по понедельникам, средам и пятницам на время с 16 до 20 час.

30 августа 1947 г. Директор А. Платонова.

§ 24. Изучение учебника, научной и методической литературы. Математическое самообразование учителя.

Установив, что́ именно надо будет изучить в данном классе, учитель тщательно знакомится с содержанием материала учебников и задачников, выясняя, что в учебниках есть, чего в них нет, что изложено достаточно ясно и доступно для учащихся данного возраста, а что потребует дополнительных объяснений. Очень важно детально разобраться во всех примерных решениях задач, приведённых в учебнике, и решить самому по возможности все задачи, имеющиеся на изучаемые разделы программы в задачнике, чтобы знать, какие трудности связаны с их решением для учеников. Руководство и задачник, имеющиеся на руках у каждого ученика,— основные орудия работы учителя математики, и чтобы правильно их использовать, ему надо быть хорошо знакомым со всеми их особенностями. При нормальном положении вещей учитель уже в конце предыдущего учебного года знает, что он будет вести в новом учебном году, и в течение летних месяцев находит время для основательной подготовки, в том числе и для основательного изучения соответствующих частей учебников. Полагаться на то, что учебник рассматривался в педвузе или что по этому учебнику, быть может, шла работа учителя ещё в то время, когда сам он был учеником средней школы, ни в коем случае нельзя: во-первых, с каждым новым изданием учебники исправляются, дополняются, изменяются, а во-вторых изучение учебника учителем имеет иной характер, чем учеником.

Знать в совершенстве свои руководства и задачники учителю необходимо, но ещё далеко не достаточно. Есть немало вопросов программы, вовсе не освещённых или недостаточно освещённых в учебнике. Учитель должен знать предмет глубже и шире, чем предусмотрено программой для школы, иначе он не в состоянии отличить существенное от второстепенного, затрудняется при решении более трудных задач, делает ошибки при ответе на вопросы более сильных учеников. Многие полезные сведения по своему предмету учителя выносят из своих занятий в педвузе, но эти знания нуждаются в постоянном освежении и пополнении, что обеспечивается только самостоятельной работой учителя над теоретической и методической литературой. Есть много хороших книг по всевозможным разделам математики, изданных в прежние годы, и всё время выходят новые книги, предназначенные для учителя математики средней школы. Богатейший и притом в общем отнюдь не устаревший материал содержат такие журналы, как «Математическое образование», выходивший в 1912—1917 гг. и 1928—1930 гг., «Математика в школе», выходивший с 1937 г. (до этого выходил журнал «Математика и физика в школе») и регулярно выходящий в настоящее время. Плох тот учитель, который не интересуется этой литературой, не старается извлечь из неё новое, полезное для своей работы в школе. Велико значение для учителя математики книг и статей, посвящённых непосредственно вопросам методики преподавания математики в средней школе: знакомство с ними позволяет использовать опыт старших товарищей, толкает на искание новых путей, предупреждает возможные ошибки. Но надо остерегаться некритического отношения ко всякого рода методическим советам, даже публикуемым в печати: то, что даёт хорошие результаты в одних конкретных условиях, может ничего не дать в других. Кроме того, встречаются и увлечения, переоценка значения одних сторон за счёт других, не менее важных.

Учитель должен систематически работать над книгами и журнальными статьями, освежая и углубляя запас знаний, вынесенных из вуза, и принимая все меры к тому, чтобы пополнять и расширять этот запас. Учитель, ограничивший себя в области своей специальности кругом одних только школьных учебников и задачников и лишь изредка прибегающий к отдельным методическим статьям, преследующим обычно узко практические цели, рискует выродиться в ремесленника. Ни на одну минуту учитель не должен забывать, что он преподаёт лишь самые начатки большой математической науки, имеющей богатую содержанием историю, бурно развивающейся и находящей всё новые и новые области применения. Изучать историю математики, следить за её развитием и новыми завоеваниями, знакомиться с её приложениями к естествознанию и технике — вот что должен делать учитель для того, чтобы повышать своё мастерство. Ко всему этому в качестве необходимого условия нужно добавить постоянную тренировку в решении разнообразных математических задач повышенной трудности. Такие задачи находятся в специальных задачниках, например [III, 24] и [IV, 23], а также в большом количестве в новых и старых математических журналах.

§ 25. Подготовка учителя к уроку.

Общая подготовка учителя к ведению занятий по данному курсу в данном классе обязательно должна сочетаться с его подготовкой к каждому отдельному уроку. Эта последняя слагается из следующих составных частей: а) выяснения цели урока и общего его характера, б) составления плана урока с примерным распределением времени в минутах на каждую намеченную его часть, а именно: на проверку домашнего задания, на объяснение нового материала, на задание на дом и т. д., в) детального планирования каждой части урока (намечаются ученики, вызываемые к доске с целью проверки их домашней работы, а также спрашиваемые с мест, и те, у кого отбираются тетради; тщательно подбирается материал, который должен быть изложен при объяснении нового вопроса, намечаются вопросы, какие при этом предлагаются классу, предусматриваются различные возможные ответы и затруднения с ответами; намечаются более слабые ученики, которых надо будет спросить особо, чтобы проверить, усвоено ли ими новое; подбираются задачи для решения в классе и для задания на дом и т. д.). Нечего и говорить, что каждая деталь объяснения должна быть тщательно обдумана, каждая задача должна быть заранее решена, притом различными способами. Надо подобрать примеры, иллюстрирующие новый материал, подобрать и проверить наглядные пособия. Начинающим рекомендуется составлять более подробный конспект, оставляя при записи широкие поля для всякого рода пометок о том, что выяснится во время проведения урока. Такие конспекты с пометками очень пригодятся в дальнейшем при повторном проведении того же курса. Более опытные учителя ограничиваются краткой записью, отмечая во всяком случае примеры, задачи, фамилии учеников.

Опыт показывает, что чем тщательнее проведена подготовка учителя к уроку, тем лучше, продуктивнее он проходит.

Подготовлять надо не только ближайший урок, но и 2—3 следующих. Это способствует лучшему использованию времени, которым так надо дорожить: ведя один урок, можно подготовлять лучшее понимание и усвоение следующего.

Ниже приведён пример весьма подробного конспекта урока, а именно одного из уроков, предусмотренных рабочим планом, который был указан в качестве примера в § 23. Начинающему учителю для первых своих уроков рекомендуется составлять именно такой подробный конспект, в котором предусмотрены мельчайшие детали урока. В дальнейшем, по мере накопления опыта, план становится более кратким, но даже у самых опытных учителей он должен содержать, во-первых, всё то, что будет записано на доске и продиктовано учащимся, и, во-вторых, список учащихся, которых надо опросить, или проверить каким-либо другим способом, а также задание на дом.

VIII класс. Урок алгебры 4 сентября 1947 г. (первый урок по теме № 2).

Цель: раскрыть содержание темы, вывести и усвоить правила возведения в степень произведения и частного.

План: а) проверка выполнения домашнего задания (§§ 1 и 2 по Киселёву, ч. 2: переместительное и сочетательное свойства суммы и произведения — по Киселёву, ч. 1, §§ 6 и 8; примеры на возведение в степень чисел) —10 мин.; б) разъяснение содержания новой темы — 5 мин.; в) новый материал — 25 мин.; г) новое задание — 5 мин.

Детализация.

а) Вызвать к доске Нечаева и Степанова для записи всего, что они написали в своих тетрадях в порядке выполнения задания. Все остальные сверяют с этой записью на доске свои записи, готовят вопросы и замечания. Я обхожу всех и проверяю, есть ли решения в тетрадях. Особо проверить, выполнили ли предыдущее задание Макаров и Дайбер, у которых 2 сентября оно сделано не было; переписали ли свои решения Котов, Синицкий, Фёдоров (прошлый раз их решения были выполнены с ошибками и записаны грязно); что сделал Абрамов (2 сентября он отсутствовал, но 3 сентября на занятия явился и должен был узнать о задании от товарищей).

Дать высказаться по записи на доске, ответить на вопросы.

Спросить с мест: что означает запись a^k? чему равно 3^4? 4^3? $(-3)^4$? $(-4)^3$? $(-1)^{1005}$? $(-1)^{1006}$? Как читается правило возведения в степень отрицательного числа? Какое число называется чётным? нечётным? Привести примеры. Является ли нуль чётным или нечётным числом? почему? Привести примеры применения переместительного и сочетательного свойств суммы и произведения. Как формулируется переместительное свойство? Какими формулами можно его выразить? Как формулируется сочетательное свойство и какими формулами оно выражается?

Проверить, усвоены ли достаточно ясно обе формулировки сочетательного свойства: чтобы прибавить сумму, надо прибавить каждое слагаемое одно за другим; сумма не изменится, если какие-нибудь из слагаемых заменить их суммой. Аналогично с произведением.

Наблюдать за Котовым, Дайбером, Стрельцовым и, если они не будут поднимать рук, непременно спросить их.

Взять тетради у Григорьева, Панова, Стрельцова, Тимофеева, сказав, чтобы пришли получить их обратно сегодня же после 5-го урока в учительскую (проверю на свободном 4-м уроке).

б) Новая тема — возведение в степень буквенных выражений, сперва одночленов, так как это легче, потом многочленов (это гораздо труднее, ограничимся только возведением в квадрат, в то время как одночлены будем возводить в любую степень с натуральным показателем). Проверить, помнят ли, что такое буквенное выражение, одночлен, многочлен. Указать, что новой теме будет отведено три урока (4, 6, 8 сентября) и что 9 сентября будет проведена контрольная работа № 1 по темам 1 и 2. Сказать о значении контрольных работ.

в) Правило возведения в степень произведения, частного.

Чему равно $(2 \cdot 10)^3$? Ответ: $2 \cdot 10 = 20$, $20^3 = 8\,000$.

Нельзя ли получить тот же результат, не производя умножения 2 на 10? Можно так:

$(2 \cdot 10)^3 = (2 \cdot 10) \cdot (2 \cdot 10) \cdot (2 \cdot 10)$ по определению степени

$= 2 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10$ в силу сочетательного свойства произведения (первая формулировка)

$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ в силу переместительного свойства произведения

$= (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (10 \cdot 10 \cdot 10)$ в силу сочетательного свойства произведения (вторая формулировка)

$= 2^3 \cdot 10^3$ по определению степени

$= 8 \cdot 1\,000 = 8\,000.$

Запись на доске веду я сам, всё время ставя вопросы и основываясь на ответах учеников с мест. Требую параллельной записи в тетрадях всего появляющегося на доске. Сперва ставлю вопрос, потом, после паузы, указываю, кто отвечает. Добиться участия всех.

Повторение той же работы над выражением $(ab)^5$, потом над $(ab)^n$. У доски — кто-нибудь из сильных, хотя бы Корелов. Дать всё изложить, не прерывая, без записи ссылок, но с их формулировкой. Когда окончит, внести поправки, если в них будет нужда. Со вторым выражением у доски работает Абин.

Как формулировать правило возведения в степень произведения? Сохранится ли оно в случае трёх сомножителей? любого их числа?

Все берут руководства Киселёва, ч. 2, и читают § 3, пункт *а*.

Аналогичная работа по выводу правила возведения в степень частного, но в более быстром темпе. Сперва $(15 : 3)^4$, потом $(a : b)^5$, наконец $(a : b)^n$. У Киселёва § 3, пункт *б*.

Я решаю более сложную задачу, не записывая ссылок, но требуя их от учеников с мест. На доске пишу следующее:

$$\left(\frac{5ab}{2c}\right)^4 = \frac{(5ab)^4}{(2c)^4} = \frac{5^4a^4b^4}{2^4c^4} = \frac{625a^4b^4}{16c^4}.$$

Напомнить, что горизонтальная черта заменяет знак деления и скобки. Если время позволит, вызвать к доске для решения аналогичных примеров одного сильного (Швецова) и одного послабее (Абрамова).

г) Задание на 6 сентября:

1) Киселёв, ч. 2, § 3, пп. *а* и *б* (знать формулировки правил и уметь вывести их со всеми необходимыми ссылками).

2) Освободить от скобок выражения $(0{,}7\ ab)^3$, $\left(-3\frac{1}{2}axy\right)^2$, $\left(-\frac{4ax}{3y}\right)^5$.

3) Вычислить друмя способами $x = \left(\frac{a}{bc}\right)^3$ при $a = 30$, $b = -3$, $c = -2$.

8) Найти разными способами $x = (2^3)^2$, $y = (10^4)^3$, $z = (a^5)^4$, $u = (a^k)^n$, где a — любое число, k и n — любые натуральные числа.

3 сентября 1947 г. Учитель Б. Александров.

§ 26. Домашние задания.

Как бы хорошо ни проводились уроки по математике, они одни не могут обеспечить навыка в самостоятельной работе, воспитание которого является одной из важнейших задач школы. Этот навык даёт только правильная постановка домашних заданий и тщательный контроль за их выполнением.

Домашние задания бывают трёх основных видов.

Во-первых, это доработка материала, разобранного на уроке. Учащиеся продумывают всё, что они слышали в классе, используя свои записи и указанные места в руководстве; разучивают то, что подлежит запоминанию (тексты определений, теорем, правил), избегая механического заучивания, разбираясь в назначении каждого слова данных им формулировок, устанавливая допустимые варианты; пробуют воспроизводить рассуждения, какие проводились в классе, и добиваются, чтобы эти рассуждения проходили гладко, обоснованно в каждом своём шаге, без наведения справок в тетрадях или в книге; приводят в порядок свои записи, сделанные в классе, либо просто просматривая их и исправляя ошибки (это — обязательный минимум), либо, кроме того, дополняя их собственными примерами, новыми формулировками, вариантами рассуждений, либо, наконец, и это лучше всего, переписывая их в переработанном виде. Сюда же можно отнести и самостоятельное изучение по учебнику материала, аналогичного рассмотренному в классе.

Во-вторых, это самостоятельное решение задач, задаваемых на дом. Такое решение должно сочетаться с доработкой материала, разобранного в классе. Плохо, если задачи вовсе не решаются или решаются в очень малом количестве, но не менее плохо, если вся работа сводится к решению задач без достаточного уяснения теоретической стороны. Первый недостаток чаще имеет место на занятиях геометрией, второй — на занятиях алгеброй. Самостоятельное решение задач на дому — первый выход учащихся на активную, творческую работу, но оно должно иметь прочную и хорошо осознанную теоретическую базу и удовлетворять тем требованиям, о которых была речь выше (в § 19).

В-третьих, это работа над новым материалом, работа по подготовке к следующему очередному уроку. В то время как первые два вида домашних заданий применяются всегда, этот третий вид не пользуется всеобщим признанием, но там, где он правильно поставлен, он неизменно даёт хорошие результаты: очередной урок приносит несравненно больше пользы, если он даёт ответы на вопросы, возникшие у учащихся при предварительном знакомстве с его материалом, если он обобщает те частные случаи, с которыми учащийся уже познакомился самостоятельно. До 60-х годов XIX в., а кой-где и позже, в школах широко применялось простое задавание нового материала по учебнику, а роль учителя сводилась к проверке того, что сделал каждый. В настоящее время не может быть и речи о возвращении к этой отжившей системе: живое объяснение учителя на уроке — основное звено в работе над новым материалом. Но это живое объяснение приносит больше пользы, если его слушают учащиеся, уже думавшие о рассматриваемых вопросах.

Домашние задания должны даваться *с соблюдением должной меры*, т. е. не быть ни слишком малыми, ни слишком большими. Нормой можно считать задание, рассчитанное на 30 минут интенсивной домашней работы среднего ученика. Давать задание по математике очень легко, обычно это сводится просто к указанию параграфов руководства и номеров задач по задачнику, и учителя, особенно начинающие, нередко перегружают учеников. В связи с этим учителю очень полезно взять за правило самому предварительно решать все задачи, входящие в задание, замечая время, на это затрачиваемое, и устанавливая на основании опыта тот коэффициент, на какой надо умножать своё время, чтобы получить время среднего ученика данного класса. Правильная дозировка заданий — дело очень большой важности, и ему надо уделять самое серьёзное внимание. Недопустимо и игнорирование массовых жалоб на перегрузку, и чрезмерное доверие к каждому заявлению учащихся.

Домашние задания должны быть *посильными* для учащихся данного класса. Нередки случаи, когда учитель неосторожно даёт на дом задачу нового типа, требующую какого-нибудь приёма, ещё неизвестного ученикам, непосильную для большинства. Вместо радостного удовлетворения, какое всегда даёт хорошо выполненная работа, ученики, затратив на такую задачу много времени и ничего не добившись, испытывают разочарование и раздражение, теряют веру в свои силы и охоту заниматься математикой. Как правило, задачи для задания на дом должны подбираться с таким расчётом, чтобы их мог решить каждый ученик, внимательно слушавший объяснения на уроке и не имеющий пробелов в ранее пройденном. Более трудные задачи, в том числе и задачи, требующие счастливой догадки, надо снабжать указаниями, облегчающими эту догадку, или предупреждать, что это — задача трудная, необязательная, рекомендуемая преимущественно для более сильных.

Чтобы работа над домашним заданием протекала гладко, надо позаботиться о том, чтобы учащиеся *правильно её организовали*. Например, не редкость, что учащиеся тратят время на бесплодные попытки решить задачу на применение теоремы, в которой они как следует не разобрались. Очень рекомендуется показать в классе примерный ход выполнения какого-нибудь задания, а также выяснить причины невыполнения и ошибки, допускаемые при выполнении задания и вызывающие непроизводительную трату времени. Очень много поучительного дают посещения учителем учащихся на дому и индивидуальные беседы на тему о том, как они готовят уроки (не вообще, а на конкретных примерах).

Большой заботой учителя должен быть *целесообразный подбор* материала для домашних заданий. Надо бережно относиться к затрате времени учащимися и давать им только такие задания, работа над которыми действительно приносит пользу. В частности, не следует давать много однотипных задач: каждая задача, включаемая в задание, должна преследовать какую-нибудь определённую цель.

Очень желательно разнообразить задания, что повышает интерес, а следовательно и продуктивность работы. Наряду с разучиванием материала урока и решением задач на этот материал хорошо давать задачи на ранее пройденное, задачи на темы из окружающей обстановки, из текущей политической и хозяйственной жизни, предлагать самим учащимся составлять новые задачи на пройденные разделы, включать в задания работу графического характера, несложное моделирование, разнообразить формы проверки правильности выполнения задания. Например, принеся в класс цилиндрическую однослойную катушку (радиодеталь) с намотанным на неё не слишком тонким проводом, учитель даёт задание: не разматывая провода, найти его длину, сделав нужные обмеры; каждый получает ответ, и их правильность устанавливается (на следующем уроке) непосредственно измерением (катушка разматывается).

Подбирая материал для задания на дом, учитель должен, как и во всей своей работе, считаться с возрастными особенностями своих учеников, никогда не забывая, что способности и вкус к абстракции приходят лишь постепенно и что усиливать логические элементы надо медленно и осторожно. Для младших — больше расчётов, чертежей, измерений, для старших — больше рассуждений. Очень полезную для любого возраста работу представляет разыскание ошибок в рассуждениях, приводящих к явно нелепому результату, хотя с первого взгляда представляющихся правильными (математические софизмы), о чём см. книгу [I, 15].

Домашние задания обесцениваются, если не налажена проверка их выполнения. Прежде всего должен проверяться самый факт их выполнения: вместе со сведениями об отсутствующих учитель должен получать в начале каждого урока сведения о тех, кто не приготовил домашнего задания, и брать этих неприготовивших под особое наблюдение. На первых порах полезно уделять несколько минут на каждом уроке быстрому просмотру всех тетрадей с домашними заданиями (ученики раскрывают тетради, учитель обходит ряды, убеждаясь, что в каждой имеются надлежащие записи). В дальнейшем такой контроль можно осуществлять несистематически. Сплошная проверка факта выполнения домашнего задания заменяется выборочной. Качество работы проверяется несколькими способами. Полезно в самом начале урока пригласить к классной доске двух-трёх учеников и предложить им кратко записать полученные решения, чтобы обсудить и ход решения, и его результаты. Необходимо систематически и тщательно проверять домашние тетради; с этой целью учитель берёт с собой несколько тетрадей, внимательно их проверяет, вносит необходимые исправления и на следующем уроке возвращает их, отмечая в присутствии всего класса их достоинства и недостатки, чтобы из проверки каждой тетради извлечь выводы, полезные всему классу. На учеников очень хорошо влияет, приучая их серьёзно относиться ко всем указаниям учителя, систематическая регистрация учителем (в своём списке учеников) всех промахов и пробелов, обнаруженных у каждого. Так, установив, что такой-то ученик не приготовил очередного задания (хотя бы и по уважительной причине), надо назначить ему новый срок и не забыть проверить, как он выполнил повторное задание. Обнаружив незнание чего-либо из ранее пройденного, надо обязать повторить этот материал и тоже непременно спросить. Убедившись, что ученик неправильно формулирует мысли, делает ошибки в записи (с точки зрения математики или грамматики), нужно указать ему на ошибку и через некоторое время выяснить, устранена ли она, и т. д.

Проверка выполнения устных заданий, например уменья провести то или иное доказательство, производится посредством опроса вызванного ученика. От искусства учителя зависит сделать такой опрос интересным и поучительным для всего класса. Лучше всего дать возможность вызванному, пока отвечает его товарищ, сделать на доске нужную запись (выкладки, чертежи), а затем предоставить ему слово, предложив всем слушать и замечать недочёты. Когда сообщение закончено, желающие получают по очереди слово для замечаний, а в заключение все поднятые и оставшиеся без ответа вопросы разрешаются учителем.

Самостоятельное приготовление домашних заданий не исключает разумных форм коллективной работы. Например, разобравшись совместно в доказательстве, двое работающих могут поочерёдно прослушивать друг друга: один излагает по памяти, другой проверяет и поправляет, следя по книге, затем роли меняются. Решив независимо друг от друга одну и ту же задачу и получив разные ответы, двое совместно проверяют решение и находят ошибки. Поощряя разумную взаимопомощь, а иногда и организуя её (помощь отставшим и слабым со стороны сильных), учитель должен решительно бороться с её извращениями (списывание), разъясняя тот вред, какой приносит себе ученик, выдающий чужую работу за свою, неуклонно выявляя такие случаи, обеспечивая повторное и вполне самостоятельное выполнение задания.

Отметим в заключение одно разумное педагогическое требование, нередко нарушаемое начинающими учителями: давать задание можно в любое время урока, в зависимости от его плана, но только не после звонка.

§ 27. Контрольные письменные работы.

Периодически проводимые контрольные письменные работы в классе являются весьма важной частью процесса обучения математике, показывая и учителю, и самим учащимся, насколько усвоен пройденный материал. Они дают учителю прекрасную основу для глубокой и вполне объективной оценки многих сторон работы учащихся и в то же время помогают как учащимся, так и учителю внести надлежащие поправки в свою дальнейшую работу. Контрольные работы справедливо сравнивают с медицинским термометром, который ставят человеку, чтобы получить объективное показание о состоянии его здоровья.

Чтобы контрольные письменные работы давали наибольший эффект, они должны проводиться систематически и не слишком редко. Если на математику отведено 6—7 уроков в неделю, нормой надо считать одну контрольную работу раз в каждые две недели; проведение их реже чем раз в месяц является уже упущением. В начале учебного года, чтобы быстрее наладить систематическую самостоятельную работу учащихся, особенно в случае, если работа идёт со вновь сформированным классом, контрольные работы следует вести ещё чаще.

Продолжительность каждой контрольной работы может быть весьма различной, колеблясь от 15—20 минут до 2 часов, но, как правило, она должна занимать один часовой урок. Короткая (менее часа) контрольная работа вполне уместна, когда учителю важно установить, насколько прочно усвоен тот или другой более трудный приём, чтобы знать, можно ли двигаться дальше. Проведение двухчасовой работы можно рекомендовать в X классе (конечно, только изредка) как некоторую репетицию письменного экзамена по математике, продолжающегося в некоторых случаях (на аттестат зрелости, при приёме в вуз) три-четыре часа и даже более.

Делом первостепенной важности является подбор учителем материала для задания. Чаще всего это задачи, притом более или менее типичные, не требующие длительных поисков пути, на котором получается решение, но полезно ставить и вопросы теоретического характера: формулировки определений и теорем, воспроизведение изученных доказательств. Устанавливая объём задания и его трудность, учителю надо избежать двух одинаково вредных крайностей: не дать задания слишком лёгкого, когда все или почти все учащиеся без напряжения выполняют его и проникаются убеждением, что они всё хорошо знают и в дальнейшем могут работать меньше, но не дать задания и непосильного, когда лишь единицы с ним справляются, а у большинства опускаются руки. Учитель, знающий свой класс и внимательно относящийся к подбору материала, всегда найдёт должную меру его трудности.

Задание на контрольной работе даётся, чтобы обеспечить полную самостоятельность работы каждого, по крайней мере в двух вариантах обязательно одинаковой трудности. Во избежание непроизводительного расходования драгоценных минут урока, отведённого для контрольной работы, её организационная сторона должна быть очень хорошо продумана и подготовлена. Лучше всего, если задание размножено (переписано под копирку) по числу учеников класса, и каждый получает отдельный листок. Если сделать это трудно, задание приходится писать на доске или диктовать. Часто делают так: продиктовав первую задачу в двух вариантах (первый — для сидящих на левом месте каждой парты, второй — для сидящих справа), предлагают сразу начать работу над ней, последующие же задачи не диктуются, а записываются на доске. Все необходимые указания учащимся надо дать в начале урока; никуда не годится, если напряжённая самостоятельная работа учащихся прерывается для того, чтобы они выслушали какое-либо добавление или поправку к заданию. Недопустимо также, чтобы учитель во время контрольной работы оказывал ту или иную помощь отдельным ученикам, ставя их тем самым в привилегированное положение по сравнению с товарищами.

Сданные учителю тетради с контрольными работами проверяются и исправляются учителем, причём делать это надо быстро: интерес к вопросам, над которыми работали учащиеся во время контрольной работы, не должен успеть остынуть, а кроме того, важно не подавать учащимся дурного примера, неделями задерживая возвращение тетрадей. Как правило, контрольная работа должна возвращаться учащимся в исправленном виде на следующем же уроке. Проверять и исправлять надо всю работу полностью, а не делать так, как иногда делают учителя: заметив ошибку, её подчёркивают, а дальнейший ход решения вовсе не рассматривают. Одно дело, если в решении допущена только одна эта ошибка, другое,— если дальше имеется ещё ряд их.

Нехорошо, если учащиеся не находят в возвращаемых им тетрадях ничего, кроме нескольких подчёркиваний и оценки тем или иным баллом. Внимательно рассмотрев работу, надо сделать какие-то выводы, указать ученику, что ему рекомендуется делать, чтобы устранить выявленные недочёты, надо отметить не только отрицательные, но и положительные стороны работы, отметить улучшение или ухудшение по сравнению с предшествующей.

Проверив все тетради, учитель отмечает ряд вопросов, о которых надо поговорить при выдаче работы с классом в целом: это некоторые повторяющиеся ошибки, общие трудности, отдельные заслуживающие внимания удачные приёмы, поучительные ошибки. Экономя время, тетради лучше раздать до начала урока, иначе учащиеся будут в течение нескольких минут интересоваться не тем, что говорит учитель, а тем, что имеется в выданных им тетрадях. Как правило, неудовлетворительно выполненные работы переписываются в исправленном виде.

Для контрольных работ лучше иметь особую тетрадь: она отражает успехи ученика за значительный промежуток времени.

Обычно учащиеся весьма серьёзно относятся к контрольным работам. Их выполнение ложится большой нагрузкой на нервную систему учащихся, и учителю надо принимать меры к тому, чтобы они протекали в обстановке, возможно более спокойной и деловой.

Нельзя недооценивать также и важность обеспечения полной самостоятельности работы каждого учащегося: борьба со списыванием есть прежде всего борьба за честное, подлинно советское отношение к своему труду. На первом месте должны стоять меры нравственного воздействия, а наряду с ними применяются и меры организационного порядка, делающие обман затруднительным и бесполезным: индивидуализация заданий, требование представления черновиков, особое наблюдение за учащимися, замеченными в попытках обмана (но во всяком случае без придания этому наблюдению оскорбительной формы), тщательный анализ каждой тетради, обеспечивающий почти всегда выявление несамостоятельности, и т. д. Каждый выявленный случай списывания должен повлечь за собой некоторые последствия, во всяком случае повторное выполнение работы в новом варианте и в условиях, обеспечивающих полную её самостоятельность.

§ 28. Повторение пройденного.

Чтобы обеспечить прочность знаний и навыков, приобретаемых учащимися в процессе работы по изучению математики, нужно правильно организовать повторение, т. е. возвращение к уже пройденному материалу, преследуя две цели, а именно: окончательную доработку программного материала, его, так сказать, отшлифовку, и вместе с тем его закрепление в памяти учащихся. Повторение отнюдь не должно сводиться к буквальному вторичному воспроизведению того, что уже было сделано раньше: это новая работа, в которой материал, уже отчасти знакомый, рассматривается с новой точки зрения, систематизируется, сравнивается с изученным раньше, причём особое внимание уделяется более трудным и тонким вопросам, на первый план выделяется самое существенное и подлежащее запоминанию.

Каждый новый вопрос, изучаемый на занятиях математикой, всегда в той или иной мере основан на ранее пройденном, и объяснение нового надо связывать с повторением тех вещей, какие при этом объяснении понадобятся. Вот, например, на очереди рассмотрение вопроса о правильных многоугольниках. Предварительно полезно проверить, помнят ли учащиеся смысл таких терминов, как выпуклая ломаная, хорда окружности, касательная, помнят ли теоремы об измерении углов дугами и т. д. Обычно картина бывает пёстрая: находятся ученики, обнаруживающие более твёрдое знание старого, и ученики, растерявшие эти свои знания, и учитель должен, разумеется, проявить особую заботу о последних. В случае больших пробелов, не устранимых в порядке такого попутного беглого повторения, следует давать особые задания, имеющие индивидуальный характер, на дом, и не забывать проверить в дальнейшем, как они выполнены. Для этого учитель в своём списке учеников против соответствующей фамилии помечает «забыто то-то» с тем, чтобы зачеркнуть эту пометку, когда убедится, что пробел устранён. Регулярно занимаясь такого рода попутным повторением старого в классе, учитель приучает своих учеников проводить его и при самостоятельной работе дома путём наведения надлежащих справок. Попутное повторение ведётся не только при изучении нового теоретического материала, но и при решении задач: ознакомившись с условием задачи, надо вспомнить точный смысл тех терминов, какие встречаются в её тексте. Подобная «мобилизация» надлежащего круга своих сведений имеет первостепенное значение для успешного решения задачи и вместе с тем является важной формой работы по повторению. Само собой разумеется, что использование учебника и старых записей в тетрадях должно при этом всячески поощряться: если ты такую-то вещь позабыл, сумей найти в книге или в тетради соответствующее место.

Закончив изучение какого-нибудь раздела, полезно провести специальный урок по его повторению, связанному с подведением итогов и с той отшлифовкой, о которой была речь выше. Такое повторение можно сделать интересным и полезным для всего класса: слабые ученики уяснят себе при этом те вещи, какие в процессе работы остались для них непонятными, сильные узнают новые детали, заметят новые связи, лучше поймут существо использованных методов.

Третий вид повторения — систематическое повторение всего пройденного за некоторый более длительный промежуток времени — четверть, полугодие, год,— предусмотренное рабочим планом в соответствии с рекомендованным существующей программой распределением часов. Здесь первой заботой учителя должна быть организация самостоятельного повторения материала учащимися и проверка результатов в классе. Нехорошо, если учитель ограничивается просто механическим заданием «повторить такие-то параграфы по учебнику, решить такие-то задачи по задачнику», к тому же, как это часто бывает, в количествах, чрезмерно больших; необходимо тщательно отобрать всё основное и предложить хорошенько повторить это основное в первую очередь, занимаясь второстепенными деталями лишь по мере возможности; необходимо точно установить, что подлежит запоминанию, а что надо уметь вывести. Само собой разумеется, что домашняя работа по повторению должна проверяться, исправляться и дополняться в классе, причём вызывать надо и сильных учеников, ответы которых рекомендуются классу как образцы, и слабых, ответы которых позволяют показать недостатки разного рода и способы их устранения. Работу по повторению легче, чем работу любого другого рода, сделать скучной, неинтересной. Но при правильной постановке дела каждый урок повторения должен чем-то обогащать учащихся и быть для них не менее увлекательным, чем любой другой.

Как использовать часы, отведённые программой на систематическое повторение? Здесь возможны разные варианты. У некоторых учителей лучше проходит систематическое повторение старого параллельно с изучением нового, как это предусмотрено в примерном календарном плане, который приведён выше, в § 23. У других более удачными оказываются специальные уроки повторения, которые ставятся по окончании каждого раздела и в конце года. Однако никогда не следует забывать, что такое систематическое повторение должно дополнять повторение попутное, а не заменять его. Плохо, если основным видом повторения становится систематическое повторение, проводимое параллельно изучению нового материала и вне связи с ним, а попутное повторение вовсе не практикуется.

Отметим, наконец, четвёртый вид работы по повторению — это повторение пройденного ранее, которое проводится в начале нового учебного года, прежде чем начинается изучение нового программного материала. Оно особенно необходимо в тех случаях, когда учитель начинает работу со вновь сформированным классом. Существующая программа предусматривает такого рода работу в V классе, отводя 21 час на «Повторение пройденного (по математике) в начальной школе», и важность её должна быть хорошо осознана учителем: дети приходят в V класс из разных школ, от разных учителей, в их знаниях и навыках по математике много пестроты, много более или менее существенных пробелов. Программа намечает ряд вопросов, подлежащих повторению, и дело учителя правильно организовать эту работу, связывая её с решением задач. В результате в классе должна быть создана атмосфера, благоприятная для дальнейшей работы по математике: заинтересованность в работе, наличие важнейших арифметических навыков, уверенность учеников в своих силах, привычка к определённому режиму учебной работы. Подобное предварительное повторение желательно проводить и в других классах, если учитель начинает работу с новым для него составом класса, особенно в VIII классе.

Весьма полезный вид работы по повторению представляют собой лекции-беседы обзорного характера, уместные при итоговом повторении в старших классах. Они достигают цели, если материал, детально изученный в течение некоторого значительного периода, освещается с новой точки зрения, объединяется и систематизируется. Например, учащимся, много занимавшимся решением геометрических задач на построение, полезно дать обзор методов построений. Можно рекомендовать такие темы обзорных лекций: понятие функции, графики функций, развитие понятия числа, приложения алгебры к геометрии, история того или другого раздела элементарной математики, например история логарифмов, и т. д.

§ 29. Учёт успеваемости (текущий, четвертной, годовой). Экзамены письменные и устные.

Систематический учёт результатов учебной работы каждого учащегося, как повседневный, текущий, так и итоговый, проводимый в определённые сроки и устанавливающий, чего достиг ученик за четверть, за год, за несколько лет, в том числе экзамены, переводные и выпускные, является необходимой и очень важной составной частью учебного процесса. Он нужен самому ученику, воспитывая навыки систематической и продуктивной самостоятельной работы, нужен учителю, показывая, какие результаты даёт проводимая им учебная работа, нужен школе, чтобы правильно решать вопросы о дальнейшей работе каждого ученика.

Основой учёта успеваемости и всяких оценок, с ним связанных, является тщательное и регулярное наблюдение за всеми сторонами работы ученика, осуществляемое учителем. Этот текущий первичный учёт должен быть действительно повседневным, от него не должен ускользать ни один случай небрежного приготовления домашнего задания, ни одно затруднение, с которым ученик столкнулся в своей самостоятельной работе, ни одно проявление сообразительности, находчивости, интереса, инициативы школьника. Учитель математики имеет в каждом классе 6—7 уроков еженедельно и может при правильной постановке текущего учёта самым основательным образом изучить каждого своего ученика, обеспечивая тем самым принятие своевременных мер к повышению качества его работы. Этот текущий учёт ни в коем случае нельзя сводить к выставлению в журнал несколько раз за четверть оценок, характеризующих выполнение учеником отдельных заданий: он должен быть полнее, должен сопровождаться анализом причин, а также определёнными выводами, относящимися к дальнейшей работе ученика.

Текущий учёт обеспечивается проверкой выполнения домашних заданий и контрольных работ, о чём была уже речь выше, а также устным опросом, который проводится либо с мест, когда требуются лишь краткие ответы на поставленные вопросы, либо с вызовом к доске, когда ответ должен быть более пространным и сопровождаться выкладками и чертежами. Опрос с мест надо строить так, чтобы ответы готовили все, чтобы все критически относились к ответам товарищей и имели возможность внести свои поправки. Точно так же и при ответе у доски надо добиваться внимания к ответу со стороны всего класса. Плохо, если ответ ученика, вызванного к доске, слушает только учитель, а все остальные ученики занимаются каждый своим делом. Вызванный к доске является как бы докладчиком, сообщение которого должны внимательно слушать все присутствующие, делая у себя надлежащие пометки и выступая после окончания сообщения с критическими замечаниями, дополнениями, предложениями. Дальше должно идти заключительное слово докладчика-ученика, и, наконец, разрешающее все сомнения слово учителя. Правильно поставленный опрос является не только средством контроля, а и средством обучения. В ходе его устраняются неясности, усматриваются связи между различными ранее изученными вопросами, выявляются ошибки. Немалое значение устный опрос имеет и как средство воспитания навыков правильной записи и правильной речи, но опять-таки надо ставить дело так, чтобы любое замечание учителя по поводу записи или речи отвечающего доходило до каждого ученика и устраняло бы возможность повторения этой ошибки другими.

Один из способов рационализации опроса хорошо освещён в статье [I,48].

Уменье вести опрос даётся начинающему учителю не сразу. Вопросы должны ставиться ясно, без многословия, причём надо убеждаться, что они хорошо поняты (рекомендуется требовать их повторения), надо дать время подумать, даже требовать, чтобы не было излишней торопливости. Сперва лучше ставить вопросы полегче, чтобы создать настроение большей уверенности в своих силах, а затем постепенно переходить к более трудным. Не следует перебивать ученика: пусть он выскажется, и только тогда указать ему его ошибки и поставить дополнительные вопросы. Отступать от этого важного правила следует лишь тогда, когда допущенная в ответе ошибка делает бесполезным дальнейшее изложение или когда ошибка повторяется. Спокойный ход опроса должен быть обязательно обеспечен.

Выставление балла, выражающего оценку ответа ученика, является весьма ответственным моментом в работе учителя. Оценка должна быть полной, т. е. учитывать разные стороны работы ученика, а не только одну какую-либо её сторону. Она должна находиться в полном согласии с теми общими требованиями, какие учитель, основываясь на официально установленных нормах оценки, постоянно предъявляет в своей работе. Оценка должна быть объективной, должна производиться «невзирая на лица». Нарушение любого из этих трёх требований весьма болезненно воспринимается учениками и расстраивает нормальный ход занятий. Кроме случаев нарушения этих требований, допускаемых иногда учителем, в работе учителя иногда наблюдается одна или другая из двух следующих неправильных тенденций: чрезмерная скупость в оценках, чаще всего основанная на придании слишком большого значения второстепенным деталям ответа, и недопустимая щедрость, демобилизующая учащихся и известная под названием «либерализма». Начинающему учителю надо обратить самое серьёзное внимание на то, чтобы установить правильную линию в деле оценок, выставляя их обоснованно, продуманно, с полным учётом тех результатов, какие они должны давать. В сомнительных случаях лучше отложить выставление оценки, чтобы иметь возможность дополнительно проверить другие стороны работы учащегося. В начале года особенно вредны ошибки в оценках в сторону их завышения: способный ученик, не поработавший как следует над домашним заданием, но бегло просмотревший материал за 5 минут до урока и получивший за ответ по нему оценку «5», что может случиться, если опрос был поверхностный («Что же его долго спрашивать? ведь это лучший ученик в классе!»), в дальнейшем может небрежно относиться ко всей работе, в то время как проявленная разумная строгость учителя по отношению к нему («Ты же лучший ученик в классе, должен быть примером для других!») мобилизовала бы его на серьёзную, напряжённую работу. Детальные указания о нормах оценки успеваемости учащихся по математике для V — X классов были даны Управлением школ Министерства просвещения РСФСР [I, 5)].

Некоторые учителя с успехом применяют индивидуальные контрольные задания сильнейшим учащимся, выполняемые письменно на дому, сберегая тем самым время урока для более длительной работы с более слабыми.

Экзамены являются очень важным моментом в ходе работе по математике, но они не должны превращаться в самоцель: ученик изучает математику, чтобы её знать и по мере надобности применять, а экзамены — только средство проверить, достигнута ли эта цель. Нехорошо, если учитель в течение года слишком много говорит об экзаменах, ещё хуже, если он допускает специальное «натаскивание» к экзаменам, когда он сознательно выделяет некоторые вопросы, быть может, даже не первостепенной важности, и требует особо тщательного изучения с тем, чтобы уделить им преимущественное внимание на экзамене. Во что бы то ни стало надо обеспечить спокойную обстановку на экзамене, спокойную предэкзаменационную работу. Надо добиться, чтобы учащиеся понимали вред чрезмерного переутомления, необходимость приходить на экзамен, как говорять спортсмены, «в форме», т. е. вполне владея всеми своими знаниями и способностями, отдохнув, выспавшись. Усвоение учащимися всей этой техники подготовки к экзаменам обеспечивается без труда, если учебная работа в году шла правильно.

Темы работ для письменных экзаменов присылаются в школу в готовом виде, и учителю остаётся только предложить их ученикам. Если же учитель составляет экзаменационные задачи сам, нужен самый тщательный их отбор, чтобы избежать двух крайностей: не дать чрезмерно трудных задач, с которыми не справятся и многие добросовестно работавшие в году, но и не дать слишком лёгких, когда сотрётся разница между сильным и слабым (все решат отлично). Вообще, однако, надо помнить, что как на классных контрольных работах, так и на экзаменах учащиеся работают несколько хуже, чем в обычной обстановке текущей работы, и предлагать на них следует вопросы несколько пониженной трудности по сравнению с теми, какие давались на дом.

На устном экзамене применяются билеты, по которым распределяется проверяемый материал. Отвечающему даётся некоторое время для обдумывания доставшегося ему вопроса, а также выполнения необходимых выкладок и чертежей. После ответа, который не надо перебивать, ставятся дополнительные вопросы, уточняющие детали и проверяющие сознательность усвоения, указываются ошибки; пускаться в подробные объяснения, однако, не следует, так как это может повести к нежелательной задержке в ходе экзамена. Кроме основных вопросов, указанных в билете, иногда для уточнения приходится ставить ещё несколько дополнительных, и учитель, готовясь к проведению экзамена, должен заранее наметить ряд таких вопросов как теоретического характера, так и в виде небольших задач. Все такие вопросы должны допускать (при наличности соответствующих знаний) краткие ответы, не требующие выкладок или длительного обдумывания.

Нередко бывает, что устный экзамен получает несколько односторонний характер: проверяется только степень запоминания правил, определений, теорем. Такой экзамен не может дать полной картины: надо выяснять степень понимания, сознательности, уменья применять знания на практике.

Если учитель экзаменует своих собственных учеников, хорошо им за год изученных, он всегда склонен при оценке экзаменационного ответа учитывать характер годовой работы. Но надо помнить, что оценивается именно ответ на экзамене, и не быть несправедливым, снижая, например, оценку явно отличного ответа на том лишь основании, что отвечающий в году работал не отлично. В таких случаях полезно поставить несколько дополнительных вопросов и побольше прислушиваться к заключению ассистента.

Эта трудность отпадает, если учителю приходится экзаменовать новых для него учеников, но в этих случаях возникают другие трудности: надо считаться с возможностью индивидуальных особенностей в работе другого учителя, надо особенно внимательно проверять, правильно ли поняты поставленные вопросы, надо более тщательно проверять разные стороны подготовки.

Проводя контрольные работы и экзамены, учитель должен всегда помнить о той величайшей ответственности, какую он несёт за правильность выставляемых им оценок: от них иногда зависит дальнейшая судьба учащегося.

§ 30. Меры предупреждения неуспеваемости. Помощь отстающим.

Врачи говорят, что болезнь легче предупредить, чем вылечить. Таково же и положение с неуспеваемостью: во-время принятые меры предупреждения неуспеваемости дают больший эффект при меньшей затрате сил и времени, чем исправление запущенной неуспеваемости, нередко ведущей к второгодничеству. В самом начале работы с классом учитель должен взять на учёт тех, кто является кандидатом в неуспевающие, отставая от товарищей по классу, и систематически работать над подтягиванием их к общему уровню. Во-первых, необходимо выяснить характер и причины отставания, что достигается путём индивидуальной беседы с учеником (не на глазах всего класса), а иногда и с его родителями. Во-вторых, в зависимости от результатов такой беседы принимается то или иное решение о мерах исправления положения: после диагноза болезни назначается надлежащее лечение. В-третьих, это лечение надо провести. Чаще всего требуется просто повторение некоторого раздела из ранее пройденного, повторение, которое ученик может провести самостоятельно по указаниям и под контролем учителя. В более тяжёлых случаях необходимы систематические занятия, проводимые с точным учётом того, что именно нужно сделать данному ученику, чтобы он мог идти дальше, не отставая от товарищей. Такие занятия могут быть очень краткими, но должны проводиться часто, лучше всего перед каждым уроком математики (накануне).

Хорошо, если такие дополнительные занятия ведёт сам учитель, но это не всегда осуществимо, и здесь надо идти по пути организации товарищеской взаимопомощи, обращаясь за содействием к школьной общественности. К каждому отстающему прикрепляется вполне успевающий товарищ из того же или старшего класса; лучше всего, если это делается в порядке поручения от комсомольской или пионерской организации, но учитель должен планировать и контролировать эту работу, одинаково полезную обоим её участникам. Наиболее естественная и эффективная её форма — помощь в деле выполнения очередного домашнего задания, помощь, выражающаяся в устранении причин, мешающих самостоятельному его выполнению. Если учитель примет меры к тому, чтобы такие «репетиторские» дополнительные занятия проводились регулярно и правильно (главное, чтобы они не превращались в замену самостоятельного выполнения задания отстающим списыванием готового решения), они дают быстрый эффект: отстающий из кандидатов в неуспевающие становится исправным учеником; эти дополнительные занятия становятся дальше ненужными.

Отметим ещё раз, что правильно организованная и контролируемая учителем товарищеская взаимопомощь полезна не только как средство предупреждения неуспеваемости: на этой работе растут и те, кто помогает отстающим, лучше овладевая материалом, приобретая вкус и навыки к педагогической работе. Чем раньше она осуществляется, тем быстрее и полнее получаются результаты. Учитель должен очень тщательно контролировать текущую работу каждого ученика и бить тревогу при первых признаках систематического отставания.

§ 31. Дополнительная работа особо успевающих.

Заботясь о предупреждении неуспеваемости, учитель математики должен заботиться и о более сильных своих учениках, должен выявлять более способных к математике, возбуждать у них интерес к этой науке, организовать для них углублённую работу по изучению математического материала, не входящего в обязательную программу. Простейший вид такой работы — индивидуальные задания в виде интересных задач повышенной трудности, задания по изучению дополнительной литературы. Вначале можно использовать вопросы занимательной математики, в таком богатом выборе и в такой увлекательной форме разработанные покойным талантливым популяризатором математики Я. И. Перельманом. От них, естественно, перейти к изучению статей и книг математического содержания, постепенно и осторожно повышая их трудность и серьёзность. Интересные и вполне доступные ученикам средней школы книги по математике издаются у нас в большом количестве.

Таковы, например, книги серии «Популярные лекции по математике», выпускаемой с 1950 г. Гостехиздатом, книги «Библиотеки математического кружка» того же издательства.

Подходящий материал содержат и математические журналы, издающиеся для учителей, причём значительная часть этого материала не устарела, и можно с успехом использовать журналы «Математика в школе», «Математическое образование», «Вестник опытной физики и элементарной математики» за прежние годы.

От времени до времени появляются математические задачи, статьи и заметки в «Пионерской правде», в популярно-технических журналах «Знание — сила», «Техника — молодёжи». Рекомендовать дополнительную литературу более сильным ученикам надо очень продуманно, обязательно предварительно ознакомившись с ней, так как ученик, получивший непосильную или неинтересную для него книгу, потеряет интерес к математике, а не разовьёт его. Надо помнить, что ничто так не мобилизует на дальнейшую углублённую работу, как самостоятельное получение каких-либо новых результатов, хотя бы в виде решения задач, особенно таких, когда дело идёт о переоткрытии какого-либо нового для ученика математического факта.

Лучшей формой организации работы более сильных учащихся является математический кружок, на котором делаются сообщения о решённых задачах, о прочитанных статьях, ставятся новые задачи.

§ 32. Математический кабинет.

Преподавание математики нуждается в специальном инвентаре в несравненно меньшей степени, чем, например, физики, но всё же нуждается, и этот инвентарь удобно сосредоточить в особой комнате, получающей название «математического кабинета», или по крайней мере отвести для него особый шкаф. Кроме того, каждая классная комната, в которой происходят занятия математикой, должна иметь классную доску по возможности больших размеров, минимум 1,5 *м* × 1,5 *м*, или лучше две-три такие доски, в том числе одну разграфлённую в клетку (не слишком толстыми линиями, проводимыми на расстоянии 5 *см* одна от другой и образующими квадраты). Хорошо, если в распоряжении учителя математики есть набор разноцветных мелков. Кроме доски, в каждой классной комнате должен быть набор чертёжных инструментов для черчения на доске: метровая линейка с делениями на сантиметры, большой угольник с углами в 30° и 60°, классный циркуль, транспортир. Очень полезно, если имеется также экземпляр конторских счётов, специальных классных, весьма распространённых в начальных школах, или хотя бы обыкновенных ручных, но по возможности бо́льших размеров и хорошей работы.

Инструменты для черчения в тетрадях — миллиметровая линейка, угольник, циркуль для карандаша, транспортир — должны быть в постоянном распоряжении каждого ученика, но полезно, чтобы набор таких инструментов был также в математическом кабинете школы. Из чертёжных приборов здесь надо ещё иметь несколько готовален повышенного качества для особых заданий.

Время от времени в магазинах наглядных пособий появляются различные пособия по математике; коллекцию их желательно иметь в математическом кабинете. Сюда относятся: образцы метрических мер, в том числе кубический дециметр, разрезанный на части, позволяющие видеть его связь с кубическим сантиметром; набор картонных и деревянных моделей плоских геометрических фигур, набор сплошных и полых моделей геометрических тел из дерева, металла, стекла; счётные логарифмические линейки, ручные по 25 *см* и демонстрационные от 1 до 2 *м*, приборы для наглядного представления тригонометрических линий, приборы землемерные (мерная цепь, простейший угломер, эккер и др.), различные стенные таблицы и плакаты. Учитель математики должен добиваться, чтобы школа приобретала такие пособия, тщательно хранить их и максимально использовать в преподавании.

Немало полезных наглядных математических пособий можно сделать собственноручно. Учитель, проявляющий инициативу, всегда встретит здесь живой отклик со стороны учащихся, охотно занимающихся картонажными, чертёжными, столярными и слесарными работами, проявляющими изобретательность, привлекающими на помощь членов своих семей.

Из других сторон работы математического кабинета отметим следующие: 1) подбор математической литературы для занятий сверх обязательной программы (книги, журналы, вырезки из газет); эта литература обычно хранится в общей школьной библиотеке и выдаётся на общих основаниях, но забота о её пополнении и о рекомендации её ученикам лежит на учителе математики; 2) подбор материалов, освещающих жизнь и деятельность учёных-математиков (портреты, биографии, популярные изложения работ); 3) сбор и использование различных материалов, характеризующих работу по преподаванию математики в данной школе (образцы контрольных работ, сведения о работе математических кружков, сведения о борьбе за повышение успеваемости, в частности о развёртывании взаимопомощи, и т. д.); 4) сбор тех сведений об окончивших данную школу, какие представляют интерес для преподавания математики: затруднения по математике, с какими окончившие встретились при поступлении в вуз и при работе в нём, различные математические задачи, с какими им приходится иметь дело, сведения об особо отличившихся и т. д.

В журнальной литературе всё время появляются статьи, говорящие о новых наглядных пособиях по математике, о новых книгах учебного, научного и методического содержания, о проводимых математических олимпиадах и аналогичных интересных для преподавателя математики вопросах. Математический кабинет школы должен помогать и учителям, и учащимся знакомиться со всеми подобными новинками.

Глава V

ФОРМАЛИЗМ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ И БОРЬБА С НИМ. ДРУГИЕ НЕДОЧЁТЫ ПОСТАНОВКИ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

§ 33. Что такое формализм в знаниях учащихся по математике?

Формализм в знаниях учащихся, этот всё ещё не изжитый порок школьной работы, можно охарактеризовать как наличие некоторых внешних признаков знаний при отсутствии подлинных знаний. Основные особенности формального знания: 1) отрыв формы от содержания; 2) отрыв теории от практики; 3) преобладание памяти над пониманием; 4) господство трафарета, шаблона. Формальные знания — это мёртвые, не действенные, бесполезные знания.

Задачей настоящей главы является выяснение конкретных форм проявления формализма в знаниях учащихся по математике и тех недочётов в работе учителя, при которых становятся возможными эти проявления. Зная эти конкретные формы, можно наметить и меры к их предупреждению и устранению.

Овладеть каким-либо разделом математической науки значит: а) ознакомиться с понятиями этой науки и приобрести знание соответствующей терминологии, б) приобрести знание установленных в этом разделе науки фактов, в) приобрести, далее, знание связей, существующих между отдельными фактами, т. е. знание той научной системы, в какую входят все эти факты, г) приобрести, наконец, навыки в практическом применении всех этих знаний. Рассмотрим последовательно все эти четыре стороны вопроса.

Формальное знание математической терминологии есть одно из самых распространённых проявлений формализма в деле изучения математики: учащийся произносит слова, точного смысла которых не понимает. Как часто, например, учащийся, уверенно употребляющий термин «геометрическое место точек», утверждает, что геометрическое место точек есть биссектриса угла, а учащийся, считающий себя понимающим термины «рациональное число», «иррациональное число», говорит, что иррациональное число — это корень. А взять такие термины, как «вертикальные прямые», «горизонтальные прямые»,— правильное понимание этих по существу географических, но постоянно применяемых в математике терминов встречается только в виде исключения.

Абсолютно необходимо добиваться того, чтобы каждый учащийся знал точный смысл каждого употребляемого им термина, чтобы он испытывал неловкость, беспокойство, произнося слово, ему непонятное или не вполне понятное. Знание соответствующего определения необходимо, но его одного ещё недостаточно: нужно ещё наличие ясных, конкретных представлений. Учащийся, зная определение, должен уметь приводить на него примеры, т. е. указывать объекты, ему удовлетворяющие, а также объекты сходные, но в силу той или иной причины этому определению не удовлетворяющие. Вводя каждый новый термин, необходимо, кроме краткого и ясного определения, приводить ряд примеров, по возможности наглядных, ярких, запоминающихся, и добиваться того, чтобы учащиеся сами умели находить такие примеры. Очень полезно рассмотреть несколько вариантов одного и того же определения.

Приучать учащихся к точному и сознательному употреблению терминов есть, несомненно, одна из важнейших воспитательных задач, которую призвана разрешить школьная математика, но которой она иногда не разрешает из-за формальной постановки её изучения.

Изучение математической терминологии идёт параллельно с изучением математических фактов, т. е. истин, выраженных в аксиомах и теоремах. Самый текст математического предложения (теоремы или аксиомы) нередко усваивается и воспроизводится только по памяти, без понимания: учащийся не разбирается, где условие теоремы, где её заключение, не понимает, верна ли обратная теорема, т. е. является ли это условие только достаточным для сделанного заключения или одновременно и необходимым, т. е. таким, без которого заключение теряет силу; не умеет привести примеров конкретных случаев, когда теорема имеет место, а также таких примеров (противоречащих примеров или контрпримеров), когда она в силу нарушения того или другого из указанных в ней условий перестаёт быть верной. Как бы точно и бойко учащийся ни воспроизводил напечатанный в учебнике текст теоремы, его знание этой теоремы является при наличии таких недостатков только формальным. Рассмотрение ряда примеров и контрпримеров, выяснение значения отдельных условий, упоминаемых или только подразумеваемых в тексте теоремы, поиски различных вариантов этого текста, равносильных приводимому в учебнике, выяснение того, имеют ли место предложения обратное и противоположное,— вот некоторые пути, ведущие к подлинному, а не только формальному усвоению математических истин. Прекрасным средством изжития формализма в деле усвоения новых математических истин является такая постановка дела, при которой учащиеся сами открывают эти истины в процессе решения целесообразно подобранных задач. Например, перед тем уроком геометрии, на котором предполагается рассмотреть теорему об ортоцентре треугольника, учащимся можно предложить начертить дома несколько треугольников разного вида (остро-, тупо- и прямоугольных), провести в каждом все три высоты и посмотреть, как они пересекаются. Придя на очередной урок, учитель застанет оживлённый разговор о том, что у всех получился один и тот же замечательный результат: все три высоты прошли через одну или почти через одну точку.

Точнее: три прямых, на которых лежат высоты треугольника, проходят через одну точку. Дело подлинного, а не только формального усвоения теоремы об ортоцентре будет, таким образом, весьма облегчено, да и самое доказательство теоремы будет воспринято как окончательное разрешение тех сомнений, какие оставляет наблюдение: действительно ли три высоты проходят через одну точку совершенно точно? Всегда ли так бывает? Аналогичную работу можно провести по каждой теореме; разница только в количестве указаний, какими должно сопровождаться предварительное задание. Новые математические истины не являются при такой постановке дела чем-то неожиданным и навязанным: учащиеся сами их открывают в более или менее законченной форме.

Знание доказательства теоремы тоже бывает чисто формальным, основанным исключительно на работе памяти, а потому очень непрочным и совершенно бесполезным для развития мышления. Характерным для такого знания является буквальное воспроизведение всех деталей чертежа и рассуждения, приведённого в учебнике. Стоит только изменить обозначение или дать иное, но тоже удовлетворяющее условиям теоремы расположение фигуры на чертеже, и учащийся теряется: им усвоена только внешняя сторона, внешняя форма рассуждения, но не его суть. Совершенно необходимо требовать, чтобы учащийся умел провести доказательство при других обозначениях, при другом расположении фигуры на чертеже, чем в учебнике. Очень полезно расчленение всего рассуждения на отдельные пункты, на отдельные последовательные его этапы с приведением обоснования каждого этапа, а также выявление его основной идеи, его «ключа». Установить и запомнить такой «ключ» доказательства — значит существенно облегчить сознательное и прочное его усвоение. Если учащийся, например, запомнил, что доказательство теоремы об ортоцентре треугольника основано на построении вспомогательного треугольника, стороны которого проходят через вершины данного треугольника параллельно противоположным его сторонам, то нетрудно воспроизвести и всё доказательство — при условии, конечно, что учащийся вообще умеет разбираться в доказательствах, а не формально их заучивает.

Формализм в деле изучения математических фактов проявляется иногда в том, что учащийся, твёрдо зная некоторое общее предложение, затрудняется применить его в конкретном частном случае, представляющем некоторые особенности. Вот типичный пример: ученик толково рассказал об измерении отрезков, приведя определение общей меры и изложив алгоритм Евклида, но стал втупик, когда ему предложили указать общую меру двух равных отрезков. Этот ученик находился целиком во власти схемы, дающей решение вопроса для неравных отрезков; эта схема не нужна в случае равных отрезков, но она заслонила существо вопроса, решающегося особенно просто в этом частном случае.

Никакой раздел науки не представляет собой собрания отдельных, не связанных друг с другом истин: это всегда некоторая их система. В математической науке эта связанность в содержании каждого её раздела проявляется особенно отчётливо, и далеко не полноценным является такое знание, при котором учащийся владеет более или менее отчётливо отдельными входящими в этот раздел науки истинами, но не усвоил той системы, какую они собой представляют, не овладел теми связями, какие существуют между ними. Это тоже одно из проявлений формализма в деле изучения математики. Знакомясь с новой теоремой, учащийся должен отдавать себе ясный отчёт в том, на каких ранее установленных аксиомах и теоремах основано её доказательство. Работу по изучению той системы, какую представляет собой данный раздел программы, особенно важно и полезно вести при повторении этого раздела, но и при первом знакомстве с новым материалом необходимо давать его в некоторой системе и добиваться понимания и усвоения её учащимися.

При правильном ходе изучения того или иного раздела программы параллельно с изучением теоретической стороны идёт и овладение навыками в его практических приложениях в виде решения разнообразных примеров и задач. Здесь формализм проявляется двояко: иногда практика вовсе отсутствует, иногда имеется, но в отрыве от теории. Как часто, например, мы слышим от учителя, что недостаток времени не позволил ему научить учащихся решать задачи на тот или иной раздел геометрии, особенно на построение. Бывают и такие случаи, когда учитель показывает готовые решения нескольких задач, и ученики «учат», т. е. просто запоминают эти решения. Задачи эти становятся тем самым просто кусочком теории. Работает только память, и никакого навыка в самостоятельном решении новых задач учащиеся не получают. При изучении арифметики и особенно алгебры нередко имеет место отрыв практики от теории: не обеспечив усвоение теоретической стороны, учитель спешит перейти к задачам, даёт готовые, зачастую непонятные ученикам правила, и иногда таким путём добивается уверенного решения задач определённого типа. Однако в этих случаях учащиеся совершенно беспомощны, встречаясь с вопросами, хотя и нетрудными, но иного типа, и составляют себе извращённое представление о предмете. Одна ученица заявила, что может решить любую задачу на квадратное уравнение и всё понимает, кроме одного: «почему квадратное уравнение всегда равно нулю?» Здесь формализм в приобретении навыка выразился просто в непонимании постановки вопроса, разрешаемого по установленному шаблону, и надо признать, что это явление — довольно распространённое. Если спросить, как узнать, правильно ли решена данная система уравнений, то обычно находятся учащиеся, не знающие другого способа проверки, кроме заглядывания в готовые ответы, приведённые в задачнике, а среди лиц, знающих, что здесь нужна подстановка найденных корней в данные уравнения, находятся такие, которые утверждают, что достаточно сделать подстановку лишь в одно из уравнений системы: если оно удовлетворяется, значит, система решена верно.

Ограничение определёнными, шаблонными и обычно весьма немногочисленными типами задач есть тоже одно из проявлений формализма в деле приобретения математических навыков. Как часто слышишь на экзамене: «Эту задачу решить не могу, не знаю даже, как за неё взяться, ведь таких задач в школе мы не решали». Учителю математики нельзя забывать, что приобретение навыка в решении математических задач преследует и воспитательные цели, далеко выходящие за рамки самой математики: воспитывает сообразительность, находчивость, уменье свести сложную проблему к цепи более простых, уменье мобилизовать весь свой запас сведений и выбрать из них те, которые здесь полезны, уменье критически проверять и обосновывать свои догадки. Ограничение немногими шаблонными типами задач превращает обучение математике в натаскивание, которое не развивает, а скорее притупляет способности.

Рассмотрение вопроса о формализме в деле приобретения математических навыков закончим указанием на переоценку внешней формы, в которой повинны некоторые учителя, требующие, чтобы запись решения сразу велась в полном порядке и сопровождалась письменными пояснениями. Очень часто запись решения бывает у учащихся неряшлива, бессистемна, и с этим недостатком надо вести постоянную и решительную борьбу, но нельзя требовать, чтобы решение сразу отливалось в определённую, вполне упорядоченную форму, и тем более, чтобы оно сразу сопровождалось письменными пояснениями: такое требование всегда сковывает инициативу, ухудшает шансы на счастливую догадку. Надо различать начальную стадию решения задачи — поиски пути и первые попытки движения по нему, и последнюю, заключительную его стадию — надлежащее оформление найденного решения, когда уместно требовать и полного порядка в записи, и письменных пояснений. Конечно, надо вести борьбу и за аккуратный черновик, но и здесь надо соблюдать разумную меру.

§ 34. Проявления формализма в работе учителя математики.

От проявлений формализма в математических знаниях и навыках учащихся перейдём к его проявлениям в работе самого учителя. Эти проявления можно разбить на три группы.

Во-первых, теоретически возможно, что в математических знаниях и навыках самого учителя имеют место такие же проявления формализма, как рассмотренные выше проявления формализма в математических знаниях и навыках учащихся. Здесь единственное средство борьбы — работа учителя над повышением своей квалификации.

Во-вторых, учитель, сам лично свободный от этого рода недочётов, но терпимо относящийся к их проявлениям у учащихся, не бьющий тревогу по поводу каждого такого проявления, не мобилизующий учащихся на преодоление и предупреждение их, тоже повинен в формализме, и даже в большей степени, чем недостаточно квалифицированный учитель. Тот творит зло, сам того не ведая, этот же видит зло, но не борется с ним и тем самым ему содействует.

В-третьих, в методах преподавания, применяемых учителем, могут быть моменты, непосредственно ведущие к формальному лишь усвоению предлагаемого материала. Рассмотрим несколько характерных примеров.

Объяснение нового материала может быть совершенно формальным из-за своего несоответствия уровню подготовки и развития учащихся, которые этого объяснения не понимают. «Я обязан объяснить то-то и то-то, и я это объясняю, а поймут меня учащиеся или не поймут, это уж их дело, а не моё»,— если не говорит, то думает такой учитель. Иногда он успокаивает себя и других, указывая, что практические навыки, вытекающие из этого недоступного учащимся объяснения, они всё же усваивают (формально, без понимания). Так обстоит дело, например, за редкими исключениями, с извлечением квадратного корня из многозначных чисел. Учитель объясняет происхождение известного правила, показывает его применение на примерах и удовлетворяется тем, что учащиеся приобретают соответствующий навык. Обычное объяснение, приведённое в учебнике, учащиеся не усваивают, учитель это знает и не решается даже вернуться к нему, не решается спросить его с учащихся ни на уроке, ни тем более на экзамене, не хочет поискать более «доходчивого» объяснения (а такие существуют — например, через геометрическое истолкование). Формальное изучение этого правила сказывается в грубых ошибках, какие учащиеся допускают при его применении (например, разбивают подкоренное число на грани не от запятой, а от первой или последней цифры).

Формальным может быть и опрос учащихся. Так бывает, если учитель довольствуется бойко произнесёнными учеником фразами, более или менее точно воспроизводящими учебник, не проверяя, кроется ли за этими фразами ясно понимаемое содержание, не ставит дополнительных вопросов, уточняющих ответ, не требует приведения примеров, найденных самим учеником, а не взятых из учебника.

Формальной может быть (и, к сожалению, часто бывает) и проверка письменных работ учащихся, как классных, так и домашних. Работа как будто проверена, имеются пометки, оценка, подпись учителя, а ряд ошибок остался без указания и исправления. Нечего и говорить, какой громадный вред приносит такая небрежность в работе учителя: исправление ошибок, допускаемых учащимися, есть, быть может, важнейшая функция учителя. Проверка во что бы то ни стало должна быть полноценной. Лучше проверять реже и не сплошь всё сделанное учащимся, а при недостатке времени — выборочно, но по-настоящему.

Присматриваясь к практике выставления оценок, и здесь видишь нередко случаи формального отношения к делу. Учащийся удачно ответил в начале четверти по материалу одного очередного задания, получил оценку «5», больше его не спрашивали. Контрольной работы, единственной на протяжении четверти, он не писал, и учитель ставит ему «4» за четверть. Разве эта оценка обоснована? Разве она мобилизует учащегося на дальнейшую серьёзную самостоятельную работу?

Либерализм в оценках, т. е. завышение их, тоже представляет собой особое и весьма нехорошее проявление формализма: благополучие по форме, провал работы учителя по существу. Реже встречается, но всё же встречается, противоположная ошибка учителя: формальная строгость при недостатке внимания к существу дела. Такое положение имеет место, когда из-за отдельных случайных ошибок, допущенных в работе, она признаётся неудовлетворительной, несмотря на общий высокий уровень математической культуры, о котором свидетельствует работа в целом. Снижать оценку за такие ошибки надо, с ними надо решительно бороться, но здесь, как и везде, нужна разумная мера.

§ 35. Ошибки в планировании учебной работы по математике.

Особенно часто начинающий учитель допускает ошибки в планировании своей работы, иногда переоценивая силы и возможности своих учеников, перегружая их, переходя к новому вопросу, когда большинство класса ещё далеко не полностью усвоило предыдущий, а иногда, наоборот, их недооценивая, без нужды задерживаясь на более лёгких вопросах, вызывая потерю интереса у учащихся, лишая себя возможности уделить в будущем больше внимания более трудным вопросам.

Для правильного планирования работы совершенно необходимо точно учесть состояние знаний и навыков учащихся данного класса. Правильно поступает тот учитель, который начинает свою работу с новым для него классом с выяснения того, что знают и что умеют делать его ученики, интересуясь прежде всего тем материалом, который нужен для успешной работы в ближайшее время. Если планировать работу приходится ещё до личного знакомства с классом, надо собрать сведения о нём от всех, кто с этим классом имел дело (прежний учитель математики этого класса, классный руководитель, завуч, ассистент на экзамене по математике), не останавливаясь и перед вызовом некоторых учеников для беседы с ними. Составив проект плана работы на четверть, начинающий учитель должен посоветоваться со своими более опытными товарищами, внести поправки, а затем уже представить его на утверждение.

К утверждённому плану надо относиться с уважением, без нужды не отступая от него, всеми силами добиваясь его выполнения в предусмотренные сроки, но в случае действительной необходимости производить необходимые изменения, получая на это надлежащую санкцию. Планы учебной работы справедливо сравнивают с планами военными: готовясь к бою, военачальник тщательно разрабатывает план, но в ходе боя вносит в него поправки, вызванные разными новыми обстоятельствами.

К планированию работы учителя в несколько более широком смысле относится и решение вопроса о том, какие классы он будет вести в новом учебном году. Для успеха дела очень важно, чтобы один и тот же учитель математики вёл данный состав класса несколько лет подряд, например, с V по VII классы, с VIII по X, ещё лучше с V по X. Хороший учитель добивается такой непрерывной работы, желая нести полную ответственность за её результаты, обеспечивая в течение каждого следующего года устранение тех недочётов, какие были налицо в предшествующем году, изучая во всех подробностях каждого своего ученика, находя способы улучшения работы каждого из них. Слабый же учитель предпочитает, проработав с данным классом год, передать его другому, чтобы тот исправлял все накопившиеся и тяготеющие над классом изъяны, а сам стремится взять новый класс, с которым у него повторяется та же история. Борьба с такого рода обезличкой должна вестись и администрацией школы, и профсоюзной организацией, и каждым учителем, желающим добиться наилучших результатов в своей работе. Иногда само руководство школы настаивает на смене учителя: такой-то ведёт математику плохо, поэтому пусть хоть в X классе его ученики попадут к другому, хорошему учителю и хотя бы частично исправят свои недочёты. Конечно, такая линия в корне ошибочна: слабому учителю надо помочь научиться работать лучше, надо заставить его работать над собой, а не снимать с него ответственность за результаты его работы; если же он не в состоянии работать лучше, надо поставить вопрос о его переводе на другую работу.

§ 36. Подавление инициативы учащихся и некоторые другие ошибки учителя математики.

Вот маленькая сценка с натуры.

Начинающая учительница математики проводит урок арифметики в V классе на тему о сложении дробей. Добросовестно разработан конспект, и, согласно ему, даётся задача для устного решения: «Истратили сперва $\frac{2}{5}$ руб., потом еще $\frac{3}{10}$ руб. Сколько истратили всего?» Немедленно поднимается множество рук, одна из учениц получает разрешение отвечать. С радостной уверенностью она начинает: «Две пятых рубля — это сорок копеек, а три десятых...» Но тут учительница её прерывает: «Нет, так считать не надо, будем считать только в долях рубля. Садись, пусть отвечает такая-то». Первая девочка с обескураженным видом садится. Она не понимает, чем плох её ответ: она уверена в его правильности. Да и в самом деле, ученица стала решать задачу наиболее естественным способом, и учительнице следовало дать ей ответить до конца, а затем, отметив правильность решения, поставить вопрос о возможности другого решения, не требующего раздробления рублей в копейки. Лучше было бы предложить такой вариант задачи: «Пройдено $\frac{2}{5}$ всего пути, затем ещё $\frac{3}{10}$ его. Какая часть пути пройдена всего?»

Браковать правильное решение, предложенное учащимися, недопустимо. Его надо всегда приветствовать, отмечать его достоинства, выяснять его недостатки сравнительно с другими возможными решениями той же задачи. Даже более того: нужно самым внимательным образом относиться и к ошибочным решениям, всемерно поощряя инициативу учащихся, но ясно показывая, чем это решение плохо. Правильное решение одной задачи, к которому класс пришёл, разобрав и отвергнув одно-два неправильных, выдвинутых самими учениками, приносит во много раз больше пользы, чем ознакомление с готовыми решениями нескольких задач, навязанными учителем: в первом случае учитель приучает учеников самостоятельно искать решение, во втором только пополняет их запас сведений.

Начинающим учителям, добросовестно готовящимся к урокам, свойственно старание во что бы то ни стало направить ход урока в точности по намеченному ими пути, и они склонны неприязненно встречать всё, что их от этого пути отклоняет. Это, конечно, существенный недостаток их работы. Надо уметь во-время, в ходе урока, внести в свой план нужные поправки, избегая какого бы то ни было подавления инициативы учащихся, направленной к достижению той конечной цели, какую преследует данный урок, и отнюдь не допуская такого положения, когда учащиеся начинают думать не о том, каков правильный ответ, а о том, какого ответа, хотя бы с их точки зрения и неправильного или менее правильного, добивается от них учитель.

Ошибки учителя, более или менее снижающие продуктивность его работы, бесконечно разнообразны. Отметим ещё несколько таких ошибок, особенно часто наблюдаемых.

В поле внимания учителя должны быть все без исключения ученики класса, но почти никогда не удаётся добиться ровной работы всех: в каждом классе встречаются более сильные ученики, быстро овладевающие новым материалом и начинающие скучать, в то время как более слабые их товарищи этот материал ещё не усвоили. В этой пестроте состава каждого класса и заключается наибольшая трудность работы учителя, нередко приводящая к той или другой из двух его ошибок: иногда учитель неправильно ориентируется на лучшую часть своего класса, не замечая, что многие начинают отставать, пока положение не станет явно катастрофическим, пока, например, на очередной контрольной работе он не будет вынужден поставить много неудовлетворительных оценок; иногда же, наоборот, учитель строит свою работу, ориентируясь на самых слабых; добиваясь некоторого успеха в их занятиях, он упускает из виду большинство средних и сильных учеников, которые из-за этого начинают хуже работать, теряя интерес, и сами становятся кандидатами в отстающие. Нормальным является такое положение, когда учитель в основном ориентируется на большинство средних учеников класса, но не теряет из виду ни более слабых, во-время оказывая им необходимую помощь, ни более сильных, которым даёт, соблюдая разумную меру, дополнительные индивидуальные задания, организует их помощь более слабым товарищам, втягивает этих более сильных в кружковую работу.

При правильной постановке дела обучения математике учащиеся не тяготятся ни уроками математики, ни приготовлением заданий: налицо заинтересованность их в этой работе; они испытывают удовлетворение, даже удовольствие, выполняя посильные для них задания, важное значение которых они понимают. Все разговоры о том, что математика по самому своему существу «сухой предмет», настолько неинтересный, что заниматься математикой можно только по принуждению, являются исключительно плодом ошибок, допускаемых учителем или по неведению, или из-за небрежности. Хороший учитель ведёт урок всегда так, что весь класс бывает увлечён работой, все думают, все активно участвуют в обсуждении. Это не всегда одинаково легко обеспечить. Иногда нужна не только методически правильная постановка дела, но и особые меры для возбуждения интереса к математике, потерянного, например, из-за неполадок в ходе занятий за предшествующее время. Прекрасным, неизменно сильно действующим средством в деле возбуждения такого интереса является показ доступных ученикам ярких примеров практического применения математики. Нужный перелом может создать умелое рассмотрение задач на косвенные способы измерения величин, например измерения недоступных расстояний. Знакомя учащихся любого класса с доступными для них приложениями математики, показывающими могущество математического метода, учитель создаёт благоприятную почву для упорной работы над его изучением. Конечно, нет ни возможности, ни надобности делать привлекательным всё изучаемое: учащиеся охотно идут и на скучную для них работу, если она для них понятна и посильна и если им ясна цель, достигаемая при её выполнении.

Одной из весьма распространённых ошибок учителя математики является недостаточное его внимание к использованию учащимися имеющихся в их распоряжении руководств: по арифметике и алгебре вся работа сводится иногда к решению задач без подведения базы в виде хорошо изученной теории; по геометрии разучиваются данные учителем тексты определений и теорем, а также доказательства, записанные в тетрадях. Учитель указывает каждый раз те параграфы руководства, какие относятся к объяснённому материалу, но не показывает, как надо работать над ними, не проверяет, как эта работа фактически ведётся. Научить своих питомцев работать с книгой — одна из задач средней школы, и учитель математики может достичь в этом направлении многого, если обращает внимание на эту сторону дела. Математическую книгу надо читать обязательно с карандашом и бумагой, выполняя все указанные выкладки, строя чертежи, выясняя основания каждого приведённого заключения, находя возможные варианты, подбирая примеры. Всему этому надо учить, причём надо как можно полнее использовать учебник, различая в нём удачные и неудачные места, предупреждая возможные затруднения, осторожно и постепенно приучая учащихся работать над книгой самостоятельно. В старших классах полезно периодически пробовать давать учащимся задания по самостоятельному изучению менее трудных и хорошо изложенных в учебнике вопросов без предварительного их рассмотрения в классе, но с обязательным тщательным последующим их рассмотрением, в процессе которого выявляются и устраняются дефекты понимания и усвоения. Однако надо признать, что бывают учителя, выбирающие для такого вполне самостоятельного изучения по книге самые трудные вопросы, объяснять которые в классе они не решаются, к тому же избегающие возвращаться к этим вопросам в дальнейшем.

Нельзя с успехом учить математике, не интересуясь её связью с другими школьными дисциплинами: физикой, астрономией, черчением и т. д. Надо знать, какого рода запросы к математическим знаниям и навыкам предъявляют эти дисциплины, и принимать меры к тому, чтобы ученики не оказывались в этих случаях беспомощными, внимательно относясь ко всякого рода жалобам и просьбам других преподавателей. Если, например, учитель географии жалуется, что ученики забыли метрические меры площади, их надо повторить. Если на занятиях историей выясняется, что учащиеся плохо знают календарь и не могут производить расчётов, связанных с исчислением времени, нужно посвятить 20—30 минут этим вопросам, хотя бы они программой данного класса и не были предусмотрены. Особенно регулярной и живой должна быть связь математики с физикой. Эта последняя дисциплина даёт математике много полезнейшего материала для упражнений по всем разделам школьного курса. Изучение геометрии очень выигрывает, если учитель учитывает то, что ученики одновременно проходят на занятиях по черчению. Геометрия должна подводить теоретическую базу под те технические навыки, какие учащиеся приобретают, занимаясь черчением, и которые имеют большую ценность и для самой математики.

Долг каждого учителя, в том числе и учителя математики,— принимать самое живое участие в борьбе за культуру устной и письменной речи учащихся, за их грамотность. Прежде всего, сам учитель должен быть в этом отношении безупречен. Подавая всегда хороший пример своей правильной речью, своими абсолютно грамотными и аккуратными записями, он должен требовать такого же качества всех устных и письменных ответов от учащихся, не оставляя без указания и исправления ни одного случая ошибки или неряшливости. Только при едином фронте борьбы за грамотность со стороны всего коллектива учителей достигается повышение культуры устной и письменной речи учащихся.

§ 37. О чём должен в первую очередь заботиться начинающий учитель математики?

Закончим настоящую первую часть несколькими советами начинающему учителю.

Нельзя успешно преподавать то, что сам знаешь нетвёрдо. Учителю надо безупречно знать материал, притом глубже и полнее, чем его должен усвоить ученик. Подготовка учителя математики в пединституте не всегда обеспечивает его нужным знанием школьного курса математики, отсюда необходимость постоянной серьёзной работы по углублённому изучению программного материала. Знание всех деталей школьных руководств, уменье полноценно решить любую задачу из школьных задачников необходимы, но ещё не достаточны: нужно ещё изучать дополнительную математическую литературу, издаваемую для учащих и учащихся, нужно следить за новинками. Школьники прекрасно различают глубокое и поверхностное знание учителем своего предмета и реагируют соответственно повышенным интересом и вниманием или пренебрежительным отношением к предмету.

Своё знание предмета надо уметь передать ученикам, надо не только знать предмет, но и уметь методически правильно поднести его ученикам. Успех обеспечивается только тщательной подготовкой к курсу в целом и к каждому его уроку, точным учётом получаемых результатов, внесением надлежащих поправок в свою работу. Никогда не следует относить неудачи за счёт так называемых «объективных» причин: надо искать путей, какие позволят добиться успеха и в любых трудных условиях, надо учиться у старших, более опытных товарищей, наблюдая их работу и используя их советы.

Никогда не следует забывать о необходимости индивидуального подхода к каждому отдельному ученику, необходимости самого внимательного отношения ко всем его особенностям, тщательного изучения причин, вызывающих отставание, бережного ухода за теми хорошими ростками, какие имеются у каждого. Надо твёрдо помнить об условности деления на слабых и сильных: за крайне редкими исключениями каждый учащийся способен отлично учиться по любому предмету, в том числе и по математике, надо только найти правильный путь.

В своих требованиях к учащимся учитель должен быть разумно настойчивым и последовательным, а в оценке работы каждого ученика — строгим и справедливым. Особая снисходительность или чрезмерная строгость в оценках учителем работы отдельных учащихся может легко привести к потере учителем авторитета в глазах учащихся.

Главный враг успеха в деле обучения математике — равнодушное, безразличное отношение к этой науке со стороны учеников. Если учитель сумел заинтересовать их своим предметом, половина дела сделана, все трудности будут преодолеваться, а если не сумел, никакие меры педагогического воздействия положения не исправят. Но заинтересовать других легче всего тем, чем интересуешься сам. Отсюда неизбежный важнейший вывод — нужна постоянная работа учителя по изучению математической науки, притом именно тех её областей, какие соприкасаются с вопросами, изучаемыми школьниками.

«Отставание учащихся, принявшее слишком большие размеры, — явление недопустимое. Предупреждать это явление, бороться с ним всеми средствами — главнейшая задача учителя и школы. Надо напомнить, что учитель несёт ответственность за знание каждого своего ученика. Он должен быть неумолим в своих требованиях к ученику и вместе с тем каждодневно помогать ему. Учитель — не сухой педант, равнодушно раздающий неудовлетворительные отметки, а человек, болеющий за каждого своего ученика, за его знания и работу. Учитель не может ориентироваться в своей работе на так называемого «среднего» ученика. В каждом классе столько индивидуальностей, сколько учеников. Учитывать степень интеллектуального развития учащихся, их способности и запросы — вот о чём должен думать неустанно учитель и в соответствии с этим строить как общеклассную, так и индивидуальную работу. Знание сильных и слабых сторон каждого школьника — вот что даёт возможность нашим педагогам-мастерам хорошо обучать и воспитывать, и вот почему они не имеют отстающих. Внимательно следить за работой каждого ученика, предупреждать неуспеваемость в самом её зародыше — такова сейчас одна из основных задач, стоящая перед учителями, школами и органами народного образования».

Этими горячими словами из передовой «Учительской газеты» от 22 декабря 1947 г. («Чему учат итоги первой четверти») мы и закончим настоящую первую часть, посвящённую вопросам общей методики преподавания математики.

СПИСОК ДОКУМЕНТОВ, КНИГ И СТАТЕЙ ПО ВОПРОСАМ, ОТНОСЯЩИМСЯ К 1-й ЧАСТИ.

1. Программы средней школы. «Математика». Утверждена Министерством просвещения РСФСР. Учпедгиз, 1949 и 1950 гг.

2. О преподавании математики в семилетней и средней школе. Методические указания Министерства просвещения РСФСР. Учпедгиз, 1947.

3. Положение и инструкции о переводных и выпускных экзаменах в начальной, семилетней и средней школах и экзаменах на аттестат зрелости, Учпедгиз. 1950.

4. Планирование работы в школе. Указания Управления школ Министерства просвещения РСФСР, Учпедгиз, 1950.

5. Нормы оценки успеваемости учащихся V—X классов средней школы по математике, Учпедгиз, 1948.

6. Домашние задания по математике и физике. Методическое письмо Управления школ Министерства просвещения РСФСР, Учпедгиз, 1951.

7. О повторении учебного материала в школе. Методическое письмо, изд. 2-е, Управление школ Министерства просвещения РСФСР, Учпедгиз, 1947.

8. Методика преподавания математики. Программы и методические указания для заочников педагогических и учительских институтов. Управление высшей школы НКП РСФСР, Научно-методический кабинет по заочному обучению учителей. Учпедгиз, 1945. Автор методических указаний — доцент Зерчанинов Н.Т., редактор — проф. Перепёлкин Д. И.

Имеется обширная библиография.

9. Программы средней школы. Математика (V — X классы). Проект для обсуждения, изд. Академии педагогических наук РСФСР, М., 1953.

10. Андронов И. К., А. П. Киселёв (некролог), «Математика в школе», 1941, № 2.

11. Барыбин К. С. и Исаков А. К., Сборник задач по математике. Пособие для учителей VIII—X классов, Учпедгиз, 1952.

12. Беллюстин В. К., Как постепенно люди дошли до настоящей арифметики, Госиздат, 1922.

13. Библиотека математического кружка. Серия книг, выпускаемых Государственным издательством технико-теоретической литературы (ГТТИ) для учащихся средней школы, интересующихся более глубоким изучением математики. Вышли выпуски 1, 2, 4, 6 (1950—1952).

14. Бобынин В. В., Очерки по истории развития физико-математических знаний в России в XVII в., ч. 1 и 2, Москва, 1886—1893.

15. Брадис В. М. и Харчева А. К., Ошибки в математических рассуждениях. «Библиотека учителя средней школы», серия математическая, Учпедгиз, 1938.

16. Брадис В. М., Воспитание логических навыков при изучении математики, «Математика в школе», 1953, № 1.

17. Валецкий Г., Вопросы элементарной математики, Госиздат, 1926.

18. Вебер и Вельштейн, Энциклопедия элементарной математики, т. I и II, Одесса, 1906—1910.

19. Воронец А. М., Очерки по методике математики в школах первой ступени, «Работник просвещения», изд. 5, 1928.

Имеется обширная и весьма тщательно составленная библиография.

20. Выгодский М. Я., Справочник по элементарной математике, ГТТИ, 1950.

21. Гатлих А., А. Ю. Давидов, «Математическое образование», 1912.

22. Гнеденко Б. В., а) Краткие беседы о зарождении и развитии математики, АПН РСФСР, 1946; б) Очерки по истории математики в России, Гостехиздат, 1946, изд. 2, ГТТИ, 1950.

23. Градштейн И. С., Прямая и обратная теорема.

24. Депман И. Я., а) Леонтий Филиппович Магницкий, «Математика в школе», 1940, № 5; б) Из истории математики. В помощь школьнику, Детгиз, 1950.

25. Зыкус А. И., Пути повышения успеваемости по математике в V—VII классах. Учпедгиз, 1952. Серия «Опыт передового учителя».

26. Игнатьев В. А., Пономарёв С. А., Обуховская Е. Н., Сборник задач и упражнений для устных занятий по математике. Пособие для учителей средней школы, Учпедгиз, 1952.

27. Игнатьев Е. И., В царстве смекалки, или арифметика для всех. Книга для семьи и школы. Книга 1, 2, 3, Госиздат, М., 1923.

28. Клейн Феликс, Элементарная математика с точки зрения высшей, т. I и II, ОНТИ, 1934.

29. Калашников А. Г., редактор, Вопросы политехнического обучения в школе, изд. Академии педагогических наук, 1953, Сборник статей.

30. Колмогоров А. Н., а) Математика (статья в т. 38 Большой советской энциклопедии, изд. 1; б) статьи: «Аксиома», «Алгебра в школе», «Величина» в т. I, II, VII Большой советской энциклопедии, изд. 2.

31. Компанийц П. А., О сознательности знаний учащихся по математике, Учпедгиз, 1953. Серия «Опыт передового учителя».

32. Крылов А. Н., Прикладная математика и её значение для техники, АН СССР, 1931.

33. Ланков А. В., а) К истории вопроса о реформе преподавания математики. «Математика в школе», 1949, № 6; б) К истории развития передовых идей в русской методике математики. Пособие для учителей. Учпедгиз, 1951.

34. Лурье С. Я., Архимед, АН СССР, 1945.

35. Ляпин С. Е., редактор, а) Учёные записки Ленинградского государственного педагогического института имени А. И. Герцена, т. 75, 1948. Кафедра методики математики (сборник статей); б) Методика преподавания математики. Пособие для учительских институтов. Авторы: Крельштейн Б. И., Гастева С.А., Шидловская М. М., Ляпин С. Е. и др.

36. Маргулис А. Я., Андрей Петрович Киселёв, «Математика в школе», 1948, № 4.

37. Маркушевич А. И., а) О математической литературе для учителя средней школы, «Математика в школе», 1947, № 1; б) О повышении идейно-теоретического уровня преподавания математики в средней школе. «Математика в школе», 1950, № 1.

38. Моденов П. С., Сборник конкурсных задач по математике с анализом ошибок, «Советская наука», М., 1950.

39. Нагибин Ф. Ф. и др., Опыт работы по математике в средней школе. Сборник статей, изд. Академии педагогических наук, 1949.

40. Никитин Н. Н., а) Преподавание математики в советской школе в 1917—1947 гг., «Математика в школе», 1947, № 5; б) «Из опыта работы передовых учителей математики». Издательство АПН РСФСР, 1950.

41. Опыт передового учителя. Из опыта работы учителей математики, не имеющих второгодников. Сборник статей Михайлова Г. А. и др., Учпедгиз, 1952.

42. Перельман Я. И., а) Живая математика. Гостехиздат, 1946; б) Занимательная арифметика, изд. «Время», 1932; в) Занимательная алгебра. ГТТИ, 1949 г.; г) Занимательная геометрия, ГТТИ, 1950 и др.

43. Пономарёв С. А., а) О коммунистическом воспитании на уроках математики, «Математика в школе», 1951, № 3; б) К вопросу о политехническом обучении в преподавании математики, «Математика в школе», 1953, № 3.

44. Попов Г. Н., а) Сборник исторических задач по элементарной математике. ОНТИ, 1938; б) Памятники математической старины в задачах, ГИЗ, 1929.

45. Популярные лекции по математике. Серия брошюр, рассматривающих отдельные вопросы математики, выходящие за рамки школьного курса, но изложенные доступно для учащихся старших классов. Вышло 10 выпусков (1950—1952).

46. Прудников В. Е., Первый русский арифметик и геометр. К 250-летию со дня публикации «Арифметики» Л. Ф. Магницкого, «Математика в школе», 1953, № 2.

47. Радемахер Г. и Теплиц О., Числа и фигуры, ОНТИ, 1936.

48. Рупейко З., Критика как метод опроса и учёта знаний, «Математика в школе», 1953, № 6.

49. Рыбкин Г. Ф. и Юшкевич А. П., редактор, Историко-математические исследования, вып. I—V, ГТТИ, 1948—1952.

50. Сергеев Я. Из окна вагона, изд. Дома занимательной науки; Ленинград, 1940.

51. Хинчин А. Я., а) Основные понятия математики и математические определения в средней школе. Учпедгиз, 1940; б) О формализме в школьном преподавании математики, «Известия АПН РСФСР», вып. 4, 1946.

52. Фетисов А. И., Шевченко И. Н., Гончаров В. Л., Гибш И. А., Преподавание математики в школе в свете задач политехнического обучения, Академия педагогических наук, 1953.

53. Четверухин Н. Ф., О научных принципах преподавания геометрии в советской школе, «Математика в школе», 1950, № 1.

54. Чуканцов С. М., Статьи в журнале «Математика в школе»: а) Научить учиться (1938, № 5); б) К вопросу о политическом воспитании учащихся (1939, № 6); в) Ближе к практике (1940, № 45); г) Задачи с конкретным содержанием (1940, № 2); д) Мой опыт борьбы с формализмом в преподавании математики (1941, № 2); е) О воспитании у учащихся чувства советского патриотизма и советской национальной гордости в связи с изучением математики в средней школе (1948, № 6).

55. Штейнгауз Г., Математический калейдоскоп, ГТТИ, 1949.

56. Шереметевский В. П., Очерки по истории математики, Учпедгиз, 1940.

57. Цейтен Г. Г., История математики в древности и в средние века. ГТТИ, 1932; История математики в XVI и XVII вв., ГТТИ, 1933.

58. Энциклопедия элементарной математики. Книги 1, 2, 3, ГТТИ, 1951—1952.

59. Юшкевич А. Н., а) Математика и её преподавание в России XVII—XVIII вв., «Математика в школе», 1947 и 1948.

б) Юшкевич А. П., Математика народов Средней Азии в IX—XV вв. Историко-математические исследования, вып. IV, ГТТИ, 1951.

60. Благовещенский Н. И., О книге В. М. Брадиса «Методика преподавания математики в средней школе», «Математика в школе», 1951, № 3.

61. Розенфельд Б. А., Математические трактаты Омара Хайяма (перевод с арабского). Историко-математические исследования, вып. VI, ГТТИ, 1953.

Часть вторая
МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ АРИФМЕТИКИ

Глава I

ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ ОБ ИЗУЧЕНИИ АРИФМЕТИКИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

§ 1. Арифметика как наука и как предмет изучения в школе.

Арифметика, как показывает само слово, происходящее от греческого «аритмос»— число, есть учение о числах. Современная математика имеет дело с числами весьма различной природы: числами *натуральными* $(1, 2, 3, 4, \ldots)$, числами целыми $(0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$, включающими в себя и все натуральные, числами *рациональными*, которые мы получим, если ко всем целым числам присоединим всевозможные дробные числа; далее идут числа *действительные*, заключающие в себе рациональные числа и всевозможные иррациональные, числа *комплексные*, т. е. числа вида $a+bi$, где a и b — любые действительные числа, а i — мнимая единица, числа *гиперкомплексные*, простейшим видом которых являются кватернионы, т. е. числа вида $a+bi+cj+dk$, где a, b, c, d — любые действительные числа, i, j, k — особые единицы, и т. д.

Для каждого из этих родов чисел имеют место операции сложения и умножения, обладающие свойствами, аналогичными сложению и умножению целых чисел (однако, например, для кватернионов не выполняется свойство коммутативности умножения), а также обратные операции — вычитание и деление. Перечисленные классы чисел представляют лишь весьма частные и вместе с тем наиболее важные примеры так называемых *колец* и *полей*, изучаемых в алгебраической науке с единой точки зрения. Не вдаваясь в детали определений, которые читатель должен знать из курса высшей алгебры, напомним, что примером кольца может служить совокупность всех целых чисел, где всегда выполнимо сложение, вычитание, умножение, но далеко не всегда выполнимо деление (даже если исключать деление на нуль); примером поля может служить поле рациональных чисел, где и вычитание, и деление всегда выполнимы (исключая деление на нуль).

Что же остаётся за арифметикой как наукой, если изучение общей теории арифметических операций отошло к алгебре? Арифметика как наука, именуемая в настоящее время *теорией чисел*, представляет собой весьма разветвлённый и богатый содержанием раздел математики, исторически сложившийся в связи с исследованиями по *теории делимости целых* чисел и, в частности, в связи с изучением простых натуральных чисел. За последнее столетие и в особенности за последние десятилетия её проблематика становится всё обширнее. Ведущая роль в развитии теории чисел со времени П. Л. Чебышева принадлежит русской науке. Здесь следует отметить имена А. Н. Коркина, Е. И. Золотарёва, А. А. Маркова, Г. Ф. Вороного, Л. Г. Шнирельмана, Р. О. Кузьмина, а из ныне здравствующих учёных — И. М. Виноградова, Б. Н. Делоне, А. Я Хинчина, Б. А. Венкова, А. О. Гельфонда, Ю. В. Линника и др.

Вопросы арифметики, а именно арифметики натуральных чисел, были первыми математическими вопросами, с которыми человек встретился уже на ранних ступенях своего развития.

Начатки сведений о натуральных и дробных числах имеются даже у людей, стоящих на очень низкой ступени культуры, а история сохранила достоверные сведения об арифметических знаниях народов в очень давние времена. Простейшие сведения по истории арифметики, в первую очередь нужные учителю математики, можно найти в таких маленьких книжечках, как [I, 12 и II, 10]. Об истории арифметики в России подробно рассказывает книга [I,22б]. Желающим подробнее ознакомиться с ходом развития арифметической науки рекомендуется обратиться к книгам [I, 14, 57, 59].

Школьный курс арифметики из учения о числе берёт лишь немногие разделы, нужные каждому человеку для повседневного употребления: это нумерация, т. е. способы называть и записывать числа любой величины, затем четыре действия над натуральными числами, далее учение о дробях вместе с теми сведениями из теории натуральных чисел, какие необходимы для выполнения четырёх действий над дробями (теория делимости). Дальнейшее развитие понятия числа, а именно введение отрицательных чисел и первые шаги по изучению действительных и комплексных чисел, в школе относятся к курсу алгебры. Параллельно с изучением теоретической части курса арифметики идёт и ознакомление со многими её приложениями. Много внимания уделяется вопросам о мерах (длины, площади, объёма, веса, времени), рассматриваются разнообразные применения арифметики к решению вопросов повседневной жизни, например, употребление процентов, пользование счётами, изучаются особенно простые и в то же время особенно важные зависимости между величинами — прямая и обратная пропорциональность.

Итак, школьная арифметика существенно отличается от тех научных математических дисциплин, где изучаются числа и операции с ними (алгебра и теория чисел). С одной стороны, в школьный курс входит лишь ничтожно малая часть вопросов, изучаемых в указанных науках, и притом в весьма упрощённом виде, а с другой стороны, в нём мы имеем ряд понятий и вопросов, заимствованных из других дисциплин. Школьный курс арифметики представляет собой своеобразную азбуку физико-математической науки, систематизированный подбор тех простейших сведений из неё, которые одинаково необходимы и для практической деятельности, и для дальнейшего изучения математики, физики, естествознания и техники.

Преподавание арифметики в начальной и средней школе, прежде всего, ставит себе целью усвоение ряда сведений о числах (натуральных и дробных) и мерах вместе с соответствующими навыками в обращении с ними, нужными каждому человеку. Но одновременно ставится и другая цель: воспитание основных логических навыков, уменье ставить и расчленять вопросы, уменье последовательно провести некоторое рассуждение, уменье из ряда возможных путей найти тот, который кратчайшим путём ведёт к цели, развитие сообразительности. Главным средством достижения этой второй цели служит тренировка в решении многочисленных задач, о чём будет речь дальше (в § 4). Решение задач жизненного содержания преследует одновременно обе указанные цели.

§ 2. Знания и навыки по арифметике, приобретаемые в начальной школе и подлежащие развитию и закреплению в средней школе.

Приступая к занятиям по арифметике в V классе, учитель должен иметь точное представление о тех математических знаниях и навыках, какими уже владеют его ученики, принятые в V класс после окончания ими четырёх классов начальной школы, где на изучение арифметики отводится 858 уроков (из общего числа 3 300 уроков), не считая самостоятельной работы дома. Необходимо подробно ознакомиться с содержанием ныне действующей программы по арифметике для начальной школы (см. «Программы начальной школы», выпущенные Управлением школ Министерства просвещения РСФСР, Учпедгиз, 1952).

Характер тех сведений и навыков, какие должны быть приобретены учащимися начальной школы согласно этой программе, подробно освещён в приложенной к ней «Объяснительной записке». Вот две выдержки из неё.

«Преподавание математики в начальной школе должно обеспечить сознательное и прочное усвоение знаний по арифметике и наглядной геометрии, а также приобретение учащимися уменья применять полученные знания на практике.

Преподавание арифметики должно содействовать развитию логического мышления детей, уменья устанавливать зависимость между величинами, делать правильные умозаключения.

За 4 года обучения в начальной школе учащийся должен приобрести:

1) твёрдые знания четырёх арифметических действий над целыми числами любой величины, как отвлечёнными, так и именованными, и прочные навыки устных и письменных вычислений, уменье пользоваться конторскими счётами;

2) прочные знания метрической системы мер, мер времени и уменье пользоваться ими для измерения;

3) начальные сведения об обыкновенных дробях и процентах, четырёх действий над десятичными дробями;

4) элементарные знания из области наглядной геометрии, уменье применять эти знания на практике;

5) уменье решать различные арифметические задачи с целыми числами».

«Изучение арифметики в школе должно быть поставлено так, чтобы число и мера служили в руках детей орудием познания окружающей действительности. Знание арифметики следует использовать для более глубокого осмысливания детьми социалистического строительства, для воспитания в них сознательного отношения к труду.

Задачи воспитания сознательной дисциплины, аккуратности, чёткости в работе и т. п. достигаются в преподавании арифметики требованием правильности и точности речи, чистоты и аккуратности в записях, ответственности за результаты вычислений».

Математические сведения и навыки, предусмотренные программой начальной школы, весьма примитивны, вполне соответствуя уровню общего развития детей 7—10 лет, но твёрдое овладение ими имеет колоссальное значение для всего последующего математического образования. Это такие знания и навыки, которые должны быть усвоены на всю жизнь, потому что они всем и всегда нужны, это действительно необходимейшие элементы общего образования. Никакое последующее углублённое изучение математики не делает ненужными эти первоначальные сведения, это поистине фундамент всего дальнейшего изучения математики. Важность этого фундамента обязывает учителя математики средней школы самым бережным образом относиться к знаниям и навыкам учеников, приобретённым в начальной школе. Самое прочное знание, если его не использовать, с течением времени теряется. Учитель математики средней школы, приступая к изучению любого нового вопроса, должен напомнить своим ученикам то, что они изучали по этому вопросу в начальной школе, должен упражнять их в тех навыках, какие были ими там приобретены. Например, показывая ученикам V класса, как производить сложение обыкновенных дробей с произвольными знаменателями (на основе теории делимости), учитель обязан напомнить, как складывались «по свободному соображению» такие дроби, как $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ в начальной школе. Знакомясь с новыми для него приёмами, ученик должен видеть их большую мощь по сравнению со старыми, но должен в то же время ценить эти старые приёмы, применять их в тех более простых случаях, когда они быстрее приводят к искомым результатам.

Программа математики для средней школы отводит 21 урок в самом начале учебного года на тему «Повторение пройденного в начальной школе». Разумеется, повторить за это время весь курс начальной школы полностью невозможно, тем более, что на домашнюю работу учащихся по этому разделу программы предусмотрено только 8 часов, но этого времени достаточно, чтобы повторить то, что нужно в ближайшую очередь, и чтобы установить точную картину того, что в действительности знают и чего не знают ученики из этого курса.

Случается, что оканчивающие среднюю школу не знают по математике некоторых простых вещей, какие они знали, оканчивая начальную школу. Такой «рецидив математической неграмотности» бывает и в области действий над многозначными числами, и по части мер, и в решении задач. Подобное ненормальное положение говорит отчасти о недостатках постановки работы в начальной школе, но ещё больше о том, что между изучением математики в начальной и средней школах имеется разрыв. Чтобы устранить его, учитель математики средней школы должен не игнорировать, а укреплять и развивать дальше те ценные математические навыки, какие дети приобретают в начальной школе.

Возьмём, например, вопрос о мерах. Оканчивающие начальную школу должны знать все употребительные в житейском обиходе метрические меры: в программе указаны из мер длины *мм*, *см*, *дм*, *м*, *км*, из мер веса — *г*, *кг*, *ц*, *т*, из мер времени — секунда, минута, час, сутки, неделя, месяц, год, век, затем метрические меры площади и объёма.

«Изучение метрической системы мер, а также мер времени начинается с 1 класса и ведётся на протяжении всех лет обучения в начальной школе. В результате учащиеся должны твёрдо усвоить метрическую систему мер и меры времени, единичные отношения различных мер (линейных, квадратных и кубических, мер веса, времени), раздробление и превращение мер, действия с составными именованными числами.

Изучение мер должно проводиться так, чтобы учащиеся получали к о н к р е т н о е представление о каждой мере, научились пользоваться ими. Уменье измерять требуется в любой отрасли техники, в любом производстве. Школа поэтому должна давать учащимся практические навыки в этой области». Программы начальной школы, Учпедгиз, 1952 («Объяснительная записка», стр. 50).

В программе средней школы вопрос о мерах затрагивается только в разделе «Повторение пройденного в начальной школе» (V класс), где есть пункт: «Меры длины, площади и объёма». Значит ли это, что учителя математики средней школы вопрос о мерах вовсе не должен интересовать? Некоторые учителя считают, что это действительно так, что все необходимые сведения о мерах учащиеся получили уже в начальной школе, а если не получили, то за это должна отвечать начальная школа, и что в средней школе лучше вовсе избегать определённых мер, говоря всегда о единицах вообще, как это часто делается и в учебниках (например, см. задачу № 47, § 211, учебника А. Киселёва «Геометрия», ч. I, изд. 1949). Это, конечно, неправильная, вредная установка: средняя школа должна закрепить и пополнить сведения о мерах; надо пользоваться всякой задачей, чтобы напоминать об этих важных вещах, чтобы обеспечить и самое твёрдое знание общеупотребительных ныне мер, и понимание принципиальных выгод метрической системы, вытекающих из её связи с десятичной нумерацией, и некоторое знакомство со старыми русскими и важнейшими зарубежными мерами, как фунт, пуд, верста, десятина, английская миля, бушель и др., с которыми встречается каждый при чтении газет. Здесь нельзя ссылаться на то, что эти вопросы затрагиваются в программе физики: если выпускник средней школы не знает толком, например, что такое ар и гектар, то ответственным за это является в первую очередь учитель математики. Некоторые полезные для курса арифметики сведения о мерах можно найти в книге [II,19].

§ 3. Построение курса арифметики в средней школе. Учебная литература.

«Преподавание арифметики имеет целью научить учащихся сознательно, быстро, уверенно и наиболее рационально производить действия с целыми и дробными числами и применять полученные знания к решению задач и выполнению простейших расчётов практического характера». Так определяется конкретная задача систематического курса арифметики в средней школе объяснительной запиской к ныне действующей программе по математике для средней школы РСФСР. Для достижения этой цели учебный план отводит 7 уроков в неделю в течение целого года работы в V классе, что даёт всего 231 урок и два урока в неделю в VI классе, что даёт дополнительно 66 уроков. Особых часов на изучение арифметики в последующих классах учебный план не предусматривает, но в VII классе из 196 часов, посвящённых математике, берётся 32 часа на повторение арифметики, алгебры и геометрии. Имеется указание на необходимость систематического повторения арифметики в старших классах, причём письменные и устные вычисления с целыми и дробными числами рекомендуется повторять в связи с вычислением числовой величины алгебраических выражений, а также при решении геометрических задач на вычисление. Это последнее указание надо понимать, как осуждение той весьма распространённой практики, когда в задачах алгебры и геометрии данные подбираются искусственно так, чтобы вся вычислительная сторона становилась возможно проще: чтобы деления всегда выполнялись нацело без остатка, чтобы корни всегда извлекались точно, чтобы ответы выражались удобными числами, имеющими 1—2 значащих цифры. Этот путь неизбежно ведёт к потере вычислительных навыков, приобретённых в I—V классах.

Теоретический материал, подлежащий изучению в V и VI классах, в курсе арифметики очень невелик, а времени даётся много: $231 + 66 = 297$ уроков, да ещё примерно 120 часов домашней самостоятельной работы. Есть полная возможность обеспечить и прочное его усвоение, и полноценное уменье применять его к решению разнообразнейших задач. По сравнению с дореволюционной школой программа арифметики стала значительно проще. Выпало, во-первых, изучение старинных мер с их неудобными отношениями, требовавшими большой работы памяти и чрезвычайно осложнявшими решение задач. Чтобы убедиться в этом, достаточно сравнить обращение в меры высших наименований, например, одного миллиона золотников и одного миллиона граммов. Для ответа на второй вопрос пишем сразу 1 000 000 *г* = 1 000 *кг* = = 1 *т*, а для получения ответа на первый надо выполнить деление на 3 (3 золотника равны 1 лоту), потом на 32 (32 лота равны 1 фунту), далее на 40 (40 фунтов равны 1 пуду) и на 10 (10 пудов равны берковцу), что даёт в конце концов: 1 000 000 золотников = 26 берковцев 0 пудов 16 фунтов 21 лот 1 золотник. Во-вторых, отпало изучение ряда специальных правил, вроде «правила учёта векселей» или «цепного правила». Вся постановка дела изучения арифметики в советской средней школе имеет ряд положительных сторон по сравнению с тем, что было в дореволюционной средней школе. Теперь учащиеся получают действительно нужные для жизни знания и навыки по арифметике, а не тратят времени на изучение материала, не имеющего никакого ни теоретического, ни практического значения.

Однако нельзя сказать, что программа по арифметике, установленная в настоящее время для средней школы, свободна от недостатков. Так, школа и сейчас значительно отстаёт от жизни по части техники вычислений. До сих пор ни программа, ни школьные учебники не решают должным образом проблему приближённых вычислений, которой у нас дальше будет посвящён специальный раздел (глава V).

Проект новой программы по математике для средней школы, разработанный Институтом методов обучения Академии педагогических наук РСФСР в 1953 г., вносит некоторые изменения в действующую программу. Уделяется большое внимание вопросам рационализации вычислительной работы (применение таблиц, счётов, правильное расположение вычислений, самопроверка), рекомендуется более раннее решение задач на проценты, указываются некоторые ценные виды арифметических расчётов, например, для построения прямоугольных и секторных диаграмм, для составления приходо-расходных ведомостей, отмечается важность знакомства со старыми русскими мерами, подчёркивается необходимость использования геометрической тематики, уделяется больше внимания приближённым вычислениям.

Учитель обязан работать по программе, действующей в настоящее время, но желательно, чтобы он учитывал те тенденции, какие намечаются в передовой педагогической практике.

Переходим к рассмотрению учебной литературы.

В настоящее время в средних школах РСФСР используются два стабильных учебника арифметики, утверждённых Министерством просвещения: руководство «Арифметика» А. П. Киселёва, переработанное проф. А. Я. Хинчиным и вышедшее в 1952 г. 14-м изданием, и «Сборник задач и упражнений по арифметике» Е. С. Березанской, вышедший в 1953 г. 20-м изданием. Обе книги в предшествующих изданиях подверглись справедливой критике, вскрывшей ряд недочётов, которые постепенно устранялись в новых изданиях, и в настоящем своём виде оба учебника хотя и не свободны от недостатков, но всё же обеспечивают возможность овладения школьниками всего программного материала.

Отметим следующие важнейшие слабые стороны учебника Киселёва:

1. Вся предшествующая работа школьника по изучению арифметики в начальной школе полностью игнорируется: всё излагается так, как будто пятиклассники абсолютно ничего по арифметике до сих пор не делали.

2. Рассматриваются только общие приёмы письменного производства действий над натуральными и дробными числами, почти не затрагиваются вопросы их рационализации: приёмы устных

вычислений, особые приёмы письменных вычислений, способы проверки, вопрос о записи, вопрос о счётных приборах, об использовании таблиц и графиков.

3. Никаких сведений об особенностях операций с приближёнными числами учебник не содержит, если не считать указания на необходимость округления частного, представленного в виде бесконечной десятичной дроби.

4. Изложение имеет довольно отвлечённый характер, не всегда вскрывает в достаточной мере практические корни каждого теоретического предложения, содержит очень мало исторических сведений. Для самостоятельной работы учеников V и VI классов книга трудна.

Задачник Березанской Е. С. в первых своих изданиях содержал исключительно лёгкий материал, представлявший собой только примеры применения изученных правил и не требовавший почти никакой работы мысли. В последних изданиях появилось много более трудных вопросов, настоящих задач. Но всё же приходится отметить несколько недостатков задачника. Так, в нём много задач псевдожизненного содержания, задач, говорящих о вопросах практической жизни, но ставящих их вовсе не так, как они ставятся в действительности. Задач подлинно практического содержания, таких, какие действительно встречаются в жизни, очень мало, и решения их в подавляющем большинстве весьма однообразны. Есть и неудачные задачи. Например, в задаче № 546 требуется сказать, простыми или составными являются числа вида $2 \cdot 3 \cdot 5 + 1$, $2 \cdot 3 \cdot 5 + 2$ и др., а в задаче № 547 предлагается написать с помощью простых чисел 1, 2, 3, 5, 7 «по вышеуказанному правилу (см. предыдущую задачу) одно простое и девять составных чисел», откуда следует, что автор считает все числа вида $2 \cdot 3 + 1$, $2 \cdot 3 \cdot 5 + 1$, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1$ и т. д. простыми, что неверно: например, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30\,031 = 59 \cdot 509$. О числе вида $p_1 p_2 p_3 \ldots p_n + 1$, где буквы означают последовательные простые числа 2, 3, 5, 7 и т. д., можно утверждать лишь то, что оно не делится ни на одно из простых чисел до p_n включительно и является поэтому либо простым, либо составным с простыми делителями, превосходящими p_n. Встречаются и задачи с ошибками в условиях или в ответах, правда, постепенно исправляемые в последующих изданиях.

Так, указанная неудачная задача № 547 в изданиях после 1948 г. заменена другой. И арифметика Киселёва, и задачник Березанской не вполне отвечают своему назначению как стабильные учебники для V и VI классов, но работа по ним может идти успешно, если учитывать их недостатки и вносить надлежащие коррективы. Желательно, чтобы учитель использовал и другие пособия, в первую очередь задачник по арифметике для педагогических училищ [II, 36], а также некоторые более старые издания, например [II, 25]. Отмечаем новые сборники задач и упражнений по арифметике для V и VI классов [II, 30а, 33].

§ 4. Арифметические задачи.

Задачи, предлагаемые учащимся по арифметике, можно классифицировать следующим образом. На первое место в курсе арифметики ставятся *задачи-примеры*, решение которых требует только твёрдого знания некоторых правил и которые даются с целью выработки прочного навыка в их применении. Сюда относятся прежде всего задачи на простое выполнение указанных действий над данными числами. Обычно «примерами» в школьной математике называют задачи этого рода в тех случаях, когда для записи их условий используются только математические символы — цифры, знаки действий, скобки, а словесный текст вовсе отсутствует, но это обстоятельство не существенно: никакой разницы между задачей вычисления $x = (5{,}6 + 7{,}4) : 0{,}02$ и задачей «Найти частное от деления суммы чисел 5,6 и 7,4 на 0,02», по математическому её содержанию, конечно, нет. Решение задач-примеров представляет собой весьма примитивное, мало развивающее упражнение, но значение его тем не менее весьма велико: навыки в выполнении арифметических действий должны быть прочно, на всю жизнь закреплены, в некоторых случаях даже доведены до автоматизма (таблица умножения, правила о порядке действий), а кроме того, упражнения в решении задач-примеров возрастающей сложности воспитывают в детях полезнейшее уменье выполнять большую работу, разбивая её на ряд последовательных шагов, вырабатывая терпение и внимание, приучая к аккуратности, к самоконтролю, воспитывая столь важное чувство ответственности за свою работу. Задачи-примеры должны даваться на каждое новое правило, а кроме того, и на применение ранее пройденных правил, притом самой различной трудности, включая обязательно и такие, которые можно решить в уме, как приведённый выше образец.

От задач-примеров, где вопрос о выборе пути решения вовсе отпадает, учащиеся переходят при изучении любого раздела арифметики к решению собственно задач прикладного арифметического содержания, где вопрос о выборе надлежащих арифметических действий приходится ставить, но он решается без каких бы то ни было затруднений. Условимся называть такие задачи *задачами-расчётами*. Именно такого рода задачи человек встречает и в быту, и на каждом шагу в каждой профессии.

Решение задач-расчётов преследует отчасти ту же цель, что и решение задач-примеров, т. е. выработку прочных навыков в выполнении арифметических действий, но главное здесь в том, чтобы научиться применять арифметику к решению вопросов практической жизни: расчёты денежные, какие приходится выполнять при всякой покупке («Я купил 2 *кг* хлеба по 1 руб. 35 коп., 500 *г* сахарного песку по 9 руб. 40 коп. за 1 *кг*, 300 *г* масла по 28 руб. 70 коп. за 1 *кг* и дал 100 руб.; сколько причитается сдачи?»), и подобные же расчёты более сложного характера, когда покупки делаются не для личных надобностей, а для учреждения (например, покупка спортинвентаря для пионерлагеря), простейшие расчёты сметно-технического характера (например, расчёт стоимости ремонта комнаты). Ничего нового в чисто математическом отношении такого рода задачи учащимся не дают, но приобретение полноценного навыка в их решении является делом первостепенной важности. Больше всего нареканий на плохую работу школы в области математической подготовки бывает именно по поводу неуменья многих окончивших семилетнюю и среднюю школу выполнять такого рода расчёты в своей профессиональной деятельности и при последующем обучении.

Объяснительная записка к ныне действующей программе математики указывает тематику такого рода задач-расчётов. В готовом виде их в большом выборе (но не всегда удачно поставленных) содержит каждый сборник арифметических задач. Текущая жизнь доставляет учителю на каждом шагу много нового материала для самостоятельного составления такого рода задач [см. II, 20].

Особого упоминания заслуживают так называемые «задачи на время» из-за своеобразного характера некоторых употребительных единиц времени. Как известно, месяц не является вполне определённой единицей времени: февраль имеет 28 или 29 дней; апрель, июнь, сентябрь и ноябрь по 30 дней, остальные семь месяцев — по 31 дню. Поэтому в тех случаях, когда требуется точное определение промежутка времени, месяцами лучше не пользоваться. Располагая теми немногими сведениями об измерении времени, какие изложены в стабильном руководстве арифметики Киселёва, ученики V класса в состоянии правильно решать все задачи на время, приведённые в задачнике Березанской и вполне исчерпывающие те случаи, когда вопросы о времени возникают в житейской практике. Приведём для примера одну такую задачу: «Сколько дней продолжалась Великая Отечественная война, если считать и день нападения фашистской Германии на СССР — 22 июня 1941 г., и день подписания акта о капитуляции Германии — 8 мая 1945 г.?» Ответ: 1417 дней.

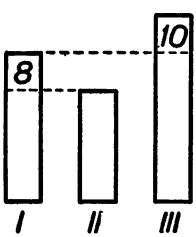
Третий вид задач, предлагаемых учащимся V и VI классов по арифметике,— это задачи более сложного математического содержания, разрешаемые в большинстве случаев чрезвычайно просто общим алгебраическим методом уравнений, но представляющие некоторые трудности, если уравнениями не пользоваться. Цель введения таких задач — развивать сообразительность, инициативу, уменье комбинировать и рассуждать. Их можно назвать *развивающими арифметическими задачами*. Вот типичный пример подобной задачи: «Один человек имеет 265 руб., другой 157 руб., каждый тратит ежедневно по 10 руб.; через сколько дней у первого денег останется в пять раз больше, чем у второго?» Задача решается сразу, если написать уравнение $265 - 10x = 5 \cdot (157 - 10x)$, которое даёт $x = 13$. Не прибегая к алгебре, задачу можно решить простым наблюдением, сравнивая остатки денег, какие получаются через 1, 2, 3 и т. д. дней; это полезное примитивное решение тоже представляет некоторый интерес, так как позволяет остановиться на вопросе об изменении величины: частное от деления последовательных остатков первого и второго, равное сперва 255 : 147, что меньше 2, через пять дней станет равным 215 : 107, т. е. большим 2, а через 10 дней уже равным 165 : 57, т. е. почти 3, и через 13 дней — 135 : 27, т. е. равно 5. Установив возможность такого простого, но кропотливого и длинного решения, ставим вопрос о более коротком решении, не требующем проб. Хорошее решение получается, если заметить, что разность 265 — 157 = 108 (руб.) остаётся неизменной и что она равна четырёхкратному остатку денег у второго человека через искомое число дней.

Относительно целесообразности решения подобных задач в курсе арифметики существует большое разнообразие мнений, начиная от предложений вовсе исключить их, перенося их целиком в курс алгебры, до придания им преобладающего значения и сведения к решению определённых типов таких задач главного содержания занятий по арифметике. Оба таких крайних мнения неправильны: развивающее значение таких задач бесспорно, решение их приучает размышлять и рассуждать, но на первый план при занятиях арифметикой всё же надо ставить задачи-примеры и задачи-расчёты. Польза от решения развивающих задач резко снижается, если вместо задач, посильных для детей и подобранных в порядке постепенно возрастающей трудности, даются сразу более трудные задачи вместе с готовыми их решениями, которые надо понять, усвоить и применять в аналогичных случаях (задачи «на предположение», «на встречу», «на бассейны» и т. д.).

Отметим, что развивающие задачи отнюдь не сводятся только к задачам алгебраического характера, т. е. легко решаемым с помощью уравнений. Вот пример хорошей развивающей задачи неалгебраического характера, вполне пригодной для V класса: «Имеется 80 одинаковых по виду монет, среди которых 79 одного веса и одна немного более лёгкая; как её выделить, применяя не более четырёх взвешиваний?» (X математическая олимпиада МГУ). Сравнивая вес 40 и 40 монет, затем 20 и 20, 10 и 10, далее 5 и 5, 2 и 2, 1 и 1, мы выделим более лёгкую монету, но при этом понадобится 6 взвешиваний. Надо догадаться разбивать монеты не на две, а на три группы и сравнивать путём взвешивания на двух чашках весов сперва 27 и 27, потом 9 и 9, 3 и 3, 1 и 1 монету; искомая монета будет выделена после четырёх взвешиваний.

При подборе развивающих задач рекомендуется новая книга [II, 39].

Итак, в курсе арифметики мы имеем дело с задачами трёх категорий: задачами-примерами, задачами-расчётами, задачами развивающими. Нормальным представляется такое положение, когда задачам каждой категории уделяется примерно поровну внимания и времени; при недостатке времени приходится мириться с меньшим количеством задач развивающего характера, так как, повторяем, главной целью изучения арифметики является выработка навыка в действиях над числами и умения применять их в простейших случаях, действительно встречающихся на практике.



Фиг. 1.

Подбирая арифметические задачи для решения их учениками, учитель должен иметь в виду следующие обстоятельства:

1. Всегда надо отдавать себе отчёт в том, какую цель преследует решение каждой предлагаемой классу задачи: закрепление того или иного навыка, повторение пройденного ранее, подготовка к изучению нового теоретического материала, возбуждение интереса и т. д.

2. Используя школьный задачник, надо помнить о его недостатках, критически относиться к его задачам, обязательно решать

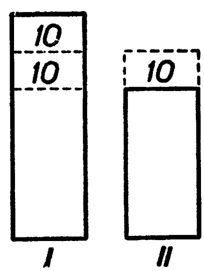
каждую задачу прежде, чем давать её ученикам, обращаться к другим задачникам.

3. В задачах-расчётах следует избегать нереальных и неправдоподобных условий, стремясь к максимальной жизненности постановки вопроса.

4. Учителю рекомендуется широко практиковать *композицию* задач, т. е. составление новых задач, используя всевозможные числовые данные из школьной жизни, из домашнего быта, из текущей общественной жизни, отражаемой в газетах, указывая в условиях задач такие данные, которые характеризуют наше социалистическое строительство, в частности выполнение пятилетнего плана.

5. Очень желательно вовлекать в это дело композиции задач и самих учащихся, на первых порах предлагая им задачи с недостающими числовыми данными, которые они должны получать сами. Например, можно предложить найти отношение площади пола к площади окон в классе и в комнате, где живёт ученик, произведя для этого необходимые измерения, или найти толщину листа той бумаги, на какой напечатан учебник, и т. д. Как показывает опыт, такие задачи, помимо всего прочего, особенно прочно запоминаются.

Всякое понятие, с которым учащиеся встречаются при решении арифметических задач, должно быть для них совершенно отчётливым, они должны хорошо понимать и наглядно представлять его. Меры длины, площади, объёма, веса, а также всякие другие, о которых идёт речь, надо по возможности показывать учащимся, а не только говорить о них. Текст задачи надо пояснять чертежами, после выполнения которых непонятое раньше решение нередко становится сразу предельно ясным. Возьмём, например, такую задачу: «В трёх ящиках лежит всего 107 тетрадей, причём в I на 8 больше, чем во II, и на 10 меньше, чем в III; сколько тетрадей в каждом ящике?» Если пояснить условие этой задачи схематическим рисунком, показанным на фигуре 1, то решение не вызывает никаких затруднений: $8+10=18$; $8+18=26$; $107-26=$ $=81$; $81:3=27$ и т. д. Это решение основано на доведении количества тетрадей в I и III ящиках до количества их во II ящике. Поучительно дополнительно рассмотреть два варианта, в которых производится уравнивание числа тетрадей I и II ящика с III и II и III с I.



Фиг. 2.

Другой пример: «Двое имеют 100 руб., причём денег у них станет поровну, если первый даст второму 10 руб.; сколько имеет каждый?» Почти всегда учащиеся дают сперва неверное решение, находя $100-10=90$, $90:2=45$, и утверждают, что один имел 45 руб., другой 55 руб. И здесь простенький рисунок (фиг. 2) сразу подсказывает правильное решение.

Постоянная забота учителя об обеспечении наглядности при решении каждой задачи существенно повышает качество работы учащихся и прежде всего радикально уничтожает одно из худших проявлений формализма: механическое, без понимания, заучивание хода решения задач.

Правдивое и художественное описание того, что делается в голове ученика, самостоятельно разрешающего более трудную арифметическую задачу, можно найти в книге Н. Носова «Витя Малеев в школе и дома».

§ 5. Арифметика и другие математические дисциплины.

Мы уже упоминали о распространённой тенденции при составлении задач алгебры и геометрии, заключающейся в искусственном подборе числовых данных так, чтобы арифметические трудности сводились к минимуму. Учитель, практикующий такой подбор, оправдывает его недостатком времени и необходимостью сосредоточить внимание учащихся на новом для них алгебраическом или геометрическом материале, но полное пренебрежение арифметической стороной дела неизбежно ведёт к потере соответствующих навыков. В старших классах необходимо время от времени упражняться и в устном счёте, и в выполнении более сложных арифметических вычислений, и в применении сведений о мерах; кроме того, надо полностью использовать по назначению часы, отводимые программой математики на повторение арифметики в старших классах.

С другой стороны, весьма желательно включение в курс арифметики, как при его изучении в V и VI классах, так и при повторении в старших классах, некоторых простейших сведений по геометрии и алгебре. Уже в начальной школе дети знакомятся с прямоугольником и прямоугольным параллелепипедом (брусом). В V классе с успехом практикуется решение задач на площади фигур, составленных из прямоугольников, и на объёмы тел, составленных из прямоугольных параллелепипедов. Не отводя на это особых часов, а попутно, при решении задач, можно показать способ вычисления площади прямоугольного треугольника, рассматривая его как половину прямоугольника, построенного на его катетах, а после этого и любого треугольника. Богатый материал для арифметических задач дают соотношения между диаметром окружности и её длиной, между радиусом и площадью круга (см. задачник Березанской, №№ 1031, 1032, 1428 и др.). Программа арифметики для V класса упоминает и о вычислении поверхности и объёма цилиндра. Разобрав этот вопрос, мы получаем возможность решать много задач, представляющих большую практическую ценность и самих по себе, и как средство закрепления арифметических навыков. Подробности о том, как подойти ко всем этим геометрическим вопросам в V классе, рассмотрены ниже, в 4-й части. Здесь отметим только крайнюю нежелательность догматического их изложения и полную возможность их уяснения учащимися V класса на основе наглядных представлений и измерений.

Вполне возможно и очень полезно введение в курс арифметики V класса и некоторых буквенных обозначений. Естественнее всего вводится буквенное обозначение неизвестного — общепринятый x («икс»), которым иногда в арифметике без всяких оснований стесняются пользоваться, заменяя его знаком вопроса или словом «часть». Записи $5 + \ ? = 11$ лучше не применять, а писать $5 + x = 11$. Точно так же выгодно писать x и при решении задач «на части» (например, такой: у двоих вместе 100 руб., причём у первого вчетверо больше, чем у второго; сколько у каждого?). Надо усиленно рекомендовать употребление букв и для обозначения произвольных данных чисел как средство более краткой записи арифметических предложений. Например, говоря о правиле сложения дробей с одинаковыми знаменателями, очень полезно, сформулировав его словами («Чтобы сложить две дроби с равными знаменателями, надо в числителе написать сумму числителей, а в знаменателе — общий знаменатель»), записать его также формулой $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$. Очень любопытно следить, как постепенно учащиеся свыкаются с употреблением букв для записи чисел и начинают всё больше и больше ценить эту простейшую буквенную символику. Формулируя правило, учитель диктует его в словесной форме, а затем показывает и равносильную символическую запись. Предлагая на выбор пользоваться либо той, либо другой и спрашивая, какую кто предпочитает, учитель в начале года от большинства класса получает ответ, что словесная формулировка лучше, понятнее, но уже к концу года (если такое применение буквенного обозначения предлагалось систематически) подавляющее большинство класса составляют сторонники символической записи.

Упомянем ещё об одной возможности подготовки изучения алгебры: о введении отрицательных чисел при вычислении алгебраических сумм. Пусть, например, требуется узнать, сколько денег окажется у кассира, если он, имея сначала 1 000 руб., должен был уплатить сперва 600 руб., затем 900 руб., а затем получил 800 руб. Наряду с естественным решением (1 000 + 800 = 1 800, 600 + + 900 = 1 500, 1 800 — 1 500 = 300) полезно рассмотреть и такое: «Сколько денег останется у кассира после первого платежа?» (1 000 руб.— 600 руб.= = 400 руб.) «Сколько долгу будет у кассира, когда он отдаст в счёт уплаты 900 руб. всю свою наличность?» (900 руб.— 400 руб. = 500 руб.) «Сколько денег останется у кассира, когда он, получив 800 руб., покроет свой долг?» (800 руб.— — 500 руб. = 300 руб.)

Отметим в заключение, что резкое разграничение отдельных математических дисциплин в школьной практике нежелательно. Цель изучения математики в школе — вооружить учащихся математическими навыками и знаниями, научить их самостоятельно выбирать при решении каждого математического вопроса соответствующие средства из всего запаса знаний, имеющихся в их распоряжении. Чём больше устанавливается связей между арифметикой и другими математическими дисциплинами, тем лучше.

Глава II

УЧЕНИЕ О НАТУРАЛЬНОМ ЧИСЛЕ

§ 6. Нумерация устная и письменная.

Учитель математики, начиная занятия в V классе, прежде всего встречается с вопросом о нумерации. С повторения вопроса о нумерации многозначных чисел и начинается работа по арифметике в средней школе.

В своей практической деятельности человек встречается с необходимостью счёта больших собраний предметов, и повторение десятичной нумерации хорошо основать на рассмотрении приёма *счёта десятками*. Представим себе, что у нас, например, лежит большая куча спичек, и требуется точно сосчитать, сколько их. Как это сделать, чтобы обеспечить точность и быстроту счёта, а также удобство проверки? Очень выгоден следующий путь. Сперва соединим каждые десять спичек, связав их в один *пучок*. Имея теперь вместо груды отдельных спичек некоторое количество пучков и не более как девять оставшихся несвязанными отдельных спичек, уложим каждые десять пучков в одну *коробку*; отдельных пучков, не уложенных в коробки, останется не более девяти. Каждые десять коробок соединим в одну *пачку*, завёртывая их, например, в бумагу. Теперь мы будем иметь некоторое число пачек и не более чем девять отдельных коробок. Каждые десять пачек заворачиваем в *пакет* из плотной обёрточной бумаги (останется не более девяти отдельных пачек), а каждые десять пакетов укладываем в особый *ящик* (останется не более девяти отдельных пакетов). Положим, теперь у нас получилось только три ящика — дальше идти не надо. Подводим итоги: налицо не более девяти отдельных спичек, не более девяти отдельных пучков по десятку спичек в каждом, не более девяти отдельных коробок по десяти десятков, т. е. по одной сотне спичек в каждой, не более девяти отдельных пачек по десяти сотен, т. е. по одной тысяче спичек в каждой, не более девяти отдельных пакетов по десяти тысяч спичек в каждом, и три ящика, содержащие по десяти пакетов, т. е. по сто тысяч спичек в каждом.

Если обеспечить должную наглядность, показывая вещи, о которых идёт речь, или пользуясь рисунками, учащиеся твёрдо усвоят основную идею десятичной нумерации: *считая отдельные предметы* (единицы) *до десяти и принимая каждый десяток единиц за новую высшую единицу, мы в состоянии сосчитать любое число вещей.*

Если учащиеся приобрели ясное и яркое, а следовательно и прочно запоминающееся представление о счёте десятками, им нетрудно будет усвоить и весь вопрос об устной и письменной десятичной нумерации, вспоминая и пополняя то, что они изучали в начальной школе: названия разрядов и классов, употребление нуля как знака отсутствия единиц какого-либо разряда, уменье безошибочно записать и прочесть любое многозначное число.

Отметим несколько деталей.

1) Лучшему уяснению десятичной нумерации весьма способствует использование обыкновенных конторских счётов, экземпляр которых должен быть в классе. Не следует пренебрегать этим простым и доступным прибором.

2) Совершенно достаточно ограничиться только первыми пятью классами натуральных чисел, т. е. не идти дальше миллиардов (лучше пользоваться теперь этим общепринятым термином, а не устаревшим и двусмысленным термином «биллион») и триллионов. Названия последующих классов (квадриллион, квинтиллион и т. д.) на практике вовсе не употребляются; вместо них пользуются показателями степени при десяти, к чему и надо впоследствии приучить учащихся.

3) Особого внимания требует цифра нуль. Пока дело идёт только о нумерации, эта цифра означает лишь отсутствие единиц данного разряда. Само слово «нуль» происходит от латинского «нуллюс» — «никакой».

4) Повторение десятичной нумерации выгодно связать с повторением метрической системы мер. Соотношения между различными мерами, особенно площади и объёма, дают прекрасные примеры больших чисел: в 1 *кв. м* миллион *кв. мм*, в 1 *куб. м* миллиард *куб. мм* и т. д. Интересно и полезно решить несколько задач вроде следующих: «Какова общая длина миллиона (а затем миллиарда) спичек, уложенных друг за другом как рельсы на железной дороге?» причём пусть учащиеся сами установят, что длина обыкновенной спички составляет 5 *см*, и пусть они наглядно представят эти длины, сравнивая их, например, с расстоянием Москва — Владивосток. Подобные задачи охотно составляют сами учащиеся, если их на это натолкнуть.

5) В учебной и методической литературе принято строго различать термины «цифра» и «число»: цифры — это знаки, с помощью которых записываются числа; в десятичной нумерации имеется только 10 цифр. В разговорном языке слово «цифра» употребляется также в смысле числа (например, «назвать круглую цифру», «контрольная цифра» и т. п.). От учащихся на уроках арифметики нужно

требовать употребления термина «цифра» в его принятом в математике смысле, разъясняя также и другой, разговорный, смысл этого слова.

6) Кроме знания десятичной нумерации, школьники должны иметь понятие о римской нумерации. Хотя в программе V класса о ней не упомянуто, но изучать её хотя бы в том скромном объёме, в каком она рассмотрена в учебнике арифметики Киселёва, крайне желательно. Известны случаи очень досадных жизненных недоразумений, вызванных, например, смешением чисел IV и VI. При повторении арифметики в старших классах для лучшего уяснения принципа поместного значения цифр полезно рассмотреть такие системы счисления, отличные от десятичной, как двоичная, троичная и др.

7) Для старших же классов и для кружковой работы можно рекомендовать решение более трудных задач, связанных с вопросами нумерации, вроде следующих: «Сколько пятизначных чисел можно записать, не пользуясь другими цифрами, кроме 0, 1, 2, 3?» «Если писать подряд натуральные числа, то какая цифра окажется на некотором определённом месте, например, на 2 845 634-м?» «Указать все трёхзначные числа, равные сумме факториалов своих цифр». «Как осмыслить запись $7 \cdot 8 = 62$?»

Неизменно большой интерес учащихся привлекает вопрос о так называемых «волшебных картах», связанный с двоичной системой счисления вопрос о возможности отвесить любое целое число граммов от одного до $\frac{1}{2}(3^{k+1}-1)$, имея гири только в 1, 3, 9, 27, ...3^k *г*, связанный с троичной системой, и др.

§ 7. Четыре арифметических действия.

Обычно окончившие начальную школу приходят в V класс с довольно прочными навыками в выполнении четырёх арифметических действий над многозначными числами (хуже с устным счётом — о нём будет речь идти ниже), но всё же знания учащихся надо проверить и кое-что повторить. Чаще всего встречаются ошибки в делении, например, при попытке разделить 75 555 на 365 у некоторых учеников вместо правильного частного 207 может получиться 27. Точно так же внимания требуют и такие случаи умножения, когда данные содержат цифру нуль в середине или в конце сомножителей.

Занимаясь повторением четырёх арифметических действий, надо требовать постоянной проверки правильности их выполнения: сложение проверяется вторичным выполнением этого действия при другом порядке слагаемых, вычитание — сложением, умножение — вторичным выполнением этого действия при перемене мест сомножителей, деление — умножением. Тратить время на специальные приёмы проверки с помощью чисел 9 и 11 вряд ли целесообразно; это тема для индивидуальных заданий более сильным и для кружковой работы, как и рассмотрение таких вспомогательных средств вычисления, как таблицы произведений, палочки Непера, арифмометр. Напротив, использование всеми учащимися русских (конторских) счётов для выполнения сложения и вычитания очень желательно.

Работа по повторению четырёх действий над многозначными числами, естественно, связывается с решением задач-примеров со скобками, причём предварительно необходимо повторить правила, относящиеся к порядку действий и к употреблению скобок, сводящиеся к следующему: 1) если в данном выражении имеются только действия I ступени, т. е., сложение и вычитание, то они выполняются в том порядке, в каком записаны (слева направо); 2) если имеются действия только II ступени, т. е. умножения и деления, то их следует выполнять тоже в порядке записи (слева направо); 3) если имеются действия и I и II ступени, но нет ни скобок, ни горизонтальной черты как знака деления, то сперва делаются действия II ступени, потом I, например, $5 + 12 \cdot 3 = 5 + 36 = 41$; 4) всякое отступление от этих трёх правил указывается скобками: сперва выполняются действия внутри скобок. Горизонтальная черта является одновременно и знаком деления, и заменой скобок. В формуле $(5 \cdot 8) : 10 = 4$ скобки являются лишними, но в случае $60 : (3 \cdot 5) = 4$ они необходимы. Предложение выполнять умножение раньше деления, сделанное недавно и устраняющее досадное расхождение между арифметикой и алгеброй, успеха пока не имело (см. об этом [II, 7]).

Добиться безупречного выполнения четырёх действий над многозначными числами — основная задача, стоящая перед учителем математики в V классе при повторении пройденного в начальной школе. Учащиеся должны ясно представлять себе смысл каждого действия, умея приводить примеры их применения, в частности отчётливо различать деление на части (например, 15 *см* : 3 = 5 *см*) и деление по содержанию (15 *см* : 3 *см* = 5), должны знать названия данных и результатов, зависимость между данными и результатом, должны знать, как изменяется результат при том или ином изменении данных, хорошо различая увеличение на столько-то единиц и увеличение во столько-то раз.

Отметим несколько деталей, относящихся к технике письменного выполнения четырёх действий. Вычисление суммы и разности ведётся от младших разрядов к старшим (справа налево), но в случае двух данных результат легко писать сразу слева направо. При умножении не следует допускать частных произведений из одних только нулей. Если множимое и множитель имеют разное число отличных от нуля цифр, выгоднее в качестве множителя брать число, имеющее меньше цифр. При делении чисел с нулём на конце следует отбрасывать поровну нулей в делимом и делителе, но надо иметь в виду, что остаток при этом искажается: так, деление 600 на 70 даёт в частном 8 и в остатке 40, а деление 60 на 7 — то же частное, но остаток 4.

Очень хорошо, если учащиеся V класса будут знать такие свойства суммы и произведения, как то, что сумма и произведение натуральных чисел всегда существуют и однозначно определяются данными, как свойства переместительное, сочетательное, распределительное; но опыт показывает, что практическое использование этих свойств в V классе возможно и без особой работы над ними, которую можно отложить до изучения алгебры. Каждый пятиклассник легко поймёт, что для получения суммы $27 + 12 + 8$ можно к 27 прибавить сразу $12 + 8 = 20$, но не всегда удаётся обеспечить уменье объяснить это как применение сочетательного свойства суммы. Очень соблазнительно поставить себе целью — в порядке повторения пройденного в начальной школе — добиться полного усвоения всех теоретических сведений, на которых основывается выполнение четырёх действий над многозначными числами, хотя бы в том виде, в каком они изложены в учебнике арифметики Киселёва (отдел 1-й), но это можно рекомендовать только более сильным учащимся.

Вопросу об изменении результатов действий в зависимости от изменения данных надо уделить достаточно внимания: здесь мы имеем простейшие случаи функциональной связи между величинами. Учащиеся должны усвоить не только формулировки соответствующих предложений, но и уменье практически их использовать. Например, выполнено некоторое вычитание, а затем имея надобность выполнить его вторично при том же значении уменьшаемого и при вычитаемом, на 5 большем, они должны понимать, что делать выкладку снова не надо: новый результат получается простым уменьшением старого на 5. Знание зависимостей между данными и искомыми хорошо закрепляется путём решения простейших уравнений вида $5 + x = 9$, $x - 7 = 12$, $x \cdot 5 = 30$, $48 : x = 6$ и т. д. Здесь легко добиться твёрдого знания точных формулировок: каждое слагаемое равно сумме без остальных слагаемых, уменьшаемое равно разности, сложенной с вычитаемым, и т. д.

Полезную, посильную и интересную для пятиклассников работу представляет собой решение более сложных задач такого рода. Например, после вычисления значения выражения

$$[(16\,000 : 32 - 1\,640 : 82) : 15 \cdot 7\,000 - 192\,000] : 40$$

(стабильный задачник Березанской, № 368, 1), получив ответ 800, можно заменить буквой x любое из данных и найти его. Это прекрасное применение предложений о зависимости между данными и результатами, и упражнение в проведении довольно длинного рассуждения, и средство проверки правильности решения. Если, например, заменить через x первое данное, получается задача: найти x, если

$$[(x : 32 - 20) : 15 \cdot 7\,000 - 192\,000] : 40 = 800.$$

Решается она так: «Какое здесь последнее действие?» — Деление неизвестного числа, заключённого в скобках II рода, на 40, дающее в частном 800. «Чему равно это неизвестное делимое?» — Оно равно $800 \cdot 40 = 32\,000$, так как делимое равно частному, умноженному на делитель. Теперь имеем:

$$(x : 32 - 20) : 15 \cdot 7\,000 - 192\,000 = 32\,000.$$

Аналогичные рассуждения приводят в конце концов к заключению, что $x = 16\,000$, и мы убеждаемся, что всё сделано правильно.

Отметим ещё один тип задач, на практике редко используемых и с первого взгляда представляющихся очень трудными, но неизменно вызывающих большой интерес и охотно решаемых. Это задачи на восстановление цифр, фигурировавших в записи выполнения какого-либо действия над многозначными числами, но затем уничтоженных. Например, требуется установить, какие цифры были заменены звёздочками в следующем умножении:

$$\begin{array}{r} * \; 8 \; * \\ \times \quad * \; 8 \\ \hline 4 \; * \; * \; * \\ * \; * \; * \quad \\ \hline * \; * \; * \; * \; 0 \end{array}$$

Ясно, что последняя цифра первого частного произведения есть 0, а потому цифрой единиц множимого может быть только либо 0, либо 5. Первая цифра множимого обязательно 5, так как при меньшей первое частное произведение было бы равно самое большее $485 \cdot 8 = 3\,880$, а при большей составляло бы $680 \cdot 8 = 5\,440$ или больше. Установив, что множимое есть либо 580, либо 585, сразу заключаем, что цифрой десятков множителя может быть только 1, и задача решена полностью; получены два ответа: $580 \cdot 18 = 10\,440$ и $585 \cdot 18 = 10\,530$, никаких других быть не может.

Такого рода «арифметические ребусы» можно найти в брошюре [II, 296], но их легко составлять и самому.

Много полезных исторических сведений о выполнении четырёх действий над многозначными числами читатель найдёт в книгах [I, 12] и [II, 32].

§ 8. Устные вычисления.

Нет никакого сомнения в том, что уменье производить более простые числовые выкладки без записи их и без использования каких бы то ни было вспомогательных средств вычисления представляет собой ценный навык, который школа должна дать учащимся. Это так называемый «устный счёт», или «умственный счёт». Начальная школа уделяет ему много внимания и добивается, вообще говоря, заметных успехов, в средней же школе учителя математики нередко недооценивают его значение, и в результате учащиеся старших классов часто прибегают к записи даже в таких простых случаях, как вычисление $58 + 35$ или $17 \cdot 8$. Такое положение ненормально: помимо ощутимой непосредственной практической пользы выработка навыков устного счёта имеет большое воспитывающее значение, так как упражняется память, приобретается уменье сосредоточиваться, создаётся привычка самоконтроля, изощряется сообразительность. Существенно то, что устные вычисления ведутся не по строго установленным правилам, как письменные, а с использованием особенностей каждого данного случая в целях упрощения выкладок. Не будет преувеличением сказать, что устный счёт является простейшей формой творческой работы детей при изучении арифметики. При умелой постановке дела устный счёт становится для детей чем-то вроде увлекательного спорта, примером чего является работа известного дореволюционного педагога С. А. Рачинского, запечатлённая на прекрасной картине его ученика Н. П. Богданова-Бельского «Устный счёт» (находится в Третьяковской галерее в Москве).

Программа математики для V класса содержит пункт «Приёмы устных вычислений». В объяснительной записке говорится о необходимости наряду с письменными и устных вычислений с целыми и дробными числами при решении задач алгебры и геометрии. Каков же объём тех навыков в устных вычислениях, какими должны прочно владеть учащиеся средней школы? В начальной школе четыре действия над целыми числами в пределах 100, когда и данные, и искомые выражаются одно- и двузначными числами, выполняются всегда устно; недопустимо, чтобы эти простейшие выкладки учащиеся средней школы делали письменно; приписывание таким числам нулей справа ничего, конечно, не меняет. Вполне осуществимо требование устного выполнения всех четырёх действий над натуральными числами, меньшими 100, хотя бы результат и превосходил 100. Некоторые трудности представляет умножение двузначного числа на двузначное, но и их можно преодолеть.

Обеспечивая прочное овладение общими приёмами устного счёта, т. е. приёмами, применимыми для всех чисел в указанных пределах, необходимо при случае показывать ученикам и особые приёмы, доставляющие большую экономию и за этими пределами. Сюда относится использование переместительного и сочетательного свойства (например, в таких случаях: $59 + 85 + 41 = (59 + 41) + 85 = 100 + 85 = 185$, $49 \cdot 25 \cdot 4 = 49 \cdot (25 \cdot 4) = 49 \cdot 100 = 4\,900$), округление (например: $254 - 98 = 254 - 100 + 2 = 156$), применение некоторых легко запоминаемых результатов, как $4 \cdot 25 = 100$ (используется при умножении и делении на 25) или $37 \cdot 3 = 111$ (облегчает умножение двузначных чисел на 37).

Есть много частных приёмов, упрощающих выполнение действий в некоторых случаях. Отметим умножение двузначного числа на 11, когда сумма цифр множимого вписывается между цифрами его десятков и единиц, умножение двух чисел второго десятка, понятное из формулы $(10 + a)(10 + b) = 100 + 10 \times \times (a + b) + ab$, умножение двух чисел, имеющих поровну десятков и сумму единиц, равную 10, понятное из формулы $(10a + b)(10a + c) = 100a(a + 1) + bc$ и позволяющее эффектно получать сразу такие результаты, как $68 \cdot 62 = 4\,216$, $114 \cdot 116 = 13\,224$, $9\,997 \cdot 9\,993 = 99\,900\,021$ и т. д.

Успех важного дела воспитания культуры устного счёта обеспечен, если сам учитель владеет его приёмами и использует их всякий раз, когда это выгодно. Существует ряд книг, излагающих эти приёмы (например, [II, 10, 29*а*, 37]), и надо усиленно рекомендовать их изучение, но главное — инициатива самого учителя, внимательное отношение ко всякому вычислению, настойчивость в поисках лучших путей его выполнения.

Устным счётом занимаются большей частью попутно, когда попадаются подходящие числовые выкладки, но практикуются и особые непродолжительные (5—10 минут) занятия устным счётом, которые можно рассматривать как своего рода «умственную гимнастику», весьма полезную, как средство создать в классе настроение, способствующее дальнейшей серьёзной и более трудной работе. Проводятся такие занятия по-разному. Можно задать условие устно и предложить всем подумать, не прибегая ни к какой записи («Положите ручки на стол, закройте тетради!»), и, получив ответ, поднять руку. Когда дано несколько ответов, правильных и неправильных, не следует сразу говорить, какие правильны. Лучше предложить авторам неправильных ответов рассказать, как они их получили, и показать всему классу причины ошибок, предупреждая их повторение. Можно раздать всем ученикам по маленькому кусочку бумаги, чтобы на них записать только ответы, но не выкладки, и написать на доске условия нескольких простых задач-примеров с тем, чтобы каждый, выполнивший выкладки, выходил к доске и записывал на ней свои результаты в соответствующей графе. Как только у доски начинает создаваться очередь, дальнейшая запись прекращается и идёт обсуждение результатов.

Как и во всём, при занятиях устным счётом нужно чувство меры. Бывает, хотя и редко, что учитель увлекается устным счётом в ущерб другим сторонам изучения математики, когда он настаивает на устном выполнении таких выкладок, которые явно выгоднее делать письменно: экономя мел или бумагу, он неэкономно расходует умственную энергию своих учеников.

§ 9. Некоторые сведения о делимости чисел.

В программу V класса входит небольшой круг сведений по теории чисел (или, как иногда говорят, по теоретической арифметике), нужных для успешного изучения дробей. Это признаки делимости, понятие о числах простых и составных, разложение на простые множители, разыскание наибольшего общего делителя (НОД) и наименьшего общего кратного (НОК) данных чисел. На изучение этого раздела программа рекомендует отвести 20 часов, что вполне достаточно. Весь подлежащий усвоению материал хорошо изложен в учебнике арифметики Киселёва, причём здесь в мелком шрифте имеется и ряд дополнительных сведений, которые можно использовать для особых заданий более сильным учащимся и для кружковой работы. Задачник по арифметике содержит достаточно материала для самостоятельных упражнений; для решения в классе задачи лучше брать из других источников.

Простейшими сведениями о делимости чисел начинается в средней школе изучение нового для учащихся математического материала. Крайне важно сразу взять правильную линию, добиваясь и полной ясности понимания всех новых для учащихся терминов, и уменья дать соответствующие определения, и понимания изучаемых предложений, и точности в их формулировках, а самое главное — надлежащего единства теории и практики. Отнюдь не пытаясь дать какое-либо определение натурального числа, надо обеспечить, чтобы каждый твёрдо знал, что натуральные числа — это числа 1, 2, 3, 4, ..., которые можно писать последовательно, без пропусков, и притом без конца. В V классе термин «целое число» употребляется в том же смысле, как и «натуральное число», но в дальнейшем целыми называют все числа: 0, ± 1, ± 2, $\pm 3, \ldots$, а потому лучше и в V классе говорить не о целых, а о натуральных числах.

Уже на первых занятиях при употреблении термина «делитель» возникают трудности из-за двух значений, в каких он употребляется: до сих пор учащиеся называли делителем то число, на которое делят другое данное число, независимо от того, какой при этом получается остаток; теперь же делителем данного числа называют только такое число, на которое данное число делится без остатка. Раньше, выполняя, например, деление 18 на 5, мы называли 5 делителем, 3 — остатком, теперь же будем говорить, что 5 не есть делитель числа 18 и что делителями числа 18 служат только числа 1, 2, 3, 6, 9, 18. Ясность понимания и прочное усвоение этого основного понятия вполне обеспечиваются составлением таблицы делителей всех натуральных чисел в некоторых пределах, начало которой приводится.

Числа	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Их делители	1	1,2	1,3	1, 2, 4	1,5	1, 2, 3, 6	1,7	1, 2, 4, 8	1, 3, 9	1, 2, 5, 10	1,11	1, 2, 3, 4, 6, 12

Коллективное составление подобной таблицы проходит всегда с подъёмом: все сосредоточенно пробуют делить, с радостным удовлетворением сообщают полученные результаты, спорят, вносят поправки, констатируют ряд бросающихся в глаза фактов, вносят рационализаторские предложения (например: «Зачем писать 1— этот делитель есть у всех чисел!»). Дети быстро замечают, что каждому найденному делителю соответствует второй делитель, равный частному от деления на первый: если, например, найдено, что 28 имеет делитель 4, то найден и делитель $28 : 4 = 7$. Надо остановиться на вытекающем отсюда существенном упрощении всей процедуры: испытывать последовательные натуральные числа в качестве делителей надо лишь до тех пор, пока в частном не будет получено число, меньшее делителя. Так, найдя, что 28 имеет делителем 1 (частное 28), 2 (частное 14), 4 (частное 7), пробуем дальше делить на 5 (частное 5, остаток 3), на 6 (частное 4, остаток 4), а дальнейшие пробы прекращаем: все делители, бо́льшие 6, у нас уже найдены (7, 14, 28). Проведённая в классе работа по составлению таблицы заканчивается заданием: аккуратно переписать записанную на доске таблицу в тетрадь, а дома продолжить её, кто сколько успеет. Затратив на составление такой таблицы целый урок, учитель много выиграет для всего последующего изучения раздела о делимости: обеспечен запас представлений, подлежащих дальнейшей обработке, создана заинтересованность, в тетради каждого ученика появилось ценное пособие, которое будет не раз использовано в дальнейшем.

К следующему уроку учителю надо приготовить большую стенную таблицу делителей всех натуральных чисел, по крайней мере до 100. Если эта таблица будет вывешена заблаговременно, дети по своей инициативе сверят с ней свои собственные таблицы и ещё до начала урока внесут у себя в тетрадях нужные исправления.

Работа по составлению таблицы делителей делает очень естественным введение терминов «простое число», «составное число», первый для обозначения чисел, имеющих по два и только два делителя, второй для обозначения чисел, имеющих по три и более делителей. Единица, будучи числом с единственным делителем, не является ни простым, ни составным.

Но на очереди вопрос о признаках делимости. Его разрешение хорошо связать с наблюдениями по таблице. Какие натуральные числа имеют делитель 2 и какие его не имеют? Какова последняя цифра у тех и у других? Верна ли догадка, подсказываемая таблицей (на 2 делятся те и только те числа, у которых последняя цифра 0, 2, 4, 6, 8), и за пределами таблицы? Начав с наблюдений, приходим в конце концов к логическому доказательству теоремы: на 2 делятся все числа, у которых последняя цифра 0, 2, 4, 6, 8; на 2 не делятся все числа, у которых последняя цифра 1, 3, 5, 7, 9. Эта последняя формулировка, несколько более длинная, чем обычная, более понятна детям, но надо добиться, чтобы была вполне уяснена и более краткая («на 2 делятся те и только те числа, у которых...»).

Далее тем же порядком устанавливается и признак делимости на 5 (сперва наблюдения по таблице делителей!). Чтобы прийти кратчайшим путём к признакам делимости на 4 и 25, можно рекомендовать, не тратя времени на наблюдения, начать сразу с того разбиения числа на два слагаемых, какое применялось при логическом доказательстве признаков делимости на 2 и 5 (только там число представлялось как сумма числа десятков и число единиц, а здесь его надо представить как сумму, составленную из его сотен и двузначного числа, образуемого десятками и единицами). После этого благополучно проходит и изучение самых трудных признаков делимости — на 3 и 9.

Покончив с признаками делимости, переходят к представлению составных чисел в виде произведений простых. Здесь тоже хорошо начать с составления таблицы следующего вида: $4 = 2 \cdot 2 = 2^2$, $6 = 2 \cdot 3$; $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$; $9 = 3 \cdot 3 = 3^2$; $10 = 2 \cdot 5$; $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$; $14 = 2 \cdot 7$ и т. д.

У учащихся не возникает никакого сомнения в том, что любое составное число допускает подобное представление в виде произведения простых, и останавливаться на доказательстве возможности и единственности такого представления в V классе преждевременно. Всё внимание здесь должно быть уделено технической стороне дела (предполагается, что понимание постановки вопроса уже обеспечено). Навык в применении обычного способа разложения не очень больших чисел (столбиком) даётся легко. В более простых случаях рекомендуется писать разложение сразу, выполняя необходимые выкладки в уме. Например, желая разложить на простые множители число 720 и замечая, что оно является произведением 72 на 10 или 8 на 9 и на 10, сразу пишем $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$. Некоторое внимание следует уделить более трудным случаям, вроде такого, когда требуется разложить число 3 599 (здесь два простых делителя: 59 и 61). Дело в том, что учащиеся, убедившись, что деление на 2, 3, 5, 7 и 11 не проходит, торопятся с заключением, что данное число — простое. Надо чётко выяснить, что необходимо пробовать делить данное число на все последовательные простые до тех пор, пока в частном не получится число, меньшее делителя, и только тогда будет вполне обосновано заключение о том, что данное число — простое. Надо поощрять использование довольно обширной таблицы простых чисел, приведённой в учебнике арифметики Киселёва, экономя время, потребное для испытаний. Давать для разложения на простые множители очень большие числа с большими же делителями (например, $10\,201 = 101^2$) стоит только сильнейшим ученикам в порядке дополнительных индивидуальных заданий.

Научившись разлагать числа на простые множители, можно вернуться к вопросу о разыскании всех делителей данного числа и разобрать более совершенный способ, указанный в стабильном руководстве (через комбинирование простых сомножителей всеми возможными способами по два, три, четыре и т. д.). Однако этот способ даётся пятиклассникам с трудом, а для дальнейшего он не нужен, и можно вполне удовлетвориться уменьем ученика найти все делители данного числа последовательными пробами, причём знание простых делителей позволяет существенно сократить число проб.

Наконец рассматривается понятие ОД (общего делителя), НОД (наибольшего общего делителя), ОК (общего кратного), НОК (наименьшего общего кратного) двух данных чисел с последующим обобщением на случай любого числа данных чисел. Полезно начать с рассмотрения какого-либо частного случая, например, взять числа 18 и 24, указать все делители каждого, выбрать их

ОД, указать их НОД, выписать несколько последовательных кратных для каждого, затем несколько ОК, начиная с НОК. Разыскание НОД способом последовательного деления в V классе обычно вовсе не рассматривают, но это прекрасная тема для дополнительного задания (используется стабильное руководство). Если время позволяет, хорошо заняться решением разнообразных текстовых задач, в которых применяются понятия НОД и НОК (некоторое количество подобных задач имеется в стабильном задачнике); но никакого ущерба для дальнейшей работы не будет, если ограничиться только приобретением навыка в разыскании НОД и НОК данных чисел, а решение задач на применение этих понятий отложить до возвращения к этим вопросам в старших классах в порядке повторения арифметики.

В VI классе на доработку арифметики учебный план отводит 66 часов, причём предусмотрено повторение всего курса арифметики, заканчиваемое в VII классе. В порядке такого повторения естественно несколько глубже рассмотреть некоторые вопросы программы, а также заняться решением разнообразных и более трудных задач.

§ 10. Первое расширение понятия числа: нуль как число.

Учащиеся V класса, занимаясь повторением пройденного в начальной школе и вопросами делимости числа, незаметно для себя делают один принципиально важный шаг, а именно начинают рассматривать нуль как число, расширяя то понятие числа, какое у них было раньше, когда изучались только натуральные числа. В начальной школе нуль является просто знаком отсутствия единиц некоторого разряда. Рассматривая делимость чисел, начинают производить над нулём арифметические операции, как над числом. Например, в § 81 учебника арифметики, где вводится понятие делителя, читаем: «Заметим, что нуль делится на любое число (кроме нуля), причём частное также равно нулю. В самом деле, так как $a \cdot 0 = 0$, каково бы ни было число a, то $0\colon a = 0$». Таким образом, получается что делителем нуля является любое натуральное число; нуль — единственное целое число с бесконечно большим числом делителей (отметим, что в науке термину «делитель нуля» придаётся особый, другой смысл). Чтобы обосновать возможность деления нуля, при повторении сведений о сложении приходится отметить, что складывать можно не только натуральные числа, а и любое натуральное число с нулём и наоборот ($a + 0 = a$, $0 + a = a$), а также нуль с нулём ($0 + 0 = 0$); при повторении сведений об умножении приходится рассматривать, как особые случаи, умножение нуля на любое натуральное число, выполняемое на основе общего определения произведения, как суммы равных слагаемых ($0 \cdot a = 0 + 0 + \ldots + 0 = 0$), и умножение любого натурального числа на нуль на основе особого дополнительного определения ($a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$), распространяемого и на случай умножения нуля на нуль ($0 \cdot 0 = 0$). Необходимо предостеречь от распространенной ошибки: равенство $a \cdot 0 = 0 \cdot a$ ни в коем случае нельзя считать основанным на переместительном свойстве произведения; это не что иное, как определение произведения натурального числа на 0, определения, дополняющего определение произведения на натуральное число как сумму равных слагаемых. Рассматривая нуль как число, мы получаем возможность гораздо проще формулировать многие предложения; например, становится возможной краткая общеупотребительная формулировка признака делимости на 2 («на 2 делятся те и только те числа, которые оканчиваются чётной цифрой»). Не считая нуль числом, мы не имели бы права сказать, что неполное деление натуральных чисел (деление с остатком) всегда возможно.

Переход от взгляда на нуль как знака отсутствия единиц к взгляду на него как на число проходит для учащихся совершенно естественно и даже незаметно. Каждый легко соглашается, что если к тем a рублям, какие у меня есть, прибавить ещё b рублей, которые лежат в конверте, то у меня станет всего $a + b$ рублей, и что если конверт пустой, то у меня останется то же, что и было, и что это последнее обстоятельство можно выразить формулой $a + 0 = a$. Углублять вопрос о нуле, как числе, в V классе преждевременно, но уже здесь надо со всей определённостью разъяснить невозможность деления на нуль, подходя к этому вопросу двояко. Во-первых, разделить некоторое натуральное число a на 0 значит узнать, сколько раз нуль содержится в a, сколько раз надо взять слагаемым 0, чтобы получить a; ясно, что сколько бы нулей мы ни брали, сложение их не даст ничего, кроме нуля; нельзя собрать a рублей, если с каждого брать по 0 рублей. Во-вторых, разделить a на 0 значит найти такое число, которое при умножении на 0 даст a, но любое число x при умножении на 0 даёт 0, а потому частного от деления a на 0 не существует.

Глава III

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ

§ 11. Предварительное знакомство с простейшими долями.

Дети приходят в V класс, уже имея некоторые сведения о дробях: в программу IV класса входит изучение дробей $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$, в том числе устное сложение и вычитание дробей с одинаковыми и кратными долями. В начальной школе решаются задачи на дроби, не на основании их общей теории, а «по свободному соображению», руководствуясь наглядными представлениями и здравым смыслом.

Приступая к изучению дробей в V классе, в высшей степени полезно повторить все эти сведения, рассматривая ряд простеньких задач вроде такой: «На один плакат надо $1\frac{1}{2}$ *м* ткани да на другой $\frac{3}{4}$ *м*; сколько ткани надо на оба плаката? Такую задачу полезно решить двумя способами, устраняя дроби, переходом к сантиметрам ($100\ см : 2 = 50\ см$, $100\ см + 50\ см = 150\ см$, $100\ см : 4 = 25\ см$, $25\ см \times 3 = 75\ см$, $150\ см + 75\ см = 225\ см$, $225\ см = 200\ см + 25\ см = 2\frac{1}{4}\ м$), предварительно проверив, имеется ли у всех учеников ясное представление о половине и четверти, а затем без перехода к сантиметрам.

Нередко высказывается мнение, что тратить время на этого рода предварительное знакомство с простейшими долями не стоит, раз ученики вскоре должны будут овладеть общей теорией дробей, которая позволит им решать все такие задачи на основании определённых правил. Против этого приходится сделать два возражения: 1) изучение определений и правил неизбежно бывает только формальным, если оно не базируется на богатом запасе наглядных представлений, которые вырабатываются лучше всего именно на такого рода задачах, решаемых «по свободному соображению»; 2) очень желательно, чтобы уменье решать простейшие задачи на дроби не по общим правилам, а с использованием особенностей каждого отдельного случая сохранилось и во всей последующей работе ученика. Как досадно бывает видеть, когда ученик, твёрдо усвоивший правило умножения дробей, но начисто позабывший свои первые шаги в деле знакомства с дробями, для умножения, например $237\frac{3}{8}$ на 2 выполняет выкладки по общему правилу, вместо того чтобы выполнить в отдельности умножение целого и дроби.

Опыт показывает, что навыки в решении простейших задач, основанные на ясном понимании их и на том здравом смысле, который имеется уже в значительной степени у каждого поступившего в V класс ребёнка, оказываются очень прочными и в дальнейшем чрезвычайно полезными. Последующая теория должна показывать, как действовать в более сложных случаях, когда этого «свободного соображения» уже недостаточно, но её изучение отнюдь не делает ненужными эти первоначально приобретённые навыки.

Чтобы эта предварительная работа над простейшими дробями принесла максимальную пользу, надо всемерно заботиться о том, чтобы каждый рассматриваемый вопрос ставился не отвлечённо, а конкретно и наглядно. Те дроби, о которых идёт речь, ученики должны *видеть*, притом в самых разнообразных формах: это и части отрезков, разделённых на равные доли, и равные круговые секторы, и собрания мелких однородных предметов (спичек, камешков), разделяемые на равные части; части часа можно наглядно показать на циферблате часов как равные доли полного круга, описываемого концом минутной стрелки. Желательно, чтобы учащиеся не только видели все эти наглядные образцы, но и *создавали* их, выполняя простенькие чертежи, рисунки, подбирая необходимый материал для моделей из того, что оказывается под руками дома. Потратив неделю (7 часов) на повторение всего того, что было пройдено о дробях в начальной школе, учитель много выиграет в смысле ясности понимания и прочности усвоения всего последующего.

§ 12. Объём теоретических сведений о дробях, предусмотренный программой математики для V класса.

Изучение дробей составляет главное содержание курса арифметики в V классе. На него отводится очень много времени: 90 часов на обыкновенные дроби, 50 часов на десятичные, которые являются не чем иным, как частным случаем обыкновенных, 30 часов на проценты, представляющие собой частный случай десятичных дробей, а всего 170 часов. Этого вполне достаточно, чтобы обеспечить и сознательное усвоение всей теоретической стороны, и приобретение прочных практических навыков.

Иногда выдвигается предложение изучить десятичные дроби ранее обыкновенных, так как техника действий над десятичными дробями проще, чем над обыкновенными: переход от действий над натуральными числами, записанными в десятичной нумерации, к действиям над десятичными дробями требует лишь нескольких простейших правил, относящихся к положению знака дробности. Такой порядок изучения дробей предусмотрен, например, в книге [II, 25], содержащей вообще очень много интересного и ценного материала для работы в V классе. Но предложение рассматривать десятичные дроби ранее обыкновенных несомненно ошибочно: учить детей, например, умножать на десятичную дробь, догматически указывая им правила постановки запятой в произведении, не выясняя самого смысла умножения на дробь, значит жертвовать сознательностью усвоения теоретической стороны дела быстроте усвоения чисто технических навыков. Выяснить же теоретическую сторону дела следует, разумеется, на дробях общего вида, т. е. обыкновенных, а не частного вида — десятичных.

Итак, указанный в программе порядок изучения дробей совершенно правилен: сперва *обыкновенные* дроби, затем их частный случай — дроби *десятичные*, т. е. обыкновенные дроби со знаменателями: 10, 100, 1000 и т. д., допускающие в десятичной нумерации запись без знаменателя и подчинённые чрезвычайно простым правилам действий, наконец, частный случай десятичных дробей — *проценты*, т. е. десятичные дроби со знаменателем 100, особенно часто применяемые на практике.

Эта необходимость сперва изучить обыкновенные дроби, а потом уже их частный случай — дроби десятичные, отнюдь не мешает тому, чтобы уже при изучении обыкновенных дробей применять удобную запись десятичных дробей без знаменателя. Эта запись постоянно применяется в жизни (газеты, плакаты и т. д.), нет никакого смысла запрещать ученикам V класса ею пользоваться. О желательности совместного изучения дробей обыкновенных и десятичных имеются указания у С. И. Шохор-Троцкого [II, 42].

Это же относится и к употреблению знака %, который ввиду широкого его употребления в практической жизни следует вводить по возможности раньше.

Объём теоретических сведений об обыкновенных дробях, подлежащих изучению в V классе, точно указан в программе. Все эти сведения имеются в учебнике арифметики Киселёва (отдел IV), причём сведения о процентах включены в этот же отдел. Не обязательны параграфы, напечатанные мелким шрифтом (об изменении дроби при увеличении её членов на равное число единиц, о несократимых дробях, о распространении распределительного закона на дроби), представляющие собой прекрасный материал для индивидуальных заданий более сильным ученикам. В §§ 115 и 116 установлена терминология. Разделив какую-либо величину, принимаемую за единицу (целое), на некоторое число равных частей, мы получаем соответствующее число *долей* этой единицы (их иногда называют «аликвотными частями»): $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ и т. д. *Дробью* называется одна доля или собрание нескольких одинаковых долей единицы, а *смешанным числом*—целое число вместе с дробью. Дроби и смешанные числа вместе именуются *дробными числами*, которые противопоставляются *целым* (натуральным) числам.

Противополагая дробные числа целым, как это рекомендует школьный учебник, надо помнить, что всякое целое (натуральное) число можно представить в виде дроби с любым знаменателем: $3=\frac{3}{1}=\frac{6}{2}=\frac{9}{3}= \dots$ Тем самым понятие дроби оказывается более общим, чем понятие целого (натурального) числа. Это последнее можно рассматривать как особого рода дробь, а именно дробь со знаменателем 1 или с произвольным знаменателем и кратным ему числителем. После введения отрицательных чисел уместно объединение целых и дробных чисел в одном общем понятии *рационального* числа, но в V классе вводить этот термин ещё рано.

Теоретичесий материал, подлежащий изучению в разделе «Обыкновенные дроби», очень невелик. В конечном итоге он сводится к выяснению того, что такое дробь, к изучению некоторых свойств дробей, к овладению четырьмя действиями над дробями. Сознательное и прочное его усвоение обеспечивает возможность решения разнообразнейших задач, на что и тратится значительная часть отведённого на этот раздел времени.

В практике имеют применение только обыкновенные дроби с небольшими знаменателями, и тренировать учащихся в действиях с обыкновенными дробями, имеющими многозначные знаменатели, нет никакого смысла. Идейная сторона арифметики дробных чисел выясняется на простых примерах, и если она освоена, то в случае необходимости, имея в своём распоряжении достаточно времени, учащиеся справятся с любыми дробями.

§ 13. Второе расширение понятия числа: дробь как число.

Первой заботой учителя, приступающего к систематическому изучению дробей, является выработка у учащихся ясного понимания того, что представляет собой любая дробь, например $\frac{7}{12}$. Они должны усвоить, что некоторый предмет (целое, часто именуемое единицей) разделён на 12 равных долей, и что таких долей взято 7. Рассмотрение ряда конкретных примеров образования дробей при единицах самой различной природы (отрезки, кружки, всевозможные предметы, с которыми учащиеся имеют дело дома и в школе), допускающих деление на равные части, приводит учащихся в конце концов к этому пониманию дроби: они начинают видеть отвлечённое число, семь двенадцатых долей любой единицы (допускающей деление).

Особенно полезно для уяснения понятия дроби решение различных задач на дележи, имеющих подлинно жизненное и близкое к интересам детей содержание. Разделить 8 яблок поровну между четырьмя товарищами очень легко, но как разделить между ними 9, или 10, или 11 яблок? Меняя числа, придём к общему заключению, что любое число яблок (и всяких других делимых на части предметов) можно разделить поровну между любым числом участников дележа, применяя сперва хорошо знакомое деление целых чисел, а затем разделяя на надлежащее число равных частей каждую единицу остатка. Когда ученики будут уверенно, быстро и точно производить деление любого целого на целое, как, например, 150 на 7, сознательно получая результат в виде смешанного числа $21\frac{3}{7}$ или в виде неправильной дроби $\frac{150}{7}$, первый важный шаг в деле изучения дробей будет тем самым сделан. Отметим следующую, более трудную задачу на делёж, которую полезно дать как задачу, развивающую сообразительность: разделить 5 яблок между 6 детьми так, чтобы все получили поровну и чтобы ни одного яблока не надо было делить на 6 частей (каждое из 3 яблок режется пополам, каждое из двух остальных — на три равные части, каждый получает $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$).

Уяснению смысла дроби очень способствует решение задач на «нахождение дроби числа». Чтобы найти, например, $\frac{3}{8}$ бумажной полоски, можно с успехом применить последовательное складывание её пополам. Чтобы найти длину $\frac{3}{17}$ полоски, равной 136 *мм*, находим сначала посредством деления длину одной семнадцатой её доли, равную 136 *мм* : 17 = 8 *мм*, а затем длину трёх семнадцатых, равную 8 *мм* · 3 = 24 *мм*.

Решение обратной задачи — нахождение числа по данной его дроби — тоже не требует от учащихся ничего, кроме понимания того, что такое дробь, и доступно уже на первых шагах изучения дробей. При конкретной и наглядной постановке задачи она решается без затруднений: на глазах класса учитель последовательно складывает бумажную полоску, отделяет $\frac{3}{8}$ её, остальную часть прячет; измерив эту отделённую часть и убедившись, что она имеет длину, например, 57 *см*, он ставит вопрос, какова была длина всей взятой полоски. Правильный ответ — надо разделить 57 *см* на 3, чтобы найти длину $\frac{1}{8}$ полоски, а затем полученное в частном число 19 (*см*) умножить на 8 — получается без всяких затруднений. Задачи: найти $\frac{3}{4}$ от 24 и найти число, $\frac{3}{4}$ которого равно 24, если их давать в отвлечённой форме, обычно затрудняют учащихся, почему некоторые учителя рассматривают их несколько позже, а именно первую в связи с умножением на дробь, вторую в связи с делением на дробь. Мне представляется более правильным другой путь: эти две задачи не требуют ничего, кроме ясного понимания того, что такое дробь, и их надо решать в самом начале работы над дробями. Здесь эти задачи решаются каждая двумя действиями; при изучении умножения и деления на дробь происходит полезное возвращение к этим задачам, причём усваивается способ решения каждой из них одним действием.

Укажем, наконец, третью основную задачу на дроби, рассмотрение которой также вполне уместно в самом начале работы над дробями: узнать, какую часть одного данного числа составляет другое данное число, т. е. узнать отношение двух данных чисел. На первых порах термин «отношение» лучше не вводить, ограничиваясь конкретными вопросами, вроде таких: какую часть метра составляют 20 *см*, 30 *см*, 40 *см*, 52 *см*, 75 *см*?

Понятие дроби можно считать правильно и прочно усвоенным, если ученики в состоянии уверенно решать конкретные задачи всех трёх указанных основных типов.

После того как достигнуто полное, доступное в V классе понимание того, что такое дробь, рассматриваются три вопроса: вопрос о представлении одной и той же дроби в разных видах, приводящий к правилу сокращения дроби и подготовляющий приведение дробей к одному знаменателю, затем теснейшим образом связанный с ним вопрос об изменении дроби при кратном изменении (увеличении или уменьшении в несколько раз) одного из её членов и, наконец, вопрос о сравнении друг с другом двух дробей.

Решая задачу деления целого числа на целое число, мы встречаемся со случаями, когда полученный по общему правилу ответ можно заменить другим, практически более удобным. Так, если требуется разделить 4 яблока между 8 лицами поровну, то вместо того чтобы резать каждое яблоко на 8 равных долей и давать каждому $\frac{4}{8}$, лучше разрезать каждое яблоко только пополам, и, получив всего восемь половинок, дать каждому по $\frac{1}{2}$. Таким образом убеждаемся, что дроби $\frac{4}{8}$ и $\frac{1}{2}$ (одной и той же единицы) равны. Накопив некоторый конкретный материал на такого рода примерах, легко сделать и общее заключение, во-первых, о возможности любую дробь представить с помощью более мелких долей (эта операция рассмотрена в школьном учебнике в параграфе «Равенство и неравенство дробных чисел», но ей больше соответствует термин «Раздробление долей») и, во-вторых, о возможности представлять некоторые дроби с помощью более крупных долей («укрупнение долей», или, как принято говорить, «сокращение дробей»). Раздробление долей возможно всегда, притом бесконечным множеством способов, так как любую долю можно заменить долями, в 2, 3, 4, 5 и т. д. раз более мелкими, сокращение же дроби возможно лишь иногда, и когда возможно, то всегда лишь ограниченным числом способов, среди которых всегда есть один, сразу дающий наибольшее возможное упрощение (например, дробь $\frac{12}{18}$ допускает представление только в девятых, шестых, третьих долях, но ни в каких других более крупных). После этого уже нетрудно прийти и к двум известным правилам, выраженным словами или формулой $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$, которая при чтении слева направо даёт правило представления дроби в более мелких долях, т. е. правило «раздробления долей», а при чтении справа налево правило представления дроби в более крупных долях, т. е. правило «сокращения дроби».

Подобно тому как полное уяснение смысла символа $\frac{a}{b}$ является первым существенным шагом в деле овладения обыкновенными дробями, полное уяснение смысла формул $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$ и $\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}$ является вторым таким же шагом. Учащийся должен уметь объяснить, что здесь имеется некоторая величина (целое, какая-то единица), которая делится сперва на b равных долей, а потом (путём деления каждой из этих долей на m равных более мелких «долек»), всего на bm равных «долек»; если было взято a первоначальных (крупных) долей, то в них теперь окажется am мелких долек, и мы имеем основание утверждать, что дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{am}{bm}$ выражают одну и ту же величину, представленную один раз в более крупных, другой раз в более мелких долях. Уменье провести эти несложные рассуждения должно сочетаться с уменьем привести конкретные примеры (ни в коем случае не заученные, а придумываемые самими учениками). Подобного же результата можно и должно добиться и с правилом сокращения дроби.

Рассмотрев формулы $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$ и $\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$, естественно поставить вопрос о том, что сделается с дробью, если увеличить или уменьшить в какое-нибудь число раз (термин «кратное изменение» короче, но более труден, и его лучше ввести только при повторении) только числитель или только знаменатель дроби. На конкретных примерах легко устанавливается общее заключение, гласящее, что увеличение в любое число раз числителя дроби при сохранении неизменным её знаменателя равносильно увеличению во столько же раз самой дроби $\left(\frac{3\cdot5}{8} = \frac{3}{8}\cdot5,\ \frac{am}{b} = \frac{a}{b}\cdot m\right)$, а увеличение в любое число раз знаменателя при сохранении неизменным числителя равносильно уменьшению во столько же раз самой дроби $\left(\frac{3}{8\cdot5} = \frac{3}{8}:5,\ \frac{b}{bm} = \frac{a}{b}.m\right)$. Умножение каждого члена дроби на любое натуральное число m возможно всегда, но иногда возможно и деление. Какое влияние на величину дроби имеет такое деление? Решение этого вопроса, естественно вытекающее из решения вопроса о влиянии увеличения одного из членов дроби в несколько раз, подтверждается рассмотрением конкретных примеров и выражается в конце концов соответствующими словесными правилами и общими формулами: $\frac{a:m}{b} = \frac{a}{b}:m$, $\frac{a}{b:m} = \frac{a}{b}\cdot m$. Отметим ещё раз, что словесные формулировки заключений и правил должны стоять в V классе на первом месте: их усвоения надо добиваться во что бы то ни стало, а буквенные формулы — на втором (их усвоение крайне желательно, но требовать его от всех не всегда возможно).

Сознательное усвоение вопроса об изменении величины дроби при кратном изменении одного из её членов даёт возможность решать большое количество задач-примеров и задач-расчётов на умножение и деление дробей на любые целые числа. Занимаясь этим, учитель должен внимательно следить за тем, чтобы не было механического применения заученных правил, чтобы за каждой операцией над дробью, какую производит ученик, стоял наглядный образ (хотя бы в виде отрезка, разделённого на равные части, или в виде кружка, разделённого на равные секторы).

Научившись умножать и делить дроби на целые числа, учащиеся сделали третий существенный шаг в овладении теоретической стороной учения о дробях. Дальше идёт четвёртый — сравнение по величине двух дробей: сперва сравниваются две дроби с равными знаменателями, потом с равными числителями, наконец, с разными знаменателями и числителями, что приводит к необходимости приведения дробей к одному знаменателю, которое и усваивается без каких бы то ни было затруднений, если обеспечить повторение пройденного ранее о наименьшем общем кратном двух и более чисел.

Приведением дробей к одному знаменателю и заканчивается изучение вводной части раздела об обыкновенных дробях; дальше идёт изучение четырёх действий.

Сделаем ещё несколько частных замечаний.

1. Школьники нередко смешивают понятия «больше во столько-то раз» и «больше на столько-то единиц», из которых первое связано с умножением, второе со сложением. Полезно, в целях лучшего уяснения обоих понятий, после рассмотрения вопроса об изменении дроби при увеличении в несколько раз её числителя и знаменателя рассмотреть вопрос о том, что делается с дробью, если её члены одновременно увеличить или уменьшить на равное число единиц, взяв, например, такую задачу: «Что сделается с дробью $\frac{4}{5}$, если её числитель и знаменатель увеличить одновременно на 1?» Тот же вопрос для дроби $\frac{5}{4}$. Общее решение таких задач рассмотрено в школьном учебнике, но оно для пятиклассников слишком трудно и обычно вовсе опускается. В частных же случаях оно гораздо легче и может быть сделано интересным для учащихся, если связать его с практической задачей вроде следующей: «За один стол посадили пятерых и дали им четыре арбуза; за другим столом сидело шестеро, и им дали одним арбузом больше; требуется сравнить то, что получил каждый сидящий за первым и за вторым столом, предполагая, что деление за каждым столом было произведено поровну».

Отмечаем следующую хорошую задачу, требующую небольшой догадки, которая даётся легко, если наглядно представить условия: не приводя к одному знаменателю, выяснить, какая из двух дробей больше, $\frac{5}{6}$ или $\frac{6}{7}$, $\frac{6}{7}$ или $\frac{7}{8}$, вообще $\frac{a}{a+1}$ или $\frac{a+1}{a+2}$. Решение получается сразу, если сравнить то, чего в каждой из дробей недостаёт до 1.

2. При решении различных задач на дележи, играющих столь большую роль на первых шагах изучения дробей, полезно показать ряд практических приёмов, облегчающих деление на равные части отрезков и кругов: складывание бумажных полосок и кружков, позволяющее легко делить на 2, 4, 8, 16, 32 равные части, деление окружности на 6 равных частей, позволяющее также делить на 3, 12, 24, 48 равных частей (в сочетании со складыванием), деление отрезка и дуги на любое число равных частей способом систематических проб: чтобы, например, разделить окружность на 5 равных частей, берём циркулем отрезок, немного больший радиуса, и откладываем его по окружности 5 раз; получив несколько больше или меньше целой окружности, делим этот избыток или недостаток на 5 равных частей (на глаз) и соответственно исправляем взятое расстояние между остриями циркуля, после чего повторяем операцию; после повторного исправления ошибка бывает обычно совершенно незаметной.

3. Установив понимание дроби $\frac{a}{b}$ как результата некоторой операции над произвольной единицей, операции, которую учащиеся должны уверенно и созна-

тельно выполнять, коль скоро им дана эта единица и значения a и b, мы выполним тем самым *второе расширение* понятия числа (первым было введение нуля): вместо множества натуральных чисел, дополненного числом 0, у нас теперь множество рациональных неотрицательных чисел. Углублять этот вопрос в V классе, конечно, преждевременно; раз дроби можно сравнивать по величине и подвергать арифметическим операциям наравне с натуральными числами, их тоже рассматривають как числа, но числа иной природы, чем натуральные.

§ 14. Сложение и вычитание дробей.

Сложение и вычитание обыкновенных дробей проходит без особых затруднений, если, конечно, ученики овладели понятием дроби и теми операциями с дробями, какие были рассмотрены в предыдущем параграфе. Иначе и быть не может, так как никаких новых идей в этих двух действиях над дробями нет: сложение и вычитание дробей с одинаковым знаменателем по существу тождественно со сложением и вычитанием именованных чисел, хорошо знакомых учащимся ещё по начальной школе, а приведение дробей к одному знаменателю совершенно аналогично обращению именованных чисел, данных в разных единицах, в именованные числа, выраженные в одинаковых единицах. Каждому понятно, что значит сложить 3 *кг* и 4 *кг* или 3 *кг* и 750 *г*, сложение $\frac{3}{8}$ и $\frac{5}{8}$ или $\frac{3}{8}$ и $1\frac{1}{4}$, при условии ясного понимания того, что такое дробь, никаких принципиальных трудностей не представляет (в отличие, например, от умножения, где мы встречаемся с необходимостью обобщения определения этой операции). Те определения сложения и вычитания дробей, какие приведены в учебнике Киселёва, встречаются учениками обычно с некоторым недоумением: что же в них нового? Их без всякого ущерба для дела можно опустить, сразу переходя от конкретных примеров к общим правилам.

Отметим следующие детали.

1. Нередко учащиеся, выполняя сложение и вычитание смешанных чисел, обращают их предварительно в неправильные дроби. Это совершенно ненужное, вредное усложнение. Нормальная полная запись такова:

$$4\frac{2}{15}+8\frac{9}{10}+3\frac{5}{6}=4\frac{4}{30}+8\frac{27}{30}+3\frac{25}{30}=15\frac{4+27+25}{30}=15\frac{56}{30}=16\frac{26}{30}=$$
$$=16\frac{13}{15};\quad 12\frac{1}{9}-5\frac{7}{12}=12\frac{4}{36}-5\frac{21}{36}=11\frac{40}{36}-5\frac{21}{36}=6\frac{40-21}{36}=6\frac{19}{36}.$$

По мере приобретения прочного навыка, отдельные звенья этой полной записи опускаются.

2. Требуя полной записи в более сложных выкладках, надо решительно запрещать такую запись в случаях, не представляющих никаких затруднений для устного решения, как, например, $6\frac{1}{2}+3\frac{3}{4}=10\frac{1}{4}$.

3. Изучая общие приёмы, надо, как и всегда, использовать упрощения, возможные в отдельных случаях. Например, вычисление суммы $2\frac{1}{2}+5\frac{11}{104}+1\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=9\frac{11}{104}$ можно выполнить в уме, если обратить внимание на то, что $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$.

§ 15. Умножение дробей.

Умножение дроби на натуральное число по существу уже усвоено, если усвоены те соображения об изменении дроби при кратном изменении её членов, о которых была речь в § 13. Но всё же полезно ещё раз вернуться к этому вопросу, прежде чем рассматривать умножение дробей в общем случае. Надо вспомнить определение произведения, которое применялось при изучении натуральных чисел (ab есть сумма b слагаемых, каждое из которых есть a), особо отметив смысл произведений $a \cdot 1$ и $a \cdot 0$, и показать, что это понимание произведения остаётся в силе и тогда, когда a — дробь. Формулируя вытекающее отсюда правило умножения дроби на целое, выражаемой формулой $\frac{a}{b} \cdot m = \frac{am}{b}$, надо остановиться на некоторых технических деталях: выяснить целесообразность сокращения до умножения a на m; показать, что для умножения смешанного числа на целое всегда выгоднее умножать отдельно целую и дробную его часть, а не обращать его в неправильную дробь. Принципиальная сторона здесь никаких трудностей не представляет.

Иначе дело обстоит с умножением на дробь, так как для дробного множителя прежнее определение произведения как суммы равных слагаемых уже непригодно: нельзя взять a слагаемым $\frac{3}{4}$ или $2\frac{1}{8}$ раза. Необходимо новое определение произведения, притом такое, чтобы в случае целого множителя это новое определение давало бы то же, что и старое (новое определение должно быть *обобщением* старого, старое должно быть *частным случаем* нового), и чтобы оно имело те же основные свойства, что и произведение натуральных чисел.

С чисто теоретической стороны вопрос решается очень просто: определяя произведение $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ как дробь $\frac{ac}{bd}$, легко убеждаемся, что в случае целого множителя, когда $d = 1$, это произведение, равное $\frac{ac}{b \cdot 1}$, или $\frac{ac}{b}$, или $\frac{a}{b} \cdot c$, можно рассматривать как сумму c равных слагаемых, т. е. что оно действительно является обобщением старого определения произведения как суммы равных слагаемых. Точно так же никаких затруднений не вызывает и проверка основных свойств: произведение дробей $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ всегда существует, однозначно определяется заданием множимого и множителя, обладает переместительным свойством $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}\right)$, так как им обладают произведения натуральных чисел, $ac = ca$ и $bd = db$, обладает сочетательным свойством, которое выражается формулой $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)$ и вытекает из сочетательности произведений натуральных чисел, обладает распределительным свойством относительно сложения, так как легко убедиться в справедливости формулы $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}+\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}$.

Этот способ изложения вопроса об умножении дробей можно рекомендовать для старших классов средней школы, где приходится заниматься повторением арифметики. В V классе нужна иная, не столько *логически*, сколько *психологически* убедительная для детей постановка вопроса, основанная, как это теперь общепризнано, на предварительном рассмотрении ряда целесообразно подобранных задач. О методике умножения дробей написано много, указан ряд хороших способов изложения этого трудного вопроса в школе. По моим наблюдениям наилучшие результаты даёт способ, основанный на рассмотрении какой-либо практической задачи, в которой при постоянном множимом множитель принимает ряд значений, как целых, так и дробных (предполагается, что способ вычисления дроби от данного числа двумя действиями, рассмотренный выше, в § 13, прочно усвоен). Вот пример применения этого способа.

Если требуется найти стоимость 3 *кг*, зная что 1 *кг* стоит 15 руб., надо выполнить умножение 15 руб. на 3, что даёт 45 руб. (задача решается умножением на натуральное число).

Если требуется найти стоимость $\frac{1}{5}$ *кг* при той же цене в 15 руб. за 1 *кг*, надо выполнить деление 15 руб. на 5, что даёт 3 рубля (задача решается делением на натуральное число).

Если требуется найти стоимость $\frac{4}{5}$ *кг* при той же цене 15 руб. за 1 *кг*, задача решается двумя действиями: одним делением и одним умножением на натуральные числа.

Если требуется найти стоимость $2\frac{4}{5}$ *кг* при той же цене 15 руб. за 1 *кг*, задача решается четырьмя действиями: 15 руб. $\cdot 2 =$ $= 30$ руб., 15 руб. $: 5 = 3$ руб., 3 руб. $\cdot 4 = 12$ руб., 30 руб. $+$ $+ 12$ руб. $= 42$ руб. Возможно, однако, и сведение этого случая к предыдущему путём обращения смешанного числа $2\frac{4}{5}$ в неправильную дробь.

Естественно возникает вопрос: нельзя ли дать одно общее правило для решения нашей задачи при всевозможных значениях того количества килограммов, стоимость которого определяется? Оказывается, что это общее правило получается само собой, если ввести новое действие *умножения на дробь*, как отыскания дроби от данного числа: умножение 15 на $\frac{1}{5}$ будем понимать как отыскание $\frac{1}{5}$ от 15, т. е. как деление 15 на 5, умножение 15 на $\frac{4}{5}$ будем понимать как отыскание $\frac{4}{5}$ от 15, т. е. как деление 15 на 5 с последующим умножением 3 на 4, вообще умножение $\frac{a}{b}$ на $\frac{c}{d}$ будем понимать как отыскание дроби $\frac{c}{d}$ от $\frac{a}{b}$, т. е. как деление $\frac{a}{b}$ на d с последующим умножением частного $\frac{a}{bd}$ на c, дающее в окончательном результате $\frac{ac}{bd}$.

Именно так решается вопрос об умножении дроби на дробь в «Арифметике» Киселёва.

Ученикам V класса это обобщение умножения даётся всегда с трудом. Можно рекомендовать не форсировать дело, рассматривая два варианта решения каждой задачи на умножение дробей: первый — не требующий умножения на дробь, второй — основанный на этом новом для учеников действии, и предоставить учащимся самим определить, какой способ лучше. На первых порах почти все высказываются самым решительным образом за первый способ («так длиннее, но понятнее»), но постепенно число сторонников второго способа всё растёт, и, наконец, наступает момент, когда с ним искренне примиряются все, оценивая его несомненные выгоды и преодолевая свою приверженность к старому, привычному пониманию умножения как сложения равных слагаемых.

Приводим примерное решение еще одной такой задачи.

На каждую грядку надо вылить $3\frac{1}{2}$ ведра воды. Сколько воды понадобится для $5\frac{3}{4}$ грядки?»

I решение (без умножения на дробь).

1. На 5 грядок надо $3\frac{1}{2}\cdot 5 = 15\frac{5}{2} = 17\frac{1}{2}$ (вёдер).
2. На $\frac{1}{4}$ грядки надо $3\frac{1}{2} : 4 = \frac{7}{2} : 4 = \frac{7}{2\cdot 4} = \frac{7}{8}$ (ведра).
3. На $\frac{3}{4}$ грядки надо $\frac{7}{8}\cdot 3 = \frac{7\cdot 3}{8} = \frac{21}{8} = 2\frac{5}{8}$ (ведра).
4. На $5\frac{3}{4}$ грядки надо $17\frac{1}{2} + 2\frac{5}{8} = 19\frac{9}{8} = 20\frac{1}{8}$ (ведра).

II решение (с умножением на дробь).

На $5\frac{3}{4}$ грядки надо $3\frac{1}{2}\cdot 5\frac{3}{4} = \frac{7\cdot 23}{2\cdot 4} = \frac{161}{8} = 20\frac{1}{8}$ (ведра).

Если взять задачу вроде следующей: «Скорый поезд прошёл за минуту $1\frac{1}{5}$ *км*; какое расстояние он пройдёт при той же скорости за $4\frac{1}{2}$ минуты? то решить её можно не двумя, а уже тремя способами: кроме двух способов, рассмотренных выше, возможно ещё решение, вовсе устраняющее дроби: $1\frac{1}{5}$ *км* $= 1\,200$ *м*, $1\,200$ *м*$\cdot 4 =$

$= 4\,800$ *м*, $1\,200$ *м* $: 2 = 600$ *м*, $4\,800$ *м* $+ 600$ *м* $= 5\,400$ *м*, или 5 *км* 400 *м*. Такое решение тоже находит себе сторонников, число которых быстро редеет, если взять ту же задачу с другими дробными данными, менее легко выражаемыми в целых числах (например, скорость в минуту $1\frac{3}{16}$ *км*).

Итак, лучшим залогом сознательного преодоления учениками V класса этого несомненно труднейшего в курсе арифметики момента — умножения на дробь, является доверие к здравому смыслу учеников и показ на ряде конкретных примеров преимуществ нового понимания этого действия.

Учителю надо иметь в виду, что одним из обстоятельств, сильно смущающих учащихся при изучении умножения дробей, является факт уменьшения числа в результате его умножения на правильную дробь: здесь имеет место противоречие с самим термином («умножить»— увеличить). Этому вопросу приходится посвящать особое разъяснение, имеющее целью установить правильный взгляд на умножение на дробь как некоторое новое действие, при котором часть свойств старого действия (умножения на целое) сохраняется, но наряду с ним приобретаются и некоторые новые свойства.

Когда принципиальная трудность нового действия преодолена, закрепить соответствующую технику уже не трудно. Стабильный задачник содержит достаточно задач-примеров и задач-расчётов на умножение дробей. Отметим особую пользу подобных задач с геометрическим содержанием: на определение площади прямоугольника со сторонами, длина которых выражается дробными числами (решение надо непременно сопровождать чертежом, применяя все указанные выше способы), на определение длины окружности по данному её поперечнику. Предварительно нужно установить надлежащими измерениями, что длина окружности в $3\frac{1}{7}$ раза больше длины своего поперечника, причём для начала лучше брать окружности с диаметром в 7, 14, 21, 28 и т. д. сантиметров. Можно заранее указать приближённое значение отношения длины окружности к диаметру, равное $3\frac{1}{7}$, как подлежащее проверке. Измеряется, например, диаметр основания ведра, умножается на $3\frac{1}{7}$, затем измеряется окружность основания (полоской бумаги), и результаты сравниваются.

В результате достаточного количества упражнений у учащихся должно выработаться не только формальное знание правила, выражаемого формулой $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, но и убеждение в том, что все задачи, требующие умножения целых чисел, которыми выражены данные, решаются умножением и тогда, когда эти целые данные заменены дробными.

§ 16. Деление дробей.

Деление натуральных чисел, изучаемое в начальной школе, даётся труднее умножения; с делением же дробей в V классе дело обстоит наоборот: оно требует значительно меньше заботы и времени, чем умножение. Дело в том, что определение деления, знакомое учащимся с начальной школы («разделить одно число на другое значит найти такое третье число, которое, будучи умножено на второе, даёт первое»), сохраняется без изменений и для дробей.

Разделить дробь $\frac{a}{b}$ на $\frac{c}{d}$ — это значит найти число (дробь) $\frac{x}{y}$, которое, будучи умножено на $\frac{c}{d}$, даёт $\frac{a}{b}$. Поэтому $\frac{xc}{yd}=\frac{a}{b}$, откуда $\frac{x}{yd}=\frac{a}{bc}$ и $\frac{x}{y}=\frac{ad}{bc}$ (здесь мы пользуемся уже известными правилами изменения дроби при кратном изменении одного из её членов). В V классе подобный вывод правила деления дробей следует, конечно, проводить на числовых примерах.

Но возможен и иной выход к делению дробей. Часто начинают с рассмотрения вопроса о разыскании целого по данной его дроби, о чём была уже речь выше (§ 13), и решают задачи, подобные следующим:

Если требуется найти цену 1 *кг*, зная, что 3 *кг* стоят 45 руб., то задача решается одним действием — делением на натуральное число (45 руб. : 3 = 15 руб.).

Если требуется найти цену 1 *кг*, зная, что за $3\frac{1}{2}$ *кг* пришлось уплатить 35 руб., то задача решается двумя действиями с предварительным обращением $3\frac{1}{2}$ в неправильную дробь $\frac{7}{2}$: сперва определяется стоимость $\frac{1}{2}$ *кг*, а именно: 35 руб. : 7 = 5 руб., затем цена 1 *кг*, а именно: 5 · 2 = 10 руб.

Точно так же (в два действия) решается и такая задача, как вычисление стоимости 1 *кг*, если дано, что $\frac{4}{5}$ *кг* стоят 24 рубля: сперва 24 руб. : 4 = 6 руб. (сколько стоит $\frac{1}{5}$ *кг*?); затем 6 руб. · 5 = = 30 руб. (сколько стоит 1 *кг*?).

Если требуется найти цену 1 *кг*, зная, что $\frac{1}{5}$ *кг* стоит 8 руб., задача решается одним действием (8 руб. · 5 = 40 руб.).

Как и при выводе правила умножения дробей, здесь естественно возникает вопрос: нельзя ли эти четыре задачи одного и того же содержания, различающиеся только числовыми данными, решать на основании одного и того же правила? Такое единое для всех случаев правило получается, если ввести новое действие — *деление на дробь*, истолковывая его как разыскание неизвестного целого по данной его дроби.

Идя этим путём, учитель опять-таки стоит перед проблемой:

выяснить, что это новое действие является обобщением давно известного действия деления на целое и что различные задачи, которые решались раньше делением на целое, решаются делением при любых данных. Некоторую трудность представляют здесь задачи, требующие деления *по содержанию* (в противоположность тому делению *на части*, о котором была речь до сих пор), например: «Сколько флажков можно сделать из $4\frac{1}{2}$ *м* ткани, если на каждый требуется $\frac{3}{8}$ *м*?» Не зная ничего о делении дробей, эту задачу можно решить, устраняя дроби переходом от метров к миллиметрам: имея $4\frac{1}{2}$ *м*, или 4500 *мм* ткани, можно сделать столько флажков по $\frac{3}{8}$ *м*, или 375 *мм*, сколько раз 375 *мм* содержится в 4 500 *мм*, т. е. 12 флажков.

Другое возможное решение, тоже не требующее уменья делить на дробь, основано на выражении обеих данных величин в одинаковых, в данном случае в восьмых, долях метра (здесь мы как бы вводим особую единицу длины, а именно $\frac{1}{8}$ *м*) : $4\frac{1}{2}$ *м* составляют 36 восьмых доли метра, а 3 восьмых доли метра содержатся в 36 таких же восьмых долях 36 : 3 = 12 раз. Третье, самое лучшее решение даётся простым применением правила деления дробей: $4\frac{1}{2} : \frac{3}{8} = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 1} = 12$. Констатировав, что это правило даёт здесь нужный результат, причём выкладок требуется меньше, чем при двух первых способах, ученики начинают предпочитать его, но чтобы дать правильное объяснение того, что здесь нужно именно деление, следует заметить, что здесь речь идёт о решении задачи, обратной по отношению к такой, которая решается умножением («Сколько потребуется материи на изготовление 12 флажков, если на каждый нужно $\frac{3}{8}$ *м*»?).

В конце концов ученики проникаются убеждением, что надо применять деление дробей во всех случаях, когда ясно, что при замене дробей целыми числами нужно именно деление. Как и при изучении умножения дробей, надо одну и ту же задачу решать разными способами, то устраняя дроби, то не делая этого. Доведение до полной ясности каждой рассматриваемой задачи обеспечит понимание сути дела.

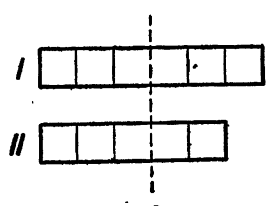
§ 17. Задачи на все действия с дробями.

Всемерно добиваясь сознательности в операциях с дробями, нельзя забывать и о необходимости выработки твёрдых навыков в рациональном выполнении этих операций. Последней цели служит решение большого количества задач-примеров, достаточно представленных в задачнике Березанской, а также легко составляемых учителем. Относительно таких примеров (со скобками) отметим ещё раз, что нет надобности тратить время на операции с дробями, имеющими многозначные знаменатели: вся и идейная, и техническая сторона учения о дробях усваивается и при работе с дробями, имеющими небольшие знаменатели, а в практической жизни обыкновенные дроби с большими знаменателями почти всегда заменяются десятичными. Работу по вычислению значений выражений с дробными данными можно разнообразить двумя следующими способами: во-первых, найдя ответ, заменяют одно из данных буквой x и находят этот x, используя предложения о связи между компонентами и результатами каждого действия (как это было уже показано в § 7 для натуральных чисел); во-вторых, возможен переход от дробей к целым числам, если принять, что все дроби берутся от некоторого достаточно большого числа. Так, в задаче № 969 (1) из задачника Березанской, где требуется найти значение выражения

$$\left\{\left[\left(\frac{17}{24}+\frac{9}{40}\right)-\left(\frac{11}{48}+\frac{31}{80}\right)\right]:3\frac{4}{5}\right\}\cdot 1\frac{5}{7},$$

можно, после получения обычным способом ответа $\frac{1}{7}$, принять за единицу наименьшее кратное всех знаменателей, а именно 1 680, и свести вопрос к вычислению значения выражения $\{[(1\,190+ +378)-(385+651)]:6\,384\}\cdot 2\,880$, что даёт 240, как и должно быть $\left(\frac{1}{7}\text{ от } 1\,680 \text{ есть } 240\right)$.

Задач-расчётов жизненного содержания в задачниках приводится очень мало, так как на практике предпочитают пользоваться не обыкновенными, а десятичными дробями, но всё же они имеются (например, задачи на сравнение шкал термометров Цельсия и Реомюра, на площадь прямоугольника, на длину окружности и площадь круга, где принимается $\pi\approx 3\frac{1}{7}$, на тепловое расширение газа, где коэффициент расширения берётся равным $\frac{1}{273}$, на совместную работу и т. д.). Большинство задач на обыкновенные дроби, приводимых в учебниках, носит искусственный характер; они далеки от тех задач, какие приходится решать в жизни, и преследуют исключительно цели тренировки, в известных пределах несомненно полезной. Напомним ещё раз, как выигрывает решение задач от представления условия в наглядной форме. Так, возьмём задачу № 1108 из задачника Березанской, сводящуюся к разысканию двух чисел, имеющих сумму 44, при условии, что половина одного числа равна $\frac{3}{5}$ другого. Изображая искомые числа прямоугольниками (фиг. 3), легко усматриваем, что первое число содержит $3\cdot 2=6$ таких частей, каких во втором 5, а оба вместе 11,



Фиг. 3.

и следовательно, первое число равно $(44:11)\cdot 6 = 24$, а второе $4 \cdot 5 = 20$.

Среди задач на применение обыкновенных дробей встречаются те самые типовые задачи, какие решались на целые числа: «на предположение», «на замену», «на движение» и т. д. Но попадаются и задачи с новой тематикой, существенно связанные с дробями. Прекрасный пример—известная задача Л. Толстого о косцах (приведена в задачнике Березанской под № 2225), решение которой не нуждается ни в каком подсказе (к сожалению, сделанном в задачнике), если пояснить условия задачи чертежом.

§ 18. Типичные затруднения и типичные ошибки. Выводы.

Выше уже отмечалось то недоумение, какое вызывает уменьшение числа при его умножении на правильную дробь. Подобное же положение имеет место и при делении на правильную дробь. К такого рода сомнениям, нередко возникающим у детей при решении задач на дроби, надо относиться самым внимательным образом: это признаки самостоятельной работы мысли, результаты желания не просто механически, формально, а сознательно усвоить изучаемый материал. В случае деления, например, числа $5\frac{1}{4}$ на $\frac{3}{8}$, выполняемого по установленному правилу, ученик получает частное 14; привыкнув связывать деление с уменьшением в определённое число раз, ученик недоумевает. Ссылка на обоснование правила деления, на определение этого действия, как обратного для умножения, это его недоумение не устраняет: здесь конфликт между привычной интуицией и новой для ученика логикой, который устраняется, если привести надлежащие наглядные примеры. «Сколько порций хлеба по $\frac{3}{8}$ *кг* можно получить из $5\frac{1}{4}$ *кг*?» Надо сделать подсчёт, переходя к граммам или к восьмым долям килограмма. «Какова длина отрезка, $\frac{3}{8}$ которого равны $5\frac{1}{4}$ *м*?» Делается чертёж, расчёт ведётся в сантиметрах. «Каково основание прямоугольника с высотой в $\frac{3}{8}$ *м* и площадью $5\frac{1}{4}$ *кв. м*?» Здесь тоже нужен чертёж; расчёт ведётся в квадратных сантиметрах или в квадратах со стороной в $\frac{1}{8}$ *м*, которых в 1 *кв. м* оказывается 64. Подобными конкретными истолкованиями отвлечённого действия конфликт между интуицией и логикой разрешается полностью даже у самых пытливых учащихся.

Обычное для V класса затруднение — смешение задач на разыскание дроби от целого (например, найти $\frac{3}{4}$ от 24 *см*) и на разыскание целого по данной его дроби (например, найти длину отрезка, $\frac{3}{4}$ которого равно 24 *см*.). Чтобы устранить это смешение, рекомендуют два прямо противоположных средства: либо рассматривать эти две задачи рядом, что вполне возможно уже в самом начале работы с дробями, либо разделить их довольно значительным промежутком времени, рассматривая, например, как это рекомендует программа, первую из этих задач в связи с умножением на дробь, а вторую в связи с делением на дробь. Успеха можно добиться обоими путями, но при непременном условии не механического заучивания правил, а сознательного их усвоения, вытекающего из наглядного представления соответствующих задач. Несомненно, что каждую из этих задач надо сперва решать двумя действиями, а потом уже одним, некоторое время требовать от учеников обоих решений, и только после полного усвоения сути дела ограничиваться одним (конечно, вторым), но иногда всё же возвращаться к первому решению, предупреждая формальное применение правил.

В заключение настоящей главы резюмируем её содержание в виде следующих кратких выводов:

1. Идейное содержание учения об обыкновенных дробях, дающего второе (после введения нуля) расширение понятия числа, будучи небольшим по объёму, воспринимается детьми с большим трудом, но должно быть усвоено полностью. Механическое запоминание определений и правил без понимания реального смысла тех понятий, о которых идёт речь, не имеет никакой цены.

2. Определения и правила должны вытекать из рассмотрения конкретных задач, взятых из окружающей привычной детям действительности, причём решение должно быть полностью наглядным, правильность его должна быть сделана очевидной для детей независимо от каких бы то ни было теоретических соображений, что всегда возможно, например, через устранение дробей путём перехода к надлежаще выбранным более мелким единицам измерения.

3. За уяснением идейной стороны учения о дробях должна следовать выработка хороших и прочных навыков в операциях с ними путём решения достаточного количества разнообразных задач, но без употребления дробей с очень большими знаменателями.

4. Наряду с письменным выполнением действий с дробями надо культивировать и устный счёт, не допуская записи промежуточных выкладок в простейших случаях: $2\frac{1}{2} - 1\frac{7}{16}$, $3\frac{1}{3} \cdot 1\frac{7}{10}$, $8 : \frac{1}{5}$ и т. д. Здесь следует сразу записывать результат.

5. Ценные навыки в сознательном обращении с дробями должны бережно сохраняться во всём дальнейшем курсе математики путём решения задач с дробными данными, путём повторения соответствующих теоретических сведений (определений, правил), повторения как эпизодического, попутного (от случая к случаю, попутно с решением задач), так и систематического (предусмотренного календарным планом работы).

Глава IV

ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ. ПРОЦЕНТЫ.

§ 19. Преимущества десятичных дробей. Метрическая система мер.

Среди обыкновенных дробей исключительно большое значение имеют дроби, знаменатели которых представляют собой различные степени основания нашей системы счисления, т. е. числа 10, $10^2 = 100$, $10^3 = 1\,000$ и т. д. Эти дроби, называемые *десятичными*, представляют собой частный случай систематических дробей, т. е. дробей, знаменателями которых служат степени основания принятой системы счисления (например, в двоичной системе счисления систематическими дробями являются дроби со знаменателями 2, 4, 8, 16...).

Особое значение систематических, в частности десятичных дробей, о которых только и будет идти речь дальше, обусловлено двумя их преимуществами, выделяющими их из всех обыкновенных. Во-первых, их можно записывать без знаменателя, основываясь на том же принципе поместного значения цифр, который позволяет писать произвольно большие натуральные числа с помощью 10 цифр; так как переход на одно место влево в записи натуральных чисел означает увеличение значения цифры в 10 раз, то переход на одно место в обратном направлении, т. е. направо, означает её уменьшение в 10 раз. Справа от цифры единиц должны в силу этого находиться цифры, выражающие последовательно десятые, сотые, тысячные и т. д. доли. Отмечая, какая именно цифра означает единицы, при помощи особого знака дробности (у нас и в большинстве стран — запятая, в Англии — точка, иногда поднятая до середины высоты цифры или даже выше), мы имеем удобный способ записи десятичных дробей, получивший в настоящее время всеобщее распространение: число $2\frac{57}{100}$ всегда записывается, как 2,57. Во-вторых, действия над десятичными дробями производятся значительно проще, чем над другими дробями. Например, приведение двух десятичных дробей к общему знаменателю сводится к простому уравниванию числа десятичных знаков посредством приписывания нулей справа, умножение и деление на 10, 100, 1 000 и т. д.— к простому переносу запятой.

Отметим, что десятичные дроби нельзя противополагать обыкновенным, так как десятичные дроби представляют собой частный случай обыкновенных; возможно лишь противоположение обыкновенных десятичных дробей обыкновенным недесятичным дробям. Неправильно говорить об обращении десятичных дробей в обыкновенные: надо говорить о записи десятичных дробей со знаменателями (с последующим сокращением, если оно возможно); можно говорить о представлении обыкновенной недесятичной дроби, например $\frac{3}{8}$, в виде десятичной, а именно в виде $\frac{375}{1000}$, или в записи без знаменателя 0,375.

Подобное противоположение будет законным лишь в том случае, когда десятичная дробь определяется как дробь со знаменателем, равным степени 10, *записанная без знаменателя*. Но тогда дробь $\frac{3}{10}$ придётся называть обыкновенной, дробь 0,3 — десятичной.

По поводу чтения десятичных дробей к тому, что об этом сказано в учебнике Киселёва, следует добавить, что десятичные числа, имеющие 4 цифры после запятой, обычно читаются без указания знаменателя как два двузначных числа; например, числа 3,1286 и 15,4005 читают так: три целых двенадцать восемьдесят шесть, пятнадцать целых сорок ноль пять. Очень рекомендуется пользоваться записью десятичных дробей без знаменателя уже при изучении обыкновенных дробей.

Изучение десятичных дробей очень выигрывает, если их иллюстрировать конкретными примерами, связанными с употреблением метрической системы мер, главным достоинством которой, обусловившим её распространение во всём мире (за исключением Англии и Соединённых Штатов Америки, до сих пор частично сохраняющих свои неудобные старинные меры), является именно то обстоятельство, что отношения между различными однородными мерами выражаются степенями 10. Рекомендуется использовать статью [II, 21].

Проходя в V классе десятичные дроби, учитель в то же время повторяет метрические меры, заботясь о выработке у учащихся прочных наглядных представлений: надо не только говорить о метрических мерах, но и показывать их, изготовлять образцы некоторых из них (*м*, *дм*, *см*, *мм*, *кв. см* и др) постоянно упражнять учеников в использовании их при измерениях.

Крайне желательно, чтобы учащиеся вполне усвоили два определения метра: и первоначальное его определение как одной сорокамиллионной доли земного меридиана, столь удобное для грубых подсчётов, и последующее его определение как отрезка на эталоне. То же самое относительно килограмма, литра.

Изучение десятичных дробей даётся учащимся несравненно легче, чем обыкновенных, что вполне естественно, так как теория обыкновенных дробей представляет собой сравнительно богатый идейным содержанием этап в развитии понятия числа, а учение о десятичных дробях сводится к ряду правил технического характера, вытекающих из теории обыкновенных дробей. Новым принципиально важным моментом является необходимость округления частных, получаемых при делении даже точных данных, и связанный с этим комплекс вопросов теории приближённых вычислений.

§ 20. Последовательные шаги в изучении десятичных дробей.

Не представляя по существу ничего нового по сравнению с действиями над обыкновенными дробями, действия над десятичными дробями, записанными без знаменателя (в дальнейшем этой последней оговорки делать не будем), требуют знания нескольких правил, имеющих не принципиальный, а чисто технический характер и легко получаемых из общих правил действий над обыкновенными дробями. Эти правила весьма близки к правилам действий над натуральными числами, и в связи с этим нередко высказывается предложение об изучении в школе десятичных дробей до изучения обыкновенных дробей общего вида. Выше (в § 12) были уже приведены соображения, показывающие недопустимость такого порядка. Вполне возможно, однако, параллельное изучение обыкновенных дробей общего вида и десятичных: каждый шаг в изучении теории обыкновенных дробей можно завершить выводом правила, относящегося к выполнению этого шага в применении к десятичным дробям. При таком порядке изложения оно стало бы более естественным, отпала бы режущая глаз запись вроде 37 коп. $= \frac{37}{100}$ руб., так как дети были бы приучены пользоваться записью 37 коп. = 0,37 руб.

Отметим кратко те последовательные шаги, какие приходится выполнять при изучении десятичных дробей.

1. Устанавливается определение десятичной дроби как такой обыкновенной, у которой знаменатель равен 10, 100, 1 000 и т. д., вообще единице с нулями, или, точнее, степени 10 (с натуральным показателем), и напоминается общепринятый способ сокращённой их записи без знаменателя; рассматриваются примеры вроде такого: 288 *мм* = 28,8 *см* = 2,88 *дм* = 0,288 *м* = 0,000288 *км*. Учащиеся должны быть в состоянии провести примерно такое рассуждение: «Что представляет собой дробь 0,2704? Взята какая-нибудь величина (целое или единица), разделена на 10 000 равных долей (нулей при единице столько, сколько десятичных знаков после запятой), таких десятитысячных долей взято 2 704 (столько, сколько единиц содержит натуральное число, образуемое десятичными знаками числа)».

Возможно и желательно решение задач на вычисление десятичной дроби от данного числа и на вычисление числа по данной десятичной его дроби, т. е. задач вроде таких: найти 0,45 от 7 200; найти число, 0,45 которого равны 7 200 (с обязательным наглядным пояснением точного смысла этих двух задач, с подчёркиванием их различия).

2. Выясняется возможность представления одной и той же величины десятичными дробями разных видов, например, 0,3 = = 0,30 = 0,300 = 0,3000; 0,42000 = 0,42, вытекающая из известного свойства обыкновенных дробей (выражаемого формулой $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$) и реализуемая у десятичных дробей особенно просто (приписывание и зачёркивание нулей справа от значащих цифр в дробной части, к чему и сводится «раздробление долей» и «укрупнение долей», или «сокращение дроби»); отсюда вытекает правило приведения к одному знаменателю.

3. Устанавливается правило кратного изменения десятичной дроби в 10, 100, 1 000 и т. д. раз (перенос запятой вправо или влево на 1, 2, 3 и т. д. мест).

4. Формулируется критерий для сравнения двух десятичных дробей, выполняемого сразу после приведения их к одному знаменателю (т. е. после уравнивания числа десятичных знаков), но

осуществляемого и без него — через сравнение числа целых, а в случае их равенства — через сравнение числа десятых, а в случае их равенства — через сравнение числа сотых и т. д.

5. Рассматривается сложение десятичных дробей (сперва имеющих поровну десятичных знаков, потом любых), устанавливается практическое правило, подчёркивается его сходство с правилом сложения натуральных чисел.

6. Подобным же образом рассматривается вычитание десятичных дробей.

7. Устанавливается правило умножения десятичных дробей, вытекающее из правила умножения обыкновенных дробей, если учесть возможность умножения степеней 10 посредством простого подсчёта нулей (что сводится к формуле $10^k \cdot 10^n = 10^{k+n}$, которая в общем виде будет изучена в курсе алгебры). Весьма выгоден другой путь, основанный на правиле кратного изменения дроби при переносе запятой: желая перемножить, например, 3,64 и 0,025, переносим запятую во множимом на два, во множителе на три места вправо, от чего произведение увеличится в $100 \cdot 1000$ раз. Найдя это искажённое (увеличенное в 100 000 раз) произведение $364 \cdot 25 = 9\,100$, исправляем его, производя деление на 100 000, для чего переносим запятую на $2 + 3 = 5$ мест влево и получаем искомое произведение.

Чтобы устранить нежелательное, чисто механическое выполнение умножения, необходимо напомнить о смысле умножения на дробь и решить несколько задач на умножение десятичных дробей двумя способами: сперва устраняя дроби путём перехода к более мелким единицам, потом применяя умножение на дробь. Например, вычисление стоимости 3,4 *м* ткани по 32,5 руб. за метр производится следующим образом:

1-й способ:

3,4 *м* = 34 *дм*, 32,5 руб. = 3 250 коп.;

стоимость 1 *дм*

3 250 коп. : 10 = 325 коп.;

стоимость 34 *дм*

325 коп. · 34 = 11 050 коп. = 110 руб. 50 коп.

2-й способ:

32,5 руб. · 3,4 = 110,50 руб. = 110 руб. 50 коп.

8. Аналогичная работа проводится над правилом деления, причём сперва следует брать только такие случаи, когда деление приводит к частному в виде конечной десятичной дроби. Первый этап — деление на целое число, истолковываемое как деление на части, второй — деление на десятичную дробь, приводимое к делению на целое путём одновременного увеличения делимого и делителя в одинаковое число раз, не изменяющего частного. Отметим, что заботиться надо только о приведении к целому виду

делителя — несущественно, будет ли делимое целым или дробным. Так, для деления 0,56175 на 0,07 достаточно перенести запятую на два места вправо и выполнить деление 56,175 на 7; приведение к делению целого на целое (56 175 : 7 000) даст, конечно, тот же результат (8,025), но потребует записи ряда лишних нулей.

Для уяснения реального смысла производимого действия, как и при умножении, надо решать задачи с наглядно представляемым содержанием. Например, рассмотренный только что случай деления можно иллюстрировать такой задачей: «Найти основание прямоугольника, имеющего площадь в 0,56175 *кв. м* и высоту 0,07 *м*.

1-й способ: 1 *кв. м* = 100 *см* · 100 *см* = 10 000 *кв. см*; 0,56175 *кв. м* = 5617,5 *кв. см*; 0,07 *м* = 7 *см*; 5617,5 *кв. см* : 7 *см* = = 802,5 *см* = 8,025 *м*.

2-й способ: 0,56175 *кв. м* : 0,07 *м* = 8,025 *м*.

9. Как известно, деление десятичных дробей (и в частности деление натуральных чисел, когда желательно представить частное в виде десятичной дроби) приводит к конечной десятичной дроби лишь сравнительно редко, чаще оно даёт бесконечную периодическую дробь. Здесь мы имеем принципиально новый момент в изучении арифметики — появление конечной величины в виде суммы бесконечно большого числа бесконечно убывающих слагаемых. Здесь учащиеся впервые встречаются с идеями, лежащими в основе математического анализа, с идеями, которые дальше, в последующих классах средней школы, неизбежно затрагиваются (иррациональные числа, пределы). В V классе углублённое рассмотрение этих идей, конечно, преждевременно.

§ 21. Проценты и промилли.

Дроби со знаменателем 100 оказались в разного рода жизненной практике наиболее применимыми и получили распространение, далеко превосходящее распространение десятичных дробей с другими знаменателями: десятые доли слишком крупны (пользуясь только десятыми долями, нельзя отметить многие существенные детали), тысячные же доли слишком мелки, их применение отвлекает внимание от основного, делает это основное менее ясным. Естественно, что особенно часто применяемые сотые доли получили как особое название — «проценты» (от латинского pro centum — «на сто»), так и особое обозначение (знак %). Итак, *проценты — это не что иное, как сотые доли, лишь особым способом записанные*: 65% то же самое, что 0,65 (или $\frac{65}{100}$).

Применение процентов получило такое всеобщее распространение, что в них стали выражать и десятые доли (каждая десятая доля есть 10 сотых, или 10%), и тысячные доли (каждая тысячная есть одна десятая от одной сотой, т. е. 0,1%), и вместо записи $\frac{7}{10}$

или 0,7 чаще всего пользуются записью 70%, а вместо записи $\frac{329}{1000}$ или 0,329 — записью 32,9%. Наряду с обычной записью десятых долей процента применяется и запись в «промиллях», как именуют тысячные (от латинского pro mille — «на тысячу»), обозначая их знаком ‰, так что запись 329 ‰ означает то же самое, что 32,9%. Десятитысячные доли часто выражаются как сотые доли процентов и особого наименования и обозначения не имеют. Их мы видим, например, в официальном сообщении о результатах выборов в органы советской власти. Так, в сообщении о выборах в местные Советы УССР 21 декабря 1947 г. указано, что на выборах в областные, окружные и городские Советы депутатов трудящихся голосовало соответственно 99,95%, 99,99%, 99,98%. Ясно, что здесь обойтись сотыми или тысячными долями (т. е. целыми процентами или промиллями) нельзя, так как тогда стёрлось бы различие между результатами этих трёх видов выборов. Но такие случаи — сравнительно редкое исключение; чаще всего рассматриваемое количественное соотношение достаточно ясно и показательно характеризуется в целых процентах. Так, сообщение Госплана СССР об итогах выполнения государственного плана восстановления и развития народного хозяйства в 1947 г., опубликованное 18 января 1948 г., даёт полную картину, пользуясь только целыми процентами: Министерство чёрной металлургии выполнило план на 101%, цветной — на 107% и т. д. Единственный случай употребления в этом сообщении промиллей — указание числа 103,5%, как показателя выполнения плана 1947 г. по всей промышленности СССР.

Столь широкое употребление процентов обязывает школу добиться самого чёткого усвоения учащимися этого понятия и приобретения полноценных навыков в его применении. В программе IV класса уже фигурирует такой пункт: «Понятие о проценте. Нахождение одного и нескольких процентов данного числа, выраженного в круглых сотнях». В программе V класса на изучение процентов отводится 30 часов, причём содержание этого раздела формулируется так: «Три основных задачи на проценты: а) нахождение процентов данного числа, б) нахождение числа по процентам, в) нахождение процентного отношения двух чисел. Решение более сложных задач на проценты».

Казалось бы, что изучение процентов не должно вызывать никаких трудностей: дроби изучены, проценты — это дроби со знаменателем 100. Времени на их изучение в школе отведено достаточно. Однако решение задач на проценты усваивается детьми с трудом. В чём же тут дело? Вот правильное объяснение.

«Вместо того чтобы с самого начала с исчерпывающей ясностью указать, что проценты представляют собою лишь особую форму записи дробей и что поэтому не существует и не может существовать никаких «задач на проценты», а что, напротив, любая задача с дробными данными может быть поставлена и решена в процент-ной записи и обратно,— вместо этого предельно ясного подхода к делу у нас создают какой-то культ процентов, гипостазируя их до присвоения им особого предметного содержания, создают для них особую теорию и особую категорию задач, словом делают всё возможное для того, чтобы в представлении школьника процент вырос в новое, чуждое и трудное понятие, требующее специального подхода и специальных методов исследования. А за этим, как правило, констатируют, что «проценты плохо усваиваются учащимися» (проф. Хинчин А. Я., статья «Основные понятия математики в средней школе», «Математика в школе», 1939, № 4, стр. 9).

Из этого объяснения причин затруднений с изучением процентов сразу вытекает и указание на способ устранения этих затруднений: надо добиться правильного понимания процентов как сотых долей числа и решать все задачи на проценты, как задачи на дроби со знаменателем 100, записанные особым образом. Проф. Хинчин, перерабатывая учебник арифметики Киселёва, включил в раздел, посвящённый обыкновенным дробям, параграфы 138, 139, 149, в которых вводит понятие процента и решает две основные задачи на проценты: нахождение процента данного числа, как нахождение дроби числа, и нахождение числа по данному его проценту, как нахождение неизвестного числа по данной его дроби. Каждая из этих задач решается одним действием, первая — умножением на дробь, вторая — делением. Представляется полезным наряду с этим указать и на возможность решения каждой из этих задач двумя действиями, имея в виду, что только сопоставление обоих способов решения действительно убеждает учеников в преимуществах того способа, какой позволяет решить задачу одним действием (да и тогда это убеждение, как уже отмечалось, приходит не сразу). Таким образом, чтобы найти 18% от числа 245, ученики применяют два способа. Сперва задача решается в два действия: находят 1% данного числа, т. е. одну сотую его, деля 245 на 100, и получают 2,45, а затем 18%, умножая 2,45 на 18 и получая 44,10, или 44,1. Второй способ, указанный в школьном учебнике, требует одного действия — умножения 245 на 0,18. Аналогично идёт дело и со второй основной задачей: если нужно найти число, зная, что 18% его составляют 14,4, находят 1% его, деля 14,4 на 18 и получая 0,8, а затем всё искомое число, содержащее 100% (т. е. 100 сотых), что даёт $0{,}8 \cdot 100 = 80$; другой способ — одно действие деления 14,4 на 0,18, что даёт $14{,}4 : 0{,}18 = 1\,440 : 18 = 80$.

Добившись ясного понимания процента как сотой доли и рассматривая задачи на проценты как уже хорошо изученные задачи на дроби, мы устраним те трудности, которые обычно приходится преодолевать при решении задач на проценты.

Третья основная задача на проценты — нахождение процентного отношения двух данных чисел — тоже не представляет собой ничего по существу нового для учеников, хорошо усвоивших, что задача о том, какую часть одного числа a составляет другое число b, решается путём деления b на a. Пусть надо узнать, сколько процентов 75 составляет число 15. Вполне доступное для пятиклассников решение заключается в том, что 15 составляет $\frac{15}{75}=\frac{1}{5}$ от 75, или, выражая в сотых долях, 0,20, т. е. 20%.

Успеху решения основных задач на проценты может способствовать составление (самими учащимися) следующей таблицы:

$1\% = 0{,}01$, или $\frac{1}{100}$	$25\% = 0{,}25$, или $\frac{1}{4}$
$2\% = 0{,}02$, или $\frac{1}{50}$	$50\% = 0{,}50$, или $\frac{1}{2}$
$4\% = 0{,}04$, или $\frac{1}{25}$	$75\% = 0{,}75$, или $\frac{3}{4}$
$5\% = 0{,}05$, или $\frac{1}{20}$	$100\% = 1{,}00$
$10\% = 0{,}1$, или $\frac{1}{10}$	$125\% = 1{,}25$, или $1\frac{1}{4}$
$12{,}5\% = 0{,}125$, или $\frac{1}{8}$	$150\% = 1{,}5$, или $1\frac{1}{2}$
$15\% = 0{,}15$, или $\frac{3}{20}$	$175\% = 1{,}75$, или $1\frac{3}{4}$
$20\% = 0{,}2$, или $\frac{1}{5}$	$200\% = 2$ и т. д.

которую можно легко пополнить и которая должна быть твёрдо усвоена учащимися с тем, чтобы использовать её при устных вычислениях.

Для успеха решения задач на проценты первостепенное значение имеет понимание необходимости в каждом отдельном случае устанавливать, что принимается за единицу (за целое, за 100%). Если, например, некоторое рационализаторское мероприятие снизило себестоимость изделий с 5 000 руб. до 4 000 руб., то это снижение составляет 20%: здесь за единицу (за целое, за 100%) принимается прежняя себестоимость (5 000 руб). и устанавливается, сколько сотых её долей составляет разница. Другая постановка вопроса: на сколько процентов поднимается эта новая себестоимость, если отказаться от этого мероприятия. Теперь ответ будет иной. Здесь за единицу (за целое, за 100%) принимается новая себестоимость, т. е. 4 000 руб., и повышение (1 000 руб.) составляет уже 25% от неё. Ещё задача: какова будет окончательная цена товара, если первоначальную цену сперва повысить на 10%, потом понизить тоже на 10%? Повышенная цена составляет 110% первоначальной, и при расчёте снижения за единицу (за целое, за 100%) принимается эта новая цена, так что 10% новой цены составляет $110 : 10 = 11\%$ первоначальной цены; окончательная цена составляет, таким образом, 99% первоначальной.

Учителю надо остановиться и на задачах, подобных следующей: цена товара снижена на 35% и составляет теперь 9 руб. 10 коп.; какова была цена до снижения? Указано снижение в процентах от первоначальной цены, принимаемой, следовательно, за 100%. Новая цена составляет, таким образом, 100% — 35% = = 65% первоначальной, но известно, что эта новая цена равна 9 руб. 10 коп. Остаётся найти число, 65% которого равны 9 руб. 10 коп., что мы уже умеем делать.

Если понятие о проценте как сотой доле твёрдо усвоено и если приобретён сознательный навык в решении указанных простейших задач, решение более сложных задач не вызывает особых затруднений. Укажем две такие задачи, связанные с введением новых важных идей.

«Предприятие ежегодно повышает свою производительность на 20%. Каков будет прирост производительности предприятия за пятилетку?» Ответ: $20\% \cdot 5 = 100\%$ грубо ошибочен: годичный прирост исчисляется от того, что было в начале года. Приняв производительность в начале 1-го года пятилетки за 100%, к концу этого года (т. е. к началу 2-го года) имеем производительность $100\% + 20\% = 120\%$, к концу 2-го года уже $120\% + 24\% = 144\%$, к концу 3-го года $144\% + 28{,}8\% = 172{,}8\%$, к концу 4-го года $172{,}8 + 34{,}56 = 207{,}36\%$, к концу 5-го года $207{,}36 + 41{,}472 = 248{,}832\%$. К концу пятилетки производительность будет, таким образом, составлять почти 249% той, какая была в начале её, и прирост за пятилетку составит не 100%, а 149%.

Здесь мы встречаемся с примером изменения по *закону сложных процентов*.

Вот ещё задача практического характера, вводящая новое понятие — понятие *взвешенного среднего*. Предприятие выпустило в I квартале 200 *т* продукции, в том числе 80% первого сорта, а во II квартале 300 *т*, в том числе 90% первого сорта. Каков выпуск первого сорта в процентах в среднем за I и II кварталы вместе? Обычный способ разыскания среднего ($80 + 90 = 170$, $170 : 2 = 85\%$) здесь неприменим, так как поквартальные показатели выпуска первосортной продукции относятся к разным количествам валовой продукции и их нельзя складывать. Правильное решение таково: за I квартал выпущено $200 \cdot 0{,}8 = 160$, за II квартал $300 \cdot 0{,}9 = 270$, за оба $160 + 270 = 430$ (*т*) первосортной продукции из общего числа $200 + 300 = 500$ (*т*), и остаётся узнать, сколько процентов от 500 составляет 430 (ответ: 86%).

В статье [II, 43] указана следующая задача, интересная тем, что не только учащиеся, а и учителя обычно дают сперва неправильное решение: сколько килограммов воды надо выпарить из 100 *кг* массы, содержащей 90% воды, чтобы получить массу с содержанием в 80% воды? Правильный ответ (50 *кг*) представляется с первого взгляда совершенно невероятным. Весьма поучительно составить табличку, показывающую постепенное снижение содержания воды в процентах от всей массы при выпаривании 10 *кг*, 20 *кг*, 30 *кг*,..., 90 *кг*, и изобразить ход выпаривания графически. Аналогичные задачи подлинно жизненного содержания, заслуживающие самого внимательного отношения со стороны учителя, имеются и в задачнике Е. С. Березанской (например, задача № 1994 о грибах).

В заключение отметим, что во избежание потери приобретённого навыка в расчётах с процентами к ним надо возвращаться на протяжении всего школьного курса математики. Естественный повод к этому дают числовые данные, фигурирующие в сообщениях о текущих событиях политической и экономической жизни, которыми изобилует каждый номер газеты, числовые данные, характеризующие работу школы, завода, колхоза, области, республики и т. д. Понятие процента так важно для каждого гражданина СССР, что школа обязана обеспечить полноценное его усвоение в неменьшей мере, чем, например, усвоение таблицы умножения или метрических мер.

Неправильное отношение к процентам, желание видеть в проценте не просто сотую долю, а что-то иное, к сожалению, весьма распространено. Например, это видим в рецензии [I, 60]. Подобно тому, как 1% есть не что иное как 0,01, или $\frac{1}{100}$, только в ином обозначении, так и те задачи на проценты, о которых говорится в программах и задачниках, представляют собой не что иное, как задачи на дроби одного частного вида. Учащиеся, хорошо овладевшие операциями над обыкновенными дробями, не встречают никаких затруднений при решении задач на проценты, если только не сбивать их с толку, рассматривая проценты как что-то новое, принципиально отличное от дробей.

§ 22. Обращение обыкновенных недесятичных дробей в десятичные.

Действия над десятичными дробями представляют такие преимущества, что само собой встаёт вопрос, нельзя ли вообще отказаться от употребления всяких других дробей, кроме десятичных. Для полного ответа на этот вопрос приходится рассмотреть несколько сравнительно простых предложений, прекрасно изложенных в §§ 174—180 учебника Киселёва, и практически овладеть двумя способами обращения недесятичных дробей в десятичные: *способом умножения*, применимым в тех случаях, когда знаменатель данной недесятичной дроби есть число вида $2^n \cdot 5^k$, $n \neq k$, и *способом деления*, применимым всегда, но дающим конечную десятичную дробь лишь тогда, когда применим и способ умножения, а во всех остальных случаях дающим бесконечную периодическую десятичную дробь, которую ради практического её использования приходится *округлять*. При изучении этого раздела учащиеся встречаются с новыми понятиями — бесконечной десятичной дроби и периодической десятичной дроби, и учитель должен серьёзно позаботиться о полноценном их усвоении (к ним придётся не раз возвращаться в дальнейшем, и неправильное их понимание доставит немало осложнений). Изучение теоретической стороны вопроса не представляет здесь никаких затруднений; оно сводится к сознательному усвоению следующих теорем: 1) каждое из чисел 10, 100, 1 000, 10 000,... есть произведение двоек и пятёрок, причём тех и других имеется столько, сколько нулей написано при единице: $10 = 2 \cdot 5$, $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^2$, $1\,000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5^3$ и т. д.; 2) если у знаменателя дроби нет других простых делителей, кроме двоек и пятёрок, то это дробь обращается в десятичную путём умножения числителя и знаменателя на надлежащее число двоек или пятёрок; тот же результат даёт и деление числителя на знаменатель; 3) если несократимая дробь имеет в знаменателе хотя один простой делитель, отличный от двух и пяти, обращение этой дроби в (конечную) десятичную невозможно; 4) производя в этом случае деление числителя на знаменатель с записью частного в виде десятичной дроби, получим бесконечную десятичную дробь, притом периодическую, с периодом, содержащим самое большее столько цифр, сколько единиц в знаменателе без одной.

Овладев этими легко доказываемыми теоремами, учащиеся должны уметь, основываясь на них, производить переход от любой недесятичной дроби к равной ей десятичной, конечной или бесконечной, выбирая наиболее рациональный путь. Такие дроби, как $\frac{7}{20}$, $\frac{13}{50}$, $\frac{3}{8}$ и т. д., они должны обращать в десятичные в уме; такую дробь, как $\frac{15}{64}=\frac{15}{2^6}$, — письменно, применяя либо способ умножения (числитель и знаменатель умножаются на $5^6 = 625 \times 25 = 15\,625$, причём фактически приходится выполнять только умножение числителя, так как результат умножения знаменателя известен заранее), либо способ деления (хорошая проверка результата, полученного одним способом, результатом, какой даёт другой способ!). Учащиеся должны понимать, что к дробям со знаменателями 3, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, ... способ умножения вовсе неприменим, а способ деления даёт их представление в виде бесконечных десятичных периодических дробей; должны уметь получать эти периодические дроби в наиболее простых случаях (для значения знаменателя 3 или 9) в уме, в остальных — письменно, заранее указывая, какое наибольшее число цифр может быть в периоде.

Дальнейшее углублённое изучение теоретической стороны даёт много любопытных результатов, легко открываемых самими учащимися: какие обыкновенные дроби при обращении в десятичные дают период, начинающийся сразу после запятой («чистые» периодические дроби), и какие дают «смешанные» периодические дроби? Какова связь между периодами дробей, имеющих один и тот же знаменатель, как, например, $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$? Какую поправку к получающейся догадке надо внести, рассматривая дроби со знаменателем 13? Какую часть максимально возможного при данном знаменателе числа цифр периода составляет фактическое число его цифр? Подобные вопросы выходят за рамки программы и представляют собой прекрасный материал для дополнительных занятий.

§ 23. Периодические дроби.

Когда выяснено, что всякая обыкновенная недесятичная дробь обращается либо в конечную десятичную, либо в бесконечную десятичную периодическую, неизбежно встаёт обратный вопрос — о переходе от любой данной бесконечной десятичной периодической дроби к дроби обыкновенной, обращение которой в десятичную даёт эту периодическую. Всегда ли существует такая обыкновенная дробь? Как её найти, если она существует?

Ответ на оба эти вопроса даётся в результате рассмотрения нескольких теорем, использующих понятие предела последовательности и изложенных в каждом руководстве арифметики (в том числе и в школьном учебнике Киселёва). Ответ получается такой: для всякой периодической десятичной дроби, за исключением дробей с периодом из одной цифры 9, существует единственная несократимая обыкновенная дробь, дающая при обращении в десятичную эту периодическую; получаются эти обыкновенные дроби по двум известным правилам (одно для чистой, другое для смешанной периодической дроби), которые в применении, например, к случаям 0,(459) и 0,43(2) дают $\frac{459}{999}=\frac{17}{37}$ и $\frac{432-43}{900}=\frac{389}{900}$ (обращение $\frac{17}{37}$ и $\frac{389}{900}$ в десятичные дроби, как легко видеть, даёт именно данные периодические дроби); для дроби с периодом 9 не существует соответствующей обыкновенной, т. е. такой, обращение которой в десятичную давало бы эту периодическую (с периодом 9), так как каждая такая дробь, если её рассматривать как предел последовательности конечных десятичных дробей, представляющих собой «отрезки» этой периодической, есть либо целое, либо конечная десятичная; например, 0,(9), как предел последовательности дробей 0,9, 0,99, 0,999, 0,9999 ..., есть единица, а дробь 0,45(9), как предел последовательности дробей 0,4, 0,45, 0,459, 0,4599, 0,45999, 0,459999 и т. д. есть 0,46.

Ныне действующая программа математики средней школы предусматривает только «понятие о периодической дроби»; в школьном задачнике (Березанской) периодические дроби (за редким исключением) вовсе не встречаются. Если при решении задачи в результате деления получается частное в виде бесконечной десятичной дроби (которая всегда бывает при этом периодической), надо либо удовлетвориться приближённым значением частного, о чём будет речь в следующей главе, либо выполнить деление по общему правилу, получая в частном обыкновенную недесятичную дробь.

В тех арифметических операциях, с какими приходится встречаться при всевозможных практических вычислениях, периодические дроби вовсе не используются, но без знакомства с ними изучение теории дробей остаётся незаконченным. Естественное место для периодических дробей в курсе средней школы — в разделе о геометрической прогрессии, изучаемой в IX классе, так как каждую чистую периодическую дробь можно рассматривать как предел суммы членов некоторой геометрической убывающей прогрессии, а вопрос о смешанных периодических дробях легко сводится к вопросу о чистых периодических дробях.

В дореволюционной школе уменье обращать любую периодическую десятичную дробь в обыкновенную требовалось программой арифметики, и старые задачники пестрели задачами вроде такой: «Который теперь час, если протекшая часть суток на 3,13333... часа более оставшейся» («Сборник арифметических задач для средних учебных заведений» И. Верещагина, изд. 1895 г. № 2431). В современных задачниках подобных искусственных задач уже нет, но в учебнике арифметики Киселёва до сих пор удержалось изложение теоретической стороны дела, притом в двух редакциях: §§ 181—184 (крупный шрифт) содержат доступное учащимся V класса нестрогое изложение, приводящее кратчайшим путём к практическим правилам, а §§ 185—194 (мелкий шрифт) рассматривают те же вопросы глубже и полнее, но изложены трудно, совершенно недоступно рядовому ученику V класса, притом без использования тех сведений, какие учащиеся получают по теории пределов и в учении о прогрессиях в IX классе, где эти вопросы и должны рассматриваться.

Отметим в заключение, что хотя уменье обращать десятичные периодические дроби в обыкновенные и не требуется программой курса арифметики, учителю часто приходится с ним встречаться: ученики наталкиваются на необходимость такого обращения, знакомясь с литературой, особенно старой, да и на приёмных экзаменах в вузы иногда эти вопросы ставят. Ввиду этого учитель математики во всяком случае сам должен быть хорошо ориентирован в этой небольшой теории. Изучение тех параграфов руководства арифметики Киселёва, которые дают доступный для пятиклассников вывод практических правил,— хороший материал для индивидуальных заданий более сильным учащимся.

§ 24. Смешанные вычисления с обыкновенными дробями, десятичными и недесятичными.

В настоящее время при всякого рода численных расчётах преобладает применение десятичных дробей, причём широко используются правила приближённых вычислений, о которых речь будет ниже. Обыкновенные недесятичные дроби с небольшими знаменателями употребляются часто, так как они проще, чем равные им десятичные; например, дробями $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{3}$ пользоваться проще, чем дробями $0{,}125$ и $0{,}333... = 0{,}(3)$. Обыкновенные недесятичные дроби с большими знаменателями применяются несравненно реже, но всё же применяются, имея в некоторых случаях определённые преимущества перед десятичными. Важно уметь делать правильный выбор между теми и другими в каждом отдельном случае, и научить этому учащихся можно и должно уже в V классе. Для этого, во-первых, надо внимательно относиться к формулировкам условий всех задач, как решаемых в классе, так и задаваемых для самостоятельной работы учащихся, избегая нерационального применения тех или других дробей, и, во-вторых, требовать от учащихся сознательного, обоснованного выбора в каждом отдельном случае. Например, задачу № 1959 из задачника Березанской, требующую несложного агрономического расчёта, надо решать, пользуясь исключительно десятичными дробями, а задачу № 1926, в которой рассматриваются зубчатые колёса, выгоднее решать в обыкновенных дробях, не смущаясь тем, что здесь появляются большие знаменатели.

Примером неудачной формулировки условия задачи может служить задача № 2340 из того же задачника Березанской: «Сумма трёх чисел равна 770. Первое число составляет $53\frac{4}{7}\%$ второго и $44\frac{2}{17}\%$ третьего. Найти эти числа». Здесь имеем неуместное сочетание процентов, т. е. сотых долей, с такими долями, как седьмые и семнадцатые. Здесь следовало бы вовсе отказаться от процентов: первое число составляет $\frac{375}{700}$, или $\frac{15}{28}$, второго и $\frac{750}{1700}$, или $\frac{15}{34}$, третьего. Чтобы решить эту задачу без какого бы то ни было специального правила, полагаем, что первое число содержит 15 частей. Тогда второе содержит 28 таких же частей, а третье 34 такие же части. Доведение решения до конца не требует пояснений. В этой задаче данные, приведённые в задачнике $\left(53\frac{4}{7}\% \text{ и } 44\frac{2}{17}\%\right)$, введены с единственной целью — осложнить работу ученика, её решающего, заставляя его переводить эти неестественные дроби в обыкновенные недесятичные. На практике такие дроби никогда не употребляются.

Вопросу о том, в каких дробях, десятичных или недесятичных, лучше вести выкладки, приходится уделять много внимания, разрешая его в каждом отдельном случае применительно к условиям задачи.

Пример — вычисление $x = 0{,}567 \cdot \frac{3}{7}$, выполняемое в уме: $567 : 7 = 81$; $81 \cdot 3 = 243$; $x = 0{,}243$.

Глава V

ПРИБЛИЖЁННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

§ 25. Точные и приближённые значения величин. Правила округления.

В громадном большинстве случаев числа, какими приходится пользоваться на практике, выражают количественные соотношения действительности не точно, а лишь приближённо. Указать число страниц в настоящей книге можно совершенно точно, но точный подсчёт числа букв, в ней напечатанных, уже весьма затруднителен, а точное измерение ширины её страниц и вовсе невозможно как в силу неполной определённости того отрезка, который мы называем «шириной» страницы, так и по причине неточности инструментов, применяемых для измерения, и несовершенства нашего глаза. Пользуясь миллиметровой линейкой, измерить ширину страницы можно в лучшем случае до десятых долей миллиметра: цифры сотых, тысячных и последующих долей миллиметра останутся в результате такого измерения неизвестными. Современная физика и техника довели точность измерений до высокой степени совершенства, но даже самые точные измерения дают результат лишь с некоторой степенью приближения.

Итак, громадное большинство числовых результатов, с которыми приходится иметь дело, является лишь *приближёнными* значениями неизвестных истинных величин, или, короче, *приближёнными* числами.

Выполняя над данными числами те или другие операции, нельзя не считаться с этим приближённым характером большинства данных чисел. Вот два примера.

Служащий музея, отвечая на вопрос, сколько лет хранящейся в музее древней статуе, говорит, что ей 3 008 лет. На недоуменный вопрос посетителей, как удалось столь точно установить это число, он объясняет, что, поступив работать в музей восемь лет назад, он получил указание директора музея, что статуе 3000 лет; следовательно, теперь ей $3\,000 + 8 = 3\,008$ лет. Служащий не понимает, что возраст 3 000 лет установлен лишь приближённо, что в лучшем случае историк указывает время изготовления столь древних вещей с точностью до века и что прибавка 8 лет в этом приближённом числе ничего не меняет. Обычное правило сложения ($3\,000 + 8 = 3\,008$) здесь неприменимо.

Допустим, что требуется найти по расчёту вес алюминиевой пластинки, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда с рёбрами, длины которых по измерении их миллиметровой линейкой оказались равными 184 *мм*, 109 *мм*, 32 *мм* (с точностью до 1 *мм*). Справочник говорит, что плотность алюминия колеблется от 2,5 до 2,7, и мы примем, что она равна 2,6. Переходя к сантиметрам, находим, что объём пластинки равен $18{,}4 \cdot 10{,}9 \cdot 3{,}2 = 641{,}792$ *см*^{3}, а вес равен 1668,6592 *г*. Все использованные данные — числа приближённые, приближённым же является, разумеется, и окончательный результат. Но что же в нём надёжно?

Как мы увидим далее, полученный ответ надо округлить до двух значащих цифр, так как уже цифра десятков граммов (третья значащая цифра) ненадёжна. Записывая ответ в виде 1,7 *кг*, замечаем, что наш труд, затраченный на получение восьмизначного числа 1668,6592 *г*, был на три четверти напрасным.

Как видим, действия над приближёнными числами имеют свои особенности, и нужно знание соответствующей теории, чтобы производить их уверенно и без непроизводительной затраты труда.

По сложившейся веками традиции школьный курс арифметики этой теории не включает, за исключением одного вопроса, где необходимо принять во внимание приближённый характер результата, какой он имеет даже при абсолютно точных данных: деление чисел, как целых, так и дробных, если выражать частное десятичной дробью, в громадном большинстве случаев приводит к бесконечной десятичной дроби, и чтобы использовать это частное, его надо округлить, т. е. заменить конечной десятичной дробью, допуская при этом некоторую погрешность. Рассмотрение правила такого округления, связанного с понятием приближения до такого-то разряда по недостатку или по избытку,— это всё, что содержит по вопросу о приближённых числах учебник арифметики Киселёва (см. §§ 169, 170, 177 по изданию 1952 г.).

В программе математики для V класса имеется пункт: «Округление данных и результатов действий». Понимают этот пункт по-разному. Ниже приводятся соображения о более широком его толковании, которое подсказывается требованиями практики (и житейской, и учебной). Дело сводится к соблюдению в практике арифметических вычислений нескольких простых правил, целесообразность которых легко усматривается через рассмотрение частных примеров, но полностью может быть доказана лишь позднее. Статья [II, 2] показывает, как это можно сделать в курсе алгебры, в книгах же [II, 12а, б] выяснен путь, каким можно идти в этом направлении уже в V классе. К рассмотрению этого пути (в самых общих чертах) и переходим.

§ 26. Простейшие понятия и правила теории приближённых вычислений (первый круг сведений).

При обычной постановке изучения арифметики учащимся приходится иметь дело с основными понятиями теории приближённых вычислений впервые при делении десятичных дробей, а именно: при делении произвольного десятичного числа, целого или дробного, на целое (деление на десятичную дробь ничего нового в этом отношении не даёт). Здесь выясняется, что называют приближённым частным, взятым с такой-то точностью (до десятых, сотых и т. д.), начинают различать приближённое частное, взятое с недостатком (по недостатку), и приближённое частное, взятое с избытком (по избытку), вводят знак приближённого равенства ($\approx$), обосновывают и формулируют правило округления до такого-то разряда (до целых, до десятых и т. д.), согласно которому при округлении до некоторого разряда отбрасываются все цифры частного, находящиеся правее этого разряда, причём цифра этого разряда остаётся без изменения, если следующая, т. е. первая отбрасываемая, цифра есть 0, 1, 2, 3, 4, и усиливается (увеличивается на единицу), если эта первая отбрасываемая цифра есть 5, 6, 7, 8, 9. Этому правилу округления надо уделить достаточно внимания, добиваясь сознательности в его усвоении и прочного навыка в его применении, так как оно применяется не только при делении десятичных дробей, а всегда, когда в силу тех или иных причин приходится заменять десятичное число, содержащее слишком много цифр, более коротким, а следовательно, и более удобным, хотя и менее точным числом. Очень важно не ограничиваться готовыми формулировками требований точности, а рассмотреть ряд задач практического характера, где требование о степени точности подсказывается условиями вопроса. Например, если надо разграфить лист бумаги для стенгазеты на 7 полос равной ширины, то после измерения ширины всего листа в сантиметрах мы должны определить ширину одной полосы делением на 7, и это действие достаточно вести с точностью до десятых долей сантиметра: знание сотых долей сантиметра (десятых миллиметра) здесь бесполезно.

Нельзя ограничиться получением приближённых чисел через округление точных. Важнейшим источником получения приближённых чисел является измерение, и надо добиться полной ясности понимания приближённого характера результата каждого измерения и уменья характеризовать его точность, прежде всего через указание тех разрядов, цифры которых заслуживают доверия. Одного разговора о точности результатов измерений недостаточно; необходимы собственноручные измерения, производимые самими учащимися посредством различных измерительных приборов: большой классной линейки с делениями на сантиметры, миллиметровой линейки, транспортира, весов с граммовым разновесом, желательно также рулетки, поперечного масштаба и т. д. Необходимо добиться ясности понимания таких утверждений, как «длина почтовой открытки с точностью до 1 *мм* равна 143 *мм*», «поперечник 20-копеечной монеты равен 21,2 *мм* с точностью до десятых миллиметра» и т. д. Они означают, что если неизвестные нам точные значения этих величин, длины открытки и поперечника монеты, выраженные в миллиметрах, округлить, первое до целых, второе до десятых миллиметра, то получатся указанные числа. Кроме таких простейших случаев измерения, приходится знакомить учащихся и с более сложными, когда применяется повторное измерение одного и того же объекта и берётся среднее. Желая, например, найти расстояние от школы до почты, отмечают прежде всего те точки, от которой и до которой будут измерять, а также устанавливают ту линию, вдоль которой будут измерять, и выполняют измерение, лучше всего мерной цепью или рулеткой, несколько раз. Положим, измерение сделано 4 раза и получены числа 885,8 *м*, 889,8 *м*, 894,3 *м*, 887,4 *м*. Здесь среднее равно 889,325 *м*, но поскольку цифра целых метров немного колеблется, округляем этот результат до целых, отбрасывая всю дробную часть, и утверждаем, что искомое расстояние равно 889 *м*.

Постоянно обращая внимание учащихся на точность чисел, с которыми приходится иметь дело, мы научим их *различать, какие данные точные, какие приближённые, и приучим сохранять в результатах измерений только надёжные цифры и не более одной не вполне надёжной, отбрасывая все последующие (правило I)*. Особого внимания требует цифра нуль, если она является цифрой младшего разряда приближённого числа. Указывая, например, что население города составляет 156 000 человек, мы даём приближённое значение численности населения до тысяч (следует предпочесть запись «156 тысяч»), а указывая, что толщина провода равна 0,40 *мм*, мы отмечаем записью нуля сотых, что измерение сделано с точностью до сотых. В первом случае нули поставлены взамен неизвестных цифр и не являются «значащими» цифрами, а во втором цифра 0 (сотых) определённо указывает отсутствие единиц в разряде сотых и представляет собой «значащую» цифру. Здесь термину «значащие цифры» даётся новый смысл, отличный от того, в каком он употреблялся раньше (нули слева никогда не считаются значащими цифрами).

Далее возникает вопрос, как производить четыре арифметических действия над приближёнными числами. Сложение и вычитание приближённых чисел, округлённых до одного и того же разряда, не вызывает затруднений: в V классе с ними поступают как с точными числами, откладывая вопрос о надёжности всех цифр результата сложения и вычитания до старших классов. Но уже такая задача, как вычисление суммы чисел $a \approx 4{,}537$ и $b \approx 12{,}8$, из которых первое дано с точностью до тысячных, а второе лишь до десятых, требует применения особого, легко устанавливаемого правила округления суммы. Действительно, обозначая знаками вопроса неизвестные цифры последующих разрядов в данных и выполняя сложение обычным способом, имеем:

```
   4,537?
+ 12,8???
 --------
  17,337?
```

и сразу видим, что второй и третий десятичные знаки суммы никакого доверия не заслуживают. Следовательно, полученную сумму надо округлить, записывая её в виде 17,3. Таким образом, приходим к правилу: *при сложении и вычитании приближённых чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближённом данном с наименьшим числом десятичных знаков (правило II)*. Случай, когда приближённые данные — числа целые, легко приводится к рассмотренному, если выражать эти данные в единицах какого-либо высшего разряда.

Для получения правила округления произведения и частного приближённых чисел тоже проще всего использовать обозначение неизвестных цифр знаками вопроса. Вот примеры:

```
   4,26?          4,26?     4,26¦? : 5,73? = 0,743     4,3¦? : 5,73?=0,74
 × 5,73?        ×  5,7?     4 26¦?   |573?             4 3¦? ??|573?
 --------       --------    ------   |-----            4 0¦11 ?|0,74
     ¦???? ?        ¦?????  4 26¦??  |0,743            --------
    1¦278?         2¦982?   4 01¦1?  |                   2¦49??
   29¦82?         21¦30?    --------                     2¦292?
  213¦0?         --------     24¦9??                   --------
 ----------       24,¦282??   22¦92?                      ¦198?
 24,4¦098 ??     --------     ------                      ¦
 24,4¦            24¦          1¦98??
                               1¦719?
                              -------
                                ¦261?
```

Здесь пунктирные линии отделяют находящиеся справа от них цифры, никакого доверия не заслуживающие, от цифр, расположенных слева и заслуживающих доверия. Перенос запятой в данных ничего не меняет, кроме положения запятой в результате, и правило округления произведения и частного, к которому приводит рассмотрение подобных примеров, формулируется иначе, чем для суммы и разности: *при умножении и делении в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближённое данное с наименьшим числом значащих цифр (правило III)*. Здесь «значащими цифрами» числа называются все его цифры, кроме нулей, расположенных левее первой отличной от нуля его цифры.

Отметим ещё три правила, к которым легко прийти, рассматривая частные случаи. *При вычислении промежуточных результатов следует брать одной цифрой более, чем рекомендуют предыдущие правила. В окончательном результате эта «запасная цифра» отбрасывается (правило IV).*

Если некоторые данные имеют больше десятичных знаков (при сложении или вычитании) *или больше значащих цифр* (при умножении и делении), *чем другие, то их предварительно округляют, сохраняя лишь одну лишнюю цифру (правило V).*

Если данные можно брать с произвольной точностью, то для получения результата с 2, 3, 4, ..., вообще n цифрами, их надо брать с 3, 4, 5, ..., вообще n + 1 цифрами (правило VI).

Эти шесть правил и исчерпывают собой тот круг сведений по приближённым вычислениям, какой можно рекомендовать для практического усвоения в V классе. Теоретическое обоснование этих правил в V классе невозможно, но учитель, твёрдо их придерживающийся, легко добивается их понимания и постоянного соблюдения их учащимися, экономя много времени и сил, бесполезно затрачиваемых на получение цифр, не заслуживающих никакого доверия. Примерные вычисления, приведённые выше с применением знаков вопроса, вполне примиряют учащихся с необходимостью предусмотренного этими правилами округления каждого результата.

Отсылая читателя, желающего глубже изучить этот вопрос, к указанным выше книгам, ограничимся только рассмотрением одного примера, показывающего применение этих правил в более сложном (но доступном учащимся V класса) вычислении.

Требуется найти значение $x = \frac{a+b}{(a-b)\cdot c}$ при $a = 3\frac{4}{7}$, $b = 3\frac{5}{11}$, $c = 28\frac{1}{3}$ сперва точно, проводя вычисление в обыкновенных дробях, затем приближённо, обращая все данные в десятичные дроби с точностью до сотых, и сравнить результаты.

1-й способ:

$$a + b = 3\frac{4}{7} + 3\frac{5}{11} = 6\frac{44+35}{77} = 7\frac{2}{77} = \frac{541}{77},\ a - b =$$
$$= \frac{9}{77},\ c = 28\frac{1}{3} = \frac{85}{3},\ x = \frac{541\cdot 77\cdot 3}{77\cdot 9\cdot 85} = \frac{541}{255} = 2\frac{31}{255} = 2{,}1215...$$

2-й способ:

$a \approx 3{,}57$, $b \approx 3{,}45$, $c \approx 28{,}33$, $a + b \approx 7{,}02$, $a - b \approx 0{,}12$, $(a-b)\cdot c \approx 0{,}12 \cdot 28{,}33 \approx 3{,}40$ (последняя цифра — запасная), $x \approx 7{,}02 : 3{,}40 \approx 2{,}06...$, $x \approx 2{,}1$.

Как видим, второй способ в результате применения правил округления дал как раз тот результат, какой получается при округлении до двух значащих цифр полученного 1-м способом точного результата.

§ 27. Низшая и высшая границы (второй круг сведений по приближённым вычислениям).

Очень часто, не зная точного значения рассматриваемого числа x, мы в состоянии указать число, заведомо меньшее x и называемое *нижней* его *границей* (сокращённо НГx), а также число, заведомо большее x, называемое *высшей* его *границей* (сокращённо ВГx). Замена приближённого значения ($x \approx a$) указанием НГx и ВГx позволяет внести полную определённость во все утверждения, связанные с приближёнными значениями, восстанавливает строгость математических расчётов: двойное неравенство $a < x < a_2$ даёт совершенно определённое указание о числе x, чего нельзя сказать о приближённом равенстве $x \approx a$. Важность подобных двойных неравенств была осознана очень давно, ещё в древней Греции: «Возникший из прикладных нужд интерес к приближённому измерению величин и приближённым вычислениям не привёл математиков III века (до н. э.) к отказу от математической строгости. Все многочисленные производившиеся ими приближённые извлечения корней и даже все астрономические вычисления проделывались с точным указанием границ погрешностей по типу знаменитого архимедова определения длины окружности в форме безукоризненно доказанных неравенств $3\frac{1}{7}d > P > 3\frac{10}{71}d$ (где P — длина окружности с диаметром d). Это отчётливое понимание того, что приближённая математика не есть «нестрогая» математика, было позднее надолго забыто» [I, 30a].

Идея замены вычисления приближённого значения неизвестной величины x вычислением НГx и ВГx является основой в высшей степени важного *способа вычисления со строгим учётом погрешностей по способу границ*, образующего второй круг сведений по приближённым вычислениям. Теоретическая его сторона очень проста и основана на использовании хорошо известных ещё в начальной школе предложений об изменении результатов действий в зависимости от изменения компонентов. Если ограничиваться четырьмя арифметическими действиями, то эта теоретическая сторона сводится к следующим предложениям:

$$\begin{aligned}
&\text{НГ}(x+y) = \text{НГ}x + \text{НГ}y,\\
&\text{ВГ}(x+y) = \text{ВГ}x + \text{ВГ}y,\\
&\text{НГ}(x-y) = \text{НГ}x - \text{ВГ}y,\\
&\text{ВГ}(x-y) = \text{ВГ}x - \text{НГ}y,\\
&\text{НГ}xy = \text{НГ}x \cdot \text{НГ}y,\\
&\text{ВГ}xy = \text{ВГ}x \cdot \text{ВГ}y,\\
&\text{НГ}(x:y) = \text{НГ}x : \text{ВГ}y,\\
&\text{ВГ}(x:y) = \text{ВГ}x : \text{НГ}y.
\end{aligned}$$

Сюда надо присоединить ещё три предложения, истинность которых вытекает непосредственно из определений НГ и ВГ: 1) округлять НГ можно только по недостатку, ВГ только по избытку, 2) чем меньше разность ВГx — НГx, тем точнее определяется x, 3) в качестве приближённого значения x рекомендуется брать среднее арифметическое чисел НГx и ВГx или число, близкое к этому среднему.

Простейшие применения способа границ не представляют никаких затруднений и вполне разъясняются следующим примером.

Найти $x=\frac{a+b}{(a-b)\cdot c}$ при $a=3\frac{4}{7}$, $b=3\frac{5}{11}$, $c=28\frac{1}{3}$, вычисляя для a, b, c их НГ и ВГ в виде десятичных дробей, взятых до сотых.

	НГ	ВГ
a	3,57	3,58
b	3,45	3,46
$a+b=m$	7,02	7,04
$a-b$	0,11	0,13
c	28,33	28,34
$(a-b)\cdot c=n$	3,11	3,69
$x=m:n$	1,90	2,27

$$\begin{array}{r} 2,27\\ 1,90\\ \hline 4,17 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\,2,27\\ 1,90\\ \hline 0,37 \end{array}$$

$$4,17:2=2,085 \qquad 0,37:2=0,185$$

$$x\approx 2,085\ (\pm\ 0,185)$$

$$x\approx 2,1\quad (\pm\ 0,2\ \ )$$

Получив двойное неравенство $1,90<x<2,27$, естественно взять в качестве приближённого значения для x среднее между найденными границами, а именно: 2,085, но при этом может получиться впечатление, что мы нашли x с точностью до тысячных. Этого «очковтирательства» не будет, если одновременно указать, как велико наибольшее возможное отклонение истинного значения x от этого среднего, равное, очевидно, полуразности границ и записать ответ в виде приближённого равенства $x\approx 2,085$ $(\pm\ 0,185)$. Другой, более простой и чаще применяемый способ заключается в округлении найденного среднего с таким расчётом, чтобы в нём оставалась лишь одна не вполне надёжная цифра. В данном случае округление до десятых ($x\approx 2,1$) даёт число, которое отличается от истинного значения x менее, чем на $2,1-1,90=0,20$ в одну сторону, и меньше, чем на $2,27-2,1=0,17$,— в другую. Запись $x\approx 2,1$ $(\pm\ 0,2)$ означает, что указанное приближённое значение x отличается от истинного его значения не более, чем на 0,2 в любую сторону.

Отметим полное согласие результата, полученного при вычислении x в § 26, с только что найденным. Разница лишь в том, что, получив там $x\approx 2,1$, мы могли утверждать только то, что это число 2,1 мало отличается от истинного значения x, здесь же мы ручаемся, что разница между x и 2,1 не превосходит 0,2 по абсолютному своему значению. Как показывает сравнение с точным результатом ($x=2,1215...$), найденным там же, в действительности эта разница едва превосходит 0,02.

Читателю, желающему детальнее ознакомиться с проведением способа границ, рекомендуется обратиться к книгам [11, 12].

По идейному своему содержанию способ границ вполне доступен учащимся V класса, но представляется более целесообразным вводить его только в VI классе, ограничиваясь в V классе постоянным применением шести правил, указанных в § 26 и часто называемых «правилами подсчёта цифр».

§ 28. Границы абсолютных и относительных погрешностей (третий круг сведений по приближённым вычислениям).

Имея число a, как приближённое значение некоторого неизвестного нам точного числа x, можно поставить вопрос о величине разности $x - a = \alpha$, которую обычно называют *абсолютной погрешностью* приближённого числа a. Эта абсолютная погрешность α бывает и положительной (если a является приближённым значением x по недостатку), и отрицательной (если по избытку). Поскольку x неизвестно, неизвестна и эта погрешность α, но очень часто удаётся установить высшую границу для абсолютного значения a, т. е. такое положительное число Δa, что $|x - a| < \Delta a$, или $-\Delta a < x - a < \Delta a$. Это число Δa называют *границей абсолютной погрешности* числа a как приближённого значения x. Так, в рассмотренном выше примере границей абсолютной погрешности найденного приближённого значения для x, равного $a = 2{,}1$, служило число 0,2; границей абсолютной погрешности числа a, полученного в результате округления любого десятичного числа до некоторого разряда, является половина единицы этого разряда. Обычно применяется запись $x \approx a(\pm \Delta a)$, которую читают так: икс приближённого равен a с абсолютной погрешностью, не превосходящей Δa.

Зная a и Δa, легко указать НГ$x = a - \Delta a$ и ВГ$x = a + \Delta a$. Обратно, зная НГ$x = a_1$ и ВГ$x = a_2$ и взяв $x \approx a$, где $a = (a_1 + a_2) : 2$, имеем $\Delta a = (a_2 - a_1) : 2$. Действительно, $a_1 < x < a_2$, $a_1 - (a_1 + a_2) : 2 < x - a < a_2 - (a_1 + a_2) : 2$ или $-(a_2 - a_1) : 2 < x - a < (a_2 - a_1) : 2$, т. е. $|x - a| < (a_2 - a_1) : 2$. Если в качестве a взять не $(a_1 + a_2) : 2$, а какое-либо другое число x_0, то Δa равно наибольшей из разностей $x_0 - a_1$ и $a_2 - x_0$.

Итак, указание a и Δa равносильно указанию НГ$x = a_1$ и ВГ$x = a_2$. Границу абсолютной погрешности Δa можно определить иначе, а именно: как такое положительное число, вычитание которого от a даёт НГx, а прибавление к a — ВГx. Это второе определение Δa легче усваивается, но если исходить из него, то надо доказать, что $|x - a| < \Delta a$, преобразуя двойное неравенство $a - \Delta a < x < a + \Delta a$ к виду $-\Delta a < x - a < \Delta a$ или $|x - a| < \Delta a$.

Граница абсолютной погрешности является удобной характеристикой точности, позволяя сравнивать точность различных приближённых значений одной и той же величины. Например, если $x \approx 24\ (\pm 1)$ *г* и $x \approx 23{,}85\ (\pm 0{,}01)$ *г*, то ясно, что второе значение неизвестного веса x гораздо точнее. Первая запись равносильна двойному неравенству 23 *г* $< x <$ 25 *г*; этот результат можно получить на обыкновенных магазинных весах с граммовым разновесом, а вторая — неравенству 23,84 *г* $< x <$ 23,86 *г* (получается при использовании более точных лабораторных весов).

Однако границы абсолютной погрешности недостаточно, если дело идёт о сравнении точности приближённых значений разных величин. Пусть, например, измерили длину спички x и длину стола y и получили $x \approx 50$ ($\pm$ 1) *мм* и $y \approx 1627$ (± 1) *мм*. Хотя здесь граница абсолютной погрешности в обоих случаях одна и та же, каждый скажет, что второе измерение сделано гораздо точнее первого, так как в первом граница абсолютной погрешности составляет 2% от всей величины, а во втором только 0,06%. Таким образом, важна не только величина границы абсолютной погрешности, а и то обстоятельство, какую часть всего приближённого значения a составляет Δa. Отсюда вытекает необходимость рассматривать дробь $\frac{\Delta a}{a}$, которую называют *границей относительной погрешности* данного приближённого значения a и выражают обычно в процентах, применяя запись $x \approx a$ ($\pm p$%), равносильную записи $a(1 - 0{,}01\,p) < x < a(1 + 0{,}01\,p)$. В приведённом примере имеем границы относительных погрешностей $\frac{1}{50}$, или 2%, и $\frac{1}{1627}$, или 0,06%; первое измерение сделано примерно в 30 раз менее точно, чем второе.

Понятия границы абсолютной и относительной погрешности очень часто используются на практике. Например, правила проверки торговых весов требуют, чтобы весы, которыми пользуются в магазинах, давали погрешность не выше 1 *г* на каждый килограмм веса, т. е. допускали границу относительной погрешности не свыше 0,1%. Продажные радиодетали, например, сопротивления, имеют пометки вроде следующей: «300 ($\pm$ 10%) омов». Такая пометка говорит, что истинное сопротивление данной детали отличается от номинального её сопротивления (300 омов) не больше чем на 10% от 300, т. е. 30 омов, и заключается, следовательно, между 270 и 330 омами.

Эти понятия настолько просты, что знакомство с ними может быть осуществлено уже в семилетней школе. Очень полезно приучать учащихся давать себе отчёт в точности тех приближённых чисел, с какими они имеют дело, пользуясь всеми тремя рассмотренными способами, причём в V классе на первом плане стоит простое указание числа цифр, заслуживающих доверия, в VI — указание НГ и ВГ, в VII — границ абсолютной и относительной погрешности.

Значительно бóльшие трудности представляет использование понятий границ абсолютной и относительной погрешностей для строгого учёта погрешностей в результатах вычислений, применяемого обычно в лабораторной практике. Дело здесь сводится к выводу и применению следующих теорем: 1) граница абсолютной погрешности суммы и разности равна сумме границ абсолютных погрешностей данных слагаемых, 2) граница относительной погрешности произведения и частного равна сумме границ относительных погрешностей данных, 3) граница относительной погрешности степени (корня) равна произведению (частному) границы относительной погрешности основания (подкоренного) на показатель степени (корня). Доказательства этих теорем и примеры их применения читатель найдёт в указанной выше литературе; рассмотрение их в средней школе программой не предусмотрено. Это приходится считать пробелом программы, так как изучение теорем о границах абсолютной и относительной погрешности, во-первых, нужно каждому работающему в какой-либо лаборатории, а во-вторых, эти теоремы позволяют дать обоснование тем важным правилам округления результатов вычислений, какие приведены выше (в § 26): граница абсолютной погрешности приближённого числа характеризуется числом его точных десятичных знаков, а граница относительной погрешности — числом его точных значащих цифр. Так, все приближённые числа, имеющие по два точных десятичных знака, имеют границу абсолютной погрешности не больше 0,005, а все приближённые числа, имеющие по две точных значащих цифры, имеют границу относительной погрешности от 0,5% до 5%. Отсюда следует, что при выполнении действий сложения и вычитания, когда складываются границы абсолютных погрешностей, надо принимать во внимание числа десятичных знаков, а при выполнении действий умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня — числа значащих цифр.

§ 29. Некоторые общие соображения о методике приближённых вычислений в средней школе.

Школьный курс арифметики сложился в общих своих чертах в XVII и XVIII вв., отражая требования житейской, торговой и военной практики того времени. Знаменитый русский учебник Л. Ф. Магницкого «Арифметика», вышедший в 1703 г. и не раз уже упомянутый, полностью удовлетворял вычислительным потребностям практической жизни петровского времени. В дальнейшем программы и учебники арифметики менялись медленнее, чем требования, предъявляемые жизнью к вычислительным навыкам и навыкам в решении задач, и получился разрыв между жизнью и школой, ставший особенно чувствительным к началу XX в. Великая Октябрьская революция вызвала коренную перестройку средней школы, в том числе и школьного курса арифметики, но в отношении приближённых вычислений положение продолжает оставаться неблагополучным и до сегодня. Новизна вопроса, научные и методические трудности, связанные с его разрешением, отсутствие соответствующих знаний и навыков у широкой массы учителей математики, отчасти просто недооценка важности приближённых вычислений для всего дела приложений математики — всё это тормозило правильное решение вопроса о введении элементов теории приближённых вычислений в среднюю школу.

В трёх предшествующих параграфах намечены те сведения, какие представляются совершенно необходимыми и в то же время вполне доступными для средней школы, но представляют расширение ныне действующей программы. Это прежде всего правила округления результатов действий над приближёнными числами, упоминаемые в программе, но понимаемые обычно слишком узко. Учитель, хорошо сам их усвоивший и постоянно руководствующийся ими при вычислениях, легко добивается и соблюдения их со стороны учащихся и тем самым делает серьёзный шаг вперёд в смысле повышения математической культуры своих учеников. Они обеспечивают отсутствие в тетрадях школьников тех «нелепых хвостов ненужных цифр», которыми они пестрят и которые мы видим, например, в частном $87 : 32 = 2{,}71875$, полученном при вычислении плотности камня, вес и объём которого (87 *г* и 32 *куб. см*) найдены измерением, в то время как правильный ответ, возможный при этих приближённых данных, есть 2,7.

Ссылки на недостаток времени, будто бы препятствующий введению этих правил в школьный обиход, нельзя считать основательными: потратив несколько часов на усвоение правил округления, учитель сберегает много десятков часов благодаря той экономии вычислительной работы, какую даёт постоянное их применение. Есть другое, несравненно более существенное препятствие: распространённые задачники, в частности стабильный задачник Е. С. Березанской, составлены без учёта этих правил, и учитель, желающий применять их, вынужден вносить поправки и в текст многих задач, и в приведённые в книге ответы.

Второй круг сведений, а именно: всё, что относится к низшей и высшей границам неизвестного числа, лучше относить к старшим классам семилетней школы, VI и VII. Эти сведения легко увязываются с простейшими свойствами неравенств, с которыми учащиеся имеют дело уже в VII классе. Теоретические основы способа границ столь просты, что овладеть практическим его применением легко может каждый ученик, не тратя особых часов на её изучение, просто в порядке решения задач.

Третий круг сведений, а именно: способ границ погрешностей, овладение которым столь важно для успешной работы в любой вузовской лаборатории, представляет собой значительно бо́льшие трудности, и в настоящее время, ввиду отсутствия в действующей программе соответствующего раздела, проходиться в средней школе не может, хотя само понятие границы абсолютной и относительной погрешности так просто, что доступно уже в V классе. Вполне осуществимо и очень полезно, чтобы уже пятиклассники понимали смысл таких выражений, как 125 (± 1) *мм*, 400 ($\pm$ 2%) *г* и т. д. Изучение же теорем о границах абсолютной и относительной погрешности, уменье применять их при решении задач, выявление их связи с правилами подсчёта цифр — всё это пока приходится рекомендовать только как прекрасный материал для индивидуальных заданий более сильным учащимся и для кружковой работы.

Глава VI

ОТНОШЕНИЯ И ПРОПОРЦИИ. ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

§ 30. Понятие отношения двух чисел.

Существуют два толкования понятия отношения чисел. Согласно первому, более старому и более узкому, отношение двух чисел есть частное этих чисел в тех и только тех случаях, когда взятые числа либо оба отвлечённые (отношение 15 к 3 есть $15 : 3 = 5$, отношение 15 к 20 есть $15 : 20 = 0{,}75$), либо оба именованные однородные, т. е. выражают значение одной и той же величины, притом в одних и тех же единицах, например, отношениие 5 *см* к 2 *см* есть $5 : 2 = 2{,}5$, отношение 1 *г* к 1 *кг* есть $1 : 1000 = 0{,}001$. При таком понимании термина «отношение» всякое отношение есть частное, но не всякое частное есть отношение; например, в случае деления 20 *кг* на 5 мы имеем частное 20 *кг* : 5 = 4 *кг*, которое не является отношением; частное является отношением только тогда, когда представляет собой отвлечённое число. Второе, более современное и более широкое толкование понятия отношения чисел объявляет его тождественным понятию их частного: всякое отношение чисел есть частное этих чисел, всякое частное этих чисел есть их отношение. Последовательное проведение такого толкования предполагает отказ от записи 20 *кг* : 5 и замены её записью $\frac{20}{5}$ (*кг*), означающей, что искомое число килограммов равно отношению числа 20 к числу 5.

Более широкое понимание понятия отношения находим в последних изданиях арифметики Киселёва. Его обоснованию посвящена специальная статья проф. А. Я. Хинчина [II, 34].

В пользу его говорят и следующие соображения. Если бы речь шла об арифметике только как науке о числах независимо от её приложений, то термин «отношение» можно бы было вовсе отбросить, всегда заменяя его термином «частное». Но абстрактное учение о числах нельзя оторвать от учения об их приложениях к изучению самых разнообразных конкретных величин, тем более, что в школьном курсе математики, как мы много раз подчёркивали, эти приложения ставятся на первый план, являются в большинстве случаев даже отправными пунктами работы, приводящей к пониманию абстрактных истин. Отношение любых однородных конкретных величин, например отрезков, определяется просто как отношение численных значений этих величин, выраженных в одинаковых единицах: отношение отрезков длиной 20 *см* и 15 *см* есть частное $20 : 15 = 1\frac{1}{3}$. Но вполне законно и рассмотрение отношения неоднородных величин, приводящего к новым величинам. Так отношение 20 *м* к 4 секундам выражает значение новой величины — скорости равномерного движения, представляемое опять-таки частным чисел 20 и 4, равным 5, в единицах скорости, в данном случае в метрах в секунду. В связи с этим надо признать правильность записи 20 *см* : 4 *сек* $= 5 \frac{см}{сек}$ или записи 16 *г* : 20 *см*^{3} $= 0{,}8 \frac{г}{см^3}$. В последнем случае отношение массы к объёму есть новая величина — плотность. Напомним, что подобный же процесс перехода к новым величинам и новым единицам для их измерения мы имеем и при умножении чисел: например, 5 *см* · 4 *см* = 20 *см*^{2}; 10 рабочих · 8 часов = 80 рабочих часов. Подчёркивая, что каждый раз речь идёт о действии (делении или умножении) над числами, мы истолковываем результаты как выражения значений новых величин.

Несколько иная точка зрения на понятие отношения развита в статье проф. М. К. Гребенчи [II, 16]. Однако её выводы относительно практического использования понятия отношения не противоречат тому, что было только что сказано об отношении чисел, выражающих значения каких угодно величин.

Объяснительная записка к действующей программе математики для средней школы говорит: «Понятие об отношении вводится уже при сравнении целых чисел; оно получает надлежащее обобщение после введения дробей. В обоих случаях смысл этого понятия выясняется на материале соответствующих задач, связанных с прямо пропорциональными величинами» (стр. 8 издания 1952 г.).

По существу с понятием отношения дети встречаются уже в начальной школе, когда ставится вопрос о том, во сколько раз одно число больше или меньше другого. Но пока не изучены дроби, позволяющие выполнять всякое деление, кроме деления на нуль, нельзя утверждать, что всякие два числа имеют определённое отношение: не зная дробей, мы не можем говорить об отношении 5 к 4. Но умея делить любое целое или дробное число на любое целое или дробное, мы получаем возможность находить отношение двух произвольных чисел. Обобщая понятие «больше во столько-то раз», говорят, что отношение, равное, например, $3\frac{1}{7}$, показывает, что первое число больше второго в $3\frac{1}{7}$ раза. Отношение, равное какой-либо дроби, например $\frac{3}{4}$ или $\frac{7}{5}$, показывает, что первое число равно соответствующей дроби, а именно: $\frac{3}{4}$ или $\frac{7}{5}$ второго.

Разыскание отношения, т. е. частного двух чисел, является одним из способов их сравнения. Наряду с ним употребляется и другой способ сравнения — через вычисление их разности. В связи с этим в старых учебниках арифметики можно встретить термины «арифметическое, или разностное, отношение», «геометрическое, или, кратное отношение». Эти термины в настоящее время вовсе вышли из употребления, термин «отношение» всегда употребляется в смысле частного (по-старому — геометрическое, или кратное, отношение), и опасность смешения двух способов сравнения чисел через вычисление их разности и их частного возникает только в связи с употреблением выражений «больше или меньше на столько-то», «больше или меньше во столько-то раз». Учителю надо внимательно следить за тем, правильно ли понимается точный смысл этих выражений.

Отметим, что наряду с термином «отношение» часто употребляется и термин «процентное отношение», означающий произведение отношения на 100. Так, например, отношение числа 6 к числу 8 равно 0,75, а процентное их отношение 75%.

§ 31. Пропорции.

Вопрос о пропорциях рассматривается в школьном курсе математики дважды: первый раз в VI классе в курсе арифметики в порядке подготовки к изучению пропорциональной зависимости, второй раз в VII классе в курсе алгебры. Этот нежелательный разрыв небольшого и нетрудного вопроса на две части связан с тем, что раньше изучение пропорциональной зависимости входило в программу V класса, где применение буквенных обозначений встречает затруднения, а потому изучение пропорций завершалось только в VII классе.

По действующей программе в VI классе проходится только определение пропорции, основное её свойство, нахождение неизвестного члена пропорции. На эти три вопроса отводится 10 часов занятий в школе и 5 часов домашней работы школьников, что более чем достаточно. Этот избыток времени позволяет решить большое количество задач на пропорциональные величины, начиная тем самым работу по следующей теме. Раздел учебника арифметики Киселёва, посвящённый пропорциям, используется в VI классе не полностью: изучение вопросов о среднем геометрическом, о производных пропорциях, о свойстве равных отношений программой VI класса не предусмотрено, их можно целиком перенести в курс алгебры. Вопрос о среднем арифметическом включён в этот раздел без других оснований, кроме традиции: раньше, когда наряду с «разностным отношением» изучалась и «разностная пропорция» $a - b = c - d$, среднее арифметическое двух чисел появлялось как средний член «непрерывной» разностной пропорции $a - x = x - b$, $x = 0{,}5\,(a + b)$, теперь же оно с пропорцией ничем не связано. Со средним арифметическим любого числа чисел учащиеся встречаются теперь гораздо раньше.

Обычное определение пропорции как равенства двух отношений полезно сопровождать указанием на то, что четыре числа, её составляющих, называются *пропорциональными*. Утверждая, что каких-нибудь четыре числа, например, 8, 6, 4, 3, пропорциональны, мы тем самым утверждаем, что из них можно составить пропорцию, причём эти числа берутся в том порядке, в каком они указываются, а именно составляется отношение первого из них ко второму и третьего к четвёртому. Вопрос о том, является ли пропорция $8 : 6 = 4 : 3$, какую можно составить из этих четырёх чисел, единственной, остаётся на первых порах открытым. Необходимо усвоение определений терминов «пропорция», «члены пропорции», «члены крайние и средние», «пропорциональные числа», «четвёртое пропорциональное число» и рассмотрение ряда примеров — в этом состоит первый шаг в деле изучения пропорций. Запись $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ короче и удобнее, чем запись $8 : 6 = 4 : 3$, но на практике употребительны обе, и пользоваться надо обеими. В VI классе никаких затруднений не вызовет и запись пропорции в общем виде $a : b = c : d$ или $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Второй шаг — вывод основного свойства пропорции, выражаемого равенством $ad = bc$. Проверив его на ряде примеров, дают логическое его доказательство, основанное на том, что оба равных отношения останутся равными и после умножения каждого из них на произведение bd. Учебник Киселёва проводит это доказательство на частном числовом примере, но в VI классе вполне приемлемо и проведение рассуждения для пропорции, записанной в общем виде. Очень желательно остановиться на понятиях проверки в частном случае и доказательства для общего случая, на понятии теоремы, на выделении условия и заключения. Одновременно с этими понятиями учащиеся VI класса имеют дело и в курсе геометрии, и параллельное рассмотрение их в курсе арифметики только поможет лучше их усвоить.

Доказав теорему, что в случае пропорциональности четырёх чисел a, b, c, d произведения ad и bc равны, естественно переходим к вопросу, верно ли обратное предложение: если имеется равенство произведений $ad = bc$, можно ли отсюда заключить, что числа a, b, c, d пропорциональны, т. е. что верна пропорция $a : b = c : d$? После проверки на частных примерах проводится доказательство в общем виде, столь же простое, как доказательство первого предложения. Сопоставление прямого и обратного предложений в курсе арифметики приходилось делать и раньше, например при изучении признаков делимости, но впервые общий вопрос об истинности обратного предложения ставится только в курсе геометрии, в разделе «Введение», который проходится в начале шестого года обучения. Вполне возможно и желательно его рассмотрение и в курсе арифметики при изучении основного свойства пропорции, чем завершается третий его шаг.

Четвёртый шаг образует доведение до конца вопроса о пропорциях, какие можно получить, имея четыре пропорциональных числа, например, 8, 6, 4, 3 или в общем виде a, b, c, d. Если эти числа пропорциональны, то, согласно определению, имеем $8 : 6 = 4 : 3$ и $a : b = c : d$, но тогда в силу первой теоремы имеем также равенства $8 \cdot 3 = 6 \cdot 4$ и $ad = bc$, которые не нарушаются ни от перестановки сомножителей в одном или в обоих произведениях, ни от перестановки произведений. Вместо одного имеем теперь восемь равенств, а именно:

$8 \cdot 3 = 6 \cdot 4$, $ad = bc$ (исходное равенство)
$3 \cdot 8 = 6 \cdot 4$, $da = bc$ (переставлены сомножители в левой части)
$8 \cdot 3 = 4 \cdot 6$, $ad = cb$ (переставлены сомножители в правой части)
$3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$, $da = cb$ (переставлены сомножители в обеих частях)

$6 \cdot 4 = 8 \cdot 3$, $bc = ad$ (переставлены произведения)
$4 \cdot 6 = 8 \cdot 3$, $cb = ad$ (переставлены произведения и сомножители в левой части)
$6 \cdot 4 = 3 \cdot 8$, $bc = da$ (переставлены произведения и сомножители в правой части)
$4 \cdot 6 = 3 \cdot 8$, $cb = da$ (переставлены произведения и сомножители в обеих частях)

Каждое из этих восьми равенств приводит к новой пропорции, и всего, таким образом, из каждых четырёх пропорциональных чисел можно составить восемь пропорций. Отметим (к сведению учителя, но не для выяснения ученикам), что из четырёх пропорциональных чисел a, b, c, d можно образовать, как известно, всего $4! = 24$ перестановки, но только восемь из них приводят к пропорциям, так как остальные не дают равенства $ad = bc$.

Вопрос о получении всех восьми пропорций для данных четырёх пропорциональных чисел даёт возможность упражнять шестиклассников в проведении посильного для них и довольно длинного рассуждения, что очень полезно.

Пятый и последний (для VI класса) шаг в изучении пропорции — разыскание неизвестного члена пропорции, т. е. получение четвёртого пропорционального к трём данным произвольным числам,— проходит без затруднений.

§ 32. Прямая и обратная пропорциональность.

Усвоение идеи функциональной зависимости, как теперь общепризнано, является одной из основных задач общеобразовательного курса математики. Уже при повторении пройденного в начальной школе приходится заниматься вопросом об изменении суммы, разности, произведения, частного в зависимости от изменения данных; в дальнейшем встаёт вопрос об изменении значения дроби с изменением её членов. В этих двух случаях школьники впервые встречаются с конкретными примерами функциональной зависимости, а именно: зависимостями, выражаемыми формулами: $y = x + a$, $y = x - a$, $y = a - x$, $y = ax$, $y = a : x$, хотя ни этих формул, ни соответствующих терминов они ещё не знают. Знакомство с этими функциями сводится к изучению ряда простейших их свойств, выражаемых известными предложениями вроде следующего: если к одному слагаемому прибавить несколько единиц, а другие оставить без изменения, то сумма увеличится на столько же единиц. Очень важно не только усвоить ряд предложений этого рода, но и научиться пользоваться ими практически при производстве вычислений, как уже отмечалось выше.

Несколько более углубленное изучение двух случаев функциональной зависимости, а именно прямой и обратной пропорциональности ($y = ax$ и $y = a : x$), по давней традиции ведётся в заключительной части курса арифметики (по существующей программе — в VI классе, с отведением на это 22 уроков). Особое внимание к этим двум функциям вполне оправдано тем исключительно важным значением, какое они имеют для арифметических расчётов, встречающихся на каждом шагу и в быту, и в любой производственной деятельности.

Принципиальная сторона этого раздела программы включает общую идею зависимости между двумя величинами, усваиваемую — конечно, на конкретных примерах — как соответствие между двумя последовательностями чисел, и выделение двух специальных зависимостей — прямой пропорциональности (функции $y = ax$) и обратной пропорциональности (функции $y = a : x$). Весьма желательно добавить сюда знакомство с понятиями возрастающей и убывающей функций (монотонными функциями), частными случаями которых являются прямая и обратная пропорциональность. Учащиеся склонны смешивать понятие возрастающей величины и понятие величины, прямо пропорциональной другой. Это смешение устраняется, если чётко выделить прямую пропорциональность из всех возрастающих величин указанием на характерное её свойство: возрастание в то же число раз, в какое возрастает значение другой величины, т. е. равенство отношений соответствующих значений, наличность пропорции $y_1 : y_2 = x_1 : x_2$ для любых двух значений одной величины (x_1 и x_2) и соответствующих значений другой (y_1 и y_2). Аналогичное положение имеет место с обратной пропорциональностью. Практически дело сводится к тому, чтобы разобрать ряд примеров таких возрастающих и убывающих зависимостей, когда наряду с пропорциональностью встречаются и другие виды зависимостей, чтобы учащиеся твёрдо усвоили ту мысль, что не всякая величина, возрастающая при возрастании другой величины, ей прямо пропорциональна, и не всякая величина, убывающая при возрастании другой, ей обратно пропорциональна. Подходящие примеры в большом выборе имеются среди величин, с которыми учащиеся уже имели дело раньше. Например, сопоставление стороны квадрата, его периметра (границы) и его площади, осуществляемое построением следующей таблицы,

Сторона квадрата	1	2	3	4	5	6	7	8
Его периметр	4	8	12	16	20	24	28	32
Его площадь	1	4	9	16	25	36	49	64

даёт прекрасный пример трёх возрастающих величин, из которых вторая (периметр) прямо пропорциональна первой (стороне), а третья не прямо пропорциональна ей. Другой пример того же рода даёт рассмотрение изменения дроби при увеличении её знаменателя во столько-то раз и на столько-то единиц, например:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$y=\frac{3}{4x}$	0,75	0,375	0,25	0,1875	0,15	0,125	0,1071...	0,09375	0,0833...
$y=\frac{3}{4+x}$	0,6	0,5	0,428...	0,375	0,333...	0,3	0,272...	0,25	0,230...

Здесь вторая и третья величины убывают с возрастанием первой, но обратно пропорциональной для первой является только вторая.

Желательно, чтобы учитель подбирал примеры на пропорциональную зависимость из областей, знакомых и близких интересам детей. Привыкнув вдумываться в существо дела, учащиеся не будут делать распространённой ошибки, механически признавая всякую возрастающую величину прямо пропорциональной, а всякую убывающую — обратно пропорциональной другой величине.

В учебнике арифметики А. П. Киселёва важному вопросу о том, что такое прямо и обратно пропорциональные величины, уделено мало внимания, и ограничиваться тем, что там имеется, нельзя.

Отметим, что весьма желательно уяснение взаимности зависимости между пропорциональными величинами: если одна величина прямо или обратно пропорциональна другой, то эта другая в свою очередь прямо или обратно пропорциональна первой.

§ 33. Задачи на пропорциональные величины. Тройные правила.

Каковы бы ни были два значения x_1 и x_2 одной величины и соответствующие им значения y_1 и y_2 другой величины, прямо пропорциональной первой, всегда имеет место — в силу самого определения пропорциональности — пропорция $x_1 : x_2 = y_1 : y_2$. В случае обратной пропорциональности эта пропорция имеет иной вид, а именно: $x_1 : x_2 = y_2 : y_1$. Следовательно, зная три из четырёх чисел x_1, x_2, y_1, y_2, мы всегда в состоянии, используя основное свойство пропорции, найти четвёртое. Записывая значения первой величины в один столбик, а соответствующие значения второй — рядом с ними в другой, имеем следующую схему записи для решения задачи отыскания y_2 по данным x_1, y_1, x_2:

1-я величина	2-я величина	Если 1-я и 2-я прямо пропорциональны, то	Если 1-я и 2-я обратно пропорциональны, то
x_1 x_2	y_1 y_2	$y_2 = \frac{y_1 \cdot x_2}{x_1}$	$y_2 = \frac{y_1 \cdot x_1}{x_2}$

Легко видеть, что при такой записи данных имеет место следующее простое правило: чтобы получить искомое значение (y_2), надо известное значение **той же величины** (y_1) умножить на отношение соответствующих значений второй величины, т. е. на $x_2 : x_1$, в случае прямой пропорциональности, и на обратное значение этого отношения, т. е. на $x_1 : x_2$, в случае обратной пропорциональности.

Само собой разумеется, что не следует торопиться сообщать учащимся это правило, именуемое «простым тройным правилом». Предварительно надо добиться от них уменья составлять и решать соответствующие пропорции.

Наряду с этим «способом пропорций» употребляется и «способ приведения к единице», достаточно ясно и полно изложенный в учебнике Киселёва. Он имеет то преимущество перед способом пропорций, что заставляет больше вдумываться в существо зависимости между рассматриваемыми величинами и требует проведения некоторого рассуждения. Необходимо, чтобы оба способа были прочно усвоены. В задачах встречается также зависимость между более чем двумя величинами, x, y, z, ..., w. Если при этом, например, говорится, что величина w прямо пропорциональна x и y и обратно пропорциональна z, то это следует понимать так, что w есть функция трёх переменных x, y и z, имеющая вид:

$$w = k\frac{xy}{z}.$$

Пусть известны значения x_1, y_1, z_1 (старые значения) и соответствующее им значение w_1, и требуется найти значение w_2, соответствующее значениям x_2, y_2 и z_2 (новые значения).

Из формул $w_2 = k\frac{x_2y_2}{z_2}$ и $w_1 = k\frac{x_1y_1}{z_1}$ получаем посредством почленного деления:

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{y_2}{y_1} \cdot \frac{z_1}{z_2},$$

откуда:

$$w_2 = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{y_2}{y_1} \cdot \frac{z_1}{z_2} \cdot w_1.$$

Мы обнаружили, что значение w_2 получается из w_1 путём умножения на произведение отношений новых и старых значений независимых переменных x, y и z, причём эти отношения берутся прямыми для тех переменных, зависимость от которых является прямо пропорциональной, и обратными — для обратно пропорциональных величин. Иными словами, в числителе дроби, изображающей w_2, записываются новые значения величин, прямо пропорциональных w_2, и старые значения величин, обратно пропорциональных; в знаменателе ставятся старые значения прямо пропорциональных и новые значения обратно пропорциональных (так называемое «сложное тройное правило»).

В классе возможны три способа решения подобных задач:

1) без применения каких бы то ни было специальных правил, 2) способом «приведения к единице», 3) способом «сложного тройного правила».

Рассмотрим три указанных способа на примере, решая следующую задачу.

«За энергию, потреблённую 25 электролампочками одного здания по 40 *вт* каждая, горевшими ежедневно в среднем по 5,5 час. в течение 16 дней, пришлось уплатить 22 руб. Сколько часов в день в среднем горели 18 электролампочек по 60 *вт* каждая, установленные в другом здании, если за них при том же тарифе за 31 день пришлось уплатить 28 руб. 50 коп.?»

Здесь запись *вт* является общепринятым сокращением слова *ватт*. Дальше использованы аналогичные сокращения терминов *ватт-час*, *киловатт-час*, *киловатт*.

1-й способ:

Все лампочки 1-го здания ежедневно потребляли:

$$40 \cdot 25 \cdot 5{,}5 = 5\,500 \text{ (вт-ч)} = 5{,}5 \text{ (квт-ч)}.$$

За 16 дней потреблено:

$$5{,}5 \cdot 16 = 88 \text{ (квт-ч)}.$$

Тариф (стоимость 1 *квт-ч*):

$$22 : 88 = 0{,}25 \text{ (руб.)} = 25 \text{ (коп. за 1 квт-ч)}.$$

Количество энергии, потреблённой во 2-м здании за 31 день:

$$28 \text{ руб. } 50 \text{ коп.} : 0{,}25 \text{ руб.} = 114 \text{ квт-ч}.$$

Количество энергии, потреблённой во 2-м здании за 1 день:

$$114 : 31 = 3{,}677\ldots \approx 3{,}68 \text{ (квт-ч)}.$$

Общая мощность лампочек 2-го здания:

$$60 \cdot 18 = 1\,080 \text{ (вт)} = 1{,}08 \text{ (квт)}.$$

Средняя продолжительность ежедневного горения лампочек во 2-м здании:

$$3{,}68 : 1{,}08 = 3{,}408\ldots \approx 3{,}41 \text{ (часа, или 3 часа 25 мин.)}.$$

2-й способ (приведение к единице):

Записываем условия задачи в виде такой схемы:

	Число лампочек	Мощность каждой	Число часов горения в день	Число дней	Уплачено
1-е здание...	25	40 *вт*	5,5 час.	16	22 руб.
2-е здание...	18	60 *вт*	*x* час.	31	28 руб. 50 коп.

Проводя рассуждение, аналогичное тому, какое со всеми деталями проведено в § 208 учебника Киселёва, получаем:

$$x = \frac{5{,}5 \cdot 25 \cdot 40 \cdot 16 \cdot 28{,}5}{18 \cdot 60 \cdot 31 \cdot 22} \text{ час.},$$

или, после упрощений, $x = \frac{950}{279} = 3{,}405\ldots \approx 3{,}41$ часа, или 3 часа 25 мин.

3-й способ (по сложному тройному правилу):

Замечая, что число часов ежедневного горения прямо пропорционально плате за энергию (при постоянстве числа лампочек, их мощности и числа дней) и обратно пропорционально числу лампочек, мощности каждой и числу дней горения (при условии, что меняется только одно из этих условий, а два других, а также и плата за энергию остаются неизменными), получаем, на основании сложного тройного правила:

$$x = \frac{28{,}5 \cdot 25 \cdot 40 \cdot 16}{22 \cdot 18 \cdot 60 \cdot 31} \cdot 5{,}5,$$

т. е. выше написанный результат.

Из всех трёх способов третий быстрее всего приводит к цели, но если он базирует только на запоминании и результат не осмысливается учащимся, то лучше к нему не прибегать. Достоинствами первого и второго способов является то, что они исключают опасность формального усвоения. Желательно на первых порах каждую задачу решать всеми тремя способами, а в дальнейшем предоставить выбор способа самим учащимся.

Подчеркнём, что каждый из этих трёх способов предполагает, что все величины, о которых идёт речь в задаче, пропорциональны (прямо или обратно) той, значение которой разыскивается, а значит, и пропорциональны друг другу. Невнимание к этой стороне дела может привести к грубым ошибкам.

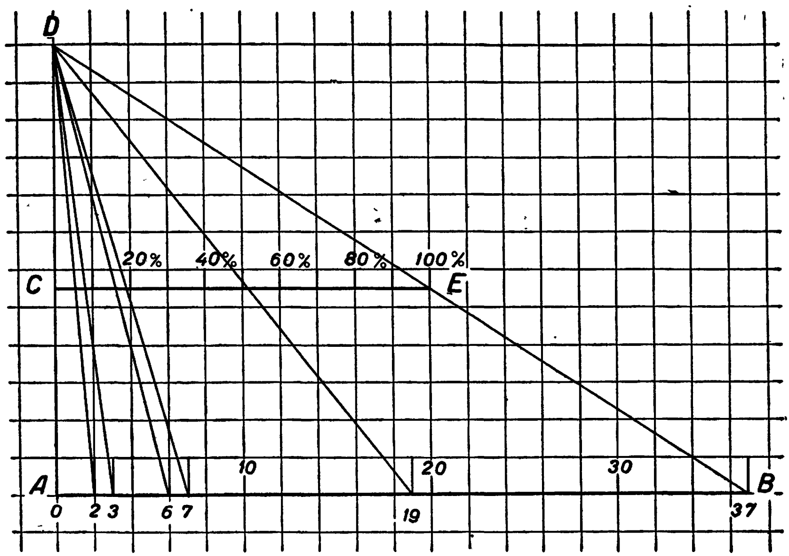
§ 34. Задачи на пропорциональное деление.

В дореволюционных руководствах и задачниках по арифметике наряду с «тройным правилом» рассматривался ещё ряд правил: «правило процентов», «правило учёта векселей», «правило пропорционального деления», «правило смешения» и др. Бытовая и особенно торговая практика прежнего времени приводила к некоторым типическим задачам, по существу очень простым, но всё же выходившим за рамки обычных житейских числовых расчётов. Их считали нужным рассматривать в школах, указывая схему их решения в виде специальных правил.

Добиваясь сознательности в решении всевозможных задач, советская методика математики придаёт весьма мало значения подобным правилам: в подавляющем большинстве случаев все задачи, допускающие решение на основе таких правил, решаются без затруднений и без них, если, конечно, есть вообще уменье решать задачи. В случаях, представляющих особые трудности, естественно использовать универсальный метод решения, а именно метод уравнений, относя такие задачи в курс алгебры. Те типичные задачи, для которых были разработаны специальные правила и которые в прежние времена представляли интерес для купцов и ростовщиков, в условиях советского общественного строя потеряли всякий смысл. Некоторые операции, о которых шла речь в таких задачах, являются в наше время уголовно наказуемыми деяниями. Таково, например, положение в задаче № 2333 из задачника Верещагина [II, 13]: «Виноторговец купил несколько вёдер вина, заплатив по 12,8 руб. за ведро. Разбавив всё купленное вино 9-ю вёдрами воды, он стал продавать ведро смеси по 11,5 руб., вследствие чего получил 51,5 руб. прибыли от продажи всего вина. Сколько вёдер вина первоначально было куплено?»

Из всех этих правил некоторое (весьма скромное) значение сохранило до настоящего времени только тройное правило, рассмотренное в предшествующем параграфе.

«Правило пропорционального деления», облегчавшее в прежнее время расчёты по разделу денежных сумм, получаемых совместно



Фиг. 4.

торговцами-компаньонами или переходящих по наследству, потеряло в настоящее время всякое значение.

Задачи этого типа (но совершенно иного конкретного содержания) встречаются и в современной практике, но они легко решаются без специального правила. В учебнике арифметики Киселёва мы имеем решение нескольких типических задач на деление чисел, прямо и обратно пропорциональных данным числам. Решение таких задач предусмотрено программой, и надо обеспечить уменье решать аналогичные задачи, в достаточном выборе представленные в задачнике Березанской. Желательно дополнительно рассмотреть также удобный и вполне доступный учащимся VI класса графический способ решения подобных задач, который разъясним на следующем примере.

«За выполнение контрольной работы шестеро учеников класса получили оценку «5», девятнадцать «4», семеро «3», трое «2», двое работы не писали. Сколько процентов от общего числа учеников класса составляет число получивших каждую оценку?» Задача сводится к делению 100% на 5 (неравных) частей, пропорциональных числам 6, 19, 7, 3, 2, составляющим в сумме 37.

1-й способ (графический). На клетчатой (тетрадной) бумаге откладываем отрезок AB в 18,5 делений (фиг. 4), принимая его за изображение 37 единиц (масштаб: в 1 делении 2 единицы), и на нём от общего начала в точке A откладываем отрезки, изображающие в этом же масштабе интересующие нас числа 6, 19, 7, 3, 2. Взяв произвольную точку D по возможности дальше от AB на перпендикуляре к AB, проведённом через A, ищем такой отрезок CE, параллельный AB, который имел бы удобную для отсчёта процентов длину (точка C берётся на AD). На фигуре 4 взят отрезок CE длиной 10 делений, так что каждое его деление выражает 10%, но можно было бы взять, например, отрезок длиной 20 делений (ниже AB); тогда каждое деление выражало бы 5%. Остаётся соединить точку D с концами всех отрезков, отложенных по AB, и сделать отсчёты точек пересечения с CE. Как видим, фигура 4 даёт такие результаты:

числа	6	19	7	3	2,	всего	37,
в %	16%	51%	19%	8%	6%,	всего	100%.

Для контроля приводим арифметическое решение той же задачи.

2-й способ (вычислительный).

Оценка	Число учеников	То же в процентах	То же после округления до целых
5	6	$2{,}703 \cdot 6 = 16{,}218\%$	16%
4	19	$2{,}703 \cdot 19 = 51{,}357\%$	51%
3	7	$2{,}703 \cdot 7 = 18{,}921\%$	19%
2	3	$2{,}703 \cdot 3 = 8{,}109\%$	8%
Не писали	2	$2{,}703 \cdot 2 = 5{,}406\%$	6%
Всего	37	100,011%	100%

$100 : 37 =$
$= 2{,}7027\ldots \approx$
$\approx 2{,}703$

Сумма 100,011, полученная в третьем столбце с целью контроля, законно отличается от 100: округлив число 2,7027 ... до четырёх значащих цифр, мы получили 2,703, что больше точного значения почти на 0,0003, и этот избыток вошёл в итог в 37-кратном размере, что и даёт избыток итога, составляющий $0{,}0111 \approx \approx 0{,}011$.

Округляя полученные в третьем столбце произведения до целых, мы должны в соответствии с правилом округления заменить 5,406 через 5, но тогда общий итог оказался бы не 100%, а 99%: производимые несколько раз округления по недостатку не компенсируются однократным округлением по избытку. Поэтому, в отступление от правила, заменяем округление по недостатку округлением по избытку в одном случае, а именно там, где такая замена даёт наименьшее искажение.

Усвоение графического способа решения представляет собой большую ценность и в силу практического его значения, и как некоторая геометрическая пропедевтика, и как средство поднять интерес учащихся к арифметике.

Отметим, что при решении задач графическим и вычислительным способами начинать лучше с графического, дающего менее точные результаты, чтобы избежать невольной «подгонки» результатов отсчётов по графику к уже известным более точным значениям искомых величин.

§ 35. Арифметические упражнения и функциональная пропедевтика в курсе алгебры.

Программа курса арифметики предусматривает знакомство с двумя особенно важными случаями функциональной зависимости: с прямой и обратной пропорциональностью, но и при дальнейшем изучении функциональной зависимости, относящейся уже к курсу алгебры, чисто арифметическая сторона дела играет большую роль. Отметим один ценный вид арифметических упражнений, разработанный членом-корреспондентом Академии педагогических наук проф. В. Л. Гончаровым [II, 15 а), б), в)]. Здесь имеется в виду вычисление числовых значений буквенного выражения, проводимое для ряда значений входящих в него букв с рациональным разделением труда между участниками работы. В указанной статье проф. Гончарова содержится живое описание урока в VIII классе, проведённого без какой бы то ни было предварительной подготовки и посвящённого вычислению значений выражения

$$y=\sqrt{\frac{1+x+x^2}{1+x^2}}$$

при различных значениях x, взятых между 0,5 и 1,5 с точностью до тысячных. Требовалось найти значения y, тоже с точностью до тысячных. Найденные результаты контролировались построением точек с прямоугольными координатами x и y на классной доске: при безошибочном вычислении точки должны расположиться по некоторой дуге плавной кривой. Проф. Гончаров подробно рассматривает значение такого рода упражнений и методику их проведения. Видимая для учащихся цель их — тренировка в выполнении арифметических операций, но одновременно незаметно для учащихся достигается и вторая, ещё более важная цель: накопляется запас представлений о конкретных случаях функциональной зависимости, о чём будет идти речь в III части. Отсылая читателя к циклу содержательных работ проф. В. Л. Гончарова, отметим только, что обобщение многих арифметических задач, решаемых обычно в V и VI классах, приводит к разным функциональным зависимостям, которые могут служить темами для такого рода упражнений. Приведём один пример, который можно рассмотреть и в курсе арифметики (без формул).

«Что выгоднее для трудящихся: повышение зарплаты на 20% при сохранении неизменными всех цен или снижение всех цен на 20% при сохранении зарплаты неизменной?»

В первом случае трудящийся будет в состоянии купить на свою зарплату товаров на 20% больше, чем раньше, во втором же он купит их больше во столько раз, во сколько раз старые цены (100%) больше новых (100%—20% = = 80%), т. е. в 100 : 80 = 1,25 раза, или на 25% больше, чем раньше. Таким образом, повышение *реальной зарплаты*, т. е. количества товаров, какое трудящийся может купить на свою зарплату, во втором случае больше, чем в первом (25% против 20%).

Обобщая задачу, сравним повышение реальной зарплаты при повышении денежной зарплаты на x% и при снижении цен на x%. В первом случае оно составляет $x\%$, а во втором $\left(\frac{100}{100-x}-1\right)\cdot 100$, или $100x:(100-x)\%$. Представляя последнюю дробь в виде $x+\frac{x^2}{100-x}$, замечаем, что во втором случае оно всегда больше, чем в первом, и разница выражается формулой $= y=\frac{x^2}{100-x}$. Для проверки берём случай $x=50\%$, когда формула даёт $y=50\%$, как и должно быть: при снижении цен на 50% реальная зарплата повышается вдвое, т. е. на 100%, и разница между вторым и первым случаем есть $100\%-50\%=50\%$.

Рекомендуется завершить решение этой поучительной задачи составлением таблицы значений функций $y=x$ и $y=\frac{100x}{100-x}$, выражающих прирост реальной зарплаты в обоих рассматриваемых случаях, и вычерчиванием графиков этих функций на одном чертеже.

СПИСОК КНИГ И СТАТЕЙ ПО ВОПРОСАМ, ОТНОСЯЩИМСЯ КО 2-й ЧАСТИ

1. Александров И. И. и Александров А. И., Методы решения арифметических задач, под редакцией И. К. Андронова, Учпедгиз, 1953.

2. Александров П. С. и Колмогоров А. Н., Свойства неравенств и понятие о приближённых вычислениях, «Математика в школе», 1941, № 2.

3. Андронов И. К., Арифметика натуральных чисел. Учпедгиз. 1953.

4. Андронов И. К. и Брадис В. М., Величина и её значение. «Математика в школе», 1951, № 2.

5. Арнольд И. В., а) Теоретическая арифметика, Учпедгиз, 1938; б) Теория чисел, Учпедгиз, 1939; в) Принципы отбора и составления арифметических задач, «Известия Академии педагогических наук РСФСР», 1946, вып. 6; г) Арифметика. Статья в III томе Большой советской энциклопедии, изд. 2.

6. Архимед, Исчисление песчинок (псаммит). Перевод, краткий обзор работ Архимеда и примечания проф. Попова Г. Н., ГТТИ, 1932.

7. Барсуков А. Н., К вопросу о порядке действий, «Математика в школе», 1941, № 3.

8. Белоновский П. Д., Основы теоретической арифметики, Учпедгиз, 1933.

9. Березанская Е. С., Методика арифметики, Учпедгиз, 1947.

10. Берман Г. Н., а) Счёт и число, Гостехиздат, 1949, издание третье; б) Число и наука о нём. Общедоступные очерки по арифметике натуральных чисел, Огиз, Гостехиздат, 1949; в) Приёмы счёта, Огиз, Гостехиздат, 1950.

11. Борель Э., Арифметика. Первый цикл, перевод Ал. Долгова под ред. Д. Л. Волковского, Госиздат, 1923.

12. Брадис В. М., а) Теория и практика вычислений, Учпедгиз, 1937; б) Средства и способы элементарных вычислений. Изд. Академии педагогических наук РСФСР, 1948.

13. Верещагин И., Сборник арифметических задач для средних учебных заведений мужских и женских. Ряд изданий XIX и начала XX вв.

14. Выгодский М. Я., Арифметика и алгебра в древнем мире, Гостехиздат, 1941.

15. Гончаров В. Л., а) Арифметические упражнения и функциональная пропедевтика, «Известия Академии педагогических наук РСФСР», вып. 6, 1946; б) Арифметические упражнения и функциональная пропедевтика в средних классах школы, изд. АПН РСФСР, 1947; в) Вычислительные и графические упражнения с функциональным содержанием в старших классах школы, изд. АПН РСФСР, 1948.

16. Гребенча М. К., К вопросу о понятии отношения в курсе арифметики. «Математика в школе», 1949, № 2.

17. Гребенча М. К. и Ляпин С. Е., Арифметика. Пособие для учительских институтов. Учпедгиз, 1952.

18. Делоне Б. Н., Петербургская школа теории чисел, АН СССР, 1947.

19. Депман И. Я., Меры и метрическая система. Детгиз, 1953.

20. Зайцева Н. Я., Планы уроков по арифметике в V классе. Учпедгиз, 1952.

21. Зайцева Н. Я., Зыкус А. И., Эрастова А. Н., Методические указания к преподаванию арифметики в V классе (из опыта работы). Изд. АПН РСФСР, 1953.

22. Игнатьев Е. И., Математическая хрестоматия, кн. I. Арифметика, изд. Сытина, Москва, 1913.

23. Кавун И. Н., Арифметические задачи в начальной школе. Учпедгиз, 1935.

24. Компанийц П. А., Очерки по методике преподавания математики в I—IV классах школы. Ленинградский гор. институт усовершенствования учителей, 1940.

25. Корницкий Н. Д., Производственные вопросы и задачи прикладной арифметики, ч. I (Целые числа. Десятичные дроби), Гиз, 1924; ч. 2 (Обыкновенные дроби. Арифметические правила. Технические приложения), Гиз, 1926.

26. Круповецкий Л., а) Задачи из современной жизни, «Математика в школе», 1939, № 1; б) Итоги послевоенной сталинской пятилетки на уроках арифметики, «Математика в школе», 1952, № 3.

27. Лобко П., Из истории установления метрических мер, «Математика и физика в средней школе», 1934, № 1.

28. Никитин Н. Н., а) Решение арифметических задач в начальной школе. Учпедгиз, 1948; б) Устные вычисления на уроках арифметики в V—VII классах средней школы. АПН РСФСР, 1950.

29. Перельман Я. И., а) Быстрый счёт, изд. Дома занимательной науки, Ленинград, 1941; б) Арифметические ребусы, изд. там же, 1941; в) Хрестоматия-задачник по начальной математике. Гиз, 1925; г) Занимательная арифметика, изд. «Время», Ленинград, 1932.

30. Полак И. Ф., Время и календарь. Научно-популярная библиотека Гостехиздата, 1947.

30. а) Пономарёв С. А. и Сырнев Н. И., Сборник задач и упражнений по арифметике, 1954.

31. Тулинов Б. А. и Чекмарёв Я. Ф., Арифметика для педагогических училищ, Учпедгиз, 1953.

32. Филиппов А. О., Четыре арифметических действия. Числа натуральные. Изд. «Матезис», 1909.

33. Филичев С. В. и Чекмарёв Я. Ф., Сборник задач и упражнений по арифметике для V и VI классов неполной средней и средней школы. Учпедгиз, 1949.

34. Хинчин А. Я., О понятии отношения двух чисел, «Математика в школе», 1941, № 2.

35. Циглер Ф. Т., Арифметика. Общий курс математики для рабфаков и техникумов, ч. I, Учпедгиз. 1932.

36. Чекмарёв Я. Ф. и Филичев С. В., Сборник арифметических задач для педагогических училищ, изд. 4-е, Учпедгиз, 1945.

37. Чекмарёв Я. Ф. и Эменов В. Л., Сборник арифметических задач и упражнений для устного счёта. Пособие для учителей III и IV классов начальной школы. Учпедгиз, 1945.

38. Чичигин В. Г., Методика преподавания арифметики. Пособие для учительских институтов. Учпедгиз, 1949.

39. Широков В. Ф., Сборник арифметических задач на соображение. Пособие для учителей средних школ. Учпедгиз, 1949.

40. Шнирельман Л. Г., Простые числа, Гостехиздат, 1940.

41. Шор А. Я., О решении арифметических задач. изд. АПН, 1951,

42. Шохор-Троцкий С. И., Методика арифметики. Пособие для учителей средней школы, Учпедгиз, 1935.

43. Азия А. П., К вопросу об элементах политехнизма на уроках математики. «Математика в школе», № 1 за 1954 г.

Часть третья
МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ АЛГЕБРЫ

Глава I

ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ ОБ ИЗУЧЕНИИ АЛГЕБРЫ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

§ 1. Эволюция взглядов на алгебру как науку.

Слово «алгебра» в дошедших до нашего времени работах впервые встречается в книге «Альджебр альмукабала», написанной около 820 г. н. э. Её автор — Магомет ибн Муса аль Ховарезми, т. е. Магомет сын Мусы из Хорезма (Хорезмская область находится в нынешней Узбекской ССР). Книга посвящена составлению и решению уравнений первой и второй степени. Термином «альджебр», переделанном в дальнейшем в «алгебру», в ней обозначалось действие перенесения отрицательных членов уравнения в другую его часть, а впоследствии его стали употреблять для обозначения самой науки об уравнениях.

Заметим, что в работе Магомета ибн Мусы ещё вовсе нет алгебраической буквенной символики, всё записывается словами («словесная» или «риторическая» алгебра). Так, рассматривая уравнение, которое мы записываем в виде $x^2 + 10x = 39$, он формулирует его так: «квадрат и 10 корней равны 39 единицам». Составить понятие о характере изложения у Магомета ибн Мусы можно по двум отрывкам его книги, приведённым в хрестоматии по истории математики (III, 14].

Начатки алгебры как науки об уравнениях относятся к значительно более раннему времени. Их мы находим и в древнейших памятниках математической науки Египта, где для обозначения неизвестного употреблялось особое слово «хау», т. е. куча (например, в папирусе Ахмеса имеется задача: «Две трети кучи, полкучи, одна седьмая кучи, да вся куча вместе — тридцать три; чему равна куча?»), и в клинописных текстах Вавилона, где встречаются задачи, приводящиеся даже к кубическим уравнениям, разрешаемым с помощью таблиц, и у индусов. К IV в. н. э. относится сочинение греческого математика Диофанта, носящее название «Арифметика», но целиком посвящённое уравнениям, определённым и неопределённым, разрешаемым в целых или дробных рациональных числах и относимых теперь к теории чисел. У Диофанта встречаются уже некоторые зачатки столь характерного для современной алгебры символизма: есть особый знак для обозначения неизвестного и его квадрата, есть особый знак для обозначения вычитания. Эти знаки представляют собой обычно просто сокращённую запись соответствующих терминов подобно тому, как современный символ lg есть сокращение слова logarithmus («синкопированная» алгебра).

Развиваясь дальше прежде всего как учение об уравнениях, алгебра по необходимости должна была рассматривать различные обобщения понятия числа: числа отрицательные, без которых не может быть полной теории уравнений первой степени, числа иррациональные, к которым, как и к числам мнимым, неизбежно приводит решение квадратного и кубического уравнений. Естественное стремление сделать запись выкладок, необходимых для решения уравнений, более короткой, более наглядной и легче обозримой, привело к созданию алгебраической символики: буквами стали обозначаться не только неизвестные числа, но и предполагаемые заданными; постепенно вводились символы, обозначающие различные математические операции и соотношения.

Систематическое употребление букв для записи чисел в общем виде ввёл Франсуа Виет (конец XVI в.), но его символика, как это можно видеть по отрывку из одной его работы, напечатанному в указанной выше хрестоматии, весьма далека от современной. Постепенно совершенствуясь, она принимает вполне современный вид в знаменитом учебнике члена Петербургской Академии наук Леонарда Эйлера, впервые опубликованном в 1768—1769 гг. в Петербурге на русском языке [III, 44]. У Эйлера содержание алгебры стало весьма разнообразным и включает решение уравнений лишь как одну из частей. Алгебра как учебный предмет, изучаемый в современной средней школе, отчасти воспроизводит это разнообразие содержания руководства Эйлера.

Этот школьный курс алгебры мы рассмотрим подробнее в следующем параграфе, а сейчас отметим лишь некоторые черты алгебры как науки.

Во времена Эйлера и долгое время после него основным вопросом алгебры оставалось решение алгебраических уравнений, т. е. уравнений, каждое из которых может быть приведено к такому виду: некоторый многочлен относительно одной или нескольких неизвестных равен нулю. Общие исследования, проводившиеся в связи с задачами решения уравнений, привели, однако, к тому, что теории, игравшие вначале лишь вспомогательную роль при решении уравнений, оказались имеющими значительно более широкое поле приложений как внутри самой математики, так и вне её. Именно эти теории, к которым относятся теория групп, теория колец, теория полей, линейная алгебра, теория Галуа, теория алгебраических чисел и др., и составляют основное содержание современной алгебраической науки. Основное значение для всей математики имеет теория групп, возникшая первоначально в связи с изучением условий разрешимости алгебраических уравнений в радикалах. Для математического анализа, геометрии и физики чрезвычайно большое значение имеет также линейная алгебра, возникшая на основе теории решения систем линейных алгебраических уравнений и превратившаяся со временем в теорию векторов и матриц.

Таким образом, приходится констатировать огромное расхождение между алгеброй как наукой в современном её виде и алгеброй как предметом изучения в средней школе.

§ 2. Основные линии развития школьного курса алгебры. Алгебра как учебный предмет.

В содержании современного школьного курса алгебры можно различать следующие основные линии развития, чередующиеся и переплетающиеся на протяжении тех пяти лет, пока он изучается (с VI по X классы).

I. *Развитие понятия числа.* Приступая к изучению алгебры, учащиеся знают числа натуральные, нуль и дроби. В VI классе они знакомятся с отрицательными числами, присоединение которых к ранее известным числам даёт поле рациональных чисел. В VIII классе рассматриваются (правда, очень неглубоко) числа иррациональные, образующие вместе с рациональными поле действительных чисел. Третье и для средней школы последнее расширение понятия числа происходит в X классе, когда вводятся числа мнимые, образуя вместе с действительными поле комплексных чисел.

II. *Тождественные преобразования.* Обозначение чисел буквами и тождественные преобразования буквенных выражений применяются на протяжении всего школьного курса алгебры. Анализ научного содержания понятия тождественных преобразований показывает, что к ним относят весьма разнородный материал. Здесь можно выделить следующие разделы: а) рациональные операции в числовых полях (поле рациональных, действительных и комплексных чисел), а также в кольце многочленов и в поле рациональных функций; б) радикалы и операции над ними (этот раздел по своему научному содержанию относится к алгебраическим уравнениям, так как операция извлечения корня есть, по существу, операция решения двучленных уравнений; в) элементарные трансцендентные функции (общая степенная, показательная и логарифмическая) и их функциональные свойства, использование которых нередко рассматривается как выполнение особых операций (логарифмирование, потенцирование).

III. *Уравнения.* Этот раздел школьного курса алгебры является в настоящее время несомненно важнейшим. С простейшими уравнениями имеют дело уже учащиеся VI класса. В VII классе решаются уравнения первой степени с одним неизвестным и системы таких уравнений с двумя и тремя неизвестными; но дело здесь не доводится до конца: исследование, т. е. рассмотрение всех тех случаев, какие могут представиться, откладывается до X класса. В VIII классе учащиеся знакомятся с квадратными уравнениями и такими уравнениями высших степеней, какие легко приводятся к квадратным, а также с простейшими системами уравнений второй степени. В IX классе появляются неалгебраические (трансцендентные) уравнения, а именно: показательные и логарифмические, а в X — учащиеся доводят до конца вопрос о решении уравнений первой и второй степени (исследование!) и знакомятся с решением некоторых двучленных и трёхчленных уравнений, а также с немногими общими теоремами об алгебраических уравнениях.

IV. *Функции*. Общепризнано, что изучение простейших функций должно занимать центральное место в школьном курсе алгебры, но действующая ныне программа математики для средней школы реализует этот принцип лишь частично. С понятием функциональной зависимости учащиеся впервые встречаются в VIII классе, где на тему «Функции и их графики» программа отводит 10 часов. В IX классе рассматриваются показательная и логарифмическая функции, в X — некоторые общие свойства целых рациональных функций (теорема Безу и её следствия). Однако уже в программе VI и VII классов имеется ряд пунктов, теснейшим образом связанных с понятием функциональной зависимости и подготовляющих понимание этого понятия: графики температуры, графики функций $y = ax$, $y = ax + b$ и др. Вопросы, способствующие уяснению понятия функции, этого важнейшего понятия современной математической науки, можно ввести почти во все другие разделы школьного курса алгебры.

В указанные четыре рубрики укладывается за незначительными исключениями всё содержание нынешнего школьного курса алгебры, определяемое действующей программой математики. Вне их находятся следующие разделы:

1) пропорции, изучаемые в VII классе в порядке доработки вопроса, входившего в курс арифметики VI класса; связь пропорций с пропорциональной зависимостью позволяет отнести этот раздел к изучению функций;

2) извлечение квадратного корня из чисел — чисто арифметическая операция, стоящая, однако, в связи с вопросом о решении двучленного квадратного уравнения;

3) последовательности чисел вообще и два простейших и особенно важных вида последовательностей — прогрессии арифметическая и геометрическая;

4) логарифмические вычисления как средство упрощения вычислений, по существу относящиеся к курсу арифметики;

5) теория соединений — своеобразный раздел, входящий в особую математическую дисциплину («комбинаторику») и введённый в школьный курс алгебры из-за его связи с биномом Ньютона; наиболее интересные и важные приложения этой теории связаны с элементами теории вероятностей; раздел «Последовательности чисел» курса алгебры IX класса;

6) теория пределов, относимая программой в курс геометрии IX класса, но по существу принадлежащая анализу.

Эта пестрота школьного курса алгебры делает крайне трудным ответ на вопрос: что такое алгебра? Невозможно дать определение этого курса, которое охватывало бы всё его содержание. В глазах школьников алгебра начинается там, где вместо записи чисел цифрами появляется запись их буквами, но это мнение ошибочно; арифметика, даже школьная арифметика, изучаемая в V классе, всё шире начинает пользоваться буквенными обозначениями для сокращения записи, а кроме того, и любая математическая наука постоянно пользуется буквенной символикой. Ещё ошибочнее взгляд на алгебру как науку, для которой характерно применение других чисел, кроме изучаемых в школьной арифметике целых и дробных рациональных: основные обобщения понятия числа относятся к арифметике. Не может быть и речи о том, чтобы подойти к школьной алгебре с современным определением алгебры как науки об операциях, заданных на множествах произвольной природы (группы, кольца, поля): в школе мы имеем дело только с множествами чисел и функций. Более правильным представляется взгляд на школьную алгебру как учение о простейших функциях и прежде всего о целых и дробных рациональных функциях, а также о некоторых трансцендентных функциях; учение об уравнениях появляется в связи с задачей разыскания тех значений аргумента, при которых данная функция получает наперёд указанное значение, в частности обращается в нуль, а необходимость расширения понятия числа обусловлена отсутствием решения этой задачи во многих случаях, если ограничиваться известными из арифметики видами чисел; учение о тождественных преобразованиях естественно примыкает к изучению функций: рассматриваются различные формы представления одной и той же функции. Арифметическую прогрессию можно рассматривать как последовательность значений линейной функции, соответствующих равноотстоящим значениям аргумента, а прогрессию геометрическую как аналогичную последовательность значений показательной функции. Можно также сказать, что школьная алгебра вообще не представляет собой какой-нибудь определённой ветви математической науки, а лишь учебный предмет, в котором в интересах обучения началам математики объединён материал, относящийся отчасти к арифметике, отчасти к алгебре в собственном смысле слова, отчасти к анализу.

По поводу содержания школьного курса алгебры сделаем ещё одно существенное замечание. В этом курсе есть ряд разделов, которые можно и должно изучить полностью, исчерпывающим образом, как, например, приведение целых и дробных рациональных выражений к простейшему виду (целых — к расположенным лексикографически многочленам, дробных — к несократимым дробям), решение уравнений первой и второй степени и многие другие. Есть, кроме того, ряд разделов, в которых задача ставится, но не может быть полностью разрешена: приходится довольствоваться наиболее важными простейшими случаями. Так обстоит дело, например, с решением уравнений степени выше второй. Но есть также немало вопросов, которые в средней школе даже нельзя правильно поставить. Таков, например, вопрос о тождественных преобразованиях иррациональных выражений (что считать нормальной формой выражения, содержащего радикалы?). Таков же и вопрос об иррациональных алгебраических и о трансцендентных уравнениях (подробнее об этом говорится в конце статьи [III,3]). Учитель должен ясно понимать различие этих трёх видов разделов программы, стремиться к исчерпывающему изучению разделов первого вида и не ставить себе неосуществимых задач при работе над разделами второго и третьего вида. Так, ошибкой было бы пытаться дать какое-то подобие теории тождественных преобразований иррациональных выражений. Здесь можно указывать только ряд задач на такие преобразования, причём то, что выгодно сделать в одном случае, невыгодно в другом; так, замена $\sqrt{128}$ через $8\sqrt{2}$ выгодна, если речь идёт, скажем, об упрощении выражения $\sqrt{128}-\sqrt{98}=8\sqrt{2}-7\sqrt{2}=\sqrt{2}$, и невыгодна, если надо найти значение $x=\sqrt{128}$ по таблице.

§ 3. Цели изучения школьного курса алгебры. Его программа.

Объяснительная записка к действующей ныне программе математики в средних школах, утверждённой Министерством просвещения РСФСР, так определяет цель изучения алгебры: «Задачи преподавания алгебры — расширить у учащихся представление о числе, научить сознательно, быстро и наиболее рационально производить тождественные преобразования алгебраических выражений, развить идею функциональной зависимости и её графического представления, научить приёмам составления уравнений и методам их решений, а также применению знаний к решению простейших задач из смежных дисциплин: физики, химии, астрономии, из области техники, сельского хозяйства».

Составление уравнения есть не что иное, как составление выражения некоторой функции и приравнивание его данному числу или составление выражений двух функций и приравнивание их друг к другу, а решение уравнения — разыскание тех значений аргументов, при которых данная функция принимает наперёд заданное значение. Таким образом, вся работа над уравнениями, которой отводится столь важное место при определении целей изучения алгебры, есть по существу работа над функциями. С другой стороны, применение алгебры к решению задач из смежных дисциплин (арифметики, геометрии, физики, астрономии и т. д.) сводится в основном к представлению буквенными формулами зависимостей между различными величинами, рассматриваемыми в этих дисциплинах, т. е. опять-таки к работе над функциями, и прежде всего рациональными функциями, естественно и неизбежно приводящей также и к более сложным случаям функциональной зависимости; например, изучение зависимости пути от времени при свободном падении без начальной скорости приводит к функции $s=0{,}5\,gt^2$, а обратный вопрос — к функции $t=\sqrt{2s:g}$.

Видя в изучении функциональной зависимости основную задачу школьного курса алгебры, надо со всей силой подчеркнуть важность развития понятия числа и овладения тождественными преобразованиями, без которых это изучение функциональной зависимости не может проводиться.

Сделать цель изучения алгебры ясной для детей, только приступающих к этому изучению, несравненно труднее, чем в арифметике, так как в отличие от арифметики школьная алгебра непосредственных бытовых применений не имеет. Отсутствие видимых для учащихся VI класса целей изучения первых разделов алгебры создаёт особые трудности. Желательно указать две такие цели: во-первых, научиться владеть буквенным обозначением, позволяющим весьма удобно, кратко и ясно записывать различные правила, свойства, законы, относящиеся к числам, прежде всего такие, какие изучались в арифметике и повторяются в начальном курсе алгебры, являясь основой для вывода правил тождественных преобразований, например правила: «чтобы отнять разность, надо отнять уменьшаемое и прибавить вычитаемое», записываемого сокращённо формулой $a - (b - c) = a - b + c$; во-вторых, научиться решать арифметические задачи посредством уравнений, вводя обозначение неизвестного буквой и основываясь на определениях и законах действий, что вполне возможно ещё до изучения тождественных преобразований.

Цель овладения буквенной символикой, а вместе с нею и тождественными преобразованиями легко сделать понятной и для школьников, если рассматривать эту символику как особый математический язык, имеющий очевидные преимущества краткости и ясности, притом язык интернациональный. Точно так же легко добиться признания учащимися и ценности уравнений, позволяющих одним и тем же методом решать самые различные задачи, для которых в арифметике приходилось изобретать каждый раз новый способ: задачи на разыскание чисел по их сумме и разности или сумме и отношению, задачи «на предположение», «на движение», «на уравнивание данных» и множество других, доставлявших столько трудностей в курсе арифметики, решаются без затруднений одним и тем же методом составления уравнений. Если учителю удалось обеспечить усвоение учащимися этих двух идей, заключающихся в символическом обозначении чисел и в методе уравнений, им тем самым заложен прочный фундамент изучения всего курса школьной алгебры.

Ныне действующая программа по математике для средней школы предусматривает работу по алгебре в течение 5 лет, отводя на неё всего около 400 часов при значительном колебании недельных часов по годам и полугодиям: в VI классе 3 часа в неделю, в VII классе 4 часа в неделю в первом полугодии и 3 часа во втором, в VIII — как в VII, в IX и X — по 2 часа в неделю в течение всего года. В VI классе дети знакомятся с буквенными выражениями, отрицательными числами, целыми одночленами и многочленами, включая разложение многочленов на множители; особого раздела, посвящённого уравнениям, здесь ещё нет, но составление и решение простейших уравнений на основании определений и свойств арифметических действий предусмотрены программой уже при работе по первым двум разделам. Основное содержание курса алгебры в VII классе — алгебраические дроби и уравнения 1-й степени; сверх того, в нём имеется небольшой раздел, посвящённый пропорциям, и несколько больший — извлечению квадратного корня из чисел. В VIII классе изучаются степени и корни, затем уравнения, квадратные и приводимые к квадратным (с одним и двумя неизвестными); небольшой заключительный раздел посвящён функциям и их графикам. В IX классе идёт изучение числовых последовательностей, в частности прогрессий, обобщается понятие о показателе степени, изучаются показательная и логарифмическая функции и их приложения. К X классу отнесены разделы: соединения и бином Ньютона, комплексные числа, неравенства (в связи с исследованием уравнений), некоторые общие свойства целых рациональных функций (теорема Безу и её следствия).

§ 4. Учебная и методическая литература по алгебре.

Наиболее распространённым и наиболее соответствующим действующей программе алгебры является руководство А. П. Киселёва «Алгебра», утверждённое Министерством просвещения РСФСР как школьный учебник для средней школы (ч. 1-я для VI и VII классов, ч. 2-я для VIII — X классов). Эта книга была выпущена первым изданием ещё в 1888 г. и с тех пор много раз переделывалась при переизданиях. Вопросу о функциональной зависимости посвящено несколько параграфов, но в целом эта книга мало отражает современную науку. В дальнейшем мы будем много раз говорить об особенностях изложения отдельных вопросов в этой книге.

В 1940 г. была выпущена пробным изданием книга П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова «Алгебра», призванная заменить учебник алгебры Киселёва. Написанная крупнейшими советскими математиками, книга приводит первую часть школьного курса алгебры в соответствие с современными научными требованиями и уже в силу одного этого заслуживает самого пристального внимания. Выпущенная первая часть, написанная в соответствии с программой VI и VII классов, подверглась живому обсуждению в широких кругах учителей, но война задержала предполагавшийся выпуск нового, исправленного издания. В 1941 г. была опубликована статья тех же авторов «Свойства неравенств и понятие о приближённых вычислениях» [III, 2 б], представляющая собой главу из 2-й части их руководства алгебры. Получив это новое руководство алгебры полностью, учитель математики средней школы будет иметь возможность существенно улучшить постановку своего преподавания алгебры.

Несколько поколений русской молодёжи изучало алгебру по руководству А. Ю. Давидова «Начальная алгебра», вышедшему первым изданием ещё в 1865 г. и получившему громадное распространение благодаря своей полноте, ясности и точности; это руководство переиздавалось даже после Октябрьской революции [III, 18].

«Курс алгебры для средних учебных заведений» К. Ф. Лебединцева [III, 28] содержал, наряду с традиционным материалом, много нового, знакомящего учащихся с понятием функции, с прямоугольными координатами, с графиками функций. В других работах этого автора хорошо разработана методика более раннего, чем обычно, введения уравнений.

Новый и свежий материал даёт книга С. И. Новосёлова «Алгебра», выпущенная в 1947 г. в качестве руководства для учительских институтов и предназначенная для углублённого изучения элементарной алгебры лицами, уже знакомыми со среднешкольным её курсом.

В 1950 г. вышло второе, существенно переработанное издание этой полезной для учителя книги. В 1951 г. появилась книга того же автора, озаглавленная «Специальный курс элементарной алгебры» и предназначенная для студентов педагогических институтов.

Академия педагогических наук выпустила в 1949 и 1950 гг. две книги проф. В. Л. Гончарова «Алгебра для семилетней школы» (для VI и VII классов в отдельности), а также «Методические указания для преподавателей» по первой из них. Вопросы, связанные с изучением функций, разработаны в этих книгах полнее, чем в любом другом руководстве алгебры.

В 1951 г. Ленинградское отделение Учпедгиза выпустило книгу Д. К. Фаддева и И. С. Соминского «Алгебра», часть 1, как пособие для учителей семилетней школы. Книга может быть рекомендована и как руководство алгебры для учащихся. Особое внимание авторы обратили на устранение разрыва между изучением арифметики и алгебры, с самого начала курса алгебры уделяя большое место решению задач с помощью уравнений.

Мы отметили по необходимости лишь немногие старые и новые руководства алгебры. Переходим к задачникам, тоже ограничиваясь лишь указанием немногих книг, имеющих особое значение для учителя.

В конце XIX и начале XX в. в России имел большое распространение «Сборник примеров и задач, относящихся к курсу элементарной алгебры», составленный Ф. Бычковым [III, 12]. Вполне соответствуя программе алгебры дореволюционной средней школы, он содержал большое количество тщательно подобранных примеров и задач, работа над которыми позволяла выработать полноценные навыки, но лишь в слабой степени содействовала усвоению теоретических основ курса алгебры. Книга в целом безусловно устарела, но сохранила и до настоящего времени своё значение как богатое собрание тренировочного материала.

Вот две задачи из этого сборника (изд. 1910 г.).

1. Вычислить $\sqrt[4]{5+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{6}}$. Эта задача, приведённая в разделе IV под № 515, решается сразу, если представить квадратный корень в виде $\sqrt[4]{(3-\sqrt{6})^2}=\sqrt[4]{3\,(5-2\sqrt{6})}$.

2. Двое выезжают из разных мест, между которыми расстояние равно 45 верстам, и едут по одному и тому же направлению. Первый догнал второго через 11 часов 36 минут, выехав раньше его столькими минутами, сколько нужно, чтобы число минутных делений на часах, пройденное часовой стрелкой, с числом таких же делений, пройденных минутною стрелкой, было равно 104. Требуется узнать, сколько вёрст в час проезжает каждый из них, когда известно, что если бы они выехали одновременно друг другу навстречу с теми же скоростями, как и прежде, то встретились бы через число часов, равное сумме членов бесконечно убывающей кратной прогрессии, которой второй член равен $1:\left(3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}\right)$, а знаменатель прогрессии $(3+\sqrt{3{,}66\ldots}):6$. (Отдел «Смешанные задачи», № 155).

Здесь мы видим образец «комбинированной» или «шитой» задачи, крайне искусственный характер которой вызывал законные протесты передового учительства.

На смену задачнику Бычкова пришёл «Сборник алгебраических задач» Н. А. Шапошникова и Н. К. Вальцова, по полноте и методической правильности подбора задач не уступавший ему, но больше дававший для усвоения идейной стороны курса агебры. Успеху этой книги существенно способствовали две её особенности: наличность в начале каждого параграфа краткого теоретического введения, указывающего, что надо знать (в добавление ко всему предыдущему), чтобы решать задачи этого параграфа, и дублирование задач (для каждой задачи давалась вторая, с ней сходная, и ученик, решивший с помощью учителя одну задачу, уже без особых трудностей самостоятельно справлялся со второй). Достоинства этого задачника обеспечили ему распространение в советских школах в качестве школьного учебника, причём он много раз перерабатывался. Однако сборник далеко не свободен от ряда недочётов, сохранившихся и в последних изданиях. Например, приводя ответы на различные задачи, связанные с буквенными выражениями, сборник почти никогда не отмечает те особые случаи, при которых решение даёт иной ответ или не даёт никакого ответа. Так, в задаче № 253 главы VI 1-й части (по изданию 1948 г.) требуется решить систему $ax+by=1$, $a^2x+b^2y=a$, и в конце книги приведён ответ $x=1:a$, $y=0$. Для получения этого ответа приходится выполнять деление на $a-b$ и на a, следовательно, он имеет силу только в предположении, что $a-b\neq 0$, $a\neq 0$. При $a=b$ система принимает вид $a\,(x+y)=1$, $a^2(x+y)=a$ и имеет при $a\neq 0$ бесчисленное множество решений, выражаемых формулами $x=t$, $y=1:a-t$, где t — любое число, а при $a=0$ удовлетворяется совершенно произвольными значениями x и y. Если же $a - b \neq 0$, но $a = 0$, то $b \neq 0$, и система несовместна. Без такого маленького исследования решение системы неполно; если считать, что оно ещё не по силам учащимся, надо устранить необходимость рассмотрения особых случаев, поставив дополнительные условия: $a \neq b$, $a \neq 0$. Игнорирование осложнений, подобных указанному, воспитывает привычку механического, формального обращения с буквенными выражениями. Имеются в задачнике и неудачные формулировки. К школьному задачнику, как и к школьному учебнику, надо относиться критически, хорошо продумывая предлагаемый ими материал, внося по мере надобности надлежащие поправки.

Отметим ещё один задачник, появившийся в дореволюционное время и также далеко не безупречный, но содержащий много оригинального и интересного для школьников материала. Это «Сборник упражнений и задач по элементарному курсу алгебры», составленный тремя авторами (Д. Я. Бем, А. А. Волков, Р. Э. Струве) и выпущенный издательством Сытина в 1913 г. Были переиздания, в том числе и в советское время, как полностью, так и в сокращённом виде.

В 1949 г. впервые вышел «Сборник задач по алгебре», составленный заслуженным учителем школы РСФСР П. А. Ларичевым и предназначенный для VI и VII классов семилетней и средней школы. Этот задачник отражает ряд прогрессивных тенденций, как, например, раннее введение уравнений, большее внимание графикам и технике вычислений и др., и заслуживает самого серьёзного внимания со стороны учителей.

В дальнейшем вышла и 2-я часть этого задачника (для VIII, IX, X классов), и обе части Министерство просвещения РСФСР утвердило в качестве стабильного учебника для семилетней и средней школы.

В 1937 г. в издании ОНТИ вышел «Задачник по алгебре» проф. В. А. Кречмара, предназначенный для старших школьников, интересующихся математикой, и для учителей и содержащий значительное количество задач повышенной трудности, позволяющих осветить много принципиально важных теоретических вопросов. Переработка его в сокращённом виде была издана Учпедгизом в 1940 г., а в 1950 г. Гостехиздат выпустил второе полное его издание. Назовём ещё выпущенную Учпедгизом в 1941 г. книгу Обера П. и Папелье Г. «Упражнения по элементарной алгебре», в которой с большой полнотой представлены первые разделы курса алгебры. Особую ценность в этой книге представляет богатый выбор упражнений и задач, требующих исследования уравнений.

Из книг по методике преподавания алгебры укажем «Методику алгебры» проф. И. И. Чистякова, изданную Учпедгизом в 1934 г. и содержащую, кроме рассмотрения ряда математических вопросов, также много полноценных исторических указаний, и более новую «Методику алгебры» Бронштейна С. С. (Учпедгиз, 1937), являющуюся не столько методическим руководством, сколько изложением самой алгебры.

Существует большое число книг и статей, посвящённых отдельным вопросам преподавания элементарной алгебры. В дальнейшем будут указаны важнейшие из них. Сейчас отметим только вышедший в 1949 г. экспериментальный учебник проф. Гончарова В. Л., представляющий собой существенную переработку традиционного курса и проверяемый в текущем году на практике ряда школ (см. [III, 17в]).

§ 5. Алгебраические задачи.

Как мы видели выше, в § 4 II части, арифметические задачи можно разделить на: 1) задачи-примеры, решение которых сводится к простому применению в частных случаях установленных в теоретической части курса общих правил, 2) задачи-расчёты прикладного содержания, где вопрос о выборе действий ставить приходится, но он решается без каких бы то ни было затруднений, и 3) развивающие задачи, решение которых требует некоторой изобретательности и отнюдь не обеспечивается простым знанием соответствующей теории. Эти же три типа задач мы имеем и в алгебре, притом в любом разделе школьного её курса, только в иных пропорциях, чем в школьном курсе арифметики. Преобладающее значение имеют задачи-примеры, имеющие целью обеспечить полноценные технические навыки в тождественных преобразованиях, в решении готовых уравнений и их систем, в выкладках с числами рациональными (положительными и отрицательными), действительными, комплексными. Постепенно усложняясь, задачи-примеры незаметно переходят в задачи развивающие, решение которых представляет собой уже первичную форму математического творчества. Так, например, задача разложения на множители трёхчлена $4x^2 - 12x + 9$ есть типичная задача-пример, а разложение на множители многочлена $4x^2 - 4xy - 3y^2 - 4x + 10y - 3 = (2x - 3y + 1)(2x + y - 3)$ требует от ученика средней школы уже большой вдумчивости, изобретательности, упорства. К задачам-расчётам следует отнести, например, все задачи на составление уравнений, которые требуют ориентировки в конкретных условиях вопроса и уменья применить в них некоторый общий метод. К задачам-примерам и к задачам-расчётам сводятся почти все применения алгебры в других дисциплинах, и естественно, что именно на этого рода задачи обращается максимум внимания в школьном курсе алгебры. Наряду с ними, однако, крайне желательно давать и некоторое количество задач развивающих, требующих от учащихся не просто движения по хорошо знакомому привычному пути, а и уменья мобилизовать в поисках надлежащего пути все свои знания, уменья проложить новый путь. Подобных задач в обычных школьных учебниках и задачниках очень мало, но хороший их подбор имеется, например, в указанной выше книге Кречмара. Так, задача № 16 § 3 (по изданию 1937 или 1950 г.) предлагает доказать, что $\sqrt[3]{2}$ нельзя представить в виде квадратической иррациональности $p \pm \sqrt{q}$, где p и q — рациональные числа. Если учащийся не знает формулу сложного радикала, то для него такой развивающей, но более трудной задачей является задача № 11 § 3 этой же книги. Здесь надо найти значения выражения $y = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$ (предполагается, что берутся арифметические значения всех радикалов); в задачнике предлагается доказать, что при $1 \leq x \leq 2$, $y = 2$ и что при $x \leq 2$, $y = 2\sqrt{x-1}$, но лучше не указывать этих результатов, а предложить учащимся самим найти их, начав с построения графика функции в прямоугольных координатах. Для доведения дела до конца надо рассмотреть выражение y^2, равное $2x + 2\sqrt{(x-2)^2}$, т. е. $4x - 4$ при $x \geq 2$ и 4 при $x \geq 2$.

В то время как в арифметике рекомендуется распределять время, отводимое на решение задач, примерно поровну между задачами-примерами, задачами-расчётами и задачами развивающими, в алгебре соотношение должно быть иным, примерно как $3:2:1$. Нередко вся работа школьника сводится к решению задач-примеров, но это, конечно, совершенно ненормально.

Школьная практика решения алгебраических задач страдает ещё одним существенным недостатком: решая задачи, учащиеся не понимают, зачем они это делают, а учитель или тоже не отдаёт себе в этом должного отчёта, или не находит нужным говорить об этом с учащимися. Взять, например, задачи на уничтожение иррациональности в знаменателе, которым в VIII классе уделяют обычно много времени. Как правило, учащиеся не знают, какую цель преследует это преобразование, даже не подозревают, что иногда бывает выгоднее уничтожать иррациональность не в знаменателе, а в числителе, как, например, при разыскании предела функции $\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$ при x, стремящемся к единице, когда преобразование к виду $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ сразу показывает, что этот предел равен 0,5. А ведь так легко разъяснить эту цель, предложив вычислить хотя бы с четырьмя точными цифрами значение числа $1:\sqrt{2}$ и равного ему числа $\sqrt{2}:2$, значение суммы $1:(\sqrt{2}-1) + 1:(\sqrt{3}-1) + 1:(\sqrt{6}-1)$ и равной ей суммы $(\sqrt{2}+1) + 0{,}5(\sqrt{3}+1) + 0{,}2(\sqrt{6}+1) = 1{,}7 + (\sqrt{2} + \sqrt{0{,}75} + \sqrt{0{,}24})$! Если применить таблицу квадратных корней, то значение последнего выражения получается в результате одного действия, требующего записи (сложения), в то время как в первом случае нужны три довольно тягостных деления.

Пренебрежение уяснением целей решения некоторых видов алгебраических задач приносит вред в двух отношениях: приучает учащихся формально выполнять указываемые учителем операции, не понимая их смысла, а кроме того, лишает разумных оснований подбор учителем материала для упражнений.

Возвращаясь к вопросу о требованиях, какие следует предъявлять к решению задач (см. выше § 19 1-й части), заметим, что проверка правильности найденного решения, к сожалению, обычно вовсе не делается. Мало внимания в большинстве случаев обращают на требование обоснованности решения: практика ведётся в отрыве от теории, без должного освещения и проверки законности выполняемых операций. В связи с этим решение задачи далеко не всегда бывает исчерпывающим, полным. Если выпускнику средней школы предложить решить уравнение $1+\frac{5}{(x-2)(x+3)}-\frac{1}{x-2}=0$, то почти всегда будет получен ответ в виде пары корней $x_1=+2$, $x_2=-2$: решающий упускает из виду, что упрощённое полученное им уравнение $x^2-4=0$, дающее эти корни, выведено из данного уравнения с помощью умножения на выражение, зависящее от x, а потому может быть неравносильным данному; имея все корни данного уравнения, оно может иметь ещё и посторонние корни, каковым и является корень $x_1=+2$. Данное уравнение имеет лишь один корень $x=-2$. Положение становится предельно ясным, если привести левую часть к виду $1+\frac{2-x}{(x-2)(x+3)}$ или $1-\frac{1}{x+3}$ и построить график функции $y=1-\frac{1}{x+3}$; получается кривая (гипербола), пересекающая ось X в единственной точке $x=-2$.

Нередко в пренебрежении оказывается и важное требование простоты решения. Сплошь и рядом одну и ту же задачу можно бывает решить разными путями, причём эти пути далеко не равноценны в смысле затраты времени и сил. Следует требовать поисков наиболее простого решения, наталкивать учащихся на такие простые решения соответствующими указаниями, иногда приводить готовые решения, чем-либо заслуживающие предпочтения по сравнению с теми, какие нашли сами учащиеся. Пусть, например, требуется найти решение уравнения $\frac{x-ab}{a+b}+\frac{x-bc}{b+c}+\frac{x-ca}{c+a}=a+b+c$, где a, b, c — данные числа, причём ни одна из сумм $a+b$, $b+c$, $c+a$ не равна 0. Решение обычными приёмами приводит после довольно сложных выкладок к ответу $x=ab+bc+ca$ (в случае, если $S=3ab+3bc+3ca+a^2+b^2+c^2\neq 0$). Но перенося все члены в левую часть уравнения, легко приводим его к виду $(x-ab-bc-ca)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)=0$ и сразу заключаем, что при $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{S}{(a+b)(b+c)(c+a)}\neq 0$ уравнение имеет единственный корень $x=ab+bc+ca$, а при $S=0$ удовлетворяется любым значением x. Ещё пример: надо вычислить до сотых значение $y=2x^3-5x^2+3x+2$ при $x=\sqrt{5}-2$. Здесь полезно рассмотреть три способа: 1) непосредственную подстановку $x\approx 2{,}236-2=0{,}236$, дающую $y\approx 2{,}448$ или окончательно 2,45; 2) подстановку точного иррационального значения x, дающую $y=57\sqrt{5}-125=\sqrt{16245}-125$ или окончательно 2,456; 3) предварительное упрощение данного выражения через подстановку $x^2=1-4x$, дающее $y=57x-11$ и приводящее к тому же окончательному результату, что и второй способ, но требующее значительно меньше выкладок.

Глава II

РАЗВИТИЕ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА В СЕМИЛЕТНЕЙ ШКОЛЕ

§ 6. Введение отрицательных чисел. Множество рациональных чисел.

История математики ясно показывает, насколько труднее далось человечеству третье расширение понятия числа — введение отрицательных чисел, чем первые два — введение нуля и дробей. Естественно, что и школьнику труднее освоиться с этим новым для него материалом, несравненно менее связанным с обыденной жизнью, чем нуль («ничто») и дроби. Как ни трудны для начинающих первые шаги в усвоении буквенной символики, они даются в школе гораздо легче, чем новые числа, и возникает вопрос, не лучше ли сперва изучить тождественные преобразования целых рациональных выражений и линейные уравнения, а потом уже перейти к расширению понятия числа, что больше соответствовало бы и историческому ходу вещей. Однако и программа, действующая в настоящее время в средних школах РСФСР, и большинство учебников, непосредственно вслед за первой (вводной) темой, посвящённой буквенному обозначению, берут в качестве второй темы отрицательные числа. Мы и будем держаться в дальнейшем этого общепринятого порядка. Вводя новые, «отрицательные» числа, мы называем все неизвестные ранее целые и дробные числа «положительными», за исключением нуля, который не принадлежит ни к тем, ни к другим, а является границей, их разделяющей. Целые и дробные положительные числа вместе с целыми и дробными отрицательными числами и нулём образуют множество чисел *рациональных*. Этот термин заслуживает предпочтения перед часто употребляемым термином «относительные числа», который способствует ложному представлению о существовании наряду с обыкновенными, изучаемыми в арифметике числами, будто бы лишёнными знака, ещё новых чисел, характеризуемых наличностью знака плюс или минус. Стабильное руководство алгебры Киселёва содержит две фразы, которые создают путаницу в понятиях и которые давно пора изъять: «Числа положительные, отрицательные и нуль называются вообще *относительными* числами в отличие от чисел обыкновенных (или арифметических), которые не имеют перед собой никакого знака. *Абсолютной величиной* относительного числа называется это число, взятое без знака; так, абсолютная величина числа $+10$ есть 10, абсолютная величина числа -5 есть 5» (стр. 15 по изданию 1949 г.). В отличие от того, что здесь утверждается, надо считать, что никаких чисел без знака не бывает. Обыкновенные числа, изучаемые в школьном курсе арифметики, являются положительными числами, но знак плюс перед ними можно ставить, а можно и подразумевать, так что никакой разницы между числами 5 и $+5$ нет. Абсолютной величиной положительного числа является само это число, абсолютной величиной отрицательного числа является противоположное ему положительное число, абсолютная величина нуля есть нуль.

В издании 1952 г. ошибочное определение понятия абсолютной величины, наконец, устранено, но на стр. 15 допущена новая ошибка: в определении абсолютной величины отрицательного числа использован термин «противоположное» число, а этот термин определяется только на стр. 16 с помощью понятия абсолютной величины. Здесь пример логической ошибки «порочный круг в определении», о которой шла речь выше (в § 5, части I).

Занимаясь научным изложением вопроса о каком-либо расширении понятия числа, устанавливают ряд аксиом и вытекающих из них теорем, выражающих свойства чисел, предполагаемых известными, и вводят *по определению* новые числа, обладающие некоторыми свойствами, частью одинаковыми со свойствами ранее известных чисел, частью отличными от них. Такое изложение мы находим, например, в первой главе учебника «Теория чисел» И. В. Арнольда [III, 4а], где после рассмотрения аксиом, лежащих в основе теории натуральных чисел, вводятся по определению целые числа как пары натуральных чисел и рациональные числа как пары целых. Учителю математики полезно быть знакомым с этим *аксиоматическим* изложением арифметики, позволяющим чётко разграничить то, что доказывается, от того, что принимается без доказательства, но не может быть и речи о том, чтобы знакомить с этим аксиоматическим изложением начинающих, для которых первостепенное значение имеет показ целесообразности, в известном смысле необходимости принимаемых определений, мотивировка их. Начинающим нужно не *аксиоматическое*, а *генетическое* и *индуктивное* изложение, нужна не готовая законченная теория, а показ постепенного созидания такой теории, идущего от рассмотрения частных случаев к общим выводам, причём этот показ не должен содержать ничего, противоречащего современной науке, ничего такого, от чего в дальнейшем придётся отказываться.

Генетически-индуктивное изложение, вводящее в дополнение к уже известным целым и дробным положительным числам числа рациональные, отрицательные, строится в различных учебниках по-разному. Так, «Полное руководство алгебры» Эйлера исходит из возможности рассматривать все члены алгебраической суммы как положительные и отрицательные слагаемые, истолковывая их как имущества и долги. Этот метод изложения подробнее развит у Бертрана [III, 9], вводящего отрицательные числа формулой $a - b = a + (-b)$. Чаще всего исходным пунктом является рассмотрение величин, которые можно понимать в двух противоположных смыслах, или «направленных» величин, как, например, перемещение в двух взаимно противоположных направлениях по прямой. Известные из арифметики числа, характеризуя значения таких величин, нуждаются ещё в дополнительном указании направления (учебник Киселёва иллюстрирует эту мысль примером с железной дорогой), которое становится излишним, если снабдить число знаком $+$ или $-$, указывающим направление. Этот метод хорош тем, что сразу связывает рациональные числа с наглядным их представлением посредством точек числовой оси, но приходится преодолевать трудности, связанные с двоякой ролью знаков $+$ и $-$, как знаков сложения и вычитания и как знаков направления чисел. Третий возможный и тоже часто используемый метод введения отрицательных чисел — рассмотрение и истолкование разности $a - b = x$, т. е. уравнения $b + x = a$, при значениях b, меньших a (он по существу ближе всего к аксиоматическому изложению). Особого внимания заслуживает рекомендуемый новым руководством алгебры [III, 2а] метод введения отрицательных чисел как *меры уменьшения* величины, в то время как всякое положительное число рассматривается как мера её *увеличения*, причём каждому положительному числу a (или, что то же, $+a$) соответствует своё особое отрицательное число $-a$, выражающее уменьшение на a единиц измерения. Числа a и $-a$ называются при этом «противоположными» друг другу. Таким образом, рациональное число оказывается не только мерой величины, а и мерой изменения величины, область его применения существенно расширяется. Можно сказать, что такое его истолкование соответствует переходу от первого основного этапа развития математики ко второму её этапу, рассмотренному выше (в §§ 1 и 2 1-й части), переходу от изучения постоянных величин к изучению переменных величин. Оказывается, что этот метод введения отрицательных чисел позволяет легче преодолевать многие трудности, встающие перед учащимися при их изучении.

Отсылая читателя, желающего детальнее ознакомиться с различными методами введения отрицательных чисел, к специальным курсам методики алгебры [III, 10; 42] и особенно к очень содержательной книге проф. И. В. Арнольда «Отрицательные числа в курсе алгебры» [III, 4б], рекомендуем начинающему учителю последовательное проведение взгляда на рациональное число как меру изменения величины. Между прочим, при таком взгляде на них не вызывает никакого затруднения вопрос о выборе знаков для их записи: положительные числа, выражая увеличения, должны отмечаться знаком сложения (+), так как для получения результата этого увеличения числа надо складывать, а отрицательные — знаком вычитания (—), так как для получения результата уменьшения числа надо вычитать. Столь же естественно получаются и формулы $+(+a) = +a = a$, $-(+a) = -a$, $+(-a) = -a$, $-(-a) = +a = a$, непосредственно вытекающие из того, что через $-a$, по определению, обозначается число, противоположное числу a, независимо от того, является ли это число положительным или отрицательным.

Рассматривая рациональное число как меру изменения величины и имея дело с величиной, способной изменяться в обе стороны от нуля, мы можем рассматривать каждое рациональное число и как меру самой величины: число $+10$ (рублей) выражает, например, и любое увеличение наличных денег на 10 рублей, и их увеличение от 0, т. е. сама наличность в 10 рублей, число -10 (рублей) выражает и любое уменьшение наличных денег на 10 рублей, и их уменьшение от 0, т. е. долг в 10 рублей.

Каким бы путём ни были введены отрицательные числа, очень важно снабдить учащихся каким-нибудь определённым наглядным образом, к которому они могли бы обращаться как к источнику всех заключений о их свойствах. Такой образ приносит начинающим несравненно больше пользы, чем самая лучшая система определений, аксиом и теорем, устанавливающих эти свойства. Выяснив возможность бесконечного множества различных конкретных истолкований понятия отрицательного числа, берут какое-нибудь одно такое истолкование и рассматривают его особенно тщательно и подробно, в дальнейшем всегда обращаясь к нему в первую очередь. Раньше в качестве такого стандартного образа положительных и отрицательных чисел брали сумму наличных денег и долг, теперь чаще берут множество точек *числовой оси*, т. е. прямой, на которой установлено определённое положительное направление, определённая начальная точка, определённая единица масштаба. Понятие суммы наличных денег и долга очень хорошо знакомо каждому, но образ числовой оси, точки которой отмечены рациональными числами, положительными в одну сторону от начальной точки и отрицательными в другую, обладает, несомненно, ещё большей наглядностью, а при дальнейшем изучении математики он играет столь исключительную важную роль, что раннее его усвоение очень выгодно. Считая множество точек числовой оси основным образом, полезно обращаться за иллюстрациями частных случаев к другим истолкованиям рациональных чисел. Например, установив с помощью числовой оси, что —20 меньше, чем —5, ставим вопрос о том, как сравнить имущество двух людей, из которых один имеет только долг в 20 рублей, другой только долг в 5 рублей.

Устанавливая соответствие между рациональными числами и точками числовой оси, мы используем лишь рациональные точки этой оси. Это обстоятельство выяснится для учащихся только впоследствии, когда речь будет идти об иррациональных числах, говорить о нём в начале курса алгебры не надо.

§ 7. Сложение и вычитание рациональных чисел.

Вся трудность усвоения действия сложения рациональных чисел обусловлена тем, что здесь приходится основываться на новом, обобщённом определении этого действия, включающем в себя сложение натуральных чисел и положительных дробей как частный случай. Это новое определение суммы формулируется по-разному в зависимости от того, каким способом вводятся отрицательные числа. Рассматривая рациональные числа a и b как выражения изменений некоторой величины, определяем сумму $a+b$ как выражение обоих этих изменений, выполненных последовательно. Убедившись, что для положительных чисел, например 3 и 8, это определение даёт обычную сумму $3+8=11$ (последовательное увеличение сперва на 3, потом на 8 равносильно одному увеличению на 11), легко разбираем различные частные случаи, например: $(+3)+(-8)$, $(-3)+(+8)$, $(-3)+(-8)$, и выводим соответствующие правила, а затем убеждаемся, что основные свойства суммы, установленные при изучении предшествующей темы для положительных чисел, сохраняются при таком понимании суммы и для всех рациональных чисел. Обращение к числовой оси много способствует ясности и прочности усвоения: если $a=+3$ есть увеличение расстояния от начальной точки на 3 единицы, т. е. переход, например, от точки 10 в точку 13, а $b=-8$ — последующее уменьшение этого расстояния на 8 единиц, т. е. переход от точки 13 в точку $13-8=5$, то сумма $a+b$ выражает переход от точки 10 в точку 5, т. е. уменьшение на $10-5=5$ единиц, или изменение -5; следовательно, $(+3)+(-8)=-5$, и этот результат можно получить быстрее, действуя по установленному правилу.

Очень существенно, чтобы дети хорошо усвоили, что прибавление рационального числа отнюдь не обязательно приводит к сумме, большей первого слагаемого. При переходе от более узкого к более широкому числовому множеству часть свойств сохраняется, как, например, переместительное и сочетательное свойства суммы, а часть теряется. Оперируя с натуральными числами, имеем всегда $a + b > a$. Введение нуля вынуждает писать уже $a + b \geqq a$, введение дробей (положительных) ничего в этой формуле не меняет. Но переход к рациональным числам делает возможными и случаи, когда $a + b < a$, и о сравнительной величине суммы $a + b$ и числа a уже ничего сказать нельзя.

С принципиальной стороны вычитание рациональных чисел проще сложения, так как это действие основывается на прежнем определении разности: разность двух данных чисел есть число, которое надо сложить со вторым данным числом, чтобы получить первое. Однако рассмотрение на основе этого определения различных частных случаев, необходимое для вывода правил, представляет собой весьма кропотливую работу, которую очень упрощает использование теоремы: разность равна сумме уменьшаемого и числа, противоположного вычитаемому. Доказательство этой теоремы сводится к выяснению того, что сумма $a + (-b)$, сложенная с b, даёт a, а это достигается сразу, если использовать сочетательное свойство суммы: $a + (-b) + b = a + [(-b) + b] = a + 0 = a$. Полное изложение требует доказательства единственности этой разности, но эту тонкость можно в VI классе опускать.

Установив возможность замены вычитания рационального числа a сложением с противоположным числом $-a$, отмечаем далее, что вычитание рациональных чисел всегда возможно. Необходимо показать, как иллюстрируется вычитание рациональных чисел на числовой оси (вычитание положительного числа равносильно сложению с отрицательным числом и соответствует на горизонтальной оси переходу налево, вычитание отрицательного числа равносильно сложению с положительным числом и соответстствует переходу направо) и на понятиях: наличные деньги — долг. Наглядное представление операции вычитания отрицательного числа даёт, например, рассмотрение такого случая. У меня в кошельке 10 рублей наличных денег и записка, напоминающая о необходимости уплатить штраф в 3 рубля, так что за вычетом этих 3 рублей я располагаю 7 рублями; получив уведомление, что штраф с меня снят, я уничтожаю записку и располагаю теперь уже 10 рублями; возможна запись всей операции как $7 - (-3) = 10$.

Совместное рассмотрение действий сложения и вычитания рациональных чисел приводит к уяснению свойств алгебраической суммы и к правилам действий над многочленами, что можно отнести к следующей теме («Целые одночлены и многочлены»).

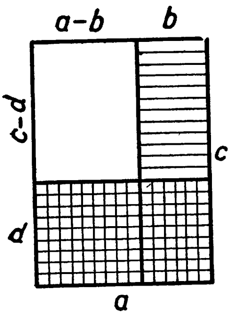
§ 8. Умножение и деление рациональных чисел.

Умножение и деление любого рационального числа на положительное число, натуральное или дробное, не вызывает никаких затруднений для учащихся: рассматривая отрицательное число как особого рода именованное число и пользуясь известным из арифметики определением произведения на натуральное число как суммы равных слагаемых и определением произведения на дробь как дроби от множимого, а также прежним определением частного, легко заключаем, что, например, $(-6) \cdot 3 = (-6) + (-6) + (-6) = -18$, $(-6) : 3 = -2$, $(-6) \cdot \frac{2}{3} = (-6) : 3 \cdot 2 = -4$, иллюстрируем эти операции конкретными примерами (например, ежедневное уменьшение запаса топлива на 6 $м^3$ составляет за 3 дня уменьшение всего на 18 $м^3$), устанавливаем правила умножения и деления любого рационального числа на положительное.

Но умножение на отрицательное число требует принципиально нового важного шага: введения нового определения произведения. Действительно, определение произведения a на число b как суммы b слагаемых, каждое из которых есть a, ничего не даёт в случае, когда b есть, например, -3, а потому все попытки доказать такие равенства, как $4 \cdot (-3) = -12$ или $(-4) \cdot (-3) = +12$, исходя из этого определения, обречены на неудачу. Новое определение произведения должно удовлетворять трём требованиям: во-первых, являясь определением произведения любых двух рациональных чисел, оно должно быть обобщением старого определения, имеющего силу в тех случаях, когда множитель — число положительное; во-вторых, оно должно сохранять основные свойства произведения — его переместительность, сочетательность, распределительность относительно сложения; в-третьих, все задачи о направленных величинах, решаемые действием умножения в случаях, когда эти величины имеют положительное значение, должны решаться умножением же и тогда, когда эти величины получают отрицательные значения. Эти требования составляют содержание так называемого «принципа перманентности» (постоянства, неизменности) законов действий в применении к умножению.

Всем этим требованиям полностью удовлетворяет то определение, которое формулировано в книге [III, 2а] в виде следующего правила: произведение двух множителей равно: 1) произведению абсолютных величин множителей, если оба множителя положительны или оба множителя отрицательны, 2) произведению абсолютных величин множителей, взятому со знаком минус, если один из множителей положителен, а другой отрицателен, 3) нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю.

Формулировав это правило как нечто данное и общепринятое, занимаются далее выводом следствий из него, показывая, что все указанные требования действительно удовлетворены. Но здесь всегда приходится преодолевать некоторое психологическое сопротивление учащихся, с недоумением спрашивающих, почему умножение отрицательного числа на отрицательное приводит к положительному. Это недоумение вполне естественно: в течение ряда лет умножение было для детей сложением равных слагаемых; детям трудно было в V классе усвоить умножение на дробь, ещё труднее — на отрицательное число. Облегчить преодоление этой трудности (только облегчить, но отнюдь не устранить!) может рассмотрение конкретных случаев умножения направленных величин, как, например, в правой части формулы равномерного движения $s = vt$. Стабильное руководство алгебры Киселёва и начинает с этой формулы, разбирая все возможные комбинации знаков и формулируя дальше общее правило. Руководство Александрова и Колмогорова начинает с общего правила и лишь в дальнейшем рассматривает конкретные его приложения, в том числе и к случаю равномерного движения, уменьшая тем самым опасность смешения определения с доказательством, но затягивая это психологическое сопротивление учащихся. Добиться ясности в понимании того, что определяется и что доказывается, необходимо, но на первых порах здесь, как и всегда, нужно обеспечить правильное понимание смысла операции в конкретных частных случаях, гораздо лучше достигающих сознания учащихся, а детали общих формулировок лучше отделывать при подведении итогов работы по данной теме и при повторении.



Фиг. 5.

Отметим краткую, но весьма поучительную справку по истории отрицательных чисел, приведённую в книге [III, 2а]. Вывод формулы $(a-b)(c-d) = ac - bc - ad + bd$ для случая $a > b$, $c > d$ приводит к правилу Диофанта (от умножения вычитаемого числа на прибавляемое и прибавляемого на вычитаемое получается вычитаемое, от умножения вычитаемого на вычитаемое получается прибавляемое) и существенно помогает усвоению современного правила знаков при умножении. Но грубой ошибкой была бы попытка доказать это правило, полагая $a = c = 0$ и выводя из этой формулы, что $(-b)\cdot(-d) = +bd$: ведь эта формула до знакомства с отрицательными числами доказывается только для случая $a > c$, $b > d$ на основе распределительности произведения относительно сложения и вычитания или из геометрических соображений, понятных из чертежа (фиг. 5).

То обстоятельство, что при каждом расширении понятия числа приходится преодолевать затруднения, связанные с необходимостью обобщения ранее введённых определений, частично теряющих силу при переходе в новую числовую область, затруднения, особенно большие для произведения, заставляет искать таких определений, которые сохраняли бы силу, подобно определениям обратных действий, во всех рассматриваемых в школе числовых областях. Попытку такого общего определения произведения представляет собой следующее *определение Лакроа*: «Произведение образуется из множимого так, как множитель образован из положительной единицы». Если добавить к этому определению точное указание способа образования множителя из положительной единицы, т. е. указание на ту *операцию*, какую надо выполнить над числом $+1$, чтобы получить множитель, и какую надо повторить над множимым, чтобы получить в силу этого определения произведение, то это определение может помочь преодолеть трудности, связанные с умножением. Пока речь идёт о натуральных числах, этой операцией является сложение: всякое натуральное число можно получить сложением единиц, отсюда обычное определение произведения на натуральное число как суммы равных слагаемых. Любую дробь (положительную) можно получить делением единицы на некоторое число равных долей и сложением таких долей; отсюда обычное определение произведения на дробь как дроби от множимого. Любое отрицательное рациональное число можно получить из положительной единицы переменой её знака, делением её на надлежащее число равных долей и сложением таких долей; отсюда обычное определение умножения на отрицательное число.

Изложение деталей этого метода расширения понятия числа, применимого не только при изучении рациональных чисел и основанного на истолковании числа как «оператора», можно найти в работах проф. И. В. Арнольда [III, 4].

Усвоив так или иначе умножение двух рациональных чисел, учащиеся легко делают дальнейшие шаги, не представляющие никаких принципиальных трудностей, а именно: знакомятся с вычислением произведений трёх и более множителей, с вычислением степеней a^2, a^3, a^4,..., с правилом деления рациональных чисел. Деление даётся всегда гораздо легче, чем умножение, так как основывается на прежнем хорошо известном определении: частным от деления a на b называется число, которое после умножения на b даёт a. Желая найти, например, частное от деления $+10$ на -2, убеждаемся, что в силу этого определения им является только число -5. Очень желательно не ограничиваться этим формальным решением вопроса, а постараться приобрести и более конкретные представления, рассматривая частные виды направленных величин. Например, если некоторая величина, равномерно уменьшаясь, уменьшилась за 3 дня на 12 единиц, то за один день её уменьшение составляет $12 : 3 = 4$ единицы и эту выкладку вполне характеризует запись $(-12) : (+3) = -4$. Запись $(-12) : (-4) = +3$ даёт ответ на вопрос: сколько дней дадут уменьшение на 12 единиц, если каждый день даёт уменьшение на 4?

Рассматривая умножение и деление рациональных чисел, надо особо остановиться на действиях с нулём: произведение тогда и только тогда равно нулю, когда по крайней мере один из сомножителей есть нуль; частное от деления нуля на любое отличное от нуля число есть нуль, частное от деления на нуль никогда не рассматривается.

§ 9. Задачи на все действия с рациональными числами.

Овладев правилами действий над рациональными числами, учащиеся должны решить много задач-примеров, чтобы закрепить эти свои знания и приобрести прочные навыки. В добавление к тому тренировочному материалу, какой имеется в стабильном задачнике, можно рекомендовать упражнения двух следующих типов.

1. Даётся в готовом виде, без вывода, какое-либо алгебраическое тождество, например $(a^3 - 6a^2 + 12a - 8) : (a^2 - 4a + 4) = a - 2$, с надлежащим указанием относительно допустимых значений букв, в данном случае с указанием, что a может принимать любое значение, кроме $+2$, и предлагается сделать его проверку при ряде произвольных рациональных значений букв. Отмечается, насколько проще вычисление значения правой части по сравнению с левой, и указывается на получение подобных более простых и удобных для вычисления выражений (из дан-

ных более сложных выражений) как на одну из важных задач дальнейшего курса алгебры.

2. Даётся выражение какой-либо несложной функции y (рациональной, одного аргумента x), предлагается найти её значения при некоторых определённо указанных значениях аргумента и отметить соответствующие точки с координатами x, y на графике в прямоугольных координатах. Вводить соответствующую терминологию нет никакой надобности, но необходимо пользоваться клетчатой бумагой (обыкновенной тетрадной или, лучше, миллиметровой). Делаются (в виде догадок, проверяемых дальнейшими вычислениями) заключения о том, по какой линии располагаются эти точки. Например, взяв функцию $y = 10 - 3x$, берём $x = 0$; $+1$, -1, $+2$, -2, $+3$, -3, $+4$, -4 и т. д. Замечая, что все точки графика располагаются на одной прямой, высказываем догадку о том, как расположатся точки, соответствующие промежуточным значениям x, например, $+0{,}5$, $-0{,}5$ («интерполяция»), и надлежащим вычислением убеждаемся в правильности этой догадки.

§ 10. Извлечение квадратного корня. Таблицы квадратов и квадратных корней.

Следующим после введения отрицательных чисел расширением понятия числа является введение иррациональных чисел и переход от множества рациональных чисел к множеству действительных чисел. Но этот переход действующая ныне программа относит к VIII классу, и он будет рассмотрен в главе VI. Однако для VII класса предусмотрена тема «Извлечение квадратного корня», на которую отводится 12 часов в конце года и которая подготовляет введение иррациональных чисел, а вместе с тем имеет и своё собственное значение, независимое от дальнейшего курса математики: действие извлечения корня и в первую очередь квадратного корня встречается в приложениях математики столь часто, что ознакомление с ним молодёжи, выпускаемой из семилетней школы, представляется необходимым.

Понятие квадратного корня как из рационального числа, представляющего собой точный квадрат, когда этот корень выражается точно, так и из любого рационального положительного числа, когда приходится ограничиваться некоторой наперёд указанной точностью, даётся семиклассникам без затруднений и прочно усваивается, если иметь в виду геометрический его смысл, как длины стороны квадрата с данной площадью. Выпускники семилетней школы владеют и обычным способом извлечения квадратного корня из многозначного числа, но применяют его только механически, не отдавая себе отчёта в том, почему нужно поступать так, а не иначе, и допускают в силу этого грубые промахи. Например, желая извлечь квадратный корень из числа 123,8, многие разбивают его на грани от последней цифры, а не от запятой, и получают вместо правильного ответа 11,12 грубо ошибочный 3,52.

Необходимо добиваться сознательного усвоения обычно применяемого способа извлечения квадратного корня из многозначного числа, хотя в программе алгебры отмечается (на стр. 11 по изданию 1952 г.), что требовать от учащихся его логического обоснования излишне. Очень желательно приобретение уменья пользоваться таблицами квадратов и квадратных корней, столь упрощающими и ускоряющими работу вычисления и имеющими повсеместное применение на практике.

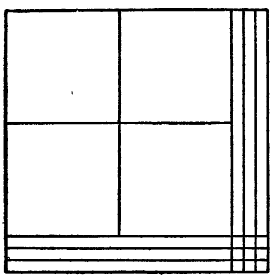
Имея в виду эти обстоятельства, естественно работу над темой «Извлечение квадратного корня» начать с некоторой рационализации возведения чисел в квадрат. Желательно ознакомить семиклассников (если это не было сделано раньше) с формулой $(10+5)^2 = 100a\,(a+1)+25$, упрощающей возведение в квадрат числа с цифрой 5 на конце (например, $85^2 = 100 \cdot 8 \cdot 9 + 25 = 7\,225$; $9\,995^2 = 999 \cdot 1000 \cdot 100 + 25 = 99\,900\,025$), показать выгоды применения формул сокращённого умножения, хотя бы на таком примере, как $49^2 = (50-1)^2 = 2\,500 - 100 + 1 = 2\,401$. Но ещё больше пользы приносит знакомство с таблицей, которое хорошо начать с составления самими учащимися таблицы квадратов двузначных натуральных чисел, расположенной «в два входа» и составляемой очень быстро с помощью одних сложений. Формула $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1 = a^2 + (2a+1)$ говорит, что, зная a^2, получаем $(a+1)^2$ посредством прибавления числа $2a+1$. Сначала записываются квадраты чисел 10, 20, 30, ..., затем заполняются последовательно отдельные строки: $21^2 = 20^2 + 41 = 441$, $22^2 = 441 + 43 = 484$, $23^2 = 484 + 45 = 529$, $24^2 = 529 + 47 = 576$ и т. д. до $29^2 = 784 + 57 = 841$, $30^2 = 841 + 59 = 900$. Получение последнего числа, уже записанного в начале следующей строки, контролирует правильность всех чисел взятой строки. Дети быстро схватывают способ составления таблицы, по собственному почину продолжают её дальше, правильно оценивают выгоды её применения и постоянно пользуются ею в дальнейшем, легко переходя к более полной таблице квадратов, имеющейся в школьном сборнике «Четырёхзначные математические таблицы» (о ней будет речь дальше).

Таблица квадратов чисел от 10 до 100.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	100	121	144	169	196	225	256	289	324	381
20	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
30	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
40	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
50	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
60	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
70	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
80	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
90	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801
100	10000									

Перейдя к задаче извлечения корня, решают её прежде всего **способом систематических проб**, осуществление которых идёт очень быстро при наличии только что рассмотренной таблицы квадратов. Так, желая найти сторону x квадрата площадью в 4 500 *м*^{2}, пробуем последовательно числа 10 (мало, так как $10^2 = 100$), 100 (много, так как $100^2 = 10\,000$), 50 (мало, так как $50^2 = 2\,500$), 70 (много, так как $70^2 = 4\,900$), 60 (мало, так как $60^2 = 3\,600$), 65 (мало, так как $65^2 = 4\,225$), 67 (мало, так как $67^2 = 4\,489$), 68 (много, так как $68^2 = 4\,624$). Итак, $67 м < x < 68 м$, $x \approx 67$ *м* (с точностью до 1 *м* по недостатку). Понятно, что таким же путём можно найти и цифры десятых, сотых и т. д., причём надо выполнять умножение либо непосредственно, либо с помощью более полной таблицы квадратов. Полезно обратить внимание школьников на сходство этого способа систематических проб с теми пробами, какие приходится выполнять при каждом взвешивании с применением гирь.

Следующий шаг — усвоение обычного способа извлечения квадратного корня из многозначного числа — даётся школьникам много труднее. Опыт показывает, что приведённое в учебнике алгебры Киселёва объяснение этого способа (§§ 111 — 112 1-й части по изданию 1952 г.) не усваивается учащимися VII класса, и учителя обычно мирятся с механическим применением способа, что, конечно, крайне нежелательно. Сознательности усвоения очень способствует геометрическое истолкование, о котором можно прочесть, например, в книге [III, 11], допускающее дальнейшее развитие и усовершенствование. Вопрос ставится так: имеется некоторое число квадратных сантиметров, например 529, и их требуется уложить так, чтобы получился квадрат. Замечая, что 529 *кв. см* составляют 5 *кв. дм* 29 *кв. см*, убеждаемся, что в искомый квадрат войдут прежде всего 4 *кв. дм*, образуя квадрат со стороной в 2 *дм* (фиг. 6). Оставшиеся 1 *кв. дм* 29 *кв. см*, или всего 129 *кв. см*, будем укладывать полосками шириной в 1 *см* справа и снизу; на каждую пару таких полосок пойдёт $2 \cdot 2 \cdot 10 = 40$ *кв. см*, и имеющихся 129 *кв. см* хватит на 3 их пары, но не более, причём число 3 получается в результате деления остатка 129 на $2 \cdot 20 = 40$, или, что то же, деления 12 на 4. Уложив эти три пары полосок, получаем новый остаток $129 - 120 = 9$ *кв. см*, который пойдёт на заполнение маленького квадрата (со стороной в 3 *см*), образовавшегося в правом нижнем углу фигуры. Это геометрическое истолкование задачи извлечения квадратного корня позволяет наглядно представить каждый шаг операции и добиться полной сознательности её усвоения.



Фиг. 6.

Задача извлечения квадратного корня из натурального числа ставится в двух видах: во-первых, найти наибольшее натуральное число x, квадрат которого заключается в данном натуральном же числе a, т. е. число x, удовлетворяющее двойному неравенству $x^2 \leq a < (x+1)^2$; во-вторых, найти приближённое значение квадратного корня из данного числа a с указанной наперёд точностью до $1/n$ (обычно до 1, до 0,1, до 0,01, до 0,001 и т. д.); другими словами, требуется найти дробь $\frac{x}{n}$, удовлетворяющую условию $\left(\frac{x}{n}\right)^2 \leq a < \left(\frac{x+1}{n}\right)^2$; эта задача сводится к первой, если $n = 1$. Она аналогична задаче представления обыкновенной дроби в виде десятичной с заданной точностью приближения, и полезно напомнить соответствующую терминологию (приближение с точностью до $\frac{1}{n}$ по недостатку, по избытку), а также выяснить, как производится выбор между приближениями по недостатку и по избытку. Переходя от извлечения квадратного корня из натурального числа к его извлечению из любого рационального положительного числа, надо разобрать важный вопрос об изменении корня при изменении подкоренного числа; необходимо, чтобы учащиеся твёрдо знали, что увеличение числа в 10, 100, 1 000 и т. д. раз вызывает увеличение его квадрата в $10^2 = 100$, $100^2 = 10\,000$, $1\,000^2 = 1\,000\,000$ и т. д. раз, а его корня только в $\sqrt{10} = 3{,}16\ldots$, $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{1000} = 31{,}6\ldots$ и т. д. раз, иллюстрируя эту зависимость наглядными геометрическими примерами, хотя бы такими: в 1 *кв. см* содержится 100 *кв. мм*, а в 1 *кв. м* уже 1 млн. *кв. мм*, а в 1 *кв. км* — миллион миллионов (триллион), или тысяча миллиардов (10^{12}) *кв. мм*.

Заботясь о сообщении оканчивающим семилетнюю школу практических сведений по математике, нужных большинству людей в повседневной жизни, надо иметь в виду и знакомство с извлечением кубического корня. Конечно, здесь нельзя идти дальше способа проб и использования таблиц (хотя бы только таблицы кубов).

Глава III

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В СЕМИЛЕТНЕЙ ШКОЛЕ

§ 11. Буквенная символика.

Курс алгебры в семилетней школе начинается согласно действующей программе в VI классе темой «Буквенные выражения», на изучение которой рекомендуется брать 12 часов. Необходимость этой темы очевидна: приступая к изучению алгебры, дети должны прежде всего ознакомиться с её терминологией, научиться понимать тот особый символический язык, какой применяется в алгебре, научиться пользоваться этим языком. Дело здесь идёт о вещах, по существу чрезвычайно простых, но дающихся начинающим всегда с трудом: во-первых, перейти к обозначению чисел буквами — значит подняться на более высокую ступень абстракции; во-вторых, начинающим неясна цель введения буквенной символики. Переход от конкретных именованных чисел (2 камешка, 2 тетради) к числам отвлечённым (2 единицы) по существу не менее труден, но он происходит постепенно, растягиваясь на несколько лет пребывания в начальной школе, а потому проходит незаметно. Переход же от чисел, имеющих определённое число единиц (числа 2, 10, 100), к неопределённым числам a, b, c, каждое из которых может иметь любое число единиц, целое или дробное, даётся несравненно труднее уже просто в силу того, что совершается в более короткий срок. Предметом особой заботы учителя должно быть всемерное удлинение этого срока: надо начинать постепенно приучать детей к буквенной символике ещё в курсе арифметики в V классе, о чём уже была речь выше. С другой стороны, первые шаги в изучении алгебры надо строить так, чтобы учащиеся уясняли цель введения буквенной символики, надо заботиться о мотивировке буквенного обозначения чисел.

Существуют три пути, дающие такую мотивировку: 1) запись в символической форме различных предложений, более или менее знакомых учащимся в словесной форме; 2) вывод общих формул решения задач; 3) составление и решение простейших уравнений.

На первом пути используются прежде всего законы арифметических действий, отчасти знакомые из курса V класса. Действующая программа содержит раздел «Законы арифметических действий, их формулировка и буквенная запись», которому надо уделить достаточно внимания, полностью используя соответствующий материал учебника Киселёва (ч. 1, §§ 6—9), пополняя его правилами действий над дробями $\left(\text{например, } \frac{a}{b} = \frac{am}{bm}, \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \text{ и т. д.}\right)$, записывая формулами знакомые предложения геометрии, относящиеся к площадям и объёмам. Опыт показывает, что важный навык в буквенной записи предложений о числах даётся учащимся не сразу, а потому крайне важно приучать к ней ещё в курсе арифметики и на первых порах требовать двух записей каждого предложения, а именно в словесной и в символической форме, постепенно переходя к одной символической с обязательным требованием прочесть словами каждую символическую запись.

Отметим переместительное свойство суммы: $a + b = b + a$, а также свойства суммы и разности:

$$a + (b + c) = a + b + c,\ a + (b - c) = a + b - c,\ a - (b + c) = a - b - c,\ a - (b - c) = a - b + c,$$

выражающие сочетательное свойство алгебраической суммы; их иногда называют «правилами прибавления и отнимания сумм и разностей». Убедиться в правильности этих формул проще всего, рассматривая конкретные случаи вычислений, например, такой: «Имея a рублей, я получил денежный перевод на b рублей, причём меня просят передать из них c рублей другому лицу, а остальные оставить себе; сколько денег у меня будет после того, как я выполню эту просьбу?» Задача допускает два способа решения: я могу сперва узнать, сколько денег останется из полученных b рублей после уплаты c рублей, а именно: $b - c$ рублей, а потом к имеющимся a рублям прибавить этот остаток $b - c$, получится всего $a + (b - c)$, но могу сперва узнать, сколько денег будет у меня после прибавления к наличным a рублям ещё полученных b рублей, а затем сколько останется, если я из этой суммы $a + b$ уплачу c, что даёт $(a + b) - c$, или короче $a + b - c$. Ясно, что оба способа дают одно и то же, а потому $a + (b - c) = a + b - c$. Аналогичные пояснения можно рекомендовать и для остальных трёх формул, равно как и для формул, относящихся к умножению и делению, например, $(a + b) c = ac + bc$, $(a - b) c = ac - bc$. Подобная конкретизация больше даёт детям, чем формальный вывод на основе аксиом и определений, и обеспечивает правильное и сознательное применение выведенных формул.

Полезно отчётливо представлять себе (не для разбора с шестиклассниками), что, например, равенство $a + b + c = c + a + b$ является следствием не одного только переместительного свойства суммы, а переместительного и сочетательного вместе. Самая возможность опускать скобки при сложении трёх (или более) чисел есть следствие сочетательного свойства:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Действительно, в силу него, мы можем истолковывать $a + b + c$, как $(a + b) + c$ и как $a + (b + c)$, не делая ошибки. Итак,

$$a + b + c = (a + b) + c = c + (a + b) = c + a + b.$$

Мы видим, что здесь пришлось практически опираться на о б а свойства суммы.

Второй путь — вывод общих формул решения арифметических задач в том виде, в каком он обычно даётся, мало разъясняет начинающим ценность буквенного обозначения, так как иллюстрируется примерами, в которых составление общего решения не облегчает проведения выкладок в частных случаях.

Больший эффект даёт составление общих решений тогда, когда это общее решение действительно упрощает последующую работу. Так, если учащиеся вынесли из курса арифметики V класса уменье находить площадь круга («площадь круга приблизительно в 3,14 раза больше площади квадрата, построенного на его радиусе») и объём цилиндра («цилиндр высотой в 1 *см* содержит столько кубических сантиметров, сколько квадратных сантиметров содержит его основание»), то можно поставить, например, вопрос о разыскании удобного способа вычисления веса медной проволоки данного диаметра и данной длины, имея в виду, что 1 *см*^{3} меди весит 8,8 *г*. Вычислив этот вес для какого-либо частного случая, например для диаметра 0,4 *мм* и длины 600 *м*, обычным способом, требующим выполнения ряда выкладок (0,4 : 2 = 0,2 *мм* = 0,02 *см*; 0,02 · 0,02 = 0,0004 *см*^{2}, 0,0004 · 3,14 = 0,001256 *см*^{2}, 0,001256 · 60 000 = 75,36 *см*^{3}, 8,8 · 75,36 = 663,344 *г* ≈ 0,66 *кг*), и имея в виду, что такого рода расчёты приходится выполнять довольно часто, решаем задачу в общем виде, предполагая, что проволока (медная) имеет диаметр d *см* и длину a *м*: радиус круга, представляющего собой основание цилиндра, равен $0,5d$, площадь квадрата, на нём построенного, равна $0,25d^2$, площадь круга $0,25d^2 \cdot 3,14 = 0,785\ d^2$ *кв. см*, объём цилиндра $0,785d^2 \cdot 100a = 78,5ad^2$ *куб. см*, вес проволоки $8,8 \cdot 78,5ad^2 = 690,8ad^2$ *г* $\approx 0,69ad^2$ *кг*. Обычно применяется несколько менее точная, но легче запоминаемая формула $P = 0,7ad^2$, где a — длина в метрах, d — диаметр в сантиметрах, P — вес в килограммах. Легко видеть, насколько применение этой формулы упрощает расчёт в каждом частном случае.

Убедительно показать пользу общих решений задач на примерах, подобных приведённому, можно лишь при некотором довольно высоком общем развитии учащихся, не всегда имеющемся налицо у учащихся VI класса. Поэтому нельзя придавать большого значения этому пути введения буквенных обозначений в школе.

Гораздо более поучительным для шестиклассников оказывается третий путь — составление и решение простейших уравнений. Берутся задачи, которые уже решались особыми приёмами в курсе арифметики, и разъясняется общий метод их решения, основанный на введении символа для неизвестной величины. Пусть требуется, например, решить следующую задачу «на предположение»: 8 руб. 65 коп. выплачено 20-копеечными и 15-копеечными монетами, всего дано в уплату 50 монет; сколько дано монет каждого достоинства?» (Задачник Березанской, № 455). Обозначив число 20-копеечных монет буквой x, приходим к уравнению $20x + 15 \cdot (50 - x) = 865$, которое можно решить, ничего не зная ни об уравнениях, ни о тождественных преобразованиях, а пользуясь только определениями и свойствами арифметических действий. Вот решение, доступное начинающим изучать алгебру шестиклассникам:

$20x + (750 - 15x) = 865$... использовано распределительное свойство произведения на разность, выражаемое формулой $a(b-c) = ab - ac$;

$20x + 750 - 15x = 865$... использовано правило: чтобы прибавить разность, надо прибавить уменьшаемое и затем вычесть вычитаемое;

$750 + 20x - 15x = 865$... использовано переместительное свойство суммы;

$750 + (20x - 15x) = 865$... ещё раз использовано правило прибавления разности (но в обратном порядке);

$750 + 5x = 865$... рассматривая числа $20x$ и $15x$ как особого рода именованные однородные числа, заменяем разность $20x - 15x$ через $5x$, подобно тому как разность 20 *м* — 15 *м* заменяется через 5 *м*, 20 лет — 15 лет — через 5 лет и т. д.

$5x = 865 - 750 = 115$... каждое слагаемое равно сумме без остальных слагаемых;

$x = 115 : 5 = 23$..., если $5x$ равны 115, то 1 x в 5 раз меньше.

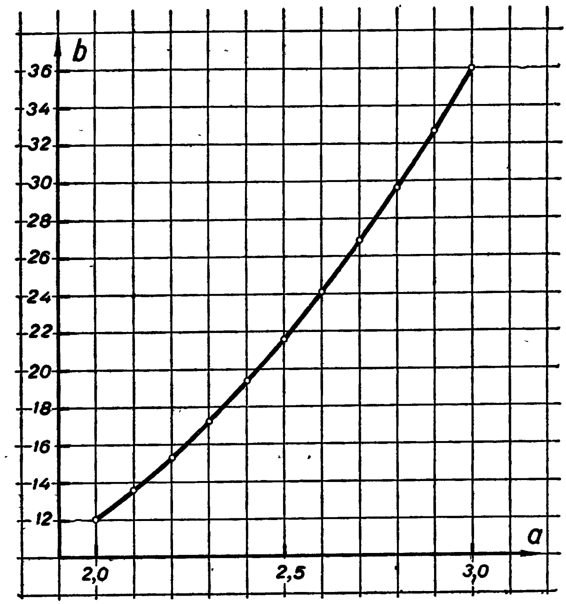
Итак, уплачено 23 20-копеечных и $50 - 23 = 27$ 15-копеечных монет.

Такого рода решения предусмотрены действующей программой в первой же теме курса алгебры («Буквенные выражения»), и ей надо уделить достаточно внимания. Дети быстро оценивают всю силу метода решения задач с помощью уравнений и мало-помалу приобретают навык в его применении. Раннее введение понятия об уравнении и его решение предусмотрено и руководством алгебры П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова. Более подробно оно разобрано в книге [III, 28б].

Весь остальной материал первой темы программы алгебры вполне обеспечен стабильными учебниками. Необходимо добиться навыка в переходе от задания алгебраических выражений и формул в словесной форме к символической (буквенной) их записи, и обратно, хорошо использовав материал первых двух параграфов стабильного задачника. Занимаясь подстановкой числовых значений букв в алгебраические выражения, полезно давать готовые тождества, предлагая убедиться, что вычисление значений обеих частей при всех допустимых значениях букв даёт одно и то же. Например, можно предложить проверить справедливость равенств:

$$\frac{27x^3 - 8y^3}{9x^2 + 6xy + 4y^2} = 3x - 2y, \quad \frac{27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3}{9x^2 - 12xy + 4y^2} = 3x - 2y$$

при произвольных данных значениях x и y, удовлетворяющих условию $3x \gtreqless 2y$, хотя бы при $x = 5$, $y = 2$, или предоставить



Фиг. 7.

каждому выбор собственных значений. Обычно практикуемое вычисление числовых значений выражения, содержащего лишь одну букву, т. е. вычисление значений функций одного аргумента, можно сделать несравненно более интересным для учащихся, если сопровождать построением графика в прямоугольных координатах. Так, взяв, например, выражение $b = a^3 + 2a^2 - 5a + 6$, предлагаем найти его значение при $a = 2$; 2,2; 2,3 и т. д., хотя бы с точностью до десятых, а затем показать на куске клетчатой бумаги все точки, определяемые парами соответствующих значений a, b, выбрав подходящий масштаб и указав начальные линии отсчёта. Построение графика, изображённого на фигуре 7, представляет собой работу, вполне посильную для учащихся VII класса и выполняемую ими с неизменным интересом.

Ещё одно замечание, относящееся к деталям. Часто наблюдаемое смешение знаков $>$ (больше) и $<$ (меньше) радикально устраняется, если отметить, что в знаке $=$ (равно) расстояние между концами чёрточек слева и справа одинаково, а в знаках «больше» и «меньше» различно, причём большее расстояние оказывается ближе к большему числу.

§ 12. Виды и назначение тождественных преобразований.

Имея сумму $a+a+a+a$, мы можем записать её короче, как $4a$; левую часть уравнения, рассмотренного выше, а именно: $20x+15\cdot(50-x)$, мы привели к виду $750+5x$. Ясно, что $4a$ есть то же самое выражение $a+a+a+a$, но записанное в ином виде, а выражение $750+5x$ то же самое выражение $20x+15\cdot(50-x)$, но иначе, а именно: короче записанное. Каково бы то ни было значение a, всегда $a+a+a+a=4a$; каково бы ни было значение числа x, всегда $20x+15\cdot(50-x)=750+5x$. Как говорят, здесь мы имеем два *тождества* (два *тожества*), или два *тождественных равенства*: тождество определяется как равенство, верное при любых допустимых значениях входящих в него букв, а переход от одной части тождества к другой его части (от левой к правой или от правой к левой) называют *тождественным преобразованием*. Уже начинающему изучать алгебру ясно, что уменье придать сложному буквенному выражению более простой вид имеет большое значение и что в силу этого алгебра должна уделять тождественным преобразованиям много внимания (в этом вполне убеждают уже упражнения, подобные рассмотренным выше, на стр. 233).

Отметим одну деталь: определяя тождество как равенство, имеющее место при всех значениях входящих в него букв, надо сделать оговорку о том, что берутся лишь *допустимые* значения этих букв, т. е. такие, при которых обе части равенства имеют смысл. Например, рассматривая равенство $\frac{x^2-4}{x-2}=x+2$, мы можем брать любое значение x, кроме $x=2$, так как левая часть при $x=2$ теряет смысл.

Указывая, что тождественные преобразования имеют целью, вообще говоря, представление более сложных выражений в более простом виде, надо иметь в виду, что одно и то же выражение может быть более сложным в одних отношениях и более простым — в других. Так, имея тождество $(a^2+2a+2)(a^2-2a+2)=a^4+4$, мы в некоторых случаях предпочтём правую его часть, как, например, при вычислении числовых значений, а в некоторых — левую (например, если это выражение является знаменателем дроби).

В семилетней школе рассматриваются только рациональные алгебраические выражения, т. е. выражения, составленные из чисел, выраженных буквами или цифрами, при помощи четырёх арифметических действий, а именно сложения, вычитания, умножения и деления, притом повторённых конечное число раз. Возведение в степень (с натуральным показателем) есть особый случай умножения, и применение этого действия не нарушает рациональности алгебраического выражения. Рациональное выражение называется целым, если в нём нет деления с буквенным делителем, и дробным, если такое деление имеется.

Одночленом называется произведение, состоящее из множителя, выраженного цифрами (коэффициента), и одной или нескольких букв, взятых каждая в определённой степени; одночленом считается и отдельное число, выраженное цифрами; многочленом называется всякая алгебраическая сумма одночленов. Согласно этому определению, предложенному в книге [III, 2a] и заслуживающему решительного предпочтения перед старым, целое рациональное выражение $(a+b)^3$ не является ни одночленом, ни многочленом, но может быть представлено в виде многочлена $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. Имеет место теорема: *всякое целое выражение может быть преобразовано в тождественно равный ему одночлен или многочлен*. Представление всякого целого рационального выражения в виде многочлена, расположенного по нисходящим степеням главной буквы, есть его приведение к «нормальному», или «каноническому», виду $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$. При наличии нескольких равноправных букв, т. е. когда данное целое рациональное выражение является функцией не одной, а двух или более независимых переменных, применяется «лексикографическое» («словарное») расположение. Так, считая, что x предшествует y, имеем следующий нормальный вид целого рационального выражения 2-й степени: $a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+a_{10}x+a_{01}y+a_{00}$. Нормальным видом для всякого дробного рационального выражения является представление его в виде частного от деления двух многочленов без общих множителей.

Изложение научного содержания вопроса о тождественных преобразованиях рациональных выражений можно найти в статье [III, 3].

В семилетней школе изучаются тождественные преобразования рациональных выражений, в VI классе — целых, как одночленов, так и многочленов, а в VII классе — дробных. Параллельно расширяется понятие числа, составляются и решаются уравнения.

§ 13. Приведение подобных членов. Сложение и вычитание многочленов.

Усвоив понятие коэффициента, учащиеся легко овладевают и действием приведения подобных членов, которое представляется им вполне сходным с действием сложения или вычитания именованных чисел: $5x^2y+7x^2y=12x^2y$, $8a^3-5a^3=3a^3$, так как 5 каких-то чисел вместе с 7 такими же числами дают 12 таких же чисел, а если от 8 одинаковых чисел мы отнимаем 5 таких же чисел, то получим в остатке 3 таких числа.

Сложение и вычитание одночленов фактически не выполняется, а только обозначается (с последующим приведением подобных членов, если таковые оказываются). Сложение и вычитание многочленов сводится к обобщению на любую алгебраическую сумму формул $a + (b + c) = a + b + c$, $a + (b - c) = a + b - c$, $a - (b + c) = a - b - c$, $a - (b - c) = a - b + c$, о которых была речь выше (в § 11), что выгодно начать с новой словесной их формулировки, объединяя их попарно: чтобы прибавить алгебраическую сумму ($b + c$ или $b - c$), надо опустить знак $+$, поставленный перед ней, опустить скобки, в которые она заключена, и приписать все её члены с теми знаками, с какими они записаны, имея в виду, что отсутствие знака перед числом равносильно наличию перед ним знака $+$; чтобы отнять алгебраическую сумму ($b + c$ или $b - c$), надо опустить знак, поставленный перед ней, опустить скобки, в которые она заключена, и приписать все её члены со знаками, противоположными тем, с какими они записаны. Добившись понимания равносильности этих двух правил обычным четырём правилам арифметики, относящимся к прибавлению и отниманию суммы и разности, нетрудно обеспечить как прочное их усвоение, так и уверенное их применение.

§ 14. Умножение одночленов и многочленов. Формулы сокращённого умножения.

Правила умножения очень просты и обычно легко усваиваются учащимися, но если учитель недостаточно заботится об обеспечении сознательности при их изучении, всегда возможны казусы вроде того, что кто-либо из учащихся напишет $5x^2 \cdot 3x^4 = 5 \cdot 3 \cdot x^{2 \cdot 4} = 15x^8$. Умножение одночленов целиком основано на двух свойствах произведения, а именно: переместительном и сочетательном, а при умножении многочленов используется, кроме того, ещё распределительное свойство. Формулы $ab = ba$, $abc = a(bc)$, $(a + b) \cdot c = ac + bc$, где буквы означают любые числа, являются той базой, на которой должно строиться изучение умножения алгебраических выражений. При выводе отдельных правил надо помнить о необходимости постепенного перехода от более лёгких вопросов к более трудным, избегать преодоления нескольких трудностей сразу, идти от частного к более общему, от более конкретного к более абстрактному, не откладывая практических применений полученных общих правил алгебры в арифметике и геометрии, предупреждать неправильные толкования.

Пусть, например, выводится правило умножения степеней одного основания. Дело сводится к сознательному и прочному усвоению следующего рассуждения (a — любое число, n и k — натуральные числа):

$a^n \cdot a^k = \underbrace{(aa\ldots a)}_{n \text{ раз}} \cdot \underbrace{(aa\ldots a)}_{k \text{ раз}}$ — (по определению степени с натуральным показателем)

$= \underbrace{aa\ldots a}_{n \text{ раз}}\underbrace{aa\ldots a}_{k \text{ раз}}$ — (по правилу: чтобы умножить на произведение, надо умножить последовательно на все его сомножители)

$= \underbrace{aaa\ldots a}_{n+k \text{ раз}}$ — (подсчитано общее число сомножителей)

$= a^{n+k}$ — опять использовано определение степени с натуральным показателем).

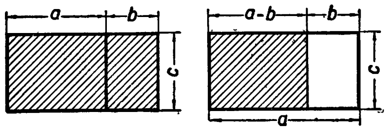
Это рассуждение приводит к правилу, т. е. к словесному выражению формулы $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$: при умножении степеней одного и того же числа получается степень того же числа с показателем, равным сумме показателей сомножителей. Однако было бы методической ошибкой давать это коротенькое рассуждение в VI классе сразу, без предварительной подготовки через рассмотрение ряда частных случаев; эта подготовка ведётся сперва только на числах, например, $2^3 \cdot 2^2 = 2^5$, допускающих лёгкую проверку, потом постепенно переходя к буквенному обозначению основания и показателей: $a^3 \cdot a^2 = a^5$, $2^k \cdot 2^n = 2^{k+n}$, $a^k \cdot a^n = a^{k+n}$. Поучительно разобрать часто допускаемые ошибки вроде следующих: $2^5 \cdot 3^2 = 6^{5+2} = 6^7$; $2^3 + 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$ (полезно отметить правильную формулу $a^n b^n = (ab)^n$, предложив самостоятельно доказать её и дать словесную её формулировку).

Умножение одночленов можно считать усвоенным только тогда, когда ученики в состоянии не только точно формулировать соответствующее правило и применять его в каждом конкретном случае, например, найти $(+3a^2b) \cdot (-12a^3b^2c) = -36a^5b^3c$, но и свести вопрос к использованию определения степени и свойств произведения, т. е. обосновать это правило для данного случая, проведя примерно такое рассуждение (конечно, с указанием основания каждого шага):

$$\begin{gathered}(+3a^2b) \cdot (-12a^3b^2c) = (3aab) \cdot (-12aaabbc) = \\ = 3aab \cdot (-12)\,aaabbc = 3 \cdot (-12)\,aaaaabbbc = \\ = (-36) \cdot (aaaaa) \cdot (bbb) \cdot c = -36a^5b^3c.\end{gathered}$$

Нужно, чтобы учащиеся умели применять это правило в арифметике, например, для получения произведения чисел $96 = 2^5 \cdot 3$ и $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ в виде $2^9 \cdot 3^3 \cdot 5$, с естественной проверкой ($96 \cdot 720 = 69\,120$; $2^9 \cdot 3^3 \cdot 5 = 256 \cdot 27 \cdot 10 = 69\,120$), и в геометрии, например, для вычисления объёма V прямоугольного столба с квадратным основанием по данной стороне этого основания, равной $5a$ *см*, и высоте столба, равной $8a$ *см* ($V = 25a^2 \cdot 8a = 200a^3$ *куб. см*), или для вычисления объёма цилиндра с радиусом основания r и высотой, равной поперечнику основания ($V = 3{,}14r^2 \cdot 2r = 6{,}28r^3$). Надо иметь в виду, что ученик, усвоивший правило умножения одночленов в общем виде и умеющий применять его к решению задач-примеров обычно отвлечённого характера, приводимых в задачнике, нередко делает ошибки при его применении в случаях, подобных указанным, что свидетельствует о формальном характере усвоения.

Правило умножения многочленов основано на тех же свойствах переместительности и сочетательности суммы и произведения и на свойстве распределительности умножения относительно сложения. Ясному пониманию формулы $(a+b)\cdot c = ac + bc$ и легко выводимой из неё формулы $(a-b)\cdot c = ac - bc$, выражающей распределительное свойство произведения относительно вычитания, существенно способствует рассмотрение надлежаще подобранных арифметических и геометрических задач вроде следующих: «Каждому из c учеников дали сперва a тетрадей, потом b тетрадей; сколько всего тетрадей роздано?» Два способа решения задачи приводят к двум выражениям ответа, а именно: $(a+b)\cdot c$ и $ac+bc$, равным друг другу. «Каждому из c учеников даём сперва a тетрадей, потом берём назад по b тетрадей $(b<a)$; сколько тетрадей осталось у всех учеников класса?» Два способа решения задачи приводят к равенству $(a-b)\cdot c = ac - bc$. «Чему равна площадь каждого из двух заштрихованных прямоугольников, изображённых на фигуре 8?» Выражая каждую площадь двумя способами, получаем те же две формулы (первую для случая, когда числа a, b, c положительны, вторую для случая, когда, кроме того, $a>b$).



Фиг. 8.

Рассматривая ряд частных примеров с числами, не удовлетворяющими этим условиям, убеждаемся, что формулы $(a \pm b)\cdot c = ac \pm bc$ сохраняются и в других случаях. Педантичное рассмотрение всех возможных случаев слишком громоздко и в VI классе неуместно — приходится ограничиваться проверкой на частных случаях и отмечать, что доказана и полная общность этих формул для всех значений a, b, c, рекомендуя изучение этого доказательства более сильным учащимся хотя бы в том виде, в каком оно дано на стр. 76—77 книги [III, 2а].

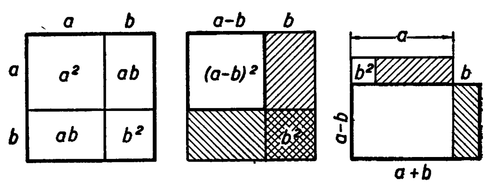
Выводу формулы $(a+b)\cdot(c+d) = ac + bc + ad + bd$ надо уделить достаточно внимания, рассматривая и формальный её вывод, основанный на замене суммы $a+b$ одной буквой s, и проверку на числах, например, полагая $a=2$, $b=0{,}5$, $c=3$, $d=0{,}25$, и геометрическую иллюстрацию через площадь прямоугольника. Если считать свойства переместительности, сочетательности и распределительности доказанными для всех чисел, то эта формула произведения суммы на сумму получается сразу для любых чисел, но тем не менее полезно особо рассмотреть формулы $(a+b)\times\times(c-d) = ac + bc - ad - bd$, $(a-b)\cdot(c-d) = ac - bc - - ad + bd$. После этого вывод правила умножения любого многочлена на любой одночлен и любой многочлен не представляет затруднений.

Важнейший случай умножения многочленов — умножение целых рациональных функций одного аргумента. Желательно располагать сомножители по возрастающим или убывающим степеням аргумента («главной буквы») и члены произведения подписывать так, чтобы подобные оказались в одном столбике.

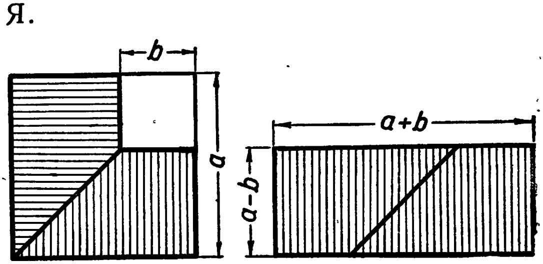
Особого внимания требуют формулы сокращённого умножения, применяемые на практике столь часто, что их необходимо твёрдо запомнить. Однако неправильно требовать их запоминания с самого начала: пусть учащиеся умеют вывести каждую из них, выполняя умножение соответствующих многочленов, пусть умеют выразить каждую из них словами и решают задачи на их применение; запоминание получается при этом почти всегда само собой. Полезно добиться уменья решать каждую задачу на применение этих формул двумя способами, во-первых, как задачу на умножение многочленов, и во-вторых, используя одну из формул сокращённого умножения. Требуя сперва обязательного решения обоими способами, в дальнейшем предоставляем учащимся право выбора одного из них, и это быстро обеспечивает запоминание этих формул.

Большую ценность представляют применения формул сокращённого умножения в арифметике (в программе есть упоминание об их применении в устных вычислениях). Например, вычисление 29^2 легко выполняется по формуле квадрата разности, а именно: $29^2 = (30 - 1)^2 = 30^2 - 2 \cdot 30 \cdot 1 + 1^2 = 900 - 60 + 1 = 841$, а вычисление 29^3 — по формуле куба разности, дающей $30^3 - 3 \cdot 30^2 + 3 \cdot 30 - 1 = 24\,389$. Иногда выгодно бывает использовать ту или другую из этих формул не как формулу умножения, а «задним ходом», т. е. как формулу разложения на множители, подготовляя последующее изучение этой операции (например, для вычисления $37^2 - 13^2 = 50 \cdot 24 = 1\,200$).

Геометрическое истолкование формул квадрата суммы, квадрата разности, разности квадратов, показано на фигуре 9. Его усвоение существенно улучшает прочность запоминания формул, делая почти невозможными ошибки, нередко допускаемые учениками, забывающими о членах с удвоенными произведениями. Другое, более простое геометрическое истолкование формулы разности квадратов показано на фиг. 9а (рекомендовал его проф. И. Я. Депман). Несколько более сложно, но тоже посильно для шестиклассников и геометрическое истолкование четырёх последних формул сокращённого умножения, требующих перехода в пространство.



Фиг. 9.



Фиг. 9а.

Необходимо самое внимательное отношение к точности словесных формулировок, в частности к уменью различать квадрат разности и разность квадратов, куб суммы и сумму кубов и т. д. Не следует требовать дословного запоминания приведённых в учебниках формулировок, полезно даже поощрять составление правильных вариантов, но все допускаемые неточности надо отмечать и исправлять.

Изучение формул сокращённого умножения продолжается и в дальнейшем курсе: в IX классе геометрическая прогрессия приводит к тождеству $a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\cdot(a^n+a^{n-1}b+\ldots+ab^{n-1}+b^n)$, вновь рассматриваемому в X классе в связи с теоремой Безу, а формула бинома Ньютона (X класс) даёт обобщение формул квадрата и куба двучлена на случай любого натурального показателя.

Подводя итоги, полезно ввести термины «рациональное алгебраическое выражение», «целое рациональное алгебраическое выражение» и формулировать два вывода: «всякое целое рациональное алгебраическое выражение можно представить в виде многочлена» и «всякое целое рациональное алгебраическое выражение имеет смысл при любых числовых значениях входящих в него букв», или, что то же, «для целого рационального алгебраического выражения допустимы все значения входящих в него букв».

§ 15. Деление одночленов и многочленов.

Зная формулу умножения степеней одного и того же основания, легко получить формулу $a^n : a^k = a^{n-k}$, верную при условиях $a \neq 0$, $n > k$, и наряду с нею формулу $a^n : a^n = 1$, верную при $a \neq 0$ и любом n (показатели рассматриваются только натуральные). Рассмотрение деления степеней одного основания в случае, когда показатель степени делимого меньше показателя степени делителя, откладывается до VII класса. Не вызывает затруднений и деление любого одночлена на одночлен. Деление многочлена на одночлен хорошо начать с рассмотрения формул $(a \pm b) : c = a : c \pm b : c$, выражающих распределительное свойство деления по отношению к сумме и разности и доказываемых простой проверкой с помощью распределительного свойства произведения или через рассмотрение двух способов решения задач вроде такой: если c ученикам роздано поровну a тетрадей в клетку и b тетрадей в одну линейку, сколько всего тетрадей получил каждый?

Наибольшие трудности при изучении деления представляет деление многочлена на многочлен. И при постановке вопроса, и при выводе правила очень полезно провести аналогию с делением многозначных натуральных чисел.

Вопрос о доказательстве существования и однозначности частного и остатка в семилетней школе ставить не приходится; совершенно достаточно, если учащиеся умеют найти их в каждом отдельном случае.

Рекомендуется требовать проверки деления умножением. Другой способ проверки, менее надёжный, но быстрее осуществляемый, состоит в замене буквы каким-нибудь числом, не обращающим делитель в 0. Если после такой замены получаются значения делимого (a), делителя (b), частного (c), остатка (r), не удовлетворяющие равенству $a = bc + r$, то надо искать ошибку (либо в выполнении деления, либо в проверке). Получение же этого равенства ещё не гарантирует отсутствие ошибки, но свидетельствует о малой её вероятности.

Не лишне предостеречь от затраты слишком большого времени на формулы «сокращённого деления». Важнее других формулы деления разности квадратов и кубов двух чисел на сумму и разность этих чисел и суммы кубов на сумму первых степеней, но это те же формулы сокращённого умножения, только по-иному записанные. Другие же формулы, приведённые в школьном задачнике, применяются слишком редко, и их едва ли стоит запоминать. Вполне возможно ограничиться уменьем вывести их всякий раз, когда встречается в этом надобность.

§ 16. Разложение многочленов на множители.

Последняя тема курса алгебры в VI классе — «Разложение многочленов на множители» — многими считается самой трудной из всего курса алгебры в семилетней школе.

В то время как в большинстве других тем алгебры решение задач требует лишь отчётливого знания одного какого-либо приёма, движения по одному совершенно определённому пути, здесь таких путей почти всегда несколько, и нужен правильный выбор. Недаром опытные учителя математики говорят, что разложение многочленов на множители — ключ ко всему дальнейшему курсу алгебры.

Программа предусматривает усвоение трёх способов разложения: вынесение общего множителя за скобку, группировки, применения формул сокращённого умножения и деления; особое место занимает разложение на линейные множители квадратного трёхчлена с целыми коэффициентами. Многие считают, что после рассмотрения способа вынесения общего множителя следует взять сперва применение формул сокращённого умножения и деления, и только после этого переходить к способу группировки, дающемуся всегда труднее. Действительно, выяснение возможности применения той или иной формулы производится легко, указание даёт уже простой подсчёт числа членов, а группировку можно пробовать многими способами, большинство которых ничего не даёт.

При постановке вопроса о разложении многочлена на множители полезно провести аналогию с вопросом о хорошо известном с V класса разложении на множители натуральных чисел, указывая, что и там и тут целью является в первую очередь упрощение дробей. Хотя сокращение алгебраических дробей программа относит в курс VII класса, можно рекомендовать рассмотрение отдельных примеров такого сокращения уже в VI классе как средство осмыслить для шестиклассников тему разложения на множители. Одной из задач школьной алгебры является разыскание способов упрощать алгебраические выражения, не меняя их числового значения при любых значениях входящих в них букв; эту мысль полезно проводить, как уже указывалось, с первых уроков алгебры. Убедившись путём проб, что при любом значении буквы x

(отличном от -1 и от $+1{,}5$) выражение $(8x^3-36x^2+54x-27):(4x^3-8x^2-3x+9)$ даёт то же самое числовое значение, что и выражение $(2x-3):(x+1)$, естественно поставить вопрос о том, как получить второе выражение из первого.

Стоит отметить, что задача сокращения рациональной дроби допускает решение и без разложения числителя и знаменателя на множители: общий наибольший делитель двух многочленов можно найти, выполняя только ряд делений (алгорифм Евклида!).

Изучив три основных приёма, переходят к решению задач на комбинированное их применение. Рекомендуется держаться такого порядка: желая разложить на множители данный многочлен, надо сперва выяснить, нет ли общего множителя у всех его членов, и вынести его за скобку, если он есть; далее устанавливают, нельзя ли применить к тому, что осталось в скобке, одну из формул сокращённого умножения и деления, а после этого начинается комбинирование (группировка) членов, возможная многими способами. При разложении на линейные множители квадратного трёхчлена приходится применять четвёртый основной приём — замену одного члена суммой или разностью двух ему подобных, как, например, при разложении $4x^2+16x+15=4x^2+6x+10x+15=2x(2x+3)+5(2x+3)=(2x+3)(2x+5)$ или $4x^2-4x-15=4x^2+6x-10x-15=2x(2x+3)-5(2x+3)=(2x+3)(2x-5)$. Надо показать учащимся на ряде примеров, что кроме самых простых случаев, когда способ разложения усматривается сразу по виду данного многочлена, необходимы систематические попытки. Так, решая задачу разложения на множители многочлена $a^2b^2+c^2d^2-a^2c^2-b^2d^2-4abcd$, лишь после ряда неудачных попыток группировки удаётся напасть на правильную мысль сочетать группировку с заменой члена $-4abcd$ двумя членами, равными каждый $-2abcd$, после чего данный многочлен легко приводится к разности двух квадратов.

Нередко попадаются задачи на разложение многочленов, трудные не только для учащихся, но и для учителя. Чтобы решить их, полезно бывает вспомнить некоторые предложения высшей алгебры. Целая рациональная функция одного аргумента с действительными коэффициентами, как известно, всегда разложима на линейные и квадратные множители с действительными же коэффициентами, но в случае функции с рациональными коэффициентами, с которыми только и приходится иметь дело в семилетней школе, эти линейные и квадратные множители далеко не всегда имеют рациональные коэффициенты (однако, если существует разложение целочисленной функции на множители с дробными коэффициентами, то существует и её разложение на множители с целыми коэффициентами). Так, $x^4+4=(x^2+2)^2-4x^2=(x^2+2+2x)(x^2+2-2x)$, но представить x^4+1 в виде произведения многочленов с рациональными коэффициентами уже невозможно: $x^4+1=(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)$. Разложить на множители целую рациональную функцию двух и более аргументов возможно далеко не всегда. В случае функций второй степени от двух аргументов условие возможности разложения на множители (линейные) есть не что иное, как условие распадения, соответствующего конического сечения на пару прямых. Взяв, например, произведение $(2x-3y+1)(x+2y-3)=2x^2+xy-6y^2-5x+11y-3$, можно предложить более сильным ученикам задачу: разложить этот многочлен на линейные множители с целыми коэффициентами. Относительно многочлена $2x^2+xy-6y^2-5x+11y+1$ вопрос приходится ставить иначе: разложить этот многочлен на линейные множители с целыми коэффициентами или доказать, что такого разложения не существует (здесь надо применить метод неопределённых коэффициентов).

Занимаясь разложением многочленов на множители, особенно легко выделить группу учащихся, более способных к математике и более ею интересующихся, и давать им дополнительные задания вроде следующего: доказать, что число вида a^2-1, где a натуральное число, не делящееся ни на 2, ни на 3, всегда делится на 24; доказать, что всякое число вида a^4+4, где a натуральное число, большее 1, всегда составное, и т. д.

§ 17. Алгебраические дроби.

Преобразованию дробных рациональных алгебраических выражений посвящается довольно много времени в курсе VII класса. Хотя идейное содержание этого раздела весьма скудно, не представляя по существу ничего нового по сравнению с изучаемой в V классе темой «Арифметические дроби», приходится уделять немало часов выработке прочных навыков в преобразованиях алгебраических дробей; затруднения и ошибки в таких преобразованиях на экзаменах показывают, что на эту сторону дела надо обратить больше внимание.

Изучая арифметику в V классе, учащиеся исходят из наглядных представлений: там дробь — только некоторое число равных долей какой-то величины, принимаемой за единицу. Порывать с этими наглядными представлениями нельзя никогда: дробь $\frac{a}{b}$ остаётся прежде всего общей записью величины, получаемой в результате деления некоторой другой величины на b равных долей и суммирования a таких долей. Однако уже семиклассники должны понимать, что смысл алгебраической дроби $\frac{a}{b}$ более широк: это особая форма записи частного от деления совершенно произвольного числа, обозначенного буквой a, на другое, уже не совсем произвольное число b (оно не может иметь значения, равного нулю). В связи с этим вывод правил действий над алгебраическими дробями приходится строить не столько на рассмотрении различных вопросов, возникающих по поводу долей единицы, например, равных частей отрезка или равных секторов круга, а на основе законов действий и прежде всего свойств частного. Отрываться от арифметики нельзя, надо обеспечить живое понимание учащимися теснейшей связи арифметики с алгеброй, но надо добиваться и понимания того обобщения арифметических определений, теорем, правил, какое мы имеем в алгебре. При изучении алгебраических дробей на первое место выдвигаются предложения о свойствах частного. Так, чтобы оправдать правило сложения дробей с одинаковыми знаменателями, устанавливаем распределительное свойство частного относительно сложения, выражаемое формулой $(a+b):c=a:c+b:c$ и, переставляя места обеих частей, получаем нужную формулу.

Отметим несколько деталей работы с алгебраическими дробями.

1. В большинстве случаев целью преобразования дробного рационального алгебраического выражения является представление его в виде несократимой дроби с целыми рациональными числителем и знаменателем. Но не всегда этот вид является удобнейшим. Пусть, например, требуется вычислить значения выражения $y = \frac{3x+7}{x+2}$ при ряде значений x (отличных от -2). Здесь выгоднее представить правую часть в виде $3 + \frac{1}{x+2}$; тогда вычисление значений y при наличии таблицы значений обратных величин проходит без какой бы то ни было письменной записи. Ещё пример: пусть требуется указать такие натуральные значения буквы n, при которых дробь $\frac{3n^2-3n+20}{n-1}$ принимает целые значения. Представляя её в виде $3n + \frac{20}{n-1}$, сразу приходим к исчерпывающему ответу: $n = 2$; 3; 5; 6; 11; 21.

2. Нередко приведение дробного рационального алгебраического выражения к обычному простейшему виду можно производить разными путями. Полезно испытывать различные пути и искать наилучший. Это относится и к более простым вопросам, как, например, приведению к простейшему виду «многоэтажной» дроби, когда выгоднее всего применять умножение делимого и делителя на общее наименьшее кратное знаменателей, и к более трудным задачам, имеющимся в большом выборе в сборниках [III, 24, 35].

3. Желательно требовать от учащихся после приведения данного выражения к простейшему виду проверки посредством вычисления числовых значений данного и преобразованного выражений при каких-либо подходящих числовых значениях букв, отмечая неполный характер такой проверки.

4. Есть две ошибки, особенно часто допускаемые учащимися при действиях с дробями. Первая состоит в недопустимом сокращении дроби на отдельные члены числителя и знаменателя, как, например, $\frac{a+b}{a^2-b^2} = \frac{1+1}{a-b} = \frac{2}{a-b}$, вторая — в неправильной постановке знаков после приведения алгебраической суммы дробей к одному знаменателю, как, например, $\frac{a}{b^2-c^2} - \frac{b}{ab+ac} = \frac{a^2-b^2-bc}{a(b^2-c^2)}$, когда одновременно выполняют два действия, а именно: умножение и вычитание. Надо предупреждать эти ошибки, добиваясь правильного понимания сокращения и настаивая на выполнении (на первых порах) каждого действия отдельно: лучше лишний раз переписать преобразуемое выражение, обеспечивая правильность результата.

Глава IV

УРАВНЕНИЯ 1-й СТЕПЕНИ И ИХ СИСТЕМЫ

§ 18. Элементарное учение об уравнениях и их системах.

Переходя к уравнениям, отметим несколько понятий и предложений, которые надо твёрдо знать самому учителю.

«Каждое равенство, в котором одно число, выраженное буквой, считается неизвестным, а значения остальных букв (если они имеются) считаются известными, называется уравнением с одним неизвестным. Неизвестное число называется коротко просто неизвестным. В уравнениях с одним неизвестным неизвестное чаще всего обозначается буквой x».

Это определение, содержащееся в новом учебнике алгебры [III, 2а] и вполне доступное для учащихся семилетней школы, сохраняет силу и для всего последующего курса алгебры. Отметим, что оно предполагает, во-первых, указание двух алгебраических выражений, из которых по крайней мере одно содержит эту букву x, т. е. двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ аргумента x, и, во-вторых, указание некоторого числового множества M, из которого берутся значения x (множество «допустимых значений x»). На протяжении курса VI—X классов меняется вид этих функций, меняется и числовое множество M. В семилетней школе рассматриваются только рациональные функции с рациональными коэффициентами, а множеством допустимых значений M является, вообще говоря, поле рациональных чисел. Однако в отдельных случаях множество допустимых значений M суживается. Так, если решается уравнение $x:(x-3)=7$, то допустимы все рациональные числа, за исключением 3, так как при $x=3$ теряет смысл функция, образующая левую его часть. Если уравнение составлено из условий задачи, где искомым является некоторое число людей, то для значений неизвестного допустимы только натуральные числа и нуль. В VIII и IX классах множеством M является поле действительных чисел (или некоторая его часть), в X классе — поле комплексных чисел (или некоторая его часть).

Решением или корнем уравнения с одним неизвестным называется каждое такое число, от подстановки которого вместо неизвестного обе функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ получают одно и то же значение. Решить уравнение — значит найти все его корни, или убедиться, что ни одного корня нет; обозначая их совокупность буквой S, можем сказать, что уравнение $f_1(x)=f_2(x)$ выделяет из множества всех допустимых значений M некоторое подмножество S тех значений x, которые удовлетворяют этому уравнению. При этом возможны три случая: а) множества M и S совпадают, как, например, для уравнения $x+x=2x$ или уравнения $(x^2-1):(x-1)=x+1$; такие уравнения называются тождествами; б) множество S есть некоторая правильная часть множества M, как, например, для уравнения $x(x-1)(x-2)=0$, когда S состоит из трёх чисел: 0, 1, 2, или для уравнения $|x|=x$, когда S есть множество всех действительных неотрицательных чисел (это верно даже в том случае, когда рассматривается поле M всех комплексных чисел); в) множество S — пустое, т. е. когда не существует ни одного значения x, удовлетворяющего уравнению, как, например, для уравнения $x=x+1$ или для уравнений $+\sqrt{x}=-1$ и $x:|x|=2$.

Необходимо особо отметить важность указания множества допустимых значений M; без этого указания вопрос о корнях уравнения не имеет вполне определённого смысла. Так, уравнение $x^2+1=0$, вовсе не имеющее корней в поле рациональных и в поле действительных чисел, имеет два корня $+i$ и $-i$ в поле комплексных чисел; уравнение $|x|=1$ имеет два корня в поле действительных чисел и бесконечное множество корней в поле комплексных чисел (корнем является любое комплексное число вида $\cos\alpha + i\sin\alpha$, где α — любое действительное число).

Взгляд на буквенные тождества как на особый вид уравнений не является общепринятым. Как известно, школьный учебник алгебры Киселёва делит все буквенные равенства на уравнения и тождества, противополагая их друг другу; то же мы имеем и в статье [III, 3], но в новых учебниках [III, 2а, 33а] тождества рассматриваются как особый вид уравнений. Большого значения это разногласие не имеет, но вторая точка зрения представляет некоторые преимущества, и мы будем в дальнейшем её держаться.

Два уравнения называются равносильными, или эквивалентными, если они имеют одни и те же корни, т. е. если каждый корень первого уравнения есть в то же время корень второго, а каждый корень второго уравнения является в то же время корнем первого. Второе уравнение называется следствием первого, или выводным из него, если удовлетворяется всеми его корнями; если оно никаких других корней не имеет, оба уравнения равносильны, первое в свою очередь есть следствие второго; но второе уравнение может иметь ещё другие, «посторонние» корни, и тогда оно, будучи следствием первого, ему не равносильно. Известные теоремы о свойствах уравнений говорят, что прибавление к обеим частям уравнения числа или функции $f_3(x)$, имеющей смысл при всех допустимых значениях x, а также умножение обеих частей уравнения на число, отличное от 0, даёт новое уравнение, равносильное данному. Однако умножение обеих частей уравнения на функцию $f_3(x)$, имеющую смысл при всех допустимых значениях x, даёт новое уравнение, представляющее собой только следствие данного: имея все корни данного уравнения, оно может иметь ещё и посторонние корни, а именно: корни уравнения $f_3(x) = 0$. Посторонние корни появляются и при возведении обеих частей уравнения в какую-нибудь степень: например, уравнение $f_1^2(x) = f_2^2(x)$ является следствием уравнения $f_1(x) = f_2(x)$, но кроме его корней имеет также и корни уравнения $f_1(x) = -f_2(x)$.

Процесс решения уравнения заключается обыкновенно в его замене цепью равносильных уравнений всё более и более простого вида, чтобы в конце концов прийти к одному или нескольким уравнениям вида $x = x_1$, $x = x_2, \ldots$. Нередко приходится нарушать равносильность, производя преобразования, дающие уравнения — следствия данного, но ему не равносильные, так что возможно появление посторонних корней. Это не представляет особой опасности, но обязывает проверять все найденные корни подстановкой их в данное уравнение. Недопустимы преобразования, связанные с возможностью потери корней, как, например, деление обеих частей уравнения $f_1(x)f_3(x) = f_2(x)f_3(x)$ на общий множитель $f_3(x)$ или извлечение корня одной и той же степени из обеих частей. Вместо деления на $f_3(x)$ надо применять перенесение произведения

$f_2(x) f_3(x)$ налево и разложение на множители, после чего получается совокупность двух уравнений $f_1(x) = f_2(x)$ и $f_3(x) = 0$, равносильная одному данному уравнению: всякий корень данного уравнения является корнем по крайней мере одного из этих двух, а каждый корень любого из этих двух уравнений является корнем данного уравнения. Точно так же уравнение $f_1^2(x) = f_2^2(x)$ после перенесения функции $f_2^2(x)$ налево и разложения на множители заменяется равносильной ему парой уравнений $f_1(x) + f_2(x) = 0$, $f_1(x) - f_2(x) = 0$.

Может случиться, что обе части уравнения $f_1(x) = f_2(x)$ имеют при $x \to a$ один и тот же предел, в то время как при $x = a$ по крайней мере одна из функций, $f_1(x)$ и $f_2(x)$, не определена. Здесь естественно доопределить эти функции, полагая $f_1(a) = \underset{x \to a}{\text{пред.}} f_1(x)$, $f_2(a) = \underset{x \to a}{\text{пред.}} f_2(x)$. Тогда число a следует рассматривать как корень данного уравнения. Такое положение мы имеем, например, в случае уравнения $\frac{x^2-1}{x-1} = x+1$ и в случае уравнения $\frac{\sin x}{x} = 1$. Доопределяя левую часть первого уравнения условием считать дробь $\frac{x^2-1}{x-1}$ при $x = 1$ равной её пределу при $x \to 1$, а именно 2, а дробь $\frac{\sin x}{x}$ равной 1 при $x = 0$, получаем возможность рассматривать числа 1 и 0 как корни соответственно первого и второго уравнения. Иногда такие корни именуют «несобственными», как, например, в статье [III, 8], но этот термин следует применять только для бесконечных значений аргумента, которые иногда тоже приходится считать корнями уравнения, как, например, в случае уравнения $\frac{x+1}{x} = 1$, где левая часть имеет при $x \to \pm\infty$ предел 1, равный правой части, и можно сказать, что это уравнение имеет «несобственный» корень $x = \pm\infty$.

Особую остроту вопрос о доопределении функций, образующих правую и левую часть уравнения, приобретает при решении тригонометрических уравнений, и мы к нему вернёмся в § 32. В семилетней школе он не возникает, так как во всех случаях устранимых разрывов непрерывности рациональных функций нужное здесь доопределение возникает само собой, если требовать, как это обычно и делается, постоянного приведения фунций к каноническому виду. Дробь $\frac{x^2-1}{x-1}$, которая образует левую часть первого из указанных выше уравнений, должна быть сокращена и заменена через $x+1$, и никакого затруднения для учащихся VII класса здесь не будет.

От уравнения с одним неизвестным легко перейти и к уравнению с двумя неизвестными: $f_1(x, y) = f_2(x, y)$. Здесь мы имеем тоже равенство двух функций, но не одного, а двух аргументов, и множество M допустимых пар значений этих аргументов. Уравнение выделяет из множества M некоторое подмножество S тех пар значений x и y, которые ему удовлетворяют. Здесь опять возможны те же три случая, что и при решении уравнения с одним неизвестным: множество S может совпадать с множеством M, может быть правильной частью M, может быть пустым. Так, уравнение $(x^2 - y^2):(x-y) = x+y$ есть уравнение-тождество (здесь M и S — множество всех пар неравных друг другу чисел); для уравнения $x - y = 0$ M — множество всех возможных пар чисел, S — множество всех пар равных между собой чисел; уравнение $x^2 + y^2 = -1$ в поле действительных чисел решений не имеет (но имеет бесконечное множество решений в поле комплексных чисел).

Аналогично обстоит дело и с уравнением с любым числом неизвестных.

Имея систему двух уравнений с двумя неизвестными $f_1(x, y) = f_2(x, y)$ и $g_1(x, y) = g_2(x, y)$, т. е. считая, что каждое из неизвестных x и y имеет в обоих уравнениях одно и то же значение, устанавливаем множество M допустимых пар значений x и y и множество S решений системы как пересечение (общую часть) соответствующих множеств для каждого уравнения в отдельности. Так, для системы $2x - y = 0$, $y = 6 + 8 : x$ M есть множество пар всех чисел x, y, за исключением тех, где $x = 0$, а множество S есть совокупность только двух пар: $x_1 = 4$, $y_1 = 8$ и $x_2 = -1$, $y_2 = -2$. Для системы $2x + y = 0$, $y = 6 + 8 : x$, если рассматривать только действительные числа, множество S пусто: в поле действительных чисел эта система решений не имеет, она несовместна (но она имеет два решения в поле комплексных чисел). Решая такие системы в поле действительных чисел, мы обеспечиваем полную наглядность, используя геометрические образы, выражаемые данными уравнениями, если изображать пару чисел x, y точкой с декартовыми координатами x и y.

Две системы уравнений равносильны, если все решения (системы корней) первой удовлетворяют и второй, а все решения второй удовлетворяют первой. Вторая система является следствием первой, или выводной из неё, если выполнено первое из этих условий. Так, для системы $f_1(x, y, z) = x + y + z - 3 = 0$, $f_2 = x - y = 0$, $f_3 = y - z = 0$ система $g_1 = f_1 + 2f_2 + 2f_3 = 3x + y - z = 3$, $g_2 = f_1 - f_2 + f_3 = 3y - 3 = 0$, $g_3 = 2f_1 + f_2 + 3f_3 = 3x + 4y - z - 6 = 0$, получаемая посредством линейного комбинирования уравнений первой системы, является следствием, так как всякая тройка чисел x, y, z, обращающая в нуль каждую из трёх функций f_1, f_2, f_3, обращает в нуль каждую из трёх функций g_1, g_2, g_3, но эти две системы неравносильны: первая система удовлетворяется только одной тройкой чисел $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ (уравнения $f_2 = 0$ и $f_3 = 0$ показывают, что $x = y = z$, а уравнение $f_1 = 0$ говорит, что $x + y + z = 3x = 3$), в то время как вторая система имеет бесконечное множество решений $x = t$, $y = 1$, $z = 3t - 2$, где t — любое число.

Производя различные операции над уравнениями данной системы, например, линейно их комбинируя, мы получаем новую систему, обычно более простую, но должны всегда выяснять, равносильна ли она данной. Большей частью эта новая система является выводной для первой, её следствием, но далеко не всегда ей равносильна. Уже при решении простейших систем уравнений 1-й степени с двумя и тремя неизвестными нередки случаи такой неравносильности, детально изучаемые в X классе, но считаться с ними приходится уже в VII классе.

Ограничиваясь этими немногими сведениями об уравнениях, совершенно необходимыми учителю в добавление к тому, что есть в школьных учебниках, рекомендуем для ознакомления с дальнейшими подробностями обратиться к статье [III, 3)] и к книгам [III, 9] и [III, 33а]. Наиболее удачное изложение вопроса об уравнениях, полностью доступное учащимся семилетней школы, дано в учебнике [III, 2а].

§ 19. Решение уравнений 1-й степени с одним неизвестным и задачи на их составление.

В программу алгебры для VI класса включены два пункта, имеющие весьма серьёзное значение для успеха работы над уравнениями: «Решение простейших уравнений на основании определений и свойств арифметических действий и решение задач на составление уравнений» (в теме 1); «Решение простейших уравнений с использованием относительных чисел на основании определений и свойств арифметических действий» (тема 2). В VII классе учащиеся занимаются уравнениями на основе некоторой элементарной их теории, и эта их работа протекает всегда значительно успешнее, если в VI классе они уже приобрели навык в составлении и решении простейших уравнений. С уравнениями одного простого вида учащиеся имеют дело и при изучении пропорций, которыми занимаются и в VI классе в курсе арифметики, и в VII классе в курсе алгебры. Таким образом, переходя к теме «Уравнения 1-й степени с одним неизвестным», на которую программа отводит в VII классе 30 часов, учащиеся имеют уже представление о простейших уравнениях, умеют составлять их по условиям задачи, умеют решать их.

Тема эта начинается с сообщения некоторого минимума теоретических сведений. Даются определения терминов «уравнение» и «корень уравнения», выясняется, что значит решить уравнение, выясняется, как можно преобразовать уравнение, не меняя его корней, но делая его проще. Термин «равносильные уравнения» можно на первых порах и не вводить (в книге Александрова и Колмогорова этот термин появляется лишь после перехода к системам уравнений); выражение «уравнения с одинаковыми корнями» имеет на первых порах преимущество перед выражением «равносильные уравнения». Неизменные затруднения вызывает усвоение доказательств двух теорем о свойствах уравнений, приведённое в руководстве Киселёва. Гораздо более удачным является их доказательство в учебнике Александрова и Колмогорова.

Очень важно с самого начала установить правильный взгляд на уравнение как на вопрос о том, существуют ли числа, ему удовлетворяющие, а не как на какое-то утверждение. Учащиеся должны понимать, что уравнение $x = x + 1$ не имеет корней, и не говорить, что это уравнение, — неверно. Примеров вроде $x^2 + 1 = 0$ на первых порах лучше избегать: безоговорочное утверждение об отсутствии корней здесь нежелательно, так как после перехода к комплексным числам от него придётся отказаться, а разговор о том, что корней нет среди чисел рациональных, известных семиклассникам, но что они найдутся среди других, пока им ещё не известных чисел, лучше отнести по крайней мере на итоговое повторение. Очень полезно добиться ясного понимания разницы между тождественным преобразованием уравнения, когда каждая его часть заменяется выражением, тождественно ей равным, и его преобразованием по равносильности, когда всё уравнение заменяется другим, ему равносильным, но каждая часть уже не тождественно равна тому, что было раньше. Внимательное отношение к этой детали полностью устраняет ошибки вроде той, какую нередко делают, приводя к общему знаменателю одну часть уравнения и отбрасывая знаменатель при сохранении неизменной другой части.

Очень нередки случаи, когда учитель торопится перейти к упражнениям в решении уравнений, комкая ту небольшую теорию, изучение которой должно им предшествовать. Совершенно необходимо вполне сознательное усвоение этой теории, легко обеспечиваемое, если требовать (по крайней мере на первых порах) обоснования каждого шага решения. Учащиеся должны, например, ясно понимать, что переход от уравнения $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 10$ к уравнению $\frac{5}{6}x = 10$ есть результат тождественного преобразования, а переход от этого второго уравнения к уравнению $5x = 60$ и затем к уравнению $x = 12$ представляет собой замену одного уравнения другим, ему равносильным, причём дважды используется теорема об умножении обеих частей уравнения на число, отличное от 0 («второе свойство уравнения»).

Правильному пониманию уравнения как вопроса о существовании значений неизвестного, ему удовлетворяющих, весьма способствует постоянство в требовании проверки через подстановку найденного решения в обе части уравнения. Использование ответов, помещаемых в задачнике, очень ускоряет проверку, но надо смотреть на них как на некоторую техническую помощь, которая может быть, а может и не быть, а потому необходимо уметь обойтись и без неё. Подстановка же числовых значений взамен букв является задачей, имеющей самостоятельную ценность, и не следует пренебрегать случаями возвращения к ней (с использованием приёмов устного счёта и разных вспомогательных средств вычисления).

В книгах и статьях, посвящённых уравнениям, немало внимания уделяется вопросу о наглядном представлении уравнения с помощью картинок, весов и т. д. (см., например, [III, 5], стр. 39—44). В средней школе вряд ли есть нужда в такого рода наглядных пособиях, но учителю всё же надо о них знать, чтобы использовать их в случае необходимости. Бывает, например, что кому-либо из учеников никак не даётся понимание необходимости перемены знака при переносе члена из одной части уравнения в другую, а после показа ему весов с блоком или даже простого рассказа о таких весах, сопровождаемого рисунком, всё становится ясным.

Имеет значение вопрос о том, какую запись решения уравнения следует рекомендовать учащимся. На первых порах надо настаивать на подробной записи с переписыванием всего уравнения, что весьма способствует уяснению теоретической стороны дела. Если одна часть уравнения не нуждается в преобразованиях, то её можно не переписывать, занявшись отдельно второй частью (здесь запись «в цепочку» вполне уместна). Вот примерная запись решения:

$$\frac{8-x}{6}-\frac{5-4x}{3}=\frac{x+6}{2}$$
$$\frac{8-x-(5-4x)\cdot 2}{6}=\frac{(x+6)\cdot 3}{6}$$
$$8-x-10+8x=3x+18$$
$$-x+8x-3x=18-8+10$$
$$4x=20$$
$$x=5$$

Проверка:

левая часть $\frac{8-5}{6}-\frac{5-20}{3}=$

$=\frac{1}{2}+5=5\frac{1}{2}$

правая часть $\frac{5+6}{2}=5\frac{1}{2}$

Очень желательно, чтобы учащиеся хорошо понимали возможность различных вариантов и в записи, и в самом ходе решения сами устанавливали наиболее для них удобные. Так, многие предпочитают не приводить все дроби к одному знаменателю, отбрасывая его в дальнейшем, а сразу умножить уравнение почленно на наименьшее кратное знаменателей, в данном примере на 6; вторая написанная выше строчка при этом отпадает, но появляется серьёзная опасность ошибки в знаке перед последним членом левой части: вместо $+8x$ пишут $-8x$. В интересах борьбы с такого рода ошибками, весьма распространёнными у начинающих, всякое упрощение процесса решения, в частности выполнение сразу двух и более операций, надо проводить с большой осторожностью. Слабый и торопливый ученик очень охотно идёт на сокращение записи, пытаясь выполнять некоторые операции в уме и часто при этом ошибаясь, и с него надо требовать неизменно полной записи, добиваясь безошибочности выкладок.

Нет сомнения, что решение готовых уравнений даётся учащимся значительно легче, чем решение задач на составление уравнений, и это совершенно естественно: решение готового уравнения производится по определённому правилу, в значительной мере автоматически, в то время как составление уравнения требует всегда некоторой самостоятельной работы мысли (согласно установленной выше классификации — это задача-пример и задача-расчёт).

Но зато и польза от навыка в решении задач на составление уравнений бесспорно много выше, чем от навыка в решении готовых уравнений, так как большинство практических применений алгебры сводится к решению самых различных вопросов методом уравнений. Составлению уравнений и последующему их решению надо уделить не менее половины всего времени, отводимого на изучение уравнений. Особенно важен целесообразный подбор задач разнообразного содержания и постепенно возрастающей трудности.

На первых порах задачи для самостоятельного решения должны быть более или менее сходными с теми, какие были решены в классе под руководством учителя. Составив по условиям задачи уравнение и решив его, проверяют правильность ответа не простой подстановкой найденного корня в обе части уравнения, а обязательно выясняя, удовлетворяет ли он условиям задачи: ведь может случиться, что уравнение решено верно, но неверно составлено. Оживлению работы, поднятию интереса к ней существенно способствует подбор разнообразных задач на составление уравнений из смежных дисциплин (арифметика, геометрия, физика), задач исторического характера, каких немало можно найти в книгах [I, 44] и [III, 6], задач «занимательной математики». Полезный подбор задач на составление уравнений с распределением их по типам можно найти в книге [III, 5].

Каждое уравнение 1-й степени с одним неизвестным приводится к виду $ax = b$, и полное его решение включает рассмотрение случаев, когда $a = 0$, $b \neq 0$ (уравнение не имеет ни одного корня) и когда $a = b = 0$ (уравнение удовлетворяется любым значением x). Обычно рассмотрение этих особых случаев откладывается до X класса и относится к теме «Неравенство», но вполне возможно познакомить с ними и в VII классе, придавая работе над темой «Уравнения 1-й степени с одним неизвестным» столь желательную законченность. Учебник алгебры Киселёва (часть 1-я) вовсе обходит этот вопрос, но в учебнике Александрова и Колмогорова есть параграф, ему посвящённый, вполне разъясняющий эти два случая в форме, доступной семиклассникам. Желательно, однако, к рассмотренным там готовым уравнениям без корней и с бесконечным множеством корней добавить ещё задачи, приводящие к составлению таких уравнений, например: найти трёхзначное число, у которого 4 десятка, а цифра сотен на 1 больше цифры единиц, если известно, что оно больше числа, написанного теми же цифрами в обратном порядке, на 99 или на какое-нибудь другое число (при разности 99 существует 9 таких чисел, а именно: 140, 241, 342, . . . , 948, а при любой другой разности ни одного такого числа нет).

Особого внимания требуют уравнения, у которых неизвестное фигурирует в знаменателях, так как при освобождении от знаменателей могут появиться посторонние корни (нарушается равносильность). В учебнике Киселёва есть параграф, говорящий о возможности появления посторонних корней при освобождении уравнений от знаменателей, содержащих неизвестные, но в школе на это обстоятельство внимания, к сожалению, не обращают. В учебнике Александрова и Колмогорова есть специальная глава, посвящённая уравнениям, содержащим неизвестное в знаменателях, и надо всячески рекомендовать изучение её в VII классе полностью.

Уравнение 1-й степени с одним неизвестным может содержать ещё и другие буквы, означающие известные величины («параметры», или относительно постоянные величины). Программа подчёркивает необходимость решения в VII классе и таких «буквенных» уравнений, что совершенно правильно, так как в приложениях алгебры очень часто встречаются с уравнениями, устанавливающими зависимость между двумя и более величинами, каждая из которых может быть принята за искомую и выражена через другие. Например, при рассмотрении закона равномерного движения, выражаемого формулой $s = s_0 + vt$, возникает вопрос о разыскании каждой из трёх величин s_0, v, t в зависимости от остальных. Решение таких буквенных уравнений, т. е. уравнений с параметрами, представляет значительно бóльшие трудности, чем решение «численных» уравнений, где нет других букв, кроме той, которая означает искомое, и заниматься ими надо во вторую очередь, а именно после приобретения прочного навыка в решении численных уравнений. Проверка подстановкой найденных выражений в обе части уравнения представляет собой прекрасное упражнение в тождественных преобразованиях, ценное помимо всего прочего своей осмысленностью, так как учащимся вполне ясна его цель. Надо отметить, что некоторые авторы высказываются за параллельное решение численных и буквенных уравнений, находя, что трудности решения последних преодолеваются в этом случае легче (см. книгу [III, 5]).

Завершая тему «Уравнения 1-й степени с одним неизвестным», полезно разобрать несколько более трудных для начинающих задач, а именно таких, которые требуют или более углублённого внимания к пройденным элементам теории уравнений, или счастливой догадки (это уже не задачи-примеры и задачи-расчёты, а задачи развивающего характера). Вот несколько подходящих задач этого рода: решить относительно x квадратное уравнение $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ и уравнение степени n

$$a(x - x_1)\,(x - x_2)\,\ldots\,(x - x_{n-1})\,(x - x_n) = 0,$$

где a — данное число, отличное от нуля; что в этой задаче изменится, если $a = 0$?

Равносильны ли уравнения $x^2 - 12x + 36 = 49$ и $x - 6 = 7$? уравнения $x - 5 + \frac{1}{x-5} = \frac{1}{x-5}$ и $x - 5 = 0$? Здесь вполне уместны и простейшие задачи, требующие исследования решения уравнения с одним неизвестным (хотя бы с одним буквенным параметром), вроде следующей: «Двое выехали одновременно по одной и той же дороге в одну и ту же сторону; первый делает в каждую секунду 3, второй $3 + a$ метров. Через сколько секунд второй окажется вдвое дальше от старта, чем первый?» Здесь надо выяснить смысл решения для случаев $a = 3$, $a \neq 3$.

§ 20. Решение системы двух уравнений 1-й степени с двумя неизвестными и задачи на их составление.

Если решение уравнений 1-й степени с одним неизвестным и решение задач на их составление хорошо усвоено, переход к системам уравнений 1-й степени проходит без затруднений. Программа правильно отводит на эту новую тему только около половины того времени, какое отведено на предшествующую (18 часов вместо 30). Новостью для учащихся является здесь прежде всего неопределённость уравнения с двумя неизвестными, и на этом пункте стоит остановиться несколько больше, чем рекомендует учебник, выясняя, что такое уравнение устанавливает, вообще говоря, зависимость между двумя величинами. Слова «вообще говоря» необходимы, так как здесь возможны исключения (например, уравнение $x+y=0$, если ограничиваться только неотрицательными числами, имеет единственное решение $x=0$, $y=0$, а уравнение $(x-a)^2+(y-b)^2=0$, если ограничиваться только действительными числами, удовлетворяется лишь при $x=a$, $y=b$).

Переходя к системе двух уравнений 1-й степени с двумя неизвестными, устанавливают точный смысл терминов «система уравнений» (совокупность уравнений, в которых одни и те же буквы обозначают одни и те же числа), «решение» такой системы (пара чисел, удовлетворяющих каждому уравнению), «выводная система» (система, удовлетворяющаяся всеми теми решениями, что и данная), «равносильные системы» (системы уравнений с общими решениями: все решения первой системы являются в то же время решениями второй, а все решения второй — решениями первой). Допуская, что система имеет решение, исключаем одно из неизвестных по способу подстановки и сводим вопрос к решению одного уравнения 1-й степени с одним неизвестным, обходя на первых порах особые случаи, когда это «конечное» уравнение неопределённо или не имеет решений. Два свойства уравнений, изученные в предшествующей теме, легко обобщаются для системы, а после этого без труда усваивается и решение системы по способу алгебраического сложения.

Не следует спешить с переходом к тренировочным упражнениям, отрывая их от теоретической стороны вопроса. Тренировка должна начинаться лишь после уяснения этой теоретической стороны, сопровождаемой рассмотрением немногих примеров; необходимо добиваться полной сознательности каждого шага решения. Система считается решённой только после проверки всех найденных решений через их подстановку, притом не в какое-либо одно, а обязательно в оба уравнения системы.

Научившись решать готовые системы уравнений, надо заняться и решением задач на составление таких систем. Как показывает опыт, эта работа проходит всегда значительно глаже, чем составление уравнений с одним неизвестным: сказывается и накопление опыта каждым учащимся, да и само по себе введение второго неизвестного во многих случаях упрощает составление зависимостей по условиям задач. Чтобы убедиться в последнем, достаточно сопоставить решение двумя способами (с введением одного и двух неизвестных) такой, например, задачи: «У двоих вместе 20 руб., а если первый отдаст второму 3 руб., денег у них станет поровну.

Каждая система двух линейных уравнений с двумя неизвестными приводится к «нормальному» виду $ax + by = c$ и $a_1x + b_1y = c_1$, и полное решение такой системы требует рассмотрения следующих случаев: 1) $D = ab_1 - ba_1 \neq 0$, когда система имеет единственное решение; 2) $D = 0$, но по крайней мере одно из чисел $D_1 = cb_1 - bc_1$ и $D_2 = ac_1 - ca_1$ отлично от нуля, когда система несовместна; 3) $D = D_1 = D_2 = 0$, но по крайней мере один из коэффициентов a, b, a_1, b_1 отличен от нуля, когда система имеет бесконечное множество решений, так как сводится к одному уравнению и значение одного из неизвестных можно взять по произволу; 4) $a = b = a_1 = b_1 = 0$, но по крайней мере одно из чисел, c и c_1, не нуль, тогда система несовместна; 5) $a = b = a_1 = b_1 = c = c_1 = 0$, тогда система неопределённа, так как значение каждого неизвестного можно брать по произволу. Проводить это исчерпывающее исследование в VII классе преждевременно, но в то время как стабильное руководство Киселёва ограничивается только рассмотрением первого случая, обрекая на полное недоумение учащихся, встретившихся, например, с системой $\frac{x-1}{y-1} = \frac{1}{5}$, $\frac{2x+4}{2y+5} = \frac{1}{5}$, учебник Александрова и Колмогорова делает несколько шагов в сторону такого исследования: вводится понятие определителя системы $D = ab_1 - ba_1$, указаны примеры систем, несовместных и неопределённых (стр. 178—179).

Научившись составлять и решать системы численных уравнений с двумя неизвестными, необходимо перейти к уравнениям буквенным, прежде всего с одним параметром. Решение и проверка дают здесь прекрасные случаи тренировки в производстве тождественных преобразований, а небольшое внимание к отдельным этапам решения позволяет проводить то простое исследование, которое обычно откладывают до X класса, но которое вполне посильно и для учащихся VII класса. Возьмём, например, задачу: «Решить относительно x и y систему $x + y = 1$, $bcx + acy = ab$». Указанный в конце книги ответ: $x = \frac{a(c-b)}{c(a-b)}$, $y = \frac{b(a-c)}{c(a-b)}$ верен только для случая, когда $a \neq b$, $c \neq 0$. Разве не следует приучать учащихся видеть необходимость этой оговорки? Разве рассмотрение случаев, когда $a = b, c \neq 0$, когда $a \neq b$, $c = 0$, когда $a = b$, $c = 0$,— непосильно учащимся? Игнорируя эту сторону дела, мы насаждаем подлинный формализм: учащиеся выполняют по определённому рецепту некоторые операции, не отдавая себе отчёта в их законности и в смысле результатов. Лучше бы было эту задачу упростить, заменив данную систему хотя бы такой: $x + y = 1$, $x + a^2y = a$ (один параметр!), но довести решение до конца, устанавливая, что при $a \neq \pm 1$ она имеет единственное решение, выражаемое формулами $x = a : (a+1)$, $y = 1 : (a+1)$, что при $a = -1$ решений вовсе нет (система $x + y = 1$, $x + y = -1$ противоречива), что при $a = +1$ существует бесконечное множество решений, в которых одно из неизвестных, x и y, произвольно, а второе дополняет его до 1 (система сводится к одному уравнению $x + y = 1$). По виду общих формул для случая $a = \pm 1$ можно было бы думать, что они теряют силу только при $a = -1$, но получение в ходе решения уравнения $(a^2-1)\,y=a-1$ обязывает нас рассмотреть оба случая, когда коэффициент при y равен 0, а именно: $a=+1$ и $a=-1$.

Итак, меньше сложных выкладок, больше внимания обеспечению исчерпывающего характера решения!

§ 21. Другие системы уравнений 1-й степени.

Переход от системы двух уравнений 1-й степени с двумя неизвестными к системе трёх таких же уравнений с тремя неизвестными даётся легче, чем переход от одного уравнения с одним неизвестным к системе двух уравнений с двумя неизвестными. Показав неопределённость одного уравнения с тремя неизвестными и системы из двух таких уравнений, берут систему трёх уравнений с тремя неизвестными и, предполагая существование тройки чисел, удовлетворяющих каждому из этих трёх уравнений, находят выражение для одного из чисел в зависимости от двух остальных и после подстановки этого выражения в два неиспользованных уравнения приходят к системе двух уравнений 1-й степени с двумя неизвестными, способ решения которой уже известен. Тот же результат получается, если применять способ сложения и исключить одно из трёх неизвестных, сперва, например, из первого и второго уравнений системы, из первого и третьего её уравнений. К усвоению этих двух способов (подстановки и сложения) и сводится овладение техникой решения системы трёх уравнений 1-й степени с тремя неизвестными.

Полное исследование такой системы учащимися VII класса непосильно, но желательно дать им понятие о возможности особых случаев, когда система оказывается несовместной в силу противоречия между двумя её уравнениями (например, система $x+y+z=0$, $2x+2y+2z=3$, $x-y+z=1$) или в силу противоречия между одним из её уравнений и каким-либо следствием двух других (как система $x+y+z=0$, $x-y+z=1$, $2x+2z=3$, в которой почленное сложение первых двух уравнений даёт уравнение $2x+2z=1$, противоречащее третьему уравнению), или когда система совместна, но неопределённа, так как одно из её уравнений оказывается следствием двух других (как в системе $x+y+z=0$, $x-y+z=1$, $2x+2z=1$), или так как два её уравнения являются следствиями третьего. Стабильное руководство алгебры Киселёва (часть 1-я) об этих особых случаях вовсе умалчивает, а в новом учебнике алгебры Александрова и Колмогорова рассмотрено несколько соответствующих примеров.

Как способ подстановки, так и способ сложения применяются при решении систем из 4 и более уравнений 1-й степени с таким же числом неизвестных, но в общем виде такие системы в средней школе уже не рассматриваются. И в VII и в старших классах решают некоторые частные системы из 4 и более уравнений со столькими же неизвестными, стараясь найти специальные, подчас весьма искусственные способы исключения некоторых неизвестных. В стабильных учебниках указано несколько таких способов, но желательно не давать их в готовом виде, а предлагать соответствующие задачи как задачи развивающие, мобилизуя учащихся на поиски удобных способов решения. Несколько хороших задач такого рода имеется у Александрова и Колмогорова, например, такая: «Решить систему уравнений со 101 неизвестным: $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots \ldots + x_{101} = 0$, $x_1 + x_2 = x_2 + x_3 = x_3 + x_4 = \ldots = x_{100} + x_{101} = 1$» (№ 210 на стр. 187), неизменно привлекающая внимание учащихся своим непомерно большим числом неизвестных и без особого труда разрешаемая большинством учащихся (легко сообразить, что сумма первых 100 неизвестных равна 50, а потому $x_{101} = -50$, откуда $x_{100} = 51$, $x_{99} = -50$, и вообще все неизвестные с нечётными номерами имеют значение — 50, с чётными 51). Особо следует отметить идею введения вспомогательных неизвестных, так упрощающего решение некоторых систем.

Сказанное в предшествующем параграфе о возможности и желательности исследования решения системы двух буквенных уравнений с двумя неизвестными сохраняет силу и для любой системы. Пусть, например, дана система $x + ay + a^2z = 0$, $x + by + b^2z = 0$, $x + cy + c^2z = 0$, имеющая, как легко видеть, единственное решение $x = y = z = 0$, если среди параметров a, b, c нет двух равных. В случае $a = b$, $a \neq c$ система эта сводится к системе двух уравнений с тремя неизвестными и оказывается неопределённой, так как при произвольном z удовлетворяется значениями $x = acz$, $y = -(a + c)z$; в случае же $a = b = c$ система сводится к одному уравнению и оказывается неопределённой в ещё большей мере, так как удовлетворяется, если значения y и z взять произвольно, а x положить равным $-ay - a^2z$. Нельзя ограничиваться таким решением данной системы, какое верно лишь для случая различных параметров a, b, c, если это решение выдаётся за общее, т. е. если не делается специальной оговорки.

Учителя часто жалуются на трудности, какие представляет для учащихся усвоение приёмов решения задач на составление уравнений. Несомненно, поводов для таких жалоб будет гораздо меньше, если на уроках алгебры будут заниматься не только выработкой необходимых технических навыков в выполнении установленных раз навсегда операций по определённому шаблону, а больше обращать внимание на сознательность в их выполнении, на те затруднения, какие встречаются в особых случаях.

Отметим, что богатый материал для выработки этой сознательности в деле составления и решения уравнений можно найти в книгах [III, 23, 36].

§ 22. Понятие о неравенстве и его использование в семилетней школе.

Понятие о неравенстве появляется в школе одновременно с понятием равенства. Ещё в самом начале курса алгебры вводятся знаки неравенства ($\neq$), больше ($>$), меньше ($<$); в дальнейшем они многократно используются как в алгебре, так и в геометрии. Однако приведение всех сведений о неравенствах в некоторую систему и связное их изложение, завершаемое рассмотрением вопроса о решении буквенных неравенств («условных» неравенств), откладывается до старших классов средней школы. Стремление дать уже в семилетней школе по возможности законченный круг сведений по алгебре привело к появлению в программе VII класса, а именно в теме «Уравнения 1-й степени с одним неизвестным», следующего пункта: «Понятие о неравенстве. Свойства неравенств. Решение неравенства 1-й степени с одним неизвестным». Эти пункты программы не расшифрованы, и учителя испытывают большие затруднения, планируя работу по ним. В методической литературе вопросу о неравенствах уделено довольно много внимания, но материал для VII класса не отобран. Статья [III, 32], содержащая попытку сделать это, вызывает ряд сомнений и возражений.

Не может быть никакого сомнения, что основательное изучение неравенств следует отнести на X класс, программа которого содержит особый раздел «Неравенства» с 22 часами, отведёнными на его изучение. В VII классе следует напомнить смысл символов $\neq$, $>$, $<$, ввести символы $\geq$ и $\leq$, которые читаются как «больше или равно» и «не меньше», «меньше или равно» и «не больше», указать свойство транзитивности для неравенств одного знака (если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$ и т. д.), не вводя самого термина «транзитивность», отметить вытекающую отсюда возможность «усиления» неравенства и почленного сложения неравенств, нередко используемую в геометрии, выяснить критерий сравнения рациональных чисел (a больше b тогда и только тогда, когда $a - b > 0$, a меньше b тогда и только тогда, когда $a - b < 0$) и показать геометрическое его истолкование на числовой оси (при обычной ориентировке горизонтально или вертикально расположенной оси большему числу соответствует точка, расположенная правее или выше). Желательно уменье решать простейшие неравенства вроде такого: $2x - 3 > 6 - x$, и понимание равносильности неравенства $|x| < a$ и двойного неравенства $-a < x < a$, ставя такие вопросы, как задачи при итоговом повторении («развивающие задачи»), и, конечно, не тратя времени на какие бы то ни было связанные с ними теоретические рассуждения.

В высшей степени желательно применение неравенств для записи приближённых результатов, а именно замена приближённых равенств, сопровождаемых указанием границы погрешности, двойными точными неравенствами, т. е. выяснение равносильности таких записей, как $x \approx 124\ (\pm 1)$ и $123 < x < 125$ или как $x \approx 200\ (\pm 5\%)$ и $190 < x < 210$. Постановка вопроса о неравенствах в семилетней школе приобретёт полную осмысленность, если его связать с приближёнными вычислениями, что, к сожалению, действующей программой не предусмотрено и может выполняться в настоящее время только в порядке внеклассной работы.

Глава V

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ

§ 23. Введение идеи функции в общеобразовательный курс математики.

Выше, в § 2 настоящей III части, мы указали, что из четырёх основных линий развития школьного курса алгебры (числа, тождественные преобразования, уравнения, функции) последней, а именно изучению функций, принадлежит в некотором смысле ведущая роль. Прав проф. А. Я. Хинчин, когда говорит, что «понятие функциональной зависимости должно стать не только одним из важнейших понятий школьного курса математики, но и тем основным стержнем, проходящим от элементарной арифметики до высших разделов алгебры, геометрии и тригонометрии, вокруг которого группируется всё математическое преподавание» [I, 51a]. Отметив недопустимость недооценки других, не менее важных понятий, представлений и методов, проф. Хинчин указывает далее, почему понятие функциональной зависимости должно быть столь явно выделено из всех других основных математических понятий, с которыми знакомит учащихся средняя школа: «Потому, во-первых, что ни одно из других понятий не отражает явлений реальной действительности с такой непосредственностью и с такой конкретностью, как понятие функциональной зависимости, в котором воплощены и подвижность, динамичность реального мира, и взаимная обусловленность реальных величин. Потому, во-вторых, что это понятие, как ни одно другое, воплощает в себе диалектические черты современного математического мышления; именно оно приучает мыслить величины в их живой изменчивости, а не в искусственно препарированной неподвижности, в их взаимной связи и обусловленности, а не в искусственном отрыве их друг от друга. Потому, наконец, что понятие функциональной зависимости есть основное понятие всей высшей математики и что качество подготовки оканчивающих среднюю школу к усвоению курса математики в высшей школе в значительной степени измеряется тем, насколько твёрдо, полно и культурно они свыклись с этим важнейшим понятием».

Как мы видели в кратком историческом очерке в I главе 1-й части, ещё несколько веков тому назад математика перешла от изучения чисел, величин и геометрических фигур к изучению изменения величин и геометрическим преобразованиям, что и выдвинуло на первый план понятие функциональной зависимости. Школьная же математика только теперь переживает этот переход на новый этап развития математической науки, и было бы ошибкой думать, что этот переход уже завершён; напротив, и программа школьного курса математики, и школьные учебники, и повседневная практика преподавания ещё весьма неполно и непоследовательно отражают этот переход. Задачей учителя математики является посильное участие в трудном и важном деле такой перестройки традиционного преподавания, при котором ведущая роль идеи функциональной зависимости была бы действительно реализована.

В то время как эти общие соображения о необходимости введения идеи функциональной зависимости в советской методике преподавания математики общепризнаны, по вопросу об их реализации имеется большое разнообразие мнений.

Прежде всего необходимо решить, какое из исторически возникших определений понятия функции должно быть положено в основу изучения функции в средней школе: «оперативное» ли определение, формулированное 200 лет назад Леонардом Эйлером и отождествляющее функцию с той формулой, которая указывает, какие действия надо произвести над значениями независимых переменных, чтобы получить соответствующие значения функции, или то определение, которое можно назвать «графическим» и которое для функции одного аргумента сводится к указанию зависимости между абсциссой и ординатой точки, движущейся по совершенно произвольной кривой, и которое в XVIII в. считалось более общим, чем оперативное, или, наконец, третье определение, указанное Н. И. Лобачевским, которое можно назвать «табличным» и которое для случая функции одного аргумента формулируется в настоящее время так: «Если каждому элементу x множества M поставлен в соответствие некоторый элемент y множества N, то говорят, что на множестве M задана функция, и пишут $y = f(x)$. При этом отдельные элементы x называют значениями аргумента, а элементы y — значениями функции» [III, 306]. Академик С. Н. Бернштейн в своём докладе «Понятие функции в средней школе», сделанном в 1913 г. на II Всероссийском съезде преподавателей математики, решительно высказывался за выставление на первый план оперативного определения функции, делая оговорку, что и оба других определения должны занять значительное место в средней школе; признавая, что табличное определение функции является более общим, чем оперативное, не говоря уже о графическом, он находил, что возможность представления любой непрерывной или имеющей конечное число точек разрыва функции некоторым многочленом (в любом определённом промежутке) указывает на возможность исходить в средней школе из оперативного определения функции. Независимо от общих соображений, развитых в этом докладе, оперативное определение функции господствовало в учебной и методической литературе до самого последнего времени. Однако за последние годы появился ряд работ, убедительно показывающих преимущества общего (табличного) определения, построенного на идеях множества и соответствия, которые и сами по себе, являясь основными идеями современной математики, заслуживают введения в школу. Эти два понятия так просты и вместе с тем настолько всеобщи, что, не останавливаясь на них особо, можно ввести их в постоянное употребление на занятиях математикой, несколько приближая тем самым школьную математику к современной науке. Например, вполне возможно заменить старинный термин «геометрическое место точек» равносильным современным «множество точек». Выше (§ 18) мы видели, как полезно использование понятия множества при изложении элементарной теории уравнений.

Общее понятие о функции как соответствии элементов двух множеств вполне доступно учащимся средней школы, и его можно рассматривать как одну из вполне доступных основ изучения функций в школе.

Отсылая учителя, желающего ознакомиться с деталями этого важного вопроса, к статьям [I, 51а], [III, 33б] и [III, 30б], переходим к рассмотрению тех сведений о функциях, какие должна дать средняя школа.

§ 24. Задачи изучения функций в средней школе.

«Объяснительная записка» к ныне действующей программе математики даёт следующие указания об изучении функций.

«Развитие идеи функциональной зависимости на всех ступенях преподавания алгебры в одинаковой степени преследует и общеобразовательные цели и достижение наибольшей координации с другими предметами школьного курса, в частности с физикой. Для этого в VI классе следует практиковать составление табличной записи результатов нахождения числовых значений, а также и вычерчивание простейших графиков. В программе для VII класса предусматривается введение координатных осей и построение графиков наиболее простых функций. В VIII—IX классах запас изучаемых функций систематически расширяется, как указано в соответствующих местах программы. При построении графиков во всех классах нельзя ограничиваться схематическими чертежами. Необходимо добиваться построения графиков с достаточной степенью точности по точкам на клетчатой бумаге. Преподаватель, предлагая учащимся вычислять числовые значения алгебраического выражения при различных значениях какой-либо буквы, располагать результаты в виде таблицы и одновременно строить соответствующие графики (по точкам), приучит видеть в алгебраических выражениях не только определённую комбинацию букв и чисел, но и функцию от этих букв. При этом функциональная терминология и в особенности обозначения в явном виде в качестве программных требований включены в курс VIII класса» (Программы средней школы. «Математика», Учпедгиз, 1952, стр. 10).

Учитывая все эти указания и то, что было установлено в предшествующем параграфе, задачи изучения функций в средней школе можно формулировать следующим образом:

1. Должна быть усвоена общая идея функциональной зависимости, по крайней мере для функций одного аргумента, как соответствия между элементами двух множеств, а именно мно-

жества значений аргумента и множества значений функции, на конкретных примерах вроде такого: для всякого натурального числа устанавливается число его делителей (натуральных же); здесь множество значений аргумента есть множество всех натуральных чисел, множество значений функции то же, так как легко видеть, что существуют натуральные числа с любым числом делителей (например, число 2^{n-1} имеет n и только n делителей $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{n-1}$); соответствие указывается таблицей, составляемой на основании определения данной функции:

$$\begin{array}{lccccccccccccc} x= & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13\ldots \\ y= & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 4 & 2 & 4 & 3 & 4 & 2 & 6 & 2\ldots \end{array}$$

Желательно обобщение этого общего (табличного) определения на случай функций двух и большего числа аргументов. Конкретный пример: число общих делителей двух натуральных чисел как функция этих чисел; здесь множество значений аргумента есть множество всех пар натуральных чисел, таблица значений функции составляется «в два входа», множество значений функции — множество всех натуральных чисел. Другой пример: площадь треугольника как функция длин трёх его сторон (множество значений аргумента есть множество всех троек действительных положительных чисел, наибольшее из которых меньше суммы двух других, а множество значений функции есть множество всех действительных положительных чисел).

2. Должно быть усвоено понимание всякого алгебраического выражения как функции величин, обозначаемых его буквами (оперативное определение функции), и уменье составить таблицу значений этой функции (по крайней мере для функций одного аргумента), указывая множества значений аргумента и функции или хотя бы только аргумента, т. е. перейти от оперативного к табличному её определению. Этот переход возможен всегда (в то время как переход от табличного определения к оперативному может представлять большие, часто непреодолимые для школьников трудности).

Так, имея в VIII классе дело с выражением $+\sqrt{x-1}$, надо понимать, что здесь мы встречаемся с функцией $y=+\sqrt{x-1}$, определённой на множестве всех действительных чисел, не меньших 1, что значения функции образуют здесь множество всех действительных неотрицательных чисел, что таблица значений этой функции легко составляется при наличии готовой таблицы квадратных корней.

3. Должно быть усвоено понимание графика функции $y = f(x)$ в прямоугольных координатах и уменье воспользоваться готовым графиком для получения значения y по данному значению x, и обратно, а также уменье строить график функции на основании табличного или оперативного её определения. Здесь ни в коем случае нельзя довольствоваться одним лишь усвоением

идеи, необходима и выработка соответствующего практического навыка, вплоть до соображений о целесообразном выборе масштаба и координатных осей (надо максимально использовать наличный кусок клетчатой бумаги, обеспечивая расположение в пределах этого куска интересующей нас части графика). Важно отметить, что построение графика функции «по точкам» приобретает смысл лишь при условии, что заключения о характере графика в интервале между двумя построенными точками делаются на основании каких-либо теоретических соображений, основанных на определении данной функции, а не на простой аналогии, позволяющей высказывать только догадки.

4. Необходимо добиться понимания операции обращения функции и связанного с ней понятия многозначной функции сперва на таких простых примерах, как $y = ax + b$, $y = x^2$ ($a \neq 0$, x — любое действительное число, обратные функции $x = y : a - b : a$, $x = \pm \sqrt{y}$) или $y = (-1)^x$, где x принимает все целые значения, y — только два значения: $+1$ и -1, так что обратная функция бесконечно многозначна, и при переходе к более сложным зависимостям.

5. Чтобы приобретённые сведения о функции не были для учащихся «мёртвым капиталом», надо обеспечить уменье использовать их при решении разнообразных задач, в первую очередь с целью обеспечить наглядность (там, где это полезно для лучшего уяснения дела), а иногда и для получения приближённых численных результатов. Прекрасный пример — железнодорожные графики движения поездов, которые надо рекомендовать использовать в VII классе каждой школы (части таких графиков приведены во многих руководствах алгебры, но лучше всего достать подлинный экземпляр старого графика через железнодорожных служащих). Даже квалифицированный математик испытывает большое облегчение, применяя график при решении известной задачи о встрече поездов («Из A в B ежедневно в полдень выходит поезд и совершает весь путь ровно в неделю; такое же движение установлено в обратном направлении. Сколько поездов встретит пассажир, совершающий путь в таком поезде от A к B?») Но есть много случаев, когда аккуратно построенный график позволяет получить и числовое значение искомой величины (приближённое) проще, чем каким бы то ни было иным способом; такова, например, весьма популярная задача решения системы $x^2 + y = 41$, $x + y^2 = 31$, приводящей к уравнению 4-й степени с одним целым и тремя иррациональными корнями, легко определяемыми по графику после построения двух парабол, или не менее известная задача решения показательного уравнения $2^x = 4x$, корни которого легко определяются по графику как абсциссы точек пересечения прямой $y = 4x$ и кривой $y = 2^x$.

В § 33 V части рассмотрено несколько примеров решения трансцендентных тригонометрических уравнений с использованием графиков функций.

§ 25. Функциональная пропедевтика.

Систематическое изучение функций с точными формулировками определений и теорем, с доказательствами их нецелесообразно начинать раньше, чем в VIII классе. Значит ли это, что в предшествующих классах никакой работы по изучению функций быть не должно? Иными словами, нужна ли в V — VII классах функциональная пропедевтика, аналогичная, например, пропедевтике дробей в начальной школе? По этому вопросу существует большое разнообразие мнений. Так, в указанном выше докладе [III, 7] читаем: «...вполне удовлетворительное разъяснение того, что закон пропорциональности выражается прямой линией, предполагает некоторое предварительное знание геометрии; поэтому при отсутствии пропедевтического курса геометрии применение графического метода для решения арифметических задач легко может принести больше вреда, чем пользы». Если принять целиком это соображение, то рассмотрение графика функции $y = ax + b$ надо отложить до VIII класса, так как только там проходится учение о подобии треугольников. В 1-й части нового учебника алгебры Александрова и Колмогорова ни термина «функциональная зависимость», ни графика прямой пропорциональности, ни, тем более, графика линейной функции нет, т. е. функциональная пропедевтика полностью отсутствует. Однако стремление сделать понятие функции «основным стержнем», вокруг которого группируется всё преподавание математики, а также соображения о желательности дать некоторый минимум сведений о функциях оканчивающим семилетнюю школу, привели к включению в программу VI и VII классов некоторых вопросов, касающихся функциональной зависимости. С функциями $y = ax$ и $y = a:x$ учащиеся встречаются уже в курсе арифметики VI класса; идея зависимости двух величин, т. е. соответствия между элементами множества значений x и множества значений $y = ax$ или $y = a:x$, здесь налицо, хотя термин «функция» ещё не произносится; составление таблиц значений аргумента x и функций $y = ax$ и $y = a:x$ уже практикуется, не вызывая никаких сомнений. Отсюда один шаг и до построения графиков этих функций, причём заключение о прямолинейности графика функции $y = ax$ устанавливается только как эмпирический факт, или, точнее, как догадка, гипотеза, подтверждаемая всеми наблюдениями, какие делаются для её проверки. Трудности, связанные с построением графика этой функции, ничуть не выше, чем для графиков температуры, роста, перевода мер и т. д., широко используемых ещё в начальной школе и рекомендуемых программой при изучении начатков алгебры в VI классе. Построение графиков $y = ax$ при различных числовых значениях a является требованием программы алгебры для VII класса: зная уже, что график всякой такой функции есть прямая, выясняют связь между значением коэффициента пропорциональности a и положением прямой относительно координатных осей.

При работе над системами линейных уравнений должен быть сделан, согласно программе, ещё один шаг в деле изучения функций: строится график линейной функции $y = ax + b$, не требующий никаких новых гипотез, подтверждаемых опытом, так как он получается в результате параллельного переноса прямой $y = ax$ на отрезок b, отсчитываемый по оси Y, а также график зависимости между x и y, выражаемой уравнением $Ax + By + C = 0$, которое преобразуется к виду $y = ax + b$ в случае $B \neq 0$, когда $a = -A : B$, $b = -C : B$, или к виду $x = c$ в случае $B = 0$, $A \neq 0$, когда $c = -C : A$.

В случае $A = B = 0$ никакой зависимости между x и y это уравнение не устанавливает.

Усвоение графика линейной зависимости позволяет внести полную ясность в рассмотрение тех особых случаев решения уравнений и их систем, которые так смущают семиклассников и которые весьма желательно не относить на X класс. Уравнение $ax + b = a_1x + b_1$ равносильно системе $y = ax + b$, $y = a_1x + b_1$, и задача разыскания его корня есть задача о разыскании общей точки двух прямых, но эта точка единственна при условии, что прямые пересекаются; её вовсе нет, если прямые параллельны; таких точек бесконечно много, если прямые совпадают.

Ряд новых предложений, относящихся к функциональной пропедевтике и связи её с арифметикой, содержит книга проф. Гончарова [III, 17а]. Несомненно, во всём вопросе о функциональной пропедевтике много спорного, начиная с основного: нужна ли такая пропедевтика в VI и VII классах? Если признать, что нужна, как это и делает действующая нынче программа, то с целым рядом предложений проф. Гончарова нельзя не согласиться. Возражения против выяснения прямолинейности графика функций 1-й степени до учения о подобии весьма серьёзно, и ответить на него приходится так: в VI и VII классах этот факт устанавливают эмпирически, подобно физическому закону, а в VIII классе к нему возвращаются и показывают его логическую необходимость в силу общих геометрических предложений.

Понимание графика линейной функции так ценно и с чисто практической стороны, особенно по связи с физикой, и для лучшего уяснения ряда вещей в самой математике, что ознакомление с ним выпускников семилетней школы вполне оправдано.

§ 26. Раздел «Функции и их графики» в VIII классе.

Программа следующим образом раскрывает содержание этой темы, отводя на неё 10 часов: «Понятие о функциональной зависимости. Прямоугольная система координат на плоскости. Построение графиков прямой и обратной пропорциональной зависимости $y = kx$, $y = k : x$. График функции $y = kx + b$. График функции $y = ax^2 + bx + c$».

Сделаем несколько замечаний по материалу учебников.

1. То определение аргумента и функции как независимой и зависимой переменной, какое даётся в руководстве Киселёва, не охватывает всех важнейших случаев, встречающихся в школьном курсе. Так, например, учащийся, основываясь на этом опре-

делении, вправе возражать против утверждения, что выражение $kx+b$ представляет собой функцию аргумента x в случае $k=0$, в то время как указанное выше определение функции как соответствия между двумя множествами здесь полностью применимо: множество значений аргумента здесь есть множество всех действительных чисел, а множество значений функции сводится к одному числу b, которое соответствует всем значениям аргумента. Если учитель чувствует себя достаточно уверенно, то можно дать современное определение функции, показав, что приведённое в учебнике определение им полностью покрывается, и значительно расширить список примеров, иллюстрирующих это определение (см. [III, 30б]).

2. Рассматривая прямую и обратную пропорциональности, необходимо подчёркивать, что это те же самые две зависимости, какие уже рассматривались в курсе арифметики. Разница лишь в том, что коэффициент пропорциональности k может иметь теперь любое действительное значение, а не только любое рациональное положительное, как в арифметике, и множество значений как аргумента, так и функции состоит теперь при $k \neq 0$ из всех действительных чисел (за исключением числа 0 для обратной пропорциональности). Особого упоминания заслуживает случай $k=0$, когда множество значений функции $y=kx$ сводится к одному числу 0.

3. При рассмотрении графика функции $y=kx$ полезно отметить, что при всевозможных действительных значениях k получаются все прямые, проходящие через начало координат (включая и ось X, которая соответствует значению $k=0$), за исключением оси Y, которая не получается ни при каком значении k.

4. Определяя гиперболу как график функции $y=k:x$ при $k \neq 0$, надо с самого начала указать на наличие двух её ветвей и не говорить, что при положительных k и x гипербола лежит в 1-м квадранте, как об этом сказано в учебнике Киселёва. Построив ряд изолированных точек графика, обосновываем возможность проведения через них непрерывной кривой соображениями о характере изменения y в промежутке между двумя точками, через которые она проходит.

5. При построении графиков надо считать абсолютно обязательным указание масштаба и рациональный его выбор. Удобнее всего брать в единице длины (1 *см* или 1 *мм*) 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500 и т. д. единиц, избегая таких масштабов, как 3, 6, 7 и т. д. единиц в 1 *см*, при которых затруднена интерполяция на глаз. Не бояться располагать оси координат за пределами чертежа, указывая на чертеже линии, им параллельные, чтобы устранить такие случаи, когда используется только какой-либо уголок листа. Не стесняться брать разные масштабы для осей X и Y, помня, однако, что в этом случае тангенс угла наклона графика функции $y=kx+b$ уже не равен k.

6. Крайне желательно использовать график линейной функции для того исследования решения уравнения 1-й степени с одним неизвестным и системы двух уравнений 1-й степени с двумя неизвестными, о котором была речь в предыдущем параграфе.

7. Особого внимания заслуживает вопрос о составлении и рациональном использовании таблиц значений функций, между тем стабильные учебники уделяют ему крайне мало внимания и не связывают того, что говорят о табличном способе задания функции, с практическим использованием готовых таблиц, имеющихся в руках учащихся. Нормально ли такое положение, когда учащиеся рассуждают о таблицах значений функции $y = kx$ при взятых произвольно значениях k и не знают, что у них есть подробная таблица функции $y = \pi x$, так облегчающая решение задач на длину окружности, и таблицы функции $y = \frac{\pi}{180} \cdot x$, т. е. радианной меры дуги в x градусов, помогающая решать задачи на длину дуги? Тот же вопрос возникает по поводу функции $y = k : x$ и таблицы обратных значений, т. е. таблицы функции $y = 1 : x$, по поводу функции $y = ax^2$ и таблицы квадратов, т. е. функции $y = x^2$, таблицы площади круга, т. е. функции $y = 0{,}25\,\pi x^2$. Функция тангенс упоминается при рассмотрении графика линейной функции; почему не заняться таблицами синусов и тангенсов, без которых висит в воздухе та пропедевтика тригонометрии, которая предусмотрена программой геометрии VIII класса? Раздел «Функции и их графики» следовало бы дополнить таким пунктом: устройство и употребление таблиц функций, особенно часто встречающихся в элементарном курсе математики, а именно: таблицы квадратов, кубов, обратных значений, длины окружности и площади круга, радианной меры, натуральных синусов и тангенсов. Практическое овладение таблицами будет полноценным лишь при уяснении операции интерполирования. Сборник «Четырёхзначные математические таблицы», находящийся на руках у учащихся IX и X классов, с успехом может быть использован и в VIII классе, причём вся теоретическая сторона достаточно освещена в «Объяснениях», помещённых в конце сборника, начиная с 19-го издания. Необходимо, чтобы учащиеся не только умели пользоваться теми «готовыми поправками», какие даны почти во всех таблицах сборника, но и понимали, как эти готовые поправки вычислены и как быть, если их нет, т. е. умели бы производить линейную интерполяцию, зная условия, при которых она допустима.

Желающих подробнее ознакомиться с вопросом о таблицах отсылаем к книгам [11, 12].

§ 27. Изучение функций в IX и X классах.

Есть три раздела, специально посвящённых в этих классах функциям: изучение показательной и обратной ей логарифмической функции в IX классе; тригонометрические функции, изучаемые в курсе тригонометрии в IX и X классах; теорема Безу, и её следствия, т. е. некоторые свойства целой рациональной функции, которым посвящена последняя тема программы алгебры в X классе. Однако понятие функции, усвоенное в VIII классе, может быть плодотворно использовано почти в любом последующем разделе курса математики. Так, например, рассматривая в IX классе пределы, мы имеем всё время дело с последовательностями чисел, т. е. с функциями, определёнными на множестве натуральных чисел; решая разнообразные уравнения, мы разыскиваем те значения аргумента, при которых две данные функции получают одно и то же значение; все выводы метрической геометрии представляют собой заключения о длинах, площадях, объёмах как функциях определённых элементов плоских фигур и пространственных тел.

Полное изучение любой функции предполагает решение ряда вопросов, далеко выходящих за рамки средней школы. Таково, например, исследование её на непрерывность, выяснение хода её изменения в любом данном интервале, разыскание точек минимума и максимума. Однако на некоторые вопросы, относящиеся к каждой рассматриваемой функции, можно ответить исчерпывающим образом, на некоторые частично, оставаясь на уровне пропедевтики, ценной прежде всего тем, что она вырабатывает наглядные представления, которые так помогут при изучении математических дисциплин и их приложений в высшей школе. Определение каждой изучаемой функции и множества значений её аргумента или аргументов должно быть совершенно чётким; это делается очень просто, если функция задаётся оперативно, через формулу, и значительно труднее, когда дело идёт о новой функции, не выражаемой с помощью уже знакомых функций, как это бывает, например, при изучении показательной и по крайней мере одной из основных тригонометрических функций. В некоторых случаях удаётся без особого труда указать и множество значений функции, но чаще это получается лишь в результате детального её изучения. Понятие о непрерывности учащиеся получают лишь наглядное, основанное на зрительном образе кривой, которая вычерчивается без отрыва острия карандаша от бумаги. Располагая понятием предела, учащиеся средней школы в сущности подготовлены к пониманию точного определения непрерывности функции одного аргумента как в данной её точке, так и на отрезке, но и выработка твёрдого наглядного образа непрерывной функции с ясным представлением ряда конкретных случаев, когда непрерывность нарушена, представляет большую ценность. Изучение хода изменения в любом интервале требует использования производной, но в целом ряде частных случаев может быть проведено элементарно. Именно с этим связана наиболее богатая практическими приложениями сторона всей работы по изучению функции, дающая широкое поле для посильной самостоятельной работы учащихся, при правильной постановке неизменно сильно их заинтересовывающая, даже увлекающая. Остаётся отметить ещё табулирование, которое должно проводиться с максимальным использованием готовых наличных таблиц и со всей доступной учащимся рационализацией вычислений и которое завершается построением графиков с выработкой надлежащих технических навыков (выбор масштаба и положения осей, разметка опорных точек, проведение самого графика). Построение графика должно основываться на теоретических заключениях о ходе изменения функции, но иногда приходится заменять этот естественный порядок обратным: не располагая сведениями о поведении функции, вытекающими из её определения, строят ряд точек её графика и, уже основываясь на нём, высказывают более или менее вероятное заключение о ходе изменения функции в интервалах между этими опорными точками.

Такой подход к изучению функции не должен вызывать возражений, если видеть в такого рода заключениях лишь то, что они собой в действительности представляют, т. е. гипотезы, догадки, и не подменять ими доказательств.

Рассмотрим один пример изучения функции. Положим, речь идёт о длине изгороди, которой надо обнести с трёх сторон прямоугольный участок площадью в 200 $м^2$, прилегающий одной стороной к стене здания, т. е. о функции $y = 2x + 200 : x$, где x — длина каждой из двух сторон прямоугольника, примыкающих к стене. Практический интерес представляет выяснение того значения x, при котором функция y получает наименьшее значение, но вопрос следует поставить шире, как изучение этой функции вообще, имея в виду ответить на такие частные вопросы: 1) на каком множестве значений x задана эта функция? (на множестве всех отличных от 0 действительных чисел, причём при замене x на $-x$ функция меняет знак, сохраняя абсолютное значение, а потому достаточно изучить её в интервале между 0 и $+\infty$); 2) как меняется y при возрастании x? (нетрудно показать, идя совершенно элементарным путём, что в интервале от 0 до 10 при возрастании x y убывает, а в интервале от 10 до $+\infty$ растёт, имея, таким образом, минимум при $x = 10$, равный 40); 3) какие значения имеет y или лучше $0{,}5y$ при значениях x, изменяющихся от $x = 1$ хотя бы до $x = 20$ через 1? (эта счётная работа выполняется в несколько минут, если воспользоваться таблицей обратных значений); 4) какой вид имеет график функции для значений x от 1 до 20? (располагая четвертушкой клетчатой бумаги из тетради, берём по оси X масштаб в одной клетке 1 *м*, т. е. в 1 *см* 2 *м*, а по оси Y — в одной клетке 10 *кв. м*, т. е. в 1 *см* 20 *кв. м*); 5) какой вид имеет график за пределами этого интервала? (стремительный рост y при приближении x от 1 к 0, значительно более медленный, но всё ускоряющийся рост y при возрастании x от 10, симметричное строение графика при отрицательных значениях x; желательно построение графика в более мелком масштабе); 6) каково множество всех значений функции y? (все действительные числа от $-\infty$ до -40 и от $+40$ до $+\infty$); 7) какое заключение о поведении функции более общего вида $y = x + k^2 : x$ можно сделать на основании всего установленного?

Решаемые в школе задачи алгебры, геометрии, тригонометрии доставляют огромное множество функций, вполне пригодных для изучения их учащимися IX и X классов. Богатый выбор прекрасных объектов для изучения имеется в указанных уже статьях [III, 33б и III, 30б] и в особенности в книгах [III, 17а, б]. Интересный материал можно найти также в книге [III, 19].

Глава VI

РАЗВИТИЕ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА В СТАРШИХ КЛАССАХ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

§ 28. Введение иррациональных чисел. Множество действительных чисел.

Нет другого раздела школьного курса математики, который усваивался бы с таким трудом, как раздел, посвящённый переходу от множества чисел рациональных к множеству чисел действительных, осуществляемый в VIII классе через введение иррациональных чисел. Даже на основной вопрос о том, что такое иррациональное число, окончившие среднюю школу часто дают неправильные ответы, свидетельствующие о непонимании ими сути дела (чаще всего говорят, что иррациональное число — это корень). Грустную картину рисует статья [III, 31], построенная на материале, собранном в школах двух городов. Особенно интересные ответы были получены на вопрос о том, можно ли сложить числа π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{8}$. Вместо правильного ответа, утверждающего возможность сложения всех этих чисел и возможность приближённого представления их суммы десятичным числом с произвольно высокой точностью, больше половины учащихся категорически заявили, что сложить можно только два из них, а именно: $\sqrt{2}$ и $\sqrt{8}$. Таким образом, второстепенная деталь, а именно возможность представления суммы $\sqrt{2}$ и $\sqrt{8}$ в виде $3\sqrt{2}$, представляется многим учащимся сутью дела, а подлинный смысл сложения действительных чисел, хотя бы даже основанный на геометрическом представлении суммы отрезков, длины которых выражаются данными слагаемыми, им неизвестен.

Обойтись без иррациональных чисел в курсе элементарной математики нельзя, но ни одна из существующих теорий действительных чисел по своей сложности не может быть полностью изучена в средней школе. Ближе других к средней школе находится теория Кантора-Мере, построенная на понятии фундаментальной последовательности рациональных чисел, частным случаем которой является любая последовательность десятичных приближений; подробное изложение этой теории можно найти, например, в книге [III, 30г], но вполне доступным в средней школе является только такое изложение теории действительных чисел, которое основано на привлечении геометрического материала. Естественнее всего обеспечить понимание учащимися средней школы действительного положительного числа как длины отрезка прямой, установив как аксиому, что для любого отрезка при произвольно выбранной единице длины существует число, выражающее меру этого отрезка, и что для любого числа, представляемого конечной или бесконечной десятичной дробью, существует отрезок, для которого это число служит мерой длины (при произвольной единице длины). Если измеряемый отрезок соизмерим с отрезком-единицей, его мера длины выражается рациональным числом, если несоизмерим — иррациональным, причём это иррациональное число в результате процесса десятичного измерения представляется бесконечной непериодической десятичной дробью. Изложение учения об иррациональном числе, приемлемое для школы и основанное на измерении отрезка, можно найти в статье [III, 2в], которую и рекомендуем читателю. Повидимому, геометрический элемент в этом изложении можно бы было ещё усилить, определяя сумму двух действительных положительных чисел посредством суммы отрезков, а произведение посредством площади прямоугольника, построенного на этих отрезках, но эти соображения нуждаются в тщательной разработке.

Программа алгебры VIII класса предусматривает введение понятия иррационального числа в связи с изучением корней, а не с задачей измерения отрезков, хотя в «Объяснительной записке» сказано достаточно ясно: «На всех этапах изложения широко используется геометрическая иллюстрация, и самое введение иррациональных чисел мотивируется потребностями геометрии (несоизмеримые отрезки)» (стр. 11 по изданию 1952 г.).

Постепенное расширение понятия числа прекрасно иллюстрируется точками числовой оси. Отметив на ней точки 0 и 1, т. е. выбрав начало, единицу длины и положительное направление, рассматриваем сперва множество всех целочисленных точек, т. е. точек с абсциссами $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, и получаем образ множества целых чисел. Далее делим каждый промежуток между двумя соседними целочисленными точками на 2, 3, 4, 5... равных частей и, отмечая точки деления, получаем множество всех рациональных точек оси, представляющее собой образ множества всех рациональных чисел.

В то время как множество всех целочисленных точек состоит из отдельных, изолированных друг от друга точек, каждая из которых имеет ближайшую соседнюю с той и с другой стороны, множество рациональных точек обладает новым свойством, которое называется «плотностью в себе» и состоит в том, что между любыми двумя рациональными точками существуют ещё промежуточные рациональные точки. В то же время, как легко показать, эти рациональные точки не заполняют числовой оси целиком. Этот важный математический факт плохо укладывается в головы начинающих, так как точки мыслятся очень малыми, но всё же имеющими какие-то размеры, откуда вытекает убеждение, что бесконечное число рациональных точек на отрезке должно его заполнять, и надо потратить немало времени, чтобы добиться признания этой разрывности множества рациональных точек.

Арифметическая сторона дела, а именно предложение о том, что всякая рациональная точка имеет абсциссу, выражаемую конечной десятичной или бесконечной десятичной периодической дробью, а всякая иррациональная — бесконечной десятичной непериодической дробью, даётся после этого несравненно легче. Но определения действий над иррациональными числами, основанные на рассмотрении последовательностей приближённых их значений по недостатку и по избытку, повидимому, для среднего учащегося VIII класса непосильно трудны. Статья [III, 2в] даёт эти определения в таком виде, что вряд ли возможно дальнейшее улучшение изложения, но и в ней признано целесообразным дать основные теоремы о существовании суммы и произведения двух действительных чисел без доказательств Ввиду этого возникает вопрос: не лучше ли дать другие, менее громоздкие определения, хотя бы за счёт введения лишних аксиом геометрического содержания?

Представляется разумным ограничить изучаемый в VIII классе материал об иррациональных и действительных числах следующими пунктами, добиваясь полной ясности их понимания и большей прочности их запоминания.

1. Множества рациональных чисел, содержащего все целые и дробные числа, как положительные, так и отрицательные и нуль, для целей точного измерения отрезков недостаточно. На числовой оси наряду с бесконечным и плотным в себе множеством рациональных точек существует ещё бесконечное же множество точек иррациональных, т. е. таких, расстояния которых от начала выражаются иррациональными числами. Так, точка, находящаяся на оси на расстоянии от начала, равном диагонали квадрата со стороной, равной единице, является точкой иррациональной.

2. Все рациональные числа представимы в виде конечных и бесконечных периодических десятичных дробей, иррациональные числа выражаются бесконечными непериодическими десятичными дробями, к которым приходят в результате процесса десятичного измерения отрезков. Множество всех рациональных чисел после присоединения к нему множества всех иррациональных чисел даёт множество всех действительных чисел. Всякое действительное число, как рациональное, так и иррациональное, может быть приближённо представлено с произвольно высокой точностью посредством двух рациональных чисел, одно из которых даёт приближение по недостатку, другое по избытку.

3. Для множества всех действительных чисел верна такая аксиома: если на числовой оси указаны начальная и единичная точки, т. е. точки с абсциссами 0 и $+1$, то каждой точке этой оси соответствует одно и только одно действительное число, выражающее её расстояние от начала (её абсциссу), и каждому действительному числу соответствует одна и только одна точка, отстоящая от начала на расстоянии, выражаемом этим числом (т. е. точка с такой абсциссой).

4. Все четыре действия над действительными числами, рациональными и иррациональными, выполнимы в той же мере, как и над одними рациональными: каждые два действительных числа можно складывать, вычитать, умножать и делить (за одним лишь исключением — нельзя делить на нуль), получая в результате каждый раз некоторое действительное число. Другими словами, множество действительных чисел, как и множество рациональных чисел, является «полем».

Результат действия над действительными числами можно представить с произвольно высокой точностью посредством двух рациональных чисел, выражающих этот результат по недостатку и по избытку и получаемых путём выполнения одноимённых операций над приближёнными значениями данных чисел.

Разъясняя точный смысл вводимых терминов и привлекая достаточное количество геометрических иллюстраций, можно обеспечить сознательное усвоение перечисленных в этих четырёх пунктах математических фактов, причём некоторые высказанные предложения доказываются, другие принимаются без доказательства, но с проверкой на частных примерах.

§ 29. Введение мнимых чисел. Множество комплексных чисел.

С изучением комплексных чисел в X классе дело обстоит пока также неблагополучно, но несколько иначе, чем с изучением действительных чисел. Соответствующий программе материал в учебнике Киселёва невелик и довольно просто изложен; оканчивающие среднюю школу обычно неплохо его запоминают, но правильное понимание комплексных чисел встречается у них только в виде редкого исключения. В мнимых числах они видят только математические символы, лишённые реального содержания. Пытаясь понять, почему в VIII классе извлечение квадратного корня из отрицательного числа рассматривалось как действие невозможное, а в X классе это действие стало возможным и результат его объявляется каким-то особым, новым, «мнимым» числом, более любознательные учащиеся в большинстве случаев не находят удовлетворяющего их объяснения ни в учебнике, ни у учителя и приходят к вреднейшему выводу, что здесь идёт речь о вещах, недоступных их пониманию. Можно утверждать с полной определённостью, что такое изучение комплексных чисел приносит только вред. Если по поводу этого говорится и пишется несравненно меньше, чем о положении с изучением в школе действительных чисел, то только потому, что тема «Комплексные числа» изолирована от других, и плохое понимание этих чисел не отражается сколько-нибудь заметно на подготовленности выпускников к занятиям в высшей школе, где этот раздел если и проходится, то проходится обычно заново, без использования того, что вынесено по нему из средней школы. Вред от практикуемого в большинстве школ чисто формального изучения комплексных чисел заключается в создании извращённого представления об этих числах, бросающего в глазах вдумчивого ученика некоторую тень на всю математику.

Положение существенно изменится, если с самого начала поставить вопрос об отражении посредством чисел некоторой реальности, для которой одних действительных чисел уже мало. Возможны три пути: через рассмотрение множества точек плоскости, через рассмотрение множества векторов, исходящих из начала координат и идущих во все точки плоскости, через рассмотрение операций поворота и растяжения, позволяющих получить любой такой вектор из единичного вектора. Идя по первому пути, мы имеем то самое геометрическое истолкование комплексных чисел, какое предусмотрено программой; разница, однако, в том, что при обычном порядке изложения непонятная для учащихся вещь — комплексное число — является первичной, а точка плоскости, ею характеризуемая, чем-то производным, вторичным, в то время как правильным является обратный порядок. Изучая множество точек числовой оси, мы каждую из них характеризуем некоторым действительным числом: каждой точке однозначно соответствует действительное число, каждому действительному числу однозначно соответствует определённая точка оси, соотношениям «совпадает», «предшествует», «следует», возможным между двумя точками оси, опять-таки однозначно соответствуют соотношения «равно», «меньше», «больше» между соответствующими числами (эти два множества «изоморфны»). Идея отображения конкретной реальности — множества точек на прямой — посредством той абстракции, какую представляют собой действительные числа, даёт нам возможность, оперируя над числами, устанавливать с их помощью косвенным путём такие свойства этой реальности, какие иначе могут быть установлены лишь с трудом. Так, зная абсциссы двух точек x_1 и x_2, можем узнать длину отрезка между ними, не производя измерения непосредственно, а лишь выполняя вычитание этих чисел. Естественно возникает вопрос, нельзя ли аналогичным образом выразить числом и каждую точку плоскости, и получается такой ответ: каждую пару чисел x, y, характеризующих положение точки на плоскости в декартовых прямоугольных координатах, можно рассматривать как одно число z, которое следует назвать «составным», или «сложным», или, применяя общепринятый латинский термин, «комплексным». Каждое такое число в таком же смысле является характеристикой положения точки на плоскости, в каком действительное число является характеристикой положения точки на прямой, множество точек на плоскости и множество комплексных чисел изоморфны. Комплексные числа, если их рассматривать как отображение вполне реального множества точек плоскости, теряют в глазах учащихся свой таинственный характер. Полную ясность получают и все относящиеся к понятию комплексного числа определения и термины. Два комплексных числа $z_1=(x_1, y_1)$ и $z_2=(x_2, y_2)$ равны тогда и только тогда, когда в отдельности равны их первые и вторые элементы, т. е. при условии $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Ведь иначе же и быть не может, так как только при этом условии числа z_1 и z_2 выражают одну и ту же точку! Комплексные числа разделяются на комплексные действительные, выражающие точки оси абсцисс и имеющие второй элемент, равный нулю, причём запись $(x, 0)$ заменяется более короткой — указанием одного первого элемента x, так что комплексное действительное число $(x, 0)$ отождествляется с действительным числом x, и комплексные мнимые, выражающие все остальные точки плоскости, т. е. точки вне оси абсцисс, и имеющие второй элемент, отличный от нуля. Среди комплексных мнимых выделяются числа комплексные чисто мнимые, выражающие точки оси Y (кроме начала) и имеющие общий вид $(0, y)$, где $y \neq 0$. Мнимой единицей, обозначаемой символом i, называют чисто мнимое комплексное число $(0, 1)$, выражающее единичную точку оси Y, и формулы $i^2 = -1$, $\sqrt{-1} = \pm i$ появляются только позднее, после уяснения смысла произведения комплексных чисел. Обычная запись комплексного числа (x, y) в виде $x + iy$ законна до выяснения смысла суммы комплексных чисел лишь при оговорке, что знак плюс, в ней фигурирующий, не есть знак сложения. Так как в дальнейшем выясняется, что он в конце концов всё же является знаком сложения, так как $(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy$, то лучше вначале пользоваться записью (x, y) и перейти к обычной только после выяснения смысла действий сложения двух комплексных чисел и умножения комплексного числа на действительное. Столь же естественно получается и представление комплексного числа в тригонометрической форме, как характеристика положения точки с помощью полярных её координат r и α.

Введение комплексных чисел через рассмотрение множества точек плоскости представляет собой самый естественный и простой путь к их пониманию. Но надо показать также и возможность двух других путей. Считая, что комплексное число (x, y) выражает не только точку с координатами x, y, но и вектор, идущий из начала координат в эту точку, что вполне соответствует взгляду на рациональное число как на выражение изменения величины (см. стр. 220), мы получаем возможность дать определение суммы двух комплексных чисел как диагонали параллелограма, построенного на векторах слагаемых. Выяснив же возможность рассматривать комплексное число как выражение операции поворота и растяжения, переводящих единичный вектор (1; 0) в данный произвольный вектор z, имеющий модуль r и аргумент α, мы получаем возможность определить произведение двух комплексных чисел как такую операцию поворота и растяжения, какая равносильна двум последовательно выполняемым операциям, выражаемым сомножителями.

Если идти при изучении комплексных чисел указанным путём, отправляясь от реальных геометрических образов, то обеспечено ясное понимание смысла и ценности комплексных чисел. Заучивание непонятных для учащихся определений и теорем, кроме вреда, ничего не приносит, а при правильной постановке дела усвоение элементов теории комплексных чисел поднимает выпускников средней школы на более высокую ступень математической культуры.

Если учитель не чувствует себя достаточно уверенно, чтобы решиться на ту довольно значительную ломку традиционного изложения, какая указана выше, ему можно рекомендовать детальное изучение того изложения, какое даёт глава VII книги [III, 33а]. Перенести это изложение в X класс полностью невозможно, но оно позволит учителю сделать изучение комплексных чисел его учениками свободным от чисто математических ошибок.

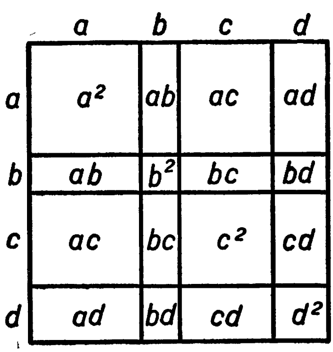
В заключение несколько слов об одном затруднении, какое нередко приходится встречать учителю: где ошибка в рассуждении, выражаемом цепочкой равенств $i^2 = (+\sqrt{-1})^2 = (+\sqrt{-1}) \cdot (+\sqrt{-1}) = +\sqrt{(-1)\cdot(-1)} = +\sqrt{+1} = +1$? Найти её можно лишь после выяснения возможности и двузначности действия извлечения квадратного корня из любого комплексного числа (в этом ещё один довод против введения с самого начала мнимой единицы как квадратного корня из —1). Установив, что квадратный корень из любого комплексного числа имеет два противоположных значения, мы должны выяснить, какое значение имеет произведение двух квадратных корней, для каждого из которых взято одно определённое значение. Для чисел действительных имеем простое правило: если перемножаются два квадратных корня, взятых с одинаковыми знаками, получается положительный квадратный корень из их произведения, а с разными знаками — отрицательный: $(+\sqrt{a})\times\times(+\sqrt{b})=+\sqrt{ab}$, $(-\sqrt{a})\cdot(-\sqrt{b})=+\sqrt{ab}$, $(+\sqrt{a})\cdot(-\sqrt{b})=-\sqrt{ab}$. Но простое перенесение этого правила на комплексные числа невозможно: ведь мы много раз имели случай убедиться, что при переходе от одного числового множества к другому (расширенному) некоторые свойства действий сохраняются, другие же меняются; вспомним, например, неравенство $a+b>a$, верное для положительных чисел и перестающее быть всегда верным после перехода к числам рациональным. Умножение комплексных чисел приходится делать по формуле $r_1(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1)\cdot r_2(\cos\alpha_2+i\sin\alpha_2)=r_1r_2[\cos(\alpha_1+\alpha_2)+$ $+i\sin(\alpha_1+\alpha_2)]$, а она говорит, что $i\cdot i=(\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ)\cdot(\cos 90^\circ+$ $+i\sin 90^\circ)=\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ=-1$. Таким образом, ошибка в указанной выше цепочке равенств там, где произведение $(+\sqrt{-1})\cdot(+\sqrt{-1})$ заменено числом $+\sqrt{(-1)^2}=+1$, тогда как это произведение равно $\sqrt{(-1)^2}=-1$.

Глава VII

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В СТАРШИХ КЛАССАХ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

§ 30. Новые виды тождественных преобразований, изучаемые в старших классах средней школы.

Действия над степенями с натуральными показателями, которыми приходится заниматься в самом начале курса алгебры в VIII классе, ничего по существу нового по сравнению с тем, что было уже пройдено в VI и VII классах, не представляют. Здесь дело идёт о повторении ранее известных правил, связанном с тщательным их обоснованием на основе определения степени, а также переместительного и сочетательного свойств произведения. Более новым является вопрос о возведении в квадрат многочлена, т. е. об обобщении формул квадрата суммы и разности двух чисел на случай алгебраической суммы любого числа членов. К тому, что об этом говорится в учебнике алгебры Киселёва, очень полезно добавить геометрическую иллюстрацию в виде квадрата, каждая сторона которого есть сумма n отрезков (фиг. 10). Учащиеся, познакомившись с этой фигурой, несравненно лучше запоминают формулу квадрата многочлена.



Фиг. 10.

Другим обобщением формулы квадрата двучлена является формула бинома Ньютона, дающая n-ую степень двучлена и изучаемая в X классе.

Наиболее важным и трудным видом тождественных преобразований, изучаемых в старших классах средней школы, являются преобразования выражений, содержащих радикалы. Ими мы займёмся подробно в следующем параграфе.

При изучении логарифмов приходится преобразовывать логарифм выражения, составленного из букв и чисел с помощью знаков действий умножения, деления, возведения в степень, извлечения корня, приводя его к алгебраической сумме логарифмов, взятых с некоторыми коэффициентами, т. е. к линейной функции логарифмов величин, входящих в это выражение, а также вести обратное преобразование, т. е. переходить от линейной функции логарифмов к логарифму одного более сложного выражения. Обе эти операции (логарифмирование и потенцирование) проходят без затруднений, если твёрдо усвоены основные формулы логарифмирования, а именно формулы логарифма произведения, частного, степени и корня. Сперва их применение производится с подробной записью, со ссылками для обоснования каждого шага, потом запись постепенно сокращается; во многих случаях сразу можно записать окончательный результат. Так логарифмируя выражение $x = \frac{ab^2}{\sqrt[3]{c}}$, на первых порах пишем:

$\lg x = \lg(ab^2) - \lg\sqrt[3]{c}$ (по теореме о логарифме частного) $=$

$= \lg a + \lg b^2 - \lg\sqrt[3]{c}$ (по теореме о логарифме произведения) $=$

$= \lg a + 2\lg b - \lg\sqrt[3]{c}$ (по теореме о логарифме степени) $=$

$= \lg a + 2\lg b - \frac{1}{3}\lg c$ (по теореме о логарифме корня),

а в дальнейшем все промежуточные выкладки делаются в уме и сразу записывается окончательный результат. Имея задачу потенцирования, т. е. желая представить такое выражение, как $\lg a + 2\lg b - \frac{1}{3}\lg c$, в виде логарифма некоторого нового выражения, идём в обратном порядке и приходим к $\lg\frac{ab^2}{\sqrt[3]{c}}$ сперва тоже медленно и постепенно, в дальнейшем же сразу. Необходимо заранее предупредить возможность ошибки, так часто допускаемой в школе, когда заменяют $\lg(a+b)$ суммой $\lg a + \lg b$. Нельзя переходить к более сложным задачам на логарифмирование и потенцирование, пока ещё нет ясного представления о более простых преобразованиях этого рода. Увлечение техникой преобразований за счёт понимания сути дела здесь даёт особенно нехорошие результаты. Случается, что учащиеся, благополучно решающие более сложные задачи на логарифмирование и потенцирование, приведённые в задачнике, становятся втупик, когда заходит речь о связи между числами a, b, c, если их логарифмы связаны соотношением $\lg a + \lg b = \lg c$.

Изучение прогрессий связано с тождественными преобразованиями некоторых многочленов, о чём будет речь в § 38, а решение задач на комплексные числа требует выполнения ряда преобразований, изученных ранее, с последующей заменой i^2 через -1. Тождественные преобразования, связанные с делением на двучлен вида $x-a$, рассмотрены ниже (в § 37).

§ 31. Преобразование выражений, содержащих радикалы.

Работа по изучению преобразований выражений, содержащих радикалы, начинается естественно с выяснения того, что представляет собой $\sqrt[n]{a}$; где a — любое действительное, n — любое натуральное число, большее 1. Одного определения, сводящегося к формуле $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, здесь мало: нужно понимание того, в каких случаях существует единственное действительное число, выражающее этот корень, когда оно не существует, когда оно существует, но не единственно. Проще всего обстоит дело в поле комплексных чисел: каково бы ни было комплексное число a, отличное от 0, и каково бы ни было натуральное число n, большее 1, всегда существует n и только n различных комплексных чисел, удовлетворяющих поставленному условию и выражаемых через $\sqrt[n]{a}$. Но в поле действительных чисел дело обстоит сложнее, и в VIII классе приходится тщательно различать случаи, когда n чётно и когда n нечётно: корень чётной степени из любого действительного положительного числа существует и имеет два противоположных значения, а из действительного отрицательного числа не существует, корень же нечётной степени из любого действительного числа существует и имеет единственное значение. Совершенно необходимо добиться твёрдого знания этого факта, вполне усваиваемого учащимися после рассмотрения ряда примеров, хотя его доказательство, основанное на представлении корня в виде десятичной дроби, даётся учащимся с трудом. Двузначность корня чётной степени из положительного числа представляет большое неудобство, и его устраняют, вводя понятие арифметического значения корня, т. е. неотрицательного (положительного или равного нулю) его значения. Таким образом, символ $\sqrt[n]{a}$, где a — любое неотрицательное число, n — любое натуральное число, большее 1, приобретает вполне определённый смысл. Он выражает единственное неотрицательное число, положительное при $a>0$ и равное 0 при $a=0$, которое при возведении в степень n даёт a. Однако нельзя упускать из виду, что действие извлечения корня чётной степени, пока мы занимаемся только действительными числами, вовсе невыполнимо, если $a<0$, и выполнимо, но даёт два значения: а именно: $+\sqrt[n]{a}$ и $-\sqrt[n]{a}$, если $a>0$.

Установив понятие арифметического значения корня, переходят к рассмотрению ряда его свойств: свойства корня оставаться неизменным при одновременном умножении показателя степени подкоренного и показателя корня на одно и то же число (это свойство по аналогии с дробями называют основным свойством корня), затем свойств корня из произведения, частного, степени, корня. Те доказательства этих свойств, какие приведены в стабильном руководстве Киселёва, могут привести к недоразумениям, если не обратить внимание на монотонность изменения степени положительного числа при изменении основания. Действительно, чтобы доказать равенство $\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}$, там предлагается возвести обе его части (ещё не зная, равны ли они!) в степень n, а получив слева и справа одно и то же выражение abc, заключают, что равны были и обе части данного равенства. Но ведь рассуждая таким образом, мы докажем, что -5 равно $+5$: ведь $(-5)^2=25$, $(+5)^2=25$, $(-5)^2=(+5)^2$, следовательно $-5=+5$! Здесь необходимо подчеркнуть, что пока речь идёт об одних положительных числах, из неравенства $a>a_1$ следует неравенство $a^n>a_1^n$, а потому допущение $\sqrt[n]{abc}>\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}$ приводит к заключению, что $\left(\sqrt[n]{abc}\right)^n>\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}\right)^n$, или $abc>abc$, что нелепо. Другой совершенно правильный путь доказательства можно найти в книге [III, 34а].

В то время как для целых и дробных рациональных выражений существуют свои канонические формы (многочлен, расположенный по степеням главной буквы, и частное двух таких многочленов), для выражений, содержащих радикалы, такой нормальной формы не существует, и это создаёт затруднения в вопросе о тождественных преобразованиях иррациональных выражений. Так, например, учащиеся склонны представлять $\sqrt{75}$ в виде $5\sqrt{3}$, и учитель иногда даже настаивает на необходимости этого преобразования, но ясно, что оно излишне, если имеется в виду только получение численного значения: значение $\sqrt{75}\approx 8{,}660$ берётся прямо из таблицы, а для получения значения $5\sqrt{3}$ надо взять из таблицы $\sqrt{3}\approx 1{,}732$ и умножать его на 5. Усвоив операцию вынесения множителя из-под радикала и обратную ей — введение множителя под радикал, надо в каждом отдельном случае выяснить, какая форма выгоднее: $a\sqrt[n]{b}$ или $\sqrt[n]{a^nb}$. Применяя эту формулу, нельзя упускать из виду некоторые необходимые оговорки. Например, если a — число отрицательное и n чётное, то для арифметических значений корней равенство $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}$ не имеет места.

В VIII классе довольно много внимания уделяют преобразованию, имеющему целью уничтожение иррациональности в знаменателе, но далеко не всегда учащиеся понимают цель этой операции, о чём уже была речь выше (§ 5 III части), и надо позаботиться о том, чтобы сделать эту цель ясной.

Формула сложного радикала

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{0{,}5\left(A + \sqrt{A^2 - B}\right)} \pm \sqrt{0{,}5\left(A - \sqrt{A^2 - B}\right)},$$

полезная во многих случаях, действующей программой не предусмотрена, но иногда встречаются задачи, где она может привести к существенному упрощению выкладок. Например, выражение стороны правильного 12-угольника, вписанного в круг радиуса r, а именно $r\sqrt{2-\sqrt{3}}$, с помощью этой формулы преобразуется в более простое $0{,}5\, r(\sqrt{6}-\sqrt{2})$; доказательство того, что функция $y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ при $1 \leqslant x \leqslant 2$ имеет постоянное значение 2, а при $2 \leqslant x \leqslant +\infty$ может быть представлена более простой формулой $y=2\sqrt{x-1}$, становится очень лёгким. Учебник алгебры Киселёва в последних изданиях не содержит никакого указания на формулу сложного радикала, и читателю, желающему с ней познакомиться, рекомендуется обратиться к книге [III, 33а].

По поводу каждого иррационального буквенного выражения, как и по поводу каждого рационального, возникает вопрос о том, какие значения букв для него допустимы или, другими словами, на каком множестве определена та функция, которая им выражается. Так, выражение $\frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}+\frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}$ имеет смысл, поскольку рассматриваются только действительные числа, лишь для значений x, удовлетворяющих неравенству $0 < x^2 \leqq 1$; другими словами, эта функция определена только на полуинтервале $(0;\ 1)$, включающем 1, но не включающем 0, и на полуинтервале $(-1;\ 0)$, включающем -1, но тоже не включающем 0. Поэтому задача — вычислить значение этого выражения при $x=0{,}5\sqrt{3}\approx 0{,}8660$ — имеет смысл; она не имела бы смысла, если бы было предложено взять, например, $x=\sqrt{3}$. Вычисление требуемого значения рекомендуется провести дважды: сперва путём непосредственной подстановки значения $x=0{,}5\sqrt{3}$ в данное выражение, что даёт после довольно длинных преобразований число 1, потом после предварительного преобразования данного выражения к виду $\sqrt{1+x}\cdot(1:x+1)+\sqrt{1-x}\cdot(1:x-1)-2$ или к виду $[(\sqrt{1+x})^3+(\sqrt{1-x})^3]:x-2$, что облегчает подстановку, приводящую к тому же числу 1, но тоже требует немалой работы. Если подстановку придётся делать неоднократно, второй путь выгоднее.

Отметим две следующие ошибки, связанные с действиями над радикалами, часто допускаемые в школе и заслуживающие внимательного рассмотрения. Иногда учащиеся полагают, что корень из суммы (или разности) равен сумме (или разности) корней из слагаемых (или уменьшаемого и вычитаемого). Для разъяснения ошибки нужно указать на числовые примеры вроде такого, как извлечение квадратного корня из суммы $9+16=25$, и выяснить, в каких случаях распределительное свойство существует, в каких нет. Полагают также, что арифметическое значение квадратного корня из квадрата числа всегда равно этому числу, т. е. что $+\sqrt{a^2}=+a$, в то время как это верно только при $a \geqslant 0$, а при $a \leqslant 0$ имеет место формула $+\sqrt{a^2}=-a$. Оба случая охватываются одной формулой $+\sqrt{a^2}=|a|$.

Глава VIII

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА В СТАРШИХ КЛАССАХ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

§ 32. Уравнения квадратные и приводящиеся к ним.

Раздел о квадратных уравнениях является одним из наиболее благополучных в школьном курсе алгебры: учащиеся VIII класса обычно хорошо справляются с решением квадратных уравнений, а задачи на составление таких уравнений вызывают гораздо меньше затруднений, чем задачи на составление линейных уравнений в VII классе. В связи с этим и требования к теоретической стороне дела, согласно действующей программе, здесь выше: предусмотрено рассмотрение всех случаев, какие могут представиться при решении общего квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ при $a \neq 0$; программа указывает на необходимость исследования корней квадратного уравнения по его дискриминанту и коэффициентам (тогда как более лёгкий вопрос об исследовании линейного уравнения отнесён в курс X класса). Времени на изучение этого раздела программа отводит вполне достаточно: вместе с иррациональными уравнениями, на которые следует дать 5—6 часов, на него имеем 42 часа. Все вопросы, указанные в программе, полно и ясно освещены в стабильном руководстве, а стабильный задачник даёт достаточно материала для упражнений. Трудности при изучении этого раздела возникают лишь при наличии серьёзных пробелов в предварительной подготовке учащихся, и учитель, обычно начинающей работу в VIII классе с новым для него и часто весьма пёстрым составом учащихся, должен уделить много внимания повторению: обнаружив у кого-либо из учащихся тот или иной дефект в знании алгебры за VI и VII классы, надо во что бы то ни стало обеспечить его устранение, точно указав, что именно надо сделать, и проверив в назначенный срок, выполнено ли это указание.

Само собой разумеется, что учащиеся должны не только знать формулы, по которым находят корни квадратного уравнения, но и уметь вывести эти фомулы. Обычная последовательность работы: сперва решается двучленное уравнение $ax^2 + c = 0$ (различаются три случая: когда a и c — числа одного знака и уравнение корней не имеет, когда a и c — разного знака и уравнение имеет два корня, выражаемых противоположными числами, когда $c = 0$ и уравнение имеет единственный корень нуль), затем неполное уравнение $ax^2 + bx = 0$, когда разложение левой части на множители даёт два корня: $x_1 = 0$, $x_2 = -b : a$, потом полное приведённое уравнение $x^2 + px + q = 0$ и, наконец, уравнение общего вида $ax^2 + bx + c = 0$. Всё время речь идёт только о действительных корнях, так как никаких других чисел учащиеся VIII класса ещё не знают, и лучше не смущать их указаниями на существование каких-то мнимых корней, с которыми они познакомятся в своё время в X классе. Точно так же на первых порах лучше не говорить о двух равных корнях: для начинающего уравнение $ax^2 = 0$ при $a \neq 0$ имеет один и только один корень $x = 0$, а понимание смысла термина «равные корни» или «кратные корни» приходит только в связи с разложением левой части уравнения на линейные множители.

Учебник Киселёва даёт решение двучленного уравнения $ax^2 + c = 0$, которое он именует неполным (хотя этот термин лучше было бы прилагать только к уравнениям вида $ax^2 + bx = 0$), с помощью извлечения квадратного корня из обеих частей равенства $x^2 = -c : a$. В этом есть одна опасность: учащиеся иногда заявляют, что двойной знак в результате извлечения квадратного корня нужен и в левой части, и в равенстве $\pm x = \pm\sqrt{-c : a}$ берут одновременно оба верхних и оба нижних знака и приходят в обоих случаях к одному лишь корню. Здесь надо разъяснить, что знаки справа и слева надо брать независимо друг от друга, что здесь всего получается четыре комбинации знаков, из которых две сводятся к двум другим, и в результате получаются два корня. Поэтому лучше предпочесть другой вывод, основанный на разложении на множители левой части после замены дроби $-c : a$ числом $(\sqrt{-c : a})^2$ и переноса его налево. Это же замечание относится и к выводу формулы корней приведённого квадратного уравнения: лучше обходиться без извлечения корня из обеих частей, приводя левую часть к разности квадратов $(x + 0{,}5p)^2 - (\sqrt{(0{,}5p)^2 - q})^2$ и разлагая её на множители. Тогда вывод формулы корней для каждого из трёх случаев, а именно для уравнений двучленного, неполного, приведённого, будет производиться одним и тем же приёмом. В виде полезного упражнения можно предложить вывод тем же приёмом формулы корней для уравнений вида $ax^2 + bx + c = 0$ и $ax^2 + 2kx + c = 0$ (здесь выгодно начать с почленного умножения на a). Существенно, чтобы учащиеся ясно усвоили, какой из трёх формул для корней квадратного уравнения выгоднее пользоваться в разных случаях: формулой для корней приведённого уравнения, если $a = 1$ и b чётно; второй формулой, если a какое угодно и b нечётно; третьей, если a отлично от 1 и b чётно.

Следующий теоретический вопрос, усвоение которого тоже вполне посильно учащимся VIII класса,— доказательство теоремы Виета (о сумме и произведении корней квадратного уравнения). Во избежание недоразумений лучше формулировать эту теорему сразу для уравнения общего вида и требовать от учащихся запоминания одной пары формул: $x_1 + x_2 = -b : a$, $x_1x_2 = c : a$, а не двух пар, указанных в стабильном руководстве. Рекомендуется практиковать устное решение квадратных уравнений с целыми коэффициентами с помощью разыскания двух чисел по данным их сумме и произведению.

Как всегда при решении уравнений, при решении квадратного уравнения желательна проверка найденных корней. Вместо подстановки выгодно находить сумму и произведение найденных корней и сравнивать полученные числа с отношениями $-b:a$ и $c:a$. Этот способ проверки основан на предложении, которое является обращением теоремы Виета и которое следовало бы чётко формулировать и доказать: если два числа x_1 и x_2 удовлетворяют условиям $x_1+x_2=-b:a$, $x_1x_2=c:a$, то они являются корнями уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Разложение на множители квадратного трёхчлена вызывает иногда затруднения в связи с тем, что здесь речь идёт не об уравнении, а о функции. Вполне уместно ввести понятие корня функции как такого значения её аргумента, при котором она получает значение нуль, и формулировать окончательный вывод так: «квадратная функция ax^2+bx+c может быть представлена при $b^2 \geqq 4ac$ в виде произведения трёх множителей $a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 — корни этой квадратной функции», или иначе «всякая квадратная функция ax^2+bx+c при $b^2-4ac \geqq 0$ есть произведение двух линейных функций» (постоянный множитель a можно присоединить к любому из множителей $x-x_1$ и $x-x_2$). При $b^2=4ac$ $x_1=x_2$, оба сомножителя $x-x_1$ и $x-x_2$ становятся равными, но разложение на множители сохраняется, а в связи с этим получает смысл и утверждение о существовании в этом случае двух равных корней.

Хотя в заголовке раздела говорится вообще об «уравнениях высших степеней, приводимых к квадратным», программа предусматривает изучение только одного вида таких уравнений, а именно уравнений биквадратных, т. е. уравнений 4-й степени, не содержащих неизвестного в 1-й и 3-й степени. Решение двучленных уравнений 3-й, 4-й, 6-й степеней, а также трёхчленных уравнений отнесено на X класс, уравнения же симметричные (возвратные) теперь из программы вовсе исключены.

После изучения графика квадратной функции, отнесённого к следующей теме, очень полезно вернуться к решению квадратного уравнения, рассматривая корни уравнения $ax^2+bx+c=0$ как абсциссы точек пересечения параболы с осью X. Отметим, что графическое решение квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ выгоднее всего производить через построение графика линейной функции $y=-px-q$ и параболы $y=x^2$. Эта парабола вычерчивается в крупном масштабе раз навсегда, в график линейной функции реализуется посредством натягивания нити.

В настоящее время график квадратной функции не используется при решении квадратных уравнений, и это, конечно, совершенно ненормально.

§ 33. Уравнения, содержащие неизвестное под знаком радикала.

Вопрос о решении таких уравнений представляет интерес в том отношении, что в связи с ним приходится вернуться к теории равносильности уравнений, что и подчёркнуто в программе. Возводя обе части уравнения в квадрат с целью уничтожения в нём изолированного квадратного корня, мы вместо уравнения $f_1(x)=f_2(x)$ имеем новое уравнение $f_1^2(x)=f_2^2(x)$ или $[f_1(x)+f_2(x)]\cdot[f_1(x)-$

$-f_2(x)] = 0$, которое удовлетворяется всеми корнями данного уравнения, но имеет, кроме того, и посторонние корни, а именно корни уравнения $f_1(x) + f_2(x) = 0$. С подобным появлением посторонних корней встречаются уже в VII классе при освобождении уравнений от знаменателей, зависящих от неизвестных, но там на это обращают мало внимания.

Возможность появления постороннего корня уясняется особенно хорошо, если привлечь графики. Например, решив уравнение $x + 1 = +\sqrt{x+7}$ обычным способом и убедившись, что из двух полученных корней $+2$ и -3 пригоден только первый, заменяем это уравнение системой $y = x + 1$ и $y = +\sqrt{x+7}$ и строим график функции $y = x + 1$ (прямая, пересекающая ось X в точке $x = -1$ и ось Y в точке $y = +1$) и график функции $y = +\sqrt{x+7}$ (одна ветвь параболы, имеющей ось симметрии на оси X и вершину в точке $x = -7$). Эти две линии пересекаются в единственной точке $x = 2$, $y = -3$, и ясно, что второй найденный корень $x_2 = -3$ соответствует пересечению той же прямой $y = x + 1$ с графиком функции $y = -\sqrt{x+7}$.

Обычно в этом разделе берут только уравнения, содержащие один, два, три корня 2-й степени, что вполне достаточно, так как ценность этого небольшого раздела именно в его связи с теорией равносильности уравнений, а для выявления этой связи нет никакой надобности брать очень сложные случаи. Вместо того чтобы тратить время на решение более сложных задач, лучше уделить больше внимания графикам.

§ 34. Системы уравнений степени выше первой.

Последний раздел курса алгебры в VIII классе посвящён решению систем уравнений степени выше 1-й; рассматривается система, состоящая из одного уравнения 1-й степени и одного уравнения 2-й степени с двумя неизвестными, а затем частные случаи решения системы двух уравнений 2-й степени с двумя неизвестными. Решение системы из одного линейного и одного квадратного уравнения доступно учащимся VIII класса в полном объёме: обычный способ подстановки всегда приводит к одному квадратному уравнению с одним неизвестным, но исследование решения в общем виде слишком громоздко, чтобы давать его в этом классе. Решение же системы двух квадратных уравнений с двумя неизвестными приводится в общем случае к решению полного уравнения 4-й степени с одним неизвестным, а потому приходится ограничиваться только частными случаями решения таких систем. Крайне желательно построение графиков хотя бы для таких более простых случаев, как $y = x^2$, $y = x + a$ (парабола и прямая) или $xy = 9$, $(y - ax)^2 = 1$ (гипербола и пара параллельных прямых), иллюстрирующих в зависимости от значения параметра a разные случаи, какие могут представиться (существование 0, 1, 2, 4 решений).

Необходимо добиться полного усвоения искусственных приёмов решения систем в некоторых частных случаях, прежде всего в случае системы $x+y=a$, $xy=b$, проводя решение сперва общим, потом искусственным приёмом и наглядно показывая преимущества последнего, заботясь о том, чтобы при преобразованиях не терять корни. Так, система $x^2+4xy+4y^2=64$, x^2-6xy+ $+9y^2=49$ заменяется четырьмя линейными системами и имеет четыре системы корней, а не одну, как можно думать, если неосторожно применять извлечение корня.

Решение систем трёх и более уравнений с таким же числом неизвестных программой не предусмотрено, но при решении геометрических задач обойтись без таких систем нельзя, поэтому приходится решать их и в курсе алгебры, тем более, что ничего по существу нового здесь не встречается, а в задачнике имеется большой выбор подходящих задач. Надо только всячески поощрять применение (наряду с общим приёмом решения таких задач по способу подстановки) различных искусственных приёмов, придумываемых самими учащимися, если их натолкнуть на поиски таких приёмов. Если в классе все решили систему общим приёмом, а один нашёл особый приём, необходимо сделать этот приём достоянием всех, выяснив его достоинства и недостатки. Так, решение системы $x+y=2axy$, $y+z=2byz$, $z+x=2czx$ с помощью предварительного почленного деления каждого уравнения соответственно на xy, yz, zx и последующего почленного сложения и вычитания их сразу приводят к решению $z=1:(-a+$ $+b+c)$, $x=1:(a-b+c)$, $y=1:(a+b-c)$. Всё это решение так просто, что его можно целиком провести в уме, записывая только окончательный результат, но оно не полно: деление на произведения xy, yz, zx предполагает, что ни одно из неизвестных не имеет значения 0, и надо добавить ещё очевидное решение $x=$ $=y=z=0$, потерянное из-за делений. Кроме того, найденное первое решение имеет смысл лишь при условии, что ни одна из трёх сумм: $-a+b+c$, $a-b+c$, $a+b-c$ — не равна нулю, и легко убедиться, что если хотя бы одна из них не есть нуль, система не имеет других решений, кроме тривиального нулевого.

§ 35. Неравенства.

Систематическому изучению неравенств посвящён (вместе с исследованием уравнений, о котором речь будет дальше) предпоследний раздел курса алгебры в X классе, но с неравенствами приходится иметь дело во всех классах, начиная с VI, когда впервые появляются знаки $>$ и $<$. Упоминание о свойствах неравенств содержится в разделе программы VII класса, посвящённом уравнениям 1-й степени с одним неизвестным, так что к X классу учащиеся должны уже иметь понятие о некоторых важнейших свойствах неравенства. В X классе эти свойства систематизируются и пополняются. Прекрасное изложение почти всего, что здесь надо изучать, дано в статье [III, 26]. Добавить сюда надо: 1) решение буквенных неравенств 1-й степени, достаточно освещённое в учебнике алгебры Киселёва, 2) решение неравенства $ax^2+bx+c \gtreqless 0$, т. е. исследование квадратного трёхчлена (см., например, [III, 21]), и 3) решение неравенств 2-й степени с одним неизвестным (ограничиваясь тем, что имеется в статье (III, 21]).

Исследование квадратного трёхчлена и неравенства 2-й степени изложены в дополнительной главе (§§ 182—187) учебника алгебры Киселёва, ч. 2, изд. 1949 г.

Решающее значение в деле усвоения материала этой темы имеет, как и всегда, твёрдое усвоение основных понятий. Из двух чисел a и b первое больше, равно, меньше второго в зависимости от того, положительна ли разность $a - b$, равна нулю или отрицательна. Этот исходный пункт всего учения о неравенствах должен быть усвоен самым основательным образом, должно быть ясным и его геометричекое истолкование на числовой оси: $a > b$ тогда и только тогда, когда отрезок, идущий из точки с абсциссой b в точку с абсциссой a, имеет положительное направление, т. е. когда при обычной ориентировке горизонтальной оси точка a лежит правее точки b, и т. д. Этим основным определением и надо пользоваться при выводе всех свойств неравенств. Например, желая показать, что при почленном умножении неравенства $a > b$ на число c знак неравенства сохраняется при $c > 0$, заменяется знаком равенства при $c = 0$ и знаком $<$ при $c < 0$, достаточно сравнить произведения ac и bc, рассматривая их разность $ac - bc = (a - b) \cdot c$.

Успеху решения неравенств много способствует привычка истолковывать геометрически простейшие неравенства, с которыми приходится иметь дело. Так, неравенство $x > 5$ выражает все точки оси X, лежащие правее точки 5, система двух неравенств $x > 5$, $x < 6$, или, что то же, двойное неравенство $5 < x < 6$ — все точки, находящиеся между точками 5 и 6, система двух неравенств $x < 5$, $x > 6$ не выражает ничего (система несовместна), неравенство $|x| < 2$ равносильно двойному неравенству $-2 < < +2$, неравенство $|x-5| < 2$ — двойному неравенству $-2 < x - 5 < +2$, или, что то же, $3 < x < 7$.

Исследование квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ нельзя проводить в отрыве от геометрического истолкования функции $y = ax^2 + bx + c$ как параболы, существенно повышающего эффект всей работы: всё делается предельно ясным, всё несравненно лучше запоминается. Но нельзя забывать, что все заключения делаются не на основании чертежа, а на основании рассмотрения алгебраического выражения, чертёж только иллюстрирует эти заключения, делает их наглядными.

Более глубокое изучение неравенства — прекрасная тема для работы математичекого кружка. Рекомендуется использовать книги [III, 34, 25] и задачи в сборниках [III, 24, 35].

§ 36. Исследование уравнений.

Выражение «исследование уравнения» употребляется в двух смыслах. В более узком смысле исследовать уравнение или систему уравнений — значит выяснить, не решая их, существует ли решение, и если существует, то единственно ли оно; нередко при этом ставятся дополнительные вопросы о свойствах чисел, какими выражаются корни, например, вопрос о том, являются ли эти числа рациональными или иррациональными, действительными или мнимыми, положительными, или отрицательными, или равными нулю. В более широком смысле «исследовать уравнение — значит рассмотреть все особые случаи, какие могут представиться при его решении, и уяснить значение этих случаев для той задачи, из условий которой уравнение составлено» (руководство Киселёва, ч. 2, § 123 по изданию 1949 г.). Так, имея уравнение $5x^2 - 140x - 834 = 0$, мы можем, не решая его, утверждать, что оно имеет два действительных корня, из которых один, имеющий бо́льшую абсолютную величину, положителен, другой отрицателен. Чтобы установить, являются ли эти корни рациональными, надо вычислить дискриминант $70^2 + 5 \cdot 834$ и посмотреть, является ли он точным квадратом. Никаких «особых случаев» при решении этого уравнения быть не может, поскольку все его коэффициенты имеют определённые данные нам числовые значения. Но если дано, например, уравнение $5x^2 - 140x + a = 0$ с неопределённым параметром a, то возможно исследование во втором более широком смысле, которое показывает, что надо различать три случая: при $a < 980$ оба корня действительны и различны, при $a = 980$ они действительны и равны, при $a > 980$ мнимы. Интерес может представлять вопрос о том, какие знаки имеют корни, выражаются ли они рациональными или иррациональными числами, целыми или дробными — всё зависит от характера задачи, для решения которой служит это уравнение. Можно сказать, что исследованием уравнения в указанном втором, более широком смысле приходится заниматься всегда, когда уравнение содержит, кроме буквы или букв, выражающих неизвестные, ещё буквы, значения которых предполагаются заданными (параметры).

Исследование уравнения в этом более широком смысле есть необходимая составная часть решения всякого уравнения, содержащего хотя бы один параметр, и мы выше несколько раз отмечали это обстоятельство. Так, решив относительно x уравнение $ax + b^2 = bx + a^2$ и найдя, что $x = a + b$, мы не можем считать решение законченным: необходимо выяснить, для каких значений a и b наше рассуждение имеет силу. Замечая, что в процессе решения нам пришлось делить обе части уравнения на разность $a - b$, что законно лишь в предположении, что $a - b \neq 0$, мы устанавливаем, что указанное значение корня верно лишь для случая $a \neq b$. Случай $a = b$ надо рассмотреть особо; в этом случае уравнение сводится к тождеству $ax + a^2 = ax + a^2$ и удовлетворяется при любом значении x.

Когда требование исчерпывающего характера решения каждой задачи, о котором была речь выше (в § 19 1-й части), постоянно выполняется, что вполне возможно на всех годах обучения, если соблюдать некоторую осторожность в формулировке условий, то в X классе работа над вопросами исследования уравнений сведётся просто к подведению некоторых итогов, к систематизации ряда знакомых случаев. Если же на эту сторону дела внимание раньше не обращалось, возникают серьёзные трудности: учащиеся должны преодолеть привычки формального отношения к буквенным выражениям, должны в короткий срок привыкнуть различать особые случаи, какие при этом могут представиться. Отсюда возникают частые жалобы учителей на трудность этого раздела, на его неопределённость. В этом разделе нужно усвоить несколько исследований, проведённых в стабильном руководстве Киселёва для таких важных случаев, как решение уравнений $ax = b$, $ax^2 + bx + c = 0$, как решение системы $ax + by = c$, $a_1x + b_1y = c_1$, притом усвоить вполне сознательно, понимая необходимость каждого звена рассуждения, но этого совершенно недостаточно: надо выработать уменье производить исследование решения каждого уравнения с буквенными параметрами, каждой такой системы. Исследование становится тем труднее, чем больше параметров, поэтому начинать надо с вопросов, где фигурирует лишь один параметр. В случаях, когда налицо больше чем один параметр, значительные трудности представляет классификация всех возможных случаев, какие надо рассмотреть.

§ 37. Теорема об остатке от деления многочлена на разность вида $(x - a)$ и её следствия.

Этот маленький раздел, которым заканчивается курс алгебры X класса, содержит несколько важных для теории уравнений теорем о свойствах целой рациональной функции одного аргумента.

При формулировке и доказательстве теоремы об остатке от деления многочлена на разность вида $(x - a)$ в руководстве Киселёва применяется крайне неудобная символика. Изложение очень выиграет, если ввести общепринятый функциональный символ $f(x)$ как сокращённую запись многочлена $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$. Доказывая, что остаток R от деления $f(x)$ на $x - a$ есть $f(a)$, надо достаточно выяснить независимость R от x, иначе у учащихся остаётся неясность; иногда приходится слышать, что $R = f(a)$ только при $x = a$, а при других значениях x число R имеет другие значения. Когда теорема доказана, полезно провести упражнение в получении остатка R от деления какого-либо определённого многочлена с числовыми коэффициентами на какую-либо разность $x - a$ двумя способами, сперва путём непосредственного деления, потом с применением теоремы, и сравнить количество требуемых выкладок.

Кроме тех следствий из теоремы, какие указаны в алгебре Киселёва, полезно осветить с помощью этой теоремы приём понижения степени уравнения в случае, когда известен какой-либо его корень. Если a есть корень уравнения n-й степени $f(x) = 0$, то деление $f(x)$ на $x - a$ даёт в частном многочлен $f_1(x)$ степени $n - 1$ и остаток R, равный, в силу теоремы об остатке, нулю, а потому $f(x) = (x - a) \cdot f_1(x)$, и наше уравнение переписывается в виде $(x - a) f_1(x) = 0$ и распадается на два, а именно $x - a = 0$ и $f_1(x) = 0$. Таким образом разыскание прочих корней уравнения $f(x) = 0$ степени n сводится к разысканию корней уравнения $f_1(x)$ степени $n - 1$: если число a_1 есть корень этого последнего уравнения, т. е. если $f_1(a_1) = 0$, то число $f(a_1) = (a_1 - a) \cdot f_1(a_1)$ тоже равно нулю, т. е. a_1 является корнем данного уравнения $f(x) = 0$. Это самое рассуждение фигурирует в том доказательстве возможности представления $f(x)$ в виде произведения n линейных множителей, какое приведено в учебнике, но связь его с решением уравнений обычно остаётся для учащихся неясной.

Отметим, что формулировка основной теоремы алгебры комплексных чисел, приведённая в руководстве («всякое алгебраическое уравнение имеет вещественный или комплексный корень»), противоречит той правильной установке о смысле термина «комплексное число», какую даёт «Объяснительная записка» к программе (на стр. 13 в издании 1952 г.) и согласно которой понятие вещественного числа не противополагается понятию комплексного числа, а представляет собой частный его случай. Правильнее сказать: «каждое алгебраическое уравнение степени не ниже первой имеет комплексный корень, вещественный или мнимый».

Глава IX

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПРОГРЕССИИ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛОВ.

§ 38. Значение изучения прогрессий в курсе алгебры.

Изучение прогрессий является существенной частью общеобразовательного курса алгебры, но этот раздел стоит несколько особняком, не входя ни в одну из четырёх основных линий развития школьного курса алгебры. Однако изучение прогрессий тесно связано с тремя из четырёх основных линий развития школьной алгебры.

Две прогрессии, арифметическая и геометрическая, представляют собой количественные характеристики двух весьма распространённых видов изменения величин. Имея какой бы то ни было равномерно протекающий процесс, например ежедневное изготовление определённого постоянного числа единиц продукции или движение с постоянной скоростью, и подсчитывая, каков суммарный результат этого процесса по истечении 1, 2, 3, 4,... единиц времени, мы приходим к числам, представляющим собой последовательные члены арифметической прогрессии; члены этой прогрессии являются линейными функциями номера. Но наряду с этим простейшим законом изменения очень часто встречаются и такие процессы, когда прирост сам становится источником нового при-роста. Например, если селекционер, вырастив из одного зерна 50 зёрен, на следующий год соберёт урожай уже не с одного зерна, а со всех 50 зёрен первого урожая и получит в случае тех же условий жизни растения уже $50 \cdot 50 = 2\,500$ зёрен, а в дальнейшем этот процесс будет повторяться, то здесь мы имеем новый закон изменения величины, математически формулируемый как закон геометрической прогрессии; члены этой прогрессии являются значениями показательной функции номера.

Таким образом, изучение прогрессий связано с изучением двух функций, отображающих два важных закона изменения величин.

Изучение прогрессий связано и с тождественными преобразованиями. Известные формулы суммы членов обеих прогрессий являются не чем иным, как формулами тождественных преобразований, весьма полезными для многих практических приложений, так как позволяют заменять многочлены определённого вида гораздо более сжатыми, а потому более удобными выражениями: $a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + [a + (n - 1)d] = 0{,}5\,[2a + (n - 1)d]n$, $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = a(q^n - 1) : (q - 1)$. Отметим, что первая из этих формул имеет место при всех значениях входящих в неё букв, а вторая только при $q \neq 1$. Эту оговорку следует иметь в виду при выводе формулы, что опущено, к сожалению, в стабильном учебнике Киселёва.

Простота связей между величинами, входящими в формулы общего члена и суммы членов прогрессий, делает прогрессии богатым источником задач, которые можно давать учащимся средней школы с целью лучшего усвоения важнейшего алгебраического метода — метод уравнений. Занимаясь решением задач на прогрессию, учащиеся составляют и решают уравнения и тем самым тренируются в важном деле косвенного определения неизвестных значений величин, завершая работу надлежащей проверкой. Таким образом, изучение прогрессий в школе оказывается связанным и с третьей основной линией развития алгебры—с изучением уравнений.

Отметим ещё важность изучения прогрессий как двух простейших видов числовых последовательностей, играющих столь важную роль при изучении теории пределов: всякая прогрессия из конечного числа членов может быть бесконечно продолжена, и естественно возникает вопрос о предельных значениях как общего члена, так и суммы членов каждой прогрессии. Изучение прогрессии является в силу этого первым шагом в деле изучения рядов, этого столь сильного, как известно из курса математического анализа, средства представления функций. Некоторые дальнейшие шаги в деле изучения рядов можно усиленно рекомендовать для индивидуальных заданий и кружковой работы, основываясь например, на книгах [III, 30а, д].

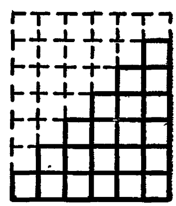
В действующей программе (издания 1949 г.) раздел, в котором идёт речь о прогрессиях, получил заголовок «Последовательности чисел» и начинается с вопросов: «понятие о числовой последовательности, примеры числовых последовательностей, общий член последовательности», после которых идёт уже изучение прогрессий, как частного случая последовательностей.

Изучению последовательностей, в том числе прогрессий, действующая программа отводит 19 часов в начале курса алгебры в IX классе, причём рассматриваются не только прогрессии с конечным числом членов, а и бесконечные прогрессии, т. е. последовательности в подлинном смысле слова; сюда же вошли и элементарные сведения по теории пределов. Вопрос о пределе последовательности, раньше относимый в курс геометрии, с 1949 года правильно вошёл в курс алгебры.

§ 39. Прогрессии из конечного числа членов.

Существующая программа отчётливо указывает объём подлежащих усвоению сведений о прогрессиях, а стабильное руководство Киселёва даёт полное и ясное их изложение. Отметим большую ценность проведённого в руководстве Киселёва сравнения обеих прогрессий, сопровождаемого графическим представлением роста членов. Рекомендуется ввести термины «равномерный рост» и «ускоренный рост», а также рассмотреть подобным же образом две убывающие прогрессии: арифметическую с отрицательной разностью и геометрическую с положительным знаменателем, меньшим 1; здесь уместны термины «равномерное убывание», «замедленное убывание». Асимптотическое приближение членов убывающей геометрической прогрессии к нулю становится тогда вполне ясным, неизменно вызывая большой интерес учащихся.

Отметим удобные символы ÷ и ∺, которыми нередко пользуются для обозначения соответственно арифметической и геометрической прогрессий. Записи ÷ 5, 10,... и ∺ 5, 10,... делают излишними какие бы то ни было дальнейшие указания. Рекомендуется геометрическая иллюстрация суммирования n первых чисел натурального ряда. Берётся многоугольная ступенчатая фигура, изображённая на фигуре 11 для случая $n = 6$ жирными линиями, и ставится задача быстрейшего подсчёта числа S_n заключённых в ней квадратов. Прилагая к ней равную ей фигуру, показанную на чертеже пунктиром, получаем прямоугольник, содержащий всего $n(n+1)$ квадратов, откуда следует, что $S_n = 0{,}5\, n(n+1)$. Таким образом, получается геометрическим путём вывод частного случая формулы суммы членов арифметической прогрессии, а с её помощью легко получается и общая формула (используется переместительное и сочетательное свойства суммы).



Фиг. 11.

Интерес представляют также следующие вопросы, с пользой для дела углубляющие теоретическую сторону раздела «Прогрессии».

1. Вывод формулы для произведения первых членов геометрической прогрессии $P_n = a \cdot aq \cdot aq^2 \ldots aq^{n-1}$, который можно провести совершенно аналогично обычному выводу формулы суммы членов арифметической прогрессии, рассматривая сперва произведение членов, равноотстоящих от концов. Этот вывод учащиеся легко делают вполне самостоятельно.

2. Доказательство неограниченного роста членов всякой возрастающей арифметической прогрессии. Точная формулировка: какова бы ни была возрастающая арифметическая прогрессия a, $a + d$, $a + 2d, \ldots$, содержащая неограниченный ряд членов, и как бы велико ни было произвольное число $A > 0$, всегда можно указать такое натуральное число n, что все члены прогрессии, начиная с n-го, больше A.

3. Доказательство неограниченного роста (по абсолютной величине) членов всякой возрастающей геометрической прогрессии. Точная формулировка: какова бы ни была возрастающая геометрическая прогрессия a, aq, $aq^2, \ldots$, содержащая неограниченный ряд членов, и как бы велико ни было произвольное число $A > 0$, всегда можно указать такое натуральное число n, что все члены прогрессии, начиная с n-го, больше A по абсолютной величине

Фактическое вычисление этого числа n в каждом конкретном случае есть не что иное, как решение неравенства $|aq^{n-1}| > A$, и требует применения логарифмов.

4. Доказательство неограниченного приближения членов убывающей геометрической прогрессии к нулю. Точная формулировка: какова бы ни была убывающая геометрическая прогрессия a, aq, $aq^2, \ldots$, содержащая неограниченный ряд членов, и как бы мало ни было произвольное число $A > 0$, всегда можно указать такое натуральное число n, что все члены прогрессии, начиная с n-го, меньше A по абсолютной величине.

Доказательства этих теорем не представляют трудности. Используется неравенство $(1 + x)^n > 1 + nx$, верное для любого $x > 0$ и любого натурального $n \geqq 2$.

Бесконечно убывающими прогрессиями приходится заниматься в разделе «Пределы».

5. Прекрасной темой для индивидуальных заданий и для кружковой работы является рассмотрение арифметических рядов высших порядков: арифметическим рядом I порядка называется любая арифметическая прогрессия; арифметическим рядом II порядка называется последовательность чисел a_1, a_2, a_3, ..., в которой разности $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $a_4 - a_3, \ldots$ образуют арифметический ряд I порядка, а арифметический ряд порядка $m + 1$ образуют числа, разности которых представляют собой арифметический ряд порядка m. Об этих рядах можно прочесть в книге [I, 18].

§ 40. Различные задачи на прогрессии.

В задачах на конечную арифметическую прогрессию мы имеем дело с 5 числами: a_1 (первый член, иначе a), d (разность), a_n (последний член, иначе u), n (число членов), s_n (сумма всех членов, иначе s). Все остальные члены прогрессии легко выражаются в зависимости от a, d и своего номера k формулой $a_k = a + d(k - 1)$. Для суммы имеем формулу: $s_n = \left(a + \frac{n-1}{2} d\right) n$. Необходимо отметить, что a_n представляет линейную, а s_n квадратную функцию n.

Основными задачами на арифметическую прогрессию называют такие задачи, в которых даны какие-либо три из этих 5 чисел, а остающиеся два надо найти. Весьма нетрудно и поучительно установить все основные задачи и выяснить способы их решения, проводя в каждом случае надлежащее исследование, т. е. находя условия возможности решения и число решений.

Исчерпывающий перечень основных задач на арифметическую прогрессию даётся следующей таблицей:

№№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Даны	a, d, n	a, d, u	a, d, s	a, n, u	a, n, s	a, u, s	d, n, u	d, n, s	d, u, s	n, u, s
Найти	u, s	n, s	n, u	d, s	d, u	d, n	a, s	a, u	a, n	a, d

Для проверки замечаем, что в каждой задаче мы имеем три данных, взятых произвольно из 5 чисел: a, d, n, u, s, но такой выбор можно сделать, как говорит теория соединений, всего $C_5^{|3|} = C_5^{|2|} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$ способами.

Полезно и нетрудно разобрать решение каждой из этих 10 задач. Для примера рассмотрим задачу № 9: зная d, u, s, найти a и n. Имеем систему двух уравнений с двумя неизвестными $u = a + (n - 1)\,d$, $2s = (a + u) \cdot n$ и, исключая a, приходим к уравнению, квадратному относительно единственного неизвестного n, а именно: $2s = [2u - (n - 1)\,d] \cdot n$, и убеждаемся, что задача может иметь или 2, или 1, или 0 решений. Взяв, например, $d = 2$, $u = 10$, легко указать такие значения s, при которых получается каждый из этих трёх случаев. Так, при $s = 28$ имеем $n_1 = 7$ и $n_2 = 4$. Найдя соответствующие значения первого члена, а именно: -2 и $+4$, пишем две прогрессии, удовлетворяющие всем условиям задачи (-2, 0, 2, 4, 6, 8, 10 и 4, 6, 8, 10), вполне уясняя себе причину возможности двух решений.

Аналогично устанавливаем 10 основных задач на геометрическую прогрессию, причём общее решение некоторых из них оказывается для учащихся IX класса непосильным, и приходится ограничиваться решением их для некоторых удобных частных значений данных.

Наряду с такого рода абстрактными задачами, пользу которых не следует недооценивать, можно указать много задач на прогрессии с весьма конкретным и близким к действительной жизни содержанием. Надо, однако, подбирать такие задачи очень осторожно, чтобы учащиеся не получили искажённого представления о действительно происходящих процессах.

Отметим следующую хорошую задачу, часто встречающуюся в приложениях (например, при расчёте разного рода регуляторов): между двумя данными числами a и $b > a$ вставить k средних арифметических (или средних геометрических), т. е. k таких чисел, которые вместе с двумя данными составили бы арифметическую или геометрическую прогрессию. Вторая задача приводит к формуле, содержащей корень степени $k + 1$, и разрешима до конца в общем случае только с помощью логарифмов. Равным образом применения логарифмов требуют и задачи на сложные проценты, разрешаемые с помощью формулы $A = aq^t$, $q = 1 + 0{,}001\,p$ (см. учебник алгебры Киселёва, § 122). Отметим ещё задачи на так называемые срочные взносы и срочные уплаты, часто фигурировавшие в старых задачниках и иногда всплывающие и сейчас. Задача о срочных взносах — это задача о вычислении той суммы A, какая накопится в сберкассе, если в течение n лет вносить в сберкассу одну и ту же сумму a рублей Предполагая, что взнос делается ежегодно 1 января и что сберкасса начисляет накануне этого дня $p\%$ годовых на всю накопленную сумму, легко приходим к формуле $A = aq\,(q^n - 1) : (q - 1)$. Задача о срочных уплатах заключается в определении той суммы a, какую надо вносить ежегодно в течение n лет, чтобы погасить ссуду в A рублей, данную из $p\%$ годовых. Предполагая, что первая уплата была сделана через год после получения ссуды, приходим к формуле $Aq^n = a(q^n - 1) \cdot (q - 1)$.

Отметим ещё одну поучительную задачу геометрического содержания, приводящую к рассмотрению геометрической прогрессии из 4 членов: указать два неравных друг другу подобных треугольника, у которых две стороны одного равнялись бы соответственно двум сторонам другого. С первого взгляда кажется, что таких треугольников нет, но внимательное рассмотрение показывает, что это не так: стороны одного должны быть равны a, aq, aq^2, стороны другого aq, aq^2, aq^3, где a — любое число, большее 0, а $q > 1$ удовлетворяет неравенству $1 + q > q^2$, откуда $1 > q < 0{,}5(1 + \sqrt{5}) \approx 1{,}618$. Таким образом, существует бесконечное множество пар таких треугольников.

Ряд более трудных задач на прогрессию с переходом к суммированию некоторых других рядов можно найти в книге [III, 24].

Заслуживает внимания тождество

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1} = (a^n - b^n) : (a - b),$$

имеющее место при всех неравных друг другу значениях a и b и при любом натуральном n, легко получаемое в результате применения формулы суммы членов геометрической прогрессии. Оно приводит к важной формуле разложения на множители разности $a^n - b^n$, обобщающей формулы разложения на множители разности квадратов и разности кубов.

§ 41. Место понятия предела в школьном курсе математики.

Понятие предела является одним из основных понятий математики, и его введение в курс элементарной математики совершенно необходимо: без него нельзя изложить как следует целый ряд вопросов арифметики, алгебры, геометрии, а именно вопросы о бесконечной периодической дроби, о бесконечно убывающей геометрической прогрессии, о длине окружности и площади круга, об объёме пирамиды, об объёмах и поверхностях круглых тел. Проникнув в среднюю школу ещё в XIX в., элементы теории пределов прочно в ней удержались, хотя изучаются они в настоящее время совсем не так, как в дореволюционной школе.

В связи с тем, что наиболее важные школьные применения теории пределов относятся к вопросам о длине окружности и площади круга, понятие о пределе учащиеся средней школы, согласно действовавшей до 1949 г. программе, получали в IX классе при изучении геометрии. Конечно, естественнее было бы внести раздел о пределах в курс алгебры, где уже имеется раздел «Функциональная зависимость», представляющий собой первый шаг пропедевтики математического анализа. Изучение элементов теории пределов было бы вторым шагом в этом направлении. Это изучение естественно осуществлять в том месте школьного курса алгебры, где оно будет использовано. Включая его в курс алгебры, желательно поставить его непосредственно вслед за изучением прогрессий, чтобы полноценно разобрать вопрос о бесконечно убывающей геометрической прогрессии (а в связи с ним завершить и изучение вопроса о периодических десятичных дробях). Это и сделано в программе 1949 г. и сохранилось в дальнейшем.

Раздел «Пределы» является одним из более трудных, и естественно, что борьба между стремлением к научности изложения и стремлением сделать его максимально доступным и наглядным привела к созданию многих вариантов его изложения.

Во второй половине XIX в. был выработан способ изложения элементов теории пределов, отличавшийся краткостью, наглядностью, доступностью, но вызывавший при более внимательном рассмотрении ряд серьёзных сомнений и возражений. Так, в учебнике А. Ю. Давидова [IV, 19] вся теоретическая часть раздела о пределах изложена на трёх страницах, содержащих определения переменной и постоянной величин, определение предела переменной величины, определение бесконечно малой величины, две теоремы о пределах («если две переменные величины при всех своих изменениях равны между собой, то равны и пределы их» и «если две переменные величины при всех своих изменениях сохраняют между собой одно и то же отношение, то в том же отношении будут и пределы их»)*). Учащиеся получали ясное, наглядное представление о пределе переменной, получали хорошую базу для большинства приложений, но уже более сильным учащимся бросались в глаза недочёты теоретической стороны изложения. Так, например, определение предела основывалось на понятии беспредельного приближения, но точного определения этого беспредельного приближения не давалось; не давалось признаков, по которым можно было бы с уверенностью судить о существовании предела — всё основывалось на наглядном представлении, на интуиции.

Как на полную противоположность этому примитивному изложению теории пределов можно указать современное научное её изложение в книге В. Немыцкого, М. Слуцкой, А Черкасова «Курс математического анализа» (т. I, 1944), где пределам посвящены главы III и VII, всего 27 страниц, устанавливающие понятия предела последовательности и предела функции вместе с рядом их свойств, на основе которых становится возможной безупречная трактовка всех приложений. Для начинающего трудность изучить теорию пределов по этой книге заключается не столько в объёме изложения, сколько в его характере, предполагающем довольно высокий общий уровень математической культуры.

Между отмеченными двумя крайними способами изложения теории пределов можно указать большое количество промежуточных, по-разному стремящихся удовлетворить требованиям научности и доступности для учащихся средней школы. Одни основываются на понятии предела величины, изменение которой предполагается совершающимся непрерывно, хотя понятие непрерывности не освещается, другие на понятии предела числовой последовательности, что заслуживает предпочтения, так как понятие предела последовательности много проще. В одних случаях сначала определяется понятие бесконечно малой величины, а затем уже понятие предела, так что всякая переменная величина, имеющая предел a, представляется в виде $a+\alpha$, где α — бесконечно малая величина, в других, наоборот, даётся общее определение

*) Эти «теоремы» неточно формулированы; точная формулировка должна была бы включать ещё условие существования предела у одной из переменных. Но после такого уточнения они становятся тавтологическими следствиями из теоремы о единственности предела сходящейся последовательности.

предела, а затем уже появляются бесконечно малые, как такие переменные, у которых предел нуль. Каждое из этих двух изложений имеет свои преимущества, оба могут быть проведены безупречно, и трудно сказать, какое заслуживает предпочтения.

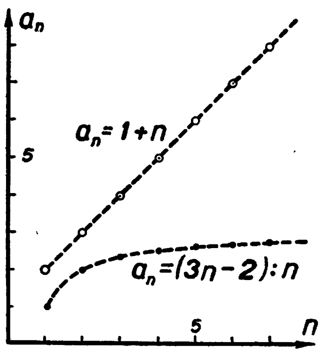
В школьных учебниках для средней школы мы имеем два изложения теории пределов, существенно отличные одно от другого и не связанные друг с другом. В руководстве алгебры Киселёва (ч. 2, изд. 1949 г.), в §§ 179 — 181, даётся краткое изложение теории пределов, примыкающее к более старым способам; понятие предела последовательности отсутствует; рассмотрен ряд абстрактных задач на разыскание пределов, задач, не связанных с приложением теории пределов в курсе средней школы. Вопросы о пределе суммы членов геометрической прогрессии и о периодической десятичной дроби изложены раньше (§§ 86—88) независимо от этой общей теории. Ближе к современной трактовке изложение элементов теории пределов в руководстве геометрии Киселёва, где в основу положено понятие предела последовательности и рассматривается критерий существования предела у возрастающей ограниченной сверху последовательности (§§ 227—231 по изданию 1948 г.).

Этот разнобой в школьных учебниках алгебры и геометрии получился в результате того, что переработка старых руководств Киселёва велась разными лицами и должного согласования проведено не было. Учитель должен сам избрать одну линию и держаться её при изложении элементов теории пределов и её приложений как в алгебре, так и в геометрии. В программе геометрии для IX класса до последнего времени был пункт «Основные теоремы о бесконечно малых и о пределах», но в программе издания 1948 г. и позже упоминание о бесконечно малых выброшено. В «Объяснительной записке» (изд. 1952 г.) даётся указание (стр. 10): «Теоремы о пределах можно, в случае недостатка времени, только сформулировать и принять без доказательств. Не следует особенно углублять и расширять материал, но необходимо, чтобы введённые понятия были правильно усвоены учащимися, рассматриваемые свойства предела хорошо поняты ими (что достигается рассмотрением соответствующих примеров) и чтобы в дальнейшем при всех выводах, требующих применения теории пределов, учащиеся твёрдо опирались на изученные ими теоремы».

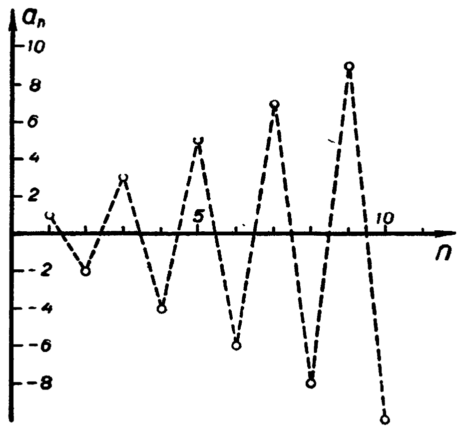
§ 42. Изучение элементов теории пределов в IX классе.

На раздел «Последовательности чисел», куда теперь включено понятие предела, программа отводит всего 19 часов занятий в классе; по крайней мере 6 из них надо отвести на изучение общего понятия числовой последовательности и её предела. Приводим примерное распределение материала, стремясь обеспечить ясное и прочное усвоение идейного содержания теории пределов.

Первый урок уходит на то, чтобы уточнить понятие о числовой последовательности, ввести понятие об общем члене последовательности, о возрастающих и убывающих последовательностях, о последовательностях, ограниченных сверху или снизу. Даются точные определения, приводятся различные примеры. Желательно использование термина «монотонная последовательность», как общего наименования возрастающих и убывающих последовательностей, и наглядное изображение каждой рассматриваемой конкретной последовательности точками графика в прямолинейных координатах. Для каждой рассматриваемой последовательности устанавливается формула общего члена, вычисляются значения нескольких первых членов, строится график, выясняется, является ли эта последовательность монотонной или немонотонной, и если монотонной, то убывающей или возрастающей, ограничена ли последовательность сверху или снизу или не ограничена (сверху или снизу). Последние заключения высказываются сперва в виде догадок на основании впечатления от наблюдений числовых значений и графика, затем обязательно доказываются, исходя из формулы общего члена. Так, на фигуре 12 изображены графики последовательности $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4, \ldots$ с общим членом $a_n = n + 1$ (монотонная возрастающая последовательность, неограниченная сверху, но ограниченная снизу) и последовательности $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 2\frac{1}{3}$, $a_4 = 2\frac{1}{2}$, $a_5 = 2\frac{3}{5}$, $a_6 = 2\frac{2}{3}, \ldots$ с общим членом $a_n = \frac{3n-2}{n}$ (тоже монотонная возрастающая последовательность, но ограниченная уже не только снизу, а и сверху, что



Фиг. 12.



Фиг. 13.

доказывается возможностью представления общего члена в виде $a_n = 3 - \frac{2}{n}$). Последовательность $a_1 = 1$, $a_2 = -2$, $a_3 = 3$, $a_4 = -4, \ldots$ с общим членом $a_n = (-1)^n \cdot n$ представляет собой простой пример немонотонной последовательности, притом неограниченной ни снизу, ни сверху (график показан на фигуре 13, где взяты разные масштабы на осях n и a_n*). Таких примеров, притом самых разнообразных, можно набрать сколько угодно: ведь всякая последовательность есть не что иное, как функция, заданная на множестве натуральных чисел.

Второй урок следует целиком посвятить выяснению понятий предела сходящейся последовательности, расходящейся последо-

*) Здесь уместно отметить ошибочный чертёж во 2-й части «Алгебры» Киселёва, где графики прогрессий представлены не рядом точек, а сплошными линиями (§ 81).

вательности. Определение предела лучше дать сперва отдельно для возрастающей последовательности и убывающей последовательности, и только потом указать общее определение, пригодное для всякой как монотонной, так и немонотонной последовательности, причём это обобщение можно и не делать, так как для всего дальнейшего оно не является необходимым. Вводится символ $a_n \to a$ и символ $\text{пред.}\ \underset{n \to \infty}{a_n} = a$ (нет никаких разумных оснований предпочитать сокращение иностранного термина limes или limite сокращению русского термина предел). Большое количество конкретных примеров сходящихся и расходящихся последовательностей, уже рассмотренных учащимися, позволит им приобрести наряду с знанием точных определений также и совершенно ясные представления о пределах последовательностей (этому очень способствует построение графиков). Закончить второй урок можно постановкой вопроса о желательности указания признака существования предела и предложения поискать такой признак отдельно для возрастающих и убывающих последовательностей.

Третий урок начинается с формулировки достаточного признака сходимости монотонной последовательности («возрастающая последовательность имеет предел, если она ограничена сверху, убывающая последовательность имеет предел, если она ограничена снизу»), к которому учащиеся, усвоившие как следует материал двух предшествующих уроков, легко приходят самостоятельно и видят в этих предложениях аксиомы. Как известно, эти предложения можно доказать, но развёрнутой теории действительного числа в средней школе дать нельзя, а потому необходимо вводить конечный результат этой теории в виде аксиомы. Принцип Вейерштрасса, формулированный выше, и является простейшей возможной аксиомой. Дальше идёт решение ряда задач на применение этих критериев, например, такой: «Дана последовательность $a_1 = 0{,}6$, $a_2 = 0{,}66$, $a_3 = 0{,}666$ и т. д. (общий член a_n есть десятичная дробь, изображаемая нулём целых и n последовательно написанными шестёрками); сходится ли эта последовательность, и если сходится, то к какому пределу?» Замечая, что эта последовательность возрастающая, так как каждый последующий её член a_{n+1} получается из предыдущего a_n через прибавление положительного числа $6 \cdot 10^{-(n+1)}$, и что она ограничена сверху, так как всегда $a_n < 0{,}7$, заключаем, что она сходится и что существует некоторый предел a, к которому неограниченно приближаются числа a_n при неограниченном росте номера n. В этот момент работы не бывает недостатка в заключениях, получаемых учащимися самостоятельно, о том, что этот предел равен $\frac{2}{3}$, но точное обоснование этого заключения лучше отложить до пятого урока. Очень рекомендуется использование задач с геометрическим содержанием, например, такой: дана последовательность прямоугольных треугольников AB_1C, AB_2C, AB_3C,... с общим катетом AC, причём длины вторых катетов CB_1, CB_2, CB_3... образуют какую-нибудь неограниченно возрастающую последовательность; сходятся ли последовательности углов $\alpha_n = \angle B_nAC$ и $\beta_n = \angle AB_nC$? Желательно рассмотреть и несколько примеров расходящихся последовательностей, например, последовательности с общим членом $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$, которая с первого взгляда кажется сходящейся.

Четвёртый урок надо посвятить основным теоремам о пределах. Фактически в дальнейшем изложении используются теоремы о пределе суммы, разности, произведения и частного, и их необходимо рассмотреть. Полезна для приложений теорема о двух монотонных последовательностях: если даны две последовательности $a_1, a_2, a_3,\ldots$ и $b_1, b_2, b_3,\ldots$, причём: 1) первая — возрастающая, вторая — убывающая, 2) каждый член первой меньше члена с тем же номером второй, 3) разности $b_1 - a_1$, $b_2 - a_2$, $b_3 - a_3,\ldots$ образуют сходящуюся последовательность с пределом нуль, то обе данные последовательности сходятся к одному и тому же пределу L.

Доказательство всех этих теорем представляет значительные трудности для учащихся IX класса и обычно ничего не прибавляет к той интуитивной уверенности в их правильности, какая у них создаётся непосредственно после уразумения их содержания, особенно если привлечь геометрическую иллюстрацию. Пусть, например, даны две сходящиеся последовательности $a_n \to a$ и $b_n \to b$, $n = 1, 2, 3, 4,\ldots$ Построим последовательность прямоугольников $AB_nC_nD_n$ со сторонами $AB_n = a_n$ и $B_nC_n = b_n$. Доказываем, что последовательность площадей a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, ... сходится, и высказываем догадку, что $a_nb_n \to ab$, которая приводит к формулировке теоремы пред. (a_nb_n) = пред. $a_n \cdot$ пред. b_n. «Объяснительная записка» к действующей программе определённо указывает (стр. 12 издания 1952 г.), что «теоремы о пределах можно, в случае недостатка времени, только сформулировать и принять без доказательств». Рекомендуем делать это и независимо от недостатка времени, так как опыт показывает, что в громадном большинстве случаев доказательства эти усваиваются учащимися только формально.

Пятый урок следует посвятить бесконечной убывающей геометрической прогрессии и периодическим дробям; шестой — решению задач на всё пройденное о пределах. Очень рекомендуется рассмотреть несколько ошибочных рассуждений, приводящих к ложным заключениям из-за неправильного использования понятия предела, например, известный софизм Зенона об Ахиллесе и черепахе [см. I, II, § 30 гл. II, §§ 20, 23 гл. III и др.]. Поучительно показать, как, пользуясь только циркулем и линейкой, можно разделить угол на 3 равные части в результате неограниченного повторения деления угла пополам $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots + \frac{1}{4^n} = S_n, S_n \to \frac{1}{3}\right)$.

Приводим в заключение задачу, весьма популярную среди учащихся, правильное решение которой требует применения теории пределов: найти $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\ldots$ или в более точной формулировке — выяснить, сходится ли последовательность $a_1=\sqrt{2}$, $a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $a_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\ldots$, у которой член a_n содержит n квадратных радикалов. Находя значения нескольких первых членов с помощью четырёхзначной таблицы квадратных корней, имеем $a_1=1{,}414$, $a_2=\sqrt{3{,}414}=1{,}848$, $a_3=\sqrt{3{,}848}=1{,}961$, $a_4=\sqrt{3{,}961}=1{,}990$, $a_5=\sqrt{3{,}990}=1{,}997$, $a_6=\sqrt{3{,}997}=1{,}999$. Похоже, что эта последовательность сходится, и самостоятельное доказательство правильности этой догадки вполне посильно для девятиклассников (сперва доказывается, что эта последовательность возрастающая, $a_1<a_{n+1}$, потом, что она ограничена сверху, а именно $a_n<2$). Доказав, что предел существует, обозначаем его буквой x и приходим к уравнению $x=\sqrt{2+x}$, решение которого показывает, что $x=2$. Переход от равенства $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ к равенству $a_{n+1}^2=2+a_n$ и далее к равенству $x^2=2+x$ является хорошей иллюстрацией теорем о пределе суммы и произведения.

Глава X

ЛОГАРИФМЫ

§ 43. Обобщение понятия о показателе степени и показательная функция.

Твёрдо усвоив определение степени числа с натуральным показателем и 4 закона действий над степенями, выражаемых формулами $a^n\cdot a^k=a^{n+k}$, $a^n:a^k=a^{n-k}$, $(a^n)^k=a^{nk}$, $\sqrt[k]{a^n}=a^{n:k}$, и зная, что первая и третья справедливы для любого a и для любых натуральных значений n и k, вторая — только для $a\neq 0$, $n>k$, четвёртая — при любом a, и при любом n, кратном k, учащиеся IX класса знакомятся с расширением понятия степени на случай нулевого, целого отрицательного, рационального значений показателя. Здесь прежде всего надо предостеречь от опасности смешения определения и доказательства: не может быть и речи о доказательстве формул $a^0=1$, $a^{-k}=1:a^k$, $a^{k:n}=\sqrt[n]{a^k}$, так как прежде чем что-либо доказывать о таких новых объектах, как a^0, a^{-k}, $a^{n:k}$, необходимо дать им определения, т. е. установить точный смысл этих новых символов, не имеющих смысла, если руководствоваться только определением степени с натуральным показателем.

Естественно возникает вопрос: нельзя ли так определить новый символ a^0, чтобы закон умножения степеней остался в силе и для случая, когда один из показателей нуль? Предполагая, что $a \neq 0$, имеем из равенства $a^n \cdot a^0 = a^{n+0} = a^n$, что $a^0 = a^n : a^n = 1$. Итак, желая сохранить закон умножения степеней для нулевого значения показателя, мы должны принять единственно возможное определение $a^0 = 1$: нулевая степень любого числа, отличного от 0, равна 1. Нетрудная проверка показывает, что при этом сохраняются и три остальных закона (иначе и быть не может, так как они являются следствиями первого).

Прийти к определению $a^0 = 1$ можно иначе — через рассмотрение закона деления степеней, как это и делает учебник алгебры.

Чтобы получить определение степени с целым отрицательным показателем, можно также потребовать, чтобы закон умножения степеней сохранил силу и для степеней с такими показателями. Полагая в формуле $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$ $k = -n$, приходим к формуле $a^n \cdot a^{-n} = 1$, показывающей, что $a^{-n} = 1 : a^n$. Смысл символа $a^{n:k}$ при n, не кратном k, устанавливаем на основании требования сохранения закона возведения степени в степень. Заменяя в формуле $(a^n)^k = a^{nk}$ показатель n через $n : k$, имеем $(a^{n:k})^k = a^n$, и видим, то $a^{n:k}$ надо считать равным числу, k-я степень которого есть a^n, т. е. корню степени k из числа a^n. Всё, что было сказано выше (в § 31) о числе значений корня степени k, сохраняет силу и для степени $a^{n:k}$, но обычно, если нет особой оговорки, этот символ означает арифметическое значение корня.

Весьма желательно провести проверку остальных законов действий над степенями. Например, ставим вопрос о том, сохраняется ли для степеней с рациональными показателями закон умножения, выражаемый формулой $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$, и решаем его, преобразуя выражения $a^{n:k} \cdot a^{p:q}$ и $a^{n:k+p:q}$ и сводя вопрос к хорошо известным действиям над радикалами.

Итак, доказываются не самые формулы, устанавливающие смысл обобщённых степеней, а их необходимость как определений для сохранения законов действий над степенями.

Установив эти определения, надо на ряде примеров показать пользу употребления обобщённых степеней: приведение дробных рациональных выражений к целому виду, устранение радикалов посредством введения дробных показателей.

Действующая программа включает пункт: «Понятие о степени с иррациональным показателем». Надо признать, что основательное изучение этого вопроса не под силу учащимся IX класса: оно требует предварительного знакомства с теорией пределов и понятием непрерывности функции. В IX классе приходится ограничиться по этому вопросу тем немногим, что содержится в учебнике алгебры Киселёва (§ 97 по изданию 1949 г.). Учащимся надо усвоить приведённое там определение, умея применить его к любому частному случаю, например $2^{\sqrt{2}}$, и принять без доказательства заключение о распространении на степени с иррациональным показателем четырёх законов действий над степенями.

Естественным завершением обобщения понятия степени является изучение показательной функции. Провести его сколько-нибудь основательно в IX классе нельзя, но вполне возможно обеспечить следующее: 1) усвоение самого понятия функции a^x, где постоянное основание $a > 0$ отлично от 1, а переменная x пробегает все значения от $-\infty$ до $+\infty$; 2) уменье вычертить график этой функции в прямоугольных координатах для любого данного a, основываясь на построении ряда точек и допуская, что при сгущении этого ряда мы будем всё ближе и ближе подходить к некоторой непрерывной кривой, т. е. кривой, вычерченной остриём карандаша без его отрыва от бумаги, причём при возрастании x значение a^x всё время растёт, если $a > 1$, и всё время убывает, если $0 < a < 1$; 3) понимание асимптотического характера приближения одной ветви этого графика к оси X; 4) знание тех немногих свойств показательной функции, какие указаны в учебнике Киселёва. Самое главное — обеспечить понимание непрерывного изменения функций 10^x, подготовляя тем самым правильное разрешение вопроса о существовании десятичного логарифма у любого положительного числа.

Желательно связать изучение показательной функции с рассмотрением ряда примеров реальных процессов, в которых изменение некоторой величины происходит по закону показательной функции (такие примеры рассматриваются в учебниках в главе о геометрической прогрессии, но при непрерывном изменении аргумента вопрос уже выходит за рамки этой главы). Однако недостаток времени не позволяет, к сожалению, остановиться на этом вопросе в IX классе столь подробно, как следовало бы. Всё же желательно рассмотреть хотя бы пару примеров, хотя бы закон органического роста и закон радиоактивного распада (в первом случае возрастающая, во втором убывающая показательная функция). Ряд интересных примеров такого рода можно найти в книге [III, 11]. Именно необходимость изучения подобных непрерывных процессов полностью оправдывает рассмотрение значений степени при всех, в том числе и иррациональных значениях показателя.

§ 44. Определение логарифма. Логарифм как функция обратная по отношению к показательной. Общие свойства логарифмов.

Исторически понятие логарифма и его применение для упрощения вычислений возникло из сопоставления двух прогрессий: арифметической и геометрической. Это приводит к мысли начинать изучение логарифмов в школе с рассмотрения правил действий над числами, представляющими собой члены какой-либо геометрической прогрессии, например последовательные степени числа 2, и выяснения возможности замены действий над числами действиями над соответствующими номерами этих чисел как членов прогрессии. Сопоставим, например, следующие два ряда значений чисел n и 2^n.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024	2 048	4 096

n	13	14	15	16	17	18	19	20	21
2^n	8 192	16 384	32 768	65 536	131 072	262 144	524 288	1 048 576	2 097 152

Называя верхние числа логарифмами нижних по основанию 2, легко устанавливаем несколько правил действий над нижними числами, начиная с такого: чтобы перемножить два числа, например 32 и 128, надо найти их логарифмы (5 и 7), сложить их ($5 + 7 = 12$), найти число с логарифмом 12 (4 096). Это правило вытекает из закона умножения степеней одного основания: $32 \cdot 128 = 2^5 \cdot 2^7 = 2^{5+7} = 2^{12} = 4\,096$. Столь же просто над числами вида 2^n производятся и действия деления, возведения в степень, извлечения корня. Бросается в глаза факт первостепенной важности: применение логарифмов позволяет заменять действия умножения, деления, возведения в степень, извлечения корня над нижними числами соответственно действиями сложения, вычитания, умножения, деления над верхними числами, т. е. над их логарифмами. Но плохо то, что наша маленькая табличка содержит логарифмы лишь немногих чисел. Нельзя ли так её усовершенствовать, чтобы она содержала логарифмы всех натуральных чисел (в некоторых границах)? Дело сводится к вопросу о возможности представления всех натуральных чисел в виде степеней одного и того же основания, т. е. о возможности решения уравнения $a^x = b$ относительно x при данных значениях a и b.

Более подробные соображения о таком введении в изучение логарифмов, сразу раскрывающем для учащихся большое практическое значение логарифмов, можно найти во многих книгах, например, [III, 42]. На изучение логарифмов учитель имеет довольно много времени (на них вместе с показательной функцией отводится 36 часов), и посвятить 2—3 часа на такое введение вполне возможно.

При дальнейшем изучении логарифмов прежде всего должно быть усвоено общее их определение. Словесную его формулировку надо связать с формулами $\log_a b = c$, $a^c = b$ или, объединяя их в одну, с формулой $a^{\log_a b} = b$. Нередко бывает, что учащиеся, зная словесное определение логарифма, затрудняются сказать, чему равно, например, число $x = 2^{\log_2 13}$, хотя заключение, что $x = 13$, вытекает непосредственно из этого определения. Здесь мы имеем, несомненно, лишь поверхностное, неглубокое, формальное усвоение определения.

Желательно с самого начала придерживаться общепринятого стандарта обозначений: употреблять знак log для логарифма, взятого по произвольному основанию, указывая это основание подстрочным значком ($\log_2 8 = 3$), и знак lg для десятичного логарифма, т. е. логарифма, взятого по основанию 10, которое уже не указывается ($\lg 100 = 2$).

В учебной литературе распространён устаревший взгляд на логарифмирование как на одну из двух обратных операций, по отношению к возведению в степень (другой обратной операцией является извлечение корня). Взгляд этот в настоящее время должен быть совершенно оставлен, так как он приводит к неправильному представлению о логарифмировании как об одной из алгебраических операций. Основная же ошибка здесь заключается в том, что нет никакой алгебраической операции, означающей возведение в степень с **любым** показателем. Возведение в целую степень есть алгебраическая (рациональная) операция, сводящаяся к повторному умножению (если показатель положителен), сопровождающемуся делением (если показатель отрицателен); к алгебраическим операциям можно отнести возведение в степень с любым рациональным показателем, при котором речь идёт, в сущности, о задаче решения алгебраического двучленного уравнения. Определение же степени с произвольным действительным показателем, основанное на предельном переходе, приводит нас непосредственно к **трансцендентной** (не алгебраической) показательной функции $y=a^x$. Эта функция имеет обратную функцию, которая и является **логарифмом**: $x=\log_a y$. Ни о каких «двух обратных операциях» здесь говорить не приходится.

Наряду с показательной функцией следует рассматривать функцию *общую степенную* $y=x^b$, также трансцендентную, если b есть иррациональное число (x считаем положительным). Обратной функцией здесь является снова степенная функция $x=y^{\frac{1}{b}}$.

Вопрос о том, существует ли логарифм у любого числа по любому положительному основанию, отличному от 1, лучше отложить до рассмотрения десятичных логарифмов; прежде следует изучить общие свойства логарифмов, непосредственно вытекающие из определения. Эти свойства, выражаемые формулами $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$, $\log_a(N_1N_2)=\log_a N_1+\log_a N_2$, $\log_a(N_1:N_2)=\log_a N_1-\log_a N_2$, $\log_a N^k=k\log_a N$, $\log_a\sqrt[k]{N}=\frac{1}{k}\log_a N$, образуют основу всего школьного учения о логарифмах и требуют тщательного усвоения. Их изучение прекрасно сочетается с приобретением навыка в операциях логарифмирования и потенцирования более сложных алгебраических выражений, т. е. в представлении логарифма такого выражения, не содержащего действий сложения и вычитания, в виде линейной функции логарифмов входящих в это выражение чисел, и в обратном переходе. Практическая важность этих двух операций требует большого к ним внимания. Необходимо добиться, чтобы учащиеся, сперва расчленяя каждую такую операцию на отдельные шаги и приводя обоснование каждого шага, научились в конце концов выполнять это расчленение в уме и сразу записывать окончательный результат.

§ 45. Десятичные логарифмы.

Установив общие свойства логарифмов, выясняют преимущество основания 10: целая часть (характеристика) логарифма любого числа, записанного в десятичной нумерации, определяется по известному правилу простым подсчётом его цифр. В дальнейшем в средней школе используются только десятичные логарифмы;

только о них и следует говорить, не разбивая внимания учащихся. Вопрос о переходе от логарифмов, взятых по одному основанию, к логарифмам тех же чисел, взятых по другому основанию, фигурировал раньше в программе, но теперь исключён. Но знакомство с натуральными логарифмами — прекрасная тема для индивидуального задания или кружковой работы при использовании, например, книг [III, 30а] и [III, 1], а задачи вычисления логарифмов чисел по любому основанию по данным десятичным их логарифмам решаются как задачи на показательные уравнения (см. ниже § 49).

Как только учащиеся познакомились с понятием десятичного логарифма, перед ними встают вопросы: всякое ли положительное число, например, 3, имеет десятичный логарифм? Как найти десятичный логарифм числа, если он существует? Ответы на эти вопросы, естественно, получаются при определении десятичного логарифма как функции, обратной по отношению к показательной функции $y = 10^x$. Дело в том, что функция 10^x при возрастании x от 0 до 1 возрастает от 1 до 10, принимая по одному разу каждое из промежуточных значений; поэтому существует одно и только одно (иррациональное и выражаемое, следовательно, бесконечной десятичной непериодической дробью) число x, при котором 10 равно 3; это и есть значение логарифма 3. Его можно выразить конечной десятичной дробью только приближённо, но с произвольно высокой точностью. Дать в IX классе доказательство указанных утверждений трудно, но вполне возможно показать по крайней мере один из двух следующих способов фактического вычисления десятичного логарифма.

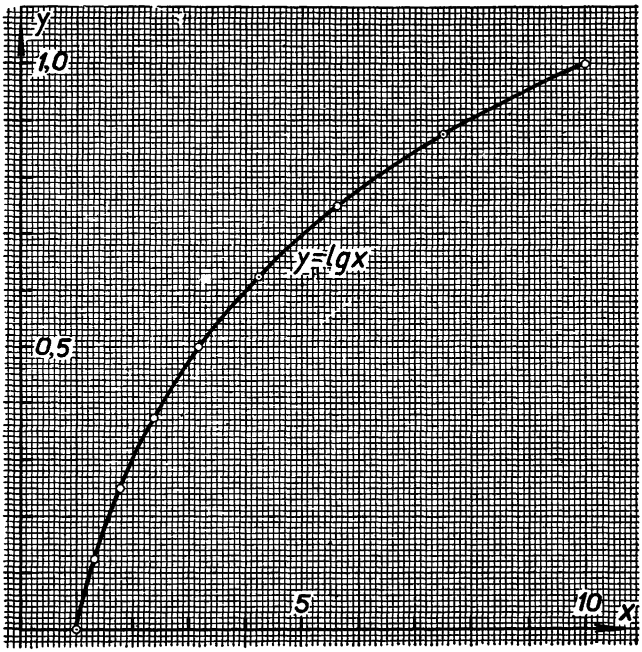
Первый из этих способов, использованный ещё в XVII в. при составлении первых логарифмических таблиц, основан на почленном возведении равенства $10^x = b$ в степень с достаточно большим показателем k и простом подсчёте цифр числа b^k. Если в целой части этого числа имеется $n + 1$ цифра, то $10^n < b^k < 10^{n+1}$, $10^n < 10^{xk} < 10^{n+1}$, $n < xk < n + 1$, $\frac{n}{k} < x < \frac{n+1}{k}$, и $\lg b = x$ определён с точностью до $\frac{1}{k}$. Если возведение в степень с показателем k осуществлять как последовательное возведение в квадрат или в куб с использованием таблицы квадратов или кубов, то оно проводится очень быстро. Например, применяя четырёхзначную таблицу кубов, имеем следующее вычисление lg 3 с тремя десятичными знаками:

k	1	3	9	27
3^k	3	27	$1{,}968 \cdot 10^4$	$7{,}622 \cdot 10^{12}$

k	81	243	729	2187
3^k	$4{,}429 \cdot 10^{38}$	$8{,}688 \cdot 10^{115}$	$6{,}558 \cdot 10^{347}$	$2{,}820 \cdot 10^{1043}$

Число 3^{2187} имеет 1044 цифры, $n = 1043$, а потому $\frac{1043}{2187} < \lg 3 < \frac{1044}{2187}$, $0,4769\ldots < \lg 3 < 0,4773\ldots$ Трёхзначный логарифм 3 определён: $\lg 3 = 0,477$. Понятно, что продолжение этой операции последовательного возведения в куб даёт возможность получить $\lg 3$ с произвольно высокой точностью.

Другой способ, дающий возможность указать приближённые значения десятичных логарифмов сразу для целой серии чисел, заключается в построении графиков функции $y = \lg x$ или $x = 10^y$ с помощью точек, соответствующих значениям y, равным 0; 1; 0,5; 0,25; 0,75; 0,125; 0,325; 0,625; 0,875 и т. д. Интервал от 0 до 1



Фиг. 14.

последовательно делится пополам, а значение $x = 10^y$ получается посредством простого извлечения квадратного корня, так как $10^{(a+b):2} = \sqrt{10^{a+b}} = \sqrt{10^a \cdot 10^b}$; $10^{0,5} = \sqrt{10} \approx 3,162$, $10^{0,25} = \sqrt{3,162} \approx 1,778$, $10^{0,75} = \sqrt{3,162 \cdot 10} \approx 5,623$ и т. д. Отмечая точки с координатами x и $y = \lg x$ на миллиметровой бумаге хотя бы в масштабе в 1 *мм* 0,1 для оси X и в 1 *мм* 0,01 для оси Y и соединяя их плавной кривой, получаем график, изображённый на фигуре 14 и позволяющий прочесть значения десятичных логарифмов всех натуральных чисел от 2 до 99 с двумя десятичными знаками. Чтобы получить более точные значения логарифмов, надо начертить график в более крупном масштабе, что вполне осуществимо, если брать его по частям.

Установив способ вычисления приближённого значения десятичного логарифма любого натурального числа, мы тем самым вполне убедительно для учащихся показали им существование логарифма у любого рационального положительного числа, так как его логарифм есть разность логарифмов числителя и знаменателя, а вместе с тем и у любого действительного положительного числа, так как к нему можно подойти как угодно близко с помощью рациональных чисел. Но если никакой способ вычисления логарифмов не показан, отсутствие особого доказательства существования логарифма оставляет в знаниях учащихся существенный пробел. В стабильном руководстве Киселёва теорема о существовании логарифма даже не формулирована, хотя естественное её место в разделе «Основные свойства логарифмов». Там показано, что отрицательные числа при положительном основании логарифмов не имеют, что при всяком основании, отличном от 1, логарифм 1 есть 0 и т. д., и следовало бы добавить ещё одну теорему: каковы бы ни были числа $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$, всегда существует одно и только одно такое действительное число x, что $a^x = b$. Доказательство этой теоремы можно найти, например, в книге [III, 34а], но надо со всей определённостью подчеркнуть, что показ одного из двух указанных выше примитивных способов вычисления логарифмов даёт учащимся больше, чем изучение слишком трудного для них доказательства.

§ 46. Таблицы логарифмов.

Понимание необходимости таблицы логарифмов для практического использования свойств логарифмов в вычислениях приходит само собой в результате работы, описанной выше в § 44. Существует много таблиц, содержащих десятичные логарифмы натуральных чисел, обычно от 10^n до 10^{n+1}, вычисленные с определённым числом десятичных знаков, чаще всего с 3, 4, 5, 7. В книге [III, 41] можно найти 12-значные и даже 40-значные логарифмы, а в сборнике таблиц Каллета, изданном впервые в 1795 г., десятичные логарифмы простых чисел первой тысячи вычислены с 61 десятичным знаком. Всякая таблица k-значных логарифмов при достаточно большом её объёме, т. е. при достаточно большом n, позволяет находить результаты действий умножения, деления, возведения в степень, извлечения корня с k значащими цифрами, причём последняя не всегда вполне точна. Так, находя $x = 104 : 11$, имеем, применяя k-значные логарифмы:

при $k =$	3	4	5	6	7
$x =$	9,46	9,454	9,4545	9,45455	9,454544,

в то время как точное значение x выражается бесконечной периодической десятичной дробью 9,45454545... С увеличением числа десятичных знаков, с каким таблица даёт логарифмы, возрастает, таким образом, точность получаемых с помощью такой таблицы результатов, но в то же время повышается, и притом очень быстро, и объём таблицы, и количество времени, затрачиваемого на работу с нею. Так при вычислении некоторого результата по 5-значной таблице, как показал опыт, требуется примерно вдвое больше времени, чем на его получение посредством 4-значной таблицы, а 7-значная таблица требует тройного количества времени по сравнению с 5-значной. В громадном большинстве практических вычислений и данные, и результат содержат по 2—3, реже по 4 значащих цифры, а потому вполне оправдано применение в школе 4-значных таблиц как основных. Но изредка всё же встречаются случаи, когда обеспечиваемая ими точность недостаточна, и крайне желательно, чтобы учащиеся получали понятие об устройстве и употреблении более полных таблиц, лучше всего 7-значных, используя распространенный у нас сборник [III, 13].

Учащиеся, научившиеся пользоваться 4-значной таблицей квадратов, легко овладевают и навыком в применении 4-значной таблицы логарифмов. В обоих случаях главная трудность в выполнении линейной интерполяции. Применять приведённые в таблицах вспомогательные средства линейной интерполяции (пропорциональные части, готовые поправки) следует лишь после того, как учащиеся научатся вычислять и без них, т. е. выполняя интерполяцию с помощью пропорций или приведения к единице.

Таблицу 4-значных логарифмов обычно сопровождает таблица антилогарифмов, т. е. таблица значений показательной функции $y = 10^x$. Необходимости в ней нет, так как таблица логарифмов позволяет находить и значение числа по данному его логарифму, т. е. значение 10^x по данному x («обратный вопрос»). Но применение обеих таблиц вносит единообразие в решение двух задач (получение логарифма данного числа и получение числа, имеющего данный логарифм) и заметно повышает, как показывает опыт, и скорость, и правильность вычисления. Правда, наличие двух рядом расположенных таблиц логарифмов и антилогарифмов приводит иногда к ошибкам от смешения этих двух таблиц. Чтобы их предотвратить, таблицу антилогарифмов печатают иногда на бумаге иного цвета или снабжают каким-либо другим отличительным признаком. Так, в «Четырёхзначных математических таблицах» В. Брадиса в таблице антилогарифмов перед двузначными числами первого столбца поставлены запятые, напоминающие, что целая часть каждого данного логарифма при работе с этой таблицей произвольна.

Точность принятых в школе 4-значных таблиц недостаточна в двух случаях: когда приходится возводить число в степень с очень большим показателем и когда вычисляется разность двух чисел, весьма близких друг другу. Так, желая найти $x = 1{,}04^{100}$, мы берём 4-значный логарифм числа 1,04, равный 0,0170 и после умножения его на 100 получаем $\lg x \approx 1{,}70$ с двумя лишь десятичными знаками; третий и четвёртый знаки остаются при этом совершенно неизвестными, так что лучше писать $\lg x \approx 1{,}70??$ или ещё лучше $1{,}6950 < \lg x < 1{,}7050$. Но из таблицы антилогарифмов находим, что 1,6950 есть логарифм числа 49,55, а 1,7050 — числа 50,70, так что $49{,}55 < x < 50{,}70$, откуда $x \approx 50{,}125$ ($\pm 0{,}575$ или окончательно: $x \approx 50{,}1$ ($\pm 0{,}6$). Вычисление, приведённое для контроля по 7-значной таблице, даёт $x \approx 50{,}504$ с гарантией, что ошибка не превосходит 0,002. «Потерю точности при вычитании» мы имеем, например, при вычислении значения $x = (\sqrt{2} - 1)^8 = 577 - 408\sqrt{2}$. Здесь вычисление $y = 408\sqrt{2}$ по 4-значной таблице логарифмов даёт $y \approx 577{,}1$, причём последняя цифра, как всегда, не вполне надёжна, и для $x \approx 577 - y$ получается значение — 0,1, в то время как ясно, что $x > 0$. Таблица 7-значных логарифмов даёт $y \approx 576{,}9992$, а потому $x \approx 0{,}0008$, вычисление же без логарифмов даёт $\sqrt{2} = 1{,}41421356$, $y = 408\sqrt{2} = 576{,}999132$, $x \approx 0{,}000868$.

§ 47. Практика вычислений с логарифмами.

Когда освоен способ разыскания (с помощью таблицы) логарифма любого числа и решение обратного вопроса, остаётся овладеть практическим применением логарифмов для упрощения вычислений. Здесь приходится различать следующие моменты:

а) приведение формулы, по которой требуется провести вычисление, к виду, наиболее удобному для вычисления посредством логарифмов;

б) составление вычислительной *схемы*, т. е. такая разметка места, предназначенного для записи вычисления, при которой обеспечивается наибольшее удобство и экономичность записи;

в) заполнение этой схемы, т. е. подыскание нужных табличных значений и выполнение всех предусмотренных схемой операций;

г) надлежащее округление полученного результата на основании критического рассмотрения точности данных и возможной вычислительной ошибки, обусловленной приближённым характером табличных значений;

д) контроль всего проведённого вычисления.

Чтобы показать на примере все эти этапы вычисления, проведём полностью вычисление $a = 4\pi^2 R : T^2$ при $R = 60{,}27\,r$, где r — длина земного радиуса, равная 6 371 *км*, а $T = 27{,}32$ суток, причём R должно быть выражено в сантиметрах, T — в секундах. Имеем, таким образом, формулу $a = \frac{4\pi^2 \cdot 60{,}27r \cdot 10^3 \cdot 10^2}{(T \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60)^2}$, которой придаём следующий вид, обеспечивающий большее удобство вычисления: $a = 602{,}7 r z^2$, $z = \pi : (T \cdot 12 \cdot 36) = \pi : (432\,T)$. Далее составляется вычислительная схема:

$\lg T$		$\lg 602{,}7$	
$\lg \pi$		$\lg r$	
$-\lg 432$		$2 \lg z$	
$-\lg T$		$\lg a$	
$\lg z$		a	

Проводя вычисление посредством 4-значных логарифмов, мы не нуждаемся ни в какой записи вне этой схемы. Интерполяция производится (с использованием готовых поправок) в уме, найденные значения сразу записываются в схему. Вместо того чтобы складывать lg 432 и lg T, а затем вычитать их сумму из lg π, проще воспользоваться искусственной формой этих вычитаемых логарифмов, т. е. так называемыми «кологарифмами». После заполнения схемы она принимает следующий окончательный вид:

$\lg T$	1,4365	$\lg 602{,}7$	2,7801
$\lg \pi$	0,4971	$\lg r$	3,8042
$-\lg 432$	$\bar{3}{,}3645$	$2 \lg z$	$\bar{8}{,}8502$
$-\lg T$	$\bar{2}{,}5635$	$\lg a$	$\bar{1}{,}4345$
$\lg z$	$\bar{4}{,}4251$	a	0,2719

Ответ: $a \approx 0{,}2719 \frac{см}{сек^2}$.

Приближённые данные R и T имеют по 4 значащих цифры, поэтому и результат можно дать с 4 значащими цифрами, но применение 4-значных логарифмов делает последнюю (4-ю значащую) цифру результата не вполне надёжной, найденное значение a лучше округлить до 3 значащих цифр. Окончательно имеем: $a \approx 0{,}272$. Контрольное вычисление, проведённое по той же схеме с помощью 7-значных логарифмов, даёт $a \approx 0{,}2720694$, прекрасно подтверждая последнее заключение.

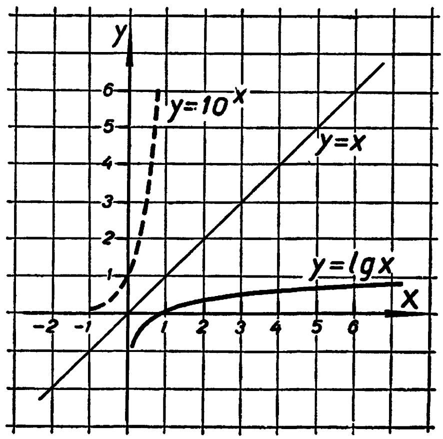
Если выражение, по которому проводится вычисление, содержит действия сложения или вычитания, его приходится вычислять по частям. Ошибочную замену $\lg(a+b)$ через $\lg a + \lg b$ начинающие допускают очень часто, и её следует предотвратить, заранее её рассмотрев. При вычислении посредством логарифмов выражения, содержащего сумму или разность двух чисел, которые сами ещё должны быть вычислены, выгодно применять предварительное преобразование, превращающее одно из этих двух чисел в 1. Так, чтобы найти $x = \sqrt[3]{\sqrt[5]{8} + \sqrt[4]{3}}$, берём $x = \sqrt[3]{\sqrt[5]{8}(1+y)}$, полагая $y = \sqrt[4]{3} : \sqrt[5]{8}$, и вычисляем по схеме

$\lg 3$	0,4771	$\frac{1}{4}\lg 3$	0,1193	$\lg(1+y)$	0,2715
$\lg 8$	0,9031	$\frac{1}{5}\lg 8$	0,1806	$\frac{1}{5}\lg 8$	0,1806
		$\lg y$	$\bar{1}{,}9387$	$\lg x^3$	0,4521
		y	0,8684	$\lg x$	0,1507
		$1+y$	1,8684	x	1,415

Результат получился тот же, что и при вычислении по формуле $x = \sqrt[3]{y+z}$, $y = \sqrt[5]{8}$; $z = \sqrt[4]{3}$, проведённом в учебнике Киселёва (часть 2, § 119, по изданию 1949 г.).

§ 48. Логарифмическая функция.

Основательное изучение логарифмической функции $y = \log_a x$, как и функции показательной $y = a^x$, обращением которой она является, в средней школе затруднительно, но некоторое первоначальное знакомство с ней и её практическими приложениями вполне доступны девятиклассникам. Построение графика логарифмической функции в прямоугольных координатах является своего рода подведением итогов всего установленного о свойствах логарифмов, и к нему следует возвратиться после такого изучения (в первый раз этот график должен появиться в связи с определением логарифмической функции, как обратной по отношению к показательной). В учебнике Киселёва логарифмическая функция рассматривается изолированно, без связи с последующим и предыдущим, причём одновременное рассмотрение трёх показательных функций $y = \log_2 x$; $y = \log_{0,5} x$; $y = \lg x$ при весьма малом времени, на это отводимом, создаёт у учащихся весьма смутное представление о сути дела; в частности, учащиеся часто не усваивают связи между графиками показательной и логарифмической функции, не понимают, что таблица антилогарифмов, которой они постоянно пользуются, есть таблица значений показательной функции $y = 10^x$. Прекрасной подготовкой к изучению логарифмической функции является усвоение того графического способа получения десятичных логарифмов, какой указан выше (в § 43). Из трёх логарифмических функций, рассматриваемых в учебнике алгебры, лучше выделить какую-нибудь одну, например $y = \lg x$, и посвятить ей больше времени, только упомянув об изменениях, какие вызывает переход к другому основанию.



Фиг. 15.

Вопрос о связи между графиками показательной и логарифмической функции даётся не без труда, но в нём желательно и возможно добиться полной ясности. Показательная функция $y = 10^x$ устанавливает связь между всеми действительными числами — значениями аргумента x, и всеми положительными действительными числами — значениями функций $y = 10^x$. График, который стройтся в отличие от графика фиг. 15 при одинаковых масштабах по осям X и Y, делает эту связь наглядной: из любой точки оси X, изображающей некоторое действительное число x, восставляем перпендикуляр до пересечения с кривой, показанной на фигуре 15 пунктиром, а из этой точки пересечения опускаем перпендикуляр на ось Y и получаем положительное число y, представляющее собой значение функции $y = 10^x$, соответствующее взятому значению x. Но эта же самая кривая позволяет делать и обратный переход от любой точки положительной (верхней) полуоси Y, изображающей какое-нибудь положительное число y, к некоторой определённой соответствующей ей точке оси X, изображающей действительное (положительное или отрицательное или равное нулю) число $x = \lg y$. Таким образом, одна и та же кривая является графиком и показательной функции $y = 10^x$, и логарифмической функции $x = \lg y$, причём в первом случае множество значений аргумента x есть множество абсцисс всех точек оси X, а множество значений функции y есть множество ординат всех точек положительной полуоси Y, а во втором аргументом служит y, и множество всех его значений есть множество ординат всех точек положительной полуоси Y, а функцией x, и множество всех значений функции есть множество абсцисс всех точек оси X. Чтобы перейти к обычному обозначению аргумента буквой x, а функции буквой y, надо поменять местами оси X и Y, переводя положительную полуось Y в положительную полуось X и обратно. Это достигается симметризацией чертежа относительно биссектрисы угла XOY, причём кривая, показанная на фигуре 15 пунктиром, перейдёт в кривую, показанную сплошной линией. Это и есть график логарифмической функции $y = \lg x$ (и в то же время график показательной функции $x = 10^y$).

Асимптотическому приближению к значению 0 показательной функции $y = 10^x$ при x, стремящемся к $-\infty$, соответствует неограниченное возрастание абсолютной величины логарифма $y = \lg x$ при x стремящемся к 0, так хорошо видное на чертеже, а быстрому росту показательной функции $y = 10^x$ при значениях $x \to +\infty$ соответствует весьма медленный рост функции $y = \lg x$ при таком же изменении x. При принятом на фигуре 15 масштабе (в 1 *см* 2 единицы) логарифмика поднимается над осью X на 0,5 *см*, 1 *см*, 1,5 *см*, 2 *см* и т. д. лишь при удалении направо на 5 *см*, 50 *см*, 5 *м*, 50 *м* и т. д., достигая высоты в 10 *см* только при удалении на $0{,}5 \cdot 10^{20}$ *см* $= 5 \cdot 10^{14}$ *км*, т. е. более чем на 3 млн. поперечников земной орбиты.

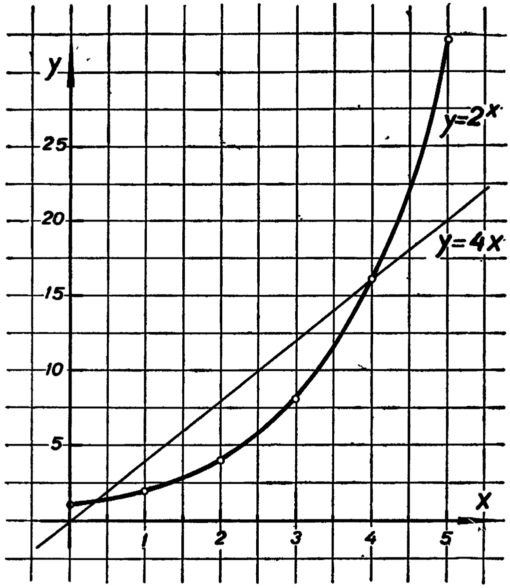
В таком наглядном представлении установленных свойств логарифмической функции и заключается вся ценность графика. Учащиеся должны уметь построить такой график и видеть на нём ряд свойств логарифмов.

§ 49. Уравнения показательные и логарифмические.

Показательное уравнение вида $a^x = b$, определяющее логарифм числа b по основанию a, решается очень просто посредством логарифмирования, сводящего его к линейному уравнению $x \lg a = \lg b$. Это уравнение имеет единственный корень при $a \neq 1$ $a > 0$, $b > 0$, но может вовсе не иметь решений (например, при $a > 1$, $b < 0$), может иметь бесконечное множество решений (при $a = b = 1$).

В средней школе довольно много внимания уделяют разным уравнениям, более или менее легко приводимым к виду $a^x = b$ или к виду $a^{f_1(x)} = a^{f_2(x)}$. Последнее уравнение при $a \neq 1$, $a > 0$ даёт уравнение $f_1(x) = f_2(x)$, ему равносильное. И теоретическое, и практическое значение таких уравнений ничтожно, и тратить на них много времени не стоит. Вполне достаточно, если учащиеся в состоянии справиться с теми показательными уравнениями, какие содержатся в задачнике П. А. Ларичева (часть II).

Заслуживают внимания показательные уравнения, не приводимые к виду $a^x = b$, как, например, уравнение $2^x = 4x$. Один из корней этого уравнения, а именно $x = 4$, легко усмотреть сразу, но возникает вопрос, нет ли других корней. Ответить на этот вопрос проще всего с помощью графического построения: берутся графики функций $y = 2^x$ и $y = 4x$, разыскиваются абсциссы их точек пересечения. Фигура 16 показывает, что здесь всего два корня: $x_1 = 4$ и $x_2 \approx 0{,}3$. Для получения более точного значения второго корня проводим следующее вычисление, понятное без объяснений.



Фиг. 16.

x	0,25	0,30	0,35	0,31	0,309	0,311
$\lg y_1 = x \lg 2$	0,0752	0,0903	0,1054	0,0933	0,0930	0,0936
$y_1 = 2^x$	1,190	1,231	1,275	1,240	1,239	1,241
$y_2 = 4x$	1,000	1,200	1,400	1,240	1,236	1,244
$y_1 - y_2$	+ 0,190	+ 0,031	− 0,125	0,000	+ 0,003	− 0,003

Итак, $x_2 \approx 0{,}310$ ($\pm\, 0{,}001$). Для получения более точного значения нужна таблица логарифмов с бо́льшим числом знаков.

Подобно показательным уравнениям, уравнения логарифмические занимают в школьном курсе математики место, не соответствующее их ничтожному значению. По существу здесь дело сводится к переходу от уравнения $\log_a f_1(x) = \log_a f_2(x)$ к уравнению $f_1(x) = f_2(x)$, ему равносильному, переходу, законному при $a > 0$, $a \neq 1$. Необходимо, чтобы учащиеся прежде всего хорошо уяснили себе этот переход, рассуждая примерно так: $a^{\log_a f_1(x)} = f_1(x)$, $a^{\log_a f_2(x)} = f_2(x)$, из равенства логарифмов вытекает равенство степеней, а потому $f_1(x) = f_2(x)$, или просто ссылаясь на монотонность логарифмической функции при положительном основании a, отличном от 1. Всё остальное сводится к технике действия, обратного логарифмированию,— к потенцированию, т. е. к замене линейной функции логарифмов одним логарифмом.

Отметим одну распространённую ошибку. Решая, например, уравнение $0{,}5 \lg (x - 9) + \lg \sqrt{2x - 1} = 1$ и приведя его к виду $\lg \sqrt{(x-9)(2x-1)} = \lg 10$, учащийся говорит: «Сокращаю обе части на lg и получаю после уничтожения радикала квадратное уравнение $(x - 9)(2x - 1) = 100$». Никакого сокращения, т. е. деления обеих частей на общий множитель, здесь нет, а есть только указанный выше законный переход от равенства логарифмов к равенству чисел. Неточность выражения может привести и действительно приводит к грубым ошибкам (вроде перехода от равенства $2 \lg x = \lg b$ к равенству $2x = b$).

§ 50. Счётная логарифмическая линейка.

С конца XIX в. получил самое широкое распространение простой, но весьма полезный счётный прибор — счётная логарифмическая линейка, изобретённая ещё в XVII в. Линейка механизирует выполнение ряда действий над числами (умножения, деления, возведения в степень, извлечения корня) и позволяет получать очень быстро и с достаточной для большинства практических вычислений точностью результаты многих более сложных операций. «Нормальная» счётная линейка имеет длину 250 *мм* и удобна для носки в кармане. Она даёт результаты с 3—4 значащими цифрами и ускоряет вычисление по сравнению с обычным вычислением на бумаге в 10—15 раз, а в случае «массовых» вычислений, т. е. вычислений по одной и той же формуле при ряде значений данных, ещё больше. Например, чтобы получить какое угодно число значений функции $y=ax^2$ при любом постоянном a и серии значений x, достаточно выполнить одну установку движка линейки, сопоставляя две её шкалы, на что требуется всего несколько секунд. Всё остальное сводится к простому чтению искомых значений по одной из шкал. В настоящее время никакая серьёзная работа инженера или техника невозможна без использования счётной линейки. Самое широкое применение она получила и в военном деле, где так ценится скорость вычисления.

Уменье работать со счётной линейкой нужно каждому студенту ВТУЗ'а, и казалось бы, что средняя школа должна знакомить с ней своих питомцев, тем более, что несложная теория линейки теснейшим образом связана с изучением логарифмической функции, а практическое её использование даёт заметную экономию во времени, затрачиваемом на вычисления, уже в средней школе. С начала XX в. в новых руководствах алгебры стали появляться разделы, посвящённые счётной линейке, и в 30-х годах изучение линейки было включено в программу IX класса нашей школы. Однако отсутствие в продаже хороших дешёвых линеек, а главное, незнакомство с линейкой значительной массы учителей математики привели в дальнейшем к отказу от этого пункта. В действующей ныне программе в «Объяснительной записке» снова появилось упоминание о линейке. В издании 1952 г. оно формулировано так: «Желательно, чтобы во внеклассное время учащиеся проделали ряд упражнений в вычислениях с помощью логарифмической линейки». Разумеется, сперва должна быть усвоена несложная теория линейки.

Нередко приходится слышать мнение, что теорией и практикой работы с линейкой молодёжь в случае надобности овладевает сама, без помощи учителя. Это верно, но надо иметь в виду, что на это нужно время, которого в распоряжении студента ВТУЗ'а так мало, а кроме того, и это ещё важнее, такое самостоятельное изучение редко бывает полноценным: усваиваются только простейшие операции, многие возможности линейки остаются неиспользованными.

Требования жизни в отношении овладения счётной линейкой так настоятельны, что учащиеся IX и X классов, узнавая от своих старших товарищей, студентов ВТУЗ'ов, о важности уменья работать со счётной линейкой, сами просят учителя математики помочь им в этом деле в порядке дополнительных занятий. Долг учителя — идти в таком случае навстречу пожеланиям учащихся и провести с ними несколько занятий, разбирая несложную теорию линейки и вырабатывая полноценные навыки работы с нею. Для усвоения простейших операций (умножение, деление, возведение в квадрат и куб, извлечение квадратного и кубического корня, решение пропорций) достаточно 8—10 часов; при желании усвоить приёмы, позволяющие получать сразу результаты более сложных операций, это число часов надо ещё несколько увеличить. Для успеха дела абсолютно необходимо, чтобы учитель сам хорошо знал теорию линейки, изучив её по какому-либо из многочисленных существующих руководств (рекомендуем книги [III, 37], [II, 9]), и умел пользоваться линейкой.

Можно думать, что счётная линейка в соединении с обычными (русскими) счётами (а в дальнейшем с арифмометром) в значительной мере вытеснит из школы логарифмические таблицы и станет основным средством школьных вычислений.

Глава XI

КОМБИНАТОРИКА. БИНОМ НЬЮТОНА

§ 51. Теория соединений и теория вероятностей.

Теория соединений, или комбинаторика, представляет собой своеобразный раздел математики, нужный для успешного решения вопросов и алгебры, и других математических дисциплин. В средней школе теория соединений появляется в связи с необходимостью изучить формулы бинома Ньютона, представляющей собой весьма важный случай тождественного преобразования, хотя её вывод возможен и без использования комбинаторики. Понятие о перестановках и их свойствах необходимо, как известно, для теории определителей и играет важную роль в теории групп. Однако наибольшие применения разного рода соединения находят себе место в теории вероятностей, науке, изучающей законы массовых явлений, каждое из которых в отдельности определяется условиями, не поддающимися учёту, и которые называют «случайными». Теория вероятностей имеет в настоящее время практические приложения громадной важности. Она нужна и артиллеристам, так как результат каждого выстрела зависит не только от известных определённых его условий (калибр орудия, угол его оси с горизонтальной плоскостью, начальная скорость и т. д.), но и от многих обстоятельств, меняющихся от выстрела к выстрелу и не поддающихся точному учёту, как, например, небольшие колебания в количестве пороха и весе снаряда, влияние атмосферных условий и др.; нужна физикам и химикам, изучающим строение вещества, каждый кусочек которого состоит из невообразимо большого числа частиц; нужна для правильного планирования многих мероприятий в общественной жизни, как, например, страховое дело. Теория вероятностей давно уже приобрела столь большое значение, что много раз поднимался вопрос о включении её элементов в курс математики средней школы.

Понятие об элементах теории вероятностей необходимо иметь каждому учителю. Его можно получить по книгам [III, 16], [III,39]. Методическую разработку некоторых вопросов этой науки применительно к средней школе содержит учебник [III, 6].

На изучение соединений и бинома Ньютона действующая ныне программа отводит всего 12 часов (в начале года в X классе). Усвоение этого небольшого раздела программы в том объёме, в каком он обеспечен учебником, проходит обычно без затруднений, но опыт показывает, что это усвоение нередко бывает только формальным, даже больше того: задачи на подсчёт разного рода соединений, не сводящиеся к применению изученных формул, а требующие некоторой, даже очень небольшой самостоятельной работы мысли, учащиеся, не изучавшие теории соединений, а руководствующиеся просто здравым смыслом, решают лучше, чем десятиклассники, старающиеся во что бы то ни стало привести каждую такую задачу к пройденным им формулам перестановок, размещений, сочетаний. Здесь следует отметить одну неудачную формулировку в учебнике алгебры Киселёва: «соединения могут быть трёх родов: размещения, перестановки, сочетания» (§ 155 по изданию 1949 г.). Эта фраза внушает учащимся мысль, что этими тремя видами исчерпываются все соединения, что, конечно, неверно. Так, например, возьмём задачу об определении числа всех возможных сигнальных цветных фонарей, устанавливаемых на вагонах трамвая (чтобы различать в темноте вагоны разных маршрутов), при условии, что имеются стёкла n различных цветов и что одна пара цветов означает два разных маршрута в зависимости от того, какой цвет слева и какой справа. Эту задачу учащиеся IX класса решают обычно лучше, чем десятиклассники, находя непосредственным подсчётом, что при $n = 1, 2, 3, 4$ получаем 1, 4, 9, 16 пар сигнальных фонарей и что в общем случае, имея n различных сортов стёкол, можем сделать n^2 таких пар.

Чтобы избежать подобного положения, надо: 1) обеспечить большую сознательность вывода каждой формулы; 2) подчёркивать, что перестановки, размещения, сочетания не исчерпывают собой все виды соединений, а только являются простейшими и важнейшими из них; 3) давать наряду с задачами-примерами на применение выведенных формул и задачи в собственном смысле слова, требующие самостоятельного размышления. Ряд подобных более серьёзных задач можно найти в книге [III, 24].

Необходимо отметить, что нередко высказываются сомнения в целесообразности изучения комбинаторики в средней школе.

Несомненно, от исключения комбинаторики школьный курс математики ничуть не пострадает, а освобождающиеся при этом часы могут быть использованы для более важных вещей.

§ 52. Перестановки.

Изучение перестановок, размещений и сочетаний можно вести в различном порядке. Учебник Киселёва рассматривает сперва размещения, т. е. такие соединения, которые получаются, когда из всех наличных n элементов выбираются всеми возможными способами какие-либо k ($k \leqq n$), причём учитывается не только состав, но и порядок взятых элементов. Перестановки оказываются при этом просто частным случаем размещений, когда $k = n$, а после этого рассматриваются сочетания, отличающиеся от размещений только тем, что в них порядок взятых элементов не принимается во внимание. Но возможна и иная последовательность изучения: сперва рассматривается простейший вид соединений — перестановки, а затем совершается как обобщение задачи о перестановках переход к размещениям. Понятие перестановки проще и важнее понятия размещения, и эту вторую последовательность следует предпочесть. Ставя вопрос о том, сколькими способами возможно расположение в ряд различных элементов при $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$, фактически осуществляем все эти способы и подсчитываем их число, т. е. число перестановок из 1, 2, 3, 4, ... элементов. Получается примерно такая таблица, где символ P_n означает число перестановок из n элементов:

n	Элементы	Перестановки	P_n
1	a	a	1
2	a, b	ab, ba	2
3	a, b, c	$abc, acb, bac, bca, cab, cba$	6
4	a, b, c, d	$abcd, abdc, acbd, acdb, adbc, adcb$ $bacd, badc, bcad, bcda, bdac, bdca$ $cabd, cadb, cbad, cbda, cdab, cdba$ $dabc, dacb, dbac, dbca, dcab, dcba$	24
5	a, b, c, d, e	24 перестановки, начинающихся с буквы a, и по 24 перестановки, начинающихся с буквы b, c, d, e	120

При составлении этой таблицы особое внимание приходится обращать на то, чтобы не пропустить ни одной возможной перестановки и ни одной не повторять дважды. Взяв, например, при $n = 5$ букву a на первое место, мы имеем ещё 4 буквы, которые можно поставить на следующие 4 места столькими способами, сколько существует перестановок из 4 элементов, т. е. 24. Поняв, как составлена эта таблица, учащиеся без труда самостоятельно её продолжают, находя, что $P_6 = 120 \cdot 6 = 720$, $P_7 = 720 \cdot 7 = 5\,040$ и т. д., после чего легко получается и общая формула

$P_n = 1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)\cdot n$, записываемая короче в виде $P_n = n!$, вводится термин «n-факториал». Дело завершается проведением доказательства по методу совершенной математической индукции.

§ 53. Размещения и сочетания

При ознакомлении с размещениями и сочетаниями некоторые трудности представляют определения этих понятий, устраняемые разбором подходящих простых примеров. Положим, на собрании присутствуют 4 лица, требуется избрать президиум из 2 лиц, указывая, кто должен быть председателем и кто секретарём. Сколькими способами можно это сделать? Легко видеть, что здесь всего 12 возможных составов президиума, показанных в следующей табличке (присутствующие обозначены буквами A, B, C, D):

№№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Председатель . .	A	A	A	B	B	B	C	C	C	D	D	D
Секретарь	B	C	D	A	C	D	A	B	D	A	B	C

Если налицо не 4, а n человек, то выбор президиума (председателя и секретаря) возможен уже $n(n-1)$ способами.

Если выбирается президиум из двух лиц без указания на то, кто должен быть председателем и кто секретарём, число способов уменьшается вдвое, так как такие случаи, как A, B и B, A, перестают теперь быть различными. При первом порядке избрания мы имеем размещения $(A_4^{(2)} = 12)$, при втором — сочетания $(C_4^{(2)} = 6)$.

К тому, что дано по вопросу о размещениях и сочетаниях в учебнике Киселёва, полезно добавить ещё рассмотрение так называемого «второго свойства сочетаний», выражаемого формулой $C_n^{(k)} + C_n^{(k+1)} = C_{n+1}^{(k+1)}$. Доказательство её проводится двумя способами, во-первых, через простое вычисление суммы $C_n^{(k)} = C_n^{(k+1)}$ и сравнение её с числом $C_{n+1}^{(k+1)}$ и, во-вторых, через расчленение всех сочетаний из $n+1$ элемента по $k+1$ элементу в каждом сочетании из $n+1$ элемента по $k+1$ элементу в каждом сочетании на две группы с отнесением в первую группу всех сочетаний, имеющих один определённый элемент, например a (их всего $C_n^{(k)}$), а во вторую — всех остальных, т. е. всех сочетаний без этого элемента a (их всего $C_n^{(k+1)}$).

Изучение сочетаний полезно сопровождать составлением таблицы, дающей значения $C_n^{(k)}$ для некоторых небольших значений n и всех возможных для них значений k, т. е. так называемого «треугольника Паскаля», который был, однако, открыт задолго до Паскаля средневековыми математиками, жившими на территории нынешних среднеазиатских советских республик, и ещё раньше индусами (см. [I, 59б]).

Вот эта таблица для значений n от 1 до 10.

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

При составлении этой таблицы используется «первое свойство сочетаний», выражаемое формулой $C_n^{(k)} = C_n^{(n-k)}$ и позволяющее писать вторую половину каждой строки, просто повторяя в обратном порядке первую её половину (учесть различие между строками для чётных и нечётных значений n!). Полная симметрия каждой строки достигается добавлением слева столбца $k=0$, состоящего из одних единиц, условно рассматриваемых как «сочетания из 0 элементов». Действительно, полагая в формуле $C_n^{(k)} = C_n^{(n-k)}$, что $k=0$, имеем соотношение $C_n^{(0)} = C_n^{(n)}$, откуда $C_n^{(0)} = 1$. Последнее равенство является определением смысла символа $C_n^{(0)}$, не имеющего смысла по первоначальному определению.

Сравнивая числа любой строки треугольника Паскаля с числами строки, расположенной непосредственно над нею, подмечаем простой закон: каждое число нижней строки равно сумме двух чисел верхней, расположенных выше и левее, что соответствует формуле, выражающей второе свойство сочетаний. Это обстоятельство позволяет продолжать составление треугольника Паскаля, применяя только сложение.

Полезно поставить вопрос о сумме чисел, записанных на каждой строке: $1+1=2$, $1+2+1=4$, $1+3+3+1=8$, вообще $C_n^{(0)} + C_n^{(1)} + C_n^{(2)} + \ldots + C_n^{(n)} = 2^n$. Доказать, что этот закон имеет место для любого n, удаётся с помощью метода совершенной математической индукции, если использовать второе свойство сочетаний. Ещё более простое доказательство получается в результате использования чисел сочетаний, как биномиальных коэффициентов.

§ 54. Бином Ньютона.

Столь часто применяемая в математике формула бинома Ньютона

$$(x+a)^n = x^n + C_n^{(1)}ax^{n-1} + C_n^{(2)}a^2x^{n-2} + \ldots + C_n^{(n-1)}a^{n-1}x + C_n^{(n)}a^n \quad (1)$$

может быть записана гораздо короче, если воспользоваться общепринятым знаком Σ («сигма большая») для обозначения суммы ряда слагаемых данного вида:

$$(x+a)^n = x^n + \sum_{k=1}^{n} C_n^{(k)} a^k x^{n-k}, \text{ или } (x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^{(k)} a^k x^{n-k}. \quad (2)$$

В последнем случае использовано указанное выше равенство $C_n^{(0)} = 1$.

Подробные сведения об истории открытия этой формулы, представляющей собой обобщение известных с VI класса формул квадрата и куба двучлена, можно найти в книге [III, 30а] и статье [I 59б].

В школьном курсе алгебры вывод этой формулы основывают на рассмотрении произведения двучленов $(x+a)(x+b)(x+c)\ldots$, но более поучительным представляется другой путь, каким шёл в 1544 г. Михаил Штифель и независимо от него в 1665 г. Исаак Ньютон, рассматривавшие степени двучлена с последовательными показателями 2, 3, 4, 5...

$$(x+a)^2 = (x+a)(x+a) = x^2 + 2ax + a^2$$
$$(x+a)^3 = (x+a)^2(x+a) = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$
$$(x+a)^4 = (x+a)^3(x+a) = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$$
$$(x+a)^5 = (x+a)^4(x+a) = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5$$

. . . .

$$(x+a)^n = (x+a)^{n-1}(x+a) = x^n + B_n^{(1)} ax^{n-1} + B_n^{(2)} a^2 x^{n-2} + \ldots + B_n^{(n-1)} a^{(n-1)} x + B_n^{(n)} a^n$$
$$(x+a)^{n+1} = (x+a)^n (x+a) = x^{n+1} + B_{n+1}^{(1)} ax^n + B_{n+1}^{(2)} a^2 x^{n-1} + \ldots + B_{n+1}^{(n-1)} a^{n-1} x^2 + B_{n+1}^{(n)} a^n x + B_{n+1}^{(n+1)} a^{n+1}.$$

Здесь символы $B_n^{(1)}, B_n^{(2)}, \ldots$ являются просто условными обозначениями последовательных коэффициентов разложения, и задача заключается в том, чтобы найти закон их составления. Ещё Штифель заметил, что

$$B_n^{(k)} = B_n^{(n-k)}, \quad B_{n+1}^{(k)} = B_n^{(k)} + B_n^{(k+1)}, \quad (3)$$

а в силу этого коэффициенты разложения $(x+a)^{n+1}$ легко получаются из коэффициентов разложения $(x+a)^n$. Ньютон пошёл дальше, указав связь между двумя последовательными коэффициентами разложения $(x+a)^n$, выражаемую формулой

$$B_n^{(k+1)} = B_n^k \cdot \frac{n-k}{k+1}. \quad (4)$$

Вполне возможно и весьма поучительно дать самим учащимся переоткрыть соотношения (3) и (4), поставив им две соответствующие задачи.

Рано или поздно бросится в глаза связь между биномиальными коэффициентами $B_n^{(k)}$ и ранее изученными числами сочетаний $C_n^{(k)}$. Интригующий вопрос о том, почему здесь появились числа сочетаний, которые, казалось бы, никакого отношения к степеням бинома не имеют, находит полное своё разрешение на том пути, каким идёт изложение вопроса о биноме Ньютона в учебнике Киселёва, в котором сперва рассматривается произведение $(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)$ с тем, чтобы затем положить $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$ и перейти к степени $(x+a)^n$. Убеждаясь, что $B_n^{(k)} = C_n^{(k)}$, приходим к формулам (1) и (2).

Каким бы путём мы ни пришли к этим формулам, необходимо провести доказательство их общности (для любого натурального n) по методу совершенной индукции. Допустив, что формула (1) верна для какого-либо значения n, убеждаемся, что она верна и для $n' = n+1$, вычисляя $(x+a)^{n+1}$ как произведение $(x+a)^n \cdot (x+a)$ и используя второе свойство сочетаний. Но формула (1), очевидно, верна при $n = 1$, следовательно, она верна и для $n = 1+1 = 2$, но раз она верна при $n = 2$, значит, она верна и при $n = 2+1 = 3$ и т. д. без конца. Надо добиться, чтобы учащиеся хорошо поняли этот замечательный метод доказательства и прочно его усвоили, хотя бы на этом простом примере.

Отметим ещё, что изучение бинома Ньютона легче, чем многие другие разделы, можно провести с широким применением эвристического метода, доставляя учащимся возможность несколько раз пережить радость открытия, стоит только надлежащим образом ставить вопросы. Например, не указывая в готовом виде свойства суммы биномиальных коэффициентов, достаточно предложить фактически найти эту сумму для $n = 1, 2, 3, 4$ и т. д., и открытие формулы $\sum_{k=1}^{n} C_n^{(k)} = 2^n$ обеспечено, так что учителю останется только помочь найти доказательство общности этой формулы, указав на возможность равенства $x = a = 1$ в формуле (1).

Дальнейшее развитие формулы бинома Ньютона с переходом к целым отрицательным и дробным показателям представляет собой прекрасный материал для углублённой кружковой работы. Здесь мы имеем переход от конечных многочленов к бесконечным рядам, и можно рекомендовать в первую очередь использовать книгу [III, 30а].

Упражнения, приведённые в стабильном задачнике на бином Ньютона, весьма немногочисленны и однообразны. Крайне желательно их пополнение, с одной стороны, вопросами теоретического характера, как, например, доказательством «малой теоремы Ферма», утверждающей, что при любом натуральном числе a и любом простом показателе p разность $a^p - a$ делится на p, а с другой стороны, выяснением применимости формулы бинома Ньютона к приближённым вычислениям (несколько задач этого рода имеется в стабильном руководстве Киселёва).

СПИСОК КНИГ И СТАТЕЙ ПО ВОПРОСАМ, ОТНОСЯЩИМСЯ К 3-й ЧАСТИ.

1. Абельсон И. Б., Рождение логарифмов, Огиз, Гостехиздат, 1948.

2. Александров П. С. и Колмогоров А. Н., а) Алгебра. Пособие для средних школ, ч. I, Учпедгиз, 1940; б) Свойства неравенств и понятие о приближённых вычислениях, «Математика в школе», 1941, № 2; в) Иррациональные числа, «Математика в школе», 1941, № 3.

3. Александров П. С. Научное содержание школьного курса алгебры, «Математика в школе», 1946, № 4—6.

4. Арнольд И. В. а) Теория чисел, Учпедгиз, 1939; б) Отрицательные числа в курсе алгебры, изд. АПН РСФСР, 1947.

5. Барсуков А. Н., Уравнения 1-й степени в средней школе, Учпедгиз, 1952.

6. Бем Д. А., Волков А. А., Струве Р. Э., Сборник упражнений и задач по элементарному курсу алгебры, ч. 1 и 2, 1916.

7. Бернштейн С. Н., Понятие функции в средней школе. Доклады, читанные на Всероссийском съезде преподавателей математики в Москве. Москва, 1915.

8. Бондарёв А. Л., Несобственные корни уравнений, «Математика в школе», 1949, № 1.

9. Бертран Жозеф, Алгебра, ч. 1 и 2. Перевод с французского М. В. Пирожкова. 1908.

10. Бронштейн С. С., Методика алгебры. Пособие для высших педагогических учебных заведений и преподавателей средней школы, Учпедгиз, 1937.

11. Брусиловский Г. К., Курс математики для индустриальных техникумов, ч. 1 и 2. ГТТИ, 1933.

12. Бычков Ф., Сборник примеров и задач, относящихся к курсу элементарной алгебры. Ряд изданий в конце XIX и начале XX в.

13. Вега Георг, Логарифмическо-тригонометрическое руководство, Горное издательство НКТП. В издании 1932 г. искажена фамилия автора — напечатано Вег вместо Вега.

14. Вилейтнер, Хрестоматия по истории математики, вып. 1. Арифметика и алгебра. Перевод П. С. Юшкевича, ГТТИ, 1932.

15. Гибш И. А., а) Источники приобретения и потери корней при решении уравнений, «Математика в школе», 1947, № 6; б) Исследование решений задач с параметрическими данными, изд. АПН, 1952.

16. Гнеденко Б. В. и Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей, Огиз, Гостехиздат, 1946.

17. Гончаров Б. Л., а) Арифметические упражнения и функциональная пропедевтика, изд. АПН РСФСР, 1947; б) Вычислительные и графические упражнения с функциональным содержанием, изд АПН РСФСР, 1948; в) Алгебра для семилетней школы. Часть I, для VI класса. Учебный материал для опытной проверки, АПН, 1949.

18. Давидов А. Ю., Начальная алгебра. Первое издание в 1865 г., переизданная вплоть до 1923 г.

19. Зетель С. И., Задачи на максимум и минимум, Огиз, Гостехиздат, 1948.

19а. Истомина Н. С., Планы уроков по алгебре в VI классе, Учпедгиз, 1953

20. Каган В. Ф., Что такое алгебра? изд. «Матезис», 1910.

21. Кашин Н. И., О решении неравенств второй степени и исследовании квадратного трёхчлена, «Математика в школе», 1946, № 3.

22. Колмогоров А. Н., Алгебра в средней школе. Статья в Большой советской энциклопедии, т. 2, изд 2.

23. Коровкин П. П., Неравенства, ГТТИ, 1951. Серия «Популярные лекции по математике», вып. 5.

24. Кречмар В. А., Задачник по алгебре, изд. 2, ГТТИ, 1950.

25. Крыжановский Д. А., Элементы теории неравенств, ОНТИ НКТП, 1936.

26. Кузьмин Р. О. и Фадеев Д. К., Арифметика и алгебра комплексных чисел, Учпедгиз, 1939.

27. Ларичев П. М., Сборник задач по алгебре, ч. 1 и 2, Учпедгиз, 1952.

28. Лебединцев К. Ф., а) Курс алгебры для средних учебных заведений, ч. 1 и 2, изд. «Сотрудник», 1913; б) Концентрическое руководство алгебры для средних учебных заведений, ч. 1, изд. «Сотрудник», 1916.

29. Ляпин С. Е., Задачи на доказательство по алгебре, Ленинградский гос. пединститут имени А. И. Герцена, «Учёные записки», т. 75, 1948 г.

30. Маркушевич А. И., а) Ряды, изд. 2-е, Гостехиздат, 1947; б) Понятие функции, «Математика в школе», 1947, № 4; в) Символ бесконечности и его употребление в математике, «Математика в школе», 1948, № 1; г) Действительные числа и основные принципы теории пределов, изд. АПН, 1948; д) Деление с остатком в арифметике и в алгебре, изд. АПН, 1948.

31. Матышук В. К., Учение об иррациональном числе в средней школе, «Математика в школе», 1947, № 5.

32. Межировский Я., Неравенства в средней школе, «Математика в школе», 1937, № 6.

33. Новосёлов С. И., а) Алгебра (из серии «Элементарная математика для учительских институтов»), Учпедгиз, 1947; б) Учение о функциях в средней школе, «Математика в школе», 1946, № 5—6; в) Специальный курс элементарной алгебры, изд. «Советская наука», 1951.

34. Невяжский Г. Л., Неравенства. Пособие для учителей. Учпедгиз, 1947.

35. Обер и Папелье, Упражнения по элементарной алгебре, Учпедгиз, 1941.

36. Панов Д. Ю., Счётная линейка, Огиз, Гостехиздат, 1946.

37. Погорелов А. И., Сборник задач по алгебре, Учпедгиз, 1949. Учебное пособие для учительских институтов.

38. Проскуряков И. В., Числа и многочлены, изд. АПН РСФСР, 1949.

39. Романовский В. И., Элементарный курс математической статистики, Гостехиздат, 1939.

40. Фаддеев Д. К. и Соминский И. С., Алгебра, ч. 1. Пособие для учителей семилетней школы, Учпедгиз, 1951.

41. Субботин М. Ф., Многозначные таблицы логарифмов, изд. Академии наук СССР, 1940.

42. Чистяков И. И., Методика алгебры, Учпедгиз, 1934.

43. Шмидт О. Ю. и Курош А. Г., Алгебра. Статья в т. II Большой советской энциклопедии (изд. 2).

44. Эйлер, Л., Универсальная арифметика, т. I и II, Петербург, 1768—1769 гг.

Часть четвёртая

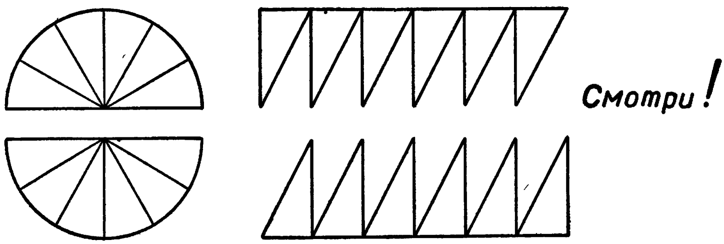
МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

Глава I

ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ ОБ ИЗУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

§ 1. Три стадии в развитии науки геометрии.

Первая стадия развития геометрической науки характеризуется накоплением отдельных фактов, имеющих преимущественно непосредственное значение для бытовых и государственных потребностей, прежде всего для измерения длин, площадей, объёмов, и первыми попытками установления связей между отдельными фактами. Это накопление фактов шло, как можно думать, везде, где росла человеческая культура, но более определённые исторические сведения о нём мы имеем по трём странам: Вавилону, Египту, Индии. Вот отрывок одного из первых сочинений по истории математики, приписываемый Эвдему Родосскому (IV — III вв. до н. э.): «Так как нам необходимо здесь обозреть начало наук и искусств, то мы сообщаем, что геометрия, по свидетельству весьма многих, была открыта египтянами и возникла при измерении земли. Это измерение было им необходимо вследствие разлива реки Нила, постоянно смывавшего границы. Нет ничего удивительного в том, что эта наука, как и другие, возникла из потребностей человека» (см. [IV, 34б]). Египтяне установили много практических правил, частью точных, как, например, построение прямого угла с помощью треугольника со сторонами 3, 4, 5, частью только приближённых, как вычисление площади круга через вычисления площади квадрата со стороной, равной $\frac{8}{9}$ диаметра круга, что даёт для площади круга значение $\frac{256}{81}r^2 = 3{,}1604\ldots r^2$ вместо точного $3{,}1415\ldots r^2$. Правильность заключений устанавливалась опытным (индуктивным) путём, через наблюдения и измерения, логические доказательства отсутствовали, но уже на этой стадии развития геометрии появлялись попытки установить связи между отдельными геометрическими фактами, строить одни правила на основании других, ранее установленных. Так, например, у одного из индусских математиков имеется утверждение, что площадь круга равна половине произведения длины окружности на радиус, сопровождаемое чертежом, изображённым на фигуре 17, и указанием «смотри!» Тем самым более трудная задача вычисления площади круга сводилась к более лёгкой — к вычислению длины окружности, а эту последнюю индусы умели решать с большой точностью: они знали, что всякая окружность длиннее своего поперечника приблизительно в 3 927 : 1 250 = 3,1416 раза. Здесь ещё нет логического доказательства, позволяющего выводить новые факты из установленных ранее предложений, но всё же индусский математик поднимается выше непосредственной проверки измерением, всегда по необходимости приближённой, обращаясь к интуиции, к способности человеческого ума во многих



Фиг. 17.

случаях усматривать истину непосредственно, без логического анализа, проводить эксперимент, так сказать, в уме. В данном случае секторы, получаемые разрезанием полукругов, отличаются от показанных рядом зубцов пилообразных фигур, но очевидно, что различие становится всё менее и менее заметным при увеличении числа секторов и сходит на нет при неограниченном его росте.

Эту первую стадию развития геометрии — накопление отдельных фактов и первые попытки устанавливать связи между ними — можно найти во многих странах, но только в Греции VI—III вв. до н. э. она переросла во вторую стадию, характеризуемую систематизацией всего накопленного материала.

Понятия (за исключением немногих основных) приобрели чёткость, обеспеченную надлежащими определениями, выделились предложения, истинность которых не вызывала сомнений и подтверждалась повседневным опытом (аксиомы), найдены были пути логического вывода на основании этих аксиом других предложений геометрии (теорем).

Эту вторую стадию развития геометрии можно назвать «евклидовской» по имени автора «Начал», александрийского учёного III в. до н. э. Евклида. Не останавливаясь на характеристике «Начал», которая даётся с достаточной полнотой в курсе «Основания геометрии», рекомендуем читателю изучение «Начал» как классического сочинения, оказавшего огромное влияние и на развитие науки и на преподавание геометрии [IV, 34].

Третью, современную стадию развития геометрии следует называть по имени нашего гениального соотечественника Н. И. Лобачевского, установившего, что изучение пространственных форм и отношений реального мира приводит не только к единственно известной до него геометрии Евклида и связанному с ней понятию евклидова пространства, но и к другим геометриям и другим понятиям пространства и прежде всего к геометрии и понятию пространства, получившим впоследствии имя геометрии и пространства Лобачевского.

С жизнью, деятельностью и идеями Лобачевского можно познакомиться по книгам [IV, 4, 34а]. Полное собрание его сочинений в пяти томах издаётся Государственным издательством технико-теоретической литературы.

Из них геометрии посвящены первые три тома [IV, 42]. Со времени открытий Лобачевского развитие геометрической науки происходило как развитие различных геометрий, к изучению которых приводили проблемы математики и физики. Это развитие потребовало точного выявления основных принципов каждой геометрической дисциплины, аксиоматического построения каждой из них. При этом, в частности, окончательно выяснилось, что изложение геометрии, содержащееся в «Началах» Евклида, не удовлетворяет требованиям аксиоматического построения. В настоящее время принципы такого построения полностью выявлены. Изложение геометрии в виде, более или менее удовлетворяющем этим требованиям, содержат книги [IV, 34в,18] и отчасти [IV, 48]. Первая из них, однако, очень трудна для понимания, так как берёт вопрос в чрезвычайно общей форме (геометрия n измерений), вторая более доступна, но содержит лишь принципиальную сторону без разработки деталей. Наиболее доступна книга [IV, 48]. Систему основных понятий и аксиом в указанных сочинениях удаётся свести к очень небольшому числу; так, у Д. Гильберта [IV, 18] имеется всего 20 аксиом и 8 основных понятий, а именно: понятия точки, прямой, плоскости, инцидентности точки и прямой, инцидентности точки и плоскости, понятия «между», понятия конгруентности отрезков и конгруентности углов. Многие предложения, принимаемые при обычном изложении без доказательства, в силу их простоты и очевидной истинности, при аксиоматическом изложении доказываются посредством весьма длинных и трудных рассуждений. Такова, например, теорема о том, что окружность, имеющая центр на другой окружности и проходящая через её центр, имеет с ней две общие точки. У Евклида этого предложения нет ни в системе аксиом, ни среди теорем, но он им пользуется при доказательстве уже первой своей теоремы, утверждающей возможность построения равностороннего треугольника на любом данном отрезке. При аксиоматическом изложении это предложение доказывается со ссылкой, кроме всего прочего, на аксиому непрерывности; действительно, если бы окружность не обладала непрерывностью, общих точек у двух окружностей, расположенных указанным образом, могло бы и не быть.

Попытка популярного аксиоматического изложения одномерной геометрии Евклида имеется в статье [IV, 12]. Аксиоматическое изложение всей геометрии Евклида, предназначенное для учителя средней школы, содержит книга [IV, 13].

В трёх стадиях своего развития геометрия носит существенно различные черты. В первой стадии она является наукой преимущественно экспериментальной, мало отличающейся по своему методу от физики или астрономии. Во второй стадии экспериментальная база геометрии существенно суживается; вместо построений и измерений на первый план выдвигается логическое рассуждение, нередко, однако, обращающееся к интуиции, к «очевидным» свойствам геометрических образов, например, к тому, что всякая замкнутая и не пересекающая себя линия, начерченная на плоскости, делит плоскость на две области, внутреннюю и внешнюю; анализ тех свойств основных понятий, на которых основываются все заключения, проведён ещё далеко не полностью. В третьей стадии, вновь расширяющей свою экспериментальную базу и находящейся в тесной связи с успехами физики и астрономии, наряду с евклидовой геометрией появляются и другие; число аксиом в каждой из них доводится до минимума, и в списке аксиом оставляются только те, относительно которых доказано, что они действительно недоказуемы с помощью других аксиом. Все остальные предложения доказываются на основе аксиом и ранее доказанных теорем, при доказательствах никакого обращения к интуиции, к очевидности не допускается. Такие понятия, как «внутри», «вне», «между», «по одну сторону», «по разные стороны» и т. д., уже не считаются понятными каждому и не требующими пояснений: некоторые из них вносятся в список основных понятий, как, например, понятие «между», причём содержание этого понятия раскрывается с помощью специальных аксиом, а другие определяются с помощью уже имеющихся понятий, основных и определяемых.

§ 2. Цели изучения геометрии в средней школе.

Основная цель изучения геометрии в школе — овладение основами этой науки. Но какую из трёх указанных выше стадий развития геометрии должна иметь в виду средняя школа? Очень желательно было бы провозгласить целью изучения геометрии в средней школе овладение этой наукой в её высшей, наиболее совершенной форме, овладение аксиоматической геометрией. Однако её сложность и недостаточная в настоящее время разработанность делают это невозможным; «переносить в преподавание элементарной геометрии аксиоматику Гильберта и аксиоматический метод в прямом виде было бы безумием» (см. [IV, 21, § 14]). Было бы в высшей степени интересно и поучительно попробовать разработать в духе аксиоматического метода какой-либо небольшой раздел геометрии с целью изучения его в X классе, чтобы учащиеся получили на конкретном материале представление об этом методе, но до сих пор таких попыток ещё не было. Нет никакого сомнения, что предметом изучения геометрии в средней школе должна быть геометрия во второй, евклидовской стадии своего развития, но и её усвоение встречает серьёзные трудности. Начинающие должны прежде всего хорошо освоиться с большим количеством геометрических фактов, приобрести ясное представление о важнейших геометрических образах, овладеть соответствующей терминологией. Только после такой предварительной работы в духе первой стадии развития геометрии может плодотворно идти работа по изучению геометрии в её второй (евклидовской) стадии; отсюда признание необходимости пропедевтического курса наглядной геометрии, предшествующего основному (систематическому) её курсу. Действующие в настоящее время учебные планы такого курса не предусматривают, но программа курса арифметики содержит ряд разделов, относящихся к геометрии. В начальной школе должны изучаться меры длины, измерение прямолинейного отрезка и ломаной, углы прямой, острый, тупой и их построение, параллельные прямые и их построение с помощью линейки и угольника, прямоугольник и квадрат, меры площади, прямоугольный параллелепипед и куб, меры объёма. Программа арифметики для V класса содержит следующие пункты, относящиеся к геометрии: «решение задач на вычисление периметров простейших фигур, на вычисление площади квадрата и прямоугольника; задачи на вычисление объёма куба и прямоугольного параллелепипеда»; «вычисление поверхности куба и прямоугольного параллелепипеда; площадь параллелограма и треугольника»; вычисление длины окружности, площади круга, поверхности и объёма цилиндра». Изучив весь этот материал в духе первой стадии развития геометрии, а именно на основе наблюдения и измерений, учащиеся при правильной постановке дела получают уже потребность в дальнейшей логической обработке этого материала и достаточно подготовлены к этой обработке. Существенное значение имеет и другая сторона дела. В основном (систематическом) курсе геометрии многие практически важные вопросы, как, например, измерение площадей, объёмов, вычисление длины окружности по необходимости отнесены очень далеко (например, площади — в программу VIII класса), и та молодёжь, которая после окончания семилетней школы идёт на практическую работу, этих вопросов не изучает. Поэтому особенно важно обеспечить полноценные знания и навыки по тем вопросам пропедевтического курса геометрии, какие предусмотрены программой начальной школы и V класса.

Наряду с образовательной целью, заключающейся в усвоении фактического материала основного курса геометрии и того метода его логического развёртывания, какой характерен для евклидовской стадии развития геометрии, изучение геометрии преследует и воспитательную цель, развивая логические навыки учащихся и их пространственное воображение. Правильно рассуждать они учатся на занятиях любым предметом учебного плана, но ни в одной другой дисциплине рассуждения не занимают столь большого и видного места, как в геометрии. Изучая геометрию, учащиеся приучаются правильно давать определения, правильно классифицировать понятия, различать условия и заключение в каждом предложении, различать предложение прямое, обратное, противоположное, понимать их взаимную зависимость, устанавливать условия необходимые и достаточные, пользоваться различными методами доказательства и т. д.

Однако господство логики при изучении геометрии в евклидовской стадии её развития далеко не безраздельно. В отличие от аксиоматического изложения, где наглядные образы не имеют значения, здесь каждое рассуждение ведётся на наглядном геометрическом образе, и в ходе занятий по геометрии учащиеся развивают способность представления всё более и более сложных геометрических объектов. На первых порах учащиеся воспроизводят эти образы в виде чертежей и моделей, приучаясь мысленно совершенствовать эти чертежи и модели, переходя к точкам без протяжения, к линиям без ширины, к поверхностям без толщины и т. п. В дальнейшем способность такого «умственного зрения» всё крепнет, потребность в чертеже и модели уменьшается, постепенно вырабатывается уменье ясно и во всех деталях представлять себе более сложные геометрические образы, удовлетворяющие указанным условиям. Это уменье представляет собой огромную ценность при изучении механики, астрономии, физики, большинства технических дисциплин, а в связи с этим развитие пространственного воображения всегда считалось одной из важнейших целей изучения геометрии в средней школе.

Овладевая теоретическим содержанием геометрической науки, учащиеся должны видеть и практические её приложения, упражняясь в их осуществлении на протяжении всего курса. Этим обеспечивается и лучшее овладение многими деталями, и повышение интереса к работе.

«Объяснительная записка» к действующей ныне программе математики для средней школы говорит: «Преподавание геометрии имеет целью систематическое изучение свойств фигур на плоскости и в пространстве и применения этих свойств к решению задач вычислительного и конструктивного характера, развитие у учащихся логического мышления и умения применять полученные знания к выполнению практических работ: измерения на местности, определение поверхности и объёма различных сооружений, простейшие измерения, применяемые в топографии, и т. д.».

В гармоничном развитии этих трёх сторон дела: развития пространственного воображения, развития логического мышления, выработки навыка в практических приложениях — и заключается залог успеха занятий по геометрии.

Для успеха работы в VI классе весьма важно, чтобы учащиеся действительно владели теми небольшими геометрическими знаниями и навыками, какие предусмотрены программой арифметики. Начиная занятия по геометрии в VI классе, надо проверить наличность этих знаний и навыков и пополнить их, если в них окажутся недочёты. Время, какое на это потребуется, будет с избытком возмещено в дальнейшем, благодаря лучшему усвоению логической стороны курса.

§ 3. Содержание школьного курса геометрии.

Изучение геометрической теории сводится к изучению свойств ряда пространственных образов, начиная с простейших — точки, прямой, отрезка и т. д. Указывая эти образы в вещах окружающей нас действительности, создавая более или менее точные приближения к ним в виде чертежей и моделей, учитель добивается ярких и чётких представлений, выясняя, какой процесс абстрагирования, отвлечения от некоторых свойств этих вещей, чертежей и моделей надо выполнить, чтобы получить настоящие геометрические образы. Наряду с выработкой этих наглядных представлений об объектах геометрии идёт и раскрытие содержания соответствующих понятий, для основных понятий через рассмотрение аксиом, которые являются косвенным определением этих основных понятий, для всех остальных — через определения. Представление о прямой даёт туго натянутая тонкая нить, или луч света, проходящий через малое отверстие, или линия сгиба сложенного вдвое листа бумаги; представление о точке — остриё иглы, или карандаша, или тот след, какой остаётся на бумаге, если к ней этим остриём прикоснуться. При этом необходимо выяснять тот предельный переход, посредством которого эти приближения превращаются в точные геометрические объекты. Приобретению правильного представления о геометрической прямой и точке очень поможет разбор таких аксиом, как об определяемости прямой двумя точками и о возможности неограниченного продолжения прямой в любую сторону. Определения всех основных понятий должны удовлетворять требованиям, о которых была речь выше, в § 5 1-й части. Самое главное — добиться того, чтобы каждый учащийся давал себе отчёт в точном смысле каждого употреблённого им термина, чтобы он умел и правильно формулировать определение, и привести на него примеры, а также указать объекты, похожие на определяемый, но в каком-либо отношении от него отличающиеся.

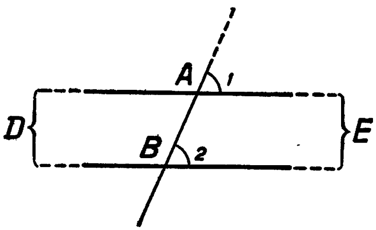
Параллельно изучению геометрических понятий идёт ознакомление с геометрическими предложениями, аксиомами и теоремами, устанавливающими свойства этих понятий. Нередко бывает, что ученик пытается понять доказательство или, что ещё хуже, выучить его, не представляя ясно, в чём состоит содержание изучаемого предложения. Надо прежде всего обеспечить правильное понимание каждого предложения, уменье различать в нём условие и заключение, понимание необходимости всех сделанных в нём оговорок.

Понимание значения данного предложения для тех или иных практических целей обычно обеспечивается решением задач, которыми занимаются после полного его изучения, т. е. после изучения его доказательства, но иногда желательно начать именно с решения таких задач, откладывая логическое доказательство, которое тогда разрешает сомнения, возникающие у учащихся в ходе решения этих задач. Понимание практической ценности некоторого геометрического свойства, как показывает опыт, существенно улучшает качество усвоения предложения, выражающего это свойство, а в силу этого облегчает и изучение логического доказательства. Пусть, например, на очереди изучение теоремы о равенстве треугольников по трём сторонам. Если предложить ученикам, используя имеющиеся у них сантиметровые линейки и циркули, построить (дома) по треугольнику со сторонами 5, 6, 7 *см* и по четырёхугольнику со сторонами 5, 6, 7, 8 *см* и вырезать их из бумаги или картона, а по приходе в класс сравнить свои фигуры с теми, какие принесут товарищи, то внимание учащихся будет привлечено к факту однозначной определяемости треугольника его тремя сторонами и отсутствия этого свойства у четырёхугольника, а потому и логическое доказательство пройдёт лучше. Ясность представлений ещё выиграет, если показать модели треугольника и четырёхугольника из шарнирно соединённых стержней.

Когда содержание геометрического предложения вполне осознано, приступают, если только это предложение не входит в число аксиом, к его логическому (дедуктивному) доказательству. Очень хорошо, если умело поставленными вопросами учитель породил сомнение в полной правильности этого предложения. Например, желая доказать теорему о параллельности двух прямых в случае, когда равны соответственные углы, образуемые этими прямыми с какой-нибудь секущей, и начав с напоминания способа построения параллельных прямых посредством линейки и угольника, способа, которым учащиеся должны были овладеть ещё в начальной школе (а если не овладели, то этот способ надо показать теперь), формулируем теорему и ставим вопрос, можно ли ручаться на основании наших чертежей, что эти две прямые действительно никогда не пересекутся, сколько бы мы их ни продолжали. Ведь продолжать прямые можно и на метр, и на километр и на сто миллионов километров; можно ли быть уверенным, что они действительно никогда не пересекутся? Уместно рассмотреть две прямые линии, образуемые пересечением передней стены классной комнаты с двумя боковыми её стенами. Стены выводятся по отвесу, эти прямые отвесны (или вертикальны). Параллельны ли они? По первому впечатлению все дают обычно утвердительный ответ, от которого приходится отказаться, когда будет выяснен точный смысл слова «вертикальная прямая»: это прямая, проходящая через центр земли, а поэтому все вертикальные прямые пересекаются.

Здесь необходимо подчеркнуть, что речь идёт об абсолютно точных (идеализированных) вертикальных прямых: если эти прямые действительно вертикальны, т. е. действительно проходят через центр земли, то они, разумеется, не параллельны.

Возбудив потребность в доказательстве, её удовлетворяют, проводя его со всеми необходимыми ссылками на аксиомы и ранее доказанные теоремы, а также вспоминая определения тех терминов, которыми приходится пользоваться. О методах доказательства было достаточно сказано выше в § 7 1-й части. Отметим только ту большую помощь, какую даёт начинающим расчленение более или менее длинного рассуждения на отдельные пункты («шаги»), которые легко провести при оформлении разобранного доказательства для записи в тетради. Вот примерно та запись, какая получается при расчленении доказательства только что упомянутой теоремы о признаке параллельности. Запись приводится очень подробная, возможно её сокращение.



Фиг. 18.

Условия: 1) прямые a и b пересечены в точках A и B прямой c (фиг. 18); 2) соответственные углы 1 и 2 равны друг другу.

Заключение: прямые a и b параллельны.

Доказательство:

1. Допускаем, что a не $\parallel b$; тогда a пересекает b либо в точке E справа, либо в точке D слева (по определению: две прямые параллельны, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются, сколько бы их ни продолжали).

2. Предположив, что пересечение a и b произошло справа, в точке E, получаем $\triangle ABE$, в котором $\angle 2$ является одним из внутренних, $\angle 1$ — внешним, не смежным с этим внутренним.

3. $\angle 1 > \angle 2$ (по теореме: внешний угол...).

4. Заключение пункта 3 противоречит условию, что $\angle 1 = \angle 2$; это противоречие доказывает неправильность сделанного предположения о пересечении прямых a и b в точке E.

5. Предположив, что пересечение a и b произошло слева, в точке D, убеждаемся, что и это приводит к противоречию с условием.

6. Так как a не может, таким образом, пересечь b и находится с b в одной плоскости, то $a \parallel b$.

Содержание школьного курса геометрии отнюдь не исчерпывается её определениями, аксиомами, теоремами; по этому курсу должно быть решено много разнообразных задач трёх основных видов: задач на вычисление, на построение, на доказательство. Изучение геометрии бывает полноценным лишь при условии, что решению задач уделяется достаточно внимания при изучении любого раздела курса, но в практике преподавания, к сожалению, геометрическими задачами учащиеся занимаются обычно много меньше, чем задачами арифметики, алгебры, тригонометрии. Учитель нередко говорит, что всё или почти всё время, отведённое на изучение геометрии, уходит на изучение теоретической стороны, а на решение задач времени нехватает. При нормальном же ходе работы на решение задач должно отводиться от трети до половины времени, затрачиваемого на изучение геометрии.

Задачи на вычисление являются в большинстве случаев задачами арифметики и алгебры, построенными на геометрическом материале; их нельзя недооценивать, но они в сущности больше принадлежат этим двум дисциплинам, чем геометрии, и позволяют закреплять навыки в арифметических выкладках (приближённые вычисления!), в тождественных преобразованиях алгебраических выражений, в составлении и решении уравнений. Роль геометрии обычно сводится к тому, что она доставляет необходимые для решения задач формулы, но рассмотрение чертежа, выяснение данных и искомых элементов, вспоминание относящихся сюда теорем, проведение вспомогательных линий — всё это, конечно, существенно способствует лучшему уяснению и более прочному запоминанию геометрического материала.

Задачи на построение полностью принадлежат геометрии. В них весьма ценное сочетание наглядных геометрических образов, притом осуществляемых с помощью построения чертежа самими учащимися, и логического рассуждения, которое не запоминается в готовом виде, как это бывает при изучении теорем, а проводится самими учащимися. Задачи на построение должны даваться на протяжении всего курса геометрии, и надо во что бы то ни стало добиться овладения искусством самостоятельного решения таких задач, оказывая должное внимание всем четырём частям решения: анализу, т. е. поискам пути решения; построению, фактически выполняемому с помощью чертёжных инструментов; доказательству того, что построенная фигура действительно удовлетворяет всем поставленным в задаче требованиям: исследованию всех случаев, какие могут представиться при решении. Занимаясь решением задач на построение, даже более лёгких, учащиеся переходят от изучения готового материала и простейших его приложений к самостоятельной работе, носящей черты математического творчества, что делает гораздо более продуктивным дальнейшее усвоение курса. Большую пользу приносит решение одной и той же задачи и вычислительным, и построительным методами с выявлением преимуществ и недостатков каждого, и в последующем изложении мы рассмотрим несколько примеров такого двоякого решения одной и той же задачи.

Задачи на доказательство в школьной практике используются, к сожалению, ещё меньше, чем задачи на построение. Но только они позволяют перейти от заучивания готовых доказательств к пониманию методов доказательства и к уменью применять эти методы. Учащиеся, умеющие решать хотя бы несложные задачи на доказательство, не нуждаются уже в запоминании всех деталей данных в учебнике доказательств теорем: запомнив идею доказательства, его «ключ», характеризуемый одной-двумя фразами, они проводят доказательство, самостоятельно догадываясь об его деталях.

Особое место занимают задачи на разыскание геометрических мест, весьма развивающие и способность наглядного представления, и уменье логически рассуждать: решая их, надо догадаться, как располагаются все точки, обладающие указанным свойством, какую фигуру они образуют, а затем провести доказательство, во-первых, того, что все точки этой фигуры действительно имеют это свойство, и во-вторых, что ни одна точка, не принадлежащая ей, этим свойством не обладает. Задачи на разыскание геометрических мест являются в сущности задачами на доказательство, имеющими ту особенность, что подлежащее доказательству предложение не даётся в готовом виде, его надо найти, а это делает решение задачи ещё более ценным.

§ 4. Наглядность в преподавании геометрии.

Первое знакомство с геометрическими образами естественно основывается на рассматривании вещей, реализующих с бо́льшим или меньшим приближением эти образы, и изучение каждого геометрического объекта в младших классах должно начинаться с показа этого объекта на вещах окружающего нас мира, с показа специальных геометрических пособий, на которых эти объекты особенно удобно наблюдать, с изучения чертежей и моделей, воспроизводящих этот объект. С течением времени у учащихся вырабатывается уменье представлять себе достаточно ясно геометрические объекты, по крайней мере более простые из них, видеть их, так сказать, «умственным взором», вырабатывается уменье правильно судить о свойствах вещей и не имея их перед глазами, постепенно вырабатывается «абстрактное мышление». Наглядность в обучении геометрии имеет первостепенное значение на первых его шагах. Нельзя обеспечить знакомство с кругом, если не обратить внимания детей на круги, которые они видят в классе, на улице, дома, причём этим поискам кругов можно придать увлекательный характер соревнования: кто укажет самый большой круг на вещах, которые мы наблюдаем? самый маленький? Второй шаг в деле знакомства с кругом — его построение различными способами: и обводом дна цилиндрической банки, поставленной на лист бумаги, и вычерчиванием кругов посредством разных суррогатов циркуля, например, куска бечёвки и двух колышков, из которых один забивается в землю, а другой чертит круг на земле, и с помощью настоящего циркуля на бумаге. Чем старше возраст учащихся, тем меньшее значение имеет применение наглядных пособий, тем больше роль абстрактного мышления, но чертежи применяются на всех ступенях работы по геометрии в средней школе, существенно облегчая усвоение каждого вопроса.

К тем общим соображениям о применении принципа наглядности при обучении математике вообще, какие были изложены выше, в § 21 1-й части, добавим ещё следующее.

Общепринятое разделение геометрии на планиметрию и стереометрию, оправдываемое необходимостью изучать сперва более простые, затем более сложные и трудные вопросы, имеет в значительной степени искусственный характер: мы живём в пространстве трёх измерений, и плоскостные (двумерные), а тем более линейные (одномерные) геометрические образы получаются лишь в результате некоторого абстрагирования; говоря, например, о круге, какой представляет собой дно цилиндрической жестянки, мы сосредоточиваем своё внимание только на этом дне, забывая о всей жестянке, хотя оно является частью жестянки; отняв это дно и рассматривая его отдельно, мы опять-таки имеем цилиндр, только очень малой (по сравнению с диаметром) высоты. Этот первичный характер трёхмерных пространственных образов и вторичный характер двумерных плоскостных и одномерных линейных образов наводит на мысль отказаться от искусственного разделения геометрии на планиметрию и стереометрию и изучать обе эти части геометрии слитно. Отсюда целое течение в методике преподавания геометрии — «фузионизм» (от латинского «фузио» — слияние), которое заслуживает внимания во всяком случае для первых шагов изучения геометрии, когда на первый план выдвигается задача обеспечить учащихся большим запасом правильных, ярких, прочно запоминающихся наглядных представлений (см., например, книгу [IV, 38].

Существующая программа математики для средней школы осуществляет фузионизм в том небольшом пропедевтическом курсе геометрии, который включён в курс арифметики начальной школы и V класса средней школы. Так, например, в разделе «Десятичные дроби» (в программе арифметики V класса) мы находим следующий пункт: «Решение задач с геометрическим содержанием: вычисление длины окружности, площади круга, поверхности и объёма цилиндра». Но и в последующие годы, обращаясь к наглядным пособиям, мы должны подчёркивать, что линейные и плоские образы представляют собой результаты абстракции, отвлечения от многих других свойств рассматриваемых тел, и не избегать говорить об этих телах в целом.

Наглядные пособия, изготовляемые самими учащимися, имеют бóльшую ценность, чем готовые покупные, хотя и не заменяют их полностью. В геометрии есть много понятий, легко иллюстрируемых самодельными пособиями. Каждый учащийся должен располагать хорошей линейкой с делениями на сантиметры и миллиметры, но пусть каждый, кроме того, сделает линейку, разделённую на полусантиметры, сгибая кусок клетчатой тетрадной бумаги. Не ограничиваясь определением прямого угла как половины развёрнутого или как угла, равного своему смежному, требуем, чтобы каждый учащийся сам изготовил прямой угол двукратным сгибанием куска бумаги, что, однако, не устраняет необходимости каждому иметь хороший угольник фабричного производства. Труднее изготовить транспортир и циркуль, но и эту работу надо рекомендовать: изготовив более или менее грубо транспортир, хотя бы копированием готового образца, и циркуль в виде бумажной полоски с дырочками, позволяющий вычерчивать окружности некоторых определённых радиусов, учащиеся лучше оценят достоинства приборов фабричного производства и прочнее запомнят всё, к ним относящееся.

Чем больше наглядных пособий, естественных и искусственных, самодельных и покупных, используется в младших классах средней школы с V по VII, тем лучше В дальнейшем значение наглядных пособий постепенно убывает, но в определённых вопросах курса геометрии даже последнего класса средней школы качество усвоения весьма выигрывает при использовании подходящих наглядных пособий, например, моделей многогранников и круглых тел. Чертёж и разного рода измерения сохраняют своё значение во всех классах средней школы.

Особого упоминания заслуживают работы на местности, т. е. работы землемерного (геодезического, топографического) характера. Из них выросла геометрия, они и сейчас имеют первостепенное практическое значение, многие из таких работ могут быть с успехом осуществлены в условиях школьного курса геометрии. О такого рода работах будет идти речь в нескольких параграфах последующего изложения, а пока ограничимся только рекомендацией книги [IV, 26а] и статей [IV, 17, 27], дающих учителю минимум сведений, необходимых для постановки этих работ.

§ 5. Учебная литература по геометрии.

В настоящее время изучение геометрии в наших средних школах идёт по переработанному учебнику А. П. Киселёва, впервые выпущенному в 1882 г. и получившему самое широкое распространение в дореволюционной русской школе. В советской школе учебник Киселёва был временно вытеснен «Систематическим курсом геометрии» Ю. О. Гурвица и Р. В. Гангнуса, но с 1938 г. он был восстановлен. Эти факты говорят о выдающихся достоинствах этого учебника, но всё же он далеко не является совершенным. Для начинающих изучать основной курс геометрии в VI классе он слишком труден, для старших классов недостаточно близок к современным взглядам на возможную и необходимую строгость изложения. Отдельные недочёты учебника, о которых в первую очередь должен знать учитель, будут указаны в соответствующих местах дальнейшего изложения.

Уже при возобновлении изданий учебника Киселёва в 1938 г. было признано, что нашей средней школе нужен новый учебник геометрии, и такой учебник был издан в годы Великой Отечественной войны. Это «Элементарная геометрия» Н. А. Глаголева, выпущенная в двух частях (Планиметрия — для VI—VIII классов, Стереометрия — для IX и X классов). Книга имеет ряд несомненных достоинств, но судить о пригодности её как замены учебника Киселёва ещё нельзя, так как нет достаточного опыта работы по ней. Рецензия на неё была дана в № 1 журнала «Математика в школе» за 1946 г.

Из многочисленных старых учебников геометрии отметим только «Элементарную геометрию» А. Ю. Давидова; эта книга, излагающая геометрию в некоторых отношениях ближе к Евклиду, чем большинство других наших учебников, имела очень широкое распространение в средних школах России в конце XIX и начале XX в. Среди более новых книг особого внимания учителя заслуживают учебники Н. А. Извольского, Ж. Адамара, Д. И. Перепёлкина (см. [IV, 1, 31, 48]). Вторая из них излагает элементарную геометрию с большей полнотой, чем любая другая, и учитель средней школы найдёт там много полезного материала. Последняя книга предназначена для студентов педвузов и представляет собой попытку приблизить изложение геометрии к аксиоматическому, существенно его упрощая отказом от требования независимости системы аксиом.

Школьный учебник геометрии Киселёва, как и другие указанные выше руководства, содержит большое число задач для упражнений, обычно далеко не полностью используемых в школе. Более систематический подбор весьма разнообразных (и по содержанию, и по степени трудности) геометрических задач содержат школьные сборники Рыбкина. В добавление к ним можно рекомендовать книгу [IV, 23], в которой имеется много более трудных, но посильных для учащихся старших классов средней школы геометрических задач на все разделы школьного курса; пользование этой книгой облегчается наличием в ней подробных решений всех задач.

Недавно вышел новый сборник геометрических задач для студентов учительских институтов [IV, 43], почти целиком пригодный для использования в средней школе.

Общий недостаток всех перечисленных сборников геометрических задач — преобладание задач абстрактного характера, полное или почти полное отсутствие в них геометрических задач, действительно возникающих в разных отраслях науки и техники. Геометрические задачи на вычисление, на построение, на разыскание геометрических мест решает и землемер, и штурман, и артиллерист, и астроном, и физик, и рядовой токарь, и строитель зданий или машин и т. д., и в каждой из этих специальностей можно указать немало задач, доступных школьникам при минимуме специальных пояснений. Использование таких задач (без чрезмерного увлечения ими) нужно усиленно рекомендовать: они вносят хорошее оживление, приучают ориентироваться в разнообразной жизненной обстановке, вырабатывают правильное воззрение на геометрию как науку о свойствах реально существующих пространственных форм.

Глава II

ПЕРВЫЕ ШАГИ В ИЗУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ

§ 6. Геометрические сведения и навыки, приобретаемые в начальной школе.

Программа арифметики начальной школы предусматривает довольно значительную работу по геометрии, связанную с изучением метрической системы мер длины, площади, объёма. Учителю математики средней школы надо знать об этой работе, чтобы закреплять её результаты и основываться на них при изучении систематического курса геометрии, а если окажется, что у отдельных учащихся следов этой работы не обнаруживается, то заняться восполнением пробелов. Потраченное на это время с избытком окупается благодаря увеличению запаса простейших геометрических представлений, что даёт возможность быстрее и увереннее двигаться дальше.

С некоторыми мерами длины, а следовательно, и с понятием отрезка (прямолинейного отрезка) дети знакомятся уже в I и II классах. К концу III года они должны уже быть знакомы с 5 употребительными метрическими мерами длины (*мм*, *см*, *дм*, *м*, *км*), должны уметь пользоваться линейкой, разделённой на сантиметры и миллиметры, для проведения прямых, для измерения отрезков, для откладывания отрезков данной длины. Крайне желательно и уменье проводить измерение прямолинейных отрезков на местности (хотя бы шагами с выяснением длины своего шага и с переходом к длине в метрах). Измерение длины разных путей на местности и по карте приводит к знакомству с ломаной линией. В III же классе изучаются квадратные меры, сознательное усвоение которых невозможно без ознакомления с понятиями прямого угла и квадрата. Лучший подход к ним — через складывание бумаги: имея кусок бумаги хотя бы даже неправильной формы, дети должны уметь получить сгибанием прямолинейную сторону, вторым сгибанием — прямой угол, а затем, откладывая на его сторонах равные отрезки заданной длины и производя ещё два сгибания под прямыми углами, получить квадрат заданных размеров. Понятие прямого угла получает полную определённость, если наряду с ним вводятся понятия острого и тупого углов и приобретается навык в употреблении угольника, что также предусмотрено программой III класса. В этом же классе совершенно естественно идёт знакомство с параллельными прямыми, так как две пары параллельных отрезков дети получают уже при построении любого квадрата. Построение параллельных производится с помощью линейки и угольника. Переход к прямоугольнику даётся совсем легко. Умея строить, притом разными способами, квадраты и прямоугольники, учащиеся сознательно усваивают и меры площади, и правило определения площади прямоугольника (со сторонами, длины которых выражаются целыми числами). Постоянное выполнение чертежей, притом не только на клетчатой, но и на любой бумаге с применением линейки и угольника, обеспечивает полную ясность в постановке и решении многочисленных и разнообразных задач на площади прямоугольников, столь важных практически для каждого.

В IV классе переходят к более трудному вопросу — к рассмотрению куба и прямоугольного параллелепипеда («бруса»). Успех усвоения целиком зависит от того, насколько была обеспечена наглядность; имея деревянный куб, а ещё лучше — целый набор их, легко добиться, чтобы дети получили ясные представления о гранях, рёбрах, вершинах куба, научились мысленно разрезать большой куб с ребром, содержащим целое число единиц, на маленькие кубики с рёбрами в одну единицу, сознательно усвоили правила вычисления объёма куба и бруса.

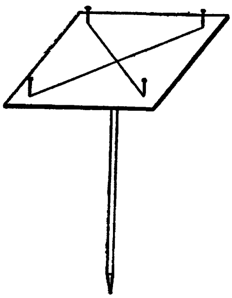
Ученик IV класса, твёрдо усвоивший квадратные и кубические меры, уверенно выполняющий построение фигур, составленных из прямоугольников, свободно решающий обычные задачи на измерение площадей и объёмов, впоследствии несравненно лучше воспринимает первые сведения по систематическому курсу геометрии. Если твёрдого знания квадратных и кубических мер у ученика нет, то возвращение к ним (обязательно вполне наглядное, с надлежащим выяснением всех деталей, с обязательными построениями) приносит весьма ощутительную пользу для занятий геометрией, не говоря уже о непосредственно практической пользе исправления такого важного дефекта предшествующей школьной работы.

Для ознакомления с деталями работы по геометрии в начальной школе рекомендуется прежде всего ознакомление с учебником, в ней применяемым, а также с книгами [IV, 6, 33].

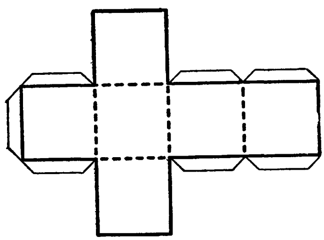
§ 7. Работа по геометрии в V классе.

В действующей программе по арифметике для V класса имеется ряд пунктов, относящихся к геометрии, частью повторяющих материал уже изученный в начальной школе, частью идущих дальше. Отобраны вопросы, имеющие самое широкое применение в быту и нужные поэтому каждому. Все эти вопросы в систематическом курсе геометрии появляются очень поздно, за пределами семилетней школы, и это обстоятельство вынуждает особенно внимательно относиться к ним, занимаясь арифметикой в V классе: для той части молодёжи, которая после окончания семилетней школы пойдёт на практическую работу, эти сведения об измерении площадей и объёмов могут оказаться единственными.

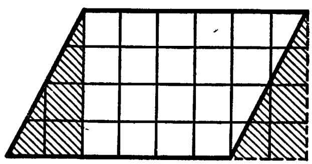
Занятия по арифметике в V классе начинаются с повторения пройденного в начальной школе, причём программа содержит специальные указания о мерах длины, площади, объёма, о решении задач на вычисление периметров простейших фигур, на вычисление площади квадрата и прямоугольника, на вычисление объёма куба и прямоугольного параллелепипеда. Нужно остерегаться того, чтобы это повторение не стало формальным, а следовательно, почти бесполезным. Если ученик знает, что 1 *кв. дм* содержит 100 *кв. см*, но не умеет объяснить, почему это так, не умеет начертить квадрат площадью в 1 *кв. дм* и показать возможность его разрезания на 10 прямоугольных полосок шириной по 1 *см*, каждая из которых разрезается на 10 *кв. см*, то долг учителя — добиться, чтобы все эти недоделки работы начальной школы были исправлены. Эту работу повторения можно сделать интересной, даже увлекательной для детей, если широко применять черчение на клетчатой бумаге (с применением одной линейки) и на любой бумаге (с применением миллиметровой линейки, угольника, желательно также измерительного циркуля), если выполнять такие простейшие работы на местности, как измерение длины, провешивание прямых, разбивка прямоугольных участков, измерение площадей прямоугольных фигур. При работе на местности роль угольника играет простой прибор, так называемый «эккер», легко изготовляемый самими детьми: на квадратном куске фанеры или толстого картона проводятся две взаимно перпендикулярные прямые, указываемые двумя парами булавок (фиг. 19), а через точку пересечения этих прямых пропускается гвоздик, прикрепляющий дощечку к колышку. Этот колышек втыкается в землю в той точке данной прямой, через которую надо провести к ней перпендикуляр. Если одну пару булавок расположить на данной прямой, другая пара укажет направление прямой, ей перпендикулярной. При повторении квадратных мер добиться полной ясности понимания очень легко; труднее, но тоже вполне возможно и совершенно необходимо обеспечить эту ясность при повторении кубических мер. Много помогает использование готового наглядного пособия — кубического дециметра, разрезанного на прямоугольные параллелепипеды размерами $10 \times 10 \times 1$ *см*^{3} («пластинки») и $10 \times 1 \times 1$ *см*^{3} («бруски»), причём по крайней мере один такой брусок должен быть разрезан на кубические сантиметры. Дети сами охотно изготовляют такие модели из подручного материала, вычерчивают и вырезают развёртку (выкройку) куба (фиг. 20) и последующим склеиванием изготовляют куб. Хорошая модель получается при этом только в результате аккуратной работы, и изготовление такой модели может иметь немалое воспитывающее значение.



Фиг. 19.



Фиг. 20.

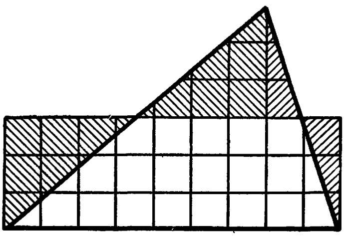


Фиг. 21.

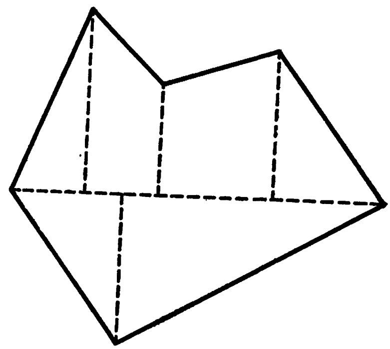
При дальнейшем изучении арифметики в V классе программа предусматривает решение задач на вычисление площади параллелограма и треугольника. Самый естественный в V классе подход к параллелограму лежит через рассмотрение прямоугольного треугольника, который в свою очередь получается разрезанием прямоугольника по диагонали. Отрезая от прямоугольника прямоугольный треугольник, одним катетом которого служит одна из сторон прямоугольника, а другим — часть смежной с ним стороны, и перекладывая надлежащим образом этот треугольник, превращаем прямоугольник в параллелограм (фиг. 21). Это превращение не меняет площади фигуры; ведь в глазах начинающих площадь есть не что иное, как число квадратиков со стороной в 1 *см* (или в какую-либо другую единицу длины), заполняющих фигуру. Отсюда простой вывод правила для вычисления площади параллелограма.

Аналогичным путём выводится и правило вычисления площади треугольника. Из многих возможных способов рекомендуется тот, которому соответствует чертёж, изображённый на фигуре 22.

Умея находить площадь квадрата, прямоугольника, параллелограма и треугольника, мы можем найти и площадь любой плоской фигуры, ограниченной ломаной линией, а также и любой плоской фигуры, если только контур её не очень сложен: каждую кривую линию можно заменить с достаточной для практических целей точностью некоторой ломаной. Уменье найти площадь фигуры, нанесённой на план или указанной на местности, имеет большую практическую ценность, особенно в условиях работы сельской школы, и этим задачам надо уделить достаточно внимания. Рекомендуем следующее упражнение. Из куска толстой бумаги или тонкого картона (например, почтовых открыток) вырезается



Фиг. 22.



Фиг. 23.

несколько равных фигур вроде изображённой в уменьшенном виде на фигуре 23. Каждый ученик воспроизводит эту фигуру у себя в тетради (простым обводом контура) и, разбивая её на подходящие части, что можно сделать разными способами (один из них указан пунктиром), определяет её площадь, сам производя все необходимые измерения. Все полученные ответы сравниваются с тем более точным, который заранее получил учитель, производится поучительный анализ различных использованных способов.

В следующем разделе программы («Десятичные дроби») имеется пункт о вычислении длины окружности, площади круга, объёма цилиндра. Дети знакомятся с употреблением кругового циркуля и с рядом терминов: окружность, центр, поперечник (диаметр), дуга окружности, хорда. Самое важное и трудное — установить опытным путём постоянство отношения длины окружности к её диаметру и убедиться, что оно равно приближенно $\frac{22}{7}$, или 3,14. Вопрос о том, что такое длина окружности, решается здесь на основе наглядного представления об окружности как о гибкой, нерастяжимой нити, которую можно выпрямить; детям предлагается измерить длину какой-либо окружности (посредством тесёмки, бечёвки, полоски бумаги) с точностью до миллиметра, а также длину поперечника взятой окружности. Дети предупреждаются, что желательно брать окружности по возможности большего радиуса; каждый берёт какую-нибудь свою окружность, допускающую подобный обмер: на жестянке из-под консервов, на чашке, на кадке, колесе и т. д. Задачей каждого является вычислить (с точностью до сотых долей), во сколько раз длина взятой им окружности больше длины её поперечника. Обычно получаются результаты от 3,10 до 3,18, причём среднее из большего числа добросовестно проделанных трёх-четырёх десятков результатов почти всегда оказывается равным 3,14. Предупредив, что это число является только приближённым, но отличающимся от точного, лишь начиная с цифры тысячных, и что более точное значение будет рассмотрено значительно позднее в IX классе, учитель предлагает запомнить это число 3,14 или почти равное ему более удобное «архимедово число» $\frac{22}{7}$. Пользуясь им, устанавливают правило для вычисления длины окружности по данному её диаметру и диаметра окружности по данной её длине, причём правила эти записываются и словами, и в виде формул: $C = \pi d$, $d = C : \pi$, $C = 2\pi r$, $r = C : 2\pi$. После этого не вызывает затруднений и вывод правила вычисления площади круга, если основываться на индусском способе разрезания круга на чётное число равных секторов. Программа требует рассмотрения вопроса об объёме цилиндра, что совершенно естественно, так как форма цилиндра очень распространена, и уменье подсчитать объём кружки, банки, круглой силосной башни и т. д. очень ценно. Разумеется, сперва решаются задачи по определению объёма прямоугольного параллелепипеда («бруса») и прямой призмы. Если дети поняли, что всякую прямую призму можно разрезать плоскостями, параллельными её основанию, на одинаковые «пластинки» толщиной в 1 *см*, что каждую такую пластинку можно разрезать на кубические сантиметры, которых выйдет ровно столько, сколько квадратных сантиметров содержит основание призмы, то совершенно естественно получается правило вычисления объёма призмы, а отсюда один шаг и до формулы прямого круглого цилиндра $V = \pi r^2 h$. Подобного рода рассуждения вполне понятны и убедительны для детей 11—12 лет, причём ясность понимания и прочность усвоения очень выигрывают, если расчёт сопровождается опытной проверкой, которую так легко осуществить, не имея никаких специальных пособий. Например, ставится вопрос о том, сколько кружек воды содержит ведро, причём и кружка, и ведро предоставляются в распоряжение детей, выполняющих сперва необходимые измерения миллиметровой линейкой, затем численные выкладки (с применением рационального округления, о котором была речь в § 26 2-й части), и, наконец, проверку фактическим переливанием воды. Чтобы не было толкотни, надо взять несколько пар подходящих цилиндрических сосудов, разбивая класс на звенья по 5—6 человек в каждом, но требуя полной самостоятельности в работе каждого участника; сравниваются лишь окончательные результаты расчёта и опыта. Поразительно, как повышается прочность усвоения математических правил, если проводятся такого рода упражнения в их подлинно практическом применении с проверкой на опыте! Надо только настойчиво и систематически подчёркивать различие двух методов измерения, прямого, или непосредственного (когда, например, ёмкость ведра устанавливается вычерпыванием его кружкой), и косвенного (когда, например, измеряются непосредственно только поперечник и высота ведра, а объём получается по расчёту) и выяснить преимущества последнего. Само собой разумеется, что в V классе не может быть никакого разговора о тех логических трудностях, которые неизбежны при более строгом изложении вопроса о длине окружности, площади круга, объёма цилиндра.

Как часто приходится слышать справедливые упрёки по адресу семилетней школы, которая нередко не обеспечивает оканчивающую её молодёжь самыми примитивными навыками в деле измерения площадей и объёмов! Радикальное улучшение положения возможно лишь при серьёзной перестройке программы геометрии в V — VII классах, но и в рамках существующей программы, уделяя достаточно внимания перечисленным вопросам геометрии в курсе арифметики V класса, учитель может дать много полезных сведений и навыков.

§ 8. Первые уроки геометрии в VI классе. Основные понятия и аксиомы.

Изучение систематического курса геометрии начинается согласно программе с раздела «Введение», на который отводится 10 часов. Здесь приходится различать три составные части: изучение основных понятий, содержание которых раскрывается через аксиомы и наглядные описания, изучение определяемых понятий, изучение нескольких первых теорем с их логическими доказательствами. Рассмотрим каждую из этих трёх частей отдельно.

Напоминаем, что основные понятия геометрии — это те понятия, которые не определяются через сведение их к другим, более общим понятиям. При аксиоматическом изложении их содержание раскрывается только через аксиомы: точками, прямыми, плоскостями являются любые объекты, удовлетворяющие аксиомам геометрии. В школьном же изложении этим основным понятиям придаётся более узкий смысл, с которыми учащиеся знакомятся через надлежащие описания. С них и надо начинать, используя подходящие модели и разъясняя те предельные переходы, какие необходимы, чтобы от грубого приближения перейти к точному образу.

Число основных (неопределяемых) понятий при аксиоматическом изложении геометрии удаётся сделать очень небольшим. В школьном же изложении это их число значительно увеличивается. Прежде всего используется понятие движения любого геометрического образа как твёрдого тела, и это является отнюдь не пороком изложения, а существенно его упрощает, в частности делает определяемыми понятия равенства отрезков и углов. Не определяются, а разъясняются на примерах такие геометрические понятия, как «внутри», «вне», «по одну сторону», «по разные стороны» и многие другие. Уже маленькие дети привыкают в повседневной жизни пользоваться целым рядом геометрических понятий, и в курсе геометрии эти понятия широко используются. Некоторые из них подвергаются надлежащей логической обработке, иногда производимой значительно позже (пример — длина отрезка), а относительно всех остальных надо заботиться лишь о том, чтобы учащиеся правильно их себе представляли и правильно применяли, что обеспечивается не попытками дать им определения, а конкретными примерами их осуществления; тогда невозможными будут случаи вроде того, когда ученик, познакомясь с аксиомой о единственности прямой, проходящей через две данные точки, заявляет, что это неверно, так как всё зависит от того, какие взять точки: если взять точки, каждую с кулак, то... Понятие длины отрезка привычно детям с дошкольного возраста. Для ученика VI класса длина отрезка есть число содержащихся в этом отрезке единиц длины и их долей, т. е. он убеждён, что всякий отрезок соизмерим с единицей. Никакой беды в этом нет; понятием длины отрезка постоянно пользуются и должны пользоваться, начиная с первых уроков геометрии, как раньше пользовались им в арифметике. Практические применения геометрии от этой неполноты знакомства с понятием длины ничуть не страдают, так как любой отрезок, несоизмеримый с единицей, может быть с произвольно высокой точностью заменён отрезком, с ней соизмеримым, а логическое уточнение понятия длины, выяснение существования отрезков, несоизмеримых с единицей, выяснение возможности выразить длину любого отрезка (действительным) числом будет обеспечено при дальнейшем развёртывании курса геометрии (в VIII классе).

Огромное значение для выработки правильных и отчётливых представлений геометрических образов имеет наряду с рассмотрением предметов окружающей нас действительности и специальных наглядных пособий также приобретение навыка в употреблении простейших чертёжных приборов: линейки, угольника, циркуля, транспортира. При невозможности приобрести эти приборы фабричного изготовления, надо пользоваться самодельными их суррогатами, мобилизуя учащихся на их изготовление. Вполне уместно показать и приёмы их проверки, так как специальные занятия черчением начинаются только в VII классе.

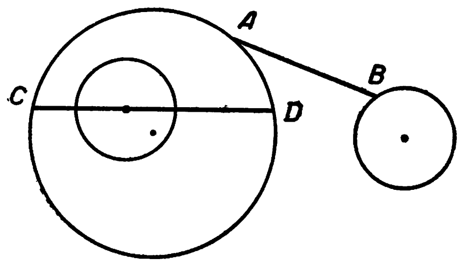
В школьном учебнике геометрии Киселёва выработке правильного понимания неопределяемых понятий через описания уделяется недостаточно внимания: здесь преобладают попытки дать какие-то подобия определений, и учитель должен на уроках восполнить этот недостаток. Значительно лучше обстоит дело в учебнике Н. А. Глаголева [IV, 19]. Здесь вся вводная часть (стр. 5—10) заполнена примерами, хорошо разъясняющими смысл употребляемых геометрических терминов, которым нельзя (или по крайней мере нецелесообразно) давать определения.

Было бы очень полезно составить исчерпывающий список аксиом, фактически используемых с первых шагов систематического курса геометрии, что дало бы прочную базу для последующих логических выводов, причём новые аксиомы вводились бы лишь по мере возникновения в них надобности, но в наших школьных учебниках это не делается: явно формулируются лишь немногие аксиомы, остальные приходится подразумевать, опираясь на «здравый смысл». Конечно, этот список «школьных» аксиом был бы значительно более обширным, чем при аксиоматическом изложении.

§ 9. Работа над определениями.

Не повторяя того, что было сказано об определениях выше, в § 5 1-й части, отметим, что уменье определять понятия, столь важное для любой науки, особенно хорошо вырабатывается именно на уроках геометрии. Уже при изучении первого раздела программы геометрии в VI классе («Введение») мы встречаемся с целым рядом понятий, точный смысл каждого из которых легко устанавливается через указание того более общего («родового») понятия, частным случаем которого является рассматриваемое, и того «видового» признака, каким это рассматриваемое понятие обладает в отличие от всех других. Такие определения через указание рода и видового признака имеют наибольшее значение для школы, и сознательно пользоваться ими должен научиться любой шестиклассник. Например, определяя хорду окружности как отрезок, соединяющий две любые её точки, он должен понимать, что здесь родовым понятием является понятие отрезка, что всякая хорда есть отрезок, но не всякий отрезок есть хорда, и что отличительным («видовым») признаком тех отрезков, которые называются хордами, служит то обстоятельство, что оба их конца являются точками одной и той же окружности. Переходя далее к определению диаметра как хорды, проходящей через центр, мы имеем теперь уже новое родовое понятие (хорда) и новый видовой признак (прохождение через центр): всякий диаметр есть хорда, но не всякая хорда есть диаметр.

Каждое определение должно быть хорошо понято, а для этого совершенно необходимо добиваться уменья приводить примеры. Мало того, что учащийся правильно формулирует определения хорды и диаметра: он должен уметь начертить окружность, показав в ней несколько хорд и диаметров, должен уметь объяснить, почему не является хордой отрезок AB, почему не является диаметром отрезок CD (на фиг. 24). Величайшей ошибкой является убеждение некоторых учителей, что вся работа над определениями сводится к их заучиванию: запоминание почти всегда приходит само собой, если добиваться сознательности и самостоятельного построения определений. Не беда, если учащиеся будут давать определения, отличающиеся по словесной своей форме от тех, какие приведены в учебнике, но нужно очень тщательно исправлять все существенные недочёты ученических формулировок. Однако нечего и говорить, как важно, чтобы учитель сам хорошо понимал, что возможны различные уже не только по словесному выражению, но и по существу определения одного и того же понятия, и не путал бы учащихся, пользуясь безразлично то одним, то другим. Так, в прежние годы угол определялся как часть плоскости, заключённая между двумя лучами с общим началом, теперь же предпочитают определять его просто как пару лучей с общим началом, и это правильнее, так как устраняет затруднения при обобщении угла в дальнейшем (угол в 400° уже не есть часть плоскости). Прямой угол школьный учебник Киселёва определяет как угол в 90°, основываясь на том, что понятие об угловом градусе дано раньше, а учебник Глаголева возвращается к старому евклидовскому определению прямого угла как угла, равного своему смежному. Это последнее определение заслуживает решительного предпочтения, так как оно «конструктивно»: складывая кусок бумаги, ученик легко получает модель прямого угла, а построение углового градуса для него недоступно. В случае наличности таких существенно различных определений одного понятия надо избрать какое-либо одно и твёрдо его держаться в дальнейшем, но при повторении можно знакомить и с другими определениями, выясняя их особенности, а также их взаимоотношения.



Фиг. 24.

Приходится вести постоянную упорную борьбу с ученическими ошибками в определениях, прежде всего с «порочным кругом»: нередко, например, ученик говорит, что прямым углом называется угол, образованный двумя взаимно перпендикулярными прямыми, а на вопрос о том, какие же прямые называются взаимно перпендикулярными, отвечает: те, которые образуют прямой угол. Нередко в определения ошибочно включаются свойства, вытекающие из тех свойств, которые служат основой определения; например, «два равных угла называются вертикальными, если стороны одного являются продолжениями сторон другого». Чаще, наоборот, существенно важные стороны определения пропускаются, определение даётся в неполном виде; например, определяя смежные углы, говорят, что это углы, имеющие общую вершину и общую сторону, но забывают сказать, как расположены две другие стороны.

Очень важно, чтобы все изучаемые определения были *конструктивными*, т. е. чтобы они обеспечивали возможность построения определяемого геометрического образа, так как фактическое выполнение этого построения повышает и ясность понимания, и прочность усвоения. К сожалению, школьный учебник

Киселёва далеко не всегда выдерживает этот принцип. Так, определяя (в § 15 по изданию 1949 г.) биссектрису угла как полупрямую (луч), делящую угол пополам, учебник ничего в этом месте не говорит о том, как биссектрису построить, построение появляется только значительно позже (в § 64), хотя в § 38 уже рассматривается теорема, устанавливающая свойство биссектрисы угла при вершине равнобедренного треугольника. В таких случаях рекомендуется применять способы, позволяющие осуществить определяемый геометрический образ с помощью особых средств. Так, вырезав угол из бумаги, получаем его биссектрису простым складыванием.

Уровень общей математической культуры школьников определяется в значительной степени тем, насколько сознательно они употребляют математические термины, и борьба за повышение этой стороны культуры есть борьба за усвоение определений. Плохо, если учащиеся употребляют термины, точный смысл которых им неясен; правильно поступает тот учитель, который требует, например, точных определений таких постоянно применяемых в школьной геометрии терминов, как вертикальная прямая, горизонтальная прямая (по существу эти термины относятся к географии): вертикальной, или отвесной, называется всякая прямая, проходящая через центр земли, горизонтальной — всякая прямая, к ней перпендикулярная.

§ 10. Изучение первых теорем и их применение.

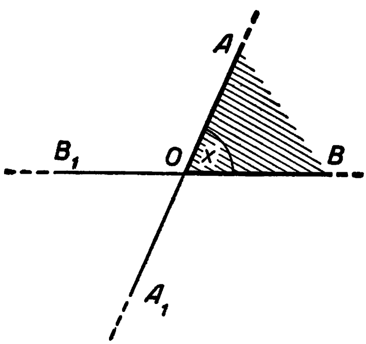
В разделе «Введение» мы имеем дело с большим количеством теорем, настолько легко доказываемых, что нередко даже возникает вопрос, теоремы ли это или аксиомы. Таково, например, предложение «сумма двух смежных углов равна 180°», доказательством которого является первая половина соответствующей фразы в § 22 школьного учебника геометрии Киселёва (по изданию 1949 г.). Такие «доказательства» не труднее обычных умозаключений, какие дети делают на каждом шагу в повседневной жизни, и усвоение таких теорем не представляет никакого труда, если только усвоены те понятия, о которых в них идёт речь. Затруднения учащихся в работе над этими простенькими теоремами начинаются тогда, когда учитель в погоне за мнимой строгостью начинает проводить длинные рассуждения, якобы доказывающие эти теоремы, как это не так давно делалось, например, с теоремой о равенстве прямых углов. Преждевременным надо признать и изучение того доказательства теоремы о возможности проведения перпендикуляра через любую данную точку к любой данной прямой (в § 24 школьного учебника), которое является первым более сложным доказательством, встречающимся в VI классе. Познакомившись с угольником и способом его проверки, учащиеся без всяких колебаний дают утвердительный ответ на вопрос о возможности проведения перпендикуляра через любую точку к любой прямой: надо только взять угольник достаточно больших размеров. Сомнения в правильности этого утверждения у шестиклассников ещё нет, нет, следовательно, и потребности в особом логическом доказательстве; учебник Н. А. Глаголева [IV, 19] правильно делает, отказываясь от него в данном случае, тем более, что после изучения теории параллельных, эта теорема получается как простое следствие других теорем.

Нередко приходится слышать, что учащиеся VI класса ещё не способны к пониманию логических доказательств. Легко убедиться, что это неверно, что трудности усвоения первых теорем геометрии зависят не от неспособности учащихся, а от неправильного подхода к теоремам. Стоит дать учащимся какую-нибудь нетрудную задачу на доказательство такого предложения, которое они сами откроют, например, задачу о том, какой угол образуют биссектрисы двух смежных углов, и окажется, что большинство догадается, что этот угол — прямой, проверит это своё открытие угольником или транспортиром, найдёт и правильное логическое доказательство. Нужно только, во-первых, чтобы всё необходимое для этого доказательства учащиеся твёрдо знали (прежде всего понятия смежных углов, биссектрисы угла, прямого угла); во-вторых, нужно предупредить их о том, что требуется не приближённая оценка этого угла, какую только и может дать измерение, а абсолютно точное заключение: какова точная величина угла, образуемого двумя лучами, каждый из которых есть точная биссектриса одного из двух смежных углов? Убедившись путём измерений, что биссектрисы двух смежных углов приблизительно перпендикулярны, учащиеся естественно приходят к вопросу, является ли этот угол в точности прямым, и стремление решить этот вопрос приводит их к логическому доказательству. Учителю надо уметь пробудить сомнение там, где у учащихся его ещё нет, подчёркивая требования точности и общности, и тогда уже давать доказательства, устраняющие эти сомнения. Нет в преподавании геометрии ничего более печального, чем заучивание учащимися доказательств того, в чём у них никакого сомнения нет. «Пока мне этой теоремы не доказывали,— сказал один ученик,— я ее прекрасно понимал, а после доказательства я перестал ее понимать».

Разбираясь в каждой новой теореме, надо чётко установить, что в ней дано (её условие или условия) и что утверждается и доказывается (её заключение). Очень полезно выяснение возможности опытной проверки заключения и её недостаточности. Далее идёт расчленение всего рассуждения на отдельные умозаключения (этапы, шаги), с чётким обоснованием каждого (по поводу каждого шага ставится вопрос «почему» и даётся надлежащий ответ в виде ссылки на какую-либо аксиому или ранее доказанную теорему), если, конечно, всё доказательство не сводится к одному только умозаключению (но ссылка на основание для такого умозаключения обязательна). Говоря о каком-нибудь построении или движении, нужном для доказательства, необходимо требовать фактического выполнения этого построения или движения, пользуясь вырезанными из бумаги моделями и лишь постепенно переходя к мысленному их выполнению с отчётливым описанием каждой детали. Например, если доказывать теорему о существовании и единственности перпендикуляра тем способом, каким она доказана в § 24 учебника Киселёва, то надо потребовать, чтобы каждый учащийся действительно произвёл указанное там перегибание чертежа, выполнив его на особом куске бумаги, а потом уже дал связное описание всей процедуры, точно указывая все последовательные её шаги. На первых уроках геометрии это удаётся только сильнейшим, но при повторении в конце года с ним справляется уже большинство.

Лучшим средством повысить качество усвоения первых теорем является решение задач на их применение, и величайшую ошибку делают учителя, тратящие всё время на усвоение теории, вовсе не занимаясь задачами. Задачи можно и должно давать на применение каждой пройденной теоремы. Кроме задач-примеров, легко и охотно решаемых каждым даже самым слабым учащимся и имеющихся в таком изобилии в школьном задачнике по геометрии Рыбкина, надо давать и задачи, решение которых требует уже некоторой более или менее самостоятельной работы мысли.

Вот, например, задача, которую можно рекомендовать в VI классе перед тем, как вводить понятия о смежных и вертикальных углах. «Два забора OA и OB сходятся под углом x, отличным от прямого (фиг. 25). Как измерить этот угол x с помощью транспортира, не проникая внутрь этого угла?» Полезно показать модель, которую легко приготовить, укрепляя на куске картона, изображающем «землю», два куска плотной бумаги, изображающих «забор», причём верхние края можно зазубрить. Обычно учащиеся предлагают три способа: 1) «снять мерку» с этого угла, т. е. изготовить точную его копию из двух реек, прикладываемых к сторонам и жёстко затем скрепляемых друг с другом, или делая надлежащий вырез в куске картона, что требует постепенной «подгонки», а затем измерять угол по этой «мерке»; 2) продолжить посредством линейки одну из сторон угла AOB, например OB, за его вершину O и измерить транспортиром угол AOB_1, а затем отнять полученное число градусов от 180°; 3) продолжить за вершину O обе стороны OA и OB и измерить угол A_1OB_1, равный искомому. Заключения о том, что углы AOB и AOB_1 имеют суммой 180° и что углы AOB и A_1OB_1 равны, делаются учащимися легко и без всяких колебаний, и это даёт прекрасную основу для изучения всего, что относится к понятиям смежных углов и вертикальных углов. Интерес к решению задачи ещё повышается, если учитель заранее заготовит вырезанный из плотной бумаги угол, напишет на одной стороне этой модели число градусов, содержащихся в этом угле, и повесит её на классную доску так, что надпись учащиеся не видят. Разрешается производить измерения транспортиром, не кладя его на модель. Измеряют угол, смежный с искомым, и угол, ему вертикальный, делают заключение о величине угла модели, проверяют правильность результата, читая надпись на обратной стороне модели.



Фиг. 25.

Отметим ещё несколько существенных обстоятельств.

1. Опыт показывает, что общие сведения о составе теоремы, о теоремах обратной и противоположной даются в начале курса с трудом, а в дальнейшем тем легче, чем больше теорем изучено. Прохождение §§ 28—31 учебника Киселёва можно ввиду этого отнести на конец изучения следующего раздела, т. е. на конец первого полугодия.

2. Успешная работа по усвоению первого раздела курса геометрии в VI классе невозможна без использования простейших чертёжных и измерительных

приборов, набор которых должен быть у каждого учащегося (линейка с делениями на сантиметры и миллиметры, угольник, циркуль, транспортир).

3. Воспитывать навыки правильного мышления можно не только на материале курса геометрии, а и на разнообразном материале из обыдённой жизни и других дисциплин. Богатое собрание упражнений такого рода содержит статья [IV, 52]. Вот пара примеров: 1) «В ящике лежат яблоки трёх сортов. Каково наименьшее число яблок, которое надо взять наугад из ящика, чтобы среди них оказались хотя бы два яблока одного сорта? Хотя бы три яблока одного сорта?» Ответы (4 и 7) должны быть даны с доказательствами их правильности. 2) «Число a меньше 25, а число b на 20 больше a. Что можно утверждать о числе b?» Ответ (b меньше 45) должен сопровождаться доказательством. Решение такого рода «логических» задач несомненно развивает учащихся и облегчает им усвоение систематического курса геометрии.

4. Каждый опытный преподаватель вырабатывает определённую форму записи учащимися изучаемого материала в тетрадях, и соблюдение такой формы способствует успеху работы. Вот пример такого оформления одной из первых теорем геометрии, рекомендуемого в статье [IV, 27].

Теорема. Два треугольника равны, если одна сторона и два прилегающих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилегающим к ней углам другого треугольника.

Даны $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, а в них

1) $AB = A_1B_1$; 2) $\angle A = \angle A_1$; 3) $\angle B = \angle B_1$.

Требуется доказать, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

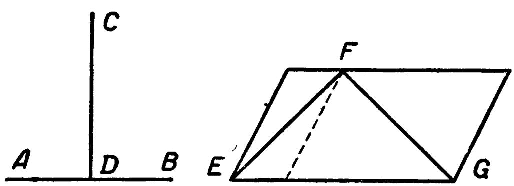
Доказательство.

I. *Сами делаем*: накладываем $\triangle ABC$ на $\triangle A_1B_1C_1$ так, чтобы 1) вершина A совпала с вершиной A_1; 2) луч AB совпал с лучом A_1B_1.

II. *Тогда обязательно случится следующее*: 1) точка B совпадёт с точкой B_1 (так как по условию $AB = A_1B_1$); 2) луч AC совпадёт с лучом A_1C_1 (так как по условию $\angle A = \angle A_1$); 3) луч BC совпадёт с лучом B_1C_1 (так как по условию $\angle B = \angle B_1$); 4) вершина C совпадёт с вершиной C_1 (в силу того, что «две прямые могут пересечься только в одной точке», см. § 4 учебника геометрии Киселёва).

III. *Заключение*: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, т. е. треугольники равны, так как при наложении они совпали.

Обращаем внимание читателя на подчёркнутое в этой записи чёткое разграничение того, что мы делаем по собственному произволу, и того, что при этом происходит уже помимо нашей воли (учащиеся не всегда ясно различают эти две стороны рассуждения). Показав подобное оформление доказательства теорем на нескольких примерах, учитель в дальнейшем требует от учащихся самостоятельного оформления доказательства последующих теорем, тщательно проверяя и исправляя их работу. При устном изложении надо требовать полных формулировок всех затрагиваемых аксиом, теорем, определений — это является хорошим повторением.



Фиг. 26.

5. Детальную разработку ряда уроков по геометрии содержат книги [IV, 32, 24],— которые усиленно рекомендуем начинающему учителю.

6. Никогда не следует забывать, что у учащихся VI класса устная речь ещё далеко не развита и что правильно поставленные занятия по геометрии могут существенно способствовать её улучшению. Учитель должен тщательно следить за своей речью, во всех деталях продумывать всё, что он предполагает изложить, заранее подготовлять всё, что он думает записать на доске и продиктовать, добиваться от учащихся полных, точных, правильно построенных ответов на все свои вопросы.

7. Для лучшего понимания ценности логических выводов очень полезно познакомить учащихся с простейшими оптическими иллюзиями, ясно показывающими, что доверять нашим непосредственным зрительным впечатлениям далеко не всегда возможно.

На фигуре 26 мы видим два примера таких иллюзий. Горизонтальный отрезок AB кажется значительно меньшим, чем перпендикулярный ему отрезок CD, хотя измерение показывает, что $AB = CD$. Точно так же диагональ EF в малом параллелограме кажется меньшей, чем равная ей диагональ FG рядом расположенного параллелограма большего размера. Большое собрание таких оптических иллюзий читатель найдёт в статье [IV, 60].

Глава III

ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАЗВЁРТЫВАНИЕ ГЕОМЕТРИИ В СЕМИЛЕТНЕЙ ШКОЛЕ

§ 11. Общий характер изучения геометрии в семилетней школе.

Курс геометрии, изучаемый в VI—X классах нашей школы, представляет собой единое целое, но характер его изучения в VI и VII классах носит иной характер, чем в старших классах, так как необходимо считаться с возрастными особенностями учащихся, лишь постепенно усиливая логический элемент. «Объяснительная записка» к действующей программе средней школы говорит следующее: «... методы преподавания геометрии в семилетней школе (VI и VII классы) должны в большей степени опираться на интуицию учащихся: следует широко применять наглядность в изучении материала, возможно чаще делать чертежи изучаемых геометрических образов, а также обращаться к моделированию фигур... Необходимо также показывать практические приложения геометрии, повышая этим интерес учащихся к предмету и их уверенность в его ценности. Сюда относятся измерения всякого рода, в частности измерения на местности, вычисление площадей и объёмов и т. п.» (стр. 13).

К сожалению, эти бесспорные соображения, изложенные в «Объяснительной записке», не нашли себе отражения в самой программе, перечисляющей лишь материал обычного систематического курса геометрии. По вопросу об измерении площадей и объёмов учащиеся VI и VII классов не узнают абсолютно ничего нового по сравнению с тем, что они узнали ещё в начальной школе и в V классе в курсе арифметики: учение о площадях многоугольников относится полностью к VIII класу, о площади круга — к IX, об объёмах — к X. Это тем более нежелательно, что многие учащиеся, идущие после окончания семилетней школы на практическую работу, особенно нуждаются в основных сведениях о площадях, объёмах, подобии фигур. Существенное улучшение нынешнего положения возможно лишь при условии основательной перестройки школьной программы курса геометрии, но и в рамках действующей программы, руководствуясь тем, что изложено в «Объяснительной записке», учитель может сделать многое.

Подводя итог, можно сказать, что учителю геометрии VI и VII классов надо всегда помнить о том, что подросткам легче чертить и измерять, чем рассуждать, и что логической стороной курса геометрии они могут овладеть лишь на основе своих наблюдений, построений, измерений.

§ 12. Учение о треугольниках.

После изучения «Введения», о котором была речь во II главе, программа предусматривает изучение раздела «Треугольник», на что отводится 30 часов, а затем темы «Параллельные прямые» (26 часов). Такой порядок, однако, не является необходимым. Он соблюдается в школьном учебнике геометрии Киселёва, но в новом учебнике Н. А. Глаголева порядок изучения этих двух разделов обратный: сперва изучается вопрос о параллельности прямых, относящийся к взаимному расположению двух прямых на одной плоскости, а затем уже переходят к трём прямым, пересечение которых и образует треугольник; получается выигрыш в большей законченности изложения учения о треугольнике, так как только после изучения свойств параллельных становится возможным доказательство теоремы о сумме внутренних углов треугольника.

Доказывая различные теоремы этого раздела, постоянно пользуются движением, основываясь не на точно формулированных аксиомах, выражающих свойства движения, а на наглядных представлениях. По существу здесь используется аксиома, приведённая в учебнике Киселёва в § 3: «Всякую часть плоскости можно наложить всеми её точками на другое место этой или другой плоскости, причём накладываемую часть можно предварительно перевернуть другой стороной». Здесь следовало бы добавить, что при таком накладывании произвольную точку и какой-нибудь выходящий из неё луч одной плоскости можно совместить с произвольной точкой и любым выходящим из неё лучом второй плоскости. То преобразование симметрии, о котором неизбежно приходится говорить при изучении треугольников, представляет собой не что иное, как особый случай применения этой аксиомы: плоскость совмещается сама с собой, будучи перевёрнута другой стороной, причём произвольная точка оси симметрии и выходящий из неё луч, лежащий на этой оси, совмещаются сами с собой. Для отчётливого усвоения доказательств ряда теорем необходимо хорошее понимание этой аксиомы, обеспечиваемое фактическим выполнением такого накладывания каждым учащимся какой-либо материальной плоскости на другую плоскость, хотя бы плоскости переплёта книги на плоскость стола.

Изучение треугольника начинается с уточнения ряда понятий, с ним связанных. Не ограничиваясь одними словесными определениями, учитель должен требовать, чтобы новое понятие иллюстрировалось каждым учащимся через построение на бумаге или изготовление модели, причём необходимо доводить дело до конца, рассматривая все возможные случаи реализации этого понятия.

Плохо, например, если учащиеся, познакомившись с определением высоты, проводят её всегда внутри треугольника, т. е. ограничиваются только теми случаями, когда углы при основании треугольника оба острые; надо добиться понимания того, что в случае, когда один из этих углов тупой, высота проходит вне треугольника, а когда прямой, то совпадает со стороной. Те движения треугольников, какие приходится выполнять при доказательстве многих теорем о треугольниках (наложение, прикладывание, симметризация), желательно сопровождать на первых порах фактическим движением вырезанных из бумаги моделей, строго различая, что при этом делается по нашему произволу, а что делается само собой, независимо от нас, в силу условий теорем, аксиом (см. выше стр. 350).

Понимание значения теорем о равенстве треугольников даётся учащимся далеко не сразу. Успеху очень помогает та работа по построению треугольников по заданным его элементам, о которой была речь на странице 320 и которую усиленно рекомендуем для каждого случая равенства треугольников.

При изучении раздела «Треугольник» учащиеся впервые встречаются с понятием геометрического места точек. Прежде всего приходится заботиться о правильном его понимании. Ограничиваясь только теми тремя примерами геометрических мест, какие приведены в школьном руководстве (окружность, срединный перпендикуляр отрезка, биссектриса угла), учащиеся связывают с понятием геометрического места эти три образа, и на вопрос, что называется геометрическим местом точек, нередко отвечают, что это окружность, или срединный перпендикуляр отрезка, или биссектриса угла. Разыскивая какое-нибудь геометрическое место точек, надо обеспечить понимание того, что здесь речь идёт о разыскании множества всех тех точек, которые имеют данное свойство, так что проверка правильности ответа состоит в выяснении двух вещей: во-первых, все ли точки указанной фигуры обладают этим свойством, и, во-вторых, нет ли точек, не принадлежащих этой фигуре, которые тоже обладали бы этим свойством. Например, отыскивая геометрическое место точек плоскости, удалённых от данной прямой на расстояние a, мы получаем не одну прямую, параллельную данной, а пару таких прямых; в пространстве это уже цилиндрическая поверхность, осью которой служит эта прямая. Ещё хороший пример: геометрическое место точек, каждая из которых удалена от данного отрезка AB меньше чем на a, есть множество всех внутренних точек фигуры, ограниченной двумя отрезками и двумя полуокружностями.

Большое количество изученных в этом разделе теорем позволяет обеспечить правильное понимание соотношений между прямой, обратной, противоположной и обратно противоположной теоремами. Необходимо рассмотреть ряд примеров, как это сделано в учебнике Н. А. Глаголева, ограничиваясь сперва только теоремами, в каждой из которых имеется лишь одно условие и одно заключение. Переставив местами условие и заключение, получаем обратное предложение и выясняем, истинно ли оно или нет, т. е. существует ли теорема, обратная данной. Отрицая условие и заключение, приходим к противоположному предложению и тоже выясняем, истинно ли оно, т. е. существует ли противоположная теорема. Как известно, обратное и противоположное предложения всегда либо одновременно истинны, либо одновременно ложны, а потому доказывать приходится только одно из них.

Всё пройденное в разделе «Треугольник» находит себе прекрасное применение при решении задач на построение, завершающих изучение этого раздела. О них будет идти речь в § 15.

§ 13. Теория параллельных.

Работа над разделом «Параллельные прямые» проходит обычно значительно лучше, чем над предыдущей темой; и это несомненно связано с тем, что в этом разделе учащиеся узнают гораздо более новых, далеко не очевидных для них теорем о свойствах фигур. Здесь у них действительно возникает потребность в логическом доказательстве; кроме того, существующая программа даёт здесь много часов на изучение сравнительно небольшого материала: 26 часов на материал, занимающий в школьном учебнике Киселёва всего 9 страниц! (в учебнике Глаголева ещё меньше). Есть полная возможность выработать ясные представления и точные определения, провести ряд наблюдений, привить уверенные навыки в построениях с помощью линейки, циркуля, угольника, добиться правильного понимания связей между отдельными теоремами, уяснить значение новой аксиомы. Учащиеся должны овладеть по крайней мере тремя основными способами построения прямой, параллельной данной и проходящей через данную точку: 1) через двукратное применение угольника, когда используется теорема о параллельности двух перпендикуляров к одной и той же прямой, 2) через построение с помощью линейки и угольника двух прямых, пересекаемых третьей под равными соответственными углами, но не перпендикулярных к ней, 3) через построение с помощью линейки и циркуля двух равных внутренних накрест лежащих углов. Доказательства соответствующих теорем проводятся как рассуждения, показывающие точность этих построений. Учащиеся выполняют эти построения, замечают, что в пределах чертежа прямые не пересекаются, и хорошо воспринимают указание о необходимости выяснить, не произойдёт ли пересечение где-нибудь очень далеко.

Отметим варианты доказательств теорем о признаках параллельности, основанные на использовании понятия симметрии и вовсе не требующие предварительного изучения теоремы о внешнем угле треугольника: два перпендикуляра к одной прямой не могут пересекаться, так как симметризация плоскости относительно этой прямой легко показывает, что, пересекаясь с одной стороны этой прямой, они пересекались бы с другой её стороны; для аналогичного доказательства теоремы о параллельности прямых, образующих с третьей прямой равные накрест лежащие углы, используется не осевая, а центральная симметрия, т. е. вращение плоскости на 180° относительно точки. Эти варианты хорошо изложены в учебнике Н. А. Глаголева.

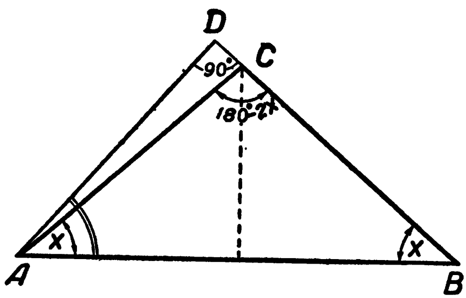
Многие теоремы этого раздела допускают самостоятельное их открытие учащимися, если их формулировать сперва в виде задач и предложить учащимся решить их (дома), пользуясь любыми средствами. О преимуществах такого эвристического метода речь была выше (в § 18 1-й части). Возьмём, например, теорему о сумме внутренних углов треугольника. Предполагая заняться ею на следующем уроке, учитель даёт домашнее задание: взять несколько произвольных треугольников, построенных на бумаге или где угодно, хотя бы на земле, тщательно измерить их углы транспортиром, найти сумму. Наряду с построенными на бумаге треугольниками рекомендуется брать их модели, вырезанные из бумаги, картона, фанеры, жести, и находить сумму углов не транспортиром, а графически, накладывая модель надлежащим образом на бумагу и просто обводя углы. На следующий день в классе неизменно наблюдается хорошее деловое оживление: ученики делятся друг с другом своими результатами, все поражены тем, что при разнообразии размеров сторон и углов сумма углов у всех получалась почти одна и та же, немного колеблясь около 180°. Тем самым прекрасно подготовлена почва для полноценного усвоения теоремы. Логическое доказательство устраняет сомнения в том, вызваны ли небольшие наблюдаемые отклонения от 180° неизбежными погрешностями построения и измерения или сумма углов треугольника действительно только близка к 180°, но не равна ей в точности.

Иногда раздаются голоса против такой опытной подготовки логического доказательства. Говорят, что после лёгкой опытной проверки истинности теоремы учащиеся не хотят изучать более трудное дедуктивное доказательство. Это действительно бывает, но только при неумелом ведении дела, а именно когда учитель не разъясняет учащимся слабые стороны опытной проверки — отсутствие точности и общности, когда он упускает из виду важную сторону такой работы — создать сомнение в достаточности проведённой проверки, создать потребность в доказательстве, основанном на аксиомах и ранее установленных теоремах.

Несколько иного сорта эвристика уместна при подготовке изучения следующей теоремы, а именно теоремы о сумме внутренних углов выпуклого многоугольника. Поставив задачу о разыскании суммы внутренних углов 4-угольника, 5-угольника, вообще n-угольника, учитель предупреждает, что здесь нет никакой надобности в каких бы то ни было измерениях: можно сообразить, какова должна быть эта сумма, сводя вопрос к треугольникам. Подавляющее большинство учащихся самостоятельно приходят к формуле $S = 180° \cdot (n-2)$, не заглядывая в учебник. Фактическое измерение углов какого-либо многоугольника всё же желательно выполнить, указывая возможные погрешности измерений и заранее указывая те границы, в которых должно содержаться найденное приближённое значение S. Так, начертив произвольный 8-угольник и измерив внутренние его углы обыкновенным школьным транспортиром с делениями на градусы, мы можем при аккуратной работе ручаться, что погрешность измерения каждого угла не превзойдет $^1/_4{}^\circ$, а поэтому сумма 8 углов получится с погрешностью, не превосходящей $^1/_4{}^\circ \cdot 8 = 2^\circ$; приступая к измерениям, предсказываем, что сумма всех углов получится в пределах от $180^\circ \cdot 6 - 2^\circ = 1\,078^\circ$ до $180^\circ \cdot 6 + 2^\circ = 1\,082^\circ$. Все выполняют требуемые построения и измерения с повышенным интересом и убеждаются, что предсказание оправдывается даже лучше, чем можно было ожидать (происходит частичная компенсация погрешностей, так как при измерении одних углов получаются приближённые их значения по недостатку, других по избытку). Учащиеся VII класса переживают успешное решение такой задачи как своего рода триумф постигаемой ими науки, и после этого учителю не приходится говорить о том, что у его учеников нет должного интереса к геометрии.

Изучив раздел «Параллельные прямые», учащиеся овладевают большим запасом сведений, которые надо использовать и для лучшего уяснения логической сущности курса, возвращаясь к вопросу об обратных и противоположных теоремах и выясняя предпосылки каждого доказательства, и для решения большого количества задач на вычисление, построение, доказательство. Очень поучительно решение и вычислительным, и построительным методами одной и той же задачи.

Например, взяв задачу № 40 из § 4 школьного задачника Рыбкина, где предлагается найти углы равнобедренного треугольника, в котором угол между основанием и боковой высотой известен ($\alpha = 48^\circ$), легко приходим к уравнению $(\alpha - x) + 2x = 90^\circ$ (см. фиг. 27) и получаем $x = 90^\circ - \alpha$ или при $\alpha = 48^\circ$ $x = 42^\circ$. Затем решаем эту задачу как задачу на построение: построить равнобедренный треугольник, в котором угол α между основанием и боковой высотой дан ($\alpha = 48^\circ$). Построив этот угол α при вершине A, откладываем на одной его стороне произвольный отрезок AB и опускаем из B перпендикуляр BD на другую его сторону, после чего проводим срединный перпендикуляр отрезка AB и получаем в пересечении с BD вершину C. Сопоставление результатов обоих решений даёт возможность проверить их правильность и всегда вызывает повышенный интерес учащихся: окажется ли полученный построением результат одинаковым с тем, что дало вычисление? С решения посредством построения лучше даже начинать, так как работа над ним помогает лучше понять суть задачи. В только что приведённом примере небезынтересно поставить дополнительный вопрос: при каких значениях данного угла α высота AD окажется вне треугольника ABC и при каких внутри него? (первое при $\alpha > 45^\circ$, второе при $\alpha < 45^\circ$). Иногда одно из решений, вычислительное или построительное, оказывается значительно более трудным, иногда даже непосильным для учащихся VI класса, и констатировать это весьма поучительно.



Фиг. 27.

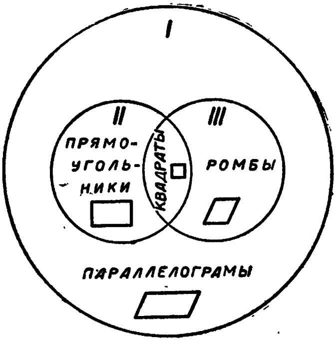
Вполне посильны в этом классе многие задачи на доказательство, причём и здесь лучше не указывать заранее, что именно требуется доказать, а предлагать выяснить, что можно сказать о таком-то отрезке, или угле, или положении точки, развивая тем самым инициативу и сообразительность учащихся и приводя их к пониманию значения доказательства как средства устранить всякое сомнение в правильности полученного результата. Так, задачу № 42 из § 4 задачника Рыбкина, в которой предлагается доказать, что медиана гипотенузы прямоугольного треугольника равна её половине, лучше формулировать так: выяснить, какова длина медианы, проведённой к гипотенузе в произвольном прямоугольном треугольнике, по сравнению с этой гипотенузой.

При изучении даже элементов теории параллельных необходимо упомянуть о гениальном русском математике Николае Ивановиче Лобачевском, работы которого в некотором отношении завершили двухтысячелетний труд длинного ряда математиков всех стран. Показать в полном объёме значение открытий Лобачевского шестиклассникам невозможно, но одну сторону дела они прекрасно поймут: он показал полную безнадёжность попыток доказать аксиому параллельных с помощью других аксиом геометрии. Можно привести такое сравнение: никакую несократимую дробь, имеющую в знаменателе какой-нибудь простой множитель, отличный от 2 и 5, нельзя представить в виде конечной десятичной дроби; эту невозможность легко показать каждому, имеющему начальные сведения о дробях. Насколько труднее показать, что аксиома параллельных есть действительно аксиома, а не теорема, видно из того, что вопрос этот был поставлен ещё в III в. до н. э., а решён только Лобачевским в 1824 г.

§ 14. Учение о четырёхугольниках и об окружностях.

Изучением четырёхугольников и окружностей занимаются уже в VII классе, и внимание логическим элементам здесь может быть ещё усилено (по сравнению с VI классом) в трёх следующих направлениях.

I. Требуя, как и всегда, уменья свести каждое определение нового понятия к указанию рода и видового признака, добиваются ясного понимания соподчинения понятий: например, параллелограм — частный случай четырёхугольника, или, другими словами, множество всех параллелограмов есть часть множества («подмножество») всех четырёхугольников; множество всех прямоугольников является тоже подмножеством множества всех четырёхугольников; множество всех прямоугольников является в то же время подмножеством всех параллелограмов; множество всех ромбов — то же; квадраты образуют общую часть множества прямоугольников и множества ромбов (их «пересечение»). Если определять трапецию так, как это сделано в школьном учебнике Киселёва (четырёхугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, а две другие не параллельны, называется трапецией»), то понятия параллелограма и трапеции противополагаются одно другому, будучи оба подчинены одному более общему понятию четырёхугольника (выпуклого). Разные соотношения между понятиями хорошо иллюстрируются различными схемами. Так, если каждая точка большого круга на фигуре 28 изображает какой-нибудь параллелограм, то прямоугольники, будучи параллелограмами особого вида, изобразятся точками, принадлежащими некоторому второму



Фиг. 28.

Фиг. 29.

кругу, расположенному целиком внутри первого, а ромбы — точками некоторого третьего круга, тоже расположенного целиком внутри первого, но частично покрывающему второй; точки общей части кругов II и III изображают параллелограмы, которые являются одновременно и прямоугольниками, и ромбами, т. е. квадраты. Иное положение мы имеем на фигуре 29, где показана связь понятий выпуклого четырёхугольника, трапеции, параллелограма. Здесь круги II и III тоже лежат целиком внутри круга I, но уже не пересекаются. Если же принять определение трапеции как такого выпуклого четырёхугольника, у которого имеется пара параллельных сторон, ничего не требуя относительно двух других сторон (о преимуществах этого определения см. [IV, 7]), то фигура 29 существенно изменится, а именно круг III придётся поместить целиком внутри круга II.

Желая дать полную классификацию всех четырёхугольников (плоских), удобнее всего применить дихотомию (см. выше § 5 1-й части). Приводим одну из таких возможных классификаций, придерживаясь определения трапеции, данного в школьном учебнике.

1. Все плоские четырёхугольники разделяются на простые, стороны которых не имеют других общих точек, кроме вершин (см. дальше пункт 2), и непростые, стороны которых пересекаются (см. фиг. 30).

2. Простые четырёхугольники подразделяются на выпуклые (см. п. 3) и невыпуклые.

3. Выпуклые четырёхугольники подразделяются на трапеции (см. п. 4) и не трапеции (см. п. 6).

4. Трапеции подразделяются на равнобочные и неравнобочные (см. п. 5).

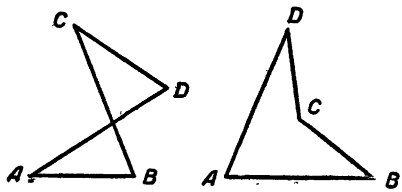
5. Неравнобочные трапеции подразделяются на прямоугольные и непрямоугольные.

6. Выпуклые четырёхугольники, не являющиеся трапециями, подразделяются на параллелограмы (см. п. 7) и не параллелограмы.

7. Параллелограмы подразделяются, с одной стороны, на ромбы (см. п. 8) и не ромбы, а с другой — на прямоугольники (см. п. 9) и не прямоугольники.

8. Ромбы подразделяются на квадраты и не квадраты.

9. Прямоугольники подразделяются на квадраты и не квадраты.



Фиг. 30.

Изучать подобную полную классификацию школе нет необходимости, но сам учитель должен вполне в ней ориентироваться. Если требуется ввести в эту классификацию понятие дельтоида, т. е. четырёхугольника с двумя парами смежных равных сторон, получаемого из двух равнобедренных треугольников с равными основаниями путём совмещения оснований, то придётся отметить, что это особый вид простых многоугольников, так как дельтоид может быть и выпуклым и невыпуклым.

Работе над определениями, а в связи с нею над классификацией не уделяют, к сожалению, должного внимания, в то время как она составляет важную часть воспитания логических навыков у учащихся.

II. Параллельно работе над определениями и классификацией идёт работа по усвоению геометрических предложений и анализу их содержания. Всё, что было сказано о желательности эвристического подхода при первом знакомстве с новыми фактами, так легко открываемыми детьми, если поставлены соответствующие задачи, сохраняет полную силу и для VII класса, программа которого содержит много теорем, которые просто непростительно сообщать учащимся в готовом виде, лишая их радости открытия и тех плодотворных сомнений и самостоятельных размышлений, какие вызывают потребность в логическом доказательстве. Например, учащиеся легко самостоятельно устанавливают свойства диагоналей ромба, или зависимость между вписанными и центральными углами, или свойство трёх медиан треугольника, причём многие оказываются в состоянии не только установить каждый такой факт, но и свести его к другим, ранее установленным, т. е. дать его логическое доказательство. Независимо от того, сами ли учащиеся открыли какое-либо новое для них геометрическое предложение, или оно было им дано в готовом виде, они должны уметь выделить условие и заключение, должны научиться формулировать предложения обратные и противоположные, каждый раз выясняя, истинны ли они.

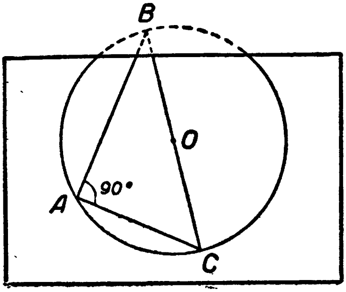
Усвоение содержания геометрических теорем существенно выигрывает, если знакомить учащихся с их применением, что можно делать буквально по каждой теореме (иногда даже раньше, чем теорема эта будет доказана). Особенно доступны применения в геометрических же построениях. Так, теорему «если две окружности имеют общую точку на линии центров, то они касаются» надо сопровождать задачей: построить окружность данного радиуса r, касающуюся данной окружности K в данной её точке A: 1) внутренне, 2) внешне.

III. Третью и в некоторых отношениях важнейшую сторону работы по воспитанию логических навыков образует воспитание уменья правильно рассуждать. Продуктивной эта работа может быть лишь при условии достаточного внимания к первым двум сторонам: изучать доказательство с пользой для себя человек может лишь в том случае, когда он имеет совершенно ясное представление о всех тех вещах, с какими приходится иметь дело в этом доказательстве, и когда он хорошо понимает то предложение, которое доказывает, различая в нём и все условия, и заключение. Это казалось бы совершенно очевидное соображение, к сожалению, не всегда принимается в расчёт в практике преподавания: доказательства нередко заучиваются без достаточного понимания. Учащиеся иногда в точности воспроизводят чертёж, приведённый в учебнике, повторяют почти дословно те фразы, какие там напечатаны, но стоит только сделать, например, какое-нибудь несущественное изменение в чертеже, и они сбиваются и замолкают. Необходимо добиваться не заучивания готовых доказательств, а выработки навыка в самостоятельном проведении доказательств. Программа VII класса содержит большое количество предложений, самостоятельное доказательство которых вполне посильно учащимся этого класса, если давать эти доказательства в виде задач, иногда делая некоторые указания на метод доказательства. Самое важное — возбудить у учащихся потребность в логическом доказательстве, создать у них стремление устранять сомнения в правильности догадок, возникающих при самостоятельных поисках решений. Изучение готовых доказательств необходимо для знакомства с методами доказательства, но это изучение должно быть сознательным, притом не только в смысле уразумения законности каждого шага, что тоже очень важно, но и в смысле понимания его целесообразности: надо добиваться, чтобы учащиеся умели ответить не только на вопрос «почему?» по поводу каждого шага, но и на вопрос «зачем?»

Заботясь об усвоении логических связей между предложениями, нельзя забывать, что в VII классе наблюдения, построения, измерения должны играть большую роль: у подростков 13—15 лет способность к абстракции уже значительно выше, чем за год или два до этого, но всё же и они охотнее чертят и измеряют, чем рассуждают. Нормальным следует признать такой порядок изучения каждой новой теоремы, когда сперва производятся наблюдения, построения, измерения, приводящие к некоторым догадкам, проверяемым сперва опытным же путём, а затем проводится логическое доказательство. Вот, например, как можно провести изучение теоремы о вписанном угле. Установив понятие угла, вписанного в окружность, выяснив, на какую дугу такой угол опирается, напомнив, что называется центральным углом, соответствующим данной дуге, даём учащимся следующее домашнее задание: 1) взяв произвольный центральный угол AOB, измерить его, а затем построить и измерить несколько вписанных углов, опирающихся на дугу AB, соответствующую этому углу AOB, и высказать догадку о связи между величиной центрального угла и величиной вписанных углов, опирающихся на ту же дугу; 2) построив произвольный вписанный угол AMB, одной стороной которого служит диаметр MA, провести радиус OB и установить связь между величиной углов AMB и AOB, не прибегая к измерению, а основываясь на теореме о том, что внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, с ним не смежных; 3) обобщить полученный результат на случай произвольного вписанного угла, сперва такого, стороны которого располагаются по разные стороны центра, потом такого, стороны которого располагаются по одну сторону центра. Первую часть задания выполняют все учащиеся (тем, кто не имеет транспортира, если такие окажутся, надо рекомендовать вырезать центральный и вписанный углы из бумаги и сравнить их накладыванием или складыванием), вторую — почти все, третью — сильнейшие, но очередной урок геометрии, на котором будет рассматриваться теорема о мере вписанного угла, пройдёт для всех гораздо продуктивнее и интереснее, так как с помощью учителя будет доведена до конца работа, начатая каждым. Самостоятельно открыв с помощью измерений, что вписанный угол составляет половину центрального, опирающегося на ту же дугу, человек запоминает этот геометрический факт сравненно прочнее, чем в том случае, когда узнает о нём из книги или от учителя, и не затруднится воспроизвести логическое доказательство, если будет помнить, какие три случая надо при этом рассмотреть.

Изучив новую теорему, надо немедленно показать примеры практического её использования. Так, после рассмотрения теоремы о вписанном угле хорошо предложить такую задачу: на чертеже имеется часть окружности и отрезок, пересекающий эту окружность в точке A, причём другая точка пересечения B находится за пределами чертежа (фиг. 31); требуется провести диаметр BC. Рекомендовав предварительно выяснить, каким при этом окажется угол BAC, мы обеспечим самостоятельное решение задачи всеми учащимися. Хорошо дать также такую задачу: хорды AB и CD

пересекаются внутри круга в точке E; зная, что дуги AC и BD равны соответственно α и β, найти угол AEC. Указание о проведении вспомогательной хорды AD и об использовании теоремы о внешнем угле треугольника позволит и здесь подавляющему большинству учащихся самостоятельно справиться с задачей, тем самым обеспечив усвоение теоремы об угле с вершиной внутри круга. Аналогично подготовляется и теорема об угле с вершиной вне круга.



Фиг. 31.

§ 15. Задачи на построение.

Решение разнообразных задач, где используются содержащиеся в курсе геометрии теоретические сведения, является необходимой частью работы по изучению геометрии в школе, но самыми ценными и в то же время самыми трудными являются задачи на построение.

Уменье решать задачи на построение учащиеся выносят из школы далеко не всегда, и причиной этого является в большинстве случаев просто недостаточное знакомство самого учителя с теорией и практикой геометрических построений, хотя бы в том скромном объёме, какой необходим для полноценного решения многочисленных задач на построение, помещённых в виде материала для упражнений в школьном руководстве геометрии Киселёва. Для успеха прохождения геометрии в VIII классе совершенно необходимо, чтобы учитель владел геометрическими построениями, изучив их по крайней мере в том объёме, в каком они изложены в небольшой книжке М. Ф. Берга [IV, 8]. Отметим более подробные работы [IV, 58а, 2], которые можно усиленно рекомендовать учителю, а также специальный задачник [IV, 3а], не говоря уже о ранее упомянутом задачнике [IV, 23], содержащем разнообразные задачи на все разделы курса геометрии, в том числе и задачи на построение.

Основной метод решения задач на построение в VI и VII классах — это метод геометрических мест, изучаемый как метод лишь во втором полугодии в VII классе, но фактически используемый уже в VI классе. Методы параллельного переноса, симметрии, вращения тоже фактически используются, но специального изучения не требуют.

Каждая задача на построение представляет собой маленькое, посильное для учащихся семилетней школы исследование, при выполнения которого (в анализе, т. е. при поисках пути решения) учащиеся мобилизуют все свои теоретические сведения, всесторонне изучают связи между данными и искомыми элементами фигуры. Найдя правильный путь, реализуют построение; желательно, чтобы чётко фиксировался каждый шаг. Закончив построение, тщательно проверяют его правильность, проводя надлежащее доказательство, которое должно обнаружить, что при идеально точном выполнении тех простейших операций, какие выполнялись при построении, результат будет абсолютно точно соответствовать условиям. Наконец, идёт заключительная, труднейшая часть работы — исследование всех случаев, какие могут представиться при решении задачи. Всё решение аккуратно оформляется, построение выполняется с применением инструментов, делаются краткие, но содержащие всё необходимое пояснения. Никуда не годится, если вместо фактического выполнения построения учащийся только рассказывает о нём. Обращаем внимание на необходимость полного, всестороннего, исчерпывающего исследования. Если оно представляется слишком трудным для учащихся данного класса, лучше ввести надлежащие ограничения в условия задачи, упрощающие исследование, но не довольствоваться неполным исследованием, которое всегда приучает учащихся к неряшливости в рассуждении, разрушая те полезные логические навыки, какие даёт теория.

Вот примерное оформление решения задачи на построение, которую можно предложить в VII классе.

Задача. На плоскости даны три различные точки O, A, B; требуется построить окружность K_1, которая проходила бы через точки A и B и касалась бы в точке A окружности K с центром O, проходящей через A.

Решение.

I. Анализ. Если точка X есть центр искомой окружности (см. фиг. 30), то эта точка X лежит, во-первых, на прямой OA (в силу теоремы: если две окружности касаются, то точка касания лежит на линии центров) и, во-вторых, на срединном перпендикуляре отрезка AB, так как этот срединный перпендикуляр является геометрическим местом точек, равноудалённых от A и B.

II. Построение.

1. Проводим срединный перпендикуляр CD отрезка AB (с помощью двух окружностей одного радиуса с центрами в A и B, не показанных на чертеже).
2. Проводим радиус OA и продолжаем его в обе стороны.
3. Берём точку пересечения X прямых CD и OA.
4. Проводим окружность K_1, с центром в точке X, проходящую через A.

III. Доказательство.

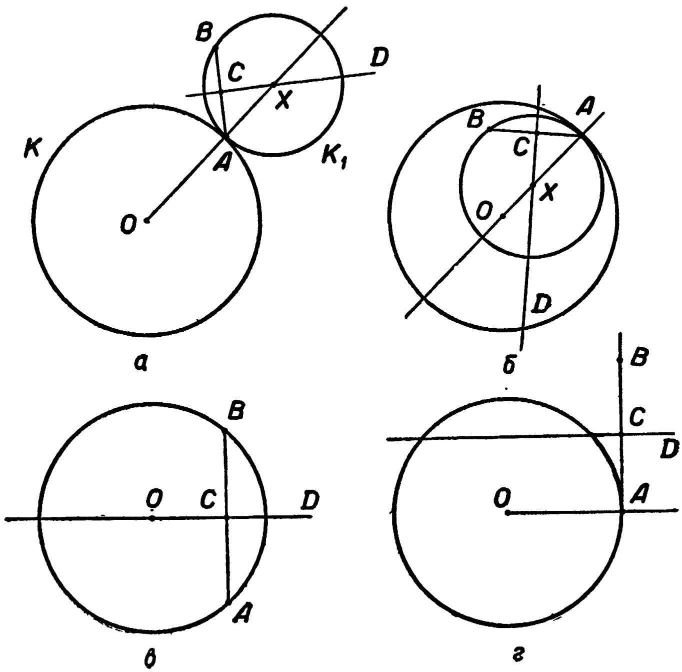
Окружность K_1, проведённая через точку A, пройдёт и через точку B, так как $AX = BX$ по свойству срединного перпендикуляра отрезка. Окружность K_1 касается окружности K в точке A в силу теоремы «если две окружности имеют общую точку A на линии их центров, то они касаются». Таким образом, окружность K_1 — искомая.

IV. Исследование.

Пункты 1 и 2 указанного выше построения выполнимы всегда, но пункт 3 лишь при условии, что прямая CD не параллельна прямой OA, т. е. если прямая AB не перпендикулярна к OA. Предполагая, что это условие выполнено, имеем одну и только одну окружность K_1, удовлетворяющую условиям задачи, независимо от того, находится ли данная точка B вне K (фиг. 32*а*), внутри K (фиг. 32*б*), на K (фиг. 32*в*). В последнем случае искомая окружность совпадает с данной.

Если AB перпендикулярна к OA (фиг. 32, *г*), то задача не имеет решения, так как нет точки, которая лежала бы одновременно на прямых OA и CD. Однако, проводя через точку A окружности с центрами, расположенными на прямой OA и неограниченно удаляющимися от A, мы будем проводить их всё ближе и ближе к B, приближаясь к этой точке как угодно близко, и это даёт основание утверждать, что в этом особом случае тоже имеется решение, но *выродившееся*: окружность K_1 вырождается в прямую, которую можно рассматривать как окружность бесконечно большого радиуса.

Указание, сделанное в тексте задачи о том, что даны три *различные* точки A, B, O, избавляет решающего от необходимости дополнить исследование рассмотрением случаев, когда две из этих точек или даже все три совпадают, что



Фиг. 32.

тоже имеет интерес и может быть предметом дальнейшей работы. Например, при совпадении A и B задача имеет бесконечное число решений: окружностью K_1 является любая окружность с центром на OA, проходящая через A; все эти окружности составляют так называемый параболический их пучок.

В качестве второго примера возьмём ещё задачу. Построить прямоугольный треугольник по данной его гипотенузе c и сумме катетов s.

Прежде всего замечаем, что задача не имеет решения, если $c \geqslant s$, так как сумма двух сторон треугольника всегда больше третьей его стороны. Условие $c \leqslant s$, таким образом, необходимо для возможности решения задачи. Достаточно ли оно? Ясно, что при данной гипотенузе сумма катетов не может быть произвольно большой, но точный ответ на вопрос о наибольшем возможном значении s даст только детальное исследование.

В анализе легко убеждаемся, что задача сводится к построению вспомогательного треугольника по двум данным его сторонам c и s и углу в 45°, лежащему против стороны c. Построение и доказательство не представляют после этого никаких затруднений. При исследовании приходится различать три случая, сравнивая отрезок c с катетом h равнобедренного прямоугольного треугольника, имеющего гипотенузой s: если $c < h$, решений нет; если $c = h$, существует один треугольник (равнобедренный), удовлетворяющий условиям задачи; если $c > h$, существует два треугольника, отличающихся только положением и удовлетворяющих условиям задачи. Таким образом, необходимым и достаточным условием существования решения является выполнение неравенства $h \leqslant c < s$.

В VIII классе желательно вернуться к этой задаче и рассмотреть её решение алгебраическим методом, получая выражение для катетов искомого треугольника в виде $0{,}5s \pm \sqrt{0{,}5c^2 - 0{,}25s^2}$. Эта формула даёт точное аналитическое решение задачи, но основанное на ней построение оказывается более сложным, чем указанное выше.

Отметим один любопытный вывод, вытекающий из неравенства $h \leqslant c < s$. Так как $h = s : \sqrt{2}$, то $c < s \leqslant c\sqrt{2}$, т. е. сумма катетов любого прямоугольного треугольника, будучи больше гипотенузы, всегда не больше диагонали квадрата, стороной которого является эта гипотенуза. Таким образом, переменная сумма катетов треугольника с данной гипотенузой имеет минимум, равный этой гипотенузе и достижимый только при вырождении треугольника в отрезок, имеет и максимум, достигаемый в равнобедренном прямоугольном треугольнике и равный произведению длины гипотенузы на $\sqrt{2}$. Типичная задача математического анализа на разыскание экстремальных значений оказывается в данном случае так просто разрешимой элементарными средствами.

Отметим большой интерес, какой неизменно вызывают задачи на построение «с препятствиями», например, построения на ограниченном куске плоскости. Так, после знакомства со свойством высот треугольника пересекаться в одной точке хорошо предложить провести высоту через недоступную вершину треугольника. Много таких задач можно найти в книгах [IV, 56, 15].

Научить семиклассников полностью решать несложные задачи на построение вполне возможно, но на это надо тратить примерно 25% всего времени, отводимого на занятия геометрией. Такой расход вполне оправдывается общим повышением качества усвоения геометрического материала.

§ 16. Внеклассная работа по геометрии в семилетней школе.

Общие соображения о внеклассной работе по математике были изложены выше, в § 22 1-й части, но внеклассная работа по геометрии в VI и VII классах имеет особо важное значение, и на ней приходится остановиться отдельно.

Неувязка между практическими задачами геометрии (прежде всего измерением длин, площадей, объёмов, задачами, которые по общему признанию, достаточно чётко отражённому в «Объяснительной записке» к ныне действующей программе, должны решаться в семилетней школе) и принятым в настоящее время порядком изучения систематического курса геометрии (относящим все эти измерения на VIII—X классы) может быть устранена, если учитель умеет хорошо поставить внеклассную работу по геометрии, вовлекая в неё всех или почти всех учащихся VI и особенно VII класса. Работа эта с успехом может идти в следующих направлениях.

1. Изучение способов измерения площади произвольного многоугольника. Измерение площади прямоугольника прочно усваивается ещё в начальной школе и повторяется в V классе. Не углубляя теоретической стороны вопроса, поставим себе целью научиться заменять любую многоугольную фигуру равновеликим прямоугольником, что, как известно, всегда возможно с помощью простого разрезания фигуры и перегруппировки её частей. Понятие об этом может быть дано в V классе, но в VI и VII классах имеется уже всё, что необходимо для полноценного доказательства ряда теорем о равновеликости разных многоугольников и прямоугольника, как, например, теоремы о равновеликости параллелограма и прямоугольника с одинаковыми основаниями и высотой. В порядке внеклассной работы семиклассники могут изучить вопрос об измерении площади любого многоугольника и решить множество практических задач, особенно в условиях работы сельской школы.

II. Измерение длины окружности и площади круга в VII классе нельзя поднять на большую высоту по сравнению с тем, что было возможно уже в V классе (см. выше, § 7), но возвратиться к формулам $C = 2\pi r$ и $K = \pi r^2$ и сделать их прочным достоянием учащихся совершенно необходимо.

III. При изучении площадей неизбежно приходят к задаче определения площади участка с произвольной криволинейной границей. Для внеклассной работы много хорошего материала даёт книга [IV, 46].

IV. Изучение способов измерения объёмов тел представляет большой интерес для оканчивающих семилетнюю школу. Опираясь на уменье найти объём любого прямоугольного параллелепипеда, нетрудно подойти к формуле объёма любой прямой и даже наклонной призмы, принимая без доказательства, что всякая вырезанная из призмы (плоскостями, параллельными её основанию) «пластинка» толщиной в единицу длины содержит столько кубических единиц, сколько квадратных единиц содержит основание призмы, а также к формуле объёма цилиндра. Манипуляции с полыми моделями призмы, цилиндра, пирамиды, конуса, имеющими равновеликие основания и равные высоты, подводят к правилам определения объёмов, интересным и полезным для оканчивающих семилетнюю школу, а теоретически обосновываемых лишь в X классе. Сюда хорошо добавить также приближённое вычисление объёма тела, ограниченного с одной стороны плоскостью, посредством умножения площади основания на среднее арифметическое высот, проведённых через ряд точек основания; этим способом обычно вычисляется объём произведённых земляных работ.

Практический интерес представляет уменье вычислить объём усечённого конуса (кадка, древесный ствол), бочки, стога сена. Многочисленные относящиеся сюда приближённые правила можно найти в сельскохозяйственном колхозном календаре-справочнике.

V. Ценный материал для внеклассной работы по геометрии в VII классе дают простейшие построения и измерения на местности, начиная с глазомерного определения расстояний во время прогулок (с проверкой измерением шагами) и кончая съёмкой несложных планов (проще всего с использованием компаса-буссоли). В школе особенно легко применимы приёмы военной топографии, знакомство с которой очень полезно для учителя.

Таким образом, для внеклассной работы по геометрии открываются в VI и VII классах огромные возможности, и если учитель использует хотя бы малую их часть, он существенно поднимет практическую подготовленность своих учащихся.

Глава IV

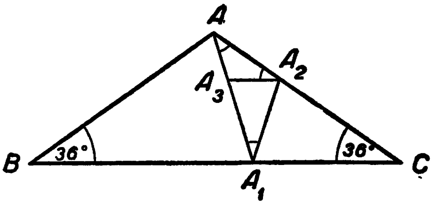
ИЗМЕРЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

§ 17. Длина отрезка и отношение отрезков.

Представление о длине отрезка как числе, которое показывает, сколько раз единица длины или какая-либо часть этой единицы укладывается (содержится) в этом отрезке, привычно учащимся с начальной школы и вполне соответствует повседневной практике. Это убеждение в возможности точно выразить длину любого отрезка рациональным числом, приняв любой другой отрезок за единицу, не соответствует действительности, но оно ничуть не мешает совершенно правильно строить изложение первых глав геометрии, где понятие длины отрезка в сущности излишне: сравнение отрезков и четыре действия над ними (сложение, вычитание, умножение на натуральное число, деление на натуральное число) можно выполнять чисто построительным путём, вовсе не используя чисел, выражающих их длины. Но уже при рассмотрении подобных фигур необходимо понятие отношения отрезков. У Евклида понятие отношения отрезков вводится тоже чисто геометрически, измерением отрезков он нигде не пользуется и не может пользоваться, так как в те времена никаких чисел, кроме рациональных, не знали, а недостаточность рациональных чисел для измерения отрезков была хорошо известна. В наше время общепризнана целесообразность другого пути: введения иррациональных чисел и выяснения возможности измерения любого отрезка при произвольной единице длины, причём длина отрезка выражается всегда некоторым действительным числом, рациональным или иррациональным. Существующая программа чётко указывает относящийся сюда небольшой материал, подлежащий изучению в самом начале курса геометрии VIII класса; учебник Киселёва излагает этот материал в полном соответствии с программой. Этот раздел справедливо считается одним из самых трудных в элементарном курсе геометрии, и причина этой трудности совершенно ясна: общее понятие длины отрезка устанавливается с помощью понятия действительного числа, а это последнее понятие, как мы видели выше (в § 28 III части), усваивается в школе нередко плохо. Надо добиться более отчётливого усвоения понятия действительного числа в той форме, в какой оно наиболее доступно учащимся VIII класса, а именно как бесконечной десятичной дроби, выражающей рациональное число, если она периодическая (конечная десятичная дробь рассматривается как периодическая с периодом из одной цифры 0), и иррациональное, если она непериодическая, причём процесс образования бесконечной десятичной дроби становится вполне понятным, если его иллюстрировать именно измерением длины отрезка, так что необходимо совместное рассмотрение вопроса об измерении отрезка и обычно относимого к курсу алгебры вопроса о действительном числе. На этот путь становится до некоторой степени и школьный учебник геометрии Киселёва, приводящий в мелком шрифте ряд предложений о действительных числах (§§ 151—154 по изданию 1949 г.); последовательнее, полнее и доступнее для учащихся это совместное изложение дано в статье [III, 2в], которую усиленно рекомендуем читателю.

Понятие отрезка, соизмеримого и несоизмеримого с другим отрезком, как в школьном учебнике геометрии Киселёва, так и в этой статье даётся на основе понятия общей меры, причём в статье несоизмеримость стороны и диагонали квадрата доказывается проще и яснее, чем в учебнике, без использования того способа разыскания наибольшей общей меры двух отрезков, который известен под названием «алгорифма Евклида». Здесь намечена тем самым возможность некоторого изменения изложения всего вопроса, реализованная в учебнике Н. А. Глаголева [IV, 19], где выброшено даже понятие общей меры: отрезок называется соизмеримым с другим отрезком, если, приняв этот последний за единицу, получаем для длины первого рациональное число, и несоизмеримым с ним, если это число иррационально. При этом изложении зависимость геометрических выводов от арифметических понятий ещё сильнее.

Оставаясь при изложении, предусмотренном программой, и включая как понятие общей меры, так и алгорифм Евклида, можно рекомендовать наряду с рассмотрением вопроса о несоизмеримости стороны квадрата и его диагонали рассмотреть ещё один пример пары несоизмеримых отрезков, а именно: основание и боковую сторону равнобедренного треугольника с углом при основании в 36° (фиг. 33), в котором несоизмеримость устанавливается ещё проще, чем в случае квадрата: отложив боковую сторону AB такого треугольника на его основании BC, замечаем, что она в нём содержится один и только один раз, а остаток A_1C вместе с отрезками $AA_1 = A_1C$ и AC образует равнобедренный треугольник с такими же углами, что и данный. Повторение операции даёт бесконечную последовательность таких треугольников ABC, A_1AC, A_2AA_1, A_3AA_2, A_4AA_3 и т.д., в то время как при соизмеримости отрезков AB и BC число остатков A_1C, AA_2... было бы конечным. Рассмотрение примеров несоизмеримости отрезков, если оно проводится с должной полнотой и ясностью, является для учащихся самым ярким и наиболее запоминающимся пунктом всего раздела, и ему надо уделить достаточно внимания. Только оно даёт учащимся то, что в данном случае важнее всего—убеждение в том, что в дальнейшем наряду со случаем соизмеримости отрезков необходимо рассматривать и случай их несоизмеримости.



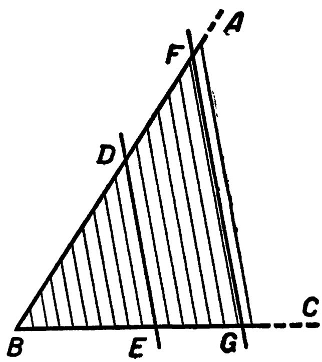
Фиг. 33.

Целесообразность усиления роли арифметических понятий при рассмотрении вопроса о длине отрезка, а также об измерении других геометрических величин, в частности усиление роли общепринятой десятичной нумерации, убедительно показано в книге [IV, 35], содержащей вообще много поучительного, однако согласиться с её выводами полностью нельзя. Следуя этим выводам, учебник Глаголева, как уже было отмечено, выбрасывает понятие общей меры, и таким образом на вопрос, соизмеримы ли отрезки в 1 *см* и $\frac{1}{3}$ *см*, ответить, следуя точно пути, указанному в этом учебнике, приходится так: длина второго из этих отрезков выражается, если принять первый за единицу измерения, бесконечной десятичной периодической дробью 0,333..., которая равна рациональному числу $\frac{1}{3}$, а потому эти отрезки соизмеримы. Это не упрощение, а усложнение обычной трактовки вопроса с помощью понятия общей меры!

Отметим очень распространённую среди учащихся ошибку, состоящую в смешении понятий иррационального отрезка и несоизмеримых отрезков. Два отрезка несоизмеримы, если у них нет общей меры; если один из них принят за единицу, длина другого выражается иррациональным числом. Иррациональным же отрезком называется всякий отрезок, несоизмеримый с принятой единицей длины. Два иррациональных отрезка, будучи каждый в отдельности несоизмерим с единицей, могут тем не менее иметь общую меру и быть соизмеримыми друг с другом; таковы, например, отрезки длиной $2\sqrt{2}$ и $3\sqrt{2}$, несоизмеримые с единицей; но имеющие друг с другом общую меру, а именно отрезок длины $\sqrt{2}$.

Зная длины двух отрезков, измеренных одной и той же единицей длины, всегда можно найти частное от деления этих двух длин, т. е. отношение этих двух отрезков. Важно выяснить, что отношение отрезков не меняется от изменения единицы длины. Проще всего принять за единицу длины второй из взятых отрезков; тогда длина первого отрезка и отношение первого отрезка ко второму выражается одним и тем же числом, рациональным в случае, если отрезки соизмеримы, и иррациональным, если они несоизмеримы. Представляя это число в виде десятичной дроби, имеем периодическую бесконечную дробь в первом случае (в частности, возможна конечная дробь, как периодическая с периодом из одной цифры 0) и бесконечную непериодическую во втором.

Полное уяснение этих подробностей совершенно необходимо для усвоения доказательства нескольких теорем, где идёт речь об отношении отрезков. Рассмотрим одну из них, теорему о пропорциональности четырёх отрезков, отсекаемых от сторон угла параллельными прямыми. Пусть даны две параллели DE и FG, отсекающие от сторон угла ABC четыре отрезка BD, BF, BE, BG (см. фиг. 34), и надо показать, что отношение отрезков первой пары равно отношению отрезков второй пары. Случай, когда отрезки BD и BF соизмеримы, не вызывает никаких затруднений: взяв общую меру этих отрезков, представляющую собой некоторый отрезок k, откладываем его на лучe BA от точки B и проводим через отмеченные точки прямые, параллельные DE. На другой стороне угла ABC получаются равные (между собой, но не с k) отрезки, каждый из которых есть общая мера отрезков BE и BG. Обозначая эту общую меру через k_1, имеем $BF = nk$, $BD = mk$, $BG = nk_1$, $BE = mk_1$ где m и n — некоторые натуральные числа, отсюда и находим отношения $BF : BD = n : m$, $BG : BE = n : m$, обнаруживая тем самым их равенство. Значительно труднее второй случай, когда отрезки BF и BD несоизмеримы, но и здесь можно добиться полной ясности, если сам учитель вполне уяснил себе все детали вопроса. Желая найти отношение $BF : BD$, принимаем BD за единицу и делим этот отрезок сперва на 10 равных частей, как показано на фигуре 34. Обозначив каждую часть через k (так что $BD = 10k$), имеем $mk < BF < (m+1)\,k$, где m — некоторое натуральное число (равенство $BF = mk$ невозможно, так как тогда отрезки BD и BF были бы соизмеримы). Проводя параллели, получаем $BE = 10\,k_1$, где k_1 — некоторый отрезок, $mk_1 < BG < (m+1)\,k_1$, а затем устанавливаем, что $m \cdot 0{,}1 < BF \cdot BD < (m+1) \cdot 0{,}1$, $m \cdot 0{,}1 < BG : BE < (m+1) \cdot 0{,}1$, т. е. что числа, выражающие отношения $BF : BD$ и $BG : BE$, имеют одинаковые приближённые значения, взятые до десятых по недостатку; другими словами, они имеют одинаковые целые части и поровну десятых долей. Далее делим BD уже не на 10, а на 100 равных частей и, повторяя всю операцию, убеждаемся, что одинаковы и цифры сотых долей этих отношений; затем делим BD на 1 000, 10 000, 100 000 и т. д. равных частей и устанавливаем, что одинаковы и цифры тысячных, десятитысячных, стотысячных и т. д. долей,



Фиг. 34.

откуда и заключаем о равенстве этих отношений. Именно это доказательство и дано как в учебнике Киселёва, так и в учебнике Глаголева, но только с меньшими подробностями, которые совершенно необходимы для обеспечения ясности.

§ 18. Измерение углов и дуг окружности.

Измерение длины прямолинейных отрезков значительно проще, чем измерение длин кривых линий, площадей и объёмов; это объясняется тем, что для отрезков прямой понятия равенства и равновеликости совпадают, а в других случаях такого совпадения нет. Два отрезка прямой имеют одну и ту же длину тогда и только тогда, когда они равны, т. е. совпадают при наложении, в то время как две фигуры могут иметь одну и ту же площадь, не будучи равными, две дуги кривых линий могут иметь одну и ту же длину, будучи совершенно различными по форме. Тем же свойством, что и прямолинейные отрезки, обладают и углы, и дуги одной и той же окружности (или окружностей равных радиусов), а в силу этого учение об измерении углов и учение об измерении дуг могут быть построены совершенно одинаково с учением об измерении прямолинейных отрезков. При аксиоматическом изложении геометрии учение об измерении во всех этих трёх случаях полностью совпадает, основываясь на свойстве непрерывности этих трёх категорий геометрических объектов, которое выражается аксиомами Архимеда и Кантора для прямой и соответствующими теоремами для углов и дуг. Два угла могут быть соизмеримы, как, например, в прямоугольном треугольнике с катетом, равным половине гипотенузы, а могут быть и несоизмеримыми, как, например, в египетском треугольнике, т. е. в треугольнике со сторонами в 3, 4, 5 единиц длины (доказательство можно найти в статье [IV, 57]). Приняв за единицу измерения углов какой-либо угол, например, прямой угол, или угол в одну девяностую часть прямого, называемый угловым градусом, можно точно выразить меру любого другого угла посредством действительного числа, рационального или иррационального. Существенное значение имеет пропорциональность дуг окружности и центральных углов, опирающихся на них; доказательство этой пропорциональности проводится в два приёма: отдельно для случая соизмеримости и несоизмеримости взятых дуг. В школьном курсе геометрии это доказательство обычно вовсе опускается, но практически пропорциональность дуг и центральных углов используется (в транспортире) уже с первых уроков геометрии.

Рассматривая измерение углов и дуг, надо иметь в виду одну трудность. В то время как в VII классе учащиеся знакомятся со способами деления отрезка на произвольное число n равных частей, при делении углов они ограничиваются случаями $n = 2, 4, 8, \ldots$, вообще 2^n. При делении угла на другие числа равных частей в VII классе приходится обращаться, кроме циркуля и линейки, ещё к другим инструментам, проще всего к транспортиру, и выполнять построение только приближённо.

Тот же вид измерения величины (случай совпадения понятия равновеликости с понятием равенства) мы имеем в стереометрии, а именно при измерении двугранных углов.

Измерение длины окружности и дуг окружности производится на основании теории пределов и будет рассмотрено в следующей главе.

§ 19. Площади многоугольников.

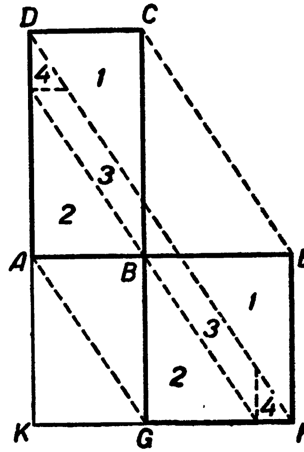
Первоначальное представление о площади фигуры как о числе квадратов со стороной в единицу длины и долей таких квадратов полностью применимо к прямоугольникам с рациональными длинами сторон, и учащиеся ещё в начальной школе овладевают им в применении к прямоугольникам, стороны которых выражаются целыми числами. В V классе рассматриваются уже прямоугольники со сторонами, длины которых выражаются произвольными рациональными числами. Все практические применения понятия площади полностью обеспечиваются этим примитивным представлением о ней, и, приступая к углублённому изучению вопроса о площади многоугольников в курсе геометрии VIII класса, надо начать с напоминания о правиле вычисления площади прямоугольника со сторонами, соизмеримыми с единицей длины. В учебнике геометрии Киселёва это напоминание сделано в § 246, причём случай, когда стороны выражаются целыми числами, рассмотрен в общем виде (предполагается, что основание равно целому числу b линейных единиц, высота — целому числу h тех же единиц), а случай, когда стороны выражаются дробными числами — только на частном примере (когда основание $3\frac{1}{2}$ линейной единицы, высота $4\frac{3}{5}$ той же единицы). Желательно дать доказательство формулы $S = bh$ и для второго случая в общем виде, что очень нетрудно сделать: если как b, так и h соизмеримы с единицей, то существует отрезок k, содержащийся целое число раз и в b, и в h, и в единице, так что $b = mk$, $h = nk$, $1 = lk$, где буквы m, n, l означают натуральные числа. Приняв временно этот отрезок k за новую единицу длины и построив новую единицу площади, имеем случай прямоугольника с целыми сторонами, и его площадь равна $m \cdot n$ новых квадратных единиц, т. е. квадратов со стороной k. Прежняя квадратная единица содержит l^2 новых, а потому искомая площадь в старых квадратных единицах выражается формулой $S = \frac{m \cdot n}{l^2} = \frac{m}{l} \cdot \frac{n}{l} = \frac{mk}{lk} \cdot \frac{nk}{lk} = \frac{b}{1} \cdot \frac{h}{1} = bh$. Не лишне подчеркнуть, что формула $S = bh$ выражает площадь прямоугольника в предположении, что длины b и h выражены в одинаковых линейных единицах, а площадь S — в соответствующих квадратных единицах; ведь и в старших классах нередко допускаются ошибки вроде такой: площадь прямоугольника со сторонами 3 *см* и 4 *дм* получается равной $3 \cdot 4 = 12$ (неизвестно каких единиц). Необходимо обеспечить полную ясность в вопросе о том, что такое квадратная единица (единица площади), соответствующая данной линейной единице: это площадь квадрата со стороной, равной линейной единице. Только при таком выборе единиц имеет место формула $S = bh$ и другие обычные формулы площадей фигур.

Таким образом, вопрос о площади прямоугольника со сторонами, длины которых выражаются рациональными числами, решается в школе безупречно и с научной стороны, и в смысле доступности. Но дальше начинаются существенные затруднения: программа требует исчерпывающего изучения вопроса о площадях многоугольников в VIII классе, а в школьном руководстве Киселёва этот вопрос рассматривается после главы, излагающей элементы теории пределов, и уже доказательство формулы $S = bh$ для площади прямоугольника со сторонами, несоизмеримыми с единицей, проводится со ссылкой на теорему о пределе произведения, в то время как учащиеся знакомятся с понятием предела только в IX классе. Учитель обычно выходит из этого затруднения, вовсе не рассматривая доказательства формулы $S = bh$ для случая несоизмеримости, а просто указывая, что такое доказательство возможно.

Вопрос об измерении площади прямоугольника можно изложить и без обращения к теории пределов (см., например, книги IV, 1, 22]), не требует её, как мы увидим дальше, и измерение площади любого многоугольника, но без неё нельзя обойтись при измерении площади круга, как и при постановке вопроса о площади фигуры с произвольным контуром. Поэтому лучшим выходом из указанного затруднения при выводе формулы площади прямоугольника является такой: тщательно разобрав первые два случая, когда стороны выражаются натуральными и рациональными числами, учитель откладывает доказательство формулы $S = bh$ для случая иррациональности сторон до IX класса, когда будет изучена глава о пределах, отмечая теперь же, что такое доказательство возможно.

Раз вопрос о площади прямоугольника так или иначе решён, дальнейшее рассмотрение вопроса о площадях многоугольников идёт без всяких осложнений. Полезно ввести такую аксиому, естественно вытекающую из указанного выше примитивного представления о площади фигуры: площадь фигуры не меняется от произвольной перестановки её частей. Если предварительно ввести легко определяемые понятия равносоставленности и равновеликости фигур, этой аксиоме можно дать более краткую формулировку: равносоставленные фигуры равновелики. При аксиоматическом изложении геометрии эта аксиома превращается в теорему (см., например, Прибавление D в книге [IV, 1]), в школьном же преподавании нет никакой надобности говорить об её доказательстве. Основываясь на этой аксиоме, вывод всех теорем о площадях прямолинейных фигур сводим к доказательству равносоставленности каждой из этих фигур с некоторым прямоугольником.

Очень желательно обеспечить полную ясность понимания терминов «равенство», «равносоставленность», «равновеликость» и их взаимной связи. Две фигуры равны, если могут быть совмещены при наложении; они равновелики, если имеют одну и ту же площадь; они равносоставлены, если одну из них можно разрезать на конечное число частей, сочетание которых в ином порядке даёт вторую фигуру, или, другими словами, если обе эти фигуры можно разрезать на конечное число попарно равных частей. Если две фигуры равны, они тем самим и равновелики, и равносоставлены. Если две фигуры равносоставлены, они могут быть неравными, но обязательно равновелики. Если два многоугольника равновелики, они могут быть неравными, но они обязательно равносоставлены: всякие два многоугольника, имеющие одну и ту же площадь, можно разрезать на конечное число попарно равных частей. Доказательство этой интересной теоремы можно найти, например, в брошюре [IV, 34г] В. Ф. Кагана. Так, например, два равновеликих прямоугольника всегда равносоставлены. Фигура 35, где $AB \cdot BC = GF \cdot FE$, показывает, как надо разрезать прямоугольник $ABCD$, чтобы получились 4 части, из которых можно составить равновеликий прямоугольник $GFEB$. Чертёж этот взят из книги [IV, 19], где этот частный случай общей теоремы играет большую роль (чертёж воспроизведён даже на обложке книги).



Фиг. 35.

Вопрос о площади фигуры, ограниченной произвольным контуром, будет рассмотрен в следующей главе, а вопросы об объёмах и поверхностях тел — в главе VI.

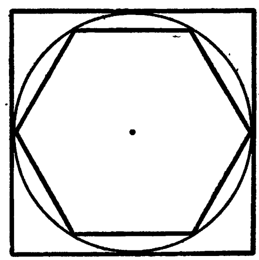
Глава V

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛОВ

§ 20. Длина окружности.

Длина дуги любой кривой на практике устанавливается приближённо посредством измерения длины ломаной, вписанной в эту дугу; если кривая выпукла, то это даёт приближение по недостатку; приближение по избытку в этом случае получается посредством измерения длины ломаной, описанной около этой дуги, т. е. составленной из отрезков касательных (концы обеих ломаных должны, конечно, совпадать с концами дуги). Интуитивно ясно, что в случае обычной «гладкой» кривой при идеально точном построении ломаных и столь же точном измерении всех их звеньев длина ломаной определяется тем точнее, чем короче эти звенья и чем больше, следовательно, их число; опыт показывает, однако, что при практическом осуществлении этих измерений брать звенья очень мелкими невыгодно, так как тогда начинают заметно сказываться неизбежные погрешности измерения каждого отдельного малого звена. Оговорка относительно условия «гладкости» кривой необходима, так как более детальный анализ показывает, что существуют непрерывные кривые с бесконечной длиной дуги; такова, например, любая дуга кривой $y = x \sin \frac{1}{x}$, содержащая точку $x = 0$, $y = 0$.

Желая уточнить этот примитивный способ измерения длины, встречаются прежде всего с необходимостью точно установить, что такое длина дуги кривой, в частности, что такое длина дуги окружности. Длина прямолинейного отрезка, соизмеримого с единицей, есть число, показывающее, сколько единиц длины или их частей в нём содержится. Подобный подход к вопросу о длине дуги невозможен, так как никакой прямолинейный отрезок не может быть совмещён с дугой. Если сказать, что длина дуги есть длина отрезка, который получается при спрямлении этой дуги, предполагаемой гибкой и нерастяжимой, то сейчас же неизбежно возникает вопрос о том, что такое нерастяжимость. Говоря, что какая-нибудь нить или струна гибки, но нерастяжимы, если они могут менять свою форму, не меняя длины, мы предполагаем, что понятие длины кривой уже установлено, и попадаем, таким образом, в порочный круг. Длину дуги кривой определяют как предел, к которому стремится длина ломаной, вписанной в эту дугу и имеющей концы в концах дуги, если длина каждого звена ломаной стремится к нулю (при условии, разумеется, что этот предел существует). Общепринятое изложение вопроса о длине окружности исходит из этого определения: сперва доказывают простые предложения об объемлющей и выпуклой объемлемой, потом о монотонности последовательности длин правильных ломаных, вписанных в данную дугу, при условии последовательного удвоения числа их звеньев, наконец, об ограниченности сверху последовательности этих длин. Заключая, что существует предел этой последовательности, называют его длиной этой дуги, т. е. определяют понятие длины дуги как этот предел, отмечая полное согласие этого определения с тем интуитивным представлением о длине дуги, о котором была речь выше. Для полноты изложения необходимо ещё доказать, что этот предел не зависит от того, сколько звеньев имела правильная ломаная, длина которой служила первым членом последовательности: мы могли взять первую правильную ломаную из любого числа звеньев и начать с его удвоения; все такие последовательности, как можно доказать, имеют один и тот же предел. В школьном изложении доказательство опускают, ограничиваясь только указанием на его возможность, как опускают и доказательство того, что тот же предел имеет последовательность длин не только правильных, но и любых ломаных, вписанных в данную дугу, лишь бы только каждое их звено стремилось к нулю. Это предложение необходимо, чтобы установить свойство аддитивности длины дуги (если дугу AB разбить на две части AC и CB и найти длины дуг AC, CB, AB, то окажется, что длина AB равна сумме длин AC и CB). Очень желательно рассмотрение, кроме вписанных, также и описанных ломаных: тогда получаются две последовательности, одна возрастающая и ограниченная сверху, другая убывающая и ограниченная снизу, имеющие общий предел, который и принимается за длину дуги. Дальше всё идёт без особых затруднений: устанавливается постоянство отношения длины окружности к её диаметру, выводятся формулы для длины окружности и её дуги, даётся понятие о вычислении π. Безупречное изложение вопроса о длине дуги окружности полностью в IX классе осуществить нельзя. Желательна, однако, точная формулировка всех относящихся сюда предложений с разъяснением их смысла на наглядных частных примерах. Уяснению сути дела и прочности запоминания весьма способствует фактическое проведение вычисления двух-трёх первых членов использованных последовательностей. Если взять вписанный в окружность правильный шестиугольник и описанный около неё квадрат (фиг. 36), то сразу приходим к неравенству $3 < \pi < 4$. Используя формулы:



Фиг. 36.

$$a_{2n}^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - 0{,}25a_n^2} \quad \text{и} \quad b_n = a_n r : \sqrt{r^2 - 0{,}25\,a_n^2},$$

выражающие длину стороны правильного вписанного многоугольника, имеющего двойное число сторон, и длину стороны правильного описанного многоугольника, имеющего столько же сторон, берём последовательно $n = 6, 12, 24, \ldots$ и получаем, полагая $r = 1$:

$a_6 = 1{,}0000\ldots$	$b_6 = 1{,}1547\ldots$	$3{,}000\ldots < \pi < 3{,}464\ldots$
$a_{12} = 0{,}5176\ldots$	$b_{12} = 0{,}5358\ldots$	$3{,}105\ldots < \pi < 3{,}214\ldots$
$a_{24} = 0{,}2610\ldots$	$b_{24} = 0{,}2632\ldots$	$3{,}132\ldots < \pi < 3{,}158\ldots$
$a_{48} = 0{,}1308\ldots$	$b_{48} = 0{,}1310\ldots$	$3{,}139\ldots < \pi < 3{,}144\ldots$
$a_{96} = 0{,}0654\ldots$	$b_{96} = 0{,}0654\ldots$	

Тем самым цифры целых, десятых и сотых искомого числа π вполне определены: с точностью до сотых это число равно 3,14. Вычисление здесь надо вести со строгим учётом погрешностей, находя необходимое число запасных цифр из-за потери точности при вычитании. Если достаточно повысить точность первых шагов, то вычисление можно вести и дальше; для π получается значение 3,14159265... . Совершенно достаточно запомнить результат его округления с 5 значащими цифрами (с 4 десятичными знаками), а именно $\pi \approx 3{,}1416$. Этому числу соответствует легко запоминаемая фраза: «Что я знаю о кругах?», указанная Я. И. Перельманом. Считая число букв в каждом последовательном слове этой фразы, получаем последовательные цифры этого приближённого значения. Точность этого приближения весьма велика и далеко превосходит требования обычной практики. Так, вычисляя посредством этого значения π длину окружности с диаметром в 10 *м*, мы получим ошибку, меньшую чем 0,08 *мм*. Запомнить надо и удобное «архимедово» значение $\pi \left(3\frac{1}{7}\right)$, дающее при столь малом знаменателе ошибку, не достигающую даже 0,002.

Некоторые преподаватели практикуют приближённое вычисление числа π с применением тригонометрических функций. Сторона правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса 1, равна $2\sin\alpha$, где $\alpha = 180° : n$, а описанного — $2\operatorname{tg}\alpha$. Полагая, например, $n = 100$, имеем $\alpha = 1°48'$, и по четырёхзначной таблице находим, что полупериметр правильного 100-угольника, вписанного в окружность радиуса 1, приближённо равен 3,14, тому же приближённо равен и полупериметр описанного 100-угольника. Приняв во внимание наибольшую возможную ошибку значений, указанных в четырёхзначной таблице, приходим к заключению, что $3{,}135 < \pi < 3{,}145$. Находя синус и тангенс угла в $1°48'$ по более точной таблице [V, 18], придём к неравенству $3{,}14105 < \pi < 3{,}14855$. Этот способ приближённого вычисления π имеет несомненные преимущества перед рассмотренным выше, так как гораздо короче и может быть полностью проведён самими учащимися. Против него возражают, указывая, что в нём имеется порочный круг: вычисление π предшествует составлению тригонометрических таблиц. Исторически это так, но составление этих таблиц возможно и без предварительного вычисления π (см. первый из трёх способов, рассмотренных ниже, в § 24 V части).

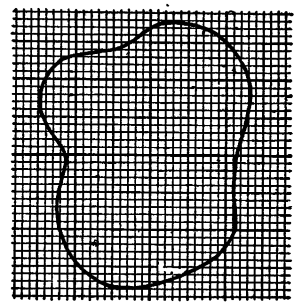
Вычислять выражения вида $a\pi$ и $a : \pi$, где a — некоторое данное число, приходится в школьной практике очень часто, и непростительно, если учитель не использует той экономии, какую даёт в этих случаях применение таблицы произведений π, т. е. таблицы длины окружности, имеющейся в том сборнике таблиц, какой есть на руках у девятиклассников.

Полное изложение вопроса о длине окружности, рассчитанное не на учащихся, а на учителя, можно найти в статье [IV, 55]. Изложение, основанное не на понятии предела, а на применении аксиомы Кантора, дано в книге [IV, 48].

Обращаем внимание учителя, как выгодно при решении задач на вычисление длины дуги окружности использовать таблицу радианной меры, с которой учащиеся знакомятся обычно только в курсе тригонометрии. Обозначая радианную меру дуги в $n°$ через $\operatorname{Arc} n°$, имеем $\operatorname{Arc} n° = \frac{\pi n°}{180°}$, и формула $s = \frac{\pi r n°}{180°}$, связывающая радиус r, длину дуги s и градусную её меру n, принимает более простой вид: $s = r \operatorname{Arc} n^\circ$. Возьмём для примера задачу, рассмотренную в школьном учебнике геометрии Киселёва (§ 240 по изданию 1948 г.): «Вычислить с точностью до 1 *мм* радиус такой окружности, дуга которой, содержащая $81^\circ 21' 36''$, равна 0,452 *м*». По четырёхзначной таблице радианной меры находим $\operatorname{Arc} 81^\circ 21' 36'' = 1{,}4200$, а потому $0{,}452 = 1{,}4200 r$, откуда $r = 0{,}452 : 1{,}42 = 0{,}318$ *м*. Здесь следовало бы задать угол не в секундах, а только в минутах ($81^\circ 22'$), что не повлияло бы на окончательный ответ ($\operatorname{Arc} 81^\circ 22' = 1{,}4201$, $r = 0{,}452 : 1{,}4201 = 0{,}318$ *м*), но устранило бы имеющееся в условии задачи резкое несоответствие между точностью, с какой даны длина дуги и градусная её мера (0,0005 от 0,452 составляет около 0,1%, а $0'',5$ от $81^\circ 21' 36''$ только 0,00016%). Измерять углы с точностью до секунд учащимся средней школы не приходится никогда; уже точность до десятой доли градуса в школе трудно достижима, и вполне возможно почти при всех школьных вычислениях не идти дальше минут.

§ 21. Площадь круга.

Даже обобщение формулы площади прямоугольника на случай, когда стороны его несоизмеримы с единицей, требует, как мы видели выше в § 19, использования теоремы о пределе произведения. Необходимо понятие предела и для ответа на вопрос, что такое площадь фигуры с произвольным контуром. Здесь тоже в основе лежит примитивное представление о числе квадратных единиц и их долей, содержащихся внутри этого контура. Каков бы ни был этот контур, его всегда можно покрыть сеткой из квадратов со стороной в 1 *см* и подсчитать число s_1 таких квадратов, содержащихся полностью внутри контура, а также число S_1 квадратов, входящих внутрь контура хотя бы частично (на фигуре 37 $s_1 = 4$, $S_1 = 16$). Переходя от квадратных сантиметров к квадратным миллиметрам, получаем два новых числа s_2 и S_2, из которых первое указывает число квадратов с площадью в 1 *кв. мм*, расположенных полностью внутри контура, а второе—число таких же квадратов, входящих внутрь контура, хотя бы частично (на фиг. 37 $s_2 = 711$, $S_2 = 813$). Используя далее квадраты со сторонами в 0,1 *мм*, в 0,01 *мм* и т. д., получим две последовательности чисел, одну возрастающую и ограниченную сверху $s_1, s_2, s_3, \ldots$, другую убывающую и ограниченную снизу $S_1, S_2, S_3, \ldots$. Обе последовательности сходятся, и если они имеют общий предел A, то этот предел и принимается за меру площади той части плоскости, которая заключена внутри этого рассматриваемого контура. Чтобы дать полную теорию измерения площадей, надо установить условие, при котором этот общий предел A суще-



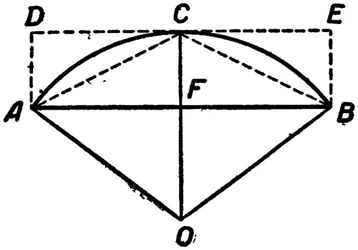
Фиг. 37.

ствует, установить его независимость от того, как строилась сетка квадратов относительно фигуры, надо показать, что, исходя из этого нового обобщённого понятия площади в случае прямоугольника и других многоугольников, получаются те же формулы, какие были раньше, а потом уже перейти к вычислению площади круга. Как и при изучении вопроса о длине окружности, вопрос о площади круга излагается в средней школе без освещения всех этих тонкостей. Рассматривается возрастающая последовательность площадей правильных многоугольников, вписанных в окружность, при условии удвоения числа их сторон, и устанавливается, что она ограничена сверху, а потому имеет предел, который и принимается по определению за площадь круга. Если, кроме того, доказать, что апофема правильного вписанного в окружность многоугольника при неограниченном удвоении числа его сторон стремится к пределу, равному радиусу, то из формулы для площади такого многоугольника после перехода к пределу сразу получается формула $K = \pi r^2$. В практических её применениях чаще даётся или разыскивается не радиус r, а диаметр $d = 2r$, поэтому полезно пользоваться наряду с нею также формулой $K = 0{,}25\,\pi d^2$. При решении задач на площадь круга большую экономию времени и сил даёт использование таблицы, имеющейся в том сборнике математических таблиц, какой находится на руках учащихся. Пусть, например, надо найти радиус r круга по данной его площади $K = 45$ *см*^{2}. Простое подыскание в этой таблице сразу даёт $d = 7{,}569$ *см*, откуда $r = 3{,}784$ *см*. Если же к таблицам не прибегать, то надо выполнить два действия: деление 45 на 3,142, дающее $r^2 = 14{,}322$ *см*, и извлечение квадратного корня из этого последнего числа, дающее 3,785 *см*, и вместо нескольких секунд приходится тратить минуты.

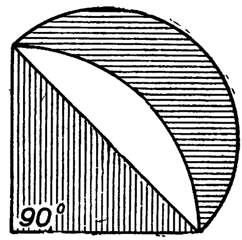
При решении задач на площадь кругового сектора выкладки существенно упрощаются, если использовать радианную меру центрального угла, т. е. формулу $S = \frac{\pi r^2 n^\circ}{360^\circ}$ переписать в виде $S = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{Arc} n^\circ$, где $\operatorname{Arc} n^\circ$ — радианная мера угла в n°, и применить таблицу радианной меры.

В школьном учебнике геометрии Киселёва указаны без вывода две приближённые формулы для вычисления площади кругового сегмента, по его основанию b и его стрелке h, дающие тем лучшие результаты, чем меньше градусная мера его дуги n°. Вывод первой из них, а именно формулы $S_{\text{сег}} = \frac{2}{3} bh$, легче всего получается на основании того соображения, что сегмент $AFBC$ (см. фиг. 38) содержит в себе больше половины площади прямоугольника $ABED$, но меньше, чем всю эту площадь; в качестве приближённого значения естественно принять $\frac{2}{3}$ площади прямоугольника. Более точные результаты даёт применение известных из курса математического анализа рядов для синуса и косинуса.

Изучая вопрос о площади круга, нельзя обойти популярнейшую задачу о квадратуре круга, указывая точную её постановку и подчёркивая лёгкую её разрешимость вычислительным методом со сколь угодно высокой точностью. Интерес к выполнению точной квадратуры круга построительным методом с использованием только циркуля и линейки повышается благодаря тому, что ещё в древности было известно, что такая квадратура возможна для некоторых более сложных фигур, ограниченных дугами кругов. Например, как легко убедиться, площади заштрихованных частей на фигуре 39 равны, а потому для изображённой на ней «луночки» возможна точная квадратура с помощью циркуля и линейки.



Фиг. 38.



Фиг. 39.

Построительное решение задачи о квадратуре круга становится возможным, если допустить употребление другого подходящего прибора (кроме циркуля и линейки). Так, ещё Леонардо да Винчи указал, что, имея цилиндр с радиусом основания r и высотой $\frac{1}{2}r$, легко построить прямоугольник со сторонами $2\pi r$ и $\frac{1}{2}r$, имеющий площадь πr^2; этот прямоугольник получается при качении цилиндра по плоскости на один полный оборот.

Глава VI

ИЗУЧЕНИЕ СТЕРЕОМЕТРИИ

§ 22. Особенности работы над стереометрическими разделами.

Изучением стереометрии учащиеся занимаются в IX классе (после прохождения разделов планиметрии о правильных многоугольниках и о длине окружности и площади круга) и в X классе (весь год). Преследуя в работе над стереометрией те же задачи, что и в работе над планиметрией, а именно: изучение геометрических фактов, воспитание логических навыков, развитие пространственного воображения, уменье применять теоретические сведения к решению различных геометрических задач, какие ставит практическая жизнь и другие науки, учитель встречается при этом со следующими особенностями этого курса.

1. Курс стереометрии строится в предположении, что курс планиметрии полностью усвоен. Конечно, каждый раздел курса математики в средней школе строится на базе всего ранее пройденного, но все недочёты изучения планиметрии ощущаются при изучении стереометрии особенно болезненно, значительно тяжелее, чем, например, недочёты в знаниях по арифметике при изучении алгебры. Изучая стереометрию, приходится всё время возвращаться к планиметрии, требуя от учащихся повторения того, что нужно

для понимания каждого нового вопроса или задачи. Изучая стереометрию, учащиеся IX и X классов должны всё время иметь под рукой учебник планиметрии для справок.

При решении стереометрических задач чаще всего вопрос сводится к решению некоторой планиметрической задачи, и учащиеся испытывают затруднения по двум причинам: как из-за неуменья выполнить такое сведение, так и из-за трудностей, встающих на пути решения этой задачи планиметрии. Например, желая выяснить, как расположена высота в пирамиде, имеющей равные боковые рёбра и основание в виде прямоугольного треугольника, мы должны сообразить, что равенство боковых рёбер влечёт за собой равенство их проекций на плоскость основания, так что задача сводится к такой: «В плоскости имеется прямоугольный треугольник, и надо найти точку, равноудалённую от трёх его вершин, т. е. центр описанной около него окружности». Ясно, что учащийся, затрудняющийся решить эту простую планиметрическую задачу, не справится и с указанной задачей стереометрии и что для успешного решения стереометрических задач нужны частые возвращения к задачам планиметрии.

2. Занимаясь планиметрией, учащиеся на каждом шагу пользуются чертежами, дающими ясное представление об изучаемых объектах. В стереометрии положение было бы аналогичным, если бы мы пользовались моделями столь же широко, как чертежами, что, однако, и невозможно и нежелательно, так как тогда плохо развивалось бы пространственное воображение. Вместо моделей постоянно применяются чертежи, представляющие не самый изучаемый объект, а его изображение на плоскости, и как при выполнении таких чертежей, так и при пользовании ими возникает ряд трудностей, о которых будет речь в следующем параграфе. Что касается употребления моделей, то, рассуждая теоретически, здесь надо опасаться двух противоположных крайностей: недостаточного использования моделей, когда учащиеся не получают ясных представлений об изучаемых объектах и все их знания оказываются только формальными, неприменимыми, непрочными, и чрезмерного применения моделей, когда учащиеся не упражняют и не развивают свою способность видеть все детали изучаемого объекта, так сказать, умственным взором. На практике вторая опасность не существует, так как построение моделей или добывание готовых моделей связано с немалыми затруднениями, первая же опасность весьма реальна. Необходимо, во-первых, широко использовать предметы окружающего нас мира, указывая в них изучаемые пространственные формы. Ещё больше значения имеет выработка уменья быстро создать в случае надобности модель из подручного материала. Так, рассматривая впервые вопрос о кратчайшем расстоянии между двумя скрещивающимися прямыми, очень полезно, изобразив одну из них мелом на доске, изобразить другую ребром линейки, надлежащим образом расположенной, а затем воспользоваться кусками картона, фанеры, стекла, чтобы наглядно пред-

ставить те плоскости, о каких идёт речь при решении вопроса. Подчёркиваем, что это относится только к первой стадии работы над данным вопросом; вторая стадия — построение чертежа, дающего посредством плоской фигуры правильное представление о расположении точек, линий и плоскостей в пространстве,— проходит несравненно лучше, если в первой стадии была использована модель. Третья стадия, когда учащиеся не пользуются ни моделью, ни чертежом, ясно представляя себе всю пространственную фигуру, завершает полноценное изучение вопроса, и нужно стремиться довести всех учащихся до этой третьей стадии, что удаётся, конечно, не у всех в одно и то же время.

3. Занимаясь планиметрией, учащиеся делают свои заключения в большинстве случаев сперва только на основании интуиции: логическое рассуждение вступает в свои права лишь после того, как интуиция подсказала ту или иную догадку, и задача рассуждения — либо доказать правильность этой догадки, либо опровергнуть её. В общем то же самое соотношение между интуицией и логикой имеет место и при изучении стереометрии, но всё же роль логики здесь уже несколько больше, что соответствует и возрасту учащихся IX и X классов. Здесь можно предъявлять повышенные по сравнению с предшествующими классами требования к логической стороне всей работы, добиваясь полного устранения всех недочётов, оставшихся от прошлых лет, по части уменья давать правильные определения, выполнять классификацию, разбираться в составе каждого предложения, делать обоснованные выводы, правильно проводить более или менее длинные рассуждения, чётко устанавливая предпосылки.

4. Программа курса стереометрии предполагает более быстрый темп работы по усвоению нового материала, чем программа планиметрии. Об этом можно заключить, сопоставляя число часов, отведённых на эту работу, и число страниц соответствующих учебников. Ясно, что при изучении стереометрии приходится предъявлять большие требования к самостоятельной работе учащихся, но необходимо помнить об ограниченности бюджета времени учащихся и очень тщательно продумывать все задания, не допуская непроизводительной траты драгоценного времени.

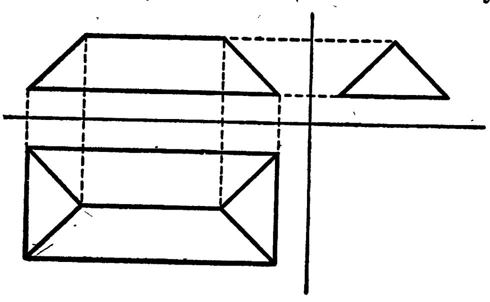
5. Жалобы на недочёты подготовки по геометрии у молодёжи, поступающей в вузы, со стороны экзаминаторов и преподавателей вузов больше всего относятся к неуменью правильно представлять себе пространственные фигуры. Здесь бывает и прямое незнание точного смысла тех терминов, какими учащиеся пользуются (например, часто отмечают незнание того, что называется углом между прямой и плоскостью), бывает и отсутствие правильного представления при наличии формального знания соответствующего определения (например, зная, что называется вертикальными и горизонтальными прямыми и плоскостями, затрудняются сказать, сколько вертикальных и сколько горизонтальных прямых можно провести через данную точку данной вертикальной, горизонталь-

ной, наклонной плоскости, или, зная, что называется взаимно перпендикулярными плоскостями, не могут сказать, сколько плоскостей, перпендикулярных к одной или двум данным произвольным плоскостям, можно провести через данную произвольную точку). Эти существенные недостатки должны устраняться в преподавании.

6. Существенно иначе, чем в планиметрии, обстоит в стереометрии дело с задачами на построение, о чём будет речь в § 26.

§ 23. Стереометрический чертёж.

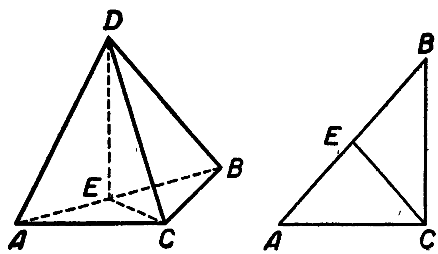
Изображая на плоскости изучаемую пространственную фигуру, стремятся к тому, чтобы вызвать у человека то самое зрительное впечатление, какое получилось бы у него при непосредственном рассматривании этой пространственной фигуры. Эта задача обеспечения наглядности изображения выступает в преподавании на первый план, в технических же чертежах большое значение имеет также обеспечение удобоизмеримости: сведения о размерах всех деталей изображённой на чертеже пространственной фигуры должны получаться более или менее просто на основании измерений по чертежу. Это требование удобоизмеримости обеспечивается при употреблении ортогональных проекций на две или три плоскости, изучаемых в X классе в курсе черчения. Использование ортогональных проекций в курсе стереометрии очень желательно; оно тем более легко осуществимо, что в школьном учебнике геометрии Киселёва (часть 2) в последних изданиях имеется особая глава, им посвящённая. Даже не занимаясь рассмотрением теоретической стороны вопроса, можно использовать ортогональное проектирование при решении задач, заменяя многословные описания рассматриваемых пространственных фигур соответствующим эпюром, с которого решающие задачу и берут все необходимые данные. Так, например, имея эпюр чердака здания под четырёхскатной крышей, изображённый на фигуре 40, можно поставить ряд задач, например, об общей площади всех скатов этой крыши, о вычерчивании их в натуральную величину, что даст возможность изготовить модель, об объёме чердака. Несомненно, что решение такого рода задач по готовому эпюру, а также самостоятельное изготовление эпюров для пространственных фигур, заданных словесным описанием, очень способствует и лучшему пониманию задачи, и развитию пространственного воображе-



Фиг. 40.

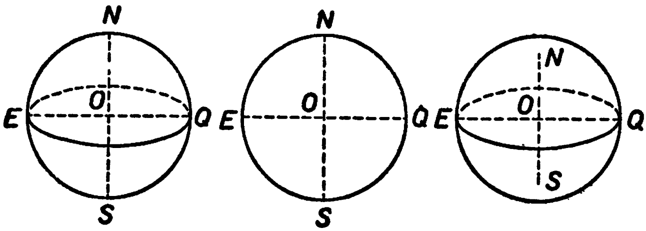
ния. На практике нередко наблюдается полная разобщённость курсов стереометрии и черчения в X классе (да и в других), и это очень печально: даже простая взаимная осведомлённость преподавателей этих двух учебных предметов о ходе работы приводит к взаимной помощи и повышению успеваемости по обоим; ещё лучше, если берутся общие задачи.

Наглядность изображения пространственной фигуры F' в наибольшей степени обеспечивается применением центрального проектирования: из некоторой точки S пространства, не совпадающей ни с одной из точек фигуры F' и именуемой центром проекции, проводятся прямые через все точки фигуры F' и продолжаются до пересечения с плоскостью чертежа, на которой получается, таким образом, некоторая фигура F, производящая при рассматривании её из точки S то же самое зрительное впечатление, как и фигура F'. Построение такого перспективного чертежа (рисунка) представляет известные трудности и применяется в курсе геометрии сравнительно редко, тем более что измерения по такому чертежу весьма затруднительны. Почти той же наглядностью, как перспективный чертёж, обладает обычно применяемая в преподавании стереометрии «кабинетная» проекция, представляющая собой частный случай так называемой аксонометрии: отрезки и углы, расположенные параллельно плоскости чертежа, изображаются на нём в натуральную величину с сохранением направления, а отрезки, ей перпендикулярные,— уменьшёнными (обычно вдвое) под углом в 45° или в 60°. Несколько упрощая положение, можно представить дело так, как будто рассматриваемая пространственная фигура F' освещается спереди и сбоку параллельными лучами и отбрасывает на экран теневое своё изображение F, причём экран располагается не перпендикулярно к лучам, как при ортогональном проектировании, а наклонно к ним. Возможность выбора одного из многих положений фигуры относительно экрана (плоскости чертежа) позволяет получить изображение F, обеспечивающее наибольшую наглядность. На фигуре 41 мы имеем слева изображение в кабинетной проекции той пирамиды, о которой была речь выше (в начале § 22). Пользуясь только этим чертежом, можем сказать, что эта пирамида имеет в основании прямоугольный треугольник с прямым углом при точке C, что высота DE пирамиды проходит через середину гипотенузы AB треугольника основания, изображённого отдельно справа в натуральную величину, что проекции боковых рёбер AD, BD, CD на плоскость основания, т. е. отрезки AE, BE, CE, равны между собой, что равны в силу этого и все три боковых ребра.



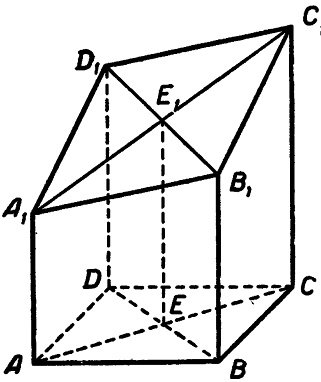
Фиг. 41.

Использование в одних чертежах ортогональной, а в других кабинетной и других аксонометрических проекций вполне допустимо и желательно, но нехорошо, если некоторые элементы какого-либо чертежа выполняются в одной, другие в другой проекции, или в одной и той же проекции, но при разных положениях фигуры F' относительно плоскости чертежа, как это бывает нередко.



Фиг. 42.

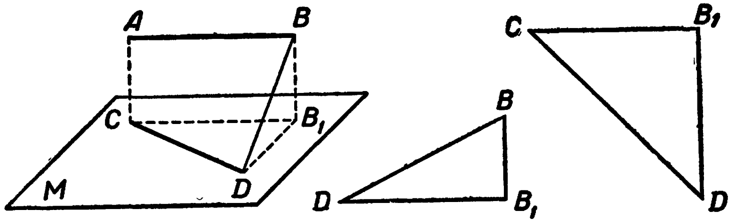
Так, на фигуре 42 слева изображён шар с его экватором EQ и перпендикулярной к его плоскости осью NS. Такое изображение оси может получиться только при ортогональном проектировании, притом если она расположена параллельно плоскости чертежа. Можно считать, что шар освещается лучами, перпендикулярными плоскости чертежа; на этой плоскости получается контур шара в виде круга, а всякий диаметр шара, параллельный плоскости чертежа, изобразится диаметром круга. Но при таком проектировании экватор изобразится не в виде эллипса, как он изображён на фигуре 42 слева, а в виде диаметра EQ, перпендикулярного оси NS, как это сделано на фигуре 42 в середине. Однако этот верный чертёж не нагляден. Чтобы устранить ошибку, сохраняя наглядность, можно применить опять-таки ортогональное проектирование, но при наклонном по отношению к плоскости чертежа положении диаметра шара NS: верхний его конец N находится в видимой, т. е. передней половине шара, нижний S — в невидимой (задней). Такой правильный и достаточно наглядный чертёж мы имеем на фигуре 42 справа.



Фиг. 43.

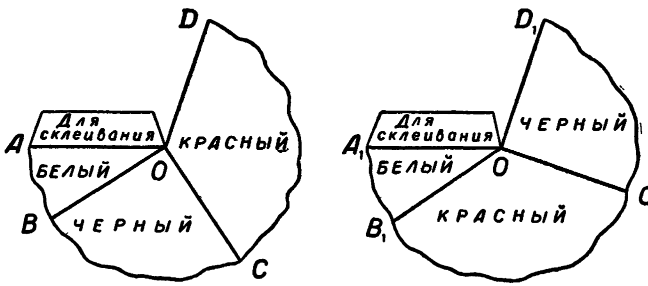
Подробности о наилучших способах выполнения стереометрических чертежей в преподавании можно найти в книгах [IV, 58б, в], к которым и отсылаем читателя. Отметим только ещё один вид ошибок, встречающихся в школьных чертежах: нередко берутся произвольно такие элементы чертежа, которые вполне определены другими его элементами. Так, например, пусть требуется изобразить многогранник, который получается, если провести в прямоугольном параллелепипеде плоское сечение, не параллельное основанию, и одну часть параллелепипеда отбросить. Три точки пересечения боковых рёбер с плоскостью сечения, например точки A_1, B_1, C_1 на фигуре 43, можно взять произвольно, четвёртую же точку D_1 приходится строить, проводя вспомогательные отрезки AC, BD, A_1C_1, EE_1, B_1E_1, так как точки пересечения диагоналей основания и сечения находятся на одной прямой, параллельной боковым рёбрам. Нечто подобное имеем и на фигуре 42 (справа); выбор положения точки N вполне определяет и положение точки S и длину малой оси эллипса, изображающего экватор.

В случаях, когда имеются основания сомневаться, вполне ли ясно учащиеся представляют ту или иную пространственную фигуру, очень полезно не ограничиваться чертежом, представляющим фигуру в какой-либо одной проекции, а построить несколько чертежей при разных положениях фигуры относительно плоскости чертежа или даже при разных способах проектирования. Особенно



Фиг. 44.

помогают обеспечить ясность представлений особые чертежи, изображающие детали общего чертежа (например, отдельные грани, сечения) без искажений. Так, решая задачу № 22 из § 3 школьного задачника Рыбкина (ч. 2, издание 1948 г.), рекомендуется не ограничиваться приведённым там поясняющим чертежом, воспроизведённым на фигуре 44 (слева), а предложить учащимся вычертить



Фиг. 45.

без перспективных искажений треугольники BB_1D и B_1CD, показанные на фигуре 44 (справа).

Однако необходимо признать, что как бы хороши ни были чертежи, изображающие на плоскости пространственные фигуры, в практике преподавания встречается немало случаев, когда полная ясность представления обеспечивается только рассмотрением модели. Таково положение, например, при выяснении вопроса о равенстве и симметрии трёхгранных углов. Никакой чертёж не даёт здесь того, что дают две примитивные бумажные модели, изготовляемые учителем (а затем и всеми учащимися) в течение нескольких минут из куска плотной бумаги: начертив на нём две развёртки, изображённые на фигуре 45, их вырезают, сгибают и склеивают (или сшивают), так что лучи OA и OD совмещаются, совмещаются и лучи OA_1 и OD_1. Учащиеся, выполнившие эту работу, с удивлением убеждаются, что равенство плоских углов ещё не обеспечивает равенства трёхгранных углов, и запоминают о существовании симметричных трёхгранных углов несравненно прочнее, чем на основании одного лишь рассуждения и рассмотрения готового чертежа.

§ 24. Задачи на построение в стереометрии.

Те задачи, какие носят обычно название задач на построение в пространстве, имеют характер, существенно отличный от того, какой имеют планиметрические задачи на построение. Как известно (см., например, § 6 школьного учебника геометрии Киселёва, ч. 2, изд. 1949 г.), при их обычном решении никакого фактического построения не производится, а только путём надлежащего рассуждения выясняется, как свести вопрос к выполнению конечного числа основных построений. При такой постановке вопроса решение задач на построение в пространстве становится делом весьма абстрактным, а в силу этого трудным и мало интересным даже для сильнейших учащихся. В лучшем случае усваиваются готовые решения нескольких таких задач, приведённые в учебнике, усваиваются так, как и всякий другой теоретический материал; уменья самостоятельно решать аналогичные задачи учащиеся не получают. Чтобы добиться в этом направлении каких-либо результатов, надо потратить времени больше, чем это возможно в условиях школьной работы. Но большое значение таких задач для закрепления значения теории и развития пространственного воображения бесспорно, и их можно усиленно рекомендовать как материал для дополнительных заданий более сильным учащимся и как темы для докладов в математическом кружке, причём успеху работы очень способствует построение хотя бы самых примитивных моделей, т. е. хотя бы частичное превращение этих условных задач на построение в задачи на построение в собственном смысле слова. Для начала можно взять задачу о построении общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым, решение которой приведено в школьном учебнике.

Но можно указать сколько угодно задач на построение в пространстве, действительно решаемых построением на плоскости с помощью циркуля и линейки и не требующих моделирования. В таких задачах все данные содержатся в чертеже, выполненном в той или иной проекции, искомые должны быть получены на том же чертеже. Простой пример такой задачи имеем в связи с фигурой 43; здесь даны изображение прямоугольного параллелепипеда и три точки A_1, B_1, C_1 на трёх боковых его рёбрах, требуется указать точку D_1 пересечения плоскости, проведённой через эти три точки, с четвёртым боковым ребром (или его продолжением). Примерно ту же трудность представляет задача построения этого сечения $A_1B_1C_1D_1$ в натуральную величину (без перспективных искажений).

Большое число подобных задач весьма различной трудности можно найти в книгах [IV, 15, 25, 50], в книгах и статьях [IV, 58].

Особый вид таких задач представляют собой задачи начертательной геометрии, когда данные показаны на эпюре, на эпюре же надо получить и искомые. Несколько простейших задач такого рода разобраны в главе 2 школьного учебника геометрии Киселёва. Решение многих таких задач предусмотрено программой курса черчения, и взаимный обмен задачами между преподавателями геометрии и черчения здесь особенно желателен.

Решение задач на построение в пространстве требует, разумеется, значительно больше усилий, чем на плоскости. Если учащиеся с ними не справляются, надо проверить, умеют ли они решать хотя бы более простые задачи на построение на плоскости, уделить некоторое время на повторение и пополнение их сведений и навыков по этому разделу, а затем вернуться к задачам в пространстве уже с бóльшими шансами на успех.

§ 25. Прямые и плоскости в пространстве.

Раздел «Прямые и плоскости» изучается в IX классе и представляет собой по объёму материала и по времени, отводимому на его изучение, почти половину всего курса стереометрии. Эта совершенно необходимая первая часть школьного курса стереометрии представляет собой собрание большого количества отдельных вопросов, касающихся прямых и плоскостей и их взаимного расположения в пространстве и излагаемых обычно так, что ясной для учащихся системы в последовательности их изучения не получается. Это обстоятельство существенно повышает трудность усвоения большого материала.

Расположение материала в удобообозримой и легко запоминаемой системе хотя бы при его повторении очень облегчает прочность его запоминания. Можно рекомендовать такую систему: 1) прямая в пространстве, 2) плоскость, 3) взаимное расположение двух прямых, 4) взаимное расположение двух плоскостей, 5) взаимное расположение прямой и плоскости, 6) взаимное расположение трёх и большего числа прямых, 7) взаимное расположение трёх и большего числа плоскостей.

Если принять эту систему, весь материал, излагаемый в учебнике, перестаёт производить впечатление беспорядочной массы вопросов, хотя и связанных друг с другом, но не вытекающих в обязательном порядке один из другого; выясняются и некоторые пробелы обычного изложения, например такой: каковы все возможные случаи взаимного расположения трёх плоскостей? Обычно учащиеся только позднее, в вузовском курсе аналитической геометрии, узнают, что три различные плоскости, среди которых нет двух параллельных друг другу, пересекаются либо в одной точке, образуя восемь трёхгранных углов с общей вершиной, либо по одной прямой, образуя шесть двугранных углов с общим ребром, либо по трём параллельным прямым, образуя призматическую трёхгранную трубу и двенадцать двугранных углов, по четыре на каждую из трёх линий пересечения.

Рассматривая одну отдельно взятую плоскость, раньше начинали с определения плоскости как такой поверхности, с которой совпадает всякая прямая, имеющая с ней две общие точки. В настоящее время предпочитают вовсе не давать никакого определения плоскости, относя её к числу основных (неопределимых) понятий и указывая в виде аксиом основные свойства плоскости. Вместо определения плоскости даётся ряд примеров таких вещей, поверхность которых напоминает геометрическую плоскость. Ясность представлений очень выигрывает, если рассмотреть различные способы, действительно применяемые для получения и проверки плоской поверхности в более доступных отраслях техники. Например, неизменный интерес учащихся вызывает рассмотрение способов, какими можно обеспечить плоскую поверхность дорожки или площадки. Вопрос о проверке горизонтальности плоской поверхности относится уже в другому разделу указанной выше схемы — к разделу о взаимном расположении прямой и плоскости,— и тоже проходит при повышенном интересе молодёжи, часто встречающейся с ним в своих спортивных мероприятиях (плоскость горизонтальна, если она перпендикулярна к отвесной прямой).

В предшествующем изложении мы не раз отмечали, как повышается продуктивность учебной работы по геометрии, если связывать её понятия и предложения с фактами окружающей нас действительности, и особенно трудовой деятельности человека. Раздел «Прямые и плоскости в пространстве» даёт учителю особенно много возможностей. Как, например, проверяется вертикальность установки столба или радиомачты? Постановка этого вопроса — прекрасное начало для рассмотрения определений и теорем, относящихся к перпендикулярности прямой и плоскости.

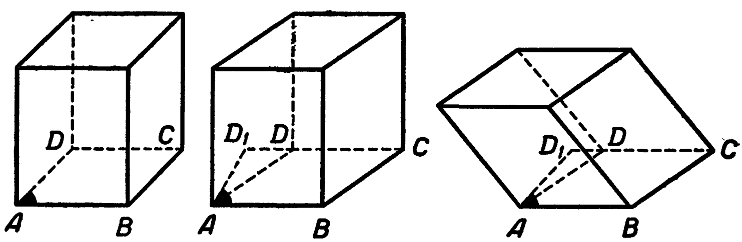
Отметим, что особого внимания требует вопрос об определении угла между прямой и плоскостью. Необходимо добиться, во-первых, чтобы учащиеся ясно понимали существование бесконечного множества углов между прямой, пересекающей плоскость, и прямыми, проведёнными на плоскости через точку пересечения, чтобы, во-вторых, они знали, какой из всех этих углов принято называть углом между прямой и плоскостью, т. е. чтобы они знали соответствующее определение, и, в-третьих, чтобы было усвоено предложение о минимальном свойстве этого угла. В связи с этим хорошо поставить такую задачу: какой из углов, образуемых прямой, пересекающей плоскость, с прямыми, проведёнными на этой плоскости через точку пересечения, больше всех других таких углов? Ответ должен состоять, разумеется, не в простом указании на угол, образуемый прямой и продолжением её проекции на плоскость за точку пересечения, а в доказательстве этого утверждения. Во избежание недоразумений надо с самого начала отметить, что рассматривается только та часть пространства, которая лежит по одну сторону от данной плоскости, и что речь идёт в сущности не о прямых, проходящих через данную её точку, а о лучах, исходящих из неё.

При изучении теорем о многогранном угле очень полезно применение модели, легко получаемой из нескольких металлических или деревянных спиц, хотя бы даже обыкновенных зажигательных спичек, перехваченных в одном месте ниткой или резиновым колечком, или хотя бы развёртки многогранного угла на бумаге. Теорема о сумме плоских углов многогранного угла становится очевидной, если обратить внимание на увеличение плоских углов при опускании точки соединения спиц при условии, что нижние их концы движутся по продолжениям проекций спиц на плоскость, и на то, что сумма всех углов, расположенных на плоскости около общей вершины, равна $4d$. Поразительно, как прочно запоминаются подобные наглядные иллюстрации теорем, основанные на применении изготовляемой каждым примитивной модели, особенно если эта модель рассматривается в движении! Поучительно также и выяснение причин, вызывающих необходимость обычного логического доказательства, несмотря на наличие этой наглядной иллюстрации.

Трудности, возникающие при изучении первых глав стереометрии, вызвали появление ряда методических статей, в которых рассматриваются различные меры, направленные к улучшению положения. Особого внимания заслуживают статьи [IV 36, 39, 54].

§ 26. Многогранники.

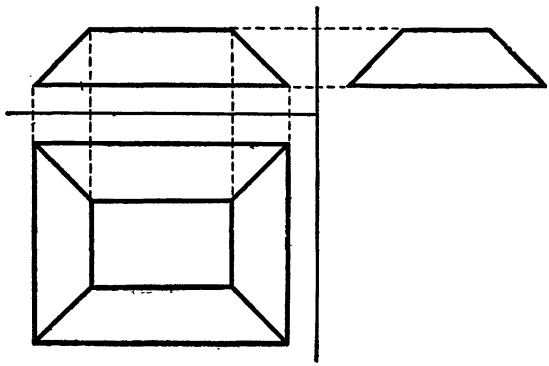
Если оставить в стороне вопрос об объёме многогранников, о чём будет идти речь в следующем параграфе, то можно констатировать, что раздел курса X класса, посвященный многогранникам, проходит значительно легче, чем другие разделы стереометрии.



Фиг. 46.

Содержание его сводится к изучению определений и свойств некоторых простейших многогранников. Материал этот невелик, несложен, богат практическими приложениями.

Сравнительная лёгкость этого раздела при достаточно большом числе часов, отведённых на его изучение, делает более легким достижение высокого качества его усвоения. Прежде всего надо обеспечить безупречное знание и понимание взаимной связи между понятиями, иллюстрируя их примерами из окружающей действительности, широко пользуясь моделями и чертежами. Учащиеся далеко не всегда понимают, что параллелепипед — частный случай призмы (всякий параллелепипед — призма, но не всякая призма — параллелепипед), зачастую смешивают понятия прямого и прямоугольного параллелепипеда. Устранению последнего недочёта может способствовать, кроме прочного усвоения определений и использования моделей, сопоставление достаточно наглядных изображений разных параллелепипедов, например, как это сделано на фигуре 46. Установив понятие призмы, параллелепипеда, пирамиды, усечённой пирамиды, хорошо рассмотреть ряд примеров многогранников более сложного вида, разбивая их (разными способами) на тела этих простейших видов. Так, на фигуре 47 показаны ортогональные проекции на три плоскости кучи песку,



Фиг. 47.

какую часто можно видеть при ремонте дороги, и предлагается убедиться, что эта куча не является усечённой пирамидой, как может показаться с первого взгляда, но что её можно представить как комбинацию прямоугольного параллелепипеда, четырёх попарно равных треугольных призм и четырёх равных пирамид с квадратными основаниями.

Практически важный вопрос о величине поверхности многогранников в общем случае решается как вопрос о сумме площадей всех граней. Три теоремы о боковых поверхностях (призмы, правильной пирамиды, правильной усечённой пирамиды) следует рассматривать как частные случаи решения этой общей задачи; тогда не будет таких случаев, когда на предложение найти полную или боковую поверхность данной неправильной пирамиды ученик X класса отвечает, что этого они не проходили. В связи с решением задач на вычисление поверхности многогранника можно рекомендовать полезное упражнение — вычерчивание развёрток.

Изучение правильных многогранников проходит всегда с повышенным интересом, особенно если есть возможность продемонстрировать аккуратно изготовленные модели всех пяти тел. Однако приведённое в школьном учебнике геометрии Киселёва изложение теоретической стороны вопроса вызывает обоснованное недоумение учащихся: сначала говорится, что имеется три вида правильных многогранников с треугольными гранями, один вид с четырёхугольными, один с пятиугольными, а затем доказывается, что они действительно существуют. Гораздо лучше, если сначала показать существование пяти видов правильных многогранников при построении их, начиная с куба (опять-таки очень полезно вычерчивание развёрток), а затем доказать, что никаких других правильных многогранников быть не может.

Вопрос о симметрии пространственных фигур, в частности о симметрии многогранников, в действующей программе не отмечен, и за недостатком времени в школе его обычно вовсе не затрагивают, хотя в учебнике Киселёва он освещён; значительно полнее он изложен в новом учебнике Н. А. Глаголева. Желательно использовать этот материал хотя бы в виде дополнительных заданий более сильным ученикам. Не менее поучителен и вопрос о соотношении между числами вершин, рёбер и граней любого выпуклого многогранника (теорема Эйлера о многогранниках); в учебнике Киселёва он вовсе не затронут, в учебнике же Н. А. Глаголева он рассмотрен в самом начале главы о многогранниках. Интересно отметить, что учащиеся X класса всегда самостоятельно открывают эту теорему, если поставить перед ними вопрос о том, нельзя ли, зная числа вершин и граней произвольного выпуклого многогранника, сказать, сколько у него рёбер, и предложить им провести ряд наблюдений, составляя примерно такую табличку:

Многогранник	Число вершин (B)	Число граней ($Г$)	Число рёбер ($Р$)
Куб	8	6	12
Треугольная призма . . .	6	5	9
n-угольная призма	$2n$	$n+2$	$3n$
Треугольная пирамида . .	4	4	6
n-угольная пирамида . . .	$n+1$	$n+1$	$2n$
n-угольная усечённая пирамида	$2n$	$n+2$	$3n$

Внимательное рассмотрение таблички показывает, что всегда $B+Г=Р+2$, что и составляет теорему Эйлера. Замечательна общность этой теоремы: она верна не только для всех выпуклых многогранников, как это доказано, например, в книге [IV, 19], но и для всех «простых» или «эйлеровых» многогранников (подробности и доказательство см., например, в книге [IV, 1, ч. 2]).

Много хороших задач содержат книги [IV, 15, 23]. Приводим одну из них. Деревянный куб с ребром в 10 *см* окрашен со всех сторон, а затем разрезан на кубические сантиметры; сколько получается кубиков с 0, 1, 2, 3 окрашенными гранями?

§ 27. Измерение объёмов. Принцип Кавальери.

Примитивное представление об объёме тела, как числе кубиков, с ребром, равным единице, и их долей, заполняющих это тело, привычно учащимся с начальной школы и закрепляется постоянным применением этого понятия в житейском обиходе. Приступая к изучению раздела «Объём призмы и пирамиды», прежде всего дают доказательство всем известной формулы объёма прямоугольного параллелепипеда, рассматривая, как это и сделано в школьном учебнике, три случая: когда измерения выражаются целыми, дробными, иррациональными числами. Говоря об единицах объёма, надо остановиться на них подробнее, чем это сделано в учебнике, так как изученное о них в начальной школе, даже в случае повторения в V классе, часто бывает основательно забыто. В частности, надо указать, что кубический дециметр практически равен литру (по точному определению литром называется объём одного килограмма чистой воды при 4°С, что составляет 1,000027 *куб. дм*).

Как уже отмечалось выше, с объёмами многогранников дело обстоит значительно сложнее, чем с измерением площадей многоугольников, так как для них равновеликость не означает ни равенства, ни равносоставленности: два многогранника, имеющие один и тот же объём, далеко не всегда можно разрезать на одинаковое число попарно равных частей. Так, из теоремы, дающей необходимое условие равносоставленности двух многогранников, вытекает, что правильный тетраэдр, т. е. треугольная пирамида, все грани которой представляют собой равные правильные треугольники, не равносоставлен с прямоугольным параллелепипедом (см., например, книгу [IV, 34 г]). Ввиду этого тот путь, каким можно было идти при решении вопроса о площади треугольника, а именно разрезание треугольника на части, дающие при складывании их в ином порядке прямоугольник, нельзя использовать при решении вопроса об измерении объёма пирамиды. . . .

Этой трудности, однако, не существует для призм, что и используется в школьном курсе, где легко доказывается равносоставленность любой наклонной призмы и некоторой прямой, а затем столь же легко устанавливается формула объёма любой призмы. Тем самым получает полное оправдание тот способ вычисления объёма призмы, который мы рекомендовали на основе наглядных представлений для использования в V классе (прямая призма разрезается плоскостями, параллельными основанию, на пластинки толщиной в одну единицу длины каждая, а каждая такая пластинка содержит столько кубических единиц, сколько квадратных единиц содержит основание призмы).

Несравненно более трудным оказывается решение вопроса об объёме пирамиды. Сплошь и рядом обычное изложение, основанное на доказательстве леммы о равновеликости треугольных пирамид с равновеликими основаниями и равными высотами, усваивается учащимися только формально, и спустя немного времени у учащихся не остаётся от изучения этого раздела ничего, кроме смутного воспоминания о «чортовой лестнице», забывается даже важнейший окончательный вывод,— что объём всякой пирамиды составляет одну треть объёма призмы, имеющей то же основание и ту же высоту. Между тем обеспечить твёрдое знание этого практически важного геометрического факта и вместе с тем возбудить у учащихся потребность в логическом его обосновании очень легко.

Берутся полые модели (из жести или плотного картона, легко изготовляемые собственными силами) двух таких тел, и ставится вопрос об отношении их объёмов. Всем ясно, что объём пирамиды меньше объёма призмы, но высказывается несколько различных догадок о том, во сколько раз меньше. Многие находят, что объём пирамиды должен быть ровно вдвое меньше объёма соответствующей призмы, основываясь на том, что всякий треугольник имеет площадь, вдвое меньшую, чем прямоугольник с теми же основанием и высотой (заключение по аналогии!); другие, более доверяя глазомеру, утверждают, что объём пирамиды меньше половины объёма призмы, что он равен четверти или трети её объёма. Для разрешения возникшего оживлённого спора немедленно поступают предложения о проверке опытом — наливанием воды или насыпанием сухого мелкого (просеянного) песку. Опыт ясно показывает, что отношение объёмов равно трём или близко к этому числу, сторонники рассуждения по аналогии признают свою неправоту, и, естественно, возникает вопрос о том, чему же в точности равно это отношение.

Это обращение к эксперименту вызывает решительные возражения со стороны некоторых учителей и методистов, считающих недопустимым такое нарушение «чистоты» математического метода дедукции. Однако нет никакого сомнения, что именно такого рода использование эксперимента позволяет лучше выяснить сущность обоих методов (индукции и дедукции) и их сравнительные преимущества, лучше оценить точность и общность заключений, получаемых путём дедукции. Половина часового урока, потраченная на подготовку и проведение эксперимента и обсуждение его результатов, вносит хорошее оживление и обеспечивает прочное запоминание полученного результата. Ещё лучше, если опыт проделывается каждым учащимся дома, а на уроке идёт только обсуждение результатов.

Чтобы прийти к окончательному решению вопроса об объёме пирамиды, т. е. чтобы дать доказательство полной точности подсказанного экспериментом заключения об отношении объёмов пирамиды и призмы с равновеликими основаниями и равными высотами, можно идти разными путями. В школьном учебнике Киселёва, как это и предусмотрено программой, сперва доказывается (способом пределов) уже упомянутая лемма о равновеликости двух пирамид с равновеликими основаниями и равными высотами, а затем тоже довольно трудная теорема о равновеликости треугольной пирамиды и призмы, имеющей то же основание и высоту, втрое меньшую, после чего легко производится обобщение для любой пирамиды. Значительное упрощение достигается применением формулы $1^2 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$, если рассматривать объём пирамиды как предел суммы объёмов, вписанных в неё $n+1$ призмы с равными высотами и постепенно убывающими основаниями (подробности можно найти в книге

[IV, 10]). Доказательство формулы для суммы квадратов первых n натуральных чисел проще всего проводится методом совершенной индукции и представляет собой прекрасный пример его применения.

Изложение выигрывает ещё больше в отношении простоты и доступности, если принять за аксиому так называемый «принцип Кавальери», утверждающий, что два тела с равными высотами равновелики, если равновелики любые их сечения, проведённые параллельно основаниям на одном и том же расстоянии от них. Это предложение может быть доказано, что и делается в курсах математического анализа, но истинность его не возбуждает сомнений, если рассмотреть несколько подходящих примеров, как, например, стопку одинаковых стеклянных пластинок, сперва уложенных в виде прямой призмы, затем сдвинутых друг относительно друга так, что получается некоторое приближение к наклонной призме с тем же основанием и той же высотой. Некоторые указания на принцип Кавальери приведены в школьном учебнике, в частности отмечено (в § 90 по изданию 1950 г.), что лемма о равновеликости пирамид представляет собой простое его следствие. Более подробное рассмотрение принципа Кавальери можно найти в статье [IV, 35].

Вывод формулы объёма усечённой пирамиды, приведённый в школьном учебнике и основанный на вычислении высоты дополнительной пирамиды, является значительно более доступным, чем чисто геометрический вывод, основанный на рассечении усечённой пирамиды на три полные пирамиды; его можно дать как задачу на вычисление.

Обращаем внимание на задачу № 12 (1) в § 19 школьного сборника задач Рыбкина (ч. 2 по изданию 1948 г.): доказать, что объём треугольной усечённой призмы равен произведению площади перпендикулярного сечения на среднее арифметическое длин трёх боковых рёбер. Доказательство получается без труда, если разрезать эту усечённую призму на три части, а именно призму с тем же основанием и высотой, равной наименьшему из боковых ребёр, и две треугольные пирамиды. Аналогичную теорему можно доказать для усечённого прямого параллелепипеда: его объём равен произведению площади его основания на среднее арифметическое длин пары противоположных рёбер или на среднее арифметическое всех четырёх рёбер. Для прямой призмы, усечённой непараллельно основанию и имеющей в основании произвольный четырёхугольник или какой-нибудь многоугольник с бо́льшим числом сторон, аналогичная теорема не имеет места: произведение площади основания на среднее арифметическое боковых рёбер выражает объём усечённой прямой призмы только приближённо. Рекомендуем хорошую задачу, решаемую смешанным построительно-вычислительным способом: имея эпюр прямой многоугольной призмы, усечённой непараллельно основанию, вычислить её объём сперва приближённо, как произведение площади основания на среднее арифметическое боковых рёбер, затем точно, разбивая всё тело на треугольные призмы, усечённые непараллельно основанию (все необходимые для вычисления данные берутся с эпюра).

Отметим, что при земляных работах нередко приходится вычислять объём тела неправильной формы, обычно имеющего в основании плоский многоугольник. В случае выемки грунта оставляются через определённые интервалы контрольные столбики, высота которых затем измеряется. Объём вынутой земли принимается равным произведению площади основания на среднее арифметическое высот всех контрольных столбиков.

§ 28. Круглые тела.

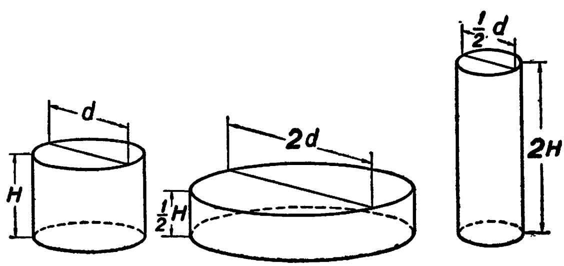
Изучением так называемых круглых тел — цилиндра, конуса, усечённого конуса, шара — завершается школьный курс геометрии. Эти тела имеют столь большое значение и для других дисциплин, и в практической жизни, что приходится сожалеть о двух вещах, препятствующих более тщательному рассмотрению в школе их теории и их приложений: появление их только в самом конце курса геометрии и небольшое число часов, на них отведённое программой (20 час.).

Программа отмечает необходимость уяснения общих понятий о цилиндрической и конической поверхностях, как порождаемых движением прямой (в первом случае — параллельно самой себе, во втором так, что одна её точка остаётся неподвижной), но изучаются в школе только прямой круговой цилиндр, прямой круговой конус, прямой круговой усечённый конус, именуемые в школе просто цилиндром, конусом, усечённым конусом. Эти три тела можно рассматривать как происходящие от вращения отрезка около оси, расположенной в одной с ним плоскости: отрезок, параллельный оси, порождает поверхность цилиндра; отрезок, непараллельный оси, порождает конус, если конец его находится на оси, и усечённый конус, если пересечение с осью происходит только при продолжении отрезка; если на оси находится одна из внутренних точек отрезка, его вращение порождает сразу два конуса, а если отрезок перпендикулярен оси, то его вращение даёт плоскую фигуру (круг или круговое кольцо). Стоит отметить, что в средней школе рассматриваются не все поверхности, порождаемые вращением прямой: если ось вращения не лежит в одной плоскости с вращающейся прямой, получается однополостный гиперболоид, изучаемый в курсе аналитической геометрии.

Вопрос о площади поверхности цилиндра и конуса, если исходить из общего определения площади кривой поверхности, встречает большие трудности. В школе этот вопрос существенно упрощают, определяя эти площади как пределы, к которым стремятся площади боковых поверхностей правильных призм (и соответственно пирамид), вписанных в цилиндр (конус), при условии неограниченного удвоения числа их сторон. Наряду с этим полезно привить учащимся представление об этих поверхностях как развёртках: цилиндр развёртывается на плоскость и порождает прямоугольник, высота которого равна высоте цилиндра, а основание — выпрямленной окружности основания цилиндра, так что площадь боковой поверхности цилиндра S (или, короче, боковая поверхность цилиндра) выражается формулой $S = 2\pi RH$; конус развёртывается в круговой сектор с радиусом, равным образующей l, и дугой, равной окружности основания $2\pi R$; площадь этого кругового сектора S относится к площади круга радиуса l, т. е. πl^2, так, как длина дуги $2\pi R$ относится к длине всей окружности $2\pi l$, что даёт $S = \pi Rl$. Вычисление площади боковой поверхности усечённого конуса сводится подобным же образом к вычислению площади фигуры, представляющей собой часть кругового кольца («криволинейной трапеции»).

Рассматривая развёртки, хорошо решить такую задачу: даны радиус основания конуса R и его высота H; рассчитать и вырезать развёртку его боковой поверхности. Надо указать числовые значения R и H для модели конуса, имеющейся в школе, и предложить учащимся принести на следующий урок приготовленные развёртки. Правильность результата проверяется непосредственным накладыванием и проходит всегда с повышенным интересом: учащиеся на этом примере лишний раз убеждаются, что математический расчёт даёт им некоторую действительную власть над вещами и высоко оценивают эту власть.

Формулы объёма для цилиндра, конуса, усечённого конуса выводятся без затруднений после предельного перехода из формул для объёма вписанных призмы, пирамиды, усечённой пирамиды.



Фиг. 48.

Очень важно уяснение зависимости между объёмом, радиусом основания и высотой: объём пропорционален высоте, но не радиусу, а квадрату радиуса (или диаметра) основания. Учащиеся с удивлением констатируют, что три цилиндрических сосуда, изображённые на фигуре 48, имеют объём далеко не одинаковый, как обычно кажется с первого взгляда. Конечно, таким элементарнейшим вещам место в курсе V класса (при первом знакомстве с цилиндром) или в курсе VIII класса (при рассмотрении функциональной зависимости), но если раньше на них не останавливались, надо сделать это хотя бы в X классе.

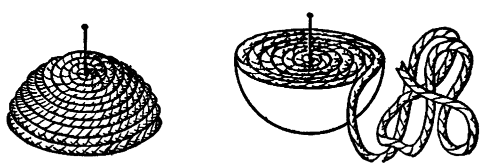
Несколько больше трудностей доставляет шар (сфера). Предусмотренные программой и изложенные в учебнике геометрии Киселёва теоретические сведения (определения и теоремы), не представляя собой ничего особенно трудного по существу, проходятся обычно за недостатком времени довольно поверхностно и усваиваются учащимися далеко не основательно, а отсюда весьма непрочное знание даже таких основных формул, как формулы поверхности и объёма шара. Имеет значение также и то обстоятельство, что на решение задач, в которых приходилось бы применять эти формулы, остаётся очень мало времени. В лучшем положении находится курс тригонометрии: во втором полугодии в X классе геометрия имеет только один час в неделю, тригонометрия же три, а потому надо ускорить изучение геометрической части программы, концентрируя часы геометрии в начале полугодия, чтобы в дальнейшем иметь возможность решать на занятиях тригонометрией задачи на все разделы геометрии (с применением тригонометрии).

Отметим несколько деталей.

Применение принципа Кавальери существенно упрощает вывод формулы объёма шара, и можно было бы рекомендовать изучение § 147 по школьному учебнику геометрии Киселёва (по изданию 1950 г.), если бы не необходимость вывода формулы объёма шарового сектора, для которого нужна лемма об объёме тела вращения треугольника (§ 141). Этот простой вывод формулы объёма шара приходится ввиду этого давать только как поучительную задачу.

Заслуживает внимания рассуждение, приведённое в школьном учебнике в подстрочном примечании к § 145 и дающее связь между объёмом шара V и его поверхностью (точнее — площадью его поверхности) S в результате прекрасно запоминающегося процесса разбиения шара на элементарные части, представляющие собой некоторое подобие пирамид; связь эта выражается формулой $V = \frac{1}{3}RS$ и может служить как для вывода формулы объёма шара, если известна формула $S = 4\pi R^2$, так и для вывода этой формулы поверхности шара, если известна формула $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Как всегда, необходимо особо подчёркивать размерность геометрических величин: S — величина второго измерения (выражается в квадратных сантиметрах или других квадратных мерах), V — величина третьего измерения (выражается в кубических сантиметрах или других кубических мерах).

Необходимо тщательное выяснение зависимости между поверхностью и объёмом шара и его радиусом или диаметром. На экзаменах для поступающих в вузы часто ставятся вопросы вроде следующих: «Что сделается с окружностью большого круга шара, с его поверхностью и объёмом, если его радиус уменьшить в 10 раз? Если свинцовый шар диаметром в 10 *см* расплавить и из полученной массы изготовить 1000 равных шариков, какого диаметра они выйдут? Почему скорость падения в воздухе капли воды тем меньше, чем меньше их диаметр?» Для ответа на последний вопрос необходимо принять во внимание, что падение водяных капель в воздухе происходит равномерно из-за того равновесия, какое устанавливается между силой тяжести (т. е. весом капли, пропорциональным её объёму) и силой сопротивления воздуха, пропорциональной поверхности капли.



Фиг. 49.

Недостаток времени на изучение стереометрии в X классе не позволяет уделить столько внимания, сколько следовало бы, изучению чисто геометрических задач на круглые тела, а в связи с этим тем больше значения получает решение задач геометрического содержания с применением тригонометрии, о которых будет речь в VII главе 5-й части.

Отметим два эксперимента, способствующих запоминанию формул объёма и поверхности шара. Им место в курсе наглядной геометрии, но они представляют интерес и для десятиклассников (хотя бы как темы дополнительных индивидуальных заданий или для сообщений в математическом кружке). Первый основан на использовании так называемых «тел Архимеда»: шара с произвольным радиусом R, цилиндра с радиусом основания R и высотой $2R$, конуса с такими же радиусом основания и высотой. Опытным путём устанавливают, что цилиндр вмещает втрое больше, чем конус, и что пространство, остающееся в цилиндре свободным после помещения в него шара, равновелико конусу. Отсюда вытекает, что объём шара равен двойному объёму конуса или двум третям объёма цилиндра, т. е. $V_{\text{шара}} = \frac{2}{3} \cdot \pi R^2 \cdot 2R = \frac{4}{3} \pi R^3$. Второй эксперимент имеет более грубый характер. Берётся деревянная модель полушара с двумя гвоздиками, вбитыми в центре кругового сечения и в конце радиуса, перпендикулярного этому сечению. Далее берётся не очень тонкий шнур, закрепляется своим концом за гвоздик на поверхности сферы и укладывается спиралью, покрывающей поверхность полушара плотной «шапкой» (фиг. 49). Затем та же операция проделывается с основанием полушара. Оказывается, что длина шнура, затраченного на покрытие основания, т. е. круга радиуса R, составляет приблизительно половину той длины, какая потребовалась на покрытие полушара; отсюда заключение, что площадь поверхности полушара вдвое больше площади круга и составляет $2\pi R^2$, а поэтому площадь поверхности всего шара равна $4\pi R^2$. Учащиеся, выполнившие этот опыт или хотя бы видевшие его демонстрацию, никогда не затрудняются правильно написать формулу $S = 4\pi R^2$.

СПИСОК КНИГ И СТАТЕЙ, ОТНОСЯЩИХСЯ К IV ЧАСТИ.

1. Адамар Ж., Элементарная геометрия, ч. 1, изд. 3, Учпедгиз, 1948; ч. 2, изд. 2, Учпедгиз, 1951.

2. Адлер А., Теория геометрических построений, Учпедгиз, 1940.

3. Александров А. Д., Геометрия. Статья в т. X Большой советской энциклопедии, изд. 2.

4. Александров П. С. и Колмогоров А. Н., Николай Иванович Лобачевский, Гостехиздат, 1943.

5. Александров И. И., Геометрические задачи на построение и методы их решения. Ряд изданий с 1882 по 1950 г.

6. Астряб А. М., Курс опытной геометрии. Индуктивно-лабораторный метод изложения, Гиз, 1925.

7. Барыбин К. С., Сборник геометрических задач на доказательство, Учпедгиз, 1952.

8. Берг М. Ф., Приёмы решения геометрических задач на построение, Учпедгиз, 1933.

9. Бернштейн М. С., Задачи на доказательство в курсе геометрии, «Математика в школе», 1941, № 4.

10. Бескин Н. М., Методика геометрии. Учебник для педагогических институтов, Учпедгиз, 1947.

11. Бончковский Р. Н. Площади и объёмы, изд. Академии наук СССР, 1937.

12. Брадис В. М., Евклидова геометрия в аксиоматическом изложении, ч. 1. Геометрия одного измерения. Калининский государственный педагогический институт имени М. И. Калинина. «Учёные записки», т. XII, вып. 1, 1949 г.

13. Богомолов С. А., Геометрия. Систематический курс. Пособие для учителей средней школы, Учпедгиз, 1949.

14. Владимирский Г., а) Каким должен быть чертёж преподавателя геометрии? «Математика в школе», 1941, № 3; б) Черчение. Пособие для учительских и педагогических институтов, Учпедгиз, 1952.

15. Гангнус Р. В. и Гурвиц Ю. О., Геометрия. Методическое пособие, ч. 1 и 2, Учпедгиз, 1934—1935.

16. Геометрия в школе. Статья в т. X Большой советской энциклопедии, изд. 2.

17. Герценштейн Я., Геодезические работы в средней школе, «Математика в школе», 1941, № 2.

18. Гильберт Д., Основания геометрии. Перевод с 7-го немецкого издания И. С. Градштейна, под ред. и со вступительной статьёй П. К. Рашевского, Огиз, Гостехиздат, М.— Л. 1948.

19. Г л а г о л е в Н. А., Элементарная геометрия, ч. 1 — Планиметрия, Учпедгиз, 1944; ч. 2 — Стереометрия, Учпедгиз, 1945.

20. Г о л у б о в с к а я А. И., Геометрические задачи на построение. Сборник «Элементарная математика в средней школе», под ред. Ляпина С. Е., вып. 2., Учпедгиз, 1936.

21. Г у л ь И. М., а) Сборник геометрических задач (планиметрия), Учпедгиз, 1940; б) Геометрия Лобачевского, изд. АПН, 1947.

22. Д а в и д о в А. Ю., Элементарная геометрия, изд. 24, 1905.

23. Д е л о н е Б. и Ж и т о м и р с к и й О., Задачник по геометрии, ОНТИ, 1935. Переиздан в 1949 г.

24. Д е н и с о в а Т. Н., Планы уроков по геометрии в VII классе. Из опыта работы, Учпедгиз, 1953.

25. Д з ы к П. Г., Сборник стереометрических задач на комбинации геометрических тел, под редакцией В. И. Милинского, Учпедгиз, 1936.

26. Д о р ф П., Стереометрический ящик, «Математика в школе», 1940, № 1.

27. Д о р ф П. Я. и Р у м е р А. О., Измерения на местности, изд. АПН, 1953.

27а. Д у б н о в Я. С., К истории постулата о параллельности в связи с практикой современного преподавания, «Математика в школе», 1950, № 5.

28. З а г о с к и н а Е. Д., Первые уроки геометрии в VI классе, «Математика в школе», 1947, № 4.

29. З н а м е н с к и й М. А., а) Беседы по геодезии с учителями. Учпедгиз, 1931; б) Работы на местности в средней школе, «Математика в школе», 1941, № 2.

30. И в а н о в М. И., Как оформлять в письменном виде доказательства геометрических теорем? «Математика в школе», 1937, № 2.

31. И з в о л ь с к и й Н. А., Геометрия на плоскости. Геометрия в пространстве, изд. «Сотрудник школ», 1915.

32. И с т о м и н а Н. С., Планы уроков по геометрии в VI классе, под ред. В. М. Брадиса, Учпедгиз, 1953.

33. К а в у н И. Н., а) Как обучать геометрии в четырёхлетней школе первой ступени? изд. «Сеятель», 1927; б) Начальный курс геометрии, Ленгиз, 1924.

34. К а г а н В. Ф., а) Лобачевский, изд. Академии наук СССР, 1948; б) Геометрия. Статья в т. XV Большой советской энциклопедии; в) Основания геометрии, т. I — Опыт обоснования евклидовой геометрии, Одесса 1905; т. II — Исторический очерк развития учения об основаниях геометрии, Одесса 1907; г) О преобразовании многогранников, ГТТИ, 1933; д) Основания геометрии, ч. 1. Геометрия Лобачевского и её предистория, ГТТИ, 1949.

35. К о в а н ь к о А. С., О принципе Кавальери. Сборник «Элементарная математика в средней школе», под ред. Ляпина С. Е., вып. 2, Учпедгиз, 1936.

36. К о м п а н и й ц П. А., Параллелепипеды четырёх видов. Ленинградский гор. институт усовершенствования учителей, 1940.

37. К о с т и н В. И., Основания геометрии, Учпедгиз, 1946.

38. К у л и ш е р А. Р., Учебник геометрии, Гиз, 1922.

39. К р е л ь ш т е й н Б. И., Опыт особого построения отдела стереометрии в IX классе средней школы. «Учёные записки» Ленинградского государственного педагогического института имени Герцена, т. 75, 1948.

40. К у т у з о в Б. В., а) Геометрия Лобачевского и элементы оснований геометрии, Учпедгиз, 1950. Пособие для учителей средней школы.

б) Геометрия. Пособие для учительских и педагогических институтов, Учпедгиз 1950.

41. Л е б е г Г., Об измерении величин. Перевод под ред. А. Н. Колмогорова, Учпедгиз, 1938.

42. Л о б а ч е в с к и й Н.И., Полное собрание сочинений, т. 1. Сочинения по геометрии. Геометрические исследования по теории параллельных линий. О началах геометрии, Гостехиздат, М.— Л. 1946; т. II. Геометрия. Новые начала геометрии с полной теорией параллельных, ГТТИ, 1946—1949.

43. Назарьев С. В. и др., Сборник задач по геометрии для учительских институтов, Учпедгиз, 1948.
44. «Начала» Евклида. Книги I — IV. Перевод с греческого и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского, Гостехиздат, М.— Л. 1948. Книги VII—X, 1949 г.
45. Никитин Н. Н., Начальный курс геометрии для семилетних школ. Учебный материал для VI класса, изд. АПН, 1952.
46. Панов Д. Ю. Вычисление площадей, Огиз, Гостехиздат, М.— Л. 1946.
47. Центковский М. В., Считающие чертежи, ГТТИ, 1953.
48. Перепёлкин Д. И., Курс элементарной геометрии, часть 1. Учебник для педагогических институтов, Гостехиздат, 1948; часть 2, 1949 г.
49. Петров М., О преподавании геометрии в VI классе, «Математика в школе», 1939, № 6.
50. Романовский Б. В., Задачи на построение в стереометрии, Учпедгиз, 1936.
51. Смогоржевский А. С., Метод координат, вып. 10, ГТТИ, 1952. Серии «Популярные лекции по математике».
52. Соминский И. С., О работе учащихся VI класса в связи с изучением первых теорем геометрии, «Математика в школе», 1947, № 4.
53. Сорокин П. И., Опыт изучения геометрического материала в IV классе, изд. АПН, 1950.
54. Столяр А. А., Первые уроки стереометрии в средней школе. Сборник «Из опыта работы передовых учителей математики», под ред. Н. Н. Никитина, изд. АПН, 1950.
55. Тарский А., Теория длины окружности в средней школе, «Математика в школе», 1937, № 1.
56. Цюльке, Геометрические построения на ограниченном куске плоскости, ОНТИ, 1935.
57. Чакалов Л., Несоизмеримые углы в треугольниках, «Математика в школе», 1948, № 1.
58. Четверухин Н. Ф., а) Методы геометрических построений, Учпедгиз, 1938; б) Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии, Учпедгиз, 1946; в) Стереометрические задачи на проекционном чертеже. Позиционные задачи в курсе стереометрии, «Математика в школе», 1946, №№ 2 и 3; г) Стереометрические задачи на проекционном чертеже, изд. АПН РСФСР. М.— Л. 1947.
59. Шоластер Н. Н., Первые уроки по геометрии в VI классе, Учпедгиз, 1953.
60. Яковлев В., Преподавание геометрии и оптические иллюзии, «Математика в школе», 1940, № 3.
61. Шувалов Я. А., Основы топографии, Учпедгиз, 1951.

Часть пятая
МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИИ

Глава I
ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ ОБ ИЗУЧЕНИИ ТРИГОНОМЕТРИИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

§ 1. Исторические сведения. Современная тригонометрия.

Содержание всего курса тригонометрии в основном сложилось к началу XVIII в., но современная форма её изложения и прежде всего общепринятая теперь символика установились лишь со времён Эйлера, т. е. во второй половине XVIII в. Возьмём, например, решение треугольника по двум сторонам и углу против одной из них в том виде, в каком его даёт Виета в своей книге «О различных математических вопросах» (1593 г.) См. [V, 7]:

«Если в каком-нибудь плоском треугольнике даны боковые рёбра и угол при основании, то можно найти также другой угол при основании. Действительно, если считать боковое ребро, стягиваемое данным углом, первым, то как первое ребро относится ко второму, так относится синус данного угла к синусу другого искомого угла у основания. Или как второе боковое ребро относится к первому, так секанс угла, дополнительного к данному углу, относится к секансу угла, дополнительного к искомому углу.

Но если данный угол острый и первое, стягиваемое им, ребро меньше второго ребра, то значение искомого угла двоякое—именно, если отношение второго ребра к первому меньше отношения sinus totus к синусу данного угла. Поэтому в данном случае можно взять либо острый угол, который находят в каноне, либо же угол, дополнительный к нему до двух прямых. Из условий задачи нельзя вывести, какой из этих углов следует взять».

Весьма поучительно разобраться в этом отрывке, что легко сделать, если учесть, что «ребром» здесь называется сторона треугольника и что синусом в то время называлась линия синуса, а sinus totus («полный синус»)— это линия синуса для угла в 90°; «канон» (свод) — таблица; здесь имеется в виду таблица синусов.

Как видим, Виета здесь не пользуется формулами, в то время как в других своих сочинениях он широко их применяет. В дальнейшем формулы стали применяться и в тригонометрии. Вместо приведения полных названий тригонометрических линий стали записывать их сокращённо.

У Эйлера (1707—1783) мы встречаем уже обозначение $\sin \times \times A \cdot z$ (синус аркус z, т. е. синус дуги z) и более короткое $\sin \cdot z$; осталось только выбросить точку после знака sin, чтобы получить общепринятое теперь обозначение. От работ Эйлера, в частности от его «Введения в анализ бесконечно малых» (1748 г.), идёт и чёткое разграничение линии синуса и синуса, как отношения линии синуса к радиусу (то же относится и к другим функциям).

Переход к новому воззрению на тригонометрические функции как на отношения отрезков было большим шагом вперёд и в теоретическом и в чисто практическом отношениях. Переход этот совершался весьма медленно и был закончен лишь в середине XIX в.

Аргумент тригонометрических функций у Эйлера обозначается то в градусной, то в радианной мере: наряду с записью $\sin \frac{m}{n} \cdot 90°$ встречается и запись $\sin \left(\frac{1}{2}\pi + z\right)$, причём есть указание, что z — какая-либо дуга круга, радиус которого всегда считается равным единице («Введение в анализ», глава VIII). Преобладание выражения аргумента в радианной мере означает дальнейший шаг в деле превращения тригонометрии из науки о решении треугольников в ветвь анализа, посвящённую изучению тригонометрических функций. В этой главе книги Эйлера мы имеем первое аналитическое изложение тригонометрии или, вернее, гониометрии; тригонометрия как учение о решении треугольников предполагается у Эйлера уже известной, предполагаются известными и общие определения тригонометрических функций, а также формулы синуса и косинуса суммы и разности для любых значений аргумента; все формулы приведения выводятся из них чисто аналитически. Основываясь на формулах, выражающих $\sin nz$ и $\cos nz$ в зависимости от $\sin z$ и $\cos z$ при n целом, Эйлер выводит известные ряды

$$\sin v = v - \frac{v^3}{3!} + \frac{v^5}{5!} - \dots \text{ и } \cos v = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

(строгий элементарный вывод этих рядов можно найти в книге [III,30*а*]); он выводит формулу $(\cos z \pm \sqrt{-1} \cdot \sin z)^n = \cos nz \pm \sqrt{-1} \cdot \sin nz$, ещё не пользуясь обозначением $\sqrt{-1}$ через i (эта буква i обозначает у него бесконечно большое число), получает из неё формулу $e^{v\sqrt{-1}} = \cos v + \sqrt{-1} \cdot \sin v$. Отметим, что от Эйлера пошло и общепринятое обозначение сторон треугольника буквами a, b, c и противолежащих углов буквами A, B, C.

Тригонометрия рассматривается в настоящее время как дисциплина, изучающая тригонометрические функции и их приложения. Их приложения в геометрии особенно важны, но отнюдь не являются единственными. Напомним ту большую роль, какую тригонометрические функции играют в деле изучения комплексных чисел, в деле решения уравнений, при изучении колебательных процессов, при изучении функции весьма общего вида (ряды Фурье) и т. д.

Понятие о современном аналитическом построении тригонометрии можно получить по книге [V, 16], где ему посвящён один из параграфов гл. IV. Функции $\sin z$ и $\cos z$ для любого комплексного значения аргумента определяются посредством степенных рядов, сходящихся для всех z. Отсюда прежде всего следует, что это действительно новые функции, не сводимые к ранее изученным рациональным, так как целые рациональные функции выражаются конечными многочленами, а дробные рациональные функции — бесконечными рядами, сходящимися внутри кругов конечного радиуса. Далее легко доказывается, что $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$. После этого устанавливаются (без обращения к геометрии) теоремы сложения $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$ и $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$ для любых значений z_1 и z_2. Доказав, что в интервале (0; 2) $\cos z$ имеет единственный корень, равный действительному числу 1,5707963..., и обозначив это число через ξ, выводим все формулы приведения, сводящиеся к следующим (n — любое целое число):

$$\sin(z + 4n\xi) = \sin z;\ \sin[z + (4n+1)\xi] = \cos z;\ \sin[z + (4n+2)\xi] = -\sin z;\ \sin[z + (4n+3)\xi] = -\cos z;\ \cos(z + 4n\xi) = \cos z;\ \cos[z + (4n+1)\xi] = -\sin z,\ \cos[z + (4n+2)\xi] = -\cos z;\ \cos[z + (4n+3)\xi] = \sin z.$$

Определяя новую функцию $\operatorname{tg} z$ как частное $\sin z : \cos z$, убеждаемся, что $\operatorname{tg}(z + 2n\xi) = \operatorname{tg} z$. Итак, функции $\sin z$ и $\cos z$ — периодические с периодом 4ξ, функция $\operatorname{tg} z$ — с периодом 2ξ.

Развивая эти соображения дальше, можно получить совершенно независимо от геометрического смысла введённых функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$ все их свойства, в частности их свойства при действительных значениях аргумента z (изучить «их поведение на действительной оси»), составить таблицы их значений, вычертить их графики. Остальные три функции вводятся формулами $\operatorname{ctg} z = 1 : \operatorname{tg} z$, $\sec z = 1 : \cos z$, $\operatorname{cosec} z = 1 : \sin z$.

Переходя к приложениям функций $\sin z$ и $\cos z$ в геометрии (евклидовой), рассматриваем прежде всего кривую, которую описывает точка M с прямоугольными координатами $x = r\cos t$, $y = r \sin t$ при изменении аргумента t, принимающего всевозможные действительные значения (r — произвольные положительные числа). Убеждаясь, что эта кривая — окружность, устанавливаем, что $\sin t$ и $\cos t$ представляют собой отношения проекций радиуса-вектора точки M на координатные оси к длине радиуса. Вычисляя длину кривой по формуле $l = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{dx^2 + dy^2}$, находим, что длина окружности выражается формулой $l = 4r\xi$; сопоставление с известной из геометрии формулой $l = 2\pi r$ приводит к заключению, что $\xi = 0{,}5\pi$.

Выгоды аналитического изложения тригонометрии бросаются в глаза: всё становится проще, короче, яснее. Кроме того, и это очень существенно, обеспечивается полная независимость тригонометрических функций от той или другой геометрической системы. Например, в геометрии Лобачевского, где вовсе нет подобия, обычное изложение тригонометрии невозможно. Значит ли это, что в ней нельзя говорить о тригонометрических функциях угла? При аналитическом изложении всё разъясняется.

Конечно, для первого знакомства с тригонометрией приходится избирать обычный путь, основывающийся на геометрии. Но правильное понимание научного построения тригонометрии поможет учителю внести ряд улучшений и на этом пути.

§ 2. Тригонометрия как учебный предмет в общеобразовательной средней школе.

Сферическая тригонометрия рассматривает треугольники, сторонами которых являются дуги больших кругов шара. Она нужна астроному, изучающему движение мировых тел прежде всего в том виде, в каком оно проектируется на воображаемую небесную сферу, нужна топографу (землемеру), если он рассматривает более значительные части земной поверхности, когда пренебрежение её кривизной уже заметно искажает действительное положение вещей, нужна морякам и лётчикам, покрывающим громадные расстояния по поверхности земного сфероида или близко от неё. Но всё же этот круг людей весьма ограничен, и сферическая тригонометрия в учебный план общеобразовательной школы не вошла: её изучают только специалисты (однако учителю математики необходимо быть с ней знакомым). Иначе обстоит дело с прямолинейной тригонометрией; тригонометрические функции, изучение которых является её основной задачей, имеют самые многообразные и широкие приложения и в самой математике (геометрия, алгебра и другие математические дисциплины, вплоть до теории чисел), и в механике, и во всех разделах физики (не говоря уже об астрономии), а в связи с этим и в самых различных отраслях техники. Ввиду этого изучение прямолинейной тригонометрии давно стало неотъемлемой частью общеобразовательного курса математики, частью, рассматриваемой в старших классах средней школы, где учащиеся уже располагают теми сведениями по арифметике, алгебре и геометрии, без которых нельзя заниматься тригонометрией. Цели введения тригонометрии в среднюю школу вполне определённы: во-первых, ознакомление учащихся с основными тригонометрическими функциями, притом настолько основательное, чтобы они не испытывали затруднений, встречаясь с этими функциями в различных дисциплинах, изучаемых в средней и высшей школе, и, во-вторых, ознакомление, теоретическое и практическое, с геометрическими приложениями этих функций, т. е. прежде всего с решением треугольников (прямолинейных). Программы, по которым шло преподавание тригонометрии в школах разных типов за последние полвека, отличались одна от другой лишь второстепенными деталями.

Ныне действующая программа математики для средней школы отводит на изучение тригонометрии всего 132 часа, в том числе 12 часов на начальный курс (пропедевтику тригонометрии), как главу курса геометрии VIII класса, и 120 часов на основной курс в IX и X классах (Программы средней школы. «Математика», Учпедгиз, 1949). Кроме того, некоторые применения тригонометрии предусмотрены и в других разделах курса математики: тригонометрическая форма комплексного числа, решение геометрических задач с применением тригонометрии, в частности на тела вращения, на комбинации тел, на сечения тел.

Занимаясь тригонометрией, учитель с большой пользой для дела может использовать и смежные дисциплины, изучаемые его учениками. Для этого прежде всего надо интересоваться тем, что проходилось и проходится ими по физике, астрономии, черчению. Построение графиков тригонометрических функций, а вместе с тем и прочность знания определений этих функций, выигрывает, если на уроках тригонометрии будут использованы приёмы построения синусоиды и других кривых, с которыми учащиеся ознакомились на уроках черчения. Полезно решить несколько задач на сложение и разложение сил — графически и аналитически. Большой интерес учащихся вызывает решение с применением тригонометрии конкретных астрономических задач.

Велико значение курса тригонометрии и для воспитания логических навыков: чёткие определения новых понятий, строгое доказательство новых теорем, неукоснительное требование полной обоснованности всех заключений в процессе решения задач — для всего этого курс тригонометрии, завершающий среднешкольную математику, представляет исключительно благоприятные условия. Но условия эти реализуются лишь при постоянной заботе учителя о безупречном как с научной, так и с методической стороны изложении материала им самим и при неуклонной требовательности к учащимся. Очень большое число часов, отведённых на тригонометрию, позволяет изучить её самым основательным образом, занимаясь попутным повторением всех вопросов арифметики, алгебры, геометрии, которые при этом приходится затрагивать.

§ 3. Линейное и концентрическое изложение тригонометрии.

В большинстве учебников тригонометрии, особенно старых, мы имеем примерно такое расположение материала: после некоторых необходимых предварительных указаний (обобщение понятий угла и дуги, разные способы измерения углов, правило знаков Декарта для направленных отрезков на оси) даются определения всех шести тригонометрических функций, притом самые общие, т. е. для любых действительных значений аргумента от $-\infty$ до $+\infty$, и устанавливаются основные соотношения между значениями этих функций, соответствующими одному и тому же значению аргумента. Далее рассматривается приведение функций к наименьшему положительному аргументу, затем теоремы сложения и их следствия. Эти сведения о тригонометрических функциях позволяют показать, как составляются таблицы их значений. Рассмотрением обратных тригонометрических функций и тригонометрических уравнений заканчивается изучение гониометрии, а дальше идут приложения тригонометрии в геометрии, в первую очередь решение треугольников, сперва прямоугольных, затем косоугольных, основанное на предварительном рассмотрении соотношений между их углами и сторонами.

Этому «поступательному», или «линейному», расположению материала, когда каждый вопрос берётся сразу в полной его общности и рассматривается в рамках намеченной программы полностью, противопоставляется «концентрическое» его расположение, когда тригонометрические функции определяются и изучаются сперва только в ограниченной области значений аргумента, затем берутся геометрические их приложения, а после делается обобщение: те же вопросы рассматриваются в более широкой области значений аргумента. В ныне действующей программе для средней школы приняты два концентра: первый, включённый в курс геометрии VIII класса и занимающийся тригонометрическими функциями острого угла и их применением к решению прямоугольных треугольников (этот концентр называют «пропедевтическим», т. е. подготовительным, или «начальным», курсом тригонометрии; последнего названия мы и будем придерживаться), и второй, в котором тригонометрия изучается как отдельная математическая дисциплина в IX и X классах («основной курс тригонометрии»). Собственно говоря, и в пределах этого основного курса в программе имеется тенденция выделить сперва только область значений аргумента от 0° до 360°, но резкого разделения на концентры здесь нет.

Введение концентров имеет свои положительные и отрицательные стороны, о которых речь была выше, в § 13 1-й части.

Вопрос о преимуществах линейного и концентрического изложения тригонометрии нельзя считать окончательно решённым. Опыт включения главы о тригонометрических функциях острого угла в связи с решением прямоугольных треугольников в курс геометрии VIII класса ясно показывает, что заметного снижения трудностей усвоения основного курса отсюда не получается. Есть основания, однако, полагать, что при несколько большей затрате времени возможно прочное усвоение начальных сведений по тригонометрии, используемых немедленно и помогающих лучше усвоить основной курс тригонометрии в дальнейшем. Что же касается разделения на концентры основного курса, то следует с полной определённостью признать, что оно себя не оправдывает: и ясность представлений учащихся, и быстрота работы только выигрывают, если каждый вопрос программы разбирается сразу до конца.

§ 4. Учебники тригонометрии.

До последнего времени тригонометрия в советской средней школе изучается по учебнику Н. Рыбкина, вышедшему впервые в 1894 г. и подвергавшемуся с тех пор многочисленным переделкам. В дальнейшем имеется в виду 26-е издание этого учебника, выпущенное Учпедгизом в 1948 г. Соответствие этого учебника программе не является полным: в учебнике нет деталей, предусмотренных программой в разделах «Обратные тригонометрические функции», «Решение тригонометрических уравнений», и имеется кое-что, программой не предусмотренное (но полезное), как, например, разделы «Понятие о составлении тригонометрических таблиц», «Об измерениях на местности». Достоинством учебника является его сжатость (в нём всего 104 страницы, причём последние $2\frac{1}{2}$ представляют собой полезный перечень формул, подлежащих запоминанию), но надо отметить, что в некоторых местах эта сжатость чрезмерна и становится уже недостатком, как, например, в § 49, где говорится о главных значениях обратных тригонометрических функций. Изложение почти везде ясное, доступное учащимся. Рассмотрение теоретических вопросов сопровождается примерными решениями задач. Задач для самостоятельных упражнений учащихся учебник, к сожалению, не содержит.

Учитель, работающий по учебнику Н. Рыбкина, должен иметь в виду, что, кроме неполноты изложения некоторых вопросов, в нём имеются и не вполне правильные утверждения; к учебнику надо относиться критически. Есть, например, несколько неточностей в историческом очерке: на стр. 4 сказано, что «за 100 лет до нашей эры учёный Менелай открыл основы сферической тригонометрии» (в действительности Менелай Александрийский жил во второй половине I в. н. э.; он систематизировал и дополнил сведения по геометрии и тригонометрии сферы, найденные ранее); Птолемей составил таблицу хорд для круга радиуса не в единицу, как говорится там же, а в 60 единиц, и начинается эта таблица не с угла 1°, а с угла $^1/_2$°; неверно утверждение, что формулы тригонометрии принимают свой современный характер с XVI в. Учащиеся получают неправильное представление о чётных и нечётных функциях, прочтя примечание § 34. Здесь следовало бы не говорить об аналогии, а дать точное определение: функция $f(x)$, удовлетворяющая условию $f(x) = f(-x)$ или условию $f(x) = -f(-x)$ для всех рассматриваемых значений x, называется соответственно чётной или нечётной; примеры чётных функций: x^2, $\cos x$, $\sec x$, нечётных: x^3, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$; функция $ax^2 + bx + c$ не является ни чётной, ни нечётной: это сумма одной чётной функции $(ax^2 + c)$ и одной нечётной (bx); при желании определение чётной и нечётной функции легко дать и не пользуясь функциональным символом $f(x)$.

Большим недостатком учебника Н. Рыбкина является полное игнорирование вопроса о точности рассматриваемых вычислений. Почти все задачи, решаемые вычислительным методом с применением тригонометрии, можно решить — и при том гораздо проще — графическим методом. Казалось бы, это обязывает учебник тригонометрии ставить и разрешать вопросы о точности найденных посредством вычисления результатов. Но учебник этого не делает даже тогда, когда рассматривает вопрос о таблицах; единственное исключение — § 82, где взят вопрос о точности определения угла по 5-значным таблицам, изложенный без связи с остальным и мало вразумительно. Точные и приближённые данные не различаются; не соблюдается основной принцип записи приближённых чисел (писать все надёжные и одну не вполне надёжную цифру). Так, в § 115 приводится решение числового примера: по данным сторонам $a = 700$ и $b = 600$ и углу $A = 40°25'$, определяется по 4-значным таблицам угол B по формуле $\lg \sin B = \lg = b + \lg \sin A - \lg a$, получается $\lg \sin B = \bar{1},7796$, $B = 37°$; если считать данные точными, то ответ следует писать в виде $B = 37°00'$, так как $\lg \sin 37°00' = \bar{1},7795$, $\lg \sin 37°01' = \bar{1},7797$.

Недостатки учебника тригонометрии Н. Рыбкина отмечались много раз; см., например, статью [V, 14]. Ещё в 1940 г. Учпедгиз начал работу по созданию нового учебника. В 1950 г. им выпущен третьим изданием в качестве пробного — учебник тригонометрии А. Ф. Берманта и Л. А. Люстерника. Впервые он был выпущен пробным изданием в 1940 г. и в переработанном виде переиздан в 1947 г. Учебник тригонометрии Берманта и Люстерника получил признание и высокую оценку учителей и научных работников.

§ 5. Некоторые другие учебники и учебные пособия по тригонометрии.

Учебная литература по тригонометрии весьма обширна. Отмечаем несколько ценных книг; более подробный указатель книг и статей дан в заключение настоящей V части.

Пржевальский Е., Прямолинейная тригонометрия и собрание тригонометрических задач, 1-е изд. в 1880 г., 10-е изд. в 1923 г.

Один из нескольких распространённых в дореволюционное время учебников тригонометрии для средней школы, весьма подробный, уделяющий много внимания вопросам вычислений с применением таблиц. Содержит большое количество задач для упражнений разнообразного содержания.

Глазенап С. П., Тригонометрия, часть 1-я — решение прямоугольных треугольников (1915); часть 2-я — гониометрия (1916).

Книга написана как учебник для реальных училищ и даёт тщательно продуманное изложение тригонометрии в двух концентрах.

Пиотровский Б. Б., Тригонометрия, 1925.

Предполагается, что некоторые начальные сведения по тригонометрии уже имеются, но курс тригонометрии изложен независимо от них. Продуманное во всех деталях, не оставляющее ничего неясного изложение, постепенно приводящее к сознательному, вполне обоснованному построению графиков тригонометрических функций, как итогу их изучения. В изложении вопроса об обратных тригонометрических функциях и решении тригонометрических уравнений много такого, чего нет в других учебниках для средней школы, как, например, графическое решение некоторых трансцендентных уравнений ($x^2 - \sin x = 0$, $1 : x - \sin x = 0$, $x - \operatorname{tg} x = 0$). Функции синус и косинус определяются как отношения проекций радиуса-вектора к его длине; геометрические приложения стоят на втором плане; на первом — изучение тригонометрических функций.

Вебер Г. и Вельштейн И., Энциклопедия элементарной математики (перевод с немецкого под редакцией В. Ф. Кагана, т. II, книга 2-я и 3-я, 1910). Содержит главы: «Плоская тригонометрия и геометрия», «Геометрия и тригонометрия сферы», оригинально и глубоко рассматривающие вопрос.

§ 6. Тригонометрические задачи.

Если на занятиях в школе по арифметике и алгебре обычно имеет место некоторое преобладание практики (решения задач) над теорией, а на занятиях геометрией, наоборот, теории над практикой, то при изучении тригонометрии положение почти всегда бывает ближе к нормальному; необходимое для успеха дела единство теории и практики при изучении тригонометрии обеспечивается легче, чем в других математических дисциплинах. Но и здесь, однако, у учащихся наблюдается тенденция решать задачи механически, поменьше возвращаясь к теории, и долг учителя — постоянно требовать полной обоснованности каждого шага надлежащими ссылками на определения и теоремы (почаще спрашивать «почему?») и требовать исчерпывающих решений.

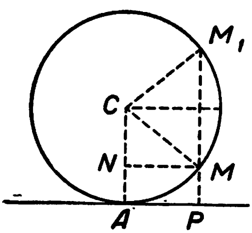
Как основной способ самоконтроля при решении большинства тригонометрических задач полезно использовать аккуратное выполнение чертежа, т. е. графическое решение, имеющее и самостоятельную ценность. Пусть, например, требуется найти $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, зная, что $\operatorname{tg} \alpha = -2$. Потратив минуту на построение, учащиеся находят $\sin \alpha \approx \pm 0{,}9$, $\cos \alpha \approx \mp 0{,}4$, понимая с предельной ясностью и необходимость двойных знаков, и их соответствие (одновременно берутся оба верхние или оба нижние знака), а затем уже, обращаясь к обычным формулам, находят точные иррациональные $\left(\sin \alpha = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} = \pm \sqrt{0{,}8},\quad \cos \alpha = \mp \frac{1}{\sqrt{5}} = \mp \sqrt{0{,}2}\right)$, а также приближённые рациональные значения искомых величин ($\sin \alpha \approx \pm 0{,}8944$ и $\cos \alpha \approx \mp 0{,}4472$) и убеждаются в согласии результатов, полученных графическим и аналитическим способами.

Если задача даётся в общем виде (данные выражены буквами), очень полезно после получения ответа в виде буквенного выражения взять какие-либо подходящие числовые значения и произвести для них графическую проверку.

Нередко хорошую проверку даёт рассмотрение частных и предельных случаев. Пусть, например, требуется найти площадь сечения S, проведённого через одну из вершин основания правильной 4-угольной пирамиды перпендикулярно к противоположному боковому ребру, если известны сторона основания a и угол α между боковым ребром и высотой пирамиды. Получив ответ $S = a^2 \cos 2\alpha \times \sec \alpha$, проверяем его, замечая, что 1) при постоянном α S растёт пропорционально квадрату a, как и должно быть; 2) при $a = \mathrm{const}$

и $\alpha \to 0$ и $S \to a^2$, что и должно быть, так как при $\alpha \to 0$ сечение стремится к совпадению с основанием; 3) при $a = \text{const}$ и $\alpha \to 45^\circ$ $S \to 0$, чего и следовало ожидать, так как при этом сечение вырождается в ребро. Такого рода проверка показывает с весьма высокой вероятностью правильность найденной формулы и имеет несомненную ценность и сама по себе, приучая учащихся к более вдумчивому, отнюдь не формальному отношению к найденным результатам.

Очень нередки случаи, когда тригонометрия даёт решение вопроса, который можно решить и без неё. Надо всемерно культивировать рассмотрение различных способов решения, выясняя их сравнительные достоинства и недостатки. Возьмём, например, задачу: построить ряд точек окружности данного радиуса r, касающейся данной прямой AB в данной её точке A. Построительное решение с помощью циркуля и линейки доступно уже ученику VII класса, но оно осуществимо лишь при не слишком большом радиусе. Если же r настолько велико, что употребление циркуля становится невозможным, например при $r = 10$ *м*, то вычисляем расстояние точек окружности от касательной, беря по произволу их расстояние от радиуса, проведённого в точку касания ($x = AP = NM$, $y = PM$, $y = r^2 - \sqrt{r^2 - x^2}$, фиг. 50), или же по произволу берём угол $ACM = \alpha$ и находим $x = r \sin \alpha$, $y = r \cos \alpha$.



Фиг. 50.

Вычисление с использованием тригонометрических функций оказывается более выгодным, в чём можно легко убедиться, действительно проводя его (взяв, например, $r = 100$ *мм*, $x = 0, 10, 20, \dots, 90, 100$ *мм*, $\alpha = 0^\circ, 9^\circ, 18^\circ, \dots, 81^\circ, 90^\circ$). В заключение, применяя циркуль, убеждаемся, что все точки, построенные на основании этих результатов, действительно находятся на четверти окружности; интересно отметить, что для получения точек второй её четверти при геометрическом способе решения нужна уже другая формула ($y = r + \sqrt{r^2 - x^2}$), а при тригонометрическом сохраняются те же ($x = r \sin \alpha$, $y = r \cos \alpha$).

В средней школе используется «Сборник задач по тригонометрии» Н. Рыбкина, вышедший в 1948 г. 13-м изданием и содержащий много задач по геометрии, которые требуют применения тригонометрии. Особенно трудных задач сборник не содержит, к большинству более трудных задач даны указания. Можно считать, что всякий, оканчивающий среднюю школу, должен быть в состоянии справиться с любой задачей этого сборника.

Из многочисленных дореволюционных сборников задач по тригонометрии отметим лучший, составленный И. Верещагиным [V, 6]. Более или менее значительный материал для упражнений даётся в каждом учебнике тригонометрии.

Учитель, желающий иметь побольше тригонометрических задач практического характера, найдёт их в большом выборе в учебнике [V, 13], а также в маленькой книжке [V, 22] и в подробном учебнике [III, 11].

Отметим, что некоторое количество более трудных тригонометрических задач негеометрического характера содержит задачник [III, 24].

Ценный для учителя материал содержит книга [V, 35], дающая классификацию и способы решения задач на треугольники в неосновных случаях.

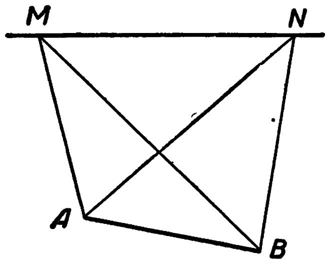
Учитель должен уметь и сам составлять новые задачи. Особенно легко получать новые задачи через *обращение* уже имеющихся, т. е. через замену одного из данных искомым, а искомого — одним из данных. Например, решив задачу на определение площади треугольника S по двум данным его углам A и B и периметру $2p$, можно поставить две новые: найти $2p$ по данным A, B, S и найти B по данным S, A, $2p$. Вторая задача значительно труднее первой; предварительно следует установить тождество $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos 0{,}51A \cdot \cos 0{,}5\, B \cdot \cos 0{,}5\, C$.

Другим важным источником новых задач является обобщение уже имеющихся, в частности обобщение имеющихся геометрических задач. Так, взяв задачи № 19, § 9 «Сборника задач по геометрии для IX и X классов средней школы» Н. Рыбкина (ч. II, Стереометрия, 1948) и заменив данное в ней значение угла в 30° общим его значением $0 < \alpha < 90°$, мы получаем хорошую тригонометрическую задачу на вычисление площади сечения пирамиды, указанную выше (стр. 408). Её ответ $(S = a^2 \cos 2\alpha \cdot \sec \alpha)$ при $\alpha = 30°$ сводится к $S = \frac{1}{3} a^2 \sqrt{3}$ и совпадает с ответом, приведённым в книге (ещё одна проверка!).

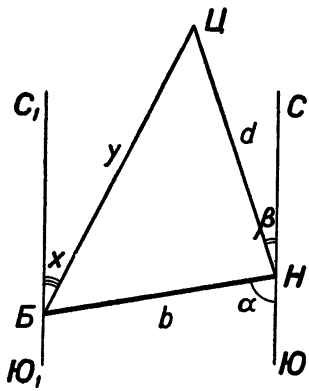
При некотором внимании к окружающей действительности тригонометрические задачи разнообразного содержания и разной степени трудности легко составляются по поводу вопросов, естественно возникающих у учащихся. Вот на земле лежит цилиндрическая бочка. Чтобы узнать, сколько в ней горючего, тракторист опускает в неё через боковое отверстие палку и смотрит, какова глубина жидкости. Естественно возникает задача: найти объём V той части круглого цилиндра с данным радиусом основания и данной высотой, какая отсекается плоскостью, проведённой параллельно оси на данном от неё расстоянии h. Таблица значений V для разных значений h и соответствующий график имели бы даже практическую ценность. Эта задача при получении данных в результате измерений, производимых самими учащимися и, быть может, с экспериментальной проверкой, выполненной ими уже по собственной инициативе, производит совсем иной эффект, чем готовая задача № 29, § 21 из сборника Н. Рыбкина. Прежде всего, такие задачи прочно запоминаются.

Подобные задачи, рождающиеся на глазах учащихся (и часто по их инициативе) из вопросов окружающей действительности, вызывают всегда особый интерес. Их надо всемерно культивировать, доводя их решение до числового результата, опытная проверка которого естественно заканчивает решение. Особенно много таких тригонометрических задач составляют вопросы геодезического характера. Это так называемые задачи на местности, и прежде всего задачи на косвенное измерение недоступных расстояний и высот, рассматриваемые в большем или меньшем количестве в любом учебнике тригонометрии. Огромное значение таких задач несомненно, но используются они сравнительно редко, частью из-за недостатка измерительных приборов и трудностей организационного порядка (работа должна протекать вне обычной классной обстановки), частью из-за незнакомства с ними самого учителя. Здесь можно рекомендовать: 1) поручение операций на местности самим ученикам, хотя бы немногим, с проведением вычислений, на них основанных, во время обычного урока: 2) условную постановку «полевых» задач в классной комнате, например, определение расстояния между двумя метками на стене M и N без права приближения к ней, когда непосредственно измеряется «базис» AB, взятый где-нибудь на полу, и 4 угла MAB, NAB, ABM, ABN (фиг. 51). Полный эффект такого рода работы дают в том случае, когда имеется хотя бы один экземпляр более точного угломерного прибора; в крайнем случае обходятся посредством обычного классного транспортира диаметром 25—30 *см*, позволяющего при некоторой аккуратности делать отсчёты до десятых долей градуса (транспортир кладётся на табуретку или столик, визируемые лучи фиксируются вкалыванием булавок или натягиванием тонких нитей).

Много практически ценного и интересного дают задачи оборонного характера. Проведём пример.



Фиг. 51.



Фиг. 52.

Наблюдатель H установил, что батарея $Б$ находится от него на расстоянии $b = 850$ *м* в направлении $НБ$, составляющем с линией север — юг угол $\alpha =$ $= 13\text{-}20$ делений угломера к востоку, а цель $Ц$ лежит на расстоянии $d = 1\,100$ *м* в направлении $НЦ$, составляющем с линией юг — север угол $\beta = 3\text{-}45$ делений угломера тоже к востоку (фиг. 52). Указать направление, в котором должна стрелять батарея, чтобы поразить цель, и расстояние от батареи до цели, т. е. угол $C_1БЦ = x$ и отрезок $БЦ = y$.

В артиллерии принято делить окружность на 60 равных частей, а каждую из этих частей, именуемых «большим делением угломера», ещё на 100 равных частей, именуемых «малыми делениями угломера», так что угол в 13-20 делений угломера равен $13 \cdot \frac{360}{60} + 20 \cdot \frac{360}{60 \cdot 100} = 78° + 1°12' = 79°12'$. Задачу рекомендуется решить сперва графически, взяв масштаб хотя бы в 1 *мм* 10 *м*, а затем аналитически.

Ориентироваться в вопросах военного дела, представляющих интерес для преподавания тригонометрии, можно по книге [V, 8].

Глава II

НАЧАЛЬНЫЙ КУРС ТРИГОНОМЕТРИИ

§ 7. Различные варианты начального курса.

Общие соображения о желательности отдельного и законченного, т. е. доводимого до практических приложений, предварительного изучения начальных сведений по тригонометрии разделяются большинством современных программ и учебников, но в деталях построения этого начального, или пропедевтического, курса наблюдается большое разнообразие. Ныне действующая программа математики для средней школы выделяет 12 часов из курса геометрии VIII класса для изучения тригонометрических функций острого угла ещё до того, как учащиеся ознакомятся с теоремой Пифагора. Учебник геометрии А. Киселёва содержит особый раздел, дающий предусмотренные программой сведения об этих функциях и помещённый после раздела о метрических соотношениях в треугольнике. Учебник методики тригонометрии В. В. Репьева рекомендует выделять на него около 15 часов занятий в классе при 7—8 часах домашней работы.

Рассмотрим, как лучше всего ставить этот начальный курс тригонометрии в рамках существующей программы (12 часов в курсе геометрии в VIII классе), предполагая, что им мы занимаемся после изучения метрических соотношений в треугольнике.

Всякую прямолинейную фигуру на плоскости можно разбить на треугольники, а всякий треугольник можно рассматривать как два приложенных друг к другу или наложенных друг на друга прямоугольных треугольника, поэтому прямоугольный треугольник является той простейшей фигурой, которую надо изучить в первую очередь. Имеем всего 5 следующих основных задач на прямоугольный треугольник, сводящихся к 4, важность которых легко показать на примерах практического характера.

1. Известны катеты a и b; найти гипотенузу c и острые углы A и B.

2. Известны катет a и гипотенуза c; найти другой катет b и острые углы A и B.

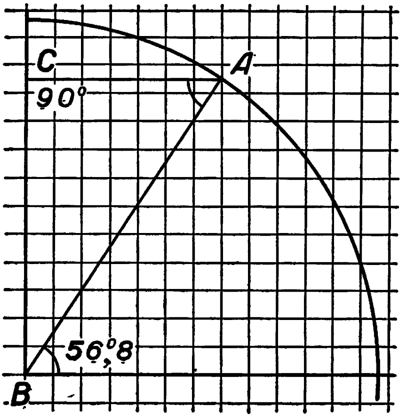
3. Известны гипотенуза c и один из острых углов A; найти другой острый угол B и оба катета a и b.

4. Известны катет a и противолежащий острый угол A; найти другой острый угол B, другой катет b и гипотенузу c.

5. Известны катет a и прилежащий острый угол B; найти другой острый угол A, другой катет b и гипотенузу c.

Все эти задачи легко решаются графически с применением масштабной линейки, циркуля, транспортира. Чертёж лучше выполнять на клетчатой бумаге, обыкновенной тетрадной или специальной миллиметровой, дающей большую точность. Очень важна тщательность выполнения чертежа: прямые проводятся как можно тоньше (остро отточенным карандашом), измерения производятся с подразделением имеющихся на линейке и транспортире наименьших делений на глаз на 5 или даже 10 частей.

Пусть требуется, например, найти радиус r того параллельного круга земного шара, который проходит через город Калинин, зная радиус земного шара $R = 6\,370$ *км* и широту $56°,8$ этого города. Дело сводится к разысканию катета $AC = b$ прямоугольного треугольника с данной гипотенузой $AB = r$ и данным острым углом A (фиг. 53). Построив этот прямоугольный треугольник на миллиметровой бумаге в масштабе хотя бы в 1 *мм* 100 *км*, непосредственным отсчётом находим $b = 35$ *мм*, и искомый радиус r равен, таким образом, приближённо 3 500 *км*.



Фиг. 53.

Овладение графическим методом решения геометрических задач представляет собой большую ценность и в непосредственно практическом отношении, и как средство лучшего уяснения существа вопроса начинающими; необходимо добиться, чтобы учащиеся свободно и уверенно его применяли.

Однако, как легко показать на примерах, этот метод, во-первых, даёт ограниченную точность результатов и, во-вторых, не всегда применим. Повысить точность можно укрупнением масштаба, но здесь нас ограничивают допустимые размеры чертежа. Графический способ вовсе неприменим, когда среди данных и искомых встречаются отрезки, значительно отличающиеся друг от друга по величине. Естественно возникает вопрос, нельзя ли решить указанные выше 5 основных задач вычислением.

Геометрия даёт два уравнения, связывающие элементы прямоугольного треугольника: одно, выражающее теорему Пифагора, а именно $a^2 + b^2 = c^2$, и другое, устанавливающее связь между острыми углами, а именно $A + B = 90°$. Но в каждой из 5 основных задач мы имеем 3 неизвестных. Для их разыскания нехватает ещё одного уравнения, которое мы получим, если введём так называемые тригонометрические функции острого угла.

Ввиду ограниченности времени, отводимого на начальный курс тригонометрии, необходимо очень тщательно отобрать подлежащий изучению материал. Тригонометрические функции острого угла изучаются в начальном курсе тригонометрии постольку, поскольку это необходимо для решения прямоугольных треугольников. Решение указанных 5 основных задач должно быть сознательным, уверенным и прочно усвоенным, чтобы в дальнейшем можно было им пользоваться.

§ 8. Определения тригонометрических функций острого угла. Две главные задачи на тригонометрические функции.

Пусть дан какой-нибудь прямоугольный треугольник с данным острым углом A. Три его стороны (катеты a и b и гипотенуза c) образуют шесть отношений, зависящих только от угла A, но не от размеров взятого треугольника; это заключение доказывается как особая теорема на основании известных свойств подобных треугольников и оправдывает рассмотрение шести отношений, как функций угла: каждому значению угла A соответствует вполне определённое значение каждого из этих отношений. Далее вводятся определения шести основных тригонометрических функций — синуса, косинуса, тангенса, котангенса, секанса, косеканса, как отношений сторон прямоугольного треугольника.

В начальном курсе тригонометрии обычно ограничиваются рассмотрением только 4 функций ($\sin A$, $\cos A$, $\operatorname{tg} A$, $\operatorname{ctg} A$); вполне возможно обойтись даже первыми тремя. Определения должны быть твёрдо усвоены учащимися; необходимо подчёркивать, что в них речь идёт о функциях *острого* угла, так как в дальнейшем будут изучаться новые, более общие определения. Указанные сокращённые обозначения тригонометрических функций в настоящее время общеприняты и отступать от них не следует.

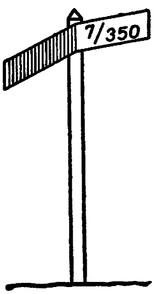
В качестве первого применения этих определений можно взять вывод формул для *дополнительных* углов $\sin(90° - A) = \cos A$, $\cos(90° - A) = \sin A$, $\operatorname{tg}(90° - A) = \operatorname{ctg} A$, $\operatorname{ctg}(90° - A) = \operatorname{tg} A$. Согласно определениям, имеем $\sin B = b : c$, $\cos B = a : c$, $\operatorname{tg} B = b : a$, $\operatorname{ctg} B = a : b$, но $B = 90° - A$, а потому $\sin(90° - A) = \cos A$ и т. д.

Второе применение определений тригонометрических функций острого угла даётся вычислением их значений для углов в 30°, 45°, 60° (необходима теорема Пифагора).

A	$\sin A$	$\cos A$	$\operatorname{tg} A$	$\operatorname{ctg} A$
0°	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$	0	∞
30°	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0{,}8660$	$\frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 0{,}5774$	$\sqrt{3} \approx 1{,}73205$
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0{,}7071$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0{,}7071$	1	1
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0{,}8660$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$	$\sqrt{3} \approx 1{,}73205$	$\frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 0{,}5774$
90°	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$	∞	0

Далее рассматривается изменение синуса и косинуса с изменением угла (берётся серия прямоугольных треугольников с равными гипотенузами — первый подход к тригонометрическому кругу), а также изменение тангенса (берётся серия прямоугольных треугольников, имеющих общий катет) и устанавливается, что при $A \to 0$ $\sin A \to 0$, $\cos A \to 1$, $\operatorname{tg} A \to 0$, а при $A \to 90°$ $\sin A \to 1$, $\cos A \to 0$, $tg\, A \to \infty$; необходимо выяснить условный смысл последнего обозначения: при $A \to 90°$ тангенс неограниченно возрастет, при $A = 90°$ тангенс не существует. Здесь желательно представлять всё в движении: точка B движется по дуге окружности с центром в A, точка C движется по её радиусу и т. д. В результате получается таблица значений тригонометрических функций (см. стр. 415); особая форма записи значений синуса и косинуса облегчает их запоминание.

Отмечаем, что при возрастании угла от 0° до 90° каждая тригонометрическая функция изменяется только в одном направлении (монотонно): или только возрастает, как синус и тангенс, или только убывает, как косинус и котангенс. Отсюда важный вывод: не только каждому значению острого угла соответствует одно определённое значение любой тригонометрической функции, но и обратно, каждому значению любой тригонометрической функции соответствует одно определённое значение острого угла. В связи с этим тригонометрические функции острого угла можно рассматривать как особые его меры, нередко применяемые в практической жизни. Так, вдоль железнодорожного полотна ставятся указатели уклона вроде изображённого на фигуре 54. Здесь первое число говорит, что угол уклона пути (угол между плоскостью полотна и горизонтальной плоскостью) имеет тангенс 0,007: на каждый метр перемещения в горизонтальном направлении полотно поднимается на 7 *мм*; второе число (350) показывает, какова длина участка с таким уклоном (в метрах).



Фиг. 54.

Далее следует перейти к рассмотрению двух главных задач на тригонометрические функции: 1) дан острый угол A; найти соответствующие значения тригонометрических функций; 2) дано значение некоторой тригонометрической функции неизвестного угла; найти значение последнего.

Приближённые решения обеих этих задач легко получаются в результате надлежащего построения (с помощью масштабной линейки, циркуля, транспортира). Так, чтобы найти значение тригонометрических функций угла 35°, строим дугу окружности BD радиусом $c = 100$ *мм* с центральным углом в 35° и опускаем перпендикуляр из одного её конца на радиус AD (точка A — центр). Измерения дают $a \approx 57$ *мм*, $b \approx 82$ *мм*. Отсюда заключаем, что $\sin 35°{,}0 \approx 0{,}57$, $\cos 35°{,}0 \approx 0{,}82$. Значение $c = 100$ *мм* взято ради удобства деления и может быть заменено любым другим.

Деление a на b даёт $\operatorname{tg} 35^\circ,0 \approx 0,70$, деление b на a даёт $\operatorname{ctg} 35^\circ,0 \approx \approx 1,44$. Для получения тангенса удобнее строить прямоугольный треугольник с данным острым углом и прилежащим катетом $b = 100$ *мм*; противолежащий катет оказывается при этом равным 70 *мм*, и опять получается то же значение тангенса 0,70.

Подобным же образом решается и обратная задача. Если, например, известно, что $\sin A = 0,61$, то угол A получается после построения прямоугольного треугольника с гипотенузой $c = 100$ *мм* и катетом $a = 61$ *мм* и оказывается по измерению транспортиром равным 38°. Гипотенуза c взята длиной в 100 *мм* только ради удобства и может быть заменена любой другой с надлежащим изменением длины катета a (надо удовлетворить уравнению $a : c = 0,61$), то же относится и к катету a. Легко указать, как определяется тем же графическим способом острый угол по значениям других тригонометрических функций, и следует добиваться полного усвоения учащимися этого графического способа, закладывая тем самым прочный фундамент для всего дальнейшего.

§ 9. Таблицы тригонометрических функций.

Две только что рассмотренные главные задачи на тригонометрические функции на практике всегда решаются с помощью специальных таблиц, часто называемых таблицами *натуральных* тригонометрических величин или *натуральными* тригонометрическими таблицами (в отличие от логарифмо-тригонометрических таблиц, с которыми учащиеся знакомятся позднее). Учебник геометрии А. Киселёва содержит такую таблицу, дающую значения 4 функций углов через 1°, вычисленные с 5 десятичными знаками, а задачник по тригонометрии Рыбкина — подобную же таблицу, дающую значения функции только с 3 десятичными знаками. Две отдельные таблицы, одна для синуса и косинуса, другая для тангенса и котангенса, имеются в сборнике таблиц В. Брадиса; значения функций даны здесь с 4 десятичными знаками для углов через $0^\circ,1 = 6'$. Поскольку этот последний сборник таблиц используется учащимися IX и X классов, представляется целесообразным пользоваться им и в VIII классе.

Предполагая, что учащиеся уже умеют сознательно пользоваться таблицами с почти равномерным изменением функций (умеют интерполировать, умеют пользоваться вспомогательными средствами линейной интерполяции, о которых была уже речь в III части), ограничимся немногими указаниями относительно натуральных тригонометрических таблиц.

Выяснять, как таблицы составлялись, в начальном курсе тригонометрии нельзя; приходится ограничиться указанием, что приближённые значения тригонометрических функций с 2—3 десятичными знаками для углов в целое число градусов можно получить графическим способом, как было отмечено выше, а о вычислении их с большей точностью для любых углов речь будет в IX классе.

Важно установить, что формулы дополнительных углов позволяют обойтись только двумя таблицами, дающими сразу значения четырёх тригонометрических функций: таблица, дающая синусы углов от 0° до 90°, является одновременно таблицей косинусов углов от 90° до 0°; необходимость вычитания (разыскания разности 90° — A) устраняется второй нумерацией углов. Так же обстоит дело с tg A и ctg (90° — A).

Работая с любой таблицей, приходится *интерполировать*, т. е. находить значения функции для значений аргумента, промежуточных между таблицами («читать между строками таблицы»). Напоминаем, что в III части этой книги уже была речь об условии допустимости той *линейной* интерполяции, которая только и применима в школе: необходимо и достаточно почти равномерное изменение функции, точнее — чтобы соседние значения табличных разностей на данном участке таблицы отличались друг от друга не более как на 4 единицы разряда последней цифры. Если эта разница больше 4, табличные значения надо округлять и интерполировать с меньшим числом десятичных знаков. Так, в таблице синусов, приведённой в учебнике геометрии А. Киселёва, мы имеем sin 43° = 0,68200, sin 44° = 0,69466, sin 45° = 0,70711, и соответствующие соседние табличные разности равны 1 266 и 1 245; линейная интерполяция недопустима, но становится допустимой, если предварительно округлить табличные значения до 4 десятичных знаков: sin 43°= 0,6820, sin 44°= 0,6947, sin 45° = 0,7071, табличные разности 127 и 124. В четырёхзначной таблице синусов со ступенью в 1° линейная интерполяция всюду допустима: как показывает просмотр таблицы или несложный расчёт, табличные разности изменяются быстрее всего при значениях угла, приближающихся к прямому, но разности этих разностей нигде не превосходят 4 единиц последнего разряда ($4 \cdot 10^{-4}$). Сами табличные разности, особенно в начале таблицы, довольно велики (175 — 174 и т. д.), и это затрудняет интерполяцию. Таблица со ступенью в 6′ свободна от этого недостатка, так как в ней нет табличных разностей, больших 18.

Несколько сложнее обстоит дело с таблицей тангенсов: по мере приближения к 90° табличные разности меняются всё быстрее (при 90° — точка бесконечного разрыва функции). При ступени в 1° линейная интерполяция на 3 десятичных знака допустима лишь примерно до A = 60°; по таблице в задачнике Н. Рыбкина имеем tg 59° = 1,664, tg 60° = 1,732, tg 61° = 1,804, табличные разности 66 и 72. В сборнике В. Брадиса значения тангенсов для углов, больших 60°, даны с 4 значащими цифрами, линейная интерполяция без предварительного округления допустима лишь примерно до 87° (tg 87°06′ = 19,08, tg 87°12′ = 19,74, tg 87°18′ = = 20,45, табличные разности 66 и 71), дальше необходимо округлять. Так, tg 89°00′ = 57,29, tg 89°06′ = 63, 66, tg 89°12′ = 71,62, табличные разности 6,37 и 7,96, линейная интерполяция даёт надёжные результаты лишь при вычислении до целых. Поэтому конец таблицы тангенсов даётся с уменьшенной ступенью (вместо 6' только 1'), и при округлении значений углов до минут интерполяция становится ненужной.

Отметим ещё одну трудность, с которой сталкиваются учащиеся, имевшие дело раньше только с таблицами возрастающих функций (квадратов, квадратных корней и других), подыскивая по таблице значения косинуса и котангенса: эти функции с ростом аргумента не возрастают, а убывают, при интерполяции поправки на избыток данного значения аргумента над ближайшим меньшим табличным его значением надо отнимать (а при недостатке по сравнению с ближайшим большим — прибавлять), т. е. поступать обратно тому, как при работе с возрастающей функцией. Например, чтобы найти $\cos 27°14'$, берём из таблицы $\cos 27°12' = 0,8894$ и *вычитаем* отсюда готовую поправку 3 на избыток $27°14' - 27°12' = 2'$, получается 0,8891; чтобы найти $\cos 27°17'$, берём $\cos 27°18' = 0,8886$ и *прибавляем* готовую поправку 1 на недостаток $27°18' - 27°17' = 1'$. Надо приучать учащихся каждый раз думать о том, в какую сторону меняется данная функция при росте аргумента, и по возможности заменять косинус и котангенс синусом и тангенсом дополнительного угла. При решении обратного вопроса, т. е. при отыскании угла по данному значению его тригонометрической функции, полезно требовать записи ближайших меньшего и большего табличных значений (по крайней мере на первых порах). Например, чтобы найти A, зная $\sin A = 0,7038$, берём из таблицы $\sin 44°42' = 0,7034$ и $\sin 44°48' = 0,7046$ и замечаем, что избыток $7038 - 7034 = 4$ (десятитысячных) есть поправка на $2'$, а потому $A = 44°42' + 2' = 44°44'$; здесь с ростом угла функция растёт, и чтобы получить угол, соответствующий большему значению функции, мы должны эти $2'$ прибавить (в случае косинуса или котангенса пришлось бы отнимать).

§ 10. Решение прямоугольных треугольников.

После того как учащиеся овладеют определениями 4 тригонометрических функций острого угла и научатся решать две главные задачи на них, пользуясь таблицами, следует вернуться к 5 основным задачам на прямоугольные треугольники (§ 7). Непосредственно из определений вытекают следующие теоремы.

1. Каждый катет равен произведению гипотенузы на синус противолежащего ему острого угла или на косинус прилежащего к нему острого угла.

2. Каждый катет равен произведению другого катета на тангенс острого угла, противолежащего первому катету, или на котангенс острого угла, прилежащего ему.

Эти две теоремы являются словесным выражением следующих 8 уравнений:

$$a = c \sin A,\ a = c \cos B,\ b = c \sin B,\ b = c \cos A.$$
$$a = b \operatorname{tg} A,\ a = b \operatorname{ctg} B,\ b = a \operatorname{tg} B,\ b = a \operatorname{ctg} A.$$

Присоединяя любое из этих 8 уравнений к двум известным ранее, а именно $a^2+b^2=c^2$ и $A+B=90°$, получаем систему из трёх независимых*) уравнений, достаточную для разыскания трёх элементов прямоугольного треугольника по данным двум его элементам в каждой из 5 основных задач. Иногда выгоднее бывает взять два из новых 8 уравнений и только одно из старых. Например, решая прямоугольный треугольник по двум данным его катетам a и b, можно найти гипотенузу из уравнения $a^2+b^2=c^2$, острый угол A из уравнения $a=b\ \mathrm{tg}A$, другой острый угол из уравнения $A+B=90°$, но при отсутствии под руками таблицы квадратов гипотенузу c можно найти из уравнения $a=c\ \sin A$ после того, как будет найден угол A.

Приводим в качестве примера решение задачи: найти неизвестные элементы прямоугольного треугольника, зная его гипотенузу $c=6\,370$ *км* и острый угол $A=56°48'$.

Здесь $B=90°-A=89°60'-56°48'=33°12'$. Графическое решение даёт $a\approx 5\,300$ *км*, $b\approx 3\,500$ *км*. Контроль: $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{28\,090\,000+12\,250\,000}=\sqrt{40\,340\,000}\approx 6\,351$ (вместо 6 370). Расхождение в третьей значащей цифре вполне допустимо, так как a и b найдены по чертежу только с 2 значащими цифрами.

Вычислительное решение:

$$a=c\sin A=6\,370\cdot 0{,}8368\approx 5\,330,\quad B=90°-A=33°12',$$

$$b=c\sin B=6\,370\cdot 0{,}5476\approx 3{,}488.$$

Контроль:

$$c=\sqrt{2\,841\cdot 10^4+1\,217\cdot 10^4}=\sqrt{4\,058\cdot 10^4}\approx 6\,370.$$

Заметим, что основные задачи 4 и 5, когда даны катет и прилежащий или противолежащий угол, можно не различать, так как зная один острый угол, мы сразу (в уме) находим и другой. Всего имеем, таким образом, 4 основные задачи, и без особого труда — при условии той предварительной подготовки, о которой шла речь выше,— добиваемся прочного навыка в их решении: в этом вся задача начального курса тригонометрии.

Учителю полезно иметь табличку всех 5 элементов нескольких произвольных прямоугольных треугольников, вычисленных с повышенной точностью. Тогда он может давать учащимся какие-нибудь два элемента и знать наперёд, каковы значения искомых. Такая табличка имеется, например, в задачнике Рыбкина, её нетрудно изготовить и самому.

Каждый учебник и задачник по тригонометрии содержит ряд задач прикладного характера, решаемых на основе того небольшого запаса сведений по тригонометрии, какой указан выше. Крайне желательно задачу решать сперва графически, получая

*) Напоминаем, что независимыми уравнения системы именуются тогда, когда ни одно из них нельзя вывести из остальных.

2—3 первые значащие цифры каждого искомого значения, а затем аналитически, ограничиваясь обычной для средней школы точностью в 4 значащие цифры. Чтобы не тратить много времени на умножение и деление многозначных чисел, данные лучше брать с немногими значащими цифрами (1—2—3), следя за тем, чтобы точность данных соответствовала тем условиям, в каких они могут быть получены. Бессмысленно, например, указывать расстояние от маяка до корабля, равное 5,2404 мили*), так как морская миля (минута дуги земного меридиана) равна 1 852 *м*, а её десятитысячная доля составляет всего 18,52 *см*, расстояния же на море измеряются с точностью до «кабельтова» (0,1 мили = 185,2 *м*).

§ 11. Начальный курс тригонометрии.

При изучении в VIII классе начального курса тригонометрии приходится пользоваться учебником геометрии А. Киселёва (ч. 1), где ему отведено (в издании 1949 г.) 5 страниц текста (§§ 203—208) и одна таблица в конце книги. Изложение крайне сжатое, в некоторых отношениях даже неполное; например, важнейшему вопросу о решении прямоугольных треугольников отведено всего несколько строк в § 208; вовсе не сказано о значениях тригонометрических функций для углов 30°, 45°, 60°. Таблица тригонометрических функций построена неудачно; при пользовании ею приведённые в ней значения тригонометрических функций следует округлять до 4 значащих цифр, обеспечивая тем самым возможность линейной интерполяции (тангенсы углов, близких к 90°, приходится округлять ещё сильнее).

Можно с уверенностью сказать, что при ограничении тем материалом, какой изложен в этом учебнике, учащиеся никаких полезных знаний и навыков от изучения начального курса тригонометрии не получат. Минимальное и осуществимое в течение 12—15 часов его расширение рассмотрено выше (§§ 7—10). На базе такого расширения возможно решение задач на прямоугольный треугольник, приведённых в § 6 задачника по тригонометрии Н. Рыбкина. Это минимум; если ученик VIII класса не в состоянии решать эти и подобные им задачи, время на изучение тригонометрических функций острого угла было затрачено в этом классе непроизводительно.

Нередко бывает, что сведения по тригонометрии, приобретённые при изучении начального её курса в VIII классе, вовсе не используются в дальнейших занятиях и, конечно, забываются, так что в IX классе приходится начинать дело опять заново. Такое положение, разумеется, совершенно ненормально. Установленные соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника дают возможность по-новому и часто гораздо лучше решать

*) П. Злотчанский, Сборник упражнений и задач по прямолинейной тригонометрии, 1915, стр. 104.

многие вопросы геометрии. Так, например, задачи, разрешаемые чисто геометрически только для немногих частных значений углов (30°, 45°, 60°), становятся разрешимыми, и притом проще, для любых значений углов, если применить тригонометрические функции. Вот задача: вычислить стрелку (высоту) и площадь сегмента в зависимости от радиуса r круга, если центральный угол, соответствующий сегменту, содержит 60°. Решение этой задачи (для частного значения угла), полностью приведённое в учебнике геометрии А. Киселёва, изд. 1948 г., § 269, № 13, занимает почти целую страницу, в то время как с помощью формул, выведенных в этой же книге полусотней страниц раньше, решение для любого значения угла получается гораздо проще. Другой пример: почему бы, рассматривая вопрос о площади треугольника, не указать полезную формулу $S = 0{,}5\,ab \sin C$, так легко получаемую в случае, когда $C < 90°$ ($S = 0{,}5\ bh_b$, $h_b = a \sin\ C$)? Не труднее и вывод для случая $C > 90°$, когда её следует заменить через $S = 0{,}5\ ab\ \sin\ (180° - C)$, так как учащиеся в VIII классе ещё не знают, что $\sin(180° - C) = \sin C$.

После введения тригонометрических функций острого угла многое в последующем изложении геометрии можно существенно улучшить. Это не сделано в учебнике геометрии А. Киселёва. В ранних изданиях главы о тригонометрических функциях он не содержал; когда она была введена, последующий материал остался, к сожалению, без переработки.

Глава III

ОБЩИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 12. Направленные отрезки (векторы). Проекции.

При любом способе изложения тригонометрии и её геометрических приложений приходится пользоваться понятием направленного отрезка.

Направленный отрезок — это отрезок, проходимый в определённом направлении, а именно от его начальной точки к его конечной точке. Общепринятое название направленного отрезка — «вектор». Буквальное значение этого латинского слова— «тянущий», но здесь его можно передать словом «переход». Обозначая направленный отрезок двумя буквами, указывающими его начало и конец, мы должны соблюдать определённый их порядок: первая буква означает начало, вторая — конец; направления отрезков AB и BA не тождественны, а противоположны. В понятии направленного отрезка объединены две идеи — расстояния и движения, и в преподавании желательно всячески это подчёркивать. При таком понимании направленных отрезков совершенно естественно заключение, что $AB + BA = 0$: переход от A и B, сопровождаемый последующим переходом от B к A, приводит нас к начальной точке A, т. е. равносилен отсутствию какого бы то ни было перехода, или нулевому переходу («нуль-вектору»), обозначаемому числом 0. Отсюда столь же естественное заключение, что $BA = -AB$: если переход AB характеризовать положительным числом a, одинаковым с числом, выражающим длину (абсолютную, ненаправленную) отрезка AB, то противоположный переход BA придётся обозначить отрицательным числом $-a$. Рассматривая всевозможные направленные отрезки на одной и той же прямой, их знаки определяют на основании того, как эта прямая ориентирована, т. е. какое их двух возможных её направлений принято за положительное (напоминаем, что всякая ориентированная прямая короче именуется *осью*): на горизонтально расположенной оси положительное направление обычно берётся слева направо, на перпендикулярной к ней — снизу вверх. Рассматривая три точки, расположенные на одной оси, получаем, основываясь на том же понимании направленного отрезка как перехода, что $AB + BC = AC$, как бы ни были расположены эти три точки (теорема Шаля): переход от A к B вместе с последующим переходом от B к C равносилен одному переходу от A сразу же к C (полезно расссмотреть в отдельности все $3! = 6$ случаев расположения точек A, B, C на оси).

Второе понятие, тоже явно или неявно используемое в общих определениях тригонометрических функций,— это понятие *проекции* отрезка на ось. С ним учащиеся хорошо знакомы из курса геометрии, но, возвращаясь к нему в курсе тригонометрии, надо не только напомнить, а и несколько обобщить его, а именно: рассмотреть понятие прямоугольной (ортогональной) проекции *направленного* отрезка. Если дана какая-нибудь ось X (т. е. прямая с указанным на ней положительным направлением, или ориентированная прямая) и какой-нибудь направленный отрезок AB, расположенный уже не обязательно на оси, а где угодно на плоскости, то его проекцией на эту ось называют направленный отрезок A_xB_x, концами которого служат основания перпендикуляров, опущенных из точек A и B на неё. Необходимо рассмотреть ряд частных случаев, какие могут при этом представиться: проекция A_xB_x может быть положительным или отрицательным отрезком, меньшим по абсолютной величине, чем AB, может равняться AB или $-AB$, может обратиться в точку. Желательно выяснить, что прямоугольные координаты x и y точки M на плоскости представляют собой не что иное, как меры проекций направленного отрезка OM, где O — начало координат, на оси X и Y. В дальнейшем понадобится также понятие ломаной, как цепи составляющих направленных отрезков и её замыкающей, и теорема о равенстве проекции замыкающей сумме проекций составляющих на ту же ось, теорема, так легко доказываемая посредством теоремы Шаля. Можно ограничиться только ломаной из двух звеньев: большего числа в курсе тригонометрии не понадобится.

§ 13. Обобщение понятия дуги и угла. Направленные дуги и углы.

Наряду с понятиями направленного отрезка и его проекции на ось подготовка общих определений тригонометрических функций требует обобщения понятий угла и дуги. В геометрии учащиеся привыкли иметь дело с углами, не превосходящими развёрнутого, только такие углы и нужны при изучении треугольников и выпуклых многоугольников. Рассматривая невыпуклые, но *простые* многоугольники (т. е. такие, контур которых сам себя не пересекает), мы встречаемся с углами *сверхтупыми*, т. е. заключёнными между 180° и 360°. Можно сказать, что в геометрии учащиеся имеют дело с углом как частью плоскости. В тригонометрии же мы встречаемся с углами произвольной величины. Здесь угол приходится рассматривать не как часть плоскости, а как меру вращения. Наглядный образ дают стрелки часов: отметим положение минутной стрелки в 12 часов, будем рассматривать угол между этим её положением в разные другие моменты: через 15 минут он станет равным 90°, через 30 минут 180°, через час 360°, через полтора часа 540° и т. д. Возможность вращения в двух противоположных направлениях приводит к необходимости рассматривать положительные и отрицательные углы, причём обычно положительным считается направление против движения часовой стрелки, отрицательным — противоположное. Следует отметить применение на практике трёх единиц измерения углов: угла полного оборота, получающегося при первом совмещении движущейся стороны угла с неподвижной; угла прямого, т. е. равного своему смежному, или одной четверти угла полного оборота; углового градуса, т. е. 1 : 90 прямого угла, или 1 : 360 угла полного оборота.

Аналогично обстоит дело с дугами (имеются в виду только дуги окружности). В геометрии учащиеся определяли дугу как часть окружности и рассматривали дуги, не превосходящие целой окружности, в тригонометрии же приходится иметь дело с дугами любой величины от $-\infty$ до $+\infty$. Такую дугу можно определить, как путь точки, движущейся по окружности в ту или другую сторону от некоторого начального положения, и представлять как нить, которая навивается на круглый цилиндр (наподобие того, как верёвка ворота навивается на его вал). Обычно дуги измеряются дуговыми градусами; проводя аналогию с углами, укажем, что дуги измеряются также целыми окружностями (дуга в такую-то часть окружности, дуга во столько-то окружностей) и квадрантами, или четвертями целой окружности. Не лишне указать точный смысл выражения «дуга n-го квадранта (n-й четверти)»; так называют дугу, меньшую дуги в n квадрантов, но большую дуги в $n - 1$ квадрант.

Об ином способе измерения дуг, широко применяемом в тригонометрии и в математическом анализе, а именно об их измерении в радианах, речь шла уже выше. Применяя радианную меру дуги, т. е. отношение её длины к её радиусу, мы освобождаемся от произвола в выборе числа равных частей, на которые делится окружность. Единицей измерения служит при этом дуга, длина которой равна её радиусу и которая содержит $180 : \pi$ дуговых градусов, или $57°17'44''$, 806....

Любопытное и весьма удобное видоизменение радианной меры дуги употребляют артиллеристы, полагающие $\pi \approx 3$ и считающие в силу этого, что длину, равную радиусу, имеет дуга в 60°; единицей измерения дуг у них служит дуга, длина которой равна тысячной доли радиуса и которую они называют просто «тысячной»; полная окружность у артиллеристов содержит 6 000 «тысячных», четверть окружности — 1 500 «тысячных».

Имея в виду самое широкое применение радианной меры в высшей математике, желательно как можно чаще пользоваться ею в школе, притом не просто заменяя 180° через π, 90° через $\frac{1}{2}\pi$ и т. д., а применяя по мере надобности числовые значения (например, дуга в 0,2 радиана, т. е. приблизительно 11°27′). Обозначая градусную меру дуги буквой α, радианную её меру буквой x, имеем формулу $x = \frac{\pi\alpha}{180}$; иногда пользуются символом $\operatorname{arc} \alpha$ («аркус α»), полагая $\pi\alpha : 180 = \operatorname{arc} \alpha$. Следует предостеречь от неправильного наименования радианной меры дуги «отвлечённой» её мерой (она является точно так же «именованной», как и любая другая мера) и от употребления записей вроде $\pi n + 30°$ (в сумме все слагаемые следует выражать в одной мере, либо только радианной, как $\pi n + \frac{1}{6}\pi$, либо только градусной, как $180°n + 30°$).

Пропорциональность между дугой и соответствующим центральным углом, устанавливаемая в геометрии для дуг и углов, не превосходящих 360°, сохраняется и для произвольных дуг и соответствующих центральных углов. Поэтому радианная мера дуги используется и для измерения угла: радианной мерой угла называется радианная мера любой дуги, для которой этот угол является центральным. Когда речь идёт о тригонометрических функциях, термины «дуга» и «угол» вполне равносильны, а лучше применять термин «аргумент».

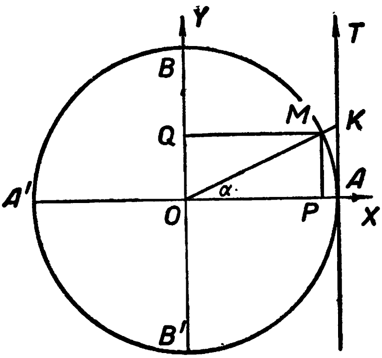
Остаётся отметить ещё одно существенное обстоятельство, относящееся к дугам и углам. В то время как любые две точки A и B ориентированной прямой однозначно определяют направленный отрезок AB, две точки A и B ориентированной окружности определяют не одну, а бесконечно много направленных дуг, выражаемых формулой (в радианной мере) $AB + 2\pi n$, где AB — наименьшая положительная дуга, n — любое целое число (положительное, нуль, отрицательное). Поэтому всякое равенство, устанавливаемое для направленных дуг, приходится снабжать оговоркой: «с точностью до целого числа окружностей» («до целого кратного 2π», если дуга измеряется в радианах, «до целого кратного 360°», если в градусах). Необходимость этой оговорки отнюдь не отпадает, если условиться, что символ $\overset{\frown}{AB}$ означает всегда только наименьшую положительную дугу, по которой можно достичь точки B, двигаясь по окружности из точки A в положительном направлении. Возьмём, например, три точки A, B, C на ориентированной окружности. Суммируя наименьшие положительные дуги $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{BC}$, мы получим либо наименьшую положительную дугу $\overset{\frown}{AC}$, либо дугу $\overset{\frown}{AC} + 2\pi$. Поэтому соотношение $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AC}$ сохраняет свою силу для направленных дуг лишь с указанной выше оговоркой. Если $\overset{\frown}{AB}$ означает любую из бесконечного множества дуг, соединяющих точки A и B и отличающихся друг от друга на целое число окружностей, то $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AC} + 2\pi n$, где n целое, или словами: сумма двух дуг $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{BC}$ либо равна дуге $\overset{\frown}{AC}$, либо отличается от неё на целое число окружностей.

§ 14. Определения тригонометрических функций.

Будем говорить сперва только о синусе и косинусе. Эти тригонометрические функции определяются как отношения направленных отрезков, проводимых определённым образом, к радиусу круга, который берётся за основу всего построения («тригонометрический круг»). Эти «линия синуса» и «линия косинуса» позволяют весьма наглядно представить весь ход изменения функций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, и употребление их вполне оправдано, но существуют три способа определять эти линии: первый, рассматривающий эти линии как проекции подвижного радиуса на два взаимно перпендикулярных диаметра (учебник Б. Б. Пиотровского, А. Ф. Берманта и Л. А. Люстерника и некоторые другие); второй, исходящий из возможности считать эти линии просто прямоугольными координатами конца подвижного радиуса относительно некоторой пары осей, пересекающихся в центре круга (учебник Э. Бореля), и третий, принятый в учебнике Н. Рыбкина, описывающий построение этих линий, игнорируя знакомство учащихся с проекциями и координатами. Между первым и вторым способами существенного различия нет, так как прямоугольные координаты можно рассматривать как проекции радиуса-вектора точки, и оба они заслуживают решительного предпочтения перед третьим.

Сделаем несколько замечаний о деталях рекомендуемых определений.

Основой всего построения является *тригонометрический круг*, т. е. круг произвольного радиуса r, ориентированный одним из двух возможных способов, с произвольно взятой на его контуре точкой A, принимаемой за *начало отсчёта дуг*, и с двумя взаимно перпендикулярными осями, проведёнными через его центр O, который принимается за *начало отсчёта отрезков* на обеих. Первая из этих осей проходит через начало дуг A и ориентирована от O к A, так что направленный отрезок OA, именуемый *начальным* (или неподвижным) радиусом, положителен; вторая пересекает окружность в точках B и B', причём $\overset{\frown}{AB} = +0,5\,\pi$, и орентирована от A к B. На первой и второй осях лежат соответственно «первый» и «второй» диаметры тригонометрического круга; называть их «горизонтальным» и «вертикальным» не очень удобно, так как иногда приходится изменять их положение на чертеже. Первую и вторую ось иногда именуют «осью косинусов» и «осью синусов» (Э. Борель, Б. Б. Пиотровский), но гораздо лучше дать им общепринятые названия координатных осей: ось абсцисс, или ось X; ось ординат, или ось Y. Удобно ввести термины: положительная и отрицательная первая полуось, положительная и отрицательная вторая полуось.



Фиг. 55.

Взяв точку M движущуюся по окружности в том или другом направлении от начала A (фиг.55), мы получаем всевозможные значения дуги AM от 0 до $+\infty$ и $-\infty$. Точку M называют концом дуги, направленный отрезок OM — конечным (или подвижным) радиусом этой дуги. Дуге AM соответствует центральный угол AOM, имеющий ту же меру, что и эта дуга. В дальнейшем с совершенно одинаковым правом можно говорить и о функциях дуги AM, и о функциях угла AOM.

Линией косинуса дуги AM называется направленный отрезок OP, представляющий собой проекцию конечного радиуса дуги на ось X, а её *линией синуса* — направленный отрезок OQ, представляющий собой проекцию конечного радиуса дуги на ось Y. *Косинусом* и *синусом* дуги AM называются соответственно отношения линий косинуса и синуса к радиусу тригонометрического круга. Общепринятые обозначения косинуса и синуса дуги α: $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$. Итак,

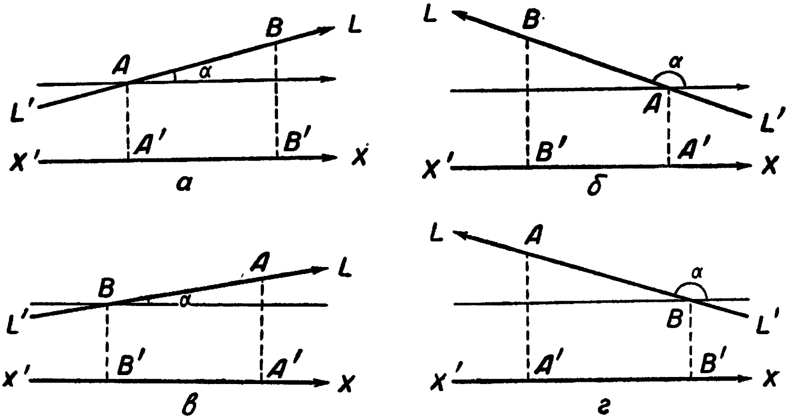
$$\cos\alpha = OP : r, \quad \sin\alpha = OQ : r.$$

Вместо отрезка OQ за линию синуса можно брать равный ему отрезок PM, ориентируя его одинаково с OQ.

Некоторые авторы полагают $r = 1$, обеспечивая тем самым равенство числовых значений длин линий косинуса и синуса и самих косинуса и синуса. Это обеспечивает небольшое упрощение некоторых формул, но для учащихся стирается различие между тригонометрическими линиями и тригонометрическими функциями, поэтому лучше этого не делать.

Непосредственно из определения косинуса получается следующая важная теорема: *проекция отрезка на ось равна произве-*

дению этого отрезка на косинус угла между этой осью и той осью, которой принадлежит данный отрезок. Действительно, если данный положительный отрезок AB, принадлежащий оси L, имеет на оси X положительный или отрицательный отрезок $A'B'$ в качестве проекции (см. фиг. 56, *а* и фиг. 56, *б*), то по определению имеем $\cos\alpha = A'B' : AB$ (можно представить себе тригонометрический круг с центром A и радиусом AB, ось косинусов провести через A параллельно оси проекций X и ориентировать её одинаково с осью X), откуда $A'B' = AB\cos\alpha$. Если же данный отрезок AB отрицателен, как на фигуре 56, *в* и на фигуре 56, *г*, то BA положителен,



Фиг. 56.

и по доказанному имеем: $B'A' = BA\cos\alpha$. Принимая во внимание, что $BA = -AB$, $B'A' = -A'B'$, приходим и здесь к той же формуле: $A'B' = AB\cos\alpha$.

Всякий раз, когда даётся обобщение какого-либо ранее установленного понятия, необходимо выяснить, не противоречит ли новое общее определение старому, более узкому. Раньше в начальном курсе тригонометрии косинус и синус острого угла определялись как отношения сторон прямоугольного треугольника, и надо показать, что новое общее определение даёт для острого угла то же самое. Сделать это очень легко.

Переходим к функции *тангенс*. Её можно определить тоже как отношение к радиусу некоторого направленного отрезка, называемого *линией тангенса* и расположенного на касательной AT (фиг. 55), но можно принять, что тангенс дуги — это отношение проекций её конечного радиуса на оси Y и X, или, наконец, что тангенс дуги есть не что иное, как отношение её синуса к её косинусу. Первое определение мы находим в учебнике Н. Рыбкина и во многих других, второе у А. Ф. Берманта и Л. А. Люстерника, третье у Б. Б. Пиотровского. У первого геометрического определения преимущество в наглядности: линию тангенса мы видим на чертеже, наглядно показывающем весь ход её изменения. У последнего (аналитического) определения этой наглядности нет, но оно позволяет существенно упростить вывод многих формул. Наилучшим представляется такой путь: определяя $\operatorname{tg}\alpha$ как отношение $\sin\alpha : \cos\alpha$, доказываем, что это отношение равно отношению линии тангенса AK к радиусу r (фиг. 55), предварительно определив линию тангенса как направленный отрезок касательной к окружности, проведённой через начало дуг, идущий от начала дуг до пересечения с продолжением конечного радиуса, причём касательная предполагается ориентированной одинаково с осью Y.

Геометрические определения возможны и для трёх остальных тригонометрических функций: $\operatorname{ctg}\alpha$, $\sec\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$; так и сделано в учебнике Рыбкина. Но никаких преимуществ эти определения не дают, и для сбережения времени лучше определить их просто формулами: $\operatorname{ctg}\alpha = 1 : \operatorname{tg}\alpha$, $\sec\alpha = 1 : \cos\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha = 1 : \sin\alpha$. Говорить, что это функции, обратные тангенсу, косинусу и синусу, конечно, не следует, так как функцией, обратной тангенсу по общепринятому смыслу термина «обратная функция», является арктангенс (можно, однако, сказать, что всякое числовое частное значение котангенса обратно соответствующему значению тангенса). Доказать, что определённые этими формулами функции можно рассматривать как отношения некоторых отрезков («линий котангенса, секанса, косеканса») к радиусу, нетрудно, но вряд ли стоит тратить на это время.

§ 15. Некоторые свойства тригонометрических функций, непосредственно вытекающие из их определений.

Определения тригонометрических функций являются фундаментом всего дальнейшего курса, и надо обратить самое серьёзное внимание на точность и прочность их усвоения. Дело здесь не только в том, чтобы выучить соответствующие словесные формулировки, хотя и это имеет значение, сколько в приобретении ясных и точных представлений. Для того и другого очень полезно рассмотреть указанные ниже вопросы; сделать это рекомендуется частью под руководством учителя в классе, частью самостоятельно дома, в виде упражнений.

1. Найти значения трёх первых тригонометрических функций для дуг 30°, 45°, 60°, 120°, 135°, 150°, 210°, 225°, 240°, 300°, 315°, 330°, а также для дуг 0°, 90°, 180°, 270°, 360°.

В результате должна получиться таблица, которую желательно сохранять для справок при дальнейшей работе.

Символ $\pm\infty$, которым обозначено значение $\operatorname{tg} 90°$, требует особого разъяснения: при $\alpha = 90°$ $\operatorname{tg}\alpha$ не существует, но если α неограниченно приближается к 90° от меньших значений, то $\operatorname{tg}\alpha$ неограниченно растёт, принимая сколь угодно большие положительные значения (это хорошо видно на линии тангенса), а если от бо́льших значений — то отрицательные.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\alpha$	0	0,5	$0,5\sqrt{2}$	$0,5\sqrt{3}$	1	$0,5\sqrt{3}$	$0,5\sqrt{2}$	0,5	0
$\cos\alpha$	1	$0,5\sqrt{3}$	$0,5\sqrt{2}$	0,5	0	$-0,5$	$-0,5\sqrt{2}$	$-0,5\sqrt{3}$	-1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\sqrt{3}:3$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty-$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}:3$	0

α	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin\alpha$	0	$-0,5$	$-0,5\sqrt{2}$	$-0,5\sqrt{3}$	-1	$-0,5\sqrt{3}$	$-0,5\sqrt{2}$	$-0,5$	0
$\cos\alpha$	-1	$-0,5\sqrt{3}$	$-0,5\sqrt{2}$	$-0,5$	0	0,5	$0,5\sqrt{2}$	$0,5\sqrt{3}$	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\sqrt{3}:3$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty-$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}:3$	0

2. Проследить за изменением каждой из трёх первых тригонометрических функций при изменении аргумента от 0° до 360°.

Имея перед глазами чертёж, изображённый на фигуре 55, мысленно перемещаем точку M по окружности против часовой стрелки и следим за изменением линий синуса, косинуса, тангенса, постепенно заполняя графы следующей таблички, в которой стрелки $\nearrow$ и $\searrow$ заменяют слова «растёт», «убывает».

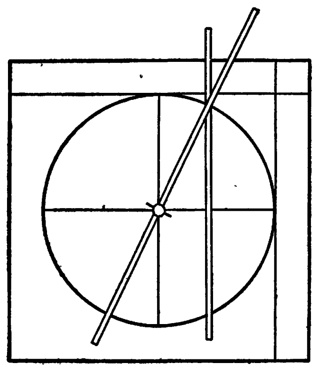
Эту работу обычно проделывают несколько позже, в связи с построением графиков. Но здесь она вполне уместна как средство закрепления определений функций.

Особенно внимательно надо отнестись к знакам тригонометрических функций в разных четвертях, так как ошибки от недостаточно прочного усвоения этой, казалось бы, столь простой детали встречаются очень часто. Надо дать короткое, удобное для запоминания правило, имеющее в виду обычное расположение осей, когда первая ось горизонтальна и ориентирована слева направо, а вторая вертикальна и ориентирована снизу вверх, и когда линии синуса и тангенса положительны, если расположены выше первой оси, а линия косинуса положительна, если расположена правее второй оси. Чтобы лучше закрепить это правило, можно предложить учащимся вычертить что-либо вроде фигуры 19, в § 25 учебника Н. Рыбкина и требовать, чтобы они по памяти, не глядя на чертёж, а лишь представляя его себе, отвечали на соответствующие вопросы.

α	0°	↗	90°	↗	180°	↗	270°	↗	360°
$\sin\alpha$	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0
$\cos\alpha$	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	↗	$+\infty-$	↗	0	↗	$+\infty-$	↗	0

Изменения функций $\operatorname{ctg}\alpha$, $\sec\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$ можно столь детально не рассматривать, экономя время, но следует лишний раз подчеркнуть их связь с тремя первыми функциями.

3. Выше мы рассмотрели изменение тригонометрических функций при изменении дуги от 0° до 360°. Что можно сказать о дальнейшем их изменении, когда дуга становится больше 360°, и об их изменении при отрицательных дугах? Учащиеся легко сами приходят к формулам $\sin(\alpha+360^\circ)=\sin\alpha$, $\cos(\alpha+360^\circ)=\cos\alpha$, $\operatorname{tg}(\alpha+360^\circ)=\operatorname{tg}\alpha$ и к более общим формулам $\sin(\alpha+360^\circ n)=$ $=\sin\alpha$ и т. д., где n — любое целое число, т. е. к заключению о *периодичности* тригонометрических функций. Основным периодом для синуса и косинуса является дуга в 360° (полная окружность), а для тангенса — в 180° (полуокружность); последнее обстоятельство учащиеся обычно подмечают уже при составлении таблички значений тангенса, указанной выше.



Фиг. 57.

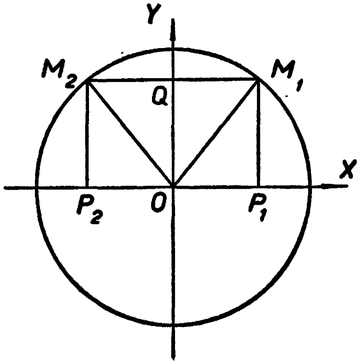
Периодичность тригонометрических функций позволяет ограничить их изучение только интервалом (0°, 360°) значений аргумента, а для тангенса даже лишь интервалом (0°, 180°).

Опять подчёркиваем, что у котангенса дело обстоит так же, как у тангенса, а у секанса и косеканса—как у косинуса и синуса.

4. Для лучшего закрепления определений тригонометрических функций может иметь некоторое значение наглядное пособие вроде прибора, изображённого на фигуре 57 («Тригонометр»); здесь кроме двух неподвижных осей имеется одна подвижная, устанавливаемая посредством барашка в центре в любом положении. Изготовляемый размерами примерно 400×400 *мм* и снабжённый делениями, прибор этот позволяет находить и числовые значения тригонометрических функций с точностью до двух десятичных знаков. Некоторую помощь учащимся такой прибор приносит, помогая образованию более яркого и прочного зрительного представления, весьма ценного тем, что всё здесь даётся в движении

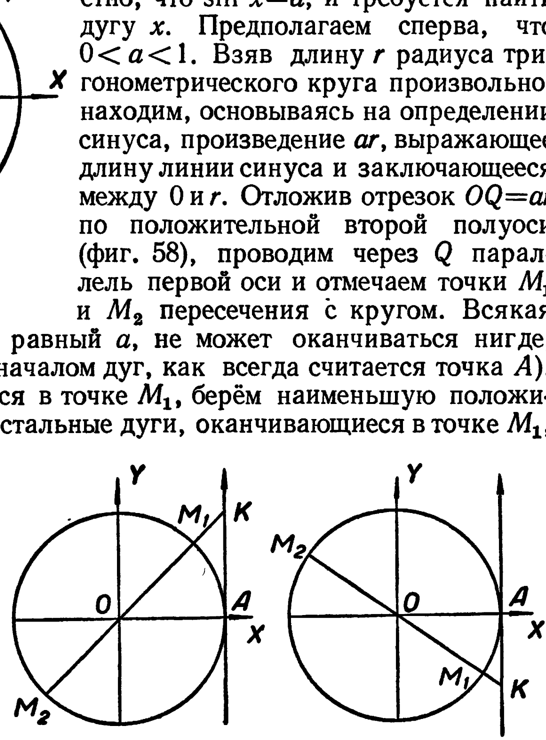
и изменении. Само собой разумеется, что не следует ограничиться одной лишь демонстрацией прибора, а надо дать возможность учащимся самим с ним поработать.

5. Наряду с разысканием значений тригонометрических функций для данных значений аргумента, лучшему усвоению определений весьма способствует и решение *обратного вопроса*, разрешаемого на этой стадии работы только графическим способом,



Фиг. 58.

т. е. построение дуги по данному значению одной из тригонометрических её функций. Пусть, например, известно, что $\sin x = a$, и требуется найти дугу x. Предполагаем сперва, что $0 < a < 1$. Взяв длину r радиуса тригонометрического круга произвольно, находим, основываясь на определении синуса, произведение ar, выражающее длину линии синуса и заключающееся между 0 и r. Отложив отрезок $OQ = ar$ по положительной второй полуоси (фиг. 58), проводим через Q параллель первой оси и отмечаем точки M_1 и M_2 пересечения с кругом. Всякая дуга, имеющая синус, равный a, не может оканчиваться нигде, кроме точек M_1 и M_2 (началом дуг, как всегда считается точка A). Из дуг, оканчивающихся в точке M_1, берём наименьшую положительную $AM_1 = x_0$; все остальные дуги, оканчивающиеся в точке M_1, отличаются от x_0 на целое число окружностей и могут быть выражены формулой $x = x_0 + 350°n$. Из дуг, оканчивающихся в точке M_2, наименьшей положительной является дуга $AM_2 = 180° - x_0$; все остальные отличаются от неё на целое число окружностей и выражаются формулой $x = 180° - x_0 + 360° \cdot n$. Теперь мы знаем все дуги, синус которых равен a. Для частного случая $a = 0{,}5$ имеем дуги $30°$, $30° + 360° = 390°$, $30° - 360° = -330°$, $30° + 720° = 750°$, $30° - 720° = -690°$ и т. д., а также дуги $180° - 30° = 150°$, $150° + 360° = 510°$, $150° - 360° = -210°$, $150° + 720° = 870°$, $150° - 720° = -570°$ и т. д. Предполагая далее, что $-1 < a < 0$, поступаем так же, но линия синуса ar теперь представляет собой отрицательный направленный отрезок и откладывается по отрицательной второй полуоси. Случаи $a = 0$, $a = +1$, $a = -1$



Фиг. 59.

следует рассмотреть особо. Отмечая, что при $a > 1$ и $a < -1$ задача решений не имеет, исчерпываем все возможные случаи.

Решение уравнения $\cos x = a$ проводится аналогично и с успехом может быть предметом домашнего задания (отрезок ar откладывается теперь по первой оси).

Если, как это рекомендовано выше, тангенс определен как частное от деления синуса на косинус, но дано доказательство того, что он выражается в то же время отношением линии тангенса к радиусу, то решение уравнения $\operatorname{tg} x = a$ проводится подобным же образом: направленный отрезок ar откладывается от A по касательной, которая ориентируется одинаково со второй осью (фиг. 59).

Существует и ещё ряд вопросов, разрешаемых на основе знания одних только определений тригонометрических функций; к ним относится, например, весь вопрос о формулах приведения, рассмотренный в следующей главе. Но при основательном изучении указанных в настоящем параграфе четырёх вопросов твёрдое знание и ясное понимание общих определений обеспечено.

Некоторые авторы учебников тригонометрии предлагают вовсе не брать функций секанс и косеканс, как очень редко применяемых и связанных с функциями косинус и синус столь простой зависимостью. Конечно, вовсе о них умалчивать нельзя: хоть и редко, но они всё же встречаются; даже в сборниках тригонометрических таблиц иногда (и далеко не редко) помещают таблицы их значений (сборники Глазенапа, Петерса); они позволяют приводить к более удобному целому виду такие дробные выражения, которые имеют в знаменателе синусы и косинусы. Но в таком же положении находится и функция котангенс: её смысл только в том, чтобы избегать деления на тангенс. Поэтому представляется целесообразным и последовательным детально изучать только три тригонометрические функции: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, а для остальных трёх («вспомогательных») ограничиться только определениями и пользоваться ими только как сокращённой записью частных:

$$1 : \operatorname{tg}\alpha,\quad 1 : \cos\alpha,\quad 1 : \sin\alpha.$$

§ 16. Связь с общим понятием функции.

Изучение тригонометрических функций желательно использовать для повторения и уточнения общего понятия о функциях одного аргумента, с которым учащиеся знакомятся с каждым годом всё глубже и полнее. При благоприятных условиях в IX классе возможно рассмотрение понятия об однозначной функции одного аргумента в его современной трактовке, как *отображения* одного множества на другое: имеется множество M числовых значений аргумента x, имеется множество N числовых значений аргумента y, имеется закон, устанавливающий соответствие между каждым элементом множества M и некоторым единственным вполне определённым элементом множества N (обратное не обязательно, соответствие должно быть однозначным, но может не быть взаимно-однозначным). Изучая определения тригонометрических функций, учащиеся должны в каждом отдельном случае выяснять, что представляют собой множества M и N, как устанавливается соответствие между их элементами. Например, если речь идёт о синусе острого угла, то множество M есть множество всех углов от 0 до $\frac{1}{2}\pi$, а множество N — совокупность всех действительных чисел от 0 до 1 включительно; переходя к тангенсу острого угла, мы должны исключить из M значение угла в $\frac{1}{2}\pi$, а в качестве множества N взять совокупность всех действительных неотрицательных чисел. Соответствие между углами и элементами множества N устанавливается посредством геометрического построения, основанного на определениях синуса и тангенса.

Обычно тригонометрические функции рассматриваются как функции угла или дуги: множество M есть то или иное множество углов или дуг. Но применение тригонометрических функций далеко не исчерпывается теми случаями, когда их аргумент является углом или дугой. Физическое значение функции $y = \sin x$, как и любой другой, может быть каким угодно. Например, изучая гармоническое колебательное движение точки по отрезку, мы имеем дело с функцией $y = a \sin (2\pi t : T)$, где t — время; никакого угла или дуги здесь нет. Надо либо строить модель, где налицо переменный угол, изображающий рассматриваемый аргумент (например, при изучении гармонического колебательного движения точки по отрезку рассматривать её как проекцию точки, равномерно движущейся по кругу, диаметром которого служит этот отрезок), либо признать, что аргументом тригонометрической функции является число, которое может означать что угодно, в частности и угол или дугу. Эта последняя точка зрения имеет много преимуществ, и её следует систематически проводить. Этому существенно способствует применение радианной меры угла. Практически дело сводится к тому, чтобы учащийся не становился втупик, встречаясь с выражением вроде $\sin 0{,}5$, а понимал, что здесь дело идёт о синусе дуги в 0,5 радиана, или, с точностью до минут, дуги в $28°39'$.

Глава IV

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РАВЕНСТВА И НЕРАВЕНСТВА

§ 17. Формулы приведения к дуге I четверти.

Формулы приведения позволяют, зная значения тригонометрических функций для любых дуг I четверти, находить путём весьма простого расчёта их значения для любых дуг и играют большую роль в практических применениях тригонометрии уже в силу того обстоятельства, что благодаря им тригонометрические таблицы составляются только для дуг I четверти. Формул этих много, они часто бывают нужны, и заботой преподавателя является не только их вывод, а и указание способов быстрого их воспроизведения.

Сперва будем говорить только о функциях синус и косинус.

Применяется несколько способов вывода формул приведения для этих двух функций. Способ, излагаемый в учебнике А. Ф. Берманта и Л. А. Люстерника, состоит в том, что сначала выводятся формулы $\sin (90° - \alpha) = \cos \alpha$ и $\cos (90° - \alpha) = \sin \alpha$ для острых углов и формулы $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ для любых углов; затем формулы $\sin(90^\circ-\alpha) = \cos\alpha$ и $\cos(90^\circ-\alpha) = \sin\alpha$ распространяются на случай любых углов с помощью теоремы о проекциях; наконец, повторное применение полученных формул позволяет вывести и все прочие формулы приведения для синуса и косинуса. Прежде всего выводятся формулы:

$\sin(90^\circ+\alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$; $\cos(90^\circ+\alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, далее формулы:

$$\sin(180^\circ-\alpha) = \cos(90^\circ-\alpha) = \sin\alpha;$$
$$\sin(180^\circ+\alpha) = \cos(90^\circ+\alpha) = -\sin\alpha \text{ и т. п.}$$

Таким образом, основными формулами, из которых все прочие выводятся, как простые следствия, являются лишь четыре:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha;\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha;$$
$$\sin(90^\circ-\alpha) = \cos\alpha;\ \cos(90^\circ-\alpha) = \sin\alpha.$$

Они и должны быть обоснованы непосредственно, на основании определения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ для любых углов.

Другой способ доказательства формул приведения мы встречаем у Эйлера: он предполагает доказанными для любых значений аргументов α и β формулы синуса и косинуса суммы $\alpha+\beta$ и выводит из них простыми подстановками все формулы приведения.

Остановимся ещё на способе, указанном в учебнике Э. Бореля [V, 4].

Пусть дан тригонометрический круг с обычной ориентировкой: положительное направление против часовой стрелки, ось X горизонтальна и ориентирована слева направо, ось Y вертикальна и ориентирована снизу вверх. Возьмём произвольную дугу $AM = \alpha$ и построим её линию синуса, т. е. проекцию OQ конечного радиуса OM на ось Y, и линию косинуса, т. е. проекцию OP конечного радиуса OM на ось X. В зависимости от величины α эти проекции могут быть какими угодно; чтобы не связывать своё рассуждение с каким-либо частным случаем, чертежа лучше вовсе не делать. Согласно определению, имеем $\sin\alpha = OQ : r$, $\cos\alpha = OP : r$.

Если изменить первоначальную ориентировку круга на противоположную, оставив без изменения ось X, ориентировку оси Y придётся тоже изменить: ведь положительная полуось Y должна встречать круг в конце дуги $0{,}5\,\pi$, а эта дуга идёт теперь не вверх, а вниз от начала дуг A. Дуга AM, имевшая раньше меру α, после перемены ориентировки круга получает меру $-\alpha$; меняется знак и у проекции OQ, а проекция OP остаётся без изменения. Отсюда заключаем, что $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$. Вспоминая термины «чётная функция», «нечётная функция», можем сказать, что мы доказали чётность косинуса и нечётность синуса.

Вернувшись опять к исходному тригонометрическому кругу с обычной ориентировкой, повернём обе оси на угол π в положительном направлении около центра O, так что обе они совместятся сами с собой, изменив ориентировку; положительная первая полуось будет направлена теперь справа налево, вторая — сверху вниз, началом дуг будет служить точка A'. Дуга $A'M$ измеряется теперь числом $\alpha - \pi$, так как имеем (с точностью до целого кратного 2π) равенство $AM + MA' = AA'$ или $\alpha + MA' = \pi$, откуда $MA' = \pi - \alpha$, $A'M = \alpha - \pi$. Но конечный радиус у дуг AM и $A'M$ общий, общие же и его проекции OP и OQ на оси; разница лишь в том, что отрезок OP является положительным при одной ориентировке своей оси и отрицательным при другой; таково же положение и с отрезком OQ. Отсюда заключаем, что $\sin(\alpha - \pi) = -\sin\alpha$, $\cos(\alpha - \pi) = -\cos\alpha$ или, принимая во внимание нечётность синуса и чётность косинуса, что $\sin(\pi - \alpha) = +\sin\alpha$, $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$.

Если тот поворот на угол π, какой мы сейчас произвели с осями X и Y в положительном направлении, выполнить в отрицательном направлении, мы получим формулы $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$. Поворот на угол $+\frac{1}{2}\pi$ приводит к формулам

$$\sin\left(\alpha - \frac{1}{2}\pi\right) = -\cos\alpha, \quad \cos\left(\alpha - \frac{1}{2}\pi\right) = +\sin\alpha$$

или

$$\sin\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \cos\alpha, \quad \cos\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \sin\alpha,$$

а на угол $-\frac{1}{2}\pi$ — к формулам

$$\sin\left(\frac{1}{2}\pi + \alpha\right) = \cos\alpha, \quad \cos\left(\frac{1}{2}\pi + \alpha\right) = -\sin\alpha.$$

Для вывода последних 4 формул приведения $\left(\text{с углом } \frac{3}{2}\pi\right)$ нужны вращения осей на $\pm\frac{3}{2}\pi$, но можно обойтись повторным применением уже полученных формул

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \sin\left[\frac{1}{2}\pi + (\pi + \alpha)\right] = \cos(\pi + \alpha) = -\sin\alpha \text{ и т. д.}$$

Итак, все 14 формул приведения для синуса и косинуса выведены для любого значения аргумента α.

Вывод формул приведения для тангенса не представляет никаких затруднений, если тангенс определён как отношение синуса к косинусу. Действительно,

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \sin(-\alpha) : \cos(-\alpha) = (-\sin\alpha) : \cos\alpha = \\ = -(\sin\alpha : \cos\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \text{ и т. д.}$$

Формул приведения для $\operatorname{ctg}\alpha$, $\sec\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$ можно вовсе не брать. В случае надобности они получаются так же, как формулы для тангенса.

В практике преподавания нередко ограничиваются показом правильности формул приведения для острого угла α, ограничиваясь утверждением, что можно показать их правильность и для любого значения угла. Это, конечно, нехорошо. Надо провести соответствующее доказательство тем или другим способом. Предпочтения заслуживает способ, приведённый в учебнике Бореля и только что изложенный полностью.

Всего, таким образом, мы имеем 21 формулу приведения (14 для синуса и косинуса и 7 аналогичных для тангенса) или всего 42 формулы (если прибавить к ним формулы для котангенса, секанса, косеканса). Запомнить их все, разумеется, нелегко, а надобность в них встречается часто. Существует особое *мнемоническое* правило, приводимое в разных вариантах во многих учебниках и сводящееся к следующему: если в левой части формулы приведения фигурирует дуга в целое число полуокружностей (0, π, 2π), то в правой надо писать ту же функцию, что и в левой; в остальных случаях в правой части пишется *кофункция*, т. е. если слева синус, косинус, тангенс, то справа соответственно косинус, синус, котангенс и обратно; перед знаком функции справа пишется знак плюс или минус в зависимости от того, имеет ли функция, записанная слева, положительное или отрицательное значение в случае, когда дуга α принадлежит I четверти. Чтобы это правило было применимо к формулам приведения отрицательных дуг, надо считать, что $-\alpha = 0 - \alpha$.

Примеры. Имея слева $\cos(\pi + \alpha)$, справа пишем $\cos \alpha$ со знаком минус, так как при дуге α, принадлежащей I четверти, дуга $\pi + \alpha$ принадлежит III четверти, а косинус в III четверти отрицателен; итак, $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$. Имея слева $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right)$, пишем справа $\operatorname{ctg} \alpha$ со знаком плюс, так как при α в I четверти дуга $\frac{1}{2}\alpha$ — тоже I четверти, а тангенс в I четверти положителен.

Хотя это мнемоническое правило формулируется довольно длинно, учащиеся легко его схватывают и охотно применяют. Давать какое-либо доказательство этого правила не приходится: оно вытекает из рассмотрения полного перечня формул приведения, к которым можно отнести и формулы

$$\sin(2\pi + \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(2\pi + \alpha) = \cos \alpha, \quad \operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha,$$

выражающие свойство периодичности, и формулы

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha \text{ и т. д.}$$

При решении задач на применение формул приведения рекомендуется использование (для самоконтроля) разных путей. Например, имея $\sin 250°$, мы можем представить $250°$ как $180° + 70°$ или как $270° - 20°$. В первом случае имеем $\sin 250° = \sin(180° + 70°) = -\sin 70°$, во втором $\sin 250° = \sin(270° - 20°) = -\cos 20° = -\sin 70°$. Чтобы обеспечить единообразие в ответах, рекомендуется отдавать предпочтение синусу перед косинусом и тангенсу перед котангенсом, но иногда приходится отступать от этого правила. Отметим, что всегда возможно приведение к функции дуги первой половины I четверти, т. е. к дуге α, удовлетворяющей условию $0 \leqq \alpha \leqq 45^\circ$.

В заключение отметим несколько употребительных терминов. Дуги α и $-\alpha$ называются *противоположными* (или *равнопротивоположными*, или *симметричными относительно начала*): дуги α и $\frac{1}{2}\pi - \alpha$, сумма которых равна $\frac{1}{2}\pi$, называются *дополнительными* (или *взаимно дополнительными*), а дуги α и $\pi - \alpha$ с суммой π — *пополнительными* (или *взаимно пополнительными*).

§ 18. Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента.

Если взять значения всех 6 тригонометрических функций, при одном и том же значении аргумента, то между ними обнаруживаются зависимости, выражаемые следующей «системой основных соотношений»:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,\ \operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha : \cos \alpha,\ \operatorname{ctg} \alpha = \cos \alpha : \sin \alpha,$$
$$\sec \alpha = 1 : \cos \alpha, \operatorname{cosec} \alpha = 1 : \sin \alpha.$$

Если определять тригонометрические функции так, как рекомендовано выше, то доказать надо лишь первое из этих 5 равенств, так как остальные являются просто определениями. Для доказательства первого достаточно применить теорему Пифагора к треугольнику OPM (фиг. 55), который располагается в зависимости от значения α в одной из четвертей круга; меры направленных отрезков могут быть и положительными, и отрицательными, но возведение в квадрат уничтожает различие в знаках, и мы имеем всегда $OP^2 + PM^2 = OM^2$, или $OP^2 + OQ^2 = OM^2$, или, после деления на r^2, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Если же все 6 функций определять геометрически, как это делает учебник Рыбкина, то надо доказать все 5 равенств, рассматривая отдельно 4 случая, когда α принадлежит I, II, III, IV четверти. Полезно особо оговорить случаи, когда α равно целому числу четвертей и треугольник OPM вырождается (при $\alpha = 0$ проверяются формулы первая, вторая, четвёртая, а третья и пятая теряют смысл; при $\alpha = 0{,}5\,\pi$ проверяются формулы первая, третья, пятая, а вторая и четвёртая теряют смысл и т. д.).

Ценность этих 5 основных соотношений в том, что они позволяют, считая известным значение какой-либо одной из 6 тригонометрических функций, выразить в зависимости от него значения 5 остальных. Полезным упражнением является составление учащимися таблицы, содержащей выражения каждой тригонометрической функции в зависимости от каждой из остальных и состоящей из 30 формул. Особого внимания требует вопрос о знаках. Так, выводя формулу $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$, замечаем, что надо сохранить оба знака, так как $\cos \alpha$ положителен в I и IV четвертях, отрицателен во II и III четвертях. Но если указана четверть, какой принадлежит α, двойственность знака отпадает. Конечно, нет никакой надобности в запоминании всех 30 формул: надо добиться уверенного и сознательного вывода каждой формулы, а запоминание того, что стоит запоминать, придёт само собой в результате решения задач.

Из 5 основных соотношений полезно вывести (чисто аналитически, без обращения к чертежу) ещё несколько формул. Важнее других формулы $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$, $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha$, легко получаемые после выражения $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ и естественно появляющиеся при составлении таблицы из 30 формул.

Доказательство с помощью основных соотношений новых тригонометрических равенств, приводимых в большом выборе в учебниках и задачниках, представляет собой прекрасный материал для упражнений. Надо, однако, иметь в виду, что в большинстве случаев эти тригонометрические тождества теряют силу при некоторых «критических» значениях аргумента, и надо неукоснительно требовать, чтобы учащиеся отдавали себе ясный отчёт в этой стороне дела. Так, доказывая равенство $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (задача № 64, § 3, задачника Н. Рыбкина), мы должны предположить, что $\sin\alpha \neq 0$, т. е. что дуга α не оканчивается на оси X (второго условия $\cos\alpha \neq 1$ вводить не надо, так как при $\sin\alpha \neq 0$ всегда $\cos\alpha \neq 1$).

Нередко в учебниках и задачниках предлагают для доказательства тождества, верные лишь при определённых ограничениях, но не указывают на эти ограничения. Так, в задачнике Е. Пржевальского на стр. 217 под № 126 приводится равенство $\cos A \operatorname{cosec} A \sqrt{\sec^2 - 1} = 1$, которое предлагается доказать, и нет оговорки о том, что оно верно лишь тогда, когда дуга A принадлежит I или III четверти: если A принадлежит II или IV четверти, $\cos A$ и $\operatorname{cosec} A$ имеют разные знаки, правая часть равна — 1. Нечего и говорить, насколько недопустима такая небрежность. Эту задачу лучше формулировать так: выяснить, верно ли указанное равенство, и для каких именно значений A; как его изменить, чтобы оно было верным в других случаях? (Ответ. Оно верно тогда и только тогда, когда дуга A принадлежит I или III четверти; если A принадлежит II или IV четверти, в правой части следует взять — 1.)

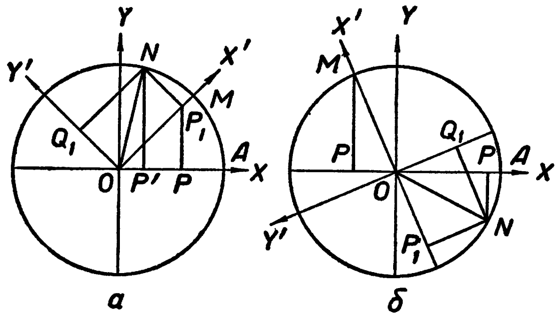
§ 19. Формулы сложения и вычитания.

Безупречный и довольно короткий вывод формул сложения и вычитания получается с помощью теории проекций. Разберём его детально.

Ставим себе задачей выразить $\cos(\alpha+\beta)$ в зависимости от $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$, где α и β — совершенно произвольные дуги. На чертеже (фиг. 60,*а*) обе дуги $\alpha = AM$ и $\beta = MN$, как и их сумма AN, принадлежат I четверти; на чертеже рядом (фиг. 60,*б*) дуга $\alpha = AM$ принадлежит II четверти, дуга $\beta = MN$ заключается между π и $\frac{3}{2}\pi$ и принадлежит, следовательно, III четверти, а их сумма AN — уже IV. Но всё последующее рассуждение опирается не на чертёж, а на ранее установленные общие определения и теоремы. Чертёж нужен лишь как средство лучше представить себе положение вещей. Разобравшись в этом рассуждении, полезно повторить его ещё раз, уже вовсе не пользуясь чертежом, чтобы убедиться, что оно действительно имеет силу для любых дуг α и β.

Вспоминая сказанное о направленных дугах, замечаем, что мера дуги $AN = AM + MN$ равна сумме $\alpha + \beta$ с точностью до целого кратного окружности. Однако, интересуясь только синусом и косинусом этой дуги AN, мы можем, в силу периодичности этих функций, не изменяющихся при изменении дуги на любое число целых окружностей, с этой оговоркой не считаться.

Началом дуг AM и AN служит точка A, линиями косинуса для них служат проекции конечных радиусов OM и ON на ось X, т. е. направленные отрезки OP и OP', а линиями синуса — проекции тех же радиусов на ось Y, т. е. отрезки OQ и OQ', не показанные на чертеже, или равные им (по длине и по знаку) отрезки



Фиг. 60.

PP_1 и $P'N$. Для дуги MN началом служит точка M; её линия косинуса есть проекция конечного радиуса ON на ось X', проведённую через M, т. е. направленный отрезок OP_1, а её линия синуса — проекция ON на ось Y' (проведённую перпендикулярно оси X' и ориентированную так, что дуга MB' равна $+0{,}5\,\pi$), т. е. направленный отрезок OQ_1 или равный ему (по длине и по знаку) отрезок P_1N. Оси X' и Y' можно представлять, как те же оси X и Y, повёрнутые около начала координат O на угол α. Ломаную OP_1N и её замыкающую ON проектируем на ось X; согласно теореме о проекции замыкающей имеем пр. $ON =$ пр. $OP_1 +$ пр. P_1N, а по теореме о проекции отрезка пр. $ON = ON \cos(\alpha + \beta)$, пр. $OP_1 = OP_1 \cos\alpha$, пр. $P_1N = P_1N \cos(\alpha + 0{,}5\,\pi)$, так как направленный отрезок P_1N имеет ту же проекцию, что и равный ему по длине и по знаку отрезок OQ_1; далее замечаем, что отрезки OP_1 и $P_1N = OQ_1$ являются соответственно линиями косинуса и синуса для дуги $MN = \beta$ (началом дуг здесь считаем точку M, осью косинусов является ось X', осью синусов — ось Y'), а потому $OP_1 = ON \cos\beta$, $P_1N = ON \sin\beta$. Подставляя найденные значения в равенство, выражающее проекцию ломаной OP_1N, и деля все члены на ON, получаем формулу $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$).

Доказав эту формулу для любых значений аргумента α и β, выводим из неё остальные формулы сложения и вычитания уже чисто аналитически, без какого бы то ни было обращения к геометрии. Действительно,

$$\cos[(\alpha+\beta)+0{,}5\pi]=\cos[\alpha+(\beta+0{,}5\pi)]=$$
$$=\cos\alpha\cos(\beta+0{,}5\pi)-\sin\alpha\sin(\beta+0{,}5\pi),$$
$$-\sin(\alpha+\beta)=-\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta,$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta.$$

Далее имеем:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin[\alpha+(-\beta)]=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;\quad \cos(\alpha-\beta)=\cos[\alpha+(-\beta)]=$$
$$=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

Формулы для тангенса суммы и разности ещё проще получаются из выведенных формул для синуса и косинуса.

Только что изложенный вывод формулы сложения для косинуса имеет несомненные преимущества перед выводом, данным в учебнике Н. Рыбкина (и редко изучаемым полностью). Если пользоваться чертежом, на котором углы α и β и их сумма не превосходят 90°, как это и сделано в учебнике Берманта А. Ф. и Люстерника Л. А., то всё рассуждение становится не труднее, чем неполный вывод, данный в крупном шрифте учебника Н. Рыбкина, имея ту выгоду перед ним, что обобщения не требуется. Желательно, однако, добиться, чтобы учащиеся убедились в независимости рассуждения от взятого чертежа, повторяя его для дуг разных четвертей.

§ 20. Формулы умножения и деления.

Рекомендуется вывести и запомнить 3 формулы: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$; $\operatorname{tg}2\alpha=2\operatorname{tg}\alpha:(1-\operatorname{tg}^2\alpha)$. К ним можно присоединить ещё две: $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$; $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$. Но последние применяются реже. Вывод чисто аналитический, основанный на формулах сложения. Действуя тем же путём дальше, нетрудно получить формулы, выражающие $\sin m\alpha$ и $\cos m\alpha$ в зависимости от $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, для любого натурального значения m, но это лучше делать позднее, в связи с изучением бинома Ньютона и комплексных чисел.

Сложнее обстоит дело с формулами деления, т. е. с формулами, выражающими функции доли аргумента в зависимости от функций целого аргумента. В простейшем случае, когда аргумент делится пополам, имеем: $\cos^2 0{,}5\alpha-\sin^2 0{,}5\alpha=\cos\alpha$, $\cos^2 0{,}5\alpha+\sin^2 0{,}5\alpha=1$ и легко находим, что

$$\sin 0{,}5\alpha=\pm\sqrt{0{,}5(1-\cos\alpha)},\quad \cos 0{,}5\alpha=\pm\sqrt{0{,}5(1+\cos\alpha)},$$
$$\operatorname{tg}0{,}5\alpha=\pm\sqrt{(1-\cos\alpha):(1+\cos\alpha)}.$$

Здесь особого внимания требует вопрос о знаке перед радикалом. Дуга α может принадлежать любой четверти, и для каждой четверти приходится брать свою комбинацию знаков; знание значения $\cos\alpha$ ещё не устраняет этой неопределённости. Например, при $\cos\alpha > 0$ дуга α может принадлежать или I, или IV, или V, или VIII и т. д. четвертям, а дуга $0{,}5\,\alpha$ или I, или II, или III, или IV и т. д. четвертям; подобное же положение имеем и при $\cos\alpha < 0$. Итак, по данному $\cos\alpha$ каждая из функций $\sin 0{,}5\,\alpha$, $\cos 0{,}5\,\alpha$, $\operatorname{tg} 0{,}5\,\alpha$ определяется двузначно. Если, однако, кроме $\cos\alpha$ известно ещё и значение $\sin\alpha$, то тангенс половинной дуги определяется однозначно. Действительно, почленное деление равенств $2\sin 0{,}5\,\alpha\cos 0{,}5\,\alpha = \sin\alpha$, $2\cos^2 0{,}5\,\alpha = 1 + \cos\alpha$ даёт формулу $\operatorname{tg} 0{,}5\,\alpha = \sin\alpha : (1 + \cos\alpha)$ или после умножения числителя и знаменателя на $1 - \cos\alpha$ с последующим сокращением на $\sin\alpha$ формулу $\operatorname{tg} 0{,}5\,\alpha = (1 - \cos\alpha) : \sin\alpha$. Эти две последние формулы легко получаются также из вышеприведённой формулы, выражающей $\operatorname{tg} 0{,}5\,\alpha$ в зависимости от одного $\cos\alpha$, но тогда остаётся неясным вопрос о знаке. Возникает вопрос, почему задание синуса и косинуса дуги α определяет тангенс её половины однозначно. Для объяснения достаточно заметить, что $1 + \cos\alpha > 0$ (всегда, кроме случаев, когда $\alpha = (2n + 1)\pi$ и когда $\operatorname{tg} 0{,}5\,\alpha$ не существует), а $\sin\alpha = 2\sin\alpha\, 0{,}5\,\alpha\cos 0{,}5\,\alpha$ и $\operatorname{tg} 0{,}5\,\alpha = \sin 0{,}5\,\alpha : \cos 0{,}5\,\alpha$ всегда имеют один и тот же знак, поэтому формула $\operatorname{tg} 0{,}5\,\alpha = \sin\alpha : (1 + \cos\alpha)$ не может содержать никакой двойственности.

Последовательное применение формул деления пополам позволяет выразить в зависимости от $\cos\alpha$ функции дуг вида $\alpha : 2^n$, где n— любое натуральное число.

Отметим легко получаемые формулы $\sin\alpha = 2t : (1 + t^2)$, $\cos\alpha = (1 - t^2) : (1 + t^2)$, $\operatorname{tg}\alpha = 2t : (1 + t^2)$, где $t = \operatorname{tg} 0{,}5\,\alpha$, ценные тем, что они выражают все тригонометрические функции дуги α рационально в зависимости от одного и того же числа, а именно от тангенса половинной дуги, и часто используемые в курсе математического анализа.

Чтобы выразить $\sin 0{,}5\,\alpha$ и $\cos 0{,}5\,\alpha$ в зависимости от $\cos\alpha$, нам пришлось решать систему двух квадратных уравнений. Получение выражений для $\sin\frac{1}{3}\alpha$ и $\cos\frac{1}{3}\alpha$ в зависимости от $\cos\alpha$ потребует решения кубических уравнений $3\sin\frac{1}{3}\alpha - 4\sin^3\frac{1}{3}\alpha = \sin\alpha$, $4\cos^3\frac{1}{3}\alpha - 3\cos\frac{1}{3}\alpha = \cos\alpha$, которые в школьном курсе математики не рассматриваются.

§ 21. Представление тригонометрических сумм в виде произведений.

Попарное почленное сложение и вычитание четырёх формул сложения и вычитания для синуса и косинуса даёт четыре новые важные формулы:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) &= 2\sin\alpha\cos\beta,\\
\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) &= 2\cos\alpha\sin\beta,\\
\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) &= 2\cos\alpha\cos\beta,\\
\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) &= -2\sin\alpha\sin\beta.
\end{aligned} \tag{1}$$

Эти формулы имеют двоякое значение. Во-первых, если читать их слева направо, каждая из них преобразует сумму или разность синусов и косинусов в произведение, т. е. является формулой разложения на множители. Полагая $\alpha+\beta=x$, $\alpha-\beta=y$ переписывают их в более удобном виде:

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y),$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y),$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y),$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y).$$

Эти формулы так часто применяются, что их стоит запомнить, что облегчается словесной их формулировкой: сумма синусов двух дуг равна удвоенному произведению синуса их полусуммы на косинус их полуразности и т. д. Четвёртую формулу часто пишут несколько иначе, заменяя $-\sin\frac{1}{2}(x-y)$ через $\sin\frac{1}{2}(y-x)$, и читают так: разность косинусов двух дуг равна удвоенному произведению синуса их полусуммы на синус полуразности этих дуг, взятых в обратном порядке (или короче, но неточно — на синус обратной полуразности).

Во-вторых, те же формулы (1), если читать их справа налево после предварительного почленного деления на 2, дают преобразование произведения синуса на синус, синуса на косинус, косинуса на синус, косинуса на косинус в сумму или разность синусов или косинусов. До открытия логарифмов этими формулами пользовались как средством вычисления (замена умножения сложением). Теперь они часто применяются в математическом анализе, так как в некоторых случаях, например при интегрировании функций, выгоднее иметь дело с суммами, чем с произведениями. В школьном курсе это применение формул (1) совершенно игнорируется, о чём нельзя не пожалеть. Имея в виду эту же потребность высшей школы, следовало бы уделить несколько внимания также формулам, выражающим степени синуса и косинуса в виде алгебраических сумм синусов и косинусов кратных дуг, как, например, $\sin^2\alpha=0{,}5-0{,}5\cos 2\alpha$, $\cos^2\alpha=0{,}5+0{,}5\cos 2\alpha$, $\sin^3\alpha=\frac{3}{4}\sin\alpha-\frac{1}{4}\sin 3\alpha$ и т. д., тем более, что подобные формулы находят себе применение и при решении тригонометрических уравнений.

Весьма подходят для самостоятельного решения учащимися задачи на преобразование в произведения разных тригонометрических выражений (их «приведение к логарифмическому виду»). Надо обеспечить уменье уверенно и быстро выводить формулы вроде таких, как $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\sin(\alpha+\beta)\sec\alpha\sec\beta$, $(\sin\alpha-\sin\beta):(\sin\alpha+\sin\beta)=\operatorname{tg}0{,}5(\alpha-\beta)\operatorname{ctg}0{,}5(\alpha+\beta)$ и т. д. Желательно, чтобы учащиеся в состоянии были справиться и с более сложными задачами, например, чтобы они могли доказать формулу

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos0{,}5\alpha\cos0{,}5\beta\cos0{,}5\gamma,$$

имеющую место при условии $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Большой выбор таких задач имеется в задачнике Н. Рыбкина. Приведённые там указания о способе решения более трудных задач надо использовать разумно: не начинать с них, а сперва искать своё решение и обращаться к ним лишь при безрезультатности попыток.

Во многих случаях при решении такого рода задач большую помощь приносит введение *вспомогательного угла*. Так, чтобы представить в виде произведения сумму $y=a\cos x+b\sin x$, полагают $b:a=\operatorname{tg}\varphi$ и получают $y=a\cos(x-\varphi)\sec\varphi$. Этот способ введения вспомогательного угла широко применяется в больших вычислениях, например, в астрономии, существенно упрощая выкладки.

§ 22. Некоторые замечательные тригонометрические неравенства.

Хотя в программе средней школы нет упоминания о двойном неравенстве

$$\sin\alpha<\alpha<\operatorname{tg}\alpha, \qquad (1)$$

но оно так важно для дальнейшего, так что встречается в приложениях и так легко выводится, что брать его в IX классе следует. Оно имеет место для любой дуги I четверти, выраженной в радианах, и легко устанавливается посредством сравнения площадей (см. § 62 учебника А. Ф. Берманта и Л. А. Люстерника). Прежде чем давать это доказательство, желательно натолкнуть учащихся на неравенство (1) через просмотр таблиц синусов, тангенсов и радианной меры (например, взять $\sin 10°=0{,}1736$, $\operatorname{tg}10°=0{,}1763$, $\operatorname{arc}10°=0{,}1745$ и подметить, что $\sin 10°<\operatorname{arc}10°<\operatorname{tg}10°$, затем проверить это заключение на других дугах).

Подобный просмотр таблиц, подводящий к неравенству (1), позволяет сделать ещё одно важное заключение: чем ближе к 0 аргумент, тем ближе к 1 отношение $\sin\alpha$ к α. Это заключение подтверждается доказательством нового неравенства

$$1<\frac{\alpha}{\sin\alpha}>\frac{1}{\cos\alpha}, \text{ или, что то же, } \cos\alpha<\frac{\sin\alpha}{\alpha}<1,$$

легко выводимого из (1). При неограниченном приближении α к 0 $\cos\alpha$ растёт, неограниченно приближаясь к 1, то же делается и с отношением $\sin\alpha:\alpha$, которое больше $\cos\alpha$, но меньше 1. Это обстоятельство, как известно, вполне характеризуется кратким выражением: предел отношения $\sin\alpha:\alpha$ при $\alpha\to0$ есть 1.

Первая часть двойного неравенства (1) даёт высшую границу (ВГ) для $\sin\alpha$ в виде радианной меры α: синус любой дуги I четверти меньше радианной меры этой дуги. Низшая граница (НГ) для $\sin\alpha$ устанавливается теоремой, тоже доказываемой в учебнике А. Ф. Берманта и Л. А. Люстерника: если α радианная мера дуги I четверти, то

$$\sin\alpha > \alpha - \frac{1}{4}\alpha^3. \tag{2}$$

Но можно доказать и более сильное неравенство $\sin\alpha > \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3$. Оно называется «более сильным» в том смысле, что из него предыдущее неравенство получается сразу, так как если $\sin\alpha$ больше чем $\alpha - \frac{1}{6}\alpha^3$, то $\sin\alpha$ и подавно больше меньшего числа $\alpha - \frac{1}{4}\alpha^3$, обратное же заключение невозможно: из того, что $\sin\alpha > \alpha - \frac{1}{4}\alpha^3$, отнюдь не следует, что $\sin\alpha > \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3$.

Ещё более сильное двойное неравенство $S_n - r_n < \sin\alpha < S_n$ $\left(\text{где } S_n = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \ldots + \frac{\alpha^{4n-3}}{(4n-3)!},\ r_n = \frac{\alpha^{4n-1}}{(4n-1)!},\ n \text{ — любое натуральное число}\right)$ доказывается, как известно, в теории рядов. При $n = 1$ оно даёт $\alpha - \frac{\alpha^3}{6} < \sin\alpha < \alpha$.

Несколько хороших задач на тригонометрические неравенства содержит алгебраический задачник [III, 23].

§ 23. Приближённые тригонометрические формулы.

Из неравенств (1) и (2) предыдущего параграфа сразу вытекает, что для малых углов имеют место приближённые формулы

$$\sin\alpha \approx \alpha, \quad \cos\alpha \approx 1, \quad \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha, \tag{1}$$

имеющие весьма широкое применение и тем более точное, чем меньше α. Двойное неравенство $\alpha - \frac{\alpha^3}{6} < \sin\alpha < \alpha$ даёт значительно более точные формулы

$$\sin\alpha \approx \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3, \quad \cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}, \quad \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha + \frac{1}{3}\alpha^3. \tag{2}$$

Полагая $\sin\alpha \approx \alpha$, мы допускаем погрешность, меньшую $\frac{1}{6}a^3$, при малых значениях α весьма малую; если $\alpha = 10^{-1}$, 10^{-2}, $10^{-3}, \ldots$, то $\frac{1}{6}a^3$ соответственно меньше $2\cdot10^{-4}$, $2\cdot10^{-7}$, $2\cdot10^{-10}, \ldots$

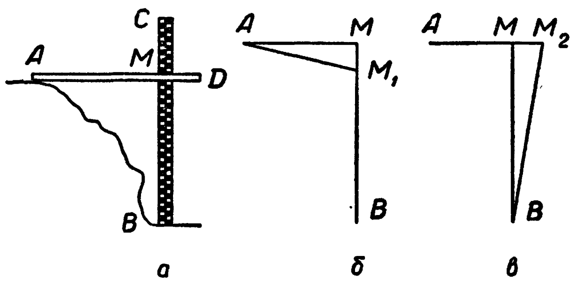
Интересно выяснить, в каком интервале можно брать α, чтобы приближённая формула $\sin\alpha \approx \alpha$ давала бы значения синуса с определённым числом точных десятичных знаков. Полагая $\frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{2}\cdot 10^{-k}$, имеем: $\alpha = \sqrt[3]{3\cdot 10^{-k}}$, т. е. $\alpha \approx 0{,}3107$ для $k = 2$, $\alpha \approx 0{,}1442$ для $k = 3$, $\alpha \approx 0{,}0669$ для $k = 4$. Переходя от радианной меры к градусной, заключаем, что формула $\sin x \approx \alpha$ обеспечивает два точных десятичных знака, если α не превосходит $17°48'$;

три точных десятичных знака, если α не превосходит 8°15′; четыре точных десятичных знака, если α не превосходит 3°50′. Можно показать, что формула $\sin\alpha \approx \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3$ даёт ту же точность в значительно более широких интервалах: два знака до 51°, три знака до 32°, четыре знака до 20°.

Приближённые формулы для косинуса получаются из формулы $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ после замены синуса малой дуги α её радианной мерой: отбрасывая весьма малое число α^2, получаем $\cos\alpha \approx 1$; сохраняя его и применяя приближённую формулу $\sqrt{1+x} \approx 1 + 0{,}5\,x$, имеем $\cos\alpha \approx 1 - 0{,}5\,\alpha^2$. Формула $\operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha : \cos\alpha$ после замены $\sin\alpha$ через α, а $\cos\alpha$ через 1 даёт $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$, а после замены $\sin\alpha$ через $\alpha - \frac{1}{6}\alpha^3$ и $\cos\alpha$ через $1 - 0{,}5\,\alpha^2$ с последующим делением, прерываемым после получения двух членов частного, приводит к формуле $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha + \frac{1}{3}\alpha^3$. Следующая табличка показывает, в каком интервале можно брать α, чтобы обеспечить при использовании этих приближённых формул k точных десятичных знаков результата.

Формула	$k=2$	$k=3$	$k=4$	Формула	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$\sin\alpha \approx \alpha$	17°48′	8°15′	3°50′	$\sin\alpha \approx \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3$	51°	32°	20°
$\cos\alpha \approx 1$	5°43′	1°48′	0°34′	$\cos\alpha \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$	33°	18°	10°
$\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$	14°08′	6°25′	3°02′	$\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha + \frac{1}{3}\alpha^3$	29°	13°	11°

Укажем один пример применения этих приближённых формул. Положим, определяется разность высот для точек A и B (фиг. 61,*а*) через отсчёт по вертикальной рейке BC от нижнего её конца B до точки M, указываемой горизонтальной рейкой AD. Возникает вопрос: как скажется на отчёте отклонение рейки AD от точного горизонтального положения на угол α и рейки BC от точного вертикального положения на угол β?



Фиг. 61.

Соответствующие изменения отсчёта BM равны $MM_1 = AM\operatorname{tg}\alpha$ (фиг. 61,*б*) и $BM_2 - BM = BM\sec\beta - BM = BM$

$(1-\cos\beta)\sec\beta$ (фиг. 61,*в*). Заменяя $\operatorname{tg}\alpha$ через α и $\cos\beta$ через 1, получаем $MM_1 \approx MA\cdot\alpha$, $BM_2 - BM_1 \approx 0$. Теперь становится понятным, почему при такого рода измерениях рекомендуют устанавливать горизонтальную рейку по уровню (тогда угол α очень близок к 0, поправкой MM_1 можно пренебречь), а вертикальную рейку просто на глаз (влияние угла β незаметно).

Укажем ещё одну приближённую формулу для $\sin\alpha$, относящуюся уже не только к малому, но ко всякому острому углу в α° и весьма полезную при грубо приближённых расчётах:

$$\sin\alpha \overset{\bullet}{\approx} \frac{1}{6}\alpha \quad \text{при} \quad 0 \leqq \alpha \leqq 60^\circ,$$

$$\sin\alpha \approx 1 \quad \text{при} \quad 60^\circ \leqq \alpha \leqq 90^\circ.$$

Наибольшего значения погрешность этой формулы достигает при $\alpha = 60^\circ$ и равна $1 - 0{,}8660 = 0{,}1340$, средняя же её ошибка, вычисляемая по формуле

$$\sigma = \frac{2}{\pi}\left[\int\limits_0^{\frac{1}{3}\pi}(x-\sin x)\,dx + \int\limits_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}(1-\sin x)\,dx\right]$$

равна всего 0,016.

Выведем, наконец, формулу для приближённого вычисления тангенса дуги, близкой к 90°. Полагая радианную меру α близкой к 0, имеем:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha = 1 : \operatorname{tg}\alpha \approx 1 : \alpha,$$

или более точно:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) \approx 1 : \left(\alpha + \frac{1}{3}\alpha^3\right) \approx \left(1 - \frac{1}{3}\alpha^2\right) : \alpha,$$

или окончательно:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) \approx 1 : \alpha, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) \approx 1 : \alpha - \alpha : 3.$$

Обе эти формулы тем более точны, чем ближе к 90° дуга α, т. е. чем ближе к $0{,}5\,\pi$ дуга $0{,}5\,\pi - \alpha$.

Глава V

ТАБЛИЦЫ И ГРАФИКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 24. Вычисление значений тригонометрических функций.

Изученные свойства тригонометрических функций позволяют вернуться к важнейшему вопросу, встающему при всякой попытке практически их использовать, вопросу о способах получения их значений для любого данного значения аргумента. Если значение аргумента (угла или дуги) дано на чертеже, значения всех тригонометрических функций можно получить посредством измерений. Но точность этого графического способа невелика, и неизбежно встаёт вопрос о вычислении, притом с произвольно высокой точностью, значений тригонометрических функций для произвольных заданных значений аргумента.

Прежде всего отметим возможность некоторого сужения задачи. Во-первых, если имеется способ вычисления значений $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, то значения $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, $\sec \alpha$, $\operatorname{cosec} \alpha$ получаются простым делением. Уравнение $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ позволяет по значению одной из этих двух функций находить соответствующее значение другой. Итак, задача в конце концов сводится к вычислению значений только одной из двух функций — синуса или косинуса. Во-вторых, формулы приведения показывают, что значения аргумента можно ограничить интервалом от 0° до 90°, даже от 0° до 45°. Формулы сложения и вычитания

$$\sin (30° \pm \alpha) = 0{,}5 \cos \alpha \pm 0{,}5 \sqrt{3} \sin \alpha,$$
$$\cos (30° \pm \alpha) = 0{,}5 \sqrt{3} \cos \alpha \mp 0{,}5 \sin \alpha$$

говорят, что возможно и дальнейшее ограничение — только интервалом от 0° до 15°.

Итак, имеем более узкую задачу, к которой сводится общая: найти способ вычисления с произвольно высокой точностью значений $\sin \alpha$ или $\cos \alpha$ для значений α в интервале от 0° до 15°.

Из многих таких способов рассмотрим три важнейших.

1-й способ. Использование формул, выражающих зависимость стороны a_n правильного n-угольника от радиуса r описанного круга.

Этот способ был использован выше, но теперь можно идти дальше. Так как $a_6 = r$, $a_{10} = \frac{1}{2} r (\sqrt{5} - 1)$, то

$$\sin 30° = \frac{1}{2}, \quad \cos 30° = \frac{1}{2} \sqrt{3}, \quad \sin 18° = \frac{1}{4} (\sqrt{5} - 1),$$
$$\cos 18° = \sqrt{1 - \sin^2 18°} = \frac{1}{4} \sqrt{10 + \sqrt{20}}.$$

По формулам деления аргумента находим:

$$\sin 15° = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{4} (\sqrt{6} - \sqrt{2}),$$
$$\cos 15° = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{1}{4} (\sqrt{6} + \sqrt{2}),$$

а по формулам вычитания $\sin 3° = \sin (18° - 15°)$, $\cos 3° = \cos (18° - 15°)$. Дальнейшее применение формул деления даст синус и косинус для дуг 1°30′, 0°45′, 0°22′30″, 0°11′15″ и т. д. Комбинируя эти результаты с помощью формул сложения и умножения, можно получить ряд новых значений $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, а именно их значения для аргументов $h, 2h, 3h, 4h, \ldots$, где $h = 30° : 2^n$ и $h = 18° \cdot 2^n$ (n — любое натуральное число).

Выполняя соответствующие выкладки, мы по необходимости имеем дело с приближёнными значениями корней, приближёнными же получаются и все результаты. Чтобы иметь полную уверенность в точности определённого числа цифр получаемых результатов, рекомендуется применять вычисление границ. Ниже приводятся полностью все выкладки, необходимые для разыскания синуса и косинуса для $\alpha = 15°$, $18°$, $3°$ с 4 десятичными знаками. Вычисления ведутся с одной запасной цифрой, т. е. с 5 десятичными знаками.

Вычисление $\sin 15° = \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ и $\cos 15° = \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

	НГ	ВГ
$\sqrt{6}$	2,44948	2,44950
$\sqrt{2}$	1,41420	1,41422
$a = \sqrt{6}-\sqrt{2}$	1,03526	1,03530
$b = \sqrt{6}+\sqrt{2}$	3,86368	3,86372
$\sin 15° = a:4$	0,25881	0,25883
$\cos 15° = b:4$	0,96592	0,96593

Результат (с 4 точными десятичными знаками):

$\sin 15° = 0{,}2588$
$\cos 15° = 0{,}9659$

Вычисление $\sin 18° = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$ и $\cos 18° = \frac{1}{4}\sqrt{10+\sqrt{20}}$.

	НГ	ВГ
$\sqrt{5}$	2,23606	2,23608
$a = \sqrt{5}-1$	1,23606	1,23608
$\sin 18° = a:4$	0,30901	0,30902

	НГ	ВГ
$\sqrt{20}$	4,47213	4,47215
$b = 10+\sqrt{20}$	14,4721	14,4722
$c = \sqrt{b}$	3,80421	3,80424
$\cos 18° = c:4$	0,95105	0,95106

Результат (с 4 точными десятичными знаками):

$\sin 18° = 0{,}3090$, $\cos 18° = 0{,}9511$.

Вычисление $\sin 3° = \sin(18° - 15°)$ и $\cos 3° = \cos(18° - 15°)$.

	НГ	ВГ
$a = \sin 18°$	0,30901	0,30902
$b = \cos 15°$	0,96592	0,96593
$c = \cos 18°$	0,95105	0,95106
$d = \sin 15°$	0,25881	0,25883
ab	0,29847	0,29849
cd	0,24614	0,24616
$\sin 3° = ab - cd$	0,05231	0,05235

	НГ	ВГ
bc	0,91863	0,91865
ad	0,07997	0,07998
$\cos 3° = bc + ad$	0,99860	0,99863

Результат (с 4 точными десятичными знаками):

$\sin 3° = 0{,}0523$
$\cos 3° = 0{,}9986$

Для контроля можно было бы вычислить сумму $s = \sin^2 3^\circ + \cos^2 3^\circ$ и убедиться, что НГ $s < 1$, ВГ $s > 1$. По 4-значной таблице имеем как раз полученные значения, а 6-значная таблица (Петерса) даёт $\sin 15^\circ = 0{,}258819$, $\cos 15^\circ = 0{,}965926$, $\sin 18^\circ = 0{,}309017$, $\cos 18^\circ = 0{,}951057$, $\sin 3^\circ = 0{,}052336$, $\cos 3^\circ = 0{,}998630$, что вполне согласуется с нашими результатами (более точное значение $\cos 3^\circ$ есть $0{,}99862995\ldots$).

2-й способ. Использование неравенства $\alpha - \frac{1}{6}\alpha^3 < \sin\alpha < \alpha$, где α — радианная мера.

Только что рассмотренный 1-й способ имеет тот недостаток, что применим (непосредственно) не для всякого значения аргумента. Иначе обстоит дело со способом, основанном на двойном неравенстве: $\alpha - \frac{1}{6}\alpha^3 < \sin\alpha < \alpha$. Если радианная мера α близка к нулю, то число $\frac{1}{6}\alpha^3$ ещё много ближе к нулю, и это двойное неравенство даёт для $\sin\alpha$ весьма близкие друг к другу границы. Посмотрим, например, что оно даёт для дуги в 1°, имеющей радианную меру, равную $\pi : 180$, если исходить из значения $\pi = 3{,}14159265\ldots$, округлённого до 6 значащих цифр.

Вычисление $\sin 1^\circ$ *из неравенства* $\alpha - \frac{1}{6}\alpha^3 < \sin\alpha < \alpha$.

	НГ	ВГ
π	3,14159	3,14160
$\alpha = \pi : 180$	0,0174532	0,0174534
α^3	0,0000053	0,0000054
$\alpha^3 : 6$	0,0000008	0,0000009
$\sin\alpha$	0,0174521	0,0174534

Результат (с 5 точными десятичными знаками):

$$\sin 1^\circ = 0{,}01745.$$

Получить этим способом $\sin 1^\circ$ удаётся только с 5 десятичными знаками; справка в таблице (Петерса) даёт $\sin 1^\circ = 0{,}017452$. Для меньших значений α точность результата выше. Так, для $\alpha = 10''$ устанавливаются такие границы:

$$0{,}0000484813680 < \sin 0^\circ 0' \, 10'' < 0{,}0000484813682.$$

Зная синус какого-нибудь малого угла α, по формулам сложения и умножения можно найти синус и косинус любого угла, кратного α. Так, используя только что найденные границы для $\sin 1^\circ$, вычисляем $\cos 1^\circ$ по формуле $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$ ($0{,}999847 < \cos 1^\circ < 0{,}999848$, откуда значение $\cos 1^\circ$ с 5 точными десятичными знаками 0,99985), затем $\sin 2^\circ = 2\sin 1^\circ \cos 1^\circ$ ($0{,}034896 < \sin 2^\circ < 0{,}034901$), $\cos 2^\circ = 1 - 2\sin^2 1^\circ$ ($0{,}999390 < \cos 2^\circ < 0{,}999392$), откуда $\sin 2^\circ = 0{,}03490$, $\cos 2^\circ = 0{,}99939$ (тоже с 5 точными десятичными знаками, далее $\sin 3^\circ = \sin (2^\circ + 1^\circ) = 0{,}0523$ (уже только с 4 точными десятичными знаками, так как получается $0{,}052330 < \sin 3^\circ < 0{,}052338$ и хотя 5-й десятичный знак вполне определился, как 3, неясно, как его округлить; справка по 6-значной таблице даёт значение $\sin 3^\circ = 0{,}052336$) и $\cos 3^\circ = \cos (2^\circ + 1^\circ) = 0{,}99863$ (опять с 5 точными десятичными знаками на основе двойного неравенства $0{,}998628 < \cos 3^\circ < 0{,}998632$).

Комбинируя этот второй способ, дающий тем более точные значения, чем меньше аргумент, с первым, дающим сколь угодно точные значения $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ для значений α, получаемых последовательным делением пополам и комбинированием дуг 30° и 18°, можно получить с произвольно высокой точностью значения $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ любой дуги.

Только что описанный второй способ и рассматривается обычно в учебниках тригонометрии.

Если измерять углы в радианах, то этот способ позволяет составить таблицу синусов проще, чем любой другой, но если выражать углы в градусах, то он предполагает знание числа π с большой точностью, недостижимой с помощью того способа Архимеда, о котором была речь в § 20 части IV выше, и нужно использовать другие, более сложные способы, с которыми можно ознакомиться, например, по книге [III, 30a]. Это же замечание относится и к рассмотренному дальше 3-му способу вычисления синуса.

3-й способ. Вычисление $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ посредством рядов. Выше было уже указано двойное неравенство: $S_n - r_n < \sin \alpha < S_n$,

$$\text{где } S_n = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \ldots + \frac{\alpha^{4n-3}}{(4n-3)!}, \quad r_n = \frac{\alpha^{4n-1}}{(4n-1)!},$$

n — любое натуральное число; это неравенство получается из известного ряда $\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \ldots$, сходящегося при любом значении n: каково бы ни было значение α, при $n \to \infty$ имеем $r_n \to 0$. Применяя это неравенство, можно вычислить значение $\sin \alpha$ для любого α с произвольно высокой точностью и с меньшим количеством выкладок, чем при способах 1-м и 2-м. Вывод его дать в средней школе нельзя, но показать на примерах его применение очень желательно. Вот такой пример.

Вычисление $\sin 3^\circ$ *из неравенства* $S_n - r_n < \sin \alpha < S_n$ (при $n = 2$) (см. табл. стр. 452).

Значения косинуса столь же удобно получать посредством двойного неравенства $C_n - r_n < \cos \alpha < C_n$, где

$$C_n = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \ldots - \frac{\alpha^{4n-2}}{(4n-2)!} + \frac{\alpha^{4n}}{(4n)!}, \quad r_n = \frac{\alpha^{4n+2}}{(4n+2)!},$$

n — любое натуральное число. Это неравенство выводится из известного ряда $\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \ldots$, сходящегося тоже при всяком α.

	НГ	ВГ
π	3,14159	3,14160
$\alpha = \pi : 60$	0,0523598	0,0523600
α^3	1435	1436
α^5	3	4
α^7	0	1
$\frac{1}{6}\alpha^3$	239	240
$\frac{1}{120}\alpha^5$	0	1
$r_2 = \frac{1}{7!}\alpha^7$	0	1
$S_2 = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^5}{120}$	0,0523358	0,0523361
$\sin\alpha$	0,0523357	0,0523361

Результат (с 6 точными десятичными знаками):

$$\sin 3° = 0{,}052336.$$

Особенно быстро вычисление $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ с помощью этих рядов идёт в тех случаях, когда значение α, выраженное в радианах, имеет одну-две значащие цифры. Вот, например, вычисление $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ для $\alpha = 0{,}5$, т. е. $\alpha = 28°38'52'',4...$, проведённое без строгого учёта погрешностей с 5 десятичными знаками и с округлением окончательных результатов до 4 десятичных знаков.

$$\sin 0{,}5 = 0{,}5 - \frac{1}{3!}\cdot 0{,}5^3 + \frac{1}{5!}\cdot 0{,}5^5 - \frac{1}{7!}\cdot 0{,}5^7 =$$

$$= 0{,}50000 - 0{,}02083 + 0{,}00026 - 0{,}00000 = 0{,}47943$$

или окончательно $\sin 0{,}5 = 0{,}4794$;

$$\cos 0{,}5 = 1 - \frac{1}{2!}\cdot 0{,}5^2 + \frac{1}{4!}\cdot 0{,}5^4 - \frac{1}{6!}\cdot 0{,}5^6 =$$

$$= 1{,}00000 - 0{,}12500 + 0{,}00260 - 0{,}00002 = 0{,}87758$$

или окончательно $\cos 0{,}5 = 0{,}8776$.

Справка в таблице значений тригонометрических функций для аргумента, выраженного в радианной мере, даёт именно эти значения $\sin 0{,}5$ и $\cos 0{,}5$; 5-й десятичный знак, откинутый нами как ненадёжный, оказывается в обоих случаях точным.

В учебниках тригонометрии вопрос о вычислении значений тригонометрических функций любого аргумента излагается весьма схематично, а в школе едва затрагивается или вовсе не затрагивается. Между тем очень важно, чтобы учащиеся понимали, как получены приведённые в таблице числа. Рассмотренные примеры ясно показывают, что вычисление значений $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ вполне доступно учащимся IX класса и представляет собой прекрасный материал для упражнений в арифметических выкладках, которыми должен владеть каждый оканчивающий среднюю школу. Проведение более или менее сложных вычислений со строгим учётом погрешностей является весьма действенным средством воспитания чувства ответственности за результаты работы, и не следует упускать тех возможностей тренировки в них, какие представляет рассматриваемый вопрос.

Когда дело идёт не о получении значений $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ для отдельных значений α, а о *табулировании* этих функций, т. е. о составлении таблицы их значений для ряда равноотстоящих значений аргумента, употребляются другие способы, чрезвычайно упрощающие выкладки. Этих способов в курсе средней школы касаться не приходится. Подобные таблицы составлены, проверены, надо только понять, как они устроены, чтобы сознательно и уверенно ими пользоваться. К этому вопросу и переходим.

§ 25. Устройство и употребление 4-значных тригонометрических таблиц.

При изучении тригонометрии в средней школе, кроме тех таблиц, какие уже употреблялись учащимися до этого, а именно таблиц квадратов, кубов, квадратных и кубических корней, обратных значений, радианной меры, логарифмов и о которых уже была речь выше (в III части), постоянно используются ещё таблицы значений тригонометрических функций, а именно так называемые натуральные тригонометрические таблицы, дающие значения самих функций, и логарифмо-тригонометрические таблицы, дающие значения их десятичных логарифмов. Основными таблицами, получившими за последние годы широкое распространение в советской средней школе, являются четырёхзначные таблицы, дающие вполне достаточную для большинства практических применений точность и более удобные для употребления, чем таблицы с большим числом десятичных знаков, но очень желательно, чтобы оканчивающие среднюю школу были знакомы и с важнейшими общими принципами устройства и употребления математических таблиц и умели бы в случае надобности использовать и другие, более точные таблицы.

В сборнике 4-значных математических таблиц В. Брадиса, принятом в нашей средней школе, имеется таблица синусов, содержащая значения $\sin\alpha$ для значений аргумента от 0° до 90° через $0^\circ,1 = 6'$. Эта таблица в силу формулы $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$ даёт также и значения косинусов для тех же значений аргумента. Чтобы избежать вычитания, используется вторая нумерация (снизу и справа). Выбор такой ступени таблицы (6′) обеспечивает и возможность линейной интерполяции на протяжении всей таблицы (так как табличные разности изменяются весьма медленно) и её удобство, так как эти табличные разности невелики — не больше 18 единиц разряда 4-го десятичного знака. Техника пользования этой таблицей достаточно разъяснена в объяснениях к ней, приведённых в сборнике, и легко усваивается учащимися. Необходимо, однако, сказать несколько слов об имеющихся в таблице «готовых поправках», которыми учащиеся пользуются иногда не вполне сознательно.

Так как соседние табличные разности либо равны, либо отличаются только на единицу разряда 4-го десятичного знака, то возможно разыскание значений функции для промежуточных значений аргумента посредством линейной интерполяции. Так, желая найти $\sin 25°38'$, берём из таблицы $\sin 25°36' = 0{,}4321$ и $\sin 25°42' = 0{,}4337$ и находим табличную разность, равную $4\,337 - 4\,321 = 16$ единицам последнего разряда. Убедившись, что соседние табличные разности ($4\,321 - 4\,305 = 16$ и $4\,352 - 4\,337 = 15$) указывают на достаточную равномерность изменения синуса (при взятой точности в 4 десятичных знака и принятой ступени в 6′), находим поправку x на *избыток* данного значения аргумента (25°38′) над ближайшим меньшим табличным его значением (25°36′) из пропорции $x : 16 = 2 : 6$ и получаем $x = 16 : 3 \approx 5$, после чего находим $\sin 25°38' = 0{,}4321 + 0{,}0005 = 0{,}4326$.

Замечая, что табличные разности меняются весьма незначительно на протяжении всей строки таблицы, дающей значения синуса для дуг от 25° до 26°, составляя то 15, то 16, берём *среднюю* для всей этой строки табличную разность $(\sin 26° - \sin 25°) : 10$, равную $(4\,384 - 4\,226) : 10 = 15{,}8$, и вычисляем средние (для этой строки) поправки на 1′, 2′, 3′, получая после округления 3, 5, 8. Это и есть те готовые поправки, которые напечатаны в таблице на той же строке и применение которых так облегчает работу с таблицами. Поправки на 4′ и 5′ не приведены, так как прибавление поправок на 4′ и 5′ можно заменить вычитанием меньших (а потому и более точных) поправок соответственно на 2′ и 1′ из ближайшего большего табличного значения функции.

Чтобы обеспечить сознательность в пользовании готовыми поправками, следует требовать, чтобы учащиеся умели обходиться и без них, решая соответствующую пропорцию, и ясно представляли бы себе, что эта линейная интерполяция основана на допущении о равномерности роста функции на протяжении одной строки (или другими словами, на допущении о пропорциональности между изменением аргумента и изменением функции).

Таблица тангенсов (она же таблица котангенсов) для значений аргумента от 0° до 75° устроена одинаково с таблицей синусов (с той лишь разницей, что, начиная с $\operatorname{tg} 60°$, значения функций для обеспечения возможности линейной интерполяции взяты не с 4 десятичными знаками, а с 4 значащими цифрами). Для значений же, больших 75°, ступень таблицы уменьшена до 1′, так как при прежней ступени в 6′ изменение табличной разности на протяжении строки становится значительным и давать готовые поправки для целой строки уже нельзя.

Как всегда в математических таблицах, приведённые в тригонометрических таблицах значения $\sin \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$ имеют погрешности, не превосходящие половины единицы разряда последней цифры. Так, взяв из таблицы $\sin 77°36' = 0{,}9767$ и $\operatorname{tg} 64°18' = 2{,}078$, можно ручаться, что $0{,}97665 < \sin 77°36' < 0{,}97675$ и $2{,}0775 < \operatorname{tg} 64°18' < 2{,}0785$. Погрешности же значений, найденных посредством линейной интерполяции, несколько больше, так как уже округление поправки может дать погрешность, достигающую половины единицы разряда последней цифры, да ещё имеется погрешность от неполной равномерности изменения функции, весьма незначительная, если соседние табличные разности мало отличаются друг от друга. В подавляющем большинстве случаев погрешности таких интерполированных значений меньше единицы разряда последней цифры и лишь в исключительных, крайне редких случаях могут очень незначительно превзойти её. В этом можно убедиться посредством надлежащего анализа, весьма кропотливого и неприемлемого для средней школы, или простым сравнением этих значений с более точными, найденными по другим таблицам. Вот пример такого сравнения.

α	20°01′	20°02′	20°03′	20°04′	20°05′
По 4-значной таблице $a = \sin\alpha$	0,3423	0,3425	0,3428	0,3432	0,3434
По 6-значной таблице $b = \sin\alpha$	0,342293	0,342567	0,342840	0,343113	0,343387
Разница $(a - b) \cdot 10^4$.	+ 0,07	− 0,67	− 0,40	− 0,87	+ 0,13

Если требуется большая точность, надо обращаться к более точным таблицам или же вычислять значения тригонометрических функций собственноручно, основываясь лучше всего на 3-м способе, рассмотренном в § 24. Отметим особо положение с разысканием тангенса угла, близкого к 90°, когда линейная интерполяция даёт весьма неточные результаты. Пусть, например, требуется найти tg 89°52′30″. Из таблицы берём tg 89°52′ = 429,7 и tg 89°53′ = = 491,1 и находим обычным приёмом поправку [(491,1 − 429,7) : : 60]·30 = 30,7; получив искомое значение 429,7 + 30,7 = 460,4, убеждаемся после справки в более точной таблице, что оно очень грубо (в действительности tg 89°52′30″ = 458,4), что вполне понятно, так как табличная разность меняется здесь очень быстро:

$$\operatorname{tg} 89°53' - \operatorname{tg} 89°52' = 61{,}4, \quad \operatorname{tg} 89°54' - \operatorname{tg} 89°53' = 81{,}9.$$

Приближённая формула $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) \approx \frac{1}{\alpha}$ (см. выше стр. 447) даёт здесь гораздо лучший результат: если дана дуга 89°52′30″ = 90° − − 0°7′30″, выражаем дугу 0°7′30″ в радианах и получаем tg 89°52′30″ = 1 : 0,002181 = 458,5.

При разыскании по таблице дуги, имеющей данный синус или тангенс (так называемый «обратный вопрос»), надо давать себе отчёт о той точности, с какой получается результат. Вместо того чтобы разбирать здесь вопрос в общем виде, что трудно даётся учащимся, можно ограничиться рассмотрением нескольких примеров, с полной очевидностью убеждающих в том, что чем *больше табличная разность, тем точнее решается обратный вопрос*. Пусть, например, надо найти α, зная, что $\sin\alpha = 0,1456$. Предполагая, что это данное значение $\sin\alpha$ является приближённым его значением с 4 десятичными знаками, имеем двойное неравенство $0,14555 < \sin\alpha < 0,14565$. Таблица говорит, что $\sin 8°22' = 0,1455$, $\sin 8°23' = 0,1458$, и можно утверждать, что искомое значение α заключается между $8°22'$ и $8°23'$, притом ближе к первому из этих чисел, так что окончательно имеем $\alpha \approx 8°22'$ (по недостатку, с ошибкой, не превосходящей полминуты). Если же $\sin\alpha = 0,9997$, то $0,99965 < \sin\alpha < 0,99975$, в таблице же имеются три дуги: $83°30'$, $88°36'$, $88°42'$, синусы которых равны 0,9997, и из неё можно установить только довольно далёкие друг от друга границы для искомой дуги: $88°24' < \alpha < 88°48'$, что даёт $\alpha \approx 88°36'$, с возможной ошибкой до $12'$.

Просмотр таблиц даёт следующее практически важное заключение: дуга, близкая к 90°, определяется по своему синусу весьма неточно; точно так же обстоит дело с разысканием дуги, близкой к 0°, по её косинусу; по тангенсу всякая дуга I четверти определяется точнее, чем по синусу или косинусу.

Четырёхзначные таблицы логарифмов тригонометрических функций устроены аналогично таблицам натуральным. Так как по мере приближения α к 0 и $\lg\sin\alpha$, и $\lg \operatorname{tg}\alpha$ неограниченно растут по абсолютной величине, оставаясь отрицательными, то для интервала от 0° до 14° ступень таблицы принята равной $1'$; то же сделано для $\lg \operatorname{tg}\alpha$ в интервале от 76° до 90°. Для значений α от 14° до 76° ступень взята равной 0°,1 и даны готовые поправки.

Если речь идёт о дугах, близких к 0° или к 90° и не выражающихся целым числом градусов и минут, то за отсутствием готовых поправок их надо находить обычным способом линейной интерполяции непосредственно, когда она допустима. Например, $\lg\sin 5°24'20''$ находим, прибавляя к табличному значению $\lg\sin 5°24' = \bar{2},9736$ поправку 5, найденную из пропорции $x : 14 = 20 : 60$, и получаем $\lg\sin 5°24'20'' = \bar{2},9741$; к этому результату следует отнестись с полным доверием, так как табличные разности на этом участке таблицы почти постоянны (14—13—13). Действительно, по справке в более подробной таблице находим $\lg\sin 5°24'20'' = \bar{2},9740732$. Если же линейная интерполяция не допустима, применяем приближённые формулы, рассмотренные в § 24.

В заключение настоящего параграфа коснёмся ещё вопроса о том, какими тригонометрическими таблицами, натуральными или логарифмическими, лучше пользоваться в школе. Здесь следует руководиться общим принципом рационализации вычислительной работы: надо применять в каждом отдельном случае те вспомогательные средства вычисления, доступные вычислителю, какие максимально облегчают выкладки, обеспечивая требуемую точность. В старших классах средней школы обычно отдают предпочтение логарифмо-тригонометрическим таблицам, но нет никакого сомнения, что во многих случаях натуральные таблицы дают результат быстрее, а иногда и точнее; нередко выгодным бывает совместное использование тех и других Вот, например, вычисление значения $x = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta$ по данным α и β двумя способами, причём для применения логарифмо-тригонометрических таблиц данное выражение приведено к виду $x = \cos(\beta - \alpha)\sec\alpha \operatorname{cosec}\beta$.

1-й способ		2-й способ			
α	32°17′	α	32°17′	$\lg\cos(\beta-\alpha)$	$\overline{1},9950$
β	40°56′	β	40°56′	$\lg\sec\alpha$	0,0729
$\operatorname{tg}\alpha$	0,6318′	$\beta-\alpha$	8°39′	$\lg\operatorname{cosec}\beta$	0,1836
$\operatorname{ctg}\beta$	1,1530′	$\lg\cos\alpha$	$\overline{1},9271$	$\lg x$	0,2515
$x=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta$	1,7848′	$\lg\sin\beta$	$\overline{1},8164$	x	1,734

Логарифмы $\sec\alpha$ и $\operatorname{cosec}\beta$ взяты здесь, как логарифмы $\cos\alpha$ и $\sin\beta$.

Если требуется вычислить $x=\frac{\lg\sin\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\operatorname{tg}\alpha}$, то, разумеется, лучше сперва найти $s=\sqrt{2}+\operatorname{tg}\alpha$, воспользовавшись таблицами квадратных корней и натуральных тангенсов, а затем найти $x=\lg\sin\alpha\cdot\sqrt{2}:s$ посредством логарифмов, чем вводить вспомогательный угол по уравнению $\operatorname{ctg}^2\varphi=\operatorname{tg}\alpha:\sqrt{2}$ и вычислять x по формуле $x=\lg\sin\alpha\sin^2\varphi$, как рекомендует задачник Н. Рыбкина (стр. 95, № 7).

§ 26. Некоторые другие таблицы.

Как уже не раз отмечалось выше, уменье пользоваться различными математическими таблицами очень ценно. Занятия тригонометрией дают немало поводов прибегать к таблицам, отличным от тех 4-значных, какими учащиеся средней школы пользуются постоянно. Однако эти возможности обычно, к сожалению, не используются, и окончившие среднюю школу, встречаясь в вузе или на практике с другими таблицами, затрудняются работать с ними.

Рекомендуется показать учащимся устройство и употребление, кроме 4-значных таблиц, ещё некоторых других, выясняя общие принципы работы с ними, и особенно линейную интерполяцию. Набор таких таблиц, хотя бы в единичных экземплярах, должен быть в математическом кабинете школы, и учащиеся должны иметь возможность при надобности ими пользоваться. Отметим некоторые таблицы, заслуживающие особого внимания.

Петерс И., Шестизначные таблицы тригонометрических функций, ГТТИ, 1932. Содержат в основной своей части значения всех 6 тригонометрических функций (натуральные, а не логарифмы!) для дуг от 0° до 90° через 10″, вычисленные с 6 десятичными знаками (тангенсы дуг, превышающих 60°, с 6 значащими цифрами). Для дуг от 0° до 2° даны значения $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$ через 1″, являющиеся одновременно значениями $\operatorname{tg}\alpha$ и $\sec\alpha$ для дуг от 88° до 90°. Для облегчения линейной интерполяции, возможной почти всюду, даны табличные разности.

Пржевальский В., Пятизначные таблицы логарифмов, Учпедгиз. Этот сборник таблиц имел в России самое широкое распространение в конце XIX и в начале XX в., переиздавался несколько раз и для советской средней школы. Содержит пятизначные логарифмы 4 тригонометрических функций для дуг через 1′. Указаны табличные разности d, даны таблички P. P. (Partes Proportionales), т. е. значения $0,1d$, $0,2d$, $0,3d$,..., $0,9d$, существенно облегчающие линейную интерполяцию.

Глазенап С. П., Пятизначные таблицы логарифмов, изд. 7-е, 1932, издательство АН СССР.

Даны логарифмы всех 6 тригонометрических функций через 1′, указаны d и P.P. В несколько переработанном виде таблицы эти переизданы в 1946 и 1953 гг. Военным издательством Министерства вооружённых сил Союза ССР, причём добавлены 4-значные таблицы логарифмов тригонометрических функций углов, выраженных в делениях угломера через 0-01 от 0-00 до 7-50.

Вега Георг, Логарифмически-тригонометрическое руководство.

В дореволюционное время, особенно в XIX в., имел большое распространение в России. Первое советское издание выпущено в 1932 г. Горным издательством НКТП. Содержит 7-значные логарифмы 4 тригонометрических функций для дуг через 10″, даёт табличные разности и P. P. Для малых дуг (до 5°) $\lg\sin\alpha$ и $\lg\operatorname{tg}\alpha$ даны через 1″.

Б. И. Сегал и К. А. Семендяев, Пятизначные математические таблицы, изд. Академии наук СССР, 1950. Обширный сборник, содержащий значения тригонометрических функций по аргументу в радианах, а также ряд других элементарных и неэлементарных функций.

Не добиваясь знакомства со многими таблицами, необходимо обеспечить уменье учащихся самостоятельно разобраться в устройстве и употреблении каждой такой таблицы, пользуясь указаниями, в ней приведёнными. Особое внимание надо обратить, на возможность линейной интерполяции и вспомогательные средства, её облегчающие.

§ 27. Графики тригонометрических функций.

При изучении любой функции одного аргумента, как мы имели случай не раз отмечать, большое значение имеет построение её графика в прямоугольных координатах, дающего наглядное изображение всего хода её изменения. Старые учебники тригонометрии, сводя изучение тригонометрии к решению треугольников, вопроса о графиках тригонометрических функций вовсе не ставили. Большинство новых учебников это делает, но не связывает построения графиков с другими разделами, не использует их. Так, в учебнике Н. Рыбкина графикам посвящены две с половиной страницы, но никаких их применений в дальнейшем изложении нет. Лучше обстоит дело в книге Берманта и Люстерника; здесь графики используются при рассмотрении вопроса об обратных тригонометрических функциях и о гармонических колебаниях. Графики тригонометрических функций основательно разбираются в учебнике Пиотровского.

Видя в тригонометрии прежде всего учение о тригонометрических функциях, мы не можем обойти вопроса об их графиках. Однако нельзя не считаться с тем, что при слишком раннем введении графиков в головах учащихся будут одновременно два геометрических образа (тригонометрический круг и графики), преследующих одну и ту же цель наглядного изображения изменения тригонометрических функций, и прочность усвоения их обоих пострадает. С построеним графиков лучше не спешить, откладывая его до того времени, когда будет рассмотрен вопрос о таблицах.

С идеей наглядного изображения всякой функции одного аргумента посредством прямоугольных координат учащиеся уже знакомы из курса алгебры, и вопрос о построении графиков трёх новых функций естественно поднимается после ознакомления с их таблицами. Как и всегда, начинать построение приходится с выбора масштаба. Обычно по оси X в произвольном масштабе откладывают значения дуги в градусах, по оси Y берут произвольный же отрезок за 1. Отвлекаясь от толкования аргумента как дуги или угла, лучше брать аргумент в радианной мере и пользоваться одним и тем же масштабом для обеих осей (хотя при решении отдельных задач выгоднее бывает и не придерживаться этого правила). При разных масштабах некоторые заключения о синусоиде, тангенсоиде и других кривых, устанавливаемые в курсе математического анализа, потребуют специальных оговорок (например, о наклоне касательной к оси X, о площади криволинейной трапеции, о радиусе круга кривизны и др.). Студент вуза, узнав на занятиях анализом, что синусоида $y = \sin x$ и тангенсоида $y = \operatorname{tg} x$ пересекают ось X под углом в 45°, бывает весьма смущён; посмотрев на изображения этих кривых в учебнике Н. Рыбкина на стр. 41 и 42. Брать разные масштабы по осям X и Y нередко приходится из-за практических соображений, но это уже осложнение, оправдываемое в каждом отдельном случае особыми обстоятельствами, и начинать с него не следует. К тому же постоянное откладывание по оси X градусов укрепляет у учащихся неверное представление о тригонометрических функциях как функциях только угла или дуги. При построении графиков особенно удобно пользоваться таблицей, дающей значения тригонометрических функций по аргументу, выраженному в радианной мере, например, таблицей, приведённой на стр. 460—461.

Итак, имеем следующие установки:

1) при изучении тригонометрических функций, как и всяких других функций одного аргумента, наряду с их определениями, их свойствами и таблицами их значений, надо рассматривать и их графики в прямоугольной системе координат;

2) эти графики строятся прежде всего для значений аргумента в радианной мере при одинаковых масштабах по обеим осям, в дальнейшем отступления допускаются только по мере действительной надобности;

3) эти графики строятся только после ознакомления с таблицами тригонометрических функций;

4) при дальнейшей работе эти графики должны быть использованы (при изучении обратных тригонометрических функций, при решении тригонометрических уравнений, для построения графиков других, более сложных функций, при изучении гармонического колебательного движения и т. д.);

5) желателен показ стенных таблиц с хорошо исполненными графиками и примерное построение графика на доске учителем, но главное—вычерчивание графиков каждым учащимся у себя в тетради на клетчатой тетрадной или лучше на миллиметровой бумаге.

Уже при первом знакомстве с графиками тригонометрических функций можно остановиться на двух их применениях. Во-первых, при линейной интерполяции происходит не что иное, как замена дуги графика функции на рассматриваемом интервале её хордой; выяснив это, учащиеся лучше поймут три источника погрешностей значений, доставляемых линейной интерполяцией: неточность табличных значений функции, округление поправки до единиц разряда последней цифры, замена дуги хордой. Один лишь взгляд на график синуса говорит, что эта замена всегда уменьшает истинное значение синуса дуги I четверти (в случае тангенса, наоборот, всегда увеличивает). Во-вторых, желательно рассмотреть график функции, определённой при $0 \leqslant x \leqslant 60°$ формулой $y = x : 60$, а при $60° \leqslant x \leqslant 90°$ формулой $y = 1$ (см. выше, стр. 447), Таблица значений sin x, cos x, tg x по аргументу в радианах.

x	sin x	d	cos x	d	tg x	d
0,0	0,000	100	1,000	—5	0,000	100
0,1	0,100	99	0,995	—15	0,100	103
0,2	0,199	97	0,980	—25	0,203	106
0,3	0,296	93	0,955	—34	0,309	114
0,4	0,389	90	0,921	—43	0,423	123
0,5	0,479	86	0,878	—53	0,546	138
0,6	0,565	79	0,825	—60	0,684	158
0,7	0,644	73	0,765	—68	0,842	188
0,8	0,717	66	0,697	—75	1,030	230
0,9	0,783	58	0,622	—82	1,260	297
1,0	0,841	50	0,540	—86	1,557	308
1,1	0,891	43	0,454	—92	1,965	
1,2	0,932	30	0,362	—94	2,57	
1,3	0,964	19	0,268	—98	3,60	
1,4	0,985	8	0,170	—99	5,80	
1,5	0,997	3	0,071	—100	14,1	
1,6	1,000	—8	0,029	—100	—34,2	
1,7	0,992	—18	—0,129	—98	—7,70	
1,8	0,974	—28	—0,227	—96	—4,28	
1,9	0,946	—37	—0,127	—93	—2,93	
2,0	0,909	—46	—0,416	—89	—2,19	
2,1	0,863	—55	—0,505	—83	—1,710	336
2,2	0,808	—62	—0,588	—78	—1,734	255
2,3	0,746	—71	—0,666	—71	—1,119	203
2,4	0,675	—77	—0,737	—64	—0,916	169
2,5	0,598	—82	—0,801	—56	—0,747	145
2,6	0,516	—89	—0,857	—47	—0,602	129
2,7	0,427	—92	—0,904	—38	—0,473	117
2,8	0,335	—96	—0,942	—29	—0,356	110
2,9	0,239	—98	—0,971	—19	—0,246	103
3,0	0,141	—99	—0,990	—9	—0,143	101
3,1	0,042	—100	—0,999	+1	—0,042	100

x	$\sin x$	d	$\cos x$	d	$\operatorname{tg} x$	d
3,2	— 0,058	— 100	— 0,998	11	+ 0,058	102
3,3	— 0,158	— 98	— 0,987	20	0,160	104
3,4	— 0,256	— 95	— 0,967	31	0,264	111
3,5	— 0,351	— 92	— 0,936	39	0,375	118
3,6	— 0,443	— 87	— 0,897	49	0,493	132
3,7	— 0,530	— 82	— 0,848	57	0,625	149
3,8	— 0,612	— 76	— 0,791	65	0,774	173
3,9	— 0,688	— 69	— 0,726	74	0,947	211
4,0	— 0,757	— 61	— 0,654	79	1,158	266
4,1	— 0,818	— 54	— 0,575	85	1,424	354
4,2	— 0,872	— 44	— 0,490	89	1,778	
4,3	— 0,916	— 36	— 0,401	94	2,29	
4,4	— 0,952	— 26	— 0,307	96	3,10	
4,5	— 0,978	— 16	— 0,211	99	4,64	
4,6	— 0,994	— 6	— 0,112	100	8,86	
4,7	— 0,000	+ 4	— 0,012	100	+ 80,7	
4,8	— 0,996	14	+ 0,888	99	— 11,4	
4,9	— 0,982	23	0,187	97	— 5,27	
5,0	— 0,959	33	0,284	94	— 3,38	
5,1	— 0,926	43	0,378	91	— 2,44	
5,2	— 0,883	51	0,469	85	— 1,886	385
5,3	— 0,832	59	0,554	81	— 1,501	283
5,4	— 0,773	67	0,635	74	— 1,218	222
5,5	— 0,706	75	0,709	67	— 0,996	182
5,6	— 0,631	80	0,776	59	— 0,814	154
5,7	— 0,551	86	0,835	51	— 0,660	135
5,8	— 0,165	91	0,886	41	— 0,525	122
5,9	— 0,374	95	0,927	33	— 0,403	112
6,0	— 0,279	97	0,960	23	— 0,291	106
6,1	— 0,182	99	0,983	13	— 0,185	102
6,2	— 0,083	100	0,996	4	— 0,083	100
6,3	+ 0,017		1,000		+ 0,017	

и сравнить его с графиком дуги синусоиды $y = \sin x$, вычерченной в том же масштабе и на том же чертеже. Здесь пользование градусной, а не радианной мерой вполне обосновано, но масштабы всё же лучше брать такие, чтобы дуга синусоиды получалась без заметного искажения.

При построении графиков не следует ограничиваться только 6 основными тригонометрическими функциями (или даже тремя из них, как это сделано в учебнике Н. Рыбкина). Весьма полезный вид упражнения, вполне доступный учащимся IX класса и всегда живо их интересующий, представляет собой построение графиков других функций, получаемых комбинированием основных тригонометрических.

Глава VI

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 28. Общие выражения для значений аргумента, соответствующих данным значениям тригонометрических функций.

Возвращаемся к задаче разыскания всех дуг, у которых некоторая тригонометрическая функция имеет данное значение. Выше мы видели, как можно графическим способом, основываясь только на определениях тригонометрических функций, найти все эти дуги. В дальнейшем мы научились, пользуясь таблицами, решать обратный вопрос, т. е. находить дугу I четверти по данному значению её тригонометрической функции или его логарифма. Теперь можно довести решение этой задачи до конца, найдя общие выражения для значений аргумента, соответствующих данным значениям каждой тригонометрической функции. Пусть дано уравнение $\sin x = a$, где $|a| \leqslant 1$ (при $|a| > 1$ оно решений не имеет). Сперва находим наименьшее по абсолютной величине значение x_0 аргумента x, для которого синус равен a: если $0 < a < 1$, то это делается прямо по таблицам, $0 < x_0 < 0,5\,\pi$; если же $-1 < a < 0$, то предварительно пишем $\sin(-x) = -a$ и по таблицам же находим $-x_0$, так что теперь $-0,5\,\pi < x_0 < 0$; если $a = 0$, или $+1$, или -1, то x_0 соответственно равен 0, или $0,5\pi$, или $-0,5\,\pi$. Затем, основываясь на определении синуса, находим все дуги с таким же синусом, как дуга x_0, т. е. все дуги, оканчивающиеся в точках M_1 и M_2. Это, во-первых, дуги, выражаемые формулой $x = x_0 + 2\pi n$ (1), где n — любое целое число (положительное, или отрицательное, или нуль), и, во-вторых, дуги, выражаемые формулой $x = \pi - x_0 + 2\pi n$, или, что то же, формулой $x = -x_0 + (2n+1)\pi$ (2). Первая формула выражает все дуги, имеющие общее начало A и общий конец M_1 с дугой AM_1, вторая — все дуги с тем же началом, оканчивающиеся в точке M_2, которая получается в пересечении окружности и прямой, проведённой через M_1 параллельно оси X. Важно понять, что этими двумя формулами *исчерпывается* всё бесконечное множество значений аргумента, удовлетворяющих уравнению $\sin x = a$. Легко видеть, что обе формулы сохраняют силу и тогда, когда x_0 не наименьшая по абсолютной величине, а какая угодно дуга, имеющая данный синус. Весьма полезно в связи с этим обеспечить усвоение их словесной формулировки примерно в таком виде: *для того чтобы две дуги имели один и тот же синус, необходимо и достаточно, чтобы либо их разность равнялась чётному числу полуокружностей, либо их сумма — нечётному числу полуокружностей.*

Формулы (1) и (2) можно объединить в одну:

$$x = n\pi + (-1)^n \cdot x_0, \tag{3}$$

где n — любое целое. Эта новая формула даётся учащимся труднее, чем первые две, и не следует торопиться с её введением. Важно обеспечить полное усвоение формул (1) и (2) и уяснить что формула (3) есть просто средство более короткой записи. Между тем начинающие учителя иногда видят в этой формуле (3) всю суть дела, не уделяют достаточного внимания формулам (1) и (2) и не подчёркивают второстепенный, вспомогательный характер формулы (3), без которой вообще можно обойтись.

Рассматривая аналогичным путём уравнение $\cos x = a, |a| \leq 1$, приходим к двум формулам: $x = x_0 + 2\,\pi n$ (4) и $x = -x_0 + 2\,\pi n$ (5), где n опять любое целое, а x_0 заключается между 0 и π ($0 \leq x_0 \leq \leq 0{,}5\,\pi$ при $a \leq 0{,}05\,\pi \leq x_0 < \pi$ при $a \leq 0$). Следует выяснить, почему здесь нельзя брать x_0 на сегменте $(-0{,}5\pi, +0{,}5\pi)$, как для уравнения $\sin x = a$. Замечая, что формулы (4) и (5) сохраняют силу для любого (а не только наименьшего положительного значения x_0, удовлетворяющего уравнению $\cos x = a$, устанавливаем примерно такую словесную их формулировку: *для того чтобы две дуги имели один и тот же косинус, необходимо и достаточно, чтобы либо их сумма, либо их разность равнялась чётному числу полуокружностей.*

Формулы (4) и (5) легко объединяются в одну:

$$x = 2\,\pi n \pm x_0. \tag{6}$$

Уравнение $\operatorname{tg} x = a\ -\infty < x_0 < +\infty$ имеет общее решение, выражаемое формулами $x = x_0 + 2\pi n$ (7) и $x = x_0 + \pi + 2\pi n$ (8), которые тоже легко объединяются в одну:

$$x = x_0 + \pi n. \tag{9}$$

При выводе этих формул можно предполагать, что

$$-0{,}5\pi < x_0 < +0{,}5\pi,$$

но потом это ограничение снимается и устанавливается теорема: *для того чтобы две дуги имели один и тот же тангенс, необходимо и достаточно, чтобы их разность равнялась целому числу полуокружностей.*

В учебнике Н. Рыбкина рассмотренному вопросу уделено недостаточно внимания (§ 26 и § 47); тем более необходимо после изучения трёх формулированных выше теорем перерешать самым основательным образом (с чертежами и формулами) задачи №№ 17—22 из § 2 задачника Н. Рыбкина (к сожалению, не для всех этих задач приведены ответы). Число этих задач легко увеличить, составляя аналогичные новые. Подчёркиваем особую важность усвоения материала настоящего параграфа: это ключ к преодолению многих трудностей, связанных с изучением обратных тригонометрических функций. В частности, очень полезно получение общих решений таких уравнений, как $\sin x = 0$, $\sin x = 1$, $\sin x = -1$, $\cos x = 0$ и т. д., независимо от общих формул.

Уравнений $\operatorname{ctg} x = a$, $\sec x = a$, $\operatorname{cosec} x = a$ можно не рассматривать, так как они равносильны уравнениям $\operatorname{tg} x = 1 : a$ и т. д.

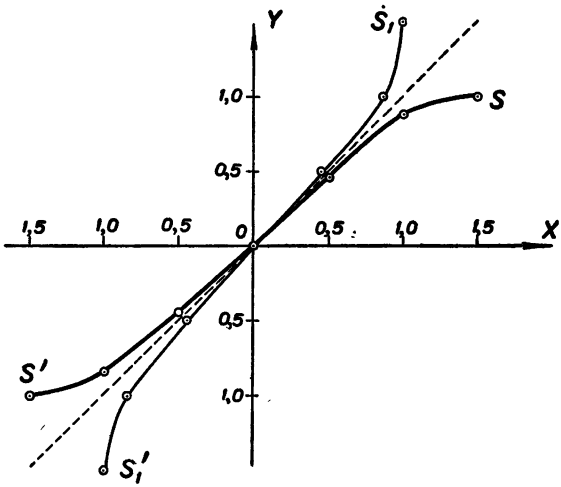
Когда общие выражения значений аргумента, соответствующих данным значениям тригонометрических функций, прочно усвоены, можно перейти к двум вопросам программы, дающимся учащимся труднее других: к вопросу об обратных тригонометрических функциях и о тригонометрических уравнениях. Их рассмотрением естественно завершается гониометрия, а дальше начинаются геометрические и прочие приложения. Но действующей программой предусмотрен другой порядок: сперва решение треугольников, потом два указанных вопроса гониометрии. Никаких неудобств отсюда не проистекает, а обеспечивается большее внимание решению треугольников. Не является существенным также и вопрос о том, изучать ли сперва обратные тригонометрические функции, а потом тригонометрические уравнения, или наоборот.

§ 29. Обратные тригонометрические функции. Их многозначность и главные значения. Графики обратных тригонометрических функций.

Знакомство с идеей обращения любой функции одного аргумента и с фактом симметричного относительно биссектрисы координатного угла XOY расположения графиков прямой и обратной функций учащиеся получают ещё в курсе алгебры (см. выше часть 3-ю), и в курсе тригонометрии требуется лишь повторение этих общих соображений и их применение к функциям $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$. Взяв функцию $y = \sin x$ и ограничиваясь сперва лишь значениями x на сегменте $[-0{,}5\pi, +0{,}5\pi]$, используем взаимно однозначное соответствие между элементами множества M значений x и множества N значений y (M — множество всех действительных чисел от $-0{,}5\pi$ до $+0{,}5\pi$, N — множество всех действительных чисел от -1 до $+1$); отображая обратно множество N на множество M, приходим к новой функции $x = \arcsin y$ (читается: x есть аркус синус y, короче арксинус y; по-русски — x есть дуга, синус которой равен y). Графиком этой обратной функции является та же дуга $S'OS$ (фиг. 62), что и для «прямой» функции $y = \sin x$, разница лишь в том, что аргумент теперь обозначен буквой y

и откладывается по оси Y, а функция — буквой x и откладывается по оси X. Переходя к обычному обозначению аргумента через x и функции через y, получаем новую запись $y = \arcsin x$, и оси X и Y меняются местами, а графиком этой обратной функции является уже дуга $S_1'OS'$, симметричная дуге $S'OS$ относительно биссектрисы угла XOY.

Очень важно твёрдо усвоить мысль о полной равносильности записей $y = \sin x$ и $x = \arcsin y$, а также $y = \arcsin x$ и $x = \sin y$. Разыскание $\arcsin x$ по данному значению x есть не что иное, как решение уравнения $x = \sin y$ относительно y по данному x, т. е.



Фиг. 62.

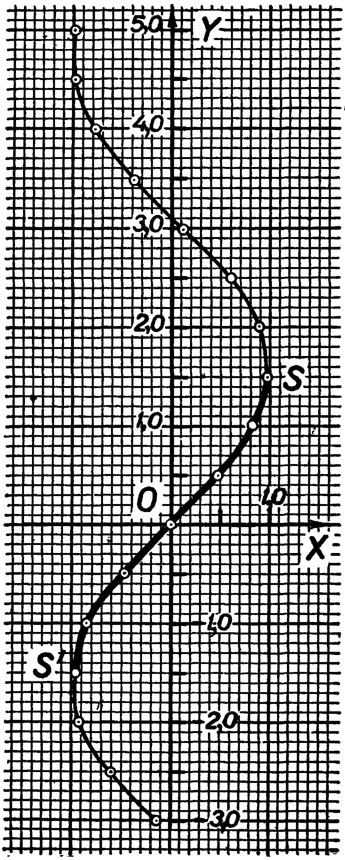
та самая задача, какой мы занимались в предшествующем параграфе, но с ограничением искомых значений дуги y сегментом $[-0{,}5\pi, +0{,}5\pi]$.

Существенно новое положение возникает, если по данному значению $y = \sin x$ мы ищем *все* значения аргумента x, уже не ограничиваясь сегментом $[-0{,}5\pi, +0{,}5\pi]$. Теперь множество M значений x есть уже интервал $(-\infty, +\infty)$, и функция $y = \sin x$ устанавливает зависимость между его элементами и элементами множества N (сегмент от -1 до $+1$) однозначно, но не взаимно однозначно: хотя каждому значению дуги x соответствует единственное вполне определённое значение y, но каждому значению y соответствует уже бесконечное множество значений x, определяемых по формулам (1) и (2) или (3) предыдущего параграфа. Обращение функции $y = \sin x$ приводит в настоящем случае к многозначной функции, обозначаемой символом $x = \operatorname{Arc}\sin y$ или $y = \operatorname{Arc}\sin x$. Ранее рассмотренная однозначная функция $y = \arcsin x$ называется *главным значением* многозначной функции

$y = \text{Arc}\sin x$. Связь между этой последней функцией и её главным значением выражается, согласно формуле (3) § 28, следующим образом:

$$\text{Arc}\sin x = \pi n + (-1)^n \arcsin x, \; n \text{ — любое целое число}, \qquad (1)$$

График этой многозначной функции изображён на фигуре 63. Это та же самая синусоида, которая служила графиком функции $y = \sin x$, но имеющая осью не ось X, а ось Y. График ясно показывает многозначность функции $\text{Arc}\sin x$ и однозначность главного её значения $\arcsin x$ (график этой последней однозначной функции есть дуга $S'OS$, вычерченная утолщённым штрихом): всякая прямая, проведённая параллельно оси Y на расстоянии, не превосходящем 1 от неё, пересекает дугу $S'OS$ в одной лишь точке, а всю синусоиду — в бесконечном множестве точек.



Фиг. 63.

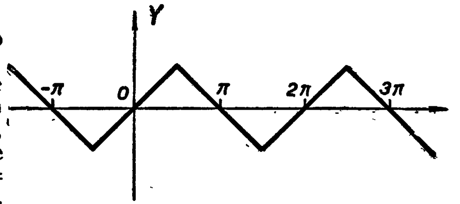
Аналогичные рассмотрения проводятся и для функций $y = \cos x$ и $y = \text{tg}\, x$: сначала производится обращение на сегменте $[0; \pi]$ для косинуса и в интервале $(-0{,}5\pi, +0{,}5\pi)$ для тангенса; получаются главные значения $y = \arccos x$ и $y = \text{arc tg}\, x$, представляющие собой однозначные функции; затем в интервале $(-\infty, +\infty)$, что даёт многозначные обратные функции $\text{Arc}\cos x = 2\pi n \pm \arccos x$, $\text{Arc tg}\, x = \pi n + \text{arc tg}\, x$; после этого вычерчиваются графики (опять симметризация относительно биссектрисы угла XOY). Подобно $\text{Arc tg}\, x$, функция $\text{Arc ctg}\, x$ выражается через своё главное значение формулой $\text{Arc ctg}\, x = \text{arc ctg}\, x + \pi n$, но с целью устранения разрыва непрерывности при $x = 0$ главное значение $\text{arc ctg}\, x$ берётся в интервале $(0; \pi)$.

Вот вся теоретическая часть вопроса об обратных тригонометрических функциях в том объёме, в каком он рассматривается в средней школе. Всё дальнейшее сводится к задачам, решаемым без особых затруднений, если эта теоретическая часть прочно и сознательно усвоена. Рассмотрим некоторые наиболее типичные задачи.

§ 30. Некоторые задачи на обратные тригонометрические функции.

I. Зная $\arcsin x = u$, найти $\arcsin(-x) = v$.

Здесь u и v принадлежат сегменту $[-0{,}5\pi, +0{,}5\pi]$, так как речь идёт только о главных значениях (не $\operatorname{Arc}\sin x$, а $\arcsin x$). Вопрос решается с одного взгляда на график (фиг. 63), если учесть его симметрию относительно начала координат. Полезно, однако, рассмотреть и чисто аналитическое решение вопроса, сводящееся к следующему. Освобождаясь от знака arc, имеем равенства $\sin u = x$, $\sin v = -x$, равносильные данным при дополнительных условиях $-0{,}5\pi \leqq u \leqq +0{,}5\pi$, $-0{,}5\pi \leqq v \leqq +0{,}5\pi$. Вспоминая теорему о двух дугах, имеющих один и тот же синус, заключаем, что либо $v - (-u) = v + u = 2\pi n$, либо $v + (-u) = v - u = (2n + 1)\pi$, где n — любое целое. Но почленное сложение двойных неравенств для u и v даёт двойное неравенство $-\pi \geqq u + v \leqq +\pi$, а почленное сложение равносильных неравенств $-0{,}5\pi \leqq u \leqq +0{,}5\pi$, $-0{,}5\pi \leqq u \leqq +0{,}5\pi$ приводит к неравенству $-\pi \leqq v - u \leqq +\pi$. Поэтому в формуле $v + u = 2\pi n$ n не может иметь другого значения, кроме 0, и, следовательно, $v + u = 0$, $v = -u$. В формуле же $v - u = (2n + 1)\pi$ возможны только значение $n = 0$, когда $v - u = \pi$, $v = 0{,}5\pi$, $u = -0{,}5\pi$, и значение $n = -1$, когда $v - u = -\pi$, $v = 0{,}5\pi$, т. е. опять-таки $v = -u$.



Фиг. 64.

Итак, окончательно имеем: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, т. е. функция $\arcsin x$ нечётная. Повторяем, что это заключение можно было сделать сразу, с одного взгляда на график.

Если вместо главных значений брать многозначные функции $\operatorname{Arc}\sin x$ и $\operatorname{Arc}\sin(-x)$, вопрос значительно осложняется. Вряд ли стоит тратить на него время в средней школе.

II. Зная $\arcsin x = u$, найти $\arccos x = v$.

Решение можно записать в виде $v = \arccos(\sin u)$, но ему можно дать более простой вид. Действительно, освобождаясь от аркусов, имеем $\sin u = x$, $\cos v = x$, откуда $\cos v = \sin u$, $\cos v = \cos(0{,}\pi - u)$. Применяя теорему о дугах, имеющих один и тот же косинус, пишем: $v + 0{,}5\pi - u = 2\pi n$, $v - 0{,}5\pi + u = 2\pi n$ или $v - u = (2n - 0{,}5)\pi$, $v + u = (2n + 0{,}5)\pi$. Выясняя, какие значения n допустимы ввиду условий $-0{,}5\pi \leqq u \leqq 0{,}5\pi$, $0 \leqq v \leqq \pi$, устанавливаем, что возможны только следующие случаи: $v = 0$, $u = 0{,}5\pi$ (1); $v = 0{,}5\pi$, $u = 0$ (2); $v = \pi$, $u = -0{,}5\pi$ (3); $v = 0{,}5\pi - u$ (4).

Соотношение (4), имеющее место для любого u между $-0{,}5\pi$ и $+0{,}5\pi$, заключает в себе соотношения (1), (2), (3), а потому является полным решением поставленной задачи. Его можно написать в виде $\arccos x = 0{,}5\pi - \arcsin x$ или $\arcsin x + \arccos x = 0{,}5\pi$.

Полезно рассмотреть второе решение той же задачи, основанное на тождестве $\sin(0{,}5\pi - v) = \sin u$ и приводящее к тому же результату.

III. Доказать тождество $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x = 0{,}5\pi$.

Здесь x — любое действительное число, $\operatorname{arc\,tg} x = u$ в интервале $(-0{,}5\pi, +0{,}5\pi)$, $\operatorname{arc\,ctg} x = v$ в интервале $(0, \pi)$. Надо доказать, что $u + v = 0{,}5\pi$, т. е. что дуги u и v дополнительны. Освобождаясь от аркусов, имеем $\operatorname{tg} u = x$, $\operatorname{ctg} v = \operatorname{tg}(0{,}5\pi - v) = x$, $\operatorname{tg} u = \operatorname{tg}(0{,}5\pi - v)$. По теореме о дугах, имеющих один и тот же тангенс, имеем: $u - 0{,}5\pi + v = n\pi$, или $u + v = (n + 0{,}5)\pi$. Но главные значения u и v удовлетворяют двойным неравенствам $-0{,}5\pi < u < 0{,}5\pi$, $0 < v < \pi$, $-0{,}5\pi < u + v < 1{,}5\pi$ (здесь строгие неравенства, т. е. знаки равенства исключены в силу разрывов непрерывности $\operatorname{tg} u$ при $u = \pm 0{,}5\pi$ и $\operatorname{ctg} v$ при $v = 0$ и $v = \pi$). Равенство $u + v = (n + 0{,}5)\pi$ возможно только при $n = 0$, и тем самым данное тождество доказано.

IV. Зная, что $\arcsin x = u$, найти $\operatorname{arc\,tg} x = v$.

Здесь u — некоторое число, принадлежащее сегменту $[-0,5\pi, +0,5\pi]$, т. е. удовлетворяющее двойному неравенству $-0,5\pi \leqq u \leqq +0,5\pi$, причём $\sin u = x$. Простая подстановка даёт $v = \operatorname{arc\,tg}(\sin u)$. Как всегда для $\operatorname{arc\,tg} x$, v находится в интервале $(-0,5\pi, +0,5\pi)$, но здесь, кроме того, ещё ограничение: $-1 \leqq \sin u \leqq +1$, $-1 \leqq x \leqq +1$, а потому $-0,25\pi \leqq v \leqq +0,25\pi$: искомое значение $v = \operatorname{arc\,tg}(\sin u)$ находится на сегменте $[-0,25\pi, +0,25\pi]$.

Полезно рассмотреть применение этой общей формулы к частным случаям: например, при $u = 30°$ имеем $x = \sin u = 0,5$, $v = \operatorname{arc\,tg} 0,5 = 26°34'$; при $u = 0,5$ $x = \sin 0,5 = \sin 28°39' = 0,4795 = \operatorname{tg} v$, $v = 25°37'$.

V. Построить график функций $y = \arcsin(\sin x)$.

Переписывая данное уравнение в виде $\sin y = \sin x$, убеждаемся, принимая во внимание условие $-0,5\pi \leqq y \leqq +0,5\pi$, что эта функция y определена в интервале $(-\infty, +\infty)$, однозначна, имеет период 2π, нечётна. Достаточно проследить ход её изменения на сегменте $[0,2\pi]$. Если x растёт от 0 до $0,5\pi$, то соотношение $y + x = (2n+1)\pi$ невозможно, соотношение $y - x = 2n\pi$ выполняется только при $n = 0$, а потому $y = x$, графиком для функции y служит при $0 \leqq x \leqq 0,5\pi$ отрезок биссектрисы координатного угла XOY. Далее, при изменении x от $0,5\pi$ до $1,5\pi$ соотношение $y - x = 2n\pi$ невозможно, а соотношение $y + x = (2n+1)\pi$ выполняется при $n = 0$; следовательно, здесь $y = \pi - x$, графиком для функции y при $0,5\pi \leqq x \leqq 1,5\pi$ служит отрезок прямой, проведённой через точку $(0,5\pi, 0,5\pi)$ параллельно биссектрисе второго координатного угла $X'OY$. Наконец при $1,5\pi \leqq x \leqq 2\pi$ снова возможно лишь соотношение $y - x = 2\pi$, но уже только при $n = -1$, графиком служит отрезок прямой $y = x - 2n\pi$, проведённой через точку $(-1,5\pi; -0,5\pi)$ параллельно биссектрисе угла XOY. Принимая во внимание периодичность функции y, приходим к графику, изображённому на фигуре 64.

Переход от задач на главные значения $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arc\,tg} x$ к задачам на многозначные функции $\operatorname{Arc\,sin} x$, $\operatorname{Arc\,cos} x$, $\operatorname{Arc\,tg} x$ вызывает большие осложнения, и в средней школе лучше ограничиваться только главными значениями. Если преподаватель при наличии благоприятных условий решается давать задачи на многозначные функции, ему необходимо учесть соображения, имеющиеся по вопросу о смысле равенств с многозначными функциями в статье [III, 30б].

§ 31. Трудности, связанные с изучением обратных тригонометрических функций в школе.

Начинающие учителя нередко недостаточно внимательно относятся к усвоению учащимися основных пунктов учения об обратных тригонометрических функциях и, прежде всего, к материалу, изложенному выше в §§ 28—29, торопясь переходить к задачам; конечно, ничего хорошего при этом не получается. Другая ошибка, допускаемая иногда учителями, заключается в попытках развернуть более детальное изучение теории этих функций. Бесспорно, в ней можно найти много интересного и полезного, как показывает, например, содержательная книга [V, 17а]; детальное изучение этой книги усиленно рекомендуется учителю, но вряд ли возможно сделать полноценное изучение этой теории обязательным для всех учащихся X класса. Ныне действующая программа средней школы отводит на изучение обратных тригонометрических функций 14 часов, чего вполне достаточно, чтобы отлично усвоить те небольшие теоретические сведения, какие были указаны выше, и приобрести навыки в решении таких задач, какие приведены в школьном учебнике. Идти дальше, например изучать указанную книгу С. И. Новосёлова, следует лишь при особо благоприятных условиях; лучше всего это делать в порядке индивидуальных заданий для более сильных учащихся.

Нередко учителя отмечают особую трудность этого раздела для учащихся. Конечно, для этого есть основания, прежде всего из-за многозначности обратных тригонометрических функций трудности существенно уменьшаются, если ограничиваться только однозначными главными значениями. Однако успешное изучение всего этого раздела вполне возможно при выполнении трёх условий: 1) если учащиеся твёрдо усвоили предшествующие разделы курса тригонометрии (не зная, например, как следует определений основных тригонометрических функций синуса и др., учащийся не может овладеть обратными функциями $\arcsin x$ и др.); 2) если они хорошо поняли идею обращения функций (если они, например, ясно понимают, что обратная для линейной функции $y = ax + b$ есть линейная же $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$, обратная для $y = ax^2$ есть $y = \pm\sqrt{x : a}$, обратная для показательной есть логарифмическая; важная идея обращения функций должна быть усвоена сперва на более простых примерах); 3) если сам учитель хорошо разбирается в этих вопросах.

Отметим хорошее, вполне подходящее для средней школы изложение вопроса об обратных тригонометрических функциях в учебнике [V, 2]. Авторы не предполагают у учащихся никаких сведений об обращении функции и знакомят с ним, рассматривая пример из ранее пройденного. Понятие об $\operatorname{arc\,tg} x$ удачно иллюстрируется вычислением значения $4 \operatorname{arc\,tg} 0{,}2 - \operatorname{arc\,tg}(1 : 239) = 0{,}25\pi$.

§ 32. Тригонометрические уравнения. Их классификация и методы решения.

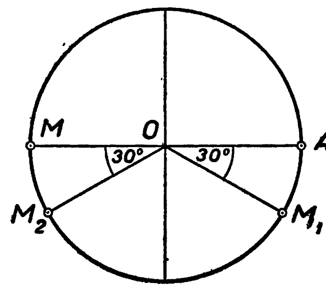
Уравнение называется *тригонометрическим*, если оно содержит какую-либо тригонометрическую функцию от неизвестного. Таковы, например, уравнения $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, формальным решением которых являются обратные тригонометрические функции $x = \operatorname{Arc\,sin} a$ и др. от аргумента a, значение которого предполагается данным. Это решение называют «формальным» в том смысле, что, являясь решением по форме, а именно, выражая неизвестное x в зависимости от данного a, оно ничего не даёт по существу, пока не проведено изучение обратных тригонометрических функций; именно это последнее и является решением данного уравнения по существу.

Указанные выше три уравнения вместе с уравнениями $\operatorname{ctg} x = a$, $\sec x = a$, $\operatorname{cosec} x = a$ исчерпывают собой так называемые «основные тригонометрические уравнения». Кроме них существует ещё бесконечное множество других тригонометрических уравнений, распадающихся на два класса. В первый входят те, которые содержат неизвестное только под знаками тригонометрических функций (одной или нескольких), как, например, уравнение $\cos 2x = 1 + \sin x$, а во второй те, которые, имея неизвестное под знаками тригонометрических функций, имеют их также и не под их знаками, как, например, уравнение $x + a \sin x = b$. Среди уравнений первого класса наибольшее значение имеют те, в которых над тригонометрическими функциями от неизвестных производятся только алгебраические операции, а именно: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень с данным натуральным показателем, извлечение корня с данным натуральным показателем. Все они надлежащими заменами приводятся к алгебраическим и основным тригонометрическим: например, уравнение $\cos 2x = 1 + \sin x$ после подстановки $y = \sin x$ приводится к алгебраическому $2y^2 + y = 0$, имеющему корни $y_1 = 0$, $y_2 = -0,5$, и двум основным тригонометрическим: $\sin x = 0$, $\sin x = -0,5$, исчерпывающее решение которых даётся формулами $x = n\pi$, $x = n\pi + (-1)^n \times \left(-\frac{1}{6}\pi\right)$, где n — любое целое число. Уравнения II класса называются «трансцендентными»; можно доказать, что, подобно рассмотренным в 3-й части показательным и логарифмическим уравнениям, они не приводятся к алгебраическим.

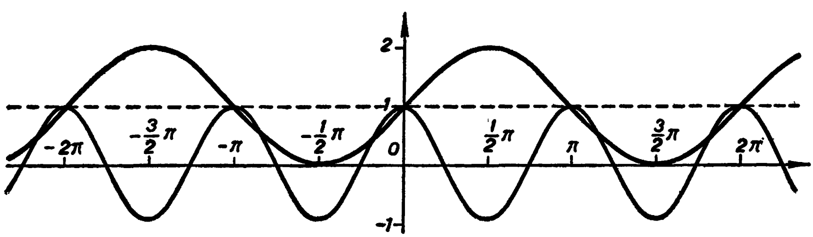
Вопрос о решении основных тригонометрических уравнений уже исчерпан при изучении обратных тригонометрических функций в §§ 28—31 настоящей главы. Трансцендентными уравнениями мы займёмся ниже (§ 34). В средней школе под тригонометрическими уравнениями обычно разумеют только тригонометрические уравнения, сводящиеся к алгебраическим и основным тригонометрическим, только ими здесь и занимаются. Общий приём решения таких уравнений состоит в выражении всех тригонометрических функций, входящих в уравнение и зависящих от неизвестной, через какую-либо одну тригонометрическую функцию, в последующей замене этой функции новой буквой и в решении относительно неё полученного алгебраического уравнения, после чего останется только решить одно или более основных тригонометрических уравнений. Это приведение к алгебраическим и основным тригонометрическим уравнениям можно делать разными способами, и разыскание удобнейшего способа представляет собой хорошую тренировку в тождественных преобразованиях тригонометрических выражений. Кроме того, исчерпывающее решение тригонометрических уравнений требует большого внимания к вопросам равносильности уравнений; не всегда можно избежать преобразований, нарушающих равносильность, и необходимо всё время считаться с возможностью появления посторонних корней и не допускать потери корней. В этом отношении решение тригонометрических уравнений представляет большую ценность, являясь важным средством углублённого повторения вопроса о равносильности уравнений из курса алгебры.

Подчёркиваем важность того обстоятельства, что в конечном счёте все обычно решаемые в школе тригонометрические уравнения сводятся к алгебраическим и основным тригонометрическим. Прежде чем браться за раздел «Тригонометрические уравнения», надо обеспечить полноценное решение основных тригонометрических уравнений, что делается в естественной связи с вопросом об обратных тригонометрических функциях.

Решение тригонометрических уравнений в школе обычно ведётся исключительно *аналитическим* методом. Но очень важно и как средство избегать многих ошибок благодаря большей наглядности, и как средство получать в некоторых случаях решения, недоступные для аналитического метода (в том объёме, в каком им владеют школьники), применение *графического* метода с использованием обоих усвоенных учащимися способов геометрического представления тригонометрических функций, т. е. и тригонометрического круга, и графиков функций в прямоугольных координатах. Во всяком случае полезно взять за правило завершать решение каждого тригонометрического уравнения, отмечая те точки тригонометрического круга, в которых оканчиваются искомые дуги, причём каждая точка круга указывает на бесчисленное множество дуг, оканчивающихся в ней. Так, всё бесконечное множество дуг, удов-



Фиг. 65.



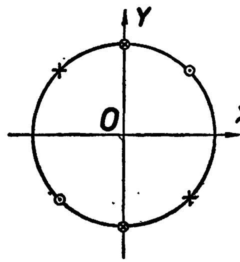
Фиг. 66.

летворяющих уравнению $\cos 2x = 1 + \sin x$, можно изобразить четырьмя точками тригонометрического круга, указанными на фигуре 65 маленькими кружками. Здесь мы имеем только удобное наглядное изображение готовых, полученных каким бы то ни было способом решений тригонометрического уравнения. Очень полезный и интересный способ получения решений дают графики функций. Так, вычерчивая на одном чертеже графики функций $y = \cos 2x$ и $y = 1 + \sin x$ (см. фигуру 66), мы получаем графическое решение уравнения $\cos 2x = 1 + \sin x$; корнями этого уравнения являются те и только те числа, которые выражают абсциссы общих точек обеих кривых:

Действующая программа по математике средней школы отводит на тригонометрические уравнения довольно много времени — 16 часов. Рационально используя это время, можно добиться многого и в смысле усвоения способов решения этих уравнений, и для повторения и укрепления знания основ тригонометрии вообще.

Учебник Н. Рыбкина даёт достаточно указаний относительно решения тригонометрических уравнений, сводимых к алгебраическим и основным тригонометрическим (в §§ 70 — 72), но не подчёркивает их связи с основными тригонометрическими уравнениями, не прибегает ни к геометрическому изображению решений, ни к графическому методу их получения, вовсе игнорирует трансцендентные уравнения. Относительно сделанного в учебнике противопоставления тригонометрических уравнений тригонометрическим тождествам, которые определяются как равенства, имеющие место при всех значениях аргумента, надо заметить, что есть и другая точка зрения, рассматривающая буквенные тождества как особый вид уравнений; например, равенство $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ есть уравнение, решением которого служит любое значение аргумента x; равенство $\sin x = \operatorname{tg} x \cdot \cos x$ есть уравнение, решением которого является любое число, кроме чисел вида $0{,}5\pi(2n + 1)$, где n — целое. По точному смыслу определения, данного в учебнике, это последнее равенство нельзя назвать тождеством, так как оно верно не при всех значениях аргумента.

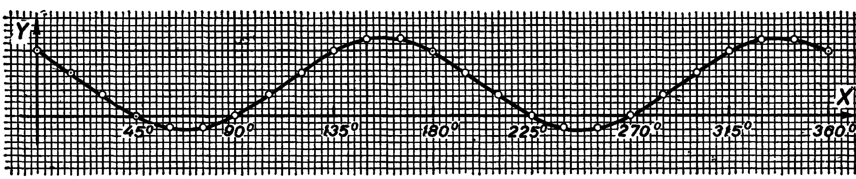
Задачник Н. Рыбкина содержит довольно большое количество тригонометрических уравнений (№№ 1—95 § 14), но, к сожалению, не даёт ни одной задачи на их составление, не даёт также ни одного трансцендентного тригонометрического уравнения. К сделанным в тексте указаниям и к ответам, помещённым в конце книги, необходимо относиться с осторожностью: они не всегда безупречны. Возьмём, например, задачу № 64 § 14. Здесь требуется решить уравнение $\frac{\cos 2x}{1 + \operatorname{tg} x} = 0$, т. е. найти те значения аргумента функции $f(x) = \cos 2x : (1 + \operatorname{tg} x)$, при которых она получает значение нуль. Замечая, что $f(x + \pi) = f(x)$, устанавливаем прежде всего, что достаточно рассматривать только значения x от 0 до π: данная функция — периодическая, период равен π. Далее убеждаемся, что эта функция определена для всех значений x от 0 до π, за исключением $x = 0{,}5\pi$, когда не существует $\operatorname{tg} x$, а также $x = 0{,}75\pi$, когда делитель $1 + \operatorname{tg} x$ обращается в нуль. Но $\underset{x \to 0{,}5\pi}{\text{пред.}} f(x) = 0$, так как при $x \to 0{,}5\pi$ числитель стремится к -1, а знаменатель неограниченно возрастает по абсолютной величине: $\underset{x = 0{,}75\pi}{\text{пред.}} f(x) = \text{пред.} (\cos x - \sin x) \cdot \cos x = 1$. Таким образом, здесь возможно то доопределение данной функции, о котором была речь выше. Полагая в порядке такого доопределения, что $f(0{,}5\pi) = 0$, а $f(0{,}75\pi) = 1$, имеем теперь функцию, определённую на всём интервале от 0 до π; попутно мы нашли один из искомых корней, а именно $x = 0{,}5\ \pi$. Упрощая выражение для $f(x)$, находим, что эта функция тождественно равна функции $(\cos x - \sin x) \cdot \cos x$, причём значения аргумента $0{,}5\ \pi$ и $0{,}75\ \pi$ в силу сделанного доопределения не представляют исключений. Таким образом, дело сводится к решению уравнений $\cos x - \sin x = 0$ и $\cos x = 0$, дающих новый корень $x_1 = 0{,}25\ \pi$ и ещё раз уже найденный корень $x_2 = 0{,}5\ \pi$. Итак, в интервале от 0 до π данное уравнение имеет два корня: $x_1 = 0{,}25\ \pi$ и $x_2 = 0{,}5\ \pi$, в интервале от 0 до $2\ \pi$ четыре корня: $0{,}25\ \pi$, $0{,}5\ \pi$, $1{,}25\ \pi$, $1{,}5\ \pi$, вообще (в множестве действительных чисел) бесконечное множество корней, выражаемых формулами $x_1 = 0{,}25\ \pi + \pi n$, $x_2 = 0{,}5\ \pi + \pi n$, где n — любое целое число $(0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$.



Фиг. 67.

На фигуре 67 точки, соответствующие корням, отмечены кружками, а точки, требующие особого внимания, — крестиками. В ответе учебник даёт только $x = x_1$.

Чтобы устранить всякое сомнение в правильности нашего решения и в неполноте указанного в задачнике ответа, вычертим график функции $y = \frac{\cos 2x}{1 + \operatorname{tg} x}$, вычисляя значения y для ряда равноотстоящих значений x от 0° до 360° хотя бы через каждые 15°. Применяя рациональное разделение труда среди учащихся



Фиг. 68.

и ограничиваясь тремя десятичными знаками в окончательных результатах, легко получаем 25 значений y, соответствующих этим значениям x (если пользоваться логарифмической линейкой, то всё приведённое ниже вычисление каждый сделает за 15—20 минут), и строим график, показанный на фигуре 68.

x	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$a = \cos 2x$	1,000	0,866	0,500	0,000	$-0{,}500$	$-0{,}866$	$-1{,}000$
$b = 1 + \operatorname{tg} x$	1,000	1,268	1,577	2,000	2,732	4,732	$+\infty$
$y = a : b$	1,000	0,682	0,317	0,000	$-0{,}183$	$-0{,}183$	0,000

Дальше приводим только результаты:

при $x=$	105°	120°	135°	150°	165°
$y=$	0,317	0,683	1,000	1,182	1,183

При $x = 180°$, $195°$,... получаются те же значения, что и при $x = 0°$, $15°$,... При $x = 135°$ и $315°$ частное значение y не существует, но существует предельное, равное 1.

Теперь всякое сомнение отпадает: кривая, изображающая изменение левой части при изменении x от 0° до 360°, пересекает ось X в четырёх точках, а именно: в точках с абсциссами 45°, 90°, 225°, 270°, что вполне подтверждает сказанное выше.

Как видим, график функции $y = \frac{\cos 2x}{1+\operatorname{tg} x}$ оказался очень похожим на синусоиду. Весьма поучительно выяснить, действительно ли это синусоида, и если да, то откуда она взялась. Всё разъясняется после преобразования данной функции к виду $y = 0{,}5 - 0{,}5\sqrt{2}\sin(2x - 0{,}25\pi)$.

§ 33. Примеры решения тригонометрических уравнений, сводящихся к алгебраическим и основным тригонометрическим.

Имея алгебраическое уравнение между тригонометрическими функциями от неизвестного, мы должны выразить все эти функции через одну из них, например $\sin x$, и, полагая $\sin x = y$, свести вопрос к решению алгебраического уравнения относительно y. Найдя его корни y_1, y_2,..., решаем основные тригонометрические уравнения $\sin x = y_1$, $\sin x = y_2$,... и находим искомые значения x. Выбор функции y можно делать по-разному, причём от удачного выбора существенно зависит простота решения. Очень часто в уравнении встречаем не просто $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$,..., а тригонометрические функции от некоторых функций x, как, например, $\sin 2x$, $\cos\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)$ и т. д.; тогда приходится применять ещё дополнительные преобразования, выражая всё через избранную функцию.

Разберём со всеми подробностями решение уравнения $2\sin x + \sqrt{3}\cdot\cos x = 2{,}5$ разными способами.

1-й способ. Полагая $\sin x = y$, находим $\cos x = \pm\sqrt{1-y^2}$, делаем подстановки и освобождаем уравнение от радикала; получаем алгебраическое уравнение $28y^2 - 40y + 13 = 0$ с корнями $y_1 = \frac{13}{14}$ и $y_2 = \frac{1}{2}$. Теперь остаётся решить уравнения $\sin x = \frac{13}{14}$ и $\sin x = \frac{1}{2}$, причём из данного уравнения находим в первом случае

$$\cos x = \left(2{,}5 - \frac{13}{7}\right) : \sqrt{3} > 0,$$

во втором $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3} > 0$. Поэтому пригодны не все корни этих уравнений, а только $x = \arcsin\frac{13}{14} + 2\pi n$, $x = \frac{1}{6}\pi + 2\pi n$.

Итак, решения данного уравнения исчерпываются формулами

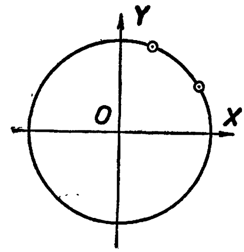
$$x=\arcsin\frac{13}{14}+2\pi n,\quad x=\frac{1}{6}\pi+2\pi n,$$

или в градусах: $x=68°13'+360°n$ и $x=30°+360°n$, и изображаются двумя точками тригонометрического круга (фиг. 69).

Замена $\cos x=y$ не даёт никакого выигрыша: получаются те же самые окончательные результаты (в этом полезно убедиться!).

2-й способ. Вспоминая, что $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ выражаются рационально через $\operatorname{tg} 0{,}5x$ (см. выше стр. 442), полагаем $\operatorname{tg} 0{,}5x=y$ и приходим к алгебраическому уравнению: $(5+2\sqrt{3})y^2-8y+(5-2\sqrt{3})=0$ и двум основным тригонометрическим: $\operatorname{tg} 0{,}5x=(14-3\sqrt{3}):13$, $\operatorname{tg} 0{,}5x=2-\sqrt{3}$, дающим $x_1=2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{13}(14-3\sqrt{3})+2\pi n$, $x_2=2\operatorname{arc\,tg}(2-\sqrt{3}+2\pi n$ или в градусах: $x_1=68°12'+360°\cdot n$,

$x_2=30°+360°\cdot n$.



Фиг. 69.

Не довольствуясь тем, что найденные способами 1 и 2 приближённые значения x почти совпадают, поучительно убедиться, что имеем такое равенство: $\arcsin\frac{13}{14}=2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{13}(14-3\sqrt{3})$.

3-й способ. Преобразуем левую часть данного уравнения, полагая $0{,}5\sqrt{3}=\operatorname{tg}\varphi$ (способ введения вспомогательного угла). Тогда оно преобразуется к виду: $\sin(x+\varphi)=1{,}25\cos\varphi$, или $\sin(x+\varphi)=\frac{5}{14}\sqrt{7}=\sin\psi$, где $\psi=\arcsin\frac{5}{14}\sqrt{7}\approx\arcsin 0{,}9450\approx\approx 70°55'$, $\varphi=\operatorname{arc\,tg} 0{,}5\sqrt{3}\approx\operatorname{arc\,tg} 0{,}8660\approx 40°54'$; его решения выражаются формулой: $x+\varphi=\psi+2\pi n$, $x+\varphi=\pi-\psi+2\pi n$, или в градусах: $x\approx 30°01'+360°\cdot n$, $x\approx 68°13'+360°\cdot n$. Опять хорошая задача на тригонометрические преобразования: показать, что $\arcsin\frac{5}{14}\sqrt{7}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}\sqrt{3}=\frac{1}{6}\pi$ и что $\pi-\arcsin\frac{5}{14}\sqrt{7}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}\sqrt{3}=\arcsin\frac{13}{14}$.

4-й способ. Построив окружность $X^2+Y^2=1$ и прямую $aX+bY=c$, где X и Y — текущие прямоугольные координаты точки, проводим радиусы в их точки пересечения: углы между этими радиусами и осью X и являются корнями уравнения $a\cos x+b\sin x=c$, так как $X=\cos x$, $Y=\sin x$. Этот прекрасный графический способ решения, к сожалению, требует некоторых сведений по аналитической геометрии, но самому учителю он поможет быстро находить довольно точные значения корней данного уравнения, а также выяснять число корней (в пределах от 0° до 360°).

Уравнение $a \cos x + b \sin x = c$ рассмотрено в учебнике Н. Рыбкина столь схематично, что учащиеся получают — если ограничиваться тем, что есть в учебнике — лишь формальное знакомство с его решением: необходимо детальное рассмотрение частных случаев. Отметим, что при $c = 0$ это уравнение решается особенно просто: деление обеих частей на $\cos x$, законное при $b \neq 0$, когда $\cos x \neq 0$, сводит дело к решению уравнения $\operatorname{tg} x = -a : b$. Здесь мы имеем пример решения тригонометрического уравнения, однородного относительно $\sin x$ и $\cos x$; решение всякого такого уравнения сводится к решению уравнения, алгебраического относительно $y = \operatorname{tg} x$.

В качестве второго примера рассмотрим уравнение $\sin 7x = \sin 5x$.

Здесь с успехом применяется другой приём — разложение левой части на множители.

Действительно, $\sin 7x - \sin 5x = 2 \cos 6x \sin x$, и данное уравнение заменяется двумя более простыми: $\sin x = 0$, $\cos 6x = 0$. Исчерпывающее решение даётся формулами $x_1 = \pi n$, $x_2 = \frac{1}{12}\pi + \frac{1}{6}\pi n$.

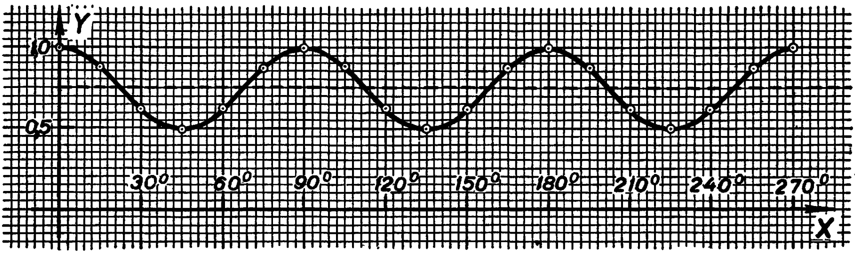
Ещё проще данное уравнение решается с помощью предложения о дугах, имеющих один и тот же синус: $7x - 5x = 2\pi n$, $7x + 5x = (2n + 1)\pi$, $x_1 = \pi n$, $x_2 = \frac{1}{12}\pi + \frac{1}{6}\pi n$.

Решим ещё уравнение $\frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{\cos 2x}{\cos x}$. Перенося все члены в левую часть равенства, представляем его в виде $\frac{\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x}{\sin x \cos x} = 0$, или $\frac{\sin x}{\sin x \cos x} = 0$, или $\frac{1}{\cos x} = 0$, и убеждаемся, что оно не имеет ни одного корня. Произведённое сокращение на множитель $\sin x$, законное лишь при условии, что $\sin x \neq 0$, обязывает нас дополнительно выяснить, не удовлетворяют ли данному уравнению те значения x, при которых $\sin x = 0$, т. е. числа вида πn, где n —любое целое. Функция $\frac{\sin 2x}{\sin x}$ не определена при $x = n\pi$, но, может быть, существует её предельное значение при $x \to n\pi$? Замечая, что при $x \neq n\pi$ $\frac{\sin 2x}{\sin x} = 2 \cos x$, заключаем, что это предельное значение действительно имеется и равно $2 \cos n\pi = 2 \cdot (-1)^n$. Правая часть при $x \to n\pi$ стремится к другому значению, $\frac{\cos 2\pi n}{\cos \pi n} = \frac{1}{(-1)^n} = (-1)^n$, а потому ни одно из чисел вида $n\pi$ уравнению не удовлетворяет.

Познакомимся с одним искусственным приёмом, обеспечивающим удобное решение уравнения $\sin^4 x + \cos^4 x = a$, выясняя, конечно, при каких значениях a существуют корни. Берём тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и возведением в квадрат с учётом данного уравнения получаем $a + 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1$, или $\sin^2 2x = 2(1 - a)$. Для возможности решения необходимо и достаточно выполнение двойного неравенства $0 \leqq 2(1-a) \leqq 1$, откуда $0{,}5 \leqq a \leqq 1$. При соблюдении этого условия имеем бесконечное множество решений, выраженных формулой $x = 0{,}5 \operatorname{Arc} \sin [\pm \sqrt{2(1-a)}]$. При частном значении $a = 0{,}75$ имеем $x = 0{,}5 \operatorname{Arc} \sin (\pm 0{,}5\sqrt{2}) = 0{,}5\pi n \pm 0{,}125\pi$. На сегменте $[0; 2\pi]$ имеем следующие 8 решений: $\frac{1}{8}\pi$, $\frac{3}{8}\pi$, $\frac{5}{8}\pi$, $\frac{7}{8}\pi$, $\frac{9}{8}\pi$, $\frac{11}{8}\pi$, $\frac{13}{8}\pi$, $\frac{15}{8}\pi$. График функции $y = \sin^4 x + \cos^4 x$, к удивлению строящих его, оказывается косинусоидой, сдвинутой так, что её осью служит прямая $y = 0{,}75$, с периодом не в 2π, как обычно, а только $0{,}5\pi$, т. е. синусоидой, представляющей собой график функции $\sin 4x$, определённым образом сдвинутый относительно координатных осей. Всё разъясняется, если учесть, что $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 -$

$-0,5 \sin^2 2x = 1-0,25(1-\cos 4x) = 0,75+0,25\cos 4x = 0,75+0,25\sin(4x+0,5\pi)$. Небесполезно подчеркнуть, что построение графика, изображённого на фигуре 70, даёт возможность решать данное уравнение *при любом* a (между 0,5 и 1,0) простым отсчётом по чертежу (конечно, как всегда при графическом решении, получаются лишь приближённые значения корней). На фигуре 70 проведена прерывистая линия соответственно значению $a = 0,75$, и все корни даются абсциссами точек её пересечения с косинусоидой.

В качестве последнего примера рассмотрим решение системы $\sin x + \sin y = a$, $\cos x + \cos y = b$, где числа a и b предполагаются данными.



Фиг. 70.

Здесь можно выразить синус и косинус x рационально через $u = \operatorname{tg} 0,5x$, а синус и косинус y — рационально через $v = \operatorname{tg} 0,5y$ и свести вопрос к решению двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными u и v, но лучшие результаты даёт следующий искусственный приём. Предполагая $b \neq 0$, делим первое уравнение почленно на второе; после сокращения на $\cos 0,5(x-y)$, законного при $b \neq 0$, получаем для определения $0,5(x-y)$ уравнение $\operatorname{tg} 0,5(x+y) = a : b$, а затем находим $0,5(x-y)$ из первого уравнения, переписав его в виде $2\sin 0,5(x+y)\cos 0,5(x-y) = a$.

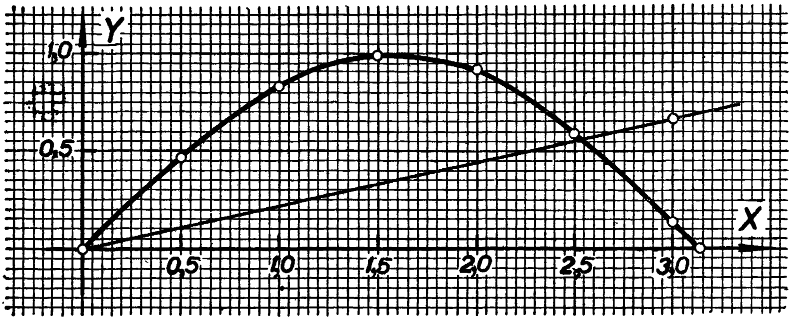
Для возможности решения необходимо и достаточно выполнение условия: $-1 \leqq 0,5a \operatorname{cosec} 0,5(x+y) \leqq 1$, или $0 \leqq 0,25a^2 \operatorname{cosec}^2 0,5(x+y) \leqq 1$, или $0 \leqq a^2[1+\operatorname{ctg}^2 0,5(x+y)] \leqq 4$, или окончательно: $0 \leqq a^2 + b^2 \leqq 4$.

§ 34. Примеры трансцендентных тригонометрических уравнений.

Уравнения, содержащие наряду с тригонометрическими функциями неизвестного аргумента и самый этот аргумент, представляют значительные трудности и обычно в средней школе вовсе не рассматриваются. Но если учащиеся овладели графиками тригонометрических функций, то приближённое решение таких трансцендентных уравнений вполне для них доступно. Покажем это на примерах.

I. Найти градусную меру дуги окружности, зная, что длина этой дуги равна $2a$ *см*, а длина стягивающей её хорды равна $2b$ *см*. Можно считать, что $b < a$, так как при $a \leqq b$ такой дуги нет.

Обозначив радианную меру искомой дуги через $2x$, а длину её радиуса через r, имеем систему $2r\sin x = 2b$, $2rx = 2a$, откуда получаем уравнение с одной неизвестной $\sin x = \frac{b}{a}x$. Задача сводится к разысканию такой дуги x, у которой синус равен произведению её радианной меры на $\frac{b}{a}$. Значения синуса дуги изображаются на чертеже точками синусоиды, а значения произведения $\frac{b}{a}x$ точками прямой, проходящей через начало координат. Таким образом, вычертив синусоиду и эту прямую, мы найдём x как абсциссу точки их пересечения. Дело сводится, таким образом, к построению графиков функций $y = \sin x$ и $y = \frac{b}{a}x$. Дуга $2x$ больше 0 и меньше 2π, так как она представляет собой часть окружности, а потому $0 < x < \pi$, и достаточно построить лишь одну полуволну синусоиды. На фигуре 71 взят масштаб 0,5 радиана в 1 *см* и построение выполнено для частных значений $2a = 290$ *см* и $2b = 64$ *см*. Взята точка с абсциссой $x = 3$ и ординатой $y = \frac{b}{a} x = \frac{64}{290} \cdot 3 = 0{,}662$ и соединена с началом координат. Отсчёт абсциссы точки пересечения даёт $x \approx 2{,}54$.



Фиг. 71.

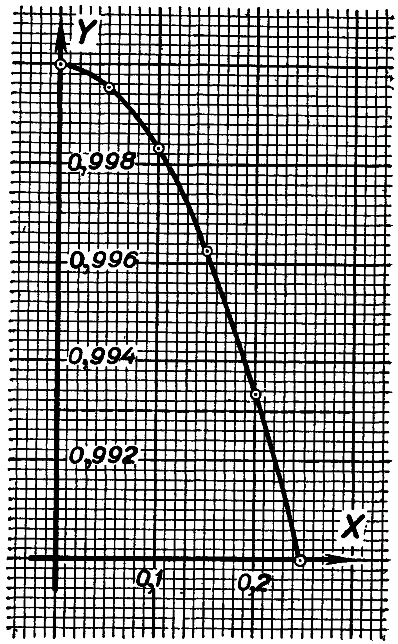
Для проверки переписываем уравнение в виде $\sin x : x = b : a$ и вычисляем значения функции $\sin x : x$ при значениях x, близких к найденному $\frac{b}{a} = \frac{32}{145} = 0{,}22068\ldots$

x $x°$	2,53 144°57′	2,54 145°32′	2,55 146°06′
$\lg \sin x$ $\lg x$	$\bar{1},7591$ 0,4031	$\bar{1},7527$ 0,4048	$\bar{1},7464$ 0,4065
$\lg (\sin x : x)$ $\sin x : x$	$\bar{1},3560$ 0,2270	$\bar{1},3479$ 0,2227	$\bar{1},3339$ 0,2187

Сравнивая найденные числа с числом $\frac{b}{a} = 0{,}2207$ и замечая, что здесь допустима линейная интерполяция (табличные разности составляют — 43 и —40), находим, что частное $\sin x : x$ принимает это значение 0,2207 при $x = 2{,}545$; при $x = 2{,}544$ оно равно 0,2211, т. е. слишком велико, а при $x = 2{,}546$ уже 0,2203, т. е. слишком мало. Итак, искомая дуга имеет радианную меру $2x \approx 5{,}090$ с погрешностью, меньшей чем 0,002, и градусную меру 291°38′ с погрешностью, не превышающей 7′.

Если требуется более высокая точность, вычерчиваем в более крупном масштабе дугу синусоиды от $x = 2{,}544$ до $x = 2{,}546$; применяя семизначные таблицы, находим, что x равен 2,545 164 с погрешностью, меньшей единицы последнего разряда, или в градусной мере 145°49′38″. Это «уточнение» найденного значения 2,545 можно провести и без графика, пользуясь только таблицами.

В случае, когда дробь $\frac{b}{a}$ близка к 1, встречаемся с затруднением: прямая $y = \frac{b}{a} x$ на целом участке сливается с дугой синусоиды, определённой точки пересечения не получается, хотя она должна быть. Так, например, при $b = 144$, $a = 145$ наш график позволяет лишь заключить, что $0 < x < 0{,}25$. Для получения более точного результата можно вычертить график функции $y = \sin x : x$ и найти ту его точку, которая имеет ординату $144 : 145 = 0{,}9931$. Чертёж лучше сделать в более крупном масштабе по оси Y; на фигуре 72 по оси Y взято в 1 *см* 0,002, по оси X в 1 *см* 0,1. Учитываем, что при $x \to 0$ $\sin x : x \longrightarrow 1$; вычерчиваем только дугу кривой от $x = 0$ до $x = 0,25$. Проводим прямую параллельно оси X на расстоянии 0,9931 от неё и убеждаемся, что абсцисса точки пересечения едва заметно превосходит 0,20 и во всяком случае меньше, чем 0,21. Для проверки вычисляем $\sin x : x$ при $x = 0,19$, 0,20, 0,21 и получаем числа 0,9940, 0,9933, 0,9927, подтверждающие, что 0,20 действительно является приближённым значением искомого корня с точностью до сотых долей радиана. Равномерность изменения функции $\sin x : x$ в интервале (0,19; 0,21) позволяет установить, что $x \approx 0,203$ или $x \approx 11°36'$.



Фиг. 72.

II. Найти дугу кругового сегмента, площадь которого равна четверти площади круга.

Пусть α — радианная мера искомой дуги. Вопрос сводится к решению уравнения $\alpha - \sin \alpha = 0,5\,\pi$ или, если взять $\alpha - 0,5\,\pi = x$, к решению более простого уравнения $\cos x = x$. Достаточно построить график функции $y = \cos x$ (косинусоида) и функции $y = x$ (прямая). Ответ: $x \approx 42°21'$, или 0,7391 радианов (более точно $42°20'47''$).

III. Решить уравнение Кеплера: $x = a + e \sin x$ при $a = 2$, $e = 0,1$.

Астрономам часто приходится решать это уравнение при различных значениях a и e для определения положения планеты на её орбите, и существует несколько удобных способов его решения. Проще всего переписать его в виде $\sin x = (x - a) : e$ и отыскивать абсциссу точки пересечения синусоиды $y = \sin x$ и прямой $y = (x - a) : e$. Ответ: $x \approx \approx 119°35'$, или 2,0870 радианов.

IV. Отмечаем ещё интересные уравнения: $\operatorname{tg} x = x$ (имеет бесконечное множество корней, наименьший положительный равен 4,4934...), $x^2 - \sin x = 0$ (решается посредством вычерчивания синусоиды и параболы), $\sin x = 1 : x$ (решается посредством вычерчивания синусоиды и гиперболы). Подробные решения этих трёх уравнений приведены в учебнике Пиотровского.

Существует ряд других способов приближённого решения трансцендентных уравнений (способ итерации, способ разложения в ряд и др.), но будет большим достижением, если учащиеся хорошо усвоят хотя бы один рассмотренный графический способ.

Глава VII

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ДРУГИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИИ

§ 35. Когда и в каком объёме рассматривать решение треугольников?

Решение треугольника в основных случаях, когда по трём данным его элементам, среди которых есть по крайней мере одна сторона, разыскиваются три остальные, является важнейшим применением теории тригонометрических функций, часто используемых в других дисциплинах. Исчерпывающее решение этой задачи вполне доступно ученикам X класса и должно быть хорошо ими усвоено. Решение прямоугольных треугольников (в основных случаях) требует так мало сведений из тригонометрии и так важно для практических применений, что его рассмотрение желательно и возможно уже в VIII классе, т. е. в начальном курсе тригонометрии, при использовании натуральных тригонометрических таблиц. В IX классе программа предусматривает возвращение к этому вопросу с применением логарифмо-тригонометрических таблиц. Решение косоугольных треугольников программа относит на X класс, отводя на эту тему 18 часов.

Было время, когда в решении треугольников видели основное содержание тригонометрии и уделяли ему много времени, рассматривая не только основные случаи, а и многочисленные задачи на особые случаи, когда данными являются не только стороны и углы, а и разные другие связанные с треугольниками геометрические величины.

Теперь, когда на первый план выдвигается изучение тригонометрических функций, решение треугольников теряет своё преобладающее значение. Изучение зависимостей между элементами треугольника следует ограничить тем, что действительно используется в дальнейшем, а затем дать практически важные вычислительные способы, рассматривая их как уточнение графического метода, позволяющего получать результаты наиболее быстро и наглядно. При этом необходимо уделять некоторое внимание вопросу о точности получаемых результатов, чего в школе, к сожалению, обычно вовсе не делают. Вовсе отказываться от рассмотрения особых случаев решения треугольников нельзя, но количество таких задач надо ограничить разумным минимумом.

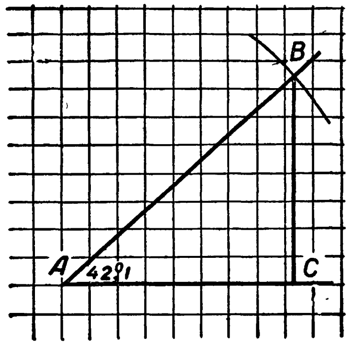
Решение треугольников даёт хорошую тренировку в числовых выкладках, и желательно использовать те возможности, какие при этом представляются, настаивая на максимальной рационализации вычислительной работы: на применении разных таблиц и других вспомогательных средств вычисления, составлении удобных вычислительных схем, контроле правильности вычисления, выяснении точности полученных результатов и т. д. Надо отметить, что школьные учебник и задачник на эту сторону дела не обращают внимания.

§ 36. Решение прямоугольных треугольников.

Весь теоретический материал, относящийся к вопросу о решении прямоугольных треугольников в основных случаях, был уже рассмотрен в главе о начальном курсе тригонометрии, главной задачей которого является именно полное освоение этого вопроса. В IX классе этот материал приходится изучать лишь постольку, поскольку в VIII классе он был недоработан или в дальнейшем позабыт. Новым здесь является только использование логарифмо-тригонометрических таблиц.

Ниже приведено полностью решение задачи, рассмотренной на стр. 74 учебника Н. Рыбкина. Предполагается, что графическое решение выполнено на обыкновенной тетрадочной клетчатой бумаге (фиг. 73).

З а д а ч а. Даны гипотенуза $c = 287,4$ *м* и один из острых углов прямоугольного треугольника $A = 42°06'$. Найти его катеты a и b, другой острый угол B и площадь S этого треугольника.



Фиг. 73.

Графическое решение (масштаб 1 *см* → 50 *м*).

По измерению на чертеже $a \approx 3,8$ *см*, $b \approx 4,2$ *см*. Ответ: $a \approx 190$ *м*, $b \approx 210$ *м*.

Вычислительное решение

$$B = 90° - A = 47°54',$$

$$a = c \sin A, \quad b = c \cos A = c \sin B,$$

$$S = 0,5\, ab = 0,5\, c^2 \sin A \cos A = 0,25\, c^2 \sin 2A.$$

$\lg \sin A$	$\bar{1},8264$
$\lg c$	$2,4585$
$\lg \cos A$	$\bar{1},8704$
$\lg a = \lg c + \lg \sin A$	$2,2849$
$\lg b = \lg c + \lg \cos A$	$2,3289$
a	192,7
b	213,2

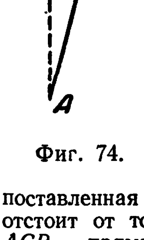
$2A$	$84°12'$
$2 \lg c$	$4,9170$
$\lg \sin 2A$	$\bar{1},9978$
$\lg 0,25$	$\bar{1},3979$
$\lg S$	$4,3127$
S	20550 $м^2$
или	2,055 *га*

Согласие результатов графического и вычислительного решений удовлетворительное.

Контроль по 4-значной таблице квадратов:

a^2	3713
b^2	4545
$a^2 + b^2$	8258
c^2	8260

Соображения о точности. Если данные точны, то результаты, будучи получены посредством 4-значных таблиц, могут иметь лишь незначительные погрешности в 4-й значащей цифре, что и подтверждается контрольным вычислением $a^2 + b^2$ и c^2: оказалось расхождение в 2 единицы разряда 4-й значащей цифры. В значении площади $S = 20\,550$ $м^2$ цифра единиц, будучи 5-й значащей, никакого доверия не заслуживает и при переводе в гектары отброшена. Если же данные приближённы, то для выяснения того, какие цифры полученных результатов заслуживают доверия, какие нет, надо применить вычисление по способу границ.



Фиг. 74.

О т в е т: $a \approx 192,7$ *м*, $b \approx 213,2$ *м*, $B = 47°54'$, $S \approx 2,055$ *га*.

С целью контроля рекомендуется решить какую-нибудь задачу, обратную данной, например, считая известными a и b, найти c, A, B. Применяя формулы $\operatorname{tg} A = a : b$, $B = 90° - A$, $c = a : \sin A$, получаем, пользуясь опять 4-значными таблицами, те же самые значения c и A, какие были даны.

Чтобы отметить осложнения, возникающие при решении прямоугольных треугольников в случае, когда один из данных или искомых углов очень мал, решим такую задачу. Требуется найти длину вертикальной подпорки AC, зная, что наклонно поставленная подпорка AB имеет длину 415 *см* и что верхний её конец B отстоит от точки C на 24 *см*, причём отрезок BC горизонтален, так что угол ACB — прямой (фиг. 74). Дело сводится к вычислению катета $b = AC$ по данной гипотенузе $c = AB = 415$ *см* и другому катету $a = BC = 24$ *см*. Графическое решение здесь ничего не даёт: на чертеже, выполненном, например, в масштабе 1 : 100, никакой разницы между b и c установить не удаётся. Вычислительное решение по формулам $\sin A = a : c$ и $b = c \cos A$, приведённое по 4-значным таблицам, даёт $b = 414{,}3$ *см* при не вполне надёжной последней цифре, что тоже не устраивает строителя, которому надо установить, на сколько следует укоротить стойку AB, чтобы она могла занять положение AC. Здесь лучше воспользоваться теоремой Пифагора и найти $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a)(c-a)} = \sqrt{439 \cdot 391}$ с 5 точными значащими цифрами (следовательно, не по 4-значным, а по 5-значным таблицам или непосредственно), что даёт $b \approx 414{,}31$ *см*, но ещё лучше вычислить сразу разность $c - b = c - c \cos A = 2c \sin^2 0{,}5A$, предварительно установив значение A по формуле $\sin A = a : c$. Так как угол A очень мал (около 3°), заменяем $\sin A$ и $\sin 0{,}5A$ их радианными мерами, что не скажется даже на 4-м десятичном знаке, и получаем окончательно: $c - b \approx a^2 : 2c$, или $24^2 : (2 \cdot 415) \approx 0{,}694$ *см*.

Мы получили ответ с точностью до тысячных долей сантиметра, имеющий смысл только в том случае, если данные (415 *см* и 24 *см*) точны, если они представляют собой, например, исходные проектные задания. Если же эти данные получены в результате измерения до десятых долей сантиметра, т. е. если $a \approx 24{,}0$ и $c \approx 415{,}0$ *см*, то ответ надо округлить до десятых.

§ 37. Соотношения между сторонами и углами в косоугольном треугольнике.

Чтобы найти три неизвестных элемента (стороны и углы) косоугольного треугольника по трём данным его элементам, среди которых должна быть по крайней мере одна сторона, необходимо иметь три уравнения, притом не зависящих друг от друга, т. е. таких, что ни одно из них не выводится из двух других. Такую систему можно составить из соотношения между тремя углами и соотношений между сторонами и синусами противолежащих углов:

$$A + B + C = 180^\circ, \quad a : \sin A = b : \sin B = c : \sin C. \qquad (1)$$

Эту «теорему синусов» и приходится прежде всего установить, что делается двумя способами: либо доказывая, что отношение любой стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности, как это сделано в учебниках [V, 2; 26], либо сопоставляя два выражения для одной высоты, например $h_c = a \sin B = b \sin A$, откуда $\frac{b}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$. Оба способа очень просты, но оба требуют отдельного рассмотрения остроугольного и тупоугольного треугольников. Второй является менее искусственным; именно его обычно «открывают» учащиеся, если предложить им самостоятельно доказать эту теорему. Хорошо поставить вопрос так: с увеличением стороны треугольника противолежащий угол растёт; такова *качественная* характеристика связи между стороной и противолежащим углом треугольника, установленная ещё в курсе геометрии. Но какова точная *количественная* характеристика этой связи? Пропорциональности здесь нет; чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть какой-либо пример, проще всего прямоугольный треугольник с углом в 30°, где отношения углов 30° : 60° : 90° = 1 : 2 : 3, а отношения противолежащих сторон $a : a\sqrt{3} : 2a = 1 : \sqrt{3} : 2$. Переписывая это последнее двойное отношение в виде $0,5 : 0,5\sqrt{3} : 1$, учащиеся легко приходят к догадке о пропорциональности сторон синусам противолежащих углов, так как $\sin 30^\circ : \sin 60^\circ : \sin 90^\circ = 0,5 : 0,5\sqrt{3} : 1$. Эта догадка сперва проверяется на других частных случаях, а затем начинаются поиски доказательства. Обычно учащиеся сами догадываются провести высоту и самостоятельно приходят к равенству $a \sin B = b \sin A$, откуда $a : \sin A = b : \sin B$, а затем и к двойному равенству $a : \sin A = b : \sin B = c : \sin C$. После этого хорошо взять и второе доказательство, попутно устанавливающее связь сторон и углов треугольника с радиусом описанного круга.

Система (1) удобна для решения треугольника в случае, когда даны два угла и сторона, и в случае, когда даны две стороны и угол, лежащий против одной из них, но в случаях, когда даны две стороны и угол между ними и когда даны три стороны, она приводит к тригонометрическим уравнениям, более трудным для решения. В этих случаях лучше брать другую систему, основываясь на теореме, которую называют теоремой косинусов, или обобщённой теоремой Пифагора:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C. \qquad (2)$$

Небезинтересно отметить полную равносильность системы (1) и (2): каждую из них можно вывести чисто аналитически, вовсе не обращаясь к геометрии, из другой. Вывод системы (2) из системы (1) дан в учебнике Н. Рыбкина; обратный же вывод системы (1) из системы (2), где можно считать $0 < A \leq B \leq C < \pi$, лишь немногим сложнее. Действительно, выразив $\cos A$ через a, b, c, находим $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 4S^2 : (b^2c^2)$, где $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$, $2p = a + b + c$, или $\sin A : a = 2S : (abc)$, и теорема синусов, т. е. два последних уравнения системы (1), получается далее без труда (попутно получаются важные формулы $S = 0,5bc \sin A$ и $S = abc : (4R)$ для площади треугольника). Далее находим $\sin (B + C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C = \frac{2S}{ac} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + \frac{2S}{ab} \cdot \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac} = \frac{2S}{bc} = \sin A$. Равенство $\sin (B + C) = \sin A$ означает, что либо $B + C - A = 2\pi n$, либо $B + C + A = (2n + 1)\pi$, а потому в силу неравенств, которым удовлетворяют углы всякого треугольника, имеем $A + B + C = \pi$.

Для решения треугольников в основных случаях систем (1) и (2) совершенно достаточно. Применение теоремы тангенсов $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} 0,5(A+B)}{\operatorname{tg} 0,5(A-B)}$ и формул вида $\operatorname{tg} 0,5A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ заметно облегчает выкладки в некоторых случаях, но отнюдь не является необходимым. Вывод этих формул, как и ряда других, относящихся к треугольнику (для площади S, для радиусов r

и R вписанной и описанной окружности и т. д.), представляет собой полезное упражнение, но нет никакой надобности их заучивать; не нужно заучивать и формулы $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos 0{,}5A \cos 0{,}5B \cos 0{,}5C$ и др., которые рекомендует для запоминания учебник Рыбкина, § 97. Совершенно достаточно знать, где эти формулы можно найти, например, в перечне формул, данном в конце учебника, а ещё лучше, если учащиеся сами составляют такой перечень полезных формул по мере их накопления. Во всяком случае необходимо помнить о вспомогательном, второстепенном характере всех таких формул и не тратить на них много времени.

§ 38. Основные случаи решения треугольников.

Напоминаем, что основными называются те случаи решения треугольников, когда и данными, и искомыми являются их углы и стороны. В числе данных должна быть по крайней мере одна сторона, поэтому возможны только следующие 5 основных случаев: 1) Даны сторона и два прилежащие к ней угла (*УСУ*). 2) Даны сторона и два угла, один из которых лежит против неё (*СУУ*). 3) Даны две стороны и угол между ними (*СУС*). 4) Даны две стороны и угол против одной из них (*ССУ*). 5) Даны три стороны (*ССС*). Случаи *УСУ* и *СУУ* можно не различать, так как, зная два угла, легко находим третий.

Небезинтересно установить, какими вообще способами можно взять какие-либо три из 6 элементов: a, b, c, A, B, C (всего их $C_6^3 = 20$), и убедиться, что существенно различными из них является только 5 перечисленных и случай, когда даны три угла A, B, C и когда треугольник не определяется однозначно.

В случае *СУУ*, зная углы B и C, находим $A = 180° - (B + C)$, а затем по данному значению a находим $b = a \sin B : \sin A$ и $c = a \sin C : \sin A$. При условии $B + C < 180°$ задача имеет единственное решение, при $B + C \geq 180°$ решений нет.

Случай *СУС*. Зная a, b, c, находим c по формуле

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,$$

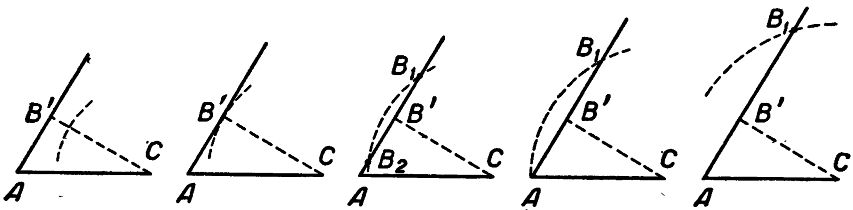
а затем A и B по формулам

$$\cos A = (a^2 - b^2 - c^2) : (2bc) \text{ и } \cos B = (b^2 - c^2 - a^2) : (2ca).$$

Задача имеет единственное решение при любых данных. Обычно в учебниках рекомендуется другой способ, основанный на применении теоремы тангенсов и представляющий некоторые удобства в случае многозначных данных. Но у 1-го способа есть своё преимущество — возможность контроля через вычисление суммы всех трёх углов (с обязательным выяснением того, можно ли отнести наблюдаемое отклонение от теоретической суммы в 180° за счёт неизбежных вычислительных погрешностей, или оно указывает на наличие ошибки в выкладках).

Случай *ССС*. Зная a, b, c, находят A, B, C либо опять-таки с помощью обобщённой теоремы Пифагора, либо по формулам тангенсов половинных углов. Контроль проводится, как в предыдущем случае. При условиях $a \leqq b \leqq c$, $a + b > c$ задача имеет единственное решение.

Случай *ССУ* доставляет больше всего хлопот по части исследования, а потому часто рассматривается последним. Зная a, b, A, находим B по формуле $\sin B = b \sin A : a$, считаясь с возможностью двух решений: острого угла B_1 и тупого угла $B_2 = 180° - B_1$, а затем применяем формулы $C = 180° - (A + B)$ и $c = a \sin C : \sin A$. Необходимо детальное исследование, которое усваивается легче, если исходить из построительного решения, с применением линейки, циркуля, угольника и транспортира. Если $A < 90°$, имеются 5 возможностей, изображённых на фигуре 75,



Фиг. 75.

где угол $CB'A = 90°$; при $CB' > a$ решений нет, при $CB' = a$ одно решение — прямоугольный треугольник ACB'; при $CB' < a < b$ два решения — треугольники ACB_1 и ACB_2; при $CB' < a = b$ одно решение — равнобедренный треугольник ACB_1; при $CB' < a$, $b < a$ одно решение — треугольник ACB_1 (фиг. 75). Если же $A > 90°$, то, рассматривая те же 5 возможностей на соответствующем чертеже, устанавливаем, что решение возможно только при $a > b$, когда оно единственно. Замечая, что $CB' = b \sin A$, связываем это геометрическое исследование с исследованием формулы $\sin B = b \sin A : a$.

Нередко это исследование считается непосильно трудным и комкается, но, несомненно, хорошее его усвоение принесёт больше пользы учащимся, чем решение многих задач с числовыми данными.

Приводим ниже полное решение одной задачи на случай *ССС* с примерным расположением записей. Графическое решение предполагается выполненным на обыкновенной клетчатой бумаге (чертёж ввиду его простоты не воспроизводится).

Задача. Найти углы треугольника со сторонами $a = 15{,}37$ *м*, $b = 21{,}42$ *м*, $c = 13{,}83$ *м*.

Графическое решение (масштаб 1 *см* → 2 *м*, измерение углов транспортиром). Ответ. $A \approx 45°{,}8$, $B \approx 94°{,}0$, $C \approx 40°{,}1$. Контроль: $A + B + C = 179°{,}9$.

1-е вычислительное решение (по обобщённой теореме Пифагора): $\cos A = M_1 : N_1$, $\cos B = M_2 : N_2$, $\cos C = M_3 : N_3$, $M_1 = b^2 + c^2 - a^2$, $M_2 = c^2 + a^2 - b^2$,

$$M_3 = a^2 + b^2 - c^2, \quad N_1 = 2bc, \quad N_2 = 2ca, \quad N_3 = 2ab.$$

Применяются таблицы квадратов и таблицы логарифмов.

a	15,37
b	21,42
c	13,83

a^2	236,3
b^2	458,9
c^2	191,2
M_1	413,8
M_2	—31,4
M_3	504,0

$\lg a$	1,1866
$\lg b$	1,3308
$\lg c$	1,1408
$\lg 2$	0,3010
$\lg N_1$	2,7726
$\lg N_2$	2,6284
$\lg N_3$	2,8184

$\lg M_1$	2,6168
$\lg N_1$	2,7726
$\lg\cos A$	$\bar{1}$,8442
A	45°41′
$\lg(-M_2)$	1,4969
$\lg N_2$	2,6284
$\lg\cos(-B)$	$\bar{2}$,8685
$180° - B$	85°46′
B	94°14′

$\lg M_3$	2,7024
$\lg N_3$	2,8184
$\lg\cos C$	$\bar{1}$,8840
C	40°03′

Ответ:

A	45°41′
B	94°14′
C	40°03′
сумма	179°58′ (контроль)

2-е вычислительное решение (по формулам тангенсов половинных углов):

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}A=\frac{k}{p-a},\quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}B=\frac{k}{p-b},\quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}C=\frac{k}{p-c},\quad k=\sqrt{\frac{q}{p}},$$

$$q=(p-a)(p-b)(p-c)$$

a	15,37
b	21,42
c	13,83
$2p$	50,62
p	25,31
$p-a$	9,94
$p-b$	3,89
$p-c$	11,48

$\lg(p-a)$	0,9974
$\lg(p-b)$	0,5899
$\lg(p-c)$	1,0599
$\lg q$	2,6472
$\lg p$	1,4033
$\lg(q:p)$	1,2439
$\lg k$	0,6220

$\lg k$	0,6220
$\lg(p-a)$	0,9974
$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}A$	$\bar{1}$,6246
$\frac{1}{2}A$	22°51′

$\lg k$	0,6220
$\lg(p-b)$	0,5899
$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}B$	0,0321
$\frac{1}{2}B$	47°07′

$\lg k$	0,6220
$\lg(p-c)$	1,0599
$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}C$	$\bar{1}$,5621
$\frac{1}{2}C$	20°02,5′

Ответ:

A	45°42′
B	94°14′
C	40°05′
сумма	180°01′

Согласие между результатами всех вычислений вполне удовлетворительное; искомые углы найдены с небольшими погрешностями в минутах.

Чтобы составить представление о влиянии погрешностей в данных, проведём вычисление угла A ещё раз, предполагая, что данные могут иметь погрешности до 0,01. Применяем способ границ, пользуясь обобщённой теоремой Пифагора и не учитывая вычислительных погрешностей, обусловленных неточностью табличных значений.

	НГ	ВГ
a	15,36	15,38
b	21,41	21,43
c	13,82	13,84
a^2	236,0	236,6
b^2	458,4	459,3
c^2	190,9	191,6
b^2+c^2	649,3	650,9

	НГ	ВГ
$\lg 2$	0,3010	0,3010
$\lg b$	1,3306	1,3310
$\lg c$	1,1405	1,1412
$\lg 2bc = \lg N_1$	2,7721	2,7732

	НГ	ВГ
b^2+c^2	649,3	650,9
a^2	236,0	236,6
$b^2+c^2-a^2=M_1$	412,7	414,9
$\lg M_1$	2,6157	2,6179
$\lg N_1$	2,7721	2,7732
$\lg\cos A$	$\bar{1},8425$	$\bar{1},8458$
A	45°29′	45°55′

Ответ:

$$45^\circ 29' < A < 45^\circ 55',$$

или $A \approx 45^\circ 42'\ (\pm 13'),$

или $A \approx 45^\circ,7\ (\pm 0^\circ,2).$

§ 39. Особые случаи решения треугольников.

Задачи на особые случаи решения треугольников, когда среди данных имеются не только стороны и углы, а и другие величины, связанные с треугольником, или какие-либо соотношения между сторонами и углами, представляют собой материал для упражнений, особенно ценный в целях повторения всего пройденного по тригонометрии, так как заставляет учащихся мобилизовать все свои сведения и догадываться, что выгоднее применить. Стараться развивать какую-либо теорию решения таких задач, пытаться классифицировать их и устанавливать общие приёмы решения — в средней школе не следует: есть много других применений тригонометрии, заслуживающих внимания, и тратить слишком много времени на решение треугольников нецелесообразно. Но для самого учителя, однако, такая общая теория, вроде разработанной в книге [V, 35], очень полезна, так как даёт полное овладение материалом и хорошо ориентирует при выборе задач.

При работе с учащимися необходимо обращать особое внимание на начальную стадию решения каждой такой задачи — анализ, когда намечается ход решения, причём нередко правильный путь находится не сразу, а после ряда неудачных попыток. Полезно показать несколько примерных решений, сперва проведённых полностью, затем ограничиваясь анализом и предоставляя учащимся самим доводить дело до конца, а потом уже предлагая самостоятельно провести и анализ. Крайне желательно брать не только вычислительное, а и построительное решение каждой такой задачи, сопоставляя результаты.

Вот три таких примерных решения.

Задача I. Найти третью сторону треугольника, у которого один угол вдвое больше другого, зная, что против этих углов лежат стороны $a = 32$ *мм* и $b = 25$ *мм*.

Эта задача (в удобной краткой формулировке) имеется в учебнике Н. Рыбкина (§ 13, № 47). Будем решать её сперва в общем виде, а потом уже при данных числовых значениях a и b.

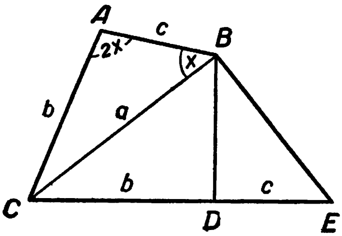
Полагая $\angle B = x$, имеем $\angle A = 2x$. Стороны a, b и противолежащие углы связаны теоремой синусов. Применяя её, имеем уравнение $\sin 2x : \sin x = a : b$, откуда находим $\cos x = 0,5\, a : b$. Существует единственное значение x, удовлетворяющее этому условию, если $a \leq 2b$; при $a > 2b$ решения нет; пригодно только значение x, принадлежащее I четверти. Найдя x, находим все углы ($\angle B = x$, $\angle A = 2x$, $\angle C = \pi - 3x$) и искомую сторону $c = b \sin 3x : \sin x = b\,(3 - 4\sin^2 x) = b\,(4\cos^2 x - 1) = (a^2 - b^2) : b$ и убеждаемся, что для существования решения кроме условия $a \leq 2b$ необходимо ещё условие $a > b$. Каждое из этих двух условий необходимо, оба вместе достаточны для существования и единственности решения.

Убедившись, что данные числовые значения $a = 32$ *мм* и $b = 25$ *мм* им удовлетворяют, находим искомое числовое значение c.

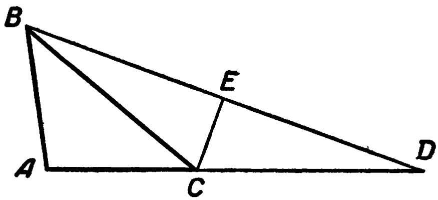
Графическое решение требует построения отрезка $u = \sqrt{a^2 - b^2}$ и отрезка $c = u^2 : b$, показанных на фигуре 76. Сперва построен прямоугольный треугольник BCD с катетом $CD = b$ и гипотенузой $BC = a$ в натуральную величину, затем проведён отрезок $BE \perp BC$ до пересечения с продолжением CD, получен искомый отрезок $DE = c$ (на чертеже оказалось $c \approx 15$ *мм*). Для контроля построен $\triangle ABC$ по трём сторонам и измерены его углы (транспортиром). Оказалось, что $\angle ABC \approx 50°$, $\angle BAC = 101°$.

Вычислительное решение по формуле $c = (a + b)(a - b)$: b даёт $c = 399 : 25 = (400 - 1) \cdot 4 : 100 = 15{,}96$ *мм*. Для контроля находим $x = \arccos(0{,}5a : b) = \arccos 0{,}64 \approx 50°12'$; $2x \approx 100°24'$, $\sin x : b = 0{,}7683 : 25 = 0{,}03073$, $\sin 2x : a = 0{,}9836 : 32 = 0{,}03074$ и констатируем удовлетворительное согласие результатов с тем, что дало построение, и с условиями задачи.

Задача II. На чертеже даны два неравных отрезка и некоторый угол, меньший 180°. 1) Требуется построить $\triangle ABC$, у которого сумма сторон равна большему из этих двух данных отрезков m, сторона c — меньшему из них, а



Фиг. 76.



Фиг. 77.

угол A — данному углу. 2) Найти вычислением a, b, B, C, если известны длины данных отрезков $m = 14{,}31$ *см* и $c = 5{,}18$ *см*, а также градусная мера данного угла $A = 102°38'$. Графическое решение ясно из чертежа (фиг. 77), где $AD = m$, $\angle BAC = A$, $AB = c$. Ответ, полученный измерением по чертежу, выполненному в натуральную величину на миллиметровой бумаге: $a \approx 8{,}57$ *см*, $b \approx 5{,}77$ *см*, $\angle B \approx 41°{,}1$, $\angle C \approx 36°{,}2$. При условии $m > c$ задача имеет единственное решение, так как перпендикуляр к стороне BD неравнобедренного треугольника ABD, проведённый через её середину E, всегда пересекает бо́льшую из боковых её сторон; при $m \leq c$ решений нет, так как сумма двух сторон треугольника не может ни равняться третьей стороне, ни быть меньше её.

Вычислительное решение. Вводя в рассмотрение радиус R описанной окружности, имеем $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C = 2R \sin(A + B)$, $a + b = m$. В этой системе 4 уравнения и столько же неизвестных: a, b, B, R. Исключая a, b, R, получаем уравнение $(\sin A + \sin B) : \sin(A + B) = m : c$, откуда $\operatorname{tg}\frac{1}{2}B = \frac{m - c}{m + c} \cdot \operatorname{ctg}\frac{1}{2}A$, и однозначно определяем при условии $m > c$ угол B, а затем вычисляем $C = 180° - (A + B)$, $a = c \sin A : \sin C$, $b = c \sin B : \sin C$.

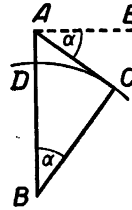
При данных числовых значениях имеем:

$a \approx 8{,}551$ *см*, $b \approx 5{,}765$ *см*, $B \approx 41°08'$, $C \approx 36°14'$. Контроль: $a + b \approx 14{,}316$ (вместо $14{,}31$) *см*.

Задача III. При подъёме на высоту $h \approx 2{,}10$ *км* оказалось, что угол понижения видимого горизонта на этой высоте равен $\alpha \approx 1°28',5$ (так называется угол между горизонтальной плоскостью, проходящей через глаз наблюдателя, и лучом, направленным к горизонту). Найти радиус R земного шара, предполагая, что погрешность h не более 0,005 *км*, а погрешность α не более $0',5$.

Вопрос сводится к разысканию катета a прямоугольного треугольника по данному прилежащему острому углу $A = \alpha$ и данной разности $h = AD$ между гипотенузой c и этим катетом a, так как $\angle ABC = \angle CAE = \alpha$ (фиг. 78).

Графическое решение при данном весьма малом значении α не даёт ничего.



Фиг. 78.

Вычислительное решение. Имеем $R = (R + h) \cos \alpha$, откуда $R = h \cos : (1 - \cos \alpha) = 0{,}5\ h \cos\ \alpha : \sin^2 0{,}5\ \alpha$. После замены синуса малого угла $0{,}5\alpha \approx 0°44',25$ его радианной мерой, а $\cos \alpha \approx \cos 1°28',5$ единицей, что не скажется на первых трёх значащих цифрах результата (см. выше стр. 446), имеем окончательно: $R \approx 2h : \operatorname{arc}^2\alpha$, где $\operatorname{arc} \alpha$ — радианная мера угла α. Проводим вычисление R по способу границ и получаем ответ: $R \approx 6\,336\ (\pm 90)$ *км* или $R \approx 6\,300\ (\pm\ 126)$ *км*.

Итак, по указанным в задаче данным радиус земного шара оказывается равным приблизительно 6 300 *км*. Более точными способами установлено, что по мере удаления от полюсов к экватору расстояние от поверхности земли (точнее — от уровня океана до её центра) изменяется, возрастая от 6356,911 *км* до 6378,388 *км*. Результаты наших вычислений находятся в полном согласии с этими данными.

§ 40. Другие геометрические приложения тригонометрии.

Не ограничиваясь решением треугольников, в средней школе решают много разнообразных задач на применение тригонометрии в геометрии, как на плоскости, так и в пространстве. Это, конечно, совершенно правильно, так как является лучшим средством закрепления знаний по обеим этим дисциплинам. Для получения максимального эффекта надо иметь в виду следующие соображения.

1. Как правило, задача должна решаться в общем виде, при буквенном обозначении данных; затем производится исследование этого общего решения, т. е. выяснение условий, при которых задача допускает решение, а также выяснение числа решений; наконец, проводятся численные выкладки для некоторых частных значений данных. С другой стороны, нельзя обходить и задачи на доказательство, обычно вовсе не требующие числовых выкладок, хотя и здесь желательна проверка общих заключений на частных примерах с целью контроля.

2. В школе преобладает вычислительный метод, графический метод считается чем-то примитивным, не заслуживающим внимания, и не культивируется вовсе. Это — большая ошибка. Точность построительного решения сплошь и рядом бывает вполне достаточной для тех практических целей, ради достижения которых задача решается, а его простота и наглядность почти всегда выше, чем у вычислительного. Надо взять за правило всегда начинать с поисков построительного решения, как первого приближения, осуществлять его, а затем уже переходить к вычислительному решению. Помимо лучшей ориентировки в задаче, построительное ре-

шение имеет то большое достоинство, что в значительной мере страхует от грубых просчётов и ошибок, так часто совершаемых учащимися. Наглядное построительное решение — отличное средство борьбы с формализмом при решении задач.

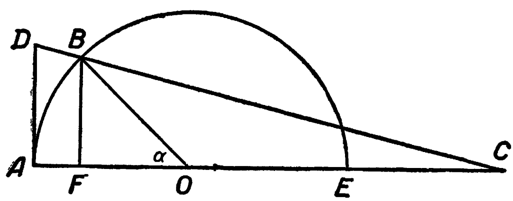
3. Доводя решение каждой задачи до численного результата, надо всемерно рационализировать вычислительную работу: применять разнообразные вспомогательные средства вычисления, не пренебрегая и такими простейшими и общедоступными, как конторские счёты, заботиться о порядке и удобстве записи (употребление схем!), давать себе отчёт о точности получаемых результатов. Особенно большую помощь при вычислении оказывают таблицы.

4. Материал для задач желательно разнообразить, рассматривая вопросы астрономии, физики, прикладной механики, военного дела и т. д., но соблюдать известную осторожность в их выборе, чтобы не тратить много времени на специальную сторону этих вопросов.

5. Особого внимания заслуживают вопросы *топографии* (землемерия, геодезии). В каждом учебнике тригонометрии, в каждом задачнике эти вопросы в большем или меньшем объёме рассматриваются («задачи на местности»), но в школе они используются довольно редко: и учитель не всегда достаточно в них ориентирован, да и приборов в школе не имеется. Отметим, что такого рода задачи вызывают всегда повышенный интерес со стороны учащихся и являются сильным средством улучшения постановки преподавания тригонометрии.

Иллюстрируя всё сказанное, рассмотрим несколько примерных решений задач на применение тригонометрии в геометрии.

Задача I. Для приближённого спрямления дуги окружности применяется способ, состоящий в замене дуги AB (см. фиг. 79) отрезком касательной AD



Фиг. 79.

между точкой касания A и точкой пересечения с той секущей BC, которая проходит через точку C на продолжении диаметра AE, находящуюся на расстоянии диаметра от центра O, так что $AC = 3r$. Доказано, что AD весьма мало отличается от длины дуги AB, притом тем меньше, чем меньше радианная или градусная мера этой дуги [III, 27a].

Проверить это заключение, вычисляя длину AD для дуг AB в $\alpha = 0,2$, $0,4$, $0,6$, $0,8$ и $1,0$ радиана.

Решение. Проводя $BF \perp AC$, имеем $AD : BF = AC : FC$, откуда $AD = 3r \sin\alpha : (2 + \cos\alpha)$. Проводим вычисление значений отношения $AD : r$, зависящего только от α, и сравниваем их с соответствующими значениями отношения $\overset{\frown}{AB} : r = \alpha$.

$\alpha = \widehat{AB} : r$ α° $2 + \cos\alpha$	0,2 11°28′ 2,9801	0,4 22°55′ 2,9211	0,6 34°23′ 2,8253	0,8 45°50′ 2,6968	1,0 57°18′ 2,5402
$\lg 3$ $\lg \sin\alpha$ $-\lg(2+\cos\alpha)$	0,4771 $\bar{1}$,2984 $\bar{1}$,5258	0,4771 $\bar{1}$,5904 $\bar{1}$,5345	0,4771 $\bar{1}$,7518 $\bar{1}$,5490	0,4771 $\bar{1}$,8557 $\bar{1}$,5691	0,4771 $\bar{1}$,9251 $\bar{1}$,5952
$\lg(AD : r)$ $AD : r$	$\bar{1}$,3013 0,2001	$\bar{1}$,6020 0,3999	$\bar{1}$,7779 0,5997	$\bar{1}$,9019 0,7978	$\bar{1}$,9974 0,9940
$(\widehat{AB} - AD) : r$	— 0,0001	+ 0,0001	0,0003	0,0022	0,0060

Числа последней строки не вполне надёжны: на них сказываются неточности табличных значений. Проводя то же вычисление по 5-значным таблицам, мы получили бы такие результаты:

$\alpha = \widehat{AB} : r$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\beta = AD : r$	0,20000	0,39994	0,59955	0,79805	0,99373
$\alpha - \beta$	0,00000	0,00006	0,00045	0,00195	0,00627
$100(\alpha - \beta) : \alpha$	0%	0,015%	0,075%	0,248%	0,627%

Как видим, чем меньше α, тем меньше не только абсолютное значение разности $\alpha - \beta$, но и относительное её значение в процентах от α.

Задача II. Железная дорога Москва — Ленинград имеет длину 650 *км*. Считая, что она идёт точно по дуге AB большого круга земного шара, что довольно близко к действительности, найти, какой выигрыш в длине пути получится от замены её тоннелем, соединяющим A и B по прямой, и установить наибольшую глубину залегания этого тоннеля. Радиус R земли принять равным 6 400 *км*.

Графическое решение здесь ничего не даёт, так как на чертеже хорда сливается с дугой.

Вычислительное решение. Дуге окружности в s *км* при радиусе R *км* соответствует центральный угол $\alpha = s : R$ (в радианах). Соответствующая хорда имеет длину $l = 2R \sin 0{,}5\alpha$. Такова длина тоннеля AB. Наибольшая глубина его залегания равна $h = R - R \cos 0{,}5\alpha = 2R \sin^2 0{,}25\alpha$. При $s = 650$ *км*; $R = 6\,400$ *км* имеем $\alpha = 0{,}1016$ радиана, или 5°49′, $l = 649{,}4$ *км*, где последняя цифра, как четвёртая значащая цифра результата, найденного по 4-значным таблицам, ненадёжна, а потому разность $s - l \approx 0{,}6$ *км* определяется очень неточно. Чтобы найти эту разность точнее, надо либо обратиться к более точным таблицам, либо воспользоваться приближённой формулой $\sin\alpha \approx \alpha - \alpha^3 : 6$ (см. выше стр. 446). Последняя даёт $s - l \approx s^3 : (24R^2)$ или после вычисления по 4-значным таблицам: $s - l \approx 0{,}279$ *км*, причём можно ручаться за точность всех цифр этого результата.

Значение $h = 2R \sin^2 0{,}25\alpha \approx s^2 : (8R)$ оказывается равным 8,252 *км*.

Итак, проведение прямолинейного тоннеля сократит путь от Москвы до Ленинграда всего лишь на 279 *м*; наибольшая глубина залегания тоннеля 8,25 *км*.

Задача III. Зная длины a, b, c, d сторон вписанного в круг 4-угольника $ABCD$, найти его углы A, B, C, D, его диагонали AC и BD, его площадь S, радиус R описанного около него круга.

Не излагая подробности решения, укажем только, что начинать проще всего с двух выражений одной и той же диагонали, получаемых по обобщённой теореме Пифагора. Это даёт выражение для косинуса угла в зависимости от сторон, а именно: $\cos A = 0{,}5(a^2 + d^2 - b^2 - c^2) : (ad + bc)$, и более удобную формулу: $\operatorname{tg}^2 0{,}5A = (p - a)(p - d) : [(p - b)(p - c)]$, где $2p = a + b + c + d$.

Для квадратов диагоналей получаются формулы: $AC^2 = (ad + bc)(ac + bd) : (ab + cd)$ и $BD^2 = (ab + cd)(ac + bd) : (ad + bc)$. Площадь S определяется по формуле

$$S = 0{,}5\,(ad + bc)\sin A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Наконец, $R = \sqrt{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)} : (4S)$.

Для существования вписанного в круг 4-угольника со сторонами a, b, c, d, как нетрудно показать, необходимо и достаточно, чтобы наибольшая его сторона была меньше суммы трёх остальных.

§ 41. Тригонометрия и алгебра.

Вряд ли можно указать такую математическую дисциплину, в которой не встречались бы те или другие применения тригонометрии. Исключительно богаты и разнообразны также её применения в таких отраслях науки, как механика, физика, астрономия, топография и т. д. Школьный курс тригонометрии не должен игнорировать доступные учащимся простейшие случаи таких применений. Рассмотрим некоторые такие применения, начиная с алгебры.

Изучая в алгебре комплексные числа, нельзя обойти тригонометрическую их форму и прежде всего задачи на переход от тригонометрической формы к алгебраической, сводящийся к вычислению $x = r\cos\alpha$ и $y = r\sin\alpha$ по данным r и α, не вызывающий затруднений, и на обратный переход, т. е. вычисление $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\alpha = \operatorname{arc\,tg}(y : x)$, протекающий менее гладко в связи с выбором четверти. Эти затруднения отпадают полностью, если неизменно требовать предварительного, хотя бы самого грубого графического решения. Ныне действующая программа этим и ограничивается, но на очереди включение в курс средней школы и действий над комплексными числами, данными в тригонометрической форме, в частности формулы Муавра, прямо вытекающей из определения произведения комплексных чисел и так легко дающей общее решение двучленного уравнения любой степени. Отметим ту помощь, какую в свою очередь получает тригонометрия от алгебры в удобнейшем выводе формул для $\sin mx$ и $\cos mx$ в зависимости от $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ для любого натурального значения m: сравнивая два выражения для $(\cos x + i\sin x)^m$, полученные по формуле Муавра и по формуле бинома Ньютона, имеем после отделения действительной и чисто мнимой части две формулы:

$$\cos mx = \cos^m x - C_m^{(2)}\cos^{m-2}x\sin^2 x + C_m^{(4)}\cos^{m-4}x\sin^4 x - \ldots,$$

$$\sin mx = C_m^{(1)}\cos^{m-1}x\sin x - C_m^{(3)}\cos^{m-3}x\sin^3 x + \ldots,$$

которые при $m = 2$ и $m = 3$ дают известные выражения для синуса и косинуса двойной и тройной дуги.

Отметим ещё применение тригонометрии к решению квадратного уравнения с многозначными коэффициентами, представляющее собой прекрасный пример на способ введения вспомогательного угла. Подробности можно найти в задачнике по тригонометрии Пржевальского и др.

§ 42. Применения тригонометрии в механике и физике.

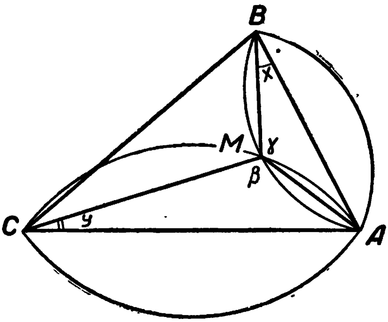
Есть один вопрос механики, изучаемый в средней школе в курсе физики, это вопрос о гармоническом колебательном движении, заслуживающий внимательного рассмотрения в курсе тригонометрии. Дело сводится к изучению тригонометрической функции $y = a \sin(kx + \varphi)$, частыми случаями которой являются функции $\sin x$, $\cos x$, $a \sin x$, $\sin kx$, $\sin(x + \varphi)$ и т. д. вплоть до $a \sin x + b \cos x$. Надо выяснить геометрический смысл множителя («амплитуда» колебаний), множителя k (определяющего их «период»), слагаемого φ («начальная фаза»). Здесь мы имеем математический вопрос с богатым и вполне доступным учащимся X класса идейным содержанием, имеющий первостепенное значение для физики и механики, вопрос, достойный стать завершением курса тригонометрии в средней школе. Он достаточно подробно рассмотрен в учебнике тригонометрии Берманта и Люстерника. Детальная методическая его разработка имеется в статье [V, 10]. Отсылая читателя к этой литературе, отметим лишь тот высокий интерес, какой обычно возбуждает теорема о сложении гармонических колебаний одного периода, т. е. теорема о возможности привести к виду $y = a \sin(kx + \varphi)$ любое выражение вида $a_1 \sin(kx + \varphi_1) + a_2 \sin(kx + \varphi_2)$, при условии, что эта теорема изучается методически правильно. Лучше всего, если она «открывается» самими учащимися; например, получив задание вычертить по точкам график функции $y = 3 \sin x + 4 \cos x$, учащиеся с удивлением констатируют, что в результате сложения двух растянутых в направлении оси Y кривых (синусоиды и косинусоиды) получается снова синусоида, тоже растянутая в этом направлении, и смещённая вдоль оси X, и ищут объяснение этому факту.

Из других применений тригонометрии в механике заслуживают особого внимания вопросы о сложении и разложении сил. Много таких задач имеется в задачниках по физике, а также в некоторых задачниках по тригонометрии (например, в старом задачнике Верещагина). Эти задачи легко составляются, весьма наглядны, допускают и графическое, и аналитическое решение, могут быть самой различной трудности, представляют большой интерес для учащихся, вызывают желание ставить легко осуществляемые эксперименты, проверяющие правильность расчётов. Здесь начинается уже совместная работа учителей математики и физики, неизменно плодотворная для обеих дисциплин. Ограничимся одним примером. Имеется нить данной длины $3a$; концы её закреплены в точках, находящихся на одной горизонтальной прямой на данном расстоянии b одна от другой ($b < 3a$). На расстоянии a от одного конца нити к ней прикреплён некоторый груз P, а на таком же расстоянии от другого её конца двойной груз $2P$. Найти углы, образуемые звеньями получающейся ломаной (углы «верёвочного многоугольника»).

Тригонометрия широко используется на занятиях по физике, например в оптике (преломление света, полное внутреннее отражение и др.). Учитель математики должен интересоваться тем, что делается на занятиях физикой, подхватывать и углублять затрагиваемые на них математические вопросы. Как полезно, например, рассмотреть уравнение $\sin \alpha = n \sin \beta$, связывающее угол падения α, угол преломления β и показатель преломления n при переходе луча из пустоты в некоторую среду, принимая за неизвестное поочерёдно каждую из трёх величин α, β, n и исследуя возможность решения!

§ 43. Тригонометрия, топография, астрономия.

Выше уже отмечалось, как выигрывает изучение тригонометрии в школе, если её связывать с вопросами топографии (землемерия, геодезии), особенно при изучении начального курса тригонометрии. Но и в дальнейших занятиях тригонометрией выгодно использовать ряд задач, которые ставит и разрешает топография. Рассмотрим одну из самых известных — «задачу Потено».



Фиг. 80.

Задача. Известны стороны и углы некоторого треугольника ABC, а также углы γ и β, под которыми стороны $c = AB$ и $b = CA$ видны из некоторой внутренней точки M. Найти отрезки AM, BM, CM (фиг. 80). Каждый из углов β и γ заключён между 0 и π.

Графическое решение. Начертив данный треугольник ABC, строим геометрическое место точек, из которых данный отрезок AB виден под данным углом γ, а также геометрическое место точек, из которых данный отрезок AC виден под данным углом β. Две дуги, образующие первое геометрическое место, и две дуги, образующие второе геометрическое место, могут иметь не более одной точки пересечения M внутри треугольника ABC (доказать!). Когда построение выполнено, остаётся только измерить отрезки AM, BM, CM.

Вычислительное решение. Будем искать углы $x = ABM$ и $y = ACM$, так как, зная их, из треугольников ABM и ACM легко определить и отрезки AM, BM, CM. Применяя теорему синусов и теорему о сумме внутренних углов четырёхугольника, получаем два уравнения:

$$\sin x : \sin y = b \sin\gamma : c \sin\beta, \quad x + y = 2\pi - (A + \beta + \gamma) = 2\delta,$$

откуда выводим:

$$(\sin x - \sin y) : (\sin x + \sin y) = (b \sin\gamma - c \sin\beta) : (b \sin\gamma + c \sin\beta) = k,$$
$$\operatorname{tg} 0{,}5\,(x - y) = k \operatorname{tg}\delta, \quad x - y = 2\varepsilon$$

и, наконец, получаем: $x = \delta + \varepsilon$, $y = \delta - \varepsilon$.

Для возможности решения задачи необходимо выполнение условия $x + \gamma > 0$, т. е. $A + B + \gamma < 2\pi$. Предполагая, что оно соблюдено, и замечая, что $\pi < \beta + \gamma < 2\pi$, так как точка M по условию находится внутри треугольника ABC, выводим, что $0 < \delta < 0{,}5\,\pi$. Если $b \sin\gamma < c \sin\beta$, меняем местами обозначения сторон b и c и углов β и γ; поэтому можно считать, что $b \sin\gamma \geqq c \sin\beta$, и, следовательно, $0 \leqq k < 1$. Каждый из углов $0{,}5\,x$ и $0{,}5\,y$ меньше $0{,}5\pi$, их разность ε не отрицательна и тоже меньше $0{,}5\,\pi$ (она даже меньше δ), углы x и y определяются однозначно. Задача имеет не более одного решения: одно решение, если окажется $x < B$, $y < C$, когда точка M располагается внутри треугольника ABC; не имеет решения, если $x \geqq B$ или $y \geqq C$, когда точка M оказывается на контуре треугольника ABC или вне его.

Задача становится более трудной, но и более интересной, если отказаться от требования, чтобы точка M была внутри треугольника ABC. Тогда, например, возможен случай неопределённости, так как может быть, что $b \sin\gamma = c \sin\beta$ и $\delta = 0{,}5\,\pi$; тогда дуги AMB и AMC принадлежат одной и той же окружности, описанной около $\triangle\, ABC$, и точка M — любая её точка. Эта общая задача подробно рассматривается в каждом курсе топографии.

Рассмотренную задачу можно рекомендовать для использования на занятиях тригонометрией, ставя её именно как практическую задачу топографии. Треугольник ABC берётся на местности, хотя бы на полу классной комнаты, его элементы A, b, c определяются непосредственным измерением; далее берётся произвольная внутренняя его точка M, объявляемая недоступной, углы β и γ измеряются непосредственно. Производится вычисление длин отрезков AM, BM, CM по указанным выше формулам, а в заключение проверка результатов непосредственным измерением этих отрезков, когда точка M перестаёт считаться недоступной.

В любом учебнике астрономии можно найти большой выбор задач (разной трудности) на применение тригонометрии к астрономии. Но астрономия использует не столько прямолинейную, сколько сферическую тригонометрию Изучение элементов сферической тригонометрии можно рекомендовать как прекрасный материал для математического кружка. За основу можно взять какой-либо учебник, например написанный очень доступно и содержащий много приложений учебник [V, 12] или более полный учебник [V, 29]. Много поучительного содержит по сферической тригонометрии «Энциклопедия элементарной математики» Вебера и Вельштейна. Вывод важнейших формул имеется во многих учебниках астрономии (например [V, 21]).

Знакомство с элементами сферической тригонометрии, помимо возможности решения очень многих астрономических задач, позволяет с успехом решать и разнообразные стереометрические задачи, не разрешимые или трудно разрешимые средствами прямолинейной тригонометрии.

Некоторое представление о всём разнообразии применений тригонометрии в разных отраслях науки и техники даёт книга [V, 22]. Написанная очень просто, вполне доступно для учащихся VIII—IX классов, эта книга содержит и краткое изложение основных понятий прямолинейной тригонометрии, и подробное решение ряда задач из разных областей науки и техники, требующих её применения. Усиленно рекомендуем эту книгу каждому учителю, ведущему занятия по тригонометрии.

СПИСОК КНИГ И СТАТЕЙ ПО ВОПРОСАМ, ОТНОСЯЩИМСЯ К 5-й ЧАСТИ.

1. Березовский Б. Я., Сборник задач по прямолинейной тригонометрии, Учпедгиз, 1936.
2. Бермант А. Ф. и Люстерник Л. А., Тригонометрия, Учпедгиз, 1947.
3. Бончковский Р. Н., Пробный учебник по тригонометрии. Статья в журнале «Математика в школе», 1941, № 4.
4. Борель Э., Тригонометрия, изд. 1909.
5. Вебер Г. и Якобсталь В., Тригонометрия. Книга II, т. II «Энциклопеции элементарной математики» Вебера Г. и Вельштейна И. Перевод с немецкого под ред. проф. Кагана В. Ф.
6. Верещагин И., Собрание вопросов и задач прямолинейной тригонометрии для гимназий и реальных училищ, изд. 10, 1916.
7. Вилейтнер Г., Хрестоматия по истории математики, вып. 2. Геометрия и тригонометрия. Перевод П. С. Юшкевича, ГТТИ, 1932.
8. Внуков В. П. (редактор), Артиллерия, изд. Гостехиздат, 1942.
9. Глазенап С. П., Тригонометрия, ч. 1 — Решение прямолинейных треугольников, изд. 2, 1915; ч. 2—Гониометрия, изд. 2, 1916.
10. Гончаров Д., Элементы гармонического анализа в курсе тригонометрии средней школы, «Математика в школе», 1940, № 3.
11. Доброхотов Ф. В., Очерк аналитической теории тригонометрических функций. Статья в сборнике «Математическое просвещение», вып. 9, ОНТИ, 1936.
12. Кранц П., Сферическая тригонометрия, ГТТИ, 1932.
13. Крогиус В. А., Тригонометрия. Пособие для рабфаков, техникумов и школ взрослых повышенного типа. Учпедгиз, 1932.
14. Крогиус В. А., Программа тригонометрии и стабильный учебник Рыбкина, «Математика в школе», 1937, № 3.
15. Малинин А., Руководство прямолинейной тригонометрии для гимназий и реальных училищ, изд. 19.

16. Маркушевич А. И., Элементы теории аналитических функций, Учпедгиз, 1944.

17. Новосёлов С. И., а) Обратные тригонометрические функции, Учпедгиз, 1939 и 1950; б) Специальный курс тригонометрии, изд. «Советская наука», 1953.

18. Петерс И., Шестизначные таблицы тригонометрических функций, ГТТИ, 1932.

19. Пиотровский Б. Б., Тригонометрия, Госиздат, 1925.

20. Погорелов А. И., Сборник задач по тригонометрии. Пособие для учительских институтов, Учпедгиз, 1949.

21. Полак И. Ф., Курс общей астрономии, ГОНТИ, 1938.

22. Попов Г. Н., Как применялась и применяется тригонометрия на практике, Госиздат, 1931.

23. Пржевальский Е., Прямолинейная тригонометрия и собрание тригонометрических задач, Госиздат, 1923.

24. Рашевский К. Н., Тригонометрия, Учпедгиз, 1931.

25. Репьев В. В., Методика тригонометрии, Учпедгиз, 1937.

26. Рыбкин Н., Прямолинейная тригонометрия. Учебник для IX и X классов средней школы, изд. 26, Учпедгиз, 1948.

27. Рыбкин Н., Сборник задач по тригонометрии для VIII, IX и X классов средней школы, изд. 13, Учпедгиз, 1946.

28. Сегал Б. И. и Семендяев К. А., Пятизначные математические таблицы, изд. Академии наук СССР, 1950.

29. Серре Ж. А., Прямолинейная тригонометрия, Сферическая тригонометрия. Дополнение к теории круговых функций, 1902—1906.

30. Степанов Н. Н., Сферическая тригонометрия, ОНТИ, 1936.

31. Фетисов А. И., Учение о тригонометрических функциях в курсе средней школы. Статья в выпуске 6 «Известий Академии педагогических наук РСФСР» за 1946 г.

32. Хютте (Hütte). Справочник для инженеров, техников и студентов, т. 1, изд. 15, ОНТИ, 1934.

33. Цейтен Г. Г., История математики в XVI и XVII вв., ГТТИ, 1933.

34. Цейтен Г. Г., История математики в древности и в средние века.

35. Шапошников Н. А., Курс прямолинейной тригонометрии и собрание тригонометрических задач, изд. 25, Госиздат, 1923.

36. Шатуновский С. О., Методы решения задач прямолинейной тригонометрии, Госиздат, 1929.

37. Шмулевич П. К., Курс прямолинейной тригонометрии и методы решения тригонометрических задач (Энциклопедия тригонометрии), 1907.

38. Эйлер Леонард, Введение в анализ бесконечно малых, т. I. Перевод с латинского, ОНТИ, 1936.

СОДЕРЖАНИЕ

Глава III. **Методы и формы обучения математике**

Глава IV. **Организация обучения математике**

Глава V. **Формализм в школьном курсе математики и борьба с ним. Другие недочёты постановки преподавания математики**

ЧАСТЬ 2

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ АРИФМЕТИКИ

Глава I. **Общие соображения об изучении арифметики в средней школе**

Глава II. **Учение о натуральном числе**

ЧАСТЬ 3

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ АЛГЕБРЫ

ЧАСТЬ 5

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИИ

Глава II. **Начальный курс тригонометрии**

Глава III. **Общие определения тригонометрических функций**

Глава IV. **Тригонометрические равенства и неравенства**

Глава V. **Таблицы и графики тригонометрических функций**

Глава VI. **Обратные тригонометрические функции. Тригонометрические уравнения**

Владимир Модестович Брадис

Методика преподавания математики в средней школе

Редактор *С. А. Пономарёв*

Техн. редактор *С. Г. Джатиев* **Корректор *А. А. Журавлёв***

Сдано в набор 14/V 1954 г. Подписано к печати 7/IX 1954 г. 60× 92$^1/_{16}$. Печ. л. 31,5. Уч.-изд. л. 37,37. Тираж 100 000. А 06547. Зак. № 963.

Цена без переплёта 11 руб. 20 коп. Переплёт коленкоровый 1 руб. 50 коп.

Книжная ф-ка им. Фрунзе Главиздата Министерства культуры УССР, Харьков, Донец-Захаржевская, 6/8.