И. Н. ЩИТОВ

ВВЕДЕНИЕ В МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Допущено
Учебно-методическим объединением
по направлениям педагогического образования
в *качестве учебного пособия для студентов*
высших учебных заведений, обучающихся
по направлению
"Физико–математическое образование"

УДК 517.9
ББК 22.11
Щ 88

Р е ц е н з е н т ы:
д-р физ.-мат. наук *М.М. Попов*; д-р физ.-мат. наук *Н.Я. Кирпичникова* (Санкт-Петербургское отделение Математичеуого института им. В.А. Стеклова)

Введение в методы оптимизации: Учеб. пособие для вузов / И.Н. Щитов. – М.: Высш. шк., 2008. – 209 С..: ИЛ.

Учебное пособие является введением в общую теорию минимизации функционалов на подмножествах нормированного пространства и такие тесно связанные с ней разделы математики, как математическое программирование, вариационное исчисление и оптимальное управление.

Для студентов, обучающихся по направлению 540200 (050200) «Физико-математическое образование», а также для студентов инженерных и экономических специальностей с повышенным уровнем преподавания математики

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга является элементарным введением в общую теорию экстремальных задач (задач минимизации функционалов на подмножествах нормированных пространств) и такие тесно связанные с ней разделы математики как математическое программирование, вариационное исчисление и оптимальное управление.

Хотя имеется очень большой выбор руководств разной степени трудности и по линейному и нелинейному программированию, и по вариационному исчислению, и по оптимальному управлению, книг, в которых изложение этих дисциплин ведется с общей точки зрения теории экстремальных задач, сравнительно немного, и почти все они достаточно сложны для первоначального знакомства (отметим здесь книги [2], [3], [6], [11], [12], [14], [15], [19], [28], [37], [45]).

Требования к математической подготовке читателя данного учебного пособия умеренны: стандартные курсы анализа, линейной алгебры и обыкновенных дифференциальных уравнений. Несмотря на то, что в первой главе приводятся основные понятия и определения функционального анализа, желательно некоторое предварительное знакомство с ним. В то же время, из серьезных результатов функционального анализа в книге используется, по существу, только принцип сжатых отображений и теорема Хана-Банаха. Остальные необходимые сведения из функционального анализа: дифференцирование отображений нормированных пространств, теоремы отделимости для выпуклых множеств и конусов и т.д., содержатся в первой главе.

Центральное место в книге занимает вторая глава, где с помощью понятия конуса допустимых направлений формулируются необходимые условия минимума (первого и второго порядка) гладкого функционала на некотором подмножестве нормированного пространства. Приводятся также некоторые достаточные условия в этой задаче. Проблема существования решений рассматривается только в простейших случаях.

После этого вывод в последующих главах таких классических результатов, как, например, теорема Куна-Таккера в математическом программировании, уравнения Эйлера и Якоби в вариационном исчислении, или принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении, сводится к вычислению производных соответствующих функционалов, построению конусов допустимых направлений и интерпретации общих необходимых (или достаточных) условий в данных конкретных задачах.

Пособие рассчитано на студентов математических, инженерных и экономических специальностей и основано на курсах лекций по дисциплине "Вариационное исчисление и методы оптимизации которые читались автором в Днепропетровском государственном университете и в Ленинградском педагогическом институте им. А.И. Герцена.

Нумерация теорем, лемм, следствий ведется внутри параграфов, так что, например, теорема 1.1.2. означает теорему 2 из § 1.1. В тех случаях, когда используется координатная запись векторов и возможна путаница, для обозначения векторов (и матриц) применяется жирный шрифт. Символом $\diamondsuit$ обозначается конец определения, доказательства и так далее.

ВВЕДЕНИЕ

Экстремальные задачи – это задачи об отыскании максимумов и минимумов функций и функционалов при возможных ограничениях разного вида.

В той или иной форме задачи такого рода известны давно, и простейшие из них были решены элементарными методами.

В дальнейшем общая задача об отыскании экстремума функции одной переменной способствовала возникновению дифференциального исчисления, а задачи на максимум и минимум для функций одной и нескольких переменных стали классическими задачами анализа.

К их числу относится и задача об экстремуме функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ с дополнительными ограничениями типа равенств: $f_i(x_1, x_2, ...x_n) = 0$, $i = 1, 2, ..., m$, которая решается с помощью правила множителей Лагранжа. Определяя в R^n подмножество Q как множество векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющих этим условиям, рассматриваемую задачу можно сформулировать следующим образом: найти минимум функции $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ (или минимум функции $-f(\mathbf{x})$ для случая максимума $f(x)$) на подмножестве $Q \subset R^n$.

Развитие приложений (в особенности в экономике) потребовало рассмотрения также ограничений типа неравенств, что в конечном итоге вызвало появление новой математической дисциплины – математического программирования; здесь речь идет о минимизации функции $f(\mathbf{x})$ на подмножестве $Q \subset R^n$ вида $Q = \{\mathbf{x} : f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, 2, ..., m\}$. Очевидно, эта задача обобщает предыдущую, т.к. любое ограничение вида $f_i(\mathbf{x}) = 0$ эквивалентно двум ограничениям $f_i(\mathbf{x}) \leq 0$, $f_i(\mathbf{x}) \geq 0$.

Если функции $f(\mathbf{x})$ и $f_i(\mathbf{x})$ линейны, то получается задача линейного программирования, если функции $f(\mathbf{x})$ и $f_i(\mathbf{x})$ – выпуклы (так что Q тоже выпукло), то это задача выпуклого программирования, если $f(\mathbf{x})$ – квадратична, а $f_i(\mathbf{x})$ – линейны, мы приходим к задаче квадратичного программирования.

Параллельно этому возникли и решались, начиная с задачи о брахистохроне (линии наискорейшего спуска), задачи об экстремумах интегральных функционалов; это привело в дальнейшем к созданию общей теории таких задач – вариационному исчислению.

В простейшем случае речь идет о минимизации интегрального функционала

$$f(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt$$

на множестве непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих краевым условиям $x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1$. Рассматривая банахово пространство $C^1(t_0, t_1)$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[t_0, t_1]$ функций с соответствующей нормой, мы приходим к задаче о минимизации $f(x)$ на подмножестве $Q \subset C^1(t_0, t_1)$, выделенном краевыми условиями.

В других задачах вариационного исчисления множество Q может иметь более сложный вид, например, в изопериметрической задаче

$$Q = \{x(t) \in C^1(t_0, t_1) : x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1,\ \int\limits_{t_0}^{t_1} L_0(t, x(t), \dot{x}(t))dt = a\},$$

однако общая формулировка задачи остается прежней.

Дальнейшее развитие вариационного исчисления, вызванное в первую очередь потребностями практики (космические полеты, автоматизация производства и т.д.), определило новый круг задач – задачи оптимального управления.

В качестве примера такой задачи сформулируем задачу быстродействия: дана динамическая система, поведение которой описывается системой дифференциальных уравнений, содержащей управляющие функции $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), ..., u_m(t))$:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n).$$

Требуется выбором управления $\mathbf{u}(t)$ перевести систему из начального состояния $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 = (x_{10}, ..., x_{n0})$ в конечное $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1 = (x_{11}, ..., x_{n1})$ за минимальное время $T = t_1 - t_0$. При этом на управления обычно накладываются ограничения вида $\mathbf{u}(t) \in \Omega \subset R^m$ для всех $t \in [t_0, t_1]$. Эту задачу также можно переформулировать как задачу о минимуме функционала $T(\mathbf{u})$ на некотором подмножестве Q из подходящего пространства управляющих функций.

Тот факт, что разного характера задачи на экстремум могут быть рассмотрены в рамках одной общей задачи о минимуме функционала на некотором подмножестве нормированного пространства, привел в конечном итоге к созданию общей теории экстремальных задач.

Для того чтобы наметить путь решения таких задач, рассмотрим сначала задачу о минимуме функции одной переменной $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Если дифференцируемая функция принимает минимальное значение в некоторой внутренней точке x_0 отрезка, то в этой точке выполняется необходимое условие

$$f'(x) = 0.$$

Необходимое условие выглядит иначе, если минимум достигается на одном из концов отрезка: если точкой минимума является левый конец $x = a$, то

$f'(a) \geq 0$, если же точка минимума – это правый конец $x = b$, то $f'(b) \leq 0$ (рис. 1).

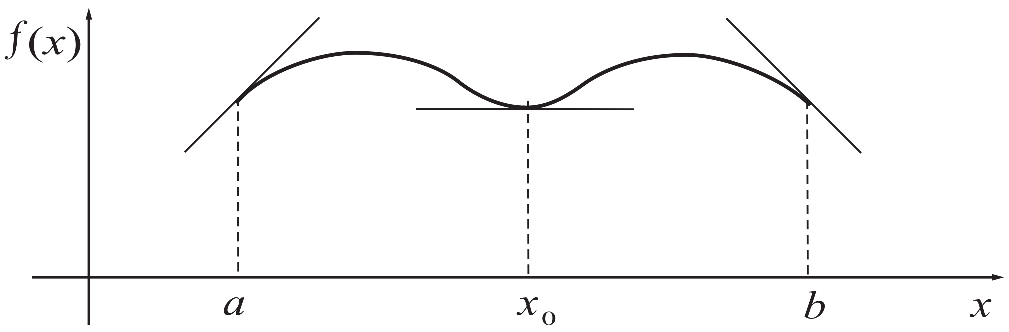

Рис 1

Пусть теперь $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ – дифференцируемая функция n переменных. Если функция $f(\mathbf{x})$ достигает в замкнутой области $Q \subset R^n$ минимума во внутренней точке $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, ..., x_{n0})$, то в этой точке, как известно из анализа, должно выполняться необходимое условие

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = 0, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

или

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) = 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) = (f_{x_1}(\mathbf{x}_0), ..., f_{x_n}(\mathbf{x}_0))$ – вектор-градиент функции $f(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}_0$.

Если точка минимума $\mathbf{x}_0$ – граничная точка области Q, то необходимое условие, как и в одномерном случае, должно отражать тот факт, что, смещаясь из точки $\mathbf{x}_0$ в соседние точки области Q, мы не уменьшаем функцию $f(\mathbf{x})$.

Таким условием является следующее: производная функции $f(\mathbf{x})$ вдоль любого направления $\mathbf{h} = (h_1, ..., h_n)$, "указывающего"из точки $\mathbf{x}_0$ "внутрь"области Q (рис. 2) должна быть неотрицательна, то есть

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) \cdot \frac{h_i}{||\mathbf{h}||} = \frac{1}{||\mathbf{h}||}(\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0), \mathbf{h}) \geq 0. \tag{2}$$

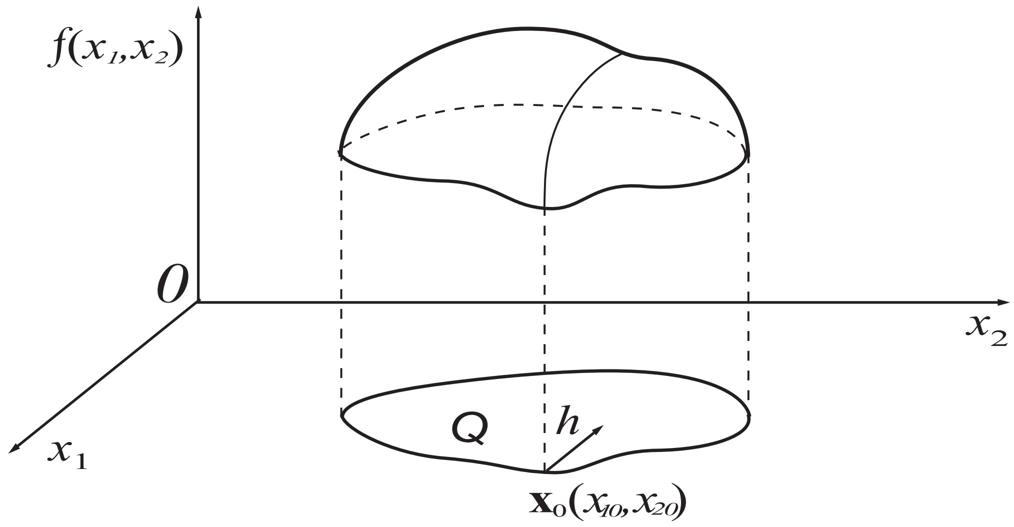

Рис 2

Отметим, что для внутренней точки $\mathbf{x}_0$ условие (2) должно выполняться для любого направления $\mathbf{h}$; в частности, оно выполняется для $-\mathbf{h}$, откуда $(\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0), \mathbf{h}) = 0$. В силу произвольности $\mathbf{h}$ отсюда следует, что $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) = 0$, то есть в этом случае условия (1) и (2) эквивалентны.

Таким образом, необходимое условие (2) справедливо как для внутренней, так и для граничной точки $\mathbf{x}_0$ и является обобщением классического необходимого условия минимума (1) на тот случай, когда минимум $f(\mathbf{x})$ ищется в замкнутой области Q.

Введем линейный функционал $f'(\mathbf{x})$ на R^n (производную Фреше функции $f(\mathbf{x})$), положив $f'(\mathbf{x})\mathbf{h} = (\mathbf{f}'(\mathbf{x}), \mathbf{h})$, тогда условие (2) можно еще записать в виде

$$f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} \geq 0.$$

Переходя к общему случаю, рассмотрим нормированное пространство E, подмножество $Q \subset E$ и дифференцируемый функционал $f(x)$, определенный на E. Пусть точка $x_0 \in Q$ является точкой минимума функционала $f(x)$ на Q. Обозначим через $K \subset E$ должным образом определенное множество векторов h, "указывающих"из точки x_0 "внутрь"множества Q. Оказывается, что и в этом случае необходимое условие минимума в точке x_0 имеет вид

$$f'(x_0)h \geq 0, \quad \forall h \in K.$$

Точные определения и формулировки приводятся во второй главе, а в последующих главах содержатся приложения результатов такого рода к выводу необходимых условий минимума (а в некоторых случаях и достаточных условий) для задач линейного и нелинейного программирования, вариационного исчисления и оптимального управления.

Глава 1. ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

§ 1.1. НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

1.1.1. Основные определения.

Линейное вещественное пространство E называется нормированным, если каждому элементу (точке) $x \in E$ поставлено в соответствие число $||x|| \geq 0$, удовлетворяющее следующим условиям (аксиомы нормы):

1) $||x|| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$,

2) $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$, $\forall \lambda \in R$,

3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Последнюю аксиому обычно называют неравенством треугольника. $\diamondsuit$

Последовательность $\{x_n\}$ элементов из E называется сходящейся (по норме) к элементу $x \in E$, если $||x_n - x|| \to 0$ при $n \to \infty$. $\diamondsuit$

Последовательность $\{x_n\}$ элементов из E называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что $||x_n - x_m|| < \varepsilon$ для всех $n, m \geq N$. $\diamondsuit$

Нормированное пространство E называется банаховым, если оно является полным, то есть если в E любая фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторому элементу $x \in E$. $\diamondsuit$

Множество точек $x \in E$, удовлетворяющих условию $||x - x_0|| \leq r$, $r > 0$, называется шаром радиуса r с центром в точке x_0. Окрестностью точки x называется любое множество, содержащее точку x вместе с некоторым шаром с центром в этой точке. Точка x называется внутренней точкой множества $Q \subset E$, если она входит в Q вместе с некоторой окрестностью. Множество $Q \subset E$ называется открытым, если любая его точка является внутренней. Множество всех внутренних точек множества Q называется внутренностью множества Q и обозначается через Q^0. $\diamondsuit$

Точка $x \in E$ называется предельной точкой множества Q, если в любой окрестности этой точки содержатся точки из Q. Множество Q называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки. Объединение множества Q и всех его предельных точек называется замыканием Q и обозначается $\bar{Q}$.

Точка $x \in E$ называется граничной точкой множества Q, если в любой окрестности этой точки содержатся точки из Q, и точки не принадлежащие Q. $\diamondsuit$

Подпространством нормированного пространства E называется замкнутое линейное подпространство E. $\diamondsuit$

Если E_1 и E_2 – нормированные пространства, то их произведением $E_1 \times E_2$ называется множество, элементами которого являются пары (x, y), $x \in E_1, y \in E_2$, с линейными операциями

1) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$,

2) $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$, $\forall \alpha \in R$,

и с нормой

3) $||(x, y)|| = \max(||x||, ||y||)$. $\diamondsuit$

1.1.2. Примеры нормированных пространств

1. Конечномерное пространство R^n. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$. Положим

$$||\mathbf{x}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Аксиома 3) в данном случае сводится к известному неравенству Минковского для сумм [32], [38]. Определенная так норма называется евклидовой.

Можно определить на R^n и другие нормы, например,

$$||\mathbf{x}||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad ||\mathbf{x}||_2 = \max_{1 \le i \le n} |x_i|.$$

2. Пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $C(a, b)$. Норма функции $x(t)$ принадлежащей $C(a, b)$ определяется следующим образом:

$$||x|| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|.$$

Сходимость по норме в $C(a, b)$ – это равномерная сходимость функций на отрезке $[a, b]$.

3. Пространство $C^p(a, b)$. Его элементами являются функции $x(t)$, непрерывные на $[a, b]$ и имеющие непрерывные производные до порядка p включительно, а норма определяется формулой:

$$||x|| = \sum_{k=0}^{p} \max_{t \in [a,b]} |x^{(k)}(t)|.$$

4. Пространство суммируемых с p-й степенью на отрезке $[a, b]$ функций

$L_p(a,b)$. Для $x(t) \in L_p(a,b)$ положим

$$||x|| = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Здесь аксиома 3) сводится к интегральному неравенству Минковского [32], [38].

Все определенные так пространства являются полными, то есть банаховыми.

1.1.3. Евклидовы и гильбертовы пространства

Линейное пространство E называется евклидовым, если в нем определено скалярное произведение, то есть если для любых x и y из E определено число (x,y), удовлетворяющее следующим условиям:

1) $(x,y) = (y,x)$,

2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$,

3) $(\lambda x, y) = \lambda(x,y)$, $\forall \lambda \in R$,

4) $(x,x) \geq 0$, причем $(x,x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$. $\diamondsuit$

В евклидовом пространстве естественным образом вводится норма

$$||x|| = \sqrt{(x,x)}.$$

При этом неравенство треугольника вытекает из неравенства Коши-Буняковского

$$|(x,y)| \leq ||x|| \cdot ||y||,$$

для доказательства которого достаточно заметить, что для любого числа λ

$$\lambda^2(x,x) + 2\lambda(x,y) + (y,y) = (\lambda x + y, \lambda x + y) \geq 0,$$

то есть дискриминант этого квадратного относительно λ уравнения неположителен:

$$(x,y)^2 \leq (x,x)(y,y). \ \diamondsuit$$

Полное относительно этой нормы пространство называется гильбертовым.

Примерами евклидовых пространств служат:

1) линейное пространство R^n со скалярным произведением

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

2) пространство $L_2(a,b)$ функций интегрируемых с квадратом на $[a,b]$ со скалярным произведением

$$(x,y) = \int_a^b x(t)y(t)dt.$$

Соответствующие нормы совпадают с определенными выше в предыдущем пункте.

1.1.4. Отображения нормированных пространств.

Теорема 1.1.1 (принцип сжатых отображений). Пусть отображение F переводит замкнутый шар B банахова пространства E в себя.

Если для некоторого числа $< q1$

$$||F(x) - F(y)|| \leq q||x-y||, \quad \forall x, y \in B,$$

то в шаре B существует неподвижная точка отображения F, то есть $\exists x_0 \in B$ такая, что

$$F(x_0) = x_0. \ \diamondsuit$$

Доказательство теоремы имеется в любом учебнике по функциональному анализу ([32], [38],...).

Пусть E_1 и E_2 – два нормированных пространства. Отображение A из E_1 в E_2 называется линейным отображением, или линейным оператором, если $\forall x, y \in E_1$ и $\forall \lambda \in R$

1) $A(x+y) = A(x) + A(y)$,

2)$A(\lambda x) = \lambda A(x)$.

Обычно для линейного оператора используют обозначение $A(x) = Ax$. $\diamondsuit$

Линейный оператор $A : E_1 \to E_2$ называется ограниченным, если существует число $C > 0$ такое, что $\forall x \in E_1$

$$||Ax|| \leq C||x||.$$

Нормой линейного ограниченного оператора называется число

$$||A|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||Ax||;$$

оно является наименьшим из возможных чисел C.

Если $x \neq 0$, то для $x' = x/||x||$ имеем $||x'|| = 1$; поэтому $||Ax'|| \leq ||A||$ и значит,

$$||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x||. \ \diamondsuit$$

Пусть F – произвольное отображение, действующее из нормированного пространства E_1 в нормированное пространство E_2 и определенное на некотором открытом подмножестве $U \subset E_1$. Отображение $F : U \to E_2$ называется непрерывным в точке $x \in U$, если для любой окрестности V_y точки $y = F(x)$ найдется окрестность V_x точки x такая, что $F(V_x) \subset V_y$. Отображение F называется непрерывным, если оно непрерывно в каждой точке множества U. $\diamondsuit$

Теорема 1.1.2. Линейный оператор $A : E_1 \to E_2$ непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.

Доказательство. 1) Пусть оператор A – ограничен, тогда $\forall x, y \in E_1$ $||Ax - Ay|| = ||A(x-y)|| \leq C||x-y||$ и поэтому $||Ax - Ay|| \leq \varepsilon$, если $||x-y|| \leq \varepsilon/C$, то есть оператор A – непрерывен.

2) Пусть оператор A непрерывен, тогда $\forall \varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $||Ax|| \leq \varepsilon$, если $||x|| \leq \delta$. Пусть теперь $x \neq 0$ – произвольный элемент E_1, тогда для элемента $x_1 = (\delta/2||x||)x$ выполнено условие $||x_1|| \leq \delta$ и значит, $||Ax_1|| \leq \varepsilon$, откуда

$$||Ax|| \leq \frac{2\varepsilon}{\delta}||x||,$$

то есть A – ограниченный оператор. $\diamondsuit$

Теорема 1.1.3 (теорема Банаха об обратном операторе). Если линейный ограниченный оператор A отображает банахово пространство E_1 на все банахово пространство E_2 взаимно однозначно, то обратный оператор $A^{-1} : E_2 \to E_1$ ограничен. $\diamondsuit$

Доказательство теоремы можно найти в [29], [32], [38] и в других руководствах по функциональному анализу.

Линейным функционалом на нормированном пространстве E называется линейное отображение из E в R.

Множество линейных ограниченных функционалов на E обозначается через E' и является линейным пространством. Если определить норму линейного ограниченного функционала указанным выше способом, то E' становится нормированным пространством. $\diamondsuit$

Пусть $f(x)$ – ненулевой линейный ограниченный функционал на E. Множество точек из E, удовлетворяющих уравнению $f(x) = C$, называется гиперплоскостью в E. $\diamondsuit$

Последовательность $\{x_n\}$ элементов из E слабо сходится к элементу $x \in E$, если $l(x_n) \to l(x)$ при $n \to \infty$ для любого линейного ограниченного функционала $l(x)$. Сходимость по норме в E часто называют сильной сходимостью. $\diamondsuit$

1.1.5. Примеры линейных ограниченных операторов и функционалов

1) Линейный оператор A из R^n в R^m: если $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$, $\mathbf{y} = A\mathbf{x} = (y_1, y_2, ..., y_m) \in R^m$, то $y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j$, то есть оператор A определяется относительно естественных базисов в R^n и R^m матрицей $\mathbf{A} = (a_{ij})$.

Линейные операторы, действующие в конечномерных пространствах всегда ограничены.

2) Линейные функционалы на R^n задаются формулой

$$y = l(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = (\mathbf{a}, \mathbf{x}),$$

то есть каждый функционал определяется некоторым вектором из R^n. Это позволяет отождествить пространство линейных фунционалов на R^n с R^n.

3) Определим для непрерывного ядра $K(t, s)$ оператор A из $C(a, b)$ в $C(a, b)$ следующим образом:

$$y(t) = \int_a^b K(t, s)x(s)ds.$$

Этот оператор линеен и ограничен, при этом

$$||A|| = \max_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(t, s)|ds.$$

4) Функционал $\delta_{t_0}(x) = x(t_0)$ на $C(a, b)$ линеен и ограничен, его норма равна 1.

Упражнения. 1) Проверить выполнение аксиом нормы для примеров нормированных пространств из пункта 1.1.2.

2) Две нормы $||\cdot||_1$ и $||\cdot||_2$, заданные на линейном пространстве E, называются эквивалентными, если для некоторых чисел $\alpha > \beta > 0$ и для любых $x \in E$ выполнены неравенства $\alpha||x||_1 \leq ||x||_2 \leq \beta||x||_1$. Доказать, что если две разные нормы в E эквивалентны третьей, то они эквивалентны.

3) Определим в R^n нормы $||\mathbf{x}||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ и $||\mathbf{x}||_2 = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$. Доказать, что они эквивалентны евклидовой норме в R^n, определенной в примере 1) пункта 1.1.2.

4) Единичный шар с центром в точке $\mathbf{0}$ определяется условием $||\mathbf{x}|| \leq 1$. Построить в R^2 единичные шары для определенных выше норм.

5) Доказать полноту пространств R^n и $C^1(a, b)$.

6) Доказать, что слабо сходящаяся в $C(a, b)$ последовательность функций сходится поточечно.

7) Найти нормы операторов и функционалов, определенных в пункте 1.1.5.

§ 1.2. ТЕОРЕМЫ ОТДЕЛИМОСТИ

1.2.1. Выпуклые множества и функционалы

Определение. Пусть E линейное пространство. Подмножество $Q \subset E$ называется выпуклым, если вместе с любыми двумя своими точками x и y оно содержит соединяющий их отрезок, то есть Q выпукло, если

$$x, y \in Q \implies \alpha x + (1-\alpha)y \in Q, \quad \forall \alpha \in [0,1]. \ \diamondsuit$$

Пересечение любого числа выпуклых множеств и замыкание выпуклого множества (в нормированном пространстве) – выпуклые множества.

Теорема 1.2.1. Если Q – замкнутое выпуклое множество в нормированном пространстве E, и если внутренность множества Q непуста, то $Q = \bar{Q}^0$.

Доказательство. Пусть x_0 – произвольная точка множества Q. По условию существует внутренняя точка $x_1 \in Q$, то есть точка, принадлежащая Q вместе с некоторым шаром B с центром в этой точке.

В силу выпуклости Q, $\forall x \in B$ и $\forall \alpha \in [0,1]$, точка $x_0 + \alpha(x - x_0) = (1-\alpha)x_0 + \alpha x$ принадлежит Q. Когда точка x пробегает шар B, точка $x_0 + \alpha(x - x_0)$ пробегает шар с центром в точке $x_0 + \alpha(x_1 - x_0)$, которая, таким образом, тоже является внутренней точкой множества Q.

Поскольку $x_0 + \alpha(x_1 - x_0) \to x_0$, если $\alpha \to 0$, то точка x_0 является предельной точкой множества Q^0 и значит, $Q = \bar{Q}^0$. $\diamondsuit$

Определение. Функционал $f(x)$ на линейном пространстве E называется выпуклым, если $\forall x, y \in E$ и $\forall \alpha \in [0,1]$

$$f((1-\alpha)x + \alpha y) \leq (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y). \ \diamondsuit$$

Между выпуклыми множествами и выпуклыми функционалами существует определенная связь. Так, если $f(x)$ – выпуклый функционал, то $\forall C \in R$ множество $Q_C = \{x : f(x) \leq C\}$ – выпукло.

Наоборот, если задано выпуклое множество $Q \in E$, подчиненное некоторому условию, то по нему можно построить выпуклый функционал.

Определение. Пусть Q – выпуклое множество линейного пространства E, такое, что для любого $x \in E$ найдется число $r > 0$, для которого $r^{-1}x \in Q$. (Такие множества Q называются поглощающими.)

Функционалом Минковского множества Q называется функционал

$$p_Q(x) = \inf\{r : \ r^{-1}x \in Q, \ r > 0\}. \ \diamondsuit$$

Этот функционал обладает следующими свойствами.

Теорема 1.2.2. 1) $p_Q(x) \le 1$, если $x \in Q$.
2) $p_Q(\alpha x) = \alpha p_Q(x), \quad \forall x \in E, \ \forall \alpha > 0$.
3) $p_Q(x+y) \le p_Q(x) + p_Q(y), \ \forall x, y \in E$.
4) $p_Q(x)$ – выпуклый функционал.

Доказательство. 1) Очевидно.
2) $p_Q(\alpha x) = \inf\{r : \ r^{-1}\alpha x \in Q, \ r > 0\} = \inf\{\alpha r_1 : \ r_1^{-1}x \in Q, \ r_1 > 0\} = \alpha \cdot \inf\{r_1 : \ r_1^{-1}x \in Q, \ r_1 > 0\} = \alpha p_Q(x)$.
3) Пусть $x, y \in E$, а $r_1 > 0$ и $r_2 > 0$ произвольные числа, такие, что $r_1^{-1}x \in Q$ и $r_2^{-1}y \in Q$. В силу выпуклости Q,

$$\frac{x+y}{r_1+r_2} = \frac{r_1}{r_1+r_2} \cdot \frac{x}{r_1} + \frac{r_2}{r_1+r_2} \cdot \frac{y}{r_2} \in Q,$$

и, значит,

$$p_Q(x+y) \le r_1 + r_2,$$

откуда сразу следует, что

$$p_Q(x+y) \le p_Q(x) + p_Q(y).$$

4) Вытекает из 2) и 3). $\diamondsuit$

1.2.2. Теоремы отделимости для выпуклых множеств

Все результаты этого пункта основаны на следующей теореме, являющейся одной из основных теорем функционального анализа.

Теорема 1.2.3 (теорема Хана-Банаха). Пусть $p(x)$ – выпуклый функционал, определенный на линейном пространстве E и пусть E_0 – линейное подпространство в E. Если $f_0(x)$ – линейный функционал на E_0, удовлетворяющий условию

$$f_0(x) \le p(x), \quad \forall x \in E_0,$$

то f_0 может быть продолжен до линейного функционала f на E такого, что

$$f(x) \le p(x), \quad \forall x \in E. \ \diamondsuit$$

Доказательство этой теоремы можно найти в [32], [38] и в других книгах по функциональному анализу.

Следствие 1.2.1. Для любого элемента x_0 нормированного пространства E существует такой линейный ограниченный функционал f на E, что

$$f(x_0) = ||f|| \cdot ||x_0||.$$

Доказательство. Положим $p(x) = ||x||$ и введем в E подпространство $E_0 = \{x : x = \alpha x_0, \ \alpha \in R^1\}$.

Определим на E_0 функционал $f_0(x)$, считая, что $f_0(x) = f_0(\alpha x_0) = = \alpha||x_0||$. При этом, очевидно, $f_0(x) \le ||x||$.

По теореме Хана-Банаха функционал f_0 продолжается до линейного ограниченного функционала f на E такого, что $f(x) \le ||x||$ и так как $f(x_0) = ||x_0||$, то $||f|| = 1$. Поэтому

$$f(x_0) = ||x_0|| = ||f|| \cdot ||x_0||. \ \diamondsuit$$

Теорема 1.2.4 (теорема отделимости для выпуклых множеств). Пусть Q_1 и Q_2 непересекающиеся выпуклые подмножества в нормированном пространстве E. Если хотя бы одно из этих множеств имеет внутренние точки, то существует ненулевой линейный ограниченный функционал $f(x)$ на E и число C такие, что $f(x) \le C$ на Q_1 и $f(x) \ge C$ на Q_2.

Доказательство. Будем считать для определенности, что x_0 – внутренняя точка множества Q_1. Заменяя множества Q_1 и Q_2 на множества $Q_1 - x_0$ и $Q_2 - x_0$, можно свести все к случаю, когда 0 – внутренняя точка множества Q_1.

Выберем произвольную точку y_0 множества Q_2 и введем множество $Q = Q_1 - Q_2 + y_0$ (которое состоит из точек вида $x = x_1 - x_2 + y_0$, $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$). Легко проверяется, что Q – выпуклое множество и 0 – внутренняя точка Q. При этом, поскольку Q_1 и Q_2 не пересекаются, $0 \notin Q_1 - Q_2$ и, значит, $y_0 \notin Q$.

Так как точка 0 входит в Q с некоторым шаром, то $\forall x \in E$ найдется $r > 0$ такое, что $r^{-1}x \in Q$, то есть множество Q является поглощающим. Поэтому для множества Q можно определить функционал Минковского $p_Q(x)$, причем $p_Q(y_0) > 1$ (поскольку $y_0 \notin Q$).

Определим на линейном подпространстве $E_0 = \{x : \ x = \alpha y_0\}$ линейный функционал $f_0(x)$, положив $f_0(x) = f_0(\alpha y_0) = \alpha$.

Если $\alpha \ge 0$, то $f_0(\alpha y_0) \le \alpha p_Q(y_0) = p_Q(\alpha y_0)$; если $\alpha < 0$, то $f_0(\alpha y_0) = \alpha < 0 \le p_Q(\alpha y_0)$, то есть

$$f_0(x) \le p_Q(x), \quad \forall x \in E_0.$$

По теореме Хана-Банаха $f_0(x)$ можно продолжить до функционала $f(x)$, определенного на всем E и такого, что

$$f(x) \le p_Q(x), \quad \forall x \in E.$$

Пусть B – шар с центром в точке 0, содержащийся в Q. Если $x \in B$, то $-x \in B$, поэтому

$$f(x) \le p_Q(x) \le 1, \quad -f(x) = f(-x) \le p_Q(-x) \le 1,$$

откуда

$$|f(x)| \le 1, \quad \forall x \in B,$$

то есть $f(x)$ – ограниченный функционал.

Наконец, для любых точек $x \in Q_1$ и $y \in Q_2$ точка $x - y + y_0 \in Q$ и, значит,

$$f(x) - f(y) = f(x - y) = f(x - y + y_0) - 1 \le p_Q(x - y + y_0) - 1 \le 0,$$

то есть $f(x) \le f(y)$.

Положив $C = \inf_{y \in Q_2} f(y)$, имеем $f(x) \le C$ для $x \in Q_1$ и $f(x) \ge C$ для $x \in Q_2$. $\diamondsuit$

Геометрически утверждение теоремы означает, что существует гиперплоскость (определяемая уравнением $f(x) = C$), которая отделяет множества Q_1 и Q_2 (рис. 3).

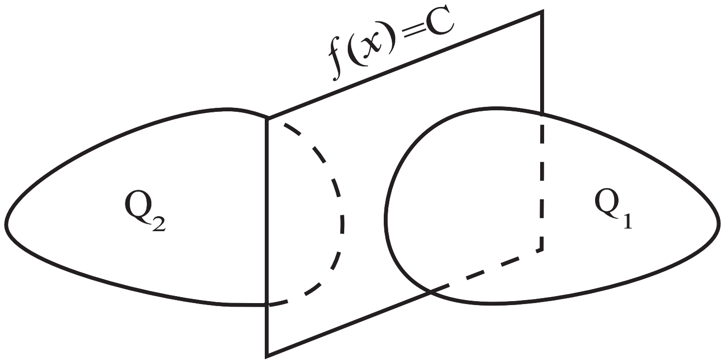

Рис 3.

Теорема 1.2.5 (теорема об опорной гиперплоскости). Если Q – выпуклое подмножество нормированного пространства E, имеющее внутренние точки, а x_0 – граничная точка множества Q, то существует ненулевой линейный ограниченный функционал $f(x)$ такой, что

$$f(x_0) \le f(x), \quad \forall x \in Q.$$

Доказательство. Достаточно применить предыдущую теорему к выпуклым множествам $Q_1 = \{x_0\}$ и $Q_2 = Q \setminus \{x_0\}$. $\diamondsuit$

Доказанную теорему можно переформулировать так: существует гиперплоскость $f(x) = f(x_0)$, проходящая через точку x_0, такая, что множество Q лежит по одну сторону от нее (рис. 4).

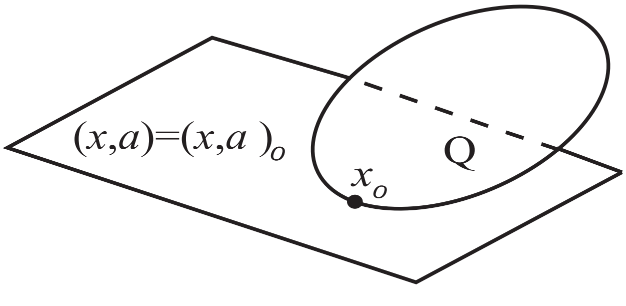

Рис 4.

Для случая конечномерного пространства условия теоремы можно ослабить.

Теорема 1.2.6 (теорема об опорной гиперплоскости в R^n). Если Q – выпуклое множество в R^n, а x_0 – его граничная точка, то существует ненулевой линейный функционал $f(x) = (a, x)$ на R^n, такой, что

$$(a, x) \geq (a, x_0), \quad \forall x \in Q.$$

Доказательство. Так как x_0 – граничная точка множества Q, то существует последовательность точек $x_k \notin \bar{Q}$ такая, что $x_k \to x_0$ при $k \to \infty$.

Пусть B_k – шар с центром в точке x_k, не пересекающийся с $\bar{Q}$. Применяя теорему 1.2.4 к выпуклым множествам $\bar{Q}$ и B_k, получаем, что существуют ненулевой линейный функционал $f_k(x) = (a_k, x)$ и числа C_k такие, что $(a_k, x) \geq C_k$ на $\bar{Q}$ и $(a_k, x) \leq C_k$ на B_k. Отсюда, в частности, следует, что

$$(a_k, x) \geq (a_k, x_k), \quad \forall x \in Q.$$

Последнее неравенство остается справедливым, если в нем заменить a_k на $a_k/||a_k||$, поэтому можно считать, что $||a_k|| = 1$.

Так как из ограниченной последовательности точек $\{a_k\}$ в R^n можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $a_{n_k} \to a$ при $n_k \to \infty$, то, переходя в неравенстве $(a_{n_k}, x) \geq (a_{n_k}, x_{n_k})$ к пределу при $n_k \to \infty$, получаем

$$(a, x) \geq (a, x_0), \quad \forall x \in Q. \diamondsuit$$

Определение. Пусть E – линейное пространство. Подмножество $K \subset E$ называется конусом, если вместе с любой своей точкой x оно содержит луч, проходяший через эту точку, то есть если

$$x \in K \Rightarrow \alpha x \in K, \quad \forall \alpha > 0. \diamondsuit$$

Объединение и пересечение любого числа конусов, а также замыкание конуса – конусы. Конус называется выпуклым, если K – выпуклое множество.

Дальше часто будет использоваться следующая простая лемма.

Лемма 1.2.1. Пусть E – нормированное пространство, $f(x)$ – ненулевой линейный ограниченный функционал на E, Q – подмножество в E и x_0 – внутренняя точка множества Q. Если $f(x) \leq C$ на Q, то $f(x_0) < C$.

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы неверно, то есть $f(x_0) = C$.

Если B – шар с центром в точке x_0, содержащийся в Q, то $B = x_0 + B_0$, где B_0 – шар с центром в точке 0.

Так как функционал $f(x)$ – ненулевой, $f(x) \not\equiv 0$ на B_0 и следовательно, существует точка $y \in B_0$, такая, что $f(y) > 0$. Но тогда $x_0+y \in B$ и $f(x_0+y) = f(x_0) + f(y) > C$, что противоречит условию. $\diamondsuit$

Теорема 1.2.8 (теорема отделимости для конуса). Пусть K – замкнутый, выпуклый конус в нормированном пространстве E и точка $x_0 \notin K$. Тогда существует ненулевой, ограниченный функционал $f(x)$ на E, такой, что $f(x) \geq 0$ на K и $f(x_0) < 0$.

Доказательство. Так как конус K замкнут и $x_0 \notin K$, то существует шар B с центром в точке x_0, не пересекающийся с K.

Применяя к выпуклым множествам K и B теорему 1.2.4, получаем, что существуют ненулевой линейный ограниченный функционал $f(x)$ и число C, такие, что $f(x) \geq C$ на K и $f(x) \leq C$ на B.

Так как $0 \in K$, то $C \leq f(0) = 0$, то есть, $f(x) \leq 0$ на B. Но, по лемме 1.2.1, тогда $f(x_0) < 0$.

С другой стороны, необходимо $f(x) \geq 0$ для всех $x \in K$, так как если бы нашлась точка $z \in K$, для которой $f(z) < 0$, то $f(\alpha z) = \alpha f(z) < C$ для достаточно больших $\alpha > 0$, что противоречит условию, так как $\alpha z \in K$. $\diamondsuit$

Геометрически условие теоремы снова означает, что существует гиперплоскость (гиперплоскость нулей функционала $f(x)$, которая отделяет K и x_0 (рис. 5).)

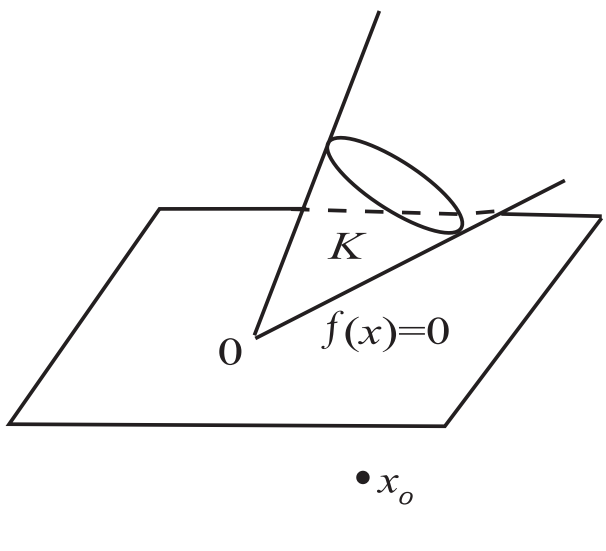

Рис 5.

1.2.3. Свойства линейных ограниченных функционалов, сохраняющих знак или равных нулю на конусах специального вида

Пусть $f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)$ – линейные ограниченные фукционалы на нормированном пространстве E.

Свяжем с ними множества: подпространство $H = \{x: \ f_i(x) = 0, \quad i = 1, ..., m\}$, являющееся пересечением гиперплоскостей, и замкнутый выпуклый конус $K = \{x: \ f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, ..., m\}$, который является пересечением полупространств (и который можно назвать многогранным конусом).

Дальше будет показано, что если $f(x)$ – линейный ограниченный функционал, равный нулю на H, то $f(x)$ – линейная комбинация функционалов $f_1(x), ..., f_m(x)$, а если $f(x) \geq 0$ на K, то $f(x)$ – линейная комбинация функционалов $f_1(x), ..., f_m(x)$ с неположительными коэффициентами.

Рассмотрим сначала случай подпространства.

Лемма 1.2.2. Пусть E – линейное пространство, $f(x)$ и $f_1(x)$ – линейные функционалы на E и $H = \{x: \ f_1(x) = 0\}$. Если $f(x) = 0$ на H, то существует число λ такое, что $f(x) = \lambda f_1(x)$.

Доказательство. Выберем такой элемент $x_0 \in E$, для которого $f_1(x_0) = 1$. Пусть $x \in E$ – произвольный элемент. Положим $y = x - f_1(x)x_0$, тогда $f_1(y) = f_1(x) - f_1(x)f_1(x_0) = 0$, то есть $y \in H$, и значит, по условию $f(y) = 0$.

Таким образом, любой элемент $x \in E$ можно представить в виде $x = y + f_1(x)x_0$ где $f(y) = 0$. Отсюда сразу получается, что $f(x) = f(y) + f_1(x)f(x_0) = f(x_0)f_1(x)$, то есть утверждение леммы выполняется с $\lambda = f(x_0)$. $\diamondsuit$

Лемма 1.2.3. Пусть H – подпространство в линейном пространстве E, $f(x)$ и $f_1(x)$ – линейные функционалы на E, $H_1 = \{x: \ f_1(x) = 0\}$.

Если $f(x) = 0$ на $H \cap H_1$, то существует число λ такое, что $f(x) + \lambda f_1(x) = 0$ на H.

Доказательство. Рассмотрим ограничения функционалов $f(x)$ и $f_1(x)$ на H. Так как $H \cap H_1 = \{x \in H: \ f_1(x) = 0\}$, то по предыдущей лемме существует такое число λ, для которого $f(x) + \lambda f_1(x) = 0$ на H. $\diamondsuit$

Теорема 1.2.9. Пусть E – линейное пространство, $f(x)$ и $f_1(x), ..., f_m(x)$ – линейные функционалы на E, $H = \{x: \ f_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, ..., m\}$.

Функционал $f(x) = 0$ на H тогда и только тогда, когда $f(x)$ является линейной комбинацией функционалов $f_1(x), ..., f_m(x)$.

Доказательство. 1) Необходимость. Будем вести доказательство индукцией по числу m. Для $m = 1$ утверждение теоремы доказано в лемме 1.2.2.

Пусть теорема верна для $m = p - 1$, докажем ее для $m = p$.

Если $H_p = \{x: \ f_i(x) = 0, \ i = 1, 2, ..., p\}$, то $H_p = H_{p-1} \cap \tilde{H}_p$, где $\tilde{H}_p = \{x: f_p(x) = 0\}$. Так как $f(x) = 0$ на H_p, то по лемме 1.2.3 существует число λ_p такое, что $f(x) + \lambda_p f_p(x) = 0$ на H_{p-1}.

Применяя теперь индуктивное предположение к функционалу $f(x) + \lambda_p f_p(x)$ и подпространству H_{p-1}, получаем, что существуют числа $\lambda_1, ..., \lambda_{p-1}$, для которых

$$f(x) + \lambda_p f_p(x) = \lambda_1 f_1(x) + ... + \lambda_{p-1} f_{p-1}(x).$$

Необходимость доказана.

2) Достаточность. Очевидна. $\diamondsuit$

Теорема 1.2.10. Если $f_1(x), ..., f_m(x)$ – линейно независимые функционалы на линейном пространстве E и $H = \{x: \ f_i(x) = 0, \ i = 1, ..., m\}$, то существует m-мерное подпространство H_m в E такое, что $E = H \oplus H_m$ (то есть любой элемент $x \in E$ единственным образом представляется в виде $x = y + z$, где $y \in H, \ z \in H_m$).

Доказательство. Будем доказывать теорему по индукции.

Для $m = 1$, так же, как в лемме 1.2.2, выбираем элемент x_0, для которого $f_1(x_0) = 1$. Тогда произвольный элемент $x \in E$ представим в виде $x = y + f_1(x)x_0$, где $y \in H$. Непосредственно проверяется, что это представление единственно и значит, $E = H \oplus H_1$, где $H_1 = \{z: \ z = \alpha x_0\}$.

Допустим, что теорема верна для $m = p - 1$ и докажем, ее для $m = p$.

Если $\tilde{H}_{p-1} = \{x: \ f_i(x) = 0, \ \ i = 1, ..., p-1\}$, то по предположению индукции существует $p-1$-мерное подпространство H_{p-1} такое, что $E = \tilde{H}_{p-1} \oplus H_{p-1}$.

Рассмотрим ограничение функционала $f_p(x)$ на $\tilde{H}_{p-1}$. Оно отлично от нуля, так как иначе, по теореме 1.2.9, $f_p(x)$ был бы линейной комбинацией функционалов $f_1(x), ..., f_{p-1}(x)$. Применяя к $\tilde{H}_{p-1}$ и $f_p(x)$ уже доказанное утверждение следствия для $m = 1$, получаем, что $\tilde{H}_{p-1} = H \oplus H_1$ и значит, $E = H \oplus H_1 \oplus H_{p-1} = H \oplus H_p$. $\diamondsuit$

Изучая свойства функционала, сохраняющего знак на многогранном конусе, ограничимся конечномерным случаем.

Пусть $a_1, a_2, ..., a_m$ – элементы из R^n. Рассмотрим множество

$$K = \{x: \ x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i, \ \ \lambda_i \geq 0, \ \ i = 1, 2, ..., m\}.$$

Очевидно, K – выпуклый конус. Будем говорить, что конус K порожден элементами $a_1, a_2, ..., a_m$.

Лемма 1.2.4. Конус K, порожденный элементами $a_1, a_2, ..., a_m$, замкнут в R^n.

Доказательство. Если $m = 1$, то K – полупрямая и утверждение леммы очевидно.

Используя индукцию, предположим, что лемма верна для $m = p - 1$ и докажем, что она верна для $m = p$.

Возможны два варианта.

1) Конус K содержит векторы $-a_1, -a_2, ..., -a_p$, тогда K – подпространство в R^n и значит, K замкнут.

2) Конус K не содержит хотя бы одного из векторов $-a_1, -a_2, ..., -a_p$; например, пусть $-a_p \notin K$.

Обозначим через K_1 конус, порожденный векторами $a_1, ..., a_{p-1}$, то есть

$$K_1 = \{x : \ x = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i a_i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, ..., p-1\}.$$

По индуктивному предположению конус K_1 замкнут. Любой элемент $x \in K$ можно записать в виде $x = y + \lambda a_p$, где $y \in K_1$, $\lambda \geq 0$.

Пусть теперь x_0 – предельная точка K и $\{x_r\}$ – сходящаяся к ней последовательность точек из K. Имеем $x_r = y_r + \lambda_r a_p$. Докажем, что последовательность чисел $\{\lambda_r\}$ ограничена.

Если бы это было не так, то нашлась бы подпоследовательность $\lambda_{r_k} \to \infty$. Но тогда $\lambda_{r_k}^{-1} x_{r_k} \to 0$ и значит, $\lambda_{r_k}^{-1} y_{r_k} = \lambda_{r_k}^{-1} x_{r_k} - a_p \to -a_p$. В силу замкнутости конуса K_1 отсюда следовало бы, что $-a_p \in K_1$, что противоречит предположению.

Таким образом, последовательность $\{\lambda_r\}$ ограничена, и из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\lambda_{r_l} \to \lambda_0$. Так как $y_{r_l} = x_{r_l} - \lambda_{r_l} a_p \to x_0 - \lambda_0 a_p = z \in K_1$, то $x_0 = z + \lambda_0 a_p$, то есть $x_0 \in K$. $\Diamond$

Теорема 1.2.11 (теорема Фаркаша). Пусть $f_1(x) = (a_1, x), ..., f_m(x) = = (a_m, x)$ – линейные функционалы на R^n и

$$K = \{x : \ f_i(x) = (a_i, x) \leq 0, \quad i = 1, ..., m\}.$$

Для того чтобы линейный функционал $f(x) = (a_0, x)$ удовлетворял условию $f(x) \geq 0$ на K, необходимо и достаточно, чтобы нашлись такие числа $\lambda_1 \geq 0, ..., \lambda_m \geq 0$, что

$$a_0 + \lambda_1 a_1 + ... + \lambda_m a_m = 0.$$

Доказательство. 1) Необходимость. Пусть $f(x) \geq 0$ на K. Обозначим через $\tilde{K}$ конус, порожденный векторами $-a_1, ..., -a_m$, то есть

$$\tilde{K} = \{a : \ a = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, ..., m\}.$$

Очевидно, что $\tilde{K}$ – выпуклый конус, а по лемме 1.2.4 он замкнут.

Достаточно доказать, что $a_0 \in \tilde{K}$. Если бы это было не так, то есть $a_0 \notin \tilde{K}$, то по теореме 1.2.8 нашелся бы такой функционал $\tilde{f}(x) = (\tilde{a}, x)$ на R^n, что $\tilde{f}(x) \geq 0$ на $\tilde{K}$ и $\tilde{f}(a_0) < 0$. Так как $-a_i \in \tilde{K}$, то $\tilde{f}(-a_i) \geq 0$ и значит, $f_i(\tilde{a}) = (a_i, \tilde{a}) = \tilde{f}(a_i) \leq 0$, то есть $\tilde{a} \in K$.

Но тогда, в силу условий теоремы, $f(\tilde{a}) \geq 0$, откуда $\tilde{f}(a_0) = (\tilde{a}, a_0) = f(\tilde{a}) \geq 0$, что противоречит выбору функционала $\tilde{f}(x)$. Значит, $a_0 \in K$.

2) Достаточность. Допустим, что существуют числа $\lambda_1 \geq 0, ..., \lambda_m \geq 0$ такие,что

$$a_0 + \lambda_1 a_1 + ... + \lambda_m a_m = 0.$$

Тогда

$$f(x) = (a_0, x) = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (a_i, x)$$

и если $x \in K$, то $f(x) \geq 0$. $\diamondsuit$

Рассмотрим, наконец, случай, когда функционал $f(x)$ сохраняет знак на некотором конусе, являющемся пересечением выпуклого конуса и подпространства.

Теорема 1.2.12 (теорема Крейна). Пусть E – нормированное пространство, $f(x)$ – линейный ограниченный функционал на E, K – выпуклый конус, содержащий внутренние точки и H – подпространство в E.

Если $f(x) \geq 0$ на $K \cap H$, то существует число $\lambda \geq 0$ и линейный ограниченный функционал $f_1(x)$ на E, удовлетворяющий условию $f_1(x) = 0$ на H, не равные одновременно нулю и такие, что

$$\lambda f(x) + f_1(x) \geq 0, \quad \forall x \in K.$$

Доказательство. Обозначим через K^0 внутренность конуса K. По условию конус K^0 не пуст.

1) Пусть $K^0 \cap H = \emptyset$. Так как K^0 и H – выпуклые непересекающиеся множества в E, то по теореме 1.2.4 существует такой ненулевой линейный функционал $f_1(x)$ на E, что $f_1(x) \geq 0$ на K^0 и $f_1(x) \leq 0$ на H.

Так как по теореме 1.2.1 $\bar{K}^0 = \bar{K}$, по непрерывности $f_1(x) \geq 0$ на K и так как подпространство H вместе с любой точкой x содержит точку $-x$, то $f_1(x) = 0$ на H.

Достаточно положить в этом случае $\lambda = 0$.

2) Пусть $K^0 \cap H \neq \emptyset$.

Если $f(x) \equiv 0$ на H, то можно взять $f_1(x) = -f(x)$ и $\lambda = 1$.

Будем поэтому предполагать, что $f(x) \not\equiv 0$ на H. Пусть $H_1 = \{x \in H : f(x) = 0\}$. Если бы нашлась точка $x_0 \in K^0 \cap H_1$, то $f(x_0) = 0$, но так как $f(x) \geq 0$ на $K^0 \cap H$ и x_0 внутренняя точка множества $K^0 \cap H$ в нормированном пространстве H, то это означало бы по лемме 1.2.1, что ограничение функционала $f(x)$ на H является нулевым, то есть $f(x) = 0$ на H, что противоречит предположению.

Поэтому $K^0 \cap H_1 = \emptyset$ и так как H_1 – подпространство, то по первой части доказательства существует ненулевой линейный ограниченный функционал $\tilde{f}(x)$ на E такой, что $\tilde{f}(x) \geq 0$ на K и $\tilde{f}(x) = 0$ на H_1.

По лемме 1.2.3 из того, что $\tilde{f}(x) = 0$ на H_1, следует, что $\tilde{f}(x) = \lambda f(x)$ на H; при этом, если $x_0 \in K^0 \cap H$, то поскольку $\tilde{f}(x) \geq 0$ на K и x_0 – внутренняя точка, $\tilde{f}(x_0) > 0$ по лемме 1.2.1. и значит, $\lambda \neq 0$.

Полагая теперь $f_1(x) = \tilde{f}(x) - \lambda f(x)$, получаем, что $f_1(x) = 0$ на H и $\lambda f(x) + f_1(x) = \tilde{f}(x) \geq 0$ на K. $\diamondsuit$

Упражнения. 1) Доказать, что любой шар в нормированном пространстве E – выпуклое множество.

2) Доказать, что пересечение любого числа выпуклых множеств и замыкание выпуклого множества – выпуклые множества.

3) Пусть E – евклидово пространство. Доказать, что функционал $f(x) = (x, x)$ – выпуклый.

4) Доказать, что непрерывный функционал f на E является выпуклым тогда и только тогда, когда $\forall x, y \in E$

$$f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y).$$

5) Доказать, что если функционал $f(x)$ на E – выпуклый и неотрицательный, то $f^2(x)$ – выпуклый функционал.

6) Доказать, что сумма выпуклых функционалов – выпуклый функционал.

7) Пусть Ω – замкнутая, ограниченная область в R^2 и $u(x, y) \in E = C^1(\Omega)$. Доказать, что

$$f(u) = \iint\limits_{\Omega} [u_x^2 + u_y^2] dx dy$$

– выпуклый функционал на E.

8) Доказать, что любые две точки в нормированном пространстве E отделимы.

9) Доказать, что объединение и пересечение любого числа конусов, а также замыкание конуса – конусы.

10) Заданы векторы $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3} \in R^2$. Построить конус $K = \{\mathbf{x} \in R^2 : (\mathbf{x}, \mathbf{a_i}) \leq 0,\ i = 1, 2, 3\}$.

§ 1.3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

1.3.1. Производная отображения

Если $f(x)$ – обычная числовая функция одной переменной, то существование производной в точке x означает, что

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + o(h).$$

Существенно здесь то, что член $f'(x)h$ линеен по h.

На случай отображений произвольных нормированных пространств это определение обобщается следующим образом.

Определение. Пусть E_1 и E_2 – нормированные пространства и F – отображение, действующее из E_1 в E_2.

Отображение F называется дифференцируемым в точке $x \in E_1$, если существует линейный ограниченный оператор $A : E_1 \to E_2$ такой, что $\forall h \in E_1$

$$F(x+h) = F(x) + Ah + \omega(x, h),$$

где

$$\lim_{||h|| \to 0} \frac{||\omega(x, h)||}{||h||} = 0. \ \diamondsuit$$

Сформулированное определение справедливо и в том случае, когда отображение F задано на некотором открытом подмножестве $U \subset E_1$; здесь следует брать $h \in V_0$, где V_0 – некоторая окрестность нуля.

Определение. Оператор A называется производной (сильной производной или производной Фреше) отображения F в точке x и обозначается $F'(x)$. Выражение $F'(x)h$ называется дифференциалом отображения F в точке x, отвечающим приращению h. $\diamondsuit$

Таким образом, отображение дифференцируемо в точке x, если в некоторой окрестности этой точки его можно аппроксимировать линейным ограниченным оператором с точностью до величин высшего по сравнению с h порядка малости.

Легко проверяется, что если производная $F'(x)$ в точке x существует, то она определяется единственным образом и что отображение F непрерывно в точке x.

Определение. Отображение $F : E_1 \to E_2$ называется дифференцируемым, если оно дифференцируемо в каждой точке. $\diamondsuit$

Таким образом, если F – дифференцируемое отображение, то

$$F(x+h) = F(x) + F'(x)h + \omega(x, h).$$

Будем называть $\omega(x, h)$ остаточным членом; очевидно, $\omega(x, 0) = 0$.

Рассмотрим несколько простых примеров.

1) Пусть $F : E_1 \to E_2$ – постоянное отображение, то есть $\forall x \in E_1$, $F(x) = y_0 \in E_2$. Тогда $F(x+h) = F(x)$ и значит, $F'(x) = 0$.

2) Пусть F – непрерывное аффинное отображение из E_1 в E_2, то есть $F(x) = y_0 + Ax$, где $y_0 \in E_2$, а A – линейный ограниченный оператор. Так как $F(x + h) = y_0 + A(x+h) = F(x) + Ah$, то $F'(x) = A$. В частности, если $F(x) = Ax$, то $F'(x) = A$.

3) Рассмотрим функцию действительного аргумента со значениями в нормированном пространстве E, то есть отображение $R \to E$. Функция $F(t)$ дифференцируема в точке $t \in R$, если

$$F(t+h) = F(t) + F'(t)h + \omega(t,h),$$

где $F'(t)$ – линейное отображение из R в E. Так как любое линейное отображение A действует из R в E по правилу $Ah = h \cdot a$ (где $a = A \cdot 1 \in E$), то $F'(t)$ можно отождествить с соответствующим элементом из E, то есть можно считать что $F'(t) \in E$, и тогда, очевидно,

$$F'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(F(t+h) - F(t)).$$

4) Пусть E – евклидово пространство и $f(x) = ||x||^2 = (x,x)$. Так как

$$f(x+h) = (x+h, x+h) = (x,x) + 2(x,h) + (h,h) = f(x) + 2(x,h) + \omega(h),$$

то $f'(x) = 2x$.

1.3.2. Основные правила дифференцирования

Теорема 1.3.1. Пусть F_1 и F_2 – отображения, действующие из нормированного пространства E_1 в нормированное пространство E_2. Если F_1 и F_2 дифференцируемы в точке x, то отображение $\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2$ также дифференцируемо в точке x и

$$(\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2)'(x) = \alpha_1 F_1'(x) + \alpha_2 F_2'(x).$$

Доказательство.

$$(\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2)(x+h) = \alpha_1 F_1(x+h) + \alpha_2 F_2(x+h) =$$

$$= \alpha_1(F_1(x) + F_1'(x)h + \omega_1(x,h)) + \alpha_2(F_2(x) + F_2'(x)h + \omega_2(x,h)) =$$

$$= (\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2)(x) + (\alpha_1 F_1'(x) + \alpha_2 F_2'(x))h + \omega(x,h). \diamondsuit$$

Теорема 1.3.2 (теорема о производной сложного отображения). Пусть E_1, E_2, E_3 – нормированные пространства и $F : E_1 \to E_2$, $G : E_2 \to E_3$. Если отображение F дифференцируемо в точке $x \in E_1$, а отображение G дифференцируемо в точке $y = F(x) \in E_2$, то отображение $G \circ F : E_1 \to E_3$ дифференцируемо в точке x и его производная равна

$$(G \circ F)'(x) = G'(y) \circ F'(x) = G'(F(x)) \circ F'(x).$$

Доказательство.

$$G(F(x+h)) = G(F(x) + F'(x)h + \omega(x,h)) =$$

$$= G(F(x)) + G'(F(x))(F'(x)h + \omega_F(x,h)) + \omega_G(F(x), F'(x)h + \omega_F(x,h)) =$$
$$= (G \circ F)(x) + (G'(F(x)) \circ F'(x))h + \omega(x,h),$$

где

$$\omega(x,h) = G'(F(x))\omega_F(x,h) + \omega_G(F(x), F'(x)h + \omega_F(x,h)).$$

Остается доказать, что $||\omega(x,h)||/||h|| \to 0$, если $||h|| \to 0$. Поскольку

$$\frac{||\omega(x,h)||}{||h||} \le \frac{||G'(F(x))|| \cdot ||\omega_F(x,h))||}{||h||} + \frac{||\omega_G(F(x), F'(x)h + \omega_F(x,h))||}{||h||},$$

то достаточно доказать, что каждый из членов в правой части стремится к нулю, если $||h|| \to 0$. Для первого члена это вытекает из свойств $\omega_F(x,h)$.

Для того, чтобы оценить второй член, введем обозначение $z = F'(x)h + \omega_F(x,h)$ и заметим, что для некоторых чисел $C > 0$ и $C' > 0$

$$||z|| \le ||F'(x)|| \cdot ||h|| + ||\omega_F(x,h)|| \le C||h||,$$

если $||h|| \le C'$. Отсюда в частности вытекает, что $||z|| \to 0$, если $||h|| \to 0$. Поэтому

$$\frac{||\omega_G(F(x),z)||}{||h||} = \frac{||\omega_G(F(x),z)||}{||z||}\frac{||z||}{||h||} \le C\frac{||\omega_G(F(x),z)||}{||z||} \to 0,$$

если $||h|| \to 0$. $\diamondsuit$

Теорема 1.3.3 (формулы конечных приращений). Если отображение $F : E_1 \to E_2$ дифференцируемо в некоторой окрестности точки $x \in E$, то для достаточно малых по норме h справедливы неравенства

1) $||F(x+h) - F(x)|| \le \sup_{\theta \in [0,1]} ||F'(x+\theta h)|| \cdot ||h||$,

2) $||\omega(x,h)|| = ||F(x+h) - F(x) - F'(x)h|| \le \sup_{\theta\in[0,1]} ||F'(x+\theta h) - F'(x)|| \cdot ||h||$.

Доказательство. Пусть l произвольный линейный ограниченный функционал на E_2. Определим функцию $\alpha : R^1 \to R^1$, положив $\alpha(t) = l(F(x+th))$. По теореме о производной сложного отображения $\alpha'(t) = l(F'(x+th)h)$.

Так как по формуле конечных приращений для действительных функций $\alpha(1) - \alpha(0) = \alpha'(\theta)$, где $0 < \theta < 1$, то

$$l(F(x+h)) - l(F(x)) = l(F'(x+\theta h)h).$$

Выбирая здесь по следствию 1.2.1 функционал l таким, что для элемента $y = F(x+h) - F(x)$ выполнено условие $|l(y)| = ||l|| \cdot ||y||$, получаем

$$||l|| \cdot ||F(x+h) - F(x)|| \le ||l|| \cdot ||F'(x+\theta h)|| \cdot ||h||,$$

откуда следует 1).

Аналогично, так как

$$l(F(x+h)-F(x)-F'(x)h)=l((F'(x+\theta h)-F'(x))h),$$

то, выбирая здесь l таким, что для элемента $y=F(x+h)-F(x)-F'(x)h$ выполнено условие $|l(y)|=||l||\cdot||y||$, имеем

$$||l||\cdot||F(x+h)-F(x)-F'(x)h||\le||l||\cdot||F'(x+\theta h)-F'(x)||\cdot||h||,$$

откуда получается 2). $\diamondsuit$

Определение. Отображение $F:E_1\to E_2$ называется непрерывно дифференцируемым в точке x_0, если оно дифференцируемо в некоторой окрестности этой точки и производная $F'(x)$ непрерывна в точке x_0 в операторной норме, то есть $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ такое, что $||F'(x)-F'(x_0)||\le\varepsilon$, если $||x-x_0||\le\delta$. $\diamondsuit$

Определение. Пусть E_1,E_2,E_3 – нормированные пространства и $F:E_1\times E_2\to E_3$, то есть $F(x,y)$ – функция двух аргументов $x\in E_1,\ y\in E_2$, принимающая значения в E_3.

Отображение F имеет в точке (x,y) частную производную по x, если отображение из E_1 в E_3, получающееся, если в $F(x,y)$ зафиксировать y, дифференцируемо в точке x. Эта производная обозначается через $F'_x(x,y)$ и является линейным ограниченным оператором, действующим из E_1 в E_3. Аналогично определяется частная производная $F'_y(x,y)$. $\diamondsuit$

Теорема 1.3.4 (теорема о полной производной). 1) Если отображение $F:E_1\times E_2\to E_3$ дифференцируемо в точке (x,y), то оно имеет в этой точке частные производные, причем

$$F'(x,y)(h_1,h_2)=F'_x(x,y)h_1+F'_y(x,y)h_2. \tag{1}$$

2) Если частные производные F'_x и F'_y определены и непрерывны в некоторой окрестности точки (x,y), то отображение $F(x,y)$ дифференцируемо в точке (x,y) и его производная вычисляется по формуле (1)

Доказательство. 1) По условию

$$F(x+h_1,y+h_2)=F(x,y)+F'(x,y)(h_1,h_2)+\omega(x,y,h_1,h_2),$$

где

$$\frac{||\omega(x,y,h_1,h_2)||}{||h_1||+||h_2||}\to 0,$$

если $||h_1||\to 0$, $||h_2||\to 0$.

Полагая здесь $h_2=0$, получаем, что существует частная производная $F'_x(x,y)$, и аналогично, при $h_1=0$, что существует $F'_y(x,y)$. Наконец, используя линейность $F'(x,y)$, получаем

$$F'(x,y)(h_1,h_2)=F'(x,y)(h_1,0)+F'(x,y)(0,h_2)=F'_x(x,y)h_1+F'_y(x,y)h_2.$$

где, например, $F'_x(x,y)h_1 = F'(x,y)(h_1,0)$.

2) Имеем

$$F(x+h_1,y+h_2)-F(x,y) = F(x+h_1,y+h_2)-F(x,y+h_2)+F(x,y+h_2)-F(x,y) =$$

$$= F'_x(x,y+h_2)h_1 + \omega_x(x,y+h_2,h_1) + F'_y(x,y)h_2 + \omega_y(x,y,h_2) =$$

$$= F'_x(x,y)h_1 + F'_y(x,y)h_2 + \omega(x,y,h_1,h_2),$$

где

$$\omega(x,y,h_1,h_2) = (F'_x(x,y+h_2) - F'_x(x,y))h_1 + \omega_x(x,y+h_2,h_1) + \omega_y(x,y,h_2).$$

Используя для оценки $||\omega(x,y+h_2,h_1)||$ формулу конечных приращений (теорема 1.3.3.), получаем

$$\frac{||\omega(x,y,h_1,h_2)}{||h_1||+||h_2||} \le ||F'_x(x,y+h_2) - F'_x(x,y)||+$$

$$+ \sup_{\theta\in[0,1]} ||F'_x(x+\theta h_1, y+h_2) - F'_x(x,y+h_2)|| + \frac{||\omega_y(x,y,h_2)}{||h_2||} \to 0,$$

если $||h_1|| \to 0$ и $||h_2|| \to 0$, в силу непрерывности F'_x и свойств ω_y. $\diamondsuit$

1.3.3. Производные некоторых отображений и функционалов

1) Пусть $f_1(x),...,f_m(x)$ – дифференцируемые функционалы на нормированном пространстве E. Рассмотрим отображение $\mathbf{f}: E \to R^m$, которое задается формулой $\mathbf{f}(x) = (f_1(x),...,f_m(x))$. Поскольку

$$\mathbf{f}(x+h) - \mathbf{f}(x) = (f_1(x+h) - f_1(x),...,f_m(x+h) - f_m(x)) =$$

$$= (f'_1(x)h,...,f'_m(x)h) + (\omega_1(x,h),...,\omega_m(x,h)),$$

и $\omega(x,h) = (\omega_1(x,h),...,\omega_m(x,h))$ удовлетворяет условию $||\omega(x,h)||/||h|| \to 0$, если $||h|| \to 0$, то

$$\mathbf{f}'(x)h = (f'_1(x)h,...,f'_m(x)h).$$

2) Рассмотрим отображение $\mathbf{F}: R^n \to R^m$. Так как $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(x_1,,,.x_n),$ $...,f_m(x_1,...,x_n))$, то, если функции $f_i(x_1,...,x_n)$ дифференцируемы, имеем по предыдущему

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x})\mathbf{h} = (f'_1(\mathbf{x})\mathbf{h},...,f'_m(\mathbf{x})\mathbf{h}) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(\mathbf{x})h_k,...,\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(\mathbf{x})h_k\right),$$

то есть

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}) = \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{matrix} \right) .$$

Обратно, нетрудно показать, что если отображение $\mathbf{F}$ дифференцируемо, то функции $f_i(x_1, ..., x_n)$ – дифференцируемы.

3) Пусть $L(t, x, \dot{x})$ – непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов. Определим отображение $\tilde{L} : C^1(t_0, t_1) \to C(t_0, t_1)$, положив $\tilde{L}(x) = L(t, x(t), \dot{x}(t))$.

По формуле конечных приращений для функций нескольких переменных

$$L(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) - L(t, x, \dot{x}) = L_x(t, x+\theta h, \dot{x}+\theta\dot{h})h + L_{\dot{x}}(t, x+\theta h, \dot{x}+\theta\dot{h})\dot{h} =$$
$$= L_x(t, x, \dot{x})h + L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x})\dot{h} + \alpha_1(t, x, \dot{x}, \theta h, \theta\dot{h})h + \alpha_2(t, x, \dot{x}, \theta h, \theta\dot{h})\dot{h} =$$
$$= L_x(t, x, \dot{x})h + L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x})\dot{h} + \omega(t, x, \dot{x}, h(t), \dot{h}(t)),$$

где $0 \le \theta(t, x, \dot{x}, h, \dot{h}) \le 1$ и, например,

$$\alpha_1(t, x, \dot{x}, \theta h, \theta\dot{h}) = L_x(t, x+\theta h, \dot{x}+\theta\dot{h}) - L_x(t, x, \dot{x}).$$

Частные производные функции $L(t, x, \dot{x})$ непрерывны и значит, равномерно непрерывны на любом замкнутом ограниченном множестве, поэтому $\alpha_i(t) \to 0$ равномерно на $[t_0, t_1]$, если $||h|| \to 0$, то есть если $h(t) \to 0$ и $\dot{h}(t) \to 0$ равномерно на $[t_0, t_1]$. Отсюда следует, что $||\omega||_C/||h||_{C^1} \to 0$, если $||h||_{C^1} \to 0$ и поэтому,

$$\tilde{L}'(x)h = L_x(t, x(t), \dot{x}(t))h(t) + L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\dot{h}(t).$$

Отображение $\tilde{L}'(x) : C^1(t_0, t_1) \to C(t_0, t_1)$ линейно, ограничено и непрерывно зависит от x.

4) Вычислим производную интегрального функционала

$$f(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt,$$

определенного на банаховом пространстве $C^1(t_0, t_1)$. Будем предполагать, что функция $L(t, x, \dot{x})$ – непрерывно дифференцируема.

Функционал f можно рассматривать как сложное отображение: $f = \tilde{f} \circ \tilde{L}$, где отображение $\tilde{L} : C^1(t_0, t_1) \to C(t_0, t_1)$ определено в предыдущем примере, а функционал $\tilde{f} : C(t_0, t_1) \to R^1$ задается формулой

$$\tilde{f}(y) = \int\limits_{t_0}^{t_1} y(t)dt$$

и является линейным ограниченным функционалом.

По теореме о производной сложного отображения (теорема 1.3.2) получаем, что функционал f дифференцируем и

$$f'(x)h = \int\limits_{t_0}^{t_1} [L_x(t, x(t), \dot{x}(t))h(t) + L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\dot{h}(t)]dt.$$

Отображение $f'(x)$ непрерывно зависит от x, то есть $f(x)$ – дифференцируемый функционал.

5) Аналогично вычисляется производная интегрального функционала

$$f(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t), ..., x^{(n)}(t))dt,$$

определенного на банаховом пространстве $C^n(t_0, t_1)$.

Если функция $L(t, x, ..., x^{(n)})$ – непрерывна вместе с производными первого порядка по аргументам $x, x', ..., x^{(n)}$, то

$$f'(x)h = \int\limits_{t_0}^{t_1} [L_x h + L_{x'} h' + ... + L_{x^{(n)}} h^{(n)}]dt.$$

6) Пусть $E = C^1(t_0, t_1) \times ... \times C^1(t_0, t_1) = C^1_n(t_0, t_1)$ – банахово пространство непрерывно дифференцируемых на $[t_0, t_1]$ n-мерных вектор-функций. Если $\mathbf{x} \in E$, то $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ и $||\mathbf{x}||_{C^1_n} = \max_i ||x_i||_{C^1}$.

Вычислим производную функционала

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, ..., x_n) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x_1(t), ..., x_n(t), \dot{x}_1(t), ..., \dot{x}_n(t))dt.$$

Нетрудно показать, рассуждая так же, как в примерах 3) и 4), что

$$f'(\mathbf{x})\mathbf{h} = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_k} h_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \dot{h}_k \right] dt,$$

или

$$\mathbf{f}'(x)\mathbf{h} = \int\limits_{t_0}^{t_1} [(\text{Ł}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)), \mathbf{h}(t)) + (\text{Ł}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)), \dot{\mathbf{h}}(t))]dt,$$

где

$$Ł_{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial L}{\partial x_n}\right), \quad Ł_{\dot{\mathbf{x}}} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathrm{x}}_1}, \dots, \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathrm{x}}_n}\right).$$

7) Пусть Ω – замкнутая ограниченная область в R^2, $E = C^1(\Omega)$, $u(x, y) \in E$ и

$$f(u) = \iint\limits_{\Omega} L(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y))dxdy.$$

Если функция $L(x, y, u, u_x, u_y)$ непрерывна и непрерывны производные первого порядка по аргументам u, u_x, u_y, то функционал $f(u)$ дифференцируем и

$$f'(u)h = \iint\limits_{\Omega} [L_u h + L_{u_x} h'_x + L_{u_y} h'_y]dxdy.$$

8) Вычислим производную интегрального функционала с переменными пределами, которые принимают значения в фиксированном отрезке $[a, b]$. Пусть $f : C^1(a, b) \times [a, b] \times [a, b] \to R$ – функционал, который задан следующим образом:

$$f(x, t_0, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt.$$

Рассматривая функционал как функцию трех аргументов, найдем его частные производные. Очевидно, f'_x – это просто производная функционала из примера 4), то есть

$$f'_x(x, t_0, t_1)h = \int\limits_{t_0}^{t_1} [L_x(t, x(t), \dot{x}(t))h(t) + L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\dot{h}(t)]dt,$$

а частные производные f'_{t_0} и f'_{t_1} – это производные интеграла по переменным нижнему и верхнему пределам:

$$f'_{t_0}(x, t_0, t_1)\tau_0 = -L(t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0))\tau_0, \quad f'_{t_1}(x, t_0, t_1)\tau_1 = L(t_1, x(t_1), \dot{x}(t_1))\tau_1.$$

Все частные производные непрерывны и поэтому по теореме 1.3.4 полная производная функционала f равна

$$f'(x, t_0, t_1)(h, \tau_0, \tau_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} [L_x h + L_{\dot{x}} \dot{h}]dt + L(t_1, x(t_1), \dot{x}(t_1))\tau_1 - L(t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0))\tau_0.$$

1.3.4. Теорема о неявной функции

Теорема 1.3.5. Пусть E_1, E_2, E_3 – банаховы пространства и $F : E_1 \times E_2 \to E_3$ – непрерывно дифференцируемое отображение.

Пусть $F(x_0, y_0) = 0$ и в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) для линейного оператора $F'_y(x, y) : E_2 \to E_3$ определен ограниченный обратный $[F'_y(x, y)]^{-1} : E_3 \to E_2$.

Тогда уравнение

$$F(x, y) = 0$$

имеет в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) решение $y = f(x)$, то есть существует отображение $f : E_1 \to E_2$, определенное в некоторой окрестности U точки x_0, такое, что $f(x_0) = y_0$ и

$$F(x, f(x)) \equiv 0, \ \forall x \in U.$$

Отображение f дифференцируемо в этой окрестности и

$$f'(x) = -[F'_y(x, f(x))]^{-1} F'_x(x, f(x)).$$

Доказательство. 1) Построим отображение $f(x)$.
Используя существование оператора $[F'_y(x_0, y_0)]^{-1}$, уравнение

$$F(x, y) = 0$$

можно записать в виде

$$y = y - [F'_y(x_0, y_0)]^{-1} F(x, y).$$

Введем обозначение $G(x, y) = y - [F'_y(x_0, y_0)]^{-1} F(x, y)$ и будем решать уравнение

$$y = G(x, y)$$

с помощью принципа сжатых отображений (теорема 1.1.1). Поскольку

$$G'_y(x, y) = I - [F'_y(x_0, y_0)]^{-1} F'_y(x, y) = [F'_y(x_0, y_0)]^{-1} [F'_y(x_0, y_0) - F'_y(x, y)]$$

(где I – тождественный оператор), то, используя непрерывность F'_y, выберем $\varepsilon > 0$ таким, что $||G'_y(x, y)|| \leq 1/2$, если $||x - x_0|| \leq \varepsilon$, $||y - y_0|| \leq \varepsilon$.

По формуле конечных приращений (теорема 1.3.3) отсюда следует, что в указанной окрестности

$$||G(x, y_1) - G(x, y_2)|| \leq ||G'_y(x, y_1 + \theta(y_2 - y_1))|| \cdot ||y_1 - y_2|| \leq \frac{1}{2} ||y_1 - y_2||.$$

С другой стороны, так как F – непрерывно и $F(x_0, y_0) = 0$, выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$||G(x, y_0) - y_0|| \leq ||[F'_y(x_0, y_0)]^{-1} F(x, y_0)|| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

если $||x - x_0|| \leq \delta$.

Тогда

$$||G(x, y) - y_0|| \leq ||G(x, y) - G(x, y_0)|| + ||G(x, y_0) - y_0|| \leq \frac{1}{2}||y - y_0|| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Таким образом, для любого фиксированного x из шара $B_\delta = \{x : ||x - x_0|| \leq \delta\}$ отображение $G(x, \cdot) : E_2 \to E_2$ переводит шар $B_\varepsilon = \{y : ||y - y_0|| \leq \varepsilon\}$ в себя и является сжимающим отображением с $q = 1/2$.

По теореме о сжатых отображениях (теорема 1.1.1) отображение G имеет неподвижную точку, то есть для любого $x \in B_\delta$ существует $y = f(x) \in B_\varepsilon$ такой, что $G(x, f(x)) = f(x)$, или

$$F(x, f(x)) = 0.$$

Таким образом, отображение $f : B_\delta \to B_\varepsilon$ построено.

2) Докажем непрерывность отображения $f(x)$. Так как

$$||f(x) - f(x_0)|| = ||G(x, f(x)) - G(x_0, f(x_0))|| \leq ||G(x, f(x)) - G(x, f(x_0))|| +$$

$$+ ||G(x, f(x_0)) - G(x_0, f(x_0))|| \leq \frac{1}{2}||f(x) - f(x_0)|| + ||[F'_y(x_0, y_0)]^{-1} F(x, y_0)||,$$

то

$$||f(x) - f(x_0)|| \leq 2||[F'_y(x_0, y_0)]^{-1}|| \cdot ||F(x, y_0)||$$

и поскольку $F(x, y_0) \to 0$ при $x \to x_0$, то это дает непрерывность f в точке x_0.

По первой части доказательства, для x из некоторой окрестности x_0 $F(x, f(x)) = 0$, то есть для этих x выполнены условия теоремы и заменяя в предыдущих рассуждениях x_0 на x, получаем непрерывность $f(x)$ для таких x.

3) Докажем дифференцируемость $f(x)$. Прежде всего, учитывая, что $F(x, f(x)) \equiv 0$, $F(x + h, f(x + h)) \equiv 0$, используя формулу конечных приращений и вводя промежуточное обозначение $q = f(x + h) - f(x)$, получим следующую оценку:

$$||f(x + h) - f(x) + [F'_y(x, f(x))]^{-1} F'_x(x, f(x))h|| \leq ||F'_y(x, f(x))]^{-1}|| \cdot$$

$$\cdot ||F(x+h, f(x+h)) - F(x, f(x)) - F'_x(x, f(x))h - F'_y(x, f(x))(f(x+h) - f(x))|| \leq$$

$$\leq C \cdot ||F(x + h, f(x + h)) - F(x, f(x)) - F'(x, f(x))(h, q)|| \leq$$

$$\leq C \cdot \sup_{\theta \in [0,1]} ||F'(x+\theta h, f(x)+\theta q) - F'(x, f(x))|| \cdot ||(h,q)|| \leq$$

$$\leq \gamma(h)(||h|| + ||f(x+h) - f(x)||,$$

где $\gamma(h) \to 0$ при $h \to 0$, в силу непрерывности F' и f,

Так как для достаточно малого h можно считать $\gamma(h) \leq 1/2$, то отсюда, в частности, следует, что

$$||f(x+h) - f(x)|| \leq ||[F'_y(x, f(x))]^{-1} F'_x(x, f(x))h|| +$$

$$+||f(x+h) - f(x) + [F'_y(x, f(x))]^{-1} F'_x(x, f(x))h|| \leq ||[F'_y(x, f(x))]^{-1}|| \cdot$$

$$\cdot ||F'_x(x, f(x))|| \cdot ||h|| + \frac{1}{2}(||h|| + ||f(x+h) - f(x)||),$$

откуда

$$||f(x+h) - f(x)|| \leq ||h|| + 2||[F'_y(x, f(x))]^{-1}|| \cdot ||F'_x(x, f(x))|| \cdot ||h|| \leq C||h||.$$

Но тогда из полученной раньше оценки следует, что

$$||f(x+h) - f(x) + [F'_y(x, f(x))]^{-1} F'_x(x, f(x))|| \leq (1+C)\gamma(h)||h||,$$

причем $\gamma(h) \to 0$ при $h \to 0$. Поэтому отображение $f(x)$ дифференцируемо и

$$f'(x) = -[F'_y(x, f(x))]^{-1} F'_x(x, f(x)). \ \diamondsuit$$

1.3.5. Дифференцируемые выпуклые функционалы

Теорема 1.3.6. Если $f(x)$ – дифференцируемый функционал на нормированном пространстве E, то следующие утверждения эквивалентны:

a) $f(x)$ – выпуклый функционал,

b) остаточный член $\omega(x,h) \geq 0$,

c) $\forall x, y \in E, \ \ f(x) - f(y) \leq f'(x)(x-y)$.

Доказательство. a)$\Rightarrow$b) Докажем сначала, что для любого фиксированного $x \in E$ функционал $\omega(x,h)$ является выпуклым по h.

Так как

$$f((1-\alpha)(x+h_1) + \alpha(x+h_2)) = f(x) + (1-\alpha)f'(x)h_1 + \alpha f'(x)h_2 +$$

$$+\omega(x, (1-\alpha)h_1 + \alpha h_2)$$

и

$$(1-\alpha)f(x+h_1) + \alpha f(x+h_2) = f(x) + (1-\alpha)f'(x)h_1 + \alpha f'(x)h_2 +$$

$$+(1-\alpha)\omega(x,h_1)+\alpha\omega(x,h_2),$$

а в силу выпуклости $f(x)$,

$$f((1-\alpha)(x+h_1)+\alpha(x+h_2)) \le (1-\alpha)f(x+h_1)+\alpha f(x+h_2),$$

то, подставляя сюда найденные выражения, получаем:

$$\omega(x,(1-\alpha)h_1+\alpha h_2) \le (1-\alpha)\omega(x,h_1)+\alpha\omega(x,h_2),$$

то есть выпуклость функционала ω доказана.

Допустим теперь, рассуждая от противного, что для некоторого h_0 функционал $\omega(x,h_0) < 0$. Положим $h = th_0$, тогда, поскольку, по доказанному, $\omega(x,h)$ выпукло,

$$\omega(x,th_0) = \omega(x,th_0+(1-t)0) \le t\omega(x,h_0)+(1-t)\omega(x,0) = t\omega(x,h_0).$$

Отсюда

$$\frac{\omega(x,th_0)}{t} \le \omega(x,h_0) < 0$$

для $0 < t < 1$. Но с другой стороны, в силу свойств остаточного члена, $\omega(x,th_0)/t \to 0$, если $t \to 0$. Полученное противоречие доказывает первую часть теоремы.

b)$\Rightarrow$c) Так как $\omega(x,h) \ge 0$, то

$$f(x)-f(y) = f(x)-f(x+(y-x)) = f'(x)(x-y)-\omega(x,y-x) \le f'(x)(x-y).$$

c)$\Rightarrow$a) Имеем

$$f((1-\alpha)x+\alpha y)-f(x) \le f'((1-\alpha)x+\alpha y)\alpha(y-x),$$

$$f((1-\alpha)x+\alpha y)-f(y) \le f'((1-\alpha)x+\alpha y)(1-\alpha)(x-y).$$

Умножая первое неравенство на $1-\alpha$, второе на α и складывая, получаем

$$f((1-\alpha)x+\alpha y) \le (1-\alpha)f(x)+\alpha f(y). \ \diamondsuit$$

1.3.6. Вторая производная функционала

Для определения второй производной, которое будет дано только для случая функционала, необходимо ввести понятие билинейного функционала.

Определение. Пусть E – нормированное пространство и G – функционал на $E \times E$, то есть, $G(x,y)$ функция двух аргументов $x, y \in E$.

Функционал $G(x, y)$ называется билинейным, если он линеен по каждому из аргументов, то есть

$$G(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 G(x_1, y) + \alpha_2 G(x_2, y),$$

$$G(x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = \beta_1 G(x, y_1) + \beta_2 G(x, y_2). \ \diamondsuit$$

Билинейный функционал $G(x, y)$ называется симметричным, если

$$G(x, y) = G(y, x), \quad \forall x, y \in E. \ \diamondsuit$$

Билинейный функционал называется ограниченным, если существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$|G(x, y)| \leq C||x|| \cdot ||y||, \quad \forall x, y \in E. \ \diamondsuit$$

Теорема 1.3.7. Билинейный функционал $G(x, y)$ непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.

Доказательство. 1) Необходимость. Пусть $G(x, y)$ непрерывен, тогда он непрерывен в точке $(0, 0)$ и для некоторого фиксированного $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $|G(x, y)| \leq \varepsilon$, если $||x|| \leq \delta$, $||y|| \leq \delta$.

Пусть теперь $x \neq 0$ и $y \neq 0$ произвольны, тогда

$$|G(x, y)| = \frac{||x||||y||}{\delta^2} \left| G\left(\frac{\delta}{||x||}x, \frac{\delta}{||y||}y\right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{\delta^2}||x|| \cdot ||y||,$$

то есть можно положить $C = \varepsilon/\delta^2$.

2) Достаточность. Пусть $G(x, y)$ – ограниченный билинейный функционал и (x_0, y_0) – произвольная точка из $E \times E$. Так как

$$|G(x, y) - G(x_0, y_0)| = |G(x, y) - G(x_0, y) + G(x_0, y) - G(x_0, y_0)| \leq$$

$$\leq |G(x - x_0, y)| + |G(x_0, y - y_0)| \leq C||y||||x - x_0|| + C||x_0||||y - y_0||.$$

то $|G(x, y) - G(x_0, y_0)| \to 0$, если $||x - x_0|| \to 0$, $||y - y_0|| \to 0$. Непрерывность доказана. $\diamondsuit$

Теорема 1.3.8. Билинейный симметричный функционал ограничен тогда и только тогда, когда существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$|G(x, x)| \leq C||x||^2.$$

Доказательство. 1) Необходимость. Очевидна.

2) Достаточность. Так как

$$|G(x, y)| = \left| \frac{1}{2}G(x + y, x + y) - \frac{1}{2}G(x, x) - \frac{1}{2}G(y, y) \right| \leq$$

$$\leq \frac{C}{2}(||x+y||^2 + ||x||^2 + ||y||^2),$$

то $|G(x,y)| \to 0$, если $||x|| \to 0$, $||y|| \to 0$, то есть $G(x,y)$ непрерывен в точке $(0,0)$. Но по первой части доказательства теоремы 1.3.7 отсюда следует, что $G(x,y)$ ограничен. $\diamondsuit$

Теперь можно ввести понятие второй производной функционала.

Определение. Пусть $f(x)$ – дифференцируемый функционал на нормированном пространстве E. $f(x)$ называется дважды дифференцируемым в точке $x \in E$, если существует такой билинейный симметричный ограниченный функционал $G(h_1, h_2)$ на E, что $\forall h \in E$

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}G(h,h) + \omega_2(x,h),$$

причем

$$\lim_{||h|| \to 0} \frac{|\omega_2(x,h)|}{||h||^2} = 0.$$

Билинейный функционал $G(h,h)$ называется второй производной функционала $f(x)$ в точке x и обозначается $f''(x)$, выражение $f''(x)(h,h)$ называется вторым дифференциалом, отвечающим приращению h. $\diamondsuit$

Таким образом,

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)(h,h) + \omega_2(x,h),$$

где остаточный член $\omega_2(x,h)$ имеет более высокий порядок малости, чем $||h||^2$.

1.3.7. Примеры вычисления вторых производных

1) Пусть $f : R^n \to R$, то есть $f(x_1, ..., x_n)$ – функция n переменных. Непосредственно проверяется, что если $f(\mathbf{x})$ дважды дифференцируема, то

$$f''(\mathbf{x})(\mathbf{h},\mathbf{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, ..., x_n) h_i h_j = (f''(\mathbf{x})\mathbf{h}, \mathbf{h}).$$

Так как билинейная форма полностью определяется своей матрицей коэффициентов, то можно считать, что

$$f''(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right).$$

(Матрица вторых производных $f''(\mathbf{x})$ называется еще гессианом функции $f(\mathbf{x})$.)

2) Пусть $E = R^n$ и $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{Ax}, \mathbf{x})$, где A – симметричная матрица. Так как

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = (\mathbf{Ax} + \mathbf{Ah}, \mathbf{x}+\mathbf{h}) = (\mathbf{Ax}, \mathbf{x}) + 2(\mathbf{Ax}, \mathbf{h}) + (\mathbf{Ah}, \mathbf{h}),$$

то $f'(\mathbf{x})\mathbf{h} = 2(\mathbf{Ax}, \mathbf{h})$, $(f''(\mathbf{x})\mathbf{h}, \mathbf{h}) = (\mathbf{Ah}, \mathbf{h})$, то есть $f'(\mathbf{x}) = 2\mathbf{Ax}$, $f''(\mathbf{x}) = 2\mathbf{A}$.

3) Пусть $E = C^1(t_0, t_1)$ и

$$f(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt.$$

Если функция $L(t, x, \dot{x})$ непрерывна по t и дважды непрерывно дифференцируема по x и $\dot{x}$, то

$$f(x+h) - f(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} [L(t, x(t) + h(t), \dot{x}(t) + \dot{h}(t)) - L(t, x(t), \dot{x}(t))]dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} [L_x h + L_{\dot{x}} \dot{h}]dt + \frac{1}{2} \int\limits_{t_0}^{t_1} [L_{xx} h^2 + 2L_{x\dot{x}} h\dot{h} + L_{\dot{x}\dot{x}} \dot{h}^2]dt + \omega_2(x, h),$$

где

$$\omega_2(x, h) = \int\limits_{t_0}^{t_1} [\alpha_1 h^2 + \alpha_2 h\dot{h} + \alpha_3 \dot{h}^2]dt,$$

причем функции $\alpha_i(t)$ равномерно стремятся к нулю на $[t_0, t_1]$, если $||h|| \to 0$. Поэтому $|\omega(x, h)|/||h||^2 \to 0$, если $||h|| \to 0$.

Наконец,

$$\left| \int\limits_{t_0}^{t_1} [L_{xx} h^2 + 2L_{x\dot{x}} h\dot{h} + L_{\dot{x}\dot{x}} \dot{h}^2]dt \right| \le \sup_{t \in [t_0, t_1]} (|L_{xx}| + 2|L_{x\dot{x}}| + L_{\dot{x}\dot{x}}|)||h||(t_1 - t_0) =$$

$$= C||h||^2,$$

то есть по теореме 1.3.8 билинейный симметричный функционал

$$G(h_1, h_2) = \int\limits_{t_0}^{t_1} [L_{xx} h_1 h_2 + L_{x\dot{x}}(h_1 \dot{h}_2 + \dot{h}_1 h_2) + L_{\dot{x}\dot{x}} \dot{h}_1 \dot{h}_2]dt$$

ограничен и значит,

$$f''(x)(h, h) = \int\limits_{t_0}^{t_1} [L_{xx} h^2 + 2L_{x\dot{x}} h\dot{h} + L_{\dot{x}\dot{x}} \dot{h}^2]dt.$$

4) Получим еще одну оценку, которая будет использована дальше, для остаточного члена $\omega_2(x, h)$ функционала из предыдущего примера.

Введем в $C^1(t_0, t_1)$ норму

$$||x||^2_{W^1_2} = \int\limits_{t_0}^{t_1} [x^2(t) + \dot{x}^2(t)]dt.$$

(Эта норма индуцирована из банахова пространства $W^1_2(t_0, t_1)$ абсолютно непрерывных на $[t_0, t_1]$ функций с интегрируемой с квадратом производной. Очевидно, $C^1(t_0, t_1) \subset W^1_2(t_0, t_1)$). Тогда остаточный член $\omega_2(x, h)$ интегрального функционала из предыдущего примера удовлетворяет более сильному условию:

$$\frac{|\omega_2(x, h)|}{||h||^2_{W^1_2}} \to 0,$$

если $||h||_1 \to 0$. Действительно,

$$|\omega_2(x, h)| \le \int\limits_{t_0}^{t_1} [|\alpha_1|h^2 + |\alpha_2| \cdot |h| \cdot |\dot{h}| + |\alpha_3|\dot{h}^2]dt \le$$

$$\le 2 \max_i \sup_{t \in [t_0, t_1]} |\alpha_i(t)| \int\limits_{t_0}^{t_1} [h^2(t) + \dot{h}^2(t)]dt = 2 \max_i \sup_{t \in [t_0, t_1]} |\alpha_i(t)| \cdot ||h||^2_{W^1_2},$$

откуда вытекает требуемое утверждение, так как $\alpha_i(t) \to 0$ равномерно на $[t_0, t_1]$, если $||h||_{C^1} \to 0$.

Упражнения. 1) Пусть E – евклидово пространство. Вычислить производные функционалов $f(x) = ||x|| = \sqrt{(x, x)}$ и $f(x) = ||x||^2 = (x, x)$.

2) Найти производные функционалов из примеров 4) – 7) непосредственно, с помощью определения.

3) Пусть дано отображение $F : E_1 \to E_2$. Если $\forall h \in E_1$ существует предел

$$\delta F(x, h) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(F(x + th) - F(x)),$$

то он называется вариацией отображения F в точке x.

Для функции двух действительных переменных

$$f(x) = f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad \text{если } x_1^2 + x_2^2 \ne 0 \ \text{ и } f(0, 0) = 0,$$

найти вариацию в точке $(0, 0)$.

4) Если вариация отображения $\delta(x, h)$ линейна по h, то есть $\delta(x, h) = F'(x)h$, где $F' : E_1 \to E_2$ – линейный ограниченный оператор, то F' называется производной Гато (слабой производной) отображения F в точке x. Показать, что из существования производной Фреше вытекает существование производной Гато.

5) Пусть

$$f(x) = f(x_1, x_2) = \frac{x_1^3 x_2}{x_1^4 + x_2^2}, \quad \text{если } x_1^2 + x_2^2 \neq 0 \quad \text{и } f(0,0) = 0.$$

Доказать, что у функции $f(x)$ в точке $(0,0)$ существует производная Гато, но не существует производной Фреше.

Глава 2. МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ НА НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 2.1. ТОЧКИ ЛОКАЛЬНОГО И ГЛОБАЛЬНОГО МИНИМУМА

Пусть E – нормированное пространство, $f(x)$ – функционал на E, Q – непустое подмножество в E.

Определение. Точка $x_0 \in Q$ называется точкой локального минимума функционала $f(x)$ на Q, если существует окрестность V точки x_0 такая, что

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \forall x \in Q \cap V$$

и точкой строгого локального минимума, если

$$f(x_0) < f(x), \quad \forall x \in Q \cap V, \ x \neq x_0. \ \diamondsuit$$

Определение. Точка $x_0 \in Q$ называется точкой глобального минимума функционала $f(x)$ на Q, если

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \forall x \in Q$$

и точкой строгого глобального минимума, если

$$f(x_0) < f(x), \quad \forall x \in Q, \ x \neq x_0. \ \diamondsuit$$

Аналогично формулируются определения локального максимума, строгого локального максимума, глобального максимума и строгого глобального максимума функционала $f(x)$ на Q.

Точки, в которых функционал $f(x)$ достигает на Q максимума или минимума (локального или глобального), называются точками экстремума (локального или глобального).

Очевидно, что если функционал $f(x)$ достигает в точке x_0 на Q, например, максимума, то функционал $-f(x)$ достигает в точке x_0 минимума на Q и наоборот, поэтому можно ограничиться рассмотрением только задач на минимум.

Понятно, что точки глобального минимума содержатся среди точек локального минимума, и если последние известны и известно, что точки глобального минимума существуют, то, в принципе, их можно найти, перебирая все точки локального минимума и сравнивая значения в них.

Для важного частного случая выпуклой задачи справедлив следующий результат.

Теорема 2.1.1. Если $f(x)$ – выпуклый функционал, а Q – выпуклое подмножество в E, то любая точка локального минимума $f(x)$ на Q является точкой глобального минимума.

Доказательство. Пусть x_0 – точка локального минимума $f(x)$ на Q. По определению, существует шар B с центром в точке x_0 такой, что для $x \in Q \cap B$, $f(x_0) \leq f(x)$.

Если теперь x – произвольная точка Q, то в силу выпуклости Q,

$$x_\alpha = x_0 + \alpha(x - x_0) = \alpha x + (1-\alpha)x_0 \in Q, \quad \forall \alpha \in [0,1].$$

С другой стороны, если α достаточно мало, то $x_\alpha \in B$ и значит, для таких α, $x_\alpha \in Q \cap B$, то есть $f(x_\alpha) \geq f(x_0)$.

Так как функционал $f(x)$ выпуклый, то

$$f(x_\alpha) = f(\alpha x + (1-\alpha)x_0) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(x_0),$$

откуда

$$f(x) \geq \frac{1}{\alpha} f(x_\alpha) - \frac{1-\alpha}{\alpha} f(x_0) \geq \frac{1}{\alpha} f(x_0) - \frac{1-\alpha}{\alpha} f(x_0) = f(x_0).$$

Таким образом, x_0 – точка глобального минимума. $\diamondsuit$

Единственность точки глобального минимума можно утверждать только при еще более сильных ограничениях.

Определение. Функционал $f(x)$ называется строго выпуклым, если

$$f((1-\alpha)x + \alpha y) < (1-\alpha) f(x) + \alpha f(y), \quad \forall x, y \in E,\ x \neq y,\ \forall \alpha \in (0,1).\ \diamondsuit$$

Примером строго выпуклого функционала может служить функционал $f(x) = (x, x)$ на евклидовом пространстве E.

Теорема 2.1.2. Пусть $f(x)$ –строго выпуклый функционал, Q – выпуклое подмножество в E.

Если существует точка $x_0 \in Q$, в которой $f(x)$ достигает на Q минимума, то эта точка единственна.

Доказательство. Допустим, что x_0 и x_1 – две разные точки, в которых достигается минимум, то есть $f(x_0) = f(x_1) = \min_Q f(x)$. Так как Q выпукло, то точка $y = x_0/2 + x_1/2 \in Q$ и, в силу строгой выпуклости $f(x)$,

$$f(y) = f\left(\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_1\right) < \frac{1}{2} f(x_0) + \frac{1}{2} f(x_1) = \min_Q f(x).$$

Полученное противоречие доказывает теорему. $\diamondsuit$

Вопрос о существовании точек экстремума в конечномерном случае, то есть в случае, когда $E = R^n$, решается известной теоремой анализа [24], [29], [32], [38].

Теорема 2.1.3. Если функция $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ непрерывна, а подмножество $Q \subset R^n$ – замкнуто и ограничено, то $f(x)$ достигает на Q максимума и минимума. $\diamondsuit$

Накладывая дополнительные условия на функцию $f(x)$, можно снять требование ограниченности множества Q.

Следствие 2.1.1. Если функция $f(x)$ непрерывна и $f(x) \to \infty$ при $||x|| \to \infty$, а множество Q – замкнуто, то $f(x)$ достигает на Q минимума.

Доказательство. Пусть x_* произвольная точка множества Q и $Q_* = \{x : f(x) \leq f(x_*)\}$. Множество Q_* замкнуто и при сделанных предположениях ограничено. Поэтому множество $Q_0 = Q \cap Q_*$ также замкнуто и ограничено, и по теореме 2.1.3 функция $f(x)$ достигает на Q_0 минимума в некоторой точке x_0. Но тогда

$$f(x_0) = \inf_{Q_0} f(x) = \inf_{Q} f(x),$$

то есть x_0 – точка минимума $f(x)$ на Q. $\diamondsuit$

На бесконечномерный случай теорема 2.1.3 непосредственно не переносится. Если Q – замкнутое ограниченное подмножество в банаховом пространстве E, то непрерывный функционал $f(x)$ не обязан достигать на Q своего максимального и минимального значений, более того, функционал $f(x)$ может быть неограничен на Q.

Имеет место следующий результат, который, однако, обычно недостаточен для приложений [32], [38].

Теорема 2.1.4. Если Q – компактное подмножество нормированного пространства E, то непрерывный функционал $f(x)$ достигает на Q максимума и минимума. $\diamondsuit$

Наконец, для случая выпуклой задачи справедливо следующее утверждение ([6], [12], [50]).

Теорема 2.1.5. Пусть E – гильбертово пространство, Q – замкнутое, выпуклое, ограниченное подмножество в E. Если $f(x)$ – выпуклый непрерывный функционал на E, то он достигает минимума на Q в некоторой точке $x_0 \in Q$. $\diamondsuit$

Поскольку в бесконечномерном случае нет достаточно общих теорем о существовании точек экстремума, их существование в различных экстремальных задачах получают непосредственным отысканием этих точек с помощью различных необходимых (и достаточных) условий экстремума.

Упражнения. 1) Найти точки минимума функции $f(t) = |t - 1/2| + |t + 1/2| - 1$ на отрезке $[-1, 1]$.

2) Найти точки экстремума функции $f(t) = \sin^3 t + \cos^3 t$ на отрезке $[0, 2\pi]$.

3) Доказать, что функция $f(x, y) = xe^x - (1 + e^x) \cos y$ имеет на плоскости R^2 бесконечно много точек локального минимума и ни одной точки локального максимума.

4) Рассмотреть функционал

$$f(x) = \int\limits_0^1 x^2(t)dt$$

на подмножестве $Q = \{x(t) : x(0) = 0,\ x(1) = 1\}$ из $C(0,1)$. Доказать, что $\inf_Q f(x) = 0$, но эта нижняя грань не достигается на Q.

5) Рассмотреть функционал

$$f(x) = \int\limits_0^1 x(t)dt - x\left(\frac{1}{2}\right)$$

на единичном шаре $B = \{x(t) : ||x||_C \le 1\}$ из $C(0,1)$ Доказать, что $\inf_B f(x) = -2$, $\sup_B f(x) = 2$, но что ни нижняя, ни верхняя грани на шаре B не достигаются.

§2.2. КОНУС ДОПУСТИМЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

2.2.1. Определение. Простейшие свойства

Для записи необходимых или достаточных условий локального минимума функционала $f(x)$ в точке $x_0 \in Q \subset E$, нужно определить для точки x_0 некоторое множество направлений (элементов из E), связанное с множеством Q.

Определение. Элемент $h \in E$ принадлежит множеству допустимых направлений K_{Q,x_0} в точке $x_0 \in Q$ для множества Q, если существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ найдется точка $x(\varepsilon) \in Q$, для которой

$$x(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon h + r(\varepsilon),$$

причем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{||r(\varepsilon)||}{\varepsilon} = 0. \diamondsuit$$

Это определение означает, что h задает в точке $x_0 \in Q$ допустимое направление для Q, если отрезок $x_0 + \varepsilon h,\ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ касается в точке x_0 кривой $x(\varepsilon)$, лежащей целиком в Q и проходящей через точку x_0. Условие на $r(\varepsilon)$ будем называть условием касания. Отметим, что кривая $x(\varepsilon)$, вообще говоря, не предполагается непрерывной в точках $\varepsilon \neq 0$.

Интуитивно, множество допустимых направлений K_{Q,x_0} состоит из всех направлений в точке x_0, указывающих «внутрь» множества Q и из всех направлений, «касающихся» в точке x_0 множества Q (рис. 6.).

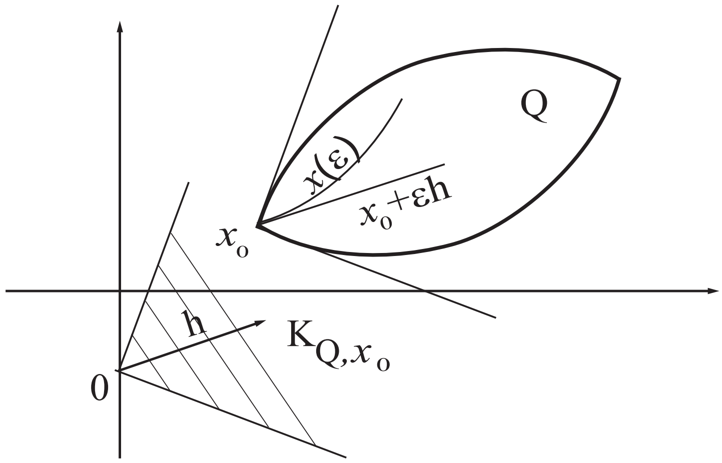

Рис 6.

В частности, множество допустимых направлений может сводиться к касательному подпространству.

Легко проверяется, что множество допустимых направлений является конусом.

Теорема 2.2.1. Если x_0 – внутренняя точка множества Q, то $K_{Q,x_0} = E$.

Доказательство. Если $h \in E$, то для достаточно малых ε, $x_0 + \varepsilon h \in Q$ и значит, достаточно положить $x(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon h$ и $r(\varepsilon) = 0$. $\diamondsuit$

Теорема 2.2.2. Конус допустимых направлений K_{Q,x_0} замкнут.

Доказательство. Пусть h – предельная точка множества K_{Q,x_0}, то есть существует последовательность точек $h_n \in K_{Q,x_0}$ такая, что $h_n \to h$, если $n \to \infty$.

Так как $h_n \in K_{Q,x_0}$ то, по определению, $\exists \varepsilon_n > 0$ такое, что $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_n]$ существует точка $x_n(\varepsilon) \in Q$, для которой

$$x_n(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon h_n + r_n(\varepsilon), \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{||r_n(\varepsilon)||}{\varepsilon} = 0.$$

Уменьшая, если нужно, числа ε_n, будем считать, что

1) $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$,

2) $\varepsilon_n \to 0$, если $n \to \infty$,

3) $||r_n(\varepsilon)||/\varepsilon \leq 1/2^n$ для $\varepsilon \in [0, \varepsilon_n]$.

Определим теперь $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$ элемент $x(\varepsilon) \in Q$, полагая $x(\varepsilon) = x_n(\varepsilon)$, если $\varepsilon \in [\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_n]$. (Заметим, что кривая $x(\varepsilon)$ не обязана быть непрерывной в точках $\varepsilon \neq 0$.)

Для доказательства теоремы достаточно показать, что $r(\varepsilon) = x(\varepsilon) - x_0 - \varepsilon h$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{||r(\varepsilon)||}{\varepsilon} = 0.$$

Обозначим через $n(\varepsilon)$ такой номер n, для которого $\varepsilon \in [\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_n]$. По построению, $n(\varepsilon) \to \infty$, если $\varepsilon \to 0$.

Зададимся теперь произвольным числом $\delta > 0$ и выберем ε_0 настолько малым, чтобы для $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ выполнялись условия

$$||h_{n(\varepsilon)} - h|| \le \frac{\delta}{2}, \quad \frac{||r_{n(\varepsilon)}||}{\varepsilon} \le \frac{1}{2^{n(\varepsilon)}} \le \frac{\delta}{2}.$$

Отсюда сразу следует, что для указанных ε

$$\frac{||r(\varepsilon)||}{\varepsilon} = \frac{||x(\varepsilon) - x_0 - \varepsilon h||}{\varepsilon} = \frac{||x_{n(\varepsilon)} - x_0 - \varepsilon h||}{\varepsilon} =$$

$$= \frac{||\varepsilon h_{n(\varepsilon)} + r_{n(\varepsilon)} - \varepsilon h||}{\varepsilon} \le ||h_{n(\varepsilon)} - h|| + \frac{||r_{n(\varepsilon)}||}{\varepsilon} \le \delta. \ \diamondsuit$$

В случае, когда множество Q имеет более или менее конкретную природу, иногда удается получить явное описание конуса допустимых направлений K_{Q,x_0}. Ниже рассматриваются некоторые важные для дальнейшего примеры.

2.2.2. Конус допустимых направлений для выпуклого множества

Теорема 2.2.3. Если Q – выпуклое множество в E и $x_0 \in Q$, то конус допустимых направлений в точке x_0 для множества Q равен замыканию множества

$$K = \{h : \ h = \alpha(x - x_0), \ \ x \in Q, \ \alpha > 0\},$$

то есть $K_{Q,x_0} = \bar{K}$.

Доказательство. 1) Докажем сначала, что $\bar{K} \subset K_{Q,x_0}$. В силу замкнутости K_{Q,x_0} достаточно доказать, что $K \subset K_{Q,x_0}$.

Пусть $h \in K$, то есть $h = \alpha(x - x_0), \ x \in Q, \ \alpha > 0$. Так как Q выпукло, то $\forall \varepsilon \in [0, 1/\alpha]$,

$$x(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon h = (1 - \alpha\varepsilon)x_0 + \alpha\varepsilon x \in Q$$

и значит, $h \in K_{Q,x_0}$ (здесь $r(\varepsilon) = 0$).

2) Покажем теперь, что $K_{Q,x_0} \subset \bar{K}$. Если $h \in K_{Q,x_0}$, то существует кривая $x(\varepsilon)$ в Q такая, что $x(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon h + r(\varepsilon)$ и $||r(\varepsilon)||/\varepsilon \to 0$, если $\varepsilon \to 0$.

Вектор $h_\varepsilon = (x(\varepsilon) - x_0)/\varepsilon \in K$ и так как $h_\varepsilon = h + r(\varepsilon)/\varepsilon$, то $h_\varepsilon \to h$, если $\varepsilon \to 0$. $\diamondsuit$

Следствие 2.2.1. Пусть Q_1 и Q_2 выпуклые множества в E и $x_0 \in Q = Q_1 \cap Q_2$. Если $K_i = \{h : \ h = \alpha(x - x_0), \ \ x \in Q_i, \ \alpha > 0\}$, то $K_1 \cap K_2 \subset K_{Q,x_0}$.

Доказательство. Пусть $h \in K_1 \cap K_2$, то есть $h = \alpha_1(x_1 - x_0), \ x_1 \in Q_1$ и $h = \alpha_2(x_2 - x_0), \ x_2 \in Q_2$. Если для определенности считать $\alpha_1 \ge \alpha_2$, то, как легко проверить,

$$x_1 = \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) x_0 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2$$

и в силу выпуклости Q_2 имеем $x_1 \in Q_2$, то есть $x_1 \in Q_1 \cap Q_2 = Q$. Поэтому $h \in K_{Q,x_0}$. $\diamondsuit$

Будем называть аффинным подпространством в нормированном пространстве E любой сдвиг подпространства из E, то есть множество вида $Q = x_0 + H$, где H – подпространство (замкнутое) в E.

Следствие 2.2.2. Пусть Q – аффинное подпространство в E, $x_0 \in Q$ и $Q = x_0 + H$, тогда $K_{Q,x_0} = H$.

Доказательство. Так как Q выпукло, то по теореме 2.2.3 K_{Q,x_0} совпадает с замыканием множества $K = \{h : \ h = \alpha(x - x_0), \ x \in Q, \ \alpha > 0\}$. Легко видеть, что $K = H$ и поскольку H – замкнуто, то $H = \bar{K} = K_{Q,x_0}$. $\diamondsuit$

Следствие 2.2.3. Пусть $x_0 \in Q = Q_1 \cap Q_2$, где Q_1 – выпуклое множество, имеющее внутренние точки.

Если $K_0 = \{h : h = \alpha(x - x_0), \ x \in Q_1^0, \ \alpha > 0\}$, то $K_0 \cap K_{Q_2,x_0} \subset K_{Q,x_0}$.

Доказательство. Пусть $h \in K_0 \cap K_{Q_2,x_0}$. По построению, K_0 – открытое множество и следовательно, h входит в K_0 вместе с некоторой окрестностью.

Так как $h \in K_{Q_2,x_0}$, то существует $x(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon h + r(\varepsilon) \in Q_2$, причем $r(\varepsilon)/\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Поэтому $h(\varepsilon) = h + r(\varepsilon)/\varepsilon \to h$ при $\varepsilon \to 0$ и значит, для достаточно малых ε, $h(\varepsilon) \in K_0$, то есть $h(\varepsilon) = \alpha(\tilde{x}(\varepsilon) - x_0)$, где $\tilde{x}(\varepsilon) \in Q_1$.

Но отсюда сразу следует, что

$$x(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon h + r(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon \left(h + \frac{1}{\varepsilon} r(\varepsilon)\right) = x_0 + \alpha\varepsilon(\tilde{x}(\varepsilon) - x_0),$$

то есть $x(\varepsilon) \in Q_1 \subset Q_2$ и значит, $h \in K_{Q,x_0}$. $\diamondsuit$

2.2.3. Конус допустимых направлений для множества, заданного ограничениями типа неравенств

Пусть $f_1(x), ..., f_m(x)$ – функционалы на нормированном пространстве E и

$$Q = \{x : \ f_i(x) \le 0, \quad i = 1, ..., m\}.$$

Будем говорить, что множество Q в E задано ограничениями типа неравенств.

Если $f_1(x), ..., f_m(x)$ – выпуклые функционалы, то Q – выпуклое множество. Вычислим конус допустимых направлений в точке $x_0 \in Q$ для множества Q.

Теорема 2.2.4. Пусть $f_1(x), ..., f_m(x)$ – выпуклые, дифференцируемые функционалы, множество

$$Q = \{x : \ f_i(x) \le 0, \quad i = 1, ..., m\}$$

имеет внутренние точки (условие Слейтера) и $x_0 \in Q$.

Если, для определенности,

$$f_1(x_0) = 0, ..., f_k(x_0) = 0, f_{k+1}(x_0) < 0, ..., f_m(x_0) < 0$$

и при этом $f_i'(x_0) \neq 0,\ i = 1, ..., k$, то конус допустимых направлений в точке x_0 для множества Q равен

$$K_{Q,x_0} = \{h:\ f_i'(x_0)h \leq 0,\quad i = 1, ..., k\}.$$

Доказательство. Введем обозначение

$$K = \{h:\ f_i'(x_0)h \leq 0,\quad i = 1, ..., k\}$$

и докажем два включения: $K \subset K_{Q,x_0}$ и $K_{Q,x_0} \subset K$.

1) Докажем, что $K_{Q,x_0} \subset K$. Если $h \in K_{Q,x_0}$, то существует кривая $x(\varepsilon)$ такая, что

$$x(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon h + r(\varepsilon) \in Q,$$

причем $||r(\varepsilon)||/\varepsilon \to 0$, если $\varepsilon \to 0$.

Но тогда для $i = 1, ..., k$, $f_i(x_0 + \varepsilon h + r(\varepsilon)) \leq 0$, откуда, в силу дифференцируемости f_i,

$$f_i(x_0) + \varepsilon f_i'(x_0)h + f_i'(x_0)r(\varepsilon) + \omega_i(x_0, \varepsilon h + r(\varepsilon)) \leq 0.$$

Так как $f_i(x_0) = 0$, то, разделив обе части неравенства на ε и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем, что $f_i'(x_0)h \leq 0$, то есть $h \in K$.

2) Покажем теперь, что внутренность

$$K^0 = \{h:\ f_i'(x_0)h < 0,\quad i = 1, ..., k\}$$

конуса K непуста.

По условию, Q имеет внутреннюю точку x_1 и значит, существует некоторый шар B с центром в точке x_1, содержащийся в Q. Если точка x пробегает B, то точка $h = x - x_0$ пробегает шар B_1 с центром в точке $h_1 = x_1 - x_0$.

Так как множество Q выпукло, то по теореме 2.2.3 $h \in K_{Q,x_0}$, и поэтому по первой части доказательства $h \in K$, то есть $f_i'(x_0)h \leq 0$ для $i = 1, ..., k$ и $\forall h \in B_1$. По лемме 1.2.1 отсюда следует, что $f_i'(x_0)h_1 < 0$ для $i = 1, ..., k$, то есть $h_1 \in K^0$.

3) Докажем наконец включение $K \subset K_{Q,x_0}$. Так как K – выпуклое множество и K^0 непусто, по теореме 1.2.1 $K = \bar{K}^0$ и поэтому, в силу замкнутости K_{Q,x_0}, достаточно показать, что $K^0 \subset K_{Q,x_0}$.

Но если $h \in K^0$, то есть $f_i'(x_0)h < 0$, $i = 1, ..., k$, то полагая $x(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon h$, имеем для $i = 1, ..., k$

$$f_i(x(\varepsilon)) = f_i(x_0 + \varepsilon h) = f_i(x_0) + \varepsilon f_i'(x_0)h + \omega(x_0, \varepsilon h) =$$

$$= \varepsilon \left(f_i'(x_0)h + \frac{1}{\varepsilon}\omega(x_0, \varepsilon h) \right) \le 0,$$

если ε достаточно мало, так как $f_i'(x_0)h < 0$ и $\omega(x_0, \varepsilon h)/\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

В то же время, для $i = k+1, ..., m$

$$f_i(x(\varepsilon)) = f_i(x_0) + \varepsilon f_i'(x_0)h + \omega(x_0, \varepsilon h) < 0,$$

если ε достаточно мало, так как $f_i(x_0) < 0$.

Поэтому $x(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon h \in Q$, если $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, где ε_0 – достаточно малое число и, значит, $h \in K_{Q,x_0}$. $\diamondsuit$

Если $f_1(x), ..., f_m(x)$ – линейные ограниченные функционалы, то условие Слейтера становится излишним.

Теорема 2.2.5. Пусть $f_1(x), ..., f_m(x)$ – линейные, ограниченные функционалы на E,

$$Q = \{x : \ f_i(x) \le C_i, \quad i = 1, ..., m\}$$

и $x_0 \in Q$.

Если, для определенности,

$$f_1(x_0) = C_1, ..., f_k(x_0) = C_k, f_{k+1}(x_0) < C_{k+1}, ..., f_m(x_0) < C_m$$

то

$$K_{Q,x_0} = \{h : \ f_i(h) \le 0, \quad i = 1, ..., k\}.$$

Доказательство. Введем обозначение

$$K = \{h : \ f_i(h) \le 0, \quad i = 1, ..., k\}$$

и докажем включения: $K \subset K_{Q,x_0}$ и $K_{Q,x_0} \subset K$.

1) Если $h \in K$ то $f_i(h) \le 0$ для $i = 1, ..., k$. Поэтому для таких i и для любых $\varepsilon > 0$

$$f_i(x_0 + \varepsilon h) = f_i(x_0) + \varepsilon f_i(h) \le C_i.$$

Для $i = k+1, ..., m$,

$$f_i(x_0 + \varepsilon h) = f_i(x_0) + \varepsilon f_i(h) < C_i,$$

если $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, где ε_0 достаточно мало. Поэтому $x(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon h \in Q$ и значит, $h \in K_{Q,x_0}$.

2) Обратно, пусть $h \in K_{Q,x_0}$. Тогда, взяв кривую $x(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon h + r(\varepsilon) \in Q$ такую, что $||r(\varepsilon)||/\varepsilon \to 0$ если $\varepsilon \to 0$, для $i = 1, ..., k$ имеем:

$$C_i \geq f_i(x(\varepsilon)) = f_i(x_0 + \varepsilon h + r(\varepsilon)) = f_i(x_0) + \varepsilon f_i(h) + f_i(r(\varepsilon)) =$$

$$= C_i + \varepsilon f_i(h) + f_i(r(\varepsilon)),$$

откуда $f_i(h) + f_i(r(\varepsilon)/\varepsilon) \leq 0$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем $f_i(h) \leq 0$, то есть $h \in K$. $\diamondsuit$

2.2.4. Конус допустимых направлений для множества, заданного ограничениями типа равенств

Будем говорить, что множество $Q \subset E_1$ задано ограничениями типа равенства, если задано некоторое отображение $F : E_1 \to E_2$ и

$$Q = \{x : F(x) = 0\}.$$

Теорема 2.2.6(теорема Люстерника). Пусть E_1 и E_2 – банаховы пространства, $F : E_1 \to E_2$ – непрерывно дифференцируемое отображение и $Q = \{x \in E_1 : F(x) = 0\}$. Пусть $x_0 \in Q$ и $F'(x_0)$ отображает E_1 на все E_2.
Если

$$H = \{h \in E_1 : F'(x_0)h = 0\},$$

то:
1) существует окрестность U точки x_0 такая, что $\forall x \in Q \cap U$ справедливо представление

$$x = x_0 + h + r(h),$$

где $h \in H$, $||r(h)||/||h|| \to 0$ при $||h|| \to 0$.
2) конус допустимых направлений $K_{Q,x_0} = H$.

Доказательство. 1) Докажем первое утверждение теоремы, сделав дополнительное предположение (выполняющееся во всех последующих ее применениях), что $E_1 = H \oplus H_1$, где H_1 – некоторое подпространство. Общий случай рассмотрен в [2], [28], [38].

В силу этого предположения, в окрестности точки x_0 любой элемент x можно представить в виде $x = x_0 + h + r$, где $h \in H$, $r \in H_1$.

Будем искать функцию $r(h)$ из условия $x \in Q$, то есть из уравнения

$$\Phi(h, r) = F(x_0 + h + r) = 0. \tag{1}$$

Очевидно, $\Phi(0, 0) = 0$. По теореме о полной производной (теорема 1.3.4) имеем

$$\Phi'(0, 0)(\Delta h, \Delta r) = \Phi'_h(0, 0)\Delta h + \Phi'_r(0, 0)\Delta r = F'(x_0)\Delta h + F'(x_0)\Delta r,$$

причем $\Phi'_h(0,0)$ – это ограничение $F'(x_0)$ на H, а $\Phi'_r(0,0)$ – ограничение $F'(x_0)$ на H_1.

По условию, $\Phi'_h(0,0) = F'(x_0)|_H = 0$. Так как $F'(x_0)$ отображает E_1 на все E_2, то отсюда следует, что ограничение $F'(x_0)$ на H_1 отображает H_1 на все E_2. Кроме того, $F'(x_0)$ отображает H_1 на E_2 взаимно однозначно, поскольку если $h_1, h_2 \in H_1$ и $F'(x_0)h_1 = F'(x_0)h_2$, то $F'(x_0)(h_1 - h_2) = 0$, то есть $h_1 - h_2 \in H$ и $h_1 - h_2 \in H_1$, откуда $h_1 - h_2 = 0$ и $h_1 = h_2$.

Таким образом, $\Phi'_r(0,0) = F'(x_0)|_{H_1}$ – линейный ограниченный оператор, отображающий H_1 на все E_2 взаимно однозначно. Поэтому существует обратный оператор $[\Phi'_r(0,0)]^{-1} : E_2 \to H_1$.

По теореме Банаха об обратном операторе (теорема 1.1.3), он ограничен. (Заметим, что в дальнейших приложениях этой теоремы ограниченность ${\Phi'_r}^{-1}$ легко проверяется и можно избежать ссылки на теорему Банаха, просто включив ограниченность ${\Phi'_r}^{-1}$ в условия теоремы.)

Применим теперь к уравнению (1) теорему о неявной функции (теорема 1.3.5), все условия которой по доказанному выполнены. В соответствии с этой теоремой в некоторой окрестности точки $h = 0$ определено отображение $r(h)$ такое, что

$$F(x_0 + h + r(h)) = 0,$$

то есть $x_0 + h + r(h) \in Q$, $r(0) = 0$ и

$$r'(0) = -[\Phi'_r(0,0)]^{-1}\Phi'_h(0,0) = 0.$$

Но это означает, что $||r(h)||/||h|| \to 0$, если $||h|| \to 0$. Первая часть теоремы доказана.

2) Для доказательства второго утверждения теоремы докажем два включения: $K_{Q,x_0} \subset H$ и $H \subset K_{Q,x_0}$.

а) Пусть $h \in K_{Q,x_0}$, тогда существует кривая $x(\varepsilon)$ такая, что

$$x(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon h + r_0(\varepsilon),$$

причем $||r_0(\varepsilon)||/||h|| \to 0$, если $||h|| \to 0$.

Но тогда

$$0 = F(x(\varepsilon)) = F(x_0 + \varepsilon h + r_0(\varepsilon)) = F(x_0) + F'(x_0)(\varepsilon h + r_0(\varepsilon)) + \omega(x_0, \varepsilon h) =$$

$$= \varepsilon F'(x_0)h + o(\varepsilon)$$

и, разделив это соотношение на ε и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$F'(x_0)h = 0,$$

то есть $h \in H$.

b) Обратно, пусть $h \in K_{Q,x_0}$. По первой части теоремы, положив

$$x(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon h + r(\varepsilon h),$$

имеем $x(\varepsilon) \in Q$ и $||r(\varepsilon h)|| = o(||\varepsilon h||) = o(\varepsilon)$, то есть $h \in K_{Q,x_0}$. $\diamondsuit$

Первая часть теоремы означает, что в малой окрестности точки $x_0 \in Q$ множество Q с точностью до бесконечно малых порядка выше первого аппроксимируется аффинным подпространством $x_0 + H$. Согласно второй части теоремы конус допустимых направлений в точке x_0 совпадает с касательным подпространством H (рис. 7).

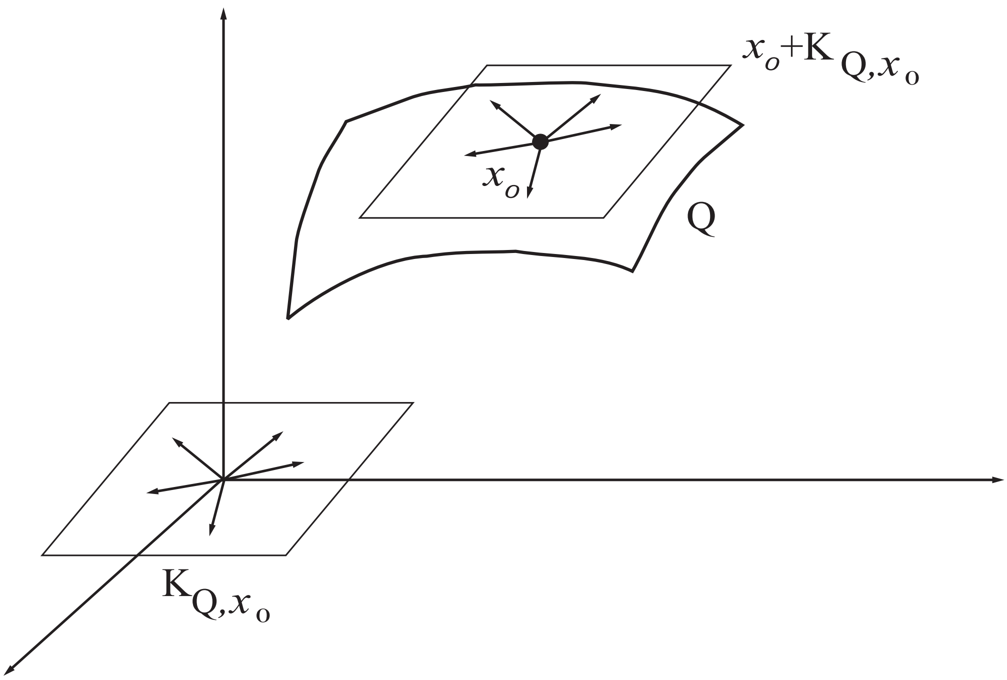

Рис 7.

Пример 1. Пусть $E = C(t_0, t_1) \times C(t_0, t_1)$ и $L(t, x_1, x_2)$ – непрерывно дифференцируемая функция. Определим множество $Q \subset E$, следующим образом:

$$Q = \{(x_1(t), x_2(t)) : \ L(t, x_1(t), x_2(t)) = 0\}.$$

Если ввести отображение $\tilde{L} : E = C^1(t_0, t_1) \times C^1(t_0, t_1) \to C(t_0, t_1)$, положив $y(t) = L(t, x_1(t), x_2(t))$, то производная этого отображения в точке (x_1, x_2) будет равна $\tilde{L}'(x_1, x_2)(h_1, h_2) = L_{x_1}(t, x_1(t), x_2(t))h_1(t)+$
$+L_{x_2}(t, x_1(t), x_2(t))h_2(t)$ и если, например, $L_{x_2}(t, x_1(t), x_2(t)) \neq 0$, то для любой функции $z(t) \in C(t_0, t_1)$ уравнение относительно h_1, h_2

$$L_{x_1}(t, x_1(t), x_2(t))h_1(t) + L_{x_2}(t, x_1(t), x_2(t))h_2(t) = z(t)$$

разрешимо, то есть $\tilde{L}'$ отображает E на все $C(t_0, t_1)$.

По теореме Люстерника тогда

$$K_{Q,(x_1,x_2)} = \{(h_1,h_2):\ L_{x_1}(t,x_1(t),x_2(t))h_1(t) + L_{x_2}(t,x_1(t),x_2(t))h_2(t) = 0\}.$$

Пример 2. Пусть $E = C^1(t_0,t_1)$ и $L(t,x,\dot{x})$ –непрерывно дифференцируемая функция. Введем отображение $\tilde{L} : C^1(t_0,t_1) \to C(t_0,t_1)$, положив $y = \tilde{L}(x) = L(t,x(t),\dot{x}(t))$ и определим множество

$$Q = \{x(t):\ L(t,x(t),\dot{x}(t)) = 0\}.$$

По примеру 3) из пункта 1.3.3,

$$\tilde{L}'(x)h = L_x(t,x(t),\dot{x}(t))h(t) + L_{\dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t))\dot{h}(t)$$

и поэтому, если $L_{\dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t)) \neq 0$, то для любой функции $y(t) \in C(t_0,t_1)$ уравнение $\tilde{L}'(x)h = y$, то есть дифференциальное уравнение

$$L_x(t,x(t),\dot{x}(t))h + L_{\dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t))\dot{h} = y(t)$$

разрешимо и значит, $\tilde{L}$ отображает $C^1(t_0,t_1)$ на все $C(t_0,t_1)$.

Поэтому, по теореме Люстерника, конус допустимых направлений для множества Q в точке $x(t) \in Q$ будет

$$K_{Q,x} = \{h(t) : L_x(t,x(t),\dot{x}(t))h(t) + L_{\dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t))\dot{h}(t) = 0\}.$$

Очевидно, множество Q – это просто множество всех решений дифференциального уравнения $L(t,x,\dot{x}) = 0$, а конус допустимых направлений для Q в точке $x \in Q$ – это множество всех решений уравнения в вариациях $L_x(t,x(t),\dot{x}(t))h + L_{\dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t))\dot{h} = 0$, записанного для решения $x(t)$ исходного уравнения.

Пример 3. Предыдущий пример непосредственно обобщается на тот случай, когда $E = C^1_n(t_0,t_1) = C^1(t_0,t_1) \times ... \times C^1(t_0,t_1)$ – банахово пространство непрерывно дифференцируемых на $[t_0,t_1]$ вектор-функций (то есть если $\mathbf{x}(t) \in C^1_n(t_0,t_1)$, то $\mathbf{x}(t) = (x_1(t),...,x_n(t))$).

Пусть заданы m непрерывно дифференцируемых функций $L_i(t,\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}) = L_i(t,x_1,...,x_n,\dot{x}_1,...,\dot{x}_n)$, $i = 1,...,m$. Определим отображение $\tilde{L} : C^1_n(t_0,t_1) \to C_m(t_0,t_1)$, положив $\tilde{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ł}(t,\mathbf{x}(t),\dot{\mathbf{x}}(t)) = (L_1(t,\mathbf{x}(t),\dot{\mathbf{x}}(t)),...,L_m(t,\mathbf{x}(t),\dot{\mathbf{x}}(t))$ и введем

$$Q = \{\mathbf{x}(t) : \tilde{L}(\mathbf{x}) = L(t,\mathbf{x}(t),\dot{\mathbf{x}}(t)) = 0\}.$$

Если матрица $Ł_{\dot{\mathbf{x}}}(t,\mathbf{x}(t),\dot{\mathbf{x}}(t))$ имеет ранг m, то $\tilde{L}'(x)$ отображает $C^1_m(t_0,t_1)$ на все $C_m(t_0,t_1)$ и значит,

$$K_{Q,\mathbf{x}} = \{\mathbf{h}(t) : Ł_{\mathbf{x}}(t,\mathbf{x}(t),\dot{\mathbf{x}}(t))\mathbf{h}(t) + Ł_{\dot{\mathbf{x}}}(t,\mathbf{x}(t),\dot{\mathbf{x}}(t))\dot{\mathbf{h}}(t) = \mathbf{0}\}.\ \diamondsuit$$

Один из часто встречающихся способов задания множества Q – это задание его с помощью функционалов, то есть

$$Q = \{x \in E: \; f_i(x) = 0, \quad i = 1, ..., m\},$$

где $f_1(x), ..., f_m(x)$ – функционалы на нормированном пространстве E.

Следствие 2.2.4. Пусть $f_1(x), ..., f_m(x)$ – непрерывно дифференцируемые функционалы на банаховом пространстве E и $Q = \{x : \; f_i(x) = 0, \quad i = 1, ..., m\}$. Пусть $x_0 \in Q$ и функционалы $f_i'(x_0)$ линейно независимы.

Если

$$H = \{h \in E: \; f_i'(x_0)h = 0, \quad i = 1, ..., m\},$$

то:

1) существует окрестность U точки x_0 такая, что $\forall x \in Q \cap U$ справедливо представление

$$x = x_0 + h + r(h),$$

где $h \in H$, $||r(h)||/||h|| \to 0$ при $||h|| \to 0$.

2) конус допустимых направлений $K_{Q,x_0)} = H$.

Доказательство Определим отображение $F : E \to R^m$, положив $\mathbf{f}(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$. Так как $\mathbf{f}'(x_0) = (f_1'(x_0), ..., f_m'(x_0))$ и так как функционалы $f_i'(x_0)$ линейно независимы, то $\mathbf{f}'(x_0)$ отображает E на все R^m. Наконец, по теореме 1.2.10, $E = H \oplus H_m$ и значит, все условия теоремы 2.2.6 выполнены. $\diamondsuit$

Упражнения. 1) Найти конус допустимых направлений для множества $Q \subset R^2$ и точки $\mathbf{x}_0 \in Q$:

$Q = \{(x_1, x_2) : |x_1| \le 1, \; |x_2| \le 1\}, \quad \mathbf{x}_0 = (-1, -1), \; \mathbf{x}_0 = (-1, 0);$

$Q = \{(x_1, x_2) : |x_2| \le x_2^2, \; x_1 \ge 0\}, \quad \mathbf{x}_0 = (0, 0), \; \mathbf{x}_0 = (1, 1);$

$Q = \{(1/n, 1/n + 1), \; n \in N\}, \quad \mathbf{x}_0 = (0, 0).$

2) Найти конус допустимых направлений для множества $Q \subset E = C_n(t_0, t_1) = C(t_0, t_1) \times ... \times C(t_0, t_1)$, заданного ограничениями типа равенства

$$Q = \{\mathbf{x}(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)) : M_i(t, x_1(t), ..., x_n(t)) = 0, \quad i = 1, ..., m\}$$

(здесь $M_i(t, x_1, ..., x_n)$ – непрерывно дифференцируемые функции).

§2.3. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ МИНИМУМА. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ МИНИМУМА

2.3.1. Необходимые условия минимума первого порядка

Установим общие необходимые условия минимума. Если какие-то необходимые условия известны, то это позволяет выделить множество подозрительных точек, среди которых находятся все точки локального минимума (если они, конечно, имеются).

Теорема 2.3.1. Если $f(x)$ – дифференцируемый функционал на E и Q – подножество в E, то для того, чтобы функционал достигал на Q локального минимума в точке $x_0 \in Q$, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$f'(x_0)h \geq 0, \quad \forall h \in K_{Q,x_0}.$$

Доказательство. Пусть $h \in K_{Q,x_0}$. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$, для которого $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ определена кривая $x(\varepsilon) \in Q$ такая, что

$$x(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon h + r(\varepsilon),$$

где

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{||r(\varepsilon)||}{\varepsilon} = 0.$$

Так как $x(\varepsilon) \in Q$ и x_0 – точка локального минимума, то для достаточно малых ε

$$f(x(\varepsilon)) \geq f(x_0).$$

Подставляя сюда выражение для $x(\varepsilon)$ и пользуясь дифференцируемостью $f(x)$, имеем

$$f(x_0 + \varepsilon h + r(\varepsilon)) = f(x_0) + f'(x_0)(\varepsilon h + r(\varepsilon)) + \omega(x_0, \varepsilon h + r(\varepsilon)) \geq f(x_0),$$

откуда

$$\varepsilon f'(x_0)h + f'(x_0)r(\varepsilon) + \omega(x_0, \varepsilon h + r(\varepsilon)) \geq 0.$$

Разделив на ε и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем требуемое неравенство $f'(x_0)h \geq 0$. $\diamondsuit$

Теорема 2.3.2. Если $f(x)$ – дифференцируемый функционал на E, Q – подмножество в E, $x_0 \in Q$ и конус допустимых направлений K_{Q,x_0} в точке x_0 для множества Q является подпространством, то для того, чтобы точка x_0 была точкой локального экстремума $f(x)$ на Q, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$f'(x_0)h = 0, \quad \forall h \in K_{Q,x_0}.$$

Доказательство. Пусть точка x_0 является точкой локального минимума $f(x)$ на Q. Так как вместе с любым h подпространство допустимых направлений K_{Q,x_0} содержит $-h$, то необходимое условие минимума принимает вид $f'(x_0)h = 0$, $\forall h \in K_{Q,x_0}$.

Если теперь x_0 – точка локального максимума $f(x)$ на Q, то для $-f(x)$ она будет точкой локального минимума, и мы приходим к тому же необходимому условию. $\diamondsuit$

Следствие 2.3.1(теорема Ферма). Пусть $f(x)$ – дифференцируемый функционал на нормированном пространстве E. Для того чтобы внутренняя точка $x_0 \in Q \subset E$ была точкой локального экстремума на Q, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$f'(x_0) = 0.$$

Доказательство. Так как по теореме 2.2.1 для внутренней точки $K_{Q,x_0} = E$, то по предыдущей теореме $f'(x_0)h = 0$, $\forall h \in E$, то есть $f'(x_0) = 0$. $\diamondsuit$

Теорема 2.3.3. Если $f(x)$ – дифференцируемый функционал на E и Q – выпуклое подмножество в E, то для того, чтобы точка $x_0 \in Q$ была точкой минимума $f(x)$ на Q, необходимо, чтобы выполнялось условие:

$$f'(x_0)(x - x_0) \geq 0, \quad \forall x \in Q.$$

Доказательство. По теореме 2.2.3 K_{Q,x_0} равен замыканию множества $K = \{h : \ h = \alpha(x - x_0), \ x \in Q, \ \alpha > 0\}$, поэтому из необходимого условия теоремы 2.3.1. следует указанное условие. $\diamondsuit$

2.3.2. Достаточные условия минимума первого порядка

В случае выпуклой задачи полученные необходимые условия минимума оказываются и достаточными.

Теорема 2.3.4. Пусть $f(x)$ – выпуклый дифференцируемый функционал на E, Q – выпуклое подмножество в E. Для того чтобы точка $x_0 \in Q$ была точкой минимума $f(x)$ на Q, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из двух эквивалентных условий:

$$f'(x_0)h \geq 0, \quad \forall h \in K_{Q,x_0}, \tag{1}$$

$$f'(x_0)(x - x_0) \geq 0, \quad \forall x \in Q. \tag{2}$$

Доказательство. 1) Необходимость этих условий уже доказана в теоремах 2.3.1 и 2.3.3; их эквивалентность следует из вида конуса допустимых направлений, установленного в теореме 2.2.3 и ограниченности функционала $f'(x_0)$.

2) Докажем достаточность условия (2). Если $x \in Q$, то

$$f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \omega(x_0, x - x_0) \geq f(x_0),$$

так как $f'(x_0)(x - x_0) \geq 0$ по предположению, а $\omega(x_0, x - x_0) \geq 0$ в силу выпуклости $f(x)$ (теорема 1.3.5).

Таким образом, $\forall x \in Q$, $f(x) \geq f(x_0)$, то есть точка x_0 – точка минимума (глобального). $\diamondsuit$

Пример. Пусть E евклидово пространство. Найти точку, сумма квадратов расстояний от которой до m заданных точек $x_1, ..., x_m$ минимальна.
Следует минимизировать функцию

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} ||x - x_i||^2 = \sum_{i=1}^{m} (x - x_i, x - x_i).$$

Функция $f(x)$ – выпукла и поскольку $Q = R^n$, то необходимое и достаточное условие теоремы 2.3.4 здесь принимает вид $f'(x) = 0$. Используя пример 4) пункта 1.3.1, получаем

$$f'(x) = 2\sum_{i=1}^{m} (x - x_i) = 0,$$

то есть минимум $f(x)$ на R^n достигается в точке

$$x_0 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i. \ \diamondsuit$$

2.3.3. Необходимые условия минимума второго порядка

Если $f'(x_0) = 0$ на K_{Q,x_0}, например, если K_{Q,x_0} – подпространство, то можно использовать необходимые условия второго порядка, то есть условия, включающие вторую производную функционала. Так как получить эти условия значительно труднее, дальше рассмотрены только простейшие случаи: когда $f'(x_0) \equiv 0$ на E и когда Q – аффинное подпространство.

Теорема 2.3.5. Пусть $f(x)$ – дважды дифференцируемый функционал на E, Q – подмножество в E, $x_0 \in Q$.

Если $f'(x_0) \equiv 0$ на E, то для того, чтобы точка x_0 была точкой локального минимума $f(x)$ на Q, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$f''(x_0)(h, h) \geq 0, \quad \forall h \in K_{Q,x_0}.$$

Доказательство. Если $h \in K_{Q,x_0}$, то $\exists x(\varepsilon) \in Q$ для $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ такое, что $x(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon h + r(\varepsilon)$, причем $||r(\varepsilon)||/\varepsilon \to 0$, если $\varepsilon \to 0$.

Поскольку x_0 – точка локального минимума и поскольку $f'(x_0) = 0$, то для достаточно малых ε имеем

$$f(x_0) \leq f(x(\varepsilon)) = f(x_0 + \varepsilon h + r(\varepsilon)) = f(x_0) + f''(x_0)(\varepsilon h + r(\varepsilon), \varepsilon h + r(\varepsilon)) +$$

$$+\omega_2(x_0, \varepsilon h + r(\varepsilon)).$$

Отсюда, разделив на ε^2 и используя билинейность второй производной, получаем

$$f''(x_0)\left(h+\frac{r(\varepsilon)}{\varepsilon}, h+\frac{r(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)+\frac{\omega_2(x_0, \varepsilon h+r(\varepsilon))}{\varepsilon^2}\geq 0.$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем $f''(x_0)(h,h) \geq 0$. $\diamondsuit$

Следствие 2.3.2. Пусть $f(x)$ – дважды дифференцируемый функционал на нормированном пространстве E, Q – подмножество в E. Для того чтобы внутренняя точка $x_0 \in Q$ была точкой локального минимума $f(x)$ на Q небходимо, чтобы выполнялись условия

$$f'(x_0) = 0, \tag{1}$$

$$f''(x_0)(h,h) \geq 0, \quad \forall h \in E. \tag{2}$$

Доказательство. Необходимость (1) получена в следствии 2.3.1. Необходимость (2) вытекает из того, что $K_{Q,x_0} = E$ для внутренней точки x_0 и из теоремы 2.3.5. $\diamondsuit$

Теорема 2.3.6. Пусть $f(x)$ – дважды дифференцируемый функционал на E, Q – аффинное подпространство в E, $x_0 \in E$, так что $Q = x_0 + H$, где H – подпространство в E.

Для того чтобы точка x_0 была точкой локального минимума $f(x)$ на Q, необходимо, чтобы выполнялись условия

$$f'(x_0)h = 0, \quad \forall h \in H, \tag{1}$$

$$f''(x_0)(h,h) \geq 0, \quad \forall h \in H. \tag{2}$$

Доказательство. По следствию 2.2.2, $K_{Q,x_0} = H$ и необходимость условия (1) вытекает из теоремы 2.3.2.

Если $h \in H$, то $x_0 + \varepsilon h \in Q$ и поскольку x_0 – точка локального минимума $f(x)$ на Q, то для достаточно малых ε

$$f(x_0) \leq f(x_0+\varepsilon h) = f(x_0) + \varepsilon f'(x_0)h + \frac{1}{2}\varepsilon^2 f''(x_0)(h,h) + \omega_2(x_0, \varepsilon h),$$

откуда, с учетом условия (1), находим

$$\frac{1}{2}f''(x_0)(h,h) + \frac{\omega_2(x_0,\varepsilon h)}{\varepsilon^2} \geq 0.$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем условие (2). $\diamondsuit$

Замечание. Для случая максимума следует брать неравенства противоположного знака.

2.3.4. Достаточные условия минимума второго порядка

Рассмотрим сначала случай аффинного подпространства и сформулируем два варианта достаточных условий.

Теорема 2.3.7. Пусть $f(x)$ – дважды дифференцируемый функционал на нормированном пространстве E, Q – аффинное подпространство в E и $x_0 \in Q$, так что $Q = x_0 + H$, где H – подпространство в E. Пусть в точке x_0 выполняется необходимое условие минимума $f'(x_0)h = 0$, $\forall h \in H$ (теорема 2.3.2).

1) Для того чтобы точка x_0 была точкой строгого локального минимума, достаточно, чтобы для некоторого $\lambda > 0$ выполнялось неравенство

$$f''(x_0)(h,h) \geq \lambda ||h||^2, \quad \forall h \in H.$$

2) Пусть в пространстве E задана еще одна норма $||x||_1$ такая, что $||x||_1 \leq C||x||$, $\forall x \in E$ и пусть остаточный член $\omega_2(x,h)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\omega_2(x,h)}{||h||_1} \to 0,$$

если $||h|| \to 0$.

Для того чтобы точка x_0 была точкой строгого локального минимума, достаточно, чтобы для некоторого $\lambda > 0$ выполнялось неравенство

$$f''(x_0)(h,h) \geq \lambda ||h||_1^2, \quad \forall h \in H.$$

Доказательство. 1) Если $x \in Q$ то $x - x_0 \in H$ и поэтому

$$f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0, x - x_0) +$$

$$+\omega_2(x_0, x - x_0) \geq f(x_0) + ||x - x_0||^2 \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\omega_2(x_0, x - x_0)}{||x - x_0||^2} \right).$$

Но если $||x - x_0|| \to 0$, то второе слагаемое в скобках тоже стремится к нулю в силу свойств остаточного члена $\omega_2(x_0, x - x_0)$. Поэтому для достаточно малых $||x - x_0||$ имеем отсюда $f(x) > f(x_0)$, если $x \neq x_0$.

2) В этом случае, повторяя предыдущие выкладки с нормой $||x||_1$, приходим к оценке

$$f(x) \geq f(x_0) + ||x - x_0||_1^2 \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\omega_2(x_0, x - x_0)}{||x - x_0||_1^2} \right) > f(x_0),$$

если $x \neq x_0$ и $||x - x_0||$ достаточно мала. $\diamondsuit$

Следствие 2.3.3. Пусть $f(x)$ –дважды дифференцируемый функционал на E и x_0 – внутренняя точка подмножества $Q \subset E$.

Если в точке x_0 выполняется необходимое условие минимума $f'(x_0) = 0$, то для того, чтобы функционал $f(x)$ достигал в точке x_0 строгого локального минимума на Q, достаточно, чтобы выполнялось условие: $\exists \lambda > 0$ такое, что

$$f''(x_0)(h,h) \geq \lambda ||h||^2, \quad \forall h \in E.$$

Доказательство. Применяя только что доказанную теорему к случаю, когда подмножество, на котором ищется минимум $f(x)$ совпадает со всем E, получаем, что x_0 – точка строгого локального минимума $f(x)$ на E.

Так как точка x_0 будет точкой строгого локального минимума $f(x)$ и на Q, то следствие доказано. $\diamondsuit$

Достаточное условие этого следствия обобщает на бесконечномерный случай известные из анализа достаточные условия минимума, заключающиеся в положительности второй производной для случая функции одной переменной и положительной определенности матрицы вторых производных (гессиана) для случая функции многих переменных.

Получим достаточные условия минимума второго порядка для множества, заданного ограничениями типа равенства, рассмотрев при этом для простоты только конечномерный случай.

Теорема 2.3.8. Пусть $Q = \{x : \ f_i(x) = 0, \ i = 1, ..., m\}$ – подмножество в R^n, функции $f_i(x)$ удовлетворяют условиям следствия 2.2.4., $f(x)$ – дважды дифференцируемая функция, $x_0 \in Q$ и $f'(x_0) = 0$.

Для того чтобы функция $f(x)$ достигала в точке x_0 строгого локального минимума на Q, достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$f''(x_0)(h,h) > 0, \quad \forall h \in K_{Q,x_0}, \ h \neq 0.$$

Доказательство. Так как конус K_{Q,x_0} замкнутое множество (теорема 2.2.2), то его пересечение с единичной сферой $S_K = S^{n-1} \cap K_{Q,x_0}$ – замкнутое, ограниченное множество и, следовательно, непрерывная функция $g(h) = f''(x_0)(h,h)$ достигает на S_K минимума в некоторой точке. Так как при этом $g(h)$ по условию не обращается в нуль на S_K, то существует $\lambda > 0$ такое, что $f''(x_0)(h,h) \geq \lambda$ для всех $h \in S_K$. Но отсюда следует, что

$$f''(x_0)(h,h) \geq \lambda ||h||^2, \quad \forall h \in K_{Q,x_0}.$$

По теореме 2.2.7 существует такая окрестность U точки x_0 в Q, что $\forall x \in Q$

$$x = x_0 + h + r(h),$$

где $h \in K_{Q,x_0}$, $||r(h)||/||h|| \to 0$, если $||h|| \to 0$.

Так как $f'(x_0) = 0$, то для $x \in Q$ имеем

$$f(x) = f(x_0+h+r(h)) = f(x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(h+r(h), h+r(h))+\omega_2(x_0, h+r(h)) =$$

$$= f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(h,h) + f''(x_0)(h, r(h)) + \frac{1}{2}f''(x_0)(r(h), r(h)))+$$

$$+\omega_2(x_0, h+r(h)) \geq f(x_0) + ||h||^2 \left[\frac{1}{2}\lambda + f''(x_0)\left(\frac{h}{||h||}, \frac{r(h)}{||h||}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}f''(x_0)\left(\frac{r(h)}{||h||}, \frac{r(h)}{||h||}\right) + \frac{\omega_2(x_0, h+r(h))}{||h||^2}\right].$$

Все члены в квадратной скобке, кроме первого, стремятся к нулю при $||h|| \to 0$, то есть квадратная скобка положительна для достаточно малых $h \neq 0$ и значит, $f(x) > f(x_0)$, если $x \in Q$, $x \neq x_0$ и $||x - x_0||$ достаточно мала, то есть x_0 – точка строгого локального минимума. $\diamondsuit$

Глава 3. МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. (МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ)

§ 3.1. ЗАДАЧИ НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ (ОГРАНИЧЕНИЯ ТИПА РАВЕНСТВА)

В этой главе рассматривается задача о минимизации функционала $f(\mathbf{x})$, заданного на R^n, на некотором подмножестве $Q \subset R^n$. Следуя обычной терминологии, будем называть функционал $f(\mathbf{x})$ функцией n переменных.

Если $f(\mathbf{x})$ – линейный функционал на R^n (линейная однородная функция), то, как известно, его можно задать с помощью некоторого вектора $\mathbf{a} \in R^n$, а именно:

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}, \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in R^n.$$

Отсюда, в частности, сразу следует, что любой линейный функционал на R^n ограничен.

Пусть теперь $f(\mathbf{x}) = f(x_1, ..., x_n)$ – дифференцируемая функция n переменных. Производная $f'(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}$, согласно определению, это линейный функционал на R^n и значит, его можно задать вектором из R^n, для которого будем использовать обозначение $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ и который называется градиентом функции $f(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}$,то есть

$$f'(\mathbf{x})\mathbf{h} = (\mathbf{f}'(\mathbf{x}), \mathbf{h}), \quad \forall \mathbf{h} \in R^n.$$

Как показано в примере 2) пункта 1.3.3,

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right).$$

Если функция $f(\mathbf{x})$ непрерывна, а множество Q замкнуто и ограничено, то функция $f(\mathbf{x})$ достигает на Q своего максимума и минимума (теорема 2.1.3).

Общие необходимые условия экстремума второй главы можно конкретизировать в различных частных случаях, в зависимости от способа задания множества Q.

В этом параграфе будет рассмотрен случай, когда Q задается ограничениями типа равенства, то есть

$$Q = \{\mathbf{x} : f_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, ..., m\};$$

такая задача называется задачей на условный экстремум (рис. 8).

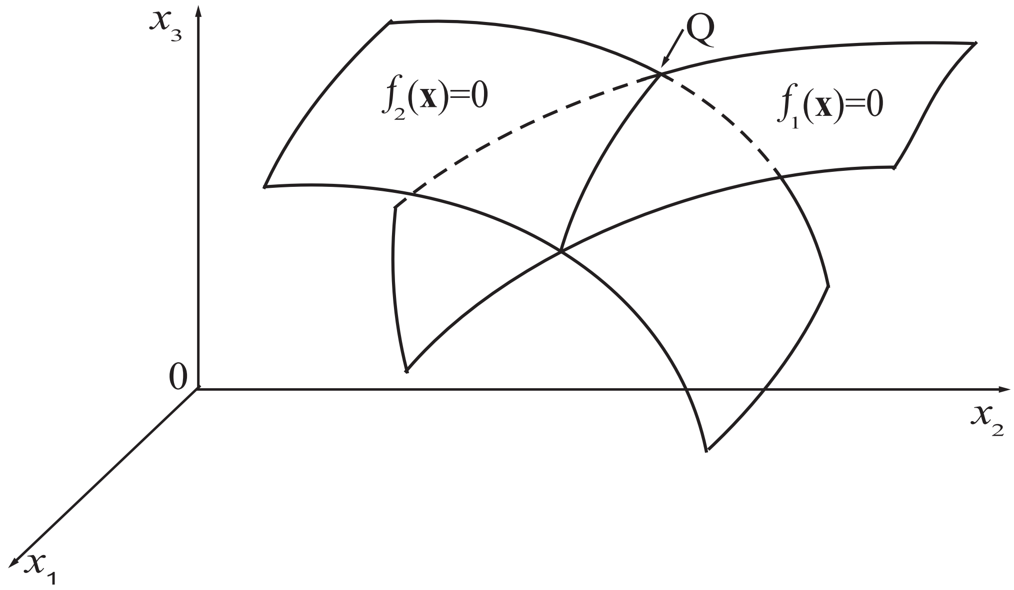

Рис 8.

Теорема 3.1.1. (правило множителей Лагранжа) Пусть $f(\mathbf{x})$ – дифференцируемая функция, $f_1(\mathbf{x}), ..., f_m(\mathbf{x})$ – непрерывно дифференцируемые функции на R^n,

$$Q = \{\mathbf{x} : f_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, ..., m\}.$$

Для того чтобы точка $\mathbf{x}_0$ была точкой локального экстремума функции $f(\mathbf{x})$ на Q, необходимо, чтобы нашлись такие числа $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m$, не все равные нулю, что

$$\lambda_0 \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) + \lambda_1 \mathbf{f}'_1(\mathbf{x}_0) + ... + \lambda_m \mathbf{f}'_m(\mathbf{x}_0) = 0. \tag{1}$$

При этом, если векторы $\mathbf{f}'_1(\mathbf{x}_0), ..., \mathbf{f}'_m(\mathbf{x}_0)$ линейно независимы, то можно положить $\lambda_0 = 1$.

Доказательство. 1) Если $\mathbf{f}'_1(\mathbf{x}_0), ..., \mathbf{f}'_m(\mathbf{x}_0)$ – линейно зависимы, то существуют числа $\lambda_1, ..., \lambda_m$, не все равные нулю и такие, что

$$\lambda_1 \mathbf{f}'_1(\mathbf{x}_0) + ... + \lambda_m \mathbf{f}'_m(\mathbf{x}_0) = 0,$$

поэтому, положив $\lambda_0 = 0$, получаем утверждение теоремы в этом случае.

2) Если $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) = 0$, то достаточно взять

$$\lambda_0 = 1, \ \lambda_1 = 0, \ ..., \lambda_m = 0.$$

3) Пусть наконец $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) \neq 0$ и $\mathbf{f}'_1(\mathbf{x}_0), ..., \mathbf{f}'_m(\mathbf{x}_0)$ – линейно независимы. Так как при этом выполняются условия теоремы Люстерника (теорема 2.2.6), то конус допустимых направлений в точке $\mathbf{x}_0$ для множества Q (касательное подпространство) равен

$$K_{Q,\mathbf{x}_0} = \{\mathbf{h} : (\mathbf{f}'_i(\mathbf{x}_0), \mathbf{h}) = 0, \quad i = 1, ..., m\}.$$

Так как $K_{Q,\mathbf{x}_0}$ – подпространство, то по теореме 2.3.2 в точке экстремума $\mathbf{x}_0$ должно выполняться условие

$$(\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0), \mathbf{h}) = 0, \quad \forall \mathbf{h} \in K_{Q,\mathbf{x}_0}.$$

Применяя теперь теорему 1.2.9, получаем, что $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{f}_1'(\mathbf{x}_0), ..., \mathbf{f}_m'(\mathbf{x}_0)$, то есть

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) + \lambda_1 \mathbf{f}_1'(\mathbf{x}_0) + ... + \lambda_m \mathbf{f}_m'(\mathbf{x}_0) = 0. \diamondsuit$$

Числа $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m$ называются множителями Лагранжа, а уравнение (1) – уравнением Эйлера-Лагранжа.

Допустим, что вектора $\mathbf{f}_1'(\mathbf{x}_0), ..., \mathbf{f}_m'(\mathbf{x}_0)$ – линейно независимы, то есть можно положить $\lambda_0 = 1$. Уравнение Эйлера-Лагранжа в этом случае эквивалентно следующей системе из n скалярных уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n) = 0, \quad i = 1, ..., n.$$

Добавляя сюда m уравнений, задающих множество Q:

$$f_j(x_1, ..., x_n) = 0, \; j = 1, ..., m,$$

получаем систему из $n + m$ уравнений, из которой определяются множители Лагранжа $\lambda_1, ..., \lambda_m$ и координаты $x_{10}, ..., x_{n0}$ подозрительных на экстремум точек.

Определение. Функция $n + m$ переменных

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = L(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = f(\mathbf{x}) + y_1 f_1(\mathbf{x}) + ... + y_m f_m(\mathbf{x})$$

называется функцией Лагранжа. $\diamondsuit$

С помощью функции Лагранжа необходимые условия можно записать в следующем виде.

Следствие 3.1.1. Если в условиях теоремы 3.1.1 вектора $f_1'(\mathbf{x}_0), ..., f_m'(\mathbf{x}_0)$ – линейно независимы, то для того, чтобы точка $\mathbf{x}_0$ была точкой локального экстремума, необходимо, чтобы нашлась такая точка $\mathbf{y}_0 = \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$, что

$$\text{Ł}'(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \text{Ł}'(\mathbf{x}_0, \lambda) = 0.$$

Доказательство. Сразу следует из того, что

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = f_j(\mathbf{x})$$

и теоремы 3.1.1. $\diamondsuit$

Таким образом, с помощью функции Лагранжа необходимые условия в задаче на условный экстремум сводятся к необходимым условиям задачи на безусловный экстремум (на всем R^{n+m}) для функции $L(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

Примеры. 1) Рассмотрим задачу на наибольшее и наименьшее значения для функции $f(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + ... + x_n$, на множестве $S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in R^n : f_1(\mathbf{x}) = (\mathbf{x},\mathbf{x}) - 1 = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 - 1 = 0\}$ (S^{n-1} – это единичная сфера в R^n). Так как множество S^{n-1} замкнуто и ограничено, то максимум и минимум $f(\mathbf{x})$достигаются на нем в некоторых точках.

Здесь функция Лагранжа $L(\mathbf{x},\lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda f_1(\mathbf{x})$, и вычисляя ее частные производные, получаем

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 1 + 2x_i\lambda = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1^2 + ... + x_n^2 - 1 = 0.$$

Из первых n уравнений находим, что $x_i = -1/2\lambda$ для любого i, то есть $x_1 = x_2 = ... = x_n$ и значит, $\lambda = \pm\sqrt{n}/2$, $x_i = \pm 1/\sqrt{n}$, $i = 1, ..., n$. Непосредственно проверяется, что $x_{\min} = (-1/\sqrt{n}, ..., -1/\sqrt{n})$, $x_{\max} = (1/\sqrt{n}, ..., 1/\sqrt{n})$ и $\min_{S^{n-1}} f(x) = -\sqrt{n}$, $\max_{S^{n-1}} f(x) = \sqrt{n}$. $\diamondsuit$

2) Пусть $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = x_2$ и

$$Q = \{(x_1, x_2) : f_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \quad f_2(x) = (x_1 - 1/2)^2 + x_2^2 - 1/4 = 0\}.$$

Приравнивая нулю производные функции Лагранжа $L(\mathbf{x},\lambda) = f(\mathbf{x}) + {}$ $+\lambda_1 f_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 f_2(\mathbf{x})$, получаем:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2\lambda_1 x_1 + 2\lambda_2(x_1 - 1/2) = 0, \ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 1 + 2\lambda_1 x_2 + 2\lambda_2 x_2 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = (x_1 - 1/2)^2 + x_2^2 - 1/4 = 0.$$

Из третьего и четвертого уравнений находим $x_1 = 1,\ x_2 = 0$, то есть множество Q состоит из одной точки; второе уравнение при этом не удовлетворяется ни при каких λ. Это объясняется тем, что $\mathbf{f}'_1(1,0) = (2,0)$, $\mathbf{f}'_2(1,0) = (1,0)$, то есть эти вектора линейно зависимы и условия следствия не выполнены. $\diamondsuit$

3) Экстремальные свойства собственных значений.

Найдем минимум функции $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{x})$, где $\mathbf{A}$ – симметричная матрица, на единичной сфере $S^{n-1} = \{\mathbf{x} : ||\mathbf{x}|| = 1\} \subset R^n$. Так как сфера S^{n-1} замкнута и ограничена в R^n, то минимум и максимум $f(\mathbf{x})$ достигаются на ней в некоторых точках и для того, чтобы найти их, достаточно перебрать все точки подозрительные на экстремум.

Чтобы определить эти точки, запишем функцию Лагранжа в виде

$$L(\mathbf{x},\lambda) = (\mathbf{Ax},\mathbf{x}) + \lambda(1-(\mathbf{x},\mathbf{x}))$$

и приравняем нулю ее производные

$$\text{Ł}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x},\lambda) = \mathbf{Ax} - \lambda\mathbf{x} = 0, \quad L_\lambda(\mathbf{x},\lambda) = 1-(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0.$$

Из первого уравнения получаем, что λ – собственное значение матрицы $\mathbf{A}$, а $\mathbf{x}$ – собственный вектор. Пусть $\lambda_{\min} = \lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_n = \lambda_{\max}$ – собственные значения $\mathbf{A}$, расположенные в порядке возрастания, а $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ – соответствующие нормированные собственные вектора.

Так как $f(\mathbf{e}_i) = (\mathbf{Ae}_i,\mathbf{e}_i) = \lambda_i$, то отсюда следует, что

$$\inf_{S^{n-1}}(\mathbf{Ax},\mathbf{x}) = \lambda_{\min}, \ \sup_{S^{n-1}}(\mathbf{Ax},\mathbf{x}) = \lambda_{\max}. \ \diamondsuit$$

С помощью функции Лагранжа можно сформулировать достаточные условия экстремума второго порядка в задаче на условный экстремум.

Теорема 3.1.2. Пусть $f(\mathbf{x})$, $f_1(\mathbf{x}), ..., f_n(\mathbf{x})$ – дважды дифференцируемые функции на R^n, $x_0 \in Q = \{\mathbf{x} : f_i(\mathbf{x}) = 0, \ i = 1,...,m\}$ и вектора $f_1'(\mathbf{x}_0), ..., f_m'(\mathbf{x}_0)$ – линейно независимы. Пусть в точке $\mathbf{x}_0$ выполнены необходимые условия следствия 3.1.1, то есть существует $\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_m)$ такое, что

$$L_{\mathbf{x}}'(\mathbf{x}_0,\lambda) = 0.$$

Для того, чтобы точка $\mathbf{x}_0$ была точкой строгого локального минимума функции $f(\mathbf{x})$ на Q, достаточно, чтобы матрица-гессиан $\text{Ł}_{\mathbf{XX}}(\mathbf{x}_0,\lambda)$ удовлетворяла условию

$$(\text{Ł}_{\mathbf{XX}}(\mathbf{x}_0,\lambda)\mathbf{h},\mathbf{h}) > 0, \quad \forall \mathbf{h} \in K_{Q,\mathbf{x}_0}, \ \mathbf{h} \neq 0, \tag{2}$$

то есть была положительно определена вдоль касательного подпространства множества Q в точке $\mathbf{x}_0$.

(Для случая максимума должно выполняться неравенство противоположного знака.)

Доказательство. Для функции $L(\mathbf{x},\lambda)$ выполнены условия теоремы 2.3.8, и поэтому точка $\mathbf{x}_0$ является точкой строгого локального минимума $L(\mathbf{x},\lambda)$ на множестве Q. Очевидно, что на Q функции $f(\mathbf{x})$ и $L(\mathbf{x},\lambda)$ совпадают и значит, точка $\mathbf{x}_0$ является точкой строгого локального минимума $f(\mathbf{x})$ на Q. $\diamondsuit$

Примеры. 1) Пусть $f(x_1,x_2) = x_2$, $Q = \{(x_1,x_2) : x_2 - x_1^2 = 0\}$. Здесь $L(x_1,x_2,\lambda) = x_2 + \lambda(x_2 - x_1^2)$ и необходимые условия минимума имееют вид

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2\lambda x_1 = 0, \ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 1+\lambda = 0, \ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_2 - x_1^2 = 0,$$

откуда $\lambda = -1,\ \ x_1 = 0,\ \ x_2 = 0$.

В точке $(0,0)$ конус допустимых направлений равен $K_{Q,(0,0)} = \{(h_1, h_2) : h_2 = 0\}$ и значит, для $h \in K_{Q,(0,0)}$ получаем, что $(L_{xx}(0,0,-1)h, h) = L_{x_1x_1}(0,0,-1)h_2^2$. Так как $L_{x_1x_1}(x_1, x_2, \lambda) = -2\lambda$, то $L_{x_1x_1}(0,0,-1) = 2$, то есть условия теоремы выполнены и точка $(0,0)$ является точкой строгого локального минимума. $\diamondsuit$

2) На единичной сфере $S^{n-1} = \{\mathbf{x} : ||\mathbf{x}||^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1\} \subset R^n$ найти точку, сумма квадратов расстояний от которой до m заданных точек $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m$ минимальна (максимальна).

Требуется, таким образом, найти минимум (максимум) функции

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_i||^2 = \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i, \mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$$

при ограничениях $f_1(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) - 1 = 0$, при этом если $\mathbf{x} \neq 0$, то $f_1'(\mathbf{x}) = = 2\mathbf{x} \neq 0$.

Составим функцию Лагранжа

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i, \mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + \lambda((\mathbf{x}, \mathbf{x}) - 1)$$

и запишем необходимые условия экстремума

$$Ł_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \lambda) = 2\sum_{i=1}^{m} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + 2\lambda\mathbf{x} = 2(m + \lambda)\mathbf{x} - 2\sum_{i=1}^{m} \mathbf{x}_i = 0,$$

$$L_\lambda(\mathbf{x}, \lambda) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) - 1 = 0,$$

откуда

$$\mathbf{x} = \frac{m}{m + \lambda}\mathbf{x}_*, \quad \text{где } \mathbf{x}_* = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \mathbf{x}_i.$$

Предполагая, что $\mathbf{x}_* \neq \mathbf{0}$, подставим это значение $\mathbf{x}$ во второе уравнение (уравнение связи), откуда найдем два значения параметра λ: $\lambda_1 = m(||\mathbf{x}_*|| - 1)$ и $\lambda_2 = -m(||\mathbf{x}_*|| + 1)$ и соответственно две точки $\mathbf{x}_+ = \mathbf{x}_*/||\mathbf{x}_*||$ и $\mathbf{x}_- = -\mathbf{x}_*/||\mathbf{x}_*||$.

Так как на сфере S^{n-1} функция $f(\mathbf{x})$ достигает своего наибольшего и наименьшего значений, то одна из этих точек – точка минимума, а другая – точка максимума.

Поскольку $Ł_{\mathbf{XX}}(\mathbf{x}, \lambda) = 2(m + \lambda)\mathbf{I}$, то для $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$

$$(Ł_{\mathbf{XX}}(\mathbf{x}_+, \lambda_1)\mathbf{h}, \mathbf{h}) = 2m||\mathbf{x}_*|| \cdot ||\mathbf{h}||^2 > 0,$$

$$(\text{Ł}_{\mathbf{XX}}(\mathbf{x}_-, \lambda_2)\mathbf{h}, \mathbf{h}) = -2m||\mathbf{x}_*|| \cdot ||\mathbf{h}||^2 < 0,$$

то есть $\mathbf{x}_+$ – точка максимума, а $\mathbf{x}_-$ – точка минимума.

Пусть теперь $\mathbf{x}_* = 0$, тогда для $\mathbf{x} \in S^{n-1}$

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i, \mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = \sum_{i=1}^{m}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - 2\sum_{i=1}^{m}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) + \sum_{i=1}^{m}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) =$$

$$= m||\mathbf{x}||^2 - 2m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_*) + \sum_{i=1}^{m}||\mathbf{x}_i||^2 = m - \sum_{i=1}^{m}||\mathbf{x}_i||^2 = \text{const},$$

то есть любая точка сферы S^{n-1} – точка минимума. $\diamondsuit$

Упражнения. 1) Среди треугольников заданного периметра найти треугольник с наибольшей площадью.

2) Задача о банке. Среди всех цилиндров с заданной площадью поверхности найти цилиндр наибольшего объема.

3) Найти наибольший объем ящика при заданной сумме длин его сторон.

4) Найти наименьшее расстояние от точки $(0, 1, 0)$ до кривой, заданной уравнениями $x_2 = x_1^2$, $x_3 = x_1^2$.

5) Найти экстремум функции $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3$ на множестве $Q = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 5,\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 8\}$.

§ 3.2. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ (ОГРАНИЧЕНИЯ ТИПА НЕРАВЕНСТВА)

3.2.1. Необходимые условия минимума

Перейдем к рассмотрению случая, когда множество Q задано с помощью ограничений типа неравенства (рис. 9).

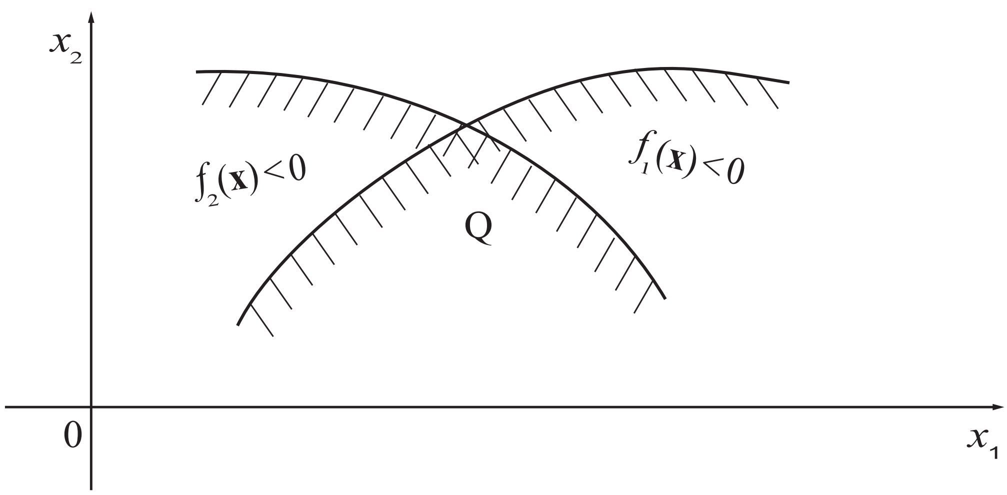

Рис 9.

Задача о минимизации функции $f(\mathbf{x})$ на множестве Q такого вида называется задачей нелинейного программирования.

Теорема 3.2.1 (теорема Куна-Таккера в дифференциальной форме). Пусть $f_1(\mathbf{x}), ..., f_m(\mathbf{x})$ – выпуклые дифференцируемые функции на R^n,

$$Q = \{\mathbf{x} : f_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i = 1, ..., m\},$$

множество Q имеет внутренние точки (условие Слейтера), точка $\mathbf{x}_0 \in Q$ и $\mathbf{f}_i'(\mathbf{x}_0) \neq 0,\ i = 1, ..., m.$

Для того чтобы точка $\mathbf{x}_0$ была точкой локального минимума дифференцируемой функции $f(\mathbf{x})$ на множестве Q, необходимо, чтобы нашлись числа $\lambda_1 \ge 0, ..., \lambda_m \ge 0$, такие, что

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) + \lambda_1 \mathbf{f}_1'(\mathbf{x}_0) + ... + \lambda_m \mathbf{f}_m'(\mathbf{x}_0) = 0, \tag{1}$$

$$\lambda_i f_i(\mathbf{x}_0) = 0,\ i = 1, ..., m. \tag{2}$$

Доказательство. 1) Если $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) = 0$, то достаточно положить $\lambda_1 = 0, ...\lambda_m = 0$.

2) Пусть $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) \neq 0$. Будем считать для определенности, что $f_1(\mathbf{x}_0) = 0$, ..., $f_k(\mathbf{x}_0) = 0$, $f_{k+1}(\mathbf{x}_0) < 0, ..., f_m(\mathbf{x}_0) < 0$. Тогда по теореме 2.2.4 конус допустимых направлений равен

$$K_{Q,\mathbf{x}_0} = \{\mathbf{h} : (\mathbf{f}_i'(\mathbf{x}_0), \mathbf{h}) \le 0,\ i = 1, ..., k\}.$$

В точке $\mathbf{x}_0$ должно выполняться необходимое условие минимума теоремы 2.3.1:

$$(\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0), \mathbf{h}) \ge 0, \quad \forall \mathbf{h} \in K_{Q,\mathbf{x}_0}.$$

Но это означает, что выполнены условия теоремы Фаркаша (теорема 1.2.11), откуда следует, что существуют такие числа $\lambda_1 \ge 0$,...,$\lambda_k \ge 0$, для которых

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) + \lambda_1 \mathbf{f}_1'(\mathbf{x}_0) + ... + \lambda_k \mathbf{f}_k'(\mathbf{x}_0) = 0.$$

Полагая $\lambda_{k+1} = 0$,...,$\lambda_m = 0$, получаем все утверждения теоремы. $\diamondsuit$

Уравнение (1), как и раньше, называется уравнением Эйлера-Лагранжа, числа $\lambda_1, ..., \lambda_m$ – множителями Лагранжа, а условия (2) называются условиями дополняющей нежесткости. Смысл условий дополняющей нежесткости заключается в том, что в уравнении Эйлера-Лагранжа должны участвовать только те функции $f_i(\mathbf{x})$, для которых $f_i(\mathbf{x}_0) = 0$.

В случае, если множество Q задано с помощью линейных ограничений, то есть если Q – многогранник, условие Слейтера становится излишним.

Теорема 3.2.2. Пусть $f_1(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{x})$,...,$f_m(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}_m, \mathbf{x})$ – линейные функции на R^n,

$$Q = \{\mathbf{x} : (\mathbf{a}_i, \mathbf{x}) \leq c_i,\ i = 1, ..., m\}$$

и $\mathbf{x}_0 \in Q$.

Для того чтобы точка $\mathbf{x}_0$ была точкой локального минимума дифференцируемой функции $f(\mathbf{x})$ на множестве Q, необходимо, чтобы нашлись числа $\lambda_1 \geq 0, ..., \lambda_m \geq 0$ такие, что

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) + \lambda_1 \mathbf{a}_1 + ... + \lambda_m \mathbf{a}_m = 0,$$

$$\lambda_i [(\mathbf{a}_i, \mathbf{x}_0) - c_i] = 0,\ i = 1, ..., m.$$

Доказательство. 1) Если $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) = 0$, то полагаем $\lambda_1 = 0, ..., \lambda_m = 0$.

2) Пусть $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) \neq 0$. Считая, для определенности, что $(\mathbf{a}_1, \mathbf{x}_0) = c_1$,..., $(\mathbf{a}_k, \mathbf{x}_0) = c_k$, $(\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{x}_0) < c_{k+1}$, ..., $(\mathbf{a}_m, \mathbf{x}_0) < c_m$, по теореме 2.2.5 получаем для конуса допустимых направлений выражение

$$K_{Q,\mathbf{x}_0} = \{\mathbf{h} : (\mathbf{a}_i, \mathbf{h}) \leq 0,\ i = 1, ..., k\}.$$

Записывая необходимое условие минимума теоремы 2.3.1 для точки $\mathbf{x}_0$:

$$(\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0), \mathbf{h}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{h} \in K_{Q,\mathbf{x}_0}$$

и применяя теорему Фаркаша, получаем, что существуют числа $\lambda_1 \geq 0$,..., $\lambda_k \geq 0$, для которых

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) + \lambda_1 \mathbf{a}_1 + ... + \lambda_k \mathbf{a}_k = 0,$$

Остается положить $\lambda_{k+1} = 0, ..., \lambda_m = 0$. $\diamondsuit$

3.2.2. Выпуклая задача нелинейного программирования

Если предположить дополнительно, что минимизируемая функция $f(\mathbf{x})$ является выпуклой, то необходимые условия теорем 3.2.1 и 3.2.2 будут и достаточными.

Теорема 3.2.3. Пусть $f_1(\mathbf{x}), ..., f_m(\mathbf{x})$ – выпуклые дифференцируемые функции на R^n,

$$Q = \{\mathbf{x} : f_i(\mathbf{x}) \leq 0,\ i = 1, ..., m\},$$

множество Q имеет внутренние точки (условие Слейтера), точка $\mathbf{x}_0 \in Q$ и $\mathbf{f}_i'(\mathbf{x}_0) \neq 0,\ i = 1, ..., m$.

Для того чтобы точка $\mathbf{x}_0$ была точкой локального минимума выпуклой дифференцируемой функции $f(\mathbf{x})$ на множестве Q, необходимо и достаточно, чтобы нашлись числа $\lambda_1 \geq 0, ..., \lambda_m \geq 0$, такие, что

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) + \lambda_1 \mathbf{f}'_1(\mathbf{x}_0) + ... + \lambda_m \mathbf{f}'_m(\mathbf{x}_0) = 0,$$

$$\lambda_i f_i(\mathbf{x}_0) = 0,\ i = 1, ..., m.$$

Доказательство. 1) Необходимость доказана в теореме 3.2.1.

2) Достаточность. Пусть для определенности

$$\lambda_1 > 0, ..., \lambda_k > 0, \lambda_{k+1} = 0, ..., \lambda_m = 0.$$

Из условий дополняющей нежесткости следует, что $f_1(\mathbf{x}_0) = 0, ..., f_k(\mathbf{x}_0) = 0$; поэтому по теореме 2.2.4 конус допустимых направлений $K_{Q,\mathbf{x}_0}$ содержится в конусе

$$K = \{\mathbf{h} : (\mathbf{f}'_i(\mathbf{x}_0), \mathbf{h}) \leq 0,\ i = 1, ..., k\}.$$

Если теперь $\mathbf{h} \in K_{Q,\mathbf{x}_0} \subset K$, то из уравнения Эйлера-Лагранжа следует, что

$$(\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0), \mathbf{h}) = -\lambda_1(\mathbf{f}'_1(\mathbf{x}_0), \mathbf{h}) - ... - \lambda_m(\mathbf{f}'_m(\mathbf{x}_0), \mathbf{h}) \geq 0,$$

то есть

$$(\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0), \mathbf{h}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{h} \in K_{Q,\mathbf{x}_0}.$$

Но это условие, по теореме 2.3.4 – достаточное условие минимума в точке $\mathbf{x}_0$ и значит, $\mathbf{x}_0$ – точка минимума $f(\mathbf{x})$ на Q. $\diamondsuit$

Пример. Пусть $f(x_1, x_2) = x_1$, $Q = \{(x_1, x_2) : x_1^2 - x_2 \leq 0,\ 2x_2^2 - x_1 \leq 0.$ Множество Q содержит внутренние точки, поэтому точки минимума определяются из системы:

$$\lambda_1(x_1^2 - x_2) = 0,\ \lambda_2(2x_2^2 - x_1) = 0, \ \ 1 + \lambda_1 2x_1 - \lambda_2 = 0,\ -\lambda_1 + \lambda_2 4x_2 = 0.$$

При $\lambda_2 = 0$ система решений не имеет; если $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \neq 0$, то $\lambda_2 = 1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 0$; если $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0$, то $x_1 = 1/\sqrt[3]{2},\ x_2 = 1/\sqrt[3]{4},\ \lambda_1 = -2\sqrt[3]{2}/3 < 0,\ \lambda_2 = -1/3 < 0$. Таким образом, точкой минимума является точка $(0, 0)$. $\diamondsuit$

Можно сформулировать теорему, эквивалентную теореме 3.2.3, в которой в необходимых и достаточных условиях участвует функция Лагранжа.

Пусть

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = L(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = f(x_1, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} y_i f_i(x_1, ..., x_n)$$

– функция Лагранжа, а

$$R^m_+ = \{\mathbf{y} : y_j \geq 0,\ j = 1, ..., m\}.$$

Теорема 3.2.4. (теорема Куна-Таккера). Если выполняются условия теоремы 3.2.3, то для того, чтобы функция $f(\mathbf{x})$ достигала минимума на Q в точке $\mathbf{x}_0$, необходимо и достаточно, чтобы нашлась точка $\mathbf{y}_0 = \lambda \in R^m_+$ такая, что $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ седловая точка функции Лагранжа на подмножестве $R^n \times R^m_+$, то есть

$$L(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) \leq L(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \leq L(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0), \quad \forall \mathbf{x} \in R^n,\ \forall \mathbf{y} \in R^m_+.$$

Доказательство. 1) Необходимость. Пусть $\mathbf{x}_0$ – точка минимума $f(\mathbf{x})$ на Q. По теореме 3.2.3 существуют числа $\lambda_1 \geq 0, ..., \lambda_m \geq 0$, такие, что

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) + \lambda_1 \mathbf{f}'_1(\mathbf{x}_0) + ... + \lambda_m \mathbf{f}'_m(\mathbf{x}_0) = 0, \quad \lambda_i f_i(\mathbf{x}_0) = 0,\ i = 1, ..., m.$$

Положим $\mathbf{y}_0 = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$; очевидно, $\mathbf{y}_0 \in R^m_+$. Докажем, что $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ – седловая точка.

Так как функция $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0) = f(\mathbf{x}) + \lambda_1 f_1(\mathbf{x}) + ... + \lambda_m f_m(\mathbf{x})$ – выпуклая и ее производная силу уравнения Эйлера-Лагранжа, то $\mathbf{x}_0$ – точка минимума $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0)$ на R^n, то есть

$$L(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \leq L(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0),\ \forall \mathbf{x} \in R^n.$$

С другой стороны, для любого $\mathbf{y} \in R^m_+$

$$L(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{m} y_i f_i(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(\mathbf{x}_0) = L(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0),$$

так как $y_i \geq 0,\ f_i(\mathbf{x}_0) \leq 0,\ \lambda_i f_i(\mathbf{x}_0) = 0,\ i = 1, ..., m$. Необходимость доказана.

2) Достаточность. Пусть $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = (\mathbf{x}_0, \lambda)$ – седловая точка функции $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ на $R^n \times R^m_+$. Так как $L(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \leq L(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0)$, $\forall \mathbf{x} \in R^n$, то $\mathbf{x}_0$ – точка минимума $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0)$ на R^n и поэтому $L_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0$, то есть

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) + \lambda_1 \mathbf{f}'_1(\mathbf{x}_0) + ... + \lambda_m \mathbf{f}'_m(\mathbf{x}_0) = 0.$$

Второе условие из определения седловой точки $L(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) \leq L(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$, $\forall \mathbf{y} \in R^m_+$, после подстановки в него явного выражения для функции Лагранжа $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, принимает вид:

$$\sum_{i=1}^{m} (\lambda_i - y_i) f_i(\mathbf{x}_0) \geq 0, \quad \forall y_i \geq 0,\ i = 1, ..., m.$$

Отсюда следует, что если некоторое $\lambda_i > 0$, то необходимо $f_i(\mathbf{x}_0) = 0$, а если $\lambda_i = 0$, то $f_i(\mathbf{x}_0) \leq 0$, то есть и в том и в другом случаях $\lambda_i f_i(\mathbf{x}_0) = 0$, $i = 1, ..., m$.

Таким образом, для точки $\mathbf{x}_0$ нашлись числа $\lambda_1 \geq 0, ..., \lambda_m \geq 0$, для которых выполняются уравнение Эйлера-Лагранжа и условия дополняющей нежесткости. По теореме 3.2.3 точка $\mathbf{x}_0$ – точка минимума $f(\mathbf{x})$ на Q. $\diamondsuit$

Можно показать, что теорема 3.2.4. верна и без предположения о дифференцируемости функций $f(x)$ и $f_i(x)$.

Пример. Рассмотрим задачу о минимуме функции

$$f(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 - 2)^2 + (4x_2 - 1)^2 + (4x_3 - 1)^2$$

на единичном шаре $B = \{\mathbf{x} : ||\mathbf{x}|| \leq 1\} \subset R^3$.

Возьмем функцию Лагранжа в виде

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = (4x_1 - 2)^2 + (4x_2 - 1)^2 + (4x_3 - 1)^2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)$$

и будем для нее искать при условии $\lambda \geq 0$ седловую точку.

Если $\lambda > 0$, то в седловой точке должны выполняться необходимые условия экстремума

$$L_{x_1}(\mathbf{x}, \lambda) = 8(4x_1 - 2) + 2\lambda x_1 = 0,\ L_{x_2}(\mathbf{x}, \lambda) = 8(4x_2 - 1) + 2\lambda x_2 = 0,$$

$$L_{x_3}(\mathbf{x}, \lambda) = 8(4x_3 - 1) + 2\lambda x_3 = 0,\ L_\lambda(\mathbf{x}, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0.$$

Из первых трех уравнений

$$x_1 = \frac{8}{16 + \lambda},\ x_2 = x_3 = \frac{4}{16 + \lambda},$$

и подставляя это в последнее уравнение (уравнение связи), находим, что $\lambda = -16 + 4\sqrt{6}$ или $\lambda_2 = -16 - 4\sqrt{6}$, то есть для значений $\lambda > 0$ система неразрешима.

Пусть теперь $\lambda = 0$, тогда необходимое условие экстремума для $L(\mathbf{x}, 0)$ дает точку $x_0 = (1/2, 1/4, 1/4)$; поскольку $L(\mathbf{x}, 0)$ – выпуклая функция, то $\mathbf{x}_0$ – точка минимума $L(\mathbf{x}, 0)$ на R^3 и значит, $L(\mathbf{x}_0, 0) \leq L(\mathbf{x}, 0)$.

Так как $L(\mathbf{x}_0, \lambda) = -5\lambda/8 \leq 0 = L(\mathbf{x}_0, 0)$ для $\lambda \geq 0$, то $(\mathbf{x}_0, 0)$ – седловая точка функции $L(\mathbf{x}, \lambda)$ для $\lambda \geq 0$ и по теореме 3.2.4, $\mathbf{x}_0$ – точка минимума $f(\mathbf{x})$ на B. $\diamondsuit$

Рассмотрим, наконец, выпуклую задачу с линейными ограничениями.

Теорема 3.2.5. Пусть $f_1(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{x})$,...,$f_m(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}_m, \mathbf{x})$ – линейные функции на R^n,

$$Q = \{\mathbf{x} : (\mathbf{a}_i, \mathbf{x}) \leq c_i,\ i = 1, ..., m\}$$

и $\mathbf{x}_0 \in Q$.

Для того чтобы точка $\mathbf{x}_0$ была точкой локального минимума выпуклой дифференцируемой функции $f(\mathbf{x})$ на множестве Q, необходимо и достаточно, чтобы нашлись числа $\lambda_1 \geq 0, ..., \lambda_m \geq 0$ такие, что

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) + \lambda_1 \mathbf{a}_1 + ... + \lambda_m \mathbf{a}_m = 0,$$

$$\lambda_i [(\mathbf{a}_i, \mathbf{x}_0) - c_i] = 0.$$

Доказательство. 1) Необходимость установлена в теореме 3.2.2.

2) Достаточность доказывается аналогично тому, как это было сделано в теореме 3.2.4. $\diamondsuit$

Упражнения. 1) Найти минимум функции

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_1 - x_2 - 3$$

на множестве $Q = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 = 1\}$.

2) Найти в единичном шаре $B^n = \{\mathbf{x} : ||\mathbf{x}|| \leq 1\} \subset R^n$ точку, для которой сумма квадратов расстояний от нее до m заданных точек $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m$ будет минимальной.

§ 3.3. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

3.3.1. Необходимые и достаточные условия в задаче линейного программирования

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in R^n$, $\mathbf{z} = (z_1, ..., z_n) \in R^n$. Будем говорить, что $\mathbf{x} \geq \mathbf{z}$, если $x_i \geq z_i$, $i = 1, ..., n$.

Задача линейного программирования обычно формулируется так: найти минимум линейной функции $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}, \mathbf{x})$ на множестве

$$Q = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \subset R^n,$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

– матрица размера $(m \times n)$ и $\mathbf{b} = (b_1, ..., b_m) \in R^m$.

Эта задача является частным случаем выпуклой задачи нелинейного программирования с линейными ограничениями.

В самом деле, минимизируемая функция $f(\mathbf{x})$ выпукла и если ввести векторы $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, ..., a_{in})$, единичные орты $\mathbf{e}_1 = (1, 0, ..., 0), ..., \mathbf{e}_n = (0, ..., 0, 1)$ и функции $f_i(\mathbf{x}) = (-\mathbf{a}_i, \mathbf{x})$, $i = 1, ..., m$; $f_i(\mathbf{x})(-\mathbf{e}_{i-m}, \mathbf{x})$, $i = m+1, ..., m+n$, то с их помощью множество Q можно записать следующим образом

$$Q = \{\mathbf{x} : (\mathbf{a}_i, \mathbf{x}) \geq b_i,\ i = 1, ..., m;\ x_j \geq 0,\ j = 1, ..., n\} =$$

$$= \{\mathbf{x} : f_i(\mathbf{x}) \le -b_i,\ i = 1, ..., m+n\},$$

где $b_i = 0,\ i = m+1, ..., m+n$; будем множество Q называть многогранником (рис. 10).

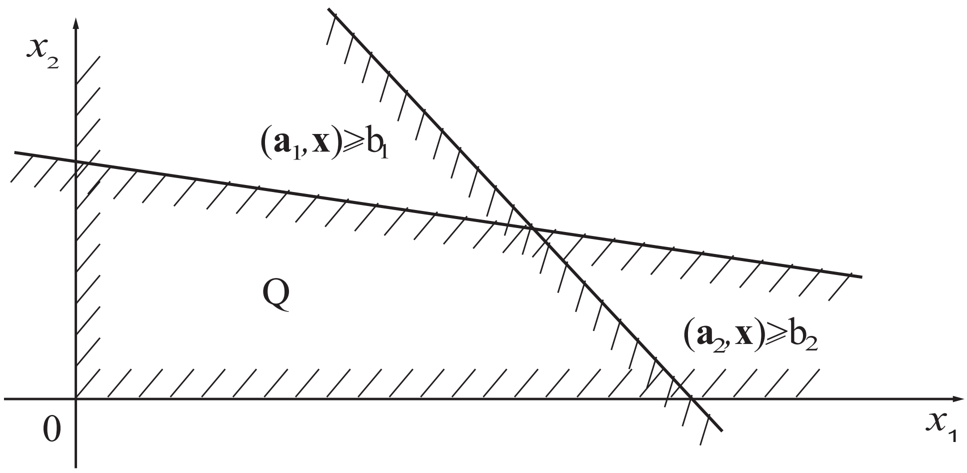

Рис 10.

Необходимые и достаточные условия минимума для задачи линейного программирования являются непосредственным следствием теоремы 3.2.2.

Теорема 3.3.1. Для того чтобы линейная функция $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}, \mathbf{x})$ достигала на многограннике $Q = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \ge \mathbf{b},\ \mathbf{x} \ge 0\}$ минимума в точке $\mathbf{x}_0$, необходимо и достаточно, чтобы нашелся вектор $\mathbf{y}_0 \in R^m$ такой, что

$$\mathbf{y}_0 \ge \mathbf{0},\ \mathbf{A}^T\mathbf{y}_0 \le \mathbf{a},\ (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0,\ (\mathbf{a} - \mathbf{A}^T\mathbf{y}_0, \mathbf{x}_0) = 0,$$

где A^T – транспонированная матрица.

Доказательство. Используя введенную выше запись множества Q и применяя теорему 3.2.5, получаем, что для того, чтобы точка $\mathbf{x}_0$ была точкой минимума $f(\mathbf{x})$ на Q, необходимо и достаточно, чтобы нашлись числа $\lambda_1 \ge 0, ..., \lambda_{m+n} \ge 0$, для которых выполняются условия дополняющей нежесткости

$$\lambda_i[(\mathbf{a}_i, \mathbf{x}_0) - b_i] = 0,\ i = 1, ..., m;\ \lambda_i x_{0i-m} = 0,\ i = m+1, ..., m+n$$

и уравнение Эйлера-Лагранжа

$$\mathbf{a} - \lambda_1\mathbf{a}_1 - ... - \lambda_m\mathbf{a}_m - \lambda_{m+1}\mathbf{e}_1 - ... - \lambda_{m+n}\mathbf{e}_n = 0.$$

Для того, чтобы преобразовать условия дополняющей нежесткости, заметим, что если даны два неотрицательных вектора $\mathbf{c} = (c_1, ..., c_n) \ge 0$ и $\mathbf{d} = (d_1, ..., d_n) \ge 0$, то $c_i d_i = 0,\ i = 1, ..., n$ тогда и только тогда, когда

$$(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = \sum_{i=1}^{n} c_i d_i = 0.$$

Поэтому, если ввести вектора $\mathbf{y}_0 = (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in R^m$ и $\mathbf{z} = (\lambda_{m+1}, ..., \lambda_{m+n}) \in R^n$, то $\mathbf{y}_0 \geq 0$, $\mathbf{z} \geq 0$, первая серия условий дополняющей нежесткости оказывается эквивалентной условию

$$(\mathbf{y}_0, \mathbf{A}\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}) = 0,$$

а вторая – условию $(\mathbf{z}, \mathbf{x}_0) = 0$.

Уравнение Эйлера-Лагранжа принимает в этих обозначениях вид

$$\mathbf{a} - \mathbf{A}^T\mathbf{y}_0 = \mathbf{z}.$$

Исключая из этих соотношений $\mathbf{z}$, получаем, что

$$\mathbf{y}_0 \geq \mathbf{0},\ \mathbf{a} - \mathbf{A}^T\mathbf{y}_0 \geq \mathbf{0},\ (\mathbf{y}_0, \mathbf{A}\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}) = 0,\ (\mathbf{a} - \mathbf{A}^T\mathbf{y}_0, \mathbf{x}_0) = 0. \ \diamondsuit$$

3.3.2. Двойственная задача

Необходимые и достаточные условия минимума для задачи линейного программирования можно представить в другой форме, используя понятие двойственной задачи.

Определение. Рассмотрим две задачи:
1) найти минимум функции $(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ на множестве
$Q = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \subset R^n$;
2) найти максимум функции $(\mathbf{b}, \mathbf{y})$ на множестве
$Q^T = \{\mathbf{y} : \mathbf{A}^T\mathbf{y} \leq \mathbf{a},\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\} \subset R^m$.

Задачи 1) и 2) называются двойственными. $\diamondsuit$

Так как первую задачу можно сформулировать как задачу о максимуме функции $(-\mathbf{a}, \mathbf{x})$ на множестве $Q = \{\mathbf{x} : (-\mathbf{A})\mathbf{x} \leq -\mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, а вторую задачу как задачу о минимуме функции $(-\mathbf{b}, \mathbf{y})$ на множестве $Q^T = \{\mathbf{y} : (-\mathbf{A}^T)\mathbf{y} \geq -\mathbf{a},\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$, то обе задачи в этом определении равноправны.

Теорема 3.3.2. 1) Двойственные задачи одновременно либо имеют решения, либо не имеют; при этом, если $\mathbf{x}_0 \in Q$ – точка минимума в первой задаче, а $\mathbf{y}_0 \in Q^T$ – точка максимума во второй задаче, то $(\mathbf{a}, \mathbf{x}_0) = (\mathbf{b}, \mathbf{y}_0)$.

2) Обратно, если для некоторых точек $\mathbf{x}_0 \in Q$ и $\mathbf{y}_0 \in Q^T$, $(\mathbf{a}, \mathbf{x}_0) = (\mathbf{b}, \mathbf{y}_0)$, то $\mathbf{x}_0$ – точка минимума $(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ на Q, а $\mathbf{y}_0$ – точка максимума $(\mathbf{b}, \mathbf{y})$ на Q^T.

Доказательство. 1) Заметим прежде всего, что $\forall \mathbf{x} \in Q$, $\forall \mathbf{y} \in Q^T$ выполняется неравенство $(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \geq (\mathbf{b}, \mathbf{y})$.

В самом деле, так как $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$, $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{A}^T\mathbf{y} \leq \mathbf{a}$, то

$$(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \geq (\mathbf{A}^T\mathbf{y}, \mathbf{x}) = (\mathbf{y}, \mathbf{A}\mathbf{x}) \geq (\mathbf{y}, \mathbf{b}).$$

Если теперь $\mathbf{x}_0$ – точка минимума в первой задаче, то по теореме 3.3.1. существует точка $\mathbf{y}_0 \in R^m$ такая, что

$$\mathbf{y}_0 \geq \mathbf{0},\ \mathbf{A}^T\mathbf{y}_0 \leq \mathbf{a},\ (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0,\ (\mathbf{a} - \mathbf{A}^T\mathbf{y}_0, \mathbf{x}_0) = 0.$$

Но это означает, что $\mathbf{y}_0 \in Q^T$ (и, в частности, многогранник Q^T не пуст) и что

$$(\mathbf{a}, \mathbf{x}_0) = (\mathbf{A}^T\mathbf{y}_0, \mathbf{x}_0) = (\mathbf{y}_0, \mathbf{A}\mathbf{x}_0) = (\mathbf{y}_0, \mathbf{b}).$$

Так как, в силу доказанного выше неравенства, $(\mathbf{a}, \mathbf{x}_0) \geq (\mathbf{b}, \mathbf{y})$, $\forall \mathbf{y} \in R^m$, то отсюда следует, что $\mathbf{y}_0$ – точка максимума функции $(\mathbf{b}, \mathbf{y})$ на Q^T.

Точно так же доказывается, что если $\mathbf{y}_0$ – точка максимума во второй задаче, то решение первой задачи существует и если $\mathbf{x}_0$ – точка минимума для нее, то $(\mathbf{a}, \mathbf{x}_0) = (\mathbf{b}, \mathbf{y}_0)$.

2) Нужно доказать, что если для некоторых точек $\mathbf{x}_0 \in Q$ и $\mathbf{y}_0 \in Q^T$ выполняется соотношение $(\mathbf{a}, \mathbf{x}_0) = (\mathbf{b}, \mathbf{y}_0)$, то они являются решениями задач 1) и 2). Но это сразу вытекает из неравенства

$$(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \geq (\mathbf{b}, \mathbf{y}),\ \forall \mathbf{x} \in Q,\ \forall \mathbf{y} \in Q^T,$$

установленного в первой части доказательства. $\diamondsuit$

Пример. Построим двойственную задачу к следующей задаче: найти минимум $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ при ограничениях $x_1 \geq 2$, $x_1 + 3x_2 \geq 5$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Здесь множество Q имеет вершины $\mathbf{x}_1(2, 1)$, $\mathbf{x}_2(5, 0)$, и минимум достигается в первой из них: $f(2, 1) = 3 = \min_Q f(x_1, x_2)$ (рис. 11).

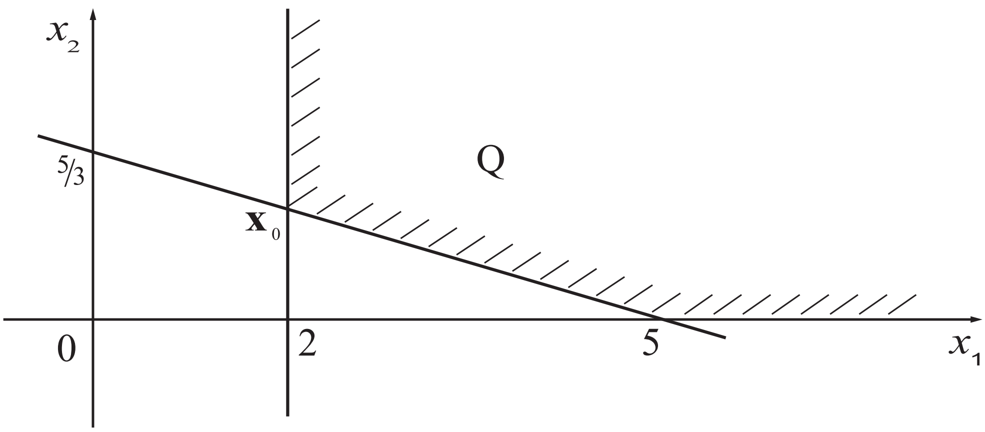

Рис 11.

Так как в этой задаче

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix},$$

то двойственной задачей будет следующая: найти максимум функции $f_*(y_1, y_2) = 2y_1 + 5y_2$ при ограничениях $y_1 + y_2 \leq 1$, $3y_2 \leq 1$, $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$ (рис. 12).

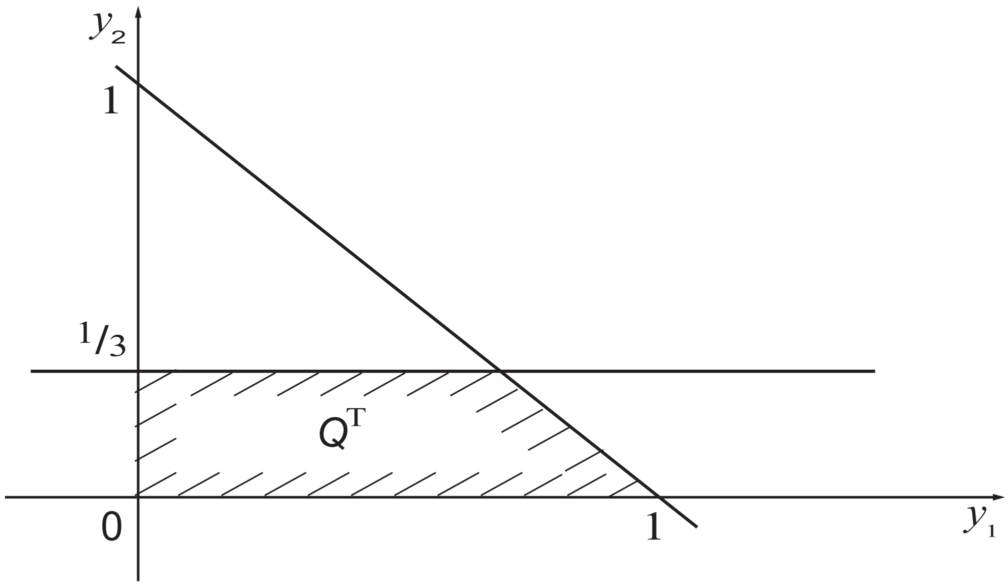

Рис 12.

В двойственной задаче множество Q^T имеет четыре вершины и максимум достигается в вершине $\mathbf{y}_0 = (2/3, 1/3)$, при этом $\max_{Q^T} f_*(y_1, y_2) f_*(\mathbf{y}_0) = f_*(2/3, 1/3) = 3$.

3.3.3. Теоремы существования и единственности

Перейдем к вопросу о существовании и единственности решения задачи линейного программирования.

Сначала докажем теорему единственности.

Теорема 3.3.3. Если решение задачи линейного программирования существует, то либо оно единственно, либо существует бесконечно много решений.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1$ – два разных решения, то есть $(\mathbf{a}, \mathbf{x}_0) = (\mathbf{a}, \mathbf{x}_1) = \min_Q(\mathbf{a}, \mathbf{x})$. Тогда $\forall \lambda \in [0, 1]$, $\mathbf{x}_\lambda = (1 - \lambda)\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{x}_1 \in Q$, так как Q – выпукло, и $(\mathbf{a}, \mathbf{x}_\lambda) = (1 - \lambda)(\mathbf{a}, \mathbf{x}_0) + \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{x}_1) = \min_Q(\mathbf{a}, \mathbf{x})$, то есть все $\mathbf{x}_\lambda$ – тоже решения. $\diamondsuit$

Если многогранник Q непуст и ограничен, то, как следует из теоремы 2.1.3 $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}, \mathbf{x})$ достигает на Q минимума в некоторой точке $\mathbf{x}_0$.

В общем случае справедлив следующий результат.

Теорема 3.3.4. Если многогранник Q не пуст, и линейная функция $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}, \mathbf{x})$ ограничена на Q снизу, то она достигает на Q минимума в некоторой точке $\mathbf{x}_0$.

Доказательство. Будем доказывать теорему индукцией по размерности n пространства R^n, в котором содержится Q.

Для $n = 1$ многогранник Q – это точка, отрезок или полупрямая. Достаточно рассмотреть случай полупрямой, но очевидно, что если линейная функция $f(x) = ax$ ограничена на полупрямой снизу, то она принимает минимальное значение в граничной точке x_0 (рис. 13).

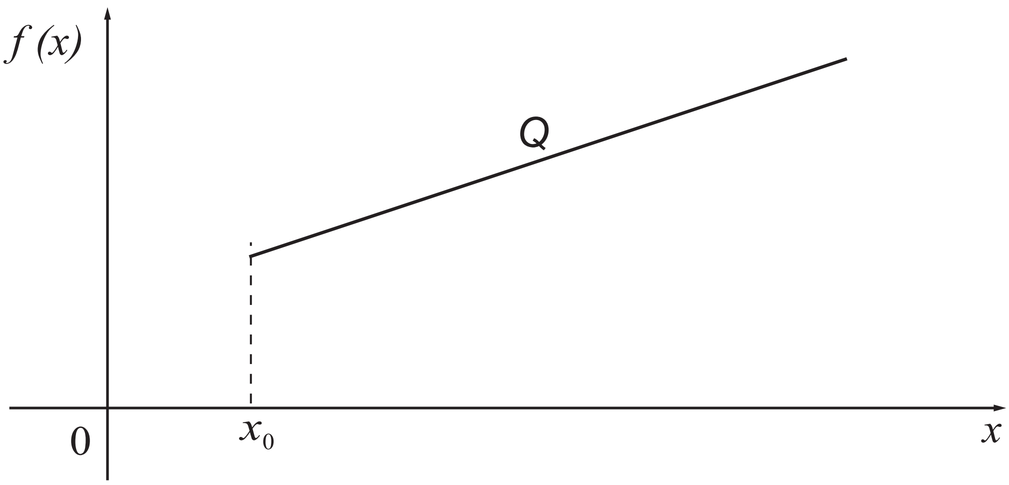

Рис 13.

Допустим теперь, что теорема верна для $n = p-1$ и докажем ее для $n = p$.

Обозначим через Γ границу множества Q, через Q^0 – внутренность множества Q и покажем, что если $\mathbf{x}_1 \in Q^0$, то существует точка $\mathbf{x}_2 \in \Gamma$ такая, что $(\mathbf{a}, \mathbf{x}_2) < (\mathbf{a}, \mathbf{x}_1)$.

Пусть $\mathbf{x}_1 \in Q^0$. Рассмотрим полупрямую Π, проходящую через точку $\mathbf{x}_1$ в направлении вектора $-\mathbf{a}$, то есть рассмотрим множество

$$\Pi = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \lambda\mathbf{a},\ \lambda \geq 0\}$$

и обозначим через J пересечение этой полупрямой с многогранником Q. Множество J замкнуто и выпукло, так как Π и Q – замкнутые, выпуклые множества. Поскольку функция $(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ на Q ограничена снизу, то для $\mathbf{x}_1 - \lambda\mathbf{a} \in Q$ имеем $(\mathbf{a}, \mathbf{x}_1 - \lambda\mathbf{a})(\mathbf{a}, x_1) - \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geq \mu$, откуда

$$\lambda \leq \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{x}_1) - \mu}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})},$$

и значит, множество J ограничено. Наконец, так как $\mathbf{x}_1$ – внутренняя точка Q, то для достаточно малых λ, $\mathbf{x}_1 - \lambda\mathbf{a} \in Q$, то есть J содержит точки, отличные от $\mathbf{x}_1$.

Поэтому J – отрезок и если $\mathbf{x}_2$ – второй его конец, то $\mathbf{x}_2 \in \Gamma$.

Так как $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 - \lambda_1 \mathbf{a}$ для некоторого $\lambda_1 > 0$, получаем

$$(\mathbf{a}, \mathbf{x}_2) = (\mathbf{a}, \mathbf{x}_1 - \lambda_1 \mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \mathbf{x}_1) - \lambda_1 (\mathbf{a}, \mathbf{a}) < (\mathbf{a}, \mathbf{x}_1),$$

то есть найдена точка $\mathbf{x}_2 \in \Gamma$ такая, что $(\mathbf{a}, \mathbf{x}_2) < (\mathbf{a}, \mathbf{x}_1)$.

Отсюда сразу следует, что

$$\inf_{\mathbf{x} \in Q} (\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{x} \in \Gamma} (\mathbf{a}, \mathbf{x}).$$

Введем обозначение

$$f_i(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}_i, \mathbf{x}) - b_i,\ i = 1, ..., m;\ f_i(\mathbf{x}) = x_{i-m},\ i = m+1, ..., m+n,$$

тогда

$$Q = \{\mathbf{x} : f_i(\mathbf{x}) \geq 0,\ i = 1, ..., m+n\}.$$

Очевидно, $\mathbf{x} \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда хотя бы для одного i $f_i(\mathbf{x}) = 0$. Поэтому, если ввести множества

$$\Gamma_i = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in Q,\ f_i(\mathbf{x}) = 0\}$$

(которые можно назвать гранями многогранника Q), то

$$\Gamma = \cup_{i=1}^{m+n} \Gamma_i.$$

Так как Γ_i можно считать многогранником, лежащим в R^{p-1}, и так как на Γ_i функция $(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ по условию ограничена, то, по индуктивному предположению, существует точка $\mathbf{x}_i \in \Gamma_i$ такая, что

$$(\mathbf{a}, \mathbf{x}_i) = \inf_{\mathbf{x} \in \Gamma_i} (\mathbf{a}, \mathbf{x}).$$

Но тогда

$$\inf_{\mathbf{x} \in \Gamma} (\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{x} \in \cup \Gamma_i} (\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \min_i (\mathbf{a}, \mathbf{x}_i)(\mathbf{a}, \mathbf{x}_j)$$

для некоторого j.

Полагая $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_j$, получаем, используя доказанное раньше равенство, что

$$(\mathbf{a}, \mathbf{x}_0) = \inf_{\mathbf{x} \in \Gamma} (\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{x} \in Q} (\mathbf{a}, \mathbf{x}). \ \diamondsuit$$

Следствие 3.3.1. Для того, чтобы задача линейного программирования имела решение, необходимо и достаточно, чтобы многогранник Q и многогранник Q^T из двойственной задачи были непусты.

Доказательство. 1) Необходимость уже была установлена при доказательстве теоремы 3.3.2.

2) Достаточность. Если существует точка $\mathbf{y} \in Q^T$ и если Q непусто, то из неравенства $(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \geq (\mathbf{b}, \mathbf{y})$, $\forall \mathbf{x} \in Q$, установленного в доказательстве теоремы 3.3.2, следует, что $(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ ограничено снизу на Q, и по только что доказанной теореме решение задачи существует. $\diamondsuit$

3.3.4. Теоремы о достижении минимума в вершине

Определение. Если Q – выпуклое множество в R^n, то точка $\mathbf{x}_0 \in Q$ называется угловой, если не существует отрезка, целиком принадлежащего Q, внутренней точкой которого она бы была, то есть если не существует точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in Q,\ \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ и числа $\alpha \in (0, 1)$, для которых $\mathbf{x}_0 = \alpha\mathbf{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_2$.

Угловые точки многогранника Q называются вершинами. $\diamondsuit$

В теории линейного программирования одной из основных является следующая теорема.

Теорема 3.3.5. Если решение задачи линейного программирования существует, то есть минимум $(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ достигается в некоторой точке $\mathbf{x}_0 \in Q$, то существует вершина $\tilde{\mathbf{x}}$ многогранника Q, в которой также достигается минимум.

Доказательство. Будем доказывать теорему индукцией по размерности n пространства R^n.

1) Если $n = 1$, то Q – точка, отрезок или полупрямая и утверждение теоремы очевидно.

2) Допустим, что теорема верна для $n = p - 1$ и докажем ее для $n = p$.

Обозначим через Γ границу Q, тогда $\Gamma = \cup_{i=1}^{m+n}\Gamma_i$, где

$$\Gamma_i = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in Q,\ f_i(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Так как решение существует, то функция $(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ ограничена снизу и значит, как следует из доказательства теоремы 3.3.4,

$$\min_{\mathbf{x} \in Q}(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x} \in \Gamma}(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x} \in \Gamma_j}(\mathbf{a}, \mathbf{x})$$

для некоторого j.

Но можно считать, что грань $\Gamma_j \subset R^{p-1}$, поэтому, по индуктивному предположению, существует вершина $\tilde{\mathbf{x}}$ многогранника Γ_j такая, что

$$(\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{x}}) = \min_{\mathbf{x} \in \Gamma_j}(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x} \in Q}(\mathbf{a}, \mathbf{x}).$$

Осталось доказать, что точка $\tilde{\mathbf{x}}$ является вершиной также и для Q.

Но если бы это было не так, то нашлись бы точки $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in Q,\ \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ и число $\alpha \in (0, 1)$, для которых $\tilde{\mathbf{x}} = \alpha\mathbf{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_2$. Так как $\tilde{\mathbf{x}} \in \Gamma_j$ то $f_j(\tilde{\mathbf{x}}) = 0$, в то же время $f_j(\mathbf{x}_1) \geq 0$, $f_j(\mathbf{x}_2) \geq 0$ и значит, так как

$$0 = f_j(\tilde{\mathbf{x}}) = f_j(\alpha\mathbf{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_2) = \alpha f_j(\mathbf{x}_1) + (1 - \alpha)f_j(\mathbf{x}_2),$$

то $f_j(\mathbf{x}_1) = 0$, $f_j(\mathbf{x}_2) = 0$. Но это означает, что $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Gamma_j$ и $\tilde{\mathbf{x}}$ не является вершиной Γ_j. Полученное противоречие доказывает теорему. $\diamondsuit$

Отметим, что число вершин многогранника Q конечно. Действительно, как следует из доказательства теоремы, все вершины Q являются вершинами граней Γ_j, которые можно считать многогранниками в R^{n-1}. В свою очередь, все вершины многогранника Γ_j являются вершинами его граней и так далее; этот процесс обрывается через конечное число шагов и в конце его получаются 0-мерные грани, которые и являются вершинами.

Из доказанной теоремы вытекает поэтому, что если решение задачи линейного программирования существует, то точку минимума функции $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}, \mathbf{x})$ на Q можно найти, перебирая вершины многогранника Q и сравнивая значения в них.

Пример. Найти минимум функции $f(x_1, x_2, x_3) = -5x_1 - 6x_2 - 9x_3$ на множестве

$$Q = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 \leq 10,\ x_3 \leq 2,\ x_3 \leq x_1,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0\}.$$

Здесь многогранник Q имеет вершины $\mathbf{x}_1 = (10, 0, 0)$, $\mathbf{x}_2 = (0, 10, 0)$, $\mathbf{x}_3 = (8, 0, 2)$, $\mathbf{x}_4 = (2, 6, 2)$, $\mathbf{x}_5 = (2, 0, 2)$, $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ (рис. 14).

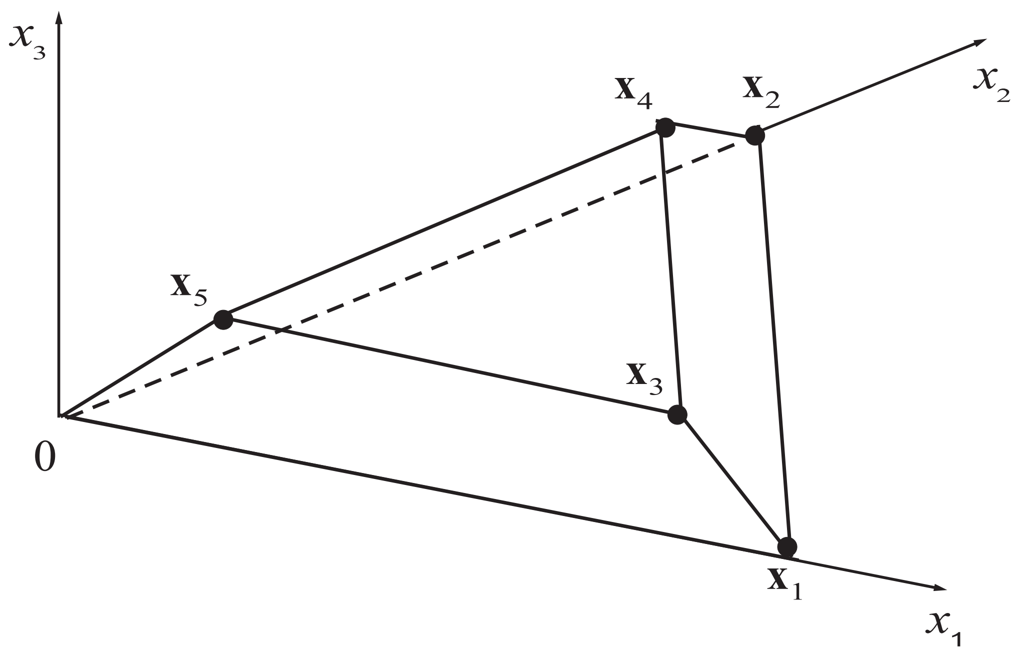

Рис 14.

Перебор вершин дает минимальное значение $\min_Q f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_4) = -64$. $\diamondsuit$

На практике, однако, число вершин обычно очень велико, так что реализация их простого перебора становится трудно выполнимой. Поэтому разработан так называемый симплекс-метод, который позволяет переходить от вершины к вершине таким образом, что значение функции $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}, \mathbf{x})$ на каждом шаге уменьшается. Это позволяет намного сократить число перебираемых вершин и делает вычисления осуществимыми ([1], [21], [25] и т.д.).

Будем называть гранями многогранника Q сам многогранник Q, его грани Γ_j, грани граней Γ_j и так далее.

Теорема 3.3.6. Если решение задачи линейного программирования существует, то минимум достигается либо в единственной точке, которая является вершиной, либо существует грань многогранника Q, все точки которой являются точками минимума $(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ на Q.

Доказательство. По теореме 3.3.3 точка минимума либо единственна и тогда по теореме 3.3.5 ею может быть только вершина, либо существует бесконечно много точек минимума. Так как число вершин конечно, то в последнем случае существует точка минимума $\mathbf{x}_0$, не являющаяся вершиной.

Пусть Γ' – грань многогранника Q, внутренней точкой которой является точка $\mathbf{x}_0$. Такая грань существует, так как если $\mathbf{x}_0$ – внутренняя точка Q, то $\Gamma' = Q$; в противном случае $\mathbf{x}_0 \in \Gamma_j$ для некоторого j. Если $\mathbf{x}_0$ – внутренняя точка Γ_j, то $\Gamma' = \Gamma_j$, в противном случае $\mathbf{x}_0$ принадлежит некоторой грани многогранника Γ_j и так далее. Так как $\mathbf{x}_0$ не вершина, то на каком-то шаге она будет внутренней точкой некоторой грани.

Поскольку $\mathbf{x}_0$ – точка минимума $(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ на Q, то линейная функция $\tilde{f}(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}, \mathbf{x}) - (\mathbf{a}, \mathbf{x}_0) \geq 0$ на Γ' и $\tilde{f}(\mathbf{x}_0) = 0$. Но так как $\mathbf{x}_0$ – внутренняя точка Γ', то по лемме 1.2.1 отсюда следует, что $\tilde{f}(\mathbf{x}) = 0$ на Γ', то есть $(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = (\mathbf{a}, \mathbf{x}_0)$, $\forall \mathbf{x} \in \Gamma'$. $\diamondsuit$

§ 3.4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

3.4.1.Минимизирующие последовательности

В предыдущих параграфах были получены необходимые и в ряде случаев достаточные условия того, что функция $f(\mathbf{x})$ достигает в точке $\mathbf{x}_0$ минимума на подмножестве $Q \subset R^n$. Эти условия записываются в виде некоторых уравнений или неравенств.

Например, необходимое условие экстремума в задаче без ограничений, то есть в задаче об экстремуме функции $f(\mathbf{x})$ на R^n или на открытом подмножестве в R^n, имеет вид (следствие 2.3.1)

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = 0,$$

где $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ – производная (градиент) функции $f(\mathbf{x})$.

Корни этого уравнения называются стационарными точками функции $f(\mathbf{x})$, и точки экстремума содержатся, таким образом, среди стационарных точек.

Аналогично, необходимое условие в задаче на условный экстремум, как было показано (следствие 3.1.1), с помощью функции Лагранжа может быть записано в виде уравнения:

$$Ł'(\mathbf{x}, \lambda) = 0.$$

Точные решения этих уравнений, однако, в большинстве случаев получить невозможно, поэтому для решения задачи минимизации используют различные приближенные методы.

Один из возможных подходов заключается в численном решении приведенных выше уравнений с помощью таких, например, методов как метод Ньютона или различные его модификации. Общий объем вычислений при этом может оказаться очень большим, в частности потому, что для применения этих методов необходимо вычисление вторых производных функции $f(\mathbf{x})$. Это влечет также большую чувствительность этих методов по отношению к ошибкам вычислений.

В связи с этим, для нахождения точек минимума (или точек максимума) функции $f(\mathbf{x})$ применяют также методы, использующие только первые производные и не опирающиеся на необходимые условия. Эти методы называют прямыми.

Основной целью каждого такого метода является построение минимизирующей последовательности.

Определение. Пусть $f(\mathbf{x})$ ограничена снизу на подмножестве $Q \subset R^n$. Последовательность точек $\mathbf{x}_m \in Q$, $m = 1, 2, ...$ называется минимизирующей для $f(\mathbf{x})$ на Q, если

$$\lim_{m\to\infty} f(\mathbf{x}_m) = \inf_{\mathbf{x}\in Q} f(\mathbf{x}). \ \diamondsuit$$

Таким образом, значения функции $f(\mathbf{x})$ в точках минимизирующей последовательности $\mathbf{x}_m$ являются некоторыми приближениями наименьшего значения $f(\mathbf{x})$ на Q.

Если функция $f(\mathbf{x})$ непрерывна и если дополнительно известно, что минимизирующая последовательность ограничена, то, как вытекает из следующей теоремы, $f(\mathbf{x})$ достигает на Q минимума в некоторой точке и $\mathbf{x}_m$ можно считать некоторым приближением для точек минимума.

Теорема 3.4.1. Если функция $f(\mathbf{x})$ непрерывна, множество Q замкнуто и минимизирующая последовательность $\mathbf{x}_m$ для $f(\mathbf{x})$ на Q ограничена, то функция $f(\mathbf{x})$ достигает на Q минимума в некоторой точке. Если X_0 – множество точек минимума $f(\mathbf{x})$ на Q, то

$$r(\mathbf{x}_m, X_0) = \min_{\mathbf{x}\in Q} ||\mathbf{x}_m - \mathbf{x}|| \to 0,$$

если $m \to \infty$.

Доказательство. Так как последовательность $\mathbf{x}_m$ ограничена, то множество ее предельных точек X_0 непусто, а так как Q – замкнуто, то $X_0 \subset Q$.

Пусть теперь $\mathbf{x}_0 \in X_0$, тогда существует подпоследовательность $\mathbf{x}_{m_k} \to \mathbf{x}_0$ при $m_k \to \infty$ и в силу непрерывности $f(\mathbf{x})$ и того, что $\mathbf{x}_m$ – минимизирующая последовательность,

$$f(\mathbf{x}_0) = \lim_{m_k \to \infty} f(\mathbf{x}_{m_k}) = \inf_{\mathbf{x} \in Q} f(\mathbf{x}),$$

то есть $\mathbf{x}_0$ – точка минимума $f(\mathbf{x})$ на Q.

Таким образом, X_0 – это множество точек минимума $f(\mathbf{x})$ на Q. $\diamondsuit$

В частности, если точка минимума единственна (например, если $f(\mathbf{x})$ – строго выпукла), то ограниченная минимизирующая последовательность сходится к точке минимума.

3.4.2. Метод спуска

Переходя к непосредственному рассмотрению схем вычислительных методов, ограничимся описанием группы методов, объединенных под одним общим названием – метод спуска.

Будем дальше рассматривать задачу без ограничений, то есть задачу о минимизации $f(\mathbf{x})$ на всем R^n.

В качестве начальной точки выбираем произвольную точку $\mathbf{x}_1 \in R^n$.

Если точки $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k$ уже построены, то, выбирая некоторое направление, то есть задавая некоторый вектор $\mathbf{l}_k$, полагаем

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \beta_k \mathbf{l}_k,$$

где число β_k выбираем из условия

$$f(\mathbf{x}_k - \beta_k \mathbf{l}_k) = \min_{\beta} f(\mathbf{x}_k - \beta \mathbf{l}_k).$$

Таким образом, на k-м шаге $f(\mathbf{x})$ минимизируется в направлении $\mathbf{l}_k$, так как β_k находится из условия минимума функции одной переменной $g(\beta) = f(\mathbf{x}_k - \beta \mathbf{l}_k)$. Для вычисления β_k, как правило, тоже используются различные приближенные методы (метод половинного деления, метод золотого сечения, метод чисел Фибоначчи и так далее).

Конкретизируя выбор направления $\mathbf{l}_k$, получаем различные варианты метода спуска.

1) Метод скорейшего спуска.

Здесь $\mathbf{l}_k = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)$, то есть спуск ведется в направлении градиента функции $f(\mathbf{x})$ (если на каком-то шаге $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k) = 0$, то процесс останавливается, так как найдена стационарная точка).

2) Метод покоординатного спуска.

На каждом шаге спуск ведется в направлении одной из координатных осей, выбор которой производится следующим образом: на k-м шаге вычисляется

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_k), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_k)\right)$$

и если

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_k)\right| = \max_i \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_k)\right|,$$

то полагаем

$$\mathbf{l}_k = \mathbf{e}_j = (0, ..., 0, \overset{j}{1}, 0, ..., 0)\ .$$

3) Метод циклического покоординатного спуска.

На первом шаге спуск производится в направлении вектора $\mathbf{e}_1$, на втором – в направлении $\mathbf{e}_2$,..., на n-м шаге – в направлении вектора $\mathbf{e}_n$ и затем процесс повторяется.

4) Метод сопряженных направлений.

Здесь

$$\mathbf{l}_1 = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_1), ..., \mathbf{l}_k = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_k) - \xi_k \mathbf{l}_{k-1}, ...$$

где $\mathbf{x}i_k$ выбирается специальным образом, например,

$$\xi_k = \frac{||\mathbf{f}'(-x_k)||^2}{||\mathbf{f}'(\mathbf{x}_{k-1})||^2}.$$

Кроме того, используются другие способы выбора вектора $\mathbf{l}_k$, например, метод случайного покоординатного спуска и так далее.

3.4.3. Теоремы о сходимости [31]

С точки зрения приложений важен скорее не столько сам факт сходимости метода, сколько оценки скорости его сходимости, поэтому при доказательстве различных теорем сходимости стараются получить одновременно и соответствующие оценки. С другой стороны, условия этих теорем оказываются часто чересчур ограничительными, и в приложениях приходится выходить за их рамки, так что имеющиеся оценки скорости сходимости тех или иных методов во многих случаях являются лишь некоторыми, не обязательно выполняющимися, ориентирами.

Получим прежде всего два вспомогательных результата.

Лемма 3.4.1. Пусть $f(\mathbf{x})$ – непрерывно дифференцируемая функция на R^n и ее производная (градиент) $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ удовлетворяет условию Липшица, то есть для любого шара $B_R = \{\mathbf{x} : ||\mathbf{x}|| \le R\}$ существует число $L > 0$ такое, что

$$||\mathbf{f}'(\mathbf{x}) - \mathbf{f}'(\mathbf{y})|| \le L||\mathbf{x} - \mathbf{y}||, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in B_R.$$

Тогда

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) \ge (\mathbf{f}'(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \mathbf{y}) - \frac{L}{2}||\mathbf{x} - \mathbf{y}||^2, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in B_R.$$

Доказательство.

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) = \int\limits_0^1 \frac{d}{d\tau} f(\mathbf{y} + \tau(\mathbf{x} - \mathbf{y}))d\tau = \int\limits_0^1 (\mathbf{f}'(\mathbf{y} + \tau(\mathbf{x} - \mathbf{y})), \mathbf{x} - \mathbf{y})d\tau =$$

$$= (\mathbf{f}'(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \mathbf{y}) - \int\limits_0^1 (\mathbf{f}'(\mathbf{y} + \tau(\mathbf{x} - \mathbf{y})) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})), \mathbf{x} - \mathbf{y})d\tau \ge (\mathbf{f}'(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \mathbf{y}) -$$

$$- \int\limits_0^1 ||\mathbf{f}'(\mathbf{y} + \tau(\mathbf{x} - \mathbf{y})) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})|| \cdot ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||d\tau \ge (\mathbf{f}'(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \mathbf{y}) - \frac{L}{2}||\mathbf{x} - \mathbf{y}||^2. \diamondsuit$$

Лемма 3.4.2. Пусть даны некоторые последовательности чисел $\mu_k > 0$ и $\tau_k \ge 0$, $k = 1, 2, ...$

1) Если $\mu_k - \mu_{k+1} \ge \tau_k \mu_k^2, \ \forall k \in N$, то $\mu_m \le \mu_1 / \left(1 + \mu_1 \sum_{k=1}^{m-1} \tau_k\right)$.

2) Если $\mu_k - \mu_{k+1} \ge \tau_k \mu_k, \ \forall k \in N$, то $\mu_m \le \mu_1 \mathbf{e}xp(-\sum_{k=1}^{m-1} \tau_k)$.

Доказательство. 1) Так как $\mu_k / \mu_{k+1} \ge 1 + \tau_k \mu_k^2 / \mu_{k+1} \ge 1$, то $1/\mu_{k+1} - 1/\mu_k = (\mu_k - \mu_{k+1})/\mu_k \mu_{k+1} \ge \tau_k \mu_k / \mu_{k+1} \ge \tau_k$.

Просуммировав по k от 1 до m, получаем

$$1/\mu_m - 1/\mu_1 = \sum_{k=1}^{m-1} (1/\mu_{k+1} - 1/\mu_k) \ge \sum_{k=1}^{m-1} \tau_k,$$

откуда $\mu_m \le \mu_1 / \left(1 + \mu_1 \sum_{k=1}^{m-1} \tau_k\right)$.

2) Так как $\mu_k > 0$, то $\mu_k > \tau_k \mu_k$, то есть $\tau_k < 1$ и значит $0 < 1 - \tau_k \le 1$. Поэтому

$$\mu_m \le (1 - \tau_{m-1})\mu_{m-1} \le ... \le \mu_1 \prod_{k=1}^{m-1} (1 - \tau_k) = \mu_1 \mathbf{e}xp \left(\sum_{k=1}^{m-1} \ln(1 - \tau_k) \right) \le$$

$$\leq \mu_1 \mathbf{e}xp\left(-\sum_{k=1}^{m-1}\tau_k\right),$$

так как $\ln(1-\tau_k) \leq -\tau_k$, если $0 < 1-\tau_k \leq 1$. $\diamondsuit$

Будем предполагать, что функция $f(\mathbf{x})$ достигает на R^n минимума в некоторой точке $\mathbf{x}_0$ (эта точка не обязательно единственна) и пусть $\{\mathbf{x}_k\}$ – последовательность, построенная каким-либо вариантом метода спуска.

Введем обозначения:

$$\mu_k = f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}_0), \quad \alpha_k = \frac{(\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k), \mathbf{l}_k)}{||\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)|| \cdot ||\mathbf{l}_k||}.$$

Очевидно, $\mu_k > 0$, а α_k – это косинус угла между вектором $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)$ и вектором $\mathbf{l}_k$.

Следующая теорема дает оценку разности $f(\mathbf{x}_m) - f(\mathbf{x}_0)$.

Теорема 3.4.2. Если $f(\mathbf{x})$ – выпуклая, непрерывно дифференцируемая функция, производная которой удовлетворяет условию Липшица и если множество $\Omega = \{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_1)\}$ ограничено, то есть $\mathrm{diam}\Omega = \eta < \infty$, то

$$f(\mathbf{x}_m) - f(\mathbf{x}_0) \leq \frac{\mu_1}{1 + \mu_1(2L\eta^2)^{-1}\sum_{k=1}^{m-1}\alpha_k^2}. \tag{1}$$

Доказательство. Поскольку $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_k \in \Omega$ и так как $f(\mathbf{x})$ – выпуклая функция, то по теореме 1.3.6

$$\mu_k = f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}_0) \leq (\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0) \leq ||\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)|| \cdot ||\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0|| \leq \eta||\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)||.$$

Оценим снизу разность $\mu_k - \mu_{k+1}$, используя лемму 3.4.1:

$$\mu_k - \mu_{k+1} = f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}_{k+1}) = f(\mathbf{x}_k) - \min_\beta f(\mathbf{x}_k - \beta\mathbf{l}_k) \geq f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}_k - \beta\mathbf{l}_k) \geq$$

$$\geq (\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k), \beta\mathbf{l}_k) - \frac{L}{2}||\beta\mathbf{l}_k||^2 = \beta\alpha_k||\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)|| \cdot ||\mathbf{l}_k|| - \frac{L}{2}\beta^2||\mathbf{l}_k||^2.$$

Так как это неравенство справедливо для любого β, то полагая
$\beta = \alpha_k||\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)||/L||\mathbf{l}_k||$, получаем

$$\mu_k - \mu_{k+1} \geq \frac{\alpha_k^2}{2L}||\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)||^2.$$

Используя теперь установленную выше оценку для μ_k, находим, что

$$\mu_k - \mu_{k+1} \geq \frac{\alpha_k^2}{2L\eta^2}\mu_k^2.$$

Таким образом, для последовательности чисел μ_k выполнены условия леммы 3.4.2, откуда следует (1). $\diamondsuit$

Следствие 3.4.1. Пусть функция $f(\mathbf{x})$ удовлетворяет условиям теоремы 3.4.2.

1) Если вектора $\mathbf{l}_k$ выбираются так, что $|\alpha_k| \geq \alpha > 0$, $k = 1, 2, ...$, то $f(\mathbf{x}_m) - f(\mathbf{x}_0) \leq 2L\eta^2/\alpha^2(m-1)$.

2) Если последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$ построена методом наискорейшего спуска, то $f(\mathbf{x}_m) - f(\mathbf{x}_0) \leq 2L\eta^2/(m-1)$.

3) Если последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$ построена методом покоординатного спуска, то $f(\mathbf{x}_m) - f(\mathbf{x}_0) \leq 2Ln\eta^2/(m-1)$.

Доказательство. 1) Используя неравенство теоремы 3.4.2, получаем

$$f(\mathbf{x}_m) - f(\mathbf{x}_0) \leq \frac{\mu_1}{1 + \frac{\mu_1}{2L\eta^2}\alpha^2(m-1)} \leq \frac{2L\eta^2}{\alpha^2(m-1)}.$$

2) В этом случае $\mathbf{l}_k = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)$ и значит, $\alpha_k = 1$, $k = 1, 2, ...$, то есть $\alpha = 1$.

3) Так как $\mathbf{l}_k = \mathbf{e}_j$, где j выбирается из условия $|f'_{x_j}(\mathbf{x}_k)| = \max_i |f'_{x_i}(\mathbf{x}_k)|$, то

$$\alpha_k^2 = \frac{(\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k), \mathbf{e}_j)^2}{||\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)||^2 \cdot ||\mathbf{e}_j||^2} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_k)\right)^2}{n\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_k)\right)^2} = \frac{1}{n}. \diamondsuit$$

Накладывая на функцию $f(\mathbf{x})$ более сильные ограничения, можно получить оценки не только для $f(\mathbf{x}_m) - f(\mathbf{x}_0)$, но и для $||\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_0||$.

Определение. Функционал $f(\mathbf{x})$ на нормированном пространстве E называется сильно выпуклым, если существует $\rho > 0$ такое, что $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ и $\forall \alpha \in [0, 1]$

$$f((1-\alpha)\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}) \leq (1-\alpha)f(\mathbf{x}) + \alpha f(\mathbf{y}) - \alpha(1-\alpha)\rho||\mathbf{x} - \mathbf{y}||^2. \diamondsuit$$

Пример. Пусть E – евклидово пространство. Функционал $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x})$ – сильно выпуклый функционал на E.

Действительно,

$$f((1-\alpha)\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}) = ((1-\alpha)\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}, (1-\alpha)\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}) = (1-\alpha)^2(\mathbf{x}, \mathbf{x})+2\alpha(1-\alpha)(\mathbf{x}, \mathbf{y})+$$
$$+\alpha^2(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = (1-\alpha)(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \alpha(\mathbf{y}, \mathbf{y}) - \alpha(1-\alpha)(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - \alpha(1-\alpha)(\mathbf{y}, \mathbf{y})+$$
$$+2\alpha(1-\alpha)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (1-\alpha)(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \alpha(\mathbf{y}, \mathbf{y}) - \alpha(1-\alpha)||\mathbf{x} - \mathbf{y}||^2,$$

то есть здесь $\rho = 1$. $\diamondsuit$

Очевидно, сильно выпуклый функционал является строго выпуклым, поэтому по теореме 2.1.2, если точка минимума $\mathbf{x}_0$ сильно выпуклого функционала $f(\mathbf{x})$ на E существует, то она единственна.

Дальше понадобится следующая общая теорема о сильно выпуклых функционалах.

Теорема 3.4.3. 1) Если $f(\mathbf{x})$ – сильно выпуклый функционал и $\mathbf{x}_0$ – точка минимума $f(\mathbf{x})$ на E, то

$$||\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|| \le \frac{2}{\rho}||f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)||. \tag{1}$$

2) Если дополнительно $f(\mathbf{x})$ – непрерывно дифференцируемый функционал, то

$$||\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|| \le \frac{1}{\rho}||\mathbf{f}'(\mathbf{x})||, \quad f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0) \le \frac{1}{\rho}||\mathbf{f}'(\mathbf{x})||^2. \tag{2}$$

Доказательство. 1) Так как $\mathbf{x}_0$ – точка минимума, то $f(\mathbf{x}_0) \le f(\mathbf{x}/2 + \mathbf{x}_0/2)$, а так как $f(\mathbf{x})$ – сильно выпуклый функционал, то

$$f(\mathbf{x}/2+\mathbf{x}_0/2) \le f(\mathbf{x})/2 + f(\mathbf{x}_0)/2 - \rho||\mathbf{x}-\mathbf{x}_0||^2/4, \tag{3}$$

откуда следует (1).

2) Используя снова неравенство (3), неравенство $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) \le (\mathbf{f}'(\mathbf{x}), \mathbf{x}-\mathbf{y})$ теоремы 1.3.5 и необходимое условие минимума $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) = 0$, получаем

$$\frac{\rho}{4}\cdot||\mathbf{x}-\mathbf{x}_0||^2 \le \frac{1}{2}[f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}/2+\mathbf{x}_0/2)] + \frac{1}{2}[f(\mathbf{x}_0)-f(\mathbf{x}/2+\mathbf{x}_0/2)] \le$$

$$\le \frac{1}{4}(\mathbf{f}'(\mathbf{x}), \mathbf{x}-\mathbf{x}_0) + \frac{1}{4}(\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0-\mathbf{x}) = \frac{1}{4}(\mathbf{f}'(\mathbf{x}), \mathbf{x}-\mathbf{x}_0) \le \frac{1}{4}||\mathbf{f}'(\mathbf{x})||\cdot||\mathbf{x}-\mathbf{x}_0||.$$

Отсюда вытекает первое неравенство в (2) и так как

$$f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0) \le (\mathbf{f}'(\mathbf{x}), \mathbf{x}-\mathbf{x}_0) \le ||\mathbf{f}'(\mathbf{x})||\cdot||\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|| \le \frac{1}{\rho}||\mathbf{f}'(\mathbf{x})||^2,$$

то и второе. $\diamondsuit$

Сохраняя обозначения теоремы 3.4.2, сформулируем теорему об оценках для случая сильно выпуклой функции.

Теорема 3.4.4. Если $f(\mathbf{x})$ – сильно выпуклая, непрерывно дифференцируемая функция, производная которой удовлетворяет условию Липшица, и x_0 – точка минимума, то

$$f(\mathbf{x}_m) - f(\mathbf{x}_0) \le \mu_1 \mathbf{e}xp\left(-\frac{\rho}{2L}\sum_{k=1}^{m-1}\alpha_k^2\right), \tag{1}$$

$$||\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_0||^2 \le \frac{2}{\rho}\mu_1 \mathbf{e}xp\left(-\frac{\rho}{2L}\sum_{k=1}^{m-1}\alpha_k^2\right). \tag{2}$$

Доказательство. Так как функция $f(\mathbf{x})$ сильно выпукла, то по теореме 3.4.3 $\mu_k = f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}_0) \le ||\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)||^2/\rho$.

Используя оценку для разности $\mu_k - \mu_{k+1}$, полученную в доказательстве теоремы 3.4.2, и только что установленное неравенство, имеем

$$\mu_k - \mu_{k+1} = f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}_{k+1}) \ge \frac{\alpha_k^2}{2L}||\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)||^2 \ge \frac{\rho\alpha_k^2}{2L}\mu_k.$$

Таким образом, для последовательности чисел μ_k выполнены условия леммы 3.4.2 и поэтому

$$\mu_m = f(\mathbf{x}_m) - f(\mathbf{x}_0) \le \mu_1 \mathbf{e}xp\left(-\frac{\rho}{2L}\sum_{k=1}^{m-1}\alpha_k^2\right),$$

то есть (1) доказано.

По теореме 3.4.3 $||\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_0||^2 \le 2(f(\mathbf{x}_m) - f(\mathbf{x}_0))/\rho$, что вместе с (1) дает (2). $\diamondsuit$

Следствие 3.4.2. Пусть функция $f(\mathbf{x})$ удовлетворяет условиям теоремы 3.4.4.

1) Если вектора $\mathbf{l}_k$ выбираются так, что $|\alpha_k| \ge \alpha > 0$, $k = 1, 2, ...$, то

$$f(\mathbf{x}_m) - f(\mathbf{x}_0) \le \mu_1 \mathbf{e}xp\left(-\frac{\rho\alpha^2(m-1)}{2L}\right); \ \ ||\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_0|| \le \frac{2\mu_1}{\rho}\mathbf{e}xp\left(-\frac{\rho\alpha^2(m-1)}{2L}\right).$$

2) Если последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$ построена методом наискорейшего спуска, то

$$f(\mathbf{x}_m) - f(\mathbf{x}_0) \le \mu_1 \mathbf{e}xp\left(-\frac{\rho(m-1)}{2L}\right); \ \ ||\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_0|| \le \frac{2\mu_1}{\rho}\mathbf{e}xp\left(-\frac{\rho(m-1)}{2L}\right).$$

3) Если последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$ построена методом покоординатного спуска, то

$$f(\mathbf{x}_m) - f(\mathbf{x}_0) \le \mu_1 \mathbf{e}xp\left(-\frac{\rho(m-1)}{2nL}\right); \ \ ||\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_0|| \le \frac{2\mu_1}{\rho}\mathbf{e}xp\left(-\frac{\rho(m-1)}{2nL}\right).$$

Доказательство этого следствия повторяет доказательство следствия 3.4.1. $\diamondsuit$

Глава 4. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§4.1. ПРОСТЕЙШАЯ ЗАДАЧА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

4.1.1. Постановка задачи. Необходимые условия экстремума

Рассмотрим задачу о минимуме или максимуме интегрального функционала

$$f(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt$$

на множестве непрерывно дифференцируемых на отрезке $[t_0, t_1]$ функций, удовлетворяющих краевым условиям

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1.$$

Поскольку каждая функция из этого множества определяет некоторую кривую, проходящую через точки (t_0, x_0), (t_1, x_1), то нужно, следовательно, среди всех таких кривых найти ту, на которой функционал $f(x)$ достигает наименьшего или наибольшего значения.

Более точная постановка задачи состоит в том, что отыскиваются точки локального минимума и максимума функционала $f(x)$. В этом случае, однако, существенным становится выбор нормы на множестве функций $x(t)$.

Можно считать, что в качестве основного нормированного пространства, на котором определен функционал $f(x)$, выбрано пространство $E = C^1(t_0, t_1)$, то есть на множестве непрерывно дифференцируемых на $[t_0, t_1]$ функций задана норма $||x|| = ||x||_{C^1} = \max_{t\in[t_0,t_1]} |x(t)| + \max_{t\in[t_0,t_1]} |\dot{x}(t)|$. В этой норме малая окрестность некоторой функции $x(t)$ состоит из функций $y(t)$, для которых близки не только соответствующие значения функций, но и значения производных (рис. 15).

Локальный экстремум функционала $f(x)$ называется в этом случае слабым.

В качестве нормы на множестве непрерывно дифференцируемых функций можно взять также норму, индуцированную из $C(t_0, t_1)$, то есть положить $||x|| = ||x||_C = \max_{t\in[t_0,t_1]} |x(t)|$. Тогда малая окрестность функции $x(t)$ состоит просто из близких по значениям функций $y(t)$ (рис. 16).

Локальный экстремум в этом случае называется сильным.

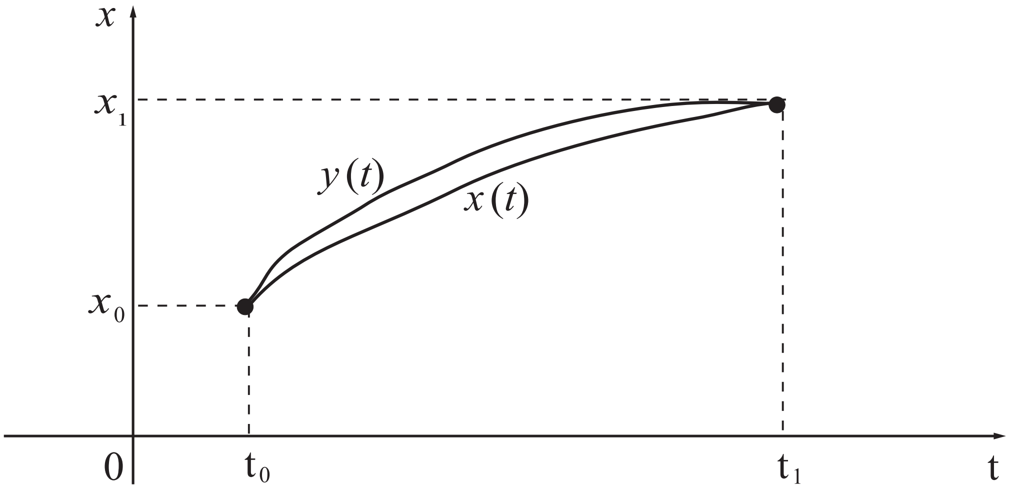

Рис 15.

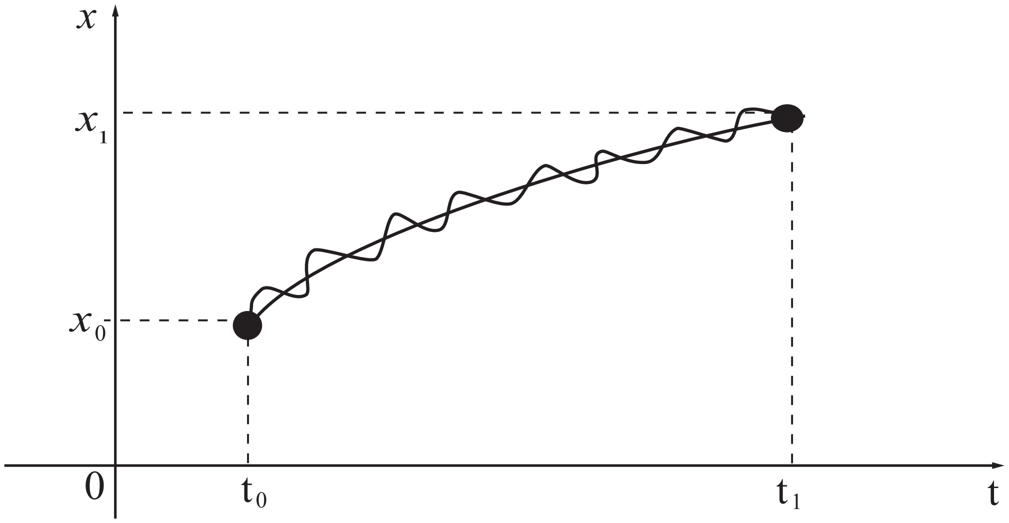

Рис 16.

Очевидно, что любая функция $x(t)$, являющаяся для функционала $f(x)$ точкой сильного локального экстремума, является и точкой слабого локального экстремума (но не наоборот) и поэтому необходимые условия слабого экстремума являются также и необходимыми условиями сильного экстремума.

Краевые условия выделяют в E подмножество $Q = \{x(t) : x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1\}$, которое является аффинным подпространством. Действительно, если $x(t)$ – произвольная функция из Q, то для любой другой функции $y(t)$ из Q функция $h(t) = y(t) - x(t)$ удовлетворяет условиям $h(t_0) = 0,\ h(t_1) = 0$, то есть $Q = x(t) + H$, где $H = \{h(t) : h(t_0) = 0,\ \ h(t_1) = 0\}$ – подпространство в E.

Получим необходимые условия локального экстремума функционала $f(x)$, рассматривая его на подмножестве Q нормированного пространства
$E = C^1(t_0, t_1)$.

При выводе необходимых условий понадобится следующая лемма.

Лемма 4.1.1 (лемма Лагранжа). Пусть $a(t)$ – непрерывная функция на $[t_0, t_1]$. Если для любой функции $h(t) \in H$ равен нулю интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} a(t)h(t)dt = 0,$$

то $a(t) \equiv 0$ на $[t_0, t_1]$.

Доказательство. Допустим, что существует точка $\bar{t} \in (t_0, t_1)$ в которой, например, $a(\bar{t}) > 0$. По непрерывности существует отрезок $[t', t''] \subset [t_0, t_1]$, на котором $a(t) > 0$.

Определим функцию

$$h_0(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_0, t']; \\ (t - t')^2 (t - t'')^2, & t \in [t', t'']; \\ 0, & t \in [t'', t_1]. \end{cases}$$

Эта функция непрерывно дифференцируема и равна нулю в точках t_0, t_1, и значит интеграл для нее должен быть равен нулю.

Но

$$\int_{t_0}^{t_1} a(t)h_0(t)dt = \int_{t'}^{t''} a(t)(t - t')^2 (t - t'')^2 dt > 0.$$

Полученное противоречие доказывает лемму. $\diamondsuit$

Теорема 4.1.1. Пусть подынтегральная функция $L(t, x, \dot{x})$ дважды непрерывно дифференцируема. Для того, чтобы дважды непрерывно дифференцируемая функция $x(t) \in Q$ была точкой локального экстремума функционала $f(x)$ на Q, необходимо, чтобы она удовлетворяла уравнению Эйлера

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, x(t)\dot{x}(t)) - L_x(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0.$$

Доказательство. Так как Q – аффинное многообразие, конус допустимых направлений в точке $x \in Q$ по следствию 2.2.2 равен подпространству H. Если $x(t)$ – точка локального экстремума функционала $f(x)$ на Q, то для нее должно выполняться необходимое условие экстремума из теоремы 2.3.2:

$$f'(x)h = 0, \quad \forall h \in H,$$

или, с учетом явного выражения для производной $f'(x)$, найденного в примере 3) из пункта 1.3.3

$$\int_{t_0}^{t_1} [L_x(t, x(t), \dot{x}(t))h(t) + L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\dot{h}(t)]dt = 0, \quad \forall h(t) \in H.$$

Преобразуем с помощью интегрирования по частям следующий интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\dot{h}(t)dt = L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))h(t)|_{t_0}^{t_1} -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))h(t)dt = -\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))h(t)dt$$

(внеинтегральный член равен нулю, так как $h(t_0) = 0$, $h(t_1) = 0$).

Используя это соотношение, перепишем необходимое условие экстремума в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[L_x(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\right] h(t)dt = 0, \quad \forall h(t) \in H,$$

откуда, в силу леммы 4.1.1, получаем, что

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) - L_x(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0. \diamondsuit$$

Замечание. Условие $x(t) \in C^2(t_0, t_1)$ введено только для упрощения доказательства; теорема верна без этого предположения – [9], [52] и т.д.

Решения уравнения Эйлера называются экстремалями.

Таким образом, кривые,на которых интегральный функционал $f(x)$ достигает минимума или максимума, содержатся среди экстремалей, проходящих через точки (t_0, x_0), (t_1, x_1).

Поскольку уравнение Эйлера – это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, то для нахождения всех таких экстремалей нужно решить для этого уравнения соответствующую краевую задачу. Как известно, решение этой задачи может не существовать или не быть единственным.

Является ли построенное решение в действительности точкой экстремума и какой именно – максимума или минимума – можно выяснить с помощью достаточных условий.

Заметим, что если функционал $f(x)$ является выпуклым, то по теореме 2.3.4 полученные необходимые условия экстремума являются и достаточными, а по теореме 2.1.1 найденные с их помощью точки локального минимума оказываются точками глобального минимума.

4.1.2. Частные случаи

В зависимости от вида подынтегральной функции $L(t, x, \dot{x})$ в рассмотренной задаче возможны различные случаи вырождения, когда решение задачи не существует, а также так называемые интегрируемые случаи, для которых уравнение Эйлера имеет первый интеграл.

a) Если подынтегральная функция не зависит от $\dot{x}$, то есть

$$f(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t))dt,$$

то уравнение Эйлера имеет вид

$$L_x(t, x(t)) = 0.$$

Это уравнение не является дифференциальным, его решение не содержит произвольных постоянных и поэтому удовлетворить краевым условиям в общем случае невозможно.

b) Если подынтегральная функция зависит от $\dot{x}$ линейно, то есть

$$f(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} [M(t, x(t)) + N(t, x(t))\dot{x}(t)]dt,$$

то уравнение Эйлера

$$\frac{d}{dt}N(t, x(t)) - M_x(t, x(t)) - N_x(t, x(t))\dot{x}(t) = 0$$

– это уравнение первого порядка и его решение содержит одну произвольную постоянную, выбором которой можно удовлетворить только одному краевому условию.

c) **Теорема 4.1.2.** Если подынтегральная функция не зависит от x, то есть функционал имеет вид

$$f(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, \dot{x}(t))dt,$$

то уравнение Эйлера имеет первый интеграл

$$L_{\dot{x}}(t, \dot{x}(t)) = C.$$

Доказательство. Очевидно, так как уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t, \dot{x}(t)) = 0. \ \diamondsuit$$

d) **Теорема 4.1.3.** Если подынтегральная функция не зависит от t, то есть функционал имеет вид

$$f(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t))dt,$$

то уравнение Эйлера имеет первый интеграл

$$L(x(t), \dot{x}(t)) - \dot{x}(t)L_{\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t)) = C.$$

Доказательство. Здесь уравнение Эйлера

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t)) - L_x(x(t), \dot{x}(t)) = 0$$

и поэтому

$$\frac{d}{dt}(L - \dot{x}L_{\dot{x}}) = L_x\dot{x} + L_{\dot{x}}\ddot{x} - \ddot{x}L_{\dot{x}} - \dot{x}\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} = \dot{x}\left(L_x - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}}\right) = 0. \ \diamondsuit$$

Следствие 4.1.1. Если подынтегральная функция зависит только от $\dot{x}$, то есть

$$f(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(\dot{x}(t))dt,$$

то все экстремали этого функционала – прямые.

Доказательство. Первый интеграл уравнения Эйлера в этом случае будет иметь вид $L(\dot{x}) - \dot{x}L_{\dot{x}}(\dot{x}) = C$, откуда сразу следует, что $\dot{x}(t) = C_1$ и значит, $x(t) = C_1t + C_2$. $\diamondsuit$

4.1.3. Примеры

1) Длина дуги кривой $x(t)$, проходящей через точки (t_0, x_0), (t_1, x_1) дается интегралом

$$l(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)}dt.$$

Так как подынтегральная функция не зависит от x, по следствию 4.1.1 экстремали этого функционала – прямые.

2) Пусть $x(0) = 0, \ x(\pi/2) = 1$,

$$f(x) = \int\limits_{0}^{\pi/2} [\dot{x}^2(t) - x^2(t)]dt.$$

Уравнение Эйлера имеет вид

$$\ddot{x} + x = 0,$$

подставляя его общее решение $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$ в краевые условия, получаем, что $C_1 = 0,\ C_2 = 1$, то есть экстремум в рассматриваемой задаче может достигаться только на функции $x = \sin t$.

3) Задача о минимальной поверхности вращения. Среди всех кривых $x(t)$, проходящих через точки (t_0, x_0) и (t_1, x_1), найти кривую, для которой поверхность, полученная вращением кривой вокруг оси Ot, имеет наименьшую площадь.

В силу известной формулы для площади поверхности вращения, речь идет о минимизации функционала

$$S(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} x(t)\sqrt{1 + \dot{x}^2(t)}dt.$$

Так как подынтегральная функция не зависит от t, по теореме 4.1.3 можно выписать первый интеграл уравнения Эйлера

$$x\sqrt{1+\dot{x}^2} - \frac{x\dot{x}^2}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} = C_1,$$

откуда

$$\frac{x}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} = C_1.$$

Разрешая относительно $\dot{x}$, приходим к уравнению с разделяющимися переменными

$$C_1\dot{x} = \sqrt{x^2 - C_1^2},$$

интегрируя которое, получаем

$$C_1 \ln(x + \sqrt{x^2 - C_1^2}) = t - C_2 + C_1 \ln C_1,$$

или

$$x + \sqrt{x^2 - C_1^2} = C_1 e^{(t-C_2)/C_1}.$$

Отсюда

$$x(t) = \frac{C_1}{2}\left(e^{(t-C_2)/C_1} + e^{-(t-C_2)/C_1}\right) = C_1 \operatorname{ch}\frac{\mathrm{t} - \mathrm{C}_2}{\mathrm{C}_1},$$

то есть экстремали в этой задаче – это цепные линии.

Подставляя полученное решение уравнения Эйлера в краевые условия, можно показать, что через две заданные точки плоскости (t, x) могут проходить две экстремали, одна или ни одной.

4) Задача о линии наискорейшего спуска (брахистохроне). Рассмотрим шарик, скатывающийся из точки $O(0,0)$ в точку $A(x_0, y_0)$ по некоторой кривой (рис. 17).

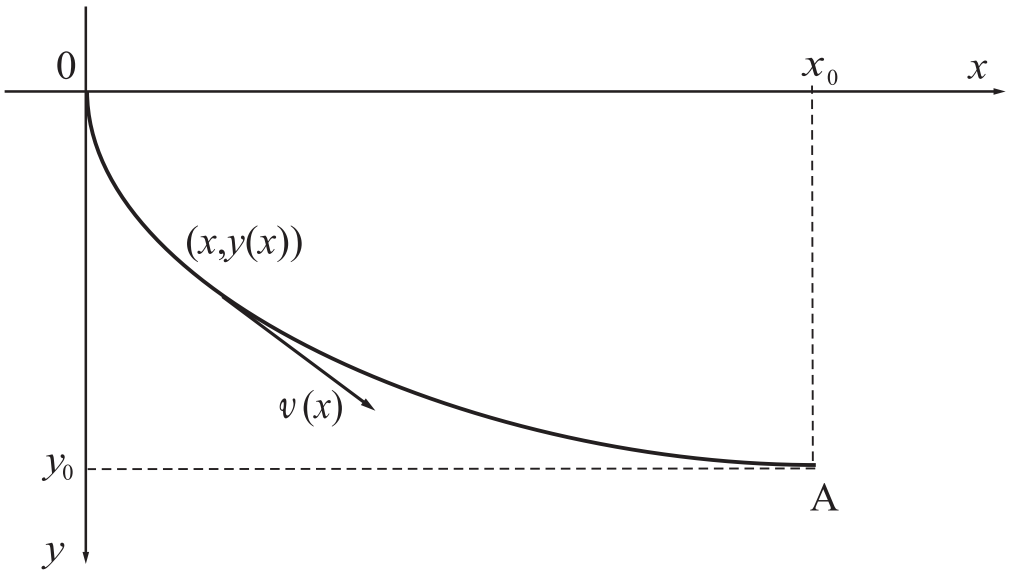

Рис 17.

Какой должна быть кривая, чтобы время, за которое скатывается шарик, было минимальным?

Пусть кривая задана уравнением $y = y(x)$. В начальной точке $O(0,0)$ потенциальная и кинетическая энергии равны нулю. В произвольной точке $(x, y(x))$ кривой потенциальная энергия равна $-mgy(x)$, а кинетическая $mv^2(x)/2$, поэтому из закона сохранения энергии получаем

$$\frac{mv^2(x)}{2} - mgy(x) = 0,$$

откуда находим скорость шарика $v(x) = \sqrt{2gy(x)}$ в точке $(x, y(x))$. Так как дифференциал дуги dS и дифференциал времени dt связаны соотношением $dt = dS/v$, то время, которое потребуется на прохождение всей кривой, равно

$$t(y) = \int \frac{dS}{v} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int\limits_0^{x_0} \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{\sqrt{y(x)}} dx.$$

Таким образом, получена задача о минимизации функционала $t(y)$ на множестве функций $y(x)$, удовлетворяющих краевым условиям $y(0) = 0$, $y(x_0) = y_0$.

Так как подынтегральная функция не зависит от x, то по теореме 4.1.3 для уравнения Эйлера сразу можно выписать первый интеграл

$$\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} - y' \frac{y'}{\sqrt{y(1 + y'^2)}} = C.$$

Отсюда, после несложных преобразований, приходим к уравнению

$$y(1+y'^2)=C_1.$$

Для того, чтобы его проинтегрировать, ведем новую переменную u, полагая

$$y=\frac{C_1}{2}(1-\cos u),$$

тогда для u получаем уравнение

$$\frac{C_1^2}{4}(1-\cos u)\sin^2 uu'^2=1+\cos u,$$

или

$$\frac{C_1}{2}(1-\cos u)u'=\pm 1,$$

откуда легко находится x как функция параметра u:

$$x=\frac{C_1}{2}(u-\sin u)+C_2.$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из краевых условий и, в частности, $C_2=0$.

Поэтому окончательно

$$x=\frac{C_1}{2}(u-\sin u),\quad y=\frac{C_1}{2}(1-\cos u);$$

эти уравнения задают параметрически циклоиду. Таким образом, если линия наискорейшего спуска существует, то она может быть только циклоидой.

Упражнения. 1) Показать, что функционал
$f(x)=\int\limits_0^1(x^2+t^2\dot{x}^2)dt$
не имеет экстремалей, удовлетворяющих произвольным краевым условиям $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$, если только $x_1\neq x_0+1$.

2) Показать, что в задаче на экстремум
$f(x)=\int\limits_{t_0}^{t_1}(x+t\dot{x})dt,\quad x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1$
любая функция, удовлетворяющая краевым условиям, является решением.

3) Найти экстремали функционала
$f(x)=\int\limits_1^3\dot{x}(1+t^2\dot{x})dt,$
удовлетворяющие краевым условиям $x(1)=4,\ x(3)=2.$

4) Найти экстремали функционала
$f(x)=\int\limits_1^2 x^{-1}\sqrt{1+\dot{x}^2}dt,$
удовлетворяющие краевым условиям $x(0)=1,\ x(1)=2.$

5) Найти экстремали функционала
$f(x) = \int\limits_0^{\pi/2} (x^2 + \dot{x}^2 + 4x \sin t) dt,$
удовлетворяющие краевым условиям $x(0) = 0,\ x(\pi/2) = 1$.

§4.2. ФУНКЦИОНАЛЫ БОЛЕЕ ОБЩЕГО ВИДА

4.2.1. Функционал, зависящий от нескольких функций

Для функционала

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, ..., x_n) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x_1(t), ..., x_n(t), \dot{x}_1(t), ..., \dot{x}_n(t)) dt$$

будем рассматривать задачу об экстремуме на множестве вектор-функций $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$, удовлетворяющих краевым условиям $x_1(t_0) = x_{10}, ...,$ $x_n(t_0) = x_{n0}, x_1(t_1) = x_{11}, ..., x_n(t_1) = x_{n1}$.

Введем банахово пространство $E = C_n^1(t_0, t_1) = C^1(t_0, t_1) \times ... \times C^1(t_0, t_1)$ с соответствующей нормой и выделим в нем подмножество Q функций, удовлетворяющих заданным краевым условиям. Очевидно, что если $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)) \in Q$, то $Q = \mathbf{x}(t) + H$, где

$$H = \{\mathbf{h}(t) = (h_1(t), ..., h_n(t)) :\ \mathbf{h}(t_0) = 0,\ \mathbf{h}(t_1) = 0\},$$

то есть H – подпространство в E, а Q – аффинное подпространство в E.

Будем предполагать, что $L(t, x_1, ..., x_n, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Теорема 4.2.1. Для того чтобы дважды непрерывно дифференцируемая вектор-функция $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ была точкой локального экстремума функционала $f(\mathbf{x})$ на подмножестве Q, необходимо, чтобы функции $x_1(t), ...,$ $x_n(t)$ удовлетворяли системе уравнений Эйлера:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} L_{\dot{x}_1}(t, x_1, ..., x_n, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n) - L_{x_1}(t, x_1, ..., x_n, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n) = 0, \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{d}{dt} L_{\dot{x}_n}(t, x_1, ..., x_n, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n) - L_{x_n}(t, x_1, ..., x_n, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n) = 0. \end{aligned}$$

Доказательство. Если $(x_1(t), ..., x_n(t))$ – точка экстремума функционала $f(x_1, ..., x_n)$ на Q, то должно выполняться необходимое условие экстремума теоремы 2.3.2

$$f'(x_1, ..., x_n)(h_1, ..., h_n) = 0, \quad \forall (h_1, ..., h_n) \in H.$$

Подставляя сюда явное выражение для производной $f'(x_1, ..., x_n)$, найденное в примере 6) пункта 1.3.3, имеем

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} [L_{x_1} h_1 + L_{\dot{x}_1} \dot{h}_1 + ... + L_{x_n} h_n + L_{\dot{x}_n} \dot{h}_n] dt = 0, \quad \forall (h_1, ..., h_n) \in H.$$

Преобразуем левую часть этого выражения с помощью интегрирования по частям. С учетом краевых условий для функций $h_1(t), ..., h_n(t)$, получаем

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\left(L_{x_1} - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}_1} \right) h_1 + ... + \left(L_{x_n} - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}_n} \right) h_n \right] dt = 0, \quad \forall (h_1, ..., h_n) \in H.$$

В частности, это должно выполняться для любого набора функций вида $(h_1, 0, ..., 0)$, то есть

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \left(L_{x_1} - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}_1} \right) h_1 dt = 0$$

для любой непрерывно дифференцируемой функции $h_1(t)$, удовлетворяющей условиям $h_1(t_0) = 0$, $h_1(t_1) = 0$. Применяя лемму 4.1.1, получаем первое уравнение Эйлера. Аналогично, рассматривая наборы функций $(0, h_2, 0, ..., 0)$ и так далее, можно получить все остальные уравнения Эйлера. $\diamondsuit$

Пример. $f(x_1, x_2) = \int\limits_0^{\pi/2} [2x_1 x_2 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2] dt$, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $x_1(\pi/2) = 1$, $x_2(\pi/2) = -1$.

Система уравнений Эйлера

$$\ddot{x}_1 - x_2 = 0, \quad \ddot{x}_2 - x_1 = 0$$

сводится к одному уравнению $x_1^{(4)} - x_1 = 0$, решая которое находим

$$x_1 = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \sin t + C_4 \cos t, \ x_2 = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - C_3 \sin t - C_4 \cos t.$$

Подставляя это в краевые условия, получаем пару функций $x_1 = \sin t$, $x_2 = -\sin t$, на которой только и может достигаться экстремум. $\diamondsuit$

Замечание. Так же, как в случае функционала, зависящего от одной функции, можно отметить частные случаи, для которых в задаче существуют первые интегралы.

а) Если подынтегральная функция L не зависит явно, например, от $x_1, ..., x_m$, то система уравнений Эйлера имеет m первых интегралов

$$L_{\dot{x}_1}(t, x_{m+1}, ..., x_n, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n) = C_1, ..., L_{\dot{x}_m}(t, x_{m+1}, ..., x_n, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n) = C_m.$$

b) Если подынтегральная функция L не зависит явно от t, то система уравнений Эйлера имеет первый интеграл

$$\dot{x}_1 L_{\dot{x}_1} + ... + \dot{x}_n L_{\dot{x}_n} - L = C.$$

Действительно, в силу уравнений Эйлера

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}_1 L_{\dot{x}_1} + ... + \dot{x}_n L_{\dot{x}_n} - L) = \ddot{x}_1 L_{\dot{x}_1} + \dot{x}_1 \frac{d}{dt} L_{\dot{x}_1} + ... + \ddot{x}_n L_{\dot{x}_n} + \dot{x}_n \frac{d}{dt} L_{\dot{x}_n} -$$

$$-L_{x_1}\dot{x}_1 - ... - L_{x_n}\dot{x}_n - L_{\dot{x}_1}\ddot{x}_1 - ... - L_{\dot{x}_n}\ddot{x}_n = 0,$$

откуда следует высказанное утверждение.

4.2.2. Простейшая задача в параметрической форме

В ряде случаев в задаче об экстремуме функционала, зависящего от одной функции

$$g(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} M(x, y(x), y'(x))dx,$$

удобнее искать решение в параметрической форме $x = x_1(t), y = x_2(t)$, то есть преобразовать функционал к виду

$$g(y) = f(x_1, x_2) = \int\limits_{t_0}^{t_1} M\left(x_1(t), x_2(t), \frac{\dot{x}_2(t)}{\dot{x}_1(t)}\right) \dot{x}_1(t)dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} L(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t))dt.$$

Заметим, что новая подынтегральная функция L является по отношению к переменным $\dot{x}_1$ и $\dot{x}_2$ однородной функцией степени один, то есть

$$L(x_1, x_2, \alpha\dot{x}_1, \alpha\dot{x}_2) = \alpha L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2), \quad \forall\alpha \in R. \qquad (1)$$

Поскольку функционал $f(x_1, x_2)$ оказывается функционалом весьма специального вида, это приводит к тому, что в данном случае среди уравнений Эйлера только одно оказывается независимым.

Теорема 4.2.2. Если подынтегральная функция в функционале

$$f(x_1, x_2) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t))dt.$$

однородна степени один по переменным $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, то одно из уравнений Эйлера является следствием другого.

Доказательство. Действительно, дифференцируя равенство (1) по α, получаем при $\alpha = 1$

$$\dot{x}_1 L_{\dot{x}_1}(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) + \dot{x}_2 L_{\dot{x}_2}(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) - L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) \equiv 0.$$

Подставляя сюда произвольную пару функций $(x_1(t), x_2(t))$ и дифференцируя уже по t, находим

$$\ddot{x}_1 L_{\dot{x}_1} + \dot{x}_1 \frac{d}{dt} L_{\dot{x}_1} + \ddot{x}_2 L_{\dot{x}_2} + \dot{x}_2 \frac{d}{dt} L_{\dot{x}_2} - L_{x_1}\dot{x}_1 - L_{x_2}\dot{x}_2 - L_{\dot{x}_1}\ddot{x}_1 - L_{\dot{x}_2}\ddot{x}_2 \equiv 0,$$

то есть

$$\dot{x}_1 \left(\frac{d}{dt} L_{\dot{x}_1} - L_{x_1} \right) + \dot{x}_2 \left(\frac{d}{dt} L_{\dot{x}_2} - L_{x_2} \right) \equiv 0.$$

Поэтому одно из уравнений Эйлера является следствием другого. $\diamondsuit$

Таким образом, для определения двух функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$ получается одно уравнение. Эту неопределенность можно устранить, накладывая дополнительные ограничения на параметрическое представление кривой $y = y(x)$. Например, можно потребовать, чтобы $\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = 1$, что означает, что за параметр t выбрана длина дуги кривой.

Примерами функционалов, для которых справедлива теорема 4.2.2, могут служить длина дуги

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}\, dt,$$

площадь криволинейной трапеции

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1) dt$$

и так далее.

4.2.3. Функционал, зависящий от старших производных

Рассмотрим функционал

$$f(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t), ..., x^{(n)}(t)) dt$$

и получим для него необходимые условия экстремума на множестве $2n$ раз дифференцируемых функций, удовлетворяющих краевым условиям

$$x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1, ..., x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)},\ x^{(n-1)}(t_1) = x_1^{(n-1)}.$$

Будем считать, что функционал $f(x)$ определен на банаховом пространстве $E = C^{2n}(t_0, t_1)$ и обозначим через Q подмножество функций из E, удовлетворяющих краевым условиям. Если $x(t) \in Q$, то $Q = x(t) + H$, где

$$H = \{h(t):\ h(t_0) = 0,\ h(t_1) = 0, ..., h^{(n-1)}(t_0) = 0,\ h^{(n-1)}(t_1) = 0\},$$

то есть H – подпространство в E, а Q – аффинное подпространство в E.

Теорема 4.2.3. Если функции $L(t, x, x', ..., x^{(n)})$ и $x(t)$ непрерывно дифференцируемы по своим аргументам $n+1$ раз, то для того, чтобы функция $x(t)$ была точкой локального экстремума функционала $f(x)$ на Q, необходимо, чтобы она удовлетворяла уравнению Эйлера

$$\frac{d^n}{dt^n}L_{x^{(n)}} - \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}L_{x^{(n-1)}} + ... + (-1)^n L_x = 0.$$

Доказательство. Пусть $x(t)$ – точка экстремума $f(x)$ на Q. По теореме 2.3.2 необходимо, чтобы выполнялось условие

$$f'(x)h = 0, \quad \forall h \in H,$$

или, с учетом явного выражения для производной $f'(x)$ из примера 5) пункта 1.3.3,

$$\int_{t_0}^{t_1} [L_x h + L_{x'} h' + ... + L_{x^{(n)}} h^{(n)}] dt = 0, \quad \forall h \in H.$$

Преобразуя этот интеграл интегрированием по частям нужное число раз и учитывая при этом краевые условия, которым удовлетворяет функция $h(t)$, получаем, что

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[L_x - \frac{d}{dt}L_{x'} + ... + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} L_{x^{(n)}} \right] h dt = 0$$

для любой n раз дифференцируемой функции, удовлетворяющей нулевым краевым условиям.

Легко показать, что лемма 4.1.1 остается справедливой, если в ней вместо непрерывно дифференцируемых функций $h(t)$ рассматривать n раз непрерывно дифференцируемые функции $h(t)$, удовлетворяющие соответствующим нулевым краевым условиям. Применяя к полученному интегралу этот вариант леммы, получаем требуемое уравнение Эйлера.$\diamondsuit$

Аналогично можно получить необходимые условия экстремума для функционалов, зависящих от большего числа функций.

Пример. $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} (2x + x''^2)dt$, $x(-1) = 0$, $x(1) = 0$, $x'(-1) = 0$, $x'(1) = 0$.

Здесь уравнение Эйлера будет $x^{(4)} + 1 = 0$, его общее решение $x = -t^4/24 + C_1t^3 + C_2t^2 + C_3t + C_4$ и, используя краевые условия, получаем функцию $x = -(t^2 - 1)^2/24$, на которой функционал может достигать экстремума. ♢

4.2.4. Функционал, зависящий от функции нескольких переменных

Пусть $\Omega \subset R^2$ – замкнутая, ограниченная область с кусочно-гладкой границей S, функция $u(x, y)$ задана на Ω и

$$f(u) = \iint\limits_{\Omega} L(x, y, u, u_x, u_y)dxdy.$$

Введем банахово пространство $C^1(\Omega)$ непрерывно дифференцируемых в Ω функций и выделим в нем подмножество Q функций, принимающих на границе S заданное значение:

$$Q = \{u(x, y) :\ u(x, y)|_S = \varphi(x, y)\}.$$

Если $u(x, y) \in Q$, то $Q = u(x, y) + H$, где

$$H = \{h(x, y) :\ h(x, y)|_S = 0,$$

то есть Q – аффинное подпространство.

Для вывода необходимых условий экстремума функционала $f(u)$ на Q понадобится двумерный аналог леммы 4.1.1.

Лемма 4.2.1. Если $p(x, y)$ – непрерывная функция в Ω такая, что

$$\iint\limits_{\Omega} p(x, y)h(x, y)dxdy = 0$$

для любой функции $h(x, y) \in H$, то $p(x, y) \equiv 0$.

Доказательство. Предполагая противное, допустим, что в точке $(x_0, y_0) \in \Omega$ функция $p(x, y)$, например, положительна, тогда она положительна в некотором круге $B_\varepsilon \subset \Omega$ радиуса ε с центром в этой точке.

Полагая

$$h_0(x, y) = \begin{cases} 0, & (x_0, y_0) \in \Omega \setminus B_\varepsilon, \\ [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - \varepsilon^2]^2, & (x_0, y_0) \in B_\varepsilon, \end{cases}$$

получаем непрерывно дифференцируемую функцию, равную нулю на границе S, но при этом

$$\iint\limits_{\Omega} p(x,y)h_0(x,y)dxdy = \iint\limits_{B_\varepsilon} p(x,y)[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-\varepsilon^2]^2 dxdy > 0,$$

что противоречит условию. $\diamondsuit$

Теорема 4.2.4. Пусть подынтегральная функция $L(x,y,u,u_x,u_y)$ дважды непрерывно дифференцируема. Для того чтобы функция $u(x,y) \in Q \cap C^2(\Omega)$ была точкой локального экстремума функционала $f(u)$ на Q, необходимо, чтобы она удовлетворяла уравнению Эйлера:

$$\frac{\partial}{\partial x}L_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}L_{u_y} - L_u = 0.$$

Доказательство. По теореме 2.3.2, если u – точка экстремума, то

$$f'(u)h = 0, \quad \forall h \in H.$$

С помощью явного выражения для производной $f'(u)$, найденного в примере 7) из пункта 2.3.3, это условие можно переписать в виде:

$$\iint\limits_{\Omega} [L_u h + L_{u_x}h_x + L_{u_y}h_y]dxdy = 0$$

для любой непрерывно дифференцируемой в Ω функции $h(x,y)$ такой, что $h|_S = 0$.

Считая функцию $u(x,y)$ дважды непрерывно дифференцируемой, преобразуем с помощью формулы Грина входящий в левую часть полученного соотношения интеграл

$$\iint\limits_{\Omega} [L_{u_x}h_x + L_{u_y}h_y]dxdy = \iint\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(L_{u_x}h) + \frac{\partial}{\partial y}(L_{u_y}h)\right] dxdy -$$

$$- \iint\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}L_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}L_{u_y}\right] hdxdy = \oint\limits_{S} (L_{u_x}hdy - L_{u_y}hdx) -$$

$$- \iint\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}L_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}L_{u_y}\right] hdxdy = - \iint\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}L_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}L_{u_y}\right] hdxdy.$$

Криволинейный интеграл при этом равен нулю, так как $h|_S = 0$.

Используя полученное равенство, необходимое условие экстремума можно записать в виде

$$\iint\limits_{\Omega} \left[L_u - \frac{\partial}{\partial x} L_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} L_{u_y} \right] h dx dy = 0,$$

откуда с помощью леммы 4.2.2 выводится уравнение Эйлера. $\diamondsuit$

Пример. Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$f(u) = \iint\limits_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2) dx dy$$

на множестве функций u, удовлетворяющих заданному краевому условию $u(x,y)|_S = \varphi(x,y)$. Уравнение Эйлера для этого функционала

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

– это уравнение Лапласа и значит, точками экстремума являются гармонические функции, принимающие на границе S заданное значение.

Так как функционал $f(u)$ и множество Q в этой задаче выпуклы, то по теореме 2.3.4 решение первой краевой задачи для уранения Лапласа дает функционалу $f(u)$ минимум на Q, то есть необходимое условие минимума оказывается в этом случае и достаточным.

Это позволяет свести решение краевой задачи для уравнения Лапласа к задаче вариационного исчисления. Такой метод решения краевых задач называется вариационным. $\diamondsuit$

Упражнения. 1) Найти экстремали функционала
$f(x,y) = \int\limits_{t_0}^{t_1} (2xy - 2x^2 + \dot{x}^2 - \dot{y}^2) dt.$

2) Найти экстремали функционала
$f(x) = \int\limits_{0}^{1} (\ddot{x}^2 + 2tx) dt,$
удовлетворяющие краевым условиям $x(0) = \ddot{x}(0) = 0$, $x(1) = \ddot{x}(1) = 1$.

3) Найти экстремали функционала

$$f(u) = \iint\limits_{\Omega} (u_x^2 - u_y^2) dx dy.$$

4) Получить теорему 4.2.1 для случая, когда функционал f зависит от произвольного числа функций.

5) Получить теорему 4.2.4 для случая, когда функционал f определен на функциях n переменных.

§4.3. ЗАДАЧИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

4.3.1. Задача на условный экстремум (голономные связи)

Часто встречаются вариационные задачи, в которых функции, образующие множество Q, кроме краевых условий должны удовлетворять некоторым дополнительным соотношениям.

Рассмотрим задачу об экстремуме функционала

$$f(x_1, x_2) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t))dt$$

на множестве Q пар непрерывно дифференцируемых функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, удовлетворяющих краевым условиям $x_1(t_0) = x_{10}$, $x_1(t_1) = x_{11}$, $x_2(t_0) = x_{20}$, $x_2(t_1) = x_{21}$ и ограничению типа равенства (уравнению связи) $M(t, x_1, x_2) = 0$. При этом краевые условия должны быть согласованы с уравнением связи, то есть точки (t_0, x_{10}, x_{20}) и (t_1, x_{11}, x_{21}) должны удовлетворять этому уравнению. В механике связи такого вида называются голономными.

Так как уравнение связи задает в пространстве (t, x_1, x_2) некоторую поверхность S, то геометрически такая постановка задачи означает, что экстремум функционала f ищется на множестве кривых, лежащих на S и проходящих через две заданные точки (рис. 18)

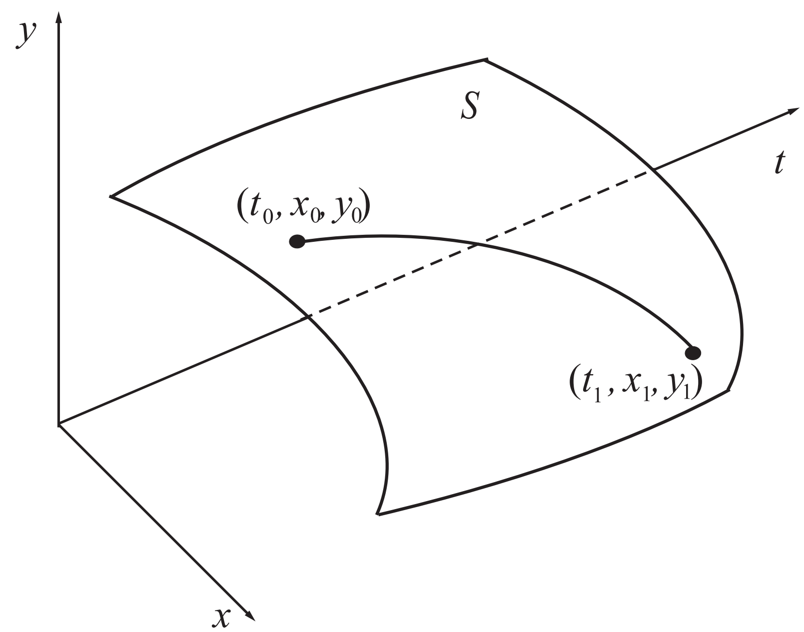

Рис 18.

Теорема 4.3.1. Если пара непрерывно дифференцируемых функций $(x_1(t), x_2(t)) \in Q$, является точкой локального экстремума функционала

$f(x_1, x_2)$ на Q и если $M_{x_2}(t, x_1(t), x_2(t)) \neq 0$, то существует такая непрерывная функция $\lambda(t)$, что $x_1(t)$ и $x_2(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{x}_1} - [L_{x_1} + \lambda M_{x_1}] = 0, \quad \frac{d}{dt}L_{\dot{x}_2} - [L_{x_2} + \lambda M_{x_2}] = 0.$$

Доказательство. Поскольку

$$Q = \{(x_1(t), x_2(t)) : \ M(t, x_1(t), x_2(t)) = 0, \ \ x_1(t_0) = x_{10}, \ x_1(t_1) = x_{11},$$
$$x_2(t_0) = x_{20}, \ x_2(t_1) = x_{21}\},$$

и по условию $M_{x_2} \neq 0$, то используя результаты примера 1) из пункта 2.2.4, получаем, что

$$K_{Q,(x_1,x_2)} = \{(h_1, h_2) : \ M_{x_1}(t, x_1(t), x_2(t))h_1(t) + M_{x_2}(t, x_1(t), x_2(t))h_2(t) = 0,$$
$$h_1(t_0) = 0, \ h_1(t_1) = 0, \ h_2(t_0) = 0, \ h_2(t_1) = 0\}.$$

Необходимое условие минимума теоремы 2.3.2, с учетом явного выражения для производной функционала f (пример 6, пункт 1.3.3), дает

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} [L_{x_1}h_1 + L_{\dot{x}_1}\dot{h}_1 + L_{x_2}h_2 + L_{\dot{x}_2}\dot{h}_2]dt = 0, \quad \forall (h_1, h_2) \in K_{Q,(x_1,x_2)}.$$

Преобразуем левую часть этого выражения с помощью интегрирования по частям. С учетом краевых условий для функций $h_1(t)$, $h_2(t)$, получаем

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\left(L_{x_1} - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}_1}\right) h_1 + \left(L_{x_2} - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}_2}\right) h_2\right] dt = 0, \quad \forall (h_1, h_2) \in K_{Q,(x_1,x_2)}.$$

Так как $M_{x_2} \neq 0$, то уравнение, связывающее h_1 и h_2, если $(h_1, h_2) \in K_{Q,(x_1,x_2)}$, позволяет выразить h_2 через h_1. Подставляя это значение h_2 в полученное равенство, имеем

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \left[L_{x_1} - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}_1} - \frac{M_{x_1}}{M_{x_2}}\left(L_{x_2} - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}_2}\right)\right] h_1 dt = 0$$

для любой функции $h_1(t)$, удовлетворяющей нулевым краевым условиям. Применяя лемму 4.1.1, получаем

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{x}_1} - L_{x_1} - \frac{M_{x_1}}{M_{x_2}}\left(\frac{d}{dt}L_{\dot{x}_2} - L_{x_2}\right) = 0$$

после чего, вводя функцию

$$\lambda(t) = \frac{1}{M_{x_2}}\left(\frac{d}{dt}L_{\dot{x}_2} - L_{x_2}\right),$$

приходим к нужным уравнениям. $\diamondsuit$

Если к полученным в теореме двум уравнениям добавить уравнение связи, то получится система из трех уравнений для определения трех неизвестных функций $x_1(t), x_2(t), \lambda(t)$.

Замечание. Результат теоремы можно переписать в виде необходимых условий для задачи на безусловный экстремум, если ввести функцию Лагранжа

$$L^*(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \lambda) = L(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) + \lambda M(t, x_1, x_2).$$

Очевидно, что упомянутая выше система из трех уравнений для определения трех неизвестных функций $x_1(t), x_2(t), \lambda(t)$ может быть теперь записана в виде

$$\frac{d}{dt}L^*_{\dot{x}_1} - L^*_{x_1} = 0,\ \frac{d}{dt}L^*_{\dot{x}_2} - L^*_{x_2} = 0,\ \frac{d}{dt}L^*_{\dot{\lambda}} - L^*_{\lambda} = 0,$$

то есть является системой уравнений Эйлера для функционала

$$g(x_1, x_2, \lambda) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L^*(t, x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \lambda(t))dt.\ \diamondsuit$$

Пример. Найти геодезические ("линии кратчайшей длины") на поверхности S, которая задана уравнением $M(t, x_1, x_2) = 0$. Считая, что геодезическая задана уравнениями $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, приходим к задаче о минимизации функционала

$$l(x_1, x_2) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}dt,$$

с соответствующими краевыми условиями и уравнением связи.

Записывая уравнения Эйлера, получаем

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}_1}{\sqrt{1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}} - \lambda M_{x_1} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\dot{x}_2}{\sqrt{1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}} - \lambda M_{x_2} = 0.$$

Вместе с уравнением связи $M(t, x_1, x_2) = 0$ это дает систему для определения x_1, x_2, λ.

В частности, если функция M не зависит явно от t (то есть поверхность $S : M(x_1, x_2) = 0$ – цилиндр с образующими, параллельными оси t), то по замечанию из пункта 4.1.1 уравнения Эйлера имеют первый интеграл

$$\dot{x}_1 L_{\dot{x}_1} + \dot{x}_2 L_{\dot{x}_2} - L - \lambda M = C$$

и, с учетом уравнения связи и явного вида L, этот первый интеграл принимает вид
$$\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = C_1.$$
Это уравнение следует решать вместе с уравнением связи.

Например, если поверхность является круговым цилиндром, то есть ее уравнение $x_1^2 + x_2^2 = 1$, то переходя к цилиндрическим координатам $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$, получаем: $r \equiv 1$, $\dot{\varphi} = C_1$. Поэтому геодезическими на круговом цилиндре могут быть только винтовые линии $x_1 = \cos(C_1 t + C_2)$, $x_2 = \sin(C_1 t + C_2)$, либо окружности (при $C_1 = 0$). $\diamondsuit$

Полученный в теореме 4.3.1 результат непосредственно обобщается на случай функционала, зависящего от произвольного числа функций и на случай любого количества связей.

Будем для функционала
$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, ..., x_n) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x_1(t), ..., x_n(t), \dot{x}_1(t), ..., \dot{x}_n(t))dt$$
рассматривать задачу об экстремуме на множестве вектор-функций $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$, удовлетворяющих краевым условиям
$$x_1(t_0) = x_{10}, ..., x_n(t_0) = x_{n0}, x_1(t_1) = x_{11}, ..., x_n(t_1) = x_{n1}$$
и ограничениям (уравнениям связи) $M_i(t, x_1, ..., x_n) = 0,\ i = 1, ..., m$.

Если ввести банахово пространство $E = C_n^1(t_0, t_1) = C^1(t_0, t_1) \times ... \times C^1(t_0, t_1)$, то краевые условия и уравнения связи определяют подмножество $Q \subset E$, на котором ищется экстремум функционала $f(\mathbf{x})$.

Теорема 4.3.2. Пусть вектор-функция $\mathbf{x}(t) \in C_n^2(t_0, t_1)$ является точкой экстремума функционала $f(\mathbf{x})$ на подмножестве $Q \subset E$.

Если ранг матрицы Якоби $\mathbf{M}'_x = \{\partial M_i / \partial x_j\}$ равен m, то существует непрерывная вектор-функция $\lambda(t) = (\lambda_1(t), ..., \lambda_m(t))$ такая, что вектор-функции $\mathbf{x}(t)$ и $\lambda(t)$ удовлетворяют системе уравнений
$$\frac{d}{dt} L^*_{\dot{x}_i}(t, \mathbf{x}, \lambda, \dot{\mathbf{x}}) - L^*_{x_i}(t, \mathbf{x}, \lambda, \dot{\mathbf{x}}) = 0, \quad i = 1, ..., n, \quad M_j(t, \mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, ..., m,$$
где $L^*(t, \mathbf{x}, \lambda, \dot{\mathbf{x}}) = L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + \lambda_1 M_1(t, \mathbf{x}) + ... + \lambda_m M_m(t, \mathbf{x})$ – функция Лагранжа рассматриваемой задачи.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 4.4.1. $\diamondsuit$

4.3.2. Изопериметрическая задача

Допустим, что среди кривых, соединяющих точки (t_0, x_0) и (t_1, x_1) и имеющих заданную длину a, требуется найти кривую, для которой площадь, заключенная между этой кривой и осью t максимальна (рис. 19).

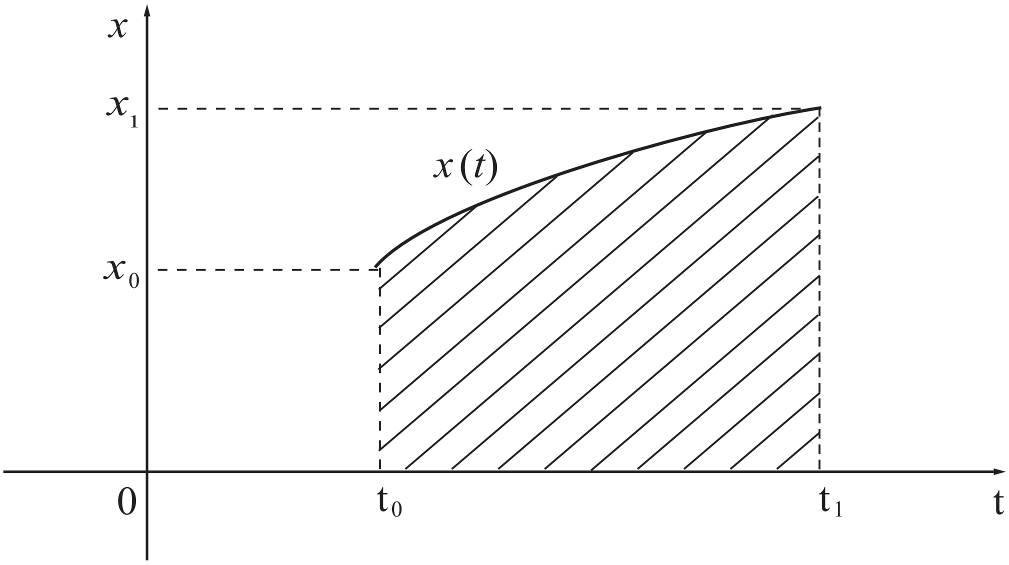

Рис 19.

Такая задача носит название изопериметрической. Для ее решения нужно максимизировать функционал

$$S(x) = \int_{t_0}^{t_1} x(t)dt$$

при условиях

$$x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1, \quad l(x) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)}dt = a.$$

Изопериметрической называют также задачу, которая получается, если функционалы $S(x)$ и $l(x)$ заменить на произвольные интегральные функционалы, то есть задачу об экстремуме функционала

$$f(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt$$

на множестве функций, удовлетворяющих условиям

$$x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1,\ f_1(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} M(t, x(t), \dot{x}(t))dt = a$$

Переходя к выводу необходимых условий экстремума для этой задачи, будем считать подинтегральные функции $L(t, x, \dot{x})$ и $M(t, x, \dot{x})$ дважды непрерывно дифференцируемыми.

Определим функционалы $\delta_{t_0}(x) = x(t_0)$ и $\delta_{t_1}(x) = x(t_1)$, и введем в $C^1(t_0, t_1)$ подмножество

$$Q = \{x(t) :\ \delta_{t_0}(x) = x_0,\ \delta_{t_1}(x) = x_1,\ f_1(x) = a\}.$$

Тогда рассматриваемая задача сводится к задаче об экстремуме функционала $f(x)$ на подмножестве Q в $C^1(t_0, t_1)$, заданном ограничениями типа равенства.

Теорема 4.3.3. Если функция $x(t) \in C^2(t_0, t_1)$ – точка локального экстремума функционала $f(x)$ на подмножестве Q и если $x(t)$ не является экстремалью функционала $f_1(x)$, то существует такое число λ, что $x(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}(L_{\dot{x}} + \lambda M_{\dot{x}}) - L_x - \lambda M_x = 0. \qquad (1)$$

Доказательство. Вычислим прежде всего с помощью теоремы 2.2.6. конус допустимых направлений в точке $x(t)$ для множества Q, для чего проверим выполнение условий этой теоремы. Функционал f_1 – непрерывно дифференцируем (пример 4 из пункта 1.3.3), а функционалы δ_{t_0} и δ_{t_1} – линейны и ограничены, поэтому остается показать только, что производные этих функционалов линейно независимы в точке $x(t)$.

Но если бы это было не так, то нашлись бы числа $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$, не все равные нулю, такие, что

$$\lambda_0 \delta_{t_0}(h) + \lambda_1 \delta_{t_1}(h) + \lambda_2 f_1'(x)h = 0, \quad \forall h \in C^1(t_0, t_1).$$

Так как функционалы δ_{t_0} и δ_{t_1} линейно независимы, то отсюда следует, что $\lambda_2 \neq 0$ и значит, для всех непрерывно дифференцируемых функций $h(t)$, удовлетворяющих нулевым краевым условиям $h(t_0) = \delta_{t_0}(h) = 0$, $h(t_1) = \delta_{t_1}(h) = 0$ выполнялось бы равенство

$$f_1'(x)h = 0.$$

Отсюда, с помощью рассуждений из доказательства теоремы 4.1.1., сразу получалось бы, что $x(t)$ удовлетворяет уравнению Эйлера для интегрального функционала f_1 и значит, является его экстремалью, что противоречит условию.

Таким образом, функционалы $\delta_{t_0}, \delta_{t_1}, f_1'$ линейно независимы и по теореме 2.2.6

$$K_{Q,x} = \{h: \ \delta_{t_0}(h) = h(t_0) = 0, \ \delta_{t_1}(h) = h(t_1) = 0, \ f_1'(x)h = 0\}.$$

Поскольку $x(t)$ – точка экстремума функционала $f(x)$ на Q и $K_{Q,x}$ – подпространство, должно выполняться необходимое условие экстремума из теоремы 2.3.2:

$$f'(x)h = 0, \quad \forall h \in K_{Q,x}.$$

Введем в $C^1(t_0, t_1)$ подпространства $H_1 = \{h(t): \ h(t_0) = 0, \ h(t_1) = 0\}$ и $H_2 = \{h(t): \ f_1'(x)h = 0\}$, тогда, очевидно, $K_{Q,x} = H_1 \cap H_2$.

Поскольку необходимое условие принимает вид

$$f'(x)h = 0, \quad \forall h \in H_1 \cap H_2,$$

то, по лемме 1.2.3, существует такое число λ, что

$$(f'(x) + \lambda f_1'(x))h = 0, \quad \forall h \in H_1,$$

то есть

$$\int_{t_0}^{t_1} [(L_x + \lambda M_x)h + (L_{\dot{x}} + \lambda M_{\dot{x}})\dot{h}]dt = 0$$

для любой непрерывно дифференцируемой функции $h(t)$, удовлетворяющей нулевым краевым условиям.

С помощью интегрирования по частям получаем

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[L_x + \lambda M_x - \frac{d}{dt}(L_{\dot{x}} + \lambda M_{\dot{x}})\right] hdt = 0,$$

откуда по лемме 4.1.1 получаем (1). $\diamondsuit$

Замечание. Если ввести функцию Лагранжа

$$L^*(t, x, \dot{x}) = L(t, x, \dot{x}) + \lambda M(t, x, \dot{x}),$$

то полученное в теореме уравнение можно переписать так:

$$\frac{d}{dt}L^*_{\dot{x}} - L^*_x = 0,$$

то есть оно является уравнением Эйлера в задаче на безусловный экстремум для функционала

$$g(x) = \int_{t_0}^{t_1} L^*(t, x(t), \dot{x}(t))dt = \int_{t_0}^{t_1} [L(t, x(t), \dot{x}(t)) + \lambda M(t, x(t), \dot{x}(t)]dt. \ \diamondsuit$$

Пример. Решим задачу, сформулированную в начале этого пункта, то есть задачу об отыскании кривой, для которой площадь соответствующей криволинейной трапеции максимальна.

Для этого составим вспомогательный функционал

$$g(x) = \int_{t_0}^{t_1} [x(t) + \lambda\sqrt{1 + \dot{x}^2(t)}]dt,$$

и поскольку подинтегральная функция не зависит явно от t, уравнение Эйлера для этого функционала имеет первый интеграл

$$x + \lambda\sqrt{1 + \dot{x}^2} - \frac{\lambda\dot{x}^2}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = C_1.$$

Отсюда находим, что

$$\dot{x} = \pm\frac{\sqrt{\lambda^2 - (x - C_1)^2}}{x - C_1}$$

и, решая это уравнение с разделяющимися переменными, получаем

$$(t - C_2)^2 + (x - C_1)^2 = \lambda^2.$$

Таким образом, экстремалями в этой задаче являются окружности; постоянные λ, C_1 и C_2 определяются из условий

$$x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1,\ \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \dot{x}^2}dt = a. \diamondsuit$$

Упражнения. 1) Найти экстремали в задачах о геодезических на конусе и на сфере.

2) Найти экстремали в задаче

$f(x) = \int_0^1 \dot{x}^2 dt, \quad f_1(x) = \int_0^1 x^2 dt = 1, \quad x(0) = 0,\ x(1) = 0.$

3) Найти экстремали в задаче

$f(x) = \int_0^1 \dot{x}^2 dt, \quad f_1(x) = \int_0^1 x dt = 1, \quad x(0) = 0,\ x(1) = 0.$

§4.4 ЗАДАЧИ С ПОДВИЖНЫМИ КОНЦАМИ

4.4.1. Задача со свободным правым концом

Простейшей вариационной задачей со свободным правым концом является задача об экстремуме интегрального функционала

$$f(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt$$

на множестве кривых $x = x(t)$, левый конец которых совпадает с заданной точкой (t_0, x_0), а правый лежит на вертикальной прямой $t = t_1$ (рис. 20).

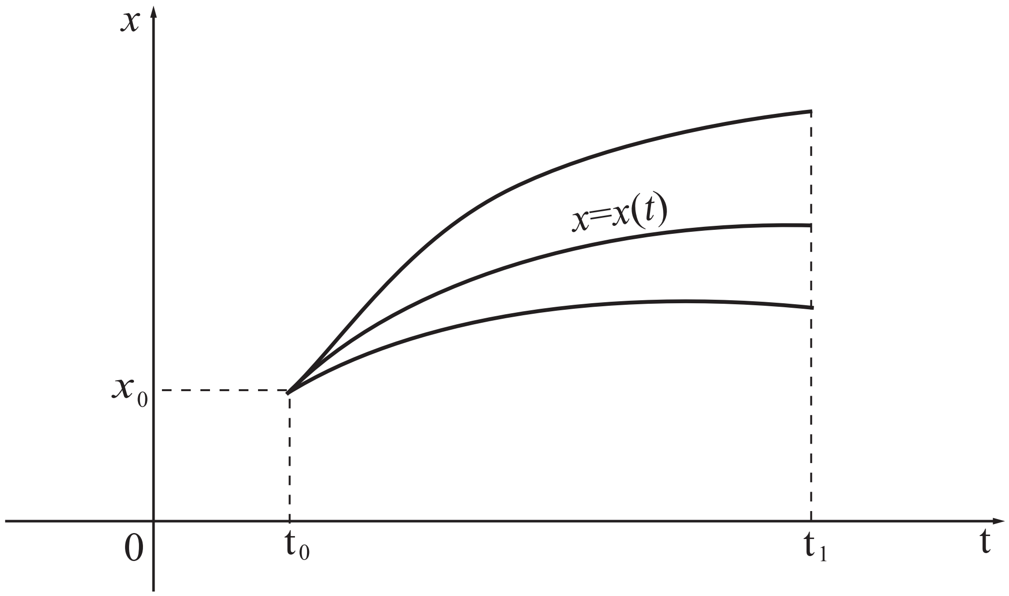

Рис 20.

Считая, что функционал $f(x)$ определен на нормированном пространстве $E = C^1(t_0, t_1)$, введем в E подмножество

$$Q = \{x(t) : \ x(t_0) = x_0\},$$

тогда поставленная задача – это задача об экстремуме функционала $f(x)$ на аффинном подпространстве Q.

Если $x(t) \in Q$, то $Q = x(t) + H$, где

$$H = \{h(t) : \ h(t_0) = 0\}.$$

Теорема 4.4.1. Если подынтегральная функция дважды непрерывно дифференцируема, то для того, чтобы функция $x(t) \in C^2(t_0, t_1)$ была точкой экстремума функционала $f(x)$ на Q, необходимо, чтобы она удовлетворяла уравнению Эйлера

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) - L_x(t, x, \dot{x}) = 0$$

и граничному условию (условию трансверсальности)

$$L_{\dot{x}}(t_1, x(t_1), \dot{x}(t_1)) = 0.$$

Доказательство. Если $x(t)$ – точка локального экстремума $f(x)$ на Q, то для нее выполняется необходимое условие из теоремы 2.3.2

$$f'(x)h = 0, \quad \forall h \in H,$$

или
$$\int\limits_{t_0}^{t_1}[L_x(t,x(t),\dot{x}(t))h(t)+L_{\dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t))\dot{h}(t)dt=0,\quad \forall h\in H.$$

Преобразуя это соотношение с помощью интегрирования по частям, используя при этом краевое условие $h(t_0)=0$, получаем, что

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[L_x(t,x(t),\dot{x}(t))-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t))\right]h(t)dt+L_{\dot{x}}(t_1,x(t_1),\dot{x}(t_1))h(t_1)=0,$$

для всех непрерывно дифференцируемых функций $h(t)$, удовлетворяющих нулевому краевому условию на левом конце.

В частности, это равенство должно выполняться для любой функции $h(t)$ из $C^1(t_0,t_1)$, удовлетворяющей нулевым краевым условиям на обоих концах, то есть такой, что $h(t_0)=0$, $h(t_1)=0$. В этом случае, применяя лемму 4.1.1, находим, что функция $x(t)$ удовлетворяет уравнению Эйлера.

Таким образом, интеграл равен нулю и необходимое условие принимает вид:

$$L_{\dot{x}}(t_1,x(t_1),\dot{x}(t_1))h(t_1)=0,\quad \forall h\in H.$$

Выбирая $h(t_1)\neq 0$, получаем условие трансверсальности. $\diamondsuit$

Краевое условие $L_{\dot{x}}(t_1,x(t_1),\dot{x}(t_1))=0$, в отличие от условия $x(t_1)=x_1$, которое задается заранее, называется естественным краевым условием.

Пример. Рассмотрим задачу о брахистохроне (используя обозначения примера 4 из пункта 4.1.3), то есть задачу об экстремуме функционала

$$t(y)=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int\limits_0^{x_0}\frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{y(x)}}dx,$$

считая, что правый конец может свободно перемещаться по прямой $x=x_0$. Краевое условие на левом конце прежнее: $y(0)=0$.

Экстремали этой задачи – циклоиды и, с учетом краевого условия на левом конце, как было показано, они записываются в виде

$$x=\frac{C_1}{2}(u-\sin u),\ y=\frac{C_1}{2}(1-\cos u).$$

Естественное краевое условие на правом конце в данном случае будет:

$$\left.\frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2}}\right|_{x=x_0}=0,$$

откуда $y'(x_0) = 0$. Так как $y'_x = y'_u / x'_u$, то на правом конце $y'_u = 0$, то есть $u = \pi$. Используя выражение для x, получаем $x_0 = C_1\pi/2$, откуда определяется C_1 и окончательно

$$x = \frac{x_0}{\pi}(u - \sin u),\ \ y = \frac{x_0}{\pi}(1 - \cos u).\ \diamondsuit$$

4.4.2. Задача с правым концом, лежащим на заданной кривой

Рассмотрим видоизмененную задачу предыдущего пункта, считая, что правые концы кривых, на которых ищется экстремум функционала

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt,$$

лежат на некоторой фиксированной кривой $x = \varphi(t)$, а на левом конце по-прежнему выполняется условие $x(t_0) = x_0$ (рис. 21).

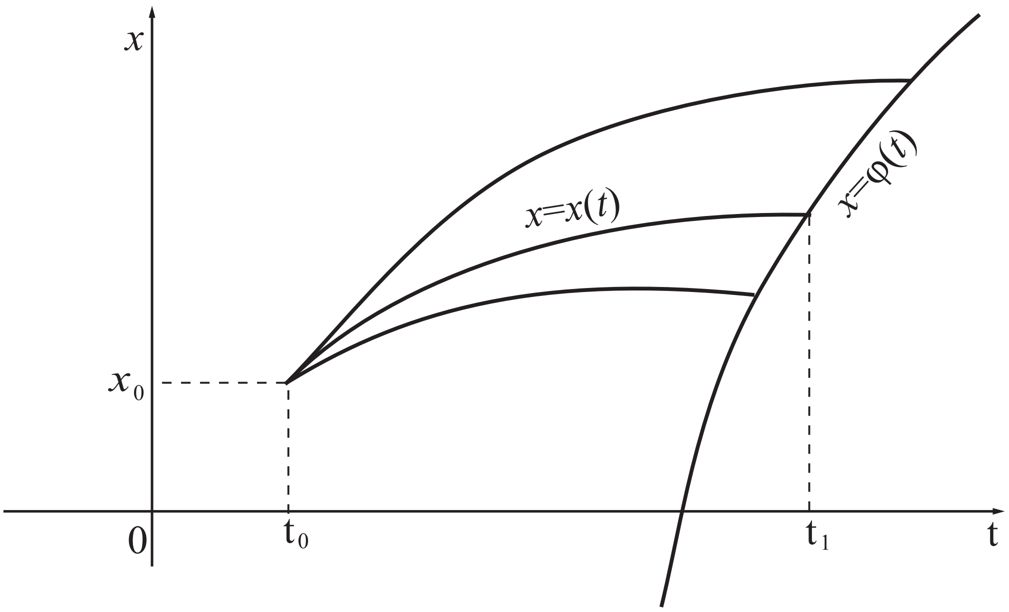

Рис 21.

Очевидно, верхний предел t_1 интеграла определяется из уравнения $x(t_1) = \varphi(t_1)$ и зависит от функции $x(t)$. Будем считать, что t_1 может принимать значения на некотором промежутке $(t_0, T]$.

Учитывая это, введем определенный на банаховом пространстве $E = C^1(t_0, t_1) \times (t_0, T)$ функционал

$$f(x, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt.$$

($f(x,t_1)$ – интегральный функционал с переменным верхним пределом.)

Выделим в пространстве E подмножество

$$Q = \{(x(t), t_1) : \ \delta_{t_0}(x) = x_0, \ g(x, t_1) = 0, \},$$

где $g(x,t_1) = x(t_1) - \varphi(t_1)$, тогда сформулированная выше задача – это задача об экстремуме функционала $f(x,t_1)$ на подмножестве $Q \subset E$, заданном с помощью ограничений типа равенства.

Лемма 4.4.1. Если функция $\varphi(t)$ – непрерывно дифференцируема, то $g(x,t_1)$ – непрерывно дифференцируемый функционал на E и

$$g'(x,t_1)(h,\tau) = (\dot{x}(t_1) - \dot{\varphi}(t_1))\tau + h(t_1).$$

Доказательство.

$$g(x+h, t_1+\tau) - g(x,t_1) = x(t_1+\tau) + h(t_1+\tau) - \varphi(t_1+\tau) - x(t_1) + \varphi(t_1) =$$

$$= \dot{x}(t_1+\theta\tau)\tau + h(t_1) + \dot{h}(t_1+\theta\tau)\tau - \dot{\varphi}(t_1+\theta\tau)\tau =$$
$$= \dot{x}(t_1)\tau - \dot{\varphi}(t_1)\tau + h(t_1) + \omega(x,t_1,h,\tau),$$

где $0 < \theta < 1$ и

$$\omega(x,t_1,h,\tau) = (\dot{x}(t_1+\theta\tau) - \dot{x}(t_1))\tau + \dot{h}(t_1+\theta\tau)\tau - (\dot{\varphi}(t_1+\theta\tau) - \dot{\varphi}(t_1))\tau.$$

Из непрерывной дифференцируемости входящих сюда функций следует, что

$$\frac{|\omega(x,t_1,y,\tau)|}{||h|| + |\tau|} \to 0,$$

если $||h|| \to 0$, $\tau \to 0$. $\diamondsuit$

Будем, как обычно, предполагать, что подинтегральная функция дважды непрерывно дифференцируема.

Теорема 4.4.2. Для того чтобы функция $x(t) \in C^2(t_0,t_1)$, удовлетворяющая краевому условию $x(t_0) = x_0$, давала локальный экстремум функционалу

$$f(x,t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt,$$

где t_1 определяется из уравнения $x(t_1) = \varphi(t_1)$, то есть для того, чтобы пара $(x(t), t_1)$ была точкой локального экстремума функционала $f(x,t_1)$ на Q, необходимо, чтобы функция $x(t)$ удовлетворяла уравнению Эйлера

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x}) - L_x(t,x,\dot{x}) = 0$$

и условию трансверсальности

$$L_{\dot{x}}(t_1, x(t_1), \dot{x}(t_1))(\dot{\varphi}(t_1) - \dot{x}(t_1)) + L(t_1, x(t_1)\dot{x}(t_1)) = 0.$$

Доказательство. Вычислим конус допустимых направлений в точке $(x(t), t_1)$ для множества Q. Непосредственно проверяется, что функционалы $g'(x, t_1)$ (найденный в лемме 4.4.1) и δ_{x_0} линейно независимы. Поэтому, по теореме Люстерника (теорема 2.2.6)

$$K_{Q,(x,t_1)} = \{(h(t), \tau) :\ \delta_{t_0}(h) = h(t_0) = 0,\ (\dot{x}(t_1) - \dot{\varphi}(t_1))\tau + h(t_1) = 0.$$

Так как $K_{Q,(x,t_1)}$ подпространство, то должно выполняться необходимое условие экстремума из теоремы 2.3.2:

$$f'(x, t_1)(h, \tau) = 0, \quad \forall (h, \tau) \in K_{Q,(x,t_1)}.$$

Используя явное выражение для производной $f'(x, t_1)$, найденное в примере 8) из пункта 1.3.3, мы можем переписать это равенство в виде

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} [L_x h + L_{\dot{x}} \dot{h}] dt + L(t_1, x(t_1), \dot{x}(t_1))\tau = 0, \quad \forall (h, \tau) \in K_{Q,(x,t_1)},$$

откуда, интегрируя по частям, получаем

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \left[L_x - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}} \right] h dt + L_{\dot{x}}(t_1, x(t_1)\dot{x}(t_1))h(t_1) + L(t_1, x(t_1), \dot{x}(t_1))\tau = 0,$$

$$\forall (h, \tau) \in K_{Q,(x,t_1)}.$$

В частности, это равенство должно выполняться для всех пар вида $(h, 0)$, где $h(t_0) = h(t_1) = 0$, так как все такие пары принадлежат $K_{Q,(x,t_1)}$. Отсюда, по лемме 4.1.1, следует, что $x(t)$ удовлетворяет уравнению Эйлера. Так как интегральный член при этом равен нулю, то

$$L_{\dot{x}}(t_1, x(t_1)\dot{x}(t_1))h(t_1) + L(t_1, x(t_1), \dot{x}(t_1))\tau = 0, \quad \forall (h, \tau) \in K_{Q,(x,t_1)}.$$

Если $(h, \tau) \in K_{Q,(x,t_1)}$, то $h(t_1) = (\dot{\varphi}(t_1) - \dot{x}(t_1))\tau$; подставляя это в полученное соотношение, имеем

$$[L_{\dot{x}}(t_1, x(t_1), \dot{x}(t_1))(\dot{\varphi}(t_1) - \dot{x}(t_1)) + L(t_1, x(t_1)\dot{x}(t_1))]\tau = 0$$

для любого τ, что дает условие трансверсальности. $\diamondsuit$

Пример. В задачах геометрической оптики важное значение имеет интеграл

$$f(y) = \int_{x_0}^{x_1} n(x, y)\sqrt{1 + y'^2}dx.$$

Условие трансверсальности для него имеет вид

$$n(x, y)\sqrt{1 + y'^2} + \frac{n(x, y)y'}{\sqrt{1 + y'^2}}(\varphi' - y') = 0$$

и так как показатель преломления $n(x, y) \neq 0$, то отсюда $1+\varphi'y' = 0$, или $y' = -1/\varphi'$ и значит, в этом случае трансверсальность – это просто ортогональность экстремали (луча) и кривой φ. $\diamondsuit$

4.4.3. Разрывные решения

В ряде случаев пространство $C^1(t_0.t_1)$ непрерывно дифференцируемых функций, на котором до сих пор отыскивался экстремум простейшего интегрального функционала

$$f(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt \tag{1}$$

оказывается слишком узким, так как этот экстремум достигается на функциях более общего вида, например, кусочно-гладких.

Пример. Рассмотрим функционал

$$f(x) = \int_{0}^{2} \dot{x}^2(1 - \dot{x}^2)^2 dt$$

с краевыми условиями $x(0) = 0$, $x(2) = 1$.

Очевидно, что $f(x) \geq 0$ и что на любой непрерывно дифференцируемой функции, отличной от нуля, $f(x) > 0$. В то же время, на функции $x(t) = t$, если $0 \leq t \leq 1$ и $x(t) = 1$, если $1 < t \leq 2$ (рис. 22), функционал принимает значение равное нулю.

Сглаживая эту функцию, нетрудно получить последовательность $x_k(t)$ непрерывно дифференцируемых функций (минимизирующую последовательность) такую, что $f(x_k) \to 0$ при $k \to \infty$. Таким образом, нижняя грань значений $f(x)$ на $C^1(0, 2)$ равна нулю, но достигается она на функции из более широкого пространства – на кусочно-гладкой функции. $\diamondsuit$

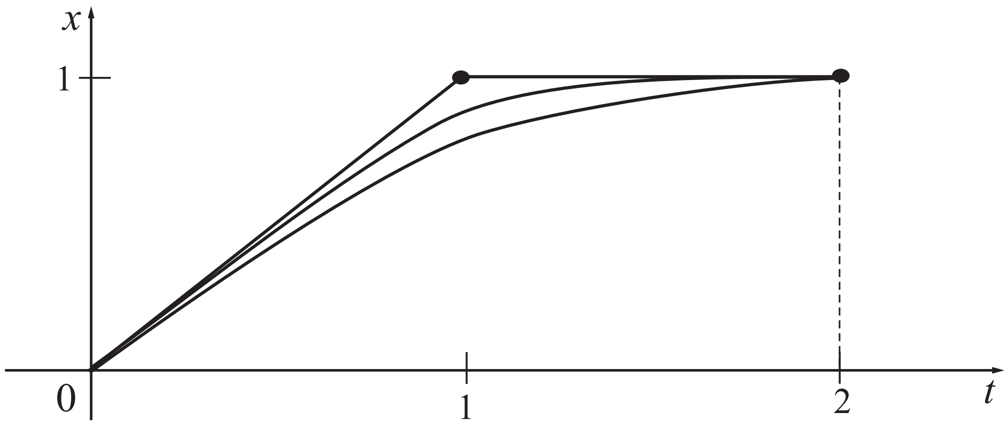

Рис 22.

Получим необходимые условия экстремума для функционала (1), рассматривая его на множестве непрерывных на $[t_0, t_1]$ функций, первые производные которых определены и непрерывны на этом отрезке всюду кроме, быть может, конечного числа точек, которые для $x'(t)$ являются точками разрыва первого рода. Обозначим это линейное пространство через $KC^1(t_0, t_1)$ (пространство кусочно-гладких функций).

Так как для любых двух функций со сколь угодно близкими точками разрыва производные не могут быть близки относитетельно равномерной нормы (рис. 23), в этой задаче естественно рассматривать сильный экстремум, то есть в $KC^1(t_0, t_1)$ вводится норма из $C(t_0, t_1)$.

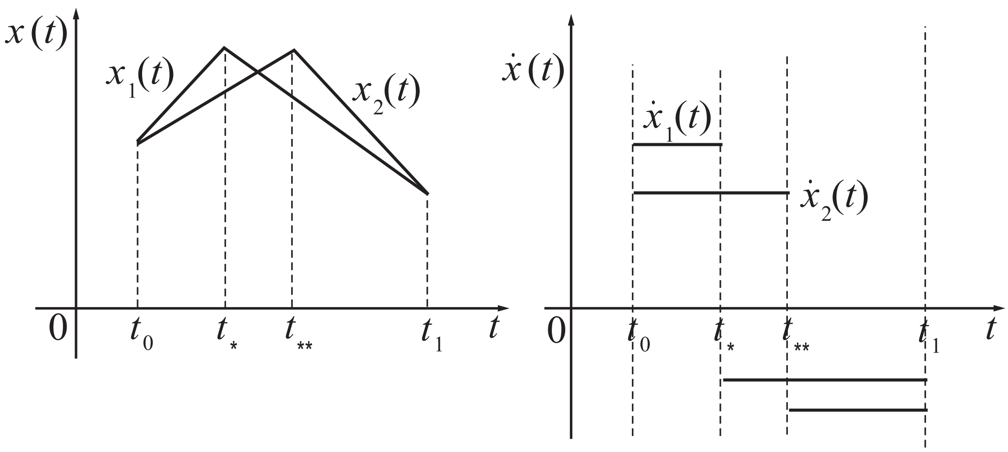

Рис 23.

Как обычно, предполагается, что заданы краевые условия $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$, то есть рассматривается задача об экстремуме функционала $f(x)$ на соответствующем подмножестве $Q \subset KC^1(t_0, t_1)$.

Теорема 4.4.3. Пусть $x(t)$ – непрерывная на $[t_0, t_1]$ функция, дважды непрерывно дифференцируемая на $[t_0, t_1]$ всюду, кроме конечного числа точек, являющихся для $x'(t)$ точками разрыва первого рода. Для того, чтобы

$x(t)$ была точкой сильного локального экстремума функционала $f(x)$ на подмножестве $Q \in KC^1(t_0, t_1)$, необходимо, чтобы функция $x(t)$ удовлетворяла уравнению Эйлера

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) - L_x(t, x, \dot{x}) = 0$$

всюду, кроме точек разрыва, и условиям Вейерштрасса-Эрдмана

$$(L - \dot{x} L_{\dot{x}})|_{t=t_*-0} = (L - \dot{x} L_{\dot{x}})|_{t=t_*+0}, \quad L_{\dot{x}}|_{t=t_*-0} = L_{\dot{x}}|_{t=t_*+0}$$

в каждой точке разрыва t_*.

Доказательство. Будем считать дальше для простоты, что сильный экстремум $f(x)$ на Q достигается на функции $x(t) \in Q$ с одной угловой точкой. Выделим в Q подмножество Q_1 функций, имеющих не более одной угловой точки, тогда, очевидно, $x(t) \in Q_1$ – точка сильного локального экстремума $f(x)$ на Q_1.

Введем нормированное пространство $E = C^1(t_0, t_1) \times C^1(t_0, t_1) \times [t_0, t_1]$, и выделим в нем подмножество

$$\tilde{Q}_1 = \{(x_1(t), x_2(t), t_*) : x_1(t_0) = x_0,\ x_2(t_1) = x_1,\ x_1(t_*) - x_2(t_*) = 0\}.$$

Очевидно, что если тройка $(x_1(t), x_2(t), t_*) \in \tilde{Q}_1$ то функция, определенная следующим образом

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), & t \in [t_0, t_*], \\ x_2(t), & t \in (t_*, t_1], \end{cases}$$

имеет угловую точку t_*, то есть принадлежит Q_1.

Наоборот, любая функция с угловой точкой может быть задана таким образом (рис. 24).

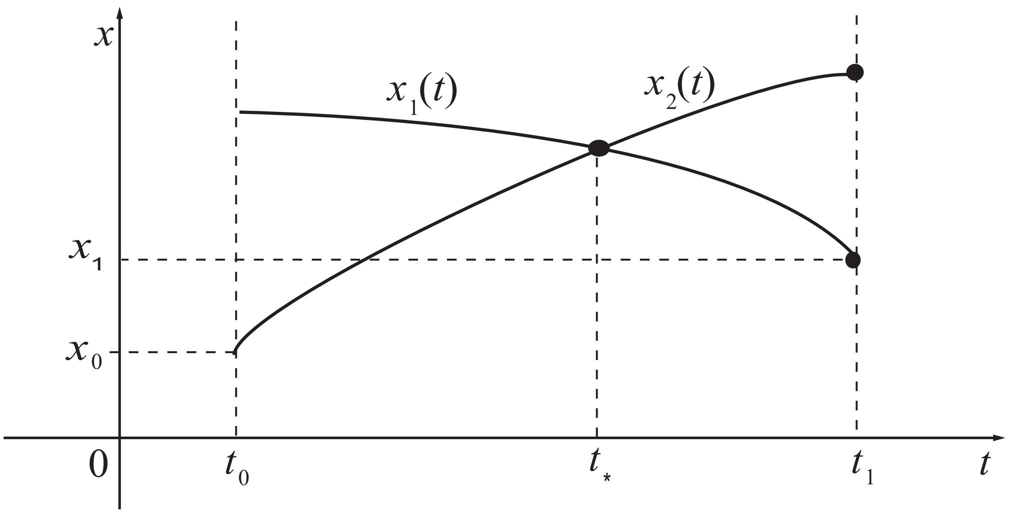

Рис 24.

Определим функционал $\tilde{f}$ на E следующим образом:

$$\tilde{f}(x_1, x_2, t_*) = \int_{t_0}^{t_*} L(t, x_1(t), \dot{x}_1(t))dt + \int_{t_*}^{t_1} L(t, x_2(t), \dot{x}_2(t))dt.$$

Если $(x_1(t), x_2(t), t_*) \in \tilde{Q}_1$ а $x(t) \in Q_1$ – соответствующая функция с угловой точкой t_*, то $\tilde{f}(x_1, x_2, t_*) = f(x)$.

Пусть теперь функция $x(t) \in Q_1$, для определенности, точка сильного локального минимума $f(x)$ на Q_1, t_* – точка разрыва производной функции $x(t)$ и $(x_1(t), x_2(t), t_*)$ – некоторая отвечающая этой функции тройка из $\tilde{Q}_1$. Поскольку $f(\bar{x}) \geq f(x)$ для всех функций $\bar{x}(t)$ из некоторой окрестности функции $x(t)$ и поскольку близким в $\tilde{Q}_1$ тройкам отвечают близкие функции в Q_1, то $\tilde{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{t}_*) \geq \tilde{f}(x_1, x_2, t_*)$ для всех достаточно близких к $(x_1(t), x_2(t), t_*)$ троек $(\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \bar{t}_*)$.

Таким образом, если $x(t)$ – точка сильного локального минимума $f(x)$ на Q_1, то $(x_1(t), x_2(t), t_*)$ – точка локального минимума (слабого) функционала $\tilde{f}(x_1, x_2, t_*)$ на $\tilde{Q}_1$. Получим необходимые условия минимума $\tilde{f}$ на $\tilde{Q}_1$, которые также будут необходимыми условиями минимума f на Q.

Вычислим конус допустимых направлений для подмножества

$$\tilde{Q}_1 = \{(x_1, x_2, t_*) : x_1(t_0) = x_0,\ x_2(t_1) = x_1,\ g(x_1, x_2, t_*) = x_1(t_*) - x_2(t_*) = 0\}.$$

Так как

$$g(x_1 + h_1, x_2 + h_2, t_* + \tau) - g(x_1, x_2, t_*) = x_1(t_* + \tau) + h_1(t_* + \tau) - x_2(t_* + \tau) -$$
$$- h_2(t_* + \tau) - x_1(t_*) + x_2(t_*) = \dot{x}_1(t_*)\tau - \dot{x}_2(t_*)\tau + h_1(t_*) - h_2(t_*) +$$
$$+ \omega(x_1, x_2, t_*, h_1, h_2, \tau),$$

то

$$g'(x_1, x_2, t_*)(h_1, h_2, \tau) = \dot{x}_1(t_*)\tau - \dot{x}_2(t_*)\tau + h_1(t_*) - h_2(t_*).$$

Поэтому, по теореме Люстерника (теорема 2.2.6),

$$K_{\tilde{Q}_1,(x_1,x_2,t_*)} = \{(h_1, h_2, \tau) :\ h_1(t_0) = 0,\ h_2(t_1) = 0,$$
$$\dot{x}_1(t_*)\tau - \dot{x}_2(t_*)\tau + h_1(t_*) - h_2(t_*) = 0.$$

По теореме 2.3.2 необходимое условие экстремума имеет вид

$$\tilde{f}'(x_1, x_2, t_*)(h_1, h_2, \tau) = 0, \quad \forall (h_1, h_2, \tau) \in \tilde{K}_{Q_1,(x_1,x_2,t_*)}.$$

Подставляя сюда явное выражение для производной $\tilde{f}'$, которое легко получается из результатов примера 8 пункта 1.3.3, имеем

$$\int_{t_0}^{t_*}[L_x h_1 + L_{\dot{x}}\dot{h}_1]dt + L(t_*, x_1(t_*), \dot{x}_1(t_*))\tau + \int_{t_*}^{t_1}[L_x h_2 + L_{\dot{x}}\dot{h}_2]dt-$$

$$-L(t_*, x_2(t_*), \dot{x}_2(t_*))\tau = 0, \quad \forall (h_1, h_2, \tau) \in K_{\tilde{Q}_1,(x_1,x_2,t_*)},$$

откуда интегрированием по частям находим, что

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[L_x - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}}\right] hdt + L_{\dot{x}}(t_*, x_1(t_*), \dot{x}_1(t_*))h_1(t_*) - L_{\dot{x}}(t_*, x_2(t_*), \dot{x}_2(t_*))h_2(t_*)+$$

$$+L(t_*, x_1(t_*), \dot{x}_1(t_*))\tau - L(t_*, x_2(t_*), \dot{x}_2(t_*))\tau = 0, \quad \forall (h_1, h_2, \tau) \in K_{\tilde{Q}_1,(x_1,x_2,t_*)};$$

(здесь $h(t)$ – функция, заданная на $[t_0, t_1]$, которая определяется функциями $h_1(t)$ и $h_2(t)$). Выбирая $h_i(t)$ такими, что $h_1(t_*) = h_2(t_*) = 0$, получаем по лемме 4.1.1, что $x_1(t)$ и $x_2(t)$ удовлетворяют уравнению Эйлера и значит, интеграл равен нулю, то есть

$$L_{\dot{x}}(t_*, x_1(t_*), \dot{x}_1(t_*))h_1(t_*) - L_{\dot{x}}(t_*, x_2(t_*), \dot{x}_2(t_*))h_2(t_*) + L(t_*, x_1(t_*), \dot{x}_1(t_*))\tau-$$

$$-L(t_*, x_2(t_*), \dot{x}_2(t_*))\tau = 0, \quad \forall (h_1, h_2, \tau) \in K_{Q,(x_1,x_2,t_*)}.$$

Из явного выражения для конуса допустимых направлений следует, что h_1, h_2 и τ связаны соотношением $h_2(t_*) = h_1(t_*) + \dot{x}_1(t_*)\tau - \dot{x}_2(t_*)\tau$, поэтому

$$[L_{\dot{x}}(t_*, x_1(t_*), \dot{x}_1(t_*)) - L_{\dot{x}}(t_*, x_2(t_*), \dot{x}_2(t_*))]h_1(t_*) - [L_{\dot{x}}(t_*, x_2(t_*), \dot{x}_2(t_*))\dot{x}_1(t_*)-$$

$$-L_{\dot{x}}(t_*, x_2(t_*), \dot{x}_2(t_*))\dot{x}_2(t_*) - L(t_*, x_1(t_*), \dot{x}_1(t_*)) + L(t_*, x_2(t_*), \dot{x}_2(t_*))]\tau = 0.$$

Так как здесь h_1 и τ независимы, отсюда получаются условия Вейерштрасса-Эрдмана. $\diamondsuit$

Пример. Рассмотрим следующую задачу

$$f(x) = \int_0^4 \dot{x}^2(\dot{x}^2 - 2)dt, \quad x(0) = 0, \ x(4) = 2.$$

Так как подынтегральная функция не зависит от t и x, экстремалями этого функционала будут прямые (следствие 4.1.1). Условия Вейерштрасса-Эрдмана в данном случае принимают вид

$$(\dot{x}^3 - \dot{x})|_{t_*-0} = (\dot{x}^3 - \dot{x})|_{t_*+0},$$

$$(2\dot{x}^2 - 3\dot{x}^4)|_{t_*-0} = (2\dot{x}^2 - 3\dot{x}^4)|_{t_*+0}.$$

Решая эти уравнения, находим, что $\dot{x}|_{t_*-0} = \pm 1$, $\dot{x}|_{t_*+0} = \mp 1$. Этому и краевым условиям удовлетворяет, например, экстремаль с одной угловой точкой $x(t) = t$, если $0 \le t \le 3$ и $x(t) = 6-t$, если $3 < t \le 4$. На этой экстремали функционал принимает минимальное значение $f(x) = -4$. Очевидно, на всех непрерывно дифференцируемых функциях, удовлетворяющих краевым условиям, $f(x) > -4$. $\diamondsuit$

Упражнения. 1) Найти экстремали в задаче

$f(x) = \int\limits_0^1 x^{-1}\sqrt{1+\dot{x}^2}dt, \quad x(0) = 1.$

2) Найти экстремали в задаче

$f(x) = \int\limits_0^x x^{-1}\sqrt{1+\dot{x}^2}dt, \quad x(0) = 1,$

если правый конец лежит на прямой $x = t - 5$.

3) Найти условия трансверсальности для функционала

$f(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} a(t,x)\sqrt{1+\dot{x}^2}dt.$

4) Получить теорему, аналогичную теореме 4.4.1, для функционала

$f(x,y) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t,x,y,\dot{x},\dot{y})dt.$

5) Могут ли существовать в задаче на экстремум

$f(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} (\dot{x}^4 - 6\dot{x}^2)dt, \quad x(t_0) = x_0, \ x(t_1) = x_1$

решения с угловой точкой?

§4.5. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ СЛАБОГО ЭКСТРЕМУМА ВТОРОГО ПОРЯДКА. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СЛАБОГО ЭКСТРЕМУМА ВТОРОГО ПОРЯДКА

4.5.1. Необходимые условия слабого экстремума второго порядка

Рассмотрим задачу об экстремуме функционала

$$f(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt$$

на подмножестве

$$Q = \{x(t) : x(t_0) = x_0, \ x(t_1) = x_1\}$$

банахова пространства $E = C^1(t_0, t_1)$.

Как было показано, если функция $x(t) \in C^2(t_0, t_1)$ дает экстремум функционалу f на подмножестве Q, то она удовлетворяет уравнению Эйлера, то есть является экстремалью. Это условие было получено с помощью первой производной функционала f и является необходимым условием первого порядка.

Необходимые условия экстремума второго порядка – это условия, использующие вторую производную функционала.

Докажем одно вспомогательное неравенство.

Лемма 4.5.1. Если $h(t)$ – непрерывно дифференцируемая на $[t', t'']$ функция, удовлетворяющая условию $h(t') = 0$, то

$$\int\limits_{t'}^{t''} h^2(t)dt \le \frac{(t' - t'')^2}{2} \int\limits_{t'}^{t''} \dot{h}^2 dt.$$

Доказательство. Так как

$$h(t) = \int\limits_{t'}^{t} \dot{h}(t)dt,$$

то, по неравенству Коши-Буняковского,

$$h^2(t) = \left(\int\limits_{t'}^{t} \dot{h}(t)dt \right)^2 \le \int\limits_{t'}^{t} dt \cdot \int\limits_{t'}^{t} \dot{h}^2(t)dt \le (t - t') \int\limits_{t'}^{t''} \dot{h}^2(t)dt,$$

откуда

$$\int\limits_{t'}^{t''} h^2(t)dt \le \int\limits_{t'}^{t''} (t - t')dt \cdot \int\limits_{t'}^{t''} \dot{h}^2(t)dt = \frac{(t'' - t')^2}{2} \cdot \int\limits_{t'}^{t''} \dot{h}^2(t)dt. \ \diamondsuit$$

Теорема 4.5.1. Если $L(t, x, \dot{x})$ – трижды непрерывно дифференцируемая функция, то для того, чтобы экстремаль $x(t)$ была точкой локального минимума функционала $f(x)$ на Q, необходимо, чтобы выполнялось условие Лежандра

$$L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \ge 0.$$

Доказательство. Так как $x(t)$ – экстремаль, то $f'(x)h = 0, \quad \forall h \in H$, где $H = \{h(t) : h(t_0) = 0, \ h(t_1) = 0\}$ – подпространство допустимых направлений для множества Q.

По теореме 2.3.5 для того чтобы $x(t)$ была точкой локального минимума, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$f''(x)(h, h) \ge 0, \quad \forall h \in H,$$

то есть, с учетом явного выражения для производной $f''(x)$, найденного в примере 3 из пункта 1.3.7,

$$\int_{t_0}^{t_1} [L_{xx}h^2 + 2L_{x\dot{x}}h\dot{h} + L_{\dot{x}\dot{x}}\dot{h}^2]dt \geq 0, \quad \forall h \in H.$$

Преобразуя интеграл с помощью интегрирования по частям, получаем, с учетом краевых условий для $h(t)$, что

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\left(L_{xx} - \frac{d}{dt} L_{x\dot{x}} \right) h^2 + L_{\dot{x}\dot{x}}\dot{h}^2 \right] dt \geq 0, \quad \forall h \in H.$$

Докажем, рассуждая от противного, что это возможно только тогда, когда $L_{\dot{x}\dot{x}} \geq 0$.

Допустим, что для некоторой точки $t_* \in (t_0, t_1)$

$$L_{\dot{x}\dot{x}}(t_*, x(t_*), \dot{x}(t_*)) = -\delta < 0,$$

тогда по непрерывности,

$$L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \leq -\frac{\delta}{2}$$

на некотором отрезке $[t_* - \varepsilon, t_* + \varepsilon]$.

Рассмотрим не равную тождественно нулю непрерывно дифференцируемую функцию $h(t)$, обращающуюся в нуль вне отрезка $[t_* - \varepsilon, t_* + \varepsilon]$, и оценим для нее интеграл с помощью леммы 4.5.1:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\left(L_{xx} - \frac{d}{dt} L_{x\dot{x}} \right) h^2 + L_{\dot{x}\dot{x}}\dot{h}^2 \right] dt \leq C \int_{t_*-\varepsilon}^{t_*+\varepsilon} h^2(t)dt -$$

$$-\frac{\delta}{2} \int_{t_*-\varepsilon}^{t_*+\varepsilon} \dot{h}^2(t)dt \leq \frac{4C\varepsilon^2 - \delta}{2} \int_{t_0}^{t_1} \dot{h}^2(t)dt.$$

Отсюда следует, что если ε достаточно мало, то интеграл отрицателен. Полученное противоречие доказывает теорему. $\diamondsuit$

Замечание. Очевидно, необходимое условие локального максимума второго порядка имеет вид

$$L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \leq 0. \diamondsuit$$

4.5.2. Достаточные условия слабого экстремума второго порядка

Полученные до сих пор необходимые условия локального экстремума интегрального функционала

$$f(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt \tag{1}$$

на подмножестве $Q = \{x(t) : x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1\}$, банахова пространства $E = C^1(t_0, t_1)$ были условиями слабого экстремума, а значит, как было отмечено в § 4.1, и сильного экстремума. Достаточные условия слабого экстремума, которые будут получены ниже, конечно, сильного экстремума уже не обеспечивают. Формулировка этих условий потребует введения некоторых новых понятий и определений.

В доказательстве предыдущей теоремы для второй производной функционала (1) было получено выражение

$$f''(x)(h,h) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(L_{xx}(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} L_{x\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \right) h^2 + \right.$$

$$\left. + L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \dot{h}^2 \right] dt. \tag{2}$$

Считая здесь функцию $x(t)$ фиксированной, это выражение можно рассматривать как некоторый интегральный квадратичный функционал $g(h)$ относительно $h(t)$.

Определение. Уравнение Эйлера для квадратичного интегрального функционала $g(h)$, которое имеет вид

$$\frac{d}{dt}[L_{\dot{x}\dot{x}}\dot{h}] - \left(L_{xx} - \frac{d}{dt} L_{x\dot{x}} \right) h = 0,$$

называется уравнением Якоби. $\diamondsuit$

Уравнение Якоби – это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $h(t)$; его коэффициенты зависят от функции $x(t)$. Уравнение Якоби можно получить также как уравнение в вариациях для некоторого решения (экстремали) уравнения Эйлера функционала $f(x)$.

Введем обозначения

$$a(t) = L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)),\ b(t) = L_{xx}(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} L_{x\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)). \tag{3}$$

Определение. Пусть $x(t)$ – экстремаль, на которой выполнено усиленное условие Лежандра

$$a(t) = L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) > 0.$$

Экстремаль $x(t)$ удовлетворяет на промежутке $[t_0, t_1]$ усиленному условию Якоби, если решение $h_0(t)$ уравнения Якоби

$$\frac{d}{dt}[a(t)\dot{h}] - b(t)h = 0, \tag{4}$$

отвечающее начальным условиям $h(t_0) = 0$, $\dot{h}(t_0) = 1$, не обращается в нуль на $(t_0, t_1]$. Если существует ненулевое решение уравнения Якоби, равное нулю в точках t_0 и t_*, то эти точки называются сопряженными. Таким образом, усиленное условие Якоби означает, что на промежутке $(t_0, t_1]$ нет точек, сопряженных к точке t_0. $\diamondsuit$

Отметим некоторые важные для дальнейшего свойства решений линейных уравнений второго порядка с отличным от нуля коэффициентом при старшей производной. Как известно из теории обыкновенных дифференциальных уравнений, общее решение такого уравнения является линейной комбинацией двух частных линейно независимых решений. Если два ненулевых решения линейно зависимы, то они имеют общие нули. Нули двух линейно независимых решений чередуются (теорема Штурма).

Лемма 4.5.2. Если выполнено усиленное условие Якоби, то для достаточно малых $\delta > 0$ уравнение

$$\frac{d}{dt}[(a(t) - \delta)\dot{h}] - b(t)h = 0, \tag{5}$$

имеет решение, не обращающееся в нуль на отрезке $[t_0, t_1]$.

Доказательство. Докажем сначала, что уравнение (4) имеет решение, не обращающееся в нуль на $[t_0, t_1]$.

Для этого рассмотрим решение $h_1(t)$ уравнения (4), отвечающее начальным условиям $h(t_0) = \varepsilon > 0$, $\dot{h}(t_0) = 1$. Так как решение $h_0(t)$ уравнения (4) из определения удовлетворяет условию $h_0(t) > 0$ для всех $t \in (t_0, t_1]$, и в частности, $h_0(t_1) > 0$, то, по теореме о непрерывной зависимости от начальных условий, $h_1(t_1) > 0$ для достаточно малого ε.

Решение $h_1(t)$ не может иметь нулей на $[t_0, t_1]$, так как в противном случае их было бы не меньше двух (поскольку $h_1(t_0) > 0$ и $h_1(t_1) > 0$) и значит, по теореме Штурма, между ними находился бы нуль решения $h_0(t)$, что противоречит условию. Поэтому $h_1(t) > 0$ на $[t_0, t_1]$.

Если δ достаточно мало, то коэффициент при старшей производной в уравнении (5) не обращается в нуль и следовательно можно пользоваться теоремой о непрерывной зависимости решений от параметров. Согласно этой теореме решение $h_1(t)$ уравнения (4) и удовлетворяющее тем же начальным условиям решение $\tilde{h}(t)$ уравнения (5) сколь угодно близки для достаточно малых δ и значит, выбором малого δ можно добиться того, чтобы $\tilde{h}(t) > 0$ на $[t_0, t_1]$. $\diamondsuit$

Теорема 4.5.2. Для того чтобы экстремаль $x(t)$ была точкой строгого локального минимума (слабого) функционала $f(x)$ на Q, достаточно, чтобы она удовлетворяла усиленному условию Лежандра и усиленному условию Якоби.

Доказательство. Так как множество Q – аффинное подпространство в E, то $Q = x(t) + H$, где $H = \{h(t) : \ h(t_0) = 0, \ h(t_1) = 0\}$.

Докажем, что для второй производной функционала $f(x)$ справедлива оценка

$$f''(x)(h,h) \geq \frac{\delta}{C+1}||h||^2_{W_2^1}, \quad \forall h \in H, \tag{6}$$

где $||h||_{W_2^1}$ – норма, индуцированная в $C^1(t_0, t_1)$ из пространства $W_2^1(t_0, t_1)$. Так как $||x||_{W_2^1} \leq C||x||_{C^1}$ и так как в силу примера 4) из пункта 1.3.6

$$\frac{\omega_2(x,h)}{||h||_{W_1^2}} \to 0,$$

если $||h||_{C^1} \to 0$, то по второй части теоремы 2.3.7 из неравенства (6) будет следовать утверждение теоремы.

Рассмотрим вспомогательный квадратичный функционал

$$I(h,h) = \int\limits_{t_0}^{t_1} [b(t)h^2(t) + (a(t) - \delta)\dot{h}^2(t)]dt,$$

определенный на $E = C^1(t_0, t_1)$.

Для любых функций $h(t) \in H$ и $u(t) \in E$ справедливо равенство

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} (2h\dot{h}u + h^2\dot{u})dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}(h^2u)dt = (h^2u)|_{t_0}^{t_1} = 0.$$

Поэтому $\forall h(t) \in H$

$$I(h,h) = \int\limits_{t_0}^{t_1} [(b(t) + \dot{u}(t))h^2(t) + 2h(t)\dot{h}(t)u(t) + (a(t) - \delta)\dot{h}^2(t)]dt.$$

Подберем функцию $u(t)$ так, чтобы выражение в квадратных скобках было полным квадратом. Для этого нужно, чтобы

$$u^2 = (a - \delta)(b + \dot{u}),$$

то есть функция u должна быть решением этого уравнения Риккати. Непосредственно проверяется, что подстановка

$$u = -\frac{(a-\delta)\dot{v}}{v},$$

сводит уравнение Риккати к линейному однородному уравнению второго порядка

$$\frac{d}{dt}[(a-\delta)\dot{v}] - bv = 0,$$

которое совпадает с уравнением (5). По лемме 4.5.2 существует не равное нулю на $[t_0, t_1]$ решение этого уравнения и значит, нужная функция u существует, если δ достаточно мало.

Поэтому, при таком выборе функции $u(t)$, для некоторого $\delta > 0$ справедливо неравенство

$$I(h,h) \geq 0, \quad \forall h \in H,$$

откуда, с учетом явного выражения (2) для второй производной функционала f и обозначений (3), получаем, что

$$f''(x)(h,h) \geq \delta \int\limits_{t_0}^{t_1} \dot{h}^2(t)dt, \quad \forall h \in H$$

Из леммы 4.5.1 следует, что

$$||h||^2_{W_2^1} = \int\limits_{t_0}^{t_1} (h^2(t) + \dot{h}^2(t))dt \leq (C+1) \int\limits_{t_0}^{t_1} \dot{h}^2(t)dt$$

и поэтому

$$f''(x)(h,h) \geq \frac{\delta}{C+1} ||h||^2_{W_2^1}, \quad \forall h \in H. \diamondsuit$$

Замечание. Для достаточного условия слабого локального максимума следует изменить знак в усиленном условии Лежандра на противоположный. $\diamondsuit$

Пример.

$$f(x) = \int\limits_0^1 \dot{x}^3 dt, \quad x(0) = 0, \; x(1) = 1.$$

Экстремали в этой задаче – прямые $x = C_1 t + C_2$ и, определяя C_1 и C_2 из краевых условий, получаем экстремаль $x = t$. Так как $L_{\dot{x}\dot{x}} = 6\dot{x}$, то на этой экстремали $L_{\dot{x}\dot{x}} = 6 > 0$, то есть на ней выполнено усиленное условие Лежандра. Так как уравнение Якоби здесь принимает вид $\ddot{h} = 0$, то его решением, удовлетворяющим начальным условиям $h(0) = 0$, $\dot{h}(0) = 1$ будет $h_0(t) = t$, то есть на нем нет сопряженных точек и следовательно, для экстремали $x = t$ выполнено усиленное условие Якоби и она является точкой слабого локального минимума в рассматриваемой задаче. $\diamondsuit$

Упражнения. Исследовать на слабый экстремум задачи:

1) $f(x) = \int\limits_1^3 \dot{x}(1 + t^2\dot{x})dt, \quad x(1) = 4, \ x(3) = 2.$

2) $f(x) = \int\limits_0^{\pi/2} (x^2 + \dot{x}^2 + 4x\sin t)dt, \quad x(0) = 0, \ x(\pi/2) = 1.$

3) $f(x) = \int\limits_1^2 (t^2\dot{x}^2 + 4x^2)dt, \quad x(1) = 4, \ x(3) = 2.$

§ 4.6. СИЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

4.6.1. Поле экстремалей

При выводе достаточных условий сильного экстремума приходится привлекать более сложные и более глубокие методы, чем общие положения главы 2.

Будем по-прежнему рассматривать задачу об экстремуме простейшего интегрального функционала

$$f(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt \tag{1}$$

с краевыми условиями $x(t_0) = x_0, \ x(t_1) = x_1$.

В силу необходимых условий экстремума (теорема 4.1.1), функцию $x(t)$, на которой достигается экстремум, следует искать среди экстремалей функционала $f(x)$, то есть среди решений уравнения Эйлера

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) - L_x(t, x, \dot{x}) = 0. \tag{2}$$

Общее решение уравнения Эйлера, которое является уравнением второго порядка, зависит от двух произвольных постоянных, и значит определяет двухпараметрическое семейство экстремалей.

Определение. Будем говорить, что в области Ω плоскости (t, x) задано поле экстремалей, если в этой области задано однопараметрическое семейство экстремалей $x = \varphi(t, C)$ такое, что через любую точку этой области проходит единственная экстремаль. $\diamondsuit$

Определение. Будем говорить, что в области Ω плоскости (t, x) задано центральное поле экстремалей, если в этой области задано однопараметрическое семейство экстремалей $x = \varphi(t, C)$ такое, что все экстремали этого семейства проходят через некоторую точку $A(t_0, x_0) \in \Omega$, а через любую другую точку этой области проходит единственная экстремаль.

Пример. Рассмотрим функционал

$$f(x) = \int_0^1 (\dot{x}^2 - x^2)dt.$$

Уравнением Эйлера для него будет уравнение

$$\ddot{x} + x = 0$$

с общим решение $x = C_1 \sin t + C_2 \cos t$.

Рассмотрим однопараметрическое семейство экстремалей $x = C_1 \sin t$. В области $\Omega_1 = \{(t, x) : \tau \leq t \leq \pi - \tau\}$, где $0 < \tau < \pi/2$, оно образует поле экстремалей; в области $\Omega_2 = \{(t, x) : -\tau \leq t \leq \pi - \tau\}$ оно образует центральное поле экстремалей, а в области $\Omega_3 = \{(t, x) : -\tau \leq t \leq \pi + \tau\}$ оно поля не образует (рис. 25). $\diamondsuit$

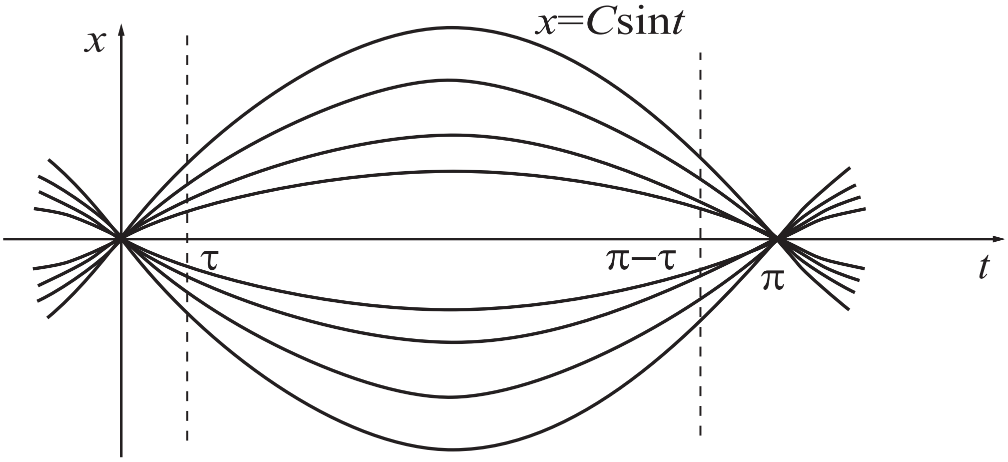

Рис 25.

Если некоторая экстремаль содержится в семействе $\varphi(t, C)$ (получается при некотором значении параметра C_0), то будем говорить, что эта экстремаль включена в соответствующее поле экстремалей.

Теорема 4.6.1. Если на экстремали $x(t)$ выполнены усиленное условие Лежандра

$$L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) > 0,$$

и усиленное условие Якоби, то есть на промежутке $[t_0, t_1]$ нет сопряженных точек уравнения Якоби

$$\frac{d}{dt}[L_{\dot{x}\dot{x}}\dot{h}] - \left(L_{xx} - \frac{d}{dt}L_{x\dot{x}}\right) h = 0, \tag{3}$$

то эту экстремаль можно включить в поле экстремалей.

Доказательство. 1) Докажем сначала, что экстремаль $x(t)$ можно включить в центральное поле экстремалей.

Пусть $x(t_0) = x_0,\ \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$. Рассмотрим решение уравнения Эйлера (2), удовлетворяющее начальным условиям $x(t_0) = x_0,\ \dot{x}(t_0) = C$. Обозначив это решение через $\varphi(t, C)$, получаем семейство экстремалей, зависящее от параметра C, причем экстремаль $x(t)$ входит в это семейство при значении $C_0 = \dot{x}_0$; все экстремали этого семейства проходят через точку (t_0, x_0).

Для доказательства теоремы достаточно доказать, что для значений C достаточно близких к C_0 экстремали семейства не пересекаются.

Функция $\varphi(t, C)$ обладает следующими свойствами:

1)$\varphi(t, C_0) = x(t)$,

2)$\varphi(t_0, C) = x(t_0) = x_0$, для любых С,

3)$\varphi'_t(t_0, C) = C$.

Из свойств 2) и 3) следует, что

$$\varphi(t, C) = x(t) + (t - t_0)\psi(t, C) \tag{4}$$

для некоторой функции ψ. Будем считать для простоты, что подынтегральная функция $L(t, x, \dot{x})$ трижды непрерывно дифференцируема, тогда трижды непрерывно дифференцируема функция $\varphi(t, C)$ как решение уравнения Эйлера, а функция $\psi(t, C)$ имеет непрерывные вторые производные.

Для функции $\psi(t, C)$ имеем

$$\psi(t, C_0) = 0,\ \varphi'_C(t, C) = (t - t_0)\psi'_C(t, C) \tag{5}$$

и поскольку

$$\left.\frac{\partial^2 \varphi}{\partial C \partial t}\right|_{t=t_0} = \left.\left(\frac{\partial \psi}{\partial C} + (t - t_0)\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial C \partial t}\right)\right|_{t=t_0} = \left.\frac{\partial \psi}{\partial C}\right|_{t=t_0},$$

то из 3) следует, что

$$\psi'_C(t_0, C) = 1. \tag{6}$$

Подставляя $\varphi(t, C)$ в уравнение Эйлера и дифференцируя по C получившееся тождество, находим, что функция $\varphi'_C(t, C)$ – решение уравнения Якоби с коэффициентами, зависящими от $\varphi(t, C)$, а значит, функция $h(t) = \varphi'_C(t, C_0)$ – решение уравнения Якоби для экстремали $x(t)$, то есть уравнения (3). Так как $h(t_0) = 0$ и на отрезке $[t_0, t_1]$ нет по условию точек, сопряженных с точкой t_0, то $h(t) \neq 0$ для $t \in (t_0, t_1]$, а поскольку по свойству 3) $\dot{h}(t_0) = 1$, то $h(t) > 0$, если $t \in (t_0, t_1]$.

Учитывая (5), получаем

$$h(t) = \varphi'_C(t, C_0) = (t - t_0)\psi'_C(t, C_0),$$

и вместе с (6) это означает, что $\psi'_C(t, C_0) > 0$ на всем отрезке $[t_0, t_1]$. По непрерывности $\psi'_C(t, C) > 0$ для $t \in [t_0, t_1]$ и $C \in [C_0 - \delta, C_0 + \delta]$, где $\delta > 0$ достаточно мало. Поэтому из (4) имеем:

$$\varphi(t, C) = x(t) + (t - t_0)(C - C_0)\psi'_C(t, C_0 + \theta(C - C_0)),$$

откуда сразу следует, что для C из указанной окрестности экстремали не пересекаются, а значит, экстремаль $x(t)$ включена в центральное поле экстремалей.

2) Докажем теперь, что $x(t)$ можно включить в поле экстремалей.

По теореме существования для обыкновенных дифференциальных уравнений можно считать, что экстремаль $x(t)$ определена на некотором отрезке $[t_0 - \delta, t_1]$.

По непрерывности усиленное условие Лежандра также выполняется на некотором отрезке $[t_0 - \delta, t_1]$.

Покажем, что для достаточно малого $\delta > 0$ на отрезке $[t_0 - \delta, t_1]$ будет выполняться и усиленное условие Якоби, то есть покажем, что для достаточно малого δ на этом отрезке нет сопряженных точек.

Рассуждая от противного, допустим, что существуют последовательности сопряженных точек $t_0^n < t_0$ и $t_1^n \in (t_0, t_1]$, причем $t_0^n \to t_0$ и $t_1^n \to \bar{t} \in (t_0, t_1]$ при $n \to \infty$.

Обозначим через $h(t, \tau)$ решение уравнения Якоби, удовлетворяющее начальным условиям $h(\tau) = 0$, $\dot{h}(\tau) = 1$; функция $h(t, \tau)$ непрерывно зависит от своих аргументов. По предположению, $h(t_0^n, t_1^n) = 0$ и, переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получаем, что $h(t_0, \bar{t}) = 0$, то есть t_0 и $\bar{t}$ – лежащие на $[t_0, t_1]$ сопряженные точки. Полученное противоречие доказывает, что на некотором отрезке $[t_0 - \delta, t_1]$ выполнено усиленное условие Якоби, а значит, для этого отрезка выполнены условия теоремы.

По первой части доказательства отсюда следует, что на отрезке $[t_0 - \delta, t_1]$ экстремаль $x(t)$ можно включить в центральное поле экстремалей, а значит, на отрезке $[t_0, t_1]$ ее можно включить в поле экстремалей (рис. 26). $\diamondsuit$

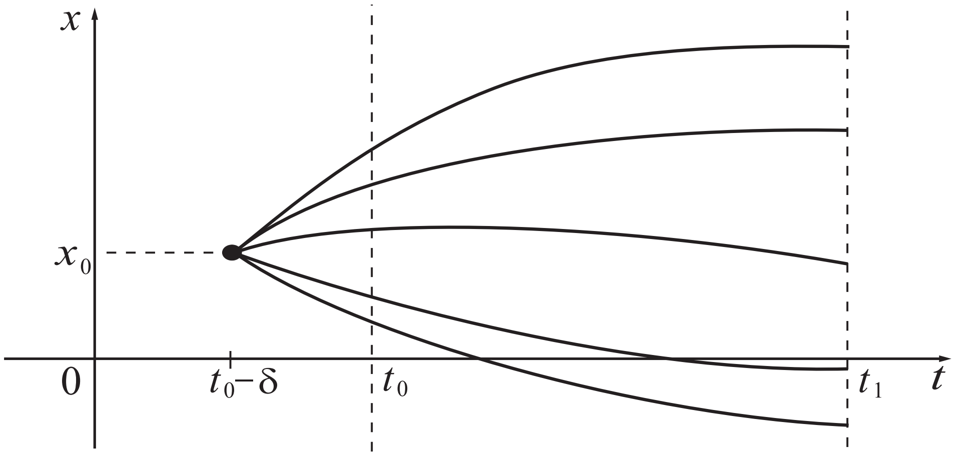

Рис 26.

4.6.2. Инвариантный интеграл Гильберта

Пусть в области Ω задано поле экстремалей $\varphi(t,C)$, то есть через каждую точку области проходит единственное решение уравнения Эйлера. Это определяет в каждой точке области число – угловой коэффициент касательной к экстремали и значит, таким образом в Ω задается некоторая функция $p(t,x)$. В явном виде эту функцию можно получить, исключая параметр C из уравнений $p=\varphi_t'(t,C)$ и $x=\varphi(t,C)$.

Рассмотрим интегральный функционал

$$\tilde{f}(x)=\int_{t_0}^{t_1}[L(t,x(t),p(t,x(t)))+(\dot{x}-p(t,x(t)))L_{\dot{x}}(t,x(t),p(t,x(t)))]dt, \qquad (7)$$

который называется инвариантным интегралом Гильберта.

Этот функционал обладает двумя замечательными свойствами.

Теорема 4.6.2. 1) На любой экстремали поля $\varphi(t,C)$ значения функционалов $f(x)$ и $\tilde{f}(x)$ совпадают, то есть

$$\tilde{f}(\varphi)=f(\varphi).$$

2) Функционал (7) принимает одно и то же значение для всех функций, графики которых лежат в Ω и которые удовлетворяют одним и тем же краевым условиям $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$, то есть значения интеграла $\tilde{f}(x)$ зависят только от начальной $(t_0,x(t_0))$ и конечной $(t_1,x(t_1))$ точек и не зависят от конкретного вида соединяющей их кривой $x=x(t)$.

Доказательство. 1) Если в качестве функции $x(t)$ в (7) взять какую-нибудь экстремаль семейства $x=\varphi(t,C)$, то на ней, по построению, $\dot{x}=$

$\varphi_t'(t, C) = p(t, \varphi(t, C))$ и значит, второй член в подынтегральном выражении обращается в нуль. Поэтому

$$\tilde{f}(\varphi) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \varphi(t), p(t, \varphi(t)))dt = f(\varphi).$$

то есть, на экстремалях, входящих в поле, значения функционалов $f(x)$ и $\tilde{f}(x)$ совпадают.

2) Запишем интеграл (7) в виде криволинейного по кривой $l : x = x(t)$.

$$\tilde{f}(x) = \int_l [L(t, x, p(t, x)) - p(t, x)L_{\dot{x}}(t, x, p(t, x))]dt + L_{\dot{x}}(t, x, p(t, x))dx.$$

Докажем, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом. Действительно, функция $\varphi(t, C)$ удовлетворяет уравнению Эйлера, то есть

$$L_x(t, \varphi(t, C), \varphi_t'(t, C)) - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t, \varphi(t, C), \varphi_t'(t, C)) = 0.$$

Вдоль каждой экстремали семейства $\varphi_t'(t, C) = p(t, \varphi(t, C))$, то есть

$$L_x(t, \varphi, p(t, \varphi)) - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t, \varphi, p(t, \varphi)) = 0,$$

или

$$L_x(t, \varphi, p(t, \varphi)) - L_{t\dot{x}}(t, \varphi, p(t, \varphi)) - L_{x\dot{x}}(t, \varphi, p(t, \varphi))\varphi_t -$$

$$-L_{\dot{x}\dot{x}}(t, \varphi, p(t, \varphi))(p_t + p_x\varphi_t) = 0,$$

Так как экстремали семейства заполняют всю область Ω, то отсюда следует, что

$$L_x(t, x, p(t, x)) - \frac{\partial}{\partial t}\{L_{\dot{x}}(t, x, p(t, x))\} - p\frac{\partial}{\partial x}\{L_{\dot{x}}(t, x, p(t, x))\} = 0,$$

(здесь $\partial/\partial t\{L_{\dot{x}}(t, x, p(t, x))\} = L_{t\dot{x}}(t, x, p(t, x)) + L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x, p(t, x))p_t$ и т.д.).

Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial x}\{L(t, x, p(t, x)) - p(t, x)L_{\dot{x}}(t, x, p(t, x))\} = \frac{\partial}{\partial t}\{L_{\dot{x}}(t, x, p(t, x))\},$$

но последнее равенство означает, что подынтегральное выражение в криволинейном интеграле является полным дифференциалом и, значит, этот интеграл не зависит от пути интегрирования, а зависит только от начальной и конечной точек пути интегрирования. $\diamondsuit$

Таким образом, интеграл (7), который можно представить в виде

$$\tilde{f}(x) = \int\limits_{(t_0,x_0)}^{(t_1,x_1)} (L - pL_{\dot{x}})dt + L_{\dot{x}}dx,$$

принимает одно и то же значение на любой лежащей в Ω кривой $x = x(t)$, соединяющей точки (t_0, x_0) и (t_1, x_1) (рис. 27).

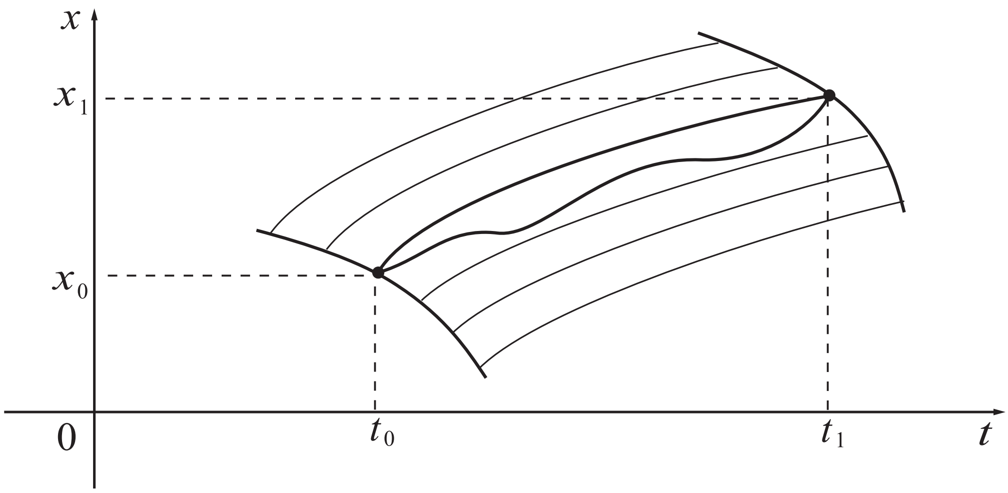

Рис 27.

4.6.3. Достаточные условия сильного экстремума

Рассмотрим задачу об экстремуме функционала

$$f(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt$$

на подмножестве $Q = \{x(t) : x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1\}$ функций из $C^1(t_0, t_1)$.

В задаче на сильный экстремум окрестность функции $x(t)$ определяется нормой из $C(t_0, t_1)$ (рис. 16).

Будем понимать под ε-трубкой экстремали $x(t)$ на плоскости (t, x) множество точек вида $U_\varepsilon = \{(t, x) : |x - x(t)| \le \varepsilon,\ t \in [t_0, t_1]\}$.

Определение. Функция

$$E(t, x, \dot{x}, p) = L(t, x, \dot{x}) - L(t, x, p) - (\dot{x} - p)L_{\dot{x}}(t, x, p)$$

называется функцией Вейерштрасса. $\diamondsuit$

Теорема 4.6.3. Для того чтобы экстремаль $x(t) \in Q$ была точкой сильного локального минимума функционала $f(x)$ на подмножестве Q, достаточно, чтобы на экстремали $x(t)$ выполнялись усиленное условие Лежандра и усиленное условие Якоби и чтобы для функции Вейерштрасса выполнялось условие

$$E(t, x, \dot{x}, p(t, x)) \geq 0$$

для (t, x) из некоторой ε-трубки U_ε экстремали $x(t)$ и для произвольных значений аргумента $\dot{x}$.

Доказательство. Так как на экстремали $x(t)$ выполнены усиленное условие Лежандра и усиленное условие Якоби, то по теореме 4.6.1 ее можно включить в поле экстремалей. Уменьшая если нужно ε, будем считать, что поле экстремалей определено в ε-трубке кривой $x = x(t)$.

Пусть $x = x_*(t)$ – любая другая кривая, лежащая в ε-трубке и имеющая те же начальную и конечную точки, что и экстремаль $x(t)$, то есть $x_*(t) \in Q$. Сравним значения f на x и x_*.

По теореме 4.6.2

$$f(x) = \tilde{f}(x) = \tilde{f}(x_*),$$

где $\tilde{f}$ – инвариантный интеграл Гильберта.

Поэтому

$$f(x_*) - f(x) = f(x_*) - \tilde{f}(x_*) = \int_{t_0}^{t_1} [L(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)) -$$

$$-L(t, x_*(t), p(t, x_*(t))) - (\dot{x}_*(t) - p(t, x_*(t))) L_{\dot{x}}(t, x_*(t), p(t, x_*(t)))] dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} E(t, x_*(t), \dot{x}_*(t), p(t, x_*(t))) dt \geq 0.$$

Таким образом,

$$f(x_*) \geq f(x)$$

для любой функции $x_*(t)$ такой, что $||x - x_*|| \leq \varepsilon$ и значит, $x(t)$ точка сильного минимума функционала $f(x)$ на Q. $\diamondsuit$

Замечание. Вместо проверки усиленного условия Якоби можно, как это следует из доказательства теоремы, ограничиться непосредственным построением поля экстремалей, включающего экстремаль $x(t)$. $\diamondsuit$

Условие, более простое для проверки, чем определение знака функции Вейерштрасса, дается в следующей теореме.

Теорема 4.6.4. Для того чтобы экстремаль $x(t) \in Q$ была точкой сильного локального минимума функционала $f(x)$ на подмножестве Q, достаточно, чтобы на экстремали $x(t)$ выполнялись усиленное условие Лежандра и усиленное условие Якоби и чтобы для (t,x) из некоторой ε-трубки U_ε экстремали $x(t)$ и для произвольных значений аргумента $\dot{x}$ выполнялось условие

$$L_{\dot{x}\dot{x}}(t,x,\dot{x}) \geq 0.$$

Доказательство. Раскладывая $L(t,x,\dot{x})$ по формуле Тейлора, имеем

$$L(t,x,\dot{x}) = L(t,x,p) + (\dot{x}-p)L_{\dot{x}}(t,x,p) + \frac{(\dot{x}-p)^2}{2!}L_{\dot{x}\dot{x}}(t,x,y),$$

где $y = p + \theta(\dot{x}-p),\ 0 < \theta < 1$. Отсюда

$$E(t,x,\dot{x},p) = L(t,x,\dot{x}) - L(t,x,p) - (\dot{x}-p)L_{\dot{x}}(t,x,p) =$$

$$= \frac{(\dot{x}-p)^2}{2!}L_{\dot{x}\dot{x}}(t,x,y) \geq 0$$

для $(t,x) \in U_\varepsilon$ и любых $\dot{x}$, то есть выполнены условия предыдущей теоремы, и, значит, экстремаль $x(t)$ – точка сильного локального экстремума $f(x)$ на Q. $\diamondsuit$

Примеры. 1) В задаче

$$f(x) = \int\limits_0^{\pi/2} [\dot{x}^2(t) - x^2(t)]dt, \quad x(0) = 0,\ x(\pi/2) = 1.$$

примера 2) из пункта 4.1.3 экстремум может достигаться только на экстремали $x = \sin t$. Уранение Якоби здесь $\ddot{h} + h = 0$ и на промежутке $[0, \pi/2]$ у него нет сопряженных точек. Так как $L_{\dot{x}\dot{x}} = 2 > 0$, то все условия теоремы 4.6.4 выполнены и, значит, на экстремали $x = \sin t$ достигается сильный минимум.

2) Рассмотрим функционал из задачи о брахистохроне (пример 4 из пункта 4.1.3)

$$f(y) = \int\limits_0^{x_0} \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{\sqrt{y(x)}}dx,$$

с краевыми условиями $y(0) = 0,\ y(x_0) = y_0$.

Как было показано, минимума в этой задаче функционал $f(y)$ может достигаться только на кривой

$$x = C(u - \sin u),\ y = C(1 - \cos u),$$

где C определяется из второго краевого условия. Экстремали здесь заданы параметрически и являются циклоидами.

Однопараметрическое семейство экстремалей, зависящее от параметра C, образует центральное поле, если $x_0 < 2\pi C$, и значит, исследуемая экстремаль может быть включена в поле экстремалей.

Так как

$$L_{y'y'}(x, y, y') = \frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)^3}} > 0$$

для любых y', то по теореме 4.6.4 и замечанию к теореме 4.6.3 отсюда следует, что рассматриваемая экстремаль дает функционалу $f(y)$ минимальное значение, то есть линией наискорейшего спуска действительно является циклоида.

Упражнения. Исследовать на сильный экстремум задачи:

1) $f(x) = \int\limits_1^3 \dot{x}(1 + t^2\dot{x})dt, \quad x(1) = 4, \ x(3) = 2.$

2) $f(x) = \int\limits_0^{\pi/2} (x^2 + \dot{x}^2 + 4x\sin t)dt, \quad x(0) = 0, \ x(\pi/2) = 1.$

3) $f(x) = \int\limits_1^2 (t^2\dot{x}^2 + 4x^2)dt, \quad x(1) = 4, \ x(3) = 2.$

4) $f(x) = \int\limits_0^{\pi/2} (x^2 + \dot{x}^2 + 4\sin t)dt, \quad x(0) = 0, \ x(\pi/2) = 1.$

§ 4.7. УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА. ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ

4.7.1. Преобразование Лежандра

Для случая функции одной переменной $f(x)$, которая предполагается дифференцируемой, преобразование Лежандра вводится на основе следующих геометрических соображений.

В каждой точке графика функции $y = f(x)$ определена касательная, то есть эта кривая задает некоторое семейство прямых; обратно, рассматриваемая кривая является огибающей этого семейства и, значит, определяется им (рис. 28).

Уравнение прямой

$$y = px - q$$

содержит два параметра p и q. Если эта прямая касается кривой $y = f(x)$ в точке $(x, f(x))$, то

$$p = f'(x), \ q = px - f(x).$$

Находя из первого уравнения зависимость $x = x(p)$, получаем, что

$$q = q(p) = px(p) - f(x(p)),$$

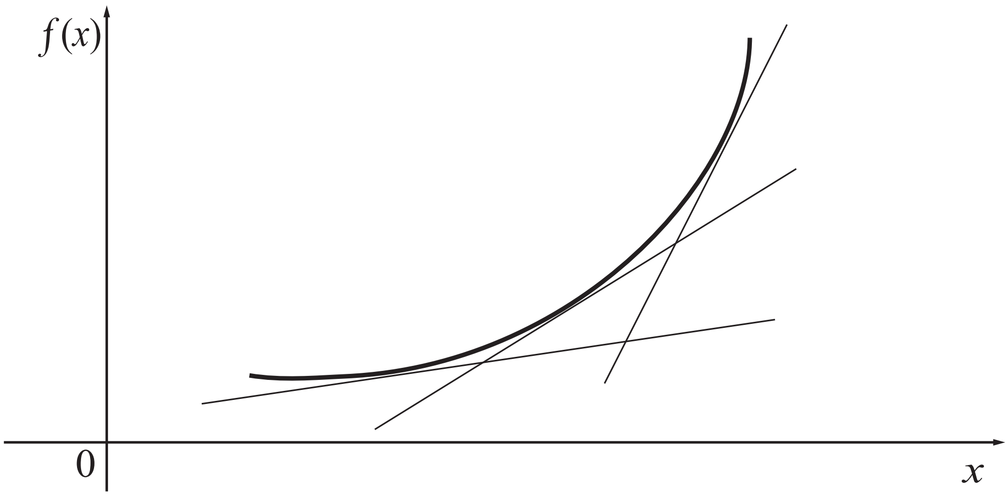

Рис 28.

то есть касательные к кривой $y = f(x)$ определяются одним параметром p и значит, образуют однопараметрическое семейство прямых.

Определение. Функция $q(p)$ (если она существует) называется преобразованием Лежандра функции $f(x)$; она определяет семейство касательных к кривой $y = f(x)$ и значит, саму эту кривую. $\diamondsuit$

Теорема 4.7.1. Преобразованием Лежандра от $q(p)$ является $f(x)$.

Доказательство. Найдем преобразование Лежандра от функции $q(p)$, обозначив его через $r(z)$.

По определению,

$$r(z) = pz - q(p),\ z = q'(p).$$

Так как

$$q'(p) = [px(p) - f(x(p))]' = x + px' - f'(x)x' = x,$$

то

$$z = x,\ r(x) = px - q(p) = f(x),$$

то есть $f(x)$ – преобразование Лежандра функции $q(p)$. $\diamondsuit$

Таким образом функции $f(x)$ и $q(p)$ являются преобразованиями Лежандра друг для друга, и формулы связи между ними имеют вид

$$p = f'(x),\ q(p) + f(x) = px,\ x = q'(p).$$

Примеры. 1) $f(x) = x^2$, тогда $p = 2x$, $x = p/2$ и $q(p) = px - x^2 = p^2/4$.

2) $f(x) = x^\alpha/\alpha$, где $\alpha > 1$, тогда $q(p) = p^\beta/\beta$, где $1/\alpha + 1/\beta = 1$ $\diamondsuit$.

Аналогично определяется преобразование Лежандра в многомерном случае. Если задана функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, ..., x_n)$, то ее преобразованием Лежандра называется функция $q(\mathbf{p}) = q(p_1, ..., p_n)$, определяемая формулами

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i},\quad q(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i - f(\mathbf{x}).$$

Снова непосредственно проверяется, что преобразованием Лежандра функции $q(\mathbf{p})$ является $f(\mathbf{x})$, то есть

$$x_i = \frac{\partial q}{\partial p_i}, \quad f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i - q(\mathbf{p}).$$

Так же, как и в одномерном случае функции $f(\mathbf{x})$ и $q(\mathbf{p})$ отвечают двум возможным способам задания поверхности $y = f(x_1, ..., x_n)$ в R^{n+1}: непосредственно как множества точек вида $(x_1, ...x_n, f(x_1, ..., x_n))$ или как огибающей поверхности n-параметрического семейства плоскостей $y = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i - q(p_1, ..., p_n)$.

4.7.2. Уравнения Гамильтона

Рассмотрим задачу об экстремуме функционала

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, ..., x_n) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x_1(t), ..., x_n(t), \dot{x}_1(t), ..., \dot{x}_n(t))dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} L(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))dt$$

на множестве Q непрерывно дифференцируемых вектор-функций $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$, удовлетворяющих краевым условиям $x_i(t_0) = x_{i0}$, $x_i(t_1) = x_{i1}$.

По теореме 4.2.1, если вектор-функция $\mathbf{x}(t)$ – точка локального экстремума функционала $f(\mathbf{x})$ на множестве Q, то $\mathbf{x}(t)$ – экстремаль, то есть функции $x_1(t), ..., x_n(t)$ удовлетворяют системе

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{x}_i}(t, x(t), \dot{x}(t)) - L_{x_i}(t, x(t), \dot{x}_i(t)) = 0, \quad i = 1, ..., n.$$

Обозначим через $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ преобразование Лежандра функции $L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ по аргументу $\dot{\mathbf{x}}$, то есть

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}, \quad H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i p_i - L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}), \quad \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Функция $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ называется функцией Гамильтона, или гамильтонианом.

С помощью функции $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ уравнения Эйлера можно свести к более симметричной системе уравнений, которая называется гамильтоновой или канонической системой.

Теорема 4.7.1. Если преобразование Лежандра $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ существует, то для того, чтобы вектор-функция $\mathbf{x}(t)$ была экстремалью, необходимо и достаточно, чтобы пара вектор-функций $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{p}(t)$ удовлетворяла системе уравнений Гамильтона

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \; i = 1, ..., n.$$

Доказательство. Так как $\mathbf{x}(t)$ удовлетворяет системе уравнений Эйлера, то

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

Уравнения

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

удовлетворяются в силу определения преобразования Лежандра.

Аналогично доказывается обратное утверждение. $\diamondsuit$

4.7.3. Вариационные принципы механики

Рассмотрим движение системы n материальных точек в потенциальном поле.

Пусть m_i – масса i-ой точки, x_i, y_i, z_i – ее координаты, $U(t, x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n)$ – потенциал сил.

Согласно второму закону Ньютона, уравнения движения системы имеют вид:

$$m_i\ddot{x}_i - \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0, \; m_i\ddot{y}_i - \frac{\partial U}{\partial y_i} = 0, \; m_i\ddot{z}_i - \frac{\partial U}{\partial z_i} = 0, \; i = 1, ..., n.$$

Введем кинетическую энергию

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$

и функцию Лагранжа

$$L = T - U.$$

С помошью функции Лагранжа уравнения движения могут быть записаны следующим образом:

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{x}_i} - L_{x_i} = 0, \; \frac{d}{dt}L_{\dot{y}_i} - L_{y_i} = 0, \; \frac{d}{dt}L_{\dot{z}_i} - L_{z_i} = 0, \; i = 1, ..., n.$$

Легко видеть, что эти уравнения являются уравнениями Эйлера для функционала

$$J = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(x_1(t), ..., z_n(t), \dot{x}_1(t), ..., \dot{z}_n(t))dt,$$

откуда вытекает следующий результат.

Принцип наименьшего действия Гамильтона

Вектор-функция $x_1(t), y_1(t), ..., z_n(t)$, описывающая движение рассматриваемой механической системы, является экстремалью функционала J. $\diamondsuit$

Во многих случаях эта вектор-функция является не только экстремалью, но и дает минимум функционалу J.

В механике принцип Гамильтона часто берут в качестве основополагающего и выводят из него уравнения движения.

Рассмотрим в качестве примера более общую ситуацию, чем предыдущая, считая, что на систему наложены голономные связи, то есть связи вида

$$\varphi_k(x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n) = 0, \quad k = 1, ..., m$$

и получим с помощью принципа Гамильтона уравнения движения.

Из уравнений связи, при некоторых естественных предположениях, m переменных можно выразить через остальные $3n - m$, являющиеся уже независимыми, либо ввести новые независимые координаты $q_1, ..., q_{3n-m}$ (уже не обязательно декартовы), через которые будут выражаться старые декартовы координаты. Координаты $q_1, ..., q_{3n-m}$ называются обобщенными, $N = 3n - m$ – числом степеней свободы.

Теперь функционал J определен на вектор-функциях $\mathbf{q}(t) = (q_1(t), ..., q_N(t))$:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, q_1(t), ..., q_N(t), \dot{q}_1(t), ..., \dot{q}_N(t))dt.$$

Согласно принципу Гамильтона, вектор-функция $\mathbf{q}(t)$, описывающая движение системы, должна быть экстремалью функционала $J(\mathbf{q})$, то есть удовлетворять уравнениям Эйлера

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{q}_i} - L_{q_i} = 0, \quad i = 1, ..., N,$$

которые и являются уравнениями движения голономной системы и называются в этом случае уравнениями Лагранжа.

Если ввести преобразование Лежандра функции $L(t, q_1, ..., q_N, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_N)$, то есть функцию Гамильтона

$$H(t, q_1, ..., q_N, p_1, ..., p_N) = \sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i p_i - L(t, q_1, ..., q_N, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_N),$$

где $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$, $i = 1, ..., N$ – обобщенные импульсы, то уравнения движения можно записать в форме канонических или гамильтоновых уравнений:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, ..., N.$$

В свою очередь, канонические уравнения можно получить как уравнения Эйлера некоторого функционала. Введем для этого функцию

$$L^*(t, q_1, ..., q_N, p_1, ..., p_N, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_N, \dot{p}_1, ..., \dot{p}_N) = \sum_{i=1}^{N} p_i \dot{q}_i - H(t, q_1, ..., q_N, p_1, ...p_N).$$

Так как

$$\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_i} = p_i, \quad \frac{\partial L^*}{\partial \dot{p}_i} = 0, \quad \frac{\partial L^*}{\partial q_i} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial L^*}{\partial p_i} = \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

то канонические уравнения можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L^*}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{p}_i} - \frac{\partial L^*}{\partial p_i} = 0, \quad i = 1, ..., N.$$

Эти уравнения являются уравнениями Эйлера для функционала

$$J^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \int_{t_0}^{t_1} L^*(t, q_1, ..., q_N, p_1, ..., p_N, \dot{q}_1, ...\dot{q}_N, \dot{p}_1, ..., \dot{p}_N) dt,$$

то есть решения канонической системы – это экстремали функционала $J^*(\mathbf{q}, \mathbf{p})$.

Это дает новую форму вариационного принципа Гамильтона.

§ 4.8. МЕТОД РИТЦА

Решения уравнений Эйлера, к которым сводятся необходимые условия минимума в вариационных задачах, удается найти в конечном виде лишь в редких случаях.

Поэтому большое значение имеют различные приближенные методы решения таких задач, каждый из которых сводится к построению каким-либо образом минимизирующей последовательности.

Одним из таких методов является метод Ритца, который будет описан на двух простых примерах.

1) Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$f(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t)\dot{x}(t))dt$$

при краевых условиях $x(t_0) = 0$, $x(t_1) = 0$.

Будем считать, что функционал $f(x)$ определен и минимизируется на банаховом пространстве $C_0^1(t_0, t_1)$ непрерывно дифференцируемых на $[t_0, t_1]$ функций, обращающихся в нуль на концах отрезка.

Пусть $h_1(t), ..., h_n(t), ...$ – система функций, полная в $C_0^1(t_0, t_1)$, то есть такая система функций, удовлетворяющих нулевым краевым условиям, всевозможные линейные комбинации которых образуют всюду плотное в $C_0^1(t_0, t_1)$ множество.

Будем строить минимизирующую последовательность следующим образом:

$x_1(t) = c_{11}h_1(t)$,

$x_2(t) = c_{21}h_1(t) + c_{22}h_2(t)$,

. . . .

$x_n(t) = c_{n1}h_1(t) + ... + c_{nn}h_n(t)$,

. . . .

Коэффициенты c_{n1} на n-м шаге выбираются из условия минимума величины $f(x_n)$, то есть из условия минимума функции n переменных

$$l_n(c_{n1}, ..., c_{nn}) = \int_{t_0}^{t_1} L\left(t, \sum_{i=1}^{n} c_{ni}h_i(t), \sum_{i=1}^{n} c_{ni}\dot{h}_i(t)\right) dt.$$

Таким образом, на каждом шаге в методе Ритца приходится решать задачу о минимуме функции нескольких переменных.

При определенных предположениях о подынтегральной функции $L(t, x, \dot{x})$ удается показать, что построенная таким образом последовательность функций $x_1(t)$, $x_2(t), ...$ является минимизирующей и что она сходится к функции $x(t)$, на которой этот минимум достигается функционалом.

2) Для того чтобы решить методом Ритца задачу из примера пункта 4.2.3, то есть задачу о минимуме функционала

$$\iint_{\Omega} [u_x^2 + u_y^2] dxdy$$

с краевым условием $u(x,y)|_S = \varphi(x,y)$, выберем некоторую функцию $\bar{u}(x,y)$, удовлетворяющую краевому условию и полную систему функций $h_1(x,y), ...,$ $h_n(x,y), ...$ в банаховом пространстве $C_0^1(\Omega)$ непрерывно дифференцируемых функций, равных нулю на границе S.

Минимизирующая последовательность снова строится в виде

$u_1(x,y) = c_{11}h_1(x,y) + \bar{u}(x,y),$

. . . .

$u_n(x,y) = c_{n1}h_1(x,y) + ... + c_{nn}h_n(x,y) + \bar{u}(x,y),$

. . . .

где коэффициенты c_{ni} выбираются из условия минимума функции n переменных

$$l_n(c_{n1}, ..., c_{nn}) = f(u_n) = \iint\limits_{\Omega} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} c_{ni} \frac{\partial h_i}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} c_{ni} \frac{\partial h_i}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy.$$

Необходимые условия минимума

$$\frac{\partial l_n}{\partial c_{ni}} = 0, \quad i = 1, ..., n.$$

для функции l_n сводятся в этом случае к системе линейных алгебраических уравнений, из которых и определяются c_{ni}.

Упражнения. 1) В задаче на минимум

$$f(x) = \int\limits_0^1 (\dot{x}^2 - x^2 + 2tx)dt, \quad x(0) = 0, \; x(1) = 0$$

построить приближенное решение, положив $x = t(1-t)(c_0 + c_1 t)$.

2) В задаче на экстремум функционала

$$f(u) = \iint\limits_{\Omega} [u_x^2 + u_y^2 - 2u] dxdy$$

на функциях, обращающихся в нуль на границе области Ω, которая является квадратом $|x| \le 1, \; |y| \le 1$, построить приближенное решение, положив $u = c(x^2-1)(y^2-1)$.

Глава 5. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

§ 5.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

5.1.1. Управляемый объект

Пусть задан некоторый объект. Это может быть механическая система, электрическая система, химический процесс и так далее.

Будем считать, что состояние этого объекта в любой фиксированный момент времени можно определить n числовыми параметрами $x_1, ..., x_n$, которые называются фазовыми координатами. Каждому состоянию объекта можно, таким образом, поставить в соответствие точку $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ в n-мерном пространстве R^n, которое называется фазовым пространством (если $n = 2$, то фазовой плоскостью).

Так как состояние объекта со временем меняется, фазовые координаты являются функциями времени $x_1(t), ..., x_n(t)$, то есть изменение состояния объекта со временем описывается вектор-функцией $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$. В фазовом пространстве этой функции $\mathbf{x}(t)$ отвечает некоторая кривая, которая называется фазовой траекторией.

Будем считать, что состоянием объекта можно управлять с помощью параметров $u_1(t), ..., u_m(t)$, закон изменения во времени которых может выбираться, вообще говоря, произвольным образом. Вектор-функцию $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), ..., u_m(t))$ будем называть управлением.

Будем предполагать в дальнейшем, что закон изменения состояния объекта во времени описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{x}_1(t) = F_1(t, x_1(t), ..., x_n(t), u_1(t), ..., u_m(t)),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dot{x}_n(t) = F_n(t, x_1(t), ..., x_n(t), u_1(t), ..., u_m(t)),$$

которую, используя векторные обозначения, можно переписать также в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)). \tag{1}$$

Будем считать, что если задано управление $\mathbf{u}(t)$ и начальное состояние объекта $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, то функция $\mathbf{x}(t)$, описывающая поведение объекта, определяется однозначно как решение соответствующей задачи Коши для системы (1). Будем предполагать, что каждое такое решение определено на отрезке $[t_0, t_1]$.

Поскольку разным управлениям $\mathbf{u}(t)$ отвечают различные функции $\mathbf{x}(t)$ (при фиксированной начальной точке $\mathbf{x}_0$), то возникает задача о выборе управления, обеспечивающего оптимальное в некотором смысле поведение объекта. Это условие оптимальности, как правило, сводится к тому, чтобы некоторый функционал, определенный на паре функций $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ (а зависящий, по существу, только от $\mathbf{u}(t)$), достигал минимума.

В зависимости от вида минимизируемого функционала возникают различные задачи оптимального управления.

1) Если минимизируется интегральный функционал

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x_1(t), ..., x_n(t), u_1(t), ..., u_m(t))dt,$$

то задача называется задачей Лагранжа.

2) Если необходимо минимизировать терминальный функционал, то есть функционал вида

$$f(\mathbf{x}) = M(t_1, \mathbf{x}(t_1)) = M(t_1, x_1(t_1), ..., x_n(t_1)),$$

то задача называется задачей Майера.

3) Наконец, если в задаче минимизируется смешанный функционал

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))dt + M(t_1, \mathbf{x}(t_1)),$$

то задача называется задачей Больца.

Эта классификация задач во многом условна, так как, например, если задана задача Лагранжа, то, вводя новую фазовую переменную x_{n+1} и добавляя к системе (1) еще одно уравнение

$$\dot{x}_{n+1} = L(t, x_1(t), ..., x_n(t), u_1(t), ..., u_m(t)),$$

и дополнительное начальное условие $x_{n+1}(0) = 0$, исходную задачу можно свести к задаче Майера с функционалом

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = x_{n+1}(t_1).$$

Наоборот, функционал из задачи Майера можно представить в виде

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = M(t_1, \mathbf{x}(t_1)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} M(t, \mathbf{x}(t))dt + M(t_0, \mathbf{x}(t_0)) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} [M_t + (\mathbf{M_x}, \mathbf{F})]dt + \text{const},$$

то есть задача Майера может быть записана в виде задачи Лагранжа и так далее.

На управляемый объект могут накладываться различные дополнительные ограничения, простейшим из которых является, например, требование, чтобы в конечный момент времени t_1 объект приходил в заданное состояние, то есть чтобы выполнялось условие $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$. В этом случае задача называется задачей с закрепленным правым концом; если же такое условие отсутствует, то задача называется задачей со свободным правым концом.

В общем случае на правом конце задаются $k \leq n$ условий вида $\Gamma_i(\mathbf{x}(t_1)) = \Gamma_i(x_1(t_1), ..., x_n(t_1)) = 0$, $i = 1, ..., k$, где $\Gamma_i : R^n \to R^1$. Добавляя сюда, если нужно, уравнения вида $0 = 0$, можно всегда считать, что $n = k$. Полагая $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}) = (\Gamma_1(\mathbf{x}), ..., \Gamma_n(\mathbf{x}))$, то есть определив отображение $\mathbf{\Gamma} : R^n \to R^n$, условие на правом конце можно записать в виде одного уравнения $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}(t_1)) = 0$. Если $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_1$, то правый конец закреплен, если $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}) \equiv 0$, то правый конец свободен.

Наконец, момент времени t_1 может быть как фиксированным (задача с закрепленным временем), так и свободным (задача со свободным временем – момент времени t_1 определяется в ходе решения задачи).

Простейшим примером задачи со свободным временем является задача оптимального быстродействия: найти управление $\mathbf{u}(t)$, переводящее объект из начального состояния $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ в конечное $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$ за минимальное время $T = t_1 - t_0$.

5.1.2. Допустимые управления

Характерной особенностью задач оптимального управления является то, что параметры u_i обычно не могут принимать произвольные значения и должны удовлетворять некоторым ограничениям.

Необходимость этих ограничений становится очевидной, если учесть, что в реальных задачах ресурсы управления конечны (мощность двигателей ограничена, углы поворота рулей не могут превосходить каких-то крайних значений и так далее). Поэтому, как правило, в задачах оптимального управления присутствует ограничение вида $\mathbf{u} \in \Omega \subset R^m$.

В этом случае, в отличие от решений большинства задач вариационного исчисления, которые являются обычно гладкими, оптимальные управления приходится искать в классах разрывных функций.

Допуская в качестве управлений разрывные функции, будем считать, что управления $\mathbf{u}(t)$ – это кусочно-непрерывные функции, имеющие конечное число точек разрыва первого рода (рис. 29).

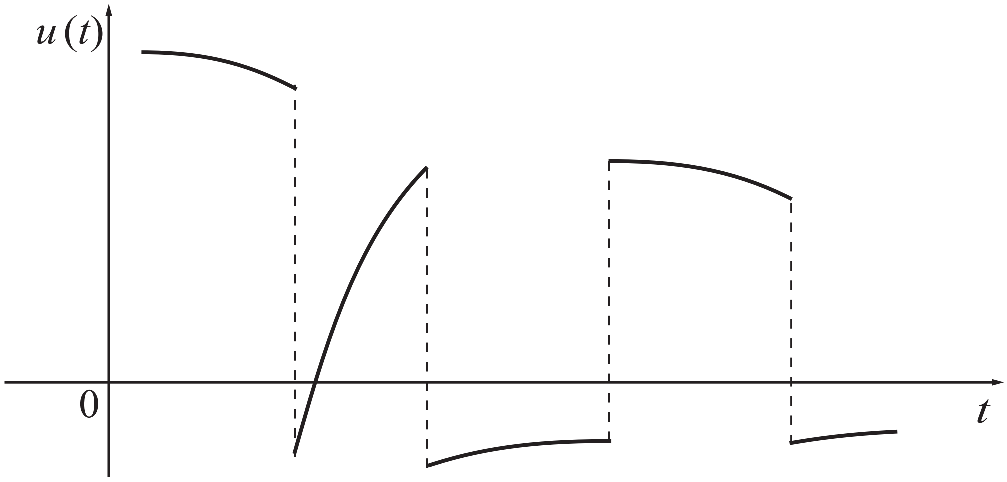

Рис 29.

Примем, что в точках разрыва встречающиеся дальше кусочно-непре- рывные функции непрерывны либо слева, либо справа.

Будем считать, наконец, что управления $\mathbf{u}(t)$ принимают значения в некотором подмножестве $\Omega \subset R^m$, то есть $\mathbf{u}(t) \in \Omega$ для всех $t \in [t_0, t_1]$, и будем называть такие управления допустимыми.

Относительно Ω, которое обычно называют областью управления, будем предполагать, что это замкнутое, выпуклое множество.

Поскольку управления дальше считаются кусочно-непрерывными, необходимо уточнить понятие решения системы дифференциальных уравнений (1).

Решением системы вида

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t)),$$

где вектор-функция $\mathbf{F}(t, \mathbf{x})$ кусочно-непрерывна по t и непрерывна по $\mathbf{x}$, называется такая дифференцируемая всюду, кроме точек разрыва функции $\mathbf{F}(t, \mathbf{x})$ вектор-функция $\mathbf{x}(t)$, которая удовлетворяет уравнению во всех точках непрерывности.

Пусть на промежутке $[t_0, t_1]$ точками разрыва функции $\mathbf{F}(t, \mathbf{x})$ являются точки $\tau_1, ..., \tau_r$. Для $t \in [t_0, \tau_1]$ правые части системы можно считать непрерывными, и если для них дополнительно выполняется условие Липшица по $\mathbf{x}$, то решение $\mathbf{x}(t)$, удовлетворяющее начальному условию $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, существует и единственно. Будем считать, что это решение можно продолжить на весь отрезок $[t_0, \tau_1]$, тогда, взяв за начальную точку точку $(\tau_1, \mathbf{x}(\tau_1))$, можно построить решение этой задачи Коши на некотором промежутке. Будем предполагать снова, что это решение можно продолжить на весь отрезок $[\tau_1, \tau_2]$, после чего в качестве начальной точки берется точка $(\tau_2, \mathbf{x}(\tau_2))$ и так далее. Этот процесс позволяет построить решение задачи Коши с разрывной правой частью на всем отрезке $[t_0, t_1]$.

§ 5.2. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ. СИСТЕМА В ВАРИАЦИЯХ

5.2.1. Фундаментальная матрица

Если дана система линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\dot{x}_1(t) = a_{11}(t)x_1 + ... + a_{1n}(t)x_n,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}(t)x_1 + ... + a_{nn}(t)x_n,\end{gathered}$$

то, вводя вектор-функцию $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ и матрицу

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

эту систему можно записать в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}. \tag{1}$$

Свяжем с системой (1) дифференциально-матричное уравнение

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t), \tag{2}$$

где

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{X}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_{11}(t) & \dots & \dot{x}_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{x}_{n1}(t) & \dots & \dot{x}_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

и зададим для матрицы $\mathbf{X}(t)$ начальное условие

$$\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0. \tag{3}$$

Теорема 5.2.1. Если коэффициенты системы $a_{ij}(t)$ определены и непрерывны для $t \in [t_0, t_1]$, то на этом отрезке решение задачи Коши (2)-(3) существует и единственно.

Доказательство. Матрица $\mathbf{X}(t)$ является решением уравнения (2) если ее элементы удовлетворяют системе из n^2 уравнений

$$\dot{x}_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)x_{kj}(t), \quad i, j = 1, ..., n,$$

которая распадается на n независимых систем вида

$$\dot{x}_{1j}(t) = a_{11}(t)x_{1j} + ... + a_{1n}(t)x_{nj},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dot{x}_{nj}(t) = a_{n1}(t)x_{1j} + ... + a_{nn}(t)x_{nj}.$$

Очевидно, каждая из этих систем совпадает с системой (1), а решение $(x_{1j}(t), ..., x_{nj}(t))$ состоит из элементов j-го столбца матрицы $\mathbf{X}(t)$.

Таким образом, матрица $\mathbf{X}(t)$ является решением уравнения (2) тогда и только тогда, когда ее столбцы образованы решениями системы (1).

Поскольку начальное условие (3) распадается на n начальных условий для каждого из столбцов, то по теореме существования и единственности решения задачи Коши для линейной системы, решение задачи (2)-(3) существует и единственно. $\diamondsuit$

Определение. Фундаментальной матрицей системы (1) называется любое решение задачи (2)-(3), отвечающее невырожденной начальной матрице $\mathbf{X}_0$. $\diamondsuit$

Теорема 5.2.2. Фундаментальная матрица $\mathbf{X}(t)$ невырожденна для любого t.

Доказательство. Определим матрицу $\mathbf{Y}(t)$ как решение следующей задачи Коши:

$$\dot{\mathbf{Y}}(t) = -\mathbf{Y}(t)\mathbf{A}(t), \quad \mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{X}_0^{-1}.$$

Рассуждая так же, как при доказательстве предыдущей теоремы, можно показать, что решение этой задачи существует и единственно.

Рассмотрим матрицу $\mathbf{Y}(t)\mathbf{X}(t)$. Так как

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{Y}(t)\mathbf{X}(t)) = \frac{d\mathbf{Y}(t)}{dt}\mathbf{X}(t) + \mathbf{Y}(t)\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = -\mathbf{Y}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t)+$$
$$+\mathbf{Y}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) = 0,$$

то $\mathbf{Y}(t)\mathbf{X}(t) = \mathbf{C}$, где $\mathbf{C}$ – постоянная матрица. Полагая $t = t_0$, получаем, что $\mathbf{C} = \mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ – единичная матрица, и значит, $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}^{-1}(t)$. $\diamondsuit$

Следствие 5.2.1. Линейная система (1) имеет систему из n линейно независимых решений (фундаментальную систему решений).

Доказательство. Фундаментальная матрица невырождена, и следовательно, ее столбцы образуют систему линейно независимых решений.$\diamondsuit$

Замечание. Очевидно, если $\mathbf{X}(t)$ – фундаментальная матрица, а $\mathbf{C}$ – произвольная невырожденная матрица, то матрица $\mathbf{X}(t)\mathbf{C}$ – тоже фундаментальная.$\diamondsuit$

Определение. Фундаментальная матрица $\mathbf{X}(t)$ называется нормированной при $t = t_0$, если $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{I}$.$\diamondsuit$

По произвольной фундаментальной матрице легко построить нормированную: достаточно взять матрицу $\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(t_0)$.

5.2.2. Представление решений

Теорема 5.2.3. Решение задачи Коши

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

дается формулой

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0,$$

где $\mathbf{X}(t)$ – произвольная фундаментальная матрица.

Доказательство. Так как $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{X}(t_0)\mathbf{X}^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$, то $\mathbf{x}(t)$ удовлетворяет начальному условию. Кроме того,

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt}\mathbf{X}^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t),$$

то есть $\mathbf{x}(t)$ удовлетворяет и системе. $\diamondsuit$

Определение. Если дана матрица

$$\mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} b_{11}(t) & \dots & b_{1r}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}(t) & \dots & b_{nr}(t) \end{pmatrix},$$

то положим

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \mathbf{B}(t)dt = \begin{pmatrix} \int\limits_{t_0}^{t_1} b_{11}(t)dt & \dots & \int\limits_{t_0}^{t_1} b_{1r}(t)dt \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int\limits_{t_0}^{t_1} b_{n1}(t)dt & \dots & \int\limits_{t_0}^{t_1} b_{nr}(t)dt \end{pmatrix}. \diamondsuit$$

Теорема 5.2.4. Если $\mathbf{A}(t)$ – непрерывна, а $\mathbf{F}(t)$ – кусочно-непрерывна, то решение задачи Коши

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{F}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{4}$$

дается формулой

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(\tau)\mathbf{F}(\tau)d\tau.$$

Доказательство. Применяя метод вариации произвольных постоянных, будем искать решение в виде:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{c}(t).$$

Подставляя это выражение в систему, получаем

$$\dot{\mathbf{X}}(t)\mathbf{c}(t) + \mathbf{X}(t)\dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t)\mathbf{c}(t) + \mathbf{F}(t),$$

откуда, поскольку $\mathbf{X}(t)$ удовлетворяет однородному уравнению, имеем

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{X}^{-1}(t)\mathbf{F}(t).$$

Интегрируя, находим

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{c}(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{X}^{-1}(\tau)\mathbf{F}(\tau)d\tau$$

и значит,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{c}(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(\tau)\mathbf{F}(\tau)d\tau.$$

Полагая здесь $t = t_0$, находим, что $\mathbf{c}(t_0) = \mathbf{X}^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0$, что дает искомую формулу. $\diamondsuit$

5.2.3. Линейные системы с постоянными коэффициентами

Для линейной системы с постоянными коэффициентами фундаментальную матрицу можно построить в явном виде.

Приведем для этого некоторые вспомогательные результаты. Пусть $\mathbf{A}$ – матрица размера $n \times n$. Если ее рассматривать как оператор из R^n в R^n, то при любом выборе нормы в R^n (пункт 1.1.2), можно определить

$$||\mathbf{A}|| = \sup_{||\mathbf{x}||=1} ||\mathbf{A}\mathbf{x}||.$$

Легко проверяется, что кроме обычных свойств, которыми обладает норма оператора, норма матрицы удовлетворяет следующим двум свойствам:

1)$|a_{ij}| \leq ||\mathbf{A}||$,

2)$||\int\limits_{t_0}^{t_1} \mathbf{A}(\tau)d\tau|| \leq \int\limits_{t_0}^{t_1} ||\mathbf{A}(\tau)||d\tau$.

Рассмотрим ряд из матриц размера $n \times n$

$$\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + ... + \mathbf{A}_k + ... = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix} + ...$$

Определение. Ряд $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + ...$ называется сходящимся, если сходятся все поэлементные ряды $a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)} + ...$

Аналогично определяется абсолютная сходимость, равномерная сходимость ряда из матриц, зависящих от параметра t.$\diamondsuit$

Теорема 5.2.5. Если сходится числовой ряд $||\mathbf{A}_1|| + ||\mathbf{A}_2|| + ...$, то ряд из матриц сходится абсолютно.

Доказательство. Так как каждый член ряда $|a_{ij}^{(1)}| + |a_{ij}^{(2)}| + ...$ мажорируется соответствующим членом ряда $||\mathbf{A}_1|| + ||\mathbf{A}_2|| + ...$ в силу свойства 1), то все поэлементные ряды сходятся абсолютно. $\diamondsuit$

Пусть $\mathbf{A}$ – некоторая матрица размера $n \times n$.

Определение. Матричной экспонентой $\mathbf{e}^{\mathbf{A}}$ называется матрица

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\mathbf{A}^n.\diamondsuit$$

Теорема 5.2.6. Для любой матрицы $\mathbf{A}$ матрица $\mathbf{e}^{\mathbf{A}}$ существует.

Доказательство. По теореме 5.2.5. достаточно доказать, что сходится ряд из норм

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}||\mathbf{A}^n||.$$

Поскольку $||\mathbf{A}^n|| \le ||\mathbf{A}||^n$, то этот ряд мажорируется сходящимся рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}||\mathbf{A}||^n = e^{||\mathbf{A}||}$$

и значит, сходится. $\diamondsuit$

Определим теперь матрицу

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\mathbf{A}^n.$$

Рассуждая так же, как в теореме 5.2.6., нетрудно показать, что этот ряд сходится равномерно по t на любом конечном интервале и в частности, его можно почленно дифференцировать по t.

Замечание. Используя жорданову форму матрицы $\mathbf{A}$, можно для матриц $\mathbf{e}^{\mathbf{A}}$ и $\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$ получить конечные выражения [17], [22].$\diamondsuit$

Теорема 5.2.7. Матрица $\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$ является нормированной при $t = 0$ фундаментальной матрицей системы с постоянными коэффициентами

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Доказательство. Проверим, что $\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$ удовлетворяет соответствующему дифференциально матричному уравнению:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\mathbf{A}^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathbf{A}^n = \mathbf{A}\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}.$$

Кроме того, $\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}|_{t=0} = \mathbf{I}$, то есть $\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$ нормирована при $t = 0$. $\diamondsuit$

5.2.4. Система в вариациях

Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{1}$$

отвечающую некоторому управляемому объекту. Будем предполагать дальше, что функция $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ непрерывно дифференцируема.

Введем пространство $\check{C}_m(t_0, t_1)$ кусочно-непрерывных на отрезке $[t_0, t_1]$ вектор-функций $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), ..., u_m(t))$ с нормой

$$||\mathbf{u}||_{\check{C}} = \sup_{t\in[t_0,t_1]} ||\mathbf{u}(t)||_{R^m}$$

и пространство $\check{C}^1_n(t_0, t_1)$ кусочно непрерывно дифференцируемых вектор-функций $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ с нормой

$$||\mathbf{x}||_{\check{C}^1} = \max(\sup_{t\in[t_0,t_1]} ||\mathbf{x}(t)||_{R^n}, \sup_{t\in[t_0,t_1]} ||\dot{\mathbf{x}}(t)||_{R^n}),$$

где $||\cdot||_{R^k}$ – какая-нибудь норма в R^k (например, евклидова).

Каждому управлению $\mathbf{u}(t) \in \check{C}_m(t_0, t_1)$ отвечает некоторое решение $\mathbf{x}(t) \in \check{C}^1_n(t_0, t_1)$ задачи (1) и значит, задано отображение $\mathbf{x}(\mathbf{u})$ из $\check{C}_m(t_0, t_1)$ в $\check{C}^1_n(t_0, t_1)$.

Это отображение можно рассматривать как неявную функцию, определяемую уравнением, которое получается после перехода в (1) к интегральному уравнению:

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0 - \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(\tau, \mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau))d\tau = 0,$$

где $\mathbf{\Phi} : \check{C}^1_n(t_0, t_1) \times \check{C}_m(t_0, t_1) \to \check{C}^1_n(t_0, t_1)$.

Проверим, что выполнены условия теоремы о неявной функции (теорема 1.3.5). Частные производные отображения $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, по примеру пункта 1, существуют и равны

$$\mathbf{\Phi}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\mathbf{h} = \mathbf{h}(t) - \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}_{\mathbf{x}}(\tau, \mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau))\mathbf{h}(\tau)d\tau,$$

$$\mathbf{\Phi_u}(\mathbf{x},\mathbf{u})\mathbf{v} = -\int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{F_u}(\tau,\mathbf{x}(\tau),\mathbf{u}(\tau))\mathbf{v}(\tau)d\tau,$$

а линейный оператор $\mathbf{\Phi_x}$ отображает $\check{C}_n^1(t_0,t_1)$ на все $\check{C}_n^1(t_0,t_1)$, так как для любой вектор-функции $\mathbf{y}(t)$ разрешимо интегральное уравнение Вольтерра

$$\mathbf{h}(t) - \int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{F_x}(\tau,\mathbf{x}(\tau),\mathbf{u}(\tau))\mathbf{h}(\tau)d\tau = \mathbf{y}(t).$$

Поэтому по теореме о неявной функции отображение $\mathbf{x}(\mathbf{u})$ дифференцируемо и если теперь $\mathbf{h} = \mathbf{x}'(\mathbf{u})\mathbf{v}$, где $\mathbf{v}(t) \in \check{C}_m(t_0,t_1)$, то $\mathbf{h}(t)$ определяется из уравнения

$$\mathbf{\Phi_x}(\mathbf{x},\mathbf{u})\mathbf{h} + \mathbf{\Phi_u}(\mathbf{x},\mathbf{u})\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

то есть функция $\mathbf{h}(t)$ – это решение интегрального уравнения

$$\mathbf{h}(t) - \int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{F_x}(\tau,\mathbf{x}(\tau),\mathbf{u}(\tau))\mathbf{h}(\tau)d\tau - \int\limits_{t_0}^{t} F_{\mathbf{u}}(\tau,\mathbf{x}(\tau),\mathbf{u}(\tau))\mathbf{v}(\tau)d\tau = \mathbf{0}.$$

Это интегральное уравнение эквивалентно задаче Коши для линейной системы

$$\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{F_x}(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t))\mathbf{h} + \mathbf{F_u}(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t))\mathbf{v}(t), \quad \mathbf{h}(t_0) = \mathbf{0},$$

которая называется системой в вариациях для решения $(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t))$ системы (1).

Если $\mathbf{X}(t)$ – фундаментальная матрица однородной системы в вариациях

$$\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{F_x}(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t))\mathbf{h},$$

то для $\mathbf{h}(t) = [\mathbf{x}'(\mathbf{u})\mathbf{v}](t)$ получаем явное выражение:

$$\mathbf{h}(t) = [\mathbf{x}'(\mathbf{u})\mathbf{v}](t) = \int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(\tau)\mathbf{F_u}(\tau,\mathbf{x}(\tau),\mathbf{u}(\tau))\mathbf{v}(\tau)d\tau.$$

Упражнения. 1) Найти фундаментальную матрицу, нормированную при $t = 0$ для системы:
a) $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -x_1$;
b) $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 - \alpha x_2$;
c) $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = x_3$, $\dot{x}_3 = 0$.

2) Показать, что если матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ коммутируют, то $\mathbf{e}^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{e}^{\mathbf{B}}$.

3) Найти матрицу $\mathbf{e}^{\mathbf{A}}$ для матрицы

$$a)\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; b)\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} c)\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

(в последнем случае представить матрицу в виде суммы и воспользоваться упражнением 2).

4) Уравнение колебаний маятника

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \sin x = 0$$

свести к системе уравнений первого порядка, полагая $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ и записать систему в вариациях для нижнего ($x = x_1 = 0,\ \dot{x} = x_2 = 0$) и верхнего ($x = x_1 = \pi,\ \dot{x} = x_2 = 0$) положений равновесия.

§ 5.3. ЗАДАЧИ СО СВОБОДНЫМ ПРАВЫМ КОНЦОМ

5.3.1. Задача с интегральным функционалом. (задача Лагранжа)

Рассмотрим задачу о минимизации функционала

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))dt$$

на траекториях управляемой системы

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}),\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \qquad (1)$$

с помощью выбора оптимального управления, удовлетворяющего для всех $t \in [t_0, t_1]$ условию $\mathbf{u}(t) \in \Omega \subset R^m$.

Введем пространство $\check{C}_m(t_0, t_1)$ кусочно-непрерывных на отрезке $[t_0, t_1]$ вектор-функций $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), ..., u_m(t))$ с нормой $||\mathbf{u}|| = \sup_{t\in[t_0,t_1]} ||u(t)||_{R^m}$.

Каждому управлению $\mathbf{u}(t) \in \check{C}_m(t_0, t_1)$ отвечает решение $\mathbf{x}(\mathbf{u})(t)$ задачи Коши (1) и поэтому на нормированном пространстве $\check{C}_m(t_0, t_1)$ определен функционал $f_1(\mathbf{u}) = f(\mathbf{x}(\mathbf{u}), \mathbf{u})$.

Выделим в пространстве $\check{C}_m(t_0, t_1)$ подмножество Q допустимых управлений:

$$Q = \{\mathbf{u}(t) \in \check{C}_m(t_0, t_1) :\ \mathbf{u}(t) \in \Omega \subset R^m, \ \ \forall t \in [t_0, t_1]\}.$$

Так как Ω – выпуклое множество в R^m, то Q – выпуклое множество.

Задача этого пункта может быть сформулирована так: найти оптимальное управление $\mathbf{u}(t)$, дающее минимум функционалу $f_1(\mathbf{u})$ на множестве допустимых управлений Q.

При выводе необходимых условий оптимальности дальше понадобится следующая лемма.

Лемма 5.3.1. Пусть $\mathbf{u}(t) \in Q$ – некоторое допустимое управление и $\mathbf{g}(t)$ –некоторая непрерывная вектор-функция.

Если

$$\int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{g}(t), \mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t))dt \geq 0$$

для любых допустимых управлений $\mathbf{v}(t) \in Q$, то $\forall \mathbf{u} \in \Omega$ и для всех $t \in [t_0, t_1]$ выполняется неравенство

$$(\mathbf{g}(t), \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}) \geq 0.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{u} \in \Omega$ и $\tau \in (t_0, t_1)$. Положим

$$\mathbf{v}(t) = \begin{cases} \mathbf{u}(t), & t \notin [\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon], \\ \mathbf{u}, & t \in [\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon]. \end{cases}$$

Тогда $\mathbf{v}(t) \in Q$ и поэтому, по условию,

$$\int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{g}(t), \mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t))dt = \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} (\mathbf{g}(t), \mathbf{u}(t) - \mathbf{u})dt \geq 0$$

По теореме о среднем, если $h(t)$ кусочно непрерывная на $[t_0, t_1]$ функция, то для всех $\tau \in [t_0, t_1]$, кроме точек разрыва

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} h(t)dt = h(\tau).$$

Поэтому, разделив обе части неравенства на 2ε и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем, что

$$(\mathbf{g}(t), \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}) \geq 0$$

для всех t. $\diamondsuit$

Определим функцию

$$H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) = (\mathbf{p}, \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})) - L(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{k=1}^{n} p_k F_k(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) - L(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

которая называется функцией Гамильтона рассматриваемой задачи.

Теорема 5.3.1. (локальный принцип максимума). Для того чтобы допустимое управление $\mathbf{u}(t)$ и соответствующая траектория $\mathbf{x}(t)$ были оптимальными, то есть, для того чтобы функционал

$$f_1(\mathbf{u}) = f(\mathbf{x}(\mathbf{u}), \mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))dt$$

достигал на функции $\mathbf{u}(t)$ минимума на Q, необходимо, чтобы

$$\left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{u}}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t)), \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}\right) \geq 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \Omega,\ \forall t \in [t_0, t_1],$$

где $\mathbf{p}(t)$ – решение "обратной"задачи Коши для системы, сопряженной к системе в вариациях для (1):

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\mathbf{F}_{\mathbf{x}}^T(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\mathbf{p}(t) + \text{Ł}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{p}(t_1) = \mathbf{0}.$$

Доказательство. Так как Q – выпуклое множество, то необходимое условие минимума $f_1(\mathbf{u})$ в точке $\mathbf{u} \in Q$ по теореме 2.3.3. имеет вид

$$f_1'(\mathbf{u})(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq 0,\ \forall \mathbf{v}(t) \in Q.$$

Найдем явное выражение для значения производной $f_1'(\mathbf{u})\mathbf{w}$ на произвольном элементе $\mathbf{w}$.

По теореме о производной сложного отображения (теорема 1.3.2.) и по теореме о полной производной (теорема 1.3.4.)

$$f_1'(\mathbf{u})\mathbf{w} = f'(\mathbf{x}(\mathbf{u}), \mathbf{u})\mathbf{w} = f_{\mathbf{x}}'(\mathbf{x}(\mathbf{u}), \mathbf{u})\mathbf{x}'(\mathbf{u})\mathbf{w} + f_{\mathbf{u}}'(\mathbf{x}(\mathbf{u}), \mathbf{u})\mathbf{w},$$

поэтому, используя явные выражения для $f_{\mathbf{x}}'$, $f_{\mathbf{u}}'$, которые легко находятся, а также, полагая $\mathbf{h}(t) = [\mathbf{x}'(\mathbf{u})\mathbf{w}](t)$, получаем

$$f_1'(\mathbf{u})\mathbf{w} = \int_{t_0}^{t_1} [(\text{Ł}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \mathbf{h}(t)) + (\text{Ł}_{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \mathbf{w}(t))]dt.$$

Как было показано в пункте 5.2.4, функция $\mathbf{h}(t)$ является решением следующей задачи Коши для системы в вариациях:

$$\dot{\mathbf{h}}(t) = \mathbf{F}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\mathbf{h}(t) + \mathbf{F}_{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\mathbf{w}(t), \quad \mathbf{h}(t_0) = \mathbf{0}.$$

Определим функцию $\mathbf{p}(t)$ как решение «обратной» задачи Коши для сопряженной системы

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\mathbf{F}_{\mathbf{x}}^T(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\mathbf{p}(t) + \text{Ł}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{p}(t_1) = \mathbf{0}.$$

С ее помощью выражение для производной $f_1'(\mathbf{u})\mathbf{w}$ можно преобразовать, используя интегрирование по частям и краевые условия для $\mathbf{h}$ и $\mathbf{p}$, следующим образом

$$f_1'(\mathbf{u})\mathbf{w} = \int\limits_{t_0}^{t_1} [(\dot{\mathbf{p}}+\mathbf{F}_{\mathbf{x}}^T\mathbf{p}, \mathbf{h})+(Ł_{\mathbf{u}}, \mathbf{w})]dt = (\mathbf{p}, \mathbf{h})|_{t_0}^{t_1}+\int\limits_{t_0}^{t_1} [(\mathbf{p}, -\dot{\mathbf{h}}+\mathbf{F}_{\mathbf{x}}\mathbf{h})+(Ł_{\mathbf{u}}, \mathbf{w})]dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} [-(\mathbf{p}, \mathbf{F}_{\mathbf{u}}\mathbf{w}) + (Ł_{\mathbf{u}}, \mathbf{w})]dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} (-\mathbf{F}_{\mathbf{u}}^T\mathbf{p} + Ł_{\mathbf{u}}, \mathbf{w})dt.$$

Подставляя это выражение (где $\mathbf{w}(t) = \mathbf{v}(t) - \mathbf{u}(t)$) в необходимое условие минимума, получаем

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} (-\mathbf{F}_{\mathbf{u}}^T(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\mathbf{p}(t) + Ł_{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \mathbf{v}(t) - \mathbf{u}(t))dt \geq \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{v}(t) \in Q,$$

откуда, применяя лемму 5.3.1, находим, что

$$(-\mathbf{F}_{\mathbf{u}}^T(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\mathbf{p}(t) + Ł_{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \mathbf{u} - \mathbf{u}(t) \geq \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{u} \in \Omega, \ \forall t \in [t_0, t_1],$$

или, иначе,

$$\left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{u}}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t)), \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}\right) \geq \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{u} \in \Omega, \ \forall t \in [t_0, t_1]. \diamondsuit$$

Если для фиксированного t определить функцию $\tilde{H}(\mathbf{u}) = H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}, \mathbf{p}(t))$, то полученное в теореме условие можно интерпретировать, в соответствии с теоремой 2.3.3, как необходимое условие того, что функция $\tilde{H}(\mathbf{u})$ достигает на множестве Ω максимума в точке $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}(t)$.

Оказывается, что справедливо более сильное утверждение, которое и называется принципом максимума: в точке $\mathbf{u}^*$ функция $\tilde{H}(\mathbf{u})$ должна достигать максимума на Ω.

Теорема 5.3.2 (принцип максимума Понтрягина). Для того чтобы допустимое управление $\mathbf{u}(t)$ и соответствующая траектория $\mathbf{x}(t)$ были оптимальными, то есть, для того чтобы функционал $f_1(\mathbf{u}) = f(\mathbf{x}(\mathbf{u}), \mathbf{u})$ достигал на функции $\mathbf{u}(t)$ минимума на множестве Q, необходимо, чтобы

$$H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t)) \geq H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}, \mathbf{p}(t)), \quad \forall \mathbf{u} \in \Omega, \ \forall t \in [t_0, t_1],$$

где $\mathbf{p}(t)$ – решение "обратной"задачи Коши для сопряженной системы

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\mathbf{F}_{\mathbf{x}}^T(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\mathbf{p}(t) + Ł_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{p}(t_1) = \mathbf{0}.$$

Доказательство. Докажем теорему, предположив дополнительно, что функция $L(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ – выпукла по $\mathbf{u}$ и что управляемая система линейна по $\mathbf{u}$, то есть система (1) имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{B}(t, \mathbf{x})\mathbf{u},$$

где $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ – матрица размера $n \times m$.

В этом случае функция Гамильтона $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p})$ является вогнутой по $\mathbf{u}$ (то есть выпукла по $\mathbf{u}$ функция $-H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p})$) и для каждого фиксированного t соответствующая функция $\tilde{H}(\mathbf{u}) = H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}, \mathbf{p}(t))$ является вогнутой по $\mathbf{u}$. Поэтому по теореме 2.3.4 необходимое условие максимума $\tilde{H}(\mathbf{u})$ на Ω оказывается и достаточным, то есть точка $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}(t)$, для которой по теореме 5.3.1 выполнено необходимое условие максимума – действительно точка максимума $H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}, \mathbf{p}(t))$ на Ω. $\diamondsuit$

Вывод теоремы 5.3.2 из теоремы 5.3.1 без дополнительных предположений можно найти в [19]. Другие доказательства принципа максимума в этом общем случае приводятся в [2], [8], [28], [35] и т.д.

Замечание. Можно доказать, что хотя оптимальное управление $\mathbf{u}(t)$ в общем случае имеет разрывы, функция $H(t) = H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t))$ – непрерывна на $[t_0, t_1]$. Если же функции L и $\mathbf{F}$ не зависят явно от t, то $H(t) = H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t)) = \text{const}$ на $[t_0, t_1]$.$\diamondsuit$

5.3.2. Примеры

Принцип максимума дает необходимые условия оптимальности управления $\mathbf{u}(t)$. Для того чтобы с его помощью найти «подозрительные» на оптимальность управления, рассмотрим функцию $\tilde{H}(\mathbf{u}) = H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p})$, считая $t, \mathbf{x}, \mathbf{p}$ - параметрами и будем искать точки максимума этой функции на множестве Ω. Очевидно, что если точка максимума $\mathbf{u}^*$ существует, то она зависит от параметров $t, \mathbf{x}, \mathbf{p}$, то есть $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ и по построению,

$$H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}), \mathbf{p}) = \max_{\mathbf{u} \in \Omega} H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}).$$

Поэтому, если функцию $\mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ удается найти, то управление, удовлетворяющее принципу максимума, можно получить, положив $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t))$ и значит, для построения $\mathbf{u}(t)$ достаточно найти $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{p}(t)$, то есть решить для системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})), \;\; \dot{\mathbf{p}} = -\mathbf{F}_{\mathbf{x}}^T(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}))\mathbf{p} + \text{Ł}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})) \quad (1)$$

краевую задачу с граничными условиями $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{p}(t_1) = \mathbf{0}$.

Если $\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)$ – решение этой краевой задачи, то пара $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t))$ является кандидатом на роль оптимальной. Будет ли она в действительности оптимальной – требует дополнительного исследования. Однако, если известно, что решение оптимальной задачи существует, и если из принципа максимума определяется единственная пара функций $\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t)$, то она оптимальна.

Пример 1. Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$f(x) = \int\limits_0^1 x(t)dt$$

на траекториях уравнения

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 0,$$

предполагая, что управления удовлетворяют ограничению $|u(t)| \leq 1$.

Здесь функция Гамильтона $H = -x + pu$ и $u^* = \operatorname{sign} p$. Так как сопряженная система сводится к уравнению

$$\dot{p} = L_x = 1, \ p(1) = 0,$$

откуда $p = t - 1$, то $u = -1$, и для оптимальной траектории получаем

$$\dot{x} = -1, \ x(0) = 0,$$

то есть $x = -t$. $\diamondsuit$

Пример 2. Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^T (x^2 + u^2)dt$$

на траекториях уравнения

$$\dot{x} = u, \ x(0) = x_0,$$

при условии, что $|u| \leq 1$.

Гамильтониан $H = -(x^2+u^2)/2+pu$. Если точка максимума удовлетворяет условию $|u| < 1$, то она определяется из уравнения $H_u = 0$, то есть из уравнения $-u + p = 0$, в противном случае максимум H достигается при $|u| = 1$. Поэтому $u^* = p$, если $|p| < 1$, и $u^* = \operatorname{sign} p$, если $|p| \geq 1$.

Поскольку $p(T) = 0$, в некоторой окрестности точки $t = T$ имеем $u^* = p$ и, следовательно, x и p определяются как решение системы (1), которая в данном случае принимает вид

$$\dot{x} = p, \ \dot{p} = L_x = x.$$

Решая ее при условии $p(T) = 0$, находим, что в указанной окрестности (пока $|p| < 1$)

$$x = C\text{ch }(t - T),\ p = C\text{sh }(t - T). \tag{2}$$

Если $|x_0| < \text{cth }T$, то $|p(t)| < 1$ для всех $t \in [0, T]$ и учитывая начальное условие $x(0) = x_0$, получаем из (2) в этом случае

$$x(t) = \frac{x_0\text{ch }(t - T)}{\text{ch }T},\ u(t) = p(t) = \frac{x_0\text{sh }(t - T)}{\text{ch }T}.$$

Если $|x_0| > \text{cth }T$, то существует $0 < t_1 < T$ такое, что $|p(t_1)| = 1$. Тогда $u^* = \text{sign }p$ для $0 \leq t \leq t_1$, и на этом промежутке система (1) принимает вид

$$\dot{x} = \text{sign }p,\ \dot{p} = x,$$

при этом должны выполняться условия: $x(0) = x_0$ и $p(t_1) = -\text{sign }x_0$ (так как в (2) x и p имеют разные знаки). Если, например, $x_0 > 0$, то для $t \in [0, t_1]$ получаем $u = -1$,

$$x = x_0 - t,\ p = x_0 t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t_1^2 - x_0 t_1 - 1,$$

а для $t \in [t_1, T]$ оптимальное управление и оптимальная траектория задаются формулами (2), причем t_1 и C определяются из системы

$$x_0 - t_1 = C\text{ch }(t_1 - T),\ C\text{sh }(t_1 - T) = -1.\diamondsuit$$

Оптимальное управление $\mathbf{u}(t)$ и оптимальная траектория $\mathbf{x}(t)$ зависят от начального состояния, то есть в общем случае следует рассматривать $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}_0)$ и $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$.

Говорят, что в управляемой системе осуществлен синтез оптимального управления, если построена (не зависящая от $\mathbf{x}_0$) функция $\mathbf{G}(t, \mathbf{x})$ такая, что на промежутке $[t_0, t_1]$ оптимальные управления и соответствующие оптимальные траектории, отвечающие различным $\mathbf{x}_0$, связаны зависимостью

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{G}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0))$$

для произвольных $\mathbf{x}_0$.

С точки зрения теории управления это означает реализацию оптимального режима в виде контура с обратной связью. Действительно, исходную задачу можно представить в виде схемы (рис. 30).

И поскольку после того, как функция $\mathbf{G}(t, \mathbf{x})$ найдена, оптимальные траектории определяются как решения задачи Коши

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{G}(t, \mathbf{x})),\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

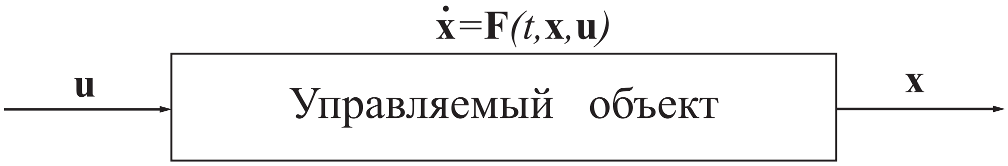

Рис 30.

то систему, в которой реализуются оптимальные режимы, можно представить схемой (рис. 31).

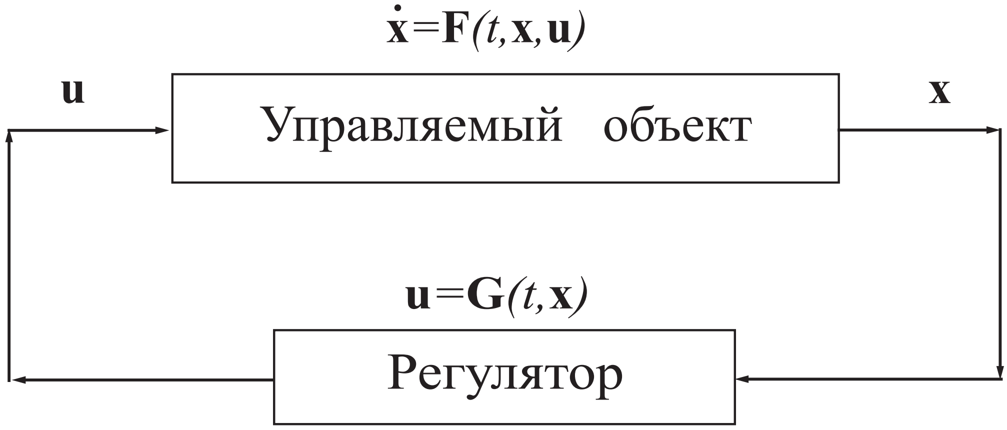

Рис 31.

Пример 3. Требуется минимизировать функционал

$$f(x,u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2(t) + u^2(t))dt$$

при условии, что

$$\dot{x} = -x + u,\ x(0) = x_0.$$

Так как ограничения на управления отсутствуют и $H = -(x^2+u^2)/2 - px + pu$, то необходимое условие $H_u = 0$ из теоремы 5.3.3. дает $u^* = p$.

Поэтому для определения x и p получается краевая задача

$$\dot{x} = -x + p,\ \dot{p} = x + p,\ x(0) = x_0,\ p(1) = 0.$$

Решая ее, находим, что

$$x = \frac{(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}(t-1)} + (\sqrt{2}+1)e^{\sqrt{2}(1-t)}}{(\sqrt{2}+1)e^{\sqrt{2}} + (\sqrt{2}-1)e^{-\sqrt{2}}} \cdot x_0,$$

$$u = p = \frac{e^{\sqrt{2}(t-1)} - e^{\sqrt{2}(1-t)}}{(\sqrt{2}+1)e^{\sqrt{2}} + (\sqrt{2}-1)e^{-\sqrt{2}}} \cdot x_0.$$

Отсюда следует, что в качестве синтезирующей функции можно взять функцию $u = G(t,x) = g(t)x$, в которой

$$g(t) = \frac{e^{\sqrt{2}(t-1)} - e^{\sqrt{2}(1-t)}}{(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}(t-1)} + (\sqrt{2}+1)e^{\sqrt{2}(1-t)}}.\diamondsuit$$

5.3.3. Частные случаи

В приложениях часто встречается задача о минимизации на траекториях линейной системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{1}$$

функционала

$$f(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} [(\mathbf{W}(t)\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t)) + (\mathbf{V}(t)\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t))]dt, \tag{2}$$

где $\mathbf{W}(t)$ и $\mathbf{V}(t)$ – квадратные, симметричные матрицы порядков n и m соответственно, непрерывно зависящие от t.

Так как в этом случае

$$H(t,\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{p}) = (\mathbf{p}, \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}) - (\mathbf{W}(t)\mathbf{x},\mathbf{x}) - (\mathbf{V}(t)\mathbf{u},\mathbf{u}),$$

то теорема 5.3.2. принимает следующий вид.

Теорема 5.3.3. Для оптимальности управления $\mathbf{u}(t)$ и траектории $\mathbf{x}(t)$ необходимо, чтобы $\forall t \in [t_0, t_1]$

$$\left(\mathbf{B}^T(t)\mathbf{p}(t) - \mathbf{V}(t)\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)\right) = \max_{\mathbf{u}\in\Omega} \left(\mathbf{B}^T(t)\mathbf{p}(t) - \mathbf{V}(t)\mathbf{u}, \mathbf{u}\right),$$

где $\mathbf{p}(t)$ определяется как решение задачи

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\mathbf{A}^T(t)\mathbf{p}(t) + 2\mathbf{W}(t)\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{p}(t_1) = \mathbf{0}.\diamondsuit$$

Другой частный случай получается, если ограничения на управления отсутствуют; тогда $\Omega = R^n$. Поэтому для задачи о минимизации функционала

$$f(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))dt \tag{3}$$

на траекториях управляемой системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{4}$$

с помощью произвольных управлений из $\check{C}_m(t_0, t_1)$, теорема 5.3.1 принимает вид.

Теорема 5.3.4. Для того чтобы управление $\mathbf{u}(t)$ и траектория $\mathbf{x}(t)$ были оптимальными, необходимо, чтобы

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{u}}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t)) = \mathbf{0},\ \forall t \in [t_0, t_1],$$

где $\mathbf{p}(t)$ – решение «обратной» задачи Коши для сопряженной системы

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\mathbf{F}_{\mathbf{x}}^T(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\mathbf{p}(t) + \text{Ł}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{p}(t_1) = \mathbf{0}.\diamondsuit$$

Пример. Минимизировать функционал

$$f(x,u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u^2(t) - x^2(t))dt$$

при условии, что

$$\dot{x} = -x + u,\ x(0) = 1.$$

Здесь $H = \frac{1}{2}(x^2 - u^2) + p(-x + u)$ и условие $H_u = 0$ дает $u^* = p$. Поэтому для x и p получается краевая задача

$$\dot{x} = -x + p,\ \dot{p} = -x + p,\ x(0) = 1,\ p(1) = 0,$$

решая которую, находим

$$x = 1 - \frac{t}{2},\ u = p = \frac{1}{2}(1 - t).\diamondsuit$$

Замечание. Эту задачу можно было решить, переформулировав ее как задачу вариационного исчисления, для чего достаточно исключить управление u. Это приводит к задаче о минимуме функционала

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 (\dot{x}^2(t) + 2x(t)\dot{x}(t))dt$$

при условии $x(0) = 1$, то есть к задаче из пункта 4.4.1.

В общем случае, однако, если исключение управления u из (3) – (4) возможно, то оно приводит к задаче вариационного исчисления на условный экстремум со связями, которые являются дифференциальными, то есть к более сложной задаче, чем рассмотренная в пункте 4.3.1.$\diamondsuit$

Сформулируем общий результат для задачи (1) – (2), если ограничения отсутствуют. Будем предпологать дополнительно, что матрица $\mathbf{V}(t)$ обратима (например, определенно-положительна), тогда из теоремы 5.3.4 вытекает следующий результат.

Теорема 5.3.5. Если управление $\mathbf{u}(t)$ и траектория $\mathbf{x}(t)$ оптимальны, то

$$\mathbf{u}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{V}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{p}(t),$$

где $\mathbf{p}(t)$ – решение задачи

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\mathbf{A}^T(t)\mathbf{p}(t) + 2\mathbf{W}(t)\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{p}(t_1) = \mathbf{0}.$$

Доказательство. В этом случае необходимое условие принимает вид

$$\mathbf{H}_{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) = \mathbf{B}^T\mathbf{p} - 2\mathbf{V}(t)\mathbf{u} = \mathbf{0},$$

откуда следует утверждение теоремы.$\diamondsuit$

Пример. (Задача синтеза оптимального управления.) Для того чтобы построить синтезирующую функцию в рассмотренной в теореме 5.3.5 задаче, найдем такую матрицу $\mathbf{G}_0(t)$, чтобы для любых начальных значений $\mathbf{x}_0$ для решений $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{p}(t)$ соответствующей краевой задачи

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{B}(t)\mathbf{V}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\mathbf{A}^T(t)\mathbf{p} + 2\mathbf{W}(t)\mathbf{x},$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \ \mathbf{p}(t_1) = \mathbf{0}$$

выполнялось равенство

$$\mathbf{p}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{G}_0(t)\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0).$$

Дифференцируя это равенство и заменяя в нем $\dot{\mathbf{x}}$ и $\dot{\mathbf{p}}$ правыми частями уравнений, получаем

$$-\mathbf{A}^T\mathbf{p} + 2\mathbf{W}\mathbf{x} = \dot{\mathbf{G}}_0\mathbf{x} + \mathbf{G}_0\left(\mathbf{A}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{B}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{p}\right).$$

Полагая здесь $\mathbf{p} = \mathbf{G}_0\mathbf{x}$, находим, что матрица $\mathbf{G}_0(t)$ должна удовлетворять следующему дифференциально-матричному уравнению

$$\dot{\mathbf{G}}_0 = -\mathbf{G}_0\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\mathbf{G}_0 - \frac{1}{2}\mathbf{G}_0\mathbf{B}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{G}_0 + 2\mathbf{W}.$$

Кроме того, из условия $\mathbf{p}(t_1) = \mathbf{0}$ получаем, что $\mathbf{G}_0(t_1) = \mathbf{0}$.

Получившееся нелинейное уравнение – это матричное уравнение Риккати, его точное решение удается найти лишь в исключительных случаях и обычно оно решается численно.

После того, как матрица $\mathbf{G}_0(t)$ найдена, для синтезирующей функции получается выражение

$$\mathbf{u} = \mathbf{G}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{V}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{G}_0(t)\mathbf{x}.\diamondsuit$$

5.3.4. Связь с вариационным исчислением

Представим простейшую задачу вариационного исчисления: задачу о минимуме функционала

$$f(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt \qquad (1)$$

при условии $x(t_0) = x_0$, как задачу оптимального управления.

Вводя для этого управление $u = \dot{x}$, получаем, что требуется найти минимум функционала

$$f_1(x, u) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t))dt$$

на траекториях уравнения

$$\dot{x} = u, \; x(t_0) = x_0.$$

Так как в этой задаче ограничения на управления отсутствуют и так как функция Гамильтона равна $H(t, x, u, p) = -L(t, x, u) + pu$, то по теореме 5.3.3, если $x(t)$, $u(t) = \dot{x}(t)$ – решение рассматриваемой задачи, то

$$H_u(t, x(t), u(t), p(t)) = -L_u(t, x(t), u(t)) + p(t) = 0,$$

то есть $p(t) = L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))$.

Поскольку сопряженное уравнение здесь

$$\dot{p}(t) = L_x(t, x(t), \dot{x}(t)),$$

то подставляя сюда найденное выражение для $p(t)$, получаем уравнение Эйлера

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} - L_x = 0.$$

По теореме 5.3.2 функция $\tilde{H}(u) = H(t, x(t), u, p(t))$ достигает в точке $u(t)$ максимума, то есть

$$H(t, x(t), u(t), p(t)) \geq H(t, x(t), u, p(t)), \quad \forall u \in R,$$

откуда находим, что

$$L(t, x(t), u) - L(t, x(t), \dot{x}(t)) - (u - \dot{x}(t))L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \geq 0.$$

Это необходимое условие, которому должна удовлетворять функция $x(t)$, дающая минимум функционалу (1), называется необходимым условием Вейерштрасса.

Необходимым условием максимума функции $\tilde{H}(u)$ в точке $u(t)$ является отрицательность второй производной, то есть $H_{uu} \leq 0$ или

$$L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \geq 0.$$

Это необходимое условие Лежандра (полученное раньше в теореме 4.5.1).

По построению $p(t_1) = 0$, откуда $L_{\dot{x}}(t_1, x(t_1), \dot{x}(t_1)) = 0$ – это дает условие трансверсальности, которое должно выполняться на свободном конце (и полученное раньше в теореме 4.4.1).

Наконец, как указывалось в замечании из пункта 5.3.2, функция $H(t, x(t), u(t), p(t))$ непрерывна. Но это означает, что в точках разрыва t_k производной $\dot{x} = u$ должны выполняться условия

$$(L - \dot{x}L_{\dot{x}})|_{t_k-0} = (L - \dot{x}L_{\dot{x}})|_{t_k+0}. \tag{2}$$

Кроме того, из непрерывности $p(t)$ следует, что

$$L_{\dot{x}}|_{t_k-0} = L_{\dot{x}}|_{t_k+0}. \tag{3}$$

Условия (2), (3) – это условия Вейерштрасса-Эрдмана, полученные раньше в теореме 4.4.3.

Таким образом, из принципа максимума (в его общей форме) можно вывести все основные необходимые условия вариационного исчисления.

5.3.5. Задача с терминальным функционалом

Пусть необходимо минимизировать функционал

$$f(\mathbf{x}) = M(t_1, \mathbf{x}(t_1))$$

на траекториях управляемой системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

выбором управления $\mathbf{u}(t)$, принимающего значения в $\Omega \subset R^m$.

Положим $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) = (\mathbf{p}, \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}))$.

Теорема 5.3.6 (локальный принцип максимума). Для того чтобы допустимое управление $\mathbf{u}(t)$ и соответствующая фазовая траектория $\mathbf{x}(t)$ были оптимальны, необходимо, чтобы

$$\left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{u}}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t)), \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}\right) \geq 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \Omega, \ \forall t \in [t_0, t_1],$$

где $\mathbf{p}(t)$ – решение "обратной"задачи Коши для сопряженной системы

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\mathbf{F}_{\mathbf{x}}^T(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\mathbf{p}(t), \quad \mathbf{p}(t_1) = -\mathbf{M}_{\mathbf{x}}(t_1, \mathbf{x}(t_1)).$$

Доказательство. Вводя снова в $\check{C}_m(t_0, t_1)$ подмножество

$$Q = \{\mathbf{u}(t) \in \check{C}_m(t_0, t_1) : \ \mathbf{u}(t) \in \Omega \subset R^m, \ \ \forall t \in [t_0, t_1]\},$$

сформулируем рассматриваемую задачу как задачу о минимуме функционала $f_1(\mathbf{u}) = f(\mathbf{x}(\mathbf{u}))$ на множестве Q.

Так как Q – выпуклое множество, то необходимое условие минимума имеет вид

$$\mathbf{f}_1'(\mathbf{u})(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq 0, \ \ \forall \mathbf{v}(t) \in Q.$$

По теореме о производной сложного отображения (теорема 1.3.2) и в соответствии с пунктом 5.2.4,

$$\mathbf{f}_1'(\mathbf{u})\mathbf{w} = \mathbf{M}_\mathbf{x}(t_1, \mathbf{x}(t_1)) \cdot [\mathbf{x}'(\mathbf{u})\mathbf{w}](t_1) = (\mathbf{M}_\mathbf{x}(t_1, \mathbf{x}(t_1)), \mathbf{h}(t_1)),$$

где $\mathbf{h}(t) = [\mathbf{x}'(\mathbf{u})\mathbf{w}](t)$ – решение задачи Коши для системы в вариациях

$$\dot{\mathbf{h}}(t) = \mathbf{F}_\mathbf{x}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\mathbf{h}(t) + \mathbf{F}_\mathbf{u}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\mathbf{w}(t), \ \ \mathbf{h}(t_0) = \mathbf{0}.$$

Используя это выражение для $\mathbf{w}(t) = \mathbf{v}(t) - \mathbf{u}(t)$, необходимое условие минимума можно записать в виде

$$(\mathbf{M}_\mathbf{x}(t_1, \mathbf{x}(t_1)), \mathbf{h}(t_1)) \geq 0, \ \ \forall \mathbf{v}(t) \in Q.$$

Определим $\mathbf{p}(t)$ как решение задачи

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\mathbf{F}_\mathbf{x}^T(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\mathbf{p}(t), \ \ \mathbf{p}(t_1) = -\mathbf{M}_\mathbf{x}(t_1, \mathbf{x}(t_1)).$$

Умножая обе части системы скалярно на $\mathbf{h}(t)$ и интегрируя от t_0 до t_1, имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} (\dot{\mathbf{p}}, \mathbf{h}) dt = -\int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{F}_\mathbf{x}^T \mathbf{p}, \mathbf{h}) dt,$$

откуда, интегрируя по частям, находим, что

$$\int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{p}(t), \dot{\mathbf{h}}(t) - \mathbf{F}_\mathbf{x}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\mathbf{h}(t)) dt = -(\mathbf{M}_\mathbf{x}(t_1, \mathbf{x}(t_1)), \mathbf{h}(t_1)).$$

Используя сопряженную систему и необходимое условие, получаем

$$\int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{p}(t), \mathbf{F}_\mathbf{u}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))(\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t))) dt \geq 0, \ \ \forall \mathbf{v}(t) \in Q,$$

и значит, по лемме 5.3.1,

$$(\mathbf{p}(t), \mathbf{F}_{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u})) \geq 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \Omega, \ \forall t \in [t_0, t_1].$$

С учетом выражения для $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p})$ это доказывает теорему. $\diamondsuit$

Сводя терминальный функционал к интегральному, как это описано в п. 5.1.1, теорему 5.3.6 можно было бы вывести непосредственно из теоремы 5.1.1.

Условие

$$\left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{u}}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t)), \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}\right) \geq 0, \ \ \forall \mathbf{u} \in \Omega$$

– это необходимое условие максимума функции $\tilde{H}(u) = H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}, \mathbf{p}(t)) = (\mathbf{p}, \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}))$ на выпуклом множестве Ω. Справедлив следующий, более сильный результат.

Теорема 5.3.7. (принцип максимума Понтрягина). Если управление $\mathbf{u}(t)$ и траектория $\mathbf{x}(t)$ оптимальны, то $\forall t \in [t_0, t_1]$

$$H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t)) \geq H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}, \mathbf{p}(t)), \ \ \forall \mathbf{u} \in \Omega,$$

где $\mathbf{p}(t)$ – решение задачи

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\mathbf{F}_{\mathbf{x}}^T(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\mathbf{p}(t), \ \ \mathbf{p}(t_1) = -\mathbf{M}_{\mathbf{x}}(t_1, \mathbf{x}(t_1)).$$

Доказательство. Ограничиваясь частным случаем линейной по управлению $\mathbf{u}$ системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{B}(t, \mathbf{x})\mathbf{u},$$

заметим,что в этом случае необходимые условия теорем 5.3.6 и 5.3.7 просто совпадают и имеют вид

$$(\mathbf{p}(t), \mathbf{B}(t, x(t))\mathbf{u}(t)) \geq (\mathbf{p}(t), \mathbf{B}(t, \mathbf{x}(t))\mathbf{u}), \ \ \forall \mathbf{u} \in \Omega. \diamondsuit$$

Доказательство теоремы 5.3.7 в общем случае можно найти в [2], [19], [28], [44],...

Пример. Минимизировать функционал

$$f(x) = x^2(1)$$

при условиях

$$\dot{x} = u, \ \ x(0) = x_0, \ \ |u| \leq 1.$$

Здесь $H = pu$, а сопряженное уравнение

$$\dot{p} = 0, \ \ p(1) = -2x(1),$$

то есть, $p(t) = -2x(1) = \text{const}$.

Если $x(1) > 0$, то $p(1) < 0$ и максимум H достигается при $u = -1$. Поэтому $\dot{x} = -1$ и $x = -t + x_0$ и поскольку $x(1) = -1 + x_0 > 0$, то необходимо $x_0 > 1$. Аналогично, если $x(1) < 0$, то $u = 1$, $x(1) = 1 + x_0$, причем $x_0 < -1$.

Наконец, если $x(1) = 0$, то $p(t) \equiv 0$ и из условия максимума H управление u не определяется (оптимальные управления, которые не определяются из принципа максимума, называются **особыми**).

В этом случае, очевидно, $x(t)$ – произвольная функция, такая, что $x(0) = x_0$, $x(1) = 0$ и $|\dot{x}(t)| = |u(t)| \leq 1$.

Упражнения. 1) Рассмотреть задачу о минимуме функционала

$$f(x, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 (x^2(t) + u_1^2(t) + u_2^2(t))dt$$

на траекториях управляемой системы

$$\dot{x} = u_1 + u_2, \quad x(0) = 1.$$

2) Рассмотреть задачу о минимуме функционала

$$f(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 (u_1^2(t) + u_2^2(t))dt$$

на траекториях управляемой системы

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = u_1,\ \dot{x}_3 = x_4,\ \dot{x}_4 = u_2 - 1,$$

для которой заданы начальное $\mathbf{x}(0) = (-1, 0, 0, 0)$ и конечное $\mathbf{x}(1) = (0, 0, 0, 0)$ состояния.

3) Рассмотреть задачу о минимуме на траекториях управляемой системы

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = u, \quad x_1(0) = x_{10},\ x_2(0) = x_{20}$$

терминального функционала
a) $f(\mathbf{x}) = x_1(1) + x_2(1)$, b) $f(\mathbf{x}) = x_1(1) - x_2^2(1)/2$.

4) Рассмотреть задачу о минимуме функционала

$$f(x) = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 x^2(t)dt$$

на траекториях управляемой системы

$$\dot{x} = u - u^2, \quad x(0) = x_0,$$

при ограничении на управления: $|u| \leq 1$.

§ 5.4. ЗАДАЧИ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ПРАВОМ КОНЦЕ.

5.4.1. Принцип максимума

Рассмотрим задачу о минимизации интегрального функционала

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))dt$$

на траекториях управляемой системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}(t)), \tag{1}$$

считая, что кроме начального состояния системы $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ задано некоторое краевое условие на правом конце: $\mathbf{M}(\mathbf{x}(t_1)) = \mathbf{0}$. Здесь момент времени t_1 предполагается фиксированным, а $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ – отображение из R^n в R^n.

По-прежнему считается, что допустимые управления $\mathbf{u}(t)$ принимают значения в множестве $\Omega \subset R^m$, которое предполагается выпуклым, замкнутым и имеющим внутренние точки.

Используя обозначения $\mathbf{x}(\mathbf{u})$ или $\mathbf{x}(\mathbf{u})(t)$ для решения системы (1), отвечающего управлению $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ и удовлетворяющего начальному условию $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, введем в нормированном пространстве $\check{C}(t_0, t_1)$ подмножества:

$$Q_1 = \{\mathbf{u} \in \check{C}(t_0, t_1) : \ \mathbf{u}(t) \in \Omega, \ \forall t \in [t_0, t_1]\},$$

$$Q_2 = \{\mathbf{u} \in \check{C}(t_0, t_1) : \ \mathbf{M}(\mathbf{x}(\mathbf{u})(t_1)) = \mathbf{0}\},$$

$$Q = Q_1 \cap Q_2 = \{\mathbf{u} \in \check{C}(t_0, t_1) : \ \mathbf{M}(x(\mathbf{u})(t_1)) = 0, \ \mathbf{u}(t) \in \Omega, \ \forall t \in [t_0, t_1]\}.$$

Очевидно, Q_1 – выпуклое множество, имеющее внутренние точки, а ограничениями типа равенств.

Теперь сформулированную задачу можно рассматривать как задачу о минимуме функционала

$$f_1(\mathbf{u}) = f(\mathbf{x}(\mathbf{u}), \mathbf{u})$$

на подмножестве $Q \subset \check{C}(t_0, t_1)$.

Определим функцию Гамильтона следующим образом

$$H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, \lambda) = (\mathbf{p}, \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})) - \lambda L(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}).$$

Теорема 5.4.1 (локальный принцип максимума). Для того чтобы управление $\mathbf{u}(t)$ и траектория $\mathbf{x}(t)$ были оптимальными, необходимо, чтобы нашлись число $\lambda \geq 0$ и вектор $\mathbf{a} \in R^n$ такие, что

$$\left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{u}}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t)), \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}\right) \geq 0,\ \forall \mathbf{u} \in \Omega,\ \forall t \in [t_0, t_1],$$

где $\mathbf{p}(t)$ – решение следующей задачи для сопряженной системы

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\mathbf{F}_{\mathbf{x}}^T(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\mathbf{p}(t) + \lambda \text{Ł}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{p}(t_1) = \mathbf{M}_{\mathbf{x}}^T(\mathbf{x}(t_1))\mathbf{a},$$

причем число λ и вектор $\mathbf{M}_{\mathbf{x}}^T(\mathbf{x}(t_1))\mathbf{a}$ не обращаются одновременно в нуль.

Доказательство. Так как оптимальное управление $\mathbf{u}(t)$ – точка минимума функционала $f_1(\mathbf{u})$ на множестве Q, то записывая необходимое условие минимума (теорема 2.3.1.), имеем

$$f_1'(\mathbf{u})\mathbf{w} \geq 0, \quad \forall \mathbf{w} \in K_{Q,\mathbf{u}},$$

где $K_{Q,\mathbf{u}}$ – конус касательных направлений для множества Q в точке $\mathbf{u}$.

Как отмечалось выше, $Q = Q_1 \cap Q_2$, где Q_1 – выпуклое множество, имеющее внутренние точки, поэтому если ввести

$$K_0 = \{\mathbf{w} : \mathbf{w} = \alpha(\mathbf{v} - \mathbf{u}),\ \mathbf{v} \in Q_1^0,\ \alpha > 0\},$$

то по теореме 2.2.4. $K_0 \cap K_{Q_2,\mathbf{u}} \subset K_{Q,\mathbf{u}}$. Из необходимого условия вытекает, что

$$f_1'(\mathbf{u})\mathbf{w} \geq 0,\ \forall \mathbf{w} \in K_0 \cap K_{Q_2,\mathbf{u}}. \tag{2}$$

Конус K_0 – это выпуклый конус, содержащий внутренние точки, а так как Q_2 – это множество, заданное ограничениями типа равенств, то по теореме 2.2.6

$$K_{Q_2,\mathbf{u}} = \{\mathbf{w} : \mathbf{M}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(\mathbf{u})(t_1))[\mathbf{x}_{\mathbf{u}}'(\mathbf{u})\mathbf{w}](t_1) = \mathbf{0}\} \tag{3}$$

и значит, $K_{Q_2,\mathbf{u}}$ – подпространство.

Поэтому, по теореме Крейна (теорема 1.2.12), из (2) следует, что существуют число $\lambda \geq 0$ и линейный ограниченный функционал $g(\mathbf{w})$ на $\check{C}(t_0, t_1)$, удовлетворяющий условию $g(\mathbf{w}) = 0,\ \forall \mathbf{w} \in K_{Q_2,\mathbf{u}}$, такие, что

$$\lambda f_1'(\mathbf{u})\mathbf{w} + g(\mathbf{w}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{w} \in K_0; \tag{4}$$

при этом λ и $g(\mathbf{w})$ не равны нулю одновременно.

Получим явное выражение для функционала $g(\mathbf{w})$. Согласно пункту 5.2.4, если положить $\mathbf{h}(\mathbf{w})(t) = [\mathbf{x}_{\mathbf{u}}'(\mathbf{u})\mathbf{w}](t)$, то $\mathbf{h}(\mathbf{w})(t)$ – это решение системы в вариациях

$$\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{F}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\mathbf{h} + \mathbf{F}_{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\mathbf{w}(t),\ \mathbf{h}(t_0) = \mathbf{0}$$

и $\mathbf{h}$ зависит от $\mathbf{w}$ линейно. Поскольку $\mathbf{M}(\mathbf{x}) = (m_1(\mathbf{x}), ..., m_n(\mathbf{x}))$, то (3) можно переписать в виде

$$K_{Q_2,\mathbf{u}} = \{\mathbf{w} : \mathbf{M}_\mathbf{x}(\mathbf{x}(\mathbf{u}))(t_1)\mathbf{h}(\mathbf{w})(t_1) = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{w} : l_i(\mathbf{w}) = 0,\ i = 1, ..., n\},$$

где $l_i(\mathbf{w}) = (\mathbf{m}_{ix}(\mathbf{x}(\mathbf{u})(t_1), \mathbf{h}(\mathbf{w})(t_1))$ – линейные ограниченные функционалы на $\check{C}(t_0, t_1)$. По условию, $g(\mathbf{w}) = 0$ на $K_{Q_2,\mathbf{u}}$, и по теореме 1.2.9 функционал $g(\mathbf{w})$ является линейной комбинацией функционалов $l_i(\mathbf{w})$, то есть

$$g(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{n} a_i l_i(\mathbf{w}) = (-\mathbf{a}, \mathbf{M}_\mathbf{x}(\mathbf{x}(\mathbf{u})(t_1))\mathbf{h}(\mathbf{w})(t_1)) =$$

$$= (-\mathbf{M}_\mathbf{x}^T(\mathbf{x}(\mathbf{u})(t_1)\mathbf{a}, \mathbf{h}(\mathbf{w})(t_1))$$

где $\mathbf{a} = (-a_1, ..., -a_n) \in R^n$, причем λ и вектор $\mathbf{M}_\mathbf{x}^T(\mathbf{x}(\mathbf{u})(t_1))\mathbf{a}$ одновременно в нуль не обращаются.

Используя найденное выражение для $g(\mathbf{w})$, необходимое условие минимума (4) можно записать в виде

$$\lambda f_1'(\mathbf{u})\mathbf{w} - (\mathbf{M}_\mathbf{x}^T(\mathbf{x}(\mathbf{u})(t_1))\mathbf{a}, \mathbf{h}(\mathbf{w})(t_1)) \geq \mathbf{0}, \forall \mathbf{w} \in K_0. \tag{5}$$

Введем функцию $\mathbf{p}(t)$ как решение «обратной» задачи Коши для сопряженной системы

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\mathbf{F}_\mathbf{x}^T(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\mathbf{p}(t) + \lambda Ł_\mathbf{x}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)),\ \mathbf{p}(t_1) = \mathbf{M}_\mathbf{x}^T(\mathbf{x}(\mathbf{u})(t_1))\mathbf{a}.$$

Преобразуем с ее помощью, используя интегрирование по частям, явное выражение для $\lambda f_1'(\mathbf{u})\mathbf{w}$ аналогично тому, как это было сделано в доказательстве теоремы 5.3.1:

$$\lambda f_1'(\mathbf{u})\mathbf{w} = \int_{t_0}^{t_1} [(\lambda Ł_\mathbf{x}, \mathbf{h}) + (\lambda Ł_\mathbf{u}, \mathbf{w})]dt = \int_{t_0}^{t_1} [(\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{F}_\mathbf{x}^T\mathbf{p}, \mathbf{h}) + (\lambda Ł_\mathbf{u}, \mathbf{w})]dt =$$

$$= (\mathbf{p}, \mathbf{h})|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} [(\mathbf{p}, -\dot{\mathbf{h}} + \mathbf{F}_\mathbf{x}\mathbf{h}) + (\lambda Ł_\mathbf{u}, \mathbf{w})]dt = (\mathbf{M}_\mathbf{x}^T(\mathbf{x}(\mathbf{u})(t_1))\mathbf{a}, \mathbf{h}(\mathbf{w}))(t_1) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} (-\mathbf{F}_\mathbf{u}^T\mathbf{p} + \lambda Ł_\mathbf{u}, \mathbf{w})dt.$$

Подставляя это выражение в (5) и полагая $\mathbf{w}(t) = \mathbf{v}(t) - \mathbf{u}(t)$, получаем, что

$$\int_{t_0}^{t_1} (-\mathbf{F}_\mathbf{u}^T(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\mathbf{p}(t) + \lambda Ł_\mathbf{u}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \mathbf{v}(t) - \mathbf{u}(t))dt \geq 0,\ \forall \mathbf{v}(t) \in Q_1^0,$$

откуда, по лемме 5.3.1, следует, что

$$(-\mathbf{F}_{\mathbf{u}}^T(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t))\mathbf{p}(t)+\lambda Ł_{\mathbf{u}}(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)),\mathbf{u}-\mathbf{u}(t))\geq 0, \quad \forall \mathbf{u}\in\Omega,\ \forall t\in[t_0,t_1].$$

Так как $\mathbf{H}_{\mathbf{u}}(t,\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{p},\lambda)=-\mathbf{F}_{\mathbf{u}}^T(t,\mathbf{x},\mathbf{u})\mathbf{p}+\lambda Ł_{\mathbf{u}}(t,\mathbf{x},\mathbf{u})$, то это доказывает теорему. $\diamondsuit$

Условие $\mathbf{p}(t_1)=\mathbf{M}_{\mathbf{u}}^T(\mathbf{x}(t_1))\mathbf{a}$ на правом конце для сопряженной переменной $\mathbf{p}$ обычно называют условием трансверсальности.

Замечание. Теорема 5.3.1 – это частный случай теоремы 5.4.1. Действительно, если условия на правом конце отсутствуют, то $\mathbf{M}(\mathbf{x})\equiv 0$ и краевое условие для решения $\mathbf{p}(t)$ сопряженной системы принимает вид $\mathbf{p}(t_1)=\mathbf{0}$. Так как λ и $\mathbf{p}(t)$ не равны нулю одновременно, то необходимо $\lambda>0$. Поэтому, заменяя решение $\mathbf{p}(t)$ на решение $\tilde{\mathbf{p}}(t)=\mathbf{p}(t)/\lambda$, можно считать, что $\lambda=1.\diamondsuit$

Так же, как в задаче без ограничений на правом конце, на самом деле справедлив более сильный результат, чем теорема 5.4.1.

Теорема 5.4.2 (принцип максимума Понтрягина). Для того чтобы управление $\mathbf{u}(t)$ и траектория $\mathbf{x}(t)$ были оптимальными, необходимо, чтобы нашлись число $\lambda\geq 0$ и вектор $\mathbf{a}\in R^n$ такие, что

$$H(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{p}(t),\lambda)\geq H(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u},\mathbf{p}(t),\lambda),\ \forall \mathbf{u}\in\Omega,\ \forall t\in[t_0,t_1],$$

где $\mathbf{p}(t)$ – решение следующей задачи для сопряженной системы

$$\dot{\mathbf{p}}(t)=-\mathbf{F}_{\mathbf{x}}^T(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t))\mathbf{p}(t)+\lambda Ł_{\mathbf{x}}(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{p}(t_1)=\mathbf{M}_{\mathbf{x}}^T(\mathbf{x}(t_1))\mathbf{a},$$

причем λ и $\mathbf{M}_{\mathbf{x}}^T(\mathbf{x}(t_1))\mathbf{a}$ не равны одновременно нулю.

Доказательство. Ограничиваясь, как и раньше, случаем линейной по $\mathbf{u}$ системы

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}(t,\mathbf{x})+\mathbf{B}(t,\mathbf{x})\mathbf{u}$$

и выпуклой по $\mathbf{u}$ функции $L(t,\mathbf{x},\mathbf{u})$, заметим, что в этих предположениях теорема 5.4.2 сразу следует из теорем 5.4.1 и 2.3.4.

5.4.2. Частные случаи. Примеры

Если $\Omega=R^m$, то есть если ограничения на управление отсутствуют, то справедлив следующий результат.

Теорема 5.4.3. Для того чтобы управление $\mathbf{u}(t)$ и траектория $\mathbf{x}(t)$ были оптимальными, необходимо, чтобы нашелся вектор $\mathbf{a}\in R^n$ такой, что

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\mathbf{u}}(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{p}(t))=\mathbf{0},\ \forall \mathbf{u}\in\Omega,\ \forall t\in[t_0,t_1],$$

где $H(t,\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{p}) = (\mathbf{p},\mathbf{F}(t,\mathbf{x},\mathbf{u})) - L(t,\mathbf{x},\mathbf{u})$, а $\mathbf{p}(t)$ – решение следующей задачи для сопряженной системы

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\mathbf{F}_{\mathbf{x}}^T(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t))\mathbf{p}(t) + \text{Ł}_{\mathbf{x}}(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{p}(t_1) = \mathbf{M}_{\mathbf{x}}^T(\mathbf{x}(t_1))\mathbf{a}.$$

Доказательство. Сохраняя обозначения доказательства теоремы 5.4.1, получаем в этом случае, что конус $K_0 = K_{Q_2,\mathbf{u}}$ – это подпространство, и условие (2) принимает вид

$$f_1'(\mathbf{u})\mathbf{w} = 0, \quad \forall \mathbf{w} \in K_{Q_2,\mathbf{u}}.$$

Поэтому можно положить $g(\mathbf{w}) = -f_1'(\mathbf{u})\mathbf{w}$ (считая $\lambda = 1$) и закончить доказательство так, как в теореме 5.4.1.$\diamondsuit$

Условие на правом конце для $\mathbf{p}(t)$, то есть условие $\mathbf{p}(t_1) = \mathbf{M}_{\mathbf{x}}^T(\mathbf{x}(t_1,\mathbf{u}))\mathbf{a}$ – это условие трансверсальности.

Пример 1. Минимизировать функционал

$$f(u) = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 u^4(t)dt$$

при условиях

$$\dot{x} = x + u, \quad x(0) = x_0, \ x(1) = 0.$$

Здесь $H = (x+u)p - u^4/4$ и необходимое условие минимума $H_u = p - u^3 = = 0$ дает $u^* = \sqrt[3]{p}$.

Функции $x(t)$ и $p(t)$ определяются теперь как решение краевой задачи:

$$\dot{x} = x + \sqrt[3]{p}, \ \dot{p} = -p, \quad x(0) = x_0, \ x(1) = 0.$$

Так как общее решение системы будет

$$p = p_0 e^{-t}, \ x = e^t x_0 - \frac{3}{4}p_0^{1/3}(e^{-t/3} - e^t),$$

то подставляя его во второе граничное условие, получаем, что

$$p_0^{1/3} = \frac{4x_0}{3}(e^{-4/3} - 1)^{-1}$$

откуда находим управление, удовлетворяющее принципу максимума

$$u(t) = \frac{4x_0 e^{(4-t)/3}}{3(1 - e^{4/3})}.\diamondsuit$$

Пример 2. Для системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \ \dot{x}_2 = u$$

с заданным начальным состоянием $x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0$ и с граничным условием на правом конце $x_1(1) + x_2(1) = 1$, найти управление минимизирующее функционал

$$f(u) = \int_0^1 u^2(t)dt.$$

Так как $H = p_1x_2 + p_2u - u^2$, то необходимое условие минимума $H_u = 0$ дает $u^* = p_2/2$. Поэтому $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{p}(t)$ определяются как решения системы

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = \frac{1}{2}p_2,\ \dot{p}_1 = 0,\ \dot{p}_2 = -p_1,$$

удовлетворяющей краевым условиям

$$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0,\ x_1(1) + x_2(1) = 1.$$

Кроме этого, должно выполняться условие трансверсальности. Для того, чтобы получить его, заметим, что $\mathbf{M}(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2 - 1, 0)$ и значит,

$$\mathbf{M}_{\mathbf{x}}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда $(p_1(1), p_2(1)) = \mathbf{M}_{\mathbf{x}}^T\mathbf{a} = (a_1, a_1)$, то есть $p_1(1) = p_2(1)$.

Так как общее решение системы имеет вид

$$p_1 = p_{10},\ p_2 = -p_{10}t + p_{20},\ x_2 = -\frac{1}{4}p_{10}t^2 + p_{20}t + x_{20},$$

$$x_1 = -\frac{1}{12}p_{10}t^3 + \frac{1}{2}p_{20}t^2 + x_{20}t + x_{10},$$

то, удовлетворяя краевым условиям, получаем

$$u(t) = \frac{3}{16}(2 - t).\diamondsuit$$

Рассмотрим для линейной управляемой системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \tag{1}$$

задачу о минимизации функционала

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} [(\mathbf{W}(t)x(t), x(t)) + (\mathbf{V}(t)\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t))]dt \tag{2}$$

при условии, что заданы начальное $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ и конечное $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$ состояния и $\mathbf{u}(t) \in \Omega \subset R^m$ для любых $t \in [t_0, t_1]$.

В этом случае теорема 5.4.2 принимает вид.

Теорема 5.4.4. Для оптимальности управления $\mathbf{u}(t)$ и траектории $\mathbf{x}(t)$ необходимо, чтобы нашлись число $\lambda \geq 0$ и вектор $\mathbf{a} \in R^n$, не равные одновременно нулю, такие, что $\forall t \in [t_0, t_1]$

$$(\mathbf{B}^T(t)\mathbf{p}(t) - \lambda\mathbf{V}(t)\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)) = \max_{\mathbf{u}\in\Omega}(\mathbf{B}^T(t)\mathbf{p}(t) - \lambda\mathbf{V}(t)\mathbf{u}, \mathbf{u}),$$

где $\mathbf{p}(t)$ – решение задачи

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\mathbf{A}^T(t)\mathbf{p}(t) + 2\lambda\mathbf{W}(t)\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{p}(t_1) = \mathbf{a}.$$

Доказательство. Так как в этом случае $\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_1$, то $\mathbf{M}_{\mathbf{x}}^T = \mathbf{I}$ и условие на правом конце принимает вид $\mathbf{p}(t_1) = \mathbf{a}$. $\diamondsuit$

Пример 3. Найти управление, удовлетворяющее условию $|u| \leq 1$ и минимизирующее функционал

$$f(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 x^2(t)dt$$

на решениях линейного уравнения

$$\dot{x} = u$$

при заданных начальном $x(0) = 1$ и конечном $x(4) = 1$ состояниях.

Запишем гамильтониан

$$H = pu - \frac{1}{2}\lambda x^2$$

и сопряженное уравнение

$$\dot{p} = \lambda x.$$

Если $\lambda = 0$, то $p = \text{const} \neq 0$, и условие максимума H на отрезке $[-1, 1]$ дает $u = \operatorname{sign} p$. Поэтому $x(t)$ – монотонная функция, которая не может удовлетворять заданным краевым условиям.

Таким образом, $\lambda \neq 0$ и можно считать, что $\lambda = 1$. В этом случае по-прежнему $u = \operatorname{sign} p$, если же на некотором промежутке $p(t) \equiv 0$, то из условия максимума H управление u не определяется, однако тогда $x = \dot{p} \equiv 0$ и значит $u = \dot{x} \equiv 0$. Поэтому управление $u(t)$, удовлетворяющее принципу максимума, принимает значения 0, ± 1.

Функции $x(t)$ и $p(t)$ определяются теперь как решение краевой задачи

$$\dot{x} = \operatorname{sign} p, \; \dot{p} = x, \quad x(0) = 1, \; x(4) = 1.$$

(Здесь считается, что $\operatorname{sign} 0 = 0$.)

В плоскости (x, p) решениям получившейся системы отвечают траектории $p = x^2/2 + C$, если $p > 0$ и $p = -x^2/2 + C$, если $p < 0$.

Переход с траекторий одного вида на траектории другого вида происходит на оси $p = 0$ (линия переключения), при этом только в точке $(0, 0)$ управление может принять значение $u(t) \equiv 0$ для некоторого промежутка.

Единственная траектория, для которой соответствующее решение удовлетворяет краевым условиям, выделена на рис. 32.

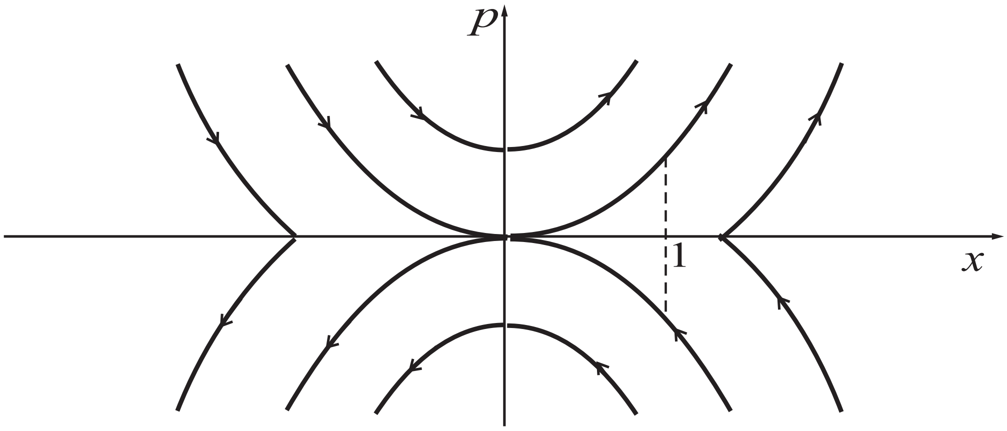

Рис 32.

Она отвечает управлению

$$u(t) = \begin{cases} -1, & \text{если } t \in [0, 1]; \\ 0, & \text{если } t \in [1, 3]; \\ 1, & \text{если } t \in [3, 4]; \end{cases}$$

при этом

$$x(t) = \begin{cases} -t + 1, & \text{если } t \in [0, 1]; \\ 0, & \text{если } t \in [1, 3]; \\ t - 3, & \text{если } t \in [3, 4]. \end{cases}$$

Легко проверяется, что построенное управление является оптимальным.$\diamondsuit$

Если в задаче (1)-(2) ограничения на управления отсутствуют ($\Omega = R^m$) и матрица $\mathbf{V}(t)$ обратима (например, положительно-определенна), то управление $\mathbf{u}(t)$ выписывается в явном виде.

Теорема 5.4.5. Если $\mathbf{u}(t)$ – оптимальное управление, то

$$\mathbf{u}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{V}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{p}(t),$$

где $\mathbf{p}(t)$ – решение системы

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\mathbf{A}^T(t)\mathbf{p}(t) + 2\mathbf{W}(t)\mathbf{x}(t).$$

Доказательство. По теореме 5.4.3, $\lambda = 1$ и поэтому

$$\mathbf{H_u}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) = \mathbf{B}^T(t)\mathbf{p}(t) - 2\mathbf{V}(t)\mathbf{u}(t) = \mathbf{0},$$

откуда получается нужное выражение для $\mathbf{u}(t)$.$\diamondsuit$

Пример 4. Для линейной системы

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -x_1 + u$$

минимизировать функционал

$$f(u) = \int\limits_0^{2\pi} u^2(t)dt$$

при условии, что заданы начальное $x_1(0) = x_{10},\ x_2(0) = x_{20}$ и конечное $x_1(2\pi) = 0,\ x_2(2\pi) = 0$ состояния.

Переходя к матричным обозначениям, положим

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix},$$

и запишем систему в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u. \tag{3}$$

Поскольку $V = 1$, то по теореме 5.4.5

$$u(t) = \frac{1}{2}\mathbf{B}^T\mathbf{p}(t),$$

где

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{A}\mathbf{p}. \tag{4}$$

Так как однородная система (4) имеет фундаментальную матрицу (нормированную при $t = 0$):

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

то

$$\mathbf{p} = \mathbf{X}(t)\mathbf{C},\ u = \frac{1}{2}\mathbf{B}^T\mathbf{X}(t)\mathbf{C},$$

а решение системы (3) по теореме 5.2.4 дается формулой

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{x}_0 + \int\limits_0^t \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(\tau)\mathbf{B}u(\tau)d\tau = \mathbf{X}(t)\mathbf{x}_0 +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^t \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(\tau)\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{X}(\tau)d\tau\cdot\mathbf{C}.$$

По условию $\mathbf{x}(2\pi)=\mathbf{0}$, откуда

$$\mathbf{0}=\mathbf{x}(2\pi)=\mathbf{x}_0+\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\mathbf{X}^{-1}(\tau)\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{X}(\tau)d\tau\cdot\mathbf{C},$$

и значит, для $\mathbf{C}$ получаем

$$\mathbf{C}=-2\left[\int\limits_0^{2\pi}\mathbf{X}^{-1}(\tau)\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{X}(\tau)d\tau\right]^{-1}\cdot\mathbf{x}_0=-\frac{2}{\pi}\mathbf{x}_0.$$

Поэтому

$$u(t)=-\frac{1}{\pi}\mathbf{B}^T\mathbf{X}(t)\mathbf{x}_0=\frac{1}{\pi}(x_{10}\sin t-x_{20}\cos t).$$

Упражнения. 1) Рассмотреть задачу о минимизации функционала

$$f(u)=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 u^2(t)dt$$

на траекториях управляемой системы

$$\dot{x}_1=x_2,\ \dot{x}_2=u,$$

для которой заданы начальное $x_1(0)=x_2(0)=1$ и конечное $x_1(1)=x_2(1)=0$ состояния.

2) Рассмотреть задачу о минимизации функционала

$$f(u)=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 u^2(t)dt$$

на траекториях управляемой системы

$$\dot{x}_1=x_2,\ \dot{x}_2=u,$$

для которой заданы начальное состояние $x_1(0)=x_2(0)=1$ и краевое условие на правом конце $x_1^2(1)+x_2^2(1)=1$.

3) Рассмотреть задачу о минимизации функционала

$$f(u)=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 u^2(t)dt$$

на траекториях управляемой системы

$$\dot{x}=u,$$

для которой заданы начальное $x(0) = x_0$ и конечное $x(1) = 0$ состояния, а управления удовлетворяют условию: $|u| \leq 1$.

4) Рассмотреть задачу о минимизации функционала

$$f(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (x_1^2(t) + x_2^2(t))dt$$

на траекториях управляемой системы

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = u,$$

для которой заданы начальное $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$ и конечное $x_1(1) = x_2(1) = 0$ состояния, а управления удовлетворяют условию: $|u| \leq 1$.

§ 5.5. ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

5.5.1. Принцип максимума

В задаче оптимального быстродействия, которая будет рассмотрена только для случая линейной системы, требуется найти допустимое управление $\mathbf{u}(t)$, переводящее систему

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

из начального состояния $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ в конечное $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$ за минимальное время t_1. Очевидно, без ограничения общности, можно считать, что $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ (рис. 33)

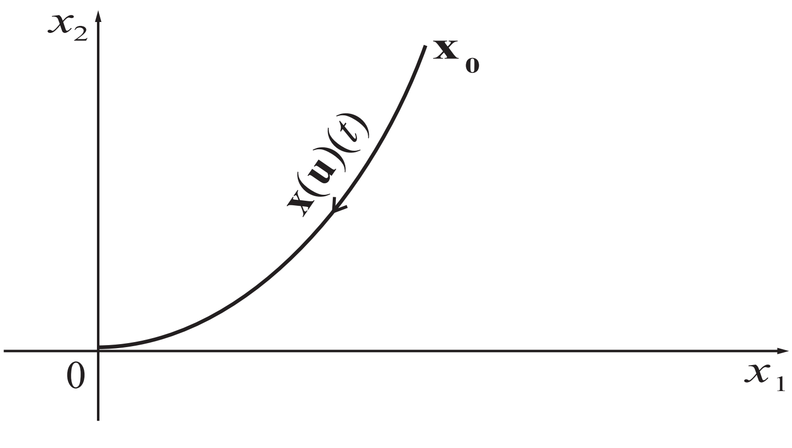

Рис 33.

Пусть $\mathbf{u}(t)$ – оптимальное управление и t_1 – минимальное время перехода. Дальше будет показано, что $\mathbf{u}(t)$ является оптимальным управлением в некоторой задаче со свободным правым концом и терминальным функционалом, откуда будет следовать, что $\mathbf{u}(t)$ удовлетворяет принципу максимума.

Определим в нормированном пространстве $\check{C}_m(0, t_1)$ подмножество

$$Q = \{\mathbf{v}(t) : \mathbf{v}(t) \in \Omega, \quad \forall t \in [0, t_1]\}.$$

Каждому управлению $\mathbf{v}(t) \in Q$ отвечает некоторое решение системы (траектория) $\mathbf{x}(\mathbf{v})(t)$, и значит, некоторая конечная точка $\mathbf{x}(\mathbf{v})(t_1)$ этой траектории (начальная точка $\mathbf{x}_0$ – фиксирована). Обозначим множество всех таких точек в R^n через G, то есть

$$G = \{\mathbf{x} : \exists \mathbf{v}(t) \in Q,\ \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{v})(t_1)\}.$$

Будем называть множество G множеством достижимости и установим некоторые свойства этого множества.

Лемма 5.5.1. Множество достижимости выпукло.

Доказательство. По теореме 5.2.4. решение $\mathbf{x}(\mathbf{u})(t_1)$ зависит от $\mathbf{u}$ линейно. Поэтому, если $\mathbf{x}_1 \in G$, $\mathbf{x}_2 \in G$, то есть $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(\mathbf{u}_1)(t_1)$, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}(\mathbf{u}_2)(t_1)$, для некоторых управлений $\mathbf{u}_1(t) \in Q$ и $\mathbf{u}_2(t) \in Q$, то

$$\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2 = \alpha \mathbf{x}(\mathbf{u}_1)(t_1) + (1-\alpha)\mathbf{x}(\mathbf{u}_2)(t_1) = \mathbf{x}(\alpha \mathbf{u}_1 + (1-\alpha)\mathbf{u}_2)(t_1).$$

Поскольку $\alpha \mathbf{u}_1 + (1-\alpha)\mathbf{u}_2 \in Q$, так как Q – выпуклое множество, то $\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2 \in G.\diamondsuit$

Лемма 5.5.2. Точка $\mathbf{0}$ – граничная точка множества достижимости G.

Доказательство. Предполагая противное, допустим, что $\mathbf{0} \in G^0$, где G^0 – внутренность множества G.

Пусть $D \subset G^0$ – n-мерный куб с центром в точке $\mathbf{0}$ и с вершинами $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_p$, координаты которых $x_{ij} = \pm\gamma$. По определению множества G, существуют управления $\mathbf{u}_i(t) \in Q$ такие, что $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}(\mathbf{u}_i)(t_1)$.

Рассмотрим точки $\mathbf{x}_{i\varepsilon} = \mathbf{x}(\mathbf{u}_i)(t_1 - \varepsilon)$. Так как решение $\mathbf{x}(\mathbf{u})(t)$ непрерывно зависит от t, то $\mathbf{x}_{i\varepsilon} \in G$, если ε достаточно мало.

Пусть D_ε – выпуклая оболочка точек $\mathbf{x}_{i\varepsilon}$, то есть

$$D_\varepsilon = \{\mathbf{x} :\ \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{x}_{i\varepsilon}, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1\}$$

(множество D_ε, как можно показать, многогранник в смысле главы 3). Поскольку $\mathbf{x}_{i\varepsilon} \in G$, то в силу выпуклости, $D_\varepsilon \subset G$.

Покажем, что $\mathbf{0} \in D_\varepsilon$ для достаточно малых ε (рис. 34).

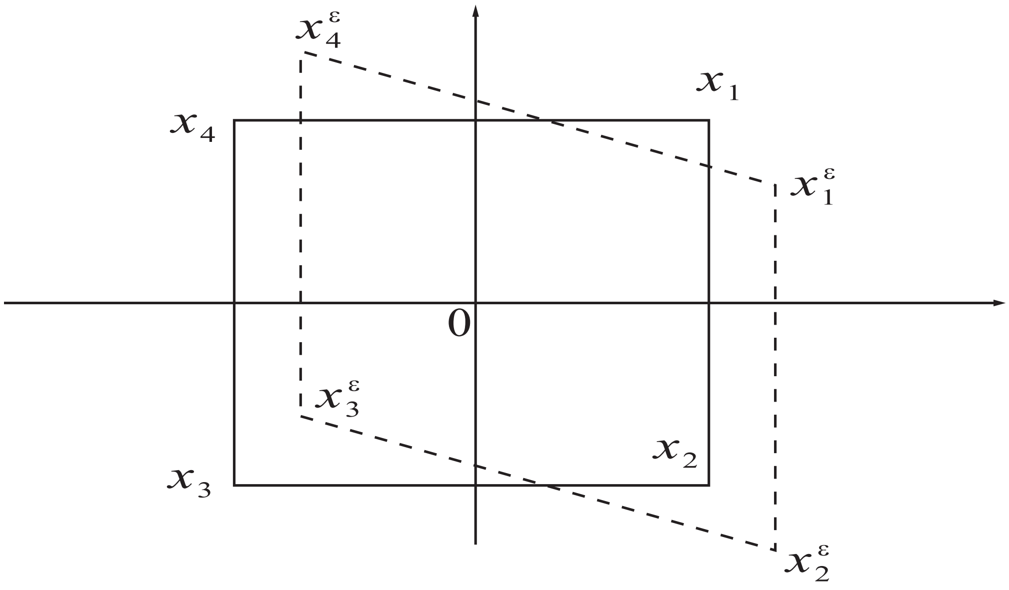

Рис 34.

В силу определения D_ε для этого достаточно показать, что существует решение $\alpha_1, ..., \alpha_p$ линейной алгебраической системы из $n+1$-го уравнения

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{x}_{i\varepsilon j} = 0, \ j = 1, ..., n, \quad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1,$$

такое, что $\alpha_i \geq 0, \ i = 1, ..., p.$

Считая, что $\mathbf{x}_1 = (\gamma, \gamma, ..., \gamma)$, $\mathbf{x}_2 = (-\gamma, \gamma, ..., \gamma)$, $\mathbf{x}_3 = (-\gamma, -\gamma, \gamma, ..., \gamma)$,..., получаем, что матрица этой системы при $\varepsilon = 0$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma & -\gamma & \cdots \\ \gamma & \gamma & -\gamma & \cdots \\ \gamma & \gamma & \gamma & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \gamma & \gamma & \gamma & \cdots \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что стоящий слева максимальный минор этой матрицы отличен от нуля и значит, для достаточно малых ε этот минор также не равен нулю.

Поэтому систему можно разрешить относительно $\alpha_1, ..., \alpha_{n+1}$, выразив их через $\alpha_{n+2}, ..., \alpha_p$ в виде линейных комбинаций с коэффициентами, непрерывно зависящими от ε.

Так как при $\varepsilon = 0$ существует решение системы, удовлетворяющее условию $\alpha_i > 0, i = 1, ..., p$, например, $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_p = 1/p$, то полагая $\alpha_{n+2}^\varepsilon = ... = \alpha_p^\varepsilon = 1/p$ и определяя по ним $\alpha_1^\varepsilon, ..., \alpha_{n+1}^\varepsilon$, получаем решение, удовлетворяющее условию $\alpha_i^\varepsilon \geq 0$, если ε достаточно мало.

Таким образом, для некоторого $\varepsilon > 0$ имеем $\mathbf{0} \in D_\varepsilon \subset G$, то есть

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^\varepsilon \mathbf{x}_{i\varepsilon} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^\varepsilon \mathbf{x}(\mathbf{u}_i)(t_1 - \varepsilon) = \mathbf{x}(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i^\varepsilon u^i)(t_1 - \varepsilon),$$

где

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i^\varepsilon = 1,\ \ \alpha_i^\varepsilon \geq 0.$$

Поскольку Q выпукло и $\mathbf{u}_i(t) \in Q$, то

$$\mathbf{u}_0(t) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^\varepsilon \mathbf{u}_i(t) \in Q.$$

Но это означает, что существует допустимое управление $\mathbf{u}_0(t)$, которое переводит систему из начального состояния $\mathbf{x}_0$ в конечное $\mathbf{0}$ за время $t_1 - \varepsilon$, что противоречит оптимальности $\mathbf{u}(t)$ (и минимальности t_1). Полученное противоречие доказывает лемму. $\diamondsuit$

Теорема 5.5.1. Если $\mathbf{u}(t)$ – оптимальное управление в линейной задаче быстродействия, то оно удовлетворяет принципу максимума: для всех $t \in [0, t_1]$

$$(\mathbf{p}(t), \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)) \geq (\mathbf{p}(t), \mathbf{B}(t)\mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{u} \in \Omega,$$

где $\mathbf{p}(t)$ – некоторое ненулевое решение сопряженнной системы

$$\dot{\mathbf{p}} = -\mathbf{A}^T(t)\mathbf{p}.$$

Доказательство. Так как множество достижимости G – выпуклое множество и $\mathbf{0}$ – его граничная точка, то по теореме 1.2.5 существует ненулевой линейный функционал $l(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}, \mathbf{x})$ такой, что

$$l(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}, \mathbf{x}) \geq (\mathbf{a}, \mathbf{0}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in G,$$

то есть $\mathbf{0}$ – точка минимума $l(\mathbf{x})$ на G.

Рассмотрим теперь вспомогательную задачу со свободным правым концом и терминальным функционалом: найти управление $\mathbf{u}(t)$, дающее минимум функционалу $l(\mathbf{x}(t_1, \mathbf{u}))$ на траекториях задачи

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

Но если управления $\mathbf{v}(t)$ пробегают Q, то по построению точки $\mathbf{x}(t_1, \mathbf{v})$ пробегают множество достижимости G, и значит,

$$\min_{\mathbf{v} \in Q} l(\mathbf{x}(\mathbf{v})(t_1)) = \min_{G} l(\mathbf{x}) = 0 = l(0) = l(\mathbf{x}(\mathbf{u})(t_1)),$$

то есть $\mathbf{u}(t)$ – оптимальное управление для этой вспомогательной задачи. По теореме 5.3.7 управление $\mathbf{u}(t)$ удовлетворяет принципу максимума.$\diamondsuit$

5.5.2. Случай системы с постоянными коэффициентами

В этом пункте будет показано, что при некоторых дополнительных предположениях принцип максимума является и достаточным условием оптимальности управления в задаче быстродействия для линейной системы с постоянными коэффициентами

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}(t).$$

Кроме того, будет установлен вид оптимального управления.

Будем считать дальше, что область управления Ω – ограниченный многогранник в R^m.

Определение. Линейная задача быстродействия удовлетворяет условию общности положения, если для любого вектора $\mathbf{a} \in R^m$, параллельного некоторому ребру многогранника Ω, вектор $\mathbf{b} = \mathbf{B}\mathbf{a} \in R^n$ не принадлежит никакому собственному инвариантному подпространству матрицы $\mathbf{A}$ (действующей, как оператор из R^n в R^n).$\diamondsuit$

Для проверки этого условия можно использовать следующую лемму.

Лемма 5.5.3. Вектор $\mathbf{b}$ принадлежит собственному инвариантному подпространству матрицы $\mathbf{A}$ в R^n тогда и только тогда, когда вектора $\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, ..., \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}$ линейно зависимы.

Доказательство. 1) Достаточность. Пусть вектора $\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, ..., \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}$ линейно зависимы и E – подпространство, натянутое на них. Очевидно, что $\dim E < n$. Докажем, что E – собственное подпространство матрицы A.

Если $\alpha_1\mathbf{b}+\alpha_2\mathbf{A}\mathbf{b}+...+\alpha_n\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} = \mathbf{0}$ и k – наибольший индекс, для которого $\alpha_k \neq 0$, то

$$\mathbf{A}^k\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{b} + ... + \beta_k\mathbf{b}.$$

Поэтому, если $\mathbf{c} \in E$, то

$$\mathbf{c} = \gamma_1\mathbf{b} + \gamma_2\mathbf{A}\mathbf{b} + ... + \gamma_n\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}$$

и

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \gamma_1\mathbf{A}\mathbf{b} + \gamma_2\mathbf{A}^2\mathbf{b} + ... + \gamma_n\mathbf{A}^n\mathbf{b}.$$

Но поскольку

$$\mathbf{A}^n\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} + ... + \beta_k\mathbf{A}^{n-k}\mathbf{b},$$

то $\mathbf{A}\mathbf{c}$ – линейная комбинация векторов $\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, ..., \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}$ и следовательно, $\mathbf{A}\mathbf{c} \in E$, то есть E – собственное инвариантное подпространство матрицы $\mathbf{A}$, содержащее E.

2) Необходимость. Если E – собственное инвариантное подпространство и $\mathbf{b} \in E$, то в силу его инвариантности $\mathbf{Ab} \in E$,...,$\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \in E$, а так как $\dim E < n$, то $\mathbf{b}, \mathbf{Ab}, ..., \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}$ – линейно зависимы. $\diamondsuit$

Лемма 5.5.4. Пусть $\mathbf{p}(t)$ – некоторое ненулевое решение сопряженной системы

$$\dot{\mathbf{p}} = -\mathbf{A}^T\mathbf{p}$$

и $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ – вектор из R^n.

Если $(\mathbf{p}(t), \mathbf{b}) = 0$ для всех t из некоторого промежутка $[t', t'']$, то вектор $\mathbf{b}$ принадлежит некоторому собственному инвариантному подпространству матрицы $\mathbf{A}$.

Доказательство. Положим

$$E = \{\mathbf{y} \in R^n : (\mathbf{p}(t), \mathbf{y}) = 0, \quad \forall t \in [t', t'']\}.$$

E – собственное подпространство в R^n, так как $\mathbf{p}(t)$ ненулевое решение.

E – инвариантное подпространство, так как если $\mathbf{y} \in E$, то дифференцируя по t равенство $(\mathbf{p}(t), \mathbf{y}) = 0$, имеем

$$0 = \left(\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt}, \mathbf{y}\right) = (-\mathbf{A}^T\mathbf{p}(t), \mathbf{y}) = -(\mathbf{p}(t), \mathbf{Ay}),$$

то есть $\mathbf{Ay} \in E$. Поскольку $\mathbf{b} \in E$, то лемма доказана. $\diamondsuit$

Теперь можно доказать достаточность принципа максимума.

Теорема 5.5.2. Если линейная задача быстродействия удовлетворяет условию общности положения, точка $\mathbf{0} \in \Omega \subset R^m$, но не является вершиной многогранника Ω и $\mathbf{u}(t)$ – допустимое управление, переводящее систему из начальной точки $\mathbf{x}_0$ в конечную точку $\mathbf{0}$ за некоторое время t_1, то для того, чтобы управление $\mathbf{u}(t)$ было оптимальным, достаточно, чтобы оно удовлетворяло принципу максимума.

Доказательство. Доказывая теорему от противного, допустим, что $\mathbf{u}(t)$ удовлетворяет принципу максимума, но не является оптимальным.

Это означает, что существует такое допустимое управление $\tilde{\mathbf{u}}(t)$, которое переводит систему из точки $\mathbf{x}_0$ в точку $\mathbf{0}$ за время t_2, меньшее, чем t_1.

Так как, по условию, $\mathbf{u}(t)$ удовлетворяет принципу максимума, то для некоторого ненулевого решения $\mathbf{p}(t)$ однородной сопряженной системы имеем

$$(\mathbf{p}(t), \mathbf{Bu}(t)) \geq (\mathbf{p}(t), \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}(t)), \quad \forall t \in [0, t_2]$$

и значит,

$$\int\limits_0^{t_2} (\mathbf{p}(t), \mathbf{Bu}(t) - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}(t))dt \geq 0.$$

Но для любого управления $\mathbf{v}(t)$ справедливо тождество

$$(\mathbf{p}(t), \mathbf{B}\mathbf{v}(t)) = \left(\mathbf{p}(t), \frac{d\mathbf{x}(\mathbf{v})(t)}{dt} - \mathbf{A}\mathbf{x}(\mathbf{v})(t)\right) = \left(\mathbf{p}(t), \frac{d\mathbf{x}(\mathbf{v})(t)}{dt}\right) +$$

$$+(-\mathbf{A}^T\mathbf{p}(t), \mathbf{x}(\mathbf{v})(t)) = \left(\mathbf{p}(t), \frac{d\mathbf{x}(\mathbf{v})(t)}{dt}\right) + \left(\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt}, \mathbf{x}(\mathbf{v})(t)\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}(\mathbf{p}(t), \mathbf{x}(\mathbf{v})(t)).$$

Поэтому полученное выше неравенство можно переписать следующим образом:

$$\int\limits_0^{t_2} \frac{d}{dt}(\mathbf{p}(t), \mathbf{x}(\mathbf{u})(t) - \mathbf{x}(\tilde{\mathbf{u}})(t))dt \geq 0,$$

откуда, так как $\mathbf{x}(\tilde{\mathbf{u}})(t_2) = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}(\tilde{\mathbf{u}})(0) = \mathbf{x}(\mathbf{u})(0) = \mathbf{x}_0$, получаем $(\mathbf{p}(t_2), \mathbf{x}(\mathbf{u})(t_2)) \geq 0$.

С другой стороны, поскольку $\mathbf{0} \in \Omega$, то

$$(\mathbf{p}(t), \mathbf{B}\mathbf{u}(t)) = \max_{\mathbf{u}\in\Omega}(\mathbf{p}(t), \mathbf{B}\mathbf{u}) \geq 0$$

и поэтому, снова используя выведенное выше тождество и условие $\mathbf{x}(\mathbf{u})(t_1) = \mathbf{0}$, находим

$$(\mathbf{p}(t_2), \mathbf{x}(\mathbf{u})(t_2)) = (\mathbf{p}(t_2), \mathbf{x}(\mathbf{u})(t_2)) - (\mathbf{p}(t_1), \mathbf{x}(\mathbf{u})(t_1)) =$$

$$= -\int\limits_{t_2}^{t_1} \frac{d}{dt}(\mathbf{p}(t), \mathbf{x}(\mathbf{u})(t))dt = -\int\limits_{t_2}^{t_1}(\mathbf{p}(t), \mathbf{B}\mathbf{u}(t))dt \leq 0.$$

Следовательно, $(\mathbf{p}(t_2), \mathbf{x}(\mathbf{u})(t_2)) = 0$, а значит, и

$$\int\limits_{t_2}^{t_1}(\mathbf{p}(t), \mathbf{B}\mathbf{u}(t))dt = 0.$$

Так как $(\mathbf{p}(t), \mathbf{B}\mathbf{u}(t)) \geq 0$, то отсюда получаем, что $(\mathbf{p}(t), \mathbf{B}\mathbf{u}(t)) = 0$ для всех $t \in [t_2, t_1]$.

Обозначим через Ω_1 ту грань многогранника Ω, для которой $\mathbf{0}$ является внутренней точкой (такая грань существует, так как $\mathbf{0}$ – не вершина Ω; в частности, если $\mathbf{0}$ – внутренняя точка Ω, то $\Omega_1 = \Omega$).

Если ввести линейный функционал $l_t(\mathbf{u}) = (\mathbf{p}(t), \mathbf{B}\mathbf{u})$, то по доказанному

$$\max_{\mathbf{u}\in\Omega_1} l_t(\mathbf{u}) = \max_{\mathbf{u}\in\Omega_1}(\mathbf{p}(t), \mathbf{B}\mathbf{u}) \leq (\mathbf{p}(t), \mathbf{B}\mathbf{u}(t)) = 0,\ \forall t \in [t_2, t_1],$$

то есть $l_t(\mathbf{u}) \leq 0$ на Ω_1. Но во внутренней точке $\mathbf{0} \in \Omega_1$ имеем $l_t(\mathbf{0}) = (\mathbf{p}(t), \mathbf{B0}) = 0$ и поэтому, по лемме 1.2.1, $l_t(\mathbf{u}) = 0$ на Ω_1, то есть

$$(\mathbf{p}(t), \mathbf{Bu}) \equiv 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \Omega_1, \ \forall t \in [t_2, t_1].$$

Поэтому, если $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ – концы некоторого ребра из Ω_1, то для вектора $\mathbf{a} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, параллельного этому ребру, имеем $(\mathbf{p}(t), \mathbf{Ba}) = 0$, $\forall t \in [t_2, t_1]$. Отсюда по лемме 5.4.4 получаем, что вектор $\mathbf{Ba}$ принадлежит некоторому собственному инвариантному подпространству матрицы $\mathbf{A}$, что противоречит условию. Следовательно, $\mathbf{u}(t)$ – оптимальное управление.$\diamondsuit$

В следующей теореме устанавливается вид оптимального управления.

Теорема 5.5.3. Если линейная задача быстродействия удовлетворяет условию общности положения и оптимальное управление существует, то оно является кусочно-постоянной функцией, принимающей значения в вершинах многогранника Ω и имеющей конечное число точек разрыва; оптимальное управление однозначно (с точностью до значений в точках разрыва) определяется из принципа максимума.

Доказательство. Если $\mathbf{u}(t)$ – оптимальное управление, то оно удовлетворяет принципу максимума, то есть $\forall t \in [0, t_1]$ и $\forall \mathbf{u} \in \Omega$

$$(\mathbf{p}(t), \mathbf{Bu}(t)) \geq (\mathbf{p}(t), \mathbf{Bu}),$$

где $\mathbf{p}(t)$ – некоторое ненулевое решение сопряженной системы.

Введем на R^m линейный функционал $l_t(\mathbf{u}) = ((\mathbf{p}(t), \mathbf{Bu})$, тогда для фиксированного t точка $\mathbf{u}(t)$ является точкой максимума $l_t(\mathbf{u})$ на Ω. По теореме 3.3.5 максимум $l_t(\mathbf{u})$ на Ω достигается либо в единственной точке, которая является вершиной, и значит, в этом случае точка $\mathbf{u}(t)$ – вершина, либо существует ребро многогранника Ω, все точки которого являются точками максимума $l_t(\mathbf{u})$ на Ω.

Докажем, что второй случай может иметь место лишь в конечном числе точек отрезка $[0, t_1]$.

Поскольку число ребер многогранника Ω конечно, достаточно показать, что функция $l_t(\mathbf{u})$ может достигать на некотором фиксированном ребре максимума лишь для конечного числа моментов времени.

Пусть для некоторого t все точки ребра с концами $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ являются точками максимума $l_t(\mathbf{u})$ на Ω, тогда

$$(\mathbf{p}(t), \mathbf{Bu}_1) = (\mathbf{p}(t), \mathbf{Bu}_2) = \max_{\mathbf{u} \in \Omega} (\mathbf{p}(t), \mathbf{Bu})$$

и поэтому для вектора $\mathbf{a} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, параллельного ребру, имеем
$(\mathbf{p}(t), \mathbf{Ba}) = 0$.

Если бы это соотношение выполнялось для бесконечного числа точек отрезка $[0,t_1]$, то в силу аналитичности функции $\mathbf{p}(t)$ (как решения системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами), отсюда бы следовало, что

$$(\mathbf{p}(t),\mathbf{Ba}) \equiv 0.$$

По лемме 5.5.4 это означало бы, что вектор $\mathbf{Ba}$ принадлежит собственному инвариантному подпространству матрицы $\mathbf{A}$, что противоречит условию общности положения.

Таким образом, за исключением конечного числа моментов времени $\tau_1,\ldots,\tau_k$, оптимальное управление $\mathbf{u}(t)$ определяется единственным образом и принимает значения в вершинах многогранника Ω.

Отрезок $[0,t_1]$ разбивается точками $\tau_1,\ldots,\tau_k$ на конечное число интервалов. Докажем, что на каждом из таких интервалов функция $\mathbf{u}(t)$ постоянна.

Допустим, что это не так и пусть управление $\mathbf{u}(t)$ принимает на $[\tau_i,\tau_{i+1}]$ значения в вершинах $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_r$ многогранника Ω.

Обозначим через I_j множество точек $t\in(\tau_i,\tau_{i+1})$, в которых $\mathbf{u}(t)=\mathbf{u}_j$, то есть $\mathbf{u}_j$ является единственной точкой максимума $l_t(\mathbf{u})$ на I_j. Каждое из множеств I_j открыто, так как если $t\in I_j$, то $(\mathbf{p}(t),\mathbf{Bu}_j)>(\mathbf{p}(t),\mathbf{Bu}_s)$ для всех $s\neq j$ и по непрерывности это неравенство выполняется в некоторой окрестности точки t. Так как $\mathbf{u}(t)$ определяется на (τ_i,τ_{i+1}) единственным образом, то I_j для разных j не пересекаются.

Таким образом, интервал (τ_i,τ_{i+1}) представлен в виде объединения открытых непересекающихся множеств, что невозможно ввиду его связности. Полученное противоречие показывает, что управление $\mathbf{u}(t)$ постоянно на интервале (τ_i,τ_{i+1}). $\diamondsuit$

Точки разрыва τ_i управления $\mathbf{u}(t)$ называются точками переключения управления и теорема 5.5.3 утверждает таким образом, что число точек переключения конечно.

5.5.3. Примеры

Пример 1. Рассмотрим движение вдоль оси x материальной точки единичной массы под действием силы (управления) $u(t)$.

Считая, что $|u|\le 1$, найдем управление $u(t)$, переводящее точку из начального состояния $x(0)=x_0$, $\dot x(0)=\dot x_0$ в состояние покоя $x(t_1)=0$, $\dot x(t_1)=0$ за минимальное время t_1.

Закон движения точки $x(t)$ определяется как решение задачи

$$\ddot x = u(t),\quad x(0)=x_0,\ \dot x=\dot x_0.$$

Перейдем к системе уравнений первого порядка, полагая $x = x_1,\ \dot{x} = x_2$; тогда для x_1 и x_2 получаем

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = u, \quad x_1(0) = x_0,\ x_2(0) = \dot{x}_0. \tag{1}$$

Так как здесь

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

управление одномерно и вектор B не является собственным вектором матрицы A, то выполняется условие общности положения.

Сопряженная система в этой задаче имеет вид

$$\dot{p}_1 = 0,\ \dot{p}_2 = -p_1,$$

откуда

$$p_1(t) = C_1 = \text{const},\ p_2(t) = -C_1 t + C_2.$$

Из условия принципа максимума

$$p_2(t)u(t) \geq p_2(t)u, \quad \forall u \in [-1, 1],$$

находим, что

$$u(t) = \text{sign}\ p_2(t) = \text{sign}\ (-C_1 t + C_2). \tag{2}$$

В зависимости от знаков C_1 и C_2, управление $u(t)$ может иметь один из следующих четырех видов:
1) $u(t) \equiv 1$;
2) $u(t) \equiv -1$;
3) $u(t) = 1$, если $t < C_1^{-1}C_2$ и $u(t) = -1$, если $t > C_1^{-1}C_2$;
4) $u(t) = -1$, если $t < C_1^{-1}C_2$ и $u(t) = 1$, если $t > C_1^{-1}C_2$.
Если $u(t) \equiv 1$, то система (1) принимает вид

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = 1, \tag{3}$$

откуда, умножая второе уравнение на x_2 и вычитая его из первого, находим уравнение фазовых траекторий: $x_1 = x_2^2/2 + C$, то есть в этом случае траектории системы образуют семейство парабол (рис. 35).

Стрелкой указано направление движения изображающей точки по траектории (если $x_2 > 0$, то $\dot{x}_1 > 0$).

Аналогично, если $u(t) \equiv -1$, то траектории системы

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -1 \tag{4}$$

– это параболы $x_1 = -x_2^2/2 + C$ (рис. 36).

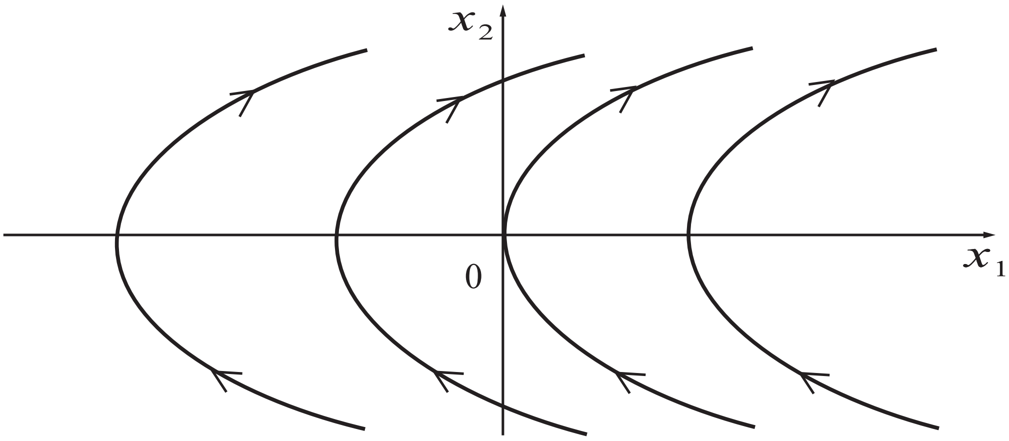

Рис 35.

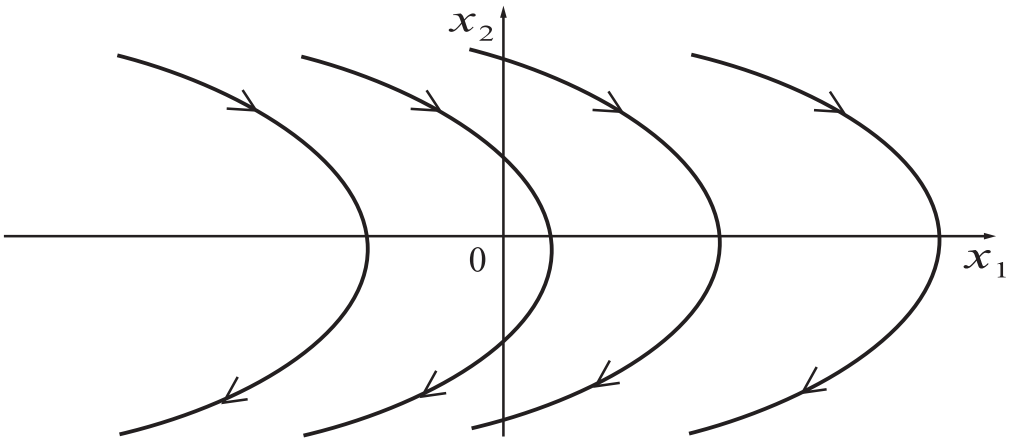

Рис 36.

Наконец, если управление $u(t)$ меняет знак, то до момента переключения $t = C_1^{-1}C_2$ движение происходит по траектории системы (3), а затем по траектории системы (4), либо наоборот – сначала по траектории системы (4), а затем по траектории системы (3).

Поэтому все траектории, отвечающие управлениям вида (2) и заканчивающиеся в начале координат (точке покоя), выглядят так, как показано на рис. 37.

В каждой точке фазовой плоскости (x_1, x_2) начинается единственная траектория указанного вида и значит, для любой начальной точки $(x_0, \dot{x}_0)$ построено (единственным образом) управление $u(t)$, переводящее систему из этой точки в начало координат и удовлетворяющее принципу максимума. По теореме 5.5.2 это управление является оптимальным.

В точках линии AOB происходит переход с траекторий системы (3) на траектории системы (4) и наоборот; эта линия называется линией переключений. $\diamondsuit$

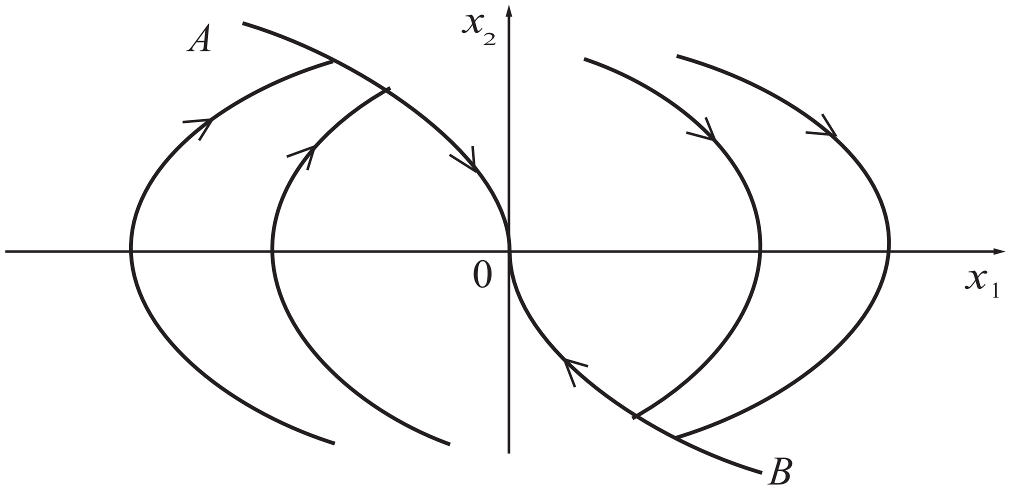

Рис 37.

Пример 2. Задача быстродействия для гармонического осциллятора (рис. 38).

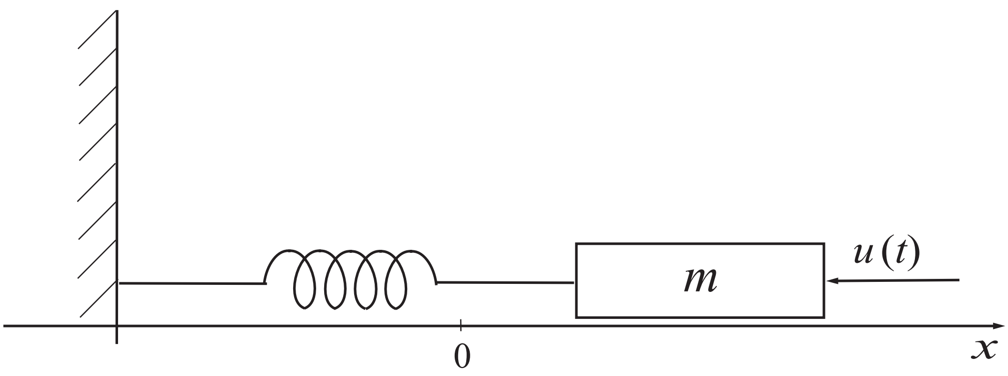

Рис 38.

Считая массу осциллятора и жесткость пружины равными единице, получаем уравнение движения осциллятора под действием переменной силы (управления) $u(t)$:

$$\ddot{x} + x = u(t).$$

Требуется найти управление $u(t)$, удовлетворяющее условию $|u| \leq 1$, переводящее систему из начального состояния $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ в состояние покоя $x(t_1) = 0$, $\dot{x}(t_1) = 0$ за минимальное время t_1.

Вводя переменные $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, перейдем к системе двух уравнений первого порядка

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -x_1 + u(t). \tag{1}$$

Так же, как и в предыдущем примере, непосредственно проверяется, что условие общности положения выполнено.

Сопряженная система имеет вид

$$\dot{p}_1 = p_2,\ \dot{p}_2 = -p_1,$$

откуда

$$p_1(t) = a\sin(t-\varphi),\ p_2(t) = a\cos(t-\varphi).$$

Управления, удовлетворяющие принципу максимума, определяются из условия

$$p_2(t)u(t) = \max_{u\in[-1,1]} p_2(t)u,$$

откуда сразу следует, что

$$u(t) = \text{sign}\ p_2(t) = \text{sign}\ \cos(t-\varphi). \tag{2}$$

Поэтому все такие управления имеют вид, указанный на рис. 39 и получаются одно из другого сдвигом.

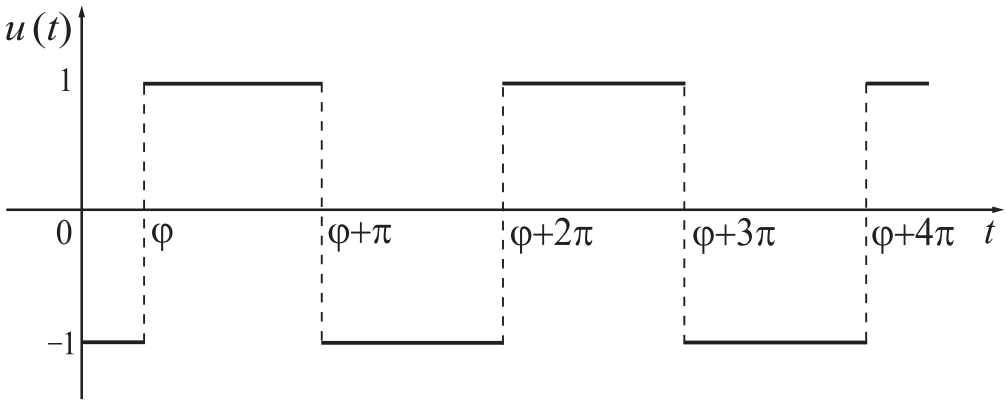

Рис 39.

Если $u(t) \equiv 1$, то из (1) получаем

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -x_1 + 1, \tag{3}$$

откуда, умножая первое уравнение на $x_1 - 1$, второе на x_2, складывая и интегрируя, находим для этого случая уравнение фазовых траекторий:

$$(x_1-1)^2 + x_2^2 = C^2.$$

Таким образом, фазовые траектории системы (3) образуют семейство окружностей с центром в точке $(1,0)$ (рис. 40). Стрелкой указано направление движения изображающей точки по траектории (если $x_2 > 0$, то $\dot{x}_1 > 0$).

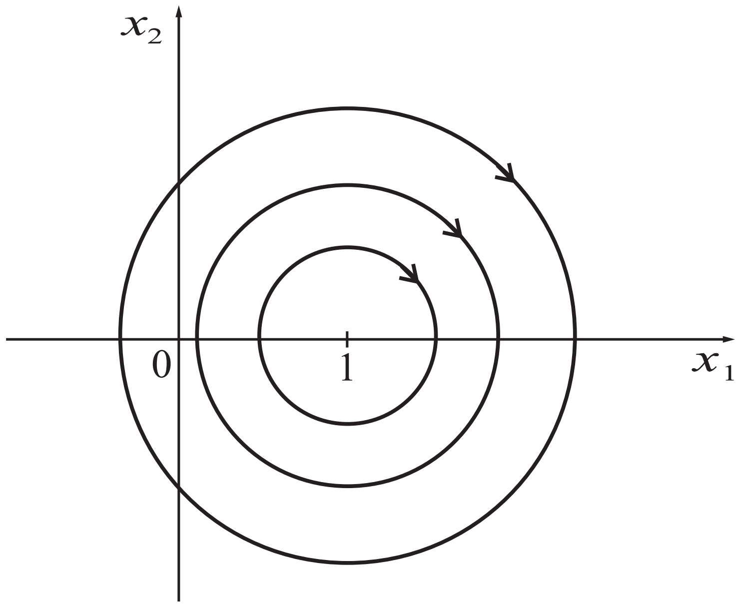

Рис 40.

Аналогично, если $u(t) \equiv -1$, то траектории системы

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -x_1 - 1 \tag{4}$$

– это окружности с центром в точке $(-1, 0)$ (рис. 41).

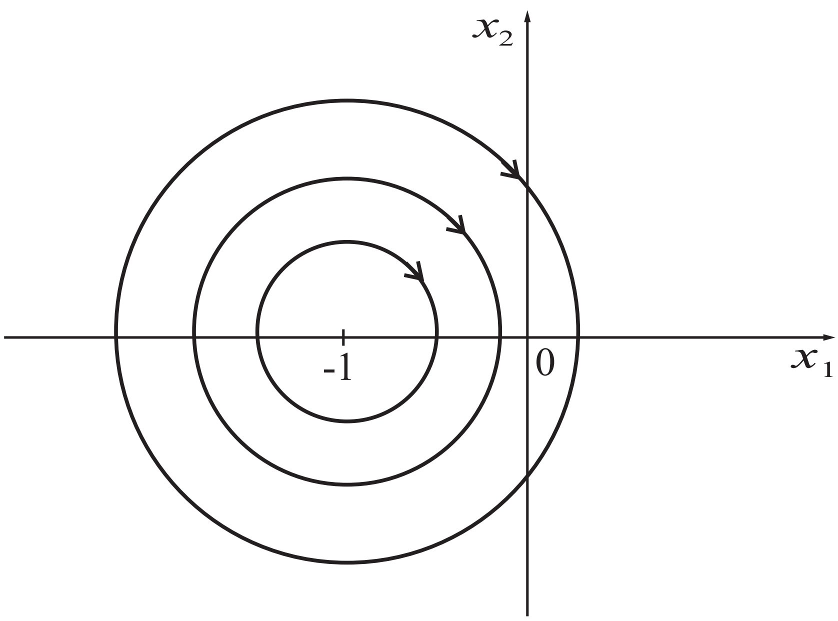

Рис 41.

Если $u(t)$ – управление вида (2), то соответствующие траектории системы (1) состоят из кусков траекторий систем (3) и (4), причем переход от системы (3) к системе (4) и наоборот, происходит в точках, соответствующих точкам переключения управления.

Допустим, что $u(t)$ – управление вида (2), приводящее систему в начало координат $(0,0)$ в некоторый момент времени t_1. Установим вид соответствующей траектории.

Возможны два случая:

1) В конечный момент времени $u(t_1) = 1$ (рис. 42).

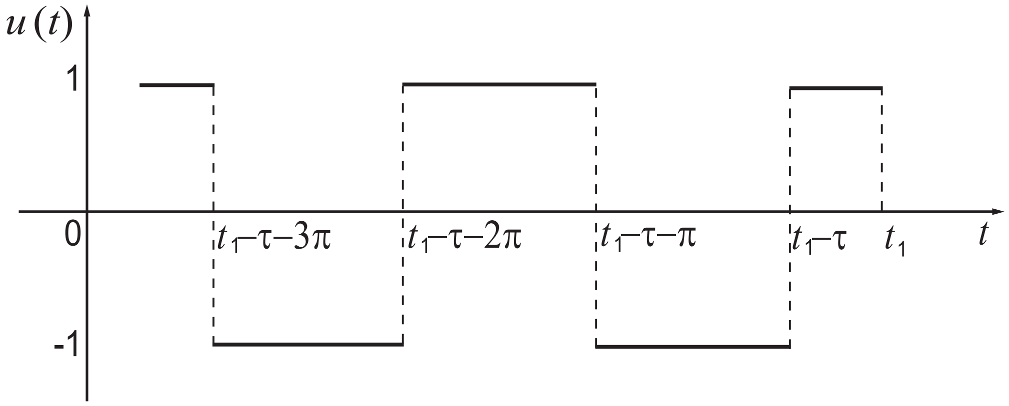

Рис 42.

Построим траекторию $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, восстанавливая ее, начиная с конечной точки, и двигаясь в направлении, обратном «течению» времени t.

На отрезке $[t_1-\tau, t_1]$, $u(t) = 1$ и поэтому из точки $(0,0)$ выходит траектория системы (3). В момент времени $t_1 - \tau$ происходит переключение управления и на промежутке $[t_1 - \tau - \pi, t_1 - \tau)$, $u(t) = -1$. Поэтому, начиная с точки A, движение происходит по траектории системы (4) до точки B, причем за время π изображающая точка пройдет половину окружности и следующее переключение произойдет в точке B. Начиная с точки B движение опять будет происходить по траектории системы (3) до точки C и так далее (рис. 43).

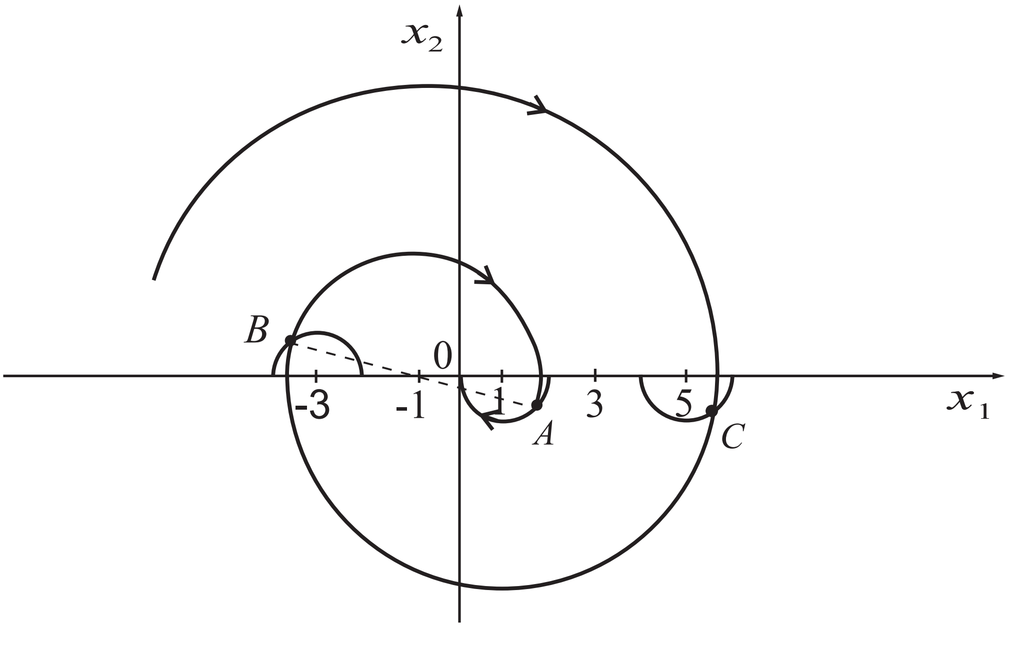

Рис 43.

2) В конечный момент времени $u(t_1) = -1$ (рис. 44).

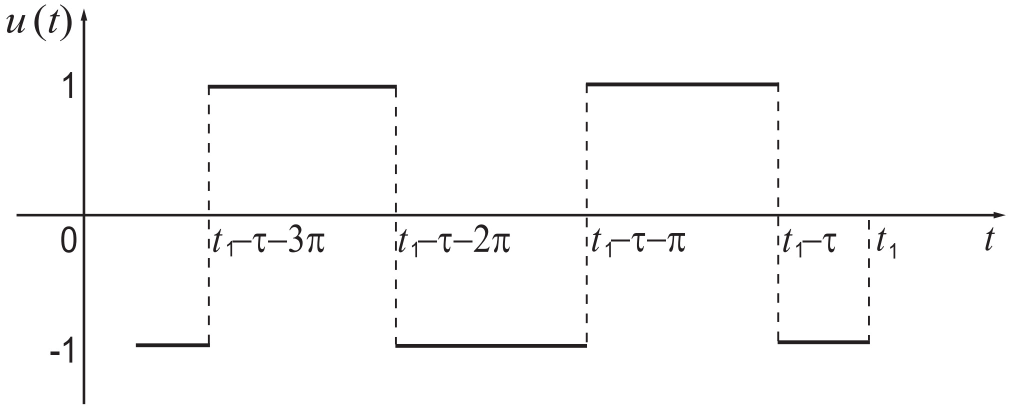

Рис 44.

В этом случае на участке $[t_1 - \tau, t_1]$ движение происходит по траектории системы (4), затем происходит переключение в точке A_1 и так далее (рис. 45).

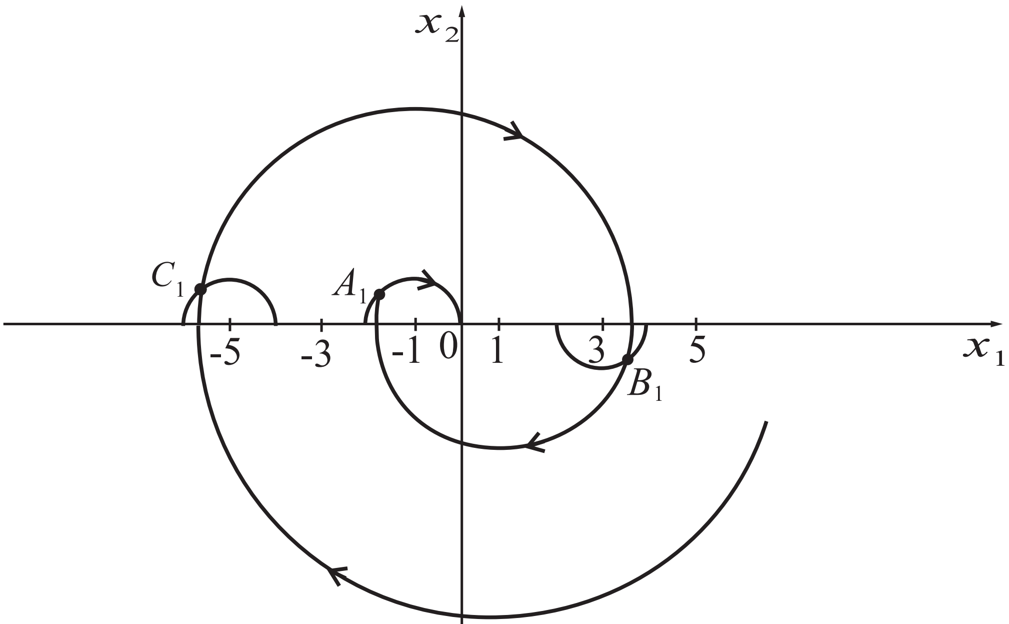

Рис 45.

Объединяя эти два случая, можно для любой начальной точки $(x_0, \dot{x}_0)$ построить оптимальную траекторию (рис. 46), по которой система переходит в начальную точку за минимальное время.

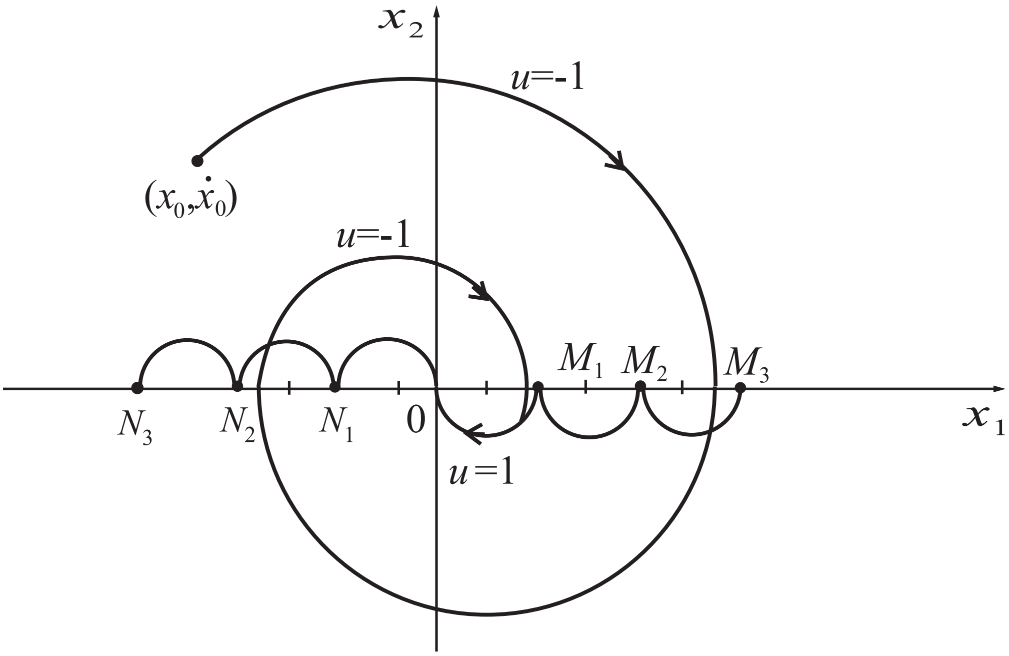

Рис 46.

Кривую $...N_3N_2N_1OM_1M_2M_3...$ будем снова называть линией переключений.

Если точка $(x_0, \dot{x}_0)$ находится, например, над линией переключений, то движение происходит по траектории системы (4), проходящей через эту точку, до пересечения с линией переключений. Начиная с точки пересечения движение происходит по траектории системв (3) до следующего пересечения с линией переключений и так далее.

Построенная траектория отвечает управлению, удовлетворяющему принципу максимума, приводит систему в начало координат и значит, по теореме 5.4.2, эта траектория и соответствующее управление являются оптимальными. $\diamondsuit$

Упражнения. Считая, что начальное и конечное (начало координат) состояния заданы, и рассматривая управления, удовлетворяющие ограничению $|u| \leq 1$, решить задачу быстродействия (то есть найти управление $u(t)$, минимизирующее t_1) для следующих управляемых систем:

1) $\dot{x} = bx + u$;
2) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 2x_2 + u$;
3) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 2x_2 + u$;
4) $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_1 + u$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамов Л.М., Капустин В.Ф. Математическое программирование. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1976.

2. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979.

3. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. – М.: Наука, 1984.

4. Аопи М. Введение в методы оптимизации. – М.: Наука, 1977.

5. Ахиезер Н.И. Вариационное исчисление. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1981.

6. Балакришнан А.В. Прикладной функциональный анализ. – М.: Наука, 1980.

7. Блисс Г. Лекции по вариационному исчислению. – М.: ИЛ, 1950.

8. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1979.

9. Буслаев В.С. Вариационное исчисление. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.

10. Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление. – М.: Изд-во МГТУ, 1999.

11. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980.

12. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981.

13. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. – М.: Наука, 1973.

14. Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач. – М.: Изд-во МГУ, 1985.

15. Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Оптимизация. Теория. Примеры. Задачи. – М.: Эдиториал УРСС, 2000.

16. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. – М.: Физматгиз, 1960.

17. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967.

18. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. – М.: Физматгиз, 1961.

19. Гирсанов И.В. Лекции по математической теории экстремальных задач. –М.: Изд-во МГУ, 1970.

20. Гноенский Л.С., Каменский Г.А., Эльсгольц Л.Э. Математические основы теории управляемых систем. – М.: Наука, 1969.

21. Данциг Дж. Б. Линейное программирование, его приложения и обобщения. – М.: Прогресс, 1966.

22. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. –М.: Наука, 1967.

23. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. – М.: Наука, 1981.

24. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. –М.: Мир, 1964.

25. Заславский Ю.Л. Сборник задач по линейному программированию. – М.: Наука, 1969.

26. Зойтендейк Г. Методы возможных направлений. – М.: ИЛ, 1963.

27. Зонгвилл У.И. Нелинейное программирование. Единый подход. – М.: Сов. радио, 1973.

28. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974.

29. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977.

30. Капустин В.Ф. Практические занятия по курсу математического программирования. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1976.

31. Карманов В.Г. Математическое программирование. – М.: Наука, 1975.

32. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989.

33. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. – М.: Наука, 1973.

34. Кротов В.Ф., Лагота Б.А., Лобанов С.М., Данилина Н.И., Сергеев С.И. Основы теории оптимального управления. – М.: Высш. шк., 1990.

35. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. – М.: Наука, 1972.

36. Лич Дж. У. Классическая механика. – М.: ИЛ, 1961.

37. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. – М.: Мир, 1975.

38. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1975.

39. Михлин С.Г. Курс математической физики. – М.: Наука, 1968.

40. Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем. – М.: Наука, 1971.

41. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. – М.: Наука, 1975.

42. Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации. – М.: Наука, 1978.

43. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. – М.: Наука, 1983.

44. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Физматгиз, 1961.

45. Пшеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума. – М.:Наука, 1969.

46. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. – М.: Наука, 1975.

47. Розов Н.Х. Математика на службе инженера, сб. статей под ред. Н.Х. Розова. – М.: Знание, 1973.

48. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. – М.: Наука, 1978.

49. Рокафеллар Р.Т. Выпуклый анализ, – М.: Мир, 1973.

50. Сеа Ж. Оптимизация. Теория и алгоритмы. – М.: Мир, 1973.

51. Сейдж Э.П., Уайт Г.С. Оптимальное управление системами. – М.: Радио и связь, 1982.

52. Смирнов В.И. Курс высшей математики. т.4,ч.1.– М.: Наука, 1974.

53. Тихомиров В.М. Рассказы о максимумах и минимумах. – М.: Наука, 1986.

54. Фиакко А., Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование. – М.: Мир, 1972.

55. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. –М.: Мир, 1970.

56. Шварц Л. Анализ. – М.: Мир, 1972.

57. Щитов И.Н. Лекции по методам оптимизации. – Днепр-ск.: Изд-во ДГУ, 1981.

58. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1965.

59. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование. – М.: Наука, 1969.

60. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. – М.: Мир, 1974.