

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Глава 1. Введение в реализацию методов конечных элементов	8
1.1. Введение	8
1.2. Физические проблемы, их математические модели и конечно-элементное решение проблем	9
1.3. Конечно-элементный анализ как неотъемлемая часть процесса автоматического проектирования с помощью компьютера	19
1.4. Предложения о том, как изучать методы конечных элементов	22
Глава 2. Векторы, матрицы и тензоры	26
2.1. Введение	26
2.2. Введение в матрицы	26
2.3. Векторные пространства	43
2.4. Определение тензоров	49
2.5. Симметричная задача о собственных значениях $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$	61
2.6. Отношение Рэлея и минимаксная характеристика собственных значений	70
2.7. Нормы векторов и матриц	76
2.8. Упражнения	82
Глава 3. Некоторые важнейшие понятия инженерного анализа и введение в метод конечных элементов	87
3.1. Введение	87
3.2. Исследование математических моделей для дискретных систем	88
3.3. Исследование математических моделей для непрерывных систем	114
3.4. Наложение принудительных ограничений	152
Глава 4. Формулировка метода конечных элементов — линейный анализ в механике твердого тела и механике конструкций	157
4.1. Введение	157
4.2. Формулировка метода конечных элементов, основанного на изучении смещений	158
4.3. Сходимость результатов анализа	232
4.4. Несовместимые и смешанные модели конечных элементов	266
4.5. Условие inf-sup для исследования поведения несжимаемой среды и проблемы создания конструкций	302

Глава 5. Определение и расчет изопараметрических конечно-элементных матриц	337
5.1. Введение	337
5.2. Изопараметрический вывод матрицы жесткости для стержневого элемента . .	337
5.3. Модели для элементов сплошной среды	339
5.4. Описание конструктивных элементов	393
5.5. Численное интегрирование	448
5.6. Компьютерная программа для практического применения изопараметрических конечных элементов	473
Глава 6. Нелинейный анализ для конечных элементов в механике твердых тел и механике конструкций.	478
6.1. Введение в нелинейный анализ	478
6.2. Формулировка уравнений движения в механике сплошной среды, составленных с пошаговым приростом	489
6.3. Изопараметрические конечные элементы сплошной среды, базирующиеся на учете смещений	529
6.4. Модели смещение/давление для больших деформаций	552
6.5. Конструктивные элементы.	558
6.6. Использование основополагающих соотношений	571
6.7. Условия контакта	613
6.8. Некоторые практические соображения	619
Глава 7. Конечно-элементные исследования теплопередачи, задач теории поля и течений несжимаемой жидкости.	631
7.1. Введение	631
7.2. Исследование теплопередачи	631
7.3. Анализ задач, связанных с полем.	649
7.4. Анализ течений вязкой несжимаемой жидкости.	659
Глава 8. Решение уравнений равновесия в статическом анализе	682
8.1. Введение	682
8.2. Прямые решения с использованием алгоритмов, основанных на исключении по Гауссу	683
8.3. Итеративные методы решения	730
8.4. Решение нелинейных уравнений.	738
Глава 9. Решение уравнений равновесия в динамическом анализе	753
9.1. Введение	753
9.2. Методы прямого интегрирования	754
9.3. Суперпозиция форм представления	769
9.4. Анализ методов прямого интегрирования	785
9.5. Решение нелинейных уравнений при динамическом анализе	807
9.6. Решение задач, не связанных с конструкциями; теплопередача и течения жидкости.	813

Глава 10. Предварительные сведения, нужные для решения задач о собственных значениях	821
10.1. Введение	821
10.2. Фундаментальные факты, используемые при решении задач о системах собственных значений	823
10.3. Приемы построения приближенного решения	843
10.4. Ошибки решения	861
 Глава 11. Методы решения задач о собственных значениях	 868
11.1. Введение	868
11.2. Методы векторных итераций	870
11.3. Методы преобразования	892
11.4. Полиномиальные итерации и методы последовательностей Штурма	919
11.5. Метод итераций Ланцоша	926
11.6. Метод итераций в подпространстве	935
 Глава 12. Компьютерная реализация метода конечных элементов.	 963
12.1. Введение	963
12.2. Построение компьютерной программы для вычисления системных матриц. . .	964
12.3. Расчет напряжений в элементах.	971
12.4. Программа STAP в качестве примера.	972
12.5. Упражнения и варианты программ	998
 Список литературы	 1001
Предметный указатель	1014

ПРЕДИСЛОВИЕ

Конечно-элементные процедуры представляют собой сейчас важную, а зачастую и абсолютно необходимую часть инженерного анализа и проектирования. Компьютерные программы для конечных элементов в настоящее время широко используются практически во всех ответвлениях инженерных наук, их применяют к анализу конструкций, твердых тел и жидкостей.

При написании этой книги я ставил своей целью создать материал высокого уровня для лекционных курсов, предназначенных для студентов и выпускников, изучающих конечно-элементный анализ, а также подготовить книгу для самообразования как инженеров, так и ученых.

Исходя из вышеуказанных намерений, я готовил данную книгу на основе своей более ранней публикации «Конечно-элементные процедуры в инженерном анализе» (Prentice-Hall, 1982). Я сохранил тот же стиль изложения, однако усилил и укрепил прежний текст, сделав его отвечающим современному состоянию научных работ по конечным элементам. Кроме того, я добавил несколько новых разделов, чтобы, с одной стороны, осветить некоторые важные дополнительные темы и, следовательно, дать более полное представление, и, с другой стороны, чтобы облегчить (с помощью упражнений) преподавание материала, обсуждаемого в книге.

Данная книга не представляет собой обзор по методам конечных элементов. Для создания такого обзора понадобилось бы написать несколько томов. Вместо этого книга сосредоточивается только на определенных процедурах с конечными элементами, а именно на таких, которые я лично считаю весьма полезными в инженерной практике и которые, вероятно, будут применяться в течение многих предстоящих лет. Кроме того, эти методы вводятся таким образом, чтобы их можно было эффективно и увлекательно передавать студентам при преподавании.

Весьма важным аспектом конечно-элементной процедуры является ее надежность, такая, чтобы при проектировании с помощью компьютера эту процедуру можно было уверенно использовать. Эта особенность всячески подчеркивается в данной книге, и основной акцент делается на таких конечно-элементных процедурах, которые являются общими и надежно используемыми при инженерном анализе.

Итак, определенный уклон данной книги сводится к тому, что в ней представлены лишь некоторые конкретные конечно-элементные процедуры, причем представлены они некоторым особым образом. В этом плане книга отражает мою философию преподавания и мои представления об использовании методов конечных элементов.

Тематика этой книги сосредоточивается, преимущественно, на математических методах, однако полное и увлекательное представление о конечно-элементных процедурах в их инженерных приложениях может быть получено только тогда, когда достаточное внимание уделяется не только математическим, но и физическим характеристикам этих процедур. Совместное усвоение физических и математических особенностей значительно обогащает как уверенность использования, так и возможности дальнейшего развития конечно-элементных методов, что и подчеркивается в данной книге.

Высказанные выше соображения свидетельствуют о том, что сотрудничество между инженерами и учеными-математиками может оказаться чрезвычайно полезным для того, чтобы углубить наше понимание конечно-элементных методов и добиться дальнейшего продвижения в наших исследованиях. Я благодарен математику Франко Бреucci (Franco Brezzi) за наше сотрудничество в исследованиях, проводившихся именно в этом духе, а также за его ценные замечания по поводу данной книги.

Я полагаю, что одно из наивысших достижений любого преподавателя состоит в подготовке и написании ценной книги. В нынешнее время инженерные науки претерпевают очень быстрые изменения во всех своих областях и практически во всех этих областях нужны новые книги для студентов. Поэтому я благодарен руководству департамента инженерной механики Массачусетского технологического института (MIT) за создание для меня такого великолепного окружения, в котором я имел возможность следовать своим интересам в обучении, исследовательской работе и написании учебников. Разумеется, написание данной книги потребовало затраты огромных усилий с моей стороны, однако мне хотелось выполнить этот труд так, чтобы он принес пользу моим бывшим, теперешним и будущим студентам, любым преподавателям и исследователям, которые могли бы заинтересоваться этой работой и, конечно же, способствовал бы повышению качества моего собственного преподавания в MIT.

Я поистине оказался счастливым, которому удалось работать со многими выдающимися студентами MIT, и я искренне благодарю судьбу за это. Быть их учителем и работать с ними, — это явилось огромной привилегией для меня. Весьма ценным оказался и тот факт, что, работая в своей компании ADINA R & D, я был тесно связан с разработкой методов конечных элементов для промышленности. Эта связь была чрезвычайно полезна в моей преподавательской и исследовательской деятельности, а также в процессе моей работы над этой книгой.

Книга, значительная и по глубине, и по широте охвата такой темы, которая вошла в жизнь лишь несколько десятилетий тому назад и претерпела в последнее время огромные усовершенствования, могла быть написана только таким автором, который имел возможность взаимодействовать со многими людьми, связанными с этой темой. Я хотел бы поблагодарить всех тех моих студентов и друзей, которые способствовали — и будут способствовать в дальнейшем, — моему познанию и пониманию методов конечных элементов. Мое взаимодействие со всеми ними принесло мне много радости и удовлетворения.

Кроме того, я хотел бы поблагодарить моего секретаря, Кристан Рэймонд, за ее особый труд по печатанию рукописи этой книги.

Наконец, поистине безграничную благодарность я должен выразить своей жене, Зорке, а также детям — Ингрид и Марку — которые, будучи преисполнены своей любовью ко мне и пониманием моих усилий, поддерживали меня в деле написания этой книги.

К.-Ю. Бате

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ В РЕАЛИЗАЦИЮ МЕТОДОВ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

1.1. Введение

Методы конечных элементов в настоящее время весьма широко используются в инженерных исследованиях, и можно ожидать, что в ближайшие годы их использование еще более расширится. Эти методы интенсивно применяются при исследовании поведения твердых тел и конструкций, а также жидкостей и процессов теплопередачи. В самом деле, методы конечных элементов оказались полезными практически в любой области инженерных исследований.

Развитие методов конечных элементов как средства решения практических инженерных задач началось одновременно с появлением компьютеров. Иначе говоря, сущность конечно-элементного решения некоторой инженерной задачи сводится к формулировке и решению системы алгебраических уравнений, описывающих эту задачу, а этот процесс может быть сделан эффективным и применимым к общему случаю лишь при посредстве компьютеров. Два вышеуказанных свойства — эффективность и применимость к общему случаю инженерного исследования — оказались неотъемлемыми элементами применяемой теории и получили высокую степень развития при ее приложении к практическим расчетам, в результате чего методы конечных элементов сделались широко востребованными в инженерной практике.

Как это часто бывает с теми или иными нововведениями, трудно установить точную «дату изобретения» метода конечных элементов, однако корни этого метода можно связать с тремя различными исследовательскими группами, а это: математики-прикладники, например, R. Courant [Courant 1943]; физики, например, J. L. Synge [Synge 1957]; а также инженеры, например, J. H. Argyris и S. Kelsey [Argyris, Kelsey 1954]. Уже будучи опубликованным, метод конечных элементов получил настоящий толчок к своему развитию благодаря усилиям инженеров. Например, оригинальные вклады были связаны с работами таких авторов, как упомянутые J. H. Argyris и S. Kelsey [Argyris, Kelsey 1954]; M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin и L. J. Topp [Turner et al. 1956]; R. W. Clough [Clough 1960]. Термин «конечный элемент» впервые появился в статье R. W. Clough [Clough 1960]. Весьма важные ранние вклады принадлежат таким авторам, как J. H. Argyris [Argyris 1965], а также O. C. Zienkiewicz и Y. K. Cheung [Zienkiewicz, Cheung 1990]. Начиная с ранних 1960-х годов, значительная доля исследований была посвящена именно техническим вопросам, причем появилось очень большое число публикаций по методу конечных элементов (см., например, библиографию в [Noor 1991] и *Finite Element Handbook* под редакцией H. Kardestuncer и D. H. Norrie [Handbook 1987]).

Метод конечных элементов в инженерном деле первоначально развивался на основе физики, для исследования задач механики конструкций. Однако очень скоро было признано, что данная методика с тем же успехом может быть применена и к решению многих других классов задач. Цель данной книги состоит в том, чтобы

дать обстоятельное и обладающее широким контекстом изложение приемов реализации методов конечных элементов для твердых тел, для конструкций, для задач о полях (в особенности, задач о теплопередаче), а также для потоков жидкости.

Чтобы дать вводный материал по тематике этой книги, в последующих разделах этой главы рассматриваются три важных аспекта. Во-первых, обсуждается тот важный тезис, что при любом анализе всегда выбирается *математическая модель* физической задачи, и последующее решение строится именно для *этой* модели. Метод конечных элементов используется для исследования очень сложных математических моделей, однако важно отдавать себе отчет в том, что конечно-элементное решение никогда не может дать больше информации, чем та, которая содержится в математической модели.

Последующее обсуждение касается той важной роли, которую конечно-элементный анализ играет в проведении полного процесса автоматического проектирования с помощью компьютера (CAD). Именно здесь приемы реализации методов конечных элементов оказываются наиболее полезными, и именно здесь инженер может, вероятнее всего, встретиться с необходимостью применения методов конечных элементов.

В последнем разделе этой главы ставится вопрос о том, как изучать методы конечных элементов. Учитывая, что информация о технике применения этих методов содержится в огромном числе публикаций, для инженера может оказаться затруднительным выделить наиболее важные принципы и приемы реализации и сконцентрироваться на них. Цель, поставленная в этом последнем разделе, состоит в том, чтобы указать читателю надлежащий путь к изучению приемов реализации методов конечных элементов и, разумеется, к решению также и других обсуждаемых в данной книге вопросов.

1.2. Физические проблемы, их математические модели и конечно-элементное решение проблем

Метод конечных элементов используется для решения физических проблем при инженерном исследовании и проектировании. Схема процесса конечно-элементного анализа представлена на рис. 1.1. Как правило, физическая проблема связана с наличием реальной конструкции или конструкционной компоненты, подверженной определенным нагрузкам. Идеализация физической проблемы с целью построения ее математической модели требует введения определенных допущений, совокупность которых ведет к получению дифференциальных уравнений, описывающих данную математическую модель (см. главу 3). *Конечно-элементный анализ позволяет построить решение, соответствующее данной математической модели.* Учитывая, что техника построения конечно-элементного решения представляет собой численную процедуру, необходимо дать оценку точности этого решения. Если выдвигаемые критерии точности не соблюдаются, то численное (т. е. конечно-элементное) решение следует повторять со введением усовершенствованных параметров этого решения (например, с более мелкими сетками) до тех пор, пока не будет достигнута достаточная точность.

Ясно, что конечно-элементное решение будет соответствовать только конкретно выбранной математической модели и что все допущения, введенные при построении этой модели, будут отражены в получаемых результатах. Мы не можем ожидать получения какой-то более объемной информации в определении свойств физического явления, чем та информация, которая заключена в математической модели. Это значит, что выбор надлежащей математической модели имеет решающее



Рис. 1.1. Схема процесса конечно-элементного анализа

значение и полностью определяет собой качество анализа истинной физической проблемы, которое может быть достигнуто принятым нами путем.

Следует подчеркнуть, что, разумеется, выбираемый нами способ исследования может дать только *общее представление* о свойствах рассматриваемой физической проблемы: мы не можем определить *точный* результат решения этой проблемы, поскольку даже самая совершенная математическая модель не способна отразить всю ту информацию, которая присутствует в природе и, следовательно, содержится в описании физической проблемы.

После того, как было построено достаточно точное решение математической модели и дана интерпретация результатов этого решения, было бы нелишним рассмотреть более совершенную математическую модель, чтобы расширить наше представление о свойствах физической проблемы. Более того, может оказаться необходимым изменить и саму физическую проблему, а это, в свою очередь, приведет

к необходимости введения новых математических моделей и новых конечно-элементных решений (см. рис. 1.1).

Следовательно, ключевой этап инженерного анализа состоит в выборе математических моделей. Ясно, что выбор этих моделей будет зависеть от того, какие именно явления необходимо описать и, что чрезвычайно важно, выбрать такие математические модели, которые обладали бы свойствами *надежности и эффективности* при определении искомых величин.

Желая определить надежность и эффективность выбранной модели, мы можем представить себе *всеобъемлющую* математическую модель данной физической проблемы и провести численное сравнение реакции выбранной нами модели с реакцией объемлющей модели. В общем случае всеобъемлющая математическая модель связана с полным трехмерным описанием, включающем в себя также и нелинейные эффекты.

Эффективность математической модели.

Наиболее эффективная модель при анализе физической проблемы — это, несомненно, та, которая позволяет получить требуемые данные с достаточной точностью при наименьшей стоимости анализа.

Надежность математической модели.

Выбранная математическая модель является надежной, если требуемые данные вычисляются с заданной степенью точности в сравнении с результатами, получаемыми на основе всеобъемлющей математической модели.

Следовательно, чтобы оценить результаты, достигаемые на основе выбранной математической модели, может оказаться необходимым построить также решения с математическими моделями более высокого порядка, а это значит, что мы можем представить себе (хотя и, конечно, не обязательно строить решения) некоторую последовательность математических моделей, которые включали бы в себя все более и более сложные эффекты. Например, балочная конструкция (если использовать инженерную терминологию) может вначале исследоваться с применением теории Бернулли, а затем при помощи теории Тимошенко для балок, переходя после этого к применению двумерной теории плоских напряжений и, наконец, используя полную трехмерную модель континуума, причем в каждом случае рассмотрение может включать нелинейные эффекты. Такая последовательность моделей будет называться иерархией моделей (см. [Bathe, Lee, Bicalem 1990]). Ясно, что анализ с применением таких иерархических моделей будет давать описание все более и более сложных эффектов, однако приведет и к построению все более дорогостоящих решений. Как это хорошо известно, полный трехмерный анализ оказывается по своей стоимости примерно на порядок величины превышающим (в терминах ресурсов компьютера и используемого инженерного времени) соответствующее двумерное решение.

Рассмотрим простой пример, иллюстрирующий изложенные выше идеи.

На рис. 1.2а показан кронштейн, используемый для поддержки вертикальной нагрузки. С целью анализа необходимо выбрать математическую модель. Ясно, что этот выбор должен зависеть от того, какие именно явления требуется описать, а также от геометрии, свойств материала, типа нагрузки и условий крепления кронштейна.

Как указано на рис. 1.2а, кронштейн закреплен на очень толстой стальной колонне. Разумеется, термин «очень толстая» связан со сравнением ее размеров с толщиной t и высотой h кронштейна. Описание в виде очень толстой колонны преобразуется в допущение о том, что кронштейн закреплен на (практически) абсолютно жесткой колонне. Следовательно, мы можем сосредоточить свое внимание

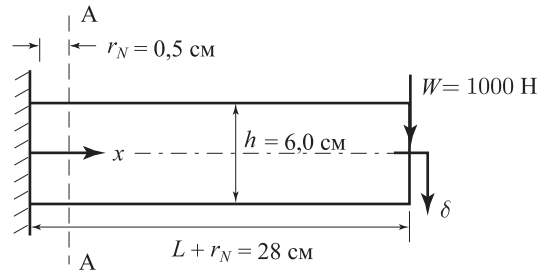
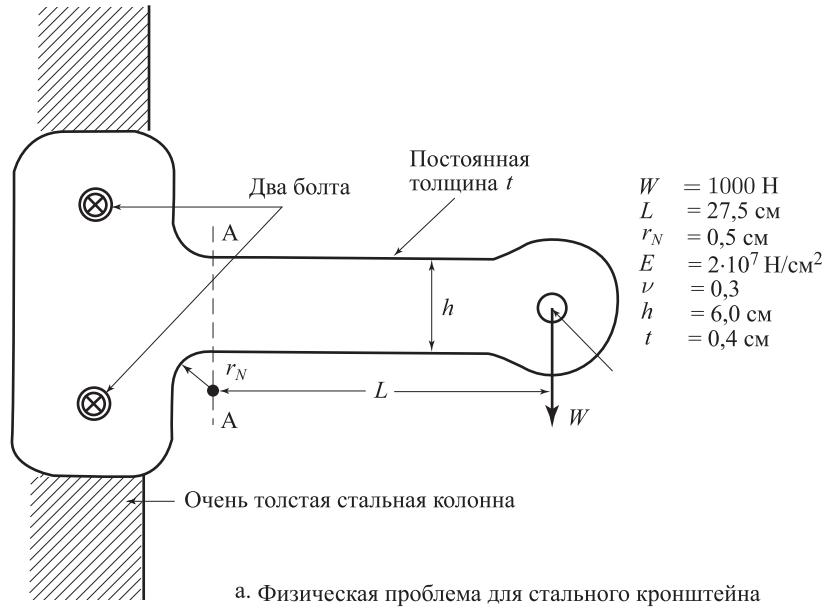
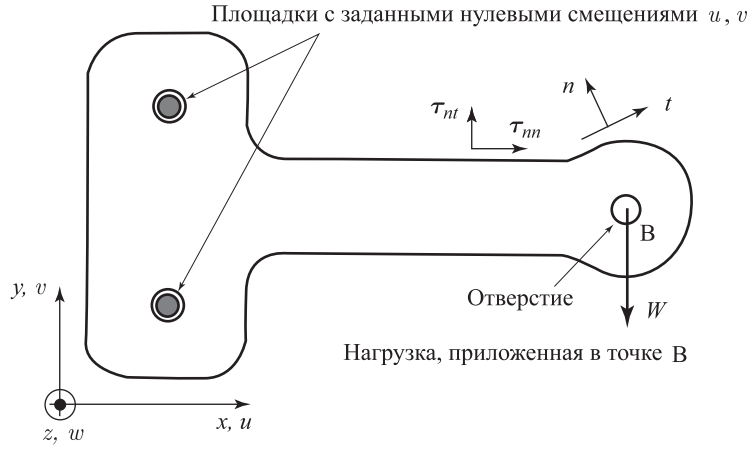


Рис. 1.2. Кронштейн, предназначенный для анализа, и две математические модели

на кронштейне, применяя к нему «граничное условие с жесткой колонной» (разумеется, позднее может потребоваться анализ самой колонны, а тогда силы, приходящиеся на два болта в результате воздействия нагрузки W , необходимо будет приложить к колонне).

Помимо всего прочего, предполагается, что нагрузка W прилагается очень медленно. Временное условие «очень медленно» относится к наибольшему периоду собственных колебаний кронштейна; иначе говоря, промежуток времени, в течение которого нагрузка W возрастает от нуля до своего полного значения, намного больше, чем фундаментальный период собственных колебаний кронштейна. Это утверждение моделируется как требование проведения статического (а не динамического) анализа.

После высказывания таких предварительных соображений можно перейти к построению надлежащей математической модели исследования кронштейна в зависимости от того, какие именно явления требуется описать. В качестве первого варианта предположим, что нужно определить только полный изгибающий момент в сечении AA кронштейна, а также отклонение под воздействием приложенной



Уравнения равновесия (см. пример 4.2)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ в области кронштейна,}$$

$\tau_{nn} = 0, \tau_{nt} = 0$ на поверхности всюду, кроме точки В, и при заданных нулевых смещениях.

Зависимость напряжение–деформация (см. табл. 4.3)

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}.$$

E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

Соотношения связи деформаций с перемещениями (см. раздел 4.2)

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

в. Модель с плоскими напряжениями
Рис. 1.2. Продолжение

нагрузки. Желая вычислить эти величины, рассмотрим математическую модель в форме балки, включающую описание сдвиговых деформаций (см. рис. 1.2б) и получим

$$M = WL = 27\,500 \text{ Н см} \quad (1.1)$$

$$\delta|_{\text{при нагрузке } W} = \frac{1}{3} \frac{W(L+r_N)^3}{EI} + \frac{W(L+r_N)}{(5/6)AG} = 0,053 \text{ см}, \quad (1.2)$$

где величины L и r_N заданы на рис. 1.2 а, E — модуль Юнга используемой стали, G — модуль сдвига, I — момент инерции консоли кронштейна ($I = (1/12)h^3t$), A — площадь поперечного сечения ($A = ht$), а множитель $5/6$ — это поправочный коэффициент сдвига (см. раздел 5.4.1).

Разумеется, соотношения, содержащиеся в уравнениях (1.1) и (1.2), предполагают наличие условий для линейных, упругих, бесконечно малых смещений и,

следовательно, нагрузка не должна быть настолько большой, чтобы вызвать текучесть материала и/или большие смещения.

Зададимся теперь вопросом о том, была ли математическая модель, использованная на рис. 1.2б, *надежной и эффективной*? Чтобы дать строго обоснованный ответ на этот вопрос, следовало бы рассмотреть всеобъемлющую математическую модель, которая в данном случае сводилась бы к полному трехмерному представлению кронштейна в целом. Эта модель должна была бы включать в себя те два болта, которыми кронштейн крепится к жесткой (согласно предположению) колонне, а также тот штифт, через посредство которого прилагается нагрузка W . Трехмерное решение, соответствующее этой модели с использованием надлежащих данных о геометрии и о материале, дало бы ту численную информацию, которую следовало бы сравнить с ответами, приведенными в формулах (1.1) и (1.2). Отметим, что эта трехмерная математическая модель содержит контактные условия (имеются в виду контакты между болтами, колонной и кронштейном, а также между несущим нагрузку штифтом и кронштейном) и области концентрации напряжений в желобках и около отверстий. Кроме того, если напряжения достаточно велики, то модель должна включать в себя и нелинейные условия, связанные с поведением материала. Конечно же, аналитическое решение для этой математической модели не может быть построено, и мы можем получить лишь численное решение. В этой книге мы описываем, как можно рассчитать такого рода решения с применением методов конечных элементов, однако уже здесь можно отметить тот факт, что решение будет сравнительно дорогостоящим в отношении использования как ресурсов компьютера, так и инженерного времени.

Если учесть, что всеобъемлющая трехмерная математическая модель является, по всей вероятности, слишком подробной (для ответов на поставленные нами вопросы анализа), то вместо нее можно взять линейную упругую задачу с двумерными плоскими напряжениями, которая показана на рис. 1.2в. Эта математическая модель представляет геометрию кронштейна более реалистично, чем модель с балкой, и включает в себя предположение о двумерном напряженном состоянии кронштейна (см. раздел 4.2). Изгибающий момент в сечении AA и отклонение под воздействием нагрузки, рассчитанные с помощью этой модели, будут, как можно ожидать, весьма близки к значениям, рассчитанным на основе всеобъемлющей трехмерной модели. Несомненно, эта двумерная модель является все же моделью повышенного порядка, и именно путем сравнения с данными по ее применению можно судить об адекватности результатов, представленных в формулах (1.1) и (1.2). Конечно же, аналитическое решение для данной модели построить невозможно, и необходимо искать численное решение поставленной задачи.

На рисунках 1.3, начиная с 1.3а и вплоть до 1.3д, показана геометрия и конечно-элементная дискретизация, используемая при построении решения на основе математической модели с плоскими напряжениями; здесь приводятся также некоторые результаты, касающиеся напряжений и смещений и полученные с помощью вышеупомянутой дискретизации. Необходимо отметить различные допущения, вводимые в этой математической модели и отличающие ее от обсуждавшейся ранее более подробной объемлющей трехмерной модели. Учитывая, что здесь предполагается выполнение условия о плоских напряжениях, отличными от нуля являются только напряжения τ_{xx} , τ_{yy} и τ_{xy} . Предполагается, следовательно, что напряжения τ_{zz} , τ_{yz} и τ_{zx} равны нулю. Кроме того, в эту модель не включены реальные условия для болтовых креплений и контакта между стальной колонной и кронштейном, не моделируется и штифт, передающий нагрузку на кронштейн. Однако учитывая, что наша цель состоит только в определении изгибающего момента в сечении

АА и отклонения в точке В, указанные допущения представляются разумными и оказывающими сравнительно малое влияние на искомые величины.

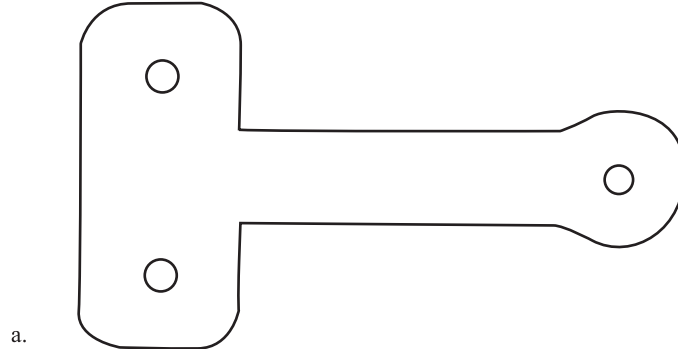


Рис. 1.3. Анализ кронштейна на рис. 1.1. и 1.2 согласно модели с плоскими напряжениями; программа AutoCAD использовалась для представления геометрии и программа ADINA — для конечно-элементного анализа

Предположим, что результаты, полученные с помощью конечно-элементного решения математической модели, являются достаточно точными и что можно рассматривать решение, показанное на рис. 1.3, как *искомое* решение для математической модели с плоскими напряжениями.

На рис. 1.3в показана расчетная конфигурация деформированного состояния объекта. Отклонение в точке приложения нагрузки В, соответствующее решению с плоскими напряжениями, равно

$$\delta|_{\text{при нагрузке } W} = 0,064 \text{ см.} \quad (1.3)$$

Полный изгибающий момент, рассчитанный для сечения АА, равен

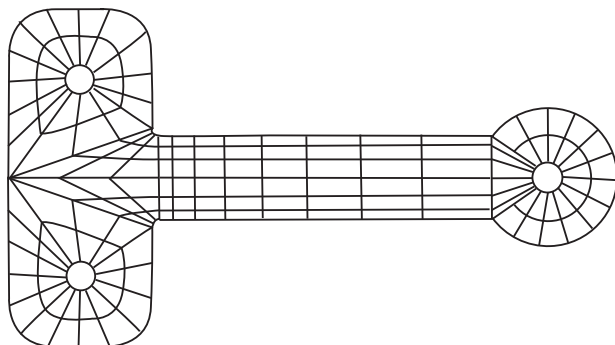
$$M|_{x=0} = 27\,500 \text{ Н см.} \quad (1.4)$$

Несмотря на то, что численное значение изгибающего момента в сечении АА оказывается одним и тем же для модели с балкой и для модели с плоскими напряжениями¹⁾, отклонение для модели с балкой существенно меньше значения, рассчитываемого для модели с плоскими напряжениями (вследствие допущения о том, что балка на рис. 1.2б имеет жесткую опору на своем левом конце и связанного этим пренебрежения любыми деформациями в области между балкой и болтами).

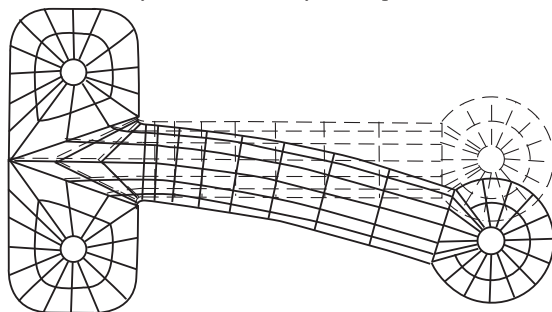
Учитывая приведенные результаты, можно утверждать, что математическая модель с балкой, представленная на рис. 1.2б, является *надежной*, если искомый изгибающий момент рассчитывается с точностью 1%, тогда как отклонение — лишь с точностью 20%. Кроме того, модель с балкой безусловно является *эффективной*, так как она требует очень малых усилий для вычислений.

С другой стороны, если потребуется оценить максимальное напряжение в кронштейне, то показанная на рис. 1.2б простая математическая модель с балкой не

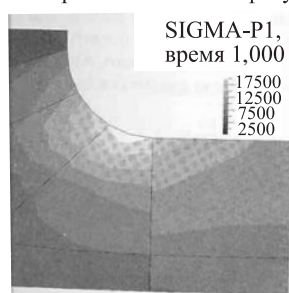
¹⁾ Изгибающий момент в сечении АА, соответствующий модели с плоскими напряжениями, рассчитывается здесь по значениям сил в узловых точках конечных элементов, и для этой статически определенной аналитической задачи внутренний момент сил сопротивления должен быть равен моменту, приложенному извне (см. пример 4.9).



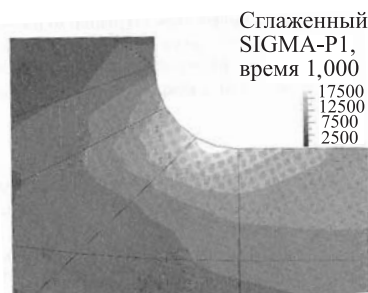
б. Сетка из элементов с 9-ю узлами, используемая при конечно-элементной дискретизации



в. Форма после отклонения. Отклонения показаны с увеличением в 100 раз вместе с первоначальной конфигурацией



г. Максимальное главное напряжение в окрестности выемки. Показаны несглаженные результаты по напряжениям. Небольшие разрывы слоев указывают на получение сравнительно точного решения для данной математической модели (см. раздел 4.3.6)



д. Максимальное главное напряжение в окрестности выемки. Показаны сглаженные результаты по напряжениям (взяты средние значения напряжений в узловых точках с последующей интерполяцией по элементам)

Рис. 1.3. Продолжение

позволит получить достаточно точный результат. В частности, модель с балкой совершенно пренебрегает повышением напряжения вследствие наличия желобков ¹⁾.

¹⁾ Разумеется, оценка влияния желобков может быть осуществлена путем применения коэффициентов концентрации напряжения, найденных из решений на основе модели с плоскими напряжениями.

Следовательно, необходимо иметь решение для модели с плоскими напряжениями, включающей желобки.

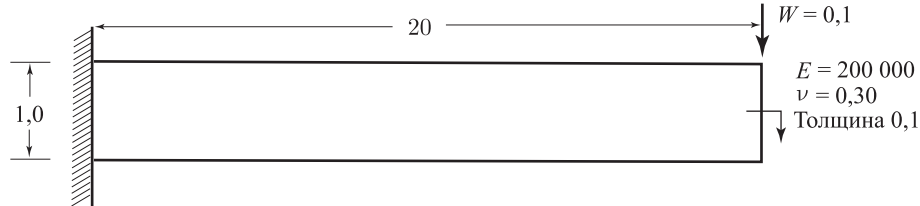
Здесь нужно сделать нижеследующие важные замечания.

1. Выбор математической модели должен зависеть от того, какие именно величины следует определить (т. е. от вопросов, поставленных природой).
2. Наиболее эффективной математической моделью является та, которая дает ответы на поставленные вопросы в надежной форме (т. е. с приемлемой ошибкой) и с наименьшими усилиями.
3. Конечно-элементное решение может дать достаточно точный результат лишь для выбранной математической модели (например, для модели с балкой или для модели с плоскими напряжениями, представленной на рис. 1.2) и не может предоставить информацию в большем объеме, чем тот, который содержится в самой модели.
4. Понятие надежности математической модели связано с оценкой точности результатов, получаемых на основе выбранной модели (в смысле ответов на поставленные вопросы) и сравниваемых с результатами, полученными на основе всеобъемлющей модели. Однако на практике не строится решение с помощью всеобъемлющей модели, а взамен этого используется информация, взятая из инженерной практики, или же строится решение, основанное на применении более совершенной модели, что в обоих случаях позволяет судить об адекватности (т. е. о надежности) используемой математической модели по отношению к тем данным, которые требуется получить.

Наконец, необходимо отметить еще одну важную особенность общего характера. Выбранная нами математическая модель может содержать чрезвычайно высокие напряжения, обусловленные наличием острых углов, сконцентрированных нагрузок или каких-то других эффектов. Появление этих высоких напряжений может быть связано исключительно с теми упрощениями, которые используются в данной модели по сравнению с всеобъемлющей математической моделью (или с реальной природой). Например, сконцентрированная нагрузка, представленная в показанной на рис. 1.2 в модели с плоскими напряжениями, представляет собой идеализацию нагрузки в форме давления на малую область (в реальных условиях это давление передавалось бы на кронштейн от несущего нагрузку штифта). Точное решение, соответствующее показанной на рис. 1.2 в математической модели, дает бесконечно большое напряжение в точке приложения нагрузки, и поэтому следует ожидать очень большого напряжения в точке В при достаточно измельченной конечно-элементной сетке. Конечно же, это чрезвычайно высокое напряжение является искусственным продуктом выбранной модели и при использовании очень тонкой дискретизации сконцентрированная нагрузка должна быть заменена на нагрузку в форме давления, действующего на малую область (см. последующую дискуссию). Однако если и после этого модель предсказывает очень большое напряжение, то представлялось бы приемлемым ввести некоторую нелинейную математическую модель.

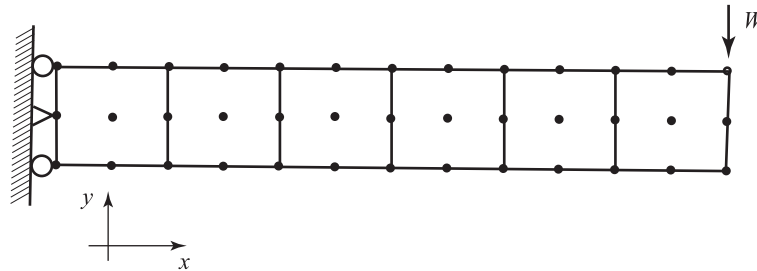
Отметим, что сконцентрированная нагрузка для модели с балкой, показанной на рис. 1.2б, не влечет за собой никаких трудностей в построении решения. Прямые углы в месте закрепления балки также не вносят затруднений в построение решения для соответствующей модели, тогда как реализация решения для модели с плоскими напряжениями при наличии таких углов привела бы к появлению бесконечно больших напряжений. Это значит, что при использовании модели с плоскими напряжениями углы должны быть закруглены с целью более правильного представления геометрии реального физического кронштейна.

Таким образом выясняется, что решение на основе некоторой математической модели может привести к искусственным затруднениям, легко устранимым с помощью *надлежащего* изменения математической модели, направленного на более точное представление реальной физической ситуации. Более того, выбор более содержательной математической модели может в подобных случаях приводить к уменьшению усилий, требуемых для построения решения.



а. Геометрия, граничные условия, данные о материале.

Результаты применения теории Бернулли для балок: $\delta = 0,16$, $\tau_{\max} = 120$



б. Типовая конечно-элементная дискретизация, сетка 6 + 1

при элементах с девятью узлами; результаты: $\delta = 0,16$, $\tau_{\max} = 116$

Рис. 1.4. Анализ консоли на основе модели плоских напряжений

Все эти комментарии имеют общий характер, однако для конкретности еще раз рассмотрим вопрос о том, что делать при наличии сконцентрированных нагрузок. Идеализация формы приложения нагрузки весьма интенсивно используется в инженерной практике. Теперь мы уже знаем, что при применении многих математических моделей (а значит, и при построении конечно-элементных решений на основе этих моделей) такого рода нагрузки приводят к появлению бесконечно больших напряжений. Следовательно, можно задаться вопросом о том, при каких условиях, соответствующих инженерной практике, могут возникнуть трудности с построением решения. Обнаруживается, что обычно на практике подобные трудности возникают только при очень детальной конечно-элементной дискретизации, и по этой причине вопрос о появлении бесконечных напряжений при сконцентрированных нагрузках зачастую попросту игнорируется. В качестве примера на рис. 1.4 приводятся результаты конечно-элементного анализа состояния консоли с помощью модели плоских напряжений. Консоль подвергается воздействию нагрузки, сконцентрированной на ее конце. На практике сетка 6×1 рассматривается обычно как достаточно мелкая, и ясно, что для надлежащей демонстрации особенностей в поведении напряжений в точке приложения нагрузки и в области крепления консоли необходимо воспользоваться делением на значительно более тонкие слои. Как уже указывалось выше, если требуется построить решение именно такого рода, то необходимо сменить математическую модель с целью более правильного представления той реальной физической ситуации, в которой находится данная

конструкция. Такое изменение математической модели может оказаться важным при конечно-элементных анализах адаптивного типа, поскольку в процессе таких анализов новые сетки генерируются автоматически и искусственные особенности для напряжений приводят — искусственным путем — к появлению чрезвычайно тонких слоев.

Желая дать резюме вышеизложенного, следует твердо помнить о том, что практический этап любого конечно-элементного анализа всегда связан с выбором надлежащей математической модели, так как решение с помощью конечных элементов строится только на основе выбранной модели. Более того, вид выбираемой модели должен зависеть от того, ответы на какие именно вопросы нам желательно получить, а также от того, будет ли модель надежной и эффективной (как это определено ранее). В процессе анализа инженер должен судить о том, даст ли выбранная математическая модель возможность построения решения с достаточной точностью и будет ли эта модель подходящей (т. е. надежной) для получения ответов на поставленные вопросы. Выбор математической модели, построение решения на основе этой модели с помощью надлежащего приема конечно-элементной реализации и оценка получаемых результатов представляют собой фундаментальные ингредиенты инженерного анализа с использованием методов конечных элементов.

1.3. Конечно-элементный анализ как неотъемлемая часть процесса автоматического проектирования с помощью компьютера

Очевидно, что инженерный анализ, хотя он и представляет собой весьма увлекательное поле деятельности, является все же лишь вспомогательной частью более обширного поля инженерного проектирования. Процесс такого анализа позволяет идентифицировать качественные новые проекты и этим процессом можно воспользоваться для улучшения некоторого проекта в смысле повышения его полезных свойств и снижения стоимости.

На ранней стадии использования методов конечных элементов анализу подвергались лишь конструкции весьма специфического типа, встречающиеся преимущественно в аэрокосмической промышленности и в инженерно-строительном деле. Однако, как только удалось выяснить все потенциальные возможности методов конечных элементов, а применение компьютеров в процессе инженерного проектирования приняло более широкий размах, то особый упор в области исследований и их развития был сделан на том, чтобы сделать применение методов конечных элементов неотъемлемой частью процессов проектирования в инженерных областях механики, гражданского строительства и авиации.

На рис. 1.5 дается обзорная схема этапов типичного процесса автоматического проектирования с помощью компьютера. Конечно-элементный анализ является лишь небольшой, хотя и весьма важной частью процесса в целом.

Как видим, первый из этапов, показанных на рис. 1.5, сводится к геометрическому представлению проектируемого объекта. При проектировании в целом могут быть использованы различные компьютерные программы (например, типичная и весьма популярная программа AutoCAD). На вышеупомянутом этапе следует конкретизировать свойства материала, величину прилагаемой нагрузки и граничные условия, касающиеся геометрии. Если вся эта информация имеется, то можно переходить к конечно-элементному анализу. Учитывая, что как геометрические, так и некоторые другие данные физического характера могут быть весьма сложными, то обычно возникает необходимость упростить и геометрию, и характер нагрузки,



Рис. 1.5. Обзор поля расчетов по программе CAD/CAM

чтобы таким путем прийти к легко интерпретируемой математической модели. Разумеется, эта модель должна быть надежной и эффективной по своему отношению к ответам на вопросы, поставленные при анализе; эти свойства обсуждались нами в предыдущем разделе. В процессе конечно-элементного анализа строится решение на основе выбранной нами математической модели, которая сама может быть изменена с учетом зависимости от целей анализа (см. рис. 1.1).

Рассматривая процесс проектирования в целом — который обычно осуществляется и должен осуществляться не только специалистами по анализу, но и прежде всего инженерами-проектировщиками, — следует признать, что методы конечных элементов должны быть очень надежными и устойчивыми. Термин *надежность методов конечных элементов* означает теперь ¹⁾, что в процессе решения на основе корректно сформулированной математической модели приемы реализации методов конечных элементов должны в случае задания разумной конечно-элементной сетки *всегда* приводить к разумному решению, причем если сетка оказывается разумно мелкой, то *всегда* должно быть получено достаточно точное решение. Термин «*устойчивость методов конечных элементов*» означает, что приемы реализации этих методов не должны быть излишне чувствительными к используемым данным о материале, граничных условиях и условиях нагружения. Следовательно, те приемы реализации методов конечных элементов, которые не являются устойчивыми, не будут также и надежными.

¹⁾ Заметим, что смысл термина «надежность методов конечных элементов» отличается от смысла термина «надежность математической модели», пояснявшегося в предыдущем разделе.

Предположим, например, что при построении решения на основе показанной на рис. 1.2 в математической модели с плоскими напряжениями применяется некая разумная конечно-элементная дискретизация с элементами определенного типа. Тогда полученное в результате такого анализа решение не должно содержать слишком большой ошибки, то есть не будет на порядок величины больше (или меньше) точного решения. Использование ненадежных конечных элементов для дискретизации будет, как правило, приводить к построению хороших решений при некоторых вариантах топологии сетки, тогда как для сеток с другой топологией оно может приводить к плохим результатам. Ненадежное поведение такого рода может обнаружиться у элементов, основанных на укороченном интегрировании с ложными нулевыми энергетическими модами (см. раздел 5.5.6).

Аналогичным образом предположим, что определенный тип дискретизации математической модели дает достаточно точные результаты для одного набора материальных параметров и что малое изменение параметров соответствует малому изменению точного решения при данной математической модели. Тогда та же самая конечно-элементная дискретизация должна привести при той же модели и в условиях малого изменения материальных параметров к достаточно точным результатам, и не приведет к результатам, содержащим чрезмерно большую ошибку.

Приведенные выше соображения относительно эффективных конечно-элементных дискретизаций являются очень важными и обсуждаются при представлении таких дискретизаций, а также их свойств, связанных с устойчивостью и сходимостью (см. главы 4–7). Для целей инженерного проектирования чрезвычайно важно, чтобы используемые методы конечных элементов были надежными, устойчивыми и, конечно же, эффективными. Свойства надежности и устойчивости важны потому, что проектировщик располагает сравнительно малым объемом времени для проведения анализа и должен иметь возможность получить достаточно точное решение на основе выбранной математической модели быстро, без «проб и ошибок». Использование же ненадежных методов конечных элементов попросту неприемлемо в инженерной практике.

Важной составной частью конечно-элементного анализа является оценочный расчет ошибки, то есть оценки того, насколько хорошо конечно-элементное решение аппроксимирует точное решение при применении выбранной математической модели (см. раздел 4.3.6). Эти оценки позволяют увидеть, действительно ли конечно-элементная дискретизация определенного вида привела к точным ответам на поставленные вопросы, и при наличии таких оценок проектировщик может обоснованно судить о приемлемости полученных им результатов. Разумеется, в том случае, когда при использовании ненадежных методов конечных элементов были получены неприемлемые результаты, то встает трудный вопрос о том, *как* получить точные результаты.

Наконец, мы берем на себя смелость прокомментировать вопрос о будущей роли методов конечных элементов в области автоматического проектирования с помощью компьютера. Разумеется, многие инженеры-проектировщики не располагают временем для углубленного изучения методов конечных элементов или приемов реализации этих методов в их общей форме. Единственная цель этих людей сводится к тому, чтобы использовать всю эту методику для расширения возможностей проектирования. В силу этого интегрированное использование методов конечных элементов при автоматическом проектировании с помощью компьютера (АПК) будет, вероятно, со временем требовать все менее детального изучения конечно-элементных сеток в процессе анализа в целом. Вместо этого мы ожидаем, что при линейном упругом статическом анализе процесс построения конечно-элементного решения будет настолько автоматизирован, что при наличии конкретной математи-

ческой модели конечно-элементные сетки будут создаваться автоматически, решение будет рассчитываться вместе с оценкой ошибки и, в зависимости от величины этой ошибки и от желательной точности решения, конечно-элементная дискретизация будет автоматически совершенствоваться (причем аналитик или проектировщик даже не будет видеть конечно-элементную сетку) до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность решения. При автоматизированном анализе такого рода — в процессе которого инженер должен, естественно, выбрать надлежащую математическую модель — тот, кто использует этот анализ, может сконцентрироваться на аспектах проектирования, применяя при этом средства самого анализа с большой степенью эффективности и пользы.

Детали проектирования и анализа оказываются обычно вполне очевидными для случая линейного упруго-статического анализа, однако динамический или нелинейный анализ поведения конструкций или жидкостей потребует, вероятно, от инженера в течение многих будущих лет более глубокого знания методов конечных элементов.

Высказывая приведенные выше соображения, мы не хотели внушить чрезмерную самоуверенность, а лишь дали оценку реальных перспектив ценного и волнующего использования методов конечных элементов в будущем. Что касается соображений о чрезмерном доверии к методам конечных элементов (остающихся все еще уместными по прошествии почти двух десятилетий), отсылаем читателя к статье «A Commentary on Computational Mechanics», авторы J. T. Oden и K. J. Bathe [Oden, Bathe 1978].

1.4. Предложения о том, как изучать методы конечных элементов

С учетом того, что существует значительное число публикаций по реализации методов конечных элементов и по развитию этих методов, студенту или преподавателю довольно трудно составить эффективный план их изучения. Естественно, что форма такого плана должна зависеть от целей учебы и от объема времени, отводимого на эту учебу.

В самой общей формулировке можно указать на две различные цели такой учебы.

1. Изучить надлежащие способы *использования* методов конечных элементов для решения сложных задач и
2. Достичь столь глубокого понимания методов конечных элементов, чтобы получить возможность проводить *исследовательскую работу* по применению этих методов.

Эта книга написана так, чтобы помочь студенту добиться выполнения каждой из этих целей, принимая во внимание, что число студентов, преследующих цель 1, значительно больше числа остальных и что зачастую студент может вначале изучать методы конечных элементов, преследуя цель 1, а затем, приобретя непрерывно возрастающий интерес к этим методам, начать преследовать также и цель 2. Если же учесть, что студент, преследующий цель 2, должен будет углубиться в изучение соответствующего материала в значительно большей степени, чем это сделано в данной книге, то автор книги надеется, что она обеспечит надежную основу для такого углубленного изучения и что «философия» данного текста (см. раздел 1.3) по отношению к использованию методов конечных элементов и к их исследованию окажется достаточно ценной.

Поскольку эта книга не ставила своей задачей дать широкий обзор методов конечных элементов — действительно, для такого обзора понадобился бы гораздо более объемистый том, — то ясно, что ее направленность сводится к частной задаче об указании приемов реализации методов конечных элементов и, притом, только определенных вариантов таких приемов.

Те методы конечных элементов, на которых мы сосредоточиваемся в этой книге, представляются нам в качестве эффективных средств исследования, предполагаемых для использования (и широко используемых в действительности) в инженерной практике. Считается также, что эти методы весьма важны, составляют основу исследования и, вероятно, будут применяться еще в течение долгого времени.

Представление о том, какие именно методы должны и могут наиболее успешно использоваться в инженерной практике, особенно важно иметь потому, что только надежные методы должны применяться (см. раздел 1.3), и в этой книге подвергаются обсуждению исключительно такие методы.

При описании приемов реализации методов конечных элементов мы стремимся разъяснить основные понятия и смысл уравнений, делая упор на разъяснениях физического характера. Кроме того, для демонстрации основных вводимых здесь понятий нами приводятся краткие примеры, а для проведения ручных расчетов и использования конечно-элементных компьютерных программ предлагаются упражнения.

Высказанные выше идеи приводят нас к определенным предложениям, касающимся изучения приемов реализации методов конечных элементов. Если преследуется цель 1, то читатель будет более всего заинтересован ознакомлением с основными моделями, описанием свойств конечных элементов, а также получением информации о сходимости и об эффективности.

Весьма важно помнить о том, что численные приемы реализации методов конечных элементов используются для построения решения на основе математической модели (при допущении разумно малых ошибок в этом решении) (см. раздел 1.2). Это означает, что для пользователя конечно-элементной компьютерной программой весьма важно всегда иметь возможность судить о качестве конечно-элементных результатов, получаемых в процессе решения. В книге показано, как именно можно надлежащим образом осуществить подобное суждение.

Однако если преследуется цель 2, то необходимо достичь гораздо большей глубины в формулировках и в представлении численных алгоритмов. Данный текст обеспечивает широкую основу для такого исследования (хотя, конечно, и не дает всех деталей выкладок и получаемых результатов).

В любом случае мы полагаем, что эффективный способ изучения методов конечных элементов связан с использованием конечно-элементной компьютерной программы при одновременном ознакомлении с теорией и с численными процедурами. После этого параллельно с изучением теоретических понятий на бумаге появляется возможность испытать и продемонстрировать эти понятия на компьютере.

Принимая за основу данную книгу, можно, в зависимости от цели даваемого образования, читать различные лекционные курсы. Первым таким курсом могло бы быть «Введение в конечно-элементный анализ», которое могло бы базироваться на разделах 1.1–1.4, 2.1–2.3, 3.1–3.4, 4.1–4.3, 5.1–5.3 и 8.1–8.2.2.

Курсом более высокого уровня могла бы быть «Реализация методов конечных элементов», базирующаяся на разделах 1.1–1.4, 3.1, 3.3, 4.1–4.4, 5.1–5.6 и 8.1–8.3.

Курсом по методам конечных элементов для динамического анализа были бы «Компьютерные методы в динамике», которые могли бы базироваться на разделах 1.1–1.4, 2.1–2.7, 3.1, 3.3, 4.1, 4.2, 5.1–5.3, 8.1–8.2.2, 9.1–9.4, 10.1, 10.2, 11.1, 11.2.1, 11.3.1 и 11.6.

Курс, связанный с принципами механики сплошной среды в применении к линейному и нелинейному конечно-элементному анализу мог бы называться «Теория и практика механики сплошной среды» и базироваться на разделах 1.1–1.4, 3.1, 3.3, 4.1, 4.2.1, 4.2.2, 5.1, 5.2, 5.3.1, 5.3.3, 5.3.5, 6.1, 6.2, 6.3.1, 6.3.2, 6.4.1, 6.6, 7.1 и 7.4.

Курс по исследованию проблем поля и течений жидкости назывался бы «Конечно-элементный анализ теплопередачи, проблем поля и течений жидкости» и базировался бы на разделах 1.1–1.4, 3.1, 3.3, 7.1–7.4, 5.3, 5.5 и 4.5.1–4.5.6. Отметим, что изложение этого курса содержало бы сначала конечно-элементные модели (разделы 7.1–7.4), а затем — численные процедуры и математические результаты.

Курс по нелинейному конечно-элементному анализу поведения твердых тел и конструкций назывался бы «Нелинейный анализ поведения твердых тел и конструкций» и мог бы базироваться на разделах 1.1–1.4, 6.1–6.8, 8.1 и 8.4.

Курс по использованию численных методов в конечно-элементном анализе назывался бы «Численные методы в конечно-элементном анализе» и мог бы базироваться на разделах 1.1–1.4, 2.1–2.7, 4.1, 4.2.1, 5.1, 5.3, 5.5, 8.1–8.4, 9.1–9.6, 10.1–10.3 и 11.1–11.6.

И наконец, курс по сугубо теоретическим аспектам конечно-элементного анализа мог бы быть предложен под названием «Теоретические концепции конечно-элементного анализа» и базировался бы на разделах 1.1–1.4, 4.1–4.5 и 5.1–5.5.

Отметим дополнительно, что в большинстве перечисленных курсов было бы полезно использовать материал главы 12.

Вообще говоря, наилучшая форма представления таких курсов должна сочетаться с домашними заданиями, включающими в себя решение задач, предлагаемых в тех разделах этой книги, где есть упражнения, а также в качестве завершения некоторого проекта с использованием конечно-элементной компьютерной программы.

В разделах данной книги, посвященных упражнениям, предлагаются различные проекты. Один из вариантов проекта требует от студента использовать программу статического анализа (СТАП) и модифицировать эту программу с учетом появления некоторых новых возможностей, о которых говорится в разделе 12.5. Подобный проект был бы весьма ценен для студентов, заинтересованных в ознакомлении с реальным и детальным воплощением методов конечных элементов.

Проект другого типа основывается на стандартной (коммерческой) конечно-элементной программе, могущей быть использованной в инженерной практике и предназначенной для анализа некой интересной физической проблемы. Весьма ценная версия дальнейшего продвижения состоит в том, чтобы вначале выбрать такую математическую модель, для которой известно точное аналитическое решение, а затем ввести усложняющие характеристики в другую математическую модель, требующую построения численного решения. При таком способе анализа вначале могут выполняться операции с использованием различных конечно-элементных дискретизаций и таких процедур решения, при которых получаемые результаты оцениваются в сравнении с информацией об известном точном решении, так что все это придает уверенность в возможности применения предлагаемых методов. После этого достигаемый опыт и уверенность превращаются в ценные качества, необходимые для построения конечно-элементных решений на базе более сложных математических моделей.

При изучении приемов реализации методов конечных элементов особенно важно выработать и испытать возможность правильной оценки качества любого конечно-элементного решения и любой выбранной математической модели. Разумеется, для выработки в себе способности к таким оценкам исследователь должен быть достаточно близко знаком с возможными математическими моделями и с доступными

способами реализации методов конечных элементов и, следовательно, вышеуказанный аспект служит стимулом для расширения знаний о математических моделях и о методах решения. Ясно, что ценность использования конечно-элементной компьютерной программы типа вышеупомянутой программы СТАП или коммерческой конечно-элементной программы связана именно со стимулированием обучения и с укреплением понимания того, что было изучено в аудитории и познано при решении домашних заданий. Использование мощных программ для исследования придает, в частности, особенно возбуждающий характер процессу решения сложных аналитических проблем, ранее не поддававшихся анализу.

Глава 2

ВЕКТОРЫ, МАТРИЦЫ И ТЕНЗОРЫ

2.1. Введение

Использование векторов, матриц и тензоров является исключительно важным при инженерном анализе, так как только благодаря использованию этих величин полный процесс решения может быть представлен в компактной и элегантной форме. Цель данной главы состоит в том, чтобы изложить основы действий с матрицами и тензорами, особо выделяя те аспекты, которые важны при конечно-элементном анализе.

Если принять упрощенную точку зрения, то матрицы можно рассматривать просто как упорядоченные наборы чисел, подчиняющиеся определенным правилам сложения, умножения, и т.д. Разумеется, важно быть хорошо знакомым с этими правилами и владеть ими, и в этой главе мы предлагаем их обзор.

Однако в связи с самими матрицами и с матричной алгеброй гораздо более интересные аспекты выявляются при изучении того, как элементы этих матриц конкретизируются в процессе анализа физических проблем и почему правила матричной алгебры оказываются применимыми в действительности. В этом контексте приобретает важность использование тензоров и их матричных представлений, составляющих весьма интересный объект исследований.

Конечно, здесь предлагается лишь довольно ограниченный обзор свойств матриц и тензоров, но мы надеемся, что их направленное практическое использование обеспечит надежную основу для понимания тех конечно-элементных формулировок, которые будут даны ниже.

2.2. Введение в матрицы

Эффективность использования матриц при практических расчетах выявляется непосредственно при рассмотрении решения системы линейных уравнений, как например

$$\begin{aligned} 5x_1 - 4x_2 + x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 6x_2 - 4x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= 0 \\ x_2 - 4x_3 + 5x_4 &= 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где неизвестными являются величины x_1, x_2, x_3 и x_4 . При использовании матричных обозначений эта система уравнений записывается как

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Как это нетрудно заметить, здесь коэффициенты при неизвестных величинах (5, -4, 1, и т. д.) сгруппированы в один набор, и это вполне логично; неизвестные в левых частях уравнений (x_1, x_2, x_3 и x_4) и известные величины в их правых частях сгруппированы по отдельности в дополнительные наборы. Несмотря на видоизмененную форму записи, соотношение (2.2) означает то же самое, что и уравнения (2.1). Однако если использовать матричную символику для представления наборов в соотношении (2.2), то рассматриваемую систему уравнений можно записать как

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (2.3)$$

где \mathbf{A} — это матрица коэффициентов в системе линейных уравнений, \mathbf{x} — матрица неизвестных, а \mathbf{b} — матрица известных величин, т. е.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Теперь представляется очевидным нижеследующее формальное определение матрицы:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Матрица представляет собой упорядоченный набор чисел. Матрица общего вида состоит из mn чисел, выстроенных в m строк и n столбцов и составляющих массив:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Мы говорим, что эта матрица имеет порядок $m \times n$ (m умноженное на n). Если мы имеем только одну строку ($m = 1$) или один столбец ($n = 1$), то матрица \mathbf{A} называется вектором. В этой книге матрицы представлены обозначениями жирного шрифта, причем если это не векторы, то обычно прописными буквами. С другой стороны, векторы могут обозначаться прописными или строчными буквами жирного шрифта.

Мы видим, что все нижеследующие наборы являются матрицами:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5,3 \\ 3 & 2,1 & 6 \end{bmatrix}; \quad [6,1 \quad 2,2 \quad 3], \quad (2.6)$$

где первая и последняя матрицы представляют собой, соответственно, столбцевой и строчный векторы.

Типичный элемент, принадлежащий i -й строке и j -му столбцу матрицы \mathbf{A} , идентифицируется как a_{ij} ; например, в первой из матриц в (2.4) имеем $a_{11} = 5$ и $a_{12} = -4$. Обращаясь к формуле (2.5), заметим, что индекс i пробегает значения от 1 до m , а индекс j — от 1 до n . Во избежание путаницы или при обозначении дифференцирования (см. главу 6) будем иногда разделять индексы запятой, например, $a_{1+r, j+s}$.

В общем, практическая ценность матриц обусловлена тем, что набор чисел идентифицируется и подвергается манипуляциям с помощью одного символа. В данной книге матрицы будут широко использоваться именно с учетом этого качества.

Симметричные, диагональные и ленточные матрицы; схема введения в память

Если элементы матрицы подчиняются определенному закону, то можно считать, что эта матрица имеет специальную форму. *Действительная матрица* — это матрица, все элементы которой являются действительными. *Комплексная матрица* содержит элементы, которые могут быть комплексными. Мы будем иметь дело только с действительными матрицами. Кроме того, матрица часто бывает симметричной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Матрица, транспонированная по отношению к матрице \mathbf{A} порядка $m \times n$ и обозначаемая символом \mathbf{A}^T , получается путем взаимной перестановки строк и столбцов матрицы \mathbf{A} . Если $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, то это означает, что матрица \mathbf{A} имеет одинаковое число строк и столбцов и что $a_{ij} = a_{ji}$. Если $m = n$, то говорят, что \mathbf{A} является квадратной матрицей порядка n , а если $a_{ij} = a_{ji}$, то говорят, что \mathbf{A} является симметричной матрицей. Отметим, что из свойства симметрии следует, что \mathbf{A} является квадратной матрицей, но не наоборот; иначе говоря, квадратная матрица не обязательно будет симметричной.

Например, матрица коэффициентов \mathbf{A} в уравнении (2.2) есть симметричная матрица порядка 4. Можно убедиться, что $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ путем простой проверки того факта, что $a_{ji} = a_{ij}$ при $i, j = 1, \dots, 4$.

Другой специальной матрицей является *тождественная* (или *единичная*) матрица \mathbf{I}_n . Это квадратная матрица порядка n , все элементы которой, кроме диагональных, нули, тогда как диагональные элементы — единицы. Например, матрица тождественности порядка 3 имеет вид

$$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

При практических расчетах порядок матрицы часто подразумевается и индекс не пишется. По аналогии с матрицей тождественности мы используем также *векторы тождественности* (или *единичные*) порядка n , определяемые как \mathbf{e}_i , где индекс i указывает на то, что вектор представляет собой i -й столбец матрицы тождественности.

Мы будем очень активно работать с симметричными ленточными матрицами. Матрица называется ленточной, если все ее элементы, расположенные за пределами ширины ленты, равны нулю. Если учесть, что матрица \mathbf{A} является симметричной, то вышеуказанное условие можно сформулировать как

$$a_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad j > i + m_{\mathbf{A}}, \quad (2.8)$$

где величина $2m_A + 1$ представляет собой *ширину ленты* матрицы **A**. Например, представляемая ниже матрица является симметричной ленточной матрицей порядка 5. При этом половина ширины ленты m_A равна 2:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Если половина ширины ленты матрицы равна нулю, то мы имеем отличные от нуля элементы только на диагонали матрицы и такую матрицу будем называть *диагональной матрицей*. Например, диагональной матрицей является матрица тождественности.

При проведении компьютерных расчетов с матрицами необходимо использовать схему введения элементов матриц в быструю память. Очевидный способ введения в память элементов матрицы **A** порядка $m \times n$ состоит просто в том, чтобы в программе на Фортране предусмотреть массив $A(M, N)$, где $M = m$ и $N = n$ и ввести каждый элемент матрицы a_{ij} в ячейку памяти $A(I, J)$. Однако при многих вариантах расчетов, поступая таким образом, мы вводим в память много нулевых элементов матрицы **A**, совершенно не требующихся при расчетах. Кроме того, если матрица **A** симметрична, то мы, возможно, воспользуемся этим и введем в память только верхнюю половину этой матрицы, включая ее диагональные элементы. В общем случае оказывается доступным лишь ограниченное число ячеек быстрой памяти и поэтому, чтобы иметь возможность ввести в быструю память матрицу максимально возможного порядка, необходимо воспользоваться некоторой эффективной схемой такого введения. Если матрица слишком велика для ее хранения в быстрой памяти, то процесс решения будет связан с записью и чтением на устройствах вторичной памяти, а это может существенно повысить стоимость решения. К счастью, системные матрицы, встречающиеся при конечно-элементном анализе, являются симметричными и ленточными. Поэтому при наличии эффективной схемы введения в память, в блоке быстрой памяти могут сохраняться матрицы довольно высокого порядка.

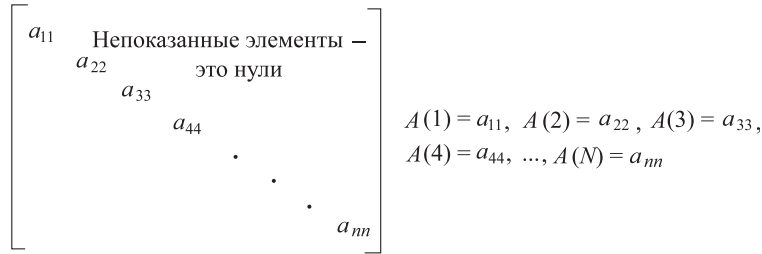
Обозначим символом $A(I)$ i -й элемент одномерного массива памяти **A**. Диагональная матрица порядка n могла бы без труда быть введена в память, как это показано на рис. 2.1 а:

$$A(I) = a_{ii}; \quad I = i = 1, \dots, n. \quad (2.10)$$

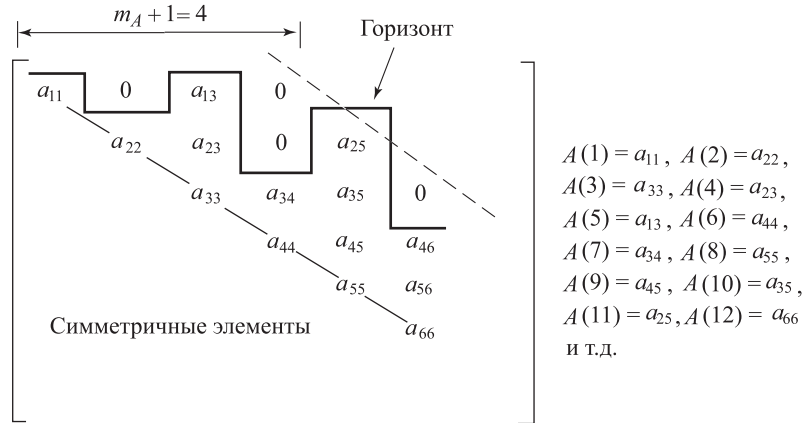
Рассмотрим ленточную матрицу, такую, как показанная на рис. 2.1 б. Позднее мы увидим, что нулевые элементы в пределах «горизонта» могут превратиться в процессе решения в ненулевые элементы; например, a_{35} может быть нулевым элементом, но становится отличным от нуля в процессе решения (см. раздел 8.2.3). Поэтому для нулевых элементов, расположенных в пределах горизонта, выделяются ячейки блока памяти, однако нет необходимости вводить в память нулевые элементы, находящиеся за горизонтом. Та схема введения в память, которая будет использоваться в процессе конечно-элементного решения, иллюстрируется на рис. 2.1 и комментируется в главе 12.

Равенство матриц, сложение и умножение на скаляр

Мы дали определение матрицам как упорядоченным наборам чисел, обозначаемым одним символом. Чтобы иметь возможность обращаться с ними как



а. Диагональная матрица

б. Ленточная матрица, $m_A = 3$ Рис. 2.1. Схема введения в память матрицы A с применением одномерного массива

с обычными числами, необходимо сформулировать правила, соответствующие тем, которыми определяется равенство, сложение, вычитание, умножение и деление обычных чисел. Мы просто сформулируем эти правила, не занимаясь их мотивировкой. Логическое обоснование правил выявится позднее, когда окажется, что это именно те правила, которые требуются для использования матриц при решении практических задач. Ниже приводятся определения, выражающие собой равенство матриц, их сложение и умножение матрицы на скаляр.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Матрицы A и B равны тогда и только тогда, когда

1. A и B имеют одинаковое число строк и столбцов.
2. Все соответствующие элементы равны между собой, т. е. $a_{ij} = b_{ij}$ для всех i и j .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Две матрицы A и B могут быть сложены тогда и только тогда, когда они имеют одинаковое число строк и столбцов. Сложение матриц осуществляется путем сложения всех соответствующих элементов; т. е. если символами a_{ij} и b_{ij} обозначаются типовые элементы матриц A и B , соответственно, то символ $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ обозначает типовой элемент матрицы C , где $C = A + B$. Следовательно, матрица C имеет такое же число строк и столбцов, что и матрицы A и B .

Пример 2.1: Вычислить $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0,5 & 3 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Здесь мы получаем

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2,5 & 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следует отметить, что порядок сложения матриц не имеет значения. Вычитание матриц определяется аналогичным образом.

Пример 2.2: Вычислить $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$, где \mathbf{A} и \mathbf{B} заданы в примере 2.1. Здесь мы имеем

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1,5 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Из определения вычитания матриц следует, что вычитание матрицы из себя самой дает в результате матрицу, имеющую только нулевые элементы. Такая матрица определяется как *нулевая матрица* $\mathbf{0}$. Перейдем теперь к умножению матрицы на скаляр.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Матрица умножается на скаляр путем умножения на этот скаляр каждого элемента матрицы; т. е. выражение $\mathbf{C} = k\mathbf{A}$ означает, что $c_{ij} = ka_{ij}$.

Нижеследующий пример иллюстрирует данное определение.

Пример 2.3: Вычислить $\mathbf{C} = k\mathbf{A}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0,5 & 3 & 0 \end{bmatrix}; \quad k = 2.$$

Имеем

$$\mathbf{C} = k\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Необходимо отметить, что все определения, данные выше, совершенно аналогичны тем, которые используются при расчетах с обычными числами. Более того, для сложения (или вычитания) двух типовых матриц порядка $n \times t$ требуется произвести nt операций сложения (вычитания), а для умножения типовой матрицы порядка $n \times t$ на скаляр требуется nt операций умножения. Поэтому в тех случаях, когда матрицы имеют специальную форму, например, являются симметричными или ленточными, следует воспользоваться преимуществом данной особенности путем вычисления только элементов матрицы \mathbf{C} , находящихся ниже горизонта, так как все остальные элементы равны нулю.

Умножение матриц

Рассмотрим две матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} и попытаемся найти произведение этих матриц $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Две матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} могут быть подвергнуты умножению с тем, чтобы получить $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ тогда и только тогда, когда число столбцов матрицы \mathbf{A} равно числу строк матрицы \mathbf{B} . Предположим, что \mathbf{A} имеет порядок $p \times t$, а \mathbf{B} — порядок $t \times q$. Тогда для каждого элемента матрицы \mathbf{C} имеем

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^t a_{ir}b_{rj}, \quad (2.11)$$

где матрица \mathbf{C} имеет порядок $p \times q$; индексы i и j в формуле (2.11) изменяются от 1 до p и от 1 до q соответственно.

Следовательно, для вычисления (i, j) -го элемента матрицы \mathbf{C} нужно умножить элементы i -й строки матрицы \mathbf{A} на элементы j -го столбца матрицы \mathbf{B} и сложить все полученные произведения. Собирая таким образом произведения каждой строки из \mathbf{A} на каждый столбец из \mathbf{B} , убеждаемся, что матрица \mathbf{C} должна иметь порядок $p \times q$.

Пример 2.4: Вычислить произведение матриц $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 10 & 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} c_{11} &= (5)(1) + (3)(2) + (1)(3) = 14 \\ c_{21} &= (4)(1) + (6)(2) + (2)(3) = 22 \\ c_{31} &= (10)(1) + (3)(2) + (4)(3) = 28 \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Получаем, следовательно,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 14 & 39 \\ 22 & 48 \\ 28 & 70 \end{bmatrix}.$$

Как нетрудно убедиться, число умножений, которое требуется выполнить при этом умножении матриц, равно $p \times q \times t$. Однако если мы имеем дело с матрицами на практике, то число операций нередко можно уменьшить, если воспользоваться наличием в матрицах нулевых элементов.

Пример 2.5: Вычислить произведение матриц $\mathbf{c} = \mathbf{Ab}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ & 2 & -1 & 0 \\ & & 2 & -1 \\ \text{симметрично} & & & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Здесь мы можем воспользоваться тем фактом, что ширина ленты матрицы \mathbf{A} равна 3, т. е. $m_{\mathbf{A}} = 1$. Таким образом, если учесть только те элементы, которые находятся внутри ленты матрицы \mathbf{A} , то мы имеем

$$\begin{aligned} c_1 &= (2)(4) + (-1)(1) = 7 \\ c_2 &= (-1)(4) + (2)(1) + (-1)(2) = -4 \\ c_3 &= (-1)(1) + (2)(2) + (-1)(3) = 0 \\ c_4 &= (-1)(2) + (1)(3) = 1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Как это хорошо известно, умножение обычных чисел является коммутативным действием, т. е. $ab = ba$. Нужно исследовать, остается ли это в силе для матричного

умножения. Если рассмотреть матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = [3 \quad 4], \quad (2.12)$$

то мы будем иметь

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{BA} = [11]. \quad (2.13)$$

Следовательно, произведения \mathbf{AB} и \mathbf{BA} не равны друг другу, а отсюда следует, что матричное умножение не является коммутативным. Действительно, в зависимости от порядков матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} порядки двух произведений матриц, \mathbf{AB} и \mathbf{BA} , могут оказаться различными, причем иногда произведение \mathbf{AB} может быть определено, тогда как произведение \mathbf{BA} может оказаться не поддающимся вычислению.

Чтобы различать порядок умножения матриц, мы будем говорить, что в произведении \mathbf{AB} матрица \mathbf{A} предумножается на \mathbf{B} , или что матрица \mathbf{B} постумножается на \mathbf{A} . В общем случае $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, однако для специального вида матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} может оказаться, что $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, и в этом случае говорят, что матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} коммутируются.

Хотя закон коммутативности и не справедлив при матричном умножении, однако законы дистрибутивности и ассоциативности здесь справедливы. Закон дистрибутивности гласит, что

$$\mathbf{E} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}. \quad (2.14)$$

Иными словами, мы можем сначала сложить \mathbf{A} и \mathbf{B} и затем результат сложения умножить на \mathbf{C} , или же можем сначала умножить матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} на \mathbf{C} , а затем произвести сложение. Заметим, что с учетом числа требуемых операций вычисление \mathbf{E} с первоначальным сложением \mathbf{A} и \mathbf{B} оказывается значительно более экономичным, а это важно помнить при составлении программы анализа.

Закон дистрибутивности обосновывается с помощью соотношения (2.11); иначе говоря, пользуясь формулой

$$e_{ij} = \sum_{r=1}^m (a_{ir} + b_{ir})c_{rj}, \quad (2.15)$$

мы получаем

$$e_{ij} = \sum_{r=1}^m a_{ir}c_{rj} + \sum_{r=1}^m b_{ir}c_{rj}. \quad (2.16)$$

Закон ассоциативности гласит, что

$$\mathbf{G} = (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \mathbf{ABC} \quad (2.17)$$

или, иначе говоря, что порядок проведения умножений несущественен. Доказательство этого осуществляется путем использования определения матричного умножения согласно (2.11) и произведенного любым образом вычисления типового элемента матрицы \mathbf{G} .

В силу того, что действует закон ассоциативности, на практике цепочка матричных умножений может реализовываться в произвольной последовательности и за счет умелого выбора этой последовательности нередко можно избежать выполнения многих операций. Единственное, что нужно помнить при действиях с матрицами, это — что скобки можно удалять или вводить, а также комбинировать степени, но порядок умножений должен сохраняться.

Желая продемонстрировать использование законов ассоциативности и дистрибутивности с целью упрощения вида цепочки матричных умножений, рассмотрим приводимые ниже примеры.

Пример 2.6: Вычислить \mathbf{A}^4 , где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Один из способов вычисления \mathbf{A}^4 состоит в том, чтобы просто рассчитать

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix},$$

затем

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{bmatrix}$$

и

$$\mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^3 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 75 \\ 75 & 125 \end{bmatrix}.$$

Другой вариант может иметь форму

$$\mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^2 \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 75 \\ 75 & 125 \end{bmatrix}$$

и дать возможность избавиться от одного матричного умножения.

Пример 2.7: Вычислить произведение $\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Формальная процедура состояла бы в том, чтобы вычислить $\mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{v}$, т. е.

$$\mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix},$$

а затем вычислить $\mathbf{v}^T \mathbf{x}$, получая

$$\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v} = [1 \quad 2 \quad -1] \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix} = 23.$$

Однако более эффективный способ вычисления искомого произведения состоит в следующем. Сначала напомним

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} + \mathbf{D} + \mathbf{U}^T,$$

где \mathbf{U} — нижняя треугольная матрица, а \mathbf{D} — диагональная матрица,

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Далее получим

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v} &= \mathbf{v}^T (\mathbf{U} + \mathbf{D} + \mathbf{U}^T) \mathbf{v} \\ \mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v} &= \mathbf{v}^T \mathbf{U} \mathbf{v} + \mathbf{v}^T \mathbf{D} \mathbf{v} + \mathbf{v}^T \mathbf{U}^T \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Однако $\mathbf{v}^T \mathbf{U} \mathbf{v}$ есть просто число и, следовательно, $\mathbf{v}^T \mathbf{U}^T \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{U} \mathbf{v}$, откуда следует, что

$$\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v} = 2\mathbf{v}^T \mathbf{U} \mathbf{v} + \mathbf{v}^T \mathbf{D} \mathbf{v}. \quad (\text{a})$$

Повышенная эффективность процесса матричного умножения достигается, если воспользоваться тем фактом, что матрица \mathbf{U} — нижняя треугольная, а матрица \mathbf{D} — диагональная. Положим $\mathbf{x} = \mathbf{U}\mathbf{v}$; тогда имеем

$$\begin{aligned}x_1 &= 0 \\x_2 &= (2)(1) = 2 \\x_3 &= (1)(1) + (2)(2) = 5.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

После этого получаем

$$\mathbf{v}^T \mathbf{U} \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{x} = (2)(2) + (-1)(5) = -1.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^T \mathbf{D} \mathbf{v} &= (1)(1)(3) + (2)(2)(4) + (-1)(-1)(6) = \\ &= 25.\end{aligned}$$

Далее, используя соотношение (а), имеем $\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v} = 23$, как и было прежде.

Кроме закона коммутативности, который в общем случае не соблюдается при матричном умножении, в матричных уравнениях нельзя производить сокращение, наподобие сокращения обычных чисел. В частности, если $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{C}\mathbf{B}$, то отсюда не обязательно следует, что $\mathbf{A} = \mathbf{C}$. Это легко продемонстрировать на специальном примере:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

но

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Нужно заметить, однако, что $\mathbf{A} = \mathbf{C}$, если уравнение $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{C}\mathbf{B}$ остается справедливым при любых возможных матрицах \mathbf{B} . А именно, в этом случае мы можем выбрать в качестве \mathbf{B} матрицу тождественности \mathbf{I} , получая $\mathbf{A} = \mathbf{C}$.

Следует отметить также, что, как это вытекает из проведенных выше рассуждений, из равенства $\mathbf{A}\mathbf{B} = 0$ не следует того, что одна из матриц \mathbf{A} или \mathbf{B} является нулевой. Справедливость этого замечания подтверждается специальным примером:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Необходимо сформулировать некоторые специальные правила использования транспонированных матриц при матричных умножениях. Заметим, что результат транспонирования произведения двух матриц, \mathbf{A} и \mathbf{B} , равен произведению транспонированных матриц в обратном порядке, т. е.

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T. \quad (2.21)$$

Доказательство справедливости соотношения (2.21) следует из определения произведения матриц, выраженного формулой (2.11).

Обращаясь к матричным произведениям в соотношении (2.21), следует отметить, что даже если матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} могут оказаться симметричными, их произведение $\mathbf{A}\mathbf{B}$ в общем случае не является симметричной матрицей. Однако если

матрица \mathbf{A} симметрична, то матрица $\mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B}$ всегда является симметричной. Доказательство этого факта следует из соотношения (2.21):

$$(\mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B})^T = (\mathbf{A} \mathbf{B})^T (\mathbf{B}^T)^T \quad (2.22)$$

$$= \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \mathbf{B}. \quad (2.23)$$

Однако в силу того, что $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, мы имеем

$$(\mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B} \quad (2.24)$$

и, следовательно, матрица $\mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B}$ симметрична.

Обратная матрица

Как мы уже видели, сложение и вычитание матриц подчиняется, по существу, тем же самым законам, которые используются при действиях с обычными числами. Однако с матричным умножением дело обстоит совершенно иначе и мы должны были приучиться к использованию специальных правил. Что касается матричного деления, то его, строго говоря, попросту не существует. В качестве своеобразной замены делению мы дадим определение обратной матрицы. При этом и само определение, и его использование будет касаться только квадратных матриц.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Матрица, обратная \mathbf{A} , обозначается символом \mathbf{A}^{-1} . Предположим, что обратная матрица существует; тогда элементы матрицы \mathbf{A}^{-1} таковы, что $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{I}$ и $\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$. Матрица, обладающая обратной себе, называется невырожденной. Матрица же, не имеющая обратной, называется вырожденной.

Как уже было сказано, матрица, обратная данной, не обязательно существует. Тривиальный пример матрицы, не имеющей обратной себе, — это нулевая матрица. Предположим, что матрица, обратная \mathbf{A} , существует. Тогда остается показать, что любое из условий $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{I}$ или $\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ влечет за собой другое. Предположим, что мы вычислили элементы матриц \mathbf{A}_l^{-1} и \mathbf{A}_r^{-1} , так что $\mathbf{A}_l^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{I}$ и $\mathbf{A} \mathbf{A}_r^{-1} = \mathbf{I}$. Тогда мы имеем

$$\mathbf{A}_l^{-1} = \mathbf{A}_l^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{A}_r^{-1}) = (\mathbf{A}_l^{-1} \mathbf{A}) \mathbf{A}_r^{-1} = \mathbf{A}_r^{-1} \quad (2.25)$$

и, следовательно, $\mathbf{A}_l^{-1} = \mathbf{A}_r^{-1}$.

Пример 2.8: Вычислить матрицу, обратную матрице \mathbf{A} , где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

При наличии матрицы, обратной \mathbf{A} , мы должны иметь $\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$. Методом проб и ошибок (или каким-либо другим методом) мы находим, что

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & 1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{bmatrix}.$$

С помощью проверки убеждаемся, что $\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ и $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{I}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 & 1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 3/5 & 1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Чтобы вычислить матрицу, обратную произведению $\mathbf{A} \mathbf{B}$, будем действовать следующим образом. Пусть $\mathbf{G} = (\mathbf{A} \mathbf{B})^{-1}$, где обе матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} являются квадратными. Тогда

$$\mathbf{G} \mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{I} \quad (2.26)$$

и, проводя постумножение сначала на \mathbf{B}^{-1} , потом на \mathbf{A}^{-1} , получаем

$$\mathbf{GA} = \mathbf{B}^{-1}, \quad (2.27)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}. \quad (2.28)$$

Поэтому

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}. \quad (2.29)$$

Отметим, что тот же самый закон перестановки матриц-сомножителей применялся, как было показано, к случаю транспонирования матричного произведения.

Пример 2.9: Для заданных матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} проверить, будет ли $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Матрица, обратная \mathbf{A} , использовалась в примере 2.8. Нетрудно получить матрицу, обратную \mathbf{B} :

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Для проверки справедливости соотношения $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ необходимо вычислить $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 12 \end{bmatrix}.$$

Предположим, что $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$. Тогда мы получили бы

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 & 1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/15 \\ 1/20 & 1/10 \end{bmatrix}. \quad (a)$$

Желая проверить, что матрица, заданная выражением (a), действительно является обратной по отношению к \mathbf{C} , вычислим произведение $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}$ и найдем, что

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/15 \\ 1/20 & 1/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 12 \end{bmatrix} = \mathbf{I}.$$

Но в силу того, что выражение для \mathbf{C}^{-1} является единственным и что только надлежащая форма этого выражения удовлетворяет соотношению $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{I}$, мы действительно установили, что формула (a) выражает собой матрицу, обратную \mathbf{C} , и что удовлетворяется соотношение $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

В примерах 2.8 и 2.9 обращение матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} могло быть сделано методом проб и ошибок. Однако в общем случае для получения матрицы, обратной данной, нужно иметь некий общий алгоритм. Один из путей вычисления матрицы, обратной матрице \mathbf{A} порядка n , состоит в решении n систем уравнений

$$\mathbf{AX} = \mathbf{I}, \quad (2.30)$$

где \mathbf{I} — матрица тождественности порядка n и где $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$. Для решения каждой из систем уравнений (2.30) можно воспользоваться алгоритмами, представленными в разделе 8.2.

Вышеуказанные соображения указывают на то, что решение некой системы уравнений может быть осуществлено путем обращения матрицы коэффициентов; иначе говоря, если есть система уравнений

$$\mathbf{Ay} = \mathbf{c}, \quad (2.31)$$

где матрица \mathbf{A} имеет порядок $n \times n$, а \mathbf{y} и \mathbf{c} имеют порядок $n \times 1$, то

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}. \quad (2.32)$$

Однако обращение матрицы \mathbf{A} является весьма дорогостоящим процессом, и гораздо более эффективный путь сводится к тому, чтобы решить уравнения системы (2.31) без обращения \mathbf{A} (см. главу 8). Действительно, хотя мы и можем сделать символическую запись (2.32), однако для вычисления \mathbf{y} мы фактически лишь решаем представленные уравнения.

Разбиение матриц

Желая упростить действия с матрицами и воспользоваться преимуществом специальных форм матриц, может оказаться полезным разбить данную матрицу на подматрицы — блоки. Подматрицей (блоком) называют матрицу, полученную из первоначальной матрицы путем включения только элементов, принадлежащих определенным строкам и столбцам. Высказанная идея иллюстрируется с помощью обращения к специальному случаю, в котором пунктирные линии являются линиями разбиения:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \end{array} \right]. \quad (2.33)$$

Следует заметить, что каждая из линий разбиения должна полностью пересекать первоначальную матрицу. Если использовать разбиение, то матрица \mathbf{A} записывается в форме

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \end{bmatrix}, \quad (2.34)$$

где

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}; \quad \text{и т. д.} \quad (2.35)$$

Правая часть формулы (2.34) может быть подвергнута дальнейшему разбиению, как например

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \end{bmatrix}, \quad (2.36)$$

и можем выписать выражение для \mathbf{A} как

$$\mathbf{A} = [\overline{\mathbf{A}}_1 \quad \overline{\mathbf{A}}_2]; \quad \overline{\mathbf{A}}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} \\ \mathbf{A}_{21} \end{bmatrix}; \quad \overline{\mathbf{A}}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Преимуществом разбиения матриц может оказаться возможность экономии памяти компьютера; а именно, если несколько блоков имеют повторяющуюся форму, то в память необходимо ввести только один из таких блоков. То же самое относится и к арифметическим действиям. Используя блоки, мы можем идентифицировать некую типовую операцию, повторяющуюся много раз. После этого указанную операцию достаточно выполнить только единожды, а ее результат использовать всякий раз, как только это потребуется.

Те правила, которые нужно соблюдать при разбиении матриц, следуют из определений матричных операций сложения, вычитания и умножения. Пользуясь разбиениями на блоки матрицами, мы можем складывать, вычитать или умножать так, как если бы блоки были обычными элементами первоначальной матрицы, если только эта матрица была разбита таким образом, чтобы для блоков имела возможность выполнять индивидуальные действия сложения, вычитания или умножения.

Все эти правила нетрудно подтвердить и запомнить, если иметь в виду, что разбиение первоначальных матриц является всего лишь средством для упрощения действий с матрицами и никак не влияет на результаты вычислений.

Пример 2.10: Вычислить произведение матриц $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ из примера 2.4, воспользовавшись приводимым ниже способом разбиения:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ \hline 10 & 3 & 4 \end{array} \right]; \quad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ \hline 3 & 2 \end{array} \right].$$

В данном случае имеем

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array} \right]; \quad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{array} \right].$$

Следовательно,

$$\mathbf{AB} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_2 \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_2 \end{array} \right]. \quad (\text{a})$$

При этом

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 37 \\ 16 & 44 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 10 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 62 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 8 \end{bmatrix}.$$

Подстановка этих результатов в соотношение (a) дает

$$\mathbf{AB} = \left[\begin{array}{cc} 14 & 39 \\ 22 & 48 \\ 28 & 70 \end{array} \right].$$

Пример 2.11: Воспользовавшись преимуществом разбиения матриц, вычислить $\mathbf{c} = \mathbf{Ab}$, где

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 8 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 12 \end{array} \right]; \quad \mathbf{b} = \left[\begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right].$$

Здесь нужно вычислить только произведения

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

и

$$\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

После этого можно построить матрицу \mathbf{c} :

$$\mathbf{c} = \left[\begin{array}{cc} 2\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \\ 2\mathbf{w}_1 + 2\mathbf{w}_2 \end{array} \right]$$

или, проводя подстановки, получим

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 17 \\ 21 \\ 20 \\ 24 \end{bmatrix}.$$

След и определитель матрицы

След матрицы и ее определитель будут определены только для квадратной матрицы. Обе эти величины представляют собой просто числа, вычисляемые по элементам матрицы и поэтому являющиеся функциями матричных элементов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: След матрицы \mathbf{A} обозначается символом $\text{tr}(\mathbf{A})$ и равен $\sum_{i=1}^n a_{ii}$, где n — порядок матрицы \mathbf{A} .

Пример 2.12: Вычислить след матрицы \mathbf{A} , заданной в примере 2.11.
Получаем

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = 4 + 6 + 8 + 12 = 30.$$

Определитель матрицы \mathbf{A} может быть определен через посредство определителей подматриц и с учетом того, что определитель матрицы порядка 1 — это просто элемент данной матрицы; т. е. если $\mathbf{A} = [a_{11}]$, то $\det \mathbf{A} = a_{11}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Определитель матрицы \mathbf{A} , имеющей порядок $n \times n$, обозначается символом $\det \mathbf{A}$ и определяется с помощью рекуррентного соотношения

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det \mathbf{A}_{1j}, \quad (2.38)$$

где \mathbf{A}_{1j} есть матрица порядка $(n-1) \times (n-1)$, получаемая путем исключения 1-й строки и j -го столбца из матрицы \mathbf{A} .

Пример 2.13: Вычислить определитель матрицы \mathbf{A} , где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Пользуясь формулой (2.38), получаем

$$\det \mathbf{A} = (-1)^2 a_{11} \det \mathbf{A}_{11} + (-1)^3 a_{12} \det \mathbf{A}_{12}.$$

Но

$$\det \mathbf{A}_{11} = a_{22}; \quad \det \mathbf{A}_{12} = a_{21}$$

и, следовательно,

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Это соотношение представляет собой формулу общего выражения определителя для матрицы порядка 2×2 .

Можно показать, что для вычисления определителя матрицы данное в формуле (2.38) рекуррентное соотношение может применяться вдоль любой строки или любого столбца, как это иллюстрируется в примере 2.14.

Пример 2.14: Вычислить определитель матрицы \mathbf{A} , заданной выражением

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Пользуясь формулой (2.38), получим

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= (-1)^2(2) \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \\ &+ (-1)^3(1) \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \\ &+ (-1)^4(0) \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся формулой для определителя матрицы порядка 2×2 , данной в примере 2.13, и получим

$$\det \mathbf{A} = (2)\{(3)(2) - (1)(1)\} - \{(1)(2) - (0)(1)\} + 0.$$

Следовательно,

$$\det \mathbf{A} = 8.$$

Теперь проверим, получится ли тот же результат при применении формулы (2.38) вдоль второй строки взамен первой. В этом случае, заменяя в (2.38) 1 на 2, получим

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= (-1)^3(1) \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \\ &+ (-1)^4(3) \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \\ &+ (-1)^5(1) \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Вновь воспользовавшись формулой, данной в примере 2.13, найдем

$$\det \mathbf{A} = -\{(1)(2) - (0)(1)\} + (3)\{(2)(2) - (0)(0)\} - (2)(1) - (1)(0)$$

или, как и ранее,

$$\det \mathbf{A} = 8.$$

Наконец, применяя (2.38) вдоль третьей строки, имеем

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= (-1)^4(0) \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \\ &+ (-1)^5(1) \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \\ &+ (-1)^6(2) \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

и, как и ранее, получим

$$\det \mathbf{A} = 8.$$

С использованием определителей связаны многие теоремы. Как характерный пример, укажем, что решение системы нескольких уравнений может быть получено путем вычисления серии определителей (см., например, [Noble 1969]). Однако с современной точки зрения большинство результатов, получаемых с помощью вычисления определителей, может быть получено гораздо более эффективным путем. Например, решение системы уравнений с использованием определителей является весьма неэффективным. Как мы увидим позднее, главная ценность использования определителей состоит в возможности применения краткой и удобной

символики, которую можно использовать при обсуждении некоторых вопросов, например, вопроса о существовании матрицы, обратной данной. В частности, мы будем использовать определители при решении задач о собственных значениях.

Эффективным приемом вычисления определителя матрицы может оказаться предварительная факторизация матрицы с превращением ее в произведение матриц, после чего можно воспользоваться следующим результатом:

$$\det(\mathbf{BC} \cdots \mathbf{F}) = (\det \mathbf{B})(\det \mathbf{C}) \cdots (\det \mathbf{F}). \quad (2.39)$$

Соотношение (2.39) гласит, что определитель произведения нескольких матриц равен произведению определителей каждой матрицы в отдельности. Доказательство этого правила является довольно длительным и громоздким [оно основано на использовании определения определителей по формуле (2.38)], в силу чего мы не будем приводить его здесь. Результат, выражаемый формулой (2.39), мы будем часто использовать при расчетах собственных значений, когда требуется знать определитель матрицы, например, матрицы \mathbf{A} . При этом используется характерная форма представления, $\mathbf{A} = \mathbf{LDL}^T$, где \mathbf{L} есть нижняя единичная треугольная матрица, а \mathbf{D} — диагональная матрица (см. раздел 8.2.2). В этом случае

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{L} \det \mathbf{D} \det \mathbf{L}^T \quad (2.40)$$

и, с учетом того, что $\det \mathbf{L} = 1$, получим

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^n d_{ii}. \quad (2.41)$$

Пример 2.15: Пользуясь представлением в форме \mathbf{LDL}^T , вычислить определитель матрицы \mathbf{A} , заданной в примере 2.14.

Процедура представления \mathbf{A} в вышеуказанной форме приведена в разделе 8.2. Здесь мы просто задаем \mathbf{L} и \mathbf{D} , причем можно убедиться, что $\mathbf{LDL}^T = \mathbf{A}$:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2/5 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 8/5 \end{bmatrix}.$$

Пользуясь формулой (2.41), получим

$$\det \mathbf{A} = (2)(5/2)(8/5) = 8.$$

Это вновь то же значение, которое было получено в примере 2.14.

Определитель и след матрицы являются функциями матричных элементов. Однако важно отметить, что внедиагональные элементы никак не влияют на след матрицы, тогда как определитель является функцией всех элементов матрицы. Хотя мы и можем сделать заключение о том, что большой определитель или большой след свидетельствуют о больших значениях некоторых элементов матрицы, однако никак нельзя сказать, что малый определитель или малый след свидетельствуют о малости всех элементов матрицы.

Пример 2.16: Вычислить след и определитель матрицы \mathbf{A} вида

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 10\,000 \\ 10^{-4} & 2 \end{bmatrix}.$$

В данном случае имеем

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = 3$$

и

$$\det \mathbf{A} = (1)(2) - (10^{-4})(10\,000),$$

т. е.

$$\det \mathbf{A} = 1.$$

Следовательно, как след, так и определитель матрицы \mathbf{A} малы в сравнении с внедиагональным элементом a_{12} .

2.3. Векторные пространства

В предыдущем разделе было дано определение вектора порядка n как массива из n чисел, записанного в матричной форме. Теперь мы хотели бы дать элементам вектора геометрическую интерпретацию. Рассмотрим для примера вектор-столбец порядка 3, такой, как

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

Из элементарной геометрии мы знаем, что величина \mathbf{x} представляет собой геометрический вектор в выбранной системе координат в трехмерном пространстве. На рис. 2.2 показаны предполагаемые оси координат и вектор, соответствующий выражению (2.42) в этой системе. Следует заметить, что геометрическое представление \mathbf{x} полностью зависит от выбранной системы координат; другими словами, если бы выражение (2.42) представило компоненты вектора в какой-то другой координатной системе, то и геометрическое представление \mathbf{x} было бы отлично от того, что показано на рис. 2.2. Поэтому одни только координаты (или компоненты вектора) не определяют собой истинную геометрическую величину, и они должны быть заданы вместе с конкретной системой координат, в которой они измеряются.

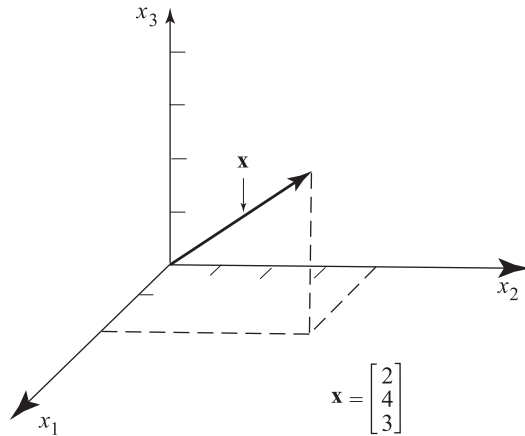


Рис. 2.2. Геометрическое представление вектора \mathbf{x}

Понятия трехмерной геометрии обобщаются по отношению к вектору любого конечного порядка n . Если $n > 3$, то мы уже не можем получить наглядное изображение вектора; однако мы сможем убедиться, что в математическом представлении все понятия, относящиеся к векторам, не зависят от n . Как и прежде, когда

рассматривался специальный случай $n = 3$, вектор порядка n представляет собой величину, измеряемую в специальной системе координат в n -мерном пространстве.

Предположим, что мы имеем дело с некоторым числом векторов, имеющих одинаковый порядок n и определяемых в фиксированной системе координат. Некоторые фундаментальные понятия, имеющие, как будет установлено в последующих главах, чрезвычайно большое значение, представляются в виде приводимых ниже определений и фактов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: О совокупности векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_s$ говорят как о связанных линейной зависимостью, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ не все равные нулю и такие, что

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_s \mathbf{x}_s = 0. \quad (2.43)$$

Если векторы не связаны линейной зависимостью, то они называются линейно независимыми векторами.

Рассмотрим приводимые ниже примеры, позволяющие уяснить смысл данного выше определения.

Пример 2.17: Положим $n = 3$ и определим, являются ли векторы \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, 3$, линейно зависимыми или независимыми.

В соответствии с определением линейной зависимости нужно проверить, существуют ли постоянные α_1, α_2 и α_3 , не все равные нулю, и такие, чтобы выполнялось соотношение

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (a)$$

Однако соотношение (a) записывается как

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

а это уравнение удовлетворяется только если $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, 3$; следовательно, векторы \mathbf{e}_i являются линейно независимыми.

Пример 2.18: При $n = 4$ определить, будут ли нижеследующие векторы линейно зависимыми или независимыми.

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0,5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,5 \\ -0,5 \\ -0,25 \end{bmatrix}.$$

Нам нужно рассмотреть систему уравнений

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0,5 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -0,5 \\ -0,5 \\ -0,25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

или, рассматривая каждую строку по отдельности,

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 &= 0; \\ \alpha_1 - 0,5 \alpha_3 &= 0; \\ \alpha_2 - 0,5 \alpha_3 &= 0; \\ 0,5 \alpha_1 - 0,25 \alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения удовлетворяются при $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$ и $\alpha_3 = 2$. Следовательно, данные векторы являются линейно зависимыми.

В приведенных выше примерах решение для коэффициентов α_1 , α_2 и α_3 могло быть получено путем инспекции. Позднее мы разработаем систематическую процедуру для проверки того факта, является ли некоторая группа векторов линейно зависимой или независимой.

Другой вариант обращения к данной проблеме, который может оказаться более привлекательным, сводится к тому, чтобы назвать векторы *линейно зависимыми*, если любой из них может быть выражен в виде линейной комбинации остальных. Это означает, что если не все α_i в соотношении (2.43) равны нулю, например, если $\alpha_j \neq 0$, то мы можем написать

$$\mathbf{x}_j = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}} \frac{\alpha_k}{\alpha_j} \mathbf{x}_k. \quad (2.44)$$

С точки зрения геометрии, если $n < 3$, то мы могли бы представить векторы графически и, если они линейно зависимы, то можно было бы представить изображение одного вектора как линейную комбинацию других с некоторыми коэффициентами. Например, при графическом представлении векторов, заданных в примере 2.17, мы сразу же убеждаемся, что ни один из них не может быть выражен в виде линейной комбинации всех остальных; следовательно, эти векторы линейно независимы.

Предположим, что мы имеем q векторов порядка n , $n \geq q$, которые линейно зависимы при рассмотрении только любых $(q - 1)$ из них. Эти векторы, числом $(q - 1)$, могут быть линейно зависимы. Однако продолжая уменьшать число рассматриваемых векторов, мы получим p векторов, являющихся линейно независимыми, причем в общем случае $p \leq q$. Оставшиеся $(q - p)$ векторов могут быть выражены как комбинации p векторов. Таким образом, мы приходим к следующему определению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть имеется p линейно независимых векторов порядка n , где $n \geq p$. Эти p векторов формируют базис для p -мерного векторного пространства.

Мы говорим о векторном пространстве размерности p , потому что любой вектор в этом пространстве может быть выражен как линейная комбинация p базисных векторов. Следует заметить, что для конкретного пространства базисные векторы не являются единственными; их линейная комбинация может дать другой базис для того же пространства. В частности, если $p = n$, то базис для рассматриваемого пространства составляют единичные векторы \mathbf{e}_i , где $i = 1, \dots, n$, откуда следует также, что p не может быть больше n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Говорят, что q векторов, из числа которых p являются линейно независимыми, охватывают p -мерное векторное пространство.

На основании вышесказанного мы устанавливаем, что важнейшую роль играют именно базисные векторы, так как они составляют наименьшее число векторов, охватывающих рассматриваемое пространство. Все q векторов могут быть выражены через эти базисные векторы, как бы велико ни было число q (и, действительно, q может быть больше, чем n).

Пример 2.19: Установить базис для пространства, охватываемого тремя векторами в примере 2.18.

В этом случае $q = 3$ и $n = 4$. Путем инспекции мы находим, что два вектора, \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 , являются линейно независимыми. Следовательно, \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 могут быть выбраны в качестве базисных векторов двумерного пространства, охватываемого векторами \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 и \mathbf{x}_3 . Кроме того, используя результат из примера 2.18, имеем $\mathbf{x}_3 = -(\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1)/2$.

Предположим, что нам задано p -мерное векторное пространство, которое мы обозначим символом E и для которого $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p$ выбраны в качестве базисных векторов, $p > 1$. Тогда мы могли бы предпочесть рассматривать только те векторы, которые могут быть выражены через \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 . Однако векторы \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 формируют также базис векторного пространства, обозначаемого символом E_2 . Если $p = 2$, то заметим, что E_p и E_2 совпадают. Пространство E_2 мы будем называть подпространством по отношению к E_p , причем смысл этого термина четко определяется ниже.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: *Подпространством векторного пространства является такое, в котором любой вектор оказывается также вектором исходного пространства. Если $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p$ суть базисные векторы исходного пространства, то любое подмножество этих векторов формирует базис подпространства; размерность подпространства равна числу выбранных базисных векторов.*

Пример 2.20: Три вектора, \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 и \mathbf{x}_3 , линейно независимы и поэтому формируют базис трехмерного векторного пространства E_3 :

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (a)$$

Требуется выделить некоторые возможные подпространства, принадлежащие E_3 .

Пользуясь базисными векторами, выраженными согласно (a), можно сформировать двумерное подпространство с помощью любых двух из числа трех данных векторов; например, \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 формируют базис для некоторого двумерного подпространства; \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_3 дают базис для другого двумерного подпространства, и т. д. Действительно, любые два линейно независимых вектора в E_3 формируют базис двумерного подпространства, а отсюда следует, что в E_3 имеется бесконечное число двумерных подпространств.

После рассмотрения понятий векторного пространства мы можем признать, что столбцы любой прямоугольной матрицы \mathbf{A} также охватывают некоторое векторное пространство. Это пространство мы будем называть столбцовым пространством матрицы \mathbf{A} . Аналогично этому, строки матрицы охватывают векторное пространство, которое будем называть строчным пространством матрицы \mathbf{A} . И наоборот, мы можем собрать любые q векторов порядка n в матрицу \mathbf{A} , имеющую порядок $n \times q$. Число используемых при этом линейно независимых векторов равно размерности столбцового пространства матрицы \mathbf{A} . Например, три вектора из примера 2.20 формируют матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

Предположим, что нам задана матрица \mathbf{A} и что нам нужно рассчитать размерность столбцового пространства этой матрицы. Другими словами, мы хотели бы

установить, сколько столбцов матрицы \mathbf{A} являются линейно независимыми. Если взять любую линейную комбинацию этих столбцов, то за счет этого число линейно независимых столбцов в \mathbf{A} не будет ни увеличено, ни уменьшено. Поэтому, желая идентифицировать столбцовое пространство матрицы \mathbf{A} , мы можем попытаться преобразовать матрицу путем такой линейной комбинации ее столбцов, чтобы получить единичные векторы \mathbf{e}_i . В силу того, что единичные векторы \mathbf{e}_i с различными i линейно независимы, размерность столбцового пространства матрицы \mathbf{A} равна числу тех единичных векторов, которое мы смогли получить. Несмотря на то, что нередко нам не удастся практически получить единичные векторы (см. пример 2.21), все же процесс указанного преобразования матрицы \mathbf{A} будет всегда приводить к такой форме, которая выявляет размерность столбцового пространства.

Пример 2.21: Рассчитать размерность столбцового пространства матрицы \mathbf{A} , образуемой рассмотренными в примере 2.20 векторами \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 и \mathbf{x}_3 .

Рассматриваемая матрица имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Записывая второй и третий столбцы как первый и второй, соответственно, получим

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Проведем вычитание первого столбца из третьего, прибавим к результату удвоенный второй столбец и, наконец, умножим второй столбец на (-1) ; мы получим преобразованную матрицу

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Однако теперь мы привели исходную матрицу к такой форме, в которой три столбца линейно независимы, потому что первые три элемента каждого из векторов являются столбцами матрицы тождественности порядка 3. Но поскольку превращение матрицы \mathbf{A} в \mathbf{A}_2 осуществлялось путем перестановки и введения линейных комбинаций столбцов исходной матрицы \mathbf{A} и, следовательно, в процессе решения мы не расширяли пространства, охватываемого столбцами этой матрицы, то мы находим, что размерность столбцового пространства матрицы \mathbf{A} равна 3.

То, что было проделано выше, сводилось к построению таких линейных комбинаций векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_q$, представлявших собой столбцы матрицы \mathbf{A} , которые позволили бы установить, являются ли эти векторы линейно независимыми. Другой вариант определения размерности пространства, охватываемого приведенным выше набором векторов, мог бы состоять в использовании определения линейной независимости векторов, заданного формулой (2.43), и в рассмотрении системы однородных уравнений

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_q \mathbf{x}_q = 0, \quad (2.46)$$

которая в матричных обозначениях имеет вид

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = 0, \quad (2.47)$$

где $\boldsymbol{\alpha}$ — вектор с элементами $\alpha_1, \dots, \alpha_q$, а столбцами матрицы \mathbf{A} являются векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_q$. Решение для неизвестных $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ не изменяется за счет линейного комбинирования любых строк матрицы \mathbf{A} или их умножения на константу. Поэтому мы можем попытаться преобразовать матрицу \mathbf{A} путем умножения или комбинирования ее строк в такую матрицу, столбцы которой состоят только из единичных векторов. Эта преобразованная матрица называется *строчно-ступенчатой формой* матрицы \mathbf{A} . Число единичных векторов-столбцов в строчно-ступенчатой форме матрицы \mathbf{A} равно размерности столбцового пространства \mathbf{A} и, как это следует из предыдущего обсуждения, равно также и размерности строчного пространства той же матрицы. Отсюда следует, что размерность столбцового пространства матрицы \mathbf{A} равна размерности ее строчного пространства. Другими словами, число линейно независимых столбцов матрицы \mathbf{A} равно числу ее линейно независимых строк. Этот результат подытоживается в определении ранга матрицы и в определении ее нулевого пространства (или ядра).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Ранг матрицы \mathbf{A} равен размерности ее столбцового пространства и размерности строчного пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пространство векторов $\boldsymbol{\alpha}$, для которого $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = 0$, есть нулевое пространство (или ядро) матрицы \mathbf{A} .

Пример 2.22: Рассмотрим три следующих вектора:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Используйте эти векторы в качестве столбцов матрицы \mathbf{A} и приведите эту матрицу к строчно-ступенчатой форме.

Мы имеем

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Вычитая величины, кратные первой строке, из строк, расположенных ниже, так, чтобы в первом столбце получить единичный вектор \mathbf{e}_1 , приходим к выражению

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -10 & -2 \\ 0 & -10 & -2 \end{bmatrix}.$$

Если вторую строку разделить на (-5) , а затем вычесть кратные ей величины из других строк с тем, чтобы привести второй столбец к форме единичного вектора \mathbf{e}_2 , то получим

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7/5 \\ 0 & 1 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Проведенные выкладки позволяют прийти к следующим эквивалентным утверждениям:

1. Решение уравнения $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = 0$ соответствует равенствам

$$\alpha_1 = -\frac{7}{5}\alpha_3,$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{5}\alpha_3.$$
2. Три вектора \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 и \mathbf{x}_3 являются линейно зависимыми. Они образуют двумерное векторное пространство. Векторы \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 линейно независимы и формируют базис того двумерного пространства, в котором лежат векторы \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 и \mathbf{x}_3 .
3. Ранг матрицы \mathbf{A} равен 2.
4. Размерность столбцового пространства матрицы \mathbf{A} равна 2.
5. Размерность строчного пространства матрицы \mathbf{A} равна 2.
6. Нулевое пространство (ядро) матрицы \mathbf{A} имеет размерность 1 и базисом является вектор

$$\begin{bmatrix} -7/5 \\ -1/5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что ранг \mathbf{A}^T также равен 2, однако ядро матрицы \mathbf{A}^T имеет размерность 4.

2.4. Определение тензоров

Понятие о тензорах и их матричном представлении играет важную роль в инженерном анализе. Здесь мы ограничимся обсуждением тензоров в трехмерном пространстве и, в первую очередь, будем заниматься представлением тензоров в прямоугольных декартовых системах координат.

Пусть декартова система координат определяется единичными базисными векторами \mathbf{e}_i (см. рис. 2.3). Вектор \mathbf{u} задается в этой системе формулой

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{e}_i, \quad (2.48)$$

где u_i суть компоненты вектора. В тензорной алгебре принято с целью более компактного обозначения опускать знак суммирования в формуле (2.48); иначе говоря, вместо (2.48) мы пишем просто

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i, \quad (2.49)$$

где подразумевается суммирование по повторяющемуся индексу i (здесь $i = 1, 2, 3$). С учетом того, что индекс i может быть заменен любым другим индексом без изменения результата (например, k или j), то он называется также *неммым индексом*. Вышеописанное соглашение называют соглашением о суммировании при

индексном обозначении (или соглашением Эйнштейна), и оно эффективно используется для того, чтобы в компактной форме представлять соотношения, связанные с тензорными величинами (см. главу 6, где такие обозначения используются весьма интенсивно).

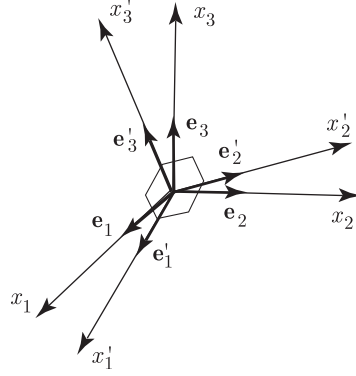


Рис. 2.3. Декартовы системы координат для представления тензоров

При рассмотрении векторов в трехмерном пространстве эффективно используется векторная алгебра.

Скалярное (или точечное) произведение векторов \mathbf{u} и \mathbf{v} обозначается как $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ и задается формулой

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta, \quad (2.50)$$

где величина $|\mathbf{u}|$ равна длине вектора \mathbf{u} , $|\mathbf{u}| = \sqrt{u_i u_i}$. Скалярное произведение может вычисляться с использованием компонент векторов,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i v_i. \quad (2.51)$$

Векторное произведение векторов \mathbf{u} и \mathbf{v} дает результат в форме нового вектора $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$,

$$\mathbf{w} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

Схема на рис. 2.4 иллюстрирует векторные операции, соответствующие формулам (2.50) и (2.52). Следует отметить, что направление вектора \mathbf{w} определяется по правилу правой руки; это значит, что большой палец правой руки указывает направление \mathbf{w} , если остальные пальцы сгибаются от \mathbf{u} к \mathbf{v} .

Процедуры векторной алгебры часто применяются при конечно-элементном анализе с целью расчета углов между двумя заданными направлениями, а также для определения направления по нормали к заданной плоскости.

Пример 2.23: Предположим, что векторы \mathbf{u} и \mathbf{v} на рис. 2.4 таковы:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Требуется вычислить угол между этими векторами и найти вектор, перпендикулярный к плоскости, определяемой этими векторами.

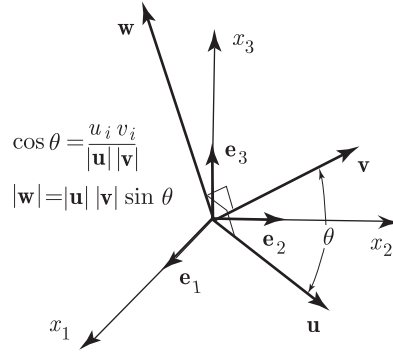


Рис. 2.4. Схема построения произведения векторов

Здесь мы имеем

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}| &= 3\sqrt{2}, \\ |\mathbf{v}| &= 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\cos \theta = \frac{1}{2}$ и $\theta = 60^\circ$.

Вектор, перпендикулярный к плоскости, определяемой векторами \mathbf{u} и \mathbf{v} , задается выражением

$$\mathbf{w} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

и, следовательно,

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Пользуясь тем, что $|\mathbf{w}| = \sqrt{w_i w_i}$, получаем

$$|\mathbf{w}| = 6\sqrt{3},$$

а это совпадает со значением, полученным по формуле, приводимой на рис. 2.4.

Хотя это и не было специально оговорено, однако представленный формулой (2.48) типовой вектор представляет тензор. Теперь мы дадим формальное определение тому, что мы подразумеваем под термином «тензор».

С этой целью в дополнение к *декартовой системе координат без штриха* дадим *декартову систему координат*, имеющую базисные векторы \mathbf{e}'_j и охватывающую то же самое пространство, что и система координат без штриха (см. рис. 2.3).

Объект называется скаляром, вектором (т. е. тензором первого порядка или ранга 1) или тензором (т. е. тензором более высокого порядка или ранга) в зависимости от того, как компоненты этого объекта определяются в нештрихованной системе координат и как эти компоненты преобразуются при переходе к штрихованным координатам.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Объект называется скаляром, если он имеет только одну компоненту ϕ в координатах x_i , измеряемую вдоль \mathbf{e}_i , причем эта компонента не изменяется при выражении в координатах x'_i и измерении вдоль \mathbf{e}'_i :

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \phi'(x'_1, x'_2, x'_3). \quad (2.53)$$

Скаляр является также тензором порядка 0. В качестве примера — температура в некоторой точке представляет собой скаляр.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: *Объект называется вектором или тензором первого порядка, если он имеет три компоненты ξ_i в нештрихованной системе координат и три компоненты ξ'_i в штрихованных координатах и если, притом, эти компоненты связаны характеристическим законом (пользуясь соглашением о суммировании)*

$$\xi'_i = p_{ik}\xi_k, \quad (2.54)$$

где

$$p_{ik} = \cos(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_k). \quad (2.55)$$

Соотношение (2.54) может быть также представлено в матричной форме, как

$$\boldsymbol{\xi}' = \mathbf{P}\boldsymbol{\xi}, \quad (2.56)$$

где $\boldsymbol{\xi}'$, \mathbf{P} и $\boldsymbol{\xi}$ содержат в себе элементы соотношения (2.54).

Преобразование, соответствующее соотношению (2.54), выражает собой изменение базиса при представлении вектора. Чтобы прийти к соотношению (2.54), будем считать, что один и тот же вектор рассматривается в двух различных базисах; отсюда следует, что

$$\xi'_j \mathbf{e}'_j = \xi_k \mathbf{e}_k. \quad (2.57)$$

Пользуясь тем обстоятельством, что базисные векторы в каждой системе координат ортогональны друг другу и имеют единичную длину, мы можем взять точечные произведения (см. (2.50)) обеих частей равенства (2.57), умножаемых на \mathbf{e}'_i , и получить соотношение (2.54). Разумеется, совершенно аналогичным образом мы могли также взять скалярное произведение обеих частей на \mathbf{e}_m , чтобы получить обратное преобразование

$$\xi_m = \cos(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}'_j) \xi'_j \quad (2.58)$$

или, в матричной форме,

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{P}^T \boldsymbol{\xi}'. \quad (2.59)$$

Заметим, следовательно, что $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$, а это приводит нас к нижеследующему определению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: *Матрица \mathbf{Q} является ортогональной матрицей, если $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$. Следовательно, для ортогональной матрицы имеем $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$.*

Отсюда следует, что матрица \mathbf{P} , определяемая согласно (2.55) и (2.56), является ортогональной матрицей и, поскольку элементы \mathbf{P} определяют собой поворот, то будем называть \mathbf{P} также матрицей поворота.

Проведенное выше обсуждение иллюстрируется следующим примером.

Пример 2.24: Компоненты силы, представляемые в нештрихованной координатной системе, показанной на рис. 2.5, выражаются формулой

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Требуется вычислить компоненты этой силы в штрихованной системе координат, показанной на том же рисунке.

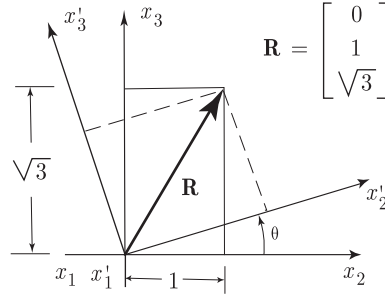


Рис. 2.5. Представление силы в различных системах координат

С помощью формулы (2.56) мы получим здесь

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

и, значит,

$$\mathbf{R}' = \mathbf{P}\mathbf{R}, \quad (\text{a})$$

где \mathbf{R}' даст нам компоненты той же силы в штрихованной системе координат. В качестве проверки, если принять $\theta = -30^\circ$, то, пользуясь формулой (а), получим

$$\mathbf{R}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

что справедливо, так как вектор \mathbf{e}'_3 направлен теперь вдоль вектора силы.

Желая дать определение тензору второго порядка, будем исходить из определения, данного в соотношении (2.54) тензору ранга 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Объект называется тензором второго порядка, если он имеет девять компонент t_{ij} , $i = 1, 2, 3$ и $j = 1, 2, 3$, в нештрихованной системе координат, а также девять компонент в штрихованной системе, и если эти компоненты связаны характеристическим законом

$$t'_{ij} = p_{ik}p_{jl}t_{kl}. \quad (2.60)$$

Совершенно так же, как это было при определении тензора первого порядка, соотношение (2.60) определяет собой изменение базиса при представлении объекта (см. пример 2.25) и мы можем формально провести вывод соотношения (2.60) тем же, по существу, способом, как выводилось соотношение (2.54). Это значит, что если запишем выражение для одного и того же тензора ранга 2 в двух различных базисах, то получим

$$t'_{mn}\mathbf{e}'_m\mathbf{e}'_n = t_{kl}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l, \quad (2.61)$$

где, как очевидно, при тензорном представлении первый базисный вектор идет с первым индексом (строка матричного представления), а второй базисный вектор идет со вторым индексом (столбец матричного представления). Открытое

произведение ¹⁾ или тензорное произведение называется *диадой*, а линейная комбинация диад типа используемой в (2.61) называется *диадиком* (см., например, [Malvern, 1969]).

Если взять скалярное произведение правой части соотношения (2.61), умножая ее вначале на \mathbf{e}'_j , а затем на \mathbf{e}'_i , то получим

$$\begin{aligned} t'_{mn} \mathbf{e}'_m \delta_{nj} &= t_{kl} \mathbf{e}_k (\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}'_j), \\ t'_{mn} \delta_{mi} \delta_{nj} &= t_{kl} (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}'_i) (\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}'_j), \end{aligned} \quad (2.62)$$

или

$$t'_{ij} = t_{kl} p_{ik} p_{jl}.$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера ($\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$). Это преобразование может быть записано также и в матричной форме, как

$$\mathbf{t}' = \mathbf{P} \mathbf{t} \mathbf{P}^T, \quad (2.63)$$

где (i, k) -й элемент матрицы \mathbf{P} задается как p_{ik} . Разумеется, существует и обратное преобразование:

$$\mathbf{t} = \mathbf{P}^T \mathbf{t}' \mathbf{P}. \quad (2.64)$$

Это соотношение может быть выведено из соотношения (2.61) путем [наподобие операции, ведущей к (2.62)] взятия скалярного произведения правой части с умножением на \mathbf{e}_j , а потом на \mathbf{e}_i , или же просто используя соотношение (2.63) и тот факт, что матрица \mathbf{P} является ортогональной.

Во всех предшествующих определениях предполагалось, что все индексы изменяются в пределах от 1 до 3; специальные случаи соответствуют индексам, изменяющимся от 1 до n , при $n < 3$. В инженерном анализе мы зачастую имеем дело только с двумерными условиями, а в этом случае $n = 2$.

Пример 2.25: Напряжение есть тензор ранга 2. Предположим, что напряжение в некоторой точке, будучи измерено при плоском анализе напряженного состояния в нештрихованной системе координат (не включая третью строку и столбец нулей), выражается в виде

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Требуется найти компоненты тензора в штрихованной системе координат, показанной на рис. 2.6.

Здесь мы воспользуемся такой матрицей поворота, как в примере 2.24, а преобразование (2.63) имеет вид

$$\boldsymbol{\tau}' = \mathbf{P} \boldsymbol{\tau} \mathbf{P}^T; \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Предположим также, что нас интересует специальный случай, когда $\theta = 45^\circ$. В этом случае имеем

$$\boldsymbol{\tau}' = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

и выясняется, что в выбранной системе координат внедиагональные элементы тензора (сдвиговые компоненты) равны нулю. Штрихованные оси называются главными осями координат, а диагональные элементы $\tau'_{11} = 0$ и $\tau'_{22} = 2$ являются главными значениями

¹⁾ Открытое, или тензорное, произведение двух векторов, обозначаемое как \mathbf{ab} , определяется требованием выполнения условия

$$(\mathbf{ab}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})$$

для всех векторов \mathbf{v} . Некоторые авторы применяют взамен указанного обозначение $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$.

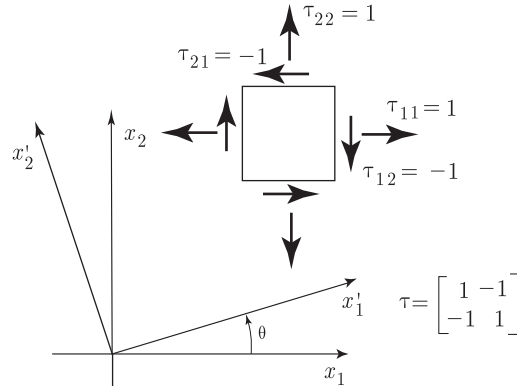


Рис. 2.6. Представление тензора напряжений в различных системах координат

тензора. В разделе 2.5 мы увидим, что главные значения тензора являются собственными его значениями и что штрихованные оси определяют соответствующие собственные векторы.

Приведенные выше рассуждения могут быть непосредственно расширены с тем, чтобы определить тензоры порядка, превышающего 2. В частности, при инженерном анализе мы интересуемся нахождением основополагающих тензоров, которые связывают компоненты тензора напряжений с компонентами тензора деформаций (см., например, разделы 4.2.3 и 6.6) по формуле

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}. \quad (2.65)$$

Как тензор напряжений, так и тензор деформаций имеют ранг 2, а основополагающий тензор с компонентами C_{ijkl} имеет ранг 4, потому что его компоненты преобразуются по следующей формуле

$$C'_{ijkl} = p_{im} p_{jn} p_{kr} p_{ls} C_{mnr s}. \quad (2.66)$$

В проведенных выше выкладках мы использовали ортогональные базисные векторы \mathbf{e}_i и \mathbf{e}'_j двух декартовых координатных систем. Однако мы можем представить выражения тензора также и в компонентах базиса, соответствующего неортогональным базисным векторам. Возможность использования таких базисных векторов особенно важна в теории оболочек (см. разделы 5.4.2 и 6.5.2).

Общепринятая практика в механике сплошной среды состоит в использовании того, что называется ковариантным базисом с ковариантными базисными векторами \mathbf{g}_i , $i = 1, 2, 3$, а также того, что называется контравариантным базисом с контравариантными базисными векторами \mathbf{g}^j , $j = 1, 2, 3$; см. для примера рис. 2.7. Ковариантные и контравариантные базисные векторы в общем случае не имеют единичной длины и удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j, \quad (2.67)$$

где δ_i^j представляет собой (смешанный) символ Кронекера ($\delta_i^j = 1$ при $i = j$ и $\delta_i^j = 0$ при $i \neq j$).

Следовательно, контравариантные базисные векторы ортогональны по отношению к ковариантным базисным векторам. Кроме того, имеем

$$\mathbf{g}_i = g_{ij} \mathbf{g}^j \quad (2.68)$$

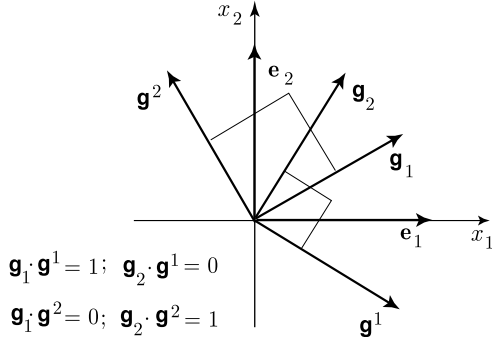


Рис. 2.7. Пример ковариантного и контравариантного базисных векторов, $n = 2$ (показаны в декартовой системе координат)

при

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \quad (2.69)$$

и

$$\mathbf{g}^i = g^{ij} \mathbf{g}_j \quad (2.70)$$

при

$$g^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j, \quad (2.71)$$

где g_{ij} и g^{ij} представляют собой, соответственно, ковариантные и контравариантные компоненты метрического тензора.

Желая доказать справедливость формулы (2.68), мы полагаем для пробы

$$\mathbf{g}_i = a_{ik} \mathbf{g}^k \quad (2.72)$$

с неизвестными элементами a_{ik} . Если взять скалярное произведение обеих частей этого равенства с умножением на \mathbf{g}_j , то мы получим

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j &= a_{ik} \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}_j = \\ &= a_{ik} \delta_j^k = \\ &= a_{ij}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Разумеется, справедливость формулы (2.70) может быть доказана аналогичным образом (см. упражнение 2.11).

Зачастую на практике ковариантный базис выбирается из соображений удобства, после чего контравариантный базис определяется приведенными выше соотношениями.

Предположим, что нам нужно использовать базис с неортогональными базисными векторами. После этого можно воспользоваться как ковариантными, так и контравариантными базисными векторами, и элегантность такого приема хорошо видна, если просто рассмотреть работу, производимую силой \mathbf{R} при перемещении \mathbf{u} и задаваемую выражением $\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}$. Если мы выразим \mathbf{R} и \mathbf{u} в ковариантном базисе, определяемом базисными векторами \mathbf{g}_i , то получим

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \cdot \mathbf{u} &= (R^1 \mathbf{g}_1 + R^2 \mathbf{g}_2 + R^3 \mathbf{g}_3) \cdot (u^1 \mathbf{g}_1 + u^2 \mathbf{g}_2 + u^3 \mathbf{g}_3) = \\ &= R^i u^j g_{ij}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

С другой стороны, если мы выразим в ковариантном базисе только \mathbf{R} , а \mathbf{u} выразим в контравариантном базисе, определяемом базисными векторами \mathbf{g}^j , то получим

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \cdot \mathbf{u} &= (R^1 \mathbf{g}_1 + R^2 \mathbf{g}_2 + R^3 \mathbf{g}_3) \cdot (u_1 \mathbf{g}^1 + u_2 \mathbf{g}^2 + u_3 \mathbf{g}^3) = \\ &= R^i u_j \delta_i^j = R^i u_i, \end{aligned} \quad (2.75)$$

т. е. значительно более простое выражение. На рис. 2.8 дается геометрическое представление указанных оценок в двумерном случае.

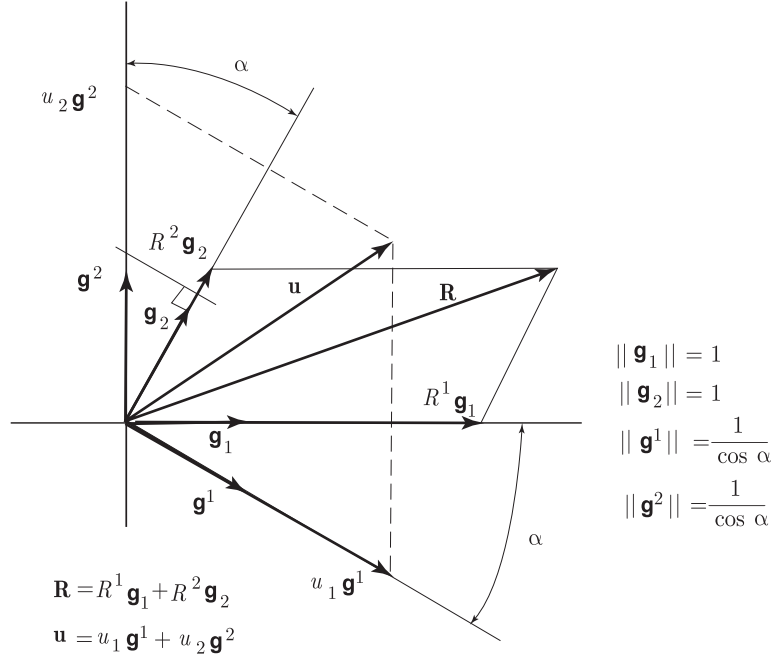


Рис. 2.8. Геометрическое представление векторов \mathbf{R} и \mathbf{u} с использованием ковариантного и контравариантного базисов

Ковариантные и контравариантные базисы будут использоваться нами при исследовании моделей, связанных с исследованием пластин и оболочек. Учитывая, что нас интересует произведение напряжения на деформацию (например, при использовании принципа виртуальной работы), то тензор напряжений мы выразим в контравариантных компонентах (как это делалось для силы \mathbf{R} в соотношении (2.75)), а именно

$$\boldsymbol{\tau} = \tilde{\tau}^{mn} \mathbf{g}_m \mathbf{g}_n, \quad (2.76)$$

тогда как тензор деформаций представим в ковариантных компонентах (как для перемещения в (2.75)), то есть

$$\boldsymbol{\epsilon} = \tilde{\epsilon}_{ij} \mathbf{g}^i \mathbf{g}^j. \quad (2.77)$$

Используя эти диадики, для произведения напряжения на деформацию получим выражение

$$\begin{aligned}
 W &= (\tilde{\tau}^{mn} \mathbf{g}_m \mathbf{g}_n) \cdot (\tilde{\epsilon}_{ij} \mathbf{g}^i \mathbf{g}^j) = \\
 &= \tilde{\tau}^{mn} \tilde{\epsilon}_{ij} \delta_m^i \delta_n^j = \\
 &= \tilde{\tau}^{ij} \tilde{\epsilon}_{ij}.
 \end{aligned} \quad (2.78)$$

Выражение для W является столь же простым, как и результат, полученный по формуле (2.75). Заметим, что здесь мы воспользовались соглашением —

построенным так, что его использование ведет к правильным результатам¹⁾, — о том, что при вычислении скалярного произведения первый базисный вектор первого тензора умножается на первый базисный вектор второго тензора, и так далее.

Вместо того, чтобы записывать произведение в форме суммирования произведений компонент, мы будем, опять-таки, просто пользоваться обозначением

$$W = \tau \cdot \epsilon \quad (2.79)$$

и подразумевать тот самый результат, который фигурирует в формуле (2.78), в какой бы системе координат он ни мог бы быть получен. Обозначение, примененное в формуле (2.79), является, в сущности, простым обобщением обозначения для скалярного произведения двух векторов. Конечно, когда рассматривается произведение $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, то подразумевается получение единственного результата, тогда как результат этой последней операции может быть получен различными способами, как это видно из формул (2.74) и (2.75). Наподобие того, что было в этих формулах, при записи формулы (2.79) подразумевается получение единственного результата для W , а этот результат может быть получен различными способами, хотя использование величин $\tilde{\tau}^{ij}$ и $\tilde{\epsilon}_{ij}$ может оказаться эффективным (см. пример 2.26).

На основании сказанного выше заметим, что ковариантный и контравариантный базисы используются точно таким же образом, как и декартовы базисы, но обеспечивают гораздо большую степень общности при представлении и использовании тензоров. Рассмотрим приводимые ниже примеры.

Пример 2.26: Предположим, что компоненты тензоров напряжения и деформации в некоторой точке сплошной среды, соответствующие декартову базису, суть τ_{ij} и ϵ_{ij} , тогда как энергия деформации, приходящаяся на единицу объема, выражается формулой $U = (\tau_{ij}\epsilon_{ij})/2$. Предположим также, что задан базис с ковариантными базисными векторами \mathbf{g}_i , $i = 1, 2, 3$. Требуется показать в явной форме, что значение U выражается также и как $(\tilde{\tau}^{mn}\tilde{\epsilon}_{mn})/2$.

Здесь мы используем соотношения

$$\tilde{\tau}^{mn}\mathbf{g}_m\mathbf{g}_n = \tau_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \quad (a)$$

и

$$\tilde{\epsilon}_{mn}\mathbf{g}^m\mathbf{g}^n = \epsilon_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j. \quad (b)$$

Однако из соотношений (a) и (b) получим

$$\tau_{kl} = \tilde{\tau}^{mn}(\mathbf{g}_m \cdot \mathbf{e}_k)(\mathbf{g}_n \cdot \mathbf{e}_l)$$

— сумма по m и n и

$$\epsilon_{kl} = \tilde{\epsilon}_{mn}(\mathbf{g}^m \cdot \mathbf{e}_k)(\mathbf{g}^n \cdot \mathbf{e}_l)$$

— сумма по m и n . Далее, учитывая, что

$$(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{e}_j)(\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{e}_j) = 1$$

— сумма по j , мы получим также

$$U = \frac{1}{2}\tilde{\tau}^{mn}\tilde{\epsilon}_{mn}.$$

Пример 2.27: Декартовы компоненты τ_{ij} тензора напряжений $\tau_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ таковы: $\tau_{11} = 100$, $\tau_{12} = 60$, $\tau_{22} = 200$, а компоненты ϵ_{ij} тензора деформаций имеют вид: $\epsilon_{11} = 0,001$, $\epsilon_{12} = 0,002$, $\epsilon_{22} = 0,003$.

¹⁾ А именно, рассмотрим комплекс $(\mathbf{ab}) \cdot (\mathbf{cd})$. Пусть $\mathbf{A} = \mathbf{ab}$, $\mathbf{B} = \mathbf{cd}$; тогда $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{ij}B_{ij} = a_ib_jc_id_j = (a_ic_i)(b_jd_j) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})$.

Предположим, что нужные нам тензоры должны выражаться в терминах ковариантных компонент деформаций и контравариантных компонент напряжений при

$$\mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Требуется вычислить эти компоненты и с их помощью рассчитать произведения $(\tau_{ij}\epsilon_{ij})/2$.

В данном случае, используя формулу (2.67), имеем

$$\mathbf{g}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{g}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Для расчета τ^{ij} используем соотношение

$$\tilde{\tau}^{ij}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j = \tau_{mn}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n,$$

так что

$$\tilde{\tau}^{ij} = \tau_{mn}(\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{g}^i)(\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{g}^j).$$

На этом основании контравариантные компоненты напряжений будут равны

$$\tilde{\tau}^{11} = 180; \quad \tilde{\tau}^{12} = \tilde{\tau}^{21} = -140\sqrt{2}; \quad \tilde{\tau}^{22} = 400.$$

Аналогично этому

$$\tilde{\epsilon}_{ij} = \epsilon_{mn}(\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{g}_i)(\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{g}_j),$$

и ковариантные компоненты деформаций равны

$$\tilde{\epsilon}_{11} = \frac{1}{1000}; \quad \tilde{\epsilon}_{12} = \tilde{\epsilon}_{21} = \frac{3}{1000\sqrt{2}}; \quad \tilde{\epsilon}_{22} = \frac{4}{1000}.$$

После этого получим

$$\frac{1}{2}\tilde{\tau}^{ij}\tilde{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2000}(180 + 1600 - 840) = 0,47.$$

Разумеется, это значение равно также и $(\tau_{ij}\epsilon_{ij})/2$.

Пример 2.28: Тензор деформаций Грина–Лагранжа может быть определен как

$$\epsilon = \tilde{\epsilon}_{ij}^0 \mathbf{g}^i \mathbf{g}^j$$

и имеет компоненты

$$\tilde{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}({}^1\mathbf{g}_i \cdot {}^1\mathbf{g}_j - {}^0\mathbf{g}_i \cdot {}^0\mathbf{g}_j), \quad (\text{a})$$

где

$${}^0\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r_i}; \quad {}^1\mathbf{g}_i = \frac{\partial (\mathbf{x} + \mathbf{u})}{\partial r_i}, \quad (\text{b})$$

а символ \mathbf{x} обозначает вектор рассматриваемой материальной точки в декартовых координатах, \mathbf{u} обозначает вектор смещений в декартовых направлениях, а r_i — конвектируемые координаты (в конечно-элементном анализе величины r_i — это изопараметрические координаты; см. разделы 5.3 и 5.4.2). Требуется:

1. Найти линейные и нелинейные компоненты (в перемещениях) тензора деформаций.
2. Предположите, что конвектируемые координаты совпадают с декартовыми координатами. Покажите, что компоненты в декартовой системе могут быть записаны как

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right). \quad (\text{c})$$

Чтобы найти линейные и нелинейные компоненты, подставим выражения из формул (b) в формулу (a). Получим

$$\tilde{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r_i} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r_j} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_j} \right) - \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r_j} \right].$$

Следовательно, линейные члены в выражениях перемещений таковы:

$$\tilde{\epsilon}_{ij}|_{\text{лин.}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r_j} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_j} \right), \quad (\text{d})$$

а аналогичные нелинейные члены имеют вид

$$\tilde{\epsilon}_{ij}|_{\text{нелин.}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_j} \right). \quad (\text{e})$$

Если конвектируемые координаты совпадают с декартовыми, то имеем $r_i \equiv x_i$, $i = 1, 2, 3$, и $\partial x_i / \partial x_j = \delta_{ij}$. Поэтому формула (d) принимает вид

$$\epsilon_{ij}|_{\text{лин.}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (\text{f})$$

а формула (e) преобразуется к виду

$$\epsilon_{ij}|_{\text{нелин.}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right). \quad (\text{g})$$

Путем сложения линейных и нелинейных членов, выражаемых через формулы (f) и (g), получим выражение (c).

Проведенное выше обсуждение представляло собой лишь очень краткое введение в определение и использование тензоров. Наша цель состояла лишь в том, чтобы представить основные понятия о тензорах и дать возможность работать с ними позднее (см. главу 6). Наиболее важная особенность тензоров состоит в том, что компоненты тензора всегда представляются в выбранной нами системе координат и что эти компоненты различаются между собой, когда используются различные системы координат. Из определения тензора следует, что если в некоторой системе координат все компоненты тензора обращаются в нуль, то они остаются равными нулю и в любой другой (приемлемой) координатной системе. Поскольку сумма и разность тензоров заданного типа являются тензорами того же типа, то отсюда следует также и тот факт, что если тензорное уравнение может быть сформулировано в одной координатной системе, то оно останется справедливым также и в любой другой (приемлемой) системе координат. Это свойство как бы отделяет фундаментальные физические соотношения между рассматриваемыми тензорами от конкретной выбранной системы отсчета и представляет собой важнейшую характерную особенность тензоров: *при изучении некоторой инженерной проблемы мы занимаемся ее физической сущностью, и фундаментальные физические соотношения между искомыми переменными должны быть независимы от выбора конкретной системы координат*; в противном случае простая смена системы отсчета могла бы разрушить эти соотношения и они стали бы просто случайными. В качестве примера рассмотрим тело, подверженное воздействию некоторой системы сил. Если при использовании определенной системы координат мы можем показать, что тело находится в равновесии, то тем самым будет доказан физический факт о состоянии равновесия данного тела, а такое состояние будет иметь место и в любой другой (приемлемой) системе координат.

Вышеприведенные рассуждения приводят косвенным путем также и к другому соображению, важному при инженерном анализе. А именно, для эффективности проводимого анализа следует тщательно выбирать надлежащие координатные системы, так как усилия, требуемые для выражения физического соотношения и работы с ним в одной координатной системе, могут оказаться значительно меньше тех, которые потребовались бы при использовании другой системы координат. При обсуждении метода конечных элементов мы увидим (см., например, раздел 4.2), что, действительно, одним из важных средств повышения эффективности конечно-элементного анализа является возможность выбора различных координатных систем

для размещения наборов конечных элементов (или областей), которые в совокупности дают некое идеализированное представление о полной структуре сплошной среды.

2.5. Симметричная задача о собственных значениях $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$

В предыдущем разделе мы обсуждали вопрос о том, как осуществлять изменение базиса. При проведении конечно-элементного анализа мы часто интересуемся тем, как изменить базис в применении к симметричным матрицам, получаемым при вариационной формулировке задачи, и при дальнейшем обсуждении будет предполагаться, что матрица \mathbf{A} симметрична. Матрица \mathbf{A} может представлять собой, например, матрицу жесткости, матрицу масс или матрицу теплоемкости для комплекса элементов.

Существуют различные важные приложения (см. примеры 2.34–2.36 и главу 9), в которых для повышения эффективности общего решения осуществляется смена базиса при использовании в матрице преобразования собственных векторов, соответствующих задаче о собственных значениях

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}. \quad (2.80)$$

Задача, сформулированная в соотношении (2.80), представляет собой *стандартную задачу о собственных значениях*. Если решение уравнения (2.80) рассматривается с целью определения собственных значений и собственных векторов, то соответствующая этому уравнению задача называется *задачей о собственных значениях*. В данном разделе мы ставим своей целью обсудить различные свойства решений уравнения (2.80).

Пусть матрица \mathbf{A} имеет порядок n . Первое важное свойство состоит в том, что существует n нетривиальных решений уравнения. Здесь слово «нетривиальный» означает, что величина \mathbf{v} не должна быть нулевым вектором, для которого уравнение (2.80) удовлетворяется всегда. Нетривиальное решение с индексом i задается *собственным значением* λ_i и соответствующим *собственным вектором* \mathbf{v}_i , для которых мы имеем

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i. \quad (2.81)$$

Поэтому каждое решение состоит из собственной пары, и набор из n решений записывается как $(\lambda_1, \mathbf{v}_1), (\lambda_2, \mathbf{v}_2), \dots, (\lambda_n, \mathbf{v}_n)$, где

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n. \quad (2.82)$$

Совокупность всех n собственных значений и собственных векторов мы называем также *собственной системой* матрицы \mathbf{A} .

Доказательство того, что должно существовать n собственных значений и соответствующих им собственных векторов может быть весьма удобно получено путем записи уравнения (2.80) в форме

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0. \quad (2.83)$$

Однако эти уравнения имеют решение, только если

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0. \quad (2.84)$$

К сожалению, необходимость выполнения условия (2.84) может быть объяснена только после того, как будет построено решение предшествующей ему системы уравнений. По этой причине обсуждение вопроса о том, нужно ли в действительности выполнять условие (2.84), переносится в раздел 10.2.2.

Если использовать соотношение (2.84), то собственные значения матрицы \mathbf{A} будут корнями полинома

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}). \quad (2.85)$$

Этот полином называется *характеристическим полиномом* матрицы \mathbf{A} . Однако поскольку порядок полинома равен порядку матрицы \mathbf{A} , то мы имеем n собственных значений, а с помощью уравнения (2.83) получим и n соответствующих собственных векторов. Можно отметить, что векторы, получаемые из решения уравнения (2.83), определяются лишь с точностью до скалярного множителя.

Пример 2.29: Рассмотрим матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Требуется показать, что эта матрица имеет два собственных значения. Нужно вычислить эти собственные значения и найти собственные векторы.

Характеристический полином матрицы \mathbf{A} имеет вид

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -1 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Пользуясь процедурой, предложенной в разделе 2.2 для расчета определителя матрицы (см. пример 2.13), получим

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (-1 - \lambda)(2 - \lambda) - (2)(2) = \\ &= \lambda^2 - \lambda - 6 = \\ &= (\lambda + 2)(\lambda - 3). \end{aligned}$$

Порядок полинома равен 2 и, следовательно, имеются два собственных значения. Действительно, имеем

$$\lambda_1 = -2; \quad \lambda_2 = 3.$$

Соответствующие собственные векторы определяются путем записи соотношения (2.83) со введением в него собственных значений. Так, при λ_1 мы имеем

$$\begin{bmatrix} -1 - (-2) & 2 \\ 2 & 2 - (-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (a)$$

что с точностью до скалярного множителя дает решение

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

При λ_2 имеем

$$\begin{bmatrix} -1 - 3 & 2 \\ 2 & 2 - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (b)$$

и с точностью до скалярного множителя получим решение

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Изменение базиса матрицы \mathbf{A} осуществляется с помощью преобразования

$$\mathbf{v} = \mathbf{P} \tilde{\mathbf{v}}, \quad (2.86)$$

где \mathbf{P} — некая ортогональная матрица, а $\tilde{\mathbf{v}}$ — вектор решения в новом базисе. Подставляя это в уравнение (2.80), получим

$$\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{v}} = \lambda \tilde{\mathbf{v}}, \quad (2.87)$$

где

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}, \quad (2.88)$$

и с учетом того, что \mathbf{A} есть симметричная матрица, матрица $\tilde{\mathbf{A}}$ также будет симметричной. Это преобразование называется *преобразованием подобия*, а так как матрица \mathbf{P} является ортогональной, то данное преобразование называется *ортогональным преобразованием подобия*.

Если бы матрица \mathbf{P} не была ортогональной, то результат преобразования имел бы вид

$$\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{v}} = \lambda\mathbf{B}\tilde{\mathbf{v}}, \quad (2.89)$$

где

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}; \quad \mathbf{B} = \mathbf{P}^T \mathbf{P}. \quad (2.90)$$

Задача о решении уравнения (2.89) называется *обобщенной задачей о собственных значениях*. Поскольку, однако, обобщенная задача о собственных значениях более трудна для решения, чем стандартная задача, то следует избегать преобразования, ведущего к обобщенной задаче. Это достигается путем использования ортогональной матрицы \mathbf{P} , что дает $\mathbf{B} = \mathbf{I}$.

Рассматривая изменение базиса, следует заметить, что задача $\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{v}} = \lambda\mathbf{B}\tilde{\mathbf{v}}$ в уравнении (2.89) имеет те же самые собственные значения, что и задача $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, тогда как собственные векторы связаны соотношением (2.86). Желая показать, что собственные значения в обоих вариантах одинаковы, рассмотрим характеристические полиномы.

Для задачи, соответствующей (2.89), имеем

$$\tilde{p}(\lambda) = \det(\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} - \lambda \mathbf{P}^T \mathbf{P}), \quad (2.91)$$

что можно переписать в виде

$$\tilde{p}(\lambda) = \det \mathbf{P}^T \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \det \mathbf{P} \quad (2.92)$$

и, поэтому,

$$\tilde{p}(\lambda) = \det \mathbf{P}^T \det \mathbf{P} p(\lambda), \quad (2.93)$$

где $p(\lambda)$ задается согласно (2.85). Отсюда следует, что характеристические полиномы для задач $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ и $\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{v}} = \lambda\mathbf{B}\tilde{\mathbf{v}}$ одни и те же с точностью до множителя. Это означает, что собственные значения для обеих задач совпадают.

К настоящему моменту мы показали, что имеется n собственных значений и соответствующих им собственных векторов, однако пока что мы не обсуждали свойств этих собственных значений и векторов.

Первое из возможных наблюдений указывает на то, что собственные значения действительны. Рассмотрим i -ю собственную пару $(\lambda_i, \mathbf{v}_i)$, для которой мы имеем

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i. \quad (2.94)$$

Предположим, что \mathbf{v}_i и λ_i имеют комплексную форму, охватывающую также и случай действительных собственных значений, и пусть элементы $\bar{\mathbf{v}}_i$ и $\bar{\lambda}_i$ представляют собой комплексно сопряженные величины по отношению к элементам \mathbf{v}_i и λ_i . Затем, предумножая обе части (2.94) на $\bar{\mathbf{v}}_i^T$, мы получим

$$\bar{\mathbf{v}}_i^T \mathbf{A} \mathbf{v}_i = \lambda_i \bar{\mathbf{v}}_i^T \mathbf{v}_i. \quad (2.95)$$

С другой стороны, из (2.94) можно также получить соотношение

$$\bar{\mathbf{v}}_i^T \mathbf{A} = \bar{\mathbf{v}}_i^T \bar{\lambda}_i \quad (2.96)$$

и, после проведения постумножения на \mathbf{v}_i , имеем

$$\bar{\mathbf{v}}_i^T \mathbf{A} \mathbf{v}_i = \bar{\lambda}_i \bar{\mathbf{v}}_i^T \mathbf{v}_i. \quad (2.97)$$

Но левые части соотношений (2.95) и (2.97) одинаковы и, следовательно, мы имеем

$$(\lambda_i - \bar{\lambda}_i) \bar{\mathbf{v}}_i^T \mathbf{v}_i = 0. \quad (2.98)$$

Учитывая, что вектор \mathbf{v}_i нетривиален, отсюда следует, что $\lambda_i = \bar{\lambda}_i$, а следовательно, что собственное значение должно быть действительным. Однако тогда из уравнения (2.83) следует также, что и собственные векторы должны быть действительными, так как матрица коэффициентов комплекса $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ является действительной.

Другим важным обстоятельством является то, что собственные векторы, соответствующие отдельным собственным значениям, являются единственными (с точностью до скалярных множителей) и *ортгональными*, тогда как собственные векторы, соответствующие кратным собственным значениям, не являются единственными, хотя мы всегда можем выбрать ортгональный комплект.

Предположим вначале, что имеются отдельные собственные значения. В этом случае для двух собственных пар имеем

$$\mathbf{A} \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \quad (2.99)$$

и

$$\mathbf{A} \mathbf{v}_j = \lambda_j \mathbf{v}_j. \quad (2.100)$$

Предумножая (2.99) на \mathbf{v}_j^T , а (2.100) — на \mathbf{v}_i^T , получим

$$\mathbf{v}_j^T \mathbf{A} \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_j^T \mathbf{v}_i, \quad (2.101)$$

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{A} \mathbf{v}_j = \lambda_j \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j. \quad (2.102)$$

Производя транспонирование в соотношении (2.102), получаем

$$\mathbf{v}_j^T \mathbf{A} \mathbf{v}_i = \lambda_j \mathbf{v}_j^T \mathbf{v}_i, \quad (2.103)$$

и, следовательно, из (2.103) и (2.101) получим

$$(\lambda_i - \lambda_j) \mathbf{v}_j^T \mathbf{v}_i = 0. \quad (2.104)$$

Как мы предположили, $\lambda_i \neq \lambda_j$ и, следовательно, $\mathbf{v}_j^T \mathbf{v}_i = 0$, т.е. векторы \mathbf{v}_i и \mathbf{v}_j ортгональны. После этого можно использовать взвешенные значения векторов \mathbf{v}_i и получить

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j = \delta_{ij}, \quad (2.105)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера; т.е. $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Если условие (2.105) соблюдается, то мы говорим, что собственные векторы являются *ортонормальными*.

Следует заметить, что решение уравнения (2.83) дает вектор, в котором определены только относительные величины его элементов. Если весовые множители всех элементов одинаковы, то новый вектор будет по-прежнему удовлетворять уравнению (2.83). Фактически, решение уравнения (2.83) определяет собой направление собственного вектора, и условие ортонормальности, соответствующее (2.105), используется нами для того, чтобы зафиксировать величины элементов вектора. Поэтому, *начиная с данного момента времени, при рассмотрении собственных векторов будет подразумеваться, что эти векторы ортонормальны.*

Пример 2.30: Требуется проверить, являются ли ортгональными векторы, рассчитанные в примере 2.29, после чего сделать их ортонормальными.

Проверка ортгональности следует из формирования величины $\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2$, а это дает

$$\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2 = (2)(1/2) + (-1)(1) = 0.$$

Следовательно, эти векторы ортогональны. Чтобы сделать их ортонормальными, нам требуется сделать длины этих векторов равными 1. Тогда получим

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{v}_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Теперь мы обратимся к тому случаю, в котором присутствуют также и кратные собственные значения. Доказательство ортонормальности собственных векторов, данное соотношениями (2.99)–(2.105), теперь провести невозможно, так как при кратном собственном значении в соотношении (2.104) λ_i будет равно λ_j . Предположим, что $\lambda_i = \lambda_{i+1} = \dots = \lambda_{i+m-1}$; это означает, что λ_i является m -кратным корнем соответствующего полинома. Тогда мы можем показать, что всегда остается возможность выбрать m ортонормальных собственных векторов, соответствующих $\lambda_i, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_{i+m-1}$. Эта возможность следует из того, что, имея симметричную матрицу порядка n , мы всегда можем определить полный комплект из n ортонормальных собственных векторов. В соответствии с каждым отдельным собственным значением мы будем иметь *собственное пространство*, размерность которого равна кратности собственного значения. Все собственные пространства являются единственными и ортогональны к собственным пространствам, соответствующим другим отдельным собственным значениям. Собственные векторы, связанные с некоторым собственным значением, обеспечивают базис для собственного пространства, а если учесть, что базис не является единственным при $m > 1$, то и соответствующие собственные векторы при кратном собственном значении не являются единственными. Формальные доказательства справедливости этих утверждений связаны с приложением обсуждавшихся ранее принципов и приводятся в приводимых ниже примерах.

Пример 2.31: Покажите, что для симметричной матрицы \mathbf{A} порядка n всегда существуют n ортонормальных собственных векторов.

Предположим, что мы уже вычислили собственное значение λ_i и соответствующий собственный вектор \mathbf{v}_i . Построим ортонормальную матрицу \mathbf{Q} , первый столбец которой представляет вектор \mathbf{v}_i ,

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{v}_i \quad \hat{\mathbf{Q}}]; \quad \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}.$$

Эта матрица всегда может быть построена, так как векторы в ней обеспечивают ортонормальный базис для n -мерного пространства, в котором определена матрица \mathbf{A} . Однако теперь мы можем вычислить

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}, \quad (\text{a})$$

где $\mathbf{A}_1 = \hat{\mathbf{Q}}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{Q}}$ и где \mathbf{A}_1 есть полная матрица порядка $(n-1)$. Если $n=2$, то мы замечаем, что матрица $\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}$ является диагональной. В этом случае, если выполнить предумножение (a) на \mathbf{Q} и положить $a \equiv \mathbf{A}_1$, то мы получим

$$\mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix},$$

и, следовательно, вектор из матрицы $\hat{\mathbf{Q}}$ представляет собой другой собственный вектор, тогда как a является другим собственным значением независимо от того, является ли λ_i кратным собственным значением или нет.

Полное доказательство может быть построено теперь методом индукции. Предположим, что данное утверждение справедливо для матрицы порядка $(n-1)$; тогда покажем, что оно справедливо и для матрицы порядка n . Но поскольку мы показали,

что это утверждение справедливо для $n = 2$, то, следовательно, оно справедливо и для любого n .

Предположение о существовании $(n - 1)$ ортонормальных собственных векторов для матрицы порядка $(n - 1)$ дает

$$\mathbf{Q}_1^T \mathbf{A}_1 \mathbf{Q}_1 = \mathbf{\Lambda}, \quad (\text{b})$$

где \mathbf{Q}_1 есть матрица собственных векторов матрицы \mathbf{A}_1 , а $\mathbf{\Lambda}$ есть диагональная матрица, содержащая собственные значения матрицы \mathbf{A}_1 . Однако теперь, если мы дадим определение

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix},$$

то будем иметь

$$\mathbf{S}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \mathbf{\Lambda} \end{bmatrix}. \quad (\text{c})$$

Пусть будет $\mathbf{P} = \mathbf{Q} \mathbf{S}$; $\mathbf{P}^T \mathbf{P} = \mathbf{I}$. Тогда, предумножая (c) на \mathbf{P} , получим

$$\mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \mathbf{\Lambda} \end{bmatrix}$$

Следовательно, в предположении о справедливости соотношения (b), высказанное утверждение справедливо также и для матрицы порядка n , что и завершает интересное нас доказательство.

Пример 2.32: Покажите, что собственные векторы, соответствующие собственному значению кратности m , определяют собой m -мерное пространство, в котором каждый вектор является также и собственным вектором. Это пространство называется *собственным пространством*, соответствующим рассматриваемому собственному значению.

Пусть λ_i является собственным значением кратности m ; т.е. мы имеем

$$\lambda_i = \lambda_{i+1} = \dots = \lambda_{i+m-1}.$$

В примере 2.31 мы показали, что существуют m ортонормальных собственных векторов $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_{i+m-1}$, соответствующих λ_i . Эти векторы обеспечивают базис m -мерного пространства. Рассмотрим некоторый вектор \mathbf{w} в этом пространстве, такой, что

$$\mathbf{w} = \alpha_i \mathbf{v}_i + \alpha_{i+1} \mathbf{v}_{i+1} + \dots + \alpha_{i+m-1} \mathbf{v}_{i+m-1},$$

где величины $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots$ суть постоянные. Вектор \mathbf{w} является также собственным вектором, потому что мы имеем

$$\mathbf{A} \mathbf{w} = \alpha_i \mathbf{A} \mathbf{v}_i + \alpha_{i+1} \mathbf{A} \mathbf{v}_{i+1} + \dots + \alpha_{i+m-1} \mathbf{A} \mathbf{v}_{i+m-1},$$

что дает

$$\mathbf{A} \mathbf{w} = \alpha_i \lambda_i \mathbf{v}_i + \alpha_{i+1} \lambda_i \mathbf{v}_{i+1} + \dots + \alpha_{i+m-1} \lambda_i \mathbf{v}_{i+m-1} = \lambda_i \mathbf{w}.$$

Следовательно, любой вектор \mathbf{w} в пространстве, охватываемом собственными векторами $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_{i+m-1}$, общее число которых равно m , также представляет собой собственный вектор. Следует отметить, что вектор \mathbf{w} будет ортогональным к тем собственным векторам, которые соответствуют собственным значениям, отличным от λ_i . Это значит, что существует одно собственное пространство, которое соответствует каждому, единичному или кратному, собственному значению. Размерность такого собственного значения равна его кратности.

Теперь, когда мы уже имеем представление о важнейших свойствах собственных значений и собственных векторов матрицы \mathbf{A} , можно выписать n решений уравнения $\mathbf{A} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ в различных формах представления. Во-первых, имеем

$$\mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}, \quad (2.106)$$

где \mathbf{V} есть матрица, содержащая собственные векторы, $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$, а $\mathbf{\Lambda}$ есть диагональная матрица с соответствующими собственными значениями на ее диагонали, $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_i)$. Пользуясь свойством ортонормальности собственных векторов (т. е. $\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}$), из соотношения (2.106) получаем

$$\mathbf{V}^T \mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{\Lambda}. \quad (2.107)$$

Далее, построим *спектральное разложение* матрицы \mathbf{A} ,

$$\mathbf{A} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^T, \quad (2.108)$$

где может оказаться удобным записать спектральное разложение матрицы \mathbf{A} в такой форме:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T. \quad (2.109)$$

Следует заметить, что каждое из этих уравнений представляет решение задачи о собственных значениях, $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Рассмотрим следующий пример.

Пример 2.33: Конкретизируйте соотношения, заданные в виде (2.106)–(2.109), для матрицы \mathbf{A} , использованной в примере 2.29.

Собственные значения и собственные векторы матрицы \mathbf{A} были рассчитаны в примерах 2.29 и 2.30. Пользуясь информацией, представленной в этих примерах, запишем соотношение (2.106) в конкретной форме, получая для него

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

для (2.107):

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

для (2.108):

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix},$$

и для (2.109):

$$\mathbf{A} = (-2) \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} + (3) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Соотношения (2.107) и (2.108) могут быть эффективно использованы в различных важных приложениях. Нижеследующие примеры ставят своей целью представление некоторых процедур решения, в которых могут быть использованы указанные соотношения.

Пример 2.34: Рассчитайте k -ю степень заданной матрицы \mathbf{A} ; иначе говоря, найдите \mathbf{A}^k . Покажите результат расчета, используя матрицу \mathbf{A} из примера 2.29.

Один из путей получения \mathbf{A}^k состоит в том, чтобы просто вычислить $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^2\mathbf{A}^2$ и т. д. Однако если значение k достаточно велико, то более эффективный путь может сводиться к использованию спектрального разложения матрицы \mathbf{A} .

Предположим, что мы уже вычислили собственные значения и собственные векторы матрицы \mathbf{A} ; иначе говоря, мы имеем

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T.$$

Для вычисления \mathbf{A}^2 используем выражение

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T,$$

но в силу того, что $\mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I}$, мы имеем

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^2\mathbf{V}^T.$$

Далее, продолжая действовать таким же образом, получим

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{V}^T.$$

В качестве примера, пусть \mathbf{A} — это та матрица, которая рассматривалась в примере 2.29. Тогда имеем

$$\mathbf{A}^k = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-2)^k & 0 \\ 0 & (3)^k \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

или

$$\mathbf{A}^k = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} (-2)^{k+2} + (3)^k & (-2)^{k+1} + (2)(3)^k \\ (-2)^{k+1} + (2)(3)^k & (-2)^k + (4)(3)^k \end{bmatrix}.$$

Интересно отметить, что если наибольшее по абсолютной величине собственное значение матрицы \mathbf{A} оказывается меньше единицы, то мы имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}^k = 0$ при $k \rightarrow \infty$. Таким образом, если определить спектральный радиус \mathbf{A} формулой

$$\rho(\mathbf{A}) = \max_{\text{для всех } i} |\lambda_i|,$$

то мы имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}^k = 0$ при условии, что $\rho(\mathbf{A}) < 1$.

Пример 2.35: Требуется рассмотреть систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{f}(t) \quad (\text{a})$$

и построить решение, используя спектральное разложение матрицы \mathbf{A} . Представить результат, используя матрицу \mathbf{A} из примера 2.29, а также

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^0\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

где символ ${}^0\mathbf{x}$ соответствует начальным условиям.

Подставляя в уравнение (a) $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T$ и предумножая на \mathbf{V}^T , получим

$$\mathbf{V}^T\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{\Lambda}(\mathbf{V}^T\mathbf{x}) = \mathbf{V}^T\mathbf{f}(t).$$

Таким образом, если дать определение $\mathbf{y} = \mathbf{V}^T\mathbf{x}$, то мы должны решить систему уравнений

$$\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{\Lambda}\mathbf{y} = \mathbf{V}^T\mathbf{f}(t).$$

Однако эта система представляет собой комплект из n самостоятельных дифференциальных уравнений. Рассмотрим r -е уравнение, являющееся типовым:

$$\dot{y}_r + \lambda_r y_r = \mathbf{v}_r^T \mathbf{f}(t).$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$y_r(t) = {}^0y_r e^{-\lambda_r t} + e^{-\lambda_r t} \int_0^t e^{\lambda_r \tau} \mathbf{v}_r^T \mathbf{f}(\tau) d\tau,$$

где символ 0y_r соответствует значению y_r в момент времени $t = 0$. Полное решение системы уравнений (a) имеет вид

$$\mathbf{x} = \sum_{r=1}^n \mathbf{v}_r y_r. \quad (\text{b})$$

В качестве примера рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В данном случае требуется решить два самостоятельных дифференциальных уравнения

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 + (-2)y_1 &= 2e^{-t}, \\ \dot{y}_2 + 3y_2 &= e^{-t} \end{aligned}$$

с начальными условиями

$${}^0\mathbf{y} = \mathbf{V}^{T0}\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Мы получаем

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}} e^{2t} - \frac{2}{3} e^{-t}, \\ y_2 &= \frac{3}{\sqrt{5}} e^{-3t} + \frac{1}{2} e^{-t}. \end{aligned}$$

После этого с помощью соотношения (b) получим

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} y_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} y_2 \right) = \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{6} e^{-t} + \frac{3}{5} e^{-3t} + \frac{2}{5} e^{2t} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} e^{-t} + \frac{6}{5} e^{-3t} - \frac{1}{5} e^{2t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

В заключение данной презентации можно отметить, что за счет введения вспомогательных переменных дифференциальные уравнения высокого порядка могут быть сведены к системе дифференциальных уравнений первого порядка. Однако в этом случае матрица коэффициентов \mathbf{A} будет несимметричной.

Пример 2.36: Используя спектральное разложение симметричной матрицы \mathbf{A} размером $n \times n$, вычислить обратную ей матрицу. Требуется представить результат, используя матрицу \mathbf{A} из примера 2.29.

Предположим, что мы уже вычислили собственные значения λ_i и собственные векторы \mathbf{v}_i , $i = 1, \dots, n$, матрицы \mathbf{A} ; это означает, что мы решили задачу о собственных значениях

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}. \quad (\text{a})$$

После предумножения обеих частей уравнения (a) на $\lambda^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ получим задачу о собственных значениях в форме

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v} = \lambda^{-1}\mathbf{v}.$$

Однако, как свидетельствует последнее соотношение, собственные значения матрицы \mathbf{A}^{-1} имеют вид $1/\lambda_i$, а собственные векторы суть \mathbf{v}_i , $i = 1, \dots, n$. Далее, используя соотношение (2.109) для вычисления \mathbf{A}^{-1} , мы получаем

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{V}^T$$

или

$$\mathbf{A}^{-1} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\lambda_i} \right) \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T.$$

Как показывают эти выражения, мы не можем вычислить матрицу, обратную \mathbf{A} , если эта матрица имеет нулевое собственное значение.

В качестве примера рассчитаем матрицу, обратную матрице \mathbf{A} из примера 2.29. В этом случае имеем

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ключевая особенность преобразования (2.107) состоит в том, что при этом преобразовании совершается смена базиса (см. соотношения (2.86) и (2.88)). Если учесть, что векторы из матрицы \mathbf{V} соответствуют новому базису, то они, следовательно, охватывают n -мерное пространство, в котором определены \mathbf{A} и $\mathbf{\Lambda}$, причем любой вектор \mathbf{w} может быть представлен в форме линейной комбинации собственных векторов \mathbf{v}_i ; другими словами, мы имеем

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i. \quad (2.110)$$

Важное наблюдение сводится к тому, что форма матрицы $\mathbf{\Lambda}$ непосредственно показывает, являются ли матрицы \mathbf{A} и $\mathbf{\Lambda}$ вырожденными. Если воспользоваться определением, данным в разделе 2.2, то найдем, что матрица $\mathbf{\Lambda}$, а следовательно и матрица \mathbf{A} , является вырожденной тогда и только тогда, когда некоторое собственное значение равно нулю, так как в этом случае матрица $\mathbf{\Lambda}^{-1}$ не может быть вычислена. В этой связи нам полезно выработать некую дополнительную терминологию. Если все собственные значения положительны, то мы будем говорить, что данная матрица является *положительно определенной*. Если все собственные значения больше или равны нулю, то матрица является *положительно полуопределенной*; при отрицательных, нулевых или положительных собственных значениях она является *неопределенной*.

2.6. Отношение Рэля и минимаксная характеристика собственных значений

В предыдущем разделе мы дали определение задаче о собственных значениях, $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, и обсудили основные свойства, относящиеся к решениям данной задачи. Цель настоящего раздела состоит в том, чтобы дополнить уже полученную информацию некоторыми, весьма мощными принципами.

Некоторое число важных принципов выводится с использованием отношения Рэля $\rho(\mathbf{v})$, которое определяется как

$$\rho(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}. \quad (2.111)$$

Первое наблюдение сводится к тому, что

$$\lambda_1 \leq \rho(\mathbf{v}) \leq \lambda_n, \quad (2.112)$$

а отсюда следует, что при использовании определений, данных в разделе 2.5, для любого вектора \mathbf{v} получим $\rho(\mathbf{v}) > 0$, если матрица \mathbf{A} — положительно определенная, или $\rho(\mathbf{v}) \geq 0$, если \mathbf{A} — положительная полуопределенная, или же отношение $\rho(\mathbf{v})$ может быть отрицательным, нулевым или положительным, если матрица \mathbf{A} — неопределенная. Для доказательства соотношений (2.112) используем выражение

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i, \quad (2.113)$$

где \mathbf{v}_i представляют собой собственные векторы матрицы \mathbf{A} . Если это выражение для \mathbf{v} подставить в формулу (2.111) и воспользоваться тем, что $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$, $\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_j = \delta_{ij}$, то получим

$$\rho(\mathbf{v}) = \frac{\lambda_1\alpha_1^2 + \lambda_2\alpha_2^2 + \dots + \lambda_n\alpha_n^2}{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2}. \quad (2.114)$$

Следовательно, если $\lambda_1 \neq 0$, то

$$\rho(\mathbf{v}) = \lambda_1 \frac{\alpha_1^2 + (\lambda_2/\lambda_1)\alpha_2^2 + \dots + (\lambda_n/\lambda_1)\alpha_n^2}{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2}, \quad (2.115)$$

а если $\lambda_n \neq 0$, то

$$\rho(\mathbf{v}) = \lambda_n \frac{(\lambda_1/\lambda_n)\alpha_1^2 + (\lambda_2/\lambda_n)\alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2}{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2}. \quad (2.116)$$

Однако в силу того, что $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, соотношения в формулах (2.114)–(2.116) свидетельствуют о справедливости неравенств (2.112). Кроме того, очевидно, если $\mathbf{v} = \mathbf{v}_i$, то мы имеем $\rho(\mathbf{v}) = \lambda_i$.

Что касается практического использования отношения Рэля, то особенно ценным является следующее свойство. Предположим, что \mathbf{v} представляет собой приближенное выражение для собственного вектора \mathbf{v}_i ; иначе говоря, при достаточно малом ϵ мы имеем

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_i + \epsilon\mathbf{x}. \quad (2.117)$$

Тогда отношение Рэля для \mathbf{v} даст приближенное выражение для λ_i с точностью порядка ϵ^2 ; то есть

$$\rho(\mathbf{v}) = \lambda_i + o(\epsilon^2). \quad (2.118)$$

Обозначение $o(\epsilon^2)$ означает «порядка ϵ^2 » и указывает на то, что если $\delta = o(\epsilon^2)$, то $|\delta| \leq b\epsilon^2$, где b — постоянная.

Чтобы доказать справедливость этого свойства отношения Рэля, подставим выражение для \mathbf{v} по формуле (2.113) в выражение для отношения Рэля и получим

$$\rho(\mathbf{v}_i + \epsilon\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{v}_i^T + \epsilon\mathbf{x}^T)\mathbf{A}(\mathbf{v}_i + \epsilon\mathbf{x})}{(\mathbf{v}_i^T + \epsilon\mathbf{x}^T)(\mathbf{v}_i + \epsilon\mathbf{x})}, \quad (2.119)$$

или

$$\rho(\mathbf{v}_i + \epsilon\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{v}_i^T\mathbf{A}\mathbf{v}_i + 2\epsilon\mathbf{v}_i^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \epsilon^2\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}}{\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_i + 2\epsilon\mathbf{x}^T\mathbf{v}_i + \epsilon^2\mathbf{x}^T\mathbf{x}}. \quad (2.120)$$

Поскольку, однако, \mathbf{x} символизирует ошибку в определении \mathbf{v}_i , то мы можем написать

$$\mathbf{x} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j \mathbf{v}_j. \quad (2.121)$$

Но тогда, пользуясь соотношениями $\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_j = \delta_{ij}$ и $\mathbf{A}\mathbf{v}_j = \lambda_j\mathbf{v}_j$, получаем $\mathbf{v}_i^T\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ и $\mathbf{x}^T\mathbf{v}_i = 0$ и, следовательно,

$$\rho(\mathbf{v}_i + \epsilon\mathbf{x}) = \frac{\lambda_i + \epsilon^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j^2 \lambda_j}{1 + \epsilon^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j^2}. \quad (2.122)$$

Если, однако, воспользоваться биномиальной теоремой для разложения выражения, стоящего в знаменателе правой части (2.122), то мы получим

$$\rho(\mathbf{v}_i + \epsilon \mathbf{x}) = \left(\lambda_i + \epsilon^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j^2 \lambda_j \right) \left[1 - \epsilon^2 \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j^2 \right) + \epsilon^4 \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j^2 \right)^2 + \dots \right], \quad (2.123)$$

или

$$\rho(\mathbf{v}_i + \epsilon \mathbf{x}) = \lambda_i + \epsilon^2 \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j^2 \lambda_j - \lambda_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j^2 \right) + \text{члены высшего порядка}. \quad (2.124)$$

Отсюда следует, таким образом, справедливость выражения (2.118). Вышеизложенные результаты демонстрируются на кратком примере.

Пример 2.37: Вычислить отношение Рэля для матрицы \mathbf{A} из примера 2.29. Пользуясь выражениями для \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 из примера 2.29, требуется рассмотреть следующие случаи:

1. $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$; 2. $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$; 3. $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + 0,02\mathbf{v}_2$.

Для случая 1 получим

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

и, следовательно,

$$\rho(\mathbf{v}) = \frac{\begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{1}{2}.$$

Вспоминая, что $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = 3$, получим, как и ожидалось,

$$\lambda_1 \leq \rho(\mathbf{v}) \leq \lambda_2.$$

Для случая 2 получаем

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

и, следовательно,

$$\rho(\mathbf{v}) = \frac{\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}} = -2,$$

а значит, как и ожидалось, $\rho(\mathbf{v}) = \lambda_1$.

Наконец, для случая 3 получим

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,01 \\ 0,02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,01 \\ -0,98 \end{bmatrix}$$

и, следовательно,

$$\rho(\mathbf{v}) = \frac{\begin{bmatrix} 2,01 & -0,98 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,01 \\ -0,98 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2,01 & -0,98 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,01 \\ -0,98 \end{bmatrix}} = -1,99950005.$$

Здесь мы заметим, что $\rho(\mathbf{v}) > \lambda_1$ и что $\rho(\mathbf{v})$ аппроксимирует λ_1 с большей точностью, чем \mathbf{v} аппроксимирует \mathbf{v}_1 .

После того, как мы дали представление об отношении Рэля, мы можем теперь перейти к формулировке очень важного принципа, а именно, принципа о минимаксной характеристике собственных значений. Из принципа Рэля мы знаем, что

$$\rho(\mathbf{v}) \geq \lambda_1, \quad (2.125)$$

где \mathbf{v} представляет собой произвольный вектор. Другими словами, если мы рассматриваем задачу о варьировании \mathbf{v} , то мы всегда будем иметь $\rho(\mathbf{v}) \geq \lambda_1$ и минимум будет достигаться тогда, когда $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$, а в этом случае $\rho(\mathbf{v}_1) = \lambda_1$. Предположим, что теперь на \mathbf{v} будет наложено ограничение, а именно, что вектор \mathbf{v} должен быть ортогонален особому вектору \mathbf{w} и что мы рассматриваем задачу о минимизации $\rho(\mathbf{v})$ при выполнении указанного ограничения. После вычисления минимума $\rho(\mathbf{v})$ с выполнением условия $\mathbf{v}^T \mathbf{w} = 0$ мы могли бы начать варьировать \mathbf{w} и для каждого нового \mathbf{w} вычислять новый минимум для $\rho(\mathbf{v})$. После этого мы установили бы, что максимальное из всех минимальных значений равно λ_2 . Этот результат может быть обобщен вплоть до формулировки нижеследующего принципа, называемого *минимаксной характеристикой собственных значений*,

$$\lambda_r = \max \left\{ \min \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} \right\}, \quad r = 1, \dots, n \quad (2.126)$$

при \mathbf{v} , удовлетворяющем условию $\mathbf{v}^T \mathbf{w}_i = 0$ при $i = 1, \dots, r-1$, $r \geq 2$. При использовании соотношения (2.126) мы выбираем векторы \mathbf{w}_i , $i = 1, \dots, r-1$. После вычисления этого минимума мы варьлируем векторы \mathbf{w}_i и каждый раз вычисляем новый минимум. Максимальное значение, достигаемое этими минимумами, равно λ_r .

Доказательство соотношения (2.126) состоит в следующем. Положим

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i \quad (2.127)$$

и вычислим правую часть соотношения (2.126), которую будем называть R .

$$R = \max \left\{ \min \frac{\alpha_1^2 \lambda_1 + \dots + \alpha_r^2 \lambda_r + \alpha_{r+1}^2 \lambda_{r+1} + \dots + \alpha_n^2 \lambda_n}{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_r^2 + \alpha_{r+1}^2 + \dots + \alpha_n^2} \right\}. \quad (2.128)$$

Коэффициенты α_i должны удовлетворять условиям

$$\mathbf{w}_j^T \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i = 0, \quad j = 1, \dots, r-1. \quad (2.129)$$

Переписывая формулу (2.128), получим

$$R = \max \left\{ \min \left[\lambda_r - \frac{\alpha_1^2 (\lambda_r - \lambda_1) + \dots + \alpha_{r-1}^2 (\lambda_r - \lambda_{r-1}) + \alpha_{r+1}^2 (\lambda_r - \lambda_{r+1}) + \dots + \alpha_n^2 (\lambda_r - \lambda_n)}{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_r^2 + \alpha_{r+1}^2 + \dots + \alpha_n^2} \right] \right\}. \quad (2.130)$$

Но теперь можно видеть, что при условии $\alpha_{r+1} = \alpha_{r+2} = \dots = \alpha_n = 0$ мы получим

$$R \leq \lambda_r \quad (2.131)$$

и условие, выражаемое согласно (2.129), может по-прежнему удовлетворяться при разумном выборе α_r . С другой стороны, предположим, что теперь выбираем $\mathbf{w}_j = \mathbf{v}_j$ при $j = 1, \dots, r-1$ и, следовательно, мы получили бы $R = \lambda_r$, что и завершает требуемое доказательство.

Наиболее важное свойство, устанавливаемое с помощью минимаксной характеристики собственных значений, это — *свойство разделения собственных значений*. Предположим, что в дополнение к задаче $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ мы рассматриваем серию задач

$$\mathbf{A}^{(m)}\mathbf{v}^{(m)} = \lambda^{(m)}\mathbf{v}^{(m)}, \quad (2.132)$$

где матрица $\mathbf{A}^{(m)}$ получается путем отбрасывания m последних строк и столбцов матрицы \mathbf{A} . Следовательно, $\mathbf{A}^{(m)}$ представляет собой симметричную квадратную матрицу порядка $(n - m)$. Используя также обозначения $\mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{A}$, $\lambda^{(0)} = \lambda$, $\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{v}$, мы убедимся, что, как свидетельствует свойство разделения собственных значений, собственные значения задачи $\mathbf{A}^{(m+1)}\mathbf{v}^{(m+1)} = \lambda^{(m+1)}\mathbf{v}^{(m+1)}$ разделяют собственные значения задачи (2.132); иначе говоря, мы имеем

$$\lambda_1^{(m)} \leq \lambda_1^{(m+1)} \leq \lambda_2^{(m)} \leq \lambda_2^{(m+1)} \leq \dots \leq \lambda_{n-m-1}^{(m)} \leq \lambda_{n-m-1}^{(m+1)} \leq \lambda_{n-m}^{(m)} \quad (2.133)$$

при $m = 0, \dots, n - 2$.

Для доказательства справедливости соотношений (2.133) рассмотрим задачи $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ и $\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{v}^{(1)} = \lambda^{(1)}\mathbf{v}^{(1)}$. Если мы сумеем показать, что свойство разделения собственных значений имеет место для этих двух задач, то оно будет иметь место также и для $m = 1, 2, \dots, n - 2$. В частности, желательно доказать, что

$$\lambda_r \leq \lambda_r^{(1)} \leq \lambda_{r+1}, \quad r = 1, \dots, n - 1. \quad (2.134)$$

Используя минимаксную характеристику, имеем

$$\lambda_{r+1} = \max \left\{ \min \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \mathbf{v}^T \mathbf{w} = 0; \quad i = 1, \dots, r; \quad \text{все } \mathbf{w}_i \text{ произвольны} \end{array} \right\}. \quad (2.135)$$

Аналогично этому имеем

$$\lambda_r^{(1)} = \max \left\{ \min \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \mathbf{v}^T \mathbf{w}_i = 0; \quad i = 1, \dots, r \\ \mathbf{w}_i \text{ произвольно для } i = 1, \dots, r - 1 \\ \mathbf{w}_r = \mathbf{e}_n \end{array} \right\}, \quad (2.136)$$

где вектор \mathbf{w}_r принудительно сделан равным \mathbf{e}_n , чтобы обеспечить равенство нулю последнего элемента вектора \mathbf{v} , а это связано с тем, что \mathbf{e}_n представляет собой последний столбец матрицы тождественности \mathbf{I} размером $n \times n$. Однако если учесть, что принудительное ограничение на λ_{r+1} может быть более жестким и распространяется также и на $\lambda_r^{(1)}$, то получим

$$\lambda_r^{(1)} \leq \lambda_{r+1}. \quad (2.137)$$

Для определения λ_r используем соотношения

$$\lambda_r = \max \left\{ \min \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \mathbf{v}^T \mathbf{w}_i = 0; \quad i = 1, \dots, r - 1, \\ \text{все } \mathbf{w}_i \text{ произвольны} \end{array} \right\}. \quad (2.138)$$

Сравнивая характеристики для $\lambda_r^{(1)}$ и λ_r , т.е. выражения (2.136) и (2.138), мы замечаем, что при вычислении $\lambda_r^{(1)}$ должны быть соблюдены те же ограничения, что и при вычислении λ_r , при одном добавочном (а именно, $\mathbf{v}^T \mathbf{e}_n = 0$) и, следовательно,

$$\lambda_r \leq \lambda_r^{(1)}. \quad (2.139)$$

Однако совокупность неравенств (2.137) и (2.139) ведет к требуемому результату, приведенному в (2.134).

Теперь свойство разделения собственных значений приводит к следующему результату. Если задачи о собственных значениях, сформулированные в (2.132) и включающие задачу $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, записать в форме

$$p^{(m)}(\lambda^{(m)}) = \det(\mathbf{A}^{(m)} - \lambda^{(m)}\mathbf{I}); \quad m = 0, \dots, n-1, \quad (2.140)$$

где $p^{(0)} = p$, то увидим, что корни полинома $p(\lambda^{(m+1)})$ разделяют корни полинома $p(\lambda^{(m)})$. Однако если корни полинома $p_{j+1}(x)$ разделяют корни полинома $p_j(x)$, то последовательность полиномов $p_i(x)$, $i = 1, \dots, q$, образует последовательность Штурма. Следовательно, свойство разделения собственных значений констатирует, что характеристические задачи $\mathbf{A}^{(m)}\mathbf{v}^{(m)} = \lambda^{(m)}\mathbf{v}^{(m)}$, $m = 0, 1, \dots, n-1$, образуют последовательность Штурма. Следует отметить, что при проведении данного рассмотрения анализировались только симметричные матрицы; это значит, что как минимаксная характеристика собственных значений, так и свойство последовательности Штурма применимы к положительно определенным и к неопределенным матрицам. Свойство последовательности Штурма будет интенсивно использоваться в последующих главах (см. разделы 8.2.5, 10.2.2, и 11.6.4). Рассмотрим ниже следующий пример.

Пример 2.38: Рассмотрим задачу о собственных значениях $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -7 \\ -4 & 2 & -4 \\ -7 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Требуется вычислить собственные значения матрицы \mathbf{A} и матриц $\mathbf{A}^{(m)}$, $m = 1, 2$. Показать, что имеет место сформулированное в (2.133) свойство разделения и изобразить поведение характеристических полиномов $p(\lambda)$, $p^{(1)}(\lambda^{(1)})$ и $p^{(2)}(\lambda^{(2)})$.

Мы имеем

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (5 - \lambda)[(2 - \lambda)(5 - \lambda) - 16] + 4[-4(5 - \lambda) - 28] - 7[16 + 7(2 - \lambda)].$$

Следовательно, $p(\lambda) = (-6 - \lambda)(6 - \lambda)(12 - \lambda)$, и получаем собственные значения $\lambda_1 = -6$; $\lambda_2 = 6$; $\lambda_3 = 12$. Кроме того,

$$\begin{aligned} p^{(1)}(\lambda^{(1)}) &= \det(\mathbf{A}^{(1)} - \lambda^{(1)}\mathbf{I}) \\ &= (5 - \lambda^{(1)})(2 - \lambda^{(1)}) - 16 \end{aligned}$$

или $p^{(1)}(\lambda^{(1)}) = (\lambda^{(1)})^2 - 7\lambda^{(1)} - 6$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(1)} &= \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{73} = -0,7720, \\ \lambda_2^{(1)} &= \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{73} = 7,772. \end{aligned}$$

Наконец, $p^{(2)}(\lambda^{(2)}) = \det(\mathbf{A}^{(2)} - \lambda^{(2)}\mathbf{I}) = 5 - \lambda^{(2)}$. Следовательно, $\lambda_1^{(2)} = 5$.

Свойство разделения имеет место, так как

$$\lambda_1 \leq \lambda_1^{(1)} \leq \lambda_2 \leq \lambda_2^{(1)} \leq \lambda_3$$

и

$$\lambda_1^{(1)} < \lambda_1^{(2)} < \lambda_2^{(1)}.$$

Поведение характеристических полиномов схематически показано на рис. 2.9.

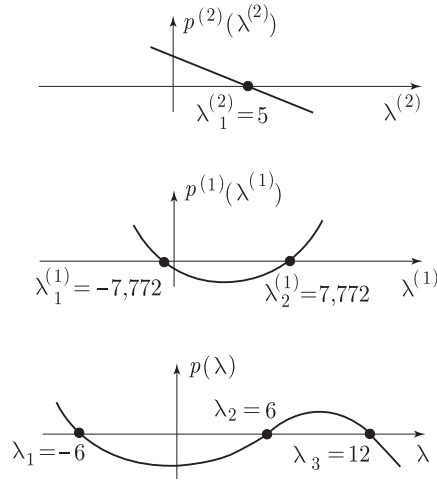


Рис. 2.9. Характеристические полиномы

2.7. Нормы векторов и матриц

Мы уже обсудили многие вопросы, связанные с векторами, матрицами, рассмотрели собственные значения и собственные векторы симметричных матриц, а также более глубоко исследовали свойства элементов этих объектов. Однако нами пока что не обсуждался один важный аспект. Когда мы имеем дело с одиночными числами, то некоторое конкретное число можно охарактеризовать как большое или малое. Векторы и матрицы являются функциями многих элементов, однако нам нужно уметь также измерять их «размер». В частности, если одиночные числа используются в итерационном процессе, то сходимость ряда чисел, например, x_1, x_2, \dots, x_k , к числу x измеряется просто как

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - x| = 0 \quad (2.141)$$

или, в словесной форме, — сходимость достигается тогда, когда остаток $y_k = |x_k - x|$ приближается к нулю при $k \rightarrow \infty$. Кроме того, если мы можем найти постоянные $p \geq 1$ и $c > 0$, такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x|}{|x_k - x|^p} = c, \quad (2.142)$$

то мы будем говорить, что сходимость имеет порядок p . Если $p = 1$, то сходимость является линейной, а скорость сходимости равна c , и в этом случае величина c должна быть меньше единицы.

В процессах итерационного решения с использованием векторов и матриц нам нужно также уметь оценивать сходимость. Осознавая, что размер вектора или матрицы должен зависеть от величины всех элементов данного массива, мы приходим к определению норм векторов и матриц. Норма представляет собой отдельное число, зависящее от величин всех элементов вектора или матрицы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: *Норма вектора \mathbf{v} , имеющего порядок n , обозначается как $\|\mathbf{v}\|$ и представляет собой отдельное число. Норма является функцией элементов вектора \mathbf{v} при выполнении следующих условий:*

$$1. \|\mathbf{v}\| \geq 0 \text{ и } \|\mathbf{v}\| = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } \mathbf{v} = 0. \quad (2.143)$$

$$2. \|c\mathbf{v}\| = |c| \|\mathbf{v}\| \text{ для любого скаляра } c. \quad (2.144)$$

$$3. \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| \text{ для векторов } \mathbf{v} \text{ и } \mathbf{w}. \quad (2.145)$$

Соотношение (2.145) представляет собой неравенство треугольника. Три приводимые ниже нормы векторов широко используются и называются векторными нормами с индексами бесконечность, один и два:

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \max_i |v_i|, \quad (2.146)$$

$$\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|, \quad (2.147)$$

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^2 \right)^{1/2}. \quad (2.148)$$

Норма $\|\mathbf{v}\|_2$ известна также под названием *векторной нормы Эвклида*. С точки зрения геометрии эта норма равна длине вектора \mathbf{v} . Все три перечисленные нормы являются специальными случаями векторной нормы, где для (2.146), (2.147) и (2.148) имеем, соответственно, $p = \infty$, 1 и 2. Следует отметить, что каждая из норм в формулах (2.146)–(2.148) удовлетворяет условиям (2.143)–(2.145).

Теперь мы можем оценить сходимость последовательности векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ к вектору \mathbf{x} . А именно, для того, чтобы эта последовательность должным образом сходилась, необходимо и достаточно, чтобы для любой из векторных норм было

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| = 0. \quad (2.149)$$

Порядок сходимости p , а в случае $p = 1$ — также и скорость сходимости c , вычисляются аналогично тому, как это выглядит в (2.142), но с использованием норм; иначе говоря, имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\|^p} = c. \quad (2.150)$$

Рассматривая взаимосвязи между векторными нормами, можно заметить эквивалентность этих норм в том смысле, что для любых двух норм $\|\bullet\|_{s_1}$ и $\|\bullet\|_{s_2}$ существуют две положительные постоянные α_1 и α_2 , такие, что

$$\|\mathbf{v}\|_{s_1} \leq \alpha_1 \|\mathbf{v}\|_{s_2} \quad (2.151)$$

и

$$\|\mathbf{v}\|_{s_2} \leq \alpha_2 \|\mathbf{v}\|_{s_1}, \quad (2.152)$$

где индексы s_1 и s_2 обозначают ∞ -, 1- или 2-нормы. Отсюда следует, что

$$c_1 \|\mathbf{v}\|_{s_1} \leq \|\mathbf{v}\|_{s_2} \leq c_2 \|\mathbf{v}\|_{s_1}, \quad (2.153)$$

где c_1 и c_2 — это две положительные постоянные, которые могут зависеть от n ; разумеется, выполняется также и соотношение

$$\frac{1}{c_2} \|\mathbf{v}\|_{s_2} \leq \|\mathbf{v}\|_{s_1} \leq \frac{1}{c_1} \|\mathbf{v}\|_{s_2}.$$

Пример 2.39: Требуется предложить постоянные c_1 и c_2 , соответствующие соотношениям в (2.153), если, во-первых, s_1 и s_2 представляют собой нормы ∞ - и 1-, а затем,

во-вторых, нормы ∞ - и 2-. После этого требуется показать, что в каждом из вышеприведенных случаев соотношения (2.153) удовлетворяются с использованием вектора

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

В первом случае имеем

$$\|\mathbf{v}\|_{\infty} \leq \|\mathbf{v}\|_1 \leq n\|\mathbf{v}\|_{\infty} \quad (\text{a})$$

при $c_1 = 1$ и $c_2 = n$, а во втором случае получим

$$\|\mathbf{v}\|_{\infty} \leq \|\mathbf{v}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{v}\|_{\infty} \quad (\text{b})$$

при $c_1 = 1$ и $c_2 = \sqrt{n}$. Эти соотношения показывают, что нормы 1- и 2- эквивалентны норме ∞ -. Нетрудно показать, что нижняя и верхняя границы для $\|\mathbf{v}\|_1$ в (a) и $\|\mathbf{v}\|_2$ в (b) не могут быть сдвинуты ближе, так как знаки равенства достигаются для векторов $\mathbf{v}^T = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$ и $\mathbf{v}^T = \mathbf{e}_I$ (а также эти выражения с любым скалярным множителем).

Если применить (a) и (b) к заданному вектору \mathbf{v} , получим

$$\|\mathbf{v}\|_{\infty} = 3,$$

$$\|\mathbf{v}\|_1 = 1 + 3 + 2 = 6,$$

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14},$$

и неравенства в соотношениях (a) и (b) принимают вид

$$3 \leq 6 \leq (3)(3); \quad 3 < \sqrt{14} \leq (\sqrt{3})(3).$$

По аналогии с определением нормы вектора мы можем определить также и норму матрицы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Норма матрицы \mathbf{A} порядка $n \times n$, обозначаемая как $\|\mathbf{A}\|$, есть отдельное число. Норма является функцией элементов данной матрицы и удовлетворяет следующим соотношениям:

$$1. \ \|\mathbf{A}\| \geq 0 \text{ и } \|\mathbf{A}\| = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } \mathbf{A} = 0. \quad (2.154)$$

$$2. \ \|c\mathbf{A}\| = |c| \|\mathbf{A}\| \text{ для любого скаляра } c. \quad (2.155)$$

$$3. \ \|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\| \text{ для матриц } \mathbf{A} \text{ и } \mathbf{B}. \quad (2.156)$$

$$4. \ \|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\| \text{ для матриц } \mathbf{A} \text{ и } \mathbf{B}. \quad (2.157)$$

Соотношение (2.156) есть неравенство треугольника, эквивалентное (2.145). Дополнительное условие, содержащееся в (2.157) и не постулированное при определении нормы вектора, должно удовлетворяться, чтобы мы могли использовать матричные нормы, встречаясь с произведениями матриц.

Ниже приводятся часто используемые матричные нормы:

$$\|\mathbf{A}\|_{\infty} = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad (2.158)$$

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad (2.159)$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\tilde{\lambda}_n}; \quad \tilde{\lambda}_n = \text{максимальное собственное значение матрицы } \mathbf{A}^T \mathbf{A}, \quad (2.160)$$

где для симметричной матрицы \mathbf{A} имеем $\|\mathbf{A}\|_\infty = \|\mathbf{A}\|_1$ и $\|\mathbf{A}\|_2 = \max_i |\lambda_i|$ (см. упражнение 2.21). Норма $\|\mathbf{A}\|_2$ называется *спектральной нормой* матрицы \mathbf{A} . Каждая из этих норм удовлетворяет условиям (2.154)–(2.157). Доказательство того, что условие (2.157) выполняется для бесконечной нормы, дается в примере 2.41.

Пример 2.40: Вычислить нормы ∞ -, 1- и 2- для матрицы \mathbf{A} , заданной в примере 2.38. Рассматриваемая матрица имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -7 \\ -4 & 2 & -4 \\ -7 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Пользуясь определениями, данными в (2.158)–(2.160), получим

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = 5 + 4 + 7 = 16,$$

$$\|\mathbf{A}\|_1 = 5 + 4 + 7 = 16.$$

Норма 2- равна $|\lambda_3|$ и, следовательно (см. пример 2.38), $\|\mathbf{A}\|_2 = 12$.

Пример 2.41: Показать, что для двух матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} , имеем

$$\|\mathbf{AB}\|_\infty \leq \|\mathbf{A}\|_\infty \|\mathbf{B}\|_\infty.$$

Пользуясь определением бесконечной матричной нормы из (2.158), имеем

$$\|\mathbf{AB}\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right|;$$

но тогда

$$\begin{aligned} \|\mathbf{AB}\|_\infty &\leq \max_i \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |b_{kj}| = \\ &= \max_i \sum_{k=1}^n \left\{ |a_{ik}| \sum_{j=1}^n |b_{kj}| \right\} \leq \\ &\leq \left\{ \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \right\} \left\{ \max_k \sum_{j=1}^n |b_{kj}| \right\}. \end{aligned}$$

Тем самым желаемый результат доказан.

Как было и в случае последовательности векторов, мы можем теперь рассчитать сходимость последовательности матриц $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \dots, \mathbf{A}_k$ к матрице \mathbf{A} . Для достижения сходимости необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{A}_k - \mathbf{A}\| = 0 \quad (2.161)$$

для любой из вышеприведенных матричных норм.

При определении матричной нормы нам понадобилось выполнение условия (2.157). чтобы иметь возможность использовать нормы, встречаясь с произведениями матриц. Если в подобном случае мы желаем получить полезную информацию с применением норм, то нужно использовать только специфические векторные нормы и специфические матричные нормы. Какие именно матричные и векторные нормы должны использоваться совместно, определяется условием выполнения приводимого ниже соотношения, справедливого для любой матрицы \mathbf{A} и любого вектора \mathbf{v} :

$$\|\mathbf{Av}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{v}\|, \quad (2.162)$$

где $\|\mathbf{A}\mathbf{v}\|$ и $\|\mathbf{v}\|$ вычисляются, как векторные нормы, а норма $\|\mathbf{A}\|$ — как матричная. Можно отметить наличие тесной связи с условием (2.157), которое должно выполняться для матричной нормы. Если условие (2.162) выполняется для конкретных векторных и матричных норм, то говорят, что эти две нормы являются совместимыми, а о матричной норме говорят, что она подчинена векторной норме. Нормы матрицы типа 1-, 2- и ∞ -, определение которых было дано ранее, являются подчиненными, соответственно, нормам вектора того же типа, заданным согласно (2.146)–(2.148). В нижеследующем примере дается доказательство того, что нормы ∞ - являются совместимыми и подчиненными. Совместимость норм вектора и матрицы типа 1- и 2- доказывается аналогичным образом.

Пример 2.42: Требуется показать, что для матрицы \mathbf{A} и вектора \mathbf{v} имеем соотношение

$$\|\mathbf{A}\mathbf{v}\|_\infty \leq \|\mathbf{A}\|_\infty \|\mathbf{v}\|_\infty. \quad (\text{a})$$

Пользуясь определением бесконечных норм, получим

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\mathbf{v}\|_\infty &= \max_i \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \right| \leq \\ &\leq \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |v_j| \leq \\ &\leq \left\{ \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right\} \left\{ \max_j |v_j| \right\}. \end{aligned}$$

Этим доказывается соотношение (a).

Если требуется показать, что можно получить также и равенство, то следует рассмотреть тот случай, когда \mathbf{v} является полным единичным вектором и когда $a_{ij} \geq 0$. В этом случае $\|\mathbf{v}\|_\infty = 1$ и $\|\mathbf{A}\mathbf{v}\|_\infty = \|\mathbf{A}\|_\infty$.

В последующих главах нам будут встречаться различные приложения норм. Одно из ценных приложений возникает при вычислении собственных значений некоторой матрицы: если рассматривается задача $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, то с помощью взятия нормы обеих частей соотношения получим

$$\|\mathbf{A}\mathbf{v}\| = \|\lambda\mathbf{v}\| \quad (2.163)$$

и, следовательно, используя (2.144) и (2.162), получим

$$\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{v}\| \geq |\lambda| \|\mathbf{v}\| \quad (2.164)$$

или

$$|\lambda| \leq \|\mathbf{A}\|. \quad (2.165)$$

Отсюда следует, что каждое собственное значение матрицы \mathbf{A} по своей абсолютной величине меньше или равно любой норме \mathbf{A} . Определяя *спектральный радиус* $\rho(\mathbf{A})$ как ¹⁾

$$\rho(\mathbf{A}) = \max_i |\lambda_i|, \quad (2.166)$$

мы получаем

$$\rho(\mathbf{A}) \leq \|\mathbf{A}\|. \quad (2.167)$$

¹⁾ Отметим, что для симметричной матрицы \mathbf{A} имеем $\rho(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_2$, однако в общем случае для несимметричной матрицы это не так; примером служит случай $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\alpha \neq 0$.

На практике норма матрицы \mathbf{A} типа ∞ - вычисляется весьма удобным образом и, поэтому, эффективно используется с целью определения верхней границы для наибольшей абсолютной величины собственного значения.

Пример 2.43: Вычислить спектральный радиус матрицы \mathbf{A} из примера 2.38. После этого показать, что $\rho(\mathbf{A}) \leq \|\mathbf{A}\|_\infty$.

Спектральный радиус равен $\max |\lambda_i|$. Собственные значения матрицы \mathbf{A} были вычислены в примере 2.38.

$$\lambda_1 = -6; \quad \lambda_2 = 6; \quad \lambda_3 = 12.$$

Следовательно, $\rho(\mathbf{A}) = 12$.

В примере 2.40 мы вычислили $\|\mathbf{A}\|_\infty = 16$. Таким образом, интересующее нас соотношение удовлетворяется.

Другое важное приложение норм встречается при рассмотрении устойчивости конечно-элементных формулировок (см. раздел 4.5). Предположим, что мы имеем последовательность конечноэлементных дискретизаций с использованием некоторого конкретного элемента и что типовая дискретизация приводит к уравнению

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \quad (2.168)$$

Тогда, грубо говоря, для обеспечения устойчивости мы хотели бы, чтобы малое изменение величины \mathbf{b} приводило лишь к малому изменению \mathbf{x} . Чтобы оценить величину этих изменений, предположим, что для измерения размера результатов мы выбираем норму $\|\bullet\|_L$, а для измерения размера правой части — норму $\|\bullet\|_R$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть \mathbf{A} представляет собой невырожденную матрицу размера $n \times n$. Мы определяем постоянную устойчивости матрицы \mathbf{A} по отношению к нормам $\|\bullet\|_L$ и $\|\bullet\|_R$ как наименьшую возможную постоянную S_{LR} , такую, что соотношение

$$\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|_L}{\|\mathbf{x}\|_L} \leq S_{LR} \frac{\|\Delta \mathbf{b}\|_R}{\|\mathbf{b}\|_R} \quad (2.169)$$

выполняется для всех векторов \mathbf{x} и возмущений $\Delta \mathbf{x}$, удовлетворяющих соотношениям $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{A} \Delta \mathbf{x} = \Delta \mathbf{b}$.

Приведенное выше соотношение связывает относительное изменение решения \mathbf{x} (в норме $\|\bullet\|_L$) с изменением воздействующего вектора \mathbf{b} (в норме $\|\bullet\|_R$), и мы говорим, что последовательность дискретизаций устойчива по отношению к нормам $\|\bullet\|_L$ и $\|\bullet\|_R$, если постоянная S_{LR} является равномерно ограниченной независимо от того, насколько велико значение n (см. раздел 4.5.2). В соответствии с соотношением (2.162) положим ¹⁾

$$\|\mathbf{A}\|_{LR} = \sup_{\mathbf{y}} \frac{\|\mathbf{Ay}\|_R}{\|\mathbf{y}\|_L} \quad (2.170)$$

и

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|_{RL} = \sup_{\mathbf{z}} \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{z}\|_L}{\|\mathbf{z}\|_R}. \quad (2.171)$$

¹⁾ В нижеследующем примере “sup” означает «супремум», а “inf” — «инфинум» (см. табл. 4.5).

Подставляя в формулу (2.170) $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, получим

$$\|\mathbf{A}\|_{LR} \geq \frac{\|\mathbf{b}\|_R}{\|\mathbf{x}\|_L}, \quad (2.172)$$

тогда как подстановка $\mathbf{z} = \Delta\mathbf{b}$ в формулу (2.171) дает

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|_{RL} \geq \frac{\|\Delta\mathbf{x}\|_L}{\|\Delta\mathbf{b}\|_R}. \quad (2.173)$$

Поэтому

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|_L}{\|\mathbf{x}\|_L} \leq \|\mathbf{A}\|_{LR} \|\mathbf{A}^{-1}\|_{RL} \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|_R}{\|\mathbf{b}\|_R} \quad (2.174)$$

и, следовательно,

$$S_{LR} = \|\mathbf{A}\|_{LR} \|\mathbf{A}^{-1}\|_{RL}. \quad (2.175)$$

Решающим фактором при вычислении S_{LR} оказывается использование надлежащих норм, и при задании нормы $\|\bullet\|_L$ естественным выбором для нормы R является норма, дуальная по отношению к $\|\bullet\|_L$ и определяемая выражением

$$\|\mathbf{z}\|_{DL} = \sup_{\mathbf{y}} \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{z}}{\|\mathbf{y}\|_L}. \quad (2.176)$$

При таком выборе для симметричной матрицы \mathbf{A} получим (см. упражнение 2.22)

$$\|\mathbf{A}\|_{LR} = \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|_L \|\mathbf{y}\|_L} = k_A \quad (2.177)$$

и

$$(\|\mathbf{A}^{-1}\|_{RL})^{-1} = \inf_{\mathbf{x}} \sup_{\mathbf{y}} \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|_L \|\mathbf{y}\|_L} = \gamma_A. \quad (2.178)$$

После этого постоянная устойчивости S_{LR} выражается как

$$S_{LR} = \frac{k_A}{\gamma_A}. \quad (2.179)$$

Как уже упоминалось ранее, для того, чтобы некая дискретизация оказалась устойчивой, необходимо показать, что величина S_{LR} в (2.179) остается ограниченной по мере того, как измельчается конечно-элементная сетка. Этот результат имеет общий характер. Наши рассуждения в разделе 4.5 касаются особой формы матрицы \mathbf{A} , а именно, той формы, которая возникает при предлагаемых нами смешанных формулировках для смещения/давления (u/p). В указанном случае условие и ведет к специфическим выражениям, непосредственно связанным с u/p -моделями, и эти выражения приводятся в разделе 4.5.2.

2.8. Упражнения

- 2.1. Получить приводимый ниже требуемый результат наиболее эффективным путем, то есть с наименьшим числом умножений. Подсчитать число использованных умножений.

Пусть

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}^T = [1 \quad 3 \quad 2],$$

$$k = 4,$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 8 & -1 \\ -2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

и вычислить $\mathbf{B}^T \mathbf{A} k \mathbf{C} \mathbf{B}$.

- 2.2. (а) Вычислить \mathbf{A}^{-1} , если

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

и если

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (b) Вычислить определители этих двух матриц.

- 2.3. Рассмотреть три приводимых ниже вектора.

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 6 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Использовать эти векторы в качестве столбцов матрицы \mathbf{A} и определить ранг и ядро этой матрицы.

- 2.4. Рассмотреть приводимую ниже матрицу \mathbf{A} . Определить постоянную k так, чтобы ранг \mathbf{A} был равен 2, после чего определить ядро этой матрицы.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1+k & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- 2.5. Рассмотреть два приводимых ниже вектора, определенных в трехмерной декартовой системе отсчета с базисными векторами \mathbf{e}_i .

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

- (а) Вычислить угол между этими векторами.
- (b) Предположить, что нужно использовать новый базис, а именно, штрихованный базис из примера 2.24. Вычислить компоненты обоих векторов в этом новом базисе.
- (с) Определить угол между векторами в этом новом базисе.
- 2.6. Матрица отражения определяется как $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \alpha \mathbf{v} \mathbf{v}^T$, $\alpha = 2/(\mathbf{v}^T \mathbf{v})$, где \mathbf{v} — вектор (порядка n), нормальный к плоскости отражения.
- (а) Показать, что матрица \mathbf{P} является ортогональной.
- (b) Рассмотреть вектор $\mathbf{P} \mathbf{u}$, где \mathbf{u} также является вектором порядка n . Показать, что воздействие \mathbf{P} на \mathbf{u} сводится к тому, что направление компоненты \mathbf{u} ,

нормальной к плоскости отражения. меняется на противоположное, тогда как компонента \mathbf{u} , лежащая в плоскости отражения, остается неизменной.

- 2.7. Компоненты тензора напряжений в системе координат x_1, x_2 , показанной на рис. 2.6, в некоторой точке таковы:

$$\tau = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 20 \end{bmatrix}.$$

- (a) Вычислить новый базис, в котором внедиагональные компоненты будут нулевыми, и привести новые диагональные компоненты.
- (b) Эффективное напряжение определяется как $\bar{\sigma} = \sqrt{(3/2)S_{ij}S_{ij}}$, где S_{ij} – компоненты девиантного тензора напряжений, $S_{ij} = \tau_{ij} - \tau_m \delta_{ij}$, а величина τ_m есть среднее напряжение, $\tau_m = \tau_{ii}/3$. Доказать, что величина $\bar{\sigma}$ есть скаляр. После этого показать в явной форме, что при заданном значении τ величина $\bar{\sigma}$ соответствует одному и тому же числу как в старом базисе, так и в новом.

- 2.8. Столбец \mathbf{q} определяется, как

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix},$$

где (x_1, x_2) – координаты некоторой точки. Доказать, что величина \mathbf{q} не является вектором.

- 2.9. Компоненты тензора деформаций Грина–Лагранжа в декартовой системе координат определяются как (подробности см. в разделе 6.2.2)

$$\epsilon = \frac{1}{2}(\mathbf{X}^T \mathbf{X} - \mathbf{I}),$$

где компоненты градиента деформаций \mathbf{X} имеют вид

$$X_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

а величины u_i и x_j суть, соответственно, смещения и координаты. Доказать, что тензор деформаций Грина–Лагранжа представляет собой тензор второго порядка.

- 2.10. Материальный тензор в выражении (2.66) может быть представлен в виде (см. (6.185))

$$C_{ijrs} = \lambda \delta_{ij} \delta_{rs} + \mu (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr}), \quad (\text{a})$$

где λ и μ суть постоянные Ламе,

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Это соотношение связи между напряжением и деформацией может быть записано также и в матричной форме, используемой в таблице 4.3, однако в этой таблице подразумевается применение инженерных компонент деформации (нормальные компоненты тензора деформаций равны нормальным инженерным компонентам деформаций, однако сдвиговые компоненты тензора деформаций равны половинам инженерных компонент).

- (a) Доказать, что C_{ijrs} есть тензор четвертого порядка.
- (b) Рассмотреть случай плоских напряжений и получить из выражения (a) выражение, фигурирующее в таблице 4.3.
- (c) Рассмотреть случай плоских напряжений и записать выражение (2.66) в матричной форме $\mathbf{C}' = \mathbf{TST}^T$, где матрица \mathbf{C} представлена в табл. 4.3, а нужно вывести выражение для \mathbf{T} (см. также упражнение 4.39).

- 2.11. Доказать справедливость соотношения (2.70).

- 2.12. Ковариантные базисные векторы, выраженные в декартовой системе координат, таковы:

$$\mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Векторы силы и смещения в этом базисе имеют вид

$$\mathbf{R} = 3\mathbf{g}_1 + 4\mathbf{g}_2; \quad \mathbf{u} = -2\mathbf{g}_1 + 3\mathbf{g}_2.$$

- (а) Вычислить $\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}$, используя только ковариантный базис.
 (б) Вычислить $\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}$, используя ковариантный базис для \mathbf{R} и контравариантный базис для \mathbf{u} .
- 2.13. Предположить, что ковариантный базис задан с помощью векторов \mathbf{g}_1 и \mathbf{g}_2 из упражнения 2.12. Пусть компоненты тензоров напряжений и деформаций в декартовом базисе представлены, как

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} 100 & 10 \\ 10 & 200 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0,01 & 0,05 \\ 0,05 & 0,02 \end{bmatrix}.$$

Вычислить компоненты $\tilde{\tau}^{mn}$ и $\tilde{\epsilon}_{mn}$ и показать в явной форме, что произведение $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\epsilon}$ остается одним и тем же, если использовать, с одной стороны, декартовы компоненты напряжений и деформаций, а с другой стороны — контравариантные компоненты напряжений и ковариантные компоненты деформаций.

- 2.14. Пусть \mathbf{a} и \mathbf{b} суть тензоры второго ранга, а \mathbf{A} и \mathbf{B} — матрицы преобразования. Доказать, что

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{b}\mathbf{B}^T) = (\mathbf{A}^T \mathbf{a}\mathbf{B}) \cdot \mathbf{b}.$$

(Подсказка: это доказательство легко осуществляется, если величины записаны в компонентах).

- 2.15. Рассмотреть задачу о собственных значениях $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ при

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (а) Дать решение для собственных значений и ортонормализованных собственных векторов и записать \mathbf{A} в форме (2.109).
 (б) Вычислить \mathbf{A}^6 , \mathbf{A}^{-1} и \mathbf{A}^{-2} .
- 2.16. Рассмотреть задачу о собственных значениях

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}.$$

Наименьшее собственное значение и соответствующий собственный вектор таковы:

$$\lambda_1 = 1; \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Кроме того, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$. Вычислить отношение Рэлея $\rho(\mathbf{v})$ при

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + 0,1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

и показать, что $\rho(\mathbf{v})$ ближе к λ_1 , чем \mathbf{v} к \mathbf{v}_1 .

2.17. Рассмотреть задачу о собственных значениях

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 8 \end{bmatrix} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}.$$

Вычислить собственные значения матриц \mathbf{A} и $\mathbf{A}^{(m)}$, $m = 1, 2$, где $\mathbf{A}^{(m)}$ получается путем исключения из \mathbf{A} m последних строк и столбцов. Сделать наброски поведения соответствующих характеристических полиномов (см. пример 2.38).

2.18. Доказать, что нормы 1- и 2- вектора \mathbf{v} эквивалентны. Затем показать эту эквивалентность в явной форме для вектора

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

2.19. Доказать справедливость соотношения (2.157) для нормы 1-.

2.20. Доказать, что $\|\mathbf{A}\mathbf{v}\|_1 \leq \|\mathbf{A}\|_1 \|\mathbf{v}\|_1$.

2.21. Доказать, что для симметричной матрицы \mathbf{A} имеем $\|\mathbf{A}\|_2 = \rho(\mathbf{A})$ (подсказка: использовать соотношение (2.108)).

2.22. Доказать справедливость выражений (2.177) и (2.178) при условии, что в качестве R -нормы используется дуальная L -норма.

Глава 3

НЕКОТОРЫЕ ВАЖНЕЙШИЕ ПОНЯТИЯ ИНЖЕНЕРНОГО АНАЛИЗА И ВВЕДЕНИЕ В МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

3.1. Введение

Для анализа некоторой инженерной системы требуется представить эту систему в идеализированной форме, удобной для решения, а затем сформулировать математическую модель, дать решение этой модели и предложить интерпретацию результатов решения (см. раздел 1.2). Основная цель данной главы состоит в том, чтобы обсудить некоторые классические приемы описания и решения математических моделей для инженерных систем (см. также [Crandall 1956]). Это обсуждение обеспечит ценный базис для представления конечно-элементных процедур в последующих главах. Рассматриваются две категории математических моделей: обобщенно-параметрические модели и модели, базирующиеся на понятиях механики сплошной среды. Модели, относящиеся к этим двум категориям, будут называться также математическими моделями для «дискретных систем» или для «континуальных систем».

В обобщенно-параметрической модели фактическая реакция системы описывается непосредственно с помощью решения, содержащего конечное число переменных состояния. В этой главе мы обсудим некоторые общие процедуры, применяемые с целью получения определяющих уравнений для обобщенно-параметрических моделей. Мы рассмотрим стационарные задачи, задачи о распространении и задачи о собственных значениях, а также кратко обсудим характерные свойства решений всех этих задач.

Для модели, базирующейся на понятиях механики сплошной среды, формулировка определяющих уравнений осуществляется так же, как и для обобщенно-параметрической модели, однако реакция системы определяется здесь не комплексом алгебраических уравнений для неизвестных переменных состояния, а дифференциальными уравнениями. Точное решение дифференциальных уравнений, удовлетворяющее всем граничным условиям, оказывается возможным только для сравнительно простых математических моделей, и в общем случае следует прибегать к численным процедурам. По существу эти процедуры *сводят математическую модель для континуальной системы к некой дискретной идеализации*, которая может быть решена точно таким же образом, как и для обобщенно-параметрической модели. В этой главе будут кратко описаны некоторые важные классические процедуры, применяемые для приведения математических моделей для континуальных систем к обобщенно-параметрическим численным моделям, а также будет дано краткое описание того, как эти классические процедуры обеспечивают базис для современных методов конечных элементов.

При проведении практического анализа исследователь обязан решить, должна ли некоторая инженерная система быть представлена обобщенно-параметрической математической моделью или моделью для континуальной системы, а также определить все характерные особенности выбранной модели. Кроме того, если

определенная математическая модель уже выбрана, то исследователю необходимо решить, как реализовать численное решение для определения реакции системы. Именно на этом этапе можно в значительной мере выявить ценность методов конечных элементов; это означает, что конечно-элементная методика, используемая при работе на цифровом компьютере, позволила нам систематически реализовать численное исследование математических моделей для континуальных систем и, по существу, сделала возможным практическое распространение и приложение приводимых в данной главе классических процедур на чрезвычайно сложные инженерные системы.

3.2. Исследование математических моделей для дискретных систем

В этом разделе мы будем иметь дело с *дискретными* или с *обобщенно-параметрическими* математическими моделями. Сущность обобщенно-параметрической математической модели состоит в том, что состояние исследуемой системы может быть описано *непосредственно*, с достаточной точностью, посредством конечного (и обычно малого) числа переменных состояния. При построении решения требуется пройти через следующие этапы:

1. *Идеализация системы*: истинная система идеализируется как некая совокупность элементов.
2. *Равновесие элемента*: условия равновесия каждого элемента формулируются в терминах переменных состояния.
3. *Объединение элементов*: требования необходимости взаимосвязи элементов привлекаются с целью составления системы уравнений для неизвестных переменных состояния.
4. *Вычисление реакции*: система уравнений разрешается относительно переменных состояния и с помощью условий равновесия вычисляется реакция каждого элемента.

Перечисленные этапы решения проходятся при рассмотрении задач различного типа: стационарных задач, задач о распространении и задач о собственных значениях. Цель данного раздела состоит в том, чтобы дать введение, демонстрирующее методику исследования задач в каждой конкретной области, а также вкратце обсудить характер решений. Необходимо отдавать себе отчет в том, что здесь рассматриваются задачи далеко не всех типов, встречающихся при инженерном анализе; тем не менее, подавляющее большинство задач естественным образом попадает в указанные области. В приводимых ниже примерах этого раздела рассматриваются задачи о конструкциях, об электричестве, о течении жидкости, о теплопередаче, причем следует подчеркнуть, что в каждом из этих примеров решение реализуется в одной и той же последовательности основных этапов.

3.2.1. Стационарные задачи

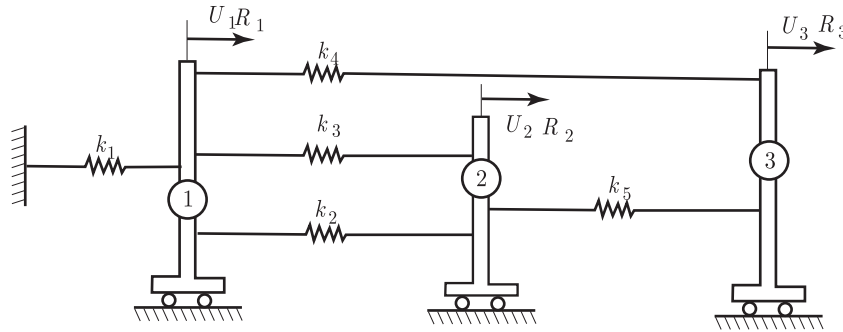
Главная характеристика стационарных задач состоит в том, что реакция системы не изменяется во времени. Следовательно, переменные состояния, описывающие реакции рассматриваемой системы, могут быть получены путем решения системы таких уравнений, в которых время не фигурирует в качестве независимой переменной. В приводимых ниже примерах мы иллюстрируем процесс анализа, осуществляемого при решении некоторых задач. Представлено пять модельных задач:

1. Система упругих пружин.
2. Система теплопередачи.

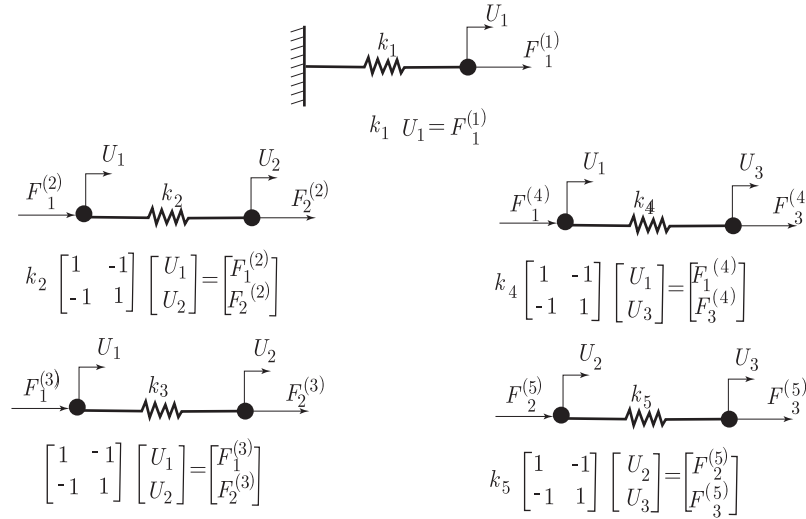
3. Гидравлическая сеть.
4. Сеть постоянного тока.
5. Нелинейная система упругих пружин.

Анализ, проводимый при решении каждой из этих задач, иллюстрирует воплощение тех общих этапов анализа, обзор которых дан в разделе 3.2. Первые четыре задачи связаны с анализом линейных систем, тогда как нелинейная система упругих пружин выявляет нелинейную реакцию на приложенные нагрузки. Все задачи корректно поставлены, и при вычислении реакции каждой из систем существует единственное решение.

Пример 3.1: На рис. 3.1 показана система, состоящая из трех жестких катков на горизонтальной плоскости, соединенных между собой системой линейно-упругих пружин. Вычислить смещения катков и силы, возникающие в пружинах при показанных на рисунке нагрузках.



а. Схема физического построения



б. Соотношения равновесия в элементах

Рис. 3.1. Система жестких катков, соединенных между собой линейно-упругими пружинами

Мы будем проводить анализ в соответствии с этапами 1–4, перечисленными в разделе 3.2. В качестве переменных состояния, характеризующих реакцию системы, выберем смещения U_1 , U_2 и U_3 .

Эти смещения отмеряются от начальных положений катков, в которых пружины не были деформированы. Все отдельные пружинные элементы и соответствующие им условия равновесия показаны на рис. 3.1б.

Чтобы получить определяющие уравнения для переменных состояния, привлечем условия взаимосвязи элементов, соответствующие статическому равновесию трех катков:

$$\begin{aligned} F_1^{(1)} + F_1^{(2)} + F_1^{(3)} + F_1^{(4)} &= R_1, \\ F_2^{(2)} + F_2^{(3)} + F_2^{(5)} &= R_2, \\ F_3^{(4)} + F_3^{(5)} &= R_3. \end{aligned} \quad (a)$$

Теперь мы можем написать выражения для сил $F_i^{(j)}$, $i = 1, 2, 3$; $j = 1, \dots, 5$, действующих на концы элементов, используя при этом условия равновесия элементов, приведенные на рис. 3.1б. Здесь соответственно компонентам смещения U_1 , U_2 и U_3 для элемента 1 мы можем написать

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

или $\mathbf{K}^{(1)}\mathbf{U} = \mathbf{F}^{(1)}$; для элемента 2:

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \\ 0 \end{bmatrix},$$

или $\mathbf{K}^{(2)}\mathbf{U} = \mathbf{F}^{(2)}$, и так далее. Следовательно, приведенные в (а) условия взаимосвязи элементов сводятся к соотношениям

$$\mathbf{KU} = \mathbf{R}, \quad (b),$$

где

$$\mathbf{U}^T = [U_1 \ U_2 \ U_3]$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2 + k_3 + k_4) & -(k_2 + k_3) & -k_4 \\ -(k_2 + k_3) & (k_2 + k_3 + k_5) & -k_5 \\ -k_4 & -k_5 & (k_4 + k_5) \end{bmatrix}$$

и $\mathbf{R}^T = [R_1 \ R_2 \ R_3]$. Здесь можно отметить, что матрица коэффициентов \mathbf{K} может быть получена при использовании формулы

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^5 \mathbf{K}^{(i)}, \quad (c)$$

где $\mathbf{K}^{(i)}$ представляют собой матрицы жесткости элементов. Процесс суммирования по формуле (с), предназначенный для получения матрицы жесткости всей конструкции по данным о матрицах жесткости элементов, называется *методом прямой жесткости*.

Анализ системы завершается путем решения соотношения (b) относительно переменных состояния U_1 , U_2 , U_3 и последующего вычисления сил, действующих на элементы, исходя из тех соотношений равновесия элементов, которые приведены на рис. 3.1.

Пример 3.2: Конструкция стены составлена из двух однородных, соприкасающихся между собой плит, как это показано на рис. 3.2. В стационарном состоянии температурные условия для стены характеризуются температурами внешних поверхностей θ_1 и θ_3 , а также температурой срединной поверхности θ_2 . Требуется вывести уравнения равновесия для данной задачи в терминах вышеупомянутых температур, если известны температуры внешних областей, θ_0 и θ_4 .

Коэффициенты теплопроводности, рассчитанные на единицу площади каждой из плит, а также поверхностные коэффициенты, приводятся на рис. 3.2. Закон

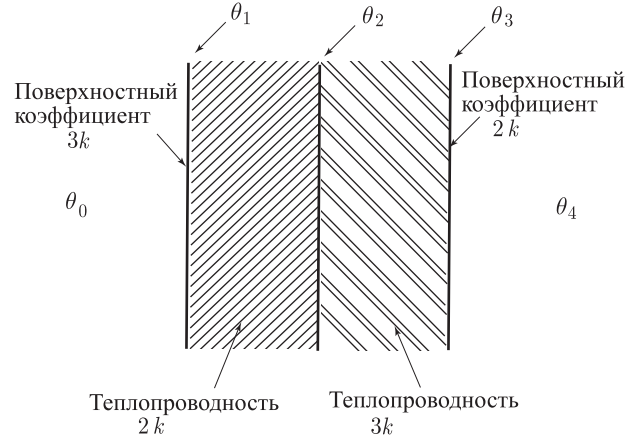


Рис. 3.2. Пластина под воздействием температурных граничных условий

теплопроводности имеет вид $q/A = \bar{k} \Delta\theta$, где q есть полный поток тепла, A — площадь, $\Delta\theta$ — температурный перепад в направлении потока тепла, а \bar{k} — теплопроводность, или поверхностный коэффициент. Переменными состояния при проводимом здесь анализе являются θ_1 , θ_2 и θ_3 . Если воспользоваться законом теплопроводности, то уравнения равновесия для каждого из элементов имеют вид:

для левой поверхности, на единицу ее площади: $q_1 = 3k(\theta_0 - \theta_1)$,

для левой плиты: $q_2 = 2k(\theta_1 - \theta_2)$,

для правой плиты: $q_3 = 3k(\theta_2 - \theta_3)$,

для правой поверхности: $q_4 = 2k(\theta_3 - \theta_4)$.

Желая получить определяющие уравнения для переменных состояния, учтем, что условие равновесия тепловых потоков сводится к соотношению $q_1 = q_2 = q_3 = q_4$. Следовательно, получим

$$3k(\theta_0 - \theta_1) = 2k(\theta_1 - \theta_2),$$

$$2k(\theta_1 - \theta_2) = 3k(\theta_2 - \theta_3),$$

$$3k(\theta_2 - \theta_3) = 2k(\theta_3 - \theta_4).$$

Если эти уравнения записать в матричной форме, то будем иметь

$$\begin{bmatrix} 5k & -2k & 0 \\ -2k & 5k & -3k \\ 0 & -3k & 5k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k\theta_0 \\ 0 \\ 2k\theta_4 \end{bmatrix}. \quad (a)$$

Эти уравнения равновесия могут быть получены также и систематическим путем, если использовать прямую процедуру жесткости. Пользуясь таким приемом, будем действовать так, как в примере 3.1, при тепловых соотношениях равновесия элементов в виде

$$\bar{k} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_i \\ q_j \end{bmatrix},$$

где q_i , q_j — потоки тепла, направленные внутрь элемента, а θ_i , θ_j — температуры на концах соответствующих элементов. Для системы, представленной на рис. 3.2, мы имеем два проводящих элемента (каждая плита представляет собой один элемент) и, следовательно, получим

$$\begin{bmatrix} 2k & -2k & 0 \\ -2k & 5k & -3k \\ 0 & -3k & 3k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k(\theta_0 - \theta_1) \\ 0 \\ 2k(\theta_4 - \theta_3) \end{bmatrix}. \quad (b)$$

Поскольку величины θ_1 и θ_3 неизвестны, то уравнения равновесия (b) для получения их решения следует перегруппировать так, чтобы получить соотношения (a).

Интересно отметить аналогию между, с одной стороны, анализом сил и смещений для системы пружин в примере 3.1 и, с другой стороны, анализом температур и тепловых потоков в примере 3.2. Матрицы коэффициентов в обоих вариантах чрезвычайно схожи, причем обе они могут быть получены вполне систематическим путем. Чтобы подчеркнуть указанную аналогию, на рис. 3.3 приводится модель с пружинами, которая определяется той матрицей коэффициентов, что и задача о теплопередаче.

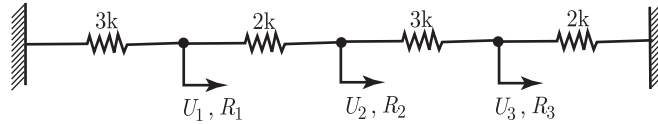


Рис. 3.3. Система пружин, соответствующая той же матрице коэффициентов, что и для задачи на рис. 3.2

Далее мы рассмотрим простую задачу о потоках жидкости и простую электрическую систему, причем в обоих случаях анализ вновь проводится таким же образом, как и для задач о пружинах и о теплопередаче.

Пример 3.3: Требуется вывести уравнения для определения стационарных распределений давления и потоков жидкости в гидравлической сети, показанной на рис. 3.4. Предположим, что жидкость несжимаема и что перепад давления в некоторой ветви пропорционален потоку жидкости q через эту ветвь, $\Delta p = Rq$, где R есть коэффициент сопротивления ветви.

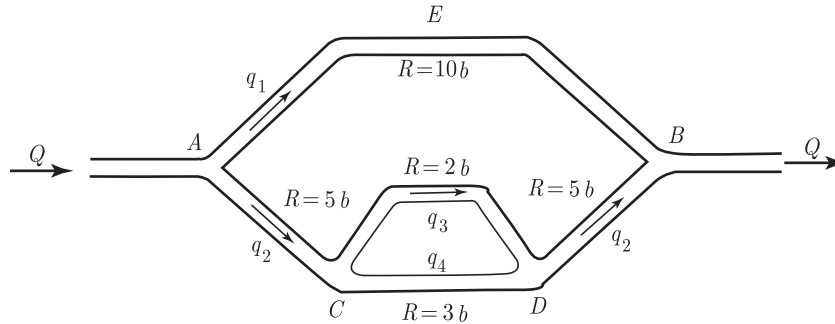


Рис. 3.4. Гидравлическая система труб

При проводимом здесь анализе элементами являются отдельные ветви сети, состоящей из труб. В качестве неизвестных переменных состояния, характеризующих течение и распределение давления в системе, выберем давления в точках A , C и D , которые будем обозначать как p_A , p_C и p_D , и предположим, что давление в точке B равно нулю. В результате для рассматриваемых элементов имеем

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{p_A}{10b}; & q_3 &= \frac{p_C - p_D}{2b}; \\ q_2|_{AC} &= \frac{p_A - p_C}{5b}; & q_2|_{DB} &= \frac{p_D}{5b}; & q_4 &= \frac{p_C - p_D}{3b}. \end{aligned} \quad (a)$$

Условия взаимосвязи между элементами требуют непрерывности течения и, следовательно,

$$Q = q_1 + q_2, \quad q_2 \Big|_{AC} = q_3 + q_4; \quad q_2 \Big|_{DB} = q_3 + q_4. \quad (b)$$

Проведя подстановки из (а) в (b) и записывая получаемые уравнения в матричной форме, будем иметь

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -6 & 31 & -25 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_A \\ p_C \\ p_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10bQ \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

или

$$\begin{bmatrix} 9 & -6 & 0 \\ -6 & 31 & -25 \\ 0 & -25 & 31 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_A \\ p_C \\ p_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30bQ \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (c)$$

Анализ сети, состоящей из труб, завершается решением уравнений (с) относительно давлений p_A , p_C и p_D , после чего могут быть использованы соотношения, определяющие равновесие элементов по формулам (а), для нахождения распределения потоков.

Соотношения равновесных связей в (с) могут быть выведены также (как и в предшествующих примерах с пружинами и с теплопередачей) с помощью прямой процедуры жесткости. Пользуясь этой методикой, действуем затем так же, как и в примере 3.1, с типовыми соотношениями равновесия элементов

$$\frac{1}{R} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i \\ p_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_i \\ q_j \end{bmatrix},$$

где q_i , q_j — потоки жидкости, втекающей в соответствующий элемент, а p_i , p_j — давления на концах элементов.

Пример 3.4: Рассмотрим сеть постоянного тока, показанную на рис. 3.5. Сеть с показанными на схеме сопротивлениями подвергается вводу энергии постоянного напряжения E и $2E$ в точках A и B соответственно. Нам нужно определить стационарное распределение силы тока в сети.

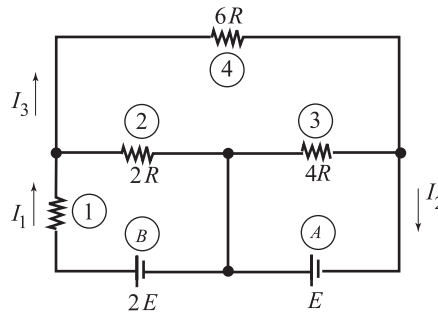


Рис. 3.5. Сеть постоянного тока

При этом анализе мы используем в качестве неизвестных переменных состояния величины силы тока I_1 , I_2 и I_3 . Элементами системы являются резисторы, а условия равновесия для каждого элемента получаются в результате применения закона Ома. Для резистора R , через который идет ток силой I , закон Ома имеет вид

$$\Delta E = RI,$$

где ΔE — перепад напряжения в резисторе.

Закон взаимосвязи между элементами, которому необходимо удовлетворить, — это закон Кирхгофа о напряжениях, записываемый для каждой из входящих в сеть замкнутых петель:

$$\begin{aligned} 2E &= 2RI_1 + 2R(I_1 - I_3), \\ E &= 4R(I_2 - I_3), \\ 0 &= 6RI_3 + 4R(I_3 - I_2) + 2R(I_3 - I_1). \end{aligned}$$

Если эти уравнения записать в матричной форме, то получим

$$\begin{bmatrix} 4R & 0 & -2R \\ 0 & 4R & -4R \\ -2R & -4R & 12R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2E \\ E \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (a)$$

Наш анализ завершается путем решения этих уравнений относительно I_1 , I_2 и I_3 . Заметим, что уравнения равновесия (a) могли бы быть выведены также и с помощью применения прямой процедуры жесткости, как это было в примерах 3.1, 3.2 и 3.3.

Необходимо еще раз отметить, что этапы исследования приведенных выше задач о конструкциях, о теплопередаче, о течении жидкости и об электричестве весьма сходны между собой, причем, вероятно, основная аналогия лучше всего выражается путем использования для решения каждой из этих задач прямой процедуры жесткости. Этот факт указывает на то, что одни и те же основные численные процедуры будут применимы при анализе почти каждой физической проблемы (см. главы 4 и 7).

В каждом из приводимых примеров мы имеем дело с линейной системой; это означает, что матрица коэффициентов линейна и, следовательно, если вынуждающие функции в правых частях умножаются на постоянную α , то реакция системы также увеличивается в α раз. В данной главе мы рассматриваем, в первую очередь, линейные системы, однако те же самые этапы решения, которые были описаны ранее, остаются применимыми и при нелинейном анализе, как это демонстрируется в нижеследующем примере (см. также главы 6 и 7).

Пример 3.5: Рассмотрим пружинно-катковую систему, изображенную на рис. 3.1, и предположим, что пружина 1 обнаруживает теперь нелинейное поведение, соответствующее схеме на рис. 3.6. Требуется обсудить, как должны быть в этих условиях модифицированы уравнения равновесия, приведенные в примере 3.1.

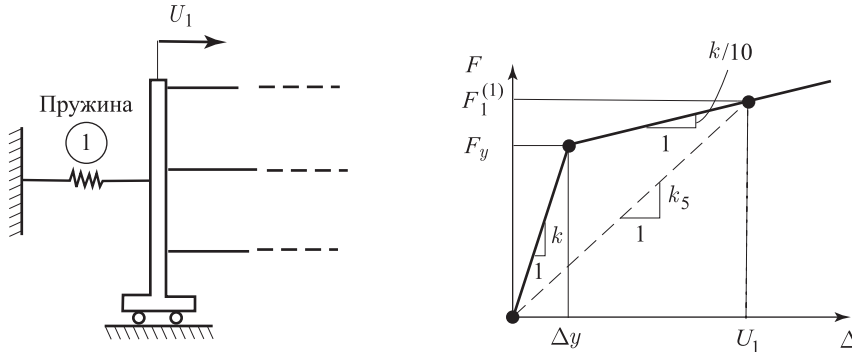


Рис. 3.6. Нелинейно-упругая пружина (1), принадлежащая показанной на рис. 3.1 пружинно-катковой системе

До тех пор, пока $U_1 \leq \Delta y$, уравнения равновесия из примера 3.1 остаются в силе при $k_1 = k$. Однако если нагрузки таковы, что $U_1 > \Delta y$, т.е. если $F_1^{(1)} > F_y$, то нам

необходимо использовать другое значение для k_1 , причем это значение зависит от силы $F_1^{(1)}$, действующей на данный элемент. Обозначая значение жесткости символом k_s , как показано на рис. 3.6, убеждаемся, что реакция системы при любой нагрузке описывается уравнениями равновесия

$$\mathbf{K}_s \mathbf{U} = \mathbf{R}, \quad (\text{a})$$

где матрица коэффициентов вводится точно так же, как и в примере 3.1, но только с использованием k_s вместо k_1 :

$$\mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} (k_s + k_2 + k_3 + k_4) & -(k_2 + k_3) & -k_4 \\ -(k_2 + k_3) & (k_2 + k_3 + k_5) & -k_5 \\ -k_4 & -k_5 & (k_4 + k_5) \end{bmatrix}. \quad (\text{b})$$

Несмотря на то, что реакция системы может быть рассчитана с использованием именно этого подхода, при котором матрицу \mathbf{K}_s называют секущей матрицей, в главе 6 мы увидим, что при проведении наиболее общего практического анализа используется, фактически, дифференциальная процедура с касательной матрицей жесткости.

Данные выше примеры демонстрируют общую процедуру анализа в следующей последовательности: выбор неизвестных переменных состояния, характеризующих реакцию рассматриваемой системы, идентификация тех элементов, совокупность которых составляет систему в целом, определение условий равновесия элемента и, наконец, объединение элементов путем привлечения условий межэлементной непрерывности.

Здесь следует сделать несколько замечаний. Во-первых, необходимо признать, что при определении переменных состояния имеется некоторая возможность выбора. Например, при анализе системы с катками в примере 3.1 мы могли бы выбрать в качестве переменных состояния неизвестные силы в пружинах. Второе замечание состоит в том, что уравнения, служащие для вычисления переменных состояния, могут быть как линейными, так и нелинейными, а матрица коэффициентов может иметь самую общую природу. Однако желательнее всего иметь дело с симметричной, положительно определенной матрицей коэффициентов, потому что именно в таких условиях численное решение полученных уравнений оказывается весьма эффективным (см. раздел 8.2).

В общем случае именно физические характеристики задачи предопределяют, может ли действительно численное решение быть представлено в такой форме, которая приводит к симметричной, положительно определенной матрице коэффициентов. Однако даже если это возможно, то положительно определенная матрица коэффициентов получится только при надлежащем выборе искомых переменных, а в случае нелинейного анализа при построении итерационного решения необходимо выполнять надлежащую линеаризацию. По этой причине на практике оказывается целесообразным использовать самые общие формулировки для целых классов задач (как например, конструкционный анализ, теплопередача, и т. д., — см. разделы 4.2, 7.2 и 7.3), притом такие, которые при анализе любого типа приводят к симметричной, положительно определенной матрице коэффициентов.

При вышеизложенном обсуждении мы использовали прямой подход к формулировке уравнений, определяющих равновесие системы. Важно отметить, что при многих вариантах исследования уравнения, определяющие равновесие в переменных состоянии, могут быть получены также и с использованием экстремальной, или вариационной модели. *Экстремальная проблема состоит в том, чтобы определить такой комплект (или комплекты) значений (переменных состояния) U_i , $i = 1, \dots, n$, для которого заданный функционал $\Pi(U_1, \dots, U_n)$ имеет максимум или*

минимум, или же седловую точку. Условие получения уравнений для переменных состояния имеет вид

$$\delta\Pi = 0, \quad (3.1)$$

а поскольку

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial U_1} \delta U_1 + \dots + \frac{\partial\Pi}{\partial U_n} \delta U_n, \quad (3.2)$$

то мы должны получить

$$\frac{\partial\Pi}{\partial U_i} = 0 \quad \text{для } i = 1, \dots, n. \quad (3.3)$$

Заметим, что символы δU_i означают «вариации переменных состояния, являющиеся произвольными во всем, кроме того, что при граничных условиях для переменных состояния они должны обращаться в нуль и соответствовать этим условиям»¹⁾. Вторые производные Π по переменным состояния будут после этого определять собой, соответствует ли решение максимуму, минимуму или седловой точке. При решении задач для обобщенно-параметрических моделей можно полагать, что функционал Π определен так, что выражения (3.3) позволяют получить уравнения, определяющие собой равновесие²⁾. Например, при линейном анализе конструкций, когда в качестве переменных состояния используются смещения, функционал Π представляет собой полный потенциал (или полную потенциальную энергию)

$$\Pi = \mathcal{U} - \mathcal{W}, \quad (3.4)$$

где \mathcal{U} — это энергия деформаций системы, а \mathcal{W} — полный потенциал нагрузок. В этом случае решение для переменных состояния соответствует минимуму Π .

Пример 3.6: Рассмотрим простую пружину жесткости k , с приложенной к ней нагрузкой P , и обсудим возможность применения к такой системе условий (3.1) и (3.4).

Пусть u есть смещение пружины под воздействием нагрузки P . Тогда получим

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} k u^2; \quad \mathcal{W} = P u$$

и

$$\Pi = \frac{1}{2} k u^2 - P u.$$

Отметим, что при заданном P мы могли бы построить график Π как функции u . Пользуясь условием (3.1) и тем, что единственной переменной является u , получим

$$\delta\Pi = (k u - P) \delta u; \quad \frac{\partial\Pi}{\partial u} = k u - P,$$

а это приводит к уравнению равновесия

$$k u = P. \quad (a)$$

Пользуясь уравнением (a) для вычисления \mathcal{W} , получим в условиях равновесия $\mathcal{W} = k u^2$, т.е. $\mathcal{W} = 2\mathcal{U}$ и $\Pi = -\frac{1}{2} k u^2 = -\frac{1}{2} P u$. Кроме того, $\partial^2\Pi/\partial u^2 = k$ и, следовательно, при равновесии функционал Π имеет минимум.

Пример 3.7: Проведем анализ системы жестких катков из примера 3.1. Требуется определить функционал Π и с помощью условия (3.1) получить уравнения, определяющие равновесие.

¹⁾ Более точно, вариации переменных состояния должны быть равны нулю при u в соответствии с наиболее важными граничными условиями, как это будет подробнее обсуждаться в разделе 3.3.2.

²⁾ Идя этим путем, мы рассматриваем специальную вариационную модель, как это более детально обсуждается в главах 4 и 7.

Пользуясь обозначениями, введенными в примере 3.1, получим

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (\text{a})$$

и

$$\mathcal{W} = \mathbf{U}^T \mathbf{R}, \quad (\text{b})$$

где следует отметить, что полная энергия деформаций, выражаемая формулой (a), может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \left(\sum_{i=1}^5 \mathbf{K}^{(i)} \right) \mathbf{U} = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K}^{(1)} \mathbf{U} + \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K}^{(2)} \mathbf{U} + \dots + \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K}^{(5)} \mathbf{U} = \\ &= \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \dots + \mathcal{U}_5, \end{aligned}$$

где \mathcal{U}_i — энергия деформаций, запасенная в i -м элементе.

Теперь, используя формулы (a) и (b), получим

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \mathbf{R}. \quad (\text{c})$$

Применение формулы (3.1) дает

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{R}.$$

Разрешая это соотношение относительно \mathbf{U} и подставляя результат в формулу (c), мы найдем, что функционал Π , соответствующий смещениям при равновесии системы, имеет вид

$$\Pi = -\frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{R}.$$

Использование вариационного подхода, а также подхода с непосредственным решением, приводит к одним и тем же уравнениям равновесия, а в этой связи может возникнуть вопрос — каковы же преимущества вариационной схемы? Предположим, что функционал Π , соответствующий рассматриваемой проблеме, уже определен. Тогда уравнения равновесия могут быть получены путем простого сложения вкладов в Π ото всех элементов и привлечения в (3.1) условия стационарности. По существу, это условие автоматически приводит к выводу условий взаимосвязи между элементами. Следовательно, вариационный подход может оказаться весьма эффективным, так как уравнения, определяющие равновесие системы, могут быть получены «абсолютно механически». Преимущества вариационного подхода оказываются еще более ярко выраженными, если мы рассматриваем численное решение континуальной системы (см. раздел 3.3.2). Однако главный недостаток вариационного подхода состоит в том, что, вообще говоря, при этом подходе слабее ощущается проникновение в физический смысл формулировки проблемы, нежели при применении прямого подхода. Поэтому физическая интерпретация уравнений равновесия системы может иметь критическое значение, если эти уравнения получены с помощью вариационного подхода. Такая интерпретация важна для оценки возможных ошибок решения и для получения более полного представления о физическом смысле уравнений.

3.2.2. Задачи о распространении

Важнейшей характеристикой задачи о распространении, или динамической задачи, является тот факт, что реакция рассматриваемой системы изменяется во времени. В принципе, для анализа такой системы применяются те же процедуры, что и для анализа стационарной задачи, однако теперь переменные состояния и уравнения равновесия элементов зависят от времени. Целью анализа является вычисление переменных состояния для любого момента времени t .

Прежде чем обсуждать конкретные задачи о распространении, рассмотрим случай, когда влияние времени на форму уравнений равновесия элементов пренебрежимо мало, однако вектор нагрузки является функцией времени. В этом случае реакция системы определяется с помощью уравнений, соответствующих стационарному случаю, но с подстановкой зависящей от времени нагрузки или вынуждающей силы взамен того вектора нагрузки, который применялся при стационарном анализе. По существу, такой анализ остается стационарным, но со стационарными условиями, рассматриваемыми для любого момента времени t , и на этом основании проводимый анализ может называться псевдостационарным.

В случае реальной задачи о распространении уравнения равновесия элементов содержат зависимость от времени, и именно этим объясняются важнейшие отличия характеристик реакции, если их сравнивать с характеристиками стационарных задач. В дальнейшем мы приведем два примера, в которых демонстрируются уравнения, определяющие равновесие для задач о распространении. Методы численного решения этих уравнений предлагаются в главе 9.

Пример 3.8: Рассмотрим систему из жестких катков, которую мы рассматривали в примере 3.1. Предположим, что нагрузки зависят от времени и выведем уравнения, определяющие динамическую реакцию системы.

Для проведения анализа предположим, что пружины не обладают массой, и что катки имеют массы m_1 , m_2 и m_3 (что будет эквивалентно сосредоточению распределенной массы каждой из пружин на двух ее концах). После этого, используя информацию, приведенную в примере 3.1 и принимая принцип Даламбера, получим уравнения, определяющие условия взаимосвязи элементов:

$$\begin{aligned} F_1^{(1)} + F_1^{(2)} + F_1^{(3)} + F_1^{(4)} &= R_1(t) - m_1 \ddot{U}_1, \\ F_2^{(2)} + F_2^{(3)} + F_2^{(5)} &= R_2(t) - m_2 \ddot{U}_2, \\ F_3^{(4)} + F_3^{(5)} &= R_3(t) - m_3 \ddot{U}_3, \end{aligned}$$

где

$$\ddot{U}_i = \frac{d^2 U_i}{dt^2}; \quad i = 1, 2, 3.$$

В результате в качестве уравнений, определяющих равновесие системы, получим

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{R}(t), \quad (\text{a})$$

где \mathbf{K} , \mathbf{U} и \mathbf{R} были определены в примере 3.1, а \mathbf{M} представляет собой матрицу масс системы:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}.$$

Уравнения равновесия (а) представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка по времени. Для решения этих уравнений необходимо задать также начальные условия для \mathbf{U} и $\dot{\mathbf{U}}$, т. е. нужно иметь ${}^0\mathbf{U}$ и ${}^0\dot{\mathbf{U}}$, где

$${}^0\mathbf{U} = \mathbf{U}|_{t=0}; \quad {}^0\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{U}}|_{t=0}.$$

Ранее мы уже упоминали о том случае, когда проводится анализ псевдостационарной задачи. Если рассматривать реакцию системы катков, то подобный анализ подразумевает, что нагрузки изменяются очень медленно и, следовательно, эффектами масс можно пренебречь. Поэтому для определения псевдостационарной реакции фигурирующие в примере 3.8 уравнения равновесия (а) должны решаться при $\mathbf{M} = 0$.

Пример 3.9: На рис. 3.7 демонстрируется идеализированная схема задачи о нестационарной теплопередаче в электронной трубке. Под воздействием электрического тока

нить нагревается до температуры θ_f ; тепло передается путем конвекции от нити окружающему ее газу и, путем излучения, — стенке, которая получает также тепло от газа через механизм конвекции. Сама стенка передает тепло также конвекцией в окружающую атмосферу, находящуюся при температуре θ_a . Требуется сформулировать уравнения, определяющие равновесие тепловых потоков в системе.

При этом анализе мы выбираем в качестве неизвестных переменных состояния температуру газа θ_1 и температуру стенки θ_2 .

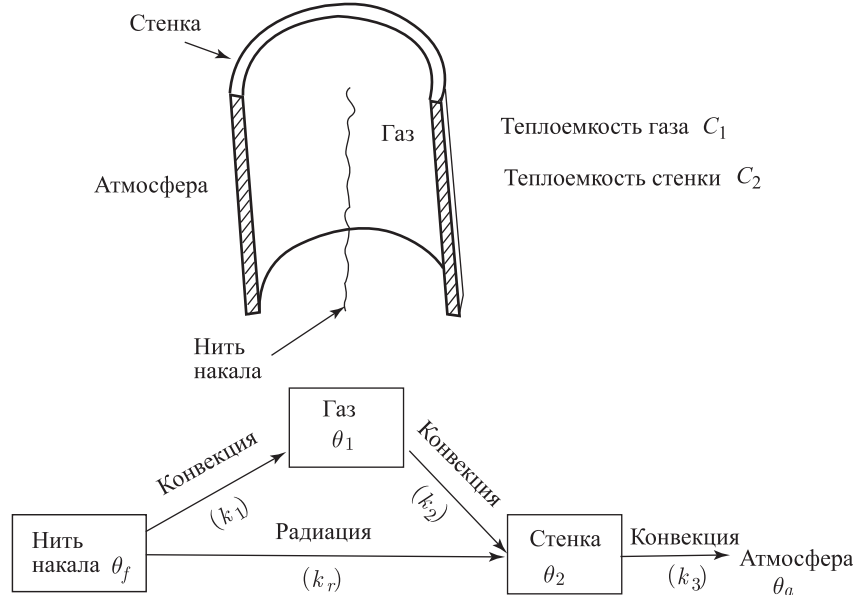


Рис. 3.7. Идеализированная схема теплопередачи в электронной трубке

Уравнения равновесия системы выводятся путем обращения к условиям равновесия тепловых потоков для газа и стенки. Используя приводимые на рис. 3.7 коэффициенты теплопередачи, получим для газа

$$C_1 \frac{d\theta_1}{dt} = k_1(\theta_f - \theta_1) - k_2(\theta_1 - \theta_2),$$

а для стенки

$$C_2 \frac{d\theta_2}{dt} = k_r((\theta_f)^4 - (\theta_2)^4) + k_2(\theta_1 - \theta_2) - k_3(\theta_2 - \theta_a).$$

Эти два уравнения могут быть представлены в матричной форме, как

$$\mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{Q}, \quad (\text{a})$$

где

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q} = [k_1((\theta_f)^4 - (\theta_2)^4) + k_3\theta_a].$$

Отметим, что вследствие введения радиационного граничного условия уравнения равновесия тепловых потоков оказываются нелинейными по $\boldsymbol{\theta}$. Здесь этот член с радиацией был включен в вектор теплового потока \mathbf{Q} . Решение полученных уравнений может быть выполнено так, как это описано в разделе 9.6.

Несмотря на то, что в приведенных выше примерах были рассмотрены весьма специфические случаи, эти примеры в самом общем виде проиллюстрировали, как формулируются, с целью последующего анализа, задачи о распространении в дискретных системах. По существу, здесь применяются те же самые процедуры, что и при анализе стационарных задач, однако при этом вводятся «зависящие от времени нагрузки», которые представляют собой результат «сопротивления по отношению к изменениям» отдельных элементов, а значит, и системы в целом. Это сопротивление по отношению к изменениям, или *инерция* системы, должно быть принято во внимание при проведении динамического анализа.

Если основываться на высказанных выше аргументах и наблюдениях, то, как это кажется, можно прийти к выводу о том, что анализ задачи о распространении представляет собой весьма простое обобщение анализа соответствующей стационарной задачи. Однако при проведении вышеизложенного обсуждения предполагалось, что нам задана дискретная система и, следовательно, степени свободы или переменные состояния могут идентифицироваться самым непосредственным образом. На практике выбор надлежащей дискретной системы, которая обладала бы всеми важными характеристиками реальной физической системы, обычно не так уж прост, и в общем случае для предсказания динамической реакции должна выбираться дискретная модель, отличная от той, которая выбиралась для стационарного анализа. Однако проведенное обсуждение свидетельствует о том, что коль скоро для решения задачи о распространении была выбрана дискретная модель, то и формулировка уравнений, определяющих равновесие, может проводиться почти так же, как и при анализе стационарной реакции, если не считать того, что в дополнение ко внешним нагрузкам, действующим на систему, здесь вводятся инерционные нагрузки (см. раздел 4.2.1). Это наблюдение приводит к тому, что, как мы ожидаем, процедуры для решения динамических уравнений равновесия систем в значительной степени базируются на методике, применяющейся при решении стационарных уравнений равновесия (см. раздел 9.2).

3.2.3. Задачи о собственных значениях

Ранее, при рассмотрении стационарных задач и задач о распространении, мы подразумевали существование единственного решения для определения реакции системы. Главная характерная особенность задачи о собственных значениях состоит в том, что не существует единственного решения, определяющего реакцию системы, а цель анализа сводится к расчету различных возможных решений. Задачи о собственных значениях возникают как при стационарном, так и при динамическом анализе.

При инженерном анализе можно сформулировать разнообразные задачи о собственных значениях. В этой книге мы будем в первую очередь заниматься обобщенной задачей о собственных значениях, представляемой в форме

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{B}\mathbf{v}, \quad (3.5)$$

где \mathbf{A} и \mathbf{B} — симметричные матрицы, λ — скаляр, а \mathbf{v} — вектор. Если λ_i и \mathbf{v}_i удовлетворяют уравнению (3.5), то они называются, соответственно, собственным значением и собственным вектором.

При стационарном анализе задача о собственных значениях вида (3.5) формулируется тогда, когда возникает необходимость исследовать физическую устойчивость рассматриваемой системы. Вопрос, который задается и который приводит к задаче о собственных значениях, формулируется так: *если предположить, что стационарное решение для данной системы известно, то существует ли другое решение, к которому система может прийти путем бифуркации, будучи*

подвергнута малому возмущению по отношению к положению равновесия? Ответ на этот вопрос зависит от того, какая именно система рассматривается и какие нагрузки действуют на эту систему. Желая продемонстрировать основную идею, рассмотрим очень простой пример.

Пример 3.10: Рассмотрим простую консоль, показанную на рис. 3.8. Конструкция состоит из спиральной пружины и жесткого рычажного стержня. Требуется предсказать реакцию конструкции на показанные на рисунке варианты приложенной нагрузки.

Сначала мы рассмотрим только стационарную реакцию, следуя методике, обсужденной в разделе 3.2.1. Если учесть, что стержень жесткий, то консоль представляет собой систему с одной степенью свободы, и в качестве переменной состояния будет принята величина Δ_v .

При варианте нагрузки I на стержень действует продольная растягивающая сила P и момент, действующий на пружину, равен нулю. Постольку, поскольку стержень — жесткий, то мы имеем

$$\Delta_v = 0. \quad (a)$$

Рассмотрим далее вариант нагрузки II. Предполагая смещения малыми, в этом случае будем иметь

$$\Delta_v = \frac{PL^2}{k}. \quad (b)$$

Наконец, для варианта нагрузки III мы имеем, как и для варианта I,

$$\Delta_v = 0. \quad (c)$$

Теперь мы попытаемся определить, будет ли система устойчивой под воздействием любого из указанных вариантов нагрузки. Чтобы исследовать устойчивость, мы даем конструкции возмущение по отношению к положению равновесия, определяемому согласно (a), (b) или (c), и задаемся вопросом, будет ли возможным какое-то еще положение равновесия.

Предположим, что при вариантах нагрузки I и II величина Δ_v является положительной но малой. Если записать уравнения равновесия с учетом этого смещения, то мы заметим, что при варианте нагрузки I малая и отличная от нуля величина Δ_v поддерживаться не может, а при варианте нагрузки II влияние вводимой в анализ величины Δ_v пренебрежимо мало.

Теперь рассмотрим случай $\Delta_v > 0$ при варианте нагрузки III. Чтобы равновесная конфигурация оказалась возможной в этом случае, должно удовлетворяться следующее уравнение равновесия:

$$P\Delta_v = k\frac{\Delta_v}{L}.$$

Однако если $P = k/L$, то это уравнение будет удовлетворяться при любом Δ_v . Следовательно, та критическая нагрузка P_{crit} , при которой становится возможным положение равновесия, отличное от горизонтального, равна $P_{\text{crit}} = k/L$. Подводя итог, можно указать на следующие условия:

$P < P_{\text{crit}}$	возможно только горизонтальное положение стержня; равновесие устойчиво
$P = P_{\text{crit}}$	возможно и горизонтальное, и наклонное положение равновесия; при $P \geq P_{\text{crit}}$ горизонтальное положение равновесия неустойчиво.

Чтобы добиться лучшего понимания полученных результатов, можно предположить, что в дополнение к показанной на рис. 3.8 (б) нагрузке P к конструкции приложена малая поперечная нагрузка W , как это показано на рис. 3.8 г. Тогда, если провести анализ консольной модели, подвергаемой воздействию нагрузок P и W , то получатся кривые реакции, схематически демонстрируемые на рис. 3.8 д. Так, мы наблюдаем,

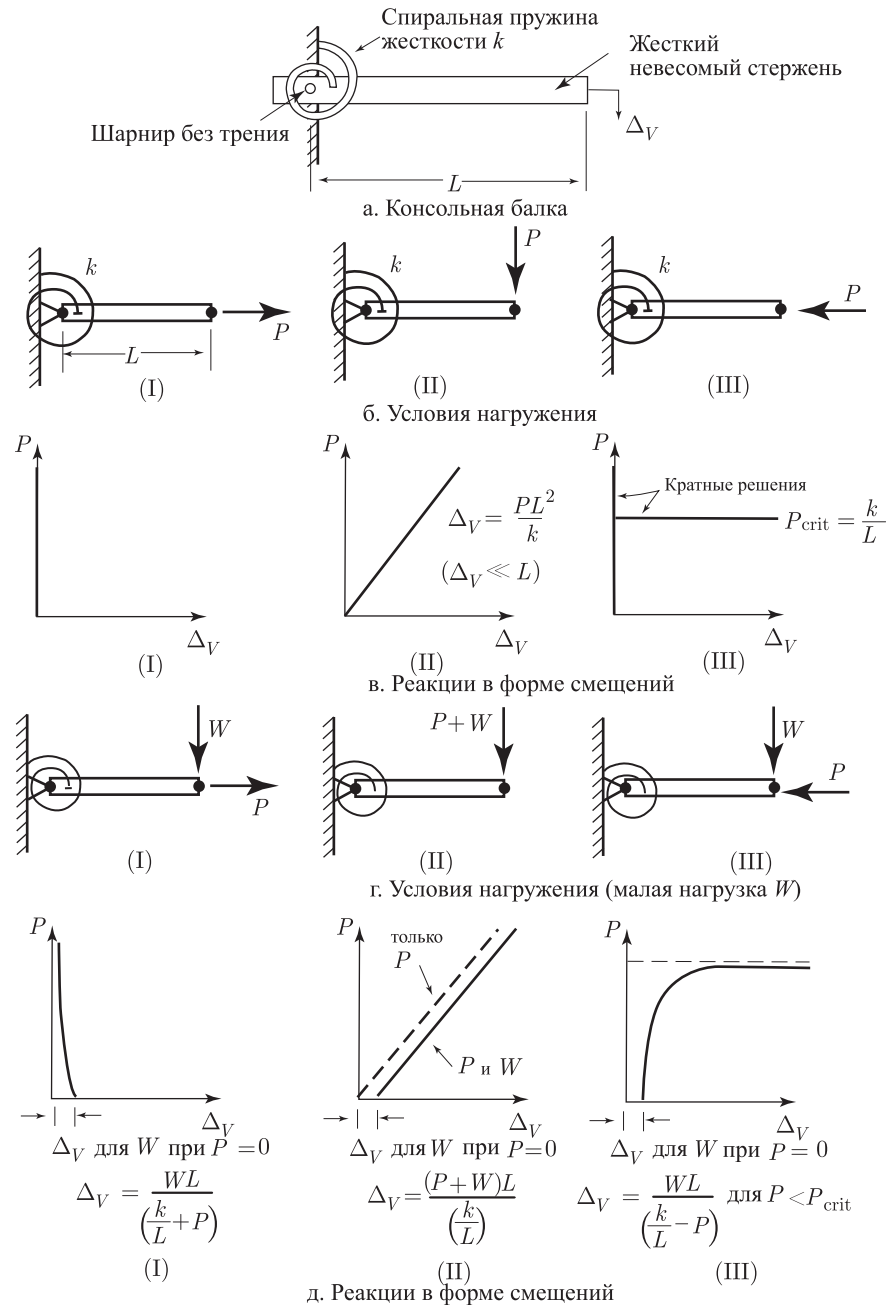


Рис. 3.8. Анализ для модели в форме простой консоли

что при вариантах нагрузки I и II влияние нагрузки W уменьшается, или остается постоянным по мере увеличения P , однако при варианте нагрузки III поперечное смещение Δ_v очень быстро возрастает по мере приближения P к критическому значению P_{crit} .

Аналитические выкладки, приводимые в примере 3.10, иллюстрируют основную цель формулировки задачи о собственных значениях в сочетании с анализом устойчивости. Эта цель состоит в определении того, будут ли малые возмущения по отношению к заданной равновесной конфигурации иметь тенденцию к существовавшему возрастанию. Уровень нагрузки, при котором возникает эта ситуация, соответствует критической нагрузке для исследуемой системы. Второе решение, приводимое в примере 3.10, соответствует случаю малого возмущения под воздействием малой нагрузки W , которое может, например, моделировать возможность того, что приложенная к консоли горизонтальная нагрузка будет действовать не вполне горизонтально. При решении задачи о собственных значениях мы просто допускаем возникновение деформированной конфигурации и исследуем, существует ли такой уровень нагрузки, который действительно допускал бы такую конфигурацию в качестве возможного равновесного решения. Как мы увидим при рассмотрении материала раздела 6.8.2, решение задачи о собственных значениях фактически состоит в линеаризации нелинейной реакции системы и в значительной мере зависит от того, какова расчетная критическая нагрузка. Задачи о собственных значениях особенно часто встречаются при исследовании поведения стержней, пластин, оболочек и других конструкций типа стержня или стойки.

Пример 3.11: Как показывает опыт, при анализе конструкции типа стойки критическая нагрузка может быть должным образом определена путем формулировки задачи о собственных значениях. Рассмотрим систему, изображенную на рис. 3.9. Требуется сформулировать для нее задачу о собственных значениях, с помощью которой можно было бы рассчитать критическую нагрузку для данной системы.

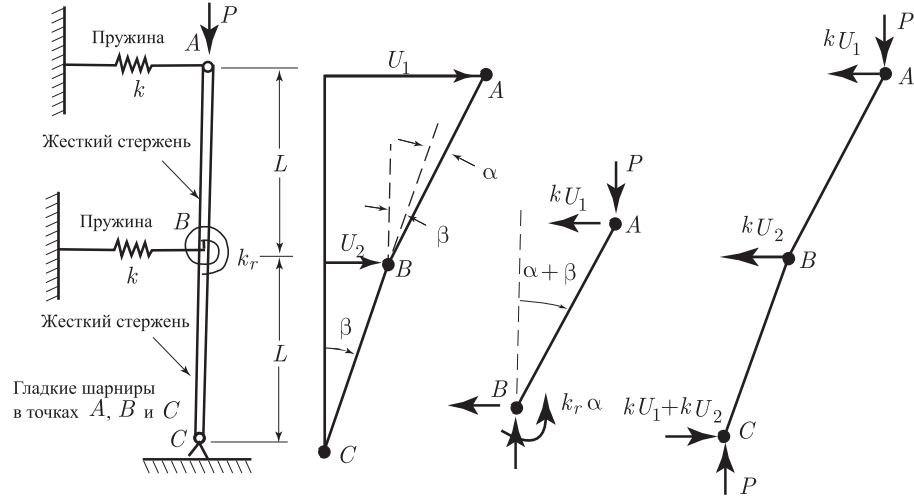


Рис. 3.9. Анализ неустойчивости стойки

Как это было и при выводе стационарных уравнений равновесия (см. раздел 3.2.1), для получения уравнений, определяющих решение задачи, можно воспользоваться либо прямой процедурой, либо вариационным подходом, и мы опишем обе эти версии применительно к решению данной задачи.

При прямом подходе уравнения, определяющие собой равновесие, выводятся непосредственно, путем рассмотрения равновесия конструкции в ее деформированной конфигурации. Обращаясь к рис. 3.9, видим, что равновесие моментов для стержня AB будет соблюдено, если

$$PL \sin(\alpha + \beta) = kU_1 L \cos(\alpha + \beta) + k_r \alpha. \quad (a)$$

Аналогично этому, для стержней CBA нужно соблюсти условие

$$PL[\sin(\alpha + \beta) + \sin \beta] = kU_1 L[\cos(\alpha + \beta) + \cos \beta] + kU_2 L \cos \beta. \quad (b)$$

Смещения U_1 и U_2 выбираются в качестве переменных состояния, полностью описывающих реакцию конструкции. Кроме того, будем считать смещения малыми, и в этом случае

$$\begin{aligned} L \sin(\alpha + \beta) &= U_1 - U_2; & L \sin \beta &= U_2; \\ L \cos(\alpha + \beta) &\doteq L; & L \cos \beta &\doteq L; & \alpha &\doteq \frac{U_1 - 2U_2}{L}. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в уравнения (а) и (b) и записывая результирующие уравнения в матричной форме, получим

$$\begin{bmatrix} kL + \frac{K_r}{L} & -2\frac{k_r}{L} \\ 2kL & kL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}.$$

Матрицы коэффициентов могут быть приведены к симметричной форме путем умножения первой строки на -2 и прибавления результата ко второй строке, а это дает представление задачи о собственных значениях в виде

$$\begin{bmatrix} kL + \frac{k_r}{L} & -\frac{2k_r}{L} \\ -\frac{2k_r}{L} & kL + \frac{4k_r}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}. \quad (c)$$

Отметим, что второе уравнение системы (с) может быть получено также путем рассмотрения равновесия стержня CB методом моментов.

Если воспользоваться теперь вариационным подходом, то нужно определить полный потенциал системы Π в деформированной конфигурации. В данном случае имеем

$$\Pi = \frac{1}{2} kU_1^2 + \frac{1}{2} kU_2^2 + \frac{1}{2} k_r \alpha^2 - PL[1 - \cos(\alpha + \beta) + 1 - \cos \beta]. \quad (d)$$

Как и при прямом подходе, примем теперь условия малости смещений. Учитывая, что пользуясь уравнением (3.1), мы хотели бы получить задачу о собственных значениях в форме (3.5), где матрицы коэффициентов не зависят от переменных состояния, аппроксимируем тригонометрические выражения в представлении переменных состояния вплоть до членов второго порядка малости. Таким образом, воспользуемся приближенными представлениями

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &\doteq 1 - \frac{(\alpha + \beta)^2}{2}, \\ \cos \beta &\doteq 1 - \frac{\beta^2}{2} \end{aligned} \quad (e)$$

и

$$\alpha + \beta \doteq \frac{U_1 - U_2}{L}; \quad \alpha \doteq \frac{U_1 - 2U_2}{L}; \quad \beta \doteq \frac{U_2}{L}. \quad (f)$$

После подстановки выражений (е) и (f) в уравнение (d) получим

$$\Pi = \frac{1}{2} kU_1^2 + \frac{1}{2} kU_2^2 + \frac{1}{2} k_r \left(\frac{U_1 - 2U_2}{L} \right)^2 - \frac{P}{2L} (U_1 - U_2)^2 - \frac{P}{2L} U_2^2.$$

При использовании принципа стационарности имеем

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U_1} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial U_2} = 0$$

и получим уравнения (с).

Если перейти теперь к динамическому анализу, то, весьма возможно, задачу о собственных значениях необходимо будет сочетать с решением уравнений динамического равновесия. При этом, по существу, будет поставлена цель — найти такое математическое преобразование переменных состояния, которое могло бы быть применено для нахождения динамической реакции (см. раздел 9.3).

Чтобы продемонстрировать, как формулируются задачи о собственных значениях при динамическом анализе, мы предлагаем рассмотреть нижеследующие примеры.

Пример 3.12: Рассмотрим динамический анализ системы из жестких катков, описанной в примере 3.8. Допустим, что соблюдаются условия свободных колебаний и что

$$\mathbf{U} = \phi \sin(\omega t - \psi), \quad (\text{a})$$

где ϕ — вектор с компонентами, не зависящими от времени, ω — круговая частота, а ψ — фазовый угол. Требуется показать, что при поиске решения относительно ϕ и ψ с принятием этого допущения получается задача о собственных значениях, сформулированная в виде (3.5).

Уравнения равновесия системы при соблюдении условий свободных колебаний имеют вид

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = 0, \quad (\text{b})$$

где матрицы \mathbf{M} и \mathbf{K} , а также вектор \mathbf{U} , были определены в примерах 3.1 и 3.8. Если вектор \mathbf{U} , заданный в форме (а), должен быть решением уравнения (b), то эти уравнения должны удовлетворяться после подстановки в них выражения для \mathbf{U} , что дает

$$-\omega^2 \mathbf{M}\phi \sin(\omega t - \psi) + \mathbf{K}\phi \sin(\omega t - \psi) = 0.$$

Следовательно, для того, чтобы выражение (а) было решением уравнений (b), мы получаем условие

$$\mathbf{K}\phi = \omega^2 \mathbf{M}\phi, \quad (\text{c})$$

которое и представляет собой задачу о собственных значениях вида (3.5). В разделе 9.3 обсуждаются физические характеристики решения в терминах ω_i^2 и ϕ_i , соответствующие задаче (c).

Пример 3.13: Рассмотрим электрическую цепь, показанную на рис. 3.10. Требуется сформулировать задачу о собственных значениях, с помощью которой можно было бы рассчитать резонансные частоты и амплитуды, если положить $L_1 = L_2 = L$ и $C_1 = C_2 = C$.

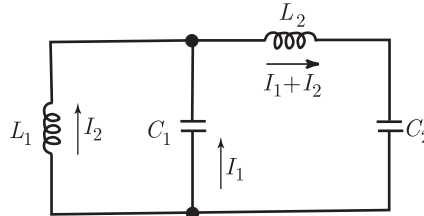


Рис. 3.10. Электрическая схема

Наша первая цель состоит в том, чтобы вывести уравнения динамического равновесия системы. В применении к индуктору уравнение равновесия элемента имеет вид

$$L \frac{dI}{dt} = V, \quad (\text{a})$$

где L — индуктивность, I — сила тока в индукторе, V — перепад напряжения на концах индуктора. Для конденсатора емкости C уравнение равновесия записывается в форме

$$I = C \frac{dV}{dt}. \quad (\text{b})$$

В качестве переменных состояния выбираются силы тока I_1 и I_2 , указанные на рис. 3.10. Уравнения, определяющие равновесие, выводятся путем привлечения требований взаимосвязи между элементами, выражаемых законом Кирхгофа для напряжений

$$V_{C1} + V_{L2} + V_{C2} = 0,$$

$$V_{L_1} + V_{L_2} + V_{C_2} = 0. \quad (c)$$

Если продифференцировать по времени соотношения (a) и (c), а затем подставить в (c) при $L_1 = L_2 = L$ и $C_1 = C_2 = C$, то получим

$$L \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{I}_1 \\ \ddot{I}_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{C} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (d)$$

Отметим, что эти уравнения вполне аналогичны уравнениям равновесия механической системы со свободными колебаниями. Действительно, если принять во внимание аналогию

$$I \rightarrow \text{смещение}; \quad \frac{1}{C} \rightarrow \text{жесткость}; \quad L \rightarrow \text{масса},$$

то задача о собственных значениях для резонансных частот формулируется так же, как в примере 3.12 (и при этом может быть построена эквивалентная механическая система).

3.2.4. О природе решений

В предшествующих разделах мы обсудили формулировки стационарных задач, задач о распространении и задач о собственных значениях, приведя при этом некоторое число простых примеров. Во всех этих случаях система уравнений для неизвестных переменных состояния была представлена, но не решалась. По вопросу о решении указанных уравнений отсылаем читателя к методам, представленным в главах 8–11. В данном разделе мы ставим своей целью краткое обсуждение природы решений, получаемых при рассмотрении трех перечисленных выше классов задач.

Для стационарных задач и задач о распространении удобно делать различие между линейными и нелинейными задачами. В упрощенном представлении линейная задача характеризуется тем фактом, что реакция системы изменяется пропорционально величине приложенной нагрузки. Все другие задачи являются нелинейными, и это более подробно обсуждается в разделе 6.1. Желая дать вводную демонстрацию некоторых важнейших характеристик, определяемых при решении стационарных задач, задач о распространении и задач о собственных значениях, рассмотрим следующий пример.

Пример 3.14: Рассмотрим простую задачу о конструкции, представляющей собой соединение жестких невесомых стержней, пружин и сосредоточенных масс, показанное на рис. 3.11. Элементы соединяются в точках A , B и C с помощью абсолютно гладких штифтов. Требуется исследовать данную дискретную систему при указанных на рисунке нагрузках, если начальные смещения и скорости равны нулю.

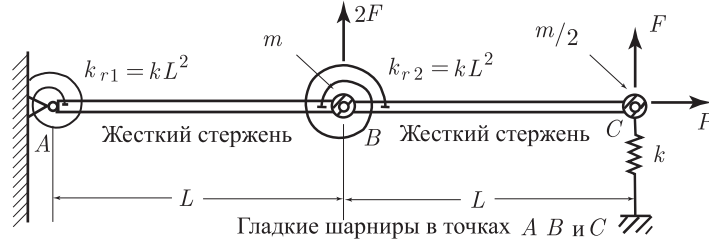
Реакция системы описывается двумя переменными состояниями, U_1 и U_2 , показанными на рис. 3.11 в. Чтобы решить, какой именно вид анализа будет здесь наиболее подходящим, нужно иметь достаточно полную информацию о характерных особенностях конструкции, а также о приложенных к ней силах F и P . Предположим, что характеристики конструкции и приложенных к ней сил таковы, что смещения в данном комплексе элементов сравнительно малы,

$$\frac{U_1}{L} < \frac{1}{10} \quad \text{и} \quad \frac{U_2}{L} < \frac{1}{10}.$$

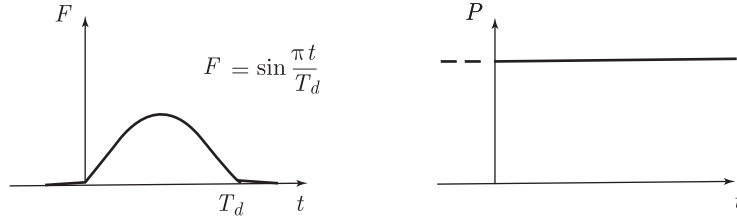
Теперь можно предположить, что

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos \beta = \cos(\beta - \alpha) = 1, \\ \sin \alpha &= \alpha; \quad \sin \beta = \beta; \\ \alpha &= \frac{U_1}{L}; \quad \beta = \frac{U_2 - U_1}{L}. \end{aligned} \quad (a)$$

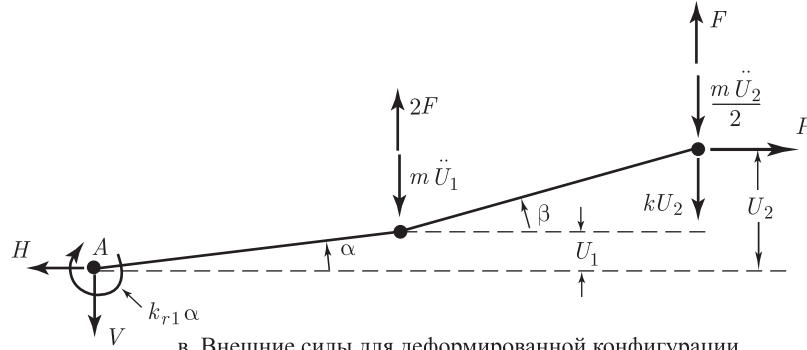
Уравнения, определяющие собой равновесие, выводятся так же, как и в примере 3.11, но здесь мы включаем силы инерции (см. пример 3.8); таким образом получим



а. Дискретная система



б. Условия нагружения



в. Внешние силы для деформированной конфигурации

Рис. 3.11. Система с двумя степенями свободы

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{m}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U}_1 \\ \ddot{U}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(5k + \frac{2P}{L}\right) & -\left(2k + \frac{P}{L}\right) \\ -\left(2k + \frac{P}{L}\right) & \left(2k + \frac{P}{L}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2F \\ F \end{bmatrix}. \quad (b)$$

Реакция системы должна зависеть от относительных величин параметров k , m и P/L . Желая получить критерий того, должен ли быть применен статический анализ или динамический, нам следует рассчитать естественные частоты системы. Эти частоты определяются путем решения задачи о собственных значениях

$$\begin{bmatrix} \left(5k + \frac{2P}{L}\right) & -\left(2k + \frac{P}{L}\right) \\ -\left(2k + \frac{P}{L}\right) & \left(2k + \frac{P}{L}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{m}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}. \quad (c)$$

Решение уравнений (с) дает

$$\omega_1 = \left(\frac{9k}{2m} + \frac{2P}{mL} - \sqrt{\frac{33k^2}{4m^2} + \frac{8Pk}{m^2L} + \frac{2P^2}{m^2L^2}} \right)^{1/2}$$

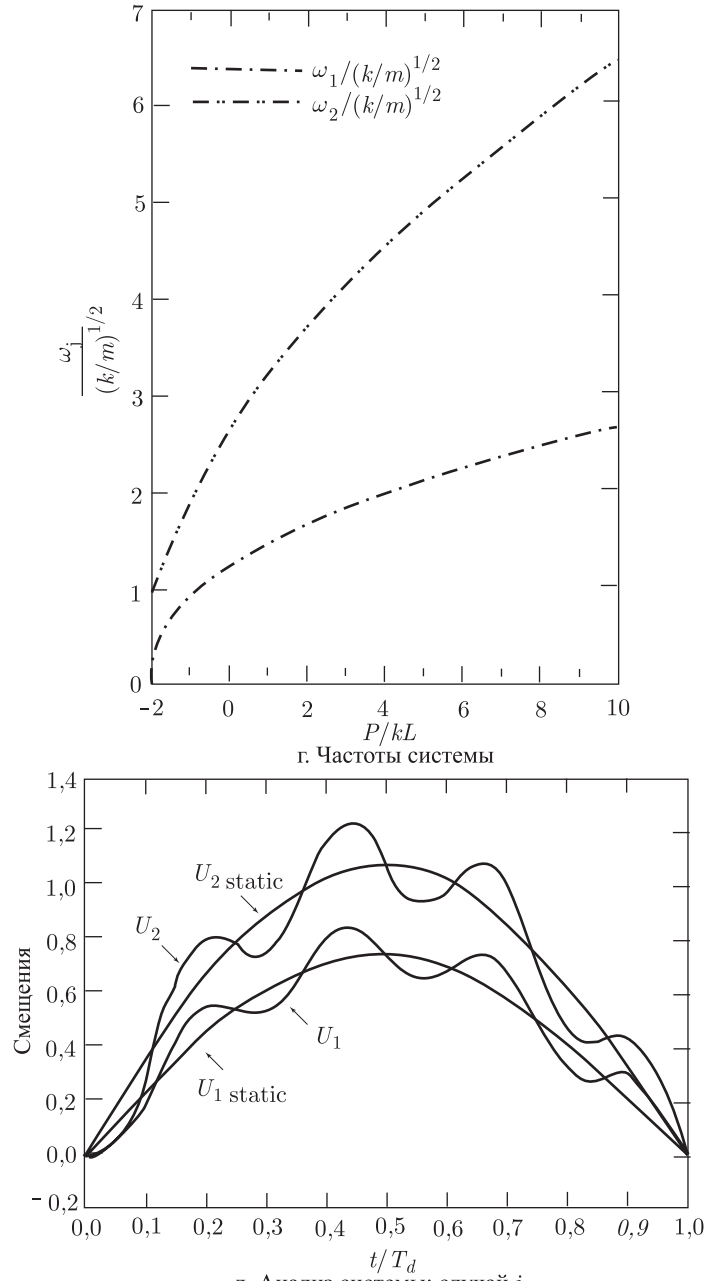
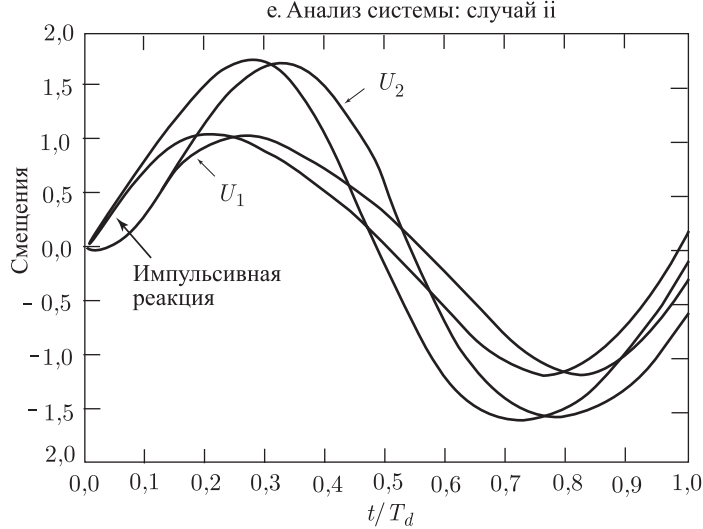
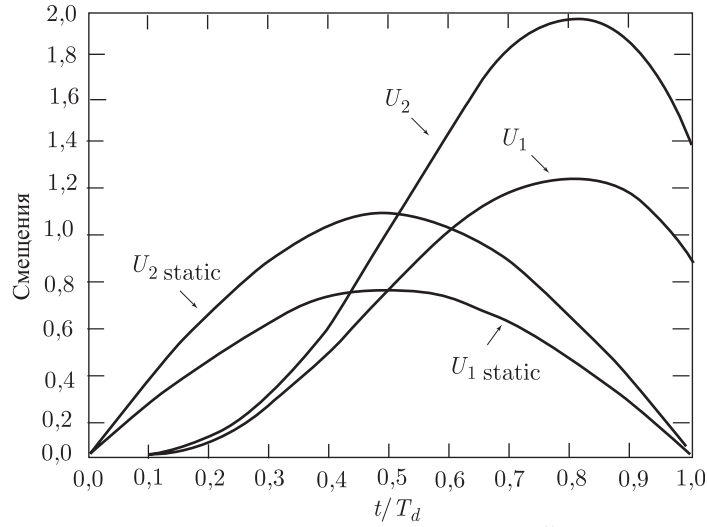


Рис. 3.11. Продолжение

$$\omega_2 = \left(\frac{9k}{2m} + \frac{2P}{mL} + \sqrt{\frac{33k^2}{4m^2} + \frac{8Pk}{m^2L} + \frac{2P^2}{m^2L^2}} \right)^{1/2}.$$

Отметим, что при постоянных k и m естественные частоты (радианы в единицу времени) являются функциями P/L и возрастают вместе с этой величиной, как показано



ж. Анализ системы: случай iii (здесь фактические смещения получаются путем умножения заданных значений на $2T_d/\pi$; импульсивная реакция вычислялась с использованием ${}^0U_1 = {}^0U_2 = 0$; ${}^0\dot{U}_1 = {}^0\dot{U}_2 = 4T_d/\pi$ и полагая внешние нагрузки равными нулю)

Рис. 3.11. Продолжение

на рис. 3.11г. Естественный период системы T_i (т.е. имеющий номер i) определяется формулой $T_i = 2p/\omega_i$ и, следовательно,

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}; \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}.$$

Реакция системы в значительной степени зависит от длительности приложения нагрузки, измеряемой в естественных периодах системы. Если учесть, что величина P постоянна, то длительность приложения нагрузки выражается в единицах T_d . Чтобы продемонстрировать особенности реакции системы, предположим, что имеет место специальный случай $k = m = P/L = 1$, а также принимаются три различных значения T_d .

Случай (i) $T_d = 4T_1$: реакция системы при этом варианте длительности приложения нагрузки показана на рис. 3.11 д. Отметим, что решение, определяющее динамическую реакцию системы, оказывается довольно близким к ее статической реакции и было бы очень близким к последней при $T_1 \ll T_d$.

Случай (ii) $T_d = (T_1 + T_2)/2$: реакция системы по-настоящему динамическая, как это и видно из рис. 3.11 е. Пренебрежение инерционными эффектами было бы совершенно недопустимым.

Случай (iii) $T_d = 1/4 T_2$: в этом случае длительность приложения нагрузки относительно невелика в сравнении с естественными периодами системы. Реакция системы по-настоящему динамическая, и инерционные эффекты должны быть включены в анализ, как это и показано на рис. 3.11 ж. Реакция системы довольно близка к той, которая возникала бы в предположении импульсивных условий, и была бы очень близка к последней при $T_2 \gg T_d$.

Чтобы определить некоторые из условий, при которых конструкция становится неустойчивой, на основании уравнений (b) заметим, что жесткость конструкции возрастает вместе с ростом отношения P/L (именно поэтому вместе с ростом этой величины возрастают частоты). Следовательно, чтобы конструкция стала неустойчивой, необходимо иметь отрицательное значение P , т. е. эта сила должна быть сжимающей. Теперь предположим, что P уменьшается очень медленно (т. е. увеличивается сжимающее действие этой силы) и что сила F очень мала. В этом случае пригоден статический анализ и мы можем пренебречь силой F , получая в результате из уравнений (b) уравнения, определяющие равновесие:

$$\begin{bmatrix} 5k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \frac{P}{L} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}.$$

Решение этой задачи о собственных значениях дает два значения P/L . С учетом соглашения о знаках для силы P наибольшее собственное значение дает критическую нагрузку

$$P_{\text{crit}} = -2kL.$$

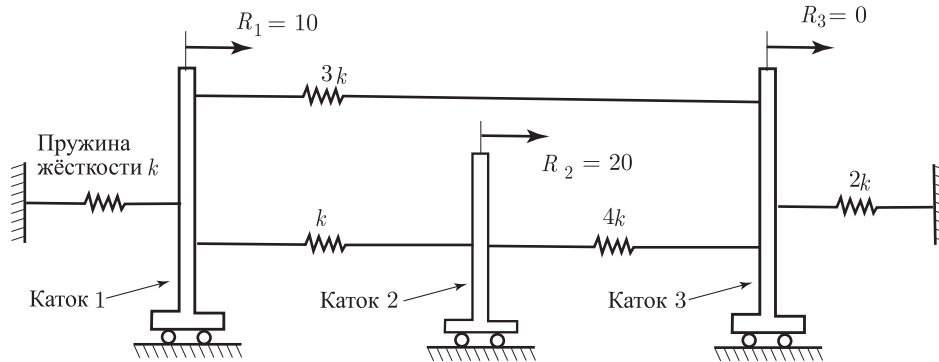
Можно отметить, что это именно та нагрузка, при которой наименьшая частота системы равна нулю (см. рис. 3.11 г).

Хотя рассмотренная в этом примере система представляет собой некую конструкцию, однако большинство из выявленных здесь особенностей непосредственно наблюдается также и при анализе задач других типов. Как уже упоминалось при рассмотрении данного примера, весьма важно, чтобы исследователь был способен решить, какой именно вид анализа требуется в конкретно изучаемом случае: достаточно ли провести стационарный анализ или же этот анализ должен быть динамическим, и может ли система стать неустойчивой. В главах 6 и 9 мы будем обсуждать некоторые важные факторы, влияющие на принятие такого решения.

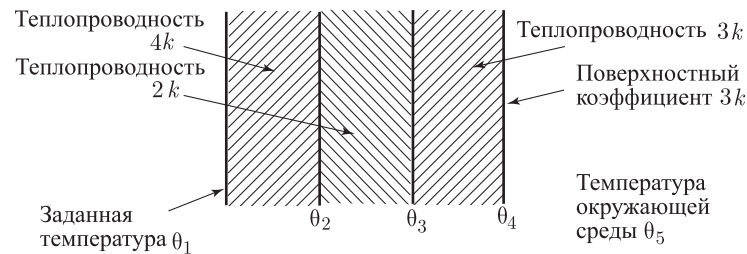
В дополнение к решению о выборе типа анализа исследователь должен выбрать также надлежащую обобщенно-параметрическую математическую модель реальной физической системы. Характеристики такой модели зависят от того, какой именно анализ должен быть проведен, однако при комплексных инженерных исследованиях простая обобщенно-параметрическая модель может оказаться несостоятельной, и возникает необходимость идеализировать систему посредством математической модели, основанной на представлениях механики сплошной среды. В следующем разделе мы ознакомим читателя с использованием такого рода моделей.

3.2.5. Упражнения

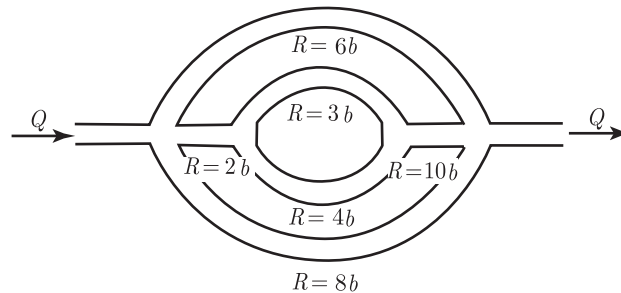
- 3.1. Рассмотрим простую систему катков, находящуюся в статических (стационарных) условиях, как показано на схеме. Требуется вывести уравнения, определяющие собой равновесие.



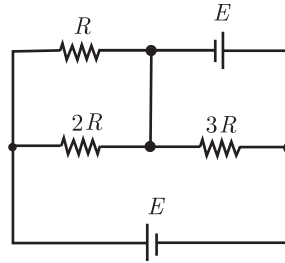
- 3.2. Рассмотрим стенку, составленную из трех однородных, соприкасающихся между собой плит, как это показано на схеме. Требуется вывести уравнения, соответствующие равновесию при стационарной теплопередаче для условий данной задачи.



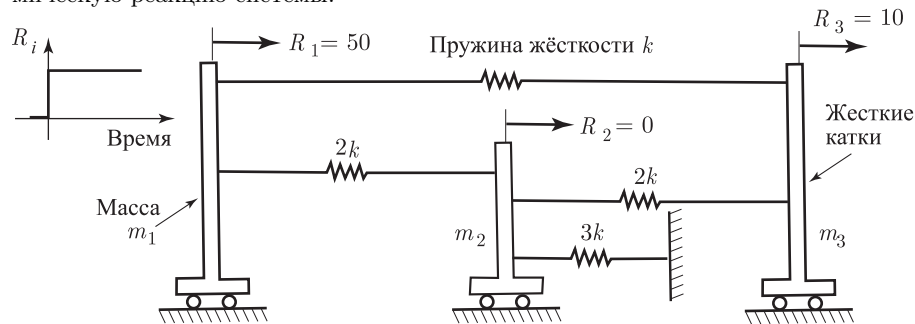
- 3.3. Необходимо исследовать показанную на схеме гидравлическую сеть. Требуется вывести уравнения равновесия системы, если $\Delta p = Rq$, а R — коэффициент сопротивления ветви.



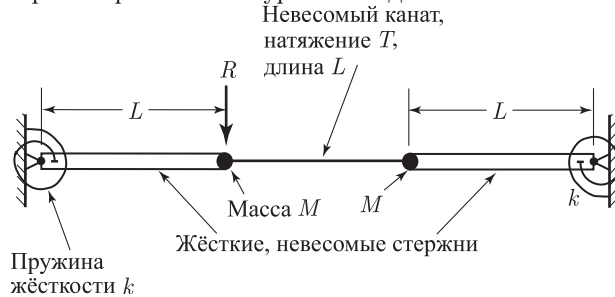
- 3.4. Необходимо исследовать сеть постоянного тока, показанную на схеме. Пользуясь законом Ома, требуется вывести уравнения равновесия системы для перепадов силы тока и напряжения.



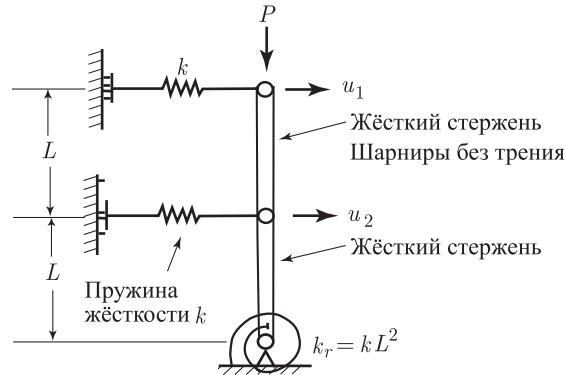
- 3.5. Рассмотрим пружинно-катковую систему из упражнения 3.1. Требуется определить вариационный индикатор Π для полного потенциала данной системы.
- 3.6. Рассмотрим плиту из примера 3.2. Требуется найти вариационный индикатор Π , обладающий тем свойством, что условие $\delta\Pi = 0$ позволяет вывести уравнения, определяющие равновесие.
- 3.7. Вывести уравнения динамического равновесия для системы катков из упражнения 3.1, если массы катков равны m_1 , m_2 и m_3 .
- 3.8. Рассмотрим простую пружинно-катковую систему, показанную на схеме и находящуюся первоначально в покое. Требуется вывести уравнения, определяющие динамическую реакцию системы.



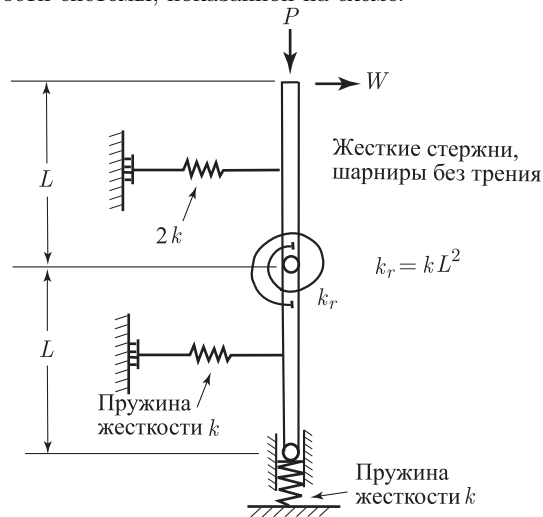
- 3.9. Требуется провести исследование показанной на схеме конструкции, состоящей из жесткого стержня и троса, с целью определения ее динамической реакции. Требуется также сформулировать равновесные уравнения движения.



- 3.10. Рассмотрим модельную конструкцию, показанную на схеме. Требуется сформулировать задачу о собственных значениях, с помощью которой можно рассчитать критическую нагрузку. Для вывода определяющих уравнений использовать прямой метод и вариационный метод.



- 3.11. Требуется сформулировать задачу о собственных значениях, служащую для определения устойчивости системы, показанной на схеме.



- 3.12. Конструкция со стойкой из упражнения 3.11 первоначально находится в состоянии покоя под воздействием постоянной силы P (причем значение P меньше критической нагрузки), когда внезапно к ней прилагается сила W . Требуется вывести уравнения, определяющие равновесие. Предполагается, что пружины не имеют массы и что стержни имеют массу m в расчете на единицу длины.
- 3.13. Рассмотрим анализ, проведенный в примере 3.9. В предположениях о том, что $\theta = \phi = e^{-\lambda t}$ и $\mathbf{Q} = 0$ требуется сформулировать задачу о собственных значениях, соответствующую λ и ϕ .
- 3.14. Рассмотрим стенку из трех однородных плит, представленную в упражнении 3.2. Требуется вывести уравнения теплопередачи в случае нестационарного анализа, при котором задано начальное распределение температуры, а значение θ_1 внезапно меняется на θ_1^{new} . После этого, в предположениях о том что $\theta = \phi e^{-\lambda t}$ и $\mathbf{Q} = 0$, требуется сформулировать задачу о собственных значениях соответствующую λ и ϕ . Будем предполагать, что каждая из плит обладает полной теплоемкостью c в расчете на единицу площади поперечного сечения и что теплоемкость плиты может быть искусственно сосредоточена на ее поверхности.

3.3. Исследование математических моделей для континуальных систем

Основные этапы решения для математической модели, соответствующей континуальной системе, совершенно аналогичны тем, которые фигурировали при решении для обобщенно-параметрической модели (см. раздел 3.2). Однако вместо того, чтобы иметь дело с дискретными элементами, мы сосредоточиваемся на типовых дифференциальных элементах с целью получения дифференциальных уравнений, отражающих требования равновесия элементов, а также основополагающие соотношения и условия взаимосвязи между элементами. Эти дифференциальные уравнения должны быть справедливы во всей области размещения системы и, прежде чем можно будет построить их численное решение, они должны быть дополнены граничными, а при динамическом анализе — также и начальными условиями.

Как и при построении решений для дискретных моделей, *при выводе дифференциальных уравнений, определяющих поведение системы, можно воспользоваться одним из двух различных подходов, а именно — прямым методом или же вариационным методом.* В данном разделе мы рассмотрим оба этих подхода (см. также [Courant, Hilbert 1953]) и будем несколько подробнее обсуждать вариационную процедуру в связи с тем, что, как это преподносится в разделе 3.3.4, именно такой подход может рассматриваться как базис для метода конечных элементов.

3.3.1. Дифференциальная модель

В дифференциальной модели мы составляем условия равновесия и основополагающие соотношения для типовых дифференциальных элементов, выраженные в терминах переменных состояния. Эти условия и соотношения приводят к выводу системы дифференциальных уравнений в переменных состояния, и возможно, что все требования совместности (т.е. требования о наличии взаимосвязи между дифференциальными элементами) оказываются уже включенными в эти уравнения (например, в силу того простого обстоятельства, что решение должно быть непрерывным). Однако в общем случае эти уравнения должны быть дополнены добавочными дифференциальными уравнениями, налагающими на переменные состояния ограничения, направленные на удовлетворение всех условий совместности. Наконец, чтобы завершить формулировку задачи, ставятся все граничные, а при динамическом анализе — также и начальные условия.

Для проведения в дальнейшем математического анализа целесообразно дать классификацию дифференциальных уравнений, определяющих решение конкретной задачи. Рассмотрим некое дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, имеющее общий вид и справедливое в области x, y ,

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \phi \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (3.6)$$

где u есть неизвестная переменная состояния. В зависимости от коэффициентов уравнения (3.6) это дифференциальное уравнение будет эллиптическим, параболическим или гиперболическим:

$$B^2 - AC \begin{cases} < 0 & \text{эллиптическое,} \\ = 0 & \text{параболическое,} \\ > 0 & \text{гиперболическое.} \end{cases}$$

Данная классификация устанавливается, когда уравнение (3.6) решается методом характеристик, потому что тогда наблюдается, что для каждой из этих трех

категорий уравнений характер поведения решений оказывается существенно различным. Эти различия очевидны также и тогда, когда дифференциальные уравнения идентифицируются с различными физическими проблемами, ими определяемыми. В своей простейшей форме уравнения трех указанных типов могут отождествляться с *уравнением Лапласа*, с *уравнением теплопроводности* и с *волновым уравнением* соответственно. На приводимых ниже примерах мы демонстрируем, как эти уравнения возникают при решении тех или иных физических проблем.

Пример 3.15: Идеализированная плотина, показанная на рис. 3.12, покоится на проницаемой почве. Требуется сформулировать дифференциальное уравнение, определяющее стационарную фильтрацию воды через почву и дать соответствующие граничные условия.

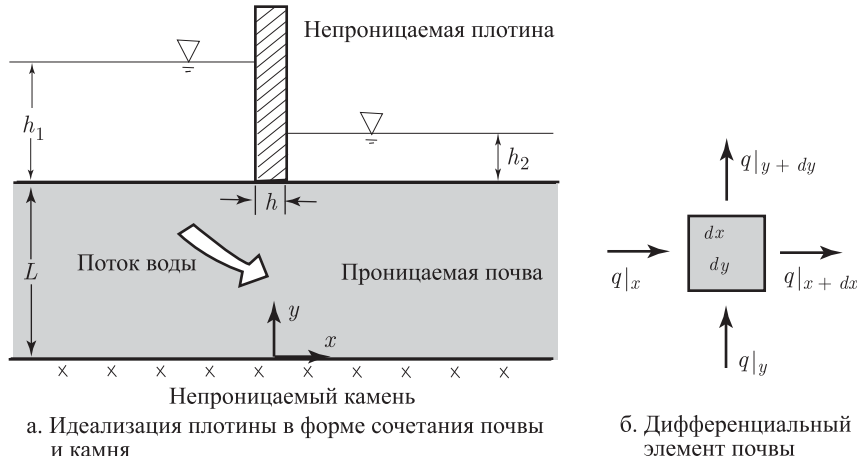


Рис. 3.12. Двумерная проблема фильтрации

Для типового элемента с размерами dx и dy (при единичной толщине) полный поток, вытекающий в элемент, должен быть равен полному потоку, вытекающему из этого элемента. Следовательно, имеем

$$(q|_y - Q|_{y+dy}) dx + (q|_x - q|_{x+dx}) dy = 0,$$

или

$$-\frac{\partial q_y}{\partial y} dy dx - \frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy = 0. \quad (a)$$

При использовании закона Дарси поток задается в терминах полного потенциала ϕ ,

$$q_x = -k \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad q_y = -k \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad (b)$$

где предполагается наличие постоянной проницаемости k . Подставляя выражения из равенств (b) в уравнение (a), получим *уравнение Лапласа*

$$k \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (c)$$

Можно отметить, что то же самое уравнение получается при исследовании теплопередачи, а также при решении задач об электрическом потенциале и некоторых других задач теории поля (см. главу 7).

Граничными условиями являются условия непротекания в почву при $x = -\infty$ и $x = +\infty$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=-\infty} = 0; \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=+\infty} = 0, \quad (d)$$

или на поверхности раздела почва–камень:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad (e)$$

а также на поверхности раздела плотина–почва:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, L) = 0 \quad \text{при} \quad -\frac{h}{2} \leq x \leq +\frac{h}{2}. \quad (f)$$

Кроме того, значение полного потенциала задается на поверхности раздела вода–почва,

$$\phi(x, L) \Big|_{x < -(h/2)} = h_1; \quad \phi(x, L) \Big|_{x > (h/2)} = h_2. \quad (g)$$

Дифференциальное уравнение (с) и граничные условия (d)–(g) определяют стационарную реакцию в связи с фильтрационным потоком.

Пример 3.16: Очень длинная плита, показанная на рис. 3.13, имеет постоянную начальную температуру θ_i , а поверхности, параллельные плоскости x, z , являются теплоизолированными. В предположении одномерного характера теплового потока требуется показать, что дифференциальное уравнение, определяющее собой задачу, это — *уравнение теплопроводности*

$$k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t},$$

параметры которого определяются на рис. 3.13, а температура и есть переменная состояния. Требуется также поставить граничные и начальные условия.

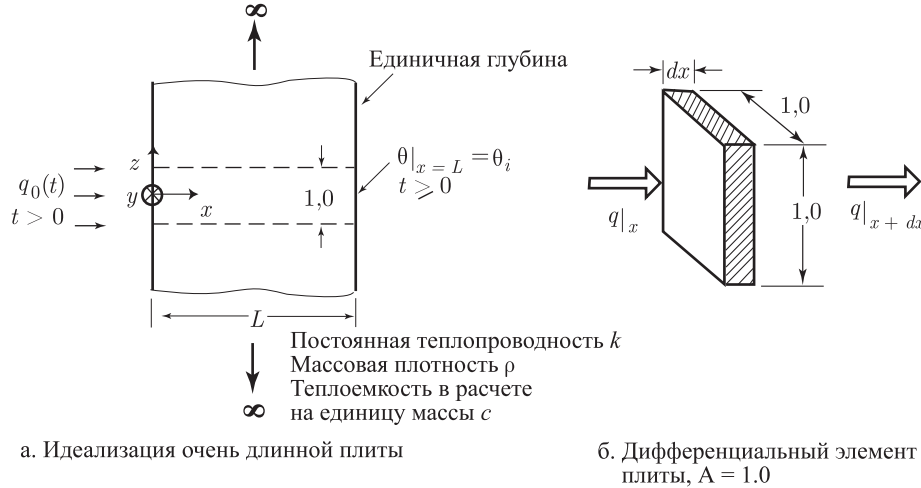


Рис. 3.13. Одномерная задача о теплопередаче

Рассмотрим типовой дифференциальный элемент плиты (см. рис. 3.13б). Условие равновесия элемента состоит в том, что чистый приток тепла к элементу должен быть равен скорости накопления тепла в этом элементе. Таким образом,

$$qA \Big|_x - \left(qA \Big|_x + A \frac{\partial q}{\partial x} \Big|_x dx \right) = \rho A c \frac{\partial \theta}{\partial t} \Big|_x dx. \quad (a)$$

Основополагающее соотношение задается через посредство закона теплопроводности Фурье:

$$q = -k \frac{\partial \theta}{\partial x}. \quad (b)$$

С помощью подстановки выражения (b) в уравнение (a) получим

$$k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t}. \quad (c)$$

В данном случае условия взаимосвязи между элементами содержатся в допущении о том, что температура θ является непрерывной функцией аргумента x , и никаких дополнительных условий совместности выполнять не нужно.

Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) &= -\frac{q_0(t)}{k}; & t > 0, \\ \theta(L, t) &= \theta_i \end{aligned} \quad (d)$$

а начальное условие имеет форму

$$\theta(x, 0) = \theta_i. \quad (e)$$

На этом формулировка задачи завершается, и решение уравнения (с) при граничных и начальном условиях (d) и (e) определяет температурную реакцию плиты.

Пример 3.17: Брус, показанный на рис. 3.14, первоначально покоится, но внезапно к его свободному концу прилагается нагрузка $R(t)$. Требуется показать, что дифференциальное уравнение, определяющее собой данную задачу, есть *волновое уравнение*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

где переменные определяются на рис. 3.14, а смещение бруса u представляет собой переменную состояния. Требуется также поставить граничные и начальные условия.

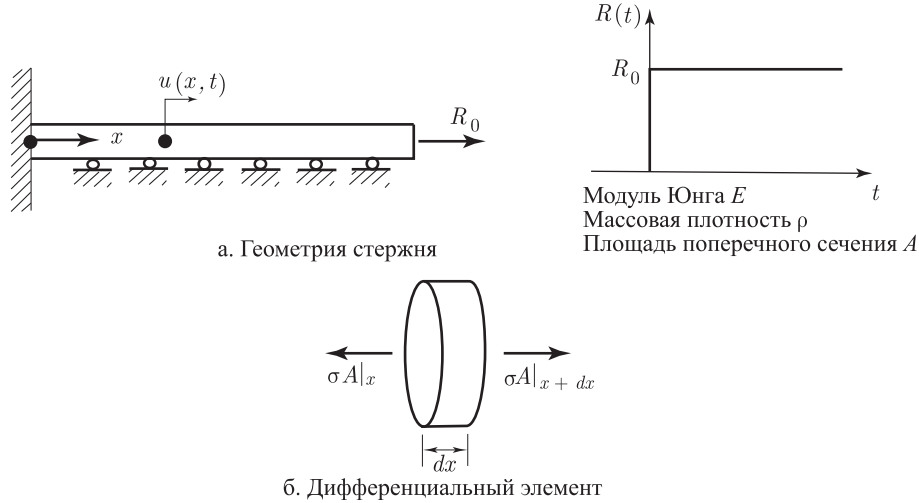


Рис. 3.14. Брус, подвергнутый скачкообразно изменяющейся нагрузке

Условия равновесия типового дифференциального элемента под воздействием под воздействием некоторых сил представляются с помощью принципа Даламбера в виде

$$\sigma A \Big|_x + A \frac{\partial \sigma}{\partial x} \Big|_x dx - \sigma A \Big|_{x+dx} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_x dx. \quad (a)$$

Основополагающее соотношение имеет форму

$$\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (b)$$

С помощью сочетания соотношений (a) и (b) получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (c)$$

Условия взаимосвязи между элементами удовлетворены, так как мы предполагаем непрерывный характер смещения, и никаких дополнительных условий совместности выполнять не нужно.

Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0 \\ EA \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) &= R_0; \quad t > 0, \end{aligned} \quad (d)$$

а начальные условия представляются как

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (e)$$

Постановка условий (d) и (e) завершает формулировку задачи, и решение уравнения (c) будет определять реакцию бруса в форме его смещения.

Несмотря на то, что в этих примерах мы рассмотрели частные задачи, описываемые эллиптическим, параболическим и гиперболическим дифференциальными уравнениями, однако формулировки этих задач дают вполне общую демонстрацию некоторых важнейших особенностей. При решении эллиптических задач (см. пример 3.15) значения неизвестных переменных состояния (или их нормальных производных) задаются на границе. В силу этого обстоятельства такого рода задачи называются также *задачами с граничными условиями*, причем здесь необходимо отметить, что решение в произвольной внутренней точке зависит от данных, вводимых на каждой точке границы. Изменение всего лишь одного граничного значения воздействует на решение в целом; например, в примере 3.15 полное решение для ϕ зависит от фактического значения h_1 . В общем случае эллиптические дифференциальные уравнения определяют стационарные реакции систем.

При сравнении определяющих дифференциальных уравнений, фигурирующих в примерах 3.15–3.17, можно заметить, что в противоположность эллиптическому уравнению параболическое и гиперболическое уравнения (примеры 3.16 и 3.17 соответственно) включают время в качестве независимой переменной и, следовательно, определяют собой задачи о распространении. Эти задачи называются также *задачами с начальными значениями*, так как решение зависит от начальных значений. Можно отметить, что аналогично выводу уравнений динамического равновесия для обобщенно-параметрических моделей определяющие дифференциальные уравнения для задач о распространении получаются из стационарных уравнений путем включения в анализ «сопротивления изменениям» (инерции) дифференциальных элементов. И наоборот, параболические и гиперболические дифференциальные уравнения из примеров 3.16 и 3.17 превратились бы в эллиптические уравнения, если бы оказалось возможным пренебречь членами, зависящими от времени. Таким путем задачи с начальными значениями были бы превращены в задачи с граничными значениями, имеющими стационарные решения.

Ранее мы утверждали, что решение задачи с граничными условиями зависит от данных во всех точках границы. Это свойство существенно отличается от того, что имеет место при анализе задачи о распространении. А именно, при рассмотрении задач о распространении решение в некоторой внутренней точке может зависеть только от граничных условий на части границы, а также от начальных условий на части внутренней области.

3.3.2. Вариационные модели

Вариационный подход к выводу уравнений, определяющих равновесие системы, уже был представлен нами в качестве альтернативы прямому подходу при

обсуждении исследования дискретных систем (см. раздел 3.2.1). Согласно данному выше описанию существо этого подхода сводится к вычислению полного потенциала системы Π и к использованию тезиса о стационарности Π , т.е. равенства $\delta\Pi = 0$, по отношению к переменным состояния. Мы указывали на то, что вариационная методика может оказаться эффективной при анализе дискретных систем; однако теперь мы заметим, что вариационный подход обеспечивает особенно мощный механизм для анализа непрерывных систем. Основная причина такой эффективности состоит в том способе, каким некоторые граничные условия (а именно — определяемые ниже естественные граничные условия) могут генерироваться и приниматься во внимание с использованием вариационного подхода.

Чтобы продемонстрировать вариационную модель при обсуждении приводимых ниже примеров, мы предположили, что полный потенциал Π задан, отложив при этом описание того, как этот потенциал может определяться в надлежащей форме, до времени, последующего за представлением указанных примеров.

Полный потенциал Π называется также *функционалом* данной задачи. Предположим, что в выражении для этого функционала старшая производная переменной состояния (по пространственной координате) имеет порядок m ; иначе говоря, данный оператор содержит производные не выше m -го порядка. Такую задачу мы будем называть *вариационной задачей* C^{m-1} . Что касается граничных условий задачи, то мы будем идентифицировать два класса граничных условий, называемых *существенными* и *естественными граничными условиями*.

Существенные граничные условия называются также *геометрическими граничными условиями*, так как в механике конструкций существенные граничные условия соответствуют предписываемым значениям смещений и углов поворота. Порядок производных, включаемых в существенные граничные условия, для задачи C^{m-1} равен $m - 1$ или меньше.

Граничные условия второго класса, а именно — естественные граничные условия, называются также *силовыми граничными условиями*, потому что в механике конструкций естественные граничные условия соответствуют заданным заранее граничным значениям сил и моментов. Наивысший порядок производных в этих граничных условиях лежит в диапазоне от m до $2m - 1$.

Позднее мы увидим, что данная здесь классификация вариационных задач и связанных с ними граничных условий оказывается чрезвычайно полезной при подготовке численных решений.

При формулировке вариационных соотношений мы будем использовать символ вариации δ , уже задействованный ранее в соотношениях (3.1). Уместно напомнить о некоторых важных операционных свойствах этого символа; более подробную информацию можно найти, например, в книге [Courant, Hilbert 1953]. Предположим, что функция F при заданном значении x зависит от v (переменная состояния), а также от dv/dx , ..., $d^p v/dx^p$, где $p = 1, 2, \dots$. Тогда первая вариация F определяется выражением

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial v} \delta v + \frac{\partial F}{\partial (dv/dx)} \delta \left(\frac{dv}{dx} \right) + \dots + \frac{\partial F}{\partial (d^p v/dx^p)} \delta \left(\frac{d^p v}{dx^p} \right). \quad (3.7a)$$

Этому выражению можно дать следующее пояснение. Мы связываем с $v(x)$ некую функцию $\epsilon\eta(x)$, где ϵ — постоянная (не зависящая от x), а $\eta(x)$ есть произвольная, но достаточно гладкая функция, *равная нулю при существенных граничных условиях и соответствующая им*. Функцию $\eta(x)$ мы называем вариацией v , то есть $\eta(x) = \delta v(x)$ (и, разумеется, $\epsilon\eta(x)$ также является вариацией v), причем для

требуемых производных имеем также

$$\frac{d^n \eta}{dx^n} = \frac{d^n \delta v}{dx^n} = \delta \left(\frac{d^n v}{dx^n} \right),$$

то есть вариация производной от v равна производной от вариации v . После этого выражение в формуле (3.7a) получается как результат вычисления величины

$$\delta F = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(F \left(v + \epsilon \eta, \frac{d(v + \epsilon \eta)}{dx}, \dots, \frac{d^p(v + \epsilon \eta)}{dx^p} \right) - F \left(v, \frac{dv}{dx}, \dots, \frac{d^p v}{dx^p} \right) \right). \quad (3.7b)$$

Рассматривая формулу (3.7a), отметим, что выражение δF выглядит похожим на выражение для полного дифференциала dF ; иначе говоря, вариационный оператор δ действует подобно дифференциальному оператору по отношению к переменным $v, dv/dx, \dots, d^p/dx^p$. Эту аналогию можно распространить на сложные функции и переменные состояния, и нетрудно установить, что законы вычисления вариаций сумм, произведений, и так далее, совершенно аналогичны законам дифференцирования. Пусть, например, F и Q представляют собой две функции, которые могут зависеть от различных переменных состояния; тогда

$$\delta(F + Q) = \delta F + \delta Q; \quad \delta(FQ) = (\delta F)Q + F(\delta Q); \quad \delta(F)^n = n(F)^{n-1} \delta F.$$

В интересующих нас приложениях функции обычно появляются под знаком интеграла; это значит, что мы можем, например, использовать также выражение

$$\delta \int F(x) dx = \int \delta F(x) dx.$$

Вышеуказанные правила будут широко применяться при вариационных выкладках, и мы будем использовать одно важное условие (соответствующее перечисленным ранее свойствам функции η), а именно, — условие о том, что *вариации переменных состояния и их $(m-1)$ -х производных должны быть равны нулю на границах, соответствующих существенным граничным условиям*, хотя в других случаях эти вариации могут быть произвольными.

Рассмотрим нижеследующие примеры.

Пример 3.18: Функционал, определяющий собой распределение температуры в плите, рассмотренной в примере 3.16, имеет вид

$$\Pi = \int_0^L \frac{1}{2} k \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx - \int_0^L \theta q^B dx - \theta_0 q_0, \quad (a)$$

а существенное граничное условие записывается как

$$\theta_L = \theta_i, \quad (b)$$

где $\theta_0 = \theta(0, t)$, $\theta_L = \theta(L, t)$, величина q^B определяет собой тепло, создаваемое в единице объема, а остальные обозначения — те же, что использовались в примере 3.16. Для того, чтобы вывести уравнение, определяющее теплопередачу, а также естественное граничное условие, обратимся к условию стационарности функционала Π .

Рассматриваемая проблема представляет собой вариационную задачу C^0 ; это означает, что старшая производная в выражении (a) для функционала имеет порядок 1, или $m = 1$. Поэтому существенное граничное условие, заданное здесь формулой (b), может соответствовать только заданному значению температуры, а естественное граничное условие должно соответствовать заданному градиенту температуры, или притоку тепла на границе.

Чтобы привлечь условие стационарности, $\delta\Pi = 0$, мы можем непосредственно воспользоваться тем фактом, что варьирование и дифференцирование выполняются по одним и тем же правилам. Иначе говоря, при использовании формулы (3.7a) получим

$$\int_0^L \left(k \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \left(\delta \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) dx - \int_0^L \delta \theta q^B dx - \delta \theta_0 q_0 = 0, \quad (c)$$

где $\delta(\partial\theta/\partial x) = \partial\delta\theta/\partial x$. Тот же результат получится, если использовать формулу (3.7b), дающую здесь

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\left\{ \int_0^L \frac{1}{2} k \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 dx - \int_0^L (\theta + \epsilon \eta) q^B dx - (\theta_0 + \epsilon \eta|_{x=0}) q_0 \right\}}{\epsilon} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\left\{ \int_0^L \frac{1}{2} k \left(\frac{\partial \theta^2}{\partial x} dx - \int_0^L \theta q^B dx - \theta_0 q_0 \right) \right\}}{\epsilon} \right] = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\int_0^L \left[\epsilon k \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{2} \epsilon^2 k \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] dx - \int_0^L \epsilon \eta q^B dx - \epsilon \eta|_{x=0} q_0}{\epsilon} = \\ &= \int_0^L k \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} dx - \int_0^L \eta q^B dx - \eta_0 q_0 = 0, \end{aligned}$$

где $\eta_0 = \eta|_{x=0}$, а вместо η теперь можно подставить $\delta\theta$.

Далее, используя интегрирование по частям¹⁾, получим из (c) следующее уравнение:

$$\underbrace{- \int_0^L \left(k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + q^B \right) \delta \theta dx}_{\textcircled{1}} + \underbrace{k \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=L} \delta \theta_L}_{\textcircled{2}} - \underbrace{\left[k \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} + q_0 \right] \delta \theta_0}_{\textcircled{3}} = 0. \quad (d)$$

Чтобы получить из уравнения (d) определяющее дифференциальное уравнение и естественное граничное условие, воспользуемся тем, что вариации θ являются совершенно произвольными, за исключением того, что недопустимы никакие вариации по отношению к заданным существенным граничным условиям. Следовательно, если учесть, что значение θ_L задано, мы получим $\delta\theta_L = 0$ и член $\textcircled{2}$ в уравнении (d) исчезает.

Далее, рассматривая члены $\textcircled{1}$ и $\textcircled{3}$, мы предположим, что $\delta\theta_0 = 0$, но что вариация $\delta\theta$, вообще говоря, отлична от нуля (за исключением точки $x = 0$, где имеется внезапный скачок к нулевому значению). Если уравнение (d) должно оставаться справедливым при любом, отличном от нуля $\delta\theta$, то нам необходимо иметь²⁾

$$k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + q^B = 0. \quad (e)$$

Теперь наоборот, предположим, что вариация $\delta\theta$ равна нулю повсюду, кроме точки $x = 0$; иначе говоря, имеем $\delta\theta_0 \neq 0$; тогда уравнение (d) справедливо, только если

$$k \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} + q_0 = 0. \quad (f)$$

Выражение, фигурирующее в соотношении (f), определяет собой естественное граничное условие.

¹⁾ Здесь использовалась теорема о дивергенции (см. примеры 4.2 и 7.1)

²⁾ Фактически здесь подразумевается, что интегрирование ведется не в пределах от 0 до L , а в пределах от 0^+ до L^- .

Определяющее дифференциальное уравнение для задачи о распространении может быть получено из (е), и здесь оно констатирует, что

$$q^B = -\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t}. \quad (g)$$

Следовательно, уравнение (е) приводится к виду

$$k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t}.$$

Можно отметить, что до тех пор, пока при формулировке соотношения (g) не учитывался эффект теплоемкости, все уравнения выводились так, как если бы рассматривалась стационарная задача (а если полагать величину q^B зависящей от времени, то — псевдостационарная задача). Следовательно, как это уже отмечалось ранее, формулировка задачи о распространении может быть получена из уравнения, описывающего стационарную реакцию, просто путем принятия во внимание зависящего от времени «инерционного члена».

Пример 3.19: Функционал и существенное граничное условие, определяющие собой распространение волн в брус, исследованное в примере 3.17, имеют вид

$$\Pi = \int_0^L \frac{1}{2} EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - \int_0^L u f^B dx - u_L R \quad (a)$$

и

$$u_0 = 0,$$

где используются те же обозначения, что и в примере 3.17, $u_0 = u(0, t)$, $u_L = u(L, t)$, а f^B есть массовая сила, приходящаяся на единицу длины бруса. Требуется показать, что если к потенциалу Π применить условие стационарности, то можно вывести дифференциальное уравнение, определяющее собой задачу о распространении, и получить естественное граничное условие.

Будем действовать так же, как и при рассмотрении примера 3.18. Условие стационарности $\delta \Pi = 0$ дает

$$\int_0^L \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\delta \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx - \int_0^L \delta u f^B dx - \delta u_L R = 0.$$

Если вместо $\delta(\partial u / \partial x)$ написать $\delta \partial u / \partial x$, вспомнить, что величина E — есть постоянная, и использовать интегрирование по частям, то получим

$$- \int_0^L \left(EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f^B \right) \delta u dx + \left[EA \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=L} - R \right] \delta u_L - EA \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} \delta u_0 = 0.$$

Для получения определяющего дифференциального уравнения и естественного граничного условия будем использовать, по существу, ту же аргументацию, что и в примере 3.18; иначе говоря, если учесть, что δu_0 равно нулю, тогда как во всех других точках δu произвольно, то мы должны иметь

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f^B = 0 \quad (c)$$

и

$$EA \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=L} = R. \quad (d)$$

Применительно к данной задаче мы имеем $f^B = -A\rho \partial^2 u / \partial t^2$ и, следовательно, соотношение (с) сводится к дифференциальному уравнению, определяющему задачу и имеющему вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Естественное граничное условие было задано формулой (d).

В заключение можно отметить, что задача, сформулированная в (а) и (б), представляет собой вариационную задачу C^0 ; это значит, что в данном случае $m = 1$.

Пример 3.20: Функционал, определяющий собой статический прогиб стойки, показанной на рис. 3.15, имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx - \frac{P}{2} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} k w_L^2, \quad (a)$$

где $w_L = w|_{x=L}$, а существенные граничные условия имеют форму

$$w|_{x=0} = 0, \quad \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} = 0. \quad (b)$$

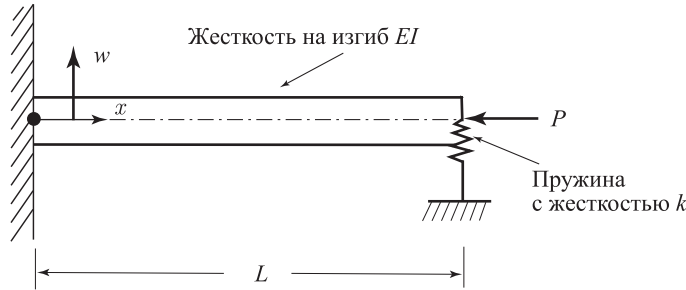


Рис. 3.15. Стойка, подвергнутая сжимающей нагрузке

Воспользуемся условием стационарности $\delta\Pi = 0$, чтобы вывести дифференциальное уравнение, определяющее проблему, а также естественные граничные условия.

Данная проблема представляет собой вариационную задачу C^1 , т. е. $m = 2$, так как старшая производная в выражении функционала имеет порядок 2.

Условие стационарности $\delta\Pi = 0$ дает

$$\int_0^L EI w'' \delta w'' dx - P \int_0^L w' \delta w' dx + k w_L \delta w_L = 0,$$

где используются обозначения $w' = dw/dx$, и т. д. Однако $\delta w'' = d(\delta w')/dx$, а величина EI постоянна; следовательно, используя интегрирование по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_0^L EI w'' \delta w'' dx &= EI w'' \delta w' \Big|_0^L - EI \int_0^L w''' \delta w' dx; \\ &\underbrace{\int_0^L (EI w^{iv} + P w'') \delta w dx}_{(1)} + \underbrace{(EI w'' \delta w') \Big|_L}_{(2)} - \underbrace{(EI w'' \delta w') \Big|_0}_{(3)} - \\ &- \underbrace{[(EI w''' + P w') \delta w] \Big|_L}_{(4)} + \underbrace{[(EI w''' + P w') \delta w] \Big|_0}_{(5)} + \underbrace{k w_L \delta w_L}_{(6)} = 0. \end{aligned} \quad (c)$$

Если учесть, что в точках постановки существенных граничных условий вариации w и w' должны быть равны нулю, то получим $\delta w_0 = 0$ и $\delta w'_0 = 0$. Отсюда следует, что члены (3) и (5) равны нулю. Во всех других точках вариации w и w' произвольны, а значит, если использовать прежнюю аргументацию (см. пример 3.18), то для удовлетворения соотношению (с) требуется удовлетворить следующим уравнениям:

$$\text{член 1:} \quad EI w^{iv} + P w'' = 0, \quad (d)$$

$$\text{член 2: } EIw''|_{x=L} = 0, \quad (e)$$

$$\text{члены 4 и 6: } (EIw''' + Pw' - kw)|_{x=L} = 0. \quad (f)$$

Дифференциальное уравнение, определяющее собой поставленную задачу, выражается соотношением (d), а соотношения (e) и (f) представляют собой естественные граничные условия. Следует отметить, что эти граничные условия соответствуют физическим условиям равновесия моментов и сил сдвига при $x = L$.

В вышеприведенных примерах мы продемонстрировали, как с помощью использования условия стационарности функционала задачи могут быть получены дифференциальные уравнения, определяющие эту задачу, а также естественные граничные условия. На этом этапе следует сделать несколько замечаний.

Во-первых, при рассмотрении вариационной задачи C^{m-1} порядок старшей производной в определяющем задачу уравнении равен $2m$. Причиной получения производной такого порядка в этом уравнении является тот факт, что интегрирование по частям выполняется m раз.

Второе замечание относится к тому, что эффект естественных граничных условий всегда оказывался включенным при построении выражения для потенциала Π . Следовательно, естественные граничные условия неявным образом содержатся в Π , тогда как существенные граничные условия формулировались и ставились независимо.

При рассмотрении примеров 3.18–3.20 нашей целью был вывод определяющих дифференциальных уравнений и естественных граничных условий путем привлечения условия стационарности функционала, и с этой целью в каждом случае предлагался надлежащий функционал. Однако здесь возникает важный вопрос: как можно выявить вид надлежащего функционала, соответствующего решаемой задаче? Два сделанных выше замечания, а также математические выкладки, проведенные в примерах 3.18–3.20, наводят на мысль о том, что при выводе функционала для поставленной задачи мы могли бы начать с определяющего дифференциального уравнения, сформулировать интегральное уравнение, а затем в математических выкладках вернуться назад. В ходе такого вывода необходимо использовать интегрирование по частям, т. е. теорему о дивергенции, а окончательная проверка состояла бы в том, что выполнение условия стационарности функционала Π действительно позволяет получить определяющие дифференциальные уравнения. Во многих случаях такая процедура используется при выводе надлежащего функционала (см. раздел 3.3.4 и главы 4–7, а с целью более глубокого анализа см., например, [Courant, Hilbert 1953], [Mikhlin 1964], [Washizu 1975], а также [Oden, Reddy 1983]).

В этом контексте следует отметить также, что при рассмотрении конкретной задачи в общем случае не существует единственного надлежащего функционала, а могут быть применены несколько вариантов. Например, при решении задач механики конструкций мы можем применить принцип минимума потенциальной энергии и другие вариационные модели на базе анализа смещений, а также принципы Вашизу или Холлингера–Рейсснера и подобные им (см. раздел 4.4.2).

Еще одно важное замечание касается того, что, коль скоро для определенного класса задач вид функционала уже установлен, этот вид может быть использован для вывода уравнений, определяющих все задачи того же класса, так что он обеспечивает весьма общее средство анализа. Например, принцип минимума потенциальной энергии справедлив в общем случае и может быть применен ко всем задачам линейной теории упругости.

Если исходить из чисто утилитарных соображений, то можно высказать следующие замечания, касающиеся вариационных формулировок.

Замечание 1. Применение вариационного метода обеспечивает сравнительно простой путь к построению уравнений, определяющих поведение системы. Эта простота в использовании вариационного принципа в значительной мере связана с тем фактом, что величины, рассматриваемые при вариационной формулировке, представляют собой не векторы (как силы, смещения и т. п.), а скорее скаляры (как виды энергии, потенциалы и т. п.).

Замечание 2. Вариационный подход может дать более прямой путь к получению уравнений, определяющих поведение системы, а также граничных условий. Например, если рассматриваемая система достаточно сложна, то некоторые переменные, которые должны быть включены в прямую модель, не рассматриваются в случае вариационной модели (как, например, внутренние силы, не производящие эффективной работы). Тем самым вариационный метод приобретает очевидное преимущество.

Замечание 3. Вариационный подход обеспечивает максимальное проникновение в сущность задачи и позволяет провести независимую проверку формулировки этой задачи.

Замечание 4. При построении приближенных решений на основе применения вариационных формулировок исследователь во многих случаях может использовать более широкий класс пробных функций, чем при опоре на дифференциальную модель той же задачи; например, такие пробные функции не обязаны удовлетворять естественным граничным условиям, так как формулировка этих условий неявно входит в выражение функционала (см. раздел 3.3.4).

Последнее из высказанных замечаний приводит к весьма важным последствиям, и успех метода конечных элементов в немалой степени обусловлен тем фактом, что при применении вариационного подхода можно использовать более широкий класс функций. Мы рассмотрим это обстоятельство более подробно в следующем разделе, а также в разделе 3.3.4.

3.3.3. Метод взвешенных невязок. Метод Ритца

В предыдущих разделах этой главы мы обсудили как дифференциальные, так и вариационные формулировки уравнений, определяющих равновесие непрерывных систем. Если речь идет о сравнительно простых системах, то эти уравнения могут быть решены в замкнутой форме путем использования определенных приемов интегрирования, разделения переменных, и т. д. Для более сложных систем должны применяться приближенные методы решения. В данном разделе мы ставим своей целью дать обзор некоторых классических методов, согласно которым для получения приближенного решения используется некое семейство пробных функций. Позднее мы увидим, что эти методы очень тесно связаны с конечно-элементным методом анализа и что в действительности метод конечных элементов можно рассматривать как обобщение вышеупомянутых классических процедур.

Рассмотрим анализ стационарной задачи, используя классическую модель

$$L_{2m}[\phi] = r, \quad (3.8)$$

где L_{2m} — это линейный дифференциальный оператор, ϕ — переменная состояния, подлежащая расчету, а величина r представляет собой вынуждающую функцию. Решение данной задачи должно также удовлетворять граничным условиям

$$B_i[\phi] = q_i \Big|_{\text{на границе } S_i}; \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

В частности, мы будем уделять особое внимание симметричным и положительно определенным операторам, удовлетворяющим условию симметрии

$$\int_D (L_{2m}[u])v \, dD = \int_D (L_{2m}[v])u \, dD \quad (3.10)$$

и условию положительной определенности

$$\int_D (L_{2m}[u])u \, dD > 0, \quad (3.11)$$

где D есть область действия оператора, а u и v представляют собой любые функции, удовлетворяющие однородным, существенным и естественным граничным условиям. Чтобы пояснить смысл соотношений (3.8)–(3.11), рассмотрим следующий пример.

Пример 3.21: Стационарная реакция бруса, показанного на рис. 3.14, вычисляется путем решения дифференциального уравнения

$$-EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (a)$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0} = 0; \quad EA \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=L} = R. \quad (b)$$

Требуется идентифицировать операторы и функции в соотношениях (3.8) и (3.9) и проверить, является ли оператор L_{2m} симметричным и положительно определенным.

Сравнивая формулы (3.8) и (a), мы видим, что для данной задачи

$$L_{2m} = -EA \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \quad \phi = u; \quad r = 0.$$

Аналогично этому, если сравнить формулы (3.9) и (b), то получаем

$$B_1 = 1; \quad q_1 = 0; \\ B_2 = EA \frac{\partial}{\partial x}; \quad q_2 = R.$$

Чтобы выяснить, является ли оператор L_{2m} симметричным и положительно определенным, рассмотрим случай $R = 0$. Физически это означает, что мы занимаемся только самой конструкцией, но не приложенной к ней нагрузкой. Обращаясь к соотношению (3.10), мы получаем

$$\begin{aligned} \int_0^L -EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v \, dx &= -EA \frac{\partial u}{\partial x} v \Big|_0^L + \int_0^L EA \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx = \\ &= -EA \frac{\partial u}{\partial x} v \Big|_0^L + EA u \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_0^L - \int_0^L EA \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} u \, dx. \quad (c) \end{aligned}$$

Если учесть, что граничные условия имеют вид $u = v = 0$ при $x = 0$ и $\partial u / \partial x = \partial v / \partial x = 0$ при $x = L$, то получаем

$$\int_0^L -EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v \, dx = \int_0^L -EA \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} u \, dx,$$

и оператор оказывается симметричным. Мы можем также напрямую убедиться в том, что этот оператор является положительно определенным, так как из соотношения (c) получаем

$$\int_0^L -EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u \, dx = \int_0^L EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \, dx.$$

В следующей части данного раздела мы обсудим использование классических методов, — метода взвешенных невязок и метода Ритца — для решения линейных стационарных задач, соответствующих формулам (3.8) и (3.9), хотя те же самые концепции пригодны и для анализа задач о распространении и о собственных значениях, а также при исследовании нелинейных реакций (см. примеры 3.23 и 3.24).

При анализе по методу взвешенных невязок и по методу Ритца важнейшую роль играет допущение о том, что решение может быть представлено в форме

$$\bar{\phi} = \sum_{i=1}^n a_i f_i, \quad (3.12)$$

где f_i представляют собой линейно независимые пробные функции, а множители a_i — это величины, которые требуется определить при построении решения.

Рассмотрим вначале *методы взвешенных невязок*. Приемы, соответствующие этим методам, работают непосредственно в связи с соотношениями (3.8) и (3.9). При использовании этих методов функции f_i в формуле (3.12) выбираются так, чтобы удовлетворялись все граничные условия, соответствующие (3.9), а затем вычисляется невязка

$$R = r - L_{2m} \left[\sum_{i=1}^n a_i f_i \right]. \quad (3.13)$$

Разумеется, для точного решения эта невязка равна нулю. Хорошее приближение к точному решению подразумевало бы, что невязка R достаточно мала во всех точках области решения. Разнообразные версии метода взвешенных невязок различаются между собой теми критериями, которые используются для расчета таких значений a_i , при которых невязка R оказывается малой. Однако для любой версии величины a_i определяются так, чтобы среднее взвешенное значение R обращалось в нуль.

Метод Галеркина. При использовании этого метода параметры a_i определяются путем решения системы из n уравнений,

$$\int_D f_i R dD = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.14)$$

где D есть область решения.

Метод наименьших квадратов. Этот метод основан на том, что интеграл от квадрата невязки минимизируется по отношению к параметрам a_i ,

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \int_D R^2 dD = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.15)$$

Подставляя сюда выражение для R по формуле (3.13), получим систему из следующих n уравнений для определения параметров a_i :

$$\int_D R L_{2m}[f_i] dD = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.16)$$

Метод коллокаций. При использовании этого метода невязка R полагается равной нулю в n различных точках области решения, чтобы получить систему из n уравнений для определения параметров a_i . Положение этих n точек может быть до

некоторой степени произвольным и однородный шаблон их размещения может оказаться вполне подходящим, однако обычно исследователь должен проявить некую изобретательность для выбора надлежащих положений.

Метод подобластей. Вся область решения подразделяется на n подобластей, и интеграл невязки, определяемый по формуле (3.13) и взятый по каждой из подобластей, приравняется нулю, чтобы таким образом получить n уравнений для параметров a_i .

Важный этап при использовании метода взвешенных невязок состоит в решении системы уравнений для определения параметров a_i . Отметим, что, коль скоро оператор L_{2m} является линейным, то во всех вышеупомянутых процедурах строится линейная система уравнений для определения параметров a_i . В методе Галеркина матрица коэффициентов оказывается симметричной (а также положительно определенной), если только является симметричным (и также положительно определенным) оператор L_{2m} . В методе наименьших квадратов мы всегда получаем симметричную матрицу коэффициентов независимо от свойств оператора L_{2m} . Однако в методах коллокаций и подобластей могут быть получены несимметричные матрицы коэффициентов. На этом основании при практическом анализе обычно отдают предпочтение методам Галеркина и наименьших квадратов.

При применении методов взвешенных невязок мы оперируем непосредственно с соотношениями (3.8) и (3.9), ставя своей целью минимизировать отличие пробного решения, выражаемого согласно (3.12), от истинного решения той же задачи. Если рассмотреть затем *аналитический метод Ритца* (предложенный в работе [Ritz 1908]), то его фундаментальное отличие от методов взвешенных невязок состоит в том, что в методе Ритца мы имеем дело с функционалом, соответствующим задаче, определяемой соотношениями (3.8) и (3.9). Пусть Π является функционалом вариационной задачи C^{m-1} , которая эквивалентна дифференциальной модели согласно (3.8) и (3.9); действуя по методу Ритца, мы подставляем пробные функции $\bar{\phi}$, заданные согласно (3.12), в выражение для Π , и получаем систему из n уравнений для определения параметров a_i , используя условие стационарности функционала Π , $\delta\Pi = 0$ (см. (3.1)), которое теперь дает

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.17)$$

Весьма важное соображение касается выбора пробных функций (или функций Ритца) согласно представлению (3.12). В процессе исследования по методу Ритца эти функции должны удовлетворять только существенным, но никак не естественным граничным условиям. Причина такого ослабленного требования на представление пробных функций связана с тем, что естественные граничные условия неявным образом включены в выражение для функционала Π . Предположим, что оператор L_{2m} , соответствующий вариационной задаче, является симметричным и положительно определенным. В этом случае фактический экстремум функционала Π представляет собой его минимум, и путем привлечения соотношения (3.17) мы минимизируем (в определенном смысле) нарушение требования о внутреннем равновесии и нарушение естественных граничных условий (см. раздел 4.3). В силу сказанного, желая добиться сходимости при анализе по методу Ритца, мы должны стремиться только к тому, чтобы пробные функции удовлетворяли существенным граничным условиям. Предвидеть такую ситуацию заранее было невозможно ввиду того, что, как известно, точное решение удовлетворяет также и естественным граничным условиям. Фактически, если предположить задание некоторого числа пробных функций, то можно ожидать, что в большинстве случаев решение будет

более точным, если выбранные функции удовлетворяют также и естественным граничным условиям. Однако нахождение таких пробных функций может оказаться очень затруднительным, и в общем случае более эффективным оказывается использование вместо этого большего числа функций, удовлетворяющих только существенным граничным условиям. Мы демонстрируем использование метода Ритца на нижеследующих примерах.

Пример 3.22: Рассмотрим простой брус, закрепленный на одном конце ($x = 0$) и подвергаемый действию сосредоточенной силы на другом конце ($x = 180$), как это показано на рис. 3.16. Если пользоваться обозначениями, приведенными на рисунке, то полный потенциал данной конструкции будет равен

$$\Pi = \int_0^{180} \frac{1}{2} EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx - 100u \Big|_{x=180}, \quad (a)$$

а существенное граничное условие имеет вид $u|_{x=0} = 0$.

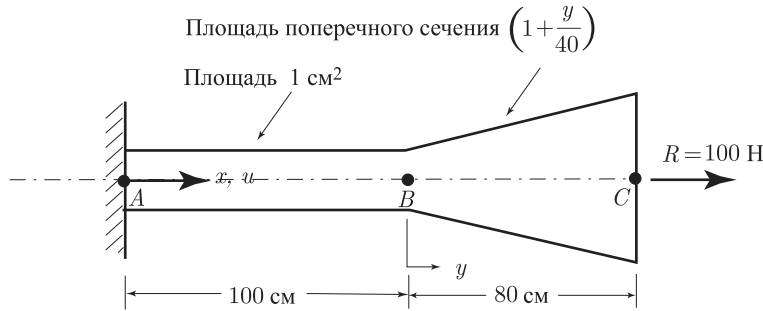


Рис. 3.16. Брус, подвергнутый на своем конце действию сосредоточенной силы

Требуется:

1. Рассчитать точные распределения смещений и напряжений в бресе.
2. Рассчитать распределения смещений и напряжений, пользуясь методом Ритца при следующих предположениях относительно смещений:

$$u = a_1 x + a_2 x^2 \quad (b)$$

и

$$u = \frac{x u_B}{100}; \quad 0 \leq x \leq 100, \quad (c)$$

$$u = \left(1 - \frac{x - 100}{80} \right) u_B + \left(\frac{x - 100}{80} \right) u_C; \quad 100 \leq x \leq 180,$$

где u_B и u_C — это смещения в точках B и C.

С целью расчета точных значений смещения в данной конструкции мы используем условие стационарности функционала Π , получая в результате определяющее дифференциальное уравнение и естественное граничное условие. Мы имеем

$$\delta \Pi = \int_0^{180} \left(EA \frac{du}{dx} \right) \delta \left(\frac{du}{dx} \right) dx - 100 \delta u \Big|_{x=180}. \quad (d)$$

Полагая $\delta \Pi = 0$ и используя интегрирование по частям, мы получаем (см. пример 3.19)

$$\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) = 0, \quad (e)$$

$$EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=180} = 100. \quad (f)$$

Решение уравнения (е) при естественном граничном условии (f) и существенном граничном условии $u|_{x=0} = 0$ дает

$$u = \frac{100}{E} x; \quad 0 \leq x \leq 100,$$

$$u = \frac{10000}{E} + \frac{4000}{E} - \frac{4000}{E \left(1 + \frac{x-100}{40}\right)}; \quad 100 \leq x \leq 180.$$

Точные значения напряжений в бресе таковы:

$$\sigma = 100; \quad 0 \leq x \leq 100,$$

$$\sigma = \frac{100}{\left(1 + \frac{x-100}{40}\right)^2}; \quad 100 \leq x \leq 180.$$

Далее, задаваясь целью провести аналитические выкладки по Ритцу, мы замечаем, что предположения о смещениях, соответствующие (b) и (c), удовлетворяют существенному граничному условию, но не удовлетворяют естественному. Подставляя выражение (b) в (a), мы получаем

$$\Pi = \frac{E}{2} \int_0^{100} (a_1 + 2a_2x)^2 dx + \frac{E}{2} \int_{100}^{180} \left(1 + \frac{x-100}{40}\right)^2 (a_1 + 2a_2x)^2 dx - 100u|_{x=180}.$$

Привлекая условие $\delta\Pi = 0$, получим следующие уравнения для определения a_1 и a_2 :

$$E \begin{bmatrix} 0,4467 & 115,6 \\ 115,6 & 34075,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 3240 \end{bmatrix} \quad (g)$$

и

$$a_1 = \frac{129}{E}; \quad a_2 = -\frac{0,341}{E}.$$

Следовательно, проведенный по Ритцу анализ дает приближенное решение в виде

$$u = \frac{129}{E} x - \frac{0,341}{E} x^2, \quad (h)$$

$$\sigma = 129 - 0,682x; \quad 0 \leq x \leq 180. \quad (i)$$

После этого, используя функции Ритца, соответствующие выражениям (c), получаем

$$\Pi = \frac{E}{2} \int_0^{100} \left(\frac{1}{100} u_B\right)^2 dx + \frac{E}{2} \int_{100}^{180} \left(1 + \frac{x-100}{40}\right)^2 \left(-\frac{1}{80} u_B + \frac{1}{80} u_C\right)^2 dx - 100u_C.$$

Вновь обращаясь к условию $\delta\Pi = 0$, получим

$$\frac{E}{240} \begin{bmatrix} 15,4 & -13 \\ -13 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_B \\ u_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \end{bmatrix}. \quad (j)$$

Следовательно, теперь мы имеем

$$u_B = \frac{10\,000}{E}; \quad u_C = \frac{11\,846,2}{E}$$

и

$$\sigma = 100; \quad 0 \leq x \leq 100,$$

$$\sigma = \frac{1846,2}{80} = 23,08; \quad 100 \leq x \leq 180.$$

В главе 4 мы увидим (см. пример 4.5), что этот анализ Ритца может рассматриваться как конечно-элементный анализ.

Пример 3.23: Рассмотрим плиту, представленную в примере 3.16. Предположим, что

$$\theta(t) = \theta_1(t) + \theta_2(t)x + \theta_3(t)x^2, \quad (a)$$

где $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ и $\theta_3(t)$ — неопределенные параметры. Требуется использовать процедуру анализа Ритца для получения уравнений, определяющих равновесную теплопередачу.

Функционал, характеризующий распределение температуры в плите (см. пример 3.18), равен

$$\Pi = \int_0^L \frac{1}{2} k \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx - \int_0^L \theta q^B dx - \theta \Big|_{x=0} q_0 \quad (b)$$

при существенном граничном условии

$$\theta \Big|_{x=L} = \theta_i.$$

Если предполагаемое согласно выражению (a) распределение температуры подставить в формулу (b), то получим

$$\Pi = \int_0^L \frac{1}{2} k ((\theta_2)^2 + 4\theta_2\theta_3x + 4(\theta_3)^2x^2) dx - \int_0^L (\theta_1 + \theta_2x + \theta_3x^2) q^B dx - \theta_1 q_0.$$

Обращаясь к условию стационарности для Π , т.е. к условию $\delta\Pi = 0$, мы сводим его к условиям

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_1} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_2} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_3} = 0$$

и получаем

$$k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & L^2 \\ 0 & L^2 & (4/3)L^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^L q^B dx + q_0 \\ \int_0^L x q^B dx \\ \int_0^L x^2 q^B dx \end{bmatrix}. \quad (c)$$

При проводимом здесь анализе величина q_0 изменяется со временем, так что меняется со временем и температура, а это значит, что и влияние теплоемкости может оказаться важным. Если использовать выражение

$$q^B = -\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad (d)$$

что допустимо в силу того, что никакое другое тепло в системе не порождается, а затем подставить в (d) выражение для θ из (a), после чего полученный результат подставить в (c), то в качестве уравнений равновесия получим

$$k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & L^2 \\ 0 & L^2 & \frac{4}{3}L^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} + \rho c \begin{bmatrix} L & \frac{1}{2}L^2 & \frac{1}{3}L^3 \\ \frac{1}{2}L^2 & \frac{1}{3}L^3 & \frac{1}{4}L^4 \\ \frac{1}{3}L^3 & \frac{1}{4}L^4 & \frac{1}{5}L^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (e)$$

Наконец, окончательный вид уравнений равновесия может быть получен, если на уравнения (e) наложить условие $\theta \Big|_{x=L} = \theta_i$, т.е.

$$\theta_1(t) + \theta_2(t)L + \theta_3(t)L^2 = \theta_i.$$

Желаемая форма уравнений может быть получена, если входящую в уравнения (e) величину θ_1 выразить через θ_2 , θ_3 и θ_i .

Пример 3.24: Рассмотрим реакцию статического прогиба стойки из примера 3.20. Предположим, что

$$w = a_1 x^2 + a_2 x^3 \quad (a)$$

и воспользуемся методом Ритца, чтобы сформулировать те уравнения, из которых мы сможем затем определить нагрузку прогиба.

Функционал, определяющий собой решение данной задачи, был дан в примере 3.20,

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx - \frac{P}{2} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} k(w|_{x=L})^2. \quad (b)$$

Отметим, что задаваемая согласно (а) пробная функция для w уже удовлетворяет существенным граничным условиям (смещение и угол наклона равны нулю на закреплённом конце). Если подставить в формулу (b) выражение для w , то получим

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI(2a_1 + 6a_2 x)^2 dx - \frac{P}{2} \int_0^L (2a_1 x + 3a_2 x^2)^2 dx + \frac{1}{2} k(a_1 L^2 + a_2 L^3)^2.$$

Теперь обратимся к условию стационарности $\delta\Pi = 0$, т.е. в данном случае к условиям

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0.$$

В результате получим

$$\left\{ 2EI \begin{bmatrix} 2L & 3L^2 \\ 3L^2 & 6L^3 \end{bmatrix} + kL^4 \begin{bmatrix} 1 & L \\ L & L^2 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} - PL^3 \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{3L}{2} \\ \frac{3L}{2} & \frac{9L^2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Решение этой задачи о собственных значениях даёт два значения P , для которых величина w , определяемая согласно (а), отлична от нуля. Меньшее из двух значений P представляет собой аппроксимацию наименьшей нагрузки прогиба конструкции.

Методы взвешенных невязок, представленные формулами (3.14)–(3.16), трудно использовать на практике, потому что пробные функции должны быть $2m$ -кратно дифференцируемыми и удовлетворять всем — существенным и естественным — граничным условиям (см. (3.13)). С другой стороны, при применении метода Ритца, который оперирует с функционалом, соответствующим рассматриваемой нами задаче, пробные функции должны быть лишь m -кратно дифференцируемыми и не обязаны удовлетворять естественным граничным условиям. Эти соображения чрезвычайно важны для практического анализа, а поэтому на практике метод Галеркина применяется в несколько иной форме, а именно — в такой, которая позволяет использовать те же функции, что и используемые в методе Ритца. При исследовании поведения твердых тел и конструкций, основанном на анализе смещений, об этой разновидности метода Галеркина говорят как о *принципе виртуальных перемещений*. Если используется надлежащий вариационный индикатор Π , то уравнения, получаемые с помощью метода Ритца, будут тогда идентичны уравнениям, полученным с помощью метода Галеркина.

В следующем разделе мы будем подробно рассматривать все перечисленные выше тезисы, ставя своей целью обеспечить более глубокое понимание для введения в реализацию метода конечных элементов.

3.3.4. Обзор: дифференциальная схема, схема Галеркина, принцип виртуальных перемещений, введение в решение методом конечных элементов

В предыдущих разделах мы дали обзор некоторых классических дифференциальных и вариационных формулировок, версии классических методов взвешенных невязок, а также метода Ритца. Теперь мы хотели бы, во-первых, укрепить наше понимание указанных аналитических подходов, перечислив некоторые важные понятия и, во-вторых, дать краткое введение в математические основы тех конечно-элементных процедур, которые будут использоваться и обобщаться в главе 4.

На пути к этой цели сосредоточимся на изучении простого примера, содержащего анализ некой задачи.

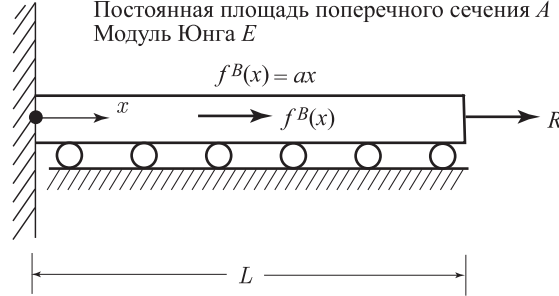


Рис. 3.17. Однородный брус, подвергнутый действию распределенной нагрузки f^B (сила/единица длины) и концевой нагрузки R

Рассмотрим одномерный брус, показанный на рис. 3.17. Этот брус подвергается действию распределенной нагрузки $f^B(x)$ и сосредоточенной нагрузки R на своем правом конце. Согласно обсуждению, проведенному в разделе 3.3.1, дифференциальная формулировка задачи для бруса приводит к определяющим соотношениям

$$\text{Дифференциальная формулировка} \quad \left\{ \begin{array}{ll} EA \frac{d^2 u}{dx^2} + f^B = 0 & \text{внутри бруса} \quad (3.18) \\ u|_{x=0} = 0 & (3.19) \\ EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = R. & (3.20) \end{array} \right.$$

Учитывая, что $f^B = ax$, мы получим решение вида

$$u(x) = \frac{-(ax^3/6) + (R + (1/2)aL^2)x}{EA}. \quad (3.21)$$

Уместно вспомнить, что уравнение (3.18) представляет собой констатацию равновесия в любой точке x внутри бруса, что выражение (3.19) соответствует существенному (или геометрическому) граничному условию (см. раздел 3.2.2), а соотношение (3.20) есть естественное (или силовое) граничное условие. Разумеется, точное аналитическое решение (3.21) удовлетворяет всем трем соотношениям, (3.18)–(3.20).

Отметим также, что решение $u(x)$ представляет собой непрерывную и дважды дифференцируемую функцию, как этого и требует уравнение (3.18). Действительно, мы можем сказать, что решения уравнения (3.18), удовлетворяющие условиям (3.19) и (3.20) для любой непрерывной нагрузки f^B , лежат в *пространстве* непрерывных и дважды дифференцируемых функций, удовлетворяющих условиям (3.19) и (3.20).

Альтернативный подход к решению исследуемой задачи связан с ее вариационной формулировкой (см. раздел 3.3.2),

$$\text{Вариационная формулировка} \left\{ \begin{array}{l} \Pi = \int_0^L \frac{1}{2} EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx - \int_0^L u f^B dx - Ru \Big|_{x=L} \\ \delta \Pi = 0 \\ \text{при } u|_{x=0} = 0 \\ \delta u|_{x=0} = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.22) \\ (3.23) \\ (3.24) \\ (3.25) \end{array}$$

где символ δ означает «вариацию по», а δu есть произвольная вариация по u , подчиняющаяся условию $\delta u|_{x=0} = 0$. Мы можем представить себе $\delta u(x)$ как некую непрерывную функцию, удовлетворяющую граничному условию (3.25) ¹⁾.

Следует напомнить, что соотношения (3.22)–(3.25) совершенно эквивалентны соотношениям (3.18)–(3.20) (см. раздел 3.3.2). Это значит, что если обратиться к условию (3.23), а затем использовать интегрирование по частям и граничное условие (3.25), то мы придем к уравнению (3.18) и условию (3.20). Следовательно, решение уравнения (3.22) при условиях (3.23)–(3.25) также совпадает с выражением (3.21).

Вывод вариационной формулировки можно провести следующим образом.

Если учесть, что соотношение (3.18) справедливо во всех точках внутри бруса, то мы имеем также

$$\left(EA \frac{d^2 u}{dx^2} + f^B \right) \delta u = 0, \quad (3.26)$$

где $\delta u(x)$ представляет собой произвольную вариацию u (или произвольную непрерывную функцию), удовлетворяющую условию $\delta u|_{x=0} = 0$. Отсюда следует, что

$$\int_0^L \left(EA \frac{d^2 u}{dx^2} + f^B \right) \delta u dx = 0. \quad (3.27)$$

Производя интегрирование по частям, получим

$$\int_0^L \frac{d\delta u}{dx} EA \frac{du}{dx} dx = \int_0^L f^B \delta u dx + EA \frac{du}{dx} \delta u \Big|_0^L. \quad (3.28)$$

Далее, подставляя сюда выражения из (3.20) и (3.25), получаем

$$\text{Принцип виртуальных перемещений} \left\{ \begin{array}{l} \int_0^L \frac{d\delta u}{dx} EA \frac{du}{dx} dx = \int_0^L f^B \delta u dx + R \delta u \Big|_{x=L} \\ \text{при } u|_{x=0} = 0; \quad \delta u|_{x=0} = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.29) \\ (3.30) \end{array}$$

¹⁾ В специальной литературе о дифференциальной и вариационной формулировках говорят также, соответственно, как о сильной и слабой формах. О вариационных моделях говорят также как об обобщенных моделях.

Разумеется, соотношение (3.29) дает

$$\delta \left\{ \int_0^L \left[\frac{EA}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - f^B u \right] dx - Ru \Big|_{x=L} \right\} = 0, \quad (3.31)$$

что вместе с условиями (3.30) представляет собой вариационную формулировку, соответствующую (3.22)–(3.25).

Соотношение (3.29) в сочетании с условиями (3.30) представляет собой знаменитый принцип виртуальных перемещений (или принцип виртуальной работы), в котором $\delta u(x)$ является виртуальным перемещением. Этот принцип будет широко обсуждаться в разделе 4.2, причем следует отметить, что элементы вывода в соотношениях (3.26)–(3.30) представляют собой частный случай того, что дается в примере 4.2.

Важно отдать себе отчет в том, что три приведенные выше модели совершенно эквивалентны, т.е. что решение (3.21) является *единственным решением*¹⁾ $u(x)$ при использовании дифференциальной или вариационной модели, а также принципа виртуальных перемещений. Отметим, однако, что применение вариационной модели и принципа виртуальной работы требует лишь производных первого порядка от функций u и δu . Следовательно, то пространство функций, в котором мы ищем решение, является, очевидно, гораздо более обширным, чем пространство функций, использованное для решения уравнения (3.18) (точное определение указанного пространства дается выражением (3.35)), и здесь должен возникнуть вопрос — что означает и насколько важен тот факт, что при решении задачи, соответствующей рис. 3.17, с помощью принципа виртуальных перемещений, мы используем более обширное пространство функций.

Конечно же, пространство функций, используемое с принципом виртуальных перемещений, содержит в себе пространство функций, используемое при дифференциальной формулировке, и, следовательно, все те аналитические проблемы, которые могут быть решены при дифференциальной формулировке (3.18)–(3.20), могут получить точное решение также и с помощью принципа виртуальных перемещений. Однако при анализе поведения бруса (как и при анализе брусов и балок общего типа) возникают дополнительные условия, при наличии которых решение можно построить непосредственно путем применения принципа виртуальной работы. В числе этих условий можно указать на те, при которых сосредоточенные нагрузки прилагаются внутри бруса, или когда имеют место скачкообразные изменения материальных свойств или же площади поперечного сечения. В этих случаях первая производная функции $u(x)$ терпит разрыв и, следовательно, дифференциальная формулировка должна быть соответствующим образом расширена (по существу, это расширение сводится к тому, чтобы рассматривать по отдельности каждый участок бруса, внутри которого нет приложенных сосредоточенных нагрузок и в котором не обнаруживаются никакие скачкообразные изменения материальных свойств или площади поперечного сечения, а впоследствии присоединять этот участок к соседним участкам с помощью соответствующих граничных условий; см., например, [Crandall et al. 1978]). Следовательно, в этих случаях вариационная

¹⁾ Единственность решения $u(x)$ в данном случае следует, очевидно, из простоты процесса интегрирования при получении (3.21), однако общее доказательство того, что решение линейной задачи теории упругости всегда является единственным, дается соотношениями (4.80)–(4.82).

модель и принцип виртуальных перемещений оказываются, в известном смысле, более прямыми, и обладают большей мощностью в построении решения.

При изучении общих случаев двумерного и трехмерного распределения напряжений мы будем рассматривать только математические модели с конечной энергией деформации (это означает, например, что сосредоточенные нагрузки должны предлагаться только так, как это указывается в разделе 1.2, см. рис. 1.4 и как это более подробно обсуждается в разделе 4.3.4), а тогда применение дифференциальной модели и принципа виртуальной работы оказываются совершенно эквивалентными и приводят к одинаковым решениям (см. главу 4).

Эти соображения указывают на возможность использования мощной процедуры общего характера для построения численного решения задачи, показанной на рис. 3.17. Рассмотрим соотношение (3.27), в котором величина δu будет заменена на пробную функцию v , то есть

$$\int_0^L \left(EA \frac{d^2 u}{dx^2} + f^B \right) v dx = 0 \quad (3.32)$$

с условиями $u = 0$ и $v = 0$ при $x = 0$. Интегрируя по частям и используя условие (3.20), получим

$$\int_0^L \frac{dv}{dx} EA \frac{du}{dx} dx = \int_0^L f^B v dx + Rv \Big|_{x=L}. \quad (3.33)$$

Это соотношение представляет собой приложение метода Галеркина или принципа виртуальных перемещений и сводится к утверждению о том, что «для того, чтобы $u(x)$ было истинным решением задачи, левая часть соотношения (3.33) (внутренняя виртуальная работа) должна быть равна его правой части (внешней виртуальной работе) при произвольных пробных функциях, или виртуальных функциях смещения $v(x)$, которые являются непрерывными и удовлетворяют условию $v = 0$ при $x = 0$ ».

В главе 4 мы переформулируем соотношение (3.33) в следующей форме:

$$\text{Найти } u \in V \text{ такое, что } ^1) \quad a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V, \quad (3.34)$$

где пространство V определяется как

$$V = \left\{ v \mid v \in L^2(L), \frac{dv}{dx} \in L^2(L), v \Big|_{x=0} = 0 \right\}, \quad (3.35)$$

а $L^2(L)$ есть пространство функций, квадратично интегрируемых по длине бруса, $0 \leq x \leq L$,

$$L^2(L) = \left\{ w \mid w \text{ определяется при } 0 \leq x \leq L \text{ и } \int_0^L (w)^2 dx = \|w\|_{L^2}^2 < \infty \right\}. \quad (3.36)$$

Используя (3.34) и (3.33), получим

$$a(u, v) = \int_0^L \frac{du}{dx} EA \frac{dv}{dx} dx \quad (3.37)$$

¹⁾ Символы \forall и \in означают, соответственно, «для всех» и «элемент...».

и

$$(f, v) = \int_0^L f^B v dx + Rv \Big|_{x=L}, \quad (3.38)$$

где $a(u, v)$ есть билинейная форма, а (f, v) — линейная форма данной задачи.

Определение пространства функций V согласно (3.35) гласит, что любой элемент v внутри V равен нулю при $x = 0$, а также что

$$\int_0^L v^2 dx < \infty; \quad \int_0^L \left[\frac{dv}{dx} \right]^2 dx < \infty.$$

Следовательно, любой элемент v в пространстве V соответствует конечной энергии деформаций. Отметим, что совокупность элементов, входящих в V , включает и все функции, являющиеся кандидатами на решение при дифференциальной формулировке в соотношениях (3.18)–(3.20) с любой непрерывной функцией f^B , а также соответствует возможным решениям с разрывными деформациями (возникающими под воздействием сосредоточенных нагрузок или же из-за разрывного характера поведения материала или площади поперечного сечения). Это наблюдение лишний раз подтверждает общий характер формулировки задачи, данной в форме (3.34) и (3.35).

Для построения решения по Галеркину (или конечно-элементного решения) мы определяем пространство V_h пробных (или конечно-элементных) функций v_h , как

$$V_h = \left\{ v_h \mid v_h \in L^2(L), \frac{dv_h}{dx} \in L^2(L), v_h \Big|_{S_u} = 0 \right\}, \quad (3.39)$$

где S_u обозначает площадь той поверхности, на которой задается нулевое смещение. Индекс h означает, что рассматривается некий конкретный вариант конечно-элементной дискретизации (кроме того, символ h характеризует размер элементов; см. раздел 4.3). В итоге, конечно-элементная формулировка задачи такова:

$$\text{Найти } u_h \in V_h \text{ такую, что } a(u_h, v_h) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (3.40)$$

Конечно, формулировка (3.40) соответствует принципу виртуальных перемещений, применяемому с функциями, содержащимися в V_h , а также обеспечивает минимизацию потенциала полной энергии внутри этого пространства пробных функций. Следовательно, формулировка (3.40) соответствует использованию метода Ритца, описанного в разделе 3.3.3. Мы будем подробно обсуждать конечно-элементную модель в главе 4.

Здесь, однако, следует отметить, что тот же самый подход к решению может быть непосредственно применен к исследованию любой задачи, для которой мы имеем определяющее дифференциальное уравнение (или систему уравнений). Соответствующая процедура была бы такова: снабдить определяющее уравнение (уравнения) в пределах данной области подходящей весовой пробной функцией (функциями); проинтегрировать получаемое в результате уравнение (уравнения) при помощи преобразования с интегрированием по частям (или, в более общей форме, с использованием теоремы о дивергенции; см. пример 4.2); и, наконец, подставить естественные граничные условия, — как это было сделано при выводе соотношения (3.33).

Действуя таким образом, мы получаем принцип виртуальных перемещений для общего анализа поведения твердых тел и конструкций (см. пример 4.2), «принцип виртуальных температур» для общего анализа распределения тепловых потоков

и температуры в твердых телах (см. пример 7.1), а также «принцип виртуальных скоростей» для общего анализа потоков жидкости (см. раздел 7.4.2).

Чтобы проиллюстрировать использование приведенных выше понятий и обозначений, рассмотрим приводимые ниже примеры.

Пример 3.25: Рассмотрим процесс исследования задачи, представленной в примере 3.22. Запишем формулировку задачи в виде (3.40) и идентифицируем базисные функции метода конечных элементов, используемые при предположениях (b) и (c) о смещениях из этого примера.

Здесь билинейная форма $a(.,.)$ имеет вид

$$a(u_h, v_h) = \int_0^{180} \frac{du_h}{dx} EA \frac{dv_h}{dx} dx,$$

а линейная форма представляется как

$$(f, v_h) = 100v_h|_{x=180}.$$

При предположении (b) относительно смещений используется представление

$$u_h = a_1x + a_2x^2.$$

Следовательно, V_h представляет собой двумерное пространство, и две базисные функции имеют форму

$$v_h^{(1)} = x \quad \text{и} \quad v_h^{(2)} = x^2.$$

Предположение (c) относительно смещений позволяет дать представление

$$u_h = \frac{x}{100} u_B; \quad 0 \leq x \leq 100,$$

$$u_h = \left(1 - \frac{x-100}{80}\right) u_B + \frac{(x-100)}{80} u_C; \quad 100 \leq x \leq 180,$$

а две базисные функции имеют вид

$$v_h^{(1)} = \begin{cases} \frac{x}{100} & \text{при } 0 \leq x \leq 100, \\ 1 - \frac{x-100}{80} & \text{при } 100 \leq x \leq 180 \end{cases}$$

и

$$v_h^{(2)} = \frac{x-100}{80} \quad \text{при } 100 \leq x \leq 180.$$

Очевидно, что все эти функции удовлетворяют условиям из (3.39). Если мы используем формулировку (3.40), то получим уравнения, приводимые в примере 3.22. как (g) и (j).

Пример 3.26: Рассмотрим процесс исследования задачи, представленной в примере 3.23. Запишем формулировку задачи в виде (3.40) и идентифицируем элементные базисные функции, используемые при введенных в указанном примере предположениях о распределении температуры.

Здесь формулировка задачи такова:

$$\text{Найти } \theta_h \in V_h, \text{ такую, что } a(\theta_h, \psi_h) = (f, \psi_h) \quad \forall \psi_h \in V_h, \quad (\text{a})$$

где

$$a(\theta_h, \psi_h) = \int_0^L \frac{d\psi_h}{dx} k \frac{d\theta_h}{dx} dx,$$

$$(f, \psi_h) = \int_0^L \psi_h q^B dx + q_0 \psi_h \Big|_{x=0}.$$

Здесь функции θ_h и ψ_h соответствуют распределению температуры в плите. При допущении, сделанном в примере 3.23, для пространства V_h имеются три базисные функции:

$$\theta_h^{(1)} = 1; \quad \theta_h^{(2)} = x; \quad \theta_h^{(3)} = x^2.$$

В модели (а) получим определяющие уравнения, приводимые в примере 3.23 как (с). Отметим, что в данной формулировке мы еще не ставили существенное граничное условие (что делается позднее, как в примере 3.23).

3.3.5. Конечно-разностные методы: дифференциальный и энергетический

Классический подход к построению численного решения определяющих уравнений для континуальной математической модели состоит в использовании конечных разностей (см., например, [Collatz 1966]), и весьма целесообразно иметь близкое знакомство с этим подходом, так как оно существенно укрепит наше понимание конечно-элементных процедур. При построении конечно-разностного решения производные заменяются конечно-разностными аппроксимациями, и решения могут быть получены как для дифференциальных, так и для вариационных формулировок математических моделей.

В качестве примера рассмотрим задачу об однородном бруске, показанном на рис. 3.17, где определяющее дифференциальное уравнение имеет вид (см. пример 3.17 и раздел 3.3.4)

$$u'' + \frac{f^B}{EA} = 0, \quad (3.41)$$

а граничные условия таковы:

$$u = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad (3.42)$$

$$EA \frac{du}{dx} = R \quad \text{при } x = L. \quad (3.43)$$

Если использовать постоянный шаг h между точками фиксации конечных разностей, то можно записать (см. рис. 3.18)

$$u' \Big|_{i+1/2} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}; \quad u' \Big|_{i-1/2} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \quad (3.44)$$

и

$$u'' \Big|_i = \frac{u' \Big|_{i+1/2} - u' \Big|_{i-1/2}}{h}, \quad (3.45)$$

так что

$$u'' \Big|_i = \frac{1}{h^2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}). \quad (3.46)$$

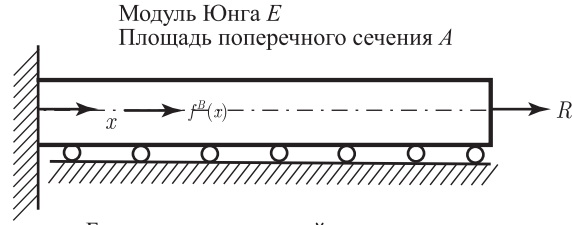
Выражение, фигурирующее в формуле (3.46), называется *аппроксимацией с помощью центральных разностей*. Если подставить выражение (3.46) в уравнение (3.41), то получим

$$\frac{EA}{h} (-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}) = f_i^B h, \quad (3.47)$$

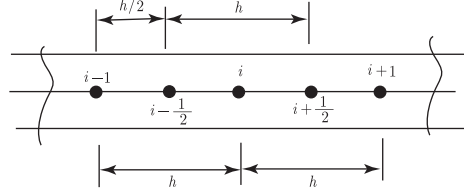
где f_i^B — это значение нагрузки в i -й точке, а величина $f_i^B h$ может рассматриваться, как полная нагрузка, приложенная в данной точке фиксации конечных разностей.

Предположим теперь, что мы используем в общей сложности $n + 1$ точек фиксации конечных разностей по длине бруса, при точке $i = 0$ на закрепленном конце и точке $i = n$ на другом конце. Тогда граничные условия имеют вид

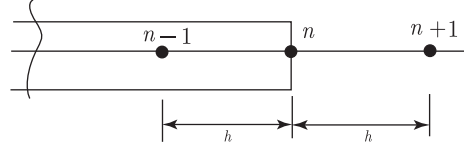
$$u_0 = 0 \quad (3.48)$$



а. Брус, предназначенный для анализа, $f^B(x) = ax$



б. Точки фиксации конечных разностей $i-1, i, i+1$
(точки $i-\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}$ не являются точками фиксации)



в. Фиктивная точка фиксации конечных разностей $n+1$, расположенная вне бруса

Рис. 3.18. Конечно-разностный анализ для бруса

и

$$EA \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} = R, \quad (3.49)$$

где была введена фиктивная $(n+1)$ -я точка, расположенная вне бруса (см. рис. 3.18(с)) и нужная только для постановки граничного условия (3.43).

Для построения конечно-разностного решения мы применяем соотношение (3.47) во всех точках $i = 1, \dots, n$, а также используем граничные условия (3.48) и (3.49), после чего получаем

$$\frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \\ R_{n-1} \\ R_n \end{bmatrix}, \quad (3.50)$$

где $R_i = f_i^B h$, $i = 1, \dots, n-1$, а $R_n = f_n^B h/2 + R$.

Следует отметить, что уравнение (3.50) совпадает с теми уравнениями, которые были бы получены при использовании ряда из n пружинных элементов, каждый из которых имеет жесткость EA/h . Нагрузки в узловых точках, соответствующие $f^B(x)$, могли бы быть определены путем использования значения распределенной

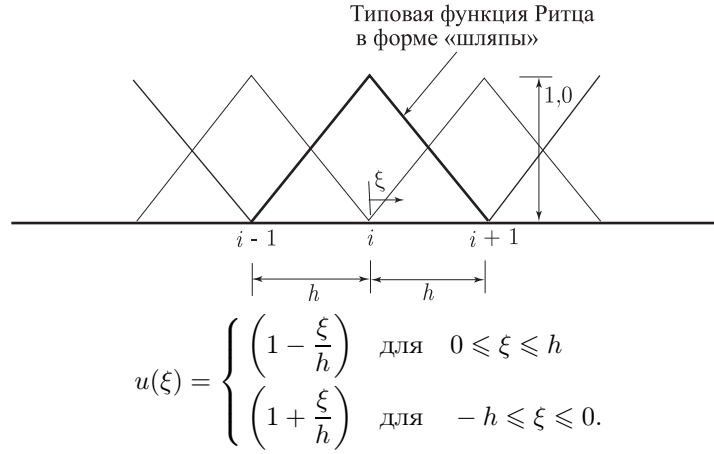


Рис. 3.19. Типовая функция Ритца или базисная функция Галеркина, используемая при анализе задачи о брус

нагрузки в i -м узле и умножения этого значения на длину, дающую вклад (т. е. на h для внутренних узлов и на $h/2$ для конечного узла).

Если воспользоваться методом Ритца с вариационной формулировкой математической модели и со специфическими функциями Ритца то матрица коэффициентов получится точно такой же. Соответствующий функционал имеет вид (см. пример 3.19)

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EA(u')^2 dx - \int_0^L u f^B dx - Ru \Big|_{x=L}, \quad (3.51)$$

а специфические функции Ритца показаны на рис. 3.19. Несмотря на то, что матрица коэффициентов осталась такой же, вектор нагрузки получается отличным от прежнего, если только нагрузка не остается постоянной по длине бруса.

Разумеется, те же уравнения, что и при решении по Ритцу, получаются при использовании описанного в разделе 3.3.4 метода Галеркина (т. е. принципа виртуальной работы) с базисными функциями, показанными на рис. 3.19.

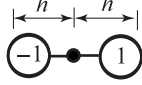
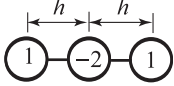


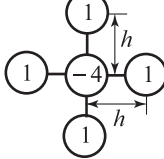
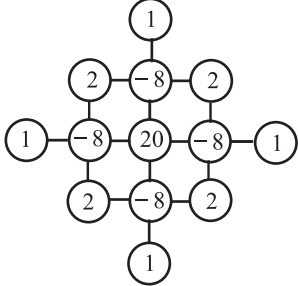
Как видно из проведенного выше обсуждения, метод конечных разностей может быть использован также и для получения матриц жесткости; кроме того, в некоторых случаях уравнения, получаемые в результате применения метода Ритца, совпадают или почти совпадают с уравнениями для конечно-разностного решения.

В качестве подведения итогов, в таблице 3.1 приводятся некоторые, широко используемые конечно-разностные аппроксимации, называемые также конечно-разностными шаблонами или молекулами. Применение этих шаблонов будет продемонстрировано на двух примерах.

Пример 3.27: Рассмотрим простейшим образом опертую балку, показанную на рис. 3.20. Требуется использовать традиционный конечно-разностный подход для получения уравнений равновесия системы.

Конечно-разностная сетка, используемая при анализе поведения балки, показана на рисунке. При традиционном конечно-разностном анализе рассматривается дифференциальное уравнение равновесия вместе с геометрическими и естественными граничными условиями; это значит, что для каждой из внутренних точек нам следует дать конечно-

Таблица 3.1. Конечно-разностные аппроксимации для различных дифференциалов

Дифференциал	Конечно-разностная аппроксимация	Молекулы
$\left. \frac{dw}{dx} \right _i$	$\frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}$	
$\left. \frac{d^2w}{dx^2} \right _i$	$\frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2}$	
$\left. \frac{d^3w}{dx^3} \right _i$	$\frac{w_{i+2} - 2w_{i+1} + 2w_{i-1} - w_{i-2}}{2h^3}$	
$\left. \frac{d^4w}{dx^4} \right _i$	$\frac{w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2}}{h^4}$	
$\nabla^2 w _{i,j}$	$\frac{-4w_{i,j} + w_{i+1,j} + w_{i,j+1} + w_{i-1,j} + w_{i,j-1}}{h^2}$	
$\nabla^4 w _{i,j}$	$[20w_{i,j} - 8(w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) + 2(w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1} + w_{i+1,j-1}) + w_{i+2,j} + w_{i-2,j} + w_{i,j+2} + w_{i,j-2}]/h^4$	

Шаг h один и тот же во всех случаях; в каждом случае ошибка составляет $o(h^2)$. Рассматривается точка i или (i, j) ; запись $i \pm \dots$ обозначает точки по оси x , $j \pm \dots$ — по оси y .

разностную аппроксимацию уравнения

$$EI \frac{d^4w}{dx^4} = q \quad (a)$$

и использовать условия: $w = 0$ и $w'' = 0$ при $x = 0$ и $x = L$.

Если использовать центральные разности, то в i -й точке уравнение (а) аппроксимируется соотношением

$$\frac{EI}{(L/5)^3} \{w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}\} = R_i, \quad (b)$$

где $R_i = q_i L/5$ представляет собой сосредоточенную нагрузку в i -й точке. Условие равенства нулю w'' в i -й точке аппроксимируется в виде

$$w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1} = 0. \quad (c)$$

коэффициентам +1, выражаются в терминах центрального смещения. Например, условие равенства нулю момента дает (см. рис. 3.21)

$$w_1 - 2w_2 + w_3 = 0$$

и, так как $w_2 = 0$, то

$$w_3 = -w_1,$$

и мы получим

$$16w_1 = \frac{P}{D} \left(\frac{L}{2} \right)^4;$$

$$\left[\frac{16D}{(L/2)^2} \right] w_1 = R; \quad R = p \left(\frac{L}{2} \right)^2.$$

Отметим, что это соотношение, по существу, символизирует замену пластины одной пружиной жесткости $k = 64D/L^2$, а полная нагрузка, действующая на эту пружину, задается величиной R . Вычисляемое таким образом отклонение w_1 отличается от рассчитанного аналитически «точного» значения всего на 4 процента.

С целью динамического анализа воспользуемся принципом Даламбера и вычтем из прилагаемой внешней нагрузки R инерционную нагрузку $M\ddot{w}_1$, где M есть условная масса, в некотором смысле эквивалентная распределенной массе пластины,

$$M = m \left(\frac{L}{2} \right)^2.$$

Следовательно, уравнение динамического равновесия имеет вид

$$m \frac{L^2}{4} \ddot{w}_1 + \frac{64D}{L^2} w_1 = R.$$

В двух приведенных выше примерах, а также при анализе поведения бруса, изображенного на рис. 3.17, дифференциальные уравнения равновесия аппроксимировались с помощью конечных разностей. Если эти уравнения используются для решения математической модели, то существенные и естественные граничные условия необходимо аппроксимировать конечными разностями и наложить их на матрицу коэффициентов. При рассмотрении задач о балке и о пластине, проведенном в примерах 3.27 и 3.28, эти граничные условия наложить было бы нетрудно (существенными граничными условиями являются условия отсутствия смещений на границах, а естественные граничные условия — это условия равенства нулю моментов относительно граничных линий). Однако в случаях сложной геометрии наложение естественных граничных условий может оказаться затруднительным, так как топология конечно-разностной сетки ставит ограничения на возможную форму реализации разностей, и возможно, что будет трудно строгим путем придти к симметричной матрице коэффициентов (см. [Ghali, Bathe 1970]).

Трудности, связанные с использованием дифференциальных формулировок, стимулировали развитие приемов конечно-разностного анализа, основанных на принципе минимума полной потенциальной энергии; совокупность таких приемов называют *энергетическим методом конечных разностей* (см., например, [Bushnell et al. 1971]). Согласно этой схеме производные перемещения, входящие в выражение полной потенциальной энергии Π данной системы, аппроксимируются конечными разностями, а условие минимума Π используется для вычисления неизвестных значений смещений в узловых точках. Учитывая, что для рассматриваемой задачи применяется вариационная формулировка, в ее разностном варианте должны удовлетворяться только существенные (геометрические) граничные условия. Кроме того, здесь всегда получается симметричная матрица коэффициентов.

Как и следовало ожидать, энергетический метод конечных разностей имеет много общего с методом Рунге, и в некоторых случаях оба метода приводят к одним и тем же алгебраическим уравнениям.

Преимущество энергетического метода конечных разностей состоит в эффективности построения матрицы коэффициентов для системы алгебраических уравнений. Однако метод Галеркина, реализуемый в форме конечно-элементных процедур, рассматриваемых в последующих главах, сводится к значительно более общим и мощным техническим приемам и, конечно же, в этом и состоит причина успеха метода конечных элементов.

Было бы поучительным рассмотреть использование энергетического метода конечных разностей на некоторых примерах.

Пример 3.29: Рассмотрим консольную балку, показанную на рис. 3.22. Требуется рассчитать отклонение свободного конца, используя традиционный и энергетический методы конечных разностей.

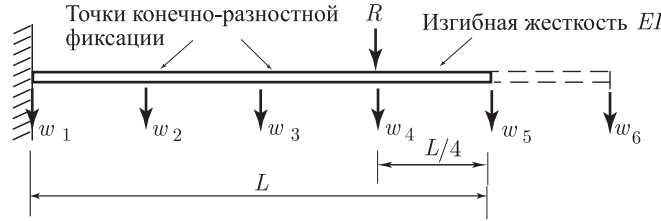


Рис. 3.22. Точки конечно-разностной фиксации для консольной балки

Используемая здесь конечно-разностная сетка показана на рисунке. Применяя традиционную конечно-разностную процедуру с центральными разностями, как это делалось в примере 3.27, получим уравнения равновесия

$$\frac{64EI}{L^3} \begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (a)$$

Можно отметить, что в дополнение к уравнениям, применявшимся в примере 3.27, здесь также используются условия $w' = 0$ на закреплённом конце и $w''' = 0$ на свободном конце. Для представления w' и w''' , равных нулю в i -й точке, используются, соответственно, соотношения

$$w_{i+1} - w_{i-1} = 0, \\ w_{i+2} - 2w_{i+1} + 2w_{i-1} - w_{i-2} = 0.$$

Если применяется энергетический метод конечных разностей, то полная потенциальная энергия Π задается в виде

$$\Pi = \frac{EI}{2} \int_0^L [w''(x)]^2 dx - R w \Big|_{x=\frac{3}{4}L}.$$

Для вычисления интеграла необходимо аппроксимировать $w''(x)$. Используя центральные разности, для i -й точки получим

$$w''_i = \frac{1}{(L/4)^2} (w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}). \quad (b)$$

Теперь приближенное решение может быть получено путем вычисления Π в узловых точках при использовании соотношения (b) и с заменой интеграла процессом суммирования; иначе говоря, используется аппроксимация

$$\Pi = \frac{L}{8} \Pi_1 + \frac{L}{4} (\Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4) + \frac{L}{8} \Pi_5 - R w_4, \quad (c)$$

где

$$\Pi_i = \frac{1}{2} [w_{i-1} \ w_i \ w_{i+1}] \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{EI}{(L/4)^4} [1 \ -2 \ 1] \begin{bmatrix} w_{i-1} \\ w_i \\ w_{i+1} \end{bmatrix}.$$

В результате, по аналогии с процедурами реализации конечно-элементного анализа (см. раздел 4.2) мы можем написать

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{B}_i^T \mathbf{C}_i \mathbf{B}_i \mathbf{U},$$

где \mathbf{B}_i есть обобщенная матрица преобразования деформация–смещение, \mathbf{C}_i есть матрица напряжение–деформация, а \mathbf{U} есть вектор с компонентами, соответствующими всем узловым смещениям. Используя прямой метод жесткости для вычисления полной потенциальной энергии, выражаемой согласно (с) и пользуясь условием стационарности полной потенциальной энергии (т.е. условием $\delta\Pi = 0$), получим уравнения равновесия

$$\frac{64EI}{L^3} \begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 & & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ 1 & -4 & 5,5 & -3 & 0,5 & \\ & 1 & -3 & 3 & -1 & \\ & & 0,5 & -1 & 0,5 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (d)$$

где уже было использовано условие нулевого наклона на закрепленном конце бруса.

Следует отметить близкое сходство между уравнениями равновесия, представленными в формах (а) и (d). Действительно, если исключить из уравнений (d) переменную w_6 , то мы получим уравнения (а). Следовательно, в данном случае мы получим одни и те же уравнения равновесия как при использовании энергетического метода конечных разностей, так и прибегая к традиционному методу конечных разностей.

В качестве примера положим $R = 1$, $EI = 10^3$ и $L = 10$. Тогда, пользуясь уравнениями в форме (а) или (d), мы получим

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0,023437 \\ 0,078125 \\ 0,14843 \\ 0,21875 \end{bmatrix}.$$

Точный результат для отклонения свободного конца дает $w_5 = 0,2109375$. Следовательно, конечно-разностный анализ приводит к хорошему приближенному решению.

Пример 3.30: Стержень, показанный на рис. 3.23, подвергается на своем правом конце притоку тепла q^S и имеет постоянную температуру θ_0 на левом конце, находясь при этом в стационарных условиях. Соответствующий функционал имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L k \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 A dx - q^S A_L \theta_L. \quad (a)$$

Пользуясь конечно-разностным методом, требуется получить приближенное решение для распределения температуры.

Используем конечные разности с пятью узлами, расположенными на одинаковых расстояниях друг от друга, как показано на рис. 3.23. Тогда конечно-разностная аппроксимация интеграла в выражении (а) имеет форму

$$\Pi = \frac{L}{4} \{ \Pi_{1/2} + \Pi_{3/2} + \Pi_{5/2} + \Pi_{7/2} \} - q^S A_L \theta_L,$$

где

$$\Pi_{1/2} = \frac{1}{2} [\theta_1 \ \theta_0] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{k \left(\frac{9}{8} \right)^2 A_0}{(L/4)^2} [1 \ -1] \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_0 \end{bmatrix},$$

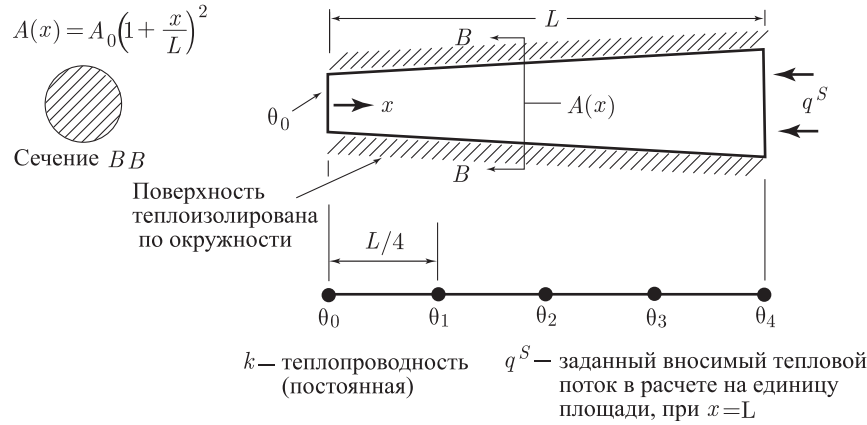


Рис. 3.23. Стержень в условиях теплопередачи; используются точки конечно-разностной фиксации

а значения $\Pi_{3/2}$, $\Pi_{5/2}$ и $\Pi_{7/2}$ вычисляются по аналогичным формулам. После вычисления Π , обращения к условию $\delta\Pi = 0$ и наложения граничного условия при известном значении θ_0 , получим

$$\frac{kA_0}{16L} \begin{bmatrix} 202 & -121 & & & \\ -121 & 290 & -169 & & \\ & -169 & 394 & -225 & \\ & & -225 & 225 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{81}{16L} kA_0\theta_0 \\ 0 \\ 0 \\ 4A_0q^S \end{bmatrix}.$$

Предположим теперь, что $\theta_0 = 0$. Тогда решение имеет вид

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,79 \\ 1,32 \\ 1,70 \\ 1,98 \end{bmatrix} \frac{Lq^S}{k},$$

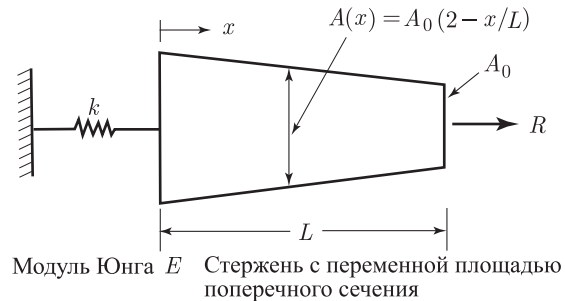
что можно сравнить с аналитическим решением

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix}_{\text{аналит.}} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 4/3 \\ 12/7 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{Lq^S}{k}.$$

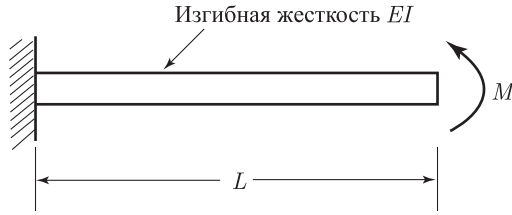
3.3.6. Упражнения

3.15.

Вывести дифференциальные уравнения равновесия для задачи, показанной на схеме при (геометрическом и силовом) граничных условиях. Определить, будет ли оператор L_{2m} для данной задачи симметричным и положительно определенным и доказать правильность ответа.



- 3.16. Рассмотреть показанный на схеме консольный брус, подвергающийся на своем конце действию момента M .



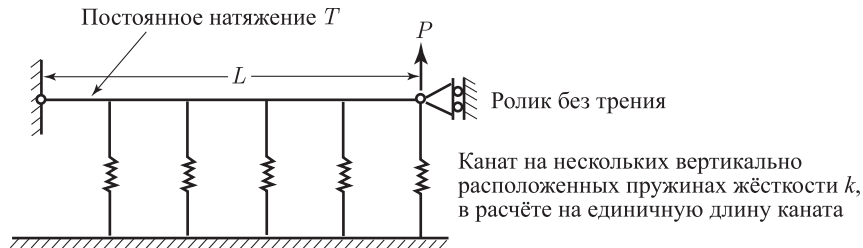
Определить функционал Π и сформулировать существенные граничные условия. Воспользоваться условием стационарности Π , применяя соотношение (3.7b) и используя то обстоятельство, что варьирование и дифференцирование осуществляются по одним и тем же правилам.

После этого установите дифференциальное уравнение равновесия и естественные граничные условия. Определите, будет ли оператор L_{2m} симметричным и положительно определенным, и докажете правильность своего ответа.

- 3.17. Рассмотрите задачу о теплопередаче, сформулированную в примере 3.30. Используйте условие стационарности заданного функционала, применяя соотношение (3.7b) и используя то обстоятельство, что варьирование и дифференцирование осуществляются по одним и тем же правилам. Сформулируйте дифференциальное уравнение, определяющее равновесие, а также все граничные условия. Определите, будет ли оператор L_{2m} симметричным и положительно определенным, и докажете правильность своего ответа.
- 3.18. Рассмотрите предварительно напряженный канат, схематически показанный на рисунке. Функционал имеет вид

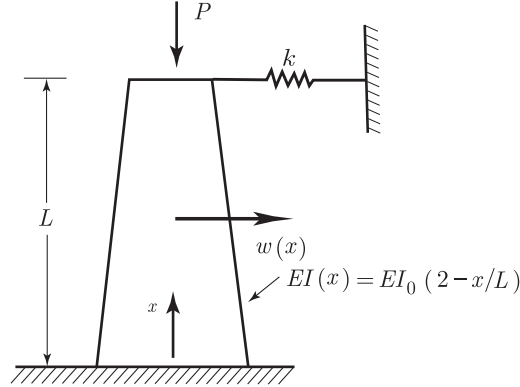
$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L R \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx + \int_0^L \frac{1}{2} k(w)^2 dx - Pw_L,$$

где w — поперечное смещение, а w_L — значение этого смещения при $x = L$. Сформулируйте дифференциальное уравнение равновесия и поставьте все граничные условия. Определите, будет ли оператор L_{2m} симметричным и положительно определенным, и докажете правильность своего ответа.



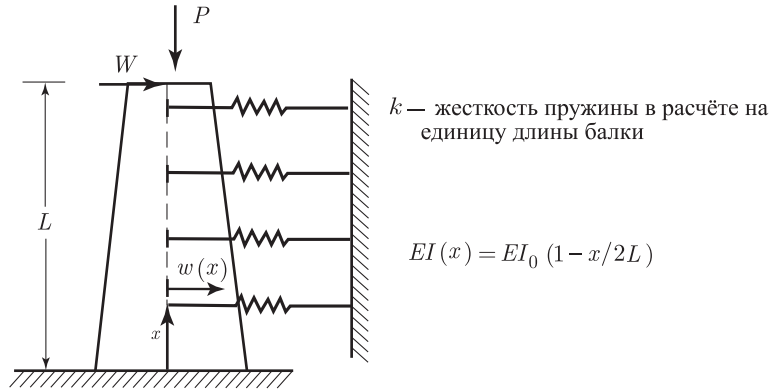
- 3.19. Рассмотрите предварительно напряженный канат, представленный в упражнении 3.18.
- Установите надлежащую форму той пробной функции, которую можно было бы применить к анализу поведения каната, используя классический метод Галеркина и метод наименьших квадратов. Испытайте форму $w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ и при необходимости видоизмените ее.
 - Установите вид определяющих функций системы применительно к выбранной форме пробной функции, используя классический метод Галеркина и метод наименьших квадратов.
- 3.20. Рассмотрите предварительно напряженный канат, представленный в упражнении 3.18. Сформулируйте определяющие уравнения, используя метод Ритца с пробной функцией $w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ (т. е. с некой подходящей модификацией представления решения).

- 3.21. Используйте метод Ритца для расчета нагрузки, прогибающей показанную на рисунке стойку, в линейном приближении. Предположите, что $w = cx^2$, где C — неизвестный параметр Ритца.



- 3.22. Рассмотрите показанную на рисунке конструкцию.

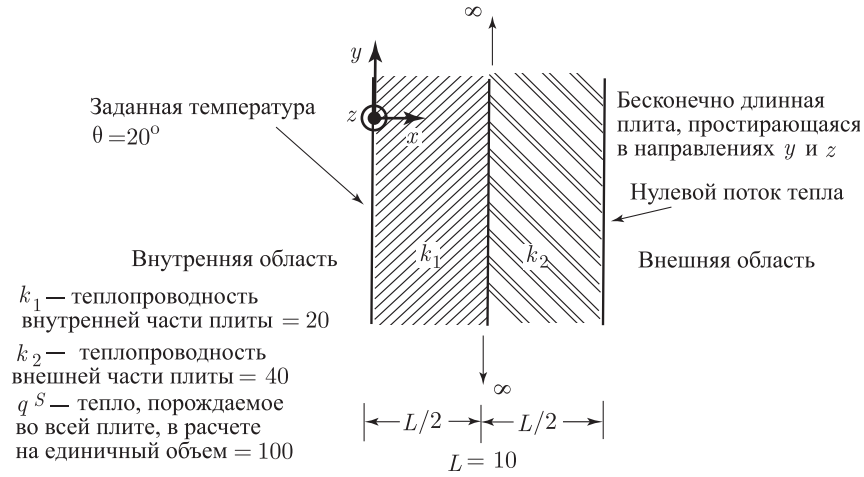
- (а) Воспользуйтесь методом Ритца, чтобы сформулировать определяющие уравнения для изгибной реакции. Используйте следующие функции: (i) $w = cx^2$ и (ii) $w = b_1[1 - \cos(\pi x/2L)]$.
- (б) Полагая $EI_0 = 100$, $k = 2$, $L = 1$, с помощью анализа по Ритцу рассчитайте критическую нагрузку для стойки.



- 3.23. Проведите анализ теплопередачи в показанной на рисунке плите. Соответствующий функционал имеет вид

$$\Pi = \int_0^L \frac{1}{2} k \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx - \int_0^L \theta q^B dx.$$

Поставьте существенные и естественные граничные условия. После этого проведите анализ по Ритцу, используя два неизвестных параметра.



- 3.24. Проведите анализ поведения предварительно напряженного каната, показанного на рисунке. Дифференциальное уравнение, определяющее равновесие, имеет вид

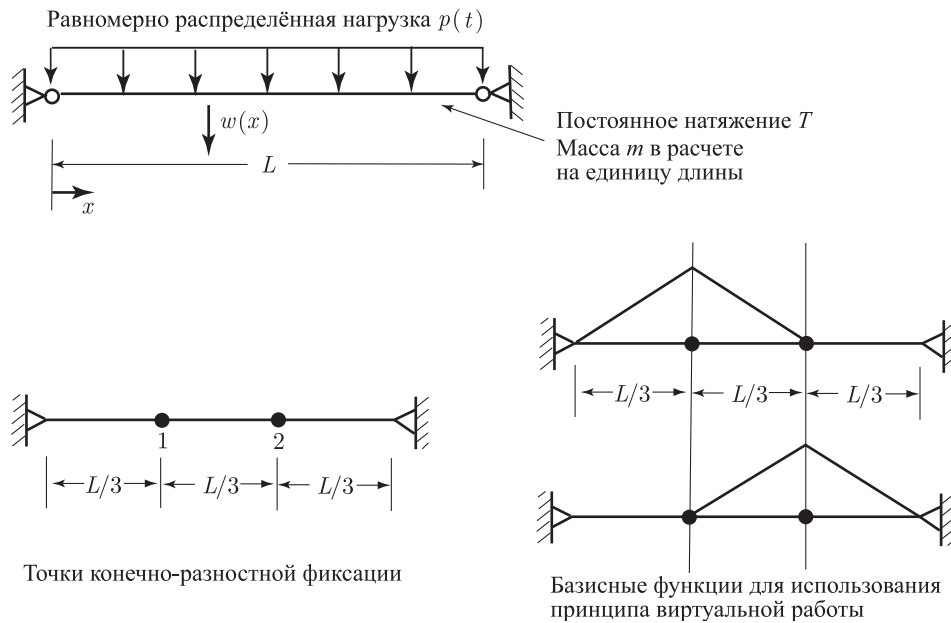
$$T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - p(t)$$

при граничных условиях

$$w|_{x=0} = w|_{x=L} = 0$$

и начальных условиях

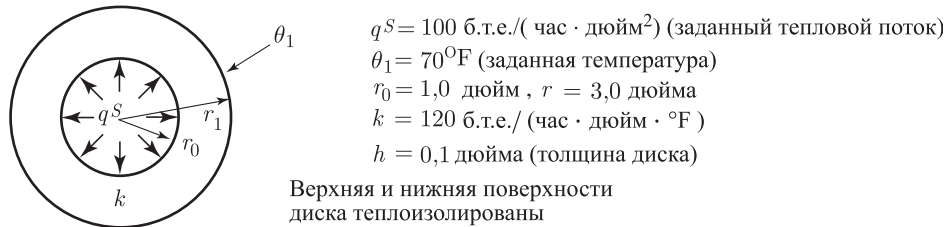
$$w(x, 0) = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = 0.$$



- (а) Используйте традиционный метод конечных разностей для аппроксимации дифференциального уравнения, определяющего равновесие, и посредством этого сформулируйте уравнения, определяющие реакцию каната.

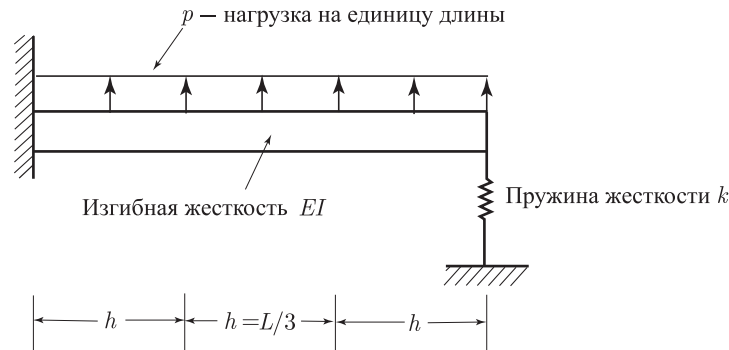
- (b) Используйте энергетический метод конечных разностей для вывода уравнений, определяющих реакцию каната.
- (c) Используйте принцип виртуальной работы для вывода уравнений, определяющих реакцию каната. При использовании метода конечных разностей ограничьтесь выбором двух внутренних узлов. Для применения принципа виртуальной работы используйте две базисных функции, показанных на рисунке.

3.25. Найдите путем соответствующего анализа распределение температуры в показанном на рисунке диске. Определите функционал задачи и постройте ее приближенное решение, используя метод Ритца с базисными функциями, показанными на рис. 3.19. Используйте два неизвестных значения температуры. Сравните ваши результаты с точным аналитическим решением.



3.26. Рассмотрите анализ поведения балки, показанной на рисунке.

- (a) Используйте конечно-разностный подход с четырьмя узлами на балке и, применяя дифференциальную модель, сформулируйте уравнения, определяющие реакцию балки.
- (b) Используйте конечно-разностный подход с четырьмя узлами на балке и, применяя вариационную формулировку, сформулируйте уравнения, определяющие реакцию балки.



- 3.27. Используйте энергетический метод конечных разностей с принятием только двух неизвестных значений температуры для того, чтобы решить задачу, поставленную в упражнении 3.23.
- 3.28. Используйте энергетический метод конечных разностей с принятием только двух неизвестных значений температуры для того, чтобы решить задачу, поставленную в упражнении 3.25.
- 3.29. Компьютерная программа STAP (см. главу 12) была создана для анализа конструкций типа фермы. Однако путем использования некоторых аналогий, касающихся переменных и уравнений, эта программа может применяться также и для исследования распределения давления и потоков жидкости в трубопроводах, распределения тока в сетях постоянного тока, а также для исследования теплопередачи. Используйте программу STAP для решения задач, сформулированных в примерах 3.1–3.4.

3.30. Используйте компьютерную программу для решения задач, сформулированных в примерах 3.1–3.4.

3.4. Наложение принудительных ограничений

В процессе анализа той или иной инженерной задачи нередко возникает требование, чтобы на те или иные переменные налагалось некоторое специфическое ограничение. Может оказаться, что такие ограничения должны налагаться либо на некоторые непрерывные параметры решения, либо на одну из дискретных переменных, и могут сводиться к некоторым требованиям непрерывности, к принудительному присвоению специфических значений переменным решения, или к выполнению определенных условий связи между некоторыми из переменных решения. При наложении такого рода ограничений имеется возможность применить одну из широко используемых процедур, а именно, — метод множителей Лагранжа или метод штрафного параметра (см., например, [Bertsekas 1982]). Приложения этих методов описываются в разделах 4.2.2, 4.4.2, 4.4.3, 4.5, 5.4, 6.7.2 и 7.4. Как метод множителей Лагранжа, так и метод штрафного параметра применяются либо с вариационными формулировками подлежащих решению задач, либо с формулировками тех же задач на основе метода взвешенных невязок.

3.4.1. Введение в метод множителей Лагранжа и метод штрафного параметра

В качестве краткого введения в метод множителей Лагранжа и метод штрафного параметра рассмотрим вариационную формулировку дискретной структурной модели при исследовании ее стационарного поведения:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \mathbf{R} \quad (3.52)$$

при условиях

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U_i} = 0 \quad \text{для всех } i. \quad (3.53)$$

Предположим также, что мы хотели бы наложить определенное условие на степень свободы U_i вида

$$U_i = U_i^*. \quad (3.54)$$

При использовании *метода множителей Лагранжа* мы вносим поправку в правую часть выражения (3.52), чтобы получить

$$\Pi^* = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \mathbf{R} + \lambda(U_i - U_i^*), \quad (3.55)$$

где λ — это добавочная переменная, и требуем выполнения условия $\delta \Pi^* = 0$, что дает

$$\delta \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} - \delta \mathbf{U}^T \mathbf{R} + \lambda \delta U_i + \delta \lambda (U_i - U_i^*) = 0. \quad (3.56)$$

Если учесть, что вариации $\delta \mathbf{U}$ и $\delta \lambda$ произвольны, то мы получим

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{e}_i \\ \mathbf{e}_i^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ U_i^* \end{bmatrix}, \quad (3.57)$$

где \mathbf{e}_i — вектор, все компоненты которого равны нулю, кроме i -й компоненты, которая равна единице. Таким образом, уравнения равновесия без принудительных ограничений исправляются с помощью дополнительного уравнения, содержащего в себе и ограничительное условие.

При использовании *метода штрафного параметра* мы также вносим поправку в правую часть выражения (3.52), но делаем это без введения добавочной переменной. Теперь мы используем соотношение

$$\Pi^{**} = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \mathbf{R} + \frac{\alpha}{2} (U_i - U_i^*)^2, \quad (3.58)$$

в котором α — это некая постоянная сравнительно большой величины, $\alpha \gg \max(k_{ii})$. Тогда условие $\delta \Pi^{**} = 0$ дает

$$\delta \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} - \delta \mathbf{U}^T \mathbf{R} + \alpha (U_i - U_i^*) \delta U_i = 0 \quad (3.59)$$

и

$$(\mathbf{K} + \alpha \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T) \mathbf{U} = \mathbf{R} + \alpha U_i^* \mathbf{e}_i. \quad (3.60)$$

Таким образом, при применении этой методики к i -му диагональному элементу матрицы \mathbf{K} добавляется некое большое значение и, соответственно, добавляется некая сила, так что интересующее нас смещение U_i становится приблизительно равным U_i^* . Описанная методика является достаточно общей, она активно использовалась для того, чтобы дать предписанное значение смещению или какой-то другой переменной. Эффективность данного метода обеспечивается тем, что здесь не требуется вводить дополнительное уравнение и сохраняется ширина полосы в матрице коэффициентов (см. раздел 4.2.2). Применение метода множителей Лагранжа и метода штрафного параметра демонстрируется на приводимом ниже примере.

Пример 3.31: Требуется использовать метод множителей Лагранжа и метод штрафного параметра для анализа поведения простой системы пружин, показанной на рис. 3.24, при заданном смещении $U_2 = 1/k$.

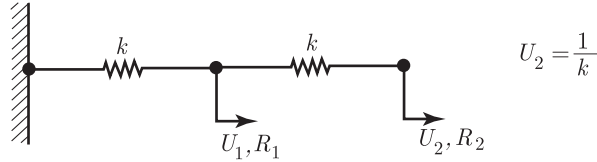


Рис. 3.24. Простая система пружин

Определяющие уравнения равновесия без задания смещения U_2 имеют вид

$$\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}. \quad (a)$$

Точное решение получается, если использовать выражение $U_2 = 1/k$ и разрешить первое из уравнений (a) относительно U_1 , получая

$$U_1 = \frac{1 + R_1}{2k}. \quad (b)$$

Следовательно, мы будем иметь также

$$R_2 = 1 - \frac{1 + R_1}{2},$$

а это как раз и есть сила, требуемая для степени свободы U_2 при выполнении условия $U_2 = 1/k$.

Если применить метод множителей Лагранжа, то определяющие уравнения принимают вид

$$\begin{bmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & k & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \\ 1/k \end{bmatrix}, \quad (c)$$

и мы получим

$$U_1 = \frac{1+R_1}{2k}; \quad \lambda = -1 + \frac{1+R_1}{2}.$$

Таким образом, нами получено то же решение, что и в выражении (b), а величина λ равна, с обратным знаком, той силе, которая должна быть приложена к степени свободы U_2 с целью выполнения условия $U_2 = 1/k$. Можно отметить, что при выборе этого значения λ два первых уравнения системы (c) совпадают с уравнениями (a).

Если применить метод штрафного параметра, то получим

$$\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & (k+\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ \alpha/k \end{bmatrix}.$$

Теперь решение зависит от α , и мы получаем

$$\begin{aligned} \text{при } \alpha = 10k: \quad U_1 &= \frac{11R_1 + 10}{21k}; & U_2 &= \frac{R_1 + 20}{21k}, \\ \text{при } \alpha = 100k: \quad U_1 &= \frac{101R_1 + 100}{201k}; & U_2 &= \frac{R_1 + 200}{201k}, \\ \text{при } \alpha = 1000k: \quad U_1 &= \frac{1001R_1 + 1000}{2001k}; & U_2 &= \frac{R_1 + 2000}{2001k}. \end{aligned}$$

На практике точность, достигаемая при выборе $\alpha = 1000k$, оказывается обычно достаточной.

Приведенный выше пример дает лишь весьма элементарную демонстрацию применения метода множителей Лагранжа и метода штрафного параметра. Рассмотрим теперь вкратце несколько более общие уравнения. Предположим, что мы хотим наложить на решение m линейно независимых, дискретных ограничительных условий $\mathbf{BU} = \mathbf{V}$, где \mathbf{B} представляет собой матрицу порядка $m \times n$. В этом случае, применяя метод множителей Лагранжа, мы используем

$$\Pi^*(\mathbf{U}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{KU} - \mathbf{U}^T \mathbf{R} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{BU} - \mathbf{V}), \quad (3.61)$$

где $\boldsymbol{\lambda}$ есть вектор, составленный из m множителей Лагранжа. Теперь, привлекая условие $\delta\Pi^* = 0$, мы получим

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}. \quad (3.62)$$

При применении метода штрафного параметра мы используем

$$\Pi^{**}(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{KU} - \mathbf{U}^T \mathbf{R} + \frac{\alpha}{2} (\mathbf{BU} - \mathbf{V})^T (\mathbf{BU} - \mathbf{V}) \quad (3.63)$$

и, обращаясь к условию $\delta\Pi^{**} = 0$, получим

$$(\mathbf{K} + \alpha \mathbf{B}^T \mathbf{B}) \mathbf{U} = \mathbf{R} + \alpha \mathbf{B}^T \mathbf{V}. \quad (3.64)$$

Разумеется, соотношения (3.57) и (3.60) представляют собой частные случаи соотношений (3.62) и (3.64).

Приведенные выше соотношения написаны для дискретных систем. Если рассматривается континуальная система, то выражение для обычного функционала (см., например, примеры 3.18–3.20) при использовании метода множителей Лагранжа подправляется интегралом (или интегралами) непрерывного ограничителя (или ограничителей), умножаемым на множитель (или множители) Лагранжа, а при использовании метода штрафного параметра — интегралом (интегралами) штрафного параметра (параметров), умноженным на квадрат ограничителя (ограничителей). Если после этого непрерывные переменные представляются с помощью

пробных функций или с помощью конечно-разностных выражений, то получаются соотношения в форме (3.62) или (3.64) (см. раздел 4.4).

Несмотря на то, что данное выше введение в метод множителей Лагранжа и в метод штрафного параметра является весьма кратким, можно все же сделать несколько важных и применимых в достаточно общих условиях замечаний. Заметим, во-первых, что при применении метода множителей Лагранжа диагональные элементы в матрице коэффициентов, соответствующих этим множителям, равны нулю. Следовательно, эффективный путь при построении решения связан с тем, чтобы представить уравнения в форме соотношений (3.62). Рассматривая уравнения равновесия с множителями Лагранжа, мы обнаруживаем также, что эти множители выражаются в тех же единицах, что и силовые функции; например, множитель Лагранжа из соотношения (3.57) представляет собой силу.

Если используется метод штрафного параметра, то важное соображение связано с надлежащим выбором этого параметра. При осуществлении выкладок, приводящих к соотношению (3.64), штрафной параметр α фиксируется в явной форме (как в примере 3.31), и так оно нередко и бывает на практике (см. раздел 4.2.2). Однако в других случаях штрафной параметр определяется характером формулировки самой задачи (см. раздел 5.4.1). Трудность с выбором достаточно большого штрафного параметра связана с тем, что когда внедиагональные элементы матрицы коэффициентов умножаются на большое число, то эта матрица может стать плохо обусловленной. Если штрафной параметр существенно изменяет внедиагональные элементы, то для обеспечения достаточно точного решения задачи при выполнении компьютером арифметических операций необходимо использовать многозначные цифры (см. раздел 8.2.6).

Наконец, нельзя не отметить, что метод штрафного параметра и метод множителей Лагранжа весьма тесно связаны между собой (см. упражнение 3.35), и что основные идеи, касающиеся наложения ограничений, также могут сочетаться, как это и сделано в расширенном методе множителей Лагранжа (см. [Fortin, Glowinski 1983], а также упражнение 3.36).

3.4.2. Упражнения

3.31. Рассмотрите систему уравнений

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Воспользуйтесь методом множителей Лагранжа и методом штрафного параметра, чтобы удовлетворить налагаемому ограничению $U_2 = 0$. Решите уравнения и дайте надлежащую интерпретацию решения.

3.32. Рассмотрите систему катков, представленную в примере 3.1, при $k_i = k$, $R_1 = 1$, $R_2 = 0$, $R_3 = 1$. Выведите уравнения, определяющие равновесие при наложении ограничительного условия $U_2 = U_3$.

(а) Воспользуйтесь методом множителей Лагранжа.

(б) Воспользуйтесь методом штрафного параметра, выбрав при этом надлежащий штрафной параметр.

В каждом случае постройте решение для смещений и для ограничительной силы.

3.33. Рассмотрите задачу о теплопередаче, поставленную в примере 3.2, при $k = 1$ и $\theta_0 = 10$, $\theta_4 = 20$. Наложите ограничительное условие $\theta_3 = 4\theta_2$ и дайте физическую интерпретацию решения. Воспользуйтесь методом множителей Лагранжа, а затем — методом штрафного параметра с умеренной величиной этого параметра.

3.34. Рассмотрите течение жидкости в гидравлической сети, представленной в примере 3.3. Выведите определяющие уравнения с использованием метода множителей Лагранжа при наложении ограничительного условия $p_C = 2p_D$. Дайте решение уравнений и предложите интерпретацию решения.

Повторите решение, используя метод штрафного параметра с надлежащим значением этого параметра.

- 3.35. Рассмотрите задачу $\mathbf{KU} = \mathbf{R}$ при m линейно независимых ограничениях $\mathbf{BU} = \mathbf{V}$ (см. (3.61) и (3.62)). Покажите, что условия стационарности приводимого ниже функционала дает уравнения типа (3.64), соответствующие методу штрафного параметра:

$$\tilde{\Pi}^{**}(\mathbf{U}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{KU} - \mathbf{U}^T \mathbf{R} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{BU} - \mathbf{V}) - \frac{\boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\lambda}}{2\alpha},$$

где $\boldsymbol{\lambda}$ представляет собой вектор, состоящий из m множителей Лагранжа, а α — это штрафной параметр, $\alpha > 0$. Рассчитайте множители Лагранжа так, чтобы в общем случае было $\boldsymbol{\lambda} = \alpha(\mathbf{BU} - \mathbf{V})$, и покажите, что в конкретном случае, соответствующем соотношению (3.60), будет $\lambda = \alpha(U_i - U_i^*)$.

- 3.36. При применении *расширенного метода Лагранжа* для задачи, сформулированной в упражнении 3.35, используется следующий функционал:

$$\tilde{\Pi}^*(\mathbf{U}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{KU} - \mathbf{U}^T \mathbf{R} + \frac{\alpha}{2} (\mathbf{BU} - \mathbf{V})^T (\mathbf{BU} - \mathbf{V}) + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{BU} - \mathbf{V});$$

$$\alpha \geq 0.$$

- (a) Обратитесь к условию стационарности Π^* и получите определяющие уравнения.
- (b) Воспользуйтесь расширенным методом Лагранжа для решения задачи, поставленной в примере 3.31, при $\alpha = 0$, k и $1000k$. Покажите, что практически при любом значении α ограничение удовлетворяется достаточно точно (расширенный метод Лагранжа используется в процедурах решения с итерациями, а в этом случае выбор эффективного значения α может оказаться весьма важным).

Глава 4

ФОРМУЛИРОВКА МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ — ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ В МЕХАНИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА И МЕХАНИКЕ КОНСТРУКЦИЙ

4.1. Введение

Линейный анализ поведения твердых тел и конструкций представляет собой весьма важную область приложений конечно-элементного анализа. Именно в этой области были впервые применены конечно-элементные процедуры, и именно такие задачи дали первоначальный толчок к развитию метода конечных элементов.

В настоящее время многочисленные разновидности линейного анализа конструкций могут реализоваться согласно шаблонным схемам. При этом схемы конечно-элементной дискретизации хорошо разработаны и используются в стандартных компьютерных программах. Однако можно указать две области, к эффективному исследованию которых конечно-элементный подход был проведен лишь недавно, а именно — общий анализ поведения пластин и оболочек, а также решение задач о поведении (почти) несжимаемой среды.

Стандартная формулировка конечно-элементного решения задач о поведении твердых тел связана с методом смещений, который используется весьма широко и является эффективным для любых задач, исключая задачи для двух вышеуказанных областей. Для решения задач о пластинах и оболочках, а также о несжимаемых твердых телах, предпочтительными являются смешанные формулировки.

В данной главе предлагается развернутое введение в метод исследования, основанный на изучении смещений. Основным соотношением, используемым при конечноэлементной формулировке, является принцип виртуальной работы. Сначала мы даем вывод определяющих конечно-элементных уравнений, а затем обсуждаем свойства сходимости данного метода. С учетом того, что решение, основанное на изучении смещений, оказывается неэффективным для некоторых приложений, мы даем затем вводную информацию о смешанных формулировках, при которых в качестве неизвестных переменных фигурируют не только смещения, но и другие объекты исследования. Однако при использовании смешанного метода необходимо проводить тщательный отбор подходящих форм интерполяции, и к этой проблеме мы обращаемся в последней части главы.

В научной литературе были представлены разнообразные версии формулировок, как основанных на изучении смещений, так и смешанных, однако, как уже указывалось ранее, мы не ставили своей целью дать обзор всех этих формулировок. Вместо этого в данной главе мы сконцентрируемся на некоторых важных и полезных принципах расчета конечных элементов. Некоторые эффективные применения принципов, рассмотренных в этой главе, будут представлены в главе 5.

4.2. Формулировка метода конечных элементов, основанного на изучении смещений

Метод конечных элементов, основанный на изучении смещений, может рассматриваться как развитие метода смещений, применяемого для исследования балочных и ферменных конструкций, и поэтому целесообразно дать обзор процессов такого исследования. Ниже перечисляются основные этапы исследования балочных и ферменных конструкций с использованием метода смещений (виртуальных перемещений).

1. Идеализировать конструкцию в целом, как некий комплекс балочных и ферменных элементов, соединенных между собой в конструктивных узлах.
2. Идентифицировать те неизвестные смещения в узлах, которые полностью определяют реакцию идеализированной конструкции в терминах смещений.
3. Сформулировать уравнения баланса сил, соответствующих неизвестным смещениям в узлах, и решить эти уравнения.
4. На основании данных об известных смещениях концов балок и ферм рассчитать распределение напряжений во внутренних элементах.
5. Основываясь на сделанных допущениях, дать интерпретацию смещений и напряжений, найденных путем решения задачи для идеализированной конструкции.

Этапы анализа в целом, наиболее важные при практическом исследовании и проектировании, состоят в надлежащей идеализации истинной проблемы, выполняемой на этапе 1, а также в корректной интерпретации результатов, осуществляемой на этапе 5. В зависимости от степени сложности той истинной системы, которую требуется исследовать, для проведения надлежащей идеализации может потребоваться весьма значительный объем сведений о характеристиках данной системы и о ее механическом поведении. Этот вопрос кратко обсуждался в главе 1.

Перечисленные выше этапы исследования уже были в определенной степени продемонстрированы в главе 3, однако будет весьма поучительным рассмотреть другой, более сложный пример.

Пример 4.1: Система труб, изображенная на рис. 4.1 а, должна быть способна нести большую поперечную нагрузку P , прилагаемую случайным образом к фланцу, соединяющему трубы малого и большого диаметра. Требуется дать анализ соответствующей проблемы.

Изучение данной проблемы может потребовать некоторого числа анализов, при которых проводится надлежащее моделирование местного кинематического поведения в области соединения труб, принимаются во внимание нелинейные аспекты геометрии и поведения материала, тщательно моделируются характеристики прилагаемой нагрузки, и так далее. Обычно при таком исследовании весьма целесообразно начинать с простого анализа, а уж затем по мере надобности переходить к работе с более совершенной моделью (см. раздел 6.8.1).

Предположим, что вначале мы хотели бы рассчитать поперечное смещение у фланца, когда поперечная нагрузка прилагается медленно. Разумным вариантом для этого случая будет моделирование всей конструкции как комплекса из элементов балочного, ферменного и пружинного типов и проведение статического анализа.

Выбранная модель показана на рис. 4.1 б. Идеализированная конструкция состоит из двух балок, одной фермы и пружинного элемента. Для исследования этой идеализированной конструкции мы начинаем с расчета матриц жесткости элементов, определяемых в соответствии с глобальными конструктивными степенями свободы, показанными на рис. 4.1 в. Для элементов в виде балок, пружины и фермы, соответственно, в данном

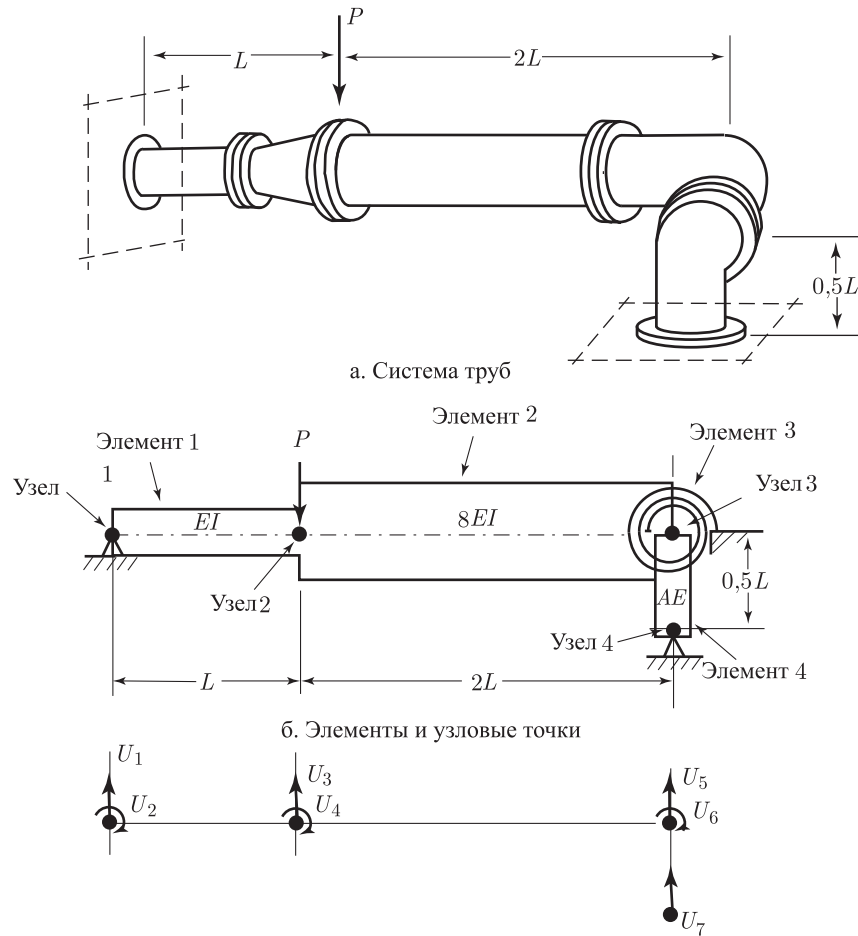


Рис. 4.1. Система труб и ее идеализация

случае имеем

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_1^e &= \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ & 4 & \frac{6}{L} & 2 \\ \text{сим} & & \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ & & & 4 \end{bmatrix}; & U_1, U_2, U_3, U_4; \\
 \mathbf{K}_2^e &= \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & -\frac{12}{L} & -\frac{12}{L^2} & -\frac{12}{L} \\ & 16 & \frac{12}{L} & 8 \\ \text{сим} & & \frac{12}{L^2} & \frac{12}{L} \\ & & & 16 \end{bmatrix}; & U_3, U_4, U_5, U_6; \\
 \mathbf{K}_3^e &= k_s; & U_6;
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}_4^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}; \quad U_5, U_7,$$

где нижний индекс у символа \mathbf{K} обозначает номер элемента, а глобальные степени свободы, соответствующие жесткости элемента, записываются рядом с матрицами. Следует отметить, что в данном примере матрицы элементов не зависят от направляющих косинусов, так как осевые линии элементов совпадают с глобальными осями. Если локальная ось элемента имеет иное направление, нежели глобальная ось, то локальная матрица жесткости должна быть преобразована так, чтобы получилась требуемая глобальная матрица жесткости (см. пример 4.10).

Эффективная матрица жесткости всего комплекса элементов получается из матриц жесткости отдельных элементов путем использования *прямого метода жесткости* (см. примеры 3.1 и 4.11). Согласно этой процедуре матрица жесткости конструкции \mathbf{K} рассчитывается путем прямого сложения матриц жесткости элементов, т. е.

$$\mathbf{K} = \sum_i \mathbf{K}_i^e,$$

где суммирование ведется по всем элементам. Чтобы выполнить это суммирование, матрица каждого элемента \mathbf{K}_i^e записывается как матрица $\mathbf{K}^{(i)}$ того же порядка, что и матрица жесткости \mathbf{K} , где все элементы $\mathbf{K}^{(i)}$ равны нулю, за исключением тех, которые соответствуют степени свободы данного элемента. Например, для элемента 4 имеем

$$\mathbf{K}^{(4)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \leftarrow \text{степень свободы} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2AE}{L} & 0 & -\frac{2EA}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2AE}{L} & 0 & \frac{2EA}{L} \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

В результате матрица жесткости конструкции принимает вид

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{24EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{12EI}{L^2} & 0 \\ & & & \frac{20EI}{L} & \frac{12EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} & 0 \\ \text{симметрично} & & & & \frac{12EI}{L^3} + \frac{2AE}{L} & \frac{12EI}{L^2} & -\frac{2AE}{L} \\ & & & & & \frac{16EI}{L} + k_s & 0 \\ & & & & & & \frac{2AE}{L} \end{bmatrix};$$

тогда как уравнения равновесия системы записываются в форме

$$\mathbf{KU} = \mathbf{R},$$

где \mathbf{U} — вектор глобальных смещений системы, а \mathbf{R} — вектор сил, действующих в направлении этих смещений:

$$\mathbf{U}^T = [U_1, \dots, U_7]; \quad \mathbf{R}^T = [R_1, \dots, R_7].$$

Прежде чем построить решение для смещений элементов конструкции, необходимо поставить граничные условия: $U_1 = 0$ и $U_7 = 0$. Это означает, что мы можем ограничиться рассмотрением уравнений для пяти неизвестных смещений, т. е.

$$\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{R}}, \quad (\text{a})$$

где матрица $\tilde{\mathbf{K}}$ получается из матрицы \mathbf{K} путем исключения первых и седьмых строк и столбцов, и где

$$\tilde{\mathbf{U}}^T = [U_2 \quad U_3 \quad U_4 \quad U_5 \quad U_6]; \quad \tilde{\mathbf{R}}^T = [0 \quad -P \quad 0 \quad 0 \quad 0].$$

Решение уравнений (a) позволяет определить смещения в конструкции, а значит и смещения узловых элементов. Узловые силы для элементов определяются путем умножения матриц жесткости элементов на смещения этих же элементов. Если требуется найти силы в любом сечении элемента, то их можно рассчитать по данным о силах на концах этого элемента, используя для этого простые уравнения статики.

Однако, рассматривая результаты проведенного анализа, необходимо признать, что несмотря на тщательное проведенное исследование идеализированной конструкции, показанной на рис. 4.1б, *найденные смещения и напряжения представляют собой лишь прогноз реакции истинной физической конструкции*. Разумеется, этот прогноз будет точным лишь в случае правильно выбранной формы используемой модели, и на практике конкретный вид модели будет, вообще говоря, подходящим для прогнозирования некоторых величин, но не подойдет для прогнозирования других. Например, в результате проведенного здесь анализа искомое поперечное смещение под воздействием приложенной нагрузки определяется, по-видимому, достаточно точно при идеализации согласно схеме на рис. 4.1б (при тех условиях, что нагрузка прилагается достаточно медленно, что напряжения достаточно малы для предотвращения необратимых деформаций, и т. д.), однако напряжения непосредственно под точкой приложения нагрузки определяются, вероятно, очень неточно. Действительно, для точного расчета напряжений следовало бы использовать другую, более совершенную конечно-элементную модель (см. раздел 1.2).

Приведенный пример демонстрирует некоторые важные аспекты исследования методом смещений, а также метода конечных элементов. Как уже упоминалось ранее, основа процесса состоит в том, что целостная конструкция идеализируется в форме комплекса отдельных конструктивных элементов. Рассчитываются матрицы жесткости каждого элемента, соответствующие глобальным степеням свободы идеализированной конструкции, а матрица жесткости системы в целом определяется путем сложения матриц жесткости элементов. Решение уравнений равновесия для комплекса элементов позволяет найти смещения элементов, которые затем используются для расчета напряжений в элементах. Наконец, смещения и напряжения элементов должны интерпретироваться, как оценка истинного поведения конструкции, если только принять во внимание, что нами уже построено решение для идеализации в форме ферм и балок.

Что же касается исследования поведения комплексов из балок и ферм, наподобие того, что было рассмотрено в примере 4.1, то первоначально решения для таких систем не рассматривались как конечно-элементный анализ, так как если сравнивать эти решения с более общим конечно-элементным анализом двумерной или трехмерной задачи, то существенная разница между этими двумя формами исследования становится вполне очевидной. А именно, в процессе того анализа, который проводился в примере 4.1, могли рассчитываться точные данные о матрицах

жесткости элементов («точные» в рамках теории балок). С точки зрения физики свойства жесткости балочного элемента определяют собой силы на концах этого элемента, соответствующие единичным смещениям на тех же концах. Эти силы могут быть вычислены путем решения дифференциальных уравнений равновесия данного элемента при наличии соответствующих ему граничных условий. Если учесть, что посредством решения указанных дифференциальных уравнений выполняются все три требования, предъявляемые к точным решениям, а именно — уравновешивание напряжений, совместимость и выполнение основополагающих условий, то это означает возможность точного вычисления смещений внутри элементов и матриц их жесткости. В качестве альтернативного подхода упомянутые концевые силы для элементов могли бы быть рассчитаны также путем построения вариационного решения на основе метода Ритца или метода Галеркина, как это обсуждалось в разделе 3.3.4. Такие решения дали бы точные значения коэффициентов жесткости элементов, если только в качестве пробных функций используются точные выражения для внутренних смещений в элементах (рассчитанные в результате решения дифференциальных уравнений равновесия; см. примеры 3.22 и 4.8). Однако при выборе других пробных функций (которые могли бы стать более подходящими на практике) приближенные значения коэффициентов жесткости все же могут быть получены.

При проведении двумерного и трехмерного вариантов конечно-элементного анализа более общего типа мы используем вариационный подход с пробными функциями, аппроксимирующими истинные смещения, так как в противоположность случаю ферменных и балочных элементов здесь мы не знаем точного вида функций смещения. Вообще говоря, в результате этого дифференциальные уравнения равновесия остаются не удовлетворенными, однако получаемая ошибка уменьшается за счет использования более совершенной конечно-элементной идеализации рассматриваемой конструкции или континуума.

Общая формулировка конечно-элементного метода на основе расчета смещений базируется на использовании принципа виртуальных перемещений, а это, как мы обсуждали в разделе 3.3.4, эквивалентно использованию метода Галеркина, а также эквивалентно использованию метода Ритца с минимизацией полного потенциала данной системы.

4.2.1. Вывод конечно-элементных уравнений равновесия для общего случая

В начале этого раздела мы сформулируем общую задачу теории упругости, которую нам требуется решить. Затем мы обсудим принцип виртуальных перемещений, используемый в качестве основы для нашего конечно-элементного решения, и проведем вывод конечно-элементных уравнений. Затем мы тщательно рассмотрим некоторые важные соображения, касающиеся выполнения условий уравновешивания напряжений и, наконец, обсудим некоторые детали процесса соединения матриц элементов.

Формулировка задачи

Рассмотрим равновесие трехмерного тела общего вида, наподобие показанного на рис. 4.2. Тело размещается в фиксированной (стационарной) системе координат X, Y, Z . Если говорить о поверхности тела, то рассматриваемое тело поддерживается на площади S_u при заданных здесь смещениях \mathbf{U}^{S_u} и подвергается

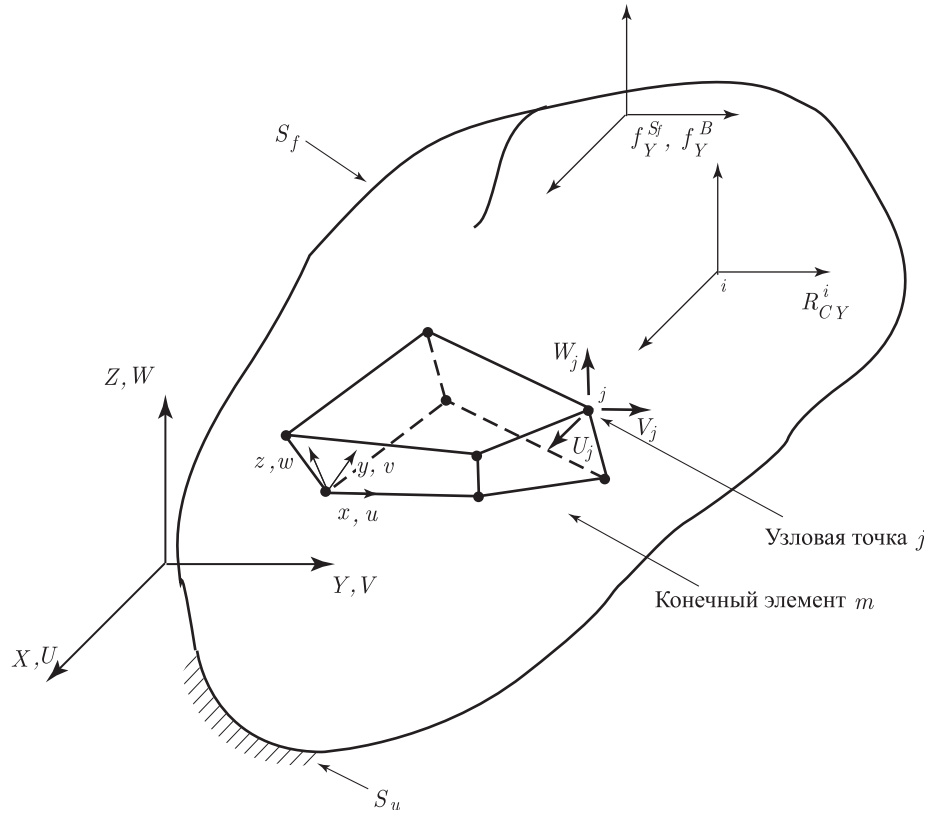


Рис. 4.2. Трехмерное тело общего вида с трехмерным элементом, имеющим 8 узлов

поверхностным силам сцепления \mathbf{f}^{S_f} (сила на единицу площади поверхности) на площади поверхности S_f ¹⁾).

Кроме того, тело подвергается воздействию внешних массовых сил \mathbf{f}^B (сила на единицу объема) и сосредоточенных нагрузок \mathbf{R}_C^i (где индекс i соответствует точке приложения нагрузки). Мы вводим силы \mathbf{R}_C^i как самостоятельные величины, хотя каждая такая сила могла бы рассматриваться также и в качестве поверхностной силы сцепления \mathbf{f}^{S_f} , приходящейся на очень малую площадь (что, вообще говоря,

¹⁾ Здесь можно для простоты предположить, что все компоненты смещений на площади S_u заданы, а в этом случае $S_u \cup S_f = S$ и $S_u \cap S_f = \emptyset$. Однако на практике весьма возможно, что в некоторой точке поверхности задано (заданы) смещение (смещения), соответствующее некоторому направлению, тогда как по другому направлению задаются компоненты силы. Например, граничное условие для ролика на трехмерном теле соответствовало бы заданию нулевого смещения только в направлении нормали к поверхности тела, тогда как силы сцепления (нередко равные нулю) прилагаются в направлениях, касательных к поверхности. В таких случаях точка поверхности принадлежала бы и S_u , и S_f . Однако позднее в нашей конечноэлементной формулировке мы вначале снимем все ограничения на смещения (условия опоры) и предположим, что реакции известны, полагая таким образом $S_f = S$ и $S_u = \emptyset$; затем, после вывода определяющих конечно-элементных уравнений, мы наложим ограничения на смещения. Следовательно, предположение о задании всех компонентов смещения на S_u может использоваться здесь для удобства представления и не вносит никаких ограничений в формулировку.

могло бы моделировать истинную физическую ситуацию даже более точно). В общем случае силы, приложенные извне, имеют три составляющие, соответствующие координатным осям X , Y , Z :

$$\mathbf{f}^B = \begin{bmatrix} f_X^B \\ f_Y^B \\ f_Z^B \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f}^{S_f} = \begin{bmatrix} f_X^{S_f} \\ f_Y^{S_f} \\ f_Z^{S_f} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_C^i = \begin{bmatrix} R_{CX}^i \\ R_{CY}^i \\ R_{CZ}^i \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Здесь заметим, что сами компоненты векторов \mathbf{f}^B и \mathbf{f}^{S_f} изменяются, как функции X , Y и Z (применительно к \mathbf{f}^{S_f} рассматриваются специальные координаты, связанные с поверхностью S_f).

Смещения точек тела относительно ненагруженной конфигурации измеряются в системе координат X , Y , Z и обозначаются символом \mathbf{U} , где

$$\mathbf{U}(X, Y, Z) = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

а на участке поверхности S_u имеем $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{S_u}$. Смещениям \mathbf{U} соответствуют деформации

$$\boldsymbol{\epsilon}^T = [\epsilon_{XX} \quad \epsilon_{YY} \quad \epsilon_{ZZ} \quad \gamma_{XY} \quad \gamma_{YZ} \quad \gamma_{ZX}], \quad (4.3)$$

где

$$\begin{aligned} \epsilon_{XX} &= \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \epsilon_{YY} = \frac{\partial V}{\partial Y}; \quad \epsilon_{ZZ} = \frac{\partial W}{\partial z}; \\ \gamma_{XY} &= \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X}; \quad \gamma_{YZ} = \frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial Y}; \quad \gamma_{ZX} = \frac{\partial W}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Z}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Напряжения, соответствующие деформациям $\boldsymbol{\epsilon}$, обозначаются как

$$\boldsymbol{\tau}^T = [\tau_{XX} \quad \tau_{YY} \quad \tau_{ZZ} \quad \tau_{XY} \quad \tau_{YZ} \quad \tau_{ZX}], \quad (4.5)$$

где

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\tau}^I. \quad (4.6)$$

В формуле (4.6) символ \mathbf{C} определяет собой матрицу связи между напряжением и деформацией для материала тела, а вектор $\boldsymbol{\tau}^I$ обозначает заданные начальные напряжения (с компонентами, упорядоченными так же, как в (4.5)).

Теперь исследуемая задача формулируется так.

Заданы

геометрия тела, приложенные нагрузки \mathbf{f}^{S_f} , \mathbf{f}^B , \mathbf{R}_C^i , $i = 1, 2, \dots$, условия на опоре S_u , закон связи напряжение–деформация для материала тела, начальные напряжения в теле.

Требуется рассчитать

смещения \mathbf{U} точек тела и соответствующие им деформации $\boldsymbol{\epsilon}$ и напряжения $\boldsymbol{\tau}$.

При решении рассматриваемой здесь задачи предполагается наличие условий для линейного анализа, а это соответствует требованиям о том, чтобы

- смещения были бесконечно малыми и, следовательно, чтобы были справедливы соотношения (4.4) и равновесие тела могло устанавливаться (с получением соответствующего решения) по отношению к ненагруженной конфигурации.
- Матрица напряжение–деформация для данного материала может изменяться как функция X , Y и Z , однако не зависит ни от каких других факторов (например, \mathbf{C} не зависит от напряженного состояния).

В главах 6 и 7 рассматриваются задачи с условиями для нелинейного анализа, когда одно или более из вышеприведенных условий не выполняется.

Желая рассчитать реакцию тела, мы могли бы вывести дифференциальные уравнения, определяющие равновесие, которые затем должны были бы решаться при задании граничных условий (см. раздел 3.3). Однако замкнутые аналитические решения возможны только при рассмотрении относительно простых геометрических форм.

Принцип виртуальных перемещений

Принцип виртуальных перемещений (который мы называем также принципом виртуальной работы) составляет основу конечно-элементного решения, базирующегося на анализе смещений. Этот принцип гласит, что для равновесия тела, показанного на рис. 4.2, необходимо, чтобы для любых допустимых и малых ¹⁾ виртуальных смещений (которые равны нулю при и находятся в соответствии с предписанными перемещениями) ²⁾, наложенных на тело в состоянии его равновесия, полная внутренняя виртуальная работа равна полной внешней виртуальной работе:

$$\begin{array}{c} \text{Внутренняя виртуальная работа} \qquad \qquad \text{Внешняя виртуальная работа } \mathcal{R} \\ \\ \int_V \bar{\epsilon}^T \tau dV = \int_V \bar{U}^T f^B dV + \int_{S_f} \bar{U}^{S_f T} f^{S_f} dS + \sum_i \bar{U}^{iT} R_C^i \end{array} \quad (4.7)$$

Виртуальные деформации, соответствующие виртуальным перемещениям \bar{U}

Напряжения в равновесии с приложенными нагрузками

Виртуальные деформации, соответствующие виртуальным перемещениям \bar{U}

Здесь \bar{U} — это виртуальные перемещения, а ϵ — это *соответствующие им* виртуальные деформации (черта сверху обозначает виртуальные величины).

Прилагательное «виртуальный» означает, что виртуальные перемещения (и соответствующие им виртуальные деформации) не являются теми «реальными» перемещениями, которые возникают в теле под воздействием приложенной к нему нагрузки. На самом деле виртуальные перемещения никак не зависят от реальных и используются исследователем лишь в мысленном эксперименте, направленном на вывод интегрального уравнения равновесия в форме (4.7).

Следует подчеркнуть, что в соотношении (4.7):

Напряжения τ предполагаются известными и являются теми единственными напряжениями ³⁾, которые в точности уравновешивают приложенные нагрузки.

Виртуальные деформации $\bar{\epsilon}$ вычисляются путем дифференцирования согласно формулам (4.4), по данным о предполагаемых виртуальных перемещениях \bar{U} .

¹⁾ Здесь мы называем виртуальные перемещения «малыми», так как соответствующие им виртуальные деформации рассчитываются с использованием малого масштаба деформаций (см. пример 4.2). Однако фактически при использовании малого масштаба деформаций виртуальные перемещения могут иметь любую величину, и позднее при построении решений мы будем выбирать удобные для нас величины.

²⁾ Здесь используется формулировка «при и в соответствии с предписанными перемещениями», которая означает «в тех точках и на тех поверхностях, а также в соответствии с компонентами перемещений, значения которых предписаны в этих точках и на этих поверхностях».

³⁾ Доказательство того, что эти напряжения являются единственными, можно найти в разделе 4.3.4.

Виртуальные перемещения $\bar{\mathbf{U}}$ должны представлять непрерывное поле виртуальных перемещений (чтобы иметь возможность вычислять $\bar{\epsilon}$), при $\bar{\mathbf{U}}$, равных нулю и находящихся в соответствии с предписанными перемещениями на поверхности S_u ; помимо этого, компоненты $\bar{\mathbf{U}}^{S_f}$ — это просто виртуальные перемещения $\bar{\mathbf{U}}$, вычисляемые на поверхности S_f .

Все интегралы вычисляются по первоначальному данным об объеме и площади поверхности тела, без учета наложенных виртуальных перемещений.

Чтобы дать пример использования принципа виртуальных перемещений, предположим, что, как мы верим (хотя и не уверены), нам дано точное решение для поля смещений исследуемого тела. Это заданное поле смещений является непрерывным и удовлетворяет граничным условиям для смещений на поверхности S_u . После этого можно рассчитать ϵ и τ (соответствующие этому полю смещений). Вектор τ дает список правильных значений напряжения, если (и только если) уравнение (4.7) справедливо для любых произвольных виртуальных перемещений $\bar{\mathbf{U}}$, которые непрерывны, равны нулю при и находятся в соответствии с предписанными перемещениями на поверхности S_u . Другими словами, если мы можем выбрать некоторое поле виртуальных перемещений $\bar{\mathbf{U}}$, для которого соотношение (4.7) не удовлетворяется, то этим мы докажем, что τ не является правильным вектором напряжений (а следовательно, и заданное поле смещений не представляет собой точного решения для поля смещений).

В приводимых ниже примерах мы даем вывод принципа виртуальных перемещений и демонстрируем его использование.

Пример 4.2: Требуется дать вывод принципа виртуальных перемещений для показанного на рис. 4.2 трехмерного тела общего вида.

Для упрощения представляемых выкладок введем индексные обозначения с принятием соглашения о суммировании (см. раздел 2.4), когда x_i обозначает i -ю ось координат ($x_1 \equiv X$, $x_2 \equiv Y$, $x_3 \equiv Z$), u_i обозначает i -й компонент смещения ($u_1 \equiv U$, $u_2 \equiv V$, $u_3 \equiv W$), а запятая обозначает дифференцирование.

Заданные граничные условия — это значения $u_i^{S_u}$ на поверхности S_u . Будем предполагать также, что у нас нет сосредоточенных поверхностных нагрузок, то есть что единственный вид поверхностных нагрузок — это компоненты $f_i^{S_f}$.

Решение задачи должно удовлетворять следующим дифференциальным уравнениям (см., например, [Timo+shenko, Goodier 1970]):

$$\tau_{ij,j} + f_i^B = 0 \quad \text{во всех точках тела} \quad (a)$$

при естественных (для сил) граничных условиях

$$\tau_{ij}n_j = f_i^{S_f} \quad \text{на поверхности } S_f, \quad (b)$$

а также при существенных (для смещений) граничных условиях

$$u_i = u_i^{S_u} \quad \text{на поверхности } S_u, \quad (c)$$

где $S = S_u \cup S_f$, $S_u \cap S_f = 0$, а n_j — это компоненты единичного вектора нормали к поверхности тела S .

Рассмотрим теперь *любые*, произвольно выбранные, непрерывно распределенные смещения \bar{u}_i , удовлетворяющие условиям

$$\bar{u}_i = 0 \quad \text{на поверхности } S_u. \quad (d)$$

Тогда $(\tau_{ij,j} + f_i^B)\bar{u}_i = 0$ и, значит,

$$\int_V (\tau_{ij,j} + f_i^B)\bar{u}_i dV = 0. \quad (e)$$

Далее, используя тождество $\int_V (\tau_{ij} \bar{u}_i)_{,j} dV = \int_S (\tau_{ij} \bar{u}_i) n_j dS$, которое является следствием теоремы о дивергенции¹⁾ (см., например, [Thomas, Finney 1992]), получаем

$$\int_V (-\tau_{ij} \bar{u}_{i,j} + f_i^B \bar{u}_i) dV + \int_S (\tau_{ij} \bar{u}_i) n_j dS = 0. \quad (f)$$

С учетом условий (b) и (d) получаем

$$\int_V (-\tau_{ij} \bar{u}_{i,j} + f_i^B \bar{u}_i) dV + \int_{S_f} f_i^{Sf} \bar{u}_i^{Sf} dS = 0. \quad (g)$$

Кроме того, вследствие симметрии тензора напряжений ($\tau_{ij} = \tau_{ji}$), имеем

$$\tau_{ij} \bar{u}_{i,j} = \tau_{ij} \left[\frac{1}{2} (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}) \right] = \tau_{ij} \bar{\epsilon}_{ij}$$

и, следовательно, из соотношения (g) мы получаем требуемый результат, т. е. уравнение (4.7),

$$\int_V \tau_{ij} \bar{\epsilon}_{ij} dV = \int_V f_i^B \bar{u}_i dV + \int_{S_f} f_i^{Sf} \bar{u}_i^{Sf} dS. \quad (h)$$

Отметим, что в уравнении (h) используются тензорные обозначения для деформаций; следовательно, фигурирующие в (4.7) инженерные сдвиговые деформации получаются путем сложения с соответствующими компонентами тензорных сдвиговых деформаций, например, $\bar{\gamma}_{XY} = \bar{\epsilon}_{12} + \bar{\epsilon}_{21}$. Отметим также, что посредством использования условий (b) и (d) в соотношении (f) мы в явной форме ввели естественные граничные условия в соотношение (h), выражающее принцип виртуальных перемещений.

Пример 4.3:

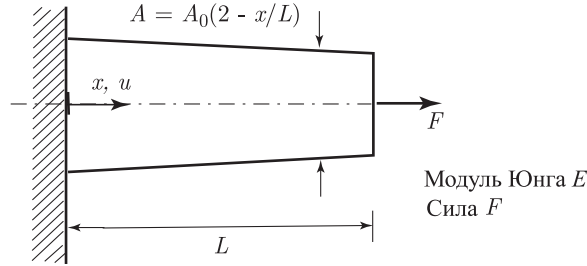


Рис. 4.3. Брус, подвергнутый сосредоточенной нагрузке F

Рассмотрим брус, показанный на рис. 4.3. Требуется:

- Записать уравнение принципа виртуальных перемещений (4.7) в форме, соответствующей данной задаче.
- Построить решение для точного выражения реакции механической модели.
- Показать, что для точного выражения реакции в терминах смещений принцип виртуальных перемещений удовлетворяется, если эти смещения представлены, как (i) $\bar{u} = ax$ и (ii) $\bar{u} = ax^2$, где a — некоторая постоянная.
- Предположить, что решение для напряжения имеет вид

$$\tau_{xx} = \frac{F}{(3/2)A_0},$$

¹⁾ Теорема о дивергенции гласит: пусть \mathbf{F} есть векторное поле внутри объема V ; тогда

$$\int_V F_{i,i} dV = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS,$$

где \mathbf{n} есть единичный вектор внешней нормали к поверхности S , ограничивающей V .

т. е. что τ_{xx} есть сила F , деленная на среднюю площадь поперечного сечения, и исследовать, будет ли уравнение принципа виртуальных перемещений удовлетворяться при модельных представлениях пункта (с).

Уравнение принципа виртуальных перемещений (4.7), представленное в форме, соответствующей рассматриваемой задаче о брус, записывается как

$$\int_0^L \frac{d\bar{u}}{dx} EA \frac{du}{dx} dx = \bar{u} \Big|_{s=L} F. \quad (a)$$

Определяющие дифференциальные уравнения получаются посредством использования интегрирования по частям (см. пример 3.19):

$$\bar{u} EA \frac{du}{dx} \Big|_0^L - \int_0^L \bar{u} \frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) dx = \bar{u} \Big|_{x=L} F. \quad (b)$$

Если учесть, что $\bar{u}|_{x=0} = 0$, а во всех других точках значения \bar{u} произвольны, из уравнения (b) получим (соответствующую аргументацию см. в примере 3.18)

$$\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) = 0 \quad \text{дифференциальное уравнение равновесия} \quad (c)$$

$$EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = F \quad \text{сила, или естественное граничное условие.} \quad (d)$$

Разумеется, в дополнение к этому мы имеем граничное условие для смещения $u|_{x=0} = 0$. Интегрируя соотношение (c) и используя граничные условия, в качестве точного решения для данной математической модели получим

$$u = \frac{FL}{EA_0} \ln \left(\frac{2}{2 - x/L} \right). \quad (e)$$

Далее, используя выражение (e) и полагая в уравнении (a) $\bar{u} = ax$ и $\bar{u} = ax^2$, получим

$$\int_0^L a \frac{f}{A_0(2 - x/L)} A_0 \left(2 - \frac{x}{L} \right) dx = aLF \quad (f)$$

и

$$\int_0^L 2ax \frac{F}{A_0(2 - x/L)} A_0 \left(2 - \frac{x}{L} \right) dx = aL^2 F. \quad (g)$$

Как показывают соотношения (f) и (g), для точного представления реакции смещение–напряжение уравнение принципа виртуальных перемещений удовлетворяется путем задания предполагаемых виртуальных перемещений.

Теперь воспользуемся принципом виртуальных перемещений при $\tau_{xx} = (2/3)(F/A_0)$ и примем вначале $\bar{u} = ax$, а затем $\bar{u} = ax^2$. При $\bar{u} = ax$ получим

$$\int_0^L a \frac{2}{3} \frac{F}{A_0} A_0 \left(2 - \frac{x}{L} \right) dx = aLF,$$

а это показывает, что принцип виртуальных перемещений соблюдается в выбранном поле этих смещений. При $\bar{u} = ax^2$ получаем

$$\int_0^L 2ax \frac{2}{3} \frac{F}{A_0} A_0 \left(2 - \frac{x}{L} \right) dx \neq aL^2 F$$

и, как показывает это соотношение, выражение $\tau_{xx} = (2/3)(F/A_0)$ не является правильным решением для напряжения.

Принцип виртуальных перемещений может быть поставлен в прямую связь с тем принципом, что полный потенциал Π данной системы должен быть стационарным (см. разделы 3.3.2 и 3.3.4). Эту связь мы рассмотрим на следующем примере.

Пример 4.4: Требуется показать, как для линейного упругого континуума принцип виртуальных перемещений связан с принципом стационарности полного потенциала.

Рассмотрим линейный упругий континуум с нулевыми начальными напряжениями. Для тела, показанного на рис. 4.2, полный потенциал имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \epsilon^T \mathbf{C} \epsilon dV - \int_V \mathbf{U}^T \mathbf{f}^B dV - \int_{S_f} \mathbf{U}^{S_f T} \mathbf{f}^{S_f} dS - \sum_i \mathbf{U}^{i T} \mathbf{R}_C^i, \quad (a)$$

где обозначения были определены ранее, и мы имеем

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C} \epsilon,$$

при символе \mathbf{C} , обозначающем матрицу напряжение–деформация для данного материала.

Привлекая условие стационарности Π , т. е. полагая, что $\delta \Pi = 0$ по отношению к смещениям (которые теперь выражаются через деформации), и используя факт симметричности матрицы \mathbf{C} , получим

$$\int_V \delta \epsilon^T \mathbf{C} \epsilon dV = \int_V \delta \mathbf{U}^T \mathbf{f}^B dV + \int_{S_f} \delta \mathbf{U}^{S_f T} \mathbf{f}^{S_f} dS + \sum_i \delta \mathbf{U}^{i T} \mathbf{R}_C^i. \quad (b)$$

Однако для вычисления Π по формуле (a) смещения должны удовлетворять граничным условиям. Поэтому в соотношении (b) мы учитываем любые вариации перемещений, но взятые с нулевыми значениями при и в соответствии с граничными условиями для смещений, а также соответствующие вариации деформаций. Отсюда следует, что использование условия стационарности Π эквивалентно использованию принципа виртуальных перемещений и, действительно, мы можем написать

$$\delta \epsilon \equiv \bar{\epsilon}; \quad \delta \mathbf{U} \equiv \bar{\mathbf{U}}; \quad \delta \mathbf{U}^{S_f} \equiv \bar{\mathbf{U}}^{S_f}; \quad \delta \mathbf{U}^i \equiv \bar{\mathbf{U}}^i,$$

так что соотношение (b) сводится к уравнению (4.7)

Важно отдавать себе отчет в том, что если уравнение принципа виртуальных перемещений (4.7) удовлетворяется при любых допустимых смещениях и при напряжениях $\boldsymbol{\tau}$, «надлежащим образом определяемых» по данным о непрерывном поле смещений \mathbf{U} , удовлетворяющем на S_u граничным условиям для смещений, то будут выполнены все три фундаментальных требования механики:

1. *Равновесие* соблюдается, так как в примере 4.2 было показано, что принцип виртуальных перемещений представляет собой выражение равновесия.
2. *Совместность* соблюдается, так как поле смещений \mathbf{U} непрерывно и удовлетворяет граничным условиям для смещений.
3. *Закон связи между напряжениями и деформациями* соблюдается, так как напряжения $\boldsymbol{\tau}$ рассчитывались по деформациям ϵ с использованием основополагающих соотношений (а деформации вычислялись по данным о смещениях \mathbf{U}).

До сих пор мы предполагали, что рассматриваемое нами тело подперто надлежащим образом, т. е. что имеют место опорные условия, достаточные для получения единственного решения в терминах смещений. Однако принцип виртуальных перемещений остается справедливым и тогда, когда все опоры удалены и вместо них приложены соответствующие реакции (которые тогда предполагаются известными). В этом случае та площадь поверхности S_f , на которой прилагаются известные

силы, равна полной площади поверхности тела (а площадь S_u равна нулю)¹⁾. Мы воспользуемся этим важным наблюдением в процессе вывода определяющих конечно-элементных уравнений. Иначе говоря, с точки зрения общих понятий целесообразно вначале не рассматривать каких-либо ограничений на смещения, провести в соответствии с этим вывод вышеуказанных уравнений, а затем, прежде чем решать эти уравнения, наложить на смещения все граничные условия.

Конечно-элементные уравнения

Теперь перейдем к выводу определяющих конечно-элементных уравнений. Сначала мы рассмотрим реакцию показанного на рис. 4.2 трехмерного тела общего вида, а затем конкретизируем эту общую формулировку применительно к частным задачам (см. раздел 4.2.3).

При конечно-элементном анализе мы аппроксимируем показанное на рис. 4.2 тело в форме комплекса дискретных конечных элементов, связанных между собой в узловых точках на границах элементов. Предполагается, что смещения, измеряемые в локальной системе координат x, y, z (которая должна быть выбрана наиболее удобным образом) внутри каждого элемента, являются функциями смещений в узловых точках элемента, число которых равно N . Поэтому для элемента под номером m мы имеем

$$\mathbf{U}^{(m)}(x, y, z) = \mathbf{H}^{(m)}(x, y, z)\hat{\mathbf{U}}, \quad (4.8)$$

где $\mathbf{H}^{(m)}$ есть интерполяционная матрица смещений, верхний индекс m обозначает номер элемента, а $\hat{\mathbf{U}}$ представляет собой вектор, состоящий из трех компонентов глобального смещения, U_i, V_i и W_i , во всех узловых точках, расположенных на опорах комплекса элементов; иначе говоря, $\hat{\mathbf{U}}$ — это вектор размерности $3N$,

$$\hat{\mathbf{U}}^T = [U_1 V_1 W_1 \quad U_2 V_2 W_2 \quad \dots \quad U_N V_N W_N]. \quad (4.9)$$

Здесь можно заметить, что в более общем виде мы запишем

$$\hat{\mathbf{U}}^T = [U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad \dots \quad U_n], \quad (4.10)$$

где предполагается, что U_i может соответствовать смещению в любом из направлений X, Y или Z , или даже в направлении, не совпадающем с направлением какой-либо из этих координатных осей (но направленном вдоль оси другой локальной системы координат), а может также означать и поворот, если мы рассматриваем балки, пластины или оболочки (см. раздел 4.2.3). Если учесть, что вектор $\hat{\mathbf{U}}$ включает в себя смещения (и повороты) на опорах комплекса элементов, то позднее, прежде чем строить решение для неизвестных смещений в узловых точках, нам нужно задать известные значения $\hat{\mathbf{U}}$ в точках опор.

На рис. 4.2 показан типовой конечный элемент, входящий в комплекс. Этот элемент имеет восемь узловых точек, по одной в каждом из узлов, и может рассматриваться как «строительный кирпич». Мы должны представить себе, что тело в целом являет собой комплект таких кирпичных элементов, собранных воедино так, чтобы между элементами не оставалось зазоров. Здесь мы показываем такой элемент просто в качестве примера; на практике могут использоваться элементы разнообразных геометрических форм с различным расположением узловых точек как на гранях элемента, так и внутри него.

¹⁾ По этой причине, а также для упрощения обозначений, мы, как правило (т. е. исключая раздел 4.4.2) не будем при обозначениях поверхностных сил и смещений использовать верхние индексы S_f и S_u , а ограничимся верхним индексом S .

Выбор элемента и создание соответствующих компонентов матрицы $\mathbf{H}^{(m)}$ (зависящих от геометрии элемента, от числа элементных узлов/степеней свободы, а также от требований сходимости) представляют собой в совокупности основные этапы конечно-элементного решения и будут подробно обсуждаться позднее.

Все смещения в узловых точках являются компонентами вектора $\hat{\mathbf{U}}$, однако следует отдавать себе отчет в том, что в применении к заданному элементу только смещения в его узлах влияют на распределение смещений и деформаций внутри элемента.

В предположении о том, что смещения соответствуют выражению в (4.8), мы можем теперь рассчитать соответствующие деформации элемента, —

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(m)}(x, y, z) = \mathbf{B}^{(m)}(x, y, z) \hat{\mathbf{U}}, \quad (4.11)$$

где $\mathbf{B}^{(m)}$ — это матрица связи деформация–смещение; строки матрицы $\mathbf{B}^{(m)}$ получаются путем надлежащего дифференцирования и комбинирования строк матрицы $\mathbf{H}^{(m)}$.

В настоящий момент может не быть очевидной цель выражения смещений и деформаций элемента в терминах целого множества смещений в узловых точках конечно-элементного комплекса. Однако мы увидим, что если действовать таким образом, то подстановка представлений (4.8) и (4.11) в уравнение, определяющее собой принцип виртуальных перемещений, автоматически приведет к эффективно-му процессу соединения матриц всех элементов с превращением их в определяющие структурные матрицы. Этот процесс соединения называется прямым методом жесткости.

Напряжения в конечном элементе связаны с начальными значениями этих напряжений и с деформациями элемента соотношением

$$\boldsymbol{\tau}^{(m)} = \mathbf{C}^{(m)} \boldsymbol{\epsilon}^{(m)} + \boldsymbol{\tau}^{I(m)}, \quad (4.12)$$

где $\mathbf{C}^{(m)}$ — это матрица упругости элемента m , а $\boldsymbol{\tau}^{I(m)}$ — матрица заданных начальных напряжений в элементе. Матрица $\mathbf{C}^{(m)}$ характеризует закон поведения материала каждого из элементов, он может соответствовать изотропному или анизотропному материалу и может быть разным для разных элементов.

Используя предположение, касающееся смещений в каждом из конечных элементов и соответствующее соотношению (4.8), мы можем теперь вывести уравнения, соответствующие смещениям в узловых точках данного комплекса конечных элементов. Прежде всего мы переписываем уравнение (4.7) в виде суммы интегралов по объемам и площадям всех конечных элементов:

$$\begin{aligned} \sum_m \int_{V^{(m)}} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{(m)T} \boldsymbol{\tau}^{(m)} dV^{(m)} = \sum_m \int_{V^{(m)}} \bar{\mathbf{u}}^{(m)T} \mathbf{f}^{B(m)} dV^{(m)} + \\ + \sum_m \int_{S_1^{(m)}, \dots, S_q^{(m)}} \bar{\mathbf{u}}^{S(m)T} \mathbf{f}^{S(m)} dS^{(m)} + \sum_i \bar{\mathbf{u}}^{iT} \mathbf{R}_C^i, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где $m = 1, 2, \dots, k$, а k — число элементов, тогда как символы $S_1^{(m)}, \dots, S_q^{(m)}$ обозначают площади поверхностей элементов, являющихся частями площади поверхности тела S . Для элементов, со всех сторон окруженных другими элементами, таких поверхностей не существует, тогда как для элементов, лежащих на поверхности тела, одна (или более) такая элементная поверхность включается в интеграл поверхностных сил. Отметим, что в уравнении (4.13) предполагается, что точки приложения сосредоточенных нагрузок выбраны в качестве узловых, хотя, разу-

меется, сосредоточенная нагрузка может быть включена также и в поверхностные интегралы для сил.

Важно отметить, что *интегралы в уравнении (4.13) берутся по объемам и площадям поверхностей элементов, а поэтому для эффективности расчетов мы можем использовать в применении к каждому элементу любую удобную и отличную от других систему координат*. В конце концов, для заданного поля виртуальных перемещений как внутренняя, так и внешняя виртуальная работа представляет собой некоторое число, а это число может быть найдено путем вычисления интегралов в любой системе координат. Разумеется, предполагается, что при вычислении каждого из интегралов в уравнении (4.13) используется одна и та же система координат для всех переменных. Например, величина $\bar{\mathbf{u}}^{(m)}$ определяется в той же системе координат, что и $\mathbf{f}^{B(m)}$. По существу, использование различных координатных систем приводит к тому, что каждый из интегралов, требующихся для комплекса элементов общего вида, может быть вычислен весьма эффективно.

Соотношения в формулах (4.8) и (4.11) были сформулированы для неизвестных (истинных) смещений и деформаций в элементах. При нашем использовании принципа виртуальных перемещений мы применяем одни и те же допущения и для виртуальных перемещений, и для деформаций, то есть

$$\bar{\mathbf{u}}^{(m)}(x, y, z) = \mathbf{H}^{(m)}(x, y, z) \bar{\mathbf{U}}, \quad (4.14)$$

$$\bar{\epsilon}^{(m)}(x, y, z) = \mathbf{B}^{(m)}(x, y, z) \bar{\mathbf{U}}. \quad (4.15)$$

Если действовать таким образом, то матрицы жесткости (и массы) элементов будут *симметричными* матрицами.

Если теперь подставить соответствующие выражения в уравнение (4.13), то мы получим

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{U}}^T \left[\sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \mathbf{C}^{(m)} \mathbf{B}^{(m)} dV^{(m)} \right] \hat{\mathbf{U}} = \\ = \bar{\mathbf{U}}^T \left[\left\{ \sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{H}^{(m)T} \mathbf{f}^{B(m)} dV^{(m)} \right\} + \right. \\ \left. + \left\{ \sum_m \int_{S_1^{(m)}, \dots, S_q^{(m)}} \mathbf{H}^{S(m)} \mathbf{f}^{S(m)} dS^{(m)} \right\} - \right. \\ \left. - \left\{ \sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \boldsymbol{\tau}^{I(m)} dV^{(m)} \right\} + \mathbf{R}_C \right], \quad (4.16) \end{aligned}$$

где интерполяционные матрицы смещений $\mathbf{H}^{S(m)}$ в поверхностных интегралах получаются из аналогичных матриц в формулах (4.8) путем введения надлежащих координат для поверхности элемента (см. примеры 4.7 и 5.12), и где \mathbf{R}_C есть вектор сосредоточенных нагрузок, приложенных в узлах комплекса элементов.

Следует отметить, что i -й компонент вектора \mathbf{R}_C представляет собой сосредоточенную узловую силу, соответствующую i -му компоненту вектора смещений $\hat{\mathbf{U}}$. Входящие в уравнение (4.16) векторы смещений узловых точек комплекса элементов $\hat{\mathbf{U}}$ и $\bar{\mathbf{U}}$ не зависят от номера элемента m и поэтому выведены из-под знаков суммирования.

Чтобы получить из уравнения (4.16) уравнения для неизвестных смещений в узловых точках, мы применим принцип виртуальных перемещений n раз, задавая

при этом поочередно, для каждого компонента вектора $\widehat{\mathbf{U}}$, единичные виртуальные перемещения. При первом применении принципа $\widehat{\mathbf{U}} = \mathbf{e}_1$ ¹⁾, при втором применении $\widehat{\mathbf{U}} = \mathbf{e}_2$, и так далее, вплоть до n -го применения, когда $\widehat{\mathbf{U}} = \mathbf{e}_n$, так что результат имеет вид

$$\mathbf{KU} = \mathbf{R}, \quad (4.17)$$

где мы не показываем единичных матриц \mathbf{I} , связанных с виртуальными перемещениями в левой и правой частях уравнения, и где

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_B + \mathbf{R}_S - \mathbf{R}_I + \mathbf{R}_C \quad (4.18)$$

и, кроме того, как мы будем делать здесь и в дальнейшем, где вектор неизвестных смещений в узловых точках обозначается символом \mathbf{U} , т.е. $\mathbf{U} \equiv \widehat{\mathbf{U}}$.

Матрица \mathbf{K} — это матрица жесткости комплекса элементов:

$$\mathbf{K} = \sum_m \underbrace{\int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \mathbf{C}^{(m)} \mathbf{B}^{(m)} dV^{(m)}}_{= \mathbf{K}^{(m)}}. \quad (4.19)$$

Вектор нагрузки \mathbf{R} включает в себя эффекты массовых сил, действующих на каждый элемент,

$$\mathbf{R}_B = \sum_m \underbrace{\int_{V^{(m)}} \mathbf{H}^{(m)T} \mathbf{f}^{B(m)} dV^{(m)}}_{= \mathbf{R}_B^{(m)}}, \quad (4.20)$$

эффект поверхностных сил, действующих на каждый элемент,

$$\mathbf{R}_S = \sum_m \underbrace{\int_{S_1^{(m)}, \dots, S_q^{(m)}} \mathbf{H}^{S(m)T} \mathbf{f}^{S(m)} dS^{(m)}}_{= \mathbf{R}_S^{(m)}}, \quad (4.21)$$

эффект воздействия на каждый элемент начальных напряжений

$$\mathbf{R}_I = \sum_m \underbrace{\int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \boldsymbol{\tau}^{I(m)} dV^{(m)}}_{= \mathbf{R}_I^{(m)}}, \quad (4.22)$$

а также эффект влияния сосредоточенных нагрузок в узлах \mathbf{R}_C .

Отметим, что суммирование объемных интегралов для элементов в формуле (4.19) выражает прямое сложение матриц жесткости $\mathbf{K}^{(m)}$ для каждого элемента, проводимое для получения матрицы жесткости комплекса элементов в целом. Точно так же, вектор массовых сил комплекса \mathbf{R}_B вычисляется путем прямого сложения векторов массовых сил элементов $\mathbf{R}_B^{(m)}$; подобным же образом получаются и векторы \mathbf{R}_S и \mathbf{R}_I . Процесс объединения матриц элементов путем такого прямого сложения называется *прямым методом жесткости*.

¹⁾ Относительно определения вектора \mathbf{e}_i см. текст вслед за формулой (2.7).

Это элегантное представление процесса объединения в комплекс зависит от двух главных факторов: во-первых, размеры всех матриц, подлежащих сложению, одинаковы и, во-вторых, число степеней свободы элемента равно глобальному числу степеней свободы. Разумеется, на практике вычисляются только ненулевые строки и столбцы матрицы $\mathbf{K}^{(m)}$ для элемента (соответствующие фактическим узловым степеням свободы этого элемента), а затем осуществляется объединение, при котором для каждого элемента используется массив связуемости LM (см. пример 4.11 и главу 12). Кроме того, на практике матрица жесткости элемента может первоначально рассчитываться в соответствии с локальным числом степеней свободы элемента, не согласованным с глобальным числом степеней свободы комплекса; в этом случае перед объединением необходимо провести преобразование (см. соотношения (4.41)).

Уравнение (4.17) представляет собой констатацию статического равновесия для комплекса элементов. При этом анализе равновесия приложенные силы могут изменяться со временем, а в этом случае со временем изменяются и смещения, и уравнение (4.17) констатирует равновесие для любого, конкретно выбранного момента времени (таким образом, на практике наложение зависящих от времени нагрузок может быть использовано для моделирования случаев со многими нагрузками; см. пример 4.5). Однако если в действительности нагрузки налагаются быстро по отношению к масштабу времени, измеряемому по естественным частотам системы, то следует учитывать влияние сил инерции; иначе говоря, необходимо будет рассматривать настоящую динамическую задачу. Пользуясь принципом Даламбера, мы можем просто включить силы инерции в число массовых сил для каждого элемента. Если предположить, что ускорения элементов аппроксимируются таким же образом, как и смещения элементов в формуле (4.8), то вклад тотальных массовых сил в вектор нагрузки будет равен (при стационарной системе координат X, Y, Z)

$$\mathbf{R}_B = \sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{H}^{(m)T} [\mathbf{f}^{B(m)} - \rho^{(m)} \mathbf{H}^{(m)} \ddot{\mathbf{U}}] dV^{(m)}, \quad (4.23)$$

где вектор $\mathbf{f}^{B(m)}$ уже не включает в себя сил инерции, вектор $\ddot{\mathbf{U}}$ определяет ускорения узловых точек (т. е. представляет собой вторую производную по времени от \mathbf{U}), а $\rho^{(m)}$ есть массовая плотность элемента m . В этом случае уравнения равновесия имеют вид

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{R}, \quad (4.24)$$

где векторы \mathbf{R} и \mathbf{U} зависят от времени. Матрица \mathbf{M} — это матрица масс данной конструкции,

$$\mathbf{M} = \sum_m \underbrace{\int_{V^{(m)}} \rho^{(m)} \mathbf{H}^{(m)T} \mathbf{H}^{(m)} dV^{(m)}}_{= \mathbf{M}^{(m)}}. \quad (4.25)$$

При фактических измерениях динамических реакций конструкций замечено, что при вибрации энергия диссипируется, а в процессе анализа вибраций этот факт обычно принимается во внимание путем введения зависящих от скорости демпфирующих сил. Если ввести эти демпфирующие силы в форме дополнительных вкладов в массовые силы, то в соответствии с соотношением (4.23) получим

$$\mathbf{R}_B = \sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{H}^{(m)T} (\mathbf{f}^{B(m)} - \rho^{(m)} \mathbf{H}^{(m)} \ddot{\mathbf{U}} - \kappa^{(m)} \mathbf{H}^{(m)} \dot{\mathbf{U}}) dV^{(m)}. \quad (4.26)$$

В этом случае векторы $\mathbf{f}^{B(m)}$ не включают в себя ни сил инерции, ни зависящих от скорости демпфирующих сил, символ $\dot{\mathbf{U}}$ представляет собой вектор скорости узловых точек (т.е. первую производную по времени от \mathbf{U}), а величина $\kappa^{(m)}$ есть параметр элемента m , характеризующий его демпфирующие свойства. В этом случае уравнения равновесия имеют вид

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{R}, \quad (4.27)$$

где \mathbf{C} представляет собой матрицу демпфирования данной конструкции; то есть, формально,

$$\mathbf{C} = \sum_m \underbrace{\int_{V^{(m)}} \kappa^{(m)} \mathbf{H}^{(m)T} \mathbf{H}^{(m)} dV^{(m)}}_{= \mathbf{C}^{(m)}}. \quad (4.28)$$

На практике затруднительно, если не невозможно, определить демпфирующие параметры элементов, включаемых в конечно-элементные комплексы общего вида, в частности в силу того, что демпфирующие свойства зависят от частот. Поэтому в общем случае матрица \mathbf{C} не собирается из демпфирующих матриц элементов, но вместо этого строится с использованием матрицы масс и матрицы жесткости всего комплекса элементов, а также экспериментальных данных о степени демпфирования. Некоторые формулировки, используемые для построения матриц демпфирования, имеющих физический смысл, описываются в разделе 9.3.3.

Таким образом, полный анализ состоит из вычисления матрицы \mathbf{K} (а также матриц \mathbf{M} и \mathbf{C} при динамическом анализе) и вектора нагрузки \mathbf{R} , решения уравнения (4.17) для нахождения реакции \mathbf{U} (или \mathbf{U} , $\dot{\mathbf{U}}$ и $\ddot{\mathbf{U}}$ из уравнений (4.24) или (4.27)), и последующего за этим расчета напряжений с использованием соотношения (4.12). Необходимо подчеркнуть, что напряжения без труда определяются из соотношения (4.12) — иначе говоря, только по данным о начальных напряжениях и о смещениях в элементах — и что полученные значения не корректируются на наличие налагаемых на элемент извне давлений или массовых сил, как это имеет место в повседневной практике при анализе каркасных конструкций с балочными элементами (см. пример 4.5, а также, например, [Crandall et al. 1978]). При анализе балочных конструкций каждый элемент представляет одномерную картину напряжений, а поправка величины напряжения, обусловленная распределенной нагрузкой, реализуется с помощью простых соображений о равновесии. Поэтому при статическом анализе можно применять сравнительно длинные балочные элементы, и в результате использовать для представления каркасной конструкции всего лишь несколько элементов (и несколько степеней свободы). Однако в общем случае подобная схема потребовала бы двумерного или трехмерного конечно-элементного анализа, решения краевых задач для больших элементных областей, используемых при этом, и для точного расчета смещений и деформаций более эффективным оказывается использование измельченных сеток. При такой высококачественной дискретизации преимущества даже приближенной коррекции напряжений на влияние распределенных на элементах нагрузок оказываются, вообще говоря, небольшими, хотя, конечно, в особых ситуациях использование рациональной расчетной схемы может привести к заметным улучшениям.

Чтобы проиллюстрировать представленный выше вывод конечно-элементных уравнений равновесия, мы рассмотрим нижеследующие примеры.

Пример 4.5:

Требуется построить конечно-элементные уравнения равновесия для конструкции в виде бруса, показанного на рис. 4.4. Та математическая модель, которую следует

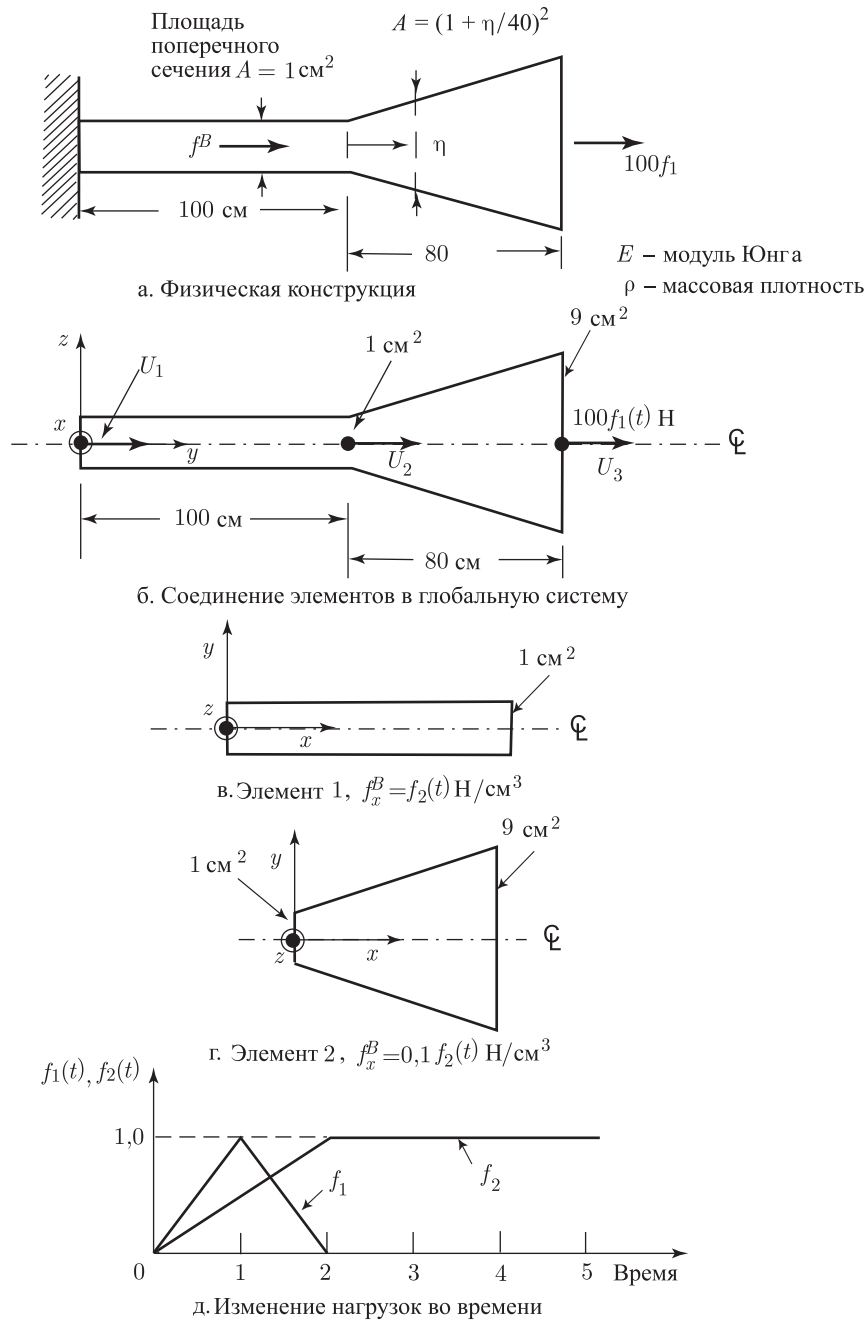


Рис. 4.4. Двухэлементное соединение брусьев

использовать, рассматривается в примерах 3.17 и 3.22. Используйте приведенную на рисунке идеализацию брусового элемента с двумя узлами и рассмотрите следующие два случая:

1. Предположите, что нагрузки налагаются очень медленно, если время измеряется в единицах (естественных периодах), соответствующих данной конструкции.
2. Предположите, что нагрузки налагаются очень быстро. В начальный момент конструкция находится в покое.

При формулировке конечно-элементных уравнений равновесия мы применяем общие уравнения (4.8)–(4.24), однако используем то положение, что продольным напряжением в брус является единственное ненулевое напряжение. Кроме того, рассмотрение бруса в целом в форме комплекса из двух брусковых элементов, каждый из которых имеет два узла, соответствует допущению о линейном законе изменения смещений между узловыми точками каждого элемента.

Первый этап состоит в построении матриц $\mathbf{H}^{(m)}$ и $\mathbf{B}^{(m)}$ для $m = 1, 2$. Напомним, что несмотря на тот факт, что смещение на левом конце конструкции равно нулю, при построении конечно-элементных уравнений равновесия мы все же вначале включаем в этот процесс смещение на вышеуказанной поверхности.

В соответствии с представлением вектора смещений $\mathbf{U}^T = [U_1 \ U_2 \ U_3]$ мы имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{H}^{(1)} &= \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{100}\right) & \frac{x}{100} & 0 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{B}^{(1)} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{100} & \frac{1}{100} & 0 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{H}^{(2)} &= \begin{bmatrix} 0 & \left(1 - \frac{x}{80}\right) & \frac{x}{80} \end{bmatrix}; \\ \mathbf{B}^{(2)} &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{80} & \frac{1}{80} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Матрицы материальных свойств имеют вид

$$\mathbf{C}^{(1)} = E; \quad \mathbf{C}^{(2)} = E,$$

где E — модуль Юнга для материала конструкции. Для вычисления интегралов по объему нам нужно знать площади поперечного сечения элементов. Мы имеем

$$A^{(1)} = 1 \text{ см}^2; \quad A^{(2)} = \left(1 + \frac{x}{40}\right)^2 \text{ см}^2.$$

Если нагрузки налагаются очень медленно, то требуется провести статический анализ, для которого следует вычислить матрицу жесткости \mathbf{K} и вектор нагрузки \mathbf{R} . Массовые силы и нагрузки приводятся на рис. 4.4. Исходя из этих данных, имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{K} = (1)E \int_0^{100} \begin{bmatrix} -\frac{1}{100} \\ \frac{1}{100} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{100} & \frac{1}{100} & 0 \end{bmatrix} dx + \\ + E \int_0^{80} \left(1 + \frac{x}{40}\right)^2 \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{80} \\ \frac{1}{80} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{80} & \frac{1}{80} \end{bmatrix} dx,\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= \frac{E}{100} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{13E}{240} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{E}{240} \begin{bmatrix} 2,4 & -2,4 & 0 \\ -2,4 & 15,4 & -13 \\ 0 & -13 & 13 \end{bmatrix},\end{aligned}\tag{a}$$

а также

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_B &= \left\{ (1) \int_0^{100} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{100} \\ \frac{x}{100} \\ 0 \end{bmatrix} (1) dx + \int_0^{80} \left(1 + \frac{x}{40}\right)^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - \frac{x}{80} \\ \frac{x}{80} \end{bmatrix} \left(\frac{1}{10}\right) dx \right\} f_2(t) = \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 150 \\ 186 \\ 68 \end{bmatrix} f_2(t) \end{aligned} \quad (b)$$

$$\mathbf{R}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix} f_1(t). \quad (c)$$

Чтобы получить решение для конкретного значения времени t^* , нужно вычислить значения векторов \mathbf{R}_B и \mathbf{R}_C , соответствующие t^* , и тогда уравнение

$$\mathbf{K}\mathbf{U}|_{t=t^*} = \mathbf{R}_B|_{t=t^*} + \mathbf{R}_C|_{t=t^*} \quad (d)$$

позволяет найти смещения в момент t^* . Следует отметить, что при проведении этого статического анализа смещения в данный момент зависят только от величины нагрузок в этот момент времени и не зависят от предыстории нагружения.

Для проведения динамического анализа нам понадобится теперь вычислить матрицу масс. Используя интерполяционные матрицы смещений и выражение (4.25), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= (1)\rho \int_0^{100} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{100} \\ \frac{x}{100} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{100}\right) & \frac{x}{100} & 0 \end{bmatrix} dx + \\ &+ \rho \int_0^{80} \left(1 + \frac{x}{40}\right)^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - \frac{x}{80} \\ \frac{x}{80} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \left(1 - \frac{x}{80}\right) & \frac{x}{80} \end{bmatrix} dx. \end{aligned}$$

Отсюда получим

$$\mathbf{M} = \frac{\rho}{6} \begin{bmatrix} 200 & 100 & 0 \\ 100 & 584 & 336 \\ 0 & 336 & 1024 \end{bmatrix}.$$

Демпфирование здесь не принималось во внимание; теперь, следовательно, уравнения равновесия, подлежащие решению, принимают вид

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) = \mathbf{R}_B(t) + \mathbf{R}_C(t), \quad (e)$$

где фигурируют матрица жесткости \mathbf{K} и векторы нагрузок \mathbf{R}_B и \mathbf{R}_C , которые уже представлены в соотношениях (a)–(c). Если использовать начальные условия

$$\mathbf{U}|_{t=0} = 0; \quad \dot{\mathbf{U}}|_{t=0} = 0, \quad (f)$$

то приведенные выше уравнения следует проинтегрировать по времени от $t = 0$ до $t = t^*$, чтобы получить решение для момента времени t^* (см. главу 9).

Чтобы построить реальное решение, определяющее реакцию показанной на рис. 4.4 а конструкции, нужно наложить условие $U_1 = 0$ для любого значения времени t . Следовательно, уравнения (d) должны быть подправлены с учетом этого условия (см. раздел 4.2.2). После этого решение уравнений (d) и (e) дает $U_2(t)$, $U_3(t)$, и напряжения определяются по формуле

$$\tau_{xx}^{(m)} = \mathbf{C}^{(m)} \mathbf{B}^{(m)} \mathbf{U}(t); \quad m = 1, 2. \quad (g)$$

Эти напряжения будут терпеть разрыв при переходе от одного элемента к другому, так как деформации элементов предполагались постоянными. При рассмотрении данного

примера можно рассчитать точное решение для выбранной математической модели, и поэтому, разумеется, внутри каждого элемента можно вычислить напряжения с точностью, превышающей то, что дает формула (g).

При статическом анализе повышение точности результатов может быть достигнуто вполне просто (как в теории балок), путем внесения поправки в выражение напряжения при распределенной нагрузке по отношению к значению, соответствующему формуле (g). Однако такая поправка для напряжения не является столь же бесспорной при динамическом анализе общего характера (а также при любых видах двумерного или трехмерного практического анализа) и, если для идеализированного представления конструкции используется достаточно большое число элементов, то величины напряжений, вычисляемых по формуле (g), оказываются достаточно точными (см. раздел 4.3.6).

Пример 4.6: Требуется провести анализ консольной пластины, показанной на рис. 4.5. Чтобы проиллюстрировать технику анализа, воспользуемся грубой конечно-элементной идеализацией, приведенной на рисунке (при практическом анализе следует применять большее количество конечных элементов — см. раздел 4.3). Определить матрицы $\mathbf{H}^{(2)}$, $\mathbf{B}^{(2)}$ и $\mathbf{C}^{(2)}$.

Консольная пластина находится в условиях плоских напряжений. Для изотропного, линейно упругого материала матрица напряжение–деформация определяется с использованием модуля Юнга E и коэффициента Пуассона ν (см. табл. 4.3),

$$\mathbf{C}^{(2)} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix}.$$

Матрица преобразования смещений $\mathbf{H}^{(2)}$ для элемента 2 связывает смещения внутри элемента со смещениями в узловых точках,

$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}^{(2)} = \mathbf{H}^{(2)} \mathbf{U}, \quad (\text{a})$$

где \mathbf{U} — вектор, включающий смещения во всех узловых точках конструкции,

$$\mathbf{U}^T = [U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4 \ \dots \ U_{17} \ U_{18}] \quad (\text{b})$$

(как об этом уже упоминалось ранее, на данной стадии анализа мы рассматриваем модель конструкции, не учитывая граничных условий). При рассмотрении элемента 2 следует признать, что на смещения внутри этого элемента влияют только смещения в узлах 6, 3, 2 и 5. Для вычислительных целей удобно использовать соглашение о том, чтобы узловые точки элемента и соответствующие элементные степени свободы нумеровались так, как это показано на рис. 4.5 в. На том же рисунке приведены и глобальные степени свободы конструкции применительно к вектору \mathbf{U} на рис. 4.5 б.

Чтобы определить вид матрицы $\mathbf{H}^{(2)}$, входящей в формулу (a), отметим, что для выражения каждой из величин $u(x, y)$ и $v(x, y)$ мы располагаем смещениями в четырех узловых точках. На этом основании можно предположить, что локальные значения смещений u и v в элементах задаются в нижеприводимых полиномиальных формах, соответствующих локальным координатным переменным x и y :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy, \\ v(x, y) &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 xy. \end{aligned} \quad (\text{c})$$

Неизвестные коэффициенты α_1, \dots, β_4 , именуемые также обобщенными координатами, будут выражены в терминах неизвестных смещений в узловых точках элемента, $u_1, \dots, u_4, v_1, \dots, v_4$. Если дать определение

$$\hat{\mathbf{u}}^T = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ | \ v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4], \quad (\text{d})$$

то мы можем записать соотношения (c) в матричной форме

$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \Phi \alpha, \quad (\text{e})$$

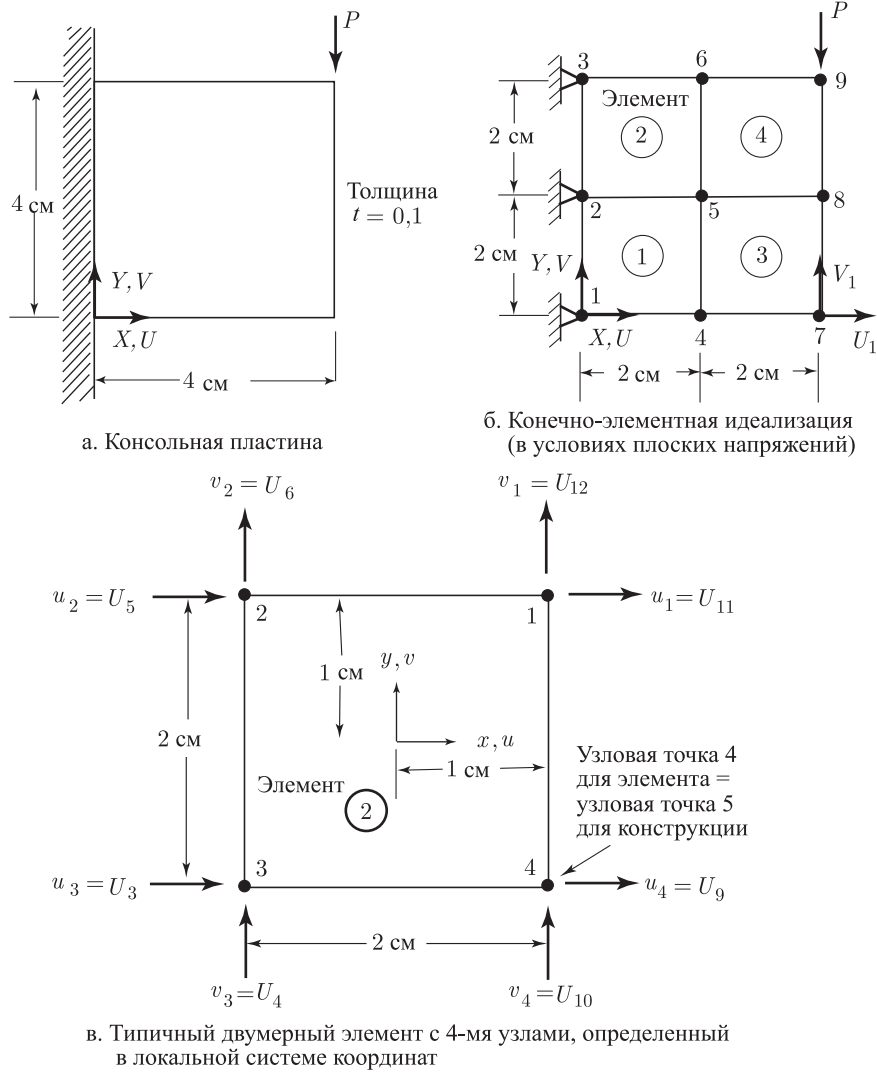


Рис. 4.5. Конечно-элементный анализ с плоскими напряжениями

где

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \phi \end{bmatrix} \quad \phi = [1 \quad x \quad y \quad xy]$$

и

$$\alpha^T = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \mid \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_4].$$

Уравнение (е) должно быть справедливым для всех узловых точек элемента, и поэтому, используя выражение (д), получим

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\alpha, \quad (\text{f})$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}$$

и

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Если разрешить уравнение (f) относительно α и подставить результат в соотношение (e), то получим

$$\mathbf{H} = \Phi \mathbf{A}^{-1}. \quad (\text{g})$$

Тот факт, что при символе \mathbf{H} не используется верхний индекс, свидетельствует о том, что интерполяционная матрица смещений определяется в соответствии со смещениями в узловых точках элемента, определяемых согласно выражению (d), то есть

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1+x)(1+y) & (1-x)(1+y) & (1-x)(1-y) & (1+x)(1-y) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1+x)(1+y) & (1-x)(1+y) & (1-x)(1-y) & (1+x)(1-y) \end{bmatrix}. \quad (\text{h})$$

Функции, входящие в это выражение и характеризующие смещения, могли бы быть определены также путем инспекции. Пусть (i, j) -й элемент матрицы \mathbf{H} обозначается символом H_{ij} ; тогда H_{11} соответствует функции, изменяющейся линейно по обеим координатным осям (как это и требуется согласно выражениям (c)), равной единице при $x = 1, y = 1$, и равной нулю в трех других узлах элемента. На основе этих соображений в разделе 5.2 мы обсудим, как влияют функции возмущений на форму матрицы \mathbf{H} .

При матрице \mathbf{H} , представленной в форме (h), имеем

$$\mathbf{H}^{(2)} = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 & U_{10} \\ 0 & 0 & H_{13} & H_{17} & H_{12} & H_{16} & 0 & 0 & H_{14} & H_{18} \\ 0 & 0 & H_{23} & H_{27} & H_{22} & H_{26} & 0 & 0 & H_{24} & H_{28} \end{bmatrix} \quad (\text{i})$$

$u_3 \quad v_3 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_4 \quad v_4$
 $u_1 \quad v_1 \leftarrow \text{степени свободы элемента}$
 $U_{11} \quad U_{12} \quad U_{13} \quad U_{14} \quad U_{18} \leftarrow \text{степени}$
 $\vdots \quad H_{11} \quad H_{15} \quad 0 \quad 0 \quad \vdots \quad \dots \text{ нули } \dots 0 \quad \vdots \text{ свободы}$
 $\vdots \quad H_{21} \quad H_{25} \quad 0 \quad 0 \quad \vdots \quad \dots \text{ нули } \dots 0 \quad \vdots \text{ комплекса}$

Матрица деформация–смещение может быть получена теперь непосредственно из соотношения (g). В условиях плоских напряжений деформации элемента выражаются как

$$\epsilon^T = [\epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad \gamma_{xy}],$$

где

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Если использовать соотношение (g) и признать, что элементы матрицы \mathbf{A}^{-1} не зависят от x и y , то получим

$$\mathbf{B} = \mathbf{E} \mathbf{A}^{-1},$$

где

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, что матрица деформация–смещение, соответствующая локальным степеням свободы элемента, имеет вид

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1+y) & -(1+y) & -(1-y) & (1-y) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1+x) & (1-x) & -(1-x) & -(1+x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1+x) & (1-x) & -(1-x) & -(1+x) \\ (1+y) & -(1+y) & -(1-y) & (1-y) \end{bmatrix}. \quad (\text{j})$$

Матрица \mathbf{B} могла бы также быть вычислена непосредственно, с помощью некоторых манипуляций со строками матрицы \mathbf{H} , определяемой согласно (h).

Пусть символ B_{ij} соответствует (i, j) -му элементу матрицы \mathbf{B} ; тогда мы будем иметь

$$\mathbf{B}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_{13} & B_{17} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 & B_{14} & B_{18} & B_{11} & B_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{23} & B_{27} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 & B_{24} & B_{28} & B_{21} & B_{25} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} & B_{37} & B_{32} & B_{36} & 0 & 0 & B_{34} & B_{38} & B_{31} & B_{35} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \text{нули} & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

где степени свободы элементов и степени свободы комплекса указываются в том же порядке, как в (d) и (b).

Пример 4.7: Давление, распределенное по линейному закону, как показано на рис. 4.6, налагается на элемент (m) комплекса элементов. Требуется вычислить вектор $\mathbf{R}_S^{(m)}$ для этого элемента.

Первый этап в процессе расчета $\mathbf{R}_S^{(m)}$ состоит в вычислении матрицы $\mathbf{H}^{S(m)}$. Эта матрица может быть определена, если воспользоваться тем же подходом, что и в примере 4.6. Мы предполагаем, что поверхностные смещения изменяются по закону

$$\begin{aligned} u^S &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 \\ v^S &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2, \end{aligned} \quad (\text{a})$$

где (как было и в примере 4.6) неизвестные коэффициенты α_1, \dots, β_3 вычисляются по данным о смещениях в узловых точках. Таким образом получим

$$\begin{bmatrix} u^S(x) \\ v^S(x) \end{bmatrix} = \mathbf{H}^S \hat{\mathbf{u}},$$

$$\hat{\mathbf{u}}^T = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad | \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3]$$

и

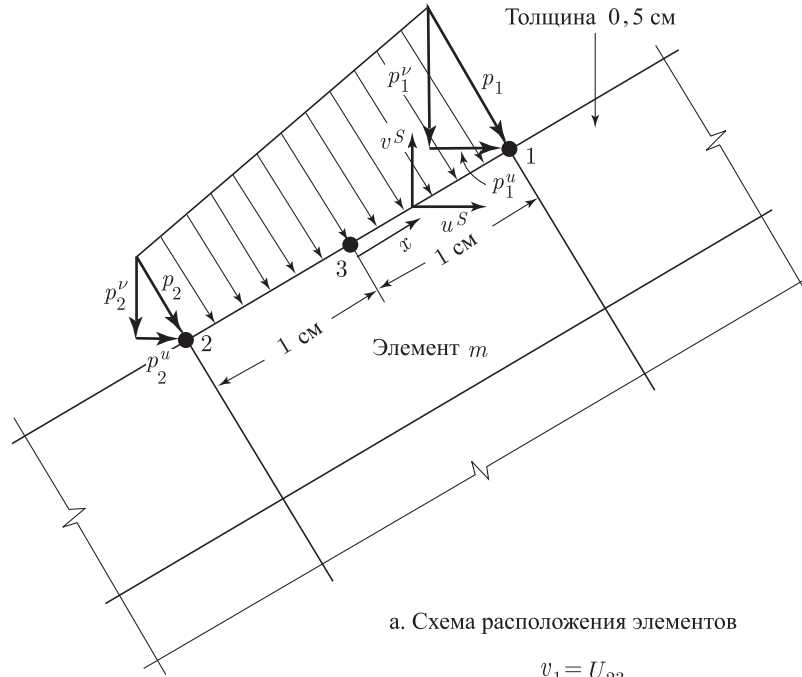
$$\mathbf{H}^S = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x(1+x) & -\frac{1}{2}x(1-x) & (1-x^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}x(1+x) & -\frac{1}{2}x(1-x) & (1-x^2) \end{bmatrix}.$$

Вектор поверхностных нагрузок имеет вид (при положительных p_1 и p_2)

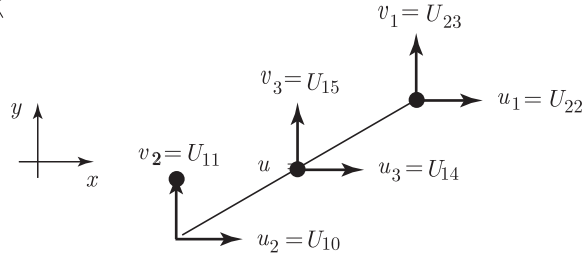
$$\mathbf{f}^S = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+x)p_1^u + \frac{1}{2}(1-x)p_2^u \\ -\frac{1}{2}(1+x)p_1^v - \frac{1}{2}(1-x)p_2^v \end{bmatrix}.$$

Чтобы определить $\mathbf{R}_S^{(m)}$, мы сначала вычисляем

$$\mathbf{R}_S = 0,5 \int_{-1}^{+1} \mathbf{H}^{S^T} \mathbf{f}^S dx,$$



а. Схема расположения элементов



б. Локально-глобальные степени свободы

Рис. 4.6. Нагрузка в форме давления на элемент (m)

а затем получаем

$$\mathbf{R}_S = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} p_1^u \\ p_2^u \\ 2(p_1^u + p_2^u) \\ -p_1^v \\ -p_2^v \\ -2(p_1^v + p_2^v) \end{bmatrix}.$$

Таким образом, в соответствии с глобальными степенями свободы, представленными на рис. 4.6, мы имеем

$$\mathbf{R}_S^{(m)T} = \frac{1}{3} [0 \quad \dots \quad 0 \quad | \quad p_2^u \quad -p_2^v \quad | \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 2(p_1^u + p_2^u) \quad -2(p_1^v + p_2^v) \quad | \quad 0 \quad \dots]$$

$U_{22} \quad U_{23} \leftarrow$ степени свободы комплекса

$$\dots \quad 0 \quad p_1^u \quad -p_1^v \quad | \quad 0 \quad \dots \quad 0].$$

Допущение, касающееся равновесных напряжений

Ранее мы уже отмечали, что аналитические исследования комплексов, состоящих из ферм и балок, первоначально не рассматривались как варианты конечно-элементного анализа, так как при этих вариантах могут использоваться «точные» матрицы жесткости элементов.

Эти матрицы определяются с помощью принципа виртуальных перемещений, если предполагаемые и вычисляемые посредством интерполяции смещения являются, по существу, точными смещениями, возникающими в элементе тогда, когда в узлах этого элемента задаются единичные смещения. Здесь термин «точные» связан с тем фактом, что при проведении статического анализа с заданием таких смещений для элемента полностью удовлетворяются все надлежащие уравнения равновесия, а также выполняются условия совместности и основополагающие требования (равно как и граничные условия).

При проведении исследования поведения комплекса из брусьев в примере 4.5 мы получили точную матрицу жесткости для элемента 1. Однако приближенное выражение матрицы жесткости для элемента 2 вычислялось так, как это показано в примере, приводимом ниже.

Пример 4.8: Для элемента 2 конструкции, показанной в примере 4.5, требуется вычислить точные значения смещений внутри элемента, соответствующие единичному смещению u_2 на конце элемента, а также рассчитать соответствующую матрицу жесткости. Кроме того, требуется показать, что при использовании сделанного в примере 4.5 предположения о смещениях внутреннее равновесие элемента не соблюдается.

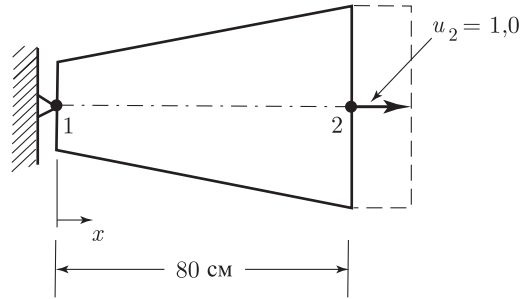


Рис. 4.7. Элемент 2 для бруса, проанализированного в примере 4.5

Рассмотрим элемент 2 при единичном смещении, заданном на его правом конце, как это показано на рис. 4.7. Смещения в элементе вычисляются путем решения дифференциального уравнения (см. пример 3.22)

$$E \frac{d}{dx} \left(A \frac{du}{dx} \right) = 0 \quad (a)$$

при граничных условиях $u|_{x=0} = 0$ и $u|_{x=80} = 1,0$. Если подставить значение площади A и проинтегрировать соотношение (a), то получим

$$u = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{1 + x/40} \right). \quad (b)$$

Это выражение определяет собой точные смещения внутри элемента. Силы, которые необходимо приложить на концах элемента для того, чтобы в рассматриваемом бруссе возникли такие смещения, выражаются как

$$\begin{aligned} k_{12} &= -EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=0} \\ k_{22} &= EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=L}. \end{aligned} \quad (c)$$

Используя формулу (b), из соотношений (c) получим

$$k_{22} = \frac{3E}{80}; \quad k_{12} = -\frac{3E}{80}.$$

Для определения k_{21} и k_{11} воспользуемся симметрией элементной матрицы и условиями равновесия, получая в результате

$$\mathbf{K} = \frac{3}{80} E \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (d)$$

Разумеется, мы получим то же самое, если воспользуемся принципом виртуальных перемещений и выражением (b).

Заметим, что коэффициент жесткости в формуле (d) меньше, чем соответствующее значение, полученное в примере 4.5 ($3E/80$ вместо $23E/240$). Конечно-элементное решение в примере 4.5 завышает жесткость конструкции в силу того, что заданные согласно предположению смещения приводят к искусственному сдерживанию движения материальных частиц (см. раздел 4.3.4). Для проверки того факта, что внутреннее равновесие действительно не соблюдается, подставим в уравнение (a) конечно-элементное решение (соответствующее предположению о смещениях в примере 4.5) и получим

$$E \frac{d}{dx} \left\{ \left(1 + \frac{x}{40} \right)^2 \frac{1}{80} \right\} \neq 0.$$

Решение, построенное для ферменных и балочных конструкций с использованием точных выражений, соответствующих матрицам жесткости, определяемым по единичным смещениям и поворотам в узловых точках, дает аналитические результаты, которые применительно к выбранной математической модели точно удовлетворяют всем трем требованиям механики: требованию дифференциального равновесия для каждой точки конструкции (включая равновесие в узловых точках), требованию совместности и требованию выполнения соотношений напряжение–деформация. Следовательно, для выбранной математической модели мы получаем точное (и единственное) решение.

Можно отметить, что такого рода точного решения обычно добиваются при статическом анализе, когда точные выражения для жесткости получаются в соответствии с описанием из пример 4.8, однако при динамическом анализе получить точное решение значительно труднее, так как в этом случае необходимо учесть эффекты распределенных масс и демпфирования (см., например, [Clough, Penzien 1975]).

В общем случае конечно-элементного анализа (статического или динамического) дифференциальное равновесие не соблюдается точно во всех точках рассматриваемого континуума, однако конечно-элементное решение с использованием грубой или мелкой сетки всегда сохраняет два важных свойства. Эти свойства таковы (см. рис. 4.8):

1. Равновесие в узловых точках.
2. Равновесие для каждого элемента.

Действительно, будем считать, что мы уже провели конечно-элементный анализ и что для каждого конечного элемента m мы вычисляем векторы сил в узловых точках

$$\mathbf{F}^{(m)} = \int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \boldsymbol{\tau}^{(m)} dV^{(m)}, \quad (4.29)$$

где $\boldsymbol{\tau}^{(m)} = \mathbf{C}^{(m)} \boldsymbol{\epsilon}^{(m)}$. После этого мы замечаем, что в соответствии со свойством 1

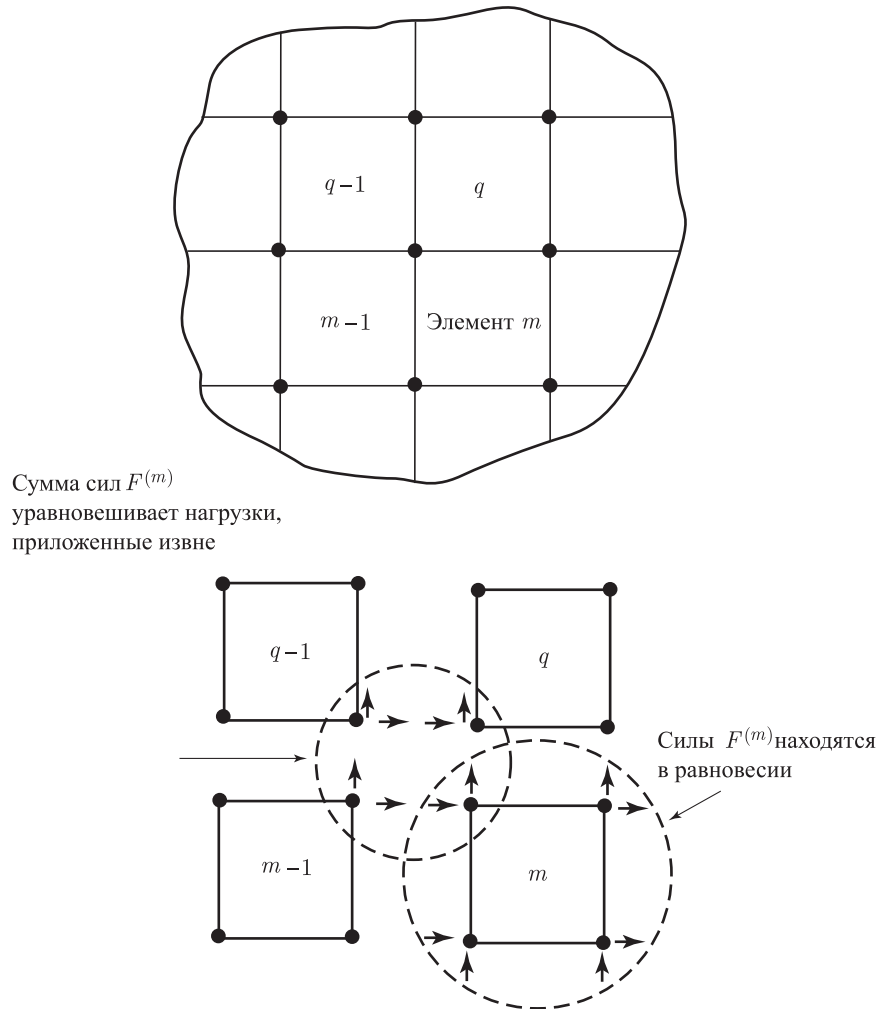


Рис. 4.8. Узловые точки и равновесие для элемента при конечно-элементном анализе

В каждом узле сумма сил, приложенных в узловых точках данного элемента, находится в равновесии с приложенными извне нагрузками (сюда включаются все эффекты, обусловленные массовыми силами, поверхностными натяжениями, начальными значениями напряжений, сосредоточенными нагрузками, силами инерции и демпфирования, а также реакциями).

Аналогично этому, в соответствии со свойством 2,

Каждый элемент m находится в равновесии под воздействием приложенных к нему сил $\mathbf{F}^{(m)}$.

Свойство 1 является просто следствием того факта, что уравнение (4.27) выражает равновесие в узловой точке, и мы имеем

$$\sum_m \mathbf{F}^{(m)} = \mathbf{KU}. \quad (4.30)$$

Равновесие элемента, о котором говорит свойство 2, соблюдается при условии, что конечно-элементные интерполяции смещений в матрице $\mathbf{H}^{(m)}$ удовлетворяют важнейшим требованиям сходимости, в число которых входит и то условие, что элемент должен иметь возможность представлять движения твердого тела (см. раздел 4.3). А именно, рассмотрим элемент m , находящийся под воздействием приложенных в узловых точках сил $\mathbf{F}^{(m)}$, и наложим виртуальные перемещения узловых точек, соответствующие движениям твердого тела. Тогда для каждого виртуального движения элемента, как твердого тела, при смещениях $\hat{\mathbf{u}}$ в узловых точках будем иметь

$$\hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{F}^{(m)} = \int_{V^{(m)}} (B^{(m)} \hat{\mathbf{u}})^T \boldsymbol{\tau}^{(m)} dV^{(m)} = \int_{V^{(m)}} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{(m)T} \boldsymbol{\tau}^{(m)} dV^{(m)} = 0,$$

так как в данном случае $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{(m)} = 0$. Поэтому, используя все применимые здесь движения твердого тела, мы находим, что силы $\mathbf{F}^{(m)}$ находятся в равновесии.

Следовательно, конечно-элементный анализ может рассматриваться как процесс, при котором

1. Структура сплошной среды идеализируется в форме комплекса дискретных элементов, соединяемых между собой в принадлежащих этим элементам узлах.
2. Силы, приложенные извне (массовые силы, силы поверхностного натяжения, начальные значения напряжений, сосредоточенные нагрузки, силы инерции, демпфирующие силы и реакции), переносятся в эти узлы путем применения принципа виртуальной работы, позволяющего найти эквивалентные внешние силы, приложенные в узловых точках.
3. Эквивалентные внешние силы, приложенные в узловых точках и рассчитанные в п. 2, уравниваются приложенными в тех же точках элемента силами, которые эквивалентны (в смысле виртуальной работы) внутренним напряжениям в элементе; иначе говоря, мы имеем

$$\sum_m \mathbf{F}^{(m)} = \mathbf{R}.$$

4. Условие совместности и условие соблюдения связи между напряжением и деформацией для данного материала удовлетворяются точно, однако вместо равновесия на дифференциальном уровне соблюдается только глобальное равновесие для конструкции в целом, для сил, приложенных в узлах, и для каждого элемента m под воздействием сил $\mathbf{F}^{(m)}$, приложенных в узловых точках.

Рассмотрим приводимый ниже пример.

Пример 4.9:

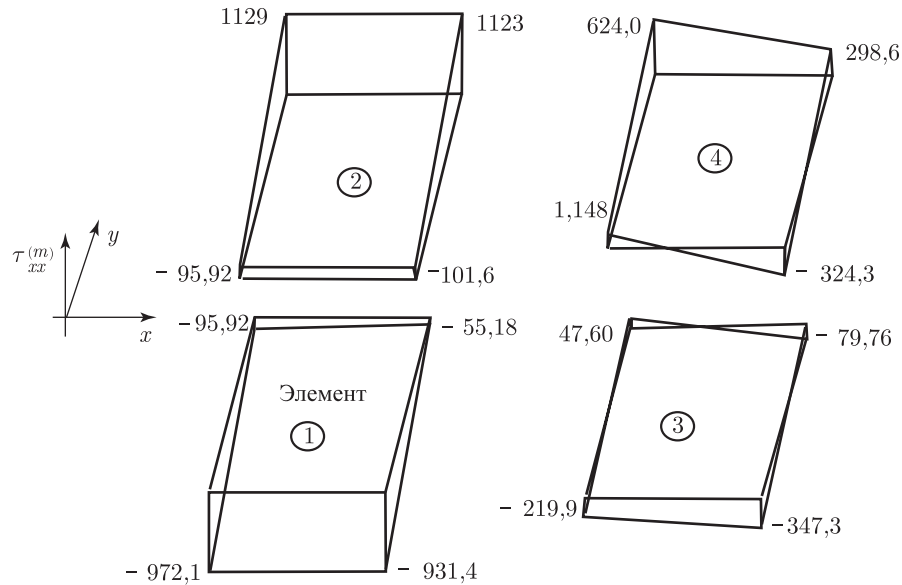
Конечно-элементное решение задачи, представленной на рис. 4.5, при $P = 100$, $E = 2,7 \times 10^6$, $\nu = 0,30$, $t = 0,1$, приводится на рис. 4.9. Очевидно, что напряжения в точках соединения элементов терпят разрывы и что равновесие на дифференциальном уровне не соблюдается. Однако требуется

1. Показать, что $\sum_m \mathbf{F}^{(m)} = \mathbf{R}$ и рассчитать реакции.
2. Показать, что силы $\mathbf{F}^{(4)}$, действующие на элемент 4, находятся в равновесии.

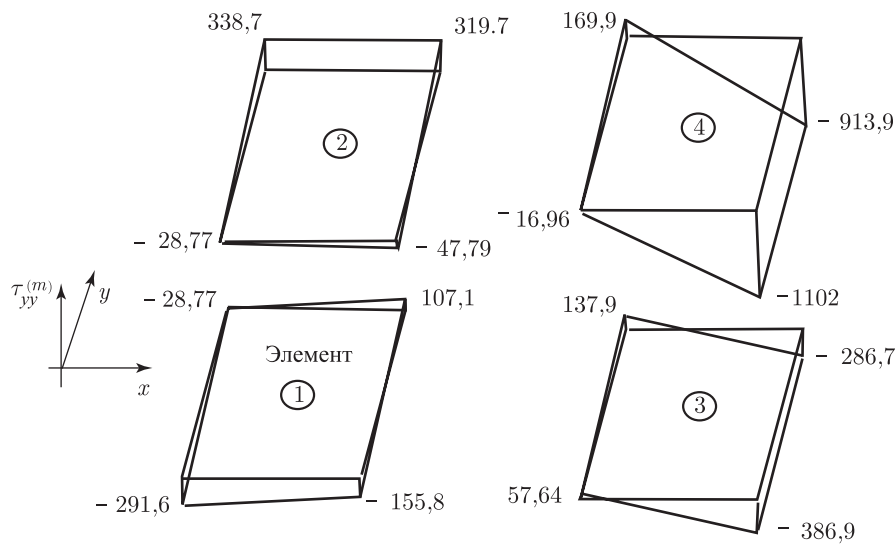
Тот факт, что $\sum_m \mathbf{F}^{(m)} = \mathbf{R}$, следует из решения уравнения (4.17), и \mathbf{R} представляет собой сумму всех сил, приложенных к узловым точкам. Следовательно, это соотношение может быть использовано также и для вычисления реакций.

Если использовать нумерацию узловых точек, данную на рис. 4.5 б, то мы установим, что для узла 1:

реакции $R_x = 100,15$,

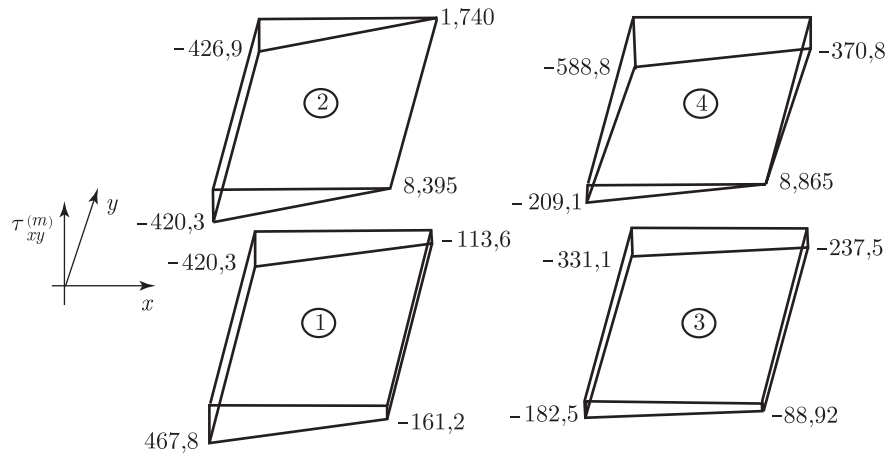


а. Вид элементов после разделения, с демонстрацией данных о напряжениях $\tau_{xx}^{(m)}$.
Отметим наличие разрывов по этим данным между элементами, а также отличных от нуля напряжений вдоль свободных кромок

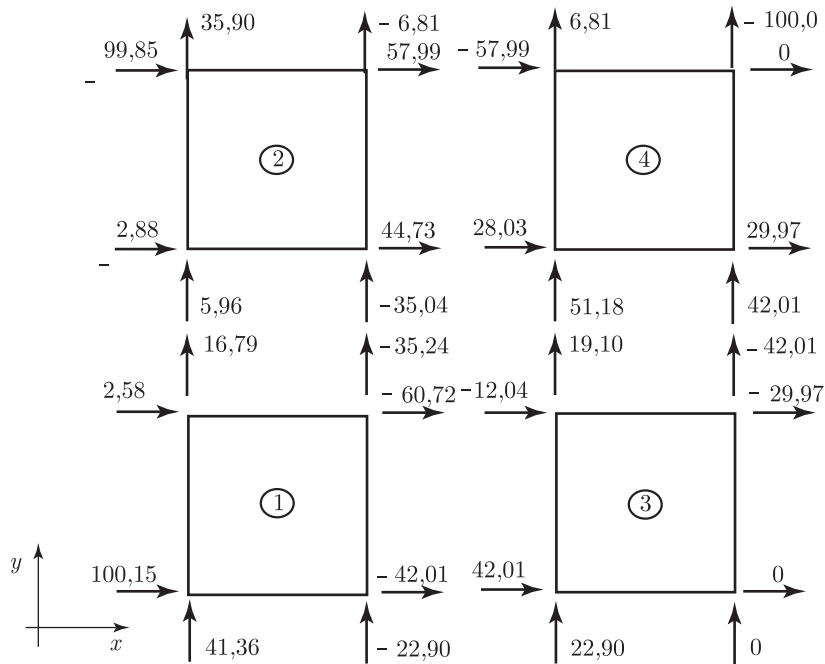


б. Вид элементов после разделения, с демонстрацией данных о напряжениях $\tau_{yy}^{(m)}$

Рис. 4.9. Результаты решения проблемы, рассмотренной в примере 4.6 (округлены до показанных цифр)



в. Вид элементов после разделения, с демонстрацией данных о напряжениях $\tau_{xy}^{(m)}$



г. Вид элементов после разделения с демонстрацией сил в узловых точках элементов, эквивалентных (в смысле виртуальной работы) напряжениям в элементах. Для каждого узла силы в узловых точках находятся в равновесии с приложенными силами (включая реакции)

Рис. 4.9. Продолжение

$$R_y = 41,36;$$

для узла 2:

$$\text{реакции } R_x = 2,58 - 2,88 = -0,30,$$

$$R_y = 16,79 + 5,96 = 22,74 \text{ (вследствие округления);}$$

для узла 3:

$$\begin{aligned} \text{реакции } R_x &= -99,85, \\ R_y &= 35,90; \end{aligned}$$

для узла 4:

$$\begin{aligned} \text{равновесие горизонтальных сил: } & -42,01 + 42,01 = 0, \\ \text{равновесие вертикальных сил: } & -22,90 + 22,90 = 0; \end{aligned}$$

для узла 5:

$$\begin{aligned} \text{равновесие горизонтальных сил: } & -60,72 - 12,94 + 44,73 + 28,03 = 0, \\ \text{равновесие вертикальных сил: } & -35,24 - 35,04 + 19,10 + 5,18 = 0; \end{aligned}$$

для узла 6:

$$\begin{aligned} \text{равновесие горизонтальных сил: } & 57,99 - 57,99 = 0, \\ \text{равновесие вертикальных сил: } & -6,81 + 6,81 = 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что равновесие сил соблюдается также и для узлов 7, 8 и 9, причем в узле 9 узловые силы элемента уравнивают приложенную нагрузку $P = 100$.

Наконец, проведем проверку общего равновесия сил для данной модели: горизонтальное равновесие:

$$100,15 - 0,30 - 99,85 = 0,$$

вертикальное равновесие:

$$41,36 + 22,74 + 35,90 - 100 = 0,$$

равновесие моментов (относительно узла 2):

$$-100 \times 4 + 100,15 \times 2 + 99,85 \times 2 = 0.$$

Важно отдавать себе отчет в том, что это равновесие сил будет соблюдаться при *любой* конечно-элементной расчетной сетке, какой бы грубой она ни была, но при условии надлежащего выбора используемых элементов (см. раздел 4.3).

Рассмотрим теперь элемент 4:

горизонтальное равновесие:

$$0 - 57,99 + 28,03 + 29,97 = 0 \text{ (вследствие округления);}$$

вертикальное равновесие:

$$-100 + 6,81 + 51,18 + 42,01 = 0;$$

равновесие моментов (относительно локального узла 3):

$$-100 \times 2 + 57,99 \times 2 + 42,01 \times 2 = 0.$$

Следовательно, силы, приложенные в узлах элемента, находятся в равновесии.

Локальные степени свободы элемента и глобальные степени свободы конструкции

Как показывают выкладки, проводившиеся при вычислении матриц элементов в примерах 4.6 и 4.7, целесообразно прежде всего установить вид матриц, соответствующих локальным степеням свободы каждого элемента. После этого построение конечно-элементных матриц, соответствующих глобальным степеням свободы комплекса элементов (см. соотношения (4.19)–(4.25)), может быть осуществлено непосредственно установления тех глобальных степеней свободы, которые соответствуют локальным степеням свободы элементов. Однако при рассмотрении матриц $\mathbf{H}^{(m)}$, $\mathbf{B}^{(m)}$, $\mathbf{K}^{(m)}$, и так далее, соответствующих глобальным степеням свободы комплекса элементов, отличными от нуля будут лишь те строки и столбцы, которые соответствуют степеням свободы самих элементов. Основная цель определения вида этих специальных матриц сводилась к тому, чтобы иметь возможность представления процесса объединения матриц элементов в форме, элегантно с точки зрения теории. Практическое воплощение метода конечных элементов также обла-

дает свойством элегантности, однако матрицы всех элементов вычисляются в соответствии только со степенями свободы каждого из элементов, а затем напрямую собираются воедино при использовании имеющегося соответствия между локальными степенями свободы элементов и глобальными степенями свободы комплекса в целом. Таким образом, имея в своем распоряжении только локальные степени свободы элементов, связанные с узловыми точками и фиксируемые в выражении для $\hat{\mathbf{u}}$, мы можем теперь написать (как в примере 4.6)

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{u}}, \quad (4.31)$$

где компоненты вектора \mathbf{u} представляют собой смещения элементов, измеряемые в любой удобной локальной системе координат. Кроме того, мы имеем также

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}. \quad (4.32)$$

Рассматривая соотношения (4.31) и (4.32), заметим, что отсутствие верхнего индекса у символов интерполяционных матриц свидетельствует о том, что эти матрицы определяются по отношению к локальным степеням свободы элемента. Если использовать уже применявшиеся ранее выражения для матриц жесткости элементов, а также для матрицы масс и для представления вектора нагрузки, то мы получим

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV, \quad (4.33)$$

$$\mathbf{M} = \int_V \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} dV, \quad (4.34)$$

$$\mathbf{R}_B = \int_V \mathbf{H}^T \mathbf{f}^B dV, \quad (4.35)$$

$$\mathbf{R}_S = \int_S \mathbf{H}^{ST} \mathbf{f}^S dS, \quad (4.36)$$

$$\mathbf{R}_I = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\tau}^I dV, \quad (4.37)$$

где все переменные определены так, как это было сделано в формулах (4.19)–(4.25), но только в соответствии с локальными степенями свободы элемента. При выполнении проводимых далее выкладок, а также при их обсуждении, мы будем активно обращаться к формулам (4.33)–(4.37). Коль скоро матрицы, задаваемые этими формулами, будут вычислены, их можно будет собрать воедино путем непосредственного использования процедур, описанных в примере 4.11 и в главе 12.

В ходе этого процесса объединения предполагается, что направления смещений узловых точек $\hat{\mathbf{u}}$, соответствующих формуле (4.31), те же самые, что и смещения глобальных узловых точек \mathbf{U} . Однако при некоторых вариантах анализа удобно начинать выкладки при условии, что узловые степени свободы элемента не совпадают по направлению с глобальными степенями свободы комплекса. В этом случае имеем

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{u}} \quad (4.38)$$

и

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{T}\hat{\mathbf{u}}, \quad (4.39)$$

где матрица \mathbf{T} преобразует степени свободы $\hat{\mathbf{u}}$ в степени свободы $\tilde{\mathbf{u}}$ и формула (4.39) соответствует тензорному преобразованию первого порядка (см. раздел 2.4);

компоненты, принадлежащие столбцу j матрицы \mathbf{T} , представляют собой направляющие косинусы единичного вектора, соответствующего j -й степени свободы в $\hat{\mathbf{u}}$, если ее измерять в направлениях степеней свободы $\tilde{\mathbf{u}}$. После подстановки (4.39) в (4.38) получим

$$\mathbf{H} = \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{T}. \quad (4.40)$$

Далее, если отождествить все конечно-элементные матрицы, соответствующие степеням свободы $\tilde{\mathbf{u}}$, с наложенным на них вихрем, то из формул (4.40) и (4.33)–(4.37) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{T}^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{T}; & \mathbf{M} &= \mathbf{T}^T \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{T}; \\ \mathbf{R}_S &= \mathbf{T}^T \tilde{\mathbf{R}}_S; & \mathbf{R}_I &= \mathbf{T}^T \tilde{\mathbf{R}}_I. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Отметим, что преобразования такого рода используются и тогда, когда необходимо наложить граничные смещения, не соответствующие глобальным степеням свободы комплекса (см. раздел 4.2.2). В табл. 4.1 дается сводка некоторых из использованных нами здесь обозначений.

Реализация изложенных выше идей и представлений демонстрируется на приводимых ниже примерах.

Таблица 4.1. Сводка некоторых из используемых обозначений

(a)	$\mathbf{u}^{(m)} = \mathbf{H}^{(m)} \hat{\mathbf{U}}$, или $\mathbf{u}^{(m)} = \mathbf{H}^{(m)} \mathbf{U}$, где $\mathbf{u}^{(m)}$ = смещения в элементе m , как функции координат элемента \mathbf{U} = смещения узловых точек всего комплекса элементов (начиная с соотношения (4.17) и далее мы используем просто символ \mathbf{U})
(b)	$\mathbf{u} = \mathbf{H} \hat{\mathbf{u}}$, где $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}^{(m)}$ и имеется в виду, что рассматривается конкретный элемент $\hat{\mathbf{u}}$ = смещения узловых точек элемента в предположении: элементы $\hat{\mathbf{u}}$ представляют собой смещения в $\hat{\mathbf{U}}$ этого элемента
(c)	$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{u}}$, где $\tilde{\mathbf{u}}$ = смещения узловых точек элемента, измеренные в системе координат, не совпадающей с глобальной системой (в которой определена $\hat{\mathbf{U}}$).

Пример 4.10: Вычислить матрицу \mathbf{H} для элемента фермы, показанного на рис. 4.10. Направления локальных и глобальных степеней свободы показаны на рисунке.

Здесь мы имеем

$$\begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \left(\frac{L}{2} - x\right) & 0 & \left(\frac{L}{2} + x\right) & 0 \\ 0 & \left(\frac{L}{2} - x\right) & 0 & \left(\frac{L}{2} + x\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{v}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{v}_2 \end{bmatrix} \quad (a)$$

и

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{v}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

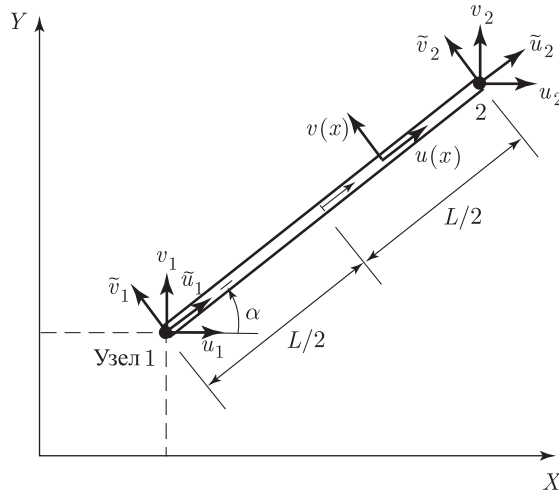


Рис. 4.10. Элемент фермы

Таким образом, мы имеем

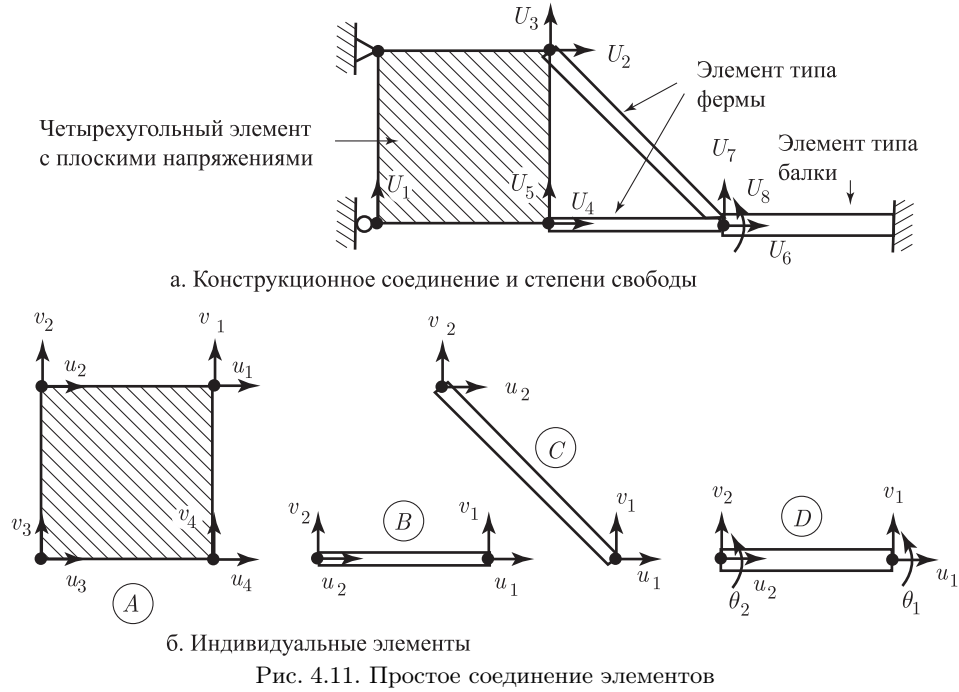
$$\mathbf{H} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \left(\frac{L}{2} - x\right) & 0 & \left(\frac{L}{2} + x\right) & 0 \\ 0 & \left(\frac{L}{2} - x\right) & 0 & \left(\frac{L}{2} + x\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Необходимо отметить, что для построения матрицы смещение–деформация \mathbf{B} (в рамках линейного анализа) нужна только первая строка матрицы \mathbf{H} , так как при расчете матрицы жесткости рассматривается только нормальная деформация $\epsilon_{xx} = \partial u / \partial x$. Эффективный практический прием состоит в том, чтобы использовать только первую строку матрицы $\tilde{\mathbf{H}}$ в соотношении, а затем преобразовать матрицу $\tilde{\mathbf{K}}$ так, как это предложено в (4.41).

Пример 4.11: Предположим, что матрицы жесткости элементов, соответствующие смещениям в них, показанным на рис. 4.11, уже рассчитаны, и дадим элементам обозначения в соответствии с тем, что обозначено на рисунке символами \textcircled{A} , \textcircled{B} , \textcircled{C} и \textcircled{D} . Требуется напрямую объединить эти матрицы для элементов в матрицу жесткости глобальной конструкции при граничных условиях для смещений, показанных на рис. 4.11 а. Установите также форму массивов LM, определяющих связуемость элементов.

К моменту начала настоящего анализа матрицы жесткости всех элементов уже были определены в соответствии со степенями свободы, выровненными в глобальных направлениях. Поэтому здесь не требуется проводить таких преобразований, как приведенные в формулах (4.41), и мы можем осуществить непосредственное объединение, чтобы получить матрицу жесткости комплекса в целом.

Если учесть, что смещения в точках опор равны нулю, то нам нужно только собрать воедино матрицы, чтобы получить матрицу жесткости конструкции в соответствии с неизвестными компонентами смещений, содержащимися в \mathbf{U} . Массив связуемости (массив LM) для каждого элемента перечисляет степени свободы глобальной конструкции в порядке, характерном для локальных степеней свободы данного элемента, причем нуль означает, что соответствующие столбец и строка матрицы жесткости элемента не учитываются при объединении (т. е. столбец и строка соответствуют нулевой степени



свободы конструкции) (см. также главу 12).

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{cccccccc}
 & U_2 & U_3 & & & U_1 & U_4 & U_5 \leftarrow \text{Глобальные смещения} \\
 & u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \leftarrow \text{Локальные смещения}
 \end{array} \\
 & \mathbf{K}_A = \begin{bmatrix}
 a_{11} & a_{12} & & & & & & \\
 a_{21} & a_{22} & & & & & & \\
 \vdots & & & & & & & \\
 & & & & & & & \\
 \vdots & & & & & & & \\
 a_{61} & a_{62} & & & & & & \\
 a_{71} & a_{72} & & & & & & \\
 a_{81} & a_{82} & & & & & &
 \end{bmatrix} \begin{array}{l}
 u_1 \quad U_2 \\
 v_1 \quad U_3 \\
 u_2 \\
 v_2 \\
 u_3 \\
 v_3 \quad U_1 \\
 u_4 \quad U_4 \\
 v_4 \quad U_5
 \end{array} \\
 & \begin{array}{cccccccc}
 U_6 & U_7 & U_4 & U_5 & & & & \\
 u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & & & &
 \end{array} \\
 & \mathbf{K}_B = \begin{bmatrix}
 b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\
 b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\
 b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\
 b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44}
 \end{bmatrix} \begin{array}{l}
 u_1 \quad U_6 \\
 v_1 \quad U_7 \\
 u_2 \quad U_4 \\
 v_2 \quad U_5
 \end{array} \\
 & \begin{array}{cccccccc}
 & & & & & U_6 & U_7 & U_2 & U_3 \\
 & & & & & u_1 & v_1 & u_2 & v_2
 \end{array} \\
 & \mathbf{K}_C = \begin{bmatrix}
 c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\
 c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\
 c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\
 c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44}
 \end{bmatrix} \begin{array}{l}
 u_1 \quad U_6 \\
 v_1 \quad U_7 \\
 u_2 \quad U_2 \\
 v_2 \quad U_3
 \end{array}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}_D = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & U_6 & U_7 & U_8 \\ & u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \dots & \cdot & \dots & d_{44} & d_{45} & d_{46} & \\ \dots & \cdot & \dots & d_{54} & d_{55} & d_{56} & \\ \dots & \cdot & \dots & d_{64} & d_{65} & d_{66} & \end{array} \right] \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \ U_6 \\ v_2 \ U_7 \\ \theta_2 \ U_8 \end{array} \end{array}$$

Уравнение $\mathbf{K} = \sum_m \mathbf{K}^{(m)}$ дает

$$\mathbf{K} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc|ccc} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|ccc} a_{66} & a_{61} & a_{62} & a_{67} & a_{68} & \text{нули} & & \\ a_{16} & a_{11} + c_{33} & a_{12} + c_{34} & a_{17} & a_{18} & c_{31} & c_{32} & \\ a_{26} & a_{21} + c_{43} & a_{22} + c_{44} & a_{27} & a_{28} & c_{41} & c_{42} & \\ a_{76} & a_7 & a_{72} & a_{77} + b_{33} & a_{78} + b_{34} & b_{31} & b_{32} & \\ a_{86} & a_{81} & a_{82} & a_{87} + b_{43} & a_{88} + b_{44} & b_{41} & b_{42} & \\ \hline & c_{13} & c_{14} & b_{13} & b_{14} & b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} & d_{46} \\ & & & & & +d_{44} & +d_{45} & \\ & c_{23} & c_{24} & b_{23} & b_{24} & b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} & d_{56} \\ & & & & & +d_{54} & +d_{55} & \\ \hline & & & \text{симметрия относительно диагонали} & & d_{64} & d_{65} & d_{66} \end{array} \right] \begin{array}{c} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \end{array} \end{array}$$

Массивы LM для элементов имеют вид

для элемента А: $\text{LM} = [2 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 4 \ 5]$

для элемента В: $\text{LM} = [6 \ 7 \ 4 \ 5]$

для элемента С: $\text{LM} = [6 \ 7 \ 2 \ 3]$

для элемента D: $\text{LM} = [0 \ 0 \ 0 \ 6 \ 7 \ 8]$.

Отметим, что если матрицы жесткости и массивы LM известны для всех элементов, то матрица жесткости для конструкции в целом может быть получена прямым, автоматически проходимым путем (см. также главу 12).

4.2.2. Постановка граничных условий для смещений

В процессе обсуждения, проводившегося в разделе 3.3.2, отмечалось, что при исследовании поведения сплошной среды необходимо учитывать граничные условия для смещений (называемые также существенными) и силовые граничные условия (называемые также естественными). Если применяется метод конечных элементов, основанный на изучении смещений, то силовые граничные условия принимаются во внимание при вычислении вектора силы, приложенной извне к узловой точке. Вектор \mathbf{R}_C объединяет сосредоточенные нагрузки, включая реакции, тогда как вектор \mathbf{R}_S включает в себя эффект распределенных поверхностных нагрузок и распределенных реакций.

Предположим, что уравнения равновесия для конечно-элементной системы, построенные без учета наложения граничных условий для смещений и выведенные в разделе 4.2.1, в пренебрежении демпфированием, имеют вид

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{aa} & \mathbf{M}_{ab} \\ \mathbf{M}_{ba} & \mathbf{M}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_a \\ \ddot{\mathbf{U}}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_a \\ \mathbf{U}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_a \\ \mathbf{R}_b \end{bmatrix}, \quad (4.42)$$

где символ \mathbf{U}_a соответствует неизвестным смещениям, а символом \mathbf{U}_b обозначаются известные, или заданные смещения. Разрешая эти уравнения относительно \mathbf{U}_a , получим

$$\mathbf{M}_{aa}\ddot{\mathbf{U}}_a + \mathbf{K}_{aa}\mathbf{U}_a = \mathbf{R}_a - \mathbf{K}_{ab}\mathbf{U}_b - \mathbf{M}_{ab}\ddot{\mathbf{U}}_b. \quad (4.43)$$

Отсюда следует, что при построении решения для \mathbf{U}_a нужно включать в анализ только те матрицы жесткости и масс для комплекса в целом, которые соответствуют неизвестным степеням свободы \mathbf{U}_a (см. пример 4.11), тогда как вектор нагрузки \mathbf{R}_a следует видоизменить за счет включения эффекта заданных смещений, отличных от нуля. Как только с помощью уравнения (4.43) будут определены смещения \mathbf{U}_a , оказывается возможным вычислить и реакции, если только предварительно написать соотношение, являющееся следствием (4.18),

$$\mathbf{R}_b = \mathbf{R}_B^b + \mathbf{R}_S^b - \mathbf{R}_I^b + \mathbf{R}_C^b + \mathbf{R}_r, \quad (4.44)$$

где \mathbf{R}_B^b , \mathbf{R}_S^b , \mathbf{R}_I^b и \mathbf{R}_C^b — это известные, приложенные извне в узловых точках нагрузки, не включающие в себя реакции, а символ \mathbf{R}_r обозначает неизвестные реакции. Верхний индекс b свидетельствует о том, что в выражениях для силовых векторов \mathbf{R}_B , \mathbf{R}_S , \mathbf{R}_I и \mathbf{R}_S используются только компоненты, соответствующие степеням свободы \mathbf{U}_b . Отметим, что вектор \mathbf{R}_r может рассматриваться как неизвестная поправка к выражениям для сосредоточенных нагрузок. Таким образом, используя соотношение (4.44) и вторую из систем уравнений, включенных в (4.42), мы получим

$$\mathbf{R}_r = \mathbf{M}_{ba}\ddot{\mathbf{U}}_a + \mathbf{M}_{bb}\ddot{\mathbf{U}}_b + \mathbf{K}_{ba}\mathbf{U}_b + \mathbf{K}_{bb}\mathbf{U}_b - \mathbf{R}_B^b - \mathbf{R}_S^b + \mathbf{R}_I^b - \mathbf{R}_C^b. \quad (4.45)$$

Четыре последних члена правой части этого соотношения представляют собой поправку, обусловленную известными нагрузками для элемента — внутренней и поверхностной, — а также любой сосредоточенной нагрузкой, причем все эти нагрузки предполагаются приложенными непосредственно к опорам.

Приводимый ниже пример служит демонстрации применения вышеуказанных соотношений.

Пример 4.12: Требуется рассмотреть конструкцию, показанную на рис. 4.12. Постройте решение для результирующих смещений и рассчитайте реакции.

Консольная балка рассматривается как комплекс, составленный из двух балочных элементов. Определяющие уравнения равновесия (4.42) имеют вид (при использовании матриц из примера 4.1):

$$\frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & & & \\ \frac{6}{L} & 4 & -\frac{6}{L} & 2 & & & \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & \frac{36}{L^2} & \frac{6}{L} & -\frac{24}{L^2} & \frac{12}{L} & \\ \frac{6}{L} & 2 & \frac{6}{L} & 12 & -\frac{12}{L} & 4 & \\ & & -\frac{24}{L^2} & -\frac{12}{L} & \frac{24}{L^2} & -\frac{12}{L} & \\ & & \frac{12}{L} & 4 & -\frac{12}{L} & 8 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P \\ 0 \\ -\frac{pL}{2} \\ -\frac{pL^2}{12} \\ -\frac{pL}{2} + R_r|_{U_5} \\ \frac{pL^2}{12} + R_r|_{U_6} \end{bmatrix}.$$

Здесь $\mathbf{U}_b^T = [U_5 \ U_6]$ и $\mathbf{U}_b = 0$. Пользуясь уравнением (4.43) для случая $EI = 10^7$, $L = 100$, $p = 0,01$, $P = 1,0$, получим

$$\mathbf{U}_a^T = [-165 \ 1,33 \ -47,9 \ 0,83] \times 10^{-3}$$

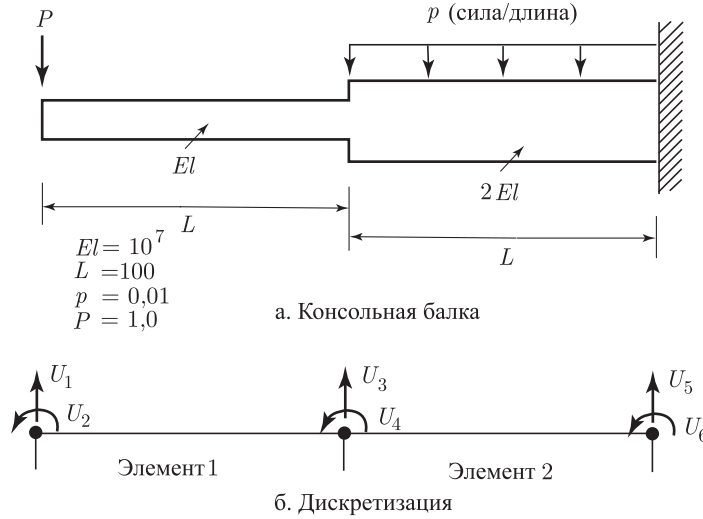


Рис. 4.12. Анализ консольной балки

и затем, пользуясь соотношением (4.45), получаем

$$\mathbf{R}_r = \begin{bmatrix} 2 \\ -250 \end{bmatrix}.$$

При применении уравнений (4.42) предполагается, что компоненты смещений, о которых говорилось в разделе 4.2.1, действительно содержат в себе все заданные смещения (обозначенные в (4.42) как \mathbf{U}_b). Если это не так, то необходимо идентифицировать все те заданные смещения, которые не соответствуют установленным степеням свободы комплекса и преобразуют конечно-элементные уравнения равновесия к форме, соответствующей заданным смещениям. Так, запишем соотношение

$$\mathbf{U} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{U}}, \quad (4.46)$$

где $\bar{\mathbf{U}}$ представляет собой вектор, характеризующий степени свободы узловых точек требуемых направлений. Матрица преобразования \mathbf{T} — это единичная матрица, видоизмененная за счет направляющих косинусов вектора \mathbf{U} , измеряемых в первоначальных направлениях смещений (см. (2.58)). Подставляя (4.46) в (4.42), получим

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\bar{\mathbf{U}}} + \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{R}}, \quad (4.47)$$

где

$$\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T}; \quad \bar{\mathbf{K}} = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T}; \quad \bar{\mathbf{R}} = \mathbf{T}^T \mathbf{R}. \quad (4.48)$$

Следует отметить, что операции матричного умножения в соотношениях (4.48) связаны с изменениями только тех столбцов и строк величин \mathbf{M} , \mathbf{K} и \mathbf{R} , которые фактически подвергнуты воздействию, и что это преобразование эквивалентно тому, что производилось в (4.41) с матрицей одиночного элемента. На практике это преобразование эффективно проводится на элементном уровне непосредственно перед сложением матриц элементов и матриц комплекса в целом. На рис. 4.13 показаны матрицы преобразования \mathbf{T} для характерной узловой точки при двумерной и трехмерной версиях анализа, когда смещения принудительно сдвигаются в скошенных направлениях. При таких условиях неизвестные смещения могут быть рассчитаны из уравнений (4.47) с использованием процедуры, базирующейся на (4.42) и (4.43).

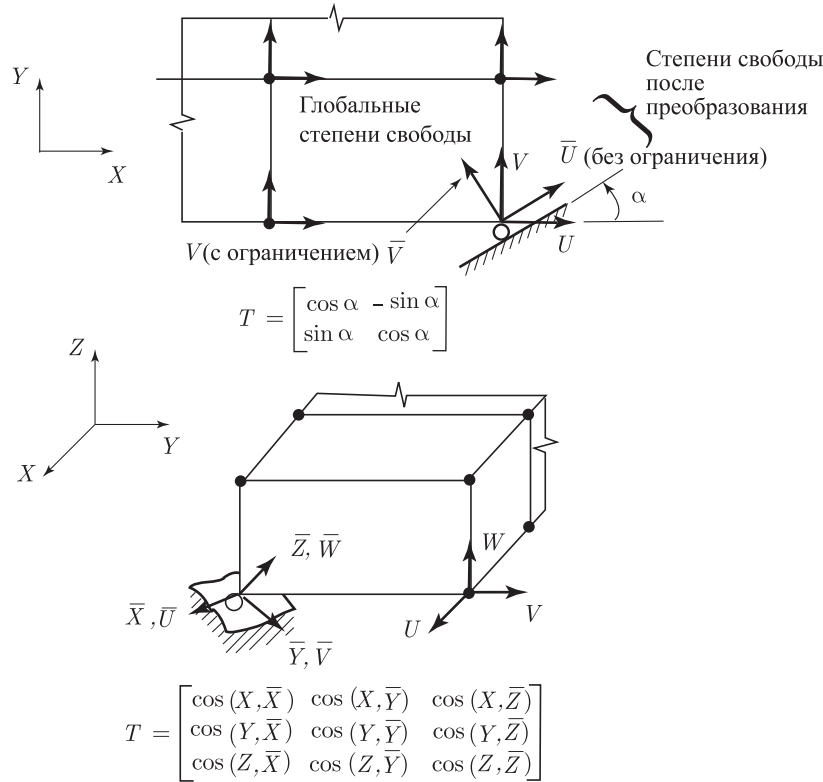


Рис. 4.13. Преобразование перехода к скошенным граничным условиям

При альтернативном подходе искомые смещения могут также считаться заданными, если только к конечно-элементным уравнениям равновесия (4.47) добавить уравнения принуждения, выражающие собой условия задания смещений. Предположим, что смещение должно определяться в соответствии со степенью свободы i , например, $\bar{U}_i = b$; тогда уравнение принуждения в форме

$$k\bar{U}_i = kb \quad (4.49)$$

добавляется к уравнениям равновесия (4.47), причем $k \gg \bar{k}_{ii}$. На этом основании решение модифицированных уравнений равновесия должно теперь дать $\bar{U}_i = b$, и мы можем заметить, что постольку, поскольку использовались уравнения (4.47), в матрице жесткости подвергся воздействию только диагональный элемент, а это приводит к решению, устойчивому в вычислительном отношении (см. раздел 8.2.6). Физическая интерпретация этой процедуры может быть представлена как введение для степени свободы i некой пружины, имеющей большую жесткость k , а также добавление некой нагрузки, которая, в силу наличия сравнительно гибкого комплекса элементов, создает при этой степени свободы смещение заданной величины b (см. рис. 4.14). Математически эта процедура соответствует применению метода штрафных функций, обсуждавшегося в разделе 3.4.

Кроме условий задания значений смещения в узловых точках, условия принуждения могут воздействовать еще и на смещения в некоторых других узловых точках. При учете уравнения (4.24) характерным уравнением принуждения

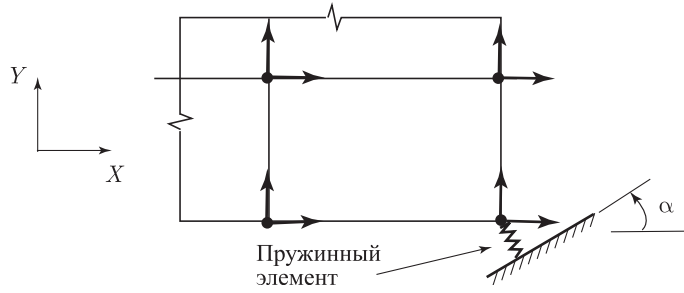


Рис. 4.14. Скошенное граничное условие

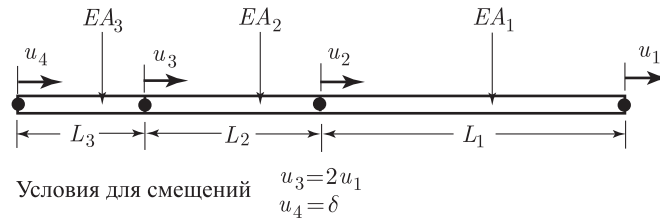
было бы соотношение

$$U_i = \sum_{j=1}^{r_i} \alpha_{qj} U_{qj}, \quad (4.50)$$

где U_i представляет собой зависимое смещение в узловой точке, а величины U_{qj} — это независимые смещения в узловых точках, число которых равно r_i . Если использовать все уравнения принуждения вида (4.50) и признать, что эти принуждения должны быть задействованы путем применения принципа виртуальной работы для истинных смещений в узловых точках, так же как и виртуальных смещений, то мы поймем, что наложение связей соответствует преобразованию вида (4.46) и (4.47), где \mathbf{T} будет теперь прямоугольной матрицей, а $\bar{\mathbf{U}}$ содержит в себе все независимые степени свободы. Это преобразование соответствует сложению величины α_{qj} , умноженной на q_j -е столбцы и строки, с q_j -ми столбцами и строками, при $j = 1, \dots, r_i$ и при всех рассматриваемых значениях i . При своей практической реализации это преобразование эффективно проводится на элементном уровне, в процессе сборки интересующего нас комплекса.

Наконец, необходимо отметить, что возможны сочетания перечисленных выше граничных условий для смещений. Например, в соотношении (4.50) независимый компонент смещения может соответствовать граничному условию со скосом, при заданном смещении. В приводимых далее примерах мы демонстрируем практику наложения принудительных смещений.

Пример 4.13: Требуется рассмотреть ферменный комплекс, показанный на рис. 4.15. Рассчитайте матрицу жесткости данной конструкции при заданных условиях принуждения.



$$K_i = \frac{EA_i}{L+i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Рис. 4.15. Ферменный комплекс

В процессе проводимого здесь анализа независимым степеням свободы соответствуют U_1 , U_2 и U_4 . Матрицы жесткости отдельных элементов приводятся на рис. 4.15, и приходится признать, что в соответствии с (4.50) мы имеем $i = 3$, $\alpha_1 = 2$ и $q_1 = 1$. Составляя полную матрицу жесткости непосредственно в процессе сборки элементов, мы получаем

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA_1}{L_1} & -\frac{EA_1}{L_1} & 0 \\ -\frac{EA_1}{L_1} & \frac{EA_1}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4EA_2}{L_2} & -\frac{2EA_2}{L_2} & 0 \\ -\frac{2EA_2}{L_2} & \frac{EA_2}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{4EA_3}{L_3} & 0 & -\frac{2EA_3}{L_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2EA_3}{L_3} & 0 & \frac{EA_3}{L_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix},$$

где $k \gg \frac{EA_3}{L_3}$.

Пример 4.14: Требуется исследовать поведение рамочной конструкции, показанной на рис. 4.16 а.

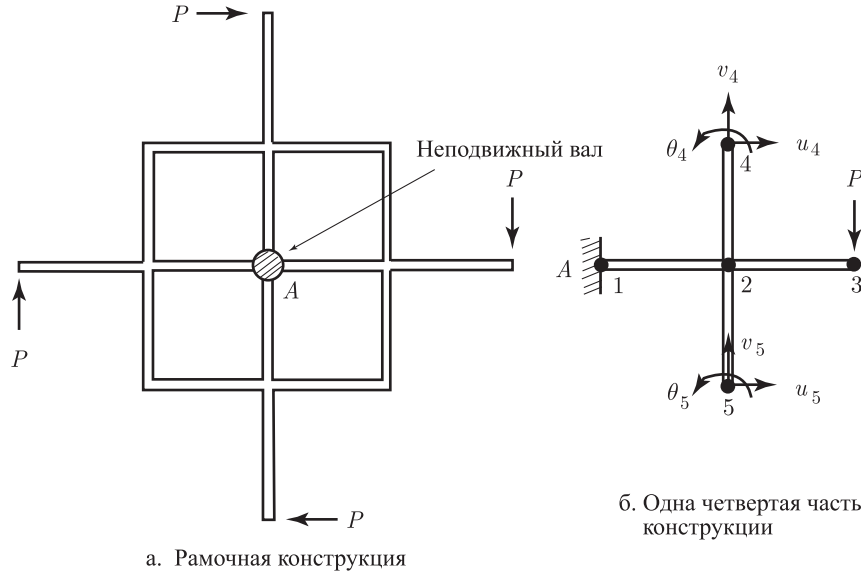


Рис. 4.16. Анализ конструкции с циклической симметрией

Воспользуйтесь симметрией и условиями принуждения с целью построения модели, подходящей для анализа.

Конструкция в целом и приложенные к ней нагрузки обнаруживают циклическую симметрию, так что нужно рассмотреть только одну четвертую часть всей конструкции, как это и показано на рис. 4.16 б, при следующих условиях принуждения:

$$\begin{aligned} u_5 &= v_4 \\ v_5 &= -u_4 \\ \theta_5 &= \theta_4. \end{aligned}$$

Этот простой пример позволяет продемонстрировать возможность значительного уменьшения усилий на проведение анализа за счет использования условий симметрии. На практике экономия усилий путем использования условий циклической симметрии может в некоторых случаях стать весьма значительной, а иногда и само проведение анализа может оказаться возможным только при использовании этих условий.

В данном случае циклическая симметрия имеет место для конструкции, а также и для нагрузки. Однако возможна и поддается анализу и такая ситуация, когда только часть всей конструкции моделируется для случая геометрической циклической симметрии, тогда как нагрузка может быть произвольной (см., например, [Zhong, Qiu 1983]).

4.2.3. Модели с обобщенными координатами для частных задач

В разделе 4.2.1 процедура конечно-элементной дискретизации и вывод уравнений равновесия были описаны и проведены в общем виде; иначе говоря, было рассмотрено трехмерное тело общего вида. Как было показано на примерах, полученные общие уравнения при исследовании частных случаев должны быть конкретизированы применительно к предлагаемым условиям для деформаций и напряжений. В данном разделе мы ставим своей целью обсудить и подытожить, каким образом конечно-элементные матрицы, соответствующие частным задачам, могут быть получены из общих уравнений метода конечных элементов, т. е. из уравнений (4.8)–(4.25).

Несмотря на то, что теоретически любое тело может рассматриваться как трехмерное, во многих случаях возникает настоятельная необходимость уменьшить размерность задач. Поэтому первый этап любого конечно-элементного анализа заключается в том, чтобы решить, какого именно рода задача ¹⁾ нами рассматривается. Это решение основывается на допущениях, используемых в математических моделях теории упругости для частных задач. Классификацию встречаемых при этом задач можно представить в виде следующего перечня: (1) ферма, (2) балка, (3) плоское напряжение, (4) плоская деформация, (5) осесимметричная, (6) изгиб пластины, (7) тонкая оболочка, (8) толстая оболочка и (9) общая трехмерная задача. К каждой из задач этих разновидностей можно применить общую формулировку; при этом, однако, необходимо использовать только надлежащие переменные величины — смещение, напряжение и деформация. Список соответствующих переменных приводится в табл. 4.2 и 4.3, где для случая рассмотрения изотропного материала показаны также и соответствующие матрицы связи между напряжением и деформацией. На рис. 4.17 можно видеть различные варианты условий для напряжения и деформации, рассматриваемые при представлении конечно-элементных матриц.

При рассмотрении примеров 4.5–4.10 мы уже построили некоторые конечно-элементные матрицы частного вида. Если обратиться к примеру 4.6, рассмотренному при условии плоского напряжения, то там для аппроксимации компонентов смещения u и v использовались простые линейные полиномы, причем неизвестные коэффициенты этих полиномов принимались в качестве обобщенных координат. Число неизвестных коэффициентов в выражениях полиномов было равно числу смещений в узловых точках элемента. Выражая обобщенные координаты в терминах смещений для узловых точек элемента, мы установили, что, вообще говоря, каждый коэффициент полинома не представляет собой истинного физического смещения, но равен линейной комбинации смещений в узловых точках элемента.

¹⁾ Здесь мы используем словосочетания, обычно применяемые при инженерном анализе, однако необходимо признать, что слова «выбор задачи» фактически соответствуют «выбору математической модели» (см. раздел 1.2).

Таблица 4.2. Кинематические и статические переменные при решении различных задач

Задача	Компоненты смещения	Вектор де- формации ϵ^T	Вектор на- пряжения τ^T
Брус	u	$[\epsilon_{xx}]$	$[\tau_{xx}]$
Балка	w	$[\kappa_{xx}]$	$[M_{xx}]$
Плоское напряжение	u, v	$[\epsilon_{xx} \epsilon_{yy} \gamma_{xy}]$	$[\tau_{xx} \tau_{yy} \tau_{xy}]$
Плоская деформация	u, v	$[\epsilon_{xx} \epsilon_{yy} \gamma_{xy}]$	$[\tau_{xx} \tau_{yy} \tau_{xy}]$
Осесимметричная	u, v	$[\epsilon_{xx} \epsilon_{yy} \gamma_{xy} \epsilon_{zz}]$	$[\tau_{xx} \tau_{yy} \tau_{xy} \tau_{zz}]$
Трехмерная	u, v, w	$[\epsilon_{xx} \epsilon_{yy} \epsilon_{zz} \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx}]$	$[\tau_{xx} \tau_{yy} \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}]$
Изгиб пластины	w	$[\kappa_{xx} \kappa_{yy} \kappa_{xy}]$	$[M_{xx} M_{yy} M_{xy}]$

Обозначения: $\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$, ..., $\kappa_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\kappa_{yy} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$,
 $\kappa_{xy} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$.

Те конечно-элементные матрицы, которые строятся в предположении о том, что смещения изменяются в форме функций, неизвестные коэффициенты в выражениях которых рассматриваются как обобщенные координаты, будут называться в дальнейшем конечно-элементными моделями с обобщенными координатами. Весьма естественный класс функций, используемых для аппроксимации смещений в элементах, — это полиномы, так как именно они обычно вводятся при аппроксимации неизвестных функций, причем чем выше степень полинома, тем более качественную аппроксимацию мы можем ожидать. Кроме того, полиномы легко дифференцировать; это значит, что если смещения исследуемой конструкции аппроксимируются полиномами, то мы можем сравнительно легко рассчитывать деформации.

Использование полиномиальных аппроксимаций для смещений легло в основу разработки весьма большого числа конечно-элементных процедур, предназначенных, практически, для решения любых задач механики конструкций.

В данном разделе мы поставили своей целью дать описание формулировки различных конечно-элементных моделей с обобщенными координатами, в которых для аппроксимации поля смещений используются полиномы. В принципе, таким же образом могли бы использоваться и другие функции, применение которых может оказаться эффективным для частных приложений (см. пример 4.20). В процессе изложения особый акцент делается скорее не на представлении эффективных численных процедур с конечными элементами, а на общей формулировке подхода. Поэтому первоочередная задача этого раздела состоит в том, чтобы расширить наше понимание метода конечных элементов. Приемы действия с конечными элементами, являющимися более эффективными для приложений общего характера, связаны с изопараметрическими или родственными им элементами, описываемыми в главе 5.

Таблица 4.3. Обобщенные матрицы напряжение–деформация для изотропных материалов и для задач, перечисленных в таблице 4.2

Задача	Материальная матрица \mathbf{C}
Брус	E
Балка	EI
Плоское напряжение	$\frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$
Плоская деформация	$\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$
Осесимметричная	$\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Трехмерная	$\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & & & \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & & & \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & & & \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & & \\ \text{Не показанные} & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & \\ \text{элементы} & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \\ \text{нули} & & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$
Изгиб пластины	$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$

Обозначения: E — модуль Юнга, ν — отношение Пуассона, h — толщина пластины, I — момент инерции.

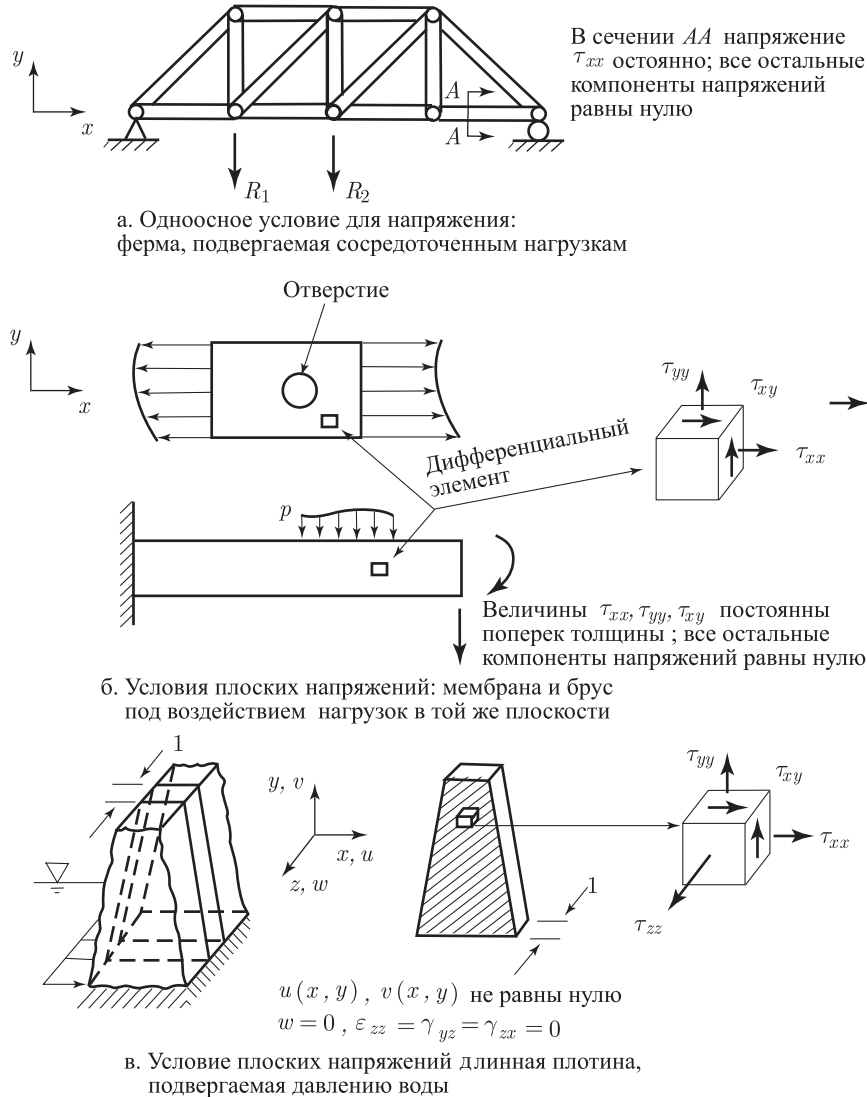


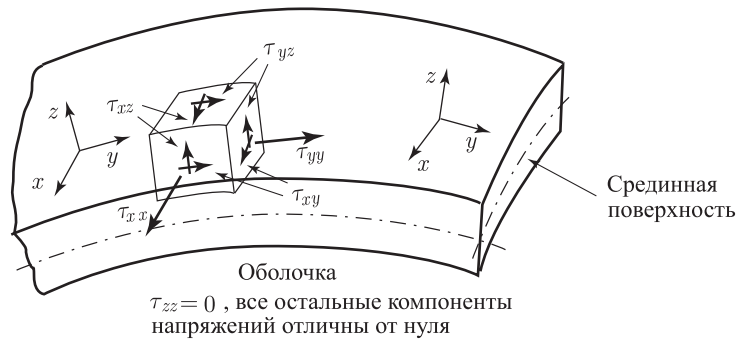
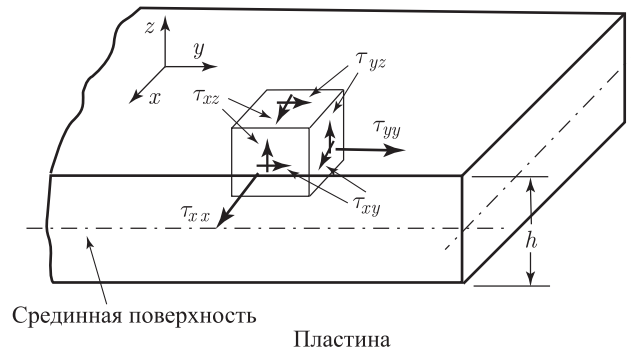
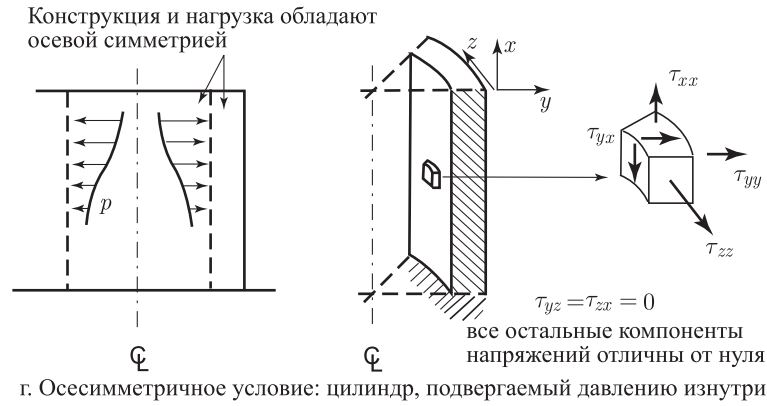
Рис. 4.17. Различные условия для напряжений и деформаций с иллюстративными примерами

При проведении дальнейших выкладок смещения конечных элементов всегда описываются в локальных системах координат, показанных на рис. 4.17. Кроме того, если учесть, что мы рассматриваем один конкретный элемент, верхний индекс (m), применявшийся в разделе 4.2.1, будет теперь опускаться (см. формулу (4.31)).

Для одномерных элементов типа бруса (ферменных элементов) мы имеем

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \dots, \quad (4.51)$$

где переменная x изменяется по длине элемента, u представляет собой локальное смещение элемента, тогда как $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ представляют собой обобщенные координаты.



д. Конструкции в форме пластин и оболочек

Рис. 4.17. Продолжение

наты. Разложение для смещения, представленное формулой (4.51), может быть использовано также для моделирования поперечных и продольных смещений в балке.

Для двумерных элементов (т.е. для элементов с плоскими напряжениями, с плоскими деформациями и для осесимметричных элементов) разложения для смещений u и v , как функций координат элемента x и y , имеют вид

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 x^2 + \dots \\ v(x, y) &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 xy + \beta_5 x^2 + \dots, \end{aligned} \quad (4.52)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, а также β_1, β_2, \dots , представляют собой обобщенные координаты.

В случае элемента типа изгибающейся пластины поперечное отклонение w считается функцией координат элемента x и y , т.е.

$$w(x, y) = \gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 y + \gamma_4 xy + \gamma_5 x^2 + \dots, \quad (4.53)$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ суть обобщенные координаты.

Наконец, для таких элементов, в которых смещения u, v и w измеряются, как функции элементных координат x, y и z , мы, вообще говоря, имеем

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 xy + \dots \\ v(x, y, z) &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 z + \beta_5 xy + \dots \\ w(x, y, z) &= \gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 y + \gamma_4 z + \gamma_5 xy + \dots, \end{aligned} \quad (4.54)$$

где обобщенными координатами теперь являются $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_1, \beta_2, \dots$ и $\gamma_1, \gamma_2, \dots$.

Как и при обсуждении поведения элемента с плоскими напряжениями в примере 4.6, соотношения (4.51)–(4.54) могут быть представлены в матричной форме,

$$\mathbf{u} = \mathbf{\Phi} \mathbf{\alpha}, \quad (4.55)$$

где вектор \mathbf{u} соответствует смещениям, фигурировавшим в соотношениях (4.51)–(4.54), элементами матрицы $\mathbf{\Phi}$ являются соответствующие полиномиальные члены, а $\mathbf{\alpha}$ представляет собой вектор обобщенных координат, расположенных в надлежащем порядке.

Чтобы выразить обобщенные координаты в терминах смещений в узловых точках элемента, мы должны иметь столько же смещений в узловых точках, сколько и предполагаемых обобщенных координат. Если записать формулу (4.55) применительно к смещениям в узловых точках элемента \mathbf{u} , то мы получим

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{A} \mathbf{\alpha}. \quad (4.56)$$

Предполагая, что существует матрица, обратная \mathbf{A} , будем иметь

$$\mathbf{\alpha} = \mathbf{A}^{-1} \hat{\mathbf{u}}. \quad (4.57)$$

Деформации того элемента, который необходимо рассмотреть, зависят от конкретной задачи, подлежащей решению. Если символом ϵ обозначить обобщенный вектор деформации, компоненты которого применительно к конкретной задаче представлены в таблице 4.2, то получим

$$\epsilon = -\mathbf{E} \mathbf{\alpha}, \quad (4.58)$$

где вид матрицы \mathbf{E} определяется предположениями о смещениях, соответствующими формуле (4.55). Вектор обобщенных напряжений τ можно получить с помощью соотношения

$$\tau = \mathbf{C} \epsilon, \quad (4.59)$$

где \mathbf{C} представляет собой обобщенную матрицу упругости. Величины τ и \mathbf{C} определены применительно к некоторым задачам в таблицах 4.2 и 4.3. Можно отметить, что во всех случаях, за исключением задач об изгибе, обобщенные матрицы τ, ϵ и \mathbf{C} совпадают с теми, которые используются в теории упругости. Термин «обобщенные» применяется здесь просто для того, чтобы к числу деформаций и напряжений присоединить, соответственно, кривизны и моменты. При исследовании задач с изгибом преимущество использования кривизн и моментов состоит в том, что в процессе расчета жесткости не потребуются интегрирование по толщине соответствующего элемента, так как связанное с изгибом изменение напряжения и деформации уже было принято во внимание (см. пример 4.15).

Обращаясь к таблице 4.3, отметим, что все матрицы напряжение–деформация могут быть найдены, исходя из общего трехмерного соотношения связи между указанными величинами. Матрицы напряжение–деформация для случаев плоской деформации и осевой симметрии могут быть получены путем простого вычеркивания из аналогичной трехмерной матрицы тех строк и столбцов, которые соответствуют нулевым компонентам деформации. Матрица напряжение–деформация для случая исследования плоских напряжений получается из соответствующей матрицы для осесимметричного случая путем использования условия о равенстве нулю τ_{zz} (см. программу QUADS в разделе 5.6). Для расчета обобщенной матрицы напряжение–деформация при исследовании изгиба пластины используется матрица, соответствующая условиям плоских напряжений, как это и показано на нижеследующем примере.

Пример 4.15: Требуется построить матрицу напряжение–деформация \mathbf{C} для решения задачи об изгибе пластины (см. таблицу 4.3).

Деформации на расстоянии z , измеряемом в направлении вверх от срединной поверхности пластины, выражаются как

$$\begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & -z \frac{2p^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}.$$

При исследовании изгиба пластин предполагается, что каждый слой пластины работает в условиях плоских напряжений и что положительные кривизны соответствуют положительным моментам (см. раздел 5.4.2). Следовательно, если проинтегрировать нормальные напряжения в пластине с целью получения моментов, отнесенных к единице длины, то получим обобщенную матрицу напряжение–деформация в виде

$$\mathbf{C} = \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} dx$$

или

$$\mathbf{C} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}.$$

Обращаясь к формулам (4.55)–(4.59), следует признать, что, вообще говоря, все соотношения, требуемые для расчета конечно-элементных матриц, соответствующих локальным смещениям в узловых точках каждого конечного элемента, уже были определены, и при использовании обозначений, введенных в разделе 4.2.1, мы имеем

$$\mathbf{H} = \Phi \mathbf{A}^{-1}, \quad (4.60)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{E} \mathbf{A}^{-1}. \quad (4.61)$$

Рассмотрим теперь вкратце различные типы встречающихся конечных элементов, для которых необходимо вводить определенные статические или кинематические допущения.

Ферменные и балочные элементы. Ферменные и балочные элементы весьма широко используются в строительной механике, — например, с целью моделирования строительства каркасов и мостов (см. рис. 4.17а, где показан комплекс ферменных элементов).

Как уже говорилось в разделе 4.2.1, матрицы жесткости этих элементов могут зачастую быть рассчитаны путем решения дифференциальных уравнений равновесия (см. пример 4.8), и такого рода выкладкам посвящено много публикаций.

Результаты этих выкладок были использованы при исследованиях по методу смещений и при соответствующих ему приемах приближенного решения, таких, как метод распределения моментов. Однако может оказаться эффективным рассчитывать матрицы жесткости с использованием конечно-элементных формулировок, т.е. с помощью принципа виртуальной работы, в особенности при исследовании конструкций сложной геометрии и при нелинейном геометрическом анализе (см. раздел 5.4.1).

Элементы с плоскими напряжениями и с плоскими деформациями. Элементы с плоскими напряжениями используются для моделирования мембран, балок и пластин, деформирующихся в одной плоскости, как показано на рис. 4.17б, и т.п. В каждом из этих случаев в плоскости xy имеет место двумерная стрессовая ситуация, при равных нулю напряжениях τ_{zz} , τ_{yz} и τ_{zx} . Элементы с плоскими деформациями используются для представления некоего «ломтя» (имеющего единичную толщину) такой конструкции, в которой компоненты деформации ϵ_{zz} , γ_{yz} и γ_{zx} равны нулю. Такая ситуация возникает при анализе поведения длинной дамбы, как это иллюстрируется на рис. 4.17(с).

Осесимметричные элементы. Осесимметричные элементы используются для моделирования конструктивных объектов, имеющих вращательную симметрию относительно некой оси. Примерами приложений служат находящиеся под давлением сосуды и кольца из сплошного материала. Если, кроме того, такого рода конструкции подвергаются осесимметричным нагрузкам, то двумерный анализ единичного радиана данного объекта дает полную картину распределения напряжений и деформаций, как это иллюстрируется на рис. 4.17г.

С другой стороны, если осесимметричная конструкция нагружена не осесимметрично, то можно, на выбор исследователя, — или провести полный трехмерный анализ с использованием субструктур (см. раздел 8.2.4), или воспользоваться циклической симметрией (см. пример 4.14), или же произвести разложение нагрузок в ряды Фурье с последующей суперпозицией гармонических решений (см. пример 4.20).

Изгиб пластин и элементы типа оболочки. При исследовании изгиба пластин и поведения оболочек основное утверждение сводится к тому, что в одном направлении конструкция является тонкой, в силу чего можно сделать следующие предположения (см. рис. 4.17 д):

1. Напряжение по толщине (т.е. перпендикулярно срединной поверхности) пластины/оболочки равно нулю.
2. Те материальные частицы, которые первоначально располагались на прямой линии, перпендикулярной срединной поверхности пластины/оболочки, остаются на этой же линии и в процессе деформаций. Согласно теории Кирхгофа, сдвиговыми деформациями можно пренебречь, и в процессе деформаций указанная прямая линия остается перпендикулярной срединной поверхности. Теория Рейсснер–Миндлина включает учет сдвиговых деформаций, а на этом основании линия, первоначально нормальная к срединной поверхности, в общем случае не остается перпендикулярной к этой поверхности в процессе деформаций (см. раздел 5.4.2).

Первая группа конечных элементов, разработанных для моделирования тонких изгибающихся пластин и оболочек, основывалась на теории а для пластин (см. [Galagher 1969]). Трудности при таком подходе связаны с тем, что элементы должны удовлетворять требованиям сходимости, а также быть относительно эффективными в своих приложениях. Разработке такого рода элементов было посвящено много усилий исследователей; однако было установлено, что нередко более эффективные

элементы могут быть разработаны с использованием теории пластин Рейсснер–Миндлина (см. раздел 5.4.2).

Простейший подход для получения элемента типа оболочки связан с суперпозицией жесткости изгибающейся пластины и жесткости мембраны, подвергающейся плоским напряжениям. Таким путем получают плоские элементы, которые могут быть использованы для моделирования плоских элементов оболочек (как например, складывающихся пластин), и могут быть задействованы также и при моделировании искривленных оболочек общего вида в форме комплекса, составленного из плоских элементов. В примерах 4.18 и 4.19 мы демонстрируем разработку элемента типа изгибающейся пластины на основе теории Кирхгофа для пластин, а также построение соответствующего плоского элемента типа оболочки.

Пример 4.16: Требуется обсудить построение интерполяционных матриц смещений и матриц связи деформация–смещение для балки, показанной на рис. 4.18.

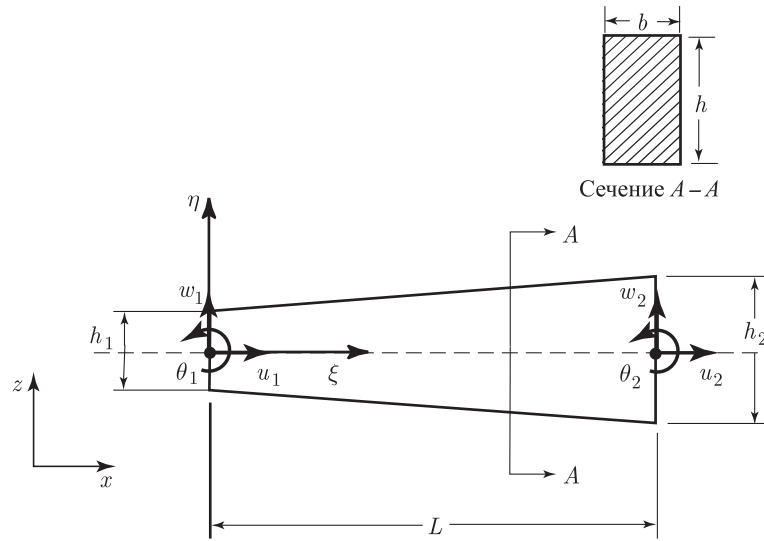


Рис. 4.18. Элемент типа балки переменного сечения

Точная (в рамках теории балок) матрица жесткости для данной балки может быть рассчитана путем решения дифференциальных уравнений равновесия балки, которые в случае изгибного поведения объекта имеют вид

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(EI \frac{d^2 w}{d\xi^2} \right) = 0; \quad EI = E \frac{bh^3}{12}, \quad (a)$$

а для осевого поведения того же объекта записываются в виде

$$\frac{d}{d\xi} \left(EA \frac{du}{d\xi} \right) = 0; \quad A = bh, \quad (b)$$

где E — модуль Юнга. Процедура состоит в том, чтобы задать единичное смещение на конце балки при всех других концевых смещениях, равных нулю, и решить соответствующее дифференциальное уравнение для балки при указанных граничных условиях. Как только будут рассчитаны внутренние смещения в элементе при этих граничных условиях, подсчет соответствующих производных даст значения сил на концах элемента, совокупность которых позволяет получить столбец матрицы жесткости, соответствующий заданию концевого смещения. Необходимо отметить, что получаемая матрица жесткости является «точной» только для случая статического анализа, так как при динамическом анализе коэффициенты жесткости зависят от частот.

Другой вариант анализа связан с использованием соотношений (4.8)–(4.17). При этом получится та же матрица жесткости, что и при вышеописанной процедуре, если только при построении матрицы деформация–смещение используются точные значения внутренних смещений в элементе (удовлетворяющие уравнениям (а) и (б)). Однако на практике нередко оказывается целесообразным воспользоваться интерполяциями для смещений, соответствующими балке постоянного поперечного сечения, и таким образом получить приближенное представление матрицы жесткости. Эта аппроксимация обычно оказывается адекватной, если только h_2 не будет значительно больше, чем h_1 (и, следовательно, если для моделирования всего объекта не понадобится слишком большое число балочных элементов). Ошибки, возникающие в процессе этого анализа, совпадают и теми, которые будут обсуждаться в разделе 4.3, так как данная формулировка соответствует конечно-элементному анализу, основанному на изучении смещений.

Используя переменные, представленные на рис. 4.18, и «точные» выражения для смещений (функции Эрмита), соответствующие балке призматической формы, мы получим

$$u = \left(1 - \frac{\xi}{L}\right) u_1 + \frac{6\eta}{L} \left(\frac{\xi}{L} - \frac{\xi^2}{L^2}\right) w_1 - \eta \left(1 - 4\frac{\xi}{L} + 3\frac{\xi^2}{L^2}\right) \theta_1 + \\ + \frac{\xi}{L} u^2 - \frac{6\eta}{L} \left(\frac{\xi}{L} - \frac{\xi^2}{L^2}\right) w_2 + \eta \left(2\frac{\xi}{L} - 3\frac{\xi^2}{L^2}\right) \theta_2.$$

Следовательно,

$$\mathbf{B} = \left[\left(1 - \frac{\xi}{L}\right) \frac{6\eta}{L} \left(\frac{\xi}{L} - \frac{\xi^2}{L^2}\right) - \eta \left(1 - 4\frac{\xi}{L} + 3\frac{\xi^2}{L^2}\right) \frac{\xi}{L} - \right. \\ \left. - \frac{6\eta}{L} \left(\frac{\xi}{L} - \frac{\xi^2}{L^2}\right) \eta \left(2\frac{\xi}{L} - 3\frac{\xi^2}{L^2}\right) \right]. \quad (c)$$

Для представления (с) мы задали смещения узловых точек в виде

$$\hat{\mathbf{u}}^T = [u_1 w_1 \theta_1 \quad u_2 w_2 \theta_2].$$

Если рассматривать только нормальные деформации и напряжения в балке, т. е. если пренебречь сдвиговыми деформациями, то в качестве единственной пары компонентов деформации и напряжения будем иметь

$$\epsilon_{\xi\xi} = \frac{du}{d\xi}; \quad \tau_{\xi\xi} = E\epsilon_{\xi\xi}$$

и, следовательно,

$$\mathbf{B} = \left[-\frac{1}{L} \frac{6\eta}{L} \left(\frac{1}{L} - \frac{2\xi}{L^2}\right) - \eta \left(-\frac{4}{L} + \frac{6\xi}{L^2}\right) \frac{1}{L} - \frac{6\eta}{L} \left(\frac{1}{L} - \frac{2\xi}{L^2}\right) \eta \left(\frac{2}{L} - \frac{6\xi}{L^2}\right) \right]. \quad (d)$$

Выражения, соответствующие (с) и (d), могут быть непосредственно использованы для расчета элементных матриц, определяемых согласно (4.33)–(4.37); например,

$$\mathbf{K} = Eb \int_{-h/2}^{L+h/2} \int \mathbf{B}^T \mathbf{B} d\eta d\xi,$$

где

$$h = h_+(h_2 - h_1) \frac{\xi}{L}.$$

Данная формулировка может быть непосредственно распространена на построение элементных матриц, соответствующих трехмерному действию балочного элемента, а также на включение сдвиговых деформаций (см. [Bathe, Bolourchi 1979]).

Пример 4.17: Требуется обсудить построение матриц жесткости, массы и нагрузки для осесимметричного элемента с тремя узлами, показанного на рис. 4.19.

Именно этот элемент был одним из первых конечных элементов, предложенных для реализации. Для большинства практических приложений в настоящее время

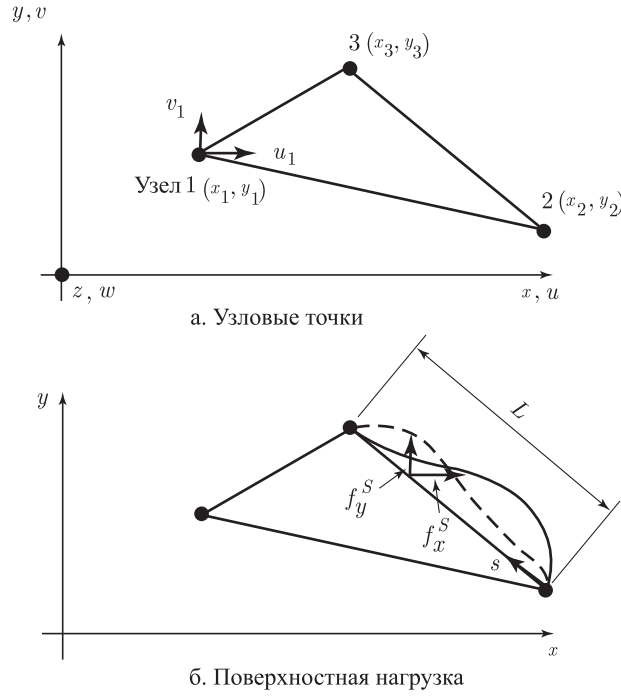


Рис. 4.19. Осесимметричный элемент с тремя узлами

предлагаются значительно более эффективные разновидности конечных элементов, однако данный элемент удобно использовать для учебных целей, так как те уравнения, с которыми придется иметь дело, оказываются сравнительно простыми.

Смещения предполагаются представимыми в виде

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y,$$

$$v(x, y) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y.$$

Следовательно, предполагается линейное изменение смещений, точно так же, как это было при исследовании элемента с плоскими напряжениями, имеющего четыре узла и рассмотренного в примере 4.6, где наличие четвертого узла приводило к требованию о включении в предполагаемые представления смещений члена с xy . Обращаясь к выкладкам, проведенным в примере 4.6, мы можем сразу же сформулировать следующие соотношения:

$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix},$$

где

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \mathbf{A}^{-1},$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_1^{-1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{A}_1^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}_1} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix},$$

где

$$\det \mathbf{A}_1 = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2).$$

Можно отметить, что $\det \mathbf{A}_1$ равен нулю только в том случае, когда три узловых точки элемента лежат на одной прямой линии. Деформации соответствуют выражениям в табл. 4.2 и имеют вид

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{u}{x}.$$

Используя предполагаемые полиномиальные представления, получим

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \epsilon_{zz} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{x} & 1 & \frac{y}{x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E} \mathbf{A}^{-1}.$$

Таким образом, пользуясь соотношениями (4.33)–(4.37), имеем

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}^{-T} \left\{ \int_A \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{y}{x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \right. \\ \left. \times \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{x} & 1 & \frac{y}{x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x dx dy \right\} \mathbf{A}^{-1}, \quad (\text{a})$$

где при объемном интегрировании рассматривается один радиан осесимметричного элемента. Аналогично этому, имеем

$$\mathbf{R}_B = \mathbf{A}^{-T} \int_A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 0 \\ y & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & x \\ 0 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x^B \\ f_y^B \end{bmatrix} x dx dy,$$

$$\mathbf{R}_I = \mathbf{A}^{-T} \int_A \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{y}{x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{xx}^I \\ \tau_{yy}^I \\ \tau_{xy}^I \\ \tau_{zz}^I \end{bmatrix} x dx dy, \quad (b)$$

$$\mathbf{M} = \rho \mathbf{A}^{-T} \left\{ \int_A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 0 \\ y & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & x \\ 0 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} x dx dy \right\} \mathbf{A}^{-1},$$

где массовая плотность ρ считается постоянной.

Для расчета вектора поверхностной нагрузки \mathbf{R}_S целесообразно с практической точки зрения ввести вспомогательные системы координат, располагающиеся вдоль нагруженных сторон элемента. Предположим, что сторона 2–3 рассматриваемого элемента нагружена так, как это показано на рис. 4.19. Тогда вектор нагрузки \mathbf{R}_S рассчитывается с использованием в качестве переменной величины s , и это дает

$$\mathbf{R}_S = \int_S \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 - \frac{s}{L} & 0 \\ \frac{x}{L} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{s}{L} \\ 0 & \frac{s}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x^S \\ f_y^S \end{bmatrix} \left[x_2 \left(1 - \frac{s}{L} \right) + x_3 \frac{s}{L} \right] ds.$$

По поводу расчета этих конечно-элементных матриц можно сделать следующие замечания. Во-первых, при вычислении интегралов можно получить решения в замкнутой форме; в противном случае можно воспользоваться численным интегрированием (которое обсуждается в разделе 5.5). Во-вторых, обнаруживается, что матрицы жесткости, массы и нагрузки, соответствующие конечным элементам с плоскими напряжениями и плоскими деформациями, могут быть получены просто путем (1) невключения четвертой строки в матрицу деформация–смещение \mathbf{E} , используемую в соотношениях (а) и (б); (2) применения надлежащей матрицы напряжение–деформация \mathbf{C} в формуле (а), и (3) использования в качестве дифференциального объемного элемента комбинации $h dx dy$ вместо $x dx dy$, где h — толщина элемента (при анализе плоских деформаций ее удобно принять равной единице). С учетом вышеизложенного такие варианты анализа, как осесимметричный, с плоскими напряжениями и с плоскими деформациями, могут быть достаточно эффективно охвачены одной единственной компьютерной программой. Кроме того, как показывает матрица \mathbf{E} , условия постоянства деформаций ϵ_{xx} , ϵ_{yy} и γ_{xy} предполагаются справедливыми при каждом из вариантов анализа.

Фактически концепция об эффективном объединении исследований с осевой симметрией, с плоскими деформациями и с плоскими напряжениями в одну компьютерную программу представлена в разделе 5.6, где обсуждается эффективное воплощение действий с изопараметрическими конечными элементами.

Пример 4.18: Требуется получить матрицы $\phi(x, y)$, $\mathbf{E}(x, y)$ и \mathbf{A} для элемента в форме изгибающейся прямоугольной пластины, показанной на рис. 4.20.

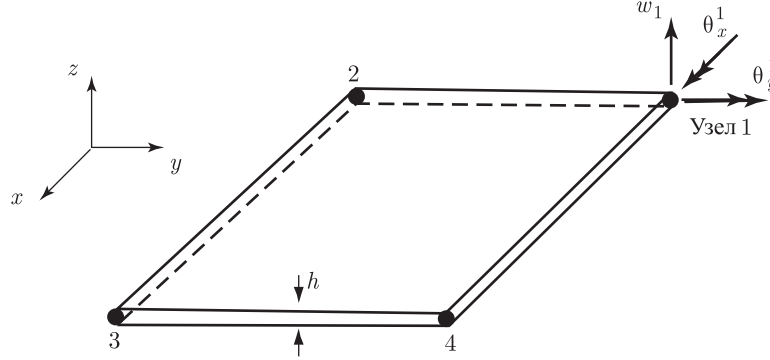


Рис. 4.20. Элемент в форме изгибающейся прямоугольной пластины

Этот элемент является одним из первых построенных элементов в форме изгибающейся пластины, хотя к настоящему времени уже используются более эффективные элементы такого типа (см. раздел 5.4.2).

Как показано на рис. 4.20, рассматриваемый элемент в форме изгибающейся пластины имеет три степени свободы в расчете на каждый узел. Поэтому нам необходимо иметь 12 неизвестных обобщенных координат, $\alpha_1, \dots, \alpha_{12}$, которые должны войти в предполагаемое представление смещения w . Используемый при этом полином имеет вид

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3.$$

Следовательно,

$$\phi(x, y) = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2 y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^3 y \quad xy^3]. \quad (a)$$

Теперь мы можем рассчитать $\partial w / \partial x$ и $\partial w / \partial y$:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y + 3\alpha_7 x^2 + 2\alpha_8 xy + \alpha_9 y^2 + 3\alpha_{11} x^2 y + \alpha_{12} y^3 \quad (b)$$

и

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y + \alpha_8 x^2 + 2\alpha_9 xy + 3\alpha_{10} y^2 + \alpha_{11} x^3 + 3\alpha_{12} xy^2. \quad (c)$$

Используя условия

$$\left. \begin{aligned} w_i &= (w)_{x_i, y_i}; & \theta_x^i &= \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{x_i, y_i} \\ \theta_y^i &= \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x_i, y_i} \end{aligned} \right\} i = 1, \dots, 4,$$

мы можем построить матрицу \mathbf{A} , получая

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_4 \\ \theta_x^1 \\ \vdots \\ \theta_x^4 \\ \theta_y^1 \\ \vdots \\ \theta_y^4 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{12} \end{bmatrix},$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1^3 & x_1^2 y_1 & x_1 y_1^2 & y_1^3 & x_1^3 y_1 & x_1 y_1^3 \\ \vdots & & & & \vdots & & & & & & & \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 & x_4^3 & x_4^2 y_4 & x_4 y_4^2 & y_4^3 & x_4^3 y_4 & x_4 y_4^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_1 & 2y_1 & 0 & x_1^2 & 2x_1 y_1 & 3y_1^2 & x_1^3 & 3x_1 y_1^2 \\ \vdots & & & & \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_4 & 2y_4 & 0 & x_4^2 & 2x_4 y_4 & 3y_4^2 & x_4^3 & 3x_4 y_4^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_1 & -y_1 & 0 & -3x_1^2 & -2x_1 y_1 & -y_1^2 & 0 & -3x_1^2 y_1 & -y_1^3 \\ \vdots & & & & \vdots & & & & & & & \\ 0 & -1 & 0 & -2x_4 & -y_4 & 0 & -3x_4^2 & -2x_4 y_4 & -y_4^2 & 0 & -3x_4^2 y_4 & -y_4^3 \end{bmatrix}. \quad (\text{d})$$

Можно показать, что эта матрица всегда является невырожденной.

Чтобы вычислить матрицу \mathbf{E} , вспомним, что при анализе изгибающихся пластин в качестве обобщенных деформаций и напряжений используются, соответственно, кривизны и моменты (см. табл. 4.2 и 4.3). Вычисляя требуемые производные согласно (b) и (c), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 2\alpha_4 + 6\alpha_7 x + 2\alpha_8 y + 6\alpha_{11} xy, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 2\alpha_6 + 2\alpha_9 x + 6\alpha_{10} y + 6\alpha_{12} xy, \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= 2\alpha_5 + 4\alpha_8 x + 4\alpha_9 y + 6\alpha_{11} x^2 + 6\alpha_{12} y^2. \end{aligned} \quad (\text{e})$$

Отсюда следует, что мы имеем

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 & 6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{f})$$

Теперь, имея в своем распоряжении матрицы Φ , \mathbf{A} и \mathbf{E} , представленные посредством (a), (d) и (f), а также материальную матрицу \mathbf{C} , представленную в табл. 4.3, мы можем вычислить для данного элемента матрицу жесткости, матрицу массы и векторы нагрузки.

При расчете матрицы жесткости элемента важно отдавать себе отчет в том, является ли этот элемент полным и совместимым. Элемент, рассматриваемый в данном примере, является полным, как это следует из соотношений (e) (т. е. этот элемент может представлять состояния постоянной кривизны), однако он не является совместимым. Требования

совместимости нарушаются для многих элементов типа изгибающихся пластин, а это означает, что сходимость в ходе проводимого анализа не является, вообще говоря, монотонной (см. раздел 4.3).

Пример 4.19: Обсудите построение матрицы жесткости для плоского прямоугольного элемента типа оболочки.

Поведение простого прямоугольного элемента типа плоской оболочки можно определить путем суперпозиции поведения изгибающейся пластины, рассмотренного в примере 4.18 и поведения элемента с плоскими напряжениями, исследованного в примере 4.6. Получаемый в результате элемент показан на рис. 4.21. Этот элемент может быть использован для моделирования комплексов из плоских пластин (например, конструкций типа складной пластины), а также искривленных оболочек. Для исследования реальных конструкций мы располагаем более эффективными элементами типа оболочки, и здесь мы обсуждаем элемент, показанный на рис. 4.21, только с целью демонстрации некоторых основных подходов к исследованию.

Обозначим символами $\tilde{\mathbf{K}}_B$ и $\tilde{\mathbf{K}}_M$ матрицы жесткости, определяемые в локальной системе координат и характеризующие, соответственно, изгибное и мембранное поведение элемента. Тогда матрица жесткости элемента типа оболочки $\tilde{\mathbf{K}}_S$ имеет вид

$$\tilde{\mathbf{K}}_S = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_B & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{K}}_M \end{bmatrix}. \quad (a)$$

20×20 12×12 8×8

Матрицы $\tilde{\mathbf{K}}_M$ и $\tilde{\mathbf{K}}_B$ обсуждались при рассмотрении примеров 4.6 и 4.18 соответственно.

Теперь этот элемент типа оболочки может быть непосредственно использован при анализе целого ряда оболочечных конструкций. Рассмотрим конструкции, изображенные на рис. 4.21 в идеализированном виде. При проводимых исследованиях мы имеем дело с шестью степенями свободы в расчете на каждый узел и, следовательно, матрицы жесткости элементов, соответствующие глобальным степеням свободы, вычисляются с помощью преобразования, заданного соотношениями (4.41), то есть

$$\mathbf{K}_S = \mathbf{T}^T \tilde{\mathbf{K}}_S^* \mathbf{T}, \quad (b)$$

24×24

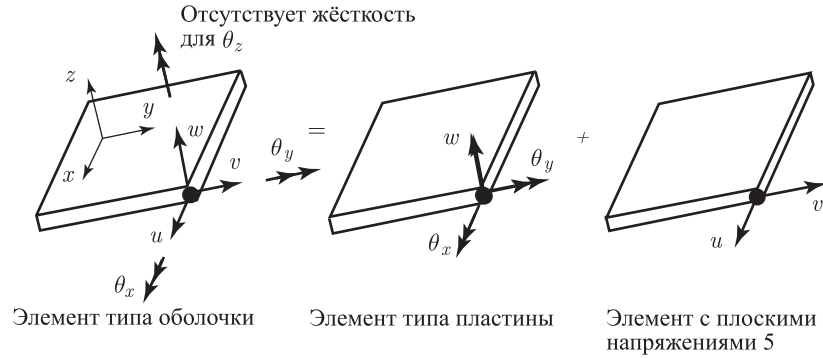
где

$$\tilde{\mathbf{K}}_S^* = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (c)$$

24×24 20×20 4×4

и где \mathbf{T} есть матрица преобразования, связывающая локальные и глобальные степени свободы элемента. С целью определения матрицы $\tilde{\mathbf{K}}_S^*$, соответствующей шести степеням свободы в расчете на каждый узел, мы так видоизменили матрицу $\tilde{\mathbf{K}}_S$ в правой части формулы (c), чтобы включить в нее коэффициенты жесткости, соответствующие местным вращениям θ_z (вращениям относительно оси z) в узлах. В формуле (c) эти коэффициенты жесткости были приняты равными нулю. Причиной такого приравнивания является тот факт, что эти степени свободы не были включены в выражения для элемента; следовательно, вращение элемента θ_z в узле не измеряется и не вносит своего вклада в энергию деформации, запасаемую в данном элементе.

Решение для модели может быть получено, если в формуле (c) используется матрица $\tilde{\mathbf{K}}_S^*$ и если элементы, окружающие данный узел, не лежат в одной плоскости. Это положение не справедливо для модели в форме складной пластины, а если проводится исследование слегка искривленной оболочки, показанной на рис. 4.21 в, то элементы могут оказаться почти компланарными (в зависимости от кривизны оболочки и от используемой идеализации). В этих случаях глобальная матрица жесткости является сингулярной, или плохо обусловленной, в силу наличия нулевых диагональных элементов в матрице $\tilde{\mathbf{K}}_S^*$, и при решении уравнений глобального равновесия (см. раздел 8.2.6) возникают определенные трудности. Чтобы избавиться от этой проблемы, можно ввести



а. Базисный элемент оболочки с 5-ю локальными степенями свободы в узле

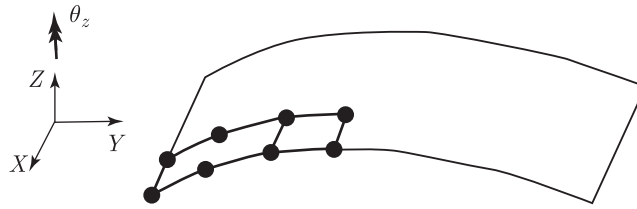
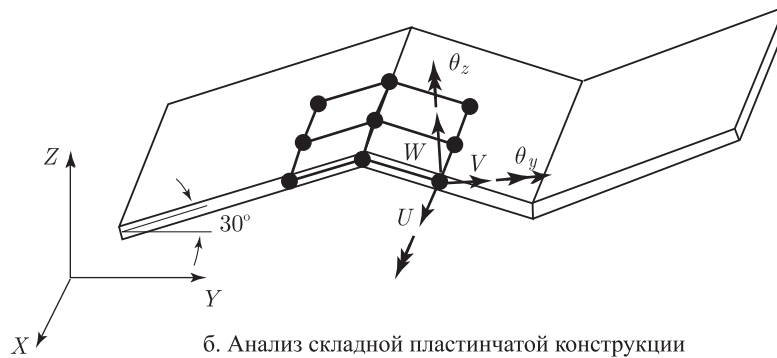


Рис. 4.21. Использование плоского элемента оболочки

малый коэффициент жесткости, соответствующий вращению θ_z ; иначе говоря, вместо матрицы $\tilde{\mathbf{K}}_S^*$, определяемой формулой (с), мы используем выражение

$$\tilde{\mathbf{K}}_S^{*f} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_S & 0 \\ 0 & k\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (d)$$

20×20 4×4

где величина k составляет примерно одну тысячную долю наименьшего диагонального элемента матрицы $\tilde{\mathbf{K}}_S$. Коэффициент жесткости k должен быть достаточно велик для того, чтобы можно было построить точное решение конечно-элементной системы уравнений равновесия, и достаточно мал для того, чтобы не оказать существенного влияния на реакцию системы. Поэтому, если используется арифметика действий с плавающей запятой, то необходимо вводить числа с достаточно большим количеством цифр (см. раздел 8.2.6).

Более эффективный обходной путь решения данной проблемы связан с искривленными оболочечными элементами с пятью степенями свободы в расчете на каждый узел, определяемыми в соответствии с плоскостью, касательной к срединной поверхности оболочки.

В этом случае вращение, нормальное к поверхности оболочки, не является степенью свободы (см. раздел 5.4.2).

В приведенных выше выражениях для элемента мы пользовались полиномиальными функциями для представления смещений. Однако следует коротко заметить, что для некоторых приложений может оказаться эффективным использовать выражения с другими функциями, например, с тригонометрическими. В частности, тригонометрические функции используются при исследовании осесимметричных конструкций, подверженных неосесимметричным нагрузкам (см. [Wilson 1965]), а также при применении метода конечных полос (см. [Cheung 1968]).

Преимущество тригонометрических функций связано со свойствами их ортогональности. А именно, если произведения синусов и косинусов интегрируются по интересующему нас интервалу, то интеграл может быть равен нулю. Тогда это будет означать, что между уравнениями равновесия с обобщенными координатами в форме функций, содержащих синусы и косинусы, не будет взаимосвязи и, следовательно, уравнения равновесия могут быть решены более эффективно. В этом контексте можно заметить, что наилучшая форма функций, которые можно было бы использовать при конечно-элементном анализе, соответствовала бы собственным векторам рассматриваемой задачи, так как именно они привели бы к диагональной матрице жесткости. Однако эти функции заранее не известны, и для приложений общего вида вполне естественно воспользоваться полиномиальным, тригонометрическим или каким-либо еще предполагаемым представлением смещений в конечных элементах.

Разумеется, при исследовании некоторых разновидностей течения жидкости использование специальных интерполяционных функций может также привести к эффективным схемам решения (см., например, [Patera 1984]).

Использование тригонометрических функций будет продемонстрировано на приводимом ниже примере.

Пример 4.20: На рис. 4.22 показана осесимметричная конструкция, находящаяся под воздействием неосесимметричной нагрузки, действующей в радиальном направлении. Требуется провести анализ поведения этой конструкции с использованием осесимметричного элемента, рассмотренного в примере 4.17, и при том условии, что нагрузка представляется в форме суперпозиции компонентов Фурье.

Распределение напряжений в данной конструкции является трехмерным и может быть рассчитано с применением трехмерной конечно-элементной идеализации. Однако имеется возможность воспользоваться преимуществом осесимметричной геометрии данной конструкции и, в зависимости от точной конфигурации прилагаемой к ней нагрузки, весьма существенно снизить вычислительные усилия.

Ключевой момент при проведении анализа данной конструкции сводится к тому, что приложенная извне нагрузка $R_r(\theta, y)$ разлагается в ряд Фурье:

$$R_r = \sum_{p=1}^{p_c} R_p^c \cos p\theta + \sum_{p=1}^{p_s} R_p^s \sin p\theta, \quad (a)$$

где p_c и p_s — это целые числа, обозначающие симметричные и антисимметричные вклады в нагрузку, соответственно; отсчет ведется от значения $\theta = 0$. Рисунок 4.22 б иллюстрирует поведение первых членов в разложениях согласно представлению (a).

Далее, анализ в целом может быть осуществлен путем суперпозиции ответных реакций конструкции на нагрузки, определяемые, в соответствии с представлением (a), симметричными и антисимметричными вкладами. Например, при рассмотрении

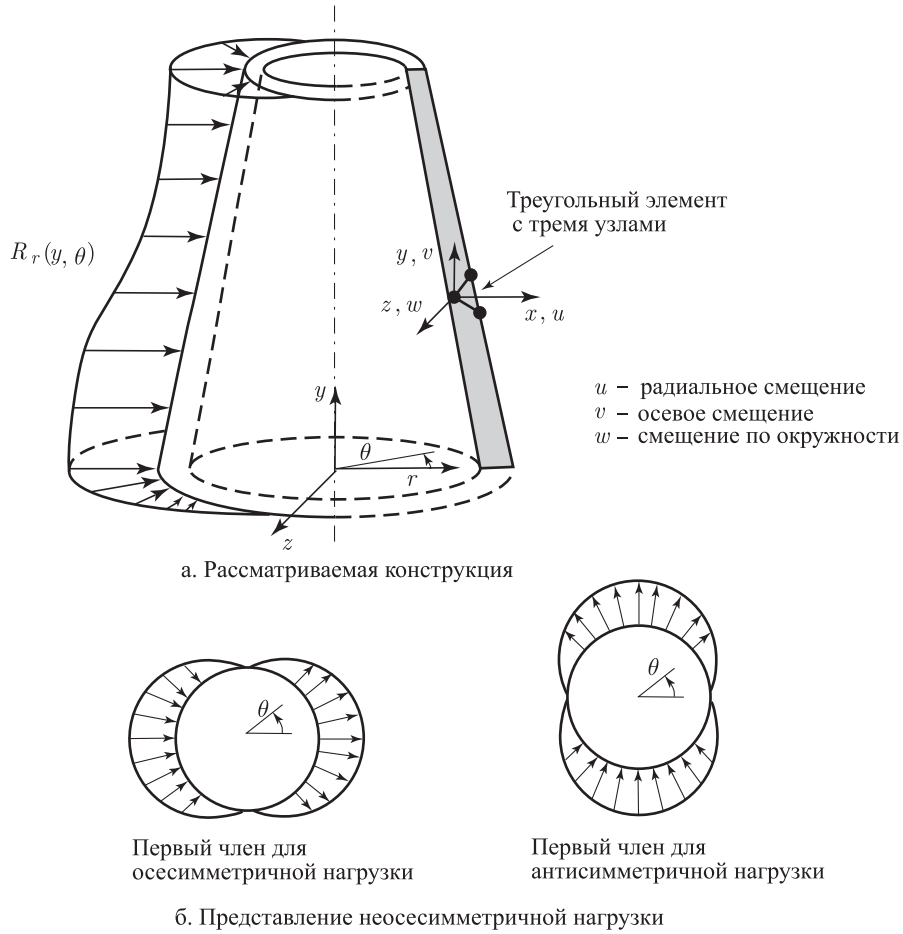


Рис. 4.22. Осесимметричная конструкция под воздействием неосесимметричной нагрузки

симметричной реакции для элемента используются представления

$$\begin{aligned} u(x, y, \theta) &= \sum_{p=1}^{p_c} \cos p\theta \mathbf{H} \hat{\mathbf{u}}^p, \\ v(x, y, \theta) &= \sum_{p=1}^{p_c} \cos p\theta \mathbf{H} \hat{\mathbf{v}}^p, \\ w(x, y, \theta) &= \sum_{p=1}^{p_c} \sin p\theta \mathbf{H} \hat{\mathbf{w}}^p, \end{aligned} \quad (b)$$

где для треугольных элементов типа примененных в примере 4.17 имеем

$$\mathbf{H} = [1 \quad x \quad y] \mathbf{A}_1^{-1}, \quad (c)$$

а $\hat{\mathbf{u}}^p$, $\hat{\mathbf{v}}^p$ и $\hat{\mathbf{w}}^p$ — это неизвестные обобщенные смещения в узловых точках элемента, соответствующие моде p .

Следует отметить, что согласно представлениям (b) проводится суперпозиция реакций, измеряемых в форме индивидуальных гармонических распределений смещения. Используя формулы (b), мы можем установить вид матрицы деформация–смещение для данного элемента. Если учесть, что мы имеем дело с трехмерным распределением

напряжений, то выражение для трехмерного распределения деформаций записывается в цилиндрических координатах, как

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{w}{r} \end{bmatrix}, \quad (d)$$

где

$$\epsilon^T = [\epsilon_{rr} \quad \epsilon_{yy} \quad \epsilon_{\theta\theta} \quad \gamma_{ry} \quad \gamma_{y\theta} \quad \gamma_{\theta r}]. \quad (e)$$

После вычисления производных в представлениях (b) и их подстановки в выражение (d) мы получим матрицы деформация–смещение \mathbf{B}_p , соответствующие каждому значению p , тогда как суммарные деформации можно представить в форме суперпозиции распределений деформации, соответствующих каждой гармонике.

После этого неизвестные значения смещений в узловых точках можно рассчитать, следуя обычным процедурам. Уравнения равновесия, соответствующие обобщенным смещениям в узловых точках, $U_i^p, V_i^p, W_i^p, i = 1, \dots, N$ (N — общее число узлов), при $p = 1, \dots, p_c$, выводятся в соответствии с формулами (4.17)–(4.22), где теперь мы имеем

$$\mathbf{U}^T = [\mathbf{U}^{1T} \quad \mathbf{U}^{2T} \quad \dots \quad \mathbf{U}^{p_c T}] \quad (f)$$

и

$$\mathbf{U}^{pT} = [U_1^p \quad V_1^p \quad W_1^p \quad ; \quad U_2^p \quad \dots \quad W_N^p]. \quad (g)$$

При вычислении матрицы \mathbf{K} и вектора \mathbf{R}_S мы замечаем, что вследствие свойств ортогональности

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin n\theta \sin m\theta d\theta &= 0 \quad n \neq m \\ \int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos m\theta d\theta &= 0 \quad n \neq m \end{aligned} \quad (h)$$

матрицы жесткости, соответствующие различным гармоникам, перестают быть связанными друг с другом. Следовательно, для нашей конструкции мы получим следующие уравнения равновесия:

$$\mathbf{K}^p \mathbf{U}^p = \mathbf{R}_S^p \quad p = 1, \dots, p_c, \quad (i)$$

где \mathbf{K}^p есть матрица жесткости, а \mathbf{R}_S^p — вектор нагрузки, причем оба соответствуют p -й гармонике. Решение уравнений (i) дает нам обобщенные смещения в узловых точках каждого элемента, тогда как соотношения (b) позволяют получить все внутренние смещения в элементах.

При построении вышеописанного решения для смещений мы рассматривали только симметричные вклады в нагрузку. Однако совершенно аналогичный анализ может быть проведен и для антисимметричных гармоник нагрузки, содержащихся в разложении (a), путем простой замены в соотношениях от (b) до (i) членов с синусами и косинусами на члены с косинусами и синусами, соответственно. После этого полная ответная реакция конструкции получается путем суперпозиции смещений, соответствующих всем гармоникам.

Несмотря на то, что при проведенном здесь обсуждении рассматривалась только поверхностная нагрузка, тот же подход будет пригоден и для распространения данного

анализа на возможность включения нагрузок в форме массовых сил, а также учета начальных напряжений.

Наконец, заметим, что требуемые для анализа вычислительные усилия прямо пропорциональны используемому при представлении нагрузок числу гармоник. Следовательно, процедура построения решения будет весьма эффективной, если нагрузка сможет быть представлена с использованием лишь небольшого числа гармоник (такова, например, ветровая нагрузка), но может оказаться неэффективной, если представление нагрузки должно осуществляться с помощью многих гармоник (как например, в случае сосредоточенной силы).

4.2.4. Разукрупнение структурных свойств и нагрузок

Физическая интерпретация той конечно-элементной процедуры, которая представлена в предыдущих разделах, состоит в том, что конструктивные свойства — жесткость и масса, — а также внутренние и внешние нагрузки, разукрупняются по дискретным узлам комплекса элементов путем использования принципа виртуальной работы. *Принимая во внимание, что одни и те же интерполяционные функции используются как для расчета векторов нагрузки и матрицы масс, так и для вычисления матрицы жесткости, мы говорим о том, что рассчитываются «самосогласованные» векторы нагрузки и самосогласованная матрица масс.* Если в этом случае соблюдены некоторые условия (см. раздел 4.3.3), то конечно-элементное решение представляет собой анализ Ритца.

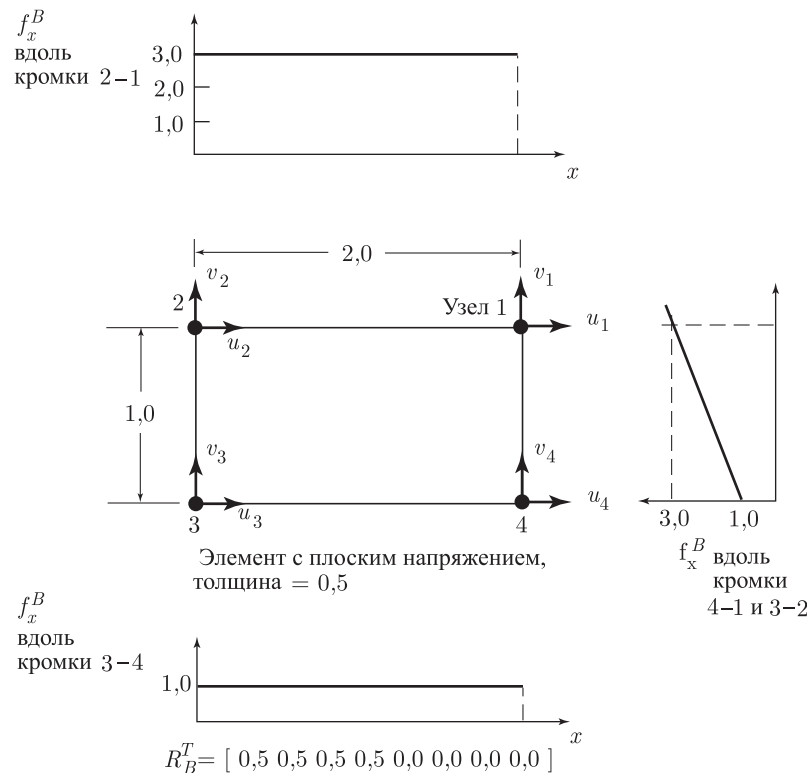


Рис. 4.23. Распределение массовой нагрузки и соответствующий разукрупненный вектор массовой силы \mathbf{R}_B для прямоугольного элемента

Теперь следует признать, что вместо проведения операций интегрирования, ведущих к нахождению надлежащего вектора нагрузки, мы можем вычислить приближенное значение этого вектора путем простого сложения практически приложенных в узлах сосредоточенных сил \mathbf{R}_C с добавочными силами, в определенном смысле эквивалентными распределенным нагрузкам на элементы. Достаточно очевидный способ создания приближенных построений векторов нагрузки состоит в вычислении суммарных значений массовых и поверхностных сил, действующих на элемент, и в распределении их равными частями по соответствующим узловым степеням свободы элемента. В качестве примера рассмотрим прямоугольный элемент с плоскими напряжениями, показанный на рис. 4.23 вместе с распределением массовой нагрузки. Суммарное значение массовой силы равно 2,0 и, следовательно, мы получаем разукрупненный вектор массовой силы, представленный на рисунке.

Если говорить о выводе матрицы масс для элемента, то напомним, что силы инерции рассматривались как часть массовых сил. Это значит, что мы можем также определить приближенную форму матрицы масс путем разукрупненного распределения всей массы данного элемента по узловым точкам. Отдавая себе отчет в том, что каждая из узловых масс соответствует части массы элемента, сосредоточенной в объеме вокруг этого узла, заметим, что при использовании такой процедуры разукрупнения масс мы, по существу, предполагаем, что ускорения принадлежащих узлам объемов постоянны и равны узловым значениям.

Важным преимуществом использования матрицы разукрупненных масс является тот факт, что эта матрица оказывается диагональной и, как это станет очевидным позднее, объем численных операций, требуемый для решения динамических уравнений равновесия, в некоторых случаях весьма существенно сокращается.

Пример 4.21: Требуется определить вектор разукрупненных массовых сил и найти матрицу разукрупненных масс для комплекса элементов, представленного на рис. 4.17.

Матрица разукрупненных масс имеет вид

$$\mathbf{M} = \rho \int_0^{100} (1) \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dx + \rho \int_0^{80} \left(1 + \frac{x}{40}\right)^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} dx$$

или

$$\mathbf{M} = \frac{\rho}{3} \begin{bmatrix} 150 & 0 & 0 \\ 0 & 670 & 0 \\ 0 & 0 & 520 \end{bmatrix}.$$

Аналогично этому, вектор разукрупненных массовых сил имеет вид

$$\mathbf{R}_B = \left(\int_0^{100} (1) \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} (1) dx + \int_0^{80} \left(1 + \frac{x}{40}\right)^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{10}\right) dx \right) f_2(t) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 150 \\ 202 \\ 52 \end{bmatrix} f_2(t).$$

Можно отметить, что суммы вкладов в \mathbf{M} и \mathbf{R}_B , полученные в данном примере и в примере 4.5, оказываются одинаковыми, как это и требовалось.

При применении процедуры разукрупнения нагрузки следует иметь в виду, что нагрузки в узловых точках рассчитываются, вообще говоря, лишь приближенно и, если используется грубая конечно-элементная сетка, то получаемое в результате решение может оказаться весьма неточным. Действительно, в некоторых случаях использование конечных элементов высокого порядка приводит к поразительным результатам. Один такой случай демонстрируется на рис. 4.24 (см. также пример 5.12).

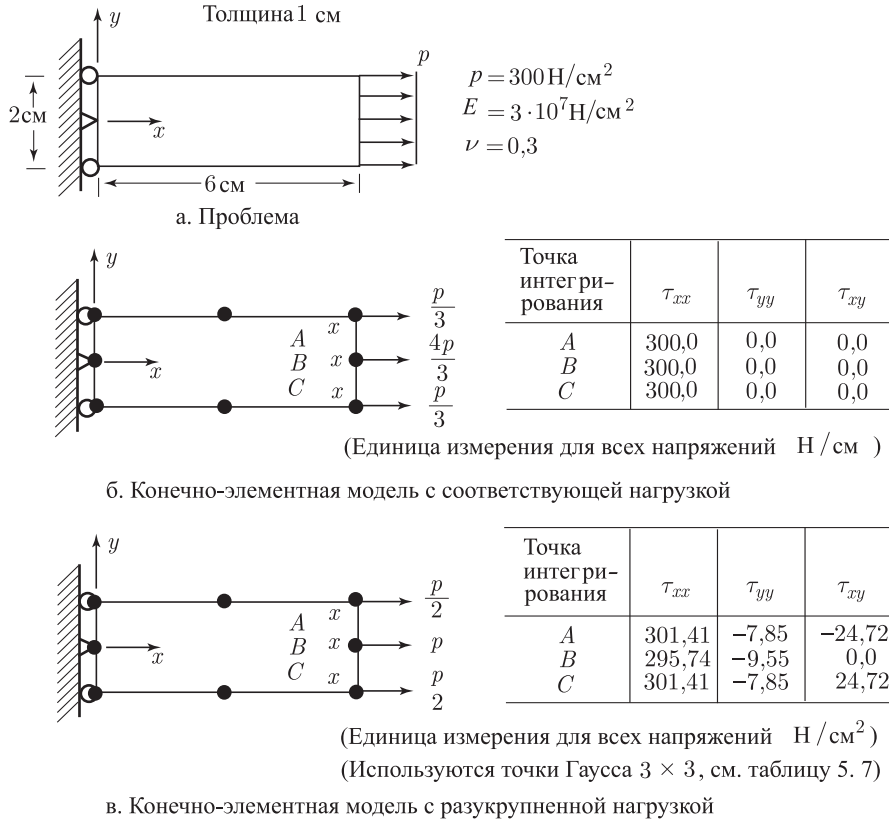
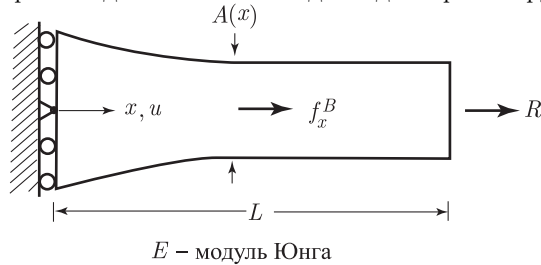


Рис. 4.24. Некоторые результаты для избранных версий анализа, полученные с соответствующей нагрузкой и без нее

Если речь идет о динамическом анализе, то инерционные эффекты могут рассматриваться как массовые силы. Поэтому, если применяется матрица разукрупненных масс, то при использовании надлежащего вектора нагрузки особых преимуществ получить нельзя, тогда как если при анализе применяется надлежащая матрица масс, то должны использоваться и надлежащие нагрузки, распределенные по узлам.

4.2.5. Упражнения

- 4.1. Воспользуйтесь процедурой из примера 4.2, чтобы дать формальный вывод принципа виртуальной работы для показанного здесь одномерного бруса.

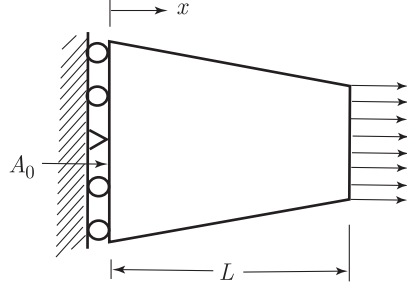


Дифференциальные уравнения равновесия имеют вид

$$E \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f_x^B = 0,$$

$$EA \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=L} = R.$$

4.2. Рассмотрите показанную здесь конструкцию.



F = полная сила, действующая на правый конец

E = модуль Юнга

$A(x) = A_0(1 - x/4L)$

- Запишите соотношение для принципа виртуальных перемещений, конкретизируя применительно к данному случаю общее уравнение (4.7).
- Воспользуйтесь принципом виртуальной работы, чтобы проверить, имеет ли точное решение вид

$$\tau(x) = \left(\frac{72}{73} + \frac{24x}{73L} \right) \frac{F}{A_0}.$$

Используйте три представления виртуальных смещений: (i) $\bar{u}(x) = a_0 x$, (ii) $\bar{u}(x) = a_0 x^2$, (iii) $\bar{u}(x) = a_0 x^3$.

- Решите дифференциальные уравнения, определяющие равновесие:

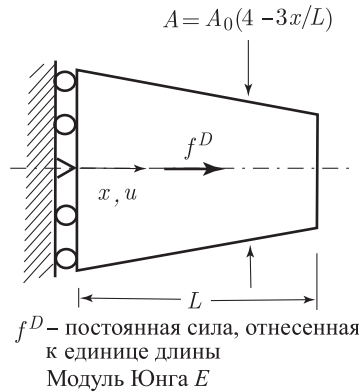
$$E \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0,$$

$$EA \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=L} = F.$$

- Используйте три различных варианта представления виртуальных смещений, заданных в пункте (b), сделайте подстановку в выражение для принципа виртуальной работы, используя точное решение для напряжения (из пункта (c)), и подтвердите в явной форме справедливость принципа.

4.3. Рассмотрите показанный здесь брус.

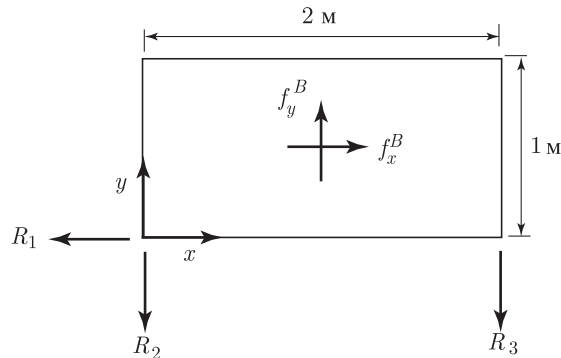
- Постройте решение для точного значения смещения, выражающего реакцию конструкции.
- Покажите в явной форме, что принцип виртуальной работы удовлетворяется при вариантах представления смещения (i) $\bar{u} = ax$ и (ii) $\bar{u} = ax^2$.
- Определите напряжение τ_{xx} , для которого принцип виртуальной работы удовлетворяется при форме смещения (ii), но не при форме смещения (i).



- 4.4. Для показанного здесь двумерного тела используйте принцип виртуальной работы с целью показать, что массовые силы находятся в равновесии с приложенными к телу сосредоточенными узловыми нагрузками.

$$f_x^B = 10(1 + 2x) \text{ Ньютон/м}^3, f_y^B = 20(1 + y) \text{ Ньютон/м}^3, R_1 = 60 \text{ Ньютон}, R_2 = 45 \text{ Ньютон}, R_3 = 15 \text{ Ньютон}.$$

Единичная толщина



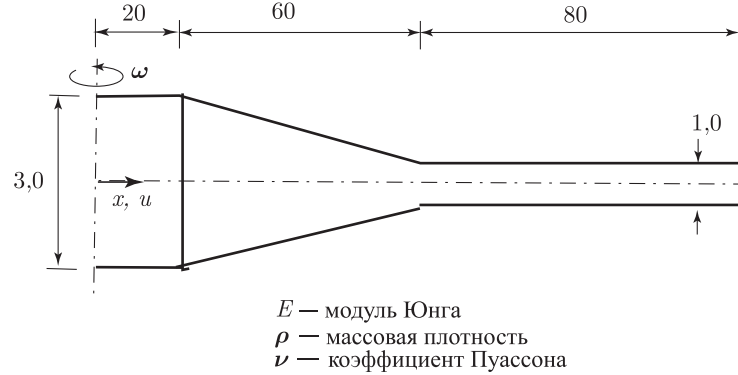
- 4.5. Используйте показанную здесь конструкцию из брусьев в форме комплекса из двух брусевых элементов, каждый с двумя узлами.

- Рассчитайте уравнения равновесия $\mathbf{KU} = \mathbf{R}$.
- Рассчитайте матрицу масс для комплекса элементов.



- 4.6. Рассмотрите диск с отверстием вблизи оси радиусом 20 единиц, вращающийся с угловой скоростью ω радиан/сек. Идеализируйте данную конструкцию в виде комплекса из двух элементов, с двумя узлами каждый, и рассчитайте уравнения

равновесия для стационарного состояния (псевдостатические). Заметим, что деформации теперь имеют вид $\partial u / \partial x$ и u/x , где u/x есть деформация кольцевой обоймы.



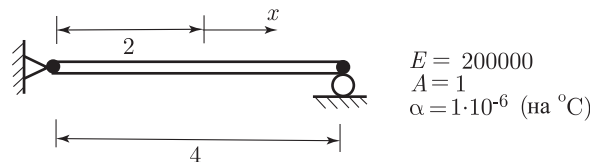
4.7. Рассмотрите пример 4.5 и состояние объекта в момент времени $t = 2,0$ при $U_1(t) = 0$ в любой момент времени.

- (a) Воспользуйтесь конечно-элементной формулировкой, приведенной в примере, с целью расчета статических смещений в узловых точках и напряжений в элементах.
- (b) Рассчитайте реакцию опоры.
- (c) Пусть расчетное конечно-элементное решение имеет вид u^{FE} . Рассчитайте и покажите на графике ошибку r , измеренную за счет удовлетворения дифференциальному уравнению равновесия, т. е.

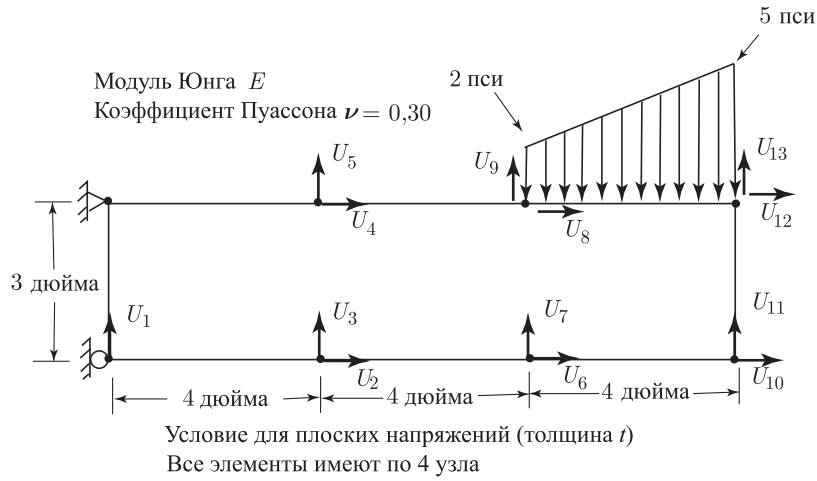
$$r = E \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial u^{\text{FE}}}{\partial x} \right) \right] + f_s^B A.$$

- (d) Рассчитайте энергию деформаций данной конструкции при ее оценке в соответствии с конечно-элементным решением и сравните эту энергию с точным значением энергии деформаций для математической модели.

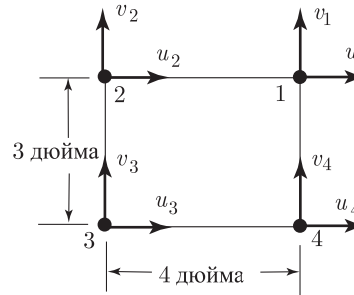
4.8. Показанный здесь элемент типа фермы с двумя узлами, поддерживаемый первоначально при постоянной температуре в 20°C , подвергается температурной вариации $\theta = (10x + 20)^\circ\text{C}$. Рассчитайте результирующее напряжение и смещения узловых точек. Кроме того, предполагая материал сплошной средой, получите аналитическое решение, и коротко обсудите ваши результаты.



4.9. Проведите конечно-элементный анализ показанной здесь конструкции.

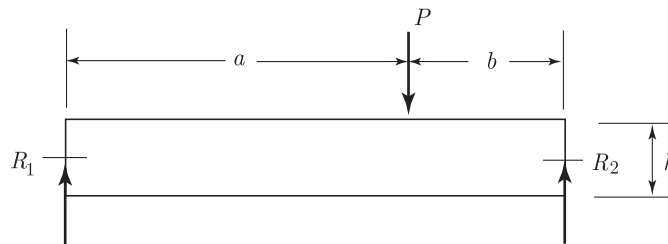


- Начните с определения типической матрицы \mathbf{B} для элемента, применительно к вектору $\hat{\mathbf{u}}^T = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4]$.
- Рассчитайте элементы матрицы \mathbf{K} : $K_{U_2 U_2}$, $K_{U_6 U_7}$, $K_{U_7 U_6}$ и $K_{U_5 U_{12}}$ для данного конструктивного комплекса.
- Рассчитайте узловую нагрузку R_9 , обусловленную линейно изменяющимся распределением поверхностного давления.

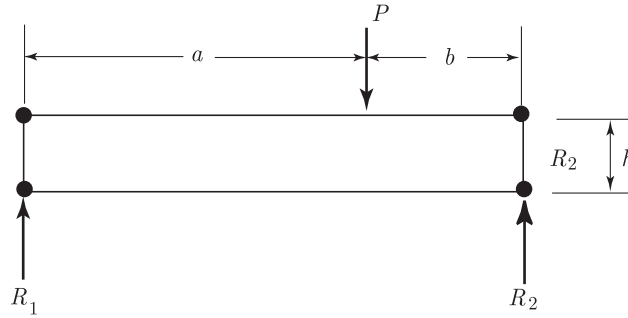


4.10. Рассмотрите показанную здесь балку на простых опорах.

- Предположите, что применяется обычная теория балок, и воспользуйтесь принципом виртуальной работы для расчета реакций R_1 и R_2 .

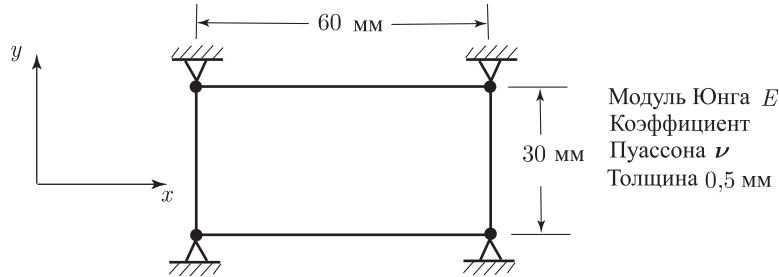


- Теперь предположите, что балка моделируется конечным элементом с четырьмя узлами. Покажите, что для обеспечения возможности вычисления R_1 и R_2 по методике пункта (а) необходимо, чтобы функции, характеризующие конечно-элементные смещения, могли представлять смещения, свойственные твердому телу.

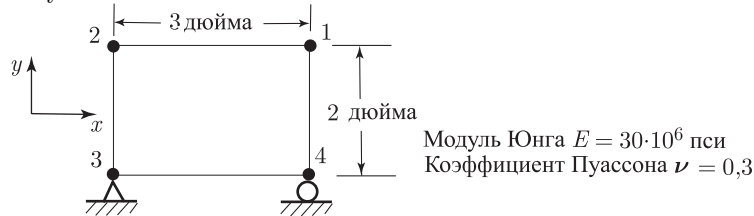


4.11. Показанный здесь элемент с плоскими напряжениями, имеющий четыре узла, испытывает начальные напряжения: $\tau'_{xx} = 0$ МПа, $\tau'_{yy} = 10$ МПа, $\tau'_{xy} = 20$ МПа.

- Рассчитайте соответствующие силы \mathbf{R}_I в узловых точках.
- Дайте оценку сил \mathbf{R}_S в узловых точках, эквивалентных тем поверхностным натяжениям, которые соответствуют напряжениям в элементе. Проверьте ваши результаты, пользуясь элементарными законами статики, и покажите, что \mathbf{R}_S равна той \mathbf{R}_I , которая была вычислена в пункте (a). Объясните, почему этот результат имеет смысл.
- Дайте вывод общего результата: предположите, что заданы любые напряжения и что \mathbf{R}_I и \mathbf{R}_S вычислены. Каким условиям должны удовлетворять заданные напряжения, чтобы получить $\mathbf{R}_I = \mathbf{R}_S$, если поверхностные натяжения для расчета \mathbf{R}_S получены с помощью уравнения (b) из примера 4.2?



4.12. Показанный здесь элемент с плоскими деформациями, имеющий четыре узла, подвержен постоянным напряжениям $\tau_{xx} = 20$ psi, $\tau_{yy} = 10$ psi, $\tau_{xy} = 10$ psi. Рассчитайте смещения в узловых точках элемента.



4.13. Рассмотрите элемент 2, показанный на рис. 4.9.

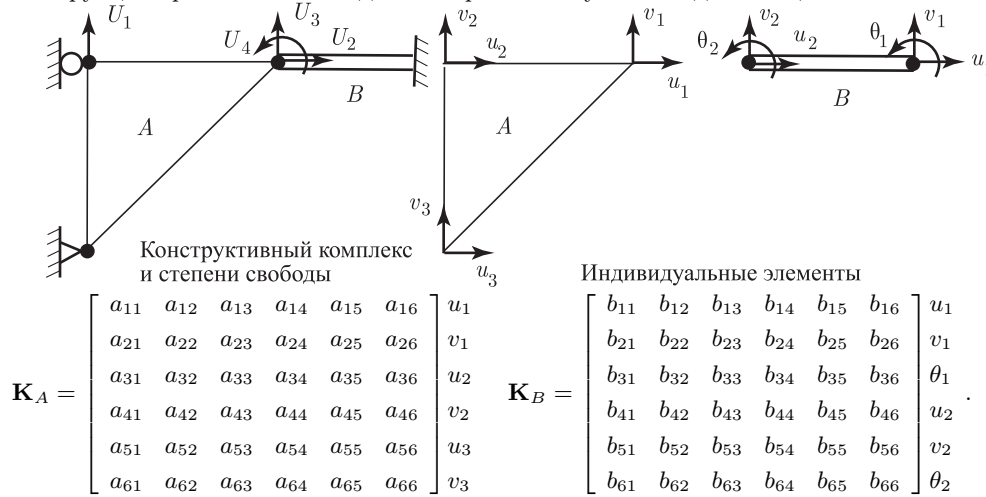
- Покажите в явной форме, что

$$\mathbf{F}^{(2)} = \int_{V^{(2)}} \mathbf{B}^{(2)T} \boldsymbol{\tau}^{(2)} dV^{(2)}.$$

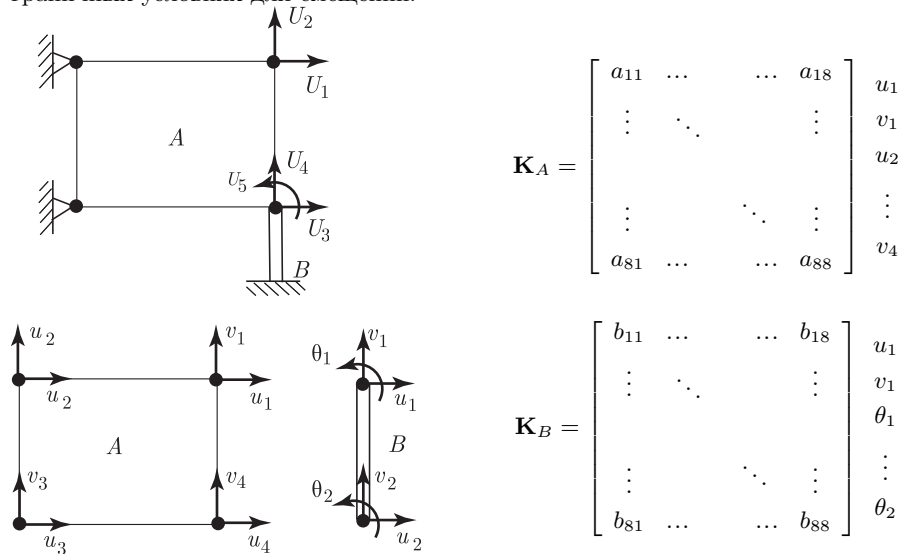
- Покажите, что силы $\mathbf{F}^{(2)}$ в узловых точках элемента находятся в равновесии.

4.14. Предположим, что матрицы жесткости элементов, \mathbf{K}_A и \mathbf{K}_B , соответствующие показанным здесь смещениям элементов, были уже рассчитаны. Скомпонуйте эти

элементные матрицы непосредственно в глобальную матрицу жесткости всей конструкции при показанных здесь же граничных условиях для смещений.

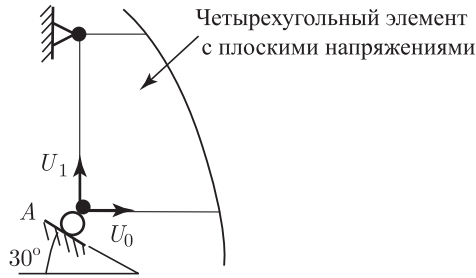


- 4.15. Предположим, что матрицы жесткости элементов, \mathbf{K}_A и \mathbf{K}_B , соответствующие показанным здесь смещениям элементов, уже рассчитаны. Скомпонуйте эти элементные матрицы в глобальную матрицу жесткости всей конструкции при показанных здесь граничных условиях для смещений.



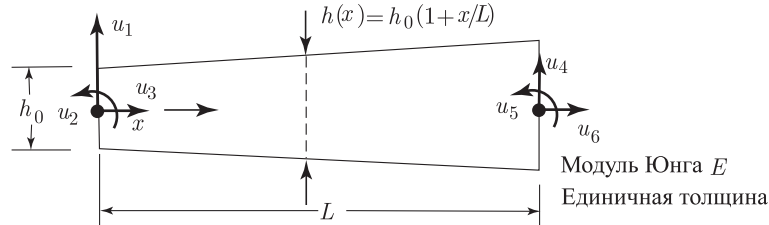
- 4.16. Рассмотрите пример 4.11. Предположим, что у опоры A каток допускает смещение только под углом в 30 градусов к горизонтальному направлению. Определите модификации в решении для примера 4.11, необходимые для того, чтобы получить структурную матрицу \mathbf{K} , соответствующую указанной ситуации.
- 4.17. Рассмотрите показанный здесь элемент типа балки. Дайте оценку коэффициентов жесткости k_{11} и k_{12} .

- (а) Получите точные значения коэффициентов из решения дифференциального уравнения равновесия (воспользуйтесь математической моделью из теории балок Бернулли).



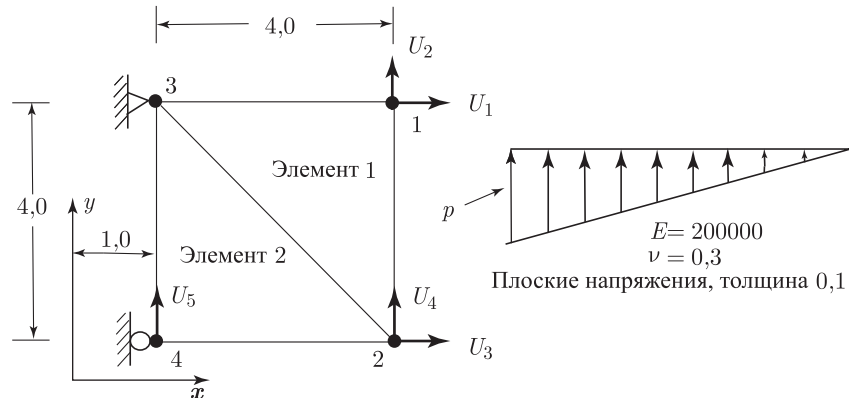
- (а) Рассмотрите наложение условия нулевого смещения в точной форме.
 (б) Рассмотрите наложение условия нулевого смещения, пользуясь методом штрафных функций.

- (б) Получите значения тех же коэффициентов, пользуясь принципом виртуальной работы с балочными функциями Эрмита (см. пример 4.16).



4.18. Рассмотрите показанный здесь комплекс из двух элементов.

- (а) Рассчитайте коэффициенты жесткости K_{11} и K_{14} для конечно-элементной идеализации.
 (б) Вычислите вектор нагрузки для комплекса элементов.

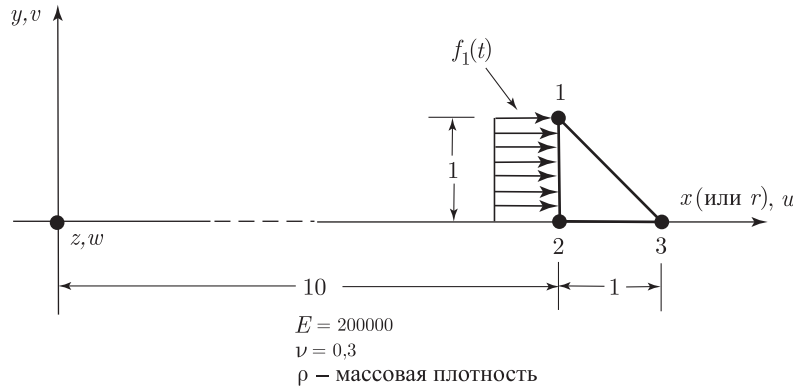


4.19. Рассмотрите комплекс из двух элементов, представленный в упражнении 4.18, однако теперь предположите наличие осесимметричных условий. Ось y представляет собой ось вращения.

- (а) Рассчитайте коэффициенты жесткости K_{11} и K_{14} для конечно-элементной идеализации.
 (б) Вычислите соответствующий вектор нагрузки.

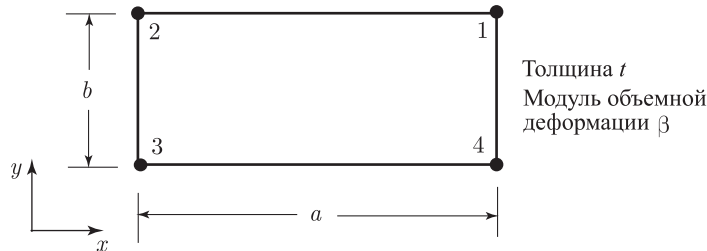
4.20. Рассмотрите пример 4.20, и пусть нагрузка на конструкцию выражается формулой $R_r = f_1(t) \cos \theta$.

- (а) Найдите матрицу жесткости, матрицу масс и вектор нагрузки для показанного здесь элемента с тремя узлами. Найдите все нужные вам матрицы в явной форме, но не проводите при этом ни умножений, ни интегрирования.



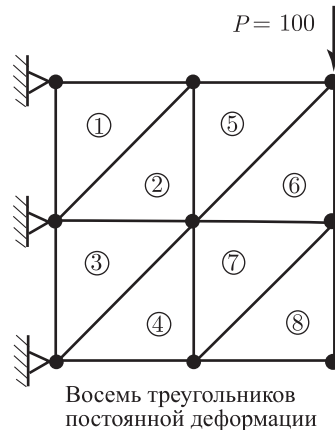
- (b) Объясните (пользуясь физическими соображениями) тот факт, что ваши предположения относительно u , v и w имеют смысл.

- 4.21. Элемент, материалом которого является невязкая жидкость (для исследования акустических движений), может быть получен путем рассмотрения только объемной энергии деформаций (учитывая, что невязкая жидкость не оказывает сопротивления сдвигу). Постройте конечно-элементную матрицу жесткости для жидкости, применительно к показанному здесь четырехузловому плоскому элементу, и выпишите все необходимые матрицы. Не проводите на практике никаких интегрирований или матричных умножений. *Подсказка:* Вспомните, что $p = -\beta \Delta V/V$, что $\tau^T = [\tau_{xx} \ \tau_{yy} \ \tau_{xy} \ \tau_{yz}] = [-p \ -p \ 0 \ -p]$, и что $\Delta V/V = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}$.

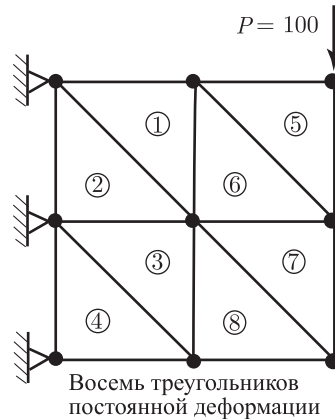


- 4.22. Рассмотрите комплексы элементов, представленные в упражнениях 4.18 и 4.19. Для каждого случая рассчитайте матрицу разукрупненных масс (используя постоянную массовую плотность ρ) и вектор разукрупненной нагрузки.
- 4.23. Используйте программу метода конечных элементов для решения применительно к модам, показанным здесь для задачи из примера 4.6.

- (a) Выведите на печать напряжения в элементах и силы в узловых точках элементов, а также сделайте рисунки вида «взорванных элементов», чтобы показать напряжения и силы в узловых точках, как это было сделано в примере 4.9.
- (b) Покажите, что элементные силы в узловых точках для элементов 5 и 6 уравновешивают нагрузку, приложенную извне.
- (c) Выведите на печать значения реакций и покажите, что элементные силы в узловых точках уравновешивают эти реакции.
- (d) Вычислите энергию деформаций для конечно-элементной модели.



- 4.24. Используйте программу метода конечных элементов для решения применительно к модели, показанной здесь для задачи из примера 4.6. Выведите на печать напряжения в элементах и реакции, рассчитайте энергию деформаций для модели. Сделайте рисунки вида «взорванных элементов» для показа напряжений и сил в узловых точках. Сравните ваши результаты с результатами для упражнения 4.23 и обсудите вопрос о том, почему мы не должны удивляться получению различных результатов (хотя при обеих идеализациях использовались элементы одинакового рода и в одном и том же числе).



4.3. Сходимость результатов анализа

Метод конечных элементов представляет собой численную процедуру для решения сложных инженерных задач, и поэтому весьма важно уметь оценивать точность решения. В данном разделе мы ставим своей целью рассмотрение именно этих вопросов. Мы начинаем с предлагаемого в разделе 4.3.1 определения того, что мы понимаем под термином «сходимость». Затем мы рассматриваем, скорее в физическом аспекте, критерии монотонной сходимости, и устанавливаем связь этих критериев с условиями анализа по Ритцу (представленного в разделе 3.3.3). После этого дается обзор некоторых важных свойств (с соответствующими доказательствами) конечно-элементных решений и обсуждается скорость сходимости. Наконец, мы рассматриваем расчет напряжений и оцениваем те критерии ошибок, которые указывают на величину ошибки в значениях напряжений, получаемых по завершении анализа.

В данном разделе мы рассматриваем конечные элементы, базирующиеся на смещениях, использование которых приводит к монотонно сходящимся решениям. Формулировки, приводящие к немонотонной сходимости, рассматриваются в разделах 4.4 и 4.5.

4.3.1. Модельная задача и определение сходимости

На основе проведенных выше обсуждений мы можем теперь сказать, что, вообще говоря, проведение конечно-элементного анализа требует идеализации истинной физической задачи путем построения математической модели и последующего конечно-элементного решения на основе этой модели (см. раздел 1.2).

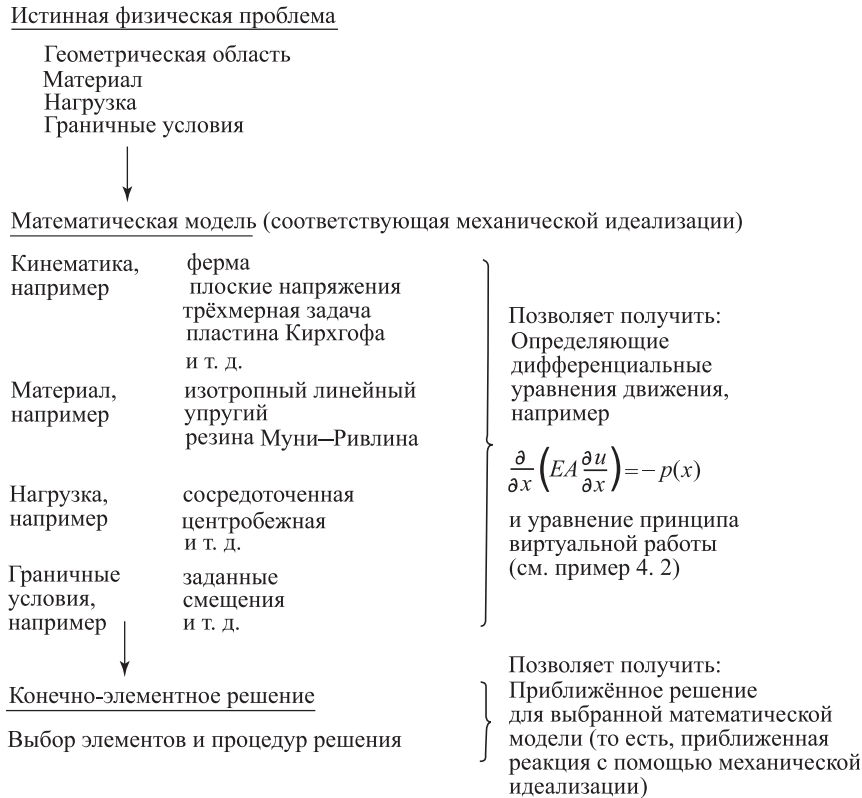


Рис. 4.25. Процесс решения с помощью метода конечных элементов

Сводка соответствующих понятий дается на рис. 4.25. Указанные на рисунке различия нередко не учитываются при практическом анализе вследствие того, что дифференциальные уравнения движения для математической модели попросту не рассматриваются, а фактически, при анализе достаточно сложной задачи эти уравнения могут быть неизвестны; так обстоит дело, например, в случае определения реакции трехмерной оболочки. При проведении практического анализа конечно-элементная идеализация физической задачи устанавливается прямым путем. Однако чтобы исследовать сходимость конечно-элементного решения по мере увеличения числа элементов, было бы ценно признать, что математическая модель фактически уже подсказана формой конечно-элементного представления физической задачи. Иначе говоря, надлежаще проведенное конечно-элементное решение должно было бы сходиться (по мере увеличения числа элементов) к аналитическому (точному) решению тех дифференциальных уравнений, которые определяют собой реакцию математической модели. Более того, характер сходимости выявляет все характерные свойства конечно-элементной схемы, так как дифференциальные уравнения

движения для математической модели весьма точным и компактным образом отражают все те важнейшие условия, которым должны удовлетворять соответствующие переменные (напряжение, смещение, деформация, и т. д.). Если дифференциальные уравнения движения неизвестны, как это имеет место при анализе сложных оболочек и/или аналитические решения не могут быть получены, то сходимость конечно-элементных решений может выявляться на том основании, что все важнейшие кинематические, статические и основополагающие условия, содержащиеся в данной математической модели, должны в конечном итоге (по достижении сходимости) удовлетворяться. Таким образом, при всех обсуждениях вопросов сходимости конечно-элементных решений можно утверждать, что подразумевается сходимость к точному решению для математической модели.

На этой стадии обзора важно признать, что при линейном анализе задач теории упругости существует единственное точное решение для математической модели. Следовательно, если у нас имеется *некоторое* решение, точно удовлетворяющее определяющим математическим уравнениям, то это и есть *конкретное* точное решение данной задачи (см. раздел 4.3.4).

Таблица 4.4. Ошибки, возникающие при решении с помощью метода конечных элементов

Ошибка	Ошибка может возникать при	См. раздел
Дискретизация	При применении конечно-элементных интерполяций для переменных, связанных с геометрией и решением	4.2.1, 4.2.3, 5.3
Численное интегрирование в пространстве	При оценке конечно-элементных матриц, используемых при численном интегрировании	5.5, 6.8.4
Оценка основополагающих соотношений	При использовании нелинейных материальных моделей	6.6.3, 6.6.4
Решение уравнений динамического равновесия	При прямом интегрировании по времени, при суперпозиции мод	9.2–9.4
Решение конечно-разностных уравнений с помощью итераций	При применении методов Гаусса–Зайделя, сопряженного градиента, Ньютона–Рафсона, квазиньютоновских методов, решений с собственными функциями	8.3, 8.4, 9.5, 10.4
Округления	При составлении уравнений и их решении	8.2.6

При рассмотрении приближенного конечно-элементного решения для определения точной реакции математической модели необходимо признать, что существуют различные источники ошибок, влияющих на результаты этого решения. В табл. 4.4 дается общий обзор различных источников ошибок. Ошибки округления являются результатом ограниченной точности арифметических действий используемого компьютера; ошибки решения, связанные с основополагающим моделированием, обусловлены линеаризацией и интегрированием основополагающих соотношений; ошибки решения, связанные с расчетом динамической реакции, возникают при численном интегрировании уравнений движения или в силу того, что при анализе с суперпозицией мод используется лишь несколько таких мод; кроме того, ошибки решения возникают при построении итеративного процесса, так как сходимость замеряется по появлению добавок к решению, малых, но не равных нулю. В этом разделе мы обсудим только ошибки, обусловленные конечно-элементной дискрети-

зацией и связанные с необходимостью интерполяции переменных решения. Таким образом, по существу, в этом разделе мы рассматриваем некую модельную задачу, при решении которой не возникают другие, упомянутые выше ошибки: это — линейная статическая задача теории упругости, геометрия которой позволяет провести точный расчет элементных матриц и осуществить решение уравнений, т. е. позволяет также получить пренебрежимо малые ошибки округления. Для большей простоты представления мы предполагаем, что заданные значения смещений равны нулю. Ненулевые граничные условия для смещений могли бы ставиться так, как это обсуждается в разделе 4.2.2, и такого рода граничные условия не изменяют свойств конечно-элементного решения.

Применительно к данной модельной задаче и помня о целях нашего обсуждения, сформулируем еще раз основное уравнение принципа виртуальной работы, определяющее собой точное решение для принятой математической модели:

$$\int_V \bar{\epsilon}^T \tau dV = \int_{S_f} \bar{\mathbf{u}}^{S_f^T} \mathbf{f}^{S_f} dS + \int_V \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{f}^B dV. \quad (4.62)$$

Напомним, что если мы желаем, чтобы τ было точным решением для данной математической модели, то уравнение (4.62) должно оставаться справедливым при произвольных виртуальных смещениях $\bar{\mathbf{u}}$ (и соответствующих им виртуальных деформациях $\bar{\epsilon}$), при $\bar{\mathbf{u}}$, равном нулю для заданных смещений и в соответствии с ними. Краткая словесная формулировка уравнения (4.62) гласит

$$\text{Найти смещения } \mathbf{u} \text{ (и соответствующие им напряжения } \tau), \text{ такие, чтобы } a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \text{для всех допустимых } \mathbf{v} \quad (4.63)$$

Здесь $a(\cdot, \cdot)$ представляет собой билинейную форму, а (\mathbf{f}, \cdot) есть линейная форма¹⁾ — эти формы зависят от рассматриваемой математической модели, — \mathbf{u} представляет собой точное решение для смещений, \mathbf{v} — это любое допустимое виртуальное смещение («допустимое», так как функции \mathbf{v} должны быть непрерывными и обращаться в нуль для и в соответствии с фактически заданными смещениями (см. (4.7))), а \mathbf{f} представляет вынуждающие функции (нагрузки \mathbf{f}^S и \mathbf{f}^B). Заметим, что обозначение, используемое в (4.63), подразумевает некий процесс интегрирования. Те билинейные формы $a(\cdot, \cdot)$, которые рассматриваются в данном разделе, являются симметричными в том смысле, что $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{v}, \mathbf{u})$.

Из формулировки (4.63) следует, что энергия деформаций, соответствующая точному решению \mathbf{u} , равна $1/2 a(\mathbf{u}, \mathbf{u})$. Мы предполагаем, что материальные свойства и граничные условия, соответствующие нашей модельной задаче, таковы, что эта энергия деформаций остается конечной. На практике это ограничение не является серьезным, однако оно требует надлежащего выбора математической модели. В частности, материальные свойства должны быть реалистичными с точки зрения физики, а распределения нагрузки (приложенной извне или связанной с ограничениями на смещения) должны быть достаточно гладкими. В разделе 1.2 мы уже обсуждали необходимость надлежащего моделирования приложенных нагрузок, и будем давать дальнейшие комментарии по этому вопросу в разделе 4.3.4.

Предположим, что функция \mathbf{u}_h представляет собой конечно-элементное решение. Разумеется, это решение располагается в конечно-элементном пространстве, заданном интерполяционными функциями смещений (здесь символом h обозначается размер порождающего элемента и, следовательно, размер соответствующей сетки). После этого мы определяем

¹⁾ Билинейность соответствует тому факту, что при любых постоянных γ_1 и γ_2 имеем

$$a(\gamma_1 \mathbf{u}_1 + \gamma_2 \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = \gamma_1 a(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + \gamma_2 a(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}),$$

$$a(\mathbf{u}, \gamma_1 \mathbf{v}_1 + \gamma_2 \mathbf{v}_2) = \gamma_1 a(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) + \gamma_2 a(\mathbf{u}, \mathbf{v}_2),$$

а линейность (\mathbf{f}, \cdot) означает, аналогично этому, что

$$(\mathbf{f}, \gamma_1 \mathbf{v}_1 + \gamma_2 \mathbf{v}_2) = \gamma_1 (\mathbf{f}, \mathbf{v}_1) + \gamma_2 (\mathbf{f}, \mathbf{v}_2).$$

«сходимость» как свойство, означающее, что

$$a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0 \quad (4.64)$$

или, эквивалентно этому, что

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) \rightarrow a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Это утверждение означает, физически, что энергия деформаций, рассчитанная согласно конечно-элементному решению, сходится к точному значению энергии деформаций для математической модели по мере того, как измельчается конечно-элементная сетка. Желая показать, что мы подразумеваем под термином «билинейная форма» $a(\cdot, \cdot)$, рассмотрим некий простой пример.

Пример 4.22: Предположим, что требуется исследовать поведение просто опертой, предварительно напряженной мембраны, подвергающейся в результате предварительного напряжения постоянному натяжению T ; на мембрану действует также поперечная нагрузка p (см. рис. 4.26). Для этой задачи нужно сформулировать принцип виртуальной работы в форме соотношения (4.63).

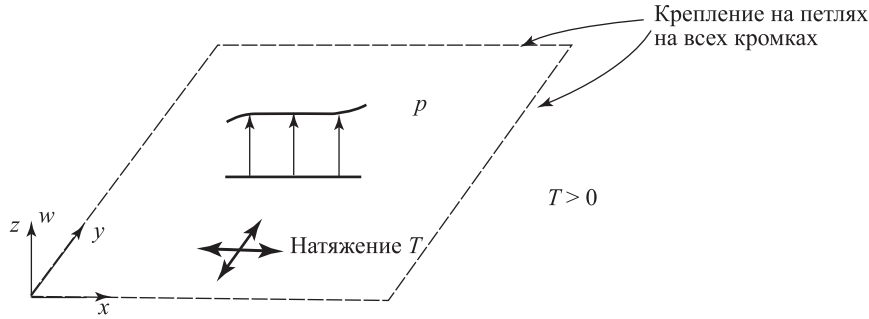


Рис. 4.26. Предварительно напряженная мембрана

В применении к поставленной задаче принцип виртуальной работы дает соотношение

$$\int_A \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \end{bmatrix}^T T \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} dx dy = \int_A p \bar{w} dx dy,$$

где $w(x, y)$ представляет собой поперечное смещение. Левая часть приведенного выше уравнения представляет собой билинейную форму $a(v, u)$ при $v = \bar{w}$, $u = w$, а интегрирование в правой части дает (f, v) .

В зависимости от частного вида (надлежащим образом сформулированных) конечных элементов, базирующихся на смещениях и используемых при анализе поставленной выше модельной задачи, мы можем получить либо монотонную, либо немонотонную сходимость к точному решению по мере увеличения числа конечных элементов. При проводимом далее обсуждении мы рассматриваем критерии для монотонной сходимости решений. Условия конечно-элементного анализа, приводящие к немонотонной сходимости, обсуждаются в разделе 4.4.

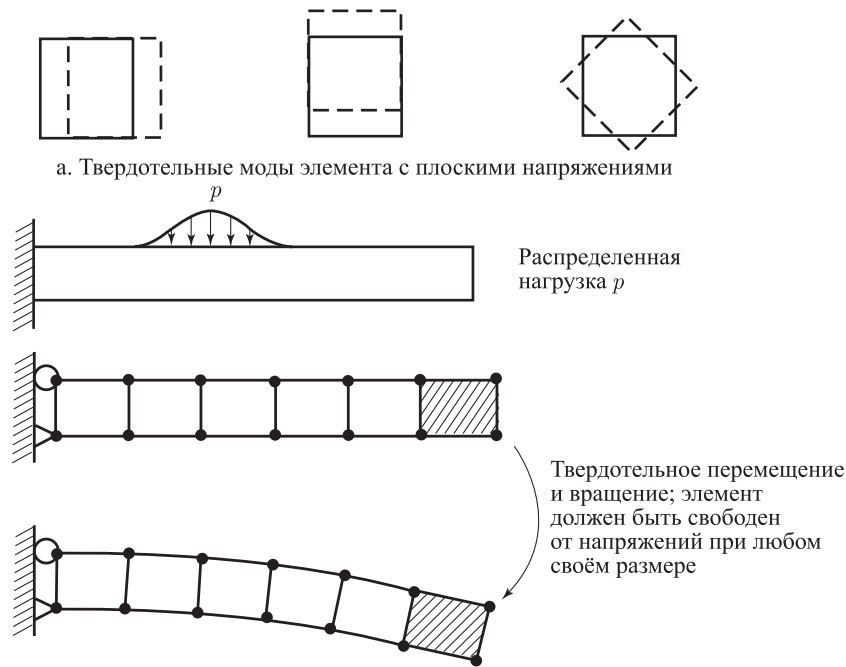
4.3.2. Критерии монотонной сходимости

Для того, чтобы сходимость была монотонной, элементы должны обладать свойством полноты и должны быть совместимы с сеткой. Если эти условия выполняются, то точность результатов решения будет непрерывно возрастать по мере измельчения конечно-элементной сетки. Это измельчение сетки должно осуществляться путем разбиения использованного ранее элемента на два или на большее число новых элементов; таким образом, новая сетка будет как бы «вставляться» в старую сетку. Математически

это означает, что новое пространство конечно-элементных интерполяционных функций будет содержать в себе ранее использовавшееся пространство и, по мере того, как сетка измельчается, размер пространства конечно-элементного решения будет непрерывно возрастать, чтобы в конечном итоге включить в себя точное решение.

Требование, касающееся свойства полноты элемента, означает, что функции смещения данного элемента должны быть способны представлять *смещения твердого тела и состояния постоянной деформации*.

Смещения твердого тела — это те моды смещения, которые данный элемент должен быть способен реализовать как твердое тело, без того, чтобы нем развивались какие-то напряжения. В качестве примера, — двумерный элемент с плоскими напряжениями должен быть способен двигаться поступательно и равномерно в любом направлении своей плоскости, а также вращаться, не испытывая деформаций. Причина того, что такой элемент должен быть способен совершать указанные перемещения без деформаций, иллюстрируется в процессе исследования поведения консоли, показанной на рис. 4.27: элемент, находящийся на конце бруса — при любом размере этого элемента — должен перемещаться поступательно и вращаться без возникновения напряжений, так как в силу простых законов статики консоль не подвергается напряжениям в точках, расположенных за точкой приложения нагрузки.



б. Анализ для иллюстрации условия о твердотельной моде

Рис. 4.27. Использование элемента с плоскими напряжениями при анализе консоли

Число тех твердотельных мод, которые элемент должен быть способен перенести, может без труда быть определено путем наблюдения, однако было бы поучительным заметить, что число твердотельных мод элемента равно числу степеней его свободы за вычетом числа мод деформаций этого элемента (или естественных мод). Например, ферма с двумя узлами имеет одну моду деформаций (состояние постоянной деформации) и, следовательно, одну, три или пять твердотельных мод при одномерных, двумерных или трехмерных условиях, соответственно. Для более сложных конечных элементов индивидуальные моды деформаций и твердотельные моды эффективно выявляются путем

представления матрицы жесткости в базисе собственных векторов. Так, при решении задачи на собственные значения

$$\mathbf{K}\phi = \lambda\phi \quad (4.65)$$

мы имеем (см. раздел 2.5)

$$\mathbf{K}\Phi = \Phi\Lambda, \quad (4.66)$$

где Φ — матрица, содержащая собственные векторы $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, а Λ — диагональная матрица, содержащая соответствующие собственные значения, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$. Таким образом, пользуясь свойством ортонормальности собственных векторов, мы имеем

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Lambda. \quad (4.67)$$

Матрицу Λ можно рассматривать, как матрицу жесткости элемента, соответствующую модам смещений, определяемым собственными векторами. Коэффициенты жесткости $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ непосредственно указывают на то, насколько жестким является элемент в соответствующей моде смещений. Таким образом, преобразование согласно формуле (4.67) дает совершенно ясное представление о том, имеются ли здесь твердотельные моды и какие есть добавочные моды деформаций ¹⁾. В качестве примера на рис. 4.28 показаны восемь собственных векторов и соответствующие им собственные значения для элемента с четырьмя узлами.

Необходимость наличия постоянных состояний деформации может быть осознана физически, если мы поймем, что при представлении данной конструкции в виде комплекса этот комплекс будет содержать все большее и большее число элементов. Тогда в пределе, когда размер каждого элемента станет очень малым, деформация этого элемента будет приближаться к некоторому постоянному значению и появится возможность аппроксимировать любой усложненный вариант деформаций внутри рассматриваемой конструкции. В качестве примера, — элемент с плоскими напряжениями, изображенный на рис. 4.27, должен быть способен представлять два варианта условий с постоянным нормальным напряжением и одно условие с постоянным касательным напряжением. Как видно из рис. 4.28, данный элемент может представлять эти условия постоянного напряжения и, кроме того, включает в себя две моды изгибной деформации.

Твердотельные моды и состояния постоянной деформации, которые могут быть представлены неким элементом, поддаются непосредственной идентификации путем исследования матрицы деформация–смещение для данного элемента (см. пример 4.23).

Требование совместности означает, что смещения внутри элементов и при пересечении границ элементов должны быть непрерывными. Физически свойство совместности означает, что при приложении нагрузки к данному комплексу никакие зазоры между элементами не возникают. Если на узлах рассматриваемого элемента определены только поступательные степени свободы, то необходимо лишь поддерживать непрерывность смещений u , v или w , — именно тех, которые применимы в данных условиях. Однако если в узлах элемента определены также и вращательные степени свободы, получаемые путем дифференцирования поперечного сечения (как это было при формулировке для элемента в форме изгибающейся пластины из примера 4.18), то непрерывность для элементов следует удовлетворять и для соответствующих первых производных смещений. Это следует из кинематического допущения в отношении смещений по всей глубине вышеупомянутого элемента; иначе говоря, непрерывность поведения смещения w и производных $\partial w/\partial x$ и/или $\partial w/\partial y$ вдоль соответствующих кромок элемента обеспечивает непрерывность смещений по толщине соседних элементов.

Совместность автоматически обеспечивается для ферменных и балочных элементов, так как они соединяются только в узловых точках, и, кроме того, совместность сравнительно легко поддерживать и в процессе исследований с двумерными плоскими деформациями, с плоскими напряжениями, при анализе осесимметричных систем и при

¹⁾ Отметим попутно — в силу того, обсуждавшегося в разделе 4.3.4 обстоятельства, что конечно-элементный анализ дает завышенную оценку жесткости, то чем «меньше» будут собственные значения, тем более эффективным будет данный элемент.

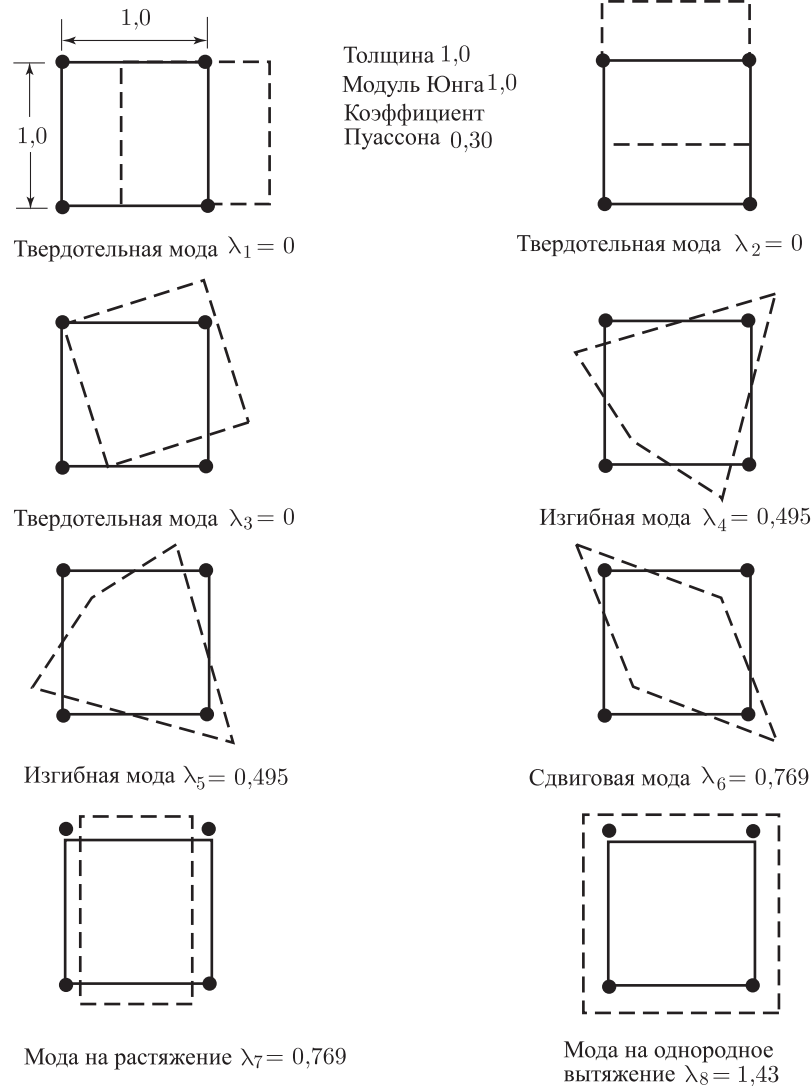


Рис. 4.28. Собственные значения и собственные векторы для элемента с плоскими напряжениями, имеющего четыре узла

трехмерном анализе тогда, когда только степени свободы u , v и w используются как переменные для узловых точек. Однако требованиям совместности трудно удовлетворить при исследовании изгибающихся пластин и, в частности, при анализе тонких оболочек, если вращения реализуются за счет дифференцирования поперечных смещений. По этой причине много внимания было уделено разработке таких элементов типа пластин и оболочек, для которых смещения и вращения представляют собой переменные (см. раздел 5.4). Имея дело с такими элементами, требованиям совместности так же легко удовлетворить, как и в случае учета только поступательных степеней свободы.

Является ли некий конкретный элемент полным и совместным, зависит от используемой для него формулировки, и каждая такая формулировка должна анализироваться индивидуально. Рассмотрим приводимые ниже простые примеры.

Пример 4.23: Требуется исследовать, является ли элемент с плоскими напряжениями, рассматривавшийся в примере 4.6, совместимым и полным.

Для смещений в элементе имеем выражения

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy,$$

$$v(x, y) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 xy.$$

Если заметить, что смещения внутри элемента являются непрерывными, то, желая показать, что данный элемент является совместимым, необходимо лишь исследовать, сохраняется ли межэлементная непрерывность и тогда, когда комплекс элементов испытывает нагрузку. Рассмотрим два элемента, связанных между собой в двух узловых точках (рис. 4.29), в которых мы задаем два произвольных смещения. Из допущений относительно смещений следует, что точки (т.е. материальные частицы) на кромках соседнего элемента смещаются линейным образом и, следовательно, непрерывность при переходе от одного элемента к другому сохраняется. Отсюда следует, что этот элемент является совместимым.

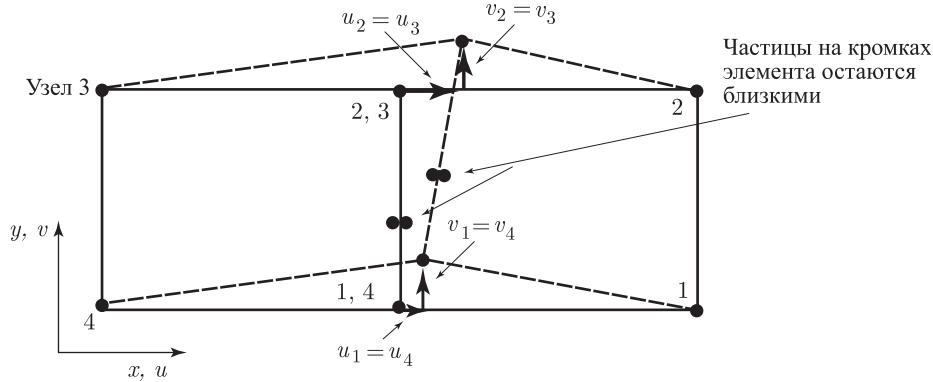


Рис. 4.29. Совместимость элемента с плоскими напряжениями

Что касается полноты, то функции смещения показывают, что твердотельное поступательное движение в направлении x реализуется только тогда, когда параметр α_1 отличен от нуля. Аналогично этому, твердотельное смещение в направлении y может задаваться, если только положить β_1 отличным от нуля, а для реализации твердотельного вращения должны быть отличны от нуля α_3 и β_2 , но только при условии $\beta_2 = -\alpha_3$. К тому же выводу можно прийти, если использовать матрицу \mathbf{E} , связывающую деформации с обобщенными координатами (см. пример 4.6). Кроме того, эта матрица показывает, что состояния постоянной деформации являются возможными. Следовательно, данный элемент является полным.

4.3.3. Монотонно сходящееся конечно-элементное решение: решение Ритца

Как мы уже отмечали ранее, применение принципа виртуальной работы есть то же самое, что и применение условия постоянства полного потенциала системы (см. пример 4.4). Если вспомнить также обсуждение метода Ритца, проведенное в разделе 3.3.3, то можно прийти к выводу о том, что монотонно сходящиеся конечно-элементные решения, построенные на основе смещений, являются, фактически, лишь приложениями указанного метода. При проведении конечно-элементного анализа функции Ритца содержатся в интерполяционных матрицах для смещений $\mathbf{H}^{(m)}$, $m = 1, 2, \dots$, тогда как параметры Ритца — это неизвестные смещения в узловых точках, содержащиеся в матрице \mathbf{U} . Как мы будем подробнее говорить об этом ниже, те математические условия, которые налагаются на интерполяционные функции для смещений с той целью, чтобы конечно-элементное решение соответствовало анализу Ритца, оказываются именно теми, которые

мы идентифицировали ранее, пользуясь физическими доводами. Соответствие между указанными методами анализа иллюстрируется в примерах 3.22 и 4.5.

Если рассматривается метод анализа по Ритцу с конечно-элементными интерполяциями, то мы будем иметь

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \mathbf{R}, \quad (4.68)$$

где Π — полный потенциал системы. Обращаясь к условию постоянства Π по отношению к содержащимся в матрице \mathbf{U} параметрам Ритца U_i и учитывая, что матрица \mathbf{K} является симметричной, мы получим

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{R}. \quad (4.69)$$

Решение уравнений (4.69) позволяет определить параметры Ритца, после чего решение, касающееся смещений в рассматриваемой области, имеет вид

$$\mathbf{u}^{(m)} = \mathbf{H}^{(m)} \mathbf{U}; \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.70)$$

Соотношения (4.68)–(4.70) соответствуют анализу по Ритцу, если только используемые здесь функции удовлетворяют определенным условиям. В разделе 3.3.2 мы дали определение вариационной задачи C^{m-1} как такой задачи, в которой ее вариационный показатель содержит производные порядка m и ниже. После этого мы отметили, что для достижения сходимости функции Ритца должны удовлетворять существенным (или геометрическим) граничным условиям данной задачи, включающим в себя производные вплоть до $(m-1)$ -го порядка, однако в то же время эти функции не должны удовлетворять естественным (или силовым) граничным условиям, включающим производные порядков от m до $(2m-1)$, так как эти условия неявно содержатся в вариационном показателе Π . Поэтому для того, чтобы конечно-элементное решение представляло собой анализ по Ритцу, существенные граничные условия должны полностью удовлетворяться конечно-элементными смещениями в узловых точках и соответствующими интерполяциями между этими точками. Однако при выборе конечно-элементных функций для смещений нет необходимости уделять особое внимание естественным граничным условиям, так как эти условия уже наложены вектором нагрузки и приближенно удовлетворяются решением Ритца. Точность, с которой удовлетворяются естественные, или силовые граничные условия, зависит от конкретного вида используемых здесь функций Ритца, однако эта точность всегда может быть повышена путем использования большего числа функций, т. е. большего числа конечных элементов, в процессе моделирования рассматриваемой задачи.

При классическом анализе по Ритцу функции Ритца действуют во всей рассматриваемой области, тогда как при конечно-элементном анализе зона действия индивидуальных функций Ритца распространяется только на подобласти (конечные элементы) области в целом. Следовательно, должен возникнуть вопрос о том, каким именно условиям должны удовлетворять конечно-элементные интерполяции в связи с требованиями непрерывности на промежутках *между* прилегающими друг к другу подобластями. Чтобы сформулировать ответ на этот вопрос, рассмотрим те процессы интегрирования, которые должны быть реализованы для вычисления матрицы коэффициентов \mathbf{K} . Мы отдаем себе отчет в том, что при рассмотрении задачи C^{m-1} нам потребуется непрерывность производных пробных функций Ритца, имеющих, как минимум, $(m-1)$ -й порядок, чтобы иметь возможность провести операции интегрирования при пересечении границ элементов. Однако это требование непрерывности полностью соответствует тем условиям совместности элементов, которые мы обсуждали в разделе 4.3.2. Например, при исследовании полноценных трехмерных задач непрерывными должны быть только смещения между элементами, тогда как при анализе задач о пластинах, сформулированных на основе теории Кирхгофа для пластин, нам потребуется также и непрерывность первых производных, описывающих смещения функций.

Поэтому, если суммировать сделанные выводы, то для задачи C^{m-1} ($C^{m-1} \equiv$ непрерывность пробных функций и их производных вплоть до $(m-1)$ -го порядка) в классическом анализе по Ритцу пробные функции выбираются так, чтобы точно выполнялись все граничные условия, содержащие производные вплоть до $(m-1)$ -го порядка. То же самое остается справедливым и при конечно-элементном анализе, однако в дополнение

к этому непрерывность самих пробных функций и их производных вплоть до $(m - 1)$ -го порядка должна соблюдаться и на границах между элементами; только при выполнении этого требования конечно-элементное решение будет соответствовать результатам анализа по Ритцу.

Несмотря на то, что классическая процедура анализа по Ритцу и базирующийся на изучении смещений метод конечных элементов являются, теоретически, идентичными, все же на практике метод конечных элементов обладает важным преимуществом перед стандартным анализом по Ритцу. Один из недостатков анализа по Ритцу состоит в том, что функции Ритца определяются во всей рассматриваемой области. Например, при анализе поведения консоли в примере 3.24 функции Ритца охватывали интервал от $x = 0$ до $x = L$. Поэтому при стандартном анализе Ритца матрица \mathbf{K} является полной матрицей и, как указывается в разделе 8.2.3, если используется много функций, то объем численных операций, требуемый для решения соответствующих алгебраических уравнений, оказывается весьма значительным.

Особая трудность, возникающая при стандартном анализе по Ритцу, связана с выбором надлежащих функций Ритца, поскольку решение представляет собой линейную комбинацию этих функций. Если требуется получить достаточно точное решение, то при больших градиентах смещения или напряжения может понадобиться ввести много функций. Однако, опять-таки, эти функции без всякой необходимости простираются на те области, в которых смещения и напряжения изменяются довольно медленно и где не требуется вводить много функций.

Еще одна трудность возникает при стандартном анализе по Ритцу тогда, когда вся интересующая нас область состоит из подобластей с разнообразными видами распределения деформаций. В качестве примера рассмотрим пластину, опирающуюся на своих краях на бруссы и столбики. В таком случае функции Ритца, используемые для одной области (например, для пластины), не годятся для других областей (например, для бруссов и столбиков у кромок), и необходимо вводить специальные условия непрерывности смещений или же какие-то граничные соотношения.

Те несколько доводов, которые уже приведены нами, свидетельствуют о том, что стандартный анализ по Ритцу является, вообще говоря, не очень подходящим для реализации на компьютере, если не считать некоторых случаев, связанных с разработкой специальных программ. С другой стороны, метод конечных элементов в значительной степени смягчил практические трудности, сохранив в то же время положительные качества стандартного метода Ритца. Если говорить об упомянутых выше затруднениях, то при выборе функций Ритца в компьютерной программе можно использовать некую адекватную библиотеку элементов. Возможность использования сравнительно большого числа функций в областях с высокими градиентами смещения и напряжения реализуется посредством введения многих элементов, а учет сочетания областей с различного рода распределениями деформаций осуществляется путем выбора различного рода элементов при идеализации областей. Именно эта универсальность метода конечных элементов вместе с его добротным математическим обоснованием сделали этот метод чрезвычайно широко используемым средством анализа в современном инженерном сообществе.

4.3.4. Свойства конечно-элементных решений

Рассмотрим общую линейную задачу теории упругости и ее конечно-элементное решение, выявляя при этом некоторые свойства, знание которых полезно для понимания метода конечных элементов. Мы будем использовать обозначения, сводка которых дается в таблице 4.5.

Задачу теории упругости можно письменно сформулировать следующим образом (см., например, [Strang, Fix 1973], или [Ciarlet 1978], или [Brezzi, Fortin 1991]):

$$\text{Найти } \mathbf{u} \in V \text{ такое, что } a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (4.71)$$

где пространство V определяется как

$$V = \left\{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in L^2(\text{Vol}); \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\text{Vol}), i, j = 1, 2, 3; v_i|_{S_u} = 0, i = 1, 2, 3 \right\}. \quad (4.72)$$

Таблица 4.5. Обозначения, используемые при обсуждении свойств конечно-элементных решений и их сходимости

Символ	Значение
$a(\cdot, \cdot)$	Билинейная форма, соответствующая модели для рассматриваемой задачи (см. пример 4.22)
\mathbf{f}	Вектор нагрузки
\mathbf{u}	Точное решения для смещений согласно выбранной математической модели; элемент в пространстве V
\mathbf{v}	Смещения; элемент в пространстве V_h
\mathbf{u}_h	Конечно-элементное решение; элемент в пространстве V_h
\mathbf{v}_h	Конечно-элементные смещения; элемент в пространстве V_h
\forall	Для всех
\in	Элемент чего-то
V, V_h	Пространства функций (см. (4.72) и (4.84))
Vol	Объем рассматриваемого тела
L^2	Пространство квадратично интегрируемых функций (см. (4.73))
\mathbf{e}_h	Ошибка конечно-элементного решения в сравнении с точным, $\mathbf{e}_h = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$
\exists	Имеется
\subset	Содержится в
\subsetneq	Содержится в, но не равно
$\ \cdot\ _E$	Энергетическая норма (см. (4.74))
\inf	Нижняя грань
\sup	Верхняя грань

Здесь символ $L^2(\text{Vol})$ определяет собой пространство квадратично интегрируемых функций в объеме «Vol» рассматриваемого тела, т. е.

$$L^2(\text{Vol}) = \left\{ \mathbf{w} \mid \mathbf{w} \text{ определяется в Vol и } \int_{\text{Vol}} \left(\sum_{i=1}^3 (w_i)^2 \right) d\text{Vol} = \|\mathbf{w}\|_{L^2(\text{Vol})}^2 < +\infty \right\} \quad (4.73)$$

Как следует из изложенного, формула (4.72) определяет пространство функций, соответствующих общему трехмерному анализу. В этом пространстве функции обращаются в нуль на границе S_u , тогда как квадраты этих функций и их первых производных являются интегрируемыми. В соответствии с выражением для V используем энергетическую норму

$$\|\mathbf{v}\|_E^2 = a(\mathbf{v}, \mathbf{v}), \quad (4.74)$$

которая фактически соответствует удвоенной энергии деформаций, запасаемой в теле, когда это тело находится в поле смещений \mathbf{v} .

Как предполагается при нашем обсуждении, конструкция, соответствующая формулировке (4.71), является должным образом опертой, что соответствует нулевым условиям для смещений на S_u , так что величина $\|\mathbf{v}\|_E^2$ оказывается больше нуля при любом \mathbf{v} , отличном от нуля.

В дополнение к этому, мы используем также нормы Соболева порядков $m = 0$ и $m = 1$, определяемые как

$m = 0$:

$$(\|\mathbf{v}\|_0)^2 = \int_{\text{Vol}} \left(\sum_{i=1}^3 (v_i)^2 \right) d\text{Vol} \quad (4.75)$$

$m = 1$:

$$(\|\mathbf{v}\|_1)^2 = (\|\mathbf{v}\|_0)^2 + \int_{\text{Vol}} \left[\sum_{i=1, j=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 \right] d\text{Vol} \quad (4.76)$$

При решении нашей задачи теории упругости используется норма порядка единицы¹⁾, и мы имеем два нижеследующих важных свойства для нашей билинейной формы A .

Непрерывность:

$$\exists M > 0 \text{ так что } \forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V, \quad |a(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)| \leq M \|\mathbf{v}_1\|_1 \|\mathbf{v}_2\|_1, \quad (4.77)$$

Эллиптичность:

$$\exists \alpha > 0 \text{ так что } \forall \mathbf{v} \in V, \quad a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \alpha \|\mathbf{v}\|_1^2, \quad (4.78)$$

где постоянные α и M зависят от фактически рассматриваемой нами задачи теории упругости, включая используемые материальные константы, однако не зависят от \mathbf{v} .

Условие непрерывности выполняется, так как в (4.77) используются разумные нормы, а условие эллиптичности выполняется в силу того, что нами рассматривается надлежащим образом опертая (т. е. устойчивая) конструкция (математическое доказательство см. в книге [Ciarlet 1978]). Основываясь на этих свойствах, мы имеем

$$c_1 \|\mathbf{v}\|_1 \leq (a(\mathbf{v}, \mathbf{v}))^{1/2} \leq c_2 \|\mathbf{v}\|_1, \quad (4.79)$$

где c_1 и c_2 — это постоянные, не зависящие от \mathbf{v} , и, следовательно, мы приходим к выводу о том, что норма энергии эквивалентна 1-норме (см. раздел 2.7). В математическом анализе нормы Соболева обычно используются для оценки скорости сходимости (см. раздел 4.3.5), однако на практике энергетическая норма зачастую вычисляется гораздо проще (см. (4.97)). При учете (4.79) мы можем сказать, что для определения сходимости вместо условия (4.64) можно проверять выполнение условия

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0,$$

и при решении задач энергетическая норма будет сходиться с таким же порядком, как и 1-норма. Рассматривая приводимый ниже пример, мы исследуем непрерывность и эллиптичность билинейной формы A .

¹⁾ В процессе нашего обсуждения мы будем использовать также неравенство Пуанкаре–Фридрихса, гласящее, что при анализе рассматриваемой нами задачи мы для любого \mathbf{v} имеем

$$\int_{\text{Vol}} \left(\sum_{i=1}^2 (v_i)^2 \right) d\text{Vol} \leq c \int_{\text{Vol}} \left(\sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 \right) d\text{Vol},$$

где c есть постоянная величина (см., например, [Ciarlet 1978]).

Пример 4.24: Рассмотрим задачу, сформулированную в примере 4.22. Требуется показать, что билинейная форма A удовлетворяет условиям непрерывности и эллиптичности.

Непрерывность следует из того, что ¹⁾

$$\begin{aligned} a(w_1, w_2) &= \int_A T \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) dx dy \leq \\ &\leq \int_A T \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} \left[\left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} dx dy \leq \\ &\leq \left\{ \int_A T \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \right\}^{1/2} \times \\ &\quad \times \left\{ \int_A T \left[\left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \right\}^{1/2} \leq c \|w_1\|_1 \|w_2\|_1. \end{aligned}$$

Эллиптичность требует выполнения неравенства

$$\begin{aligned} a(w, w) &= \int_A T \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \geq \\ &\geq \alpha \int_A \left[w^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \alpha \|w\|_1^2. \quad (a) \end{aligned}$$

Однако неравенство Пуанкаре–Фридрихса

$$\int_A w^2 dx dy \leq c \int_A \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy,$$

где c — некоторая постоянная, обеспечивает выполнение неравенства (а).

Сделанные выше утверждения, касающиеся задачи теории упругости, охватывают один важный пункт, уже упоминавшийся ранее: точное решение задачи должно соответствовать конечной энергии деформаций, — см. условия (4.64) и (4.79). В силу этого, например, — строго говоря — мы не делаем попыток строить решения общих двумерных или трехмерных задач теории упругости при математической идеализации сосредоточенных нагрузок (решение для сосредоточенной нагрузки, приложенной к полупространству, можно найти, например, в книге [Timo+shenko, Goodier 1970]). Вместо этого при рассмотрении задач теории упругости мы представляем нагрузки в форме, близкой к тому, что имеет место в действительности, а именно — как плавно распределенные нагрузки, которые, однако, могут быть весьма большими и действовать на очень малых площадях. Тогда решение для вариационной формулировки, соответствующей (4.71), будет тем же самым, что и решение для дифференциальной формулировки. Разумеется, при нашем конечно-элементном анализе, если сами конечные элементы значительно больше, чем площадь приложения нагрузки, то мы можем заменить распределенную по площади нагрузку на некую эквивалентную точечную нагрузку, стремясь при этом просто повысить эффективность решения; см. раздел 1.2 и пример, данный на рис. 1.4.

Весьма важное наблюдение состоит в том, что точное решение нашей задачи теории упругости является единственным. А именно, предположим, что \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_2 являются двумя различными решениями; если так, то мы имели бы

$$a(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (4.80)$$

¹⁾ Здесь используется неравенство Шварца, гласящее, что для векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} имеем $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\|_2 \|\mathbf{b}\|_2$, где символу $\|\cdot\|_2$ дается определение согласно (2.148).

и

$$a(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (4.81)$$

Производя вычитание, получим

$$a(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (4.82)$$

и, полагая $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, мы имеем $(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = 0$. Используя (4.79) при $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, получим $\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_1 = 0$, а это означает, что $\mathbf{u}_1 \equiv \mathbf{u}_2$ и, следовательно, мы доказали, что наше предположение о наличии двух различных решений является несостоятельным.

Пусть теперь V_h будет пространством конечно-элементных функций смещения (которые соответствуют интерполяциям, содержащимся во всех интерполяционных матрицах смещений для элементов $\mathbf{H}^{(m)}$) и пусть \mathbf{v}_h будет любым элементом в этом пространстве (т. е. любым распределением смещений, которое могло бы быть получено путем соответствующих интерполяций). Пусть \mathbf{u}_h будет конечно-элементным решением; следовательно, \mathbf{u}_h является также элементом в пространстве V_h , и притом именно тем конкретным элементом, который мы ищем. Тогда конечно-элементное решение задачи, поставленной в соответствии с (4.71), может быть выписано в форме

$$\text{Найти } \mathbf{u}_h \in V_h \text{ такое, что } a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h. \quad (4.83)$$

Пространство V_h определяется как

$$V_h = \left\{ \mathbf{v}_h \mid \mathbf{v}_h \in L^2(\text{Vol}); \frac{\partial(v_h)_i}{\partial x_j} \in L^2(\text{Vol}), \right. \\ \left. i, j = 1, 2, 3; (v_h)_i|_{S_u} = 0, i = 1, 2, 3 \right\} \quad (4.84)$$

и для элементов этого пространства мы используем энергетическую норму (4.74) и норму Соболева (4.76). Разумеется, $V_h \subset V$.

Соотношение, содержащееся в (4.83), представляет собой принцип виртуальной работы для конечно-элементной дискретизации, соответствующей V_h . При таком пространстве решений условия непрерывности и эллиптичности, (4.77) и (4.78), выполняются, если использовать $\mathbf{v} \in V_h$, и для любого V_h получается положительно определенная матрица жесткости.

Следует отметить, что V_h соответствует заданной сетке, причем символ h обозначает характерный размер элемента, и что при обсуждении вопроса о сходимости мы, несомненно, рассматриваем последовательность пространств V_h (т. е. последовательность сеток с уменьшающимся размером h). На рис. 4.30 мы показываем элементы пространства V_h для того варианта дискретизации, который применялся в примере 4.6.

При рассмотрении конечно-элементного решения \mathbf{u}_h и точного решения задачи \mathbf{u} мы устанавливаем следующие важные свойства.

Свойство 1. Пусть символ \mathbf{e}_h обозначает ошибку, т. е. разницу между точным решением \mathbf{u} и конечно-элементным решением \mathbf{u}_h , так что

$$\mathbf{e}_h = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h. \quad (4.85)$$

Тогда первое свойство состоит в том, что

$$a(\mathbf{e}_h, \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h. \quad (4.86)$$

Доказательство будет получено, если учесть, что принцип виртуальной работы дает

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h \quad (4.87)$$

и

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \quad (4.88)$$

так что путем вычитания мы получаем (4.86). Мы можем сказать, что ошибка «ортогональна в $a(\cdot, \cdot)$ » ко всем \mathbf{v}_h в пространстве V_h . Ясно, что если это пространство увеличивается, то точность решения будет непрерывно возрастать. Два перечисляемых далее свойства базируются на свойстве 1.

Свойство 2. Второе свойство состоит в том, что

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) \leq a(\mathbf{u}, \mathbf{u}). \quad (4.89)$$

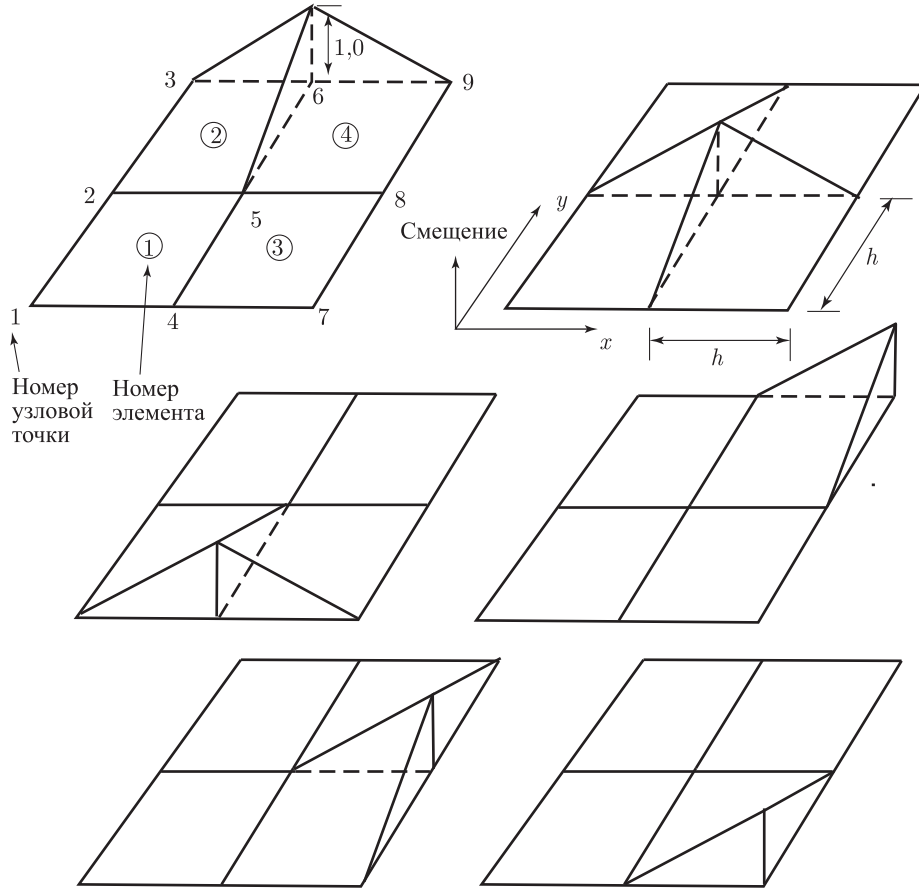


Рис. 4.30. Вид с высоты, демонстрирующий базисные функции для пространства V_h , используемые при анализе консольной пластины из примера 4.6. Функции, характеризующие смещения, показаны как направленные вверх для упрощения их демонстрации, однако каждая из показанных функций применима для смещений u и v . Элемент пространства V_h представляет собой произвольную линейную комбинацию 12-ти функций смещения. Отметим, что функции соответствуют интерполяционным матрицам смещения элемента $\mathbf{H}^{(m)}$, обсуждавшимся в примере 4.6, и что смещения в узлах 1, 2 и 3 равны нулю

Мы доказываем наличие этого свойства путем рассмотрения соотношения

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= a(\mathbf{u}_h + \mathbf{e}_h, \mathbf{u}_h + \mathbf{e}_h) = \\ &= a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) + 2a(\mathbf{u}_h, \mathbf{e}_h) + a(\mathbf{e}_h, \mathbf{e}_h) = \\ &= a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) + a(\mathbf{e}_h, \mathbf{e}_h), \end{aligned} \quad (4.90)$$

где было использовано свойство (4.86) при $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h$. Соотношение (4.89) следует из того, что при любом $\mathbf{e}_h \neq 0$ будет $a(\mathbf{e}_h, \mathbf{e}_h) > 0$ (так как для надлежащим образом опертой конструкции $\|\mathbf{v}_h\|_E > 0$ для любого отличного от нуля \mathbf{v}).

Следовательно, энергия деформаций, соответствующая конечно-элементному решению, всегда меньше или равна энергии деформаций, соответствующей точному решению.

Свойство 3. Третье свойство гласит, что

$$a(\mathbf{e}_h, \mathbf{e}_h) \leq a(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h, \mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h. \quad (4.91)$$

Для доказательства воспользуемся тем, что для любого \mathbf{w}_h в пространстве V_h мы имеем

$$a(\mathbf{e}_h + \mathbf{w}_h, \mathbf{e}_h + \mathbf{w}_h) = a(\mathbf{e}_h, \mathbf{e}_h) + a(\mathbf{w}_h, \mathbf{w}_h) \quad (4.92)$$

и, следовательно,

$$a(\mathbf{e}_h, \mathbf{e}_h) \leq a(\mathbf{e}_h + \mathbf{w}_h, \mathbf{e}_h + \mathbf{w}_h). \quad (4.93)$$

Если выбрать $\mathbf{w}_h = \mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h$, то получим (4.91).

Это третье свойство утверждает, что конечно-элементное решение \mathbf{u}_h выбирается из всех возможных вариантов распределения смещений \mathbf{v}_h в пространстве V_h таким образом, чтобы энергия деформаций, соответствующая $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h$, была минимальной. Следовательно, в предельном смысле, «энергетическое расстояние» между \mathbf{u} и элементами в пространстве V_h минимизируется с помощью решения \mathbf{u}_h в том же пространстве. Используя свойство (4.91), а также эллиптичность и непрерывность билинейной формы, мы получим затем

$$\begin{aligned} a\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1^2 &\leq a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) = \\ &= \inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} a(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h, \mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \leq \\ &\leq M \inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_1 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_1, \end{aligned} \quad (4.94)$$

где символ «inf» означает инфимум (см. таблицу 4.5). Если мы положим $d(\mathbf{u}, V_h) = \inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_1$, то следует признать, что имеет место *свойство*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 \leq c d(\mathbf{u}, V_h), \quad (4.95)$$

где c — постоянная, $c = \sqrt{M/\alpha}$, не зависящая от h , но зависящая от свойств материала ¹⁾. Этот результат принято называть леммой Си (см., например, [Ciarlet 1978]).

Три перечисленные выше свойства дают ценную основу для лучшего понимания того, как выбирается конечно-элементное решение при наличии различных вариантов распределения смещений, возможных для заданной конечно-элементной сетки, и чего можно ожидать по мере измельчения этой сетки.

Заметим, в частности, что неравенство (4.95), базирующееся на свойстве 3, гласит, что при имеющейся у нас последовательности конечно-элементных пространств достаточным условием для сходимости является тот факт, что для любого $\mathbf{u} \in V$ мы имеем $\lim_{h \rightarrow 0} \inf \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_1 = 0$. Кроме того, неравенством (4.95) можно воспользоваться для измерения скорости сходимости по мере измельчения сетки; это делается путем введения верхней границы изменения величины $d(\mathbf{u}, V_h)$ по мере указанного измельчения (см. раздел 4.3.5).

Далее, свойства 2 и 3 говорят о том, что в процессе конечно-элементного решения ошибка в определении энергии деформаций минимизируется в пределах поля возможных картин распределения смещений при заданной сетке, и что энергия деформаций, соответствующая конечно-элементному решению, будет приближаться к точному значению энергии деформаций (при том снизу) по мере использования все более и более мелких сеток (при этом картины распределения смещений для более мелкой сетки содержат в себе аналогичные картины для предыдущих, более грубых сеток).

Высказанные здесь утверждения можно также связать со сделанными ранее наблюдениями о том, что при конечно-элементном решении устанавливается постоянство полного потенциала (см. раздел 4.3.2). Это означает, что при *заданной сетке* и при *любых* узловых смещениях $\mathbf{U}_{\text{любое}}$ мы получаем

$$\Pi|_{\mathbf{U}_{\text{любое}}} = \frac{1}{2} \mathbf{U}_{\text{любое}}^T \mathbf{K} \mathbf{U}_{\text{любое}} - \mathbf{U}_{\text{любое}}^T \mathbf{R}. \quad (4.96)$$

¹⁾ Когда мы рассматриваем *свойство* (4.95) и обсуждаемое позднее *условие* (4.156), то возникает некий деликатный момент; а именно, хотя свойство (4.95) остается справедливым всегда, при любых значениях объемного и сдвигового модулей, однако при увеличении объемного модуля постоянная c становится очень большой, и свойство (4.95) уже не имеет смысла. В силу этого, когда объемный модуль κ очень велик, то нам *необходимо* воспользоваться новым свойством (4.156), входящая в которое постоянная не зависит от κ , а это уже ведет к условию inf-sup.

Конечно-элементное решение \mathbf{U} получается, если обратиться к условию постоянства Π . Тогда

$$\mathbf{KU} = \mathbf{R}.$$

Имея в своем распоряжении конечно-элементное решение для смещений \mathbf{U} , мы можем определить полный потенциал Π и энергию деформаций \mathcal{U} ,

$$\Pi = -\frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{R}; \quad \mathcal{U} = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{R} \quad (4.97)$$

Таким образом, чтобы получить энергию деформаций, соответствующую конечно-элементному решению, нам нужно только выполнить векторное умножение.

Желая при принятых нами обозначениях показать, что при задании возможных конечно-элементных смещений (т.е. в пределах пространства V_h) потенциал Π минимизируется на конечно-элементном решении \mathbf{U} , вычислим Π при $\mathbf{U} + \boldsymbol{\epsilon}$, где $\boldsymbol{\epsilon}$ — произвольный вектор. Имеем

$$\begin{aligned} \Pi|_{\mathbf{U}+\boldsymbol{\epsilon}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{U} + \boldsymbol{\epsilon})^T \mathbf{K}(\mathbf{U} + \boldsymbol{\epsilon}) - (\mathbf{U} + \boldsymbol{\epsilon})^T \mathbf{R} = \\ &= \Pi|_{\mathbf{U}} + \boldsymbol{\epsilon}^T (\mathbf{KU} - \mathbf{R}) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\epsilon} = \\ &= \Pi|_{\mathbf{U}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\epsilon}, \end{aligned} \quad (4.98)$$

где мы использовали равенство $\mathbf{KU} = \mathbf{R}$ и тот факт, что матрица \mathbf{K} является симметричной. Если учесть, однако, что \mathbf{K} является положительно определенной, то $\Pi|_{\mathbf{U}}$ представляет собой минимум потенциала Π при заданной конечно-элементной сетке. По мере измельчения сетки Π будет уменьшаться, а если учесть (4.97), то \mathcal{U} будет соответственно возрастать.

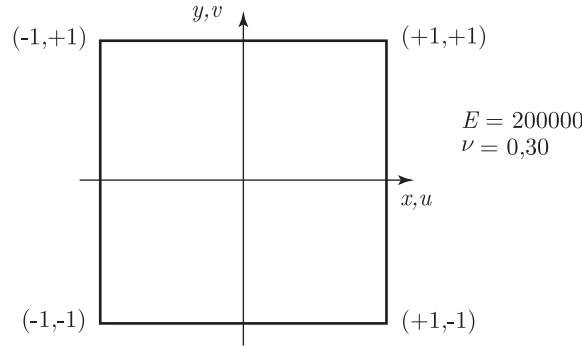
Рассматривая соотношения (4.89), (4.91) и (4.97), можно подметить, что смещения, определяемые конечно-элементным решением, оказываются («в целом») недооцененными и, следовательно, жесткость данной математической модели оказывается («в целом») переоцененной. Эта переоценка жесткости является (физически) результатом «внутренних ограничений на смещения», в неявной форме налагаемых на решение и являющихся результатом соответствующих допущений относительно смещений. По мере усложнения конечно-элементной дискретизации указанные «внутренние ограничения на смещения» уменьшаются, и достигается сходимость к точному решению (и к истинной жесткости) математической модели.

Чтобы дать пример реализации проведенного выше обсуждения, на рис. 4.31 демонстрируются результаты, полученные при анализе некоей специально подобранной тестовой задачи с двумерной конечно-элементной дискретизацией. Задача построена так, чтобы избежать появления каких бы то ни было особенностей. Как это будет обсуждаться в следующем разделе, в данном случае полный (максимальный) порядок сходимости достигается, при заданной форме конечных элементов, на некоторой последовательности однородных конечно-элементных сеток (в каждой из сеток все элементы являются квадратами одного и того же размера).

Рисунок 4.31 демонстрирует сходимость энергии деформаций в случае, когда для решений применяется последовательность однородных сеток с элементами, имеющими по девять узлов. Эти сетки строятся начиная с сетки из квадратных элементов размером 2×2 , где каждый элемент имеет сторону единичной длины (для этой сетки $h = 1$), а затем он подразделяется на четыре одинаковых квадратных элемента (для которых $h = 1/2$); так получается вторая сетка, а затем этот процесс продолжается. Мы ясно видим, что ошибка в определении энергии деформаций уменьшается вместе с уменьшением размера элемента h , как этого и следовало ожидать в соответствии с (4.91). В следующем разделе мы сравним порядок сходимости, явствующий из конечно-элементных расчетов, с теоретически устанавливаемым значением.

4.3.5. Скорость сходимости

В предыдущих разделах рассматривались условия, выполнение которых необходимо для монотонной сходимости результатов конечно-элементного анализа, и обсуждалось, как



N элементов на каждой стороне, $N = 2, 4, 8, \dots$

а. Рассматриваемая квадратная область

$$\begin{aligned} u &= c_1(1-x^2)(1-y^2)e^{ky} \cos kx, \\ v &= c_1(1-x^2)(1-y^2)e^{ky} \sin kx; \\ c_1 &\text{— постоянная; } k = 5. \end{aligned}$$

б. Точные смещения в пределах плоскости

Получите конечно-элементное решение для массовых нагрузок f_x^B и f_y^B , где

$$\begin{aligned} f_x^B &= - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right), \\ f_y^B &= - \left(\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

и $\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{yx}$ — это напряжения, соответствующие точным значениям смещений в пределах плоскости, заданным в пункте (б)

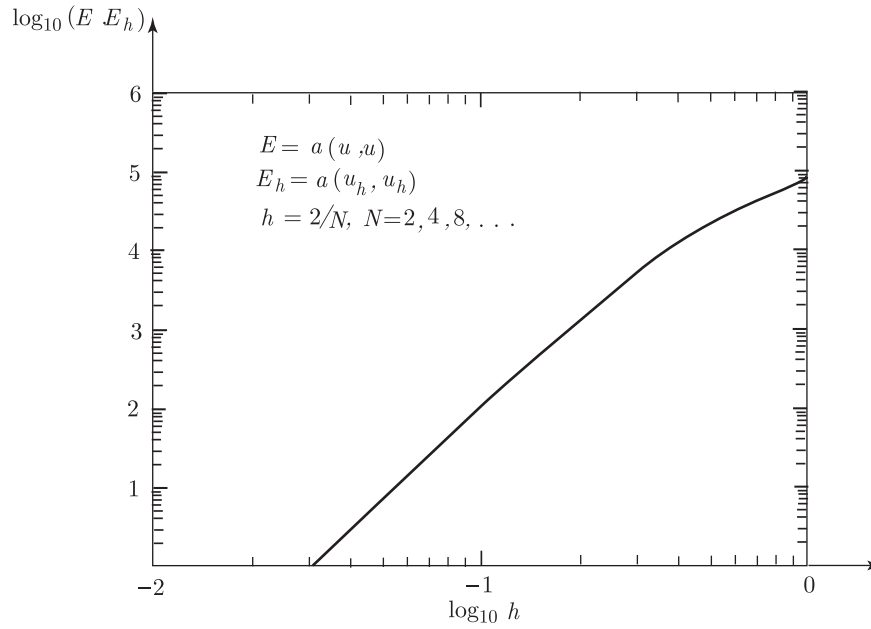
в. Тестовая задача

Рис. 4.31. Сформулированная применительно к данному случаю тестовая задача для элементов с плоскими напряжениями (или с плоскими деформациями, или осесимметричными). Мы используем, для случая малых h , $E - E_h = ch^\alpha$, и, следовательно, $\log(E - E_h) = \log c + \alpha \log h$ (см. также (4.101)). Численные решения дают $\alpha = 3,91$

в общем случае эта сходимость достигается, однако ничего не говорилось о том, с какой скоростью эта сходимость осуществляется.

Как этого и следовало ожидать, скорость сходимости зависит от порядка полиномов, используемых при представлении смещений. В этом контексте полезно ввести понятие о *полном* полиноме.

На рис. 4.32 показаны те полиномиальные члены, которые необходимо включить для получения полных полиномов по x и y при двумерном анализе. Как мы видим, присутствуют все возможные члены типа $x^\alpha y^\beta$, где $\alpha + \beta = k$, а k — это та степень, при которой полином является полным. Например, можно отметить, что элемент, исследованный в примере 4.6, использует полиномиальное представление смещений, которое является полным только вплоть до единичной степени. Кроме того, рис. 4.32 демонстрирует важную форму обозначений для полиномиальных пространств. Пространства P_k соответствуют полным полиномам, имеющим степень вплоть до k . Их можно представить себе также в качестве базисных функций треугольных элементов. Функции в P_1 соответствуют функциям треугольника с линейным смещением (с постоянной деформацией — см. раздел 5.3.2); и так далее.



г. Решение для задачи с плоскими напряжениями

Рис. 4.31. Продолжение

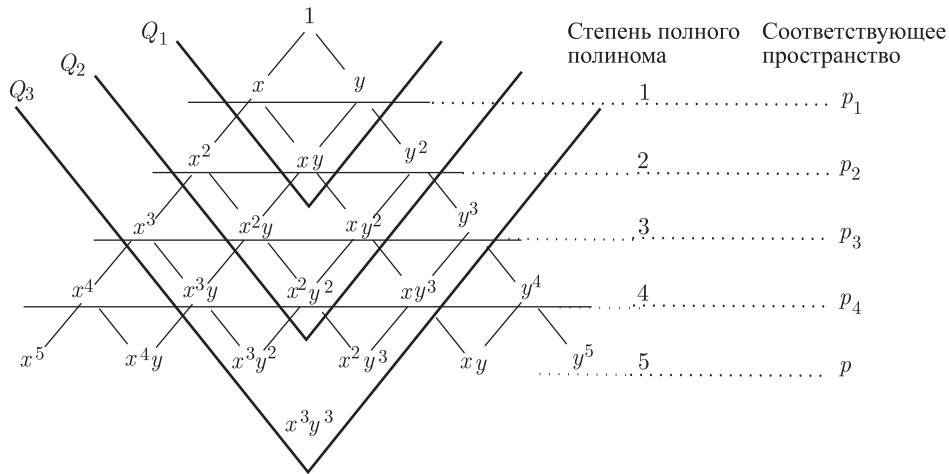


Рис. 4.32. Полиномиальные члены при двумерном анализе, треугольник Паскаля

В дополнение к этому на рис. 4.32 показаны полиномиальные пространства Q_k , $k=1,2,3$, которые соответствуют элементам, имеющим 4, 9 и 16 узлов и называемым элементами Лагранжа, так как функции смещения для этих элементов представляют собой функции Лагранжа (см. также раздел 5.5.1).

Если имеется в виду трехмерный анализ, то, конечно же, можно было бы изобразить фигуру, аналогичную представленной на рис. 4.32, в которую была бы включена переменная z .

Давайте подумаем о последовательности однородных сеток, служащей идеализацией всего объема рассматриваемого здесь тела. Некая сетка, принадлежащая такой

последовательности, состоит из элементов одного и того же размера, — квадратных элементов, если используются полиномиальные пространства Q_k . Следовательно, параметр h может быть принят в качестве характерной длины элемента. Последовательность получается путем выбора некоторой начальной сетки из элементов и последующего подразделения с естественной картиной смещений так, чтобы получить следующую сетку, а затем повторить весь этот процесс. Мы уже проделывали это при решении специально подобранной тестовой задачи, показанной на рис. 4.31. Однако при рассмотрении некой другой задачи, например той, которая была сформулирована в примере 4.6, нам следовало бы на рис. 4.30 подразделить каждый четырехузловой элемент на четыре новых, равных между собой элемента, чтобы получить первую измельченную сетку; после этого мы подразделили бы каждый элемент первой измельченной сетки на четыре новых одинаковых четырехузловых элемента, получая тем самым вторую измельченную сетку; и так далее. Продолжение этого процесса подразделения дало бы полную последовательность сеток.

Желая получить выражение для скорости сходимости, нам следовало бы в идеале воспользоваться некой формулой, выражающей $d(\mathbf{u}, V_h)$ в неравенстве (4.95) как функцию h . Однако получить такую формулу трудно, а удобнее воспользоваться теорией интерполяции и работать с верхней границей изменения $d(\mathbf{u}, V_h)$.

Предположим, что мы применяем элементы с полными полиномами степени k и что точное решение \mathbf{u} интересующей нас задачи теории упругости является «гладким» в том смысле, что оно удовлетворяет соотношению ¹⁾

$$\|\mathbf{u}\|_{k+1} = \left\{ \int_{\text{Vol}} \left[\sum_{i=1}^3 (u_i)^2 + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 + \sum_{n=2}^{k+1} \sum_{i=1}^3 \sum_{r+s+t=n} \left(\frac{\partial^n u_i}{\partial x_1^r \partial x_2^s \partial x_3^t} \right)^2 \right] d\text{Vol} \right\}^{1/2} < \infty, \quad (4.99)$$

где, разумеется, $k \geq 1$.

Таким образом, мы предполагаем, что могут быть вычислены все производные точного решения вплоть до $(k+1)$ -го порядка.

Фундаментальный результат теории интерполяции состоит в том, что существует некая интерполяционная функция $\mathbf{u}_I \in V_h$, такая, что

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_I\|_1 \leq \hat{c} h^k \|\mathbf{u}\|_{k+1}, \quad (4.100)$$

где h — параметр, характеризующий размер сетки и указывающий на «размер» элементов, а c — постоянная, не зависящая от h . Как правило, в качестве h принимают длину стороны типового элемента или диаметр окружности, описанной вокруг этого элемента. Отметим, что \mathbf{u}_I не является конечно-элементным решением в пространстве V_h , а есть просто некий элемент в этом пространстве, геометрически соответствующий функции, близкой к \mathbf{u} . Нередко и, в частности, здесь, мы позволяем переменной \mathbf{u}_I принимать в узлах конечного элемента те же значения, что и точное решение \mathbf{u} .

Используя соотношение (4.100) и рассмотренное нами в разделе 4.3.4 свойство 3 (см. (4.91)), мы можем теперь показать, что скорость сходимости конечно-элементного решения \mathbf{u}_h к точному решению \mathbf{u} , построенному на основе теории упругости, определяется путем оценки ошибки

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 \leq c h^k \|\mathbf{u}\|_{k+1}, \quad (4.101)$$

где c — постоянная, не зависящая от h , но зависящая от материальных свойств. А именно, используя (4.95) и (4.100), мы имеем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 &\leq c d(\mathbf{u}, V_h) \leq \\ &\leq c \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_I\|_1 \leq c \hat{c} h^k \|\mathbf{u}\|_{k+1}, \end{aligned} \quad (4.101a)$$

¹⁾ После этого выясняется, что \mathbf{u} представляет собой элемент пространства Гильберта H^{k+1} .

и это дает соотношение (4.101) с новой постоянной s . Обращаясь к (4.101), можем сказать, что *скорость сходимости* определяется полным выражением в правой части этого соотношения, тогда как *порядок сходимости* равен k или, что одно и то же, мы имеем сходимость $o(h^k)$.

Другой способ вывода неравенства (4.101), тесно связанного с вышеизложенным выводом, основано на использовании (4.79) и (4.91). В этом случае имеем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 &\leq \frac{1}{c_1} [a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h)]^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{1}{c_1} [a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_I, \mathbf{u} - \mathbf{u}_I)]^{1/2} \leq \frac{c_2}{c_1} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_I\|_1 \leq ch^k \|\mathbf{u}\|_{k+1}. \end{aligned} \quad (4.101b)$$

Следовательно, как мы видим, для определения скорости сходимости мы, фактически, только выразили расстояние $d(\mathbf{u}, V_h)$ в терминах верхней границы, заданной согласно (4.100).

На практике мы зачастую записываем (4.101) в форме

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 \leq ch^k, \quad (4.102)$$

причем признаем, что используемая здесь постоянная s не зависит от h , однако зависит от решения u от материальных свойств так как s в (4.101a) и c_1, c_2 в (4.101b) зависят от материальных свойств. Эта зависимость от материальных свойств оказывается вредной, когда рассматриваются условия почти полной несжимаемости, потому что тогда вышеупомянутая постоянная становится очень большой и получается, что порядок сходимости приобретает хорошую точность только при очень малых (не интересных практически) значениях h . А если так, то в этом случае необходимо, чтобы свойство (4.95) выполнялось при постоянной, не зависящей от материальных свойств, а это требование ведет уже к условию (4.156) (см. раздел 4.5).

Постоянная s зависит также от типа используемого элемента. Хотя мы и предположили, что тип элемента базируется на его представлении полным полиномом порядка k , однако различные разновидности элементов, в общем принадлежащих этому классу, порождают различные константы s при исследовании одной и той же задачи (например, треугольные и четырехугольные элементы). Отсюда следует, что истинная величина ошибки при заданном h может оказаться весьма различной, хотя тот порядок, с которым ошибка уменьшается по мере измельчения сетки, остается одним и тем же. Ясно, что величина постоянной s может играть решающую роль при практическом анализе, поскольку именно она в значительной мере определяет, насколько малым фактически должен быть размер h , чтобы при этом получалась приемлемая ошибка.

Конечно, проведенные выводы характеризуют собой теоретические результаты, и мы вправе задать вопрос — насколько эти результаты являются применимыми на практике? Как показывает опыт, теоретические результаты, действительно, весьма близко представляют истинное поведение сходимости для интересующих нас вариантов конечно-элементной дискретизации. В самом деле, чтобы измерить порядок сходимости, мы можем попросту использовать в соотношении (4.102) знак равенства, и таким образом получить

$$\log(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1) = \log c + k \log h. \quad (4.103)$$

После этого, если на основе наших численных результатов построить график изменения $\log(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1)$ в зависимости от $\log h$, то мы найдем, что получаемая таким образом кривая действительно имеет (приблизленно) наклон k , когда величина h достаточно мала.

Оценка нормы по Соболеву может потребовать значительных усилий, и на практике можно воспользоваться эквивалентностью энергетической нормы и 1-нормы. А именно, в силу (4.79) мы видим, что соотношение (4.101) остается справедливым и при применении в его левой части энергетической нормы, а расчет этой нормы зачастую может оказаться значительно проще см. (4.97). Приложение демонстрируется на рис. 4.31. Заметим, что ошибка в расчете энергии деформаций может быть оценена просто путем вычитания текущего значения энергии деформаций из значения той же энергии для предельного решения (или для точного решения, если таковое известно) (см. (4.90)). При решении, показанном на рис. 4.31, мы получили порядок сходимости (для численных результатов), равный 3,91, который хорошо согласуется с теоретическим значением, равным 4 (здесь $k = 2$, а энергия

деформаций соответствует квадрату энергетической нормы). Дальнейшие результаты, касающиеся сходимости для этой, специально подобранной задачи, приводятся на рис. 5.64 (где рассматриваются элементы искаженной формы с численно проинтегрированными матрицами жесткости).

По существу, соотношение (4.101) дает оценку ошибки для градиента смещения, а следовательно — для деформаций и напряжений, так как первоочередной вклад в 1-норму будет обусловлен ошибкой при определении производных смещений. Мы будем в первую очередь использовать (4.101) и (4.102), однако отметим также, что ошибка в определении смещений задается соотношением

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_k\|_0 \leq ch^{k+1} \|\mathbf{u}\|_{k+1}. \quad (4.104)$$

Следовательно, порядок сходимости для смещений оказывается на единицу выше, чем для деформаций.

Интуитивно эти результаты представляются разумными. А именно, давайте мыслить в терминах анализа, проводимого с помощью рядов Тейлора. Тогда в силу того, что конечный элемент, имеющий «размерность h » и полное разложение для смещения порядка k , может представлять вариации смещений точно вплоть до этого порядка, локальная ошибка в представлении произвольных смещений на однородной сетке должна быть порядка $o(h^{k+1})$. Кроме того, для задачи C^{m-1} напряжения вычисляются путем m -кратного дифференцирования смещений и, поэтому, ошибка в определении напряжений имеет порядок $o(h^{k+1-m})$. Для рассмотренной выше задачи теории упругости имеем $m = 1$ и, следовательно, соотношения в (4.101) и (4.104) именно таковы, какими мы могли их ожидать.

Пример 4.25: Рассмотрим задачу, схематически показанную на рис. 4.33. Требуется оценить ошибку конечно-элементного решения, если используются линейные конечные элементы с двумя узлами.

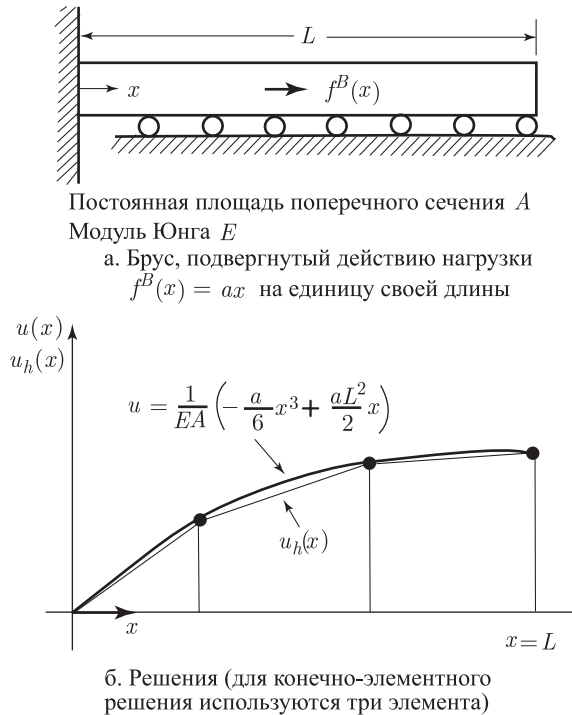


Рис. 4.33. Анализ бруса

В данном случае конечно-элементная задача сводится к расчету $u_h \in V_h$ такого, что

$$(EAu'_h, v'_h) = (f^B, v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

при

$$V_h = \left\{ v_h \mid v_h \in L^2(\text{Vol}), \frac{\partial v_h}{\partial x} \in L^2(\text{Vol}), v_h|_{x=0} = 0 \right\}.$$

Для оценки ошибки воспользуемся соотношением (4.91), и можно прямо утверждать, что для этой простой задачи

$$\int_0^L (u' - u'_h)^2 dx \leq \int_0^L (u' - u'_I)^2 dx, \quad (\text{a})$$

где u — точное решение, u_h — конечно-элементное решение, а u_I представляет собой интерполянт, а это означает, что u_I считается равным u в узловых точках. Следовательно, теперь наша цель состоит в том, чтобы найти верхнюю границу для величины $\int_0^L (u' - u'_I)^2 dx$.

Рассмотрим некий произвольный элемент с конечными точками x_i и x_{i+1} на сетке. Тогда мы можем утверждать, что при точном решении $u(x)$ и при $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ будем иметь

$$u'(x) = u'|_{x_c} + (x - x_c)u''|_{x=\bar{x}},$$

где $x = x_c$ означает некоторую выбранную точку в данном элементе, а x также есть некоторая точка в элементе. Выберем x_c так, чтобы иметь $u'|_{x_c} = u'_I$, а это всегда можно сделать, так как

$$u_I(x_i) = u(x_i), \quad u_I(x_{i+1}) = u(x_{i+1}).$$

Тогда для данного элемента имеем

$$|u'(x) - u'_I| \leq h(\max_{0 \leq x \leq L} |u''|), \quad (\text{b})$$

где мы ввели наибольшее абсолютное значение второй производной точного решения, чтобы получить верхнюю границу.

С учетом (b) имеем

$$\int_0^L (u' - u'_I)^2 dx \leq Lh^2(\max_{0 \leq x \leq L} |u''|)^2$$

и, следовательно,

$$\left(\int_0^L (u' - u'_h)^2 dx \right)^{1/2} \leq ch, \quad (\text{c})$$

где постоянная c зависит от A , E , L и f^B , но не зависит от h .

Мы должны признать, что проведенный анализ является вполне общим, но подразумевает, что точное решение является гладким, так что его вторая производная может быть вычислена (для данного примера она равна $-f^B/EA$). Разумеется, результат, соответствующий соотношению (c), как раз и дает оценку ошибки (4.102).

Интересный дополнительный результат состоит в том, что смещения в узловых точках при конечно-элементном решении являются, в силу двух причин, точными значениями смещений. Во-первых, точное решение в узлах при распределенной нагрузке является тем же самым, что и при эквивалентной сосредоточенной нагрузке («эквивалентная» нагрузка рассчитывается согласно принципу виртуальной работы). Во-вторых, конечно-элементное пространство V_h содержит точное решение, соответствующее эквивалентной сосредоточенной нагрузке. Конечно, этот благоприятный результат является специальным свойством решения одномерных задач и не имеет места при общем двумерном или трехмерном анализе.

При проведенном выше исследовании сходимости предполагается, что используются однородные дискретизации (т.е. что, например, при двумерном анализе элементы

являются квадратными и имеют один и тот же размер), а также что точное решение является гладким. Кроме того, в неявной форме предполагается, что степень полиномиальных разложений смещений для элемента не изменяется. Вообще говоря, на практике эти условия не встречаются, и мы должны спросить себя, каковы могут быть последствия их введения.

Если решение не является гладким, — например, вследствие внезапных изменений в геометрии, в нагрузках, в материальных свойствах или в толщинах, — и если используется однородное подразделение сеток, то порядок сходимости понижается; следовательно, показатель степени для h в соотношении (4.102) не равен k , а равен некоему меньшему значению, зависящему от степени «потери гладкости».

Разумеется, при проведении подобного рода исследований на практике используются сетки, отсортированные по рангу, так что в областях с интенсивными изменениями напряжений используются элементы малого размера, а на удалении от таких областей — более крупные элементы. Тогда порядок сходимости решений по-прежнему определяется согласно (4.104), однако соответствующее выражение переписывается в форме

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1^2 \leq c \sum_m h_m^{2k} \|\mathbf{u}\|_{k+1, m}^2, \quad (4.101c)$$

где индекс m обозначает индивидуальный элемент, а величина h_m служит мерилom размера элемента. Следовательно, общая ошибка оценивается теперь путем суммирования локальных вкладов в (4.101) от каждого элемента. Хорошая сортировка элементов означает, что плотность ошибки в пределах каждого элемента является примерно постоянной.

На практике, если применяется сортировка, то неизменно используются геометрически искаженные элементы. Так, например, при исследовании двумерных объектов очень часто встречаются четырехсторонние элементы общего вида. Элементы общих геометрических форм обсуждаются в главе 5, причем, как указывается в разделе 5.3.3, к исследованию таких элементов применимы те же самые порядки сходимости, если только величины геометрических искажений поддерживаются в разумных пределах.

В упомянутой выше последовательности сеток используются элементы одного и того же типа, и размеры элементов равномерно уменьшаются. Такой подход принято называть h -методом анализа. При альтернативном подходе может выбираться начальная сетка из сравнительно больших низкопорядковых элементов, а затем полиномиальные разложения для смещений могут последовательно увеличиваться. Например, может быть использована сетка из элементов на основе допущения о билинейных смещениях (здесь $k = 1$), после чего степень полиномиального разложения увеличивается до порядков 2, 3, ..., p , где p может быть равно 10 или даже больше. Такой подход называют p -методом анализа. Чтобы эффективно достичь такого увеличения полиномиального порядка для элементов, было предложено вводить специальные интерполяционные функции, которые позволяют проводить расчет матрицы жесткости для элемента, соответствующей повышенной интерполяции, путем использования рассчитанной ранее матрицы жесткости и простого внесения поправки в эту матрицу; эти функции обладают ценными свойствами ортогональности (см. [Szabó, Babuška 1991]). К сожалению, однако, у этих функций отсутствуют внутренние вариации смещений в элементах, важные при наличии геометрических искажений этих элементов (см. [Kato et al. 1993], а также раздел 5.3.3). Мы демонстрируем использование этих функций на приводимом ниже примере.

Пример 4.26:

Рассмотрим одномерный элемент в форме бруса, показанного на рис. 4.34. Пусть (\mathbf{K}_p) будет матрица жесткости, соответствующая порядку интерполяции смещений p , где $p = 1, 2, 3, \dots$, и пусть интерполяционными функциями, соответствующими значению $p = 1$, будут

$$h_1 = \frac{1}{2}(1 - x); \quad h_2 = \frac{1}{2}(1 + x). \quad (a)$$

В качестве интерполяционных функций высших порядков используйте

$$h_i(x) = \phi_{i-1}(x) \quad i = 3, 4, \dots, \quad (b)$$

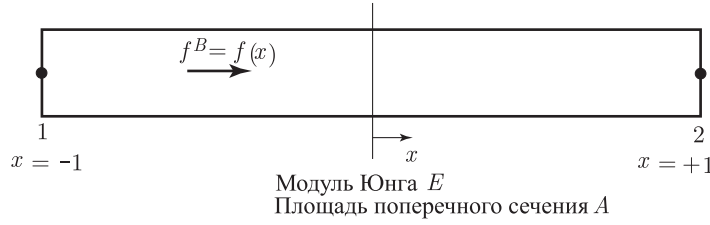


Рис. 4.34. Элемент в форме бруса, подвергающийся действию переменной массовой силы

где

$$\phi_j = \frac{1}{[2(2j-1)]^{1/2}} [P_j(x) - P_{j-2}(x)], \quad (c)$$

а P_j представляют собой полиномы Лежандра (см., например, [Kreyszig 1977]),

$$\begin{aligned} P_0 &= 1, \\ P_1 &= x, \\ P_2 &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3 &= \frac{1}{2}(5x^2 - 3x), \\ P_4 &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \\ &\vdots \\ (n+1)P_{n+1} &= (2n-1)xP_n - nP_{n-1}. \end{aligned}$$

Требуется рассчитать матрицу жесткости $(\mathbf{K})_p$ и соответствующий вектор нагрузки для элемента при $p \geq 1$.

Прежде всего отметим, что приведенные здесь интерполяционные функции удовлетворяют требованиям монотонной сходимости: непрерывность смещений на границах между элементами осуществляется принудительно, а сами функции являются полными (они могут представлять как твердотельную моду, так и состояние постоянной деформации). Это следует из того, что функции в формулах (а) удовлетворяют указанным требованиям, тогда как функции в формулах (b) просто добавляют вариации более высокого порядка смещениям внутри элемента с выполнением условий $h_i = 0$ при $x = \pm 1$, $i \geq 3$.

Матрица жесткости и вектор нагрузки для элемента определяются путем использования формул (4.19) и (4.20). Таким образом, типовые элементы матрицы жесткости и вектора нагрузки имеют вид

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \int_{-1}^{+1} AE \frac{dh_i}{dx} \frac{dh_j}{dx} dx, \\ R_i^B &= \int_{-1}^{+1} f(x) h_i dx. \end{aligned} \quad (d)$$

Расчет конкретных значений (d) дает

$$(\mathbf{K})_p = \frac{AE}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \text{нули} \\ -1 & 1 & & \\ & & 2 & \\ & & \ddots & \\ & & & 2 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 2 \end{bmatrix}_{(p+1) \times (p+1)}, \quad (e)$$

где мы замечаем, что, по существу, обычная матрица жесткости размером 2×2 , соответствующая интерполяционным функциям (a), была здесь подправлена путем введения диагональных элементов, соответствующих внутренним модам смещений (b) для данного элемента. В рассматриваемом конкретном случае каждый из таких элементов матрицы обособлен от других, ему подобных, в силу свойств ортогональности функций Лежандра. Следовательно, по мере повышения порядка элемента достаточно просто вычислить дополнительные диагональные вклады в матрицу жесткости, тогда как все остальные коэффициенты жесткости остаются без изменений.

Описанная здесь структура матрицы $(\mathbf{K})_p$ делает решение определяющих уравнений для комплекса элементов достаточно простым, а обусловленность матрицы коэффициентов всегда остается хорошей, независимо от того, насколько высоким оказывается порядок используемых матриц. Заметим также, что если для элементов с заданным порядком интерполяции конечно-элементное решение известно, то решение для более высокого порядка интерполяции внутри элемента получается просто путем расчета и последующего добавления дополнительных смещений, обусловленных добавочными внутренними модами для данного элемента.

В силу того, что комплексы функций смещения, соответствующих матрице $(\mathbf{K})_{p+1}$, содержат в себе комплексы функций, соответствующих матрице $(\mathbf{K})_p$, мы называем эти функции смещения и матрицы жесткости иерархическими функциями и матрицами. Это иерархическое свойство имеет место в общем случае повышения порядка интерполяции (см. упражнение 4.24 и раздел 5.2).

Концепция, выдвинутая в примере 4.26, используется также при задании функций смещения для двумерных и трехмерных элементов повышенного порядка. Например, в двумерном случае базисными функциями являются функции h_i , $i = 1, 2, 3, 4$, использованные в примере 4.6, а введение добавочных функций связано с побочными и внутренними модами (см. упражнения 4.30 и 4.31).

Мы уже отмечали, что при исследовании конструкции в форме бруса, схематически представленной посредством элементов такого типа, как рассмотренный в примере 4.26, связь между элементами реализуется только через смещения в узловых точках и функции h_1 и h_2 , а это приводит к чрезвычайно эффективному решению. Однако в двумерном и трехмерном случаях такая вычислительная эффективность не имеет места, так как побочные моды элементов приводят ко взаимосвязи между смещениями примыкающих друг к другу элементов, и определяющие уравнения для комплекса конечных элементов соответствует, фактически, ленточным матрицам с широкими лентами (см. раздел 8.2.3).

При решении задач с общими условиями для напряжений может быть достигнута высокая скорость сходимости, если только мы увеличим число элементов и одновременно повысим порядок вариаций смещений в элементах. Такой подход с сеточно-элементным измельчением называется h/p -методом и может дать экспоненциальную скорость сходимости согласно выражению (см. [Szabó, Babuška 1991])

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 \leq \frac{c}{\exp[\beta(N)^\gamma]}, \quad (4.105)$$

где c , β и γ — положительные постоянные, а N — число узлов сетки. Если, желая сравнить соотношения (4.105) и (4.101), мы запишем последнее в такой же форме, то в соответствии

с h -методом получим алгебраическую скорость сходимости

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 \leq \frac{c}{(N)^{k/d}},$$

где $d = 1, 2, 3$, соответственно, для одномерных, двумерных и трехмерных задач. Эффективность h/p -метода связана с тем, что он сочетает два привлекательных свойства h -метода и p -метода: при использовании p -метода экспоненциальная скорость сходимости достигается в случае гладкого точного решения, а при использовании h -метода оптимальная скорость сходимости поддерживается за счет надлежащей сортировки сетки, независимо от степени гладкости точного решения.

Хотя при использовании h/p -метода скорость сходимости решения может быть очень высокой, все же, конечно, эффективность процедуры решения зависит от общего объема вычислительных усилий, затрачиваемых на это решение с целью достижения заданной ошибки (которая, в свою очередь, зависит от постоянной c).

На основании вышеизложенного ключевая особенность конечно-элементного решения с использованием h -, p - или h/p -методов состоит в том, что сортировка сеток должна быть «надлежащей». Приведенные выше выражения указывают на то, как *a priori* будет достигаться сходимость к точному решению по мере повышения плотности размещения элементов и порядка интерполяции в них, однако сетки, используемые при последовательно строящихся решениях, должны надлежащим образом сортироваться. Под сортировкой мы подразумеваем то, что локальная плотность ошибки в каждом элементе должна оставаться примерно постоянной. Оценка ошибок будет обсуждаться в следующем разделе.

Кроме того, при проведенном выше обсуждении вопроса о сходимости мы предполагали — рассматривая линейную статическую модельную задачу, — что конечно-элементные матрицы рассчитываются точно и что определяющие уравнения равновесия решаются без ошибки. На практике при расчете элементных матриц (см. раздел 5.5) применяется численное интегрирование, а при решении определяющих уравнений равновесия используется арифметика конечной степени точности (см. раздел 8.2.6); ясно, следовательно, что на этих этапах решения будет внесена некоторая ошибка. Однако ошибки численного интегрирования не будут уменьшать порядка сходимости, если только при этом используется надежная схема интегрирования достаточно высокого порядка (см. раздел 5.5.5), а ошибки при решении уравнений в нормальных условиях малы, если только не решается очень плохо обусловленная система уравнений (см. раздел 8.2.6).

4.3.6. Расчет напряжений и оценка ошибки

Как указывалось выше, для достижения монотонной сходимости к точным результатам («точным» в рамках сделанных механических, т. е. математических допущений) элементы должны быть полными и совместимыми. Использование совместимых (или конформируемых) элементов означает, что при конечно-элементном представлении вариационной задачи C^{m-1} сами смещения и их $(m-1)$ -е производные остаются непрерывными при пересечении границ элементов. Отсюда следует, например, что при анализе с плоскими напряжениями компоненты смещений u и v непрерывны, а при исследовании задачи с изгибающейся пластиной с использованием поперечного смещения w в качестве единственной неизвестной переменной непрерывными являются это смещение w и его производные, $\partial w/\partial x$ и $\partial w/\partial y$. Однако эта непрерывность не означает, что напряжения в элементах будут оставаться непрерывными при пересечении границ элементов.

Напряжения в элементах рассчитываются путем использования производных от смещений (см. (4.11) и (4.12)), причем напряжения, найденные на кромке (или на грани) элемента, будучи рассчитаны по данным для соседних элементов, при использовании грубой конечно-элементной сетки могут существенно различаться. Различия напряжений на границах элементов уменьшаются при измельчении конечно-элементной сетки и скорость, с которой реализуются эти уменьшения, определяется, конечно же, порядком элементов, выбранных для дискретизации.

Из сказанного следует, что в общем случае напряжения в элементах не являются непрерывными при пересечении границ элементов. В силу той же математической причины напряжения в элементах на поверхности моделируемой конструкции не находятся, вообще говоря, в равновесии с приложенными извне тяговыми силами. Однако, как это

имеет место и для скачков напряжений на границах между элементами, разность между приложенными извне тяговыми силами и напряжениями в элементах уменьшается по мере увеличения числа элементов, используемых для моделирования конструкции.

Скачки напряжений на границах элементов и дисбаланс напряжений на границе тела являются, разумеется, следствием того факта, что на дифференциальном уровне равновесие напряжений соблюдается неточно, если только не используется очень рафинированная конечно-элементная дискретизация, — здесь следует напомнить приведенный в примере 4.2 вывод принципа виртуальной работы. Проведенные в этом примере выкладки показывают, что дифференциальные уравнения равновесия удовлетворяются только тогда, когда уравнение виртуальной работы удовлетворены для *любой* произвольных виртуальных смещений, равных нулю на той поверхности, где для смещений ставятся граничные условия. При конечно-элементном анализе число «истинных» и виртуальных картин распределения смещений равно числу степеней свободы в узлах и, следовательно, мы получаем лишь приближенное решение в терминах удовлетворения условиям равновесия напряжений на дифференциальном уровне (хотя условия совместности и основополагающие условия удовлетворяются точно). Поэтому ошибка решения может быть измерена путем подстановки конечно-элементного решения для напряжений τ_{ij}^h в основные уравнения равновесия, и это позволяет установить, что для каждой геометрической области. Представляемой неким конечным элементом, мы получим

$$\tau_{ij,j}^h + f_i^B \neq 0, \quad (4.106)$$

$$\tau_{ij}^h n_j - t_i \neq 0, \quad (4.107)$$

где обозначение n_j соответствует направляющим косинусам для нормали к границе области данного элемента, а t_i — это составляющие точного вектора тяговых сил, действующих вдоль этой границы (см. рис. 4.35). Разумеется, этот вектор тяговых сил неизвестен в рамках точного решения, и тот факт, что левая часть соотношения (4.107) не равна нулю, просто означает, что на границах между элементами мы должны ожидать появления скачков напряжений.

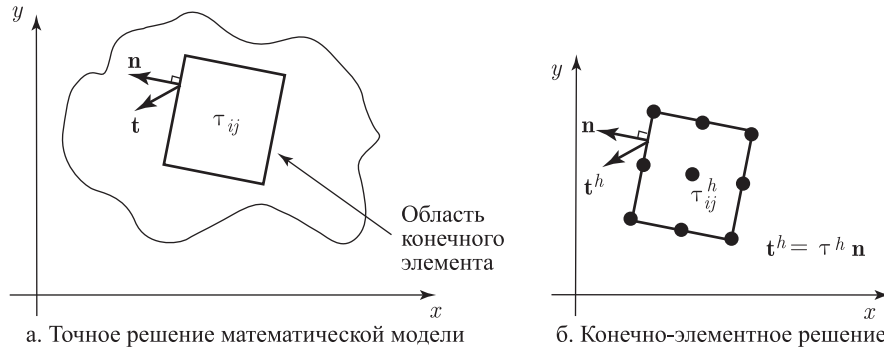


Рис. 4.35. Конечно-элементное представление подобласти для сплошной среды

Можно доказать, что для элементов низкого порядка дисбаланс в соотношении (4.107) больше, чем дисбаланс в (4.106), а для элементов высокого порядка преобладающим оказывается дисбаланс в (4.106). На практике соотношение (4.107) может использоваться для получения информации о точности решения для напряжений. Это соотношение нетрудно применить, если ввести поддиапазоны напряжений, как было предложено в работе [Sussman, Bathe 1986]. Для построения этих поддиапазонов используются расчетные данные о напряжениях без их сглаживания и предлагается сделать следующее:

Выберите масштаб измерения напряжений; как правило, выбирается давление или эффективное напряжение (напряжение Мизеса), хотя, конечно, можно выбрать и любое другое значение напряжения.

Разделите весь диапазон изменения характерного напряжения на поддиапазоны напряжений и придайте каждому поддиапазону некоторый цвет (или используйте оттенки черного и белого, или же просто попеременно черную и белую окраску).

Некоторой точке в заданной сетке придается цвет поддиапазона, соответствующий значению характерного напряжения в этой точке.

Если все напряжения сохраняют непрерывность при пересечении границ элементов, то эта процедура приведет к получению нерасщепленных поддиапазонов напряжений. Однако на практике при пересечении границ элементов возникают разрывы напряжений, а это приводит и к «разрывам» поддиапазонов. Размер самих поддиапазонов напряжений и интенсивность разрывов в них дают непосредственное указание на величину разрывов напряжений (см. рис. 4.36). Отсюда следует, что введение поддиапазонов позволяет получить «норму глазного яблока» для точности определения напряжения τ_{ij}^h , достигаемой при заданной конечно-элементной сетке.

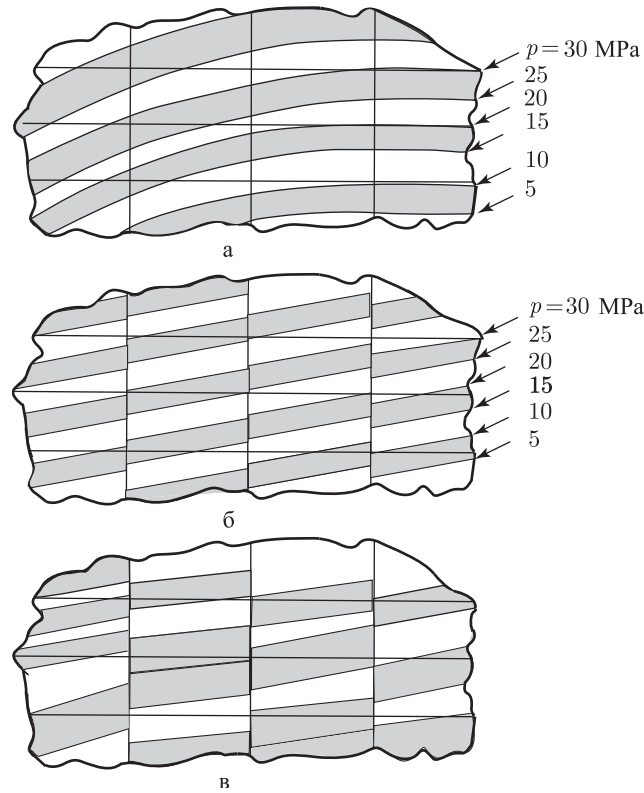


Рис. 4.36. Схематическое представление оценки разрывов напряжения с помощью полос по изменению давления, причем ширина полосы = 5 МПа; при этом используются темные и светлые интервалы; пренебрежимо малые разрывы, $\Delta p \ll 5$ МПа (а); видимые разрывы, но полосы еще остаются различимыми (б); видимые разрывы, полосы неразличимы, $\Delta p > 5$ МПа (в)

При проведении линейного анализа значения конечно-элементных напряжений могут быть вычислены в любой точке элемента с помощью соотношения $\tau^h = \mathbf{C}\mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}$; однако этот расчет оказывается сравнительно дорогостоящим и едва ли осуществим в общем случае нелинейного анализа (включая учет нелинейных свойств материала). Адекватный подход связан с использованием значений в точках, выбираемых для численного интегрирования,

с целью последующей билинейной интерполяции в пределах соответствующей области элемента. На рис. 4.37 иллюстрируется пример применительно к двумерному анализу.

Альтернативная процедура для приближенной оценки ошибки при вычислении напряжений состоит в том, чтобы вначале найти какие-то улучшенные значения $(\tau_{ij}^h)_{\text{улучш.}}$, а затем дать оценку и показать

$$\Delta \tau_{ij} = \tau_{ij}^h - (\tau_{ij}^h)_{\text{улучш.}} \quad (4.108)$$

Этот показ, опять-таки, может быть эффективно осуществлен при использовании рассмотренной выше процедуры с поддиапазонами.

Улучшенные значения могли бы быть найдены путем простого осреднения значений напряжения в узлах сетки, с использованием процедуры, показанной на рис. 4.37, или же путем применения подгонки по методу наименьших квадратов, по значениям в точках интегрирования для элементов (см. [Hinton, Campbell 1979]). Процедура с наименьшими квадратами могла бы быть проведена с группами примыкающих друг к другу элементов, или даже глобально, для всей заданной сетки. Однако если область, на которой проводится подгонка по методу наименьших квадратов, содержит много точек со значениями напряжений, то решение будет дорогостоящим и, кроме того, большая ошибка в одной части области может очень серьезно повлиять на прогноз по методу наименьших квадратов для других ее частей. Другое соображение состоит в том, что если использовать прямой расчет напряжений согласно формуле (4.12), то их значения в точках, выбираемых для численного интегрирования при вычислении элементных матриц (см. раздел 5.5), нередко оказываются более точными, чем в узловых точках. Следовательно, для проведения подгонки по методу наименьших квадратов может оказаться ценным воспользоваться функциями более высокого порядка, чем те, которыми определяются вариации напряжений, соответствующие предполагаемым выражениям смещений. Это объясняется тем, что таким путем можно ожидать получения улучшенных результатов.



Рис. 4.37. Интерполяция напряжений по данным о напряжениях в точках Гаусса

Приемы осреднения по узловым точкам и по методу наименьших квадратов демонстрируются в приводимом ниже примере.

Пример 4.27: Рассмотрим сетку для элементов с девятью узлами, показанную на рис. 4.38. Требуется предложить разумные схемы по улучшению результатов для напряжений с помощью осреднения по узловым точкам и подгонки по методу наименьших квадратов.

Пусть символом τ будет обозначен характерный компонент напряжения. Один простой и зачастую эффективный способ улучшения результатов по напряжениям связан с билинейной экстраполяцией вычисленных компонентов напряжения от точек

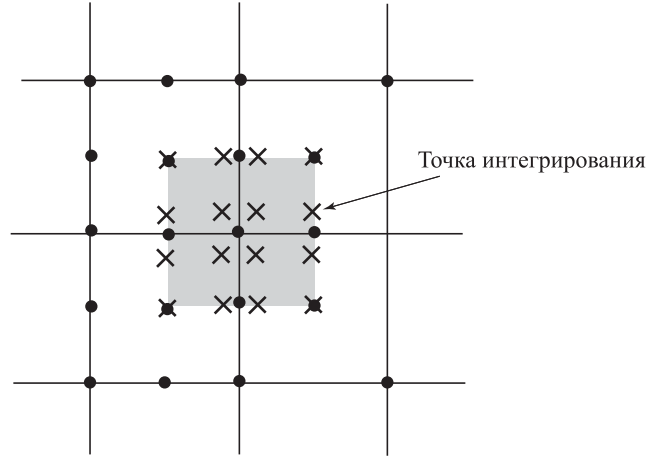


Рис. 4.38. Сетка для элементов с девятью узлами. Показаны также точки интегрирования вблизи узла i

численного интегрирования для каждого элемента до узла i . Если проделать такую операцию, то для узла i в ситуации, показанной на рис. 4.38, будут получены четыре значения для каждого из компонентов напряжения. Затем среднее из этих четырех значений, например $(\tau^h)_{\text{средн}}^i$, будет принято в качестве значения в узловой точке i . После проведения аналогичных расчетов для каждой узловой точки получим улучшенные значения компонента напряжения для типичного элемента в виде

$$(\tau^h)_{\text{улучш}} = \sum_{i=1}^9 h_i (\tau^h)_{\text{средн}}^i, \quad (\text{a})$$

где h_i представляют собой интерполяционные функции для смещений, потому что средние узловые значения предполагаются более точными, чем те, которые были бы получены просто с помощью производных от смещений (при этом предполагалось бы, что более подходящая интерполяция имеет порядок на единицу ниже).

Ключевым этапом реализации этой схемы является вычисление $(\tau^h)_{\text{средн}}^i$. Улучшенное значение подобного же типа может быть получено с помощью процедуры, базирующейся на наименьших квадратах.

Рассмотрим восемь узлов, ближайших к узлу i , и значения интересующего нас компонента напряжения в 16-ти точках численного интегрирования, ближайших к узлу i (показанных на рис. 4.38). Пусть $(\tau^h)_{\text{интегр}}^j$ будут известные значения компонента напряжения в точках интегрирования, $j = 1, \dots, 16$, и пусть $(\tau^h)_{\text{узел}}^k$ будут неизвестные значения в девяти узлах (принадлежащих области, соответствующей точкам интегрирования). Мы можем воспользоваться процедурой метода наименьших квадратов (см. раздел 3.3.3) для вычисления значений $(\tau^h)_{\text{узел}}^k$ путем минимизации ошибок между значениями в точках интегрирования и значениями, вычисляемыми в тех же точках путем интерполяции от значений $(\tau^h)_{\text{узел}}^k$ в узловых точках,

$$\frac{\partial}{\partial (\tau^h)_{\text{узел}}^k} \left[\sum_{j=1}^{16} ((\tau^h)_{\text{интегр}}^j - (\hat{\tau}_{\text{интегр}}^j)^2) \right] = 0 \quad (\text{b})$$

$$k = 1, \dots, 9,$$

где

$$(\hat{\tau}_{\text{интегр}}^j)^k = \sum_{k=1}^9 h_k \Big|_{\text{в точке интегр. } j} (\tau^h)_{\text{узел}}^k. \quad (\text{c})$$

Отметим, что с помощью соотношения (с) мы рассчитываем интерполяционные функции в 16-ти точках интегрирования, показанных на рис. 4.38. Соотношения (b) и (c) дают

девять уравнений для определения значений $(\tau^h)_{\text{узел}}^k$, $k = 1, \dots, 9$. Решая уравнения, мы находим эти значения, однако в качестве улучшенного значения напряжения принимаем только значение в узле i , которое теперь и будет нашим значением $(\tau^h)_{\text{средн}}^i$ в правой части соотношения (а). Та же самая базовая процедура используется для всех узлов с целью прихода к «средним» узловым значениям, так что соотношение (а) может быть применено для всех элементов.

Ясно, что процедура метода наименьших квадратов связана с большим объемом вычислений, чем процедура осреднения и во многих случаях адекватной оказывается более простая, описанная выше схема прямой экстраполяции гауссовых значений и осреднения по узлам.

Как видим, на рис. 4.38 мы представили ситуацию с четырьмя одинаковыми квадратными элементами. Однако в обычной практике элементы имеют искаженную форму, и в узле i может соприкасаться большее или меньшее число элементов. Кроме того, следует рассмотреть узлы, расположенные не на углах элементов, а также специальные топологии сеток у границ.

Мы подчеркиваем, что расчет получаемой ошибки и ее демонстрация представляют собой чрезвычайно важный аспект конечно-элементного решения. Необходимо знать качество конечно-элементного решения для напряжений τ_{ij}^k . Если получаемая ошибка приемлемо мала, то те значения напряжений, которые были сглажены путем, например, осреднения по узловым точкам или по методу наименьших квадратов, могут быть использованы с достаточной степенью доверия.

Указанные здесь оценки ошибок базируются на наличии разрывов напряжений на границах между элементами. Однако для элементов высокого порядка (порядка 4 и выше) разрывы такого рода могут оказаться малыми, но, тем не менее, решение не будет точным в силу того, что дифференциальные уравнения равновесия напряжений внутри элементов не удовлетворяются с достаточной степенью точности. В этом случае оценка ошибки должна учитывать также и дисбаланс внутренних напряжений в элементах согласно (4.106).

Когда расчет ошибки для напряжений, определяемых конечно-элементным решением, проведен, а ошибки представляются слишком большими, то следует воспользоваться процедурой задания новой сетки (при более совершенной дискретизации в некоторых областях, более грубой — в других областях и, возможно, при новых порядках интерполяции в элементах). Этот процесс выбора новой сетки может быть в значительной степени автоматизирован и является важным для широкого распространения метода конечных элементов применительно к задачам автоматического проектирования с помощью компьютеров (см. раздел 1.3).

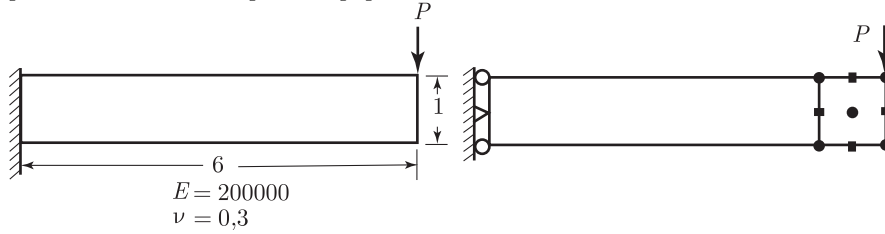
4.3.7. Упражнения

- 4.25. Требуется вычислить восемь наименьших собственных значений для матрицы жесткости элемента типа оболочки с четырьмя узлами, получаемой с помощью конечно-элементной программы, и дать интерпретацию каждому собственному значению. (Подсказка: собственные значения для матрицы жесткости элемента могут быть получены путем построения частотного решения с матрицей масс, соответствующей единичным массам для каждой степени свободы.)
- 4.26. Покажите, что энергия деформаций, соответствующая ошибке для смещений \mathbf{e}_h , где $\mathbf{e}_h = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$, равна разности энергий деформаций, соответствующих точному решению для смещений \mathbf{u} и конечно-элементному решению \mathbf{u}_h .
- 4.27. Рассмотрите анализ задачи, сформулированной в примере 4.6. Воспользуйтесь конечно-элементной программой для проведения исследования сходимости по схеме, показанной на рис. 4.31, для элементов с девятью и с четырьмя узлами (лагранжевыми элементами). Это означает, что нужно вычислить скорость сходимости в энергетической норме и сравнить эту скорость с теоретическими результатами, представленными в разделе 4.3.5. Используйте $N = 2, 4, 8, 16, 32$; считайте $N = 32$ предельным решением и используйте как однородные, так и отсортированные сетки.

- 4.28. Проведите анализ задачи о поведении показанной здесь консоли с использованием конечно-элементной программы. Используйте элементную идеализацию, как для двумерного случая плоских напряжений, чтобы построить решение для статической реакции.

- (а) Используйте сетки для элементов с четырьмя узлами.
(б) Используйте сетки для элементов с девятью узлами.

Для каждого случая постройте последовательность сеток и идентифицируйте скорость сходимости энергии деформаций.



Кроме того, сравните ваши конечно-элементные решения с решениями, использующими теории поведения балок согласно Бернулли–Эйлеру и Тимошенко (см. [Crandal et al. 1978], а также раздел 5.4.1.).

- 4.29. Рассмотрите показанный здесь элемент в форме стержня с тремя узлами. Постройте и покажите на графике функции смещения для данного элемента применительно к следующим двум случаям:

для случая 1:

$$h_i = 1 \text{ в узле } i, i = 1, 2, 3$$

$$= 0 \text{ в узле } j \neq i.$$

для случая 2:

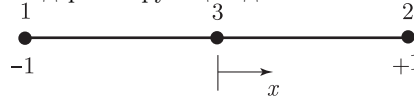
$$h_i = 1 \text{ в узле } i, i = 1, 2$$

$$= 0 \text{ в узле } j \neq i, j = 1, 2$$

$$h_3 = 1 \text{ в узле } 3,$$

$$h_3 = 0 \text{ в узлах } 1, 2.$$

Мы замечаем, что функции для случаев 1 и 2 содержат одни и те же вариации смещений и, следовательно, соответствуют одному и тому же пространству смещений. Кроме того, наборы этих функций обладают свойством иерархичности, так как элемент с тремя узлами содержит функции для элемента с двумя узлами.



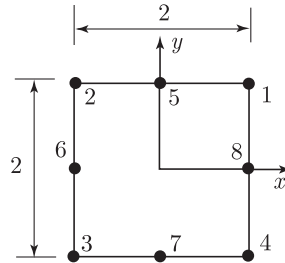
- 4.30. Рассмотрите показанный здесь элемент с восемью узлами. Идентифицируйте члены, соответствующие треугольнику Паскаля, присутствующие в интерполяциях для данного элемента.

$$h_1 = \frac{1}{4}(1+x)(1+y), \quad h_2 = \frac{1}{4}(1-x)(1+y),$$

$$h_3 = \frac{1}{4}(1-x)(1-y), \quad h_4 = \frac{1}{4}(1+x)(1-y),$$

$$h_5 = \frac{1}{2}(1+y)\phi_2(x), \quad h_6 = \frac{1}{2}(1-x)\phi_2(y),$$

$$h_7 = \frac{1}{2}(1-y)\phi_2(x), \quad h_8 = \frac{1}{2}(1+x)\phi_2(y),$$



где функция ϕ_2 определяется в примере 4.26.

4.31. Некий p -элемент порядка $p = 4$ получен здесь путем использования следующих функций для смещений:

h_i , $i = 1, 2, 3, 4$ — как для базового элемента с четырьмя узлами (имеющего узлы только на углах; см. пример 4.6);

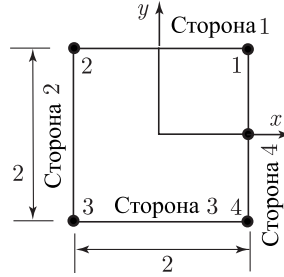
h_i , $i = 5, \dots, 16$ — для представления мод, соответствующих сторонам:

сторона 1: $h_i^{(1)} = (1/2)(1 + y)\phi_j(x)$; $i = 5, 9, 13$; $j = 2, 3, 4$,

сторона 2: $h_i^{(2)} = (1/2)(1 - x)\phi_j(y)$; $i = 6, 10, 14$; $j = 2, 3, 4$,

сторона 3: $h_i^{(3)} = (1/2)(1 - y)\phi_j(x)$; $i = 7, 11, 15$; $j = 2, 3, 4$,

сторона 4: $h_i^{(4)} = (1/2)(1 + x)\phi_j(y)$; $i = 8, 12, 16$; $j = 2, 3, 4$,



где функции ϕ_2 , ϕ_3 и ϕ_4 были определены в примере 4.26. Функция h_{17} характеризует внутреннюю моду,

$$h_{17} = (1 - x^2)(1 - y^2).$$

Идентифицируйте члены, соответствующие треугольнику Паскаля, присутствующие в интерполяциях для данного элемента.

4.32. Рассмотрите анализ задачи, сформулированной в примере 4.6. Воспользуйтесь конечно-элементной программой с сетками для элементов с девятью узлами, описанными в упражнении 4.27, и постройте графики для поддиапазонов изменения напряжения Мизеса и давления (без использования сглаживания напряжений). Следовательно, вид этих поддиапазонов покажет наличие разрывов напряжений на границах между элементами. Покажите, как эти поддиапазоны сходятся к непрерывным диапазонам изменения напряжений в случае консольной пластины.

4.4. Несовместимые и смешанные модели конечных элементов

В предыдущих разделах мы рассматривали метод конечных элементов, основанный на исследовании смещений, и те условия, которые до сего времени налагались на поведение функций, определяющих предполагаемую форму смещений (или полей), сводились к условиям полноты и совместимости. Если эти условия удовлетворяются, то рассчитанное решение сходится по энергии деформаций к точному решению монотонно (т. е. односторонним образом). Удовлетворить условию полноты оказывается, вообще говоря, сравнительно просто. Условие совместимости также может быть выполнено без существенных затруднений при решении C^0 -задач, например, для задач о плоских напряжениях и о плоских деформациях, или при анализе поведения трехмерных твердых тел наподобие пластин. Однако при исследовании задач об оболочках, а также при комплексных анализах, когда для идеализации различных частей конструкции должны использоваться совершенно разные конечные элементы, может оказаться совершенно невозможным поддерживать совместимость. Тем не менее, хотя требования совместимости и нарушаются, но все же опыт свидетельствует о том, что результаты зачастую получаются хорошими.

Кроме того, в процессе поиска конечных элементов было установлено, что при исследовании оболочек и при анализе несжимаемой среды метод, целиком основанный на исследовании смещений, не является эффективным. Для этих задач трудности, связанные с разработкой совместимых конечных элементов, основанных на изучении смещений, а также реализация того факта, что путем применения вариационных подходов можно разработать значительно больше конечно-элементных дискретизаций, привели к проявлению немалых исследовательских усилий. Такого рода активность привела к предложению различных классов элементов нового типа, причем мы располагаем большим объемом

информации о таких элементах. Мы не будем давать детального представления различных формулировок и дадим лишь краткое описание некоторых из наиболее важных использованных при этом идей, а затем сосредоточимся на формулировке, пригодной для большого класса задач, касающихся анализа почти несжимаемых сред. Что касается исследования конструкций типа пластин и оболочек, при котором используются многие из описанных ниже концепций, то они будут затем обсуждаться в главе 5.

4.4.1. Несовместимые модели, базирующиеся на исследовании смещений

Часто делаемое на практике наблюдение сводится к тому, что удовлетворительные результаты конечно-элементного анализа были получены несмотря на нарушение некоторых требований о непрерывности на границах между базирующимися на исследовании смещений элементами, при использовании конкретного вида сетки. В некоторых случаях расположение узловых точек было таким, что межэлементная непрерывность не поддерживалась, а в других случаях использовались элементы, содержавшие варианты межэлементной несовместимости (см. пример 4.28). В каждом случае окончательный результат был одним и тем же, а именно, он гласил, что при переходе от элемента к элементу либо сами смещения, либо их производные не оказывались непрерывными в той степени, какая необходима для удовлетворения всем условиям совместимости, обсуждавшимся в разделе 4.3.2.

В связи с тем, что при конечно-элементном анализе с использованием несовместимых (неконформных) элементов не выполняются требования, сформулированные в разделе 4.3.2, вычисленный полный энергетический потенциал не обязательно представляет собой верхний предел полной потенциальной энергии системы и, следовательно, монотонная сходимость не обеспечивается. Однако если даже ослабить требование достижения монотонной сходимости при анализе, нам все же нужно сформулировать условия, обеспечивающие, как минимум, немонотонную сходимость.

Если обратиться к разделу 4.3, то ясно, что полнота элементов должна удовлетворяться всегда, причем можно отметить, что размер конечного элемента не влияет на выполнение этого условия. Напомним, что элемент является полным, если он может представлять как моды твердого тела (но элементная матрица при этом не имеет ложных нулевых собственных значений), так и состояния постоянной деформации.

Однако условие совместимости может быть несколько смягчено за счет отказа от получения монотонно сходящегося решения, если только при таком смягчении не будут потеряны наиболее существенные ингредиенты условия полноты. Напомним, что по мере измельчения конечно-элементной сетки (т.е. при непрерывном уменьшении размера элементов) каждый элемент должен приближаться к выполнению условия постоянной деформации. Поэтому второе условие относительно сходимости для комплекса несовместимых конечных элементов, имеющих, опять-таки, произвольные размеры, состоит в том, что, будучи собраны вместе, эти элементы могут представлять условия постоянной деформации. Мы должны отметить, что *это не есть условие, налагаемое на одиночный индивидуальный элемент, а условие для комплекса элементов*. Иначе говоря, даже если индивидуальный элемент способен представить все состояния постоянной деформации, но он используется в комплексе, то наличие несовместимостей между элементами может воспрепятствовать представлению состояний постоянной деформации. Мы можем назвать это условие *условием полноты для комплекса элементов*.

В качестве теста, предназначенного для исследования того обстоятельства, является ли полным комплекс неконформных элементов, был предложен *групповой тест* (см. [Irons, Razzaque 1972]). При этом тесте рассматривается некий конкретный элемент, а группа элементов подчиняется минимальным граничным условиям для смещений, предназначенным для исключения всех твердотельных мод, а также воздействию таких сил в граничных узловых точках, которые по данным анализа должны были бы привести к условиям постоянного напряжения. Если для *любой* группы элементов напряжения в элементах действительно соответствуют условиям постоянства напряжений и если смещения во всех узловых точках предсказаны правильно, то мы говорим, что этот элемент успешно проходит

групповой тест. Если учесть также, что группа состоит из одного-единственного элемента, то этот тест свидетельствует о том, что сам элемент является полным, а также что условие полноты выполняется для любого комплекса элементов.

Разумеется, число состояний постоянного напряжения при групповом тесте зависит от того фактического числа такого рода состояний, которое свойственно выбранной математической модели; например, при проведении анализа с плоскими напряжениями групповой тест должен рассматривать три состояния постоянного напряжения, тогда как при полном трехмерном анализе должны быть возможными шесть состояний такого рода.

Рисунок 4.39 показывает типичную группу элементов, используемых при численном исследовании различных задач. Разумеется, здесь рассматривается только одна сетка с деформированными элементами, тогда как фактически следовало бы проанализировать любую группу деформированных элементов, а это, однако, требует наличия аналитического решения. Если на практике элемент является полным и если показанные здесь конкретные формы анализа приводят к правильным результатам, то весьма правдоподобно, что данный элемент успешно прошел групповой тест.

При рассмотрении элементов, базирующихся на использовании смещений и имеющих несовместимости, успешное прохождение группового теста служит обеспечением сходимости (хотя эта сходимость может оказаться немонойтонной, а также очень медленной).

Групповой тест используется для оценки качества сеток с несовместимыми конечными элементами, причем мы можем заметить, что в тех случаях, когда должным образом сформулированные и основанные на использовании смещений элементы используются в совместимых сетках, групповой тест оказывается автоматически успешно пройденным.

Рисунок 4.40 а показывает группу элементов с восемью узлами (они подробно обсуждаются в разделе 5.2). Показаны также и тяговые силы, соответствующие групповому тесту для случая плоских напряжений. Элементы образуют совместимую сетку и, следовательно, групповой тест пройден успешно.

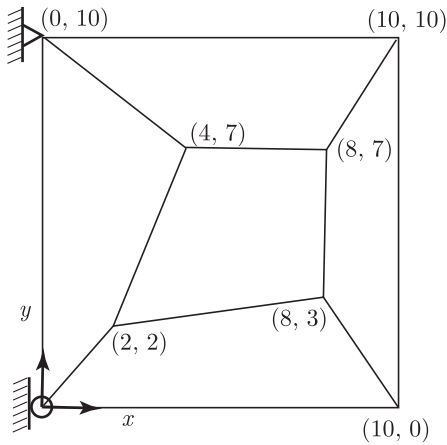
Однако теперь, если мы придадим узлам 1 и 8 индивидуальные степени свободы для соседних элементов (например, в узле 2 мы придаем две степени свободы u и v , каждая для элементов 1 и 2), такие, что смещения в этих узлах не связаны между собой (и поэтому вдоль кромок имеют место несовместимости смещений), то групповой тест не будет пройден. На рис. 4.40 б приводятся некоторые результаты получаемого решения.

В примере, приведенном на рис. 4.40 б, используется, по существу, тот элемент, который был предложен в работе [Wilson et al. 1973]. Учитывая, что степени свободы узлов в серединах сторон элемента не обеспечивают связи с соседними элементами, они могут быть статически исключены из рассмотрения на элементном уровне (см. раздел 8.2.4), так что получается элемент с четырьмя узлами. Однако, как это отмечено на рис. 4.40 б, данный элемент не выдерживает группового теста. В приводимом ниже примере мы рассматриваем этот элемент более подробно, сначала в качестве квадратного элемента, а затем — как четырехугольный элемент общего вида. Мы приводим также способ такой корректировки данного элемента, чтобы он всегда проходил групповой тест (см. [Wilson, Ibrahimbegovic 1990]).

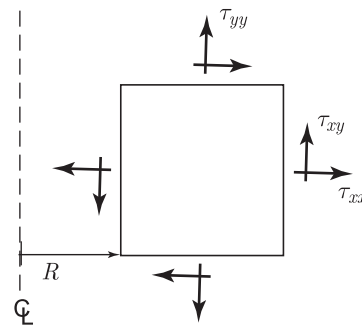
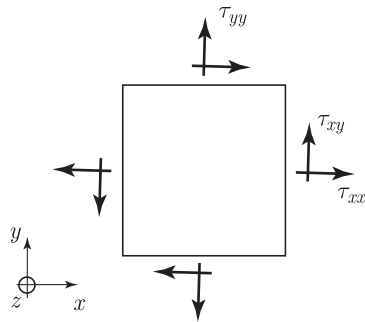
Пример 4.28: Рассмотрим квадратный элемент с четырьмя узлами, имеющий несовместимые моды и показанный на рис. 4.41 а; требуется определить, будет ли успешно пройден групповой тест. Затем рассмотрим четырехугольный элемент общего вида, показанный на рис. 4.41 б и повторим это исследование.

Мы замечаем, что квадратный элемент представляет собой специальный случай четырехугольного элемента общего вида. Фактически, выражение для четырехугольного элемента использует квадратный элемент в качестве базиса и с применением в процессе интерполяции естественных координат (r, s) , как это обсуждается в разделе 5.2.

Для определения указанного элемента мы можем аналитически исследовать, будет ли, или при каких условиях будет успешно пройден групповой тест. Во-первых, мы вспоминаем об успешном прохождении группового теста совместимым элементом с четырьмя узлами (т. е. когда не используются интерполяции ϕ_1 и ϕ_2 для смещений).



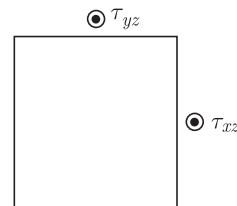
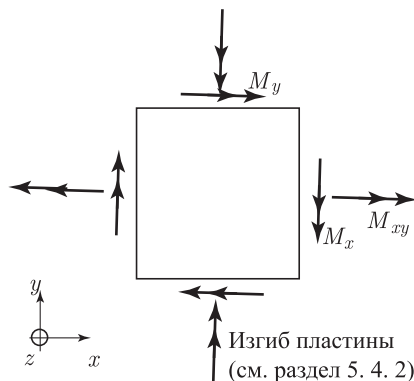
- а. Группа элементов, двумерные элементы, элементы для изгибающейся пластины, или боковой вид трехмерных элементов. Каждая четырехугольная область служит представлением элемента; для треугольных и тетраэдральных элементов каждая четырехугольная область подвергается дальнейшему подразделению



Плоские напряжения и плоские деформации:

τ_{xx} τ_{yy} τ_{xy} постоянны; при трехмерном анализе тестируются три дополнительных условия постоянства τ_{zz} τ_{zx} и τ_{yz}

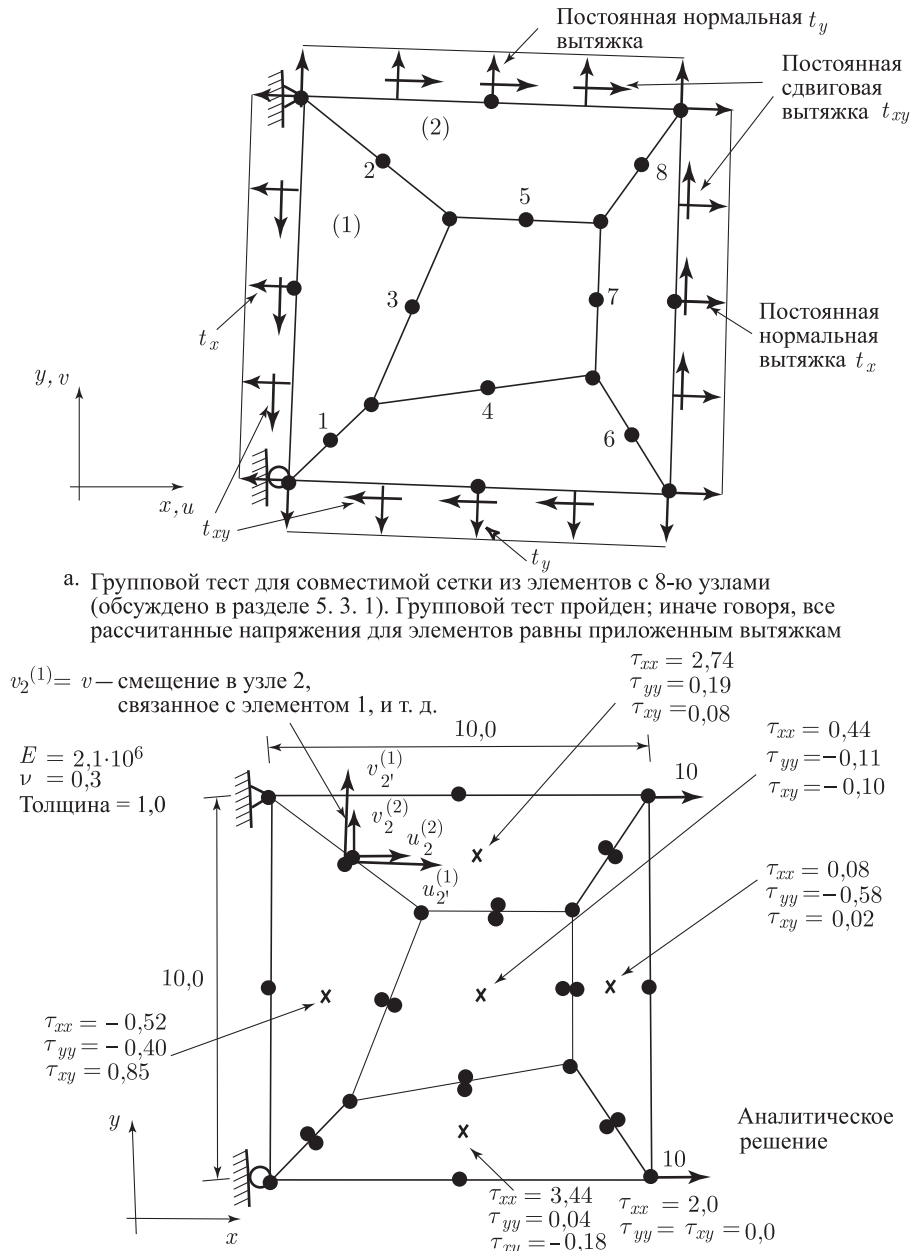
Осесимметричная задача; здесь осуществляется тест для $R \rightarrow \infty$



(этот тест продуцирует также изгиб)

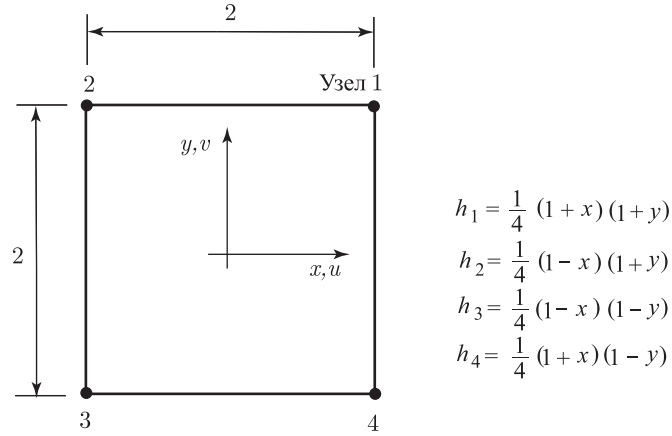
- б. Условия для напряжений, предназначенных для тестирования

Рис. 4.39. Групповые тесты



б. Групповой тест для несовместимой сетки из элементов с 8-ю узлами. Все узлы в серединах сторон являются здесь индивидуальными узлами элементов, причем их степени свободы не связаны с соседними элементами. Следовательно, там, где на рис. 4. 18а расположен только один узел, теперь располагаются два узла. Результаты группового теста показаны в центрах элементов для внешних вытяжек, приложенных в направлении оси x (заметим, что внешним нагрузкам подвергаются только угловые узлы всей группы)

Рис. 4.40. Результаты группового тестирования с использованием геометрии групп и элементов, данной на рис. 4.39

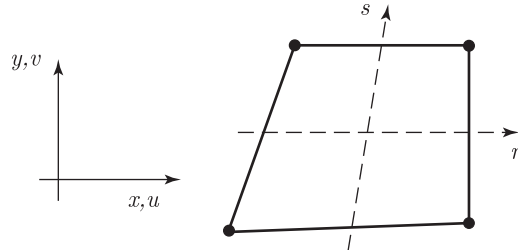


Интерполяционные функции для смещений

$$u = \sum_{i=1}^4 h_i v_i + \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2; \quad \phi_1 = (1-x^2);$$

$$v = \sum_{i=1}^4 h_i u_i + \alpha_3 \phi_1 + \alpha_4 \phi_2; \quad \phi_2 = (1-y^2);$$

а. Квадратный элемент



б. Четырехугольный элемент общего вида (здесь h_i и ϕ_i используются с координатами r, s ; см. раздел 5.2)

Рис. 4.41. Элемент с плоскими напряжениями, имеющий четыре узла, несовместимые моды и постоянную толщину

После этого будем считать, что данный элемент находится в условиях постоянных напряжений τ^c . Тогда требование об успешном прохождении группового теста сводится к тому, чтобы при этих условиях постоянных напряжений элемент вел себя точно таким же образом, как и совместимый элемент с четырьмя узлами.

Вывод формального математического условия может быть проведен путем рассмотрения матрицы жесткости для элемента с совместимыми модами.

Пусть мы имеем

$$\hat{\mathbf{u}}^* = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix}$$

при $\hat{\mathbf{u}} = [u_1 \quad \dots \quad u_4 \quad \vdots \quad v_1 \quad \dots \quad v_4]$ и $\boldsymbol{\alpha}^T = [\alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_4]$. Тогда

$$\boldsymbol{\epsilon} = [\mathbf{B} \quad \vdots \quad \mathbf{B}_{IC}] \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix},$$

где \mathbf{B} — это обычная матрица связи деформация–смещение для элемента с четырьмя узлами, а \mathbf{B}_{IC} — это вклад в нее, соответствующий несовместимым модам.

В результате при наших обычных обозначениях имеем

$$\begin{bmatrix} \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV & \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{D}_{IC} dV \\ \int_V \mathbf{B}_{IC}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV & \int_V \mathbf{B}_{IC}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{IC} dV \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (a)$$

На практике параметры $\boldsymbol{\alpha}$, соответствующие несовместимым смещениям, могли бы быть теперь статически исключены так, чтобы получилась матрица жесткости для данного элемента, соответствующая только степеням свободы в количестве $\hat{\mathbf{u}}$.

Если смещения в узловых точках представляют собой физически правильные значения $\hat{\mathbf{u}}^c$ для плоских напряжений $\boldsymbol{\tau}^c$, то мы имеем

$$\int_V \mathbf{B}_{IC}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \hat{\mathbf{u}}^c = \int_V \mathbf{B}_{IC}^T \boldsymbol{\tau}^c dV. \quad (b)$$

Чтобы теперь заставить элемент в условиях постоянных напряжений вести себя так же, как совместимый элемент с четырьмя узлами, мы требуем, чтобы (с учетом того, что вклады в $\boldsymbol{\tau}^c$ независимы друг от друга)

$$\int_V \mathbf{B}_{IC}^T dV = 0. \quad (c)$$

Если условие (c) выполняется, то из соотношений (a) находим:

Если силы в узловых точках данного элемента те же, что и для совместимого элемента с четырьмя узлами, то решение имеет вид $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}^c$ и $\boldsymbol{\alpha} = 0$. Кроме того, разумеется, если мы положим $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}^c$ и $\boldsymbol{\alpha} = 0$, то из соотношений (a) получим силы в узловых точках для совместимого элемента с четырьмя узлами и никаких сил, соответствующих несовместимым модам.

Следовательно, при соблюдении условий постоянства напряжений данный элемент ведет себя так, как если бы несовместимые моды отсутствовали.

Теперь нам нетрудно проверить, выполняется ли условие (c) для квадратного элемента:

$$\int_V \begin{bmatrix} -2x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2y \\ 0 & -2y & -2x & 0 \end{bmatrix} dV = 0.$$

Однако проверка показывает также, что вышеупомянутое условие не выполняется для четырехугольного элемента общего вида (здесь для вычисления \mathbf{B}_{IC} используется применяемое в разделе 5.2 преобразование Якоби). Поэтому для выполнения условия (c) мы модифицируем матрицу \mathbf{B}_{IC} с помощью поправки \mathbf{B}_{IC}^C и используем

$$\mathbf{B}_{IC}^{\text{новое}} = \mathbf{B}_{IC} + \mathbf{B}_{IC}^C.$$

В применении к $\mathbf{B}_{IC}^{\text{новое}}$ условие (c) дает

$$\mathbf{B}_{IC}^C = -\frac{1}{V} \int_V \mathbf{B}_{IC} dV.$$

После этого матрица жесткости элемента получается путем подстановки в соотношения (a) взамен \mathbf{B}_{IC} матрицы $\mathbf{B}_{IC}^{\text{новое}}$. На практике матрица жесткости элемента вычисляется с помощью численного интегрирования (см. главу 5), а \mathbf{B}_{IC}^C вычисляется путем численного интегрирования до расчета в соответствии с (a).

При вышеописанном групповом тесте мы проводили его только для условий постоянных напряжений. Любая группа элементов с несовместимостями должна быть способна представлять указанные условия, если только необходимо обеспечивать сходимость.

По своей сути этот групповой тест представляет собой задачу с граничными значениями при заданных внешних силах (силы \mathbf{f}^B равны нулю, а тяговые силы \mathbf{f}^S постоянны), когда вычисляются деформации и внутренние напряжения (чтобы сделать решение возможным, твердотельные моды попросту подавляются). Если деформации и постоянные напряжения определены правильно, то групповой тест будет успешно пройден и, кроме того (в связи с тем, что, как минимум, постоянные напряжения могут быть правильно предопределены), сходимость по данным о напряжениях будет иметь, как минимум, порядок $o(h)$.

Данная здесь интерпретация группового теста наводит на мысль о том, что аналогичным же образом мы можем провести тест относительно порядка сходимости дискретизации. А именно, если использовать ту же самую концепцию, то мы можем взамен прежнего приложить к объекту такие внешние силы, которые соответствуют вариациям внутренних напряжений высокого порядка и проверить, будут ли правильно определены напряжения. Например, если мы желаем проверить, будет ли некая форма дискретизации обеспечивать квадратичный порядок сходимости по напряжениям, т. е. будут ли значения напряжений сходиться с порядком $o(h^2)$, то необходимо правильно представить линейную вариацию напряжений. Из определяющих дифференциальных уравнений равновесия мы делаем вывод о том, что соответствующий групповой тест должен быть применен к случаю постоянных значений внутренних сил и соответствующих граничных тяговых сил. Хотя численные результаты являются, опять-таки, весьма интересными и обладают ценностью, как и при проведении теста в условиях постоянных напряжений, однако только аналитические результаты могут обеспечить такую ситуацию, при которой для всех геометрических искажений элементов в данной группе будут найдены правильные значения напряжений и деформаций (дальнейшее обсуждение этого вопроса и результатов расчетов см. в разделе 5.3.3).

Разумеется, на практике, при проверке формулировок для элементов эта формальная процедура оценки порядка сходимости зачастую не проводится, а вместо этого для идентификации предсказуемых качеств элемента используется последовательность простых тестовых задач.

4.4.2. Смешанные модели

Чтобы построить модели для конечных элементов, базирующихся на исследовании смещений, мы использовали принцип виртуальных перемещений, а это эквивалентно признанию постоянства полной потенциальной энергии Π (см. пример 4.4). Используемые при этом теоретические основы можно кратко суммировать следующим образом.

1. Мы используем ¹⁾

$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} dV - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{f}^B dV - \int_{S_f} \mathbf{u}^{S_f T} \mathbf{f}^{S_f} dS$$

— постоянная величина

(4.109)

при условиях

$$\boldsymbol{\epsilon} = \partial_{\epsilon} \mathbf{u}, \quad (4.110)$$

$$\mathbf{u}^{S_u} - \mathbf{u}_p = 0, \quad (4.111)$$

¹⁾ В данном разделе, как и в уравнении (4.7), вместо обычного обозначения \mathbf{f}^S мы используем обозначение \mathbf{f}^{S_f} , чтобы дать явное указание на тот факт, что речь идет о тяговых силах, приложенных к S_f . Аналогично этому, в данном разделе фигурируют также тяговые силы \mathbf{f}^{S_u} и поверхностные смещения \mathbf{u}^{S_f} и \mathbf{u}^{S_u} . Определения этих величин даны в разделе 4.2.1.

где символ ∂_ϵ соответствует дифференциальному оператору, действующему на \mathbf{u} для получения компонентов деформации, вектор \mathbf{u}_p содержит заданные смещения, а вектор \mathbf{u}^{S_u} перечисляет соответствующие компоненты смещений \mathbf{u} . Если компоненты деформаций соответствуют порядку, указанному в (4.3), то мы имеем

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix}; \quad \partial_\epsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}.$$

2. Уравнения равновесия получаются за счет использования условия постоянства Π (по отношению к тем смещениям, которые фигурируют в выражениях для деформаций),

$$\int_V \delta \epsilon^T \mathbf{C} \epsilon dV = \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^B dV + \int_{S_f} \delta \mathbf{u}^{S_f T} \mathbf{f}^{S_f} dS. \quad (4.112)$$

Вариации переменной \mathbf{u} должны обращаться в нуль при заданных смещениях на площади поверхности S_u и соответствовать этим смещениям. Напомним, что для получения из (4.112) дифференциальных уравнений равновесия, а также граничных условий (естественных) для напряжений, мы делаем подстановку $\mathbf{C} \epsilon = \boldsymbol{\tau}$ и обращаем процесс преобразования, примененный в примере 4.2 (см. разделы 3.3.2 и 3.3.4). Поэтому соотношение связи напряжение–деформация, условия зависимости деформаций от смещений из (4.110), а также граничные условия (4.111) для смещений, выполняются непосредственно, а условие дифференциального равновесия (во внутренней области и на границе) является следствием условия постоянства Π .

3. При построении конечно-элементного решения, осуществляемого на основе изучения смещений, уравнение связи напряжение–деформация, условия зависимости деформаций от смещений согласно (4.110) и граничные условия (4.111) для смещений удовлетворяются точно, однако дифференциальные уравнения во внутренней области и граничные условия (естественные) для напряжений удовлетворяются только в пределе, по мере увеличения числа элементов.

Важная особенность, которую следует отметить в связи с использованием соотношений (4.109)–(4.112) для построения конечно-элементного решения, состоит в том, что смещения представляют собой единственную группу искоемых переменных, которые должны удовлетворять граничным условиям (4.111) для смещений, а также надлежащим межэлементным условиям. Если мы уже выполнили расчет смещений, то можно непосредственно получить сведения и о других интересующих нас переменных, таких, как деформации и напряжения.

На практике конечно-элементная модель, основанная на исследовании смещений, используется чаще всего; однако и другие методики были нередко успешно применены, причем в некоторых случаях они оказались значительно более эффективными (см. раздел 4.4.3).

Некоторые конечно-элементные модели весьма общего характера получаются путем использования вариационных принципов, которые могут рассматриваться в качестве развития принципа постоянства полного потенциала. Эти расширенные вариационные принципы используют в качестве первичных переменных не только смещения, но также и деформации и/или напряжения. Поэтому при построении конечно-элементных решений неизвестными переменными являются также смещения и деформации и/или напряжения. О таких моделях говорят как о *смешанных конечно-элементных моделях*.

В качестве базиса для конечно-элементной модели могут использоваться различные расширенные вариационные принципы, а также многие разновидности конечно-элементных интерполяций. Хотя, как следствие вышесказанного, было предложено большое число смешанных конечно-элементных формулировок, см, например, [Handbook 1987], а также [Brezzi, Fortin 1991]), тем не менее наша цель здесь состоит лишь в том, чтобы вкратце изложить некоторые основные идеи, которые будут впоследствии использоваться для формулировки некоторых эффективных схем решения (см. разделы 4.4.3 и 5.4).

Чтобы сформулировать некий весьма общий и мощный вариационный принцип, перепишем соотношение (4.109) в форме

$$\Pi^* = \Pi - \int_V \lambda_\epsilon^T (\epsilon - \partial_\epsilon \mathbf{u}) dV - \int_{S_u} \lambda_u^T (\mathbf{u}^{S_u} - \mathbf{u}_p) dS$$

— стационарная, (4.113)

где λ_ϵ и λ_u — это множители Лагранжа, а S_u — это та поверхность, на которой заданы значения перемещений. Здесь множители Лагранжа используются для того, чтобы обеспечить принудительное выполнение условий (4.110) и (4.111) (см. раздел 3.4). Переменными в (4.113) являются \mathbf{u} , ϵ , λ_ϵ и λ_u . Если привлечь условие $\delta \Pi^* = 0$, то множители Лагранжа λ_ϵ и λ_u идентифицируются, соответственно, как напряжения $\boldsymbol{\tau}$ и тяговые силы на поверхности, S_u , \mathbf{f}^{S_u} , так что вариационный индикатор в (4.113) может быть выписан в форме

$$\Pi_{\text{HW}} = \Pi - \int_V \boldsymbol{\tau}^T (\epsilon - \partial_\epsilon \mathbf{u}) dV - \int_{S_u} \mathbf{f}^{S_u T} (\mathbf{u}^{S_u} - \mathbf{u}_p) dS. \quad (4.114)$$

Этот функционал называют функционалом Ху–Вашизу (см. [Hu 1955] и [Washizu 1955], [Washizu 1975]). Независимыми переменными в этом функционале являются смещения \mathbf{u} , деформации ϵ , напряжения $\boldsymbol{\tau}$, а также поверхностные тяговые силы \mathbf{f}^{S_u} . Этот функционал может быть использован для вывода некоторого числа других функционалов, таких, как функционалы Хеллингера–Рейсснера (см. [Hellinger 1914] и [Reissner 1950], а также примеры 4.30 и 4.31 и упражнение 4.36), а также функционал минимума добавочной энергии, и его можно рассматривать как основу для многих разновидностей метода конечных элементов (см. [Handbook 1987], [Pian, Tong 1969] и [Wunderlich 1970]).

Привлекая условие постоянства Π_{HW} по отношению к \mathbf{u} , ϵ , $\boldsymbol{\tau}$ и \mathbf{f}^{S_u} , получим

$$\begin{aligned} & \int_V \delta \epsilon^T \mathbf{C} \epsilon dV - \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^B dV - \int_{S_f} \delta \mathbf{u}^{S_f T} \mathbf{f}^{S_f} dS - \int_V \delta \boldsymbol{\tau}^T (\epsilon - \partial_\epsilon \mathbf{u}) dV - \\ & - \int_V \boldsymbol{\tau}^T (\delta \epsilon - \partial_\epsilon \delta \mathbf{u}) dV - \int_{S_u} \delta \mathbf{f}^{S_u T} (\mathbf{u}^{S_u} - \mathbf{u}_p) dS - \int_V \mathbf{f}^{S_u T} \delta \mathbf{u}^{S_u} dS = 0, \end{aligned} \quad (4.115)$$

где S_f — это та поверхность, на которой задаются известные значения тяговых сил.

Проведенное выше обсуждение свидетельствует о том, что вариационная схема Ху–Вашизу может рассматриваться как такое обобщение принципа виртуальных перемещений, в котором граничные условия для смещений и условия совместимости деформаций были смягчены, но затем поставлены с введением множителей Лагранжа, а вариации осуществляются по всем неизвестным смещениям, деформациям, напряжениям и по неизвестным поверхностным тяговым силам. То обстоятельство, что этот принцип действительно является правильным и наиболее общим описанием статических и кинематических условий для рассматриваемого тела, следует из того, что соотношение (4.115) должно оставаться справедливым для используемых здесь индивидуальных вариаций и приводит к следующим результатам.

Для объема тела.

Условие напряжение–деформация

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C} \epsilon. \quad (4.116)$$

Условие совместимости

$$\epsilon = \partial_\epsilon \mathbf{u}. \quad (4.117)$$

Условия равновесия

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x^B &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y^B &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + f_z^B &= 0.\end{aligned}\quad (4.118)$$

Для поверхности тела:

Приложенные тяговые силы уравниваются напряжениями

$$\mathbf{f}^{S_f} = \bar{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{n} \quad \text{на } S_f. \quad (4.119)$$

Реакции уравниваются напряжениями

$$\mathbf{f}^{S_u} = \bar{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{n} \quad \text{на } S_u, \quad (4.120)$$

где \mathbf{n} представляет собой единичный вектор нормали к поверхности, а $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ содержит в себе в матричной форме компоненты вектора $\boldsymbol{\tau}$.

Смещения на S_u равны заданным смещениям

$$\mathbf{u}^{S_u} = \mathbf{u}_p \quad \text{на } S_u. \quad (4.121)$$

Вариационная формулировка, данная в (4.115), представляет собой весьма общую континуальную формулировку задач теории упругости.

Если теперь рассмотреть возможности конечно-элементных процедур решения, то вариационный принцип Ху–Вашизу и принципы, полученные из него, могут быть непосредственно применены к построению различных конечно-элементных дискретизаций. При реализации этих процедур решения применимые здесь требования о непрерывности конечно-элементных переменных на границах как между элементами, так и со внешним пространством, должны выполняться либо непосредственно, либо с помощью введения множителей Лагранжа. Теперь становится очевидным, что при этой дополнительной гибкости в формулировке конечно-элементных методов можно предложить большое число различных конечно-элементных дискретизаций в зависимости от того, какой именно вариационный принцип полагается в основу данной схемы, какие при этом используются формы конечно-элементной интерполяции и каким образом осуществляется принудительное выполнение требований о непрерывности. При классификации разнообразных процедур дискретизации называют гибридные и смешанные конечно-элементные модели (см. [Handbook 1987], а также [Pian, Tong 1969]).

На приводимых ниже примерах мы демонстрируем, как используется принцип Ху–Вашизу.

Пример 4.29: Рассмотрим элемент фермы, имеющий три узла и показанный на рис. 4.42. Предположим, что имеет место параболическая вариация смещений и линейная вариация деформаций и напряжений. Кроме того, пусть переменные, обозначающие напряжение и деформацию, соответствуют внутренним степеням свободы элемента, так что только смещения в узлах 1 и 2 реализуют связь с соседними элементами. Требуется воспользоваться вариационным принципом Ху–Вашизу для расчета матрицы жесткости данного элемента.

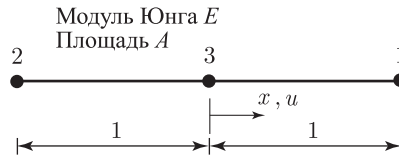


Рис. 4.42. Ферменный элемент с тремя узлами

Мы можем начать непосредственно с применения соотношения (4.115) и получить

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\int_V \delta \epsilon^T (C \epsilon - \tau) dV}_{\textcircled{1}} - \underbrace{\int_V \delta \tau^T (\epsilon - \partial_\epsilon u) dV}_{\textcircled{2}} + \\
& \quad + \underbrace{\int_V (\partial_\epsilon \delta u)^T \tau dV}_{\textcircled{3}} - \int_V \delta u^T f^B dV + \text{границные члены} = 0, \quad (\text{a})
\end{aligned}$$

где

$$\epsilon = \epsilon_{xx}; \quad \partial_\epsilon = \frac{\partial}{\partial x}; \quad \tau = \tau_{xx}; \quad C = E; \quad f^B = f_x^B,$$

а граничные члены соответствуют выражениям для S_f и S_u и не нужны для вычисления матрицы жесткости элемента.

Теперь воспользуемся нижеследующими интерполяциями:

$$\begin{aligned}
u &= \mathbf{H} \hat{\mathbf{u}}; \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{(1+x)x}{2} & -\frac{(1-x)x}{2} & 1-x^2 \end{bmatrix}; \\
\hat{\mathbf{u}}^T &= [u_1 \quad u_2 \quad u_3]; \\
\tau &= \mathbf{E} \hat{\tau}; \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{1+x}{2} & \frac{1-x}{2} \end{bmatrix}; \\
\epsilon &= \mathbf{E} \hat{\epsilon}; \\
\hat{\tau}^T &= [\tau_1 \quad \tau_2]; \quad \hat{\epsilon}^T = [\epsilon_1 \quad \epsilon_2].
\end{aligned}$$

Подставляя эти интерполяции в соотношение (а), мы получим выражение, соответствующее члену 1:

$$\delta \hat{\epsilon}^T \left(\left(\int_V \mathbf{E}^T C \mathbf{E} dV \right) \hat{\epsilon} - \left(\int_V \mathbf{E}^T \mathbf{E} dV \right) \hat{\tau} \right);$$

выражение, соответствующее члену 2:

$$\delta \hat{\tau}^T \left(- \left(\int_V \mathbf{E}^T \mathbf{E} dV \right) \hat{\epsilon} + \left(\int_V \mathbf{E}^T \mathbf{B} dV \right) \hat{\mathbf{u}} \right)$$

и выражение, соответствующее члену 3:

$$\delta \hat{\mathbf{u}}^T \left(\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} dV \right) \hat{\tau},$$

где

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} + x \right) & \left(-\frac{1}{2} + x \right) & -2x \end{bmatrix}.$$

В результате получим

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{K}_{u\tau} \\ 0 & \mathbf{K}_{\epsilon\epsilon} & \mathbf{K}_{\epsilon\tau} \\ \mathbf{K}_{u\tau}^T & \mathbf{K}_{\epsilon\tau}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\epsilon} \\ \hat{\tau} \end{bmatrix} = \dots, \quad (\text{b})$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{\epsilon\epsilon} &= \int_V \mathbf{E}^T C \mathbf{E} dV, \\
\mathbf{K}_{u\tau} &= \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} dV
\end{aligned}$$

и

$$\mathbf{K}_{\epsilon\tau} = - \int_V \mathbf{E}^T \mathbf{E} dV.$$

Если теперь мы подставим сюда выражения для \mathbf{V} и \mathbf{E} и исключим из рассмотрения степени свободы, соответствующие ϵ_i и τ_i (потому что они, согласно предположению, свойственны только данному элементу и, следовательно, на границах между соседними элементами допустимы скачки напряжений и деформаций), то из соотношения (b) получим

$$\frac{EA}{6} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \dots$$

Эта матрица жесткости идентична матрице для ферменного элемента, полученного на основе изучения смещений и имеющего три узла; именно этого и следовало ожидать, пользуясь предположениями о линейной деформации и параболическом смещении.

Однако нам следует отметить, что если бы на элементном уровне не были исключены из рассмотрения переменные, характеризующие напряжения и деформации в элементе, а вместо этого они были бы использованы для обеспечения непрерывности напряжений и деформаций на границах между элементами, то ясно, что при матрице жесткости элемента, содержащейся в (b), матрица жесткости для комплекса элементов целом не будет положительно определенной.

Разумеется, проведенные выкладки могли бы быть продолжены с целью получения матриц жесткости для ферменных элементов при различных предположениях относительно смещений, напряжений и деформаций. Однако полученный элемент окажется полезным, только если интерполяции проведены «законным» образом и фактически удовлетворяют специальным требованиям (см. раздел 4.5).

Пример 4.30: Рассмотрим элемент типа балки, имеющий два узла и показанный на рис. 4.43. Сделаем предположение о линейных вариациях по поперечным смещениям w и по углу поворота сечения θ , а также будем считать постоянной сдвиговую деформацию γ в элементе. Требуется вывести конечно-элементные уравнения.

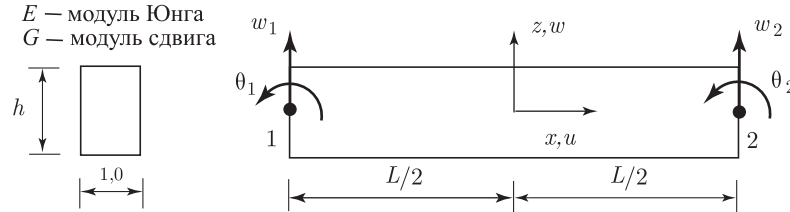


Рис. 4.43. Элемент типа балки с двумя узлами

Будем предполагать, что напряжения определяются деформациями, на основании чего в соотношении (4.114) можем сделать замену $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon}$ и получить

$$\Pi_{\text{HR}}^* = \int_V \left(-\frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{C} \partial \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{f}^B \right) dv + \text{граничные члены.} \quad (\text{a})$$

Этот вариационный индикатор представляет собой также функционал Хеллингера–Рейсснера, однако сравнивая выражение из (a) с функционалом, фигурирующим в упражнении 4.36, мы замечаем, что здесь деформации и смещения являются независимыми переменными (в отличие от напряжений и смещений в упражнении 4.36).

В нашей формулировке, соответствующей балке, переменными являются u , w и γ_{xz}^{AS} (верхний индекс AS обозначает предполагаемое постоянное значение). Следовательно, изгибная деформация ϵ_{xx} вычисляется по смещению, и мы можем подвергнуть дальнейшей конкретизации выражение из (a), получая

$$\tilde{\Pi}_{\text{HR}}^* = \int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon_{xx} E \epsilon_{xx} - \frac{1}{2} \gamma_{xz}^{\text{AS}} G \gamma_{xz}^{\text{AS}} + \gamma_{xz}^{\text{AS}} G \gamma_{xz} - \mathbf{u}^T \mathbf{f}^B \right) dV + \text{граничные члены,}$$

где

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}; \quad \epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Теперь, обращаясь к условию $\delta \tilde{\Pi}_{HR}^* = 0$, мы получим в соответствии с $\delta \mathbf{u}$ (не включая граничные члены)

$$\int_V (\delta \epsilon_{xx} E \epsilon_{xx} + \delta \gamma_{xz} G \gamma_{xz}^{\text{AS}}) dV = \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^B dV, \quad (\text{b})$$

а в соответствии с $\delta \gamma_{xz}^{\text{AS}}$ получим

$$\int_V \delta \gamma_{xz}^{\text{AS}} G (\gamma_{xz} - \gamma_{xz}^{\text{AS}}) dV = 0. \quad (\text{c})$$

Положим

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}; \quad \hat{\boldsymbol{\epsilon}} = [\gamma^{\text{AS}}].$$

Тогда можем написать

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{H} \hat{\mathbf{u}}; & \epsilon_{xx} &= \mathbf{B}_b \hat{\mathbf{u}}, \\ \gamma_{xz} &= \mathbf{B}_s \hat{\mathbf{u}}; & \gamma_{xz}^{\text{AS}} &= \mathbf{B}_s^{\text{AS}} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}. \end{aligned}$$

После подстановки этих выражений в (b) и (c) получим

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\epsilon} \\ \mathbf{K}_{u\epsilon}^T & \mathbf{K}_{\epsilon\epsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{d})$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{uu} &= \int_V \mathbf{B}_b^T E \mathbf{B}_b dV; & \mathbf{K}_{u\epsilon} &= \int_V \mathbf{B}_s^T F \mathbf{B}_s^{\text{AS}} dV; \\ \mathbf{K}_{\epsilon\epsilon} &= - \int_V (\mathbf{B}_s^{\text{AS}})^T G \mathbf{B}_s^{\text{AS}} dV; & \mathbf{R}_B &= \int_V \mathbf{H}^T \mathbf{f}^B dV. \end{aligned}$$

Теперь мы можем применить к $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ операцию статического сжатия и получить окончательное выражение для матрицы жесткости элемента:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{uu} - \mathbf{K}_{u\epsilon} \mathbf{K}_{\epsilon\epsilon}^{-1} \mathbf{K}_{u\epsilon}^T.$$

В данном случае мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{z}{L} \left(\frac{L}{2} - x \right) & 0 & -\frac{z}{L} \left(\frac{L}{2} + x \right) \\ \frac{1}{L} \left(\frac{L}{2} - x \right) & 0 & \frac{1}{L} \left(\frac{L}{2} + x \right) & 0 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{B}_b &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{z}{L} & 0 & -\frac{z}{L} \end{bmatrix}; \\ \mathbf{B}_s &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \left(\frac{L}{2} - x \right) & \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \left(\frac{L}{2} + x \right) \end{bmatrix}; \\ \mathbf{B}_s^{\text{AS}} &= [1], \end{aligned}$$

так что

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{Gh}{L} & \frac{Gh}{2} & -\frac{Gh}{L} & \frac{Gh}{2} \\ \frac{Gh}{2} & \left(\frac{GhL}{4} + \frac{Eh^3}{12L}\right) & -\frac{Gh}{2} & \left(\frac{GhL}{4} - \frac{Eh^3}{12L}\right) \\ -\frac{Gh}{L} & -\frac{Gh}{2} & \frac{Gh}{L} & -\frac{Gh}{2} \\ \frac{Gh}{2} & \left(\frac{GhL}{4} - \frac{Eh^3}{12L}\right) & -\frac{Gh}{2} & \left(\frac{GhL}{4} + \frac{Eh^3}{12L}\right) \end{bmatrix}. \quad (e)$$

Интересно отметить, что формулировка, базирующаяся только на смещениях, дала бы очень похожую матрицу жесткости. Единственное отличие состояло бы в том, что взятые в кружок члены были бы равны $GhL/3$ на диагонали и $GhL/6$ на внедиагональных позициях. Однако предсказательная способность модели элемента, базирующейся на смещениях, разительно отличается от того, что приведено здесь. Если такой элемент является тонким, то его поведение оказывается чрезмерно жестким (это явление обсуждается в разделах 4.5.7 и 5.4.1).

Отметим, что если мы предположим, что вектор смещений соответствует только поворотам сечения, т. е. если

$$\hat{\mathbf{u}} = [0 \quad \alpha \quad 0 \quad -\alpha],$$

то при использовании (e) он обнаруживает только изгибную жесткость, тогда как элемент, базирующийся только на смещениях, дает ошибочный вклад в сдвиговые силы.

Отметим, наконец, что матрица жесткости, определяемая формулой (e), соответствует матрице, полученной при смешанном подходе с интерполяцией, подробно обсуждаемом в разделе 5.4.1. А именно, если мы воспользуемся последним из уравнений (d), соответствующим уравнению (c), то получим

$$\gamma_{xz}^{\text{AS}} = \frac{w_2 - w_1}{L} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2},$$

откуда видно, что предполагаемое значение сдвиговой деформации равно значению этой деформации в средней точке балки, вычисленному по смещениям в узловых точках.

Как указывалось выше, принцип Ху–Вашизу обеспечивает базис для вывода многих вариационных принципов, с помощью которых могут быть построены многочисленные различные смешанные конечно-элементные дискретизации. Однако, будет ли конкретная версия конечно-элементной дискретизации эффективной при практическом анализе, — это зависит от многих факторов, в частности, от того, обладает ли данный метод степенью общности, достаточной для определенного класса приложений, является ли метод устойчивым с достаточно высокой скоростью сходимости, насколько он эффективен в вычислительном отношении и каковы качества этого метода в сравнении с другими схемами расчета. Смешанные схемы конечно-элементной дискретизации могут принести некоторые преимущества при определенных видах анализа, если сравнивать их со стандартной дискретизацией на базе использования смещений, однако же имеются две обширные области, для которых использование смешанных элементов оказывается значительно более эффективным, чем использование элементов, базирующихся только на смещениях. Этими двумя областями являются исследование почти несжимаемых сред и анализ конструкций типа пластин и оболочек (см. нижеследующие разделы и раздел 5.4).

4.4.3. Смешанная интерполяция — схемы типа смещение–давление для анализа несжимаемой среды

Конечно-элементная процедура, основанная на изучении смещений и описанная в разделе 4.2, весьма широко используется вследствие ее простоты и общей эффективности. Однако существуют две области задач, для которых элементы, базирующиеся только на учете смещений, не являются достаточно эффективными, а именно — исследование несжимаемых (или почти несжимаемых) сред и анализ пластин и оболочек. В каждом из

этих случаев подход со смешанной интерполяцией, который можно рассматривать как специальный вариант использования вариационного принципа Ху–Вапизу (см. пример 4.30), является значительно более эффективным.

В разделе 5.4 мы обсуждаем вопросы смешанной интерполяции при исследовании балок, пластин и оболочек, а здесь мы рассматриваем исследование поведения несжимаемых сред.

На данном этапе мы занимаемся решением задач о несжимаемых средах типа твердого тела, однако основные вводимые здесь положения оказываются непосредственно применимыми также и к изучению поведения несжимаемых жидкостей (см. раздел 7.4). Например, те элементы, обзор которых дается в табл. 4.6 и 4.7 (приводимых позднее в данном разделе), эффективно используются также и в решениях, описывающих течение жидкости.

Основные дифференциальные уравнения для исследования несжимаемых сред

При исследовании поведения твердых тел нередко оказывается необходимым считать, что материал является почти несжимаемым. Например, некоторые резиноподобные материалы и материалы, находящиеся в неупругих условиях, могут обнаруживать почти несжимаемую реакцию. Действительно, эффекты сжимаемости могут оказаться настолько малыми, что ими можно пренебречь, а в этом случае материал мог бы быть представлен в идеализированной форме, как совершенно несжимаемый.

Основное наблюдение при анализе почти несжимаемых сред состоит в том, что величину давления трудно предсказать точно. В зависимости от того, насколько данный материал по своим свойствам близок к несжимаемому, метод конечных элементов, основанный на учете смещений, может все же обеспечить построение точных решений, однако число элементов, требуемое для получения заданной точности решения, оказывается обычно значительно больше числа элементов, нужного для проведения сравнимого анализа применительно к сжимаемому материалу.

Чтобы более детально идентифицировать указанную основную трудность, рассмотрим вновь трехмерное тело, показанное на рис. 4.2. Материал, из которого состоит данное тело, является изотропным и описывается модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν .

Если использовать обозначения с индексами, то определяющие дифференциальные уравнения для данного тела имеют вид (см. пример 4.2)

$$\tau_{ij,j} + f_i^B = 0 \quad \text{во всем объеме } V \text{ данного тела,} \quad (4.122)$$

$$\tau_{ij} = f_i^{Sf} \quad \text{на } S_f, \quad (4.123)$$

$$u_i = u_i^{Su} \quad \text{на } S_u. \quad (4.124)$$

Если данное тело сделано из почти несжимаемого материала, то, как мы ожидаем, объемные деформации будут малы в сравнении с деформациями отклонения, а поэтому мы используем основополагающие соотношения в форме (см. упражнение 4.39)

$$\tau_{ij} = \kappa \epsilon_V \delta_{ij} + 2G \epsilon'_{ij}, \quad (4.125)$$

где κ — объемный модуль,

$$\kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)}; \quad (4.126)$$

ϵ_V — объемная деформация,

$$\epsilon_V = \epsilon_{kk} =$$

$$= \frac{\Delta V}{V} \quad (= \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} \text{ в декартовых координатах}); \quad (4.127)$$

δ_{ij} — дельта Кронекера,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} = 1; & i = j \\ = 0; & i \neq j \end{cases} \quad (4.128)$$

ϵ'_{ij} — компоненты деформаций отклонения,

$$\epsilon'_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{\epsilon_V}{3} \delta_{ij}; \quad (4.129)$$

а G — модуль сдвига,

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (4.130)$$

Кроме того, для выражения давления в теле имеем

$$p = -\kappa \epsilon_V, \quad (4.131)$$

где в декартовых координатах

$$p = -\frac{\tau_{kk}}{3} \left(= -\frac{\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}}{3} \right). \quad (4.132)$$

Теперь давайте постепенно увеличивать κ (путем увеличения коэффициента Пуассона ν , приближая его к значению 0,5). В результате, по мере увеличения κ объемная деформация уменьшается, становясь очень малой.

Фактически при полной несжимаемости величина ν в точности равна 0,5, объемный модуль оказывается бесконечно большим, а объемная деформация равна нулю, тогда как давление, разумеется, остается конечным (и имеет порядок приложенных на границе тяговых сил). После этого компоненты напряжения выражаются в форме (см. (4.125) и (4.131))

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2G\epsilon'_{ij}, \quad (4.133)$$

а решение определяющих дифференциальных уравнений (4.122)–(4.124) связано теперь с использованием смещений u и давления в качестве неизвестных переменных.

В дополнение к сказанному необходимо уделить особое внимание граничным условиям в соотношениях (4.123) и (4.124), если только материал рассматривается как несжимаемый, а смещения задаются на всей поверхности тела, т.е. если мы имеем специальный случай $S_u = S$, $S_f = 0$. Если материал является абсолютно несжимаемым, то *первое условие* состоит в том, что заданные смещения u_i^S должны быть совместимыми с заданием нулевых значений объемной деформации во всех точках тела. Это физическое наблюдение выражается в виде

$$\epsilon_{ij} = 0 \quad \text{во всем объеме } V \quad (4.134)$$

и, следовательно,

$$\int_V \epsilon_{ii} dV = \int_S \mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad (4.135)$$

где мы воспользовались теоремой о дивергенции и где \mathbf{n} есть единичный вектор нормали к поверхности тела. Следовательно, смещения, заданные в направлении нормали к поверхности тела, должны быть такими, чтобы объем данного тела сохранялся. Разумеется, это условие будет автоматически удовлетворяться, если заданные значения смещений на поверхности равны нулю (т.е. если частицы на поверхности данного тела не смещаются).

Если предположить, что совместимость объемной деформации с граничным смещением обеспечена, то для случая $S_u = S$ *второе условие* состоит в том, что в некоторой точке тела должно быть задано давление. В противном случае значение давления не будет единственным, так как произвольное постоянное давление не вызывает никаких деформаций. Задача оказывается корректно поставленной для решения только тогда, когда выполняются оба указанных условия.

Разумеется, условие, касающееся задания смещений на всей поверхности тела, является в известной мере специальным случаем при исследовании поведения твердых тел, однако мы нередко встречаемся с аналогичной ситуацией в механике жидкости. Здесь на всей границе области, занятой жидкостью, могут быть заданы значения скорости (см. главу 7).

Несмотря на то, что здесь мы рассмотрели случай абсолютно несжимаемой среды, ясно, что те же соображения являются важными и тогда, когда материал оказывается лишь почти несжимаемым, — нарушение вышеупомянутых условий приведет к некорректной постановке задачи.

Ясно, что все указанные соображения относятся также и к варианту с использованием принципа виртуальной работы. Рассмотрим простой пример, показанный на рис. 4.44. Учтивая, что здесь присутствует лишь объемная энергия деформаций, принцип виртуальной

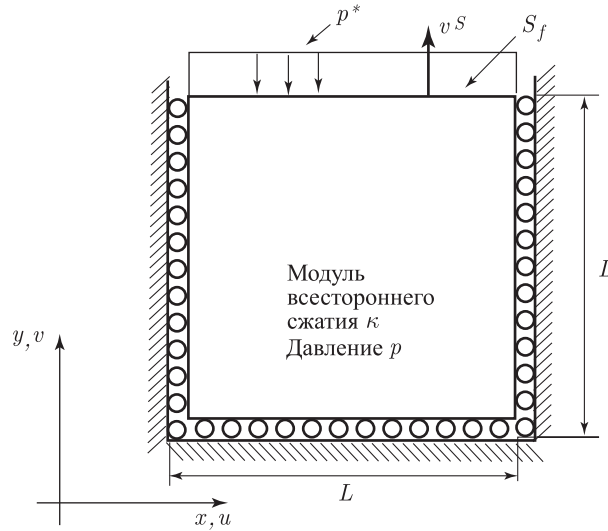


Рис. 4.44. Блок материала, находящийся в условиях плоских деформаций и подвергаемый постоянному поверхностному давлению *

работы в применении к данному случаю дает

$$\int_V \bar{\epsilon}_V \kappa \epsilon_V dV = - \int_{S_f} \bar{v}^S p^* dS. \quad (4.136)$$

Если объемный модуль κ имеет конечную величину, то непосредственно из (4.136) мы получим

$$v^S = - \frac{p^* L}{\kappa} \quad (4.137)$$

и

$$p = p^*. \quad (4.138)$$

Однако если значение κ бесконечно, то вместо (4.136) мы должны использовать нижеследующую форму принципа виртуальной работы с неизвестным давлением p , а именно

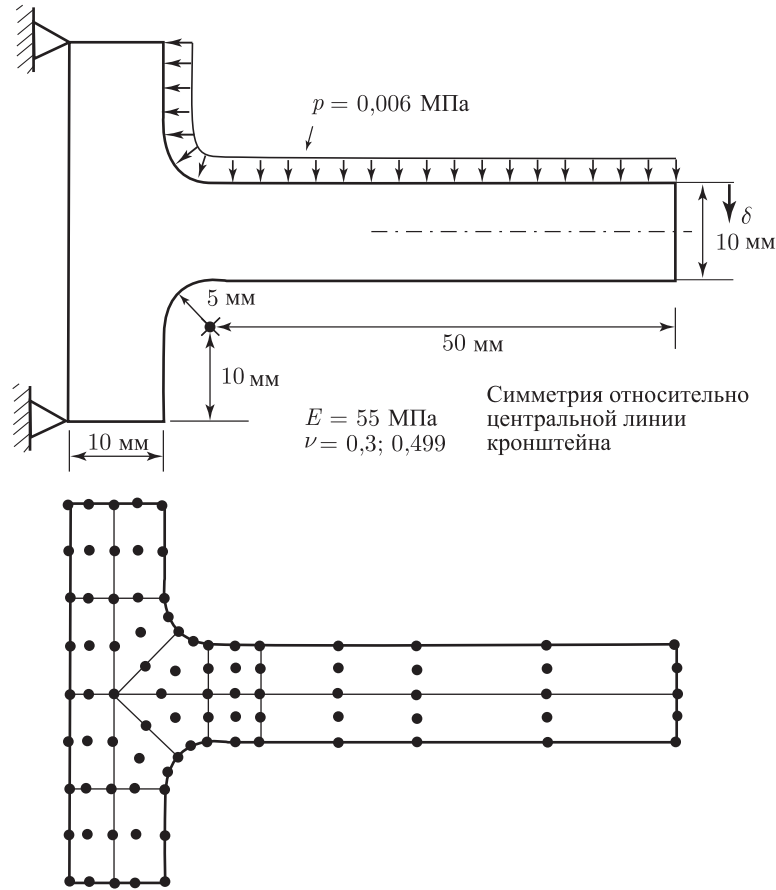
$$\int_V \bar{\epsilon}_V (-p) dV = - \int_{S_f} \bar{v}^S p^* dS, \quad (4.139)$$

и мы вновь получаем $p = p^*$. Разумеется, решение уравнения (4.139) связано не с использованием основополагающего соотношения, а лишь с выполнением условия равновесия.

Конечно-элементное решение в условиях почти полной несжимаемости

Как показывает проведенное выше обсуждение, при исследовании почти несжимаемой среды с помощью конечно-элементного анализа, базирующегося только на учете смещений, следует ожидать существенных трудностей. Очень малая объемная деформация, приближающаяся к нулю в пределе полной несжимаемости, определяется по производным смещений, значения которых находятся с меньшей точностью, чем значения самих смещений. Любая ошибка в предсказываемом значении объемной деформации проявляется, как большая ошибка в значениях напряжений, которая, в свою очередь, повлияет на предсказание смещений в силу того, что внешние нагрузки уравниваются (с использованием принципа виртуальной работы) напряжениями. Поэтому на практике для получения удовлетворительной точности решения может потребоваться очень сильно измельченная конечно-элементная дискретизация.

Рисунок 4.45 демонстрирует некоторые результаты исследования консольного кронштейна, подверженного нагрузке давлением. Мы рассматриваем условия плоских деформаций, а также варианты с коэффициентом Пуассона, равным $\nu = 0,30$ и $\nu = 0,499$. Для построения всех решений были применены элементы, базирующиеся на учете смещений

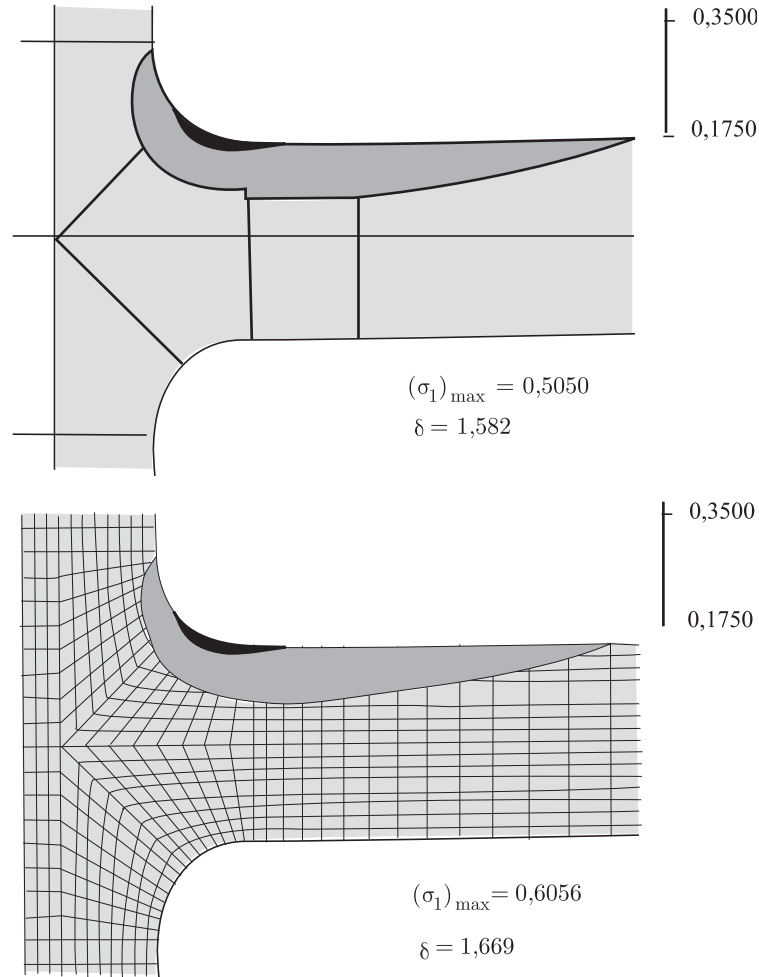


а. Геометрия, данные о материале и о приложенной нагрузке для грубой сетки с 16-ю элементами

Рис. 4.45. Анализ консольного кронштейна в условиях плоских деформаций. Используются элементы, базирующиеся на смещениях и имеющие девять узлов. Сетка, имеющая $16 \times 64 = 1024$ элемента, получается путем деления на 64 каждого элемента из 16-элементной сетки. Результаты, касающиеся максимального главного напряжения, показаны с использованием данного на рис. 4.36 представления с помощью полос. Кроме того, $(\sigma_1)_{\max}$ представляет собой рассчитанное максимальное значение максимального главного напряжения, а величина δ определяется в (а)

и имеющие девять узлов (при интегрировании по Гауссу с сеткой 3×3 ; см. раздел 5.5.5). Использовалась как грубая, так и очень мелкая сетка, и рис. 4.45 а показывает грубую идеализацию с использованием только 16-ти элементов.

Показаны результаты решения для случая максимального основного значения напряжения σ_1 , при представлении с помощью поддиапазонов, обсуждавшемся в разделе 4.3.6. Здесь мы выбрали такую ширину полосы, чтобы иметь возможность видеть весьма неблагоприятную картину поведения элемента, построенного на основе смещений, при коэффициенте Пуассона, близком к 0,5. Как показывает рис. 4.45 б, при $\nu = 0,30$ напряжения в элементах изменяются достаточно плавно при пересечении границ в случае грубой сетки, и очень плавно — при мелкой сетке. В самом деле, грубая идеализация приводит ко вполне разумному прогнозу о величине напряжений. Однако при $\nu = 0,499$ те же самые сетки для элементов на базе смещений, имеющих по девять узлов, дают для



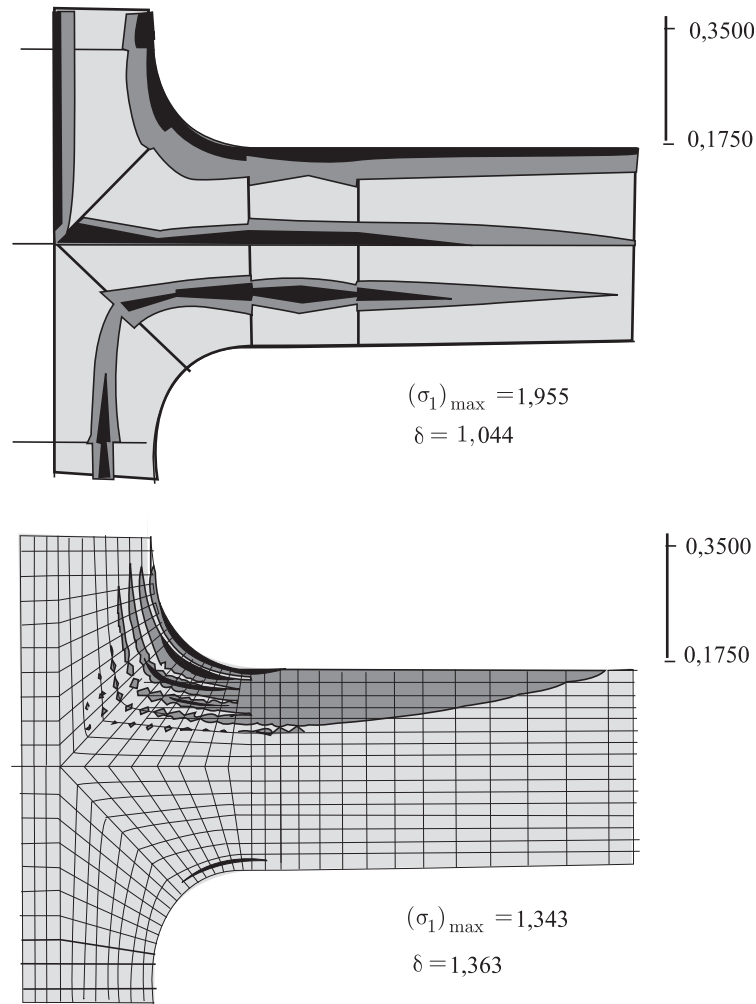
б. Результаты решения с элементами на базе смещений для случая, когда коэффициент Пуассона $\nu = 0,30$. Результаты приводятся для сетки с 16-ю элементами и сетки с 16×64 элементами

Рис. 4.45. Продолжение

напряжений прогноз низкого качества (см. рис. 4.45 в). Большие флуктуации напряжений видны в индивидуальных элементах как с грубой, так и с мелкой сеткой¹⁾. Если суммировать результаты, то мы видим, что используемый при анализе элемент на базе смещений оказывается эффективным при $\nu = 0,3$, но когда ν приближается к 0,5, то прогноз по напряжению становится очень неточным.

Данное обсуждение указывает на то, что именно является крайне желательным, а это — конечно-элементная модель, дающая, по существу, одну и ту же точность результатов при заданной сетке независимо от величины используемого коэффициента Пуассона, даже

¹⁾ В разделе 5.5.6 мы коротко обсуждаем использование «укороченного интегрирования». Если при проводимом здесь анализе делается попытка реализовать укороченный вариант интегрирования по Гауссу с сеткой 2×2 , то решение не может быть построено, так как получаемая при этом матрица жесткости является сингулярной.



в. Результаты решения с элементами на базе смещений для случая, когда коэффициент Пуассона $\nu = 0,499$. Результаты для сетки с 16-ю элементами и для сетки с 16×64 элементами

Рис. 4.45. Продолжение

если значение ν близко к 0,5. Такое поведение наблюдается тогда, когда для конечно-элементной модели возможность правильного предсказания величин смещений и напряжений не зависит от используемого при этом объемного модуля.

Конечно-элементные модели, обладающие таким желательным поведением, мы называем *незапирающими*, тогда как в противном случае конечные элементы являются *запирающими*.

Термин «запирающий» основывается на опыте анализа балок, пластин и оболочек (см. раздел 5.4.1), при котором несоответствующая схема — та, которая запирает — приводит к нахождению таких смещений, которые оказываются значительно меньше значений, интуитивно ожидаемых при заданной сетке (и вычисляемых при надлежащей формулировке; см., например, рис. 5.38). Если при исследовании почти несжимаемого поведения используется запирающая модель, то смещения не обязательно будут получаться с большими

ошибками, но значения напряжений (давления) оказываются крайне неточными. Отметим, что модель, основанная только на учете смещений, при анализе почти несжимаемых сред обычно замирает. Все эти утверждения обсуждаются более детально в разделе 4.5.

Эффективные конечно-элементные модели, предназначенные для исследования почти несжимаемых сред и не являющиеся запирающими, получаются путем интерполяции смещений и давления. Рисунок 4.46 показывает результаты, получаемые при исследовании поведения консольного кронштейна, изображенного на рис. 4.45, при схеме смещение/давление, называемой схемой u/p и использующей элемент 9/3 (ниже дается объяснение схемы и описание элемента). Как видим, поддиапазоны с максимальным главным напряжением во всех случаях обладают желательной степенью гладкости, причем прогноз для напряжений не ухудшается, когда коэффициент Пуассона ν приближается к значению 0,5.

Чтобы дать представление о моделях типа смещение/давление, напомним, что при схеме, основанной только на учете смещений, расчет давления по данным об объемной деформации оказывается затруднительным при большом (в сравнении с G) значении κ , и что когда принимается условие полной несжимаемости, то давление должно использоваться в качестве переменной решения [см. формулу (4.133)]. На этом основании нам представляется разумным работать с неизвестными смещениями и давлением, как с переменными решения, если только исследуются условия почти полной несжимаемости. Процедуры такого рода исследований, если они надлежащим образом сформулированы, должны быть также непосредственно применимыми и в пределе условий несжимаемости.

На основании вышеизложенного основной подход при использовании конечно-элементных формулировок смещение/давление связан с интерполяцией смещений и давления. Для этого требуется, чтобы принцип виртуальной работы был выражен в терминах независимых переменных \mathbf{u} и p , а это дает

$$\int_V \bar{\epsilon}'^T \mathbf{S} dV - \int_V \bar{\epsilon}_V p dV = \mathcal{R}, \quad (4.140)$$

где, как и обычно, черта сверху обозначает виртуальные величины, \mathcal{R} соответствует обычной внешней виртуальной работе [\mathcal{R} равна правой части соотношения (4.7)], а \mathbf{S} и $\bar{\epsilon}'$ — векторы напряжений и деформаций, связанные с отклонениями,

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\tau} + p\boldsymbol{\delta}, \quad (4.141)$$

$$\bar{\epsilon}' = \bar{\epsilon} - \frac{1}{3} \bar{\epsilon}_V \boldsymbol{\delta}, \quad (4.142)$$

где $\boldsymbol{\delta}$ представляет собой вектор, соответствующий символу Кронекера (см. (4.128)).

Отметим, что при использовании определения p согласно (4.131) однородное сжимающее напряжение дает положительное давление и что в простом примере, приводимом на рис. 4.44, вклад реализуется только объемной частью внутренней виртуальной работы.

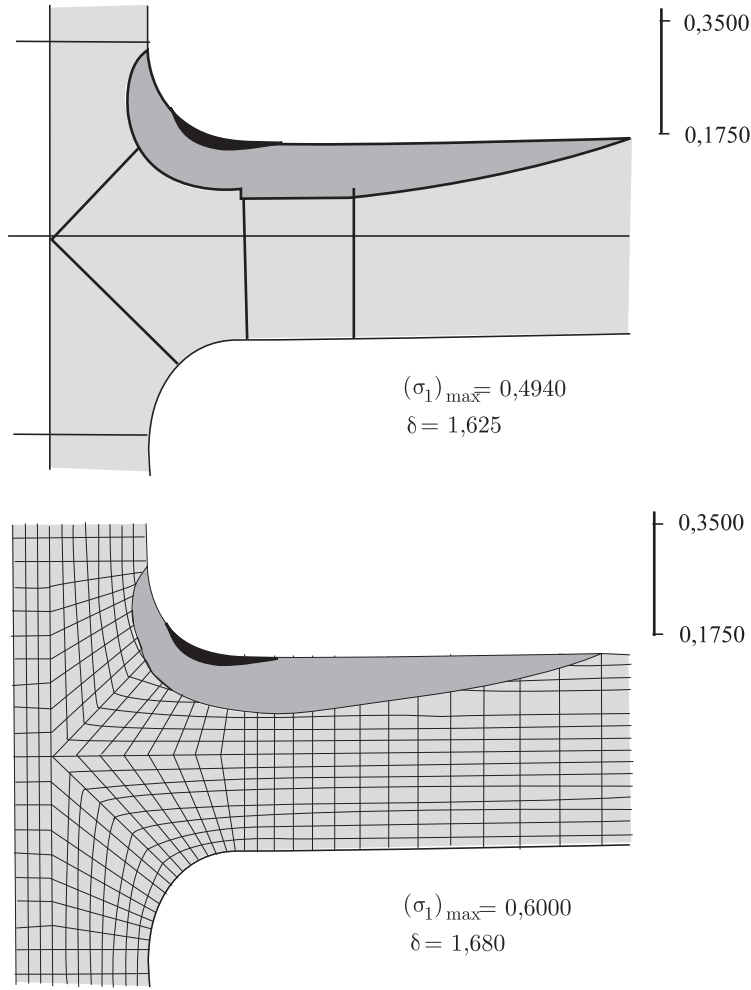
При выражении соотношения (4.140) мы сначала разделили, а потом суммировали энергию деформаций отклонения и энергию объемных деформаций. Учитывая, что смещения и давление рассматриваются в качестве независимых переменных, нам необходимо иметь еще одно уравнение, чтобы связать эти две переменные решения. Такое уравнение получится, если соотношение (4.131) записать в интегральной форме (см. пример 4.31),

$$\int_V \left(\frac{p}{\kappa} + \bar{\epsilon}_V \right) \bar{p} dV = 0. \quad (4.143)$$

Эти основные уравнения могут быть выведены более формальным путем из вариационных принципов (см. [Herrmann 1965] и [Key 1969]). В приводимом ниже примере мы даем вывод основных уравнений с использованием функционала Ху–Вашизу.

Пример 4.31: Дайте вывод схемы u/p с применением вариационного принципа Ху–Вашизу.

Вывод совершенно аналогичен тому, что было сделано в примере 4.30, где мы рассматривали смешанную интерполяцию для элемента типа балки.



а. Полосы с максимальным главным напряжением. Случай, когда коэффициент Пуассона $\nu = 0,30$. Результаты для сеток с 16-ю и с 16 + 64 элементами

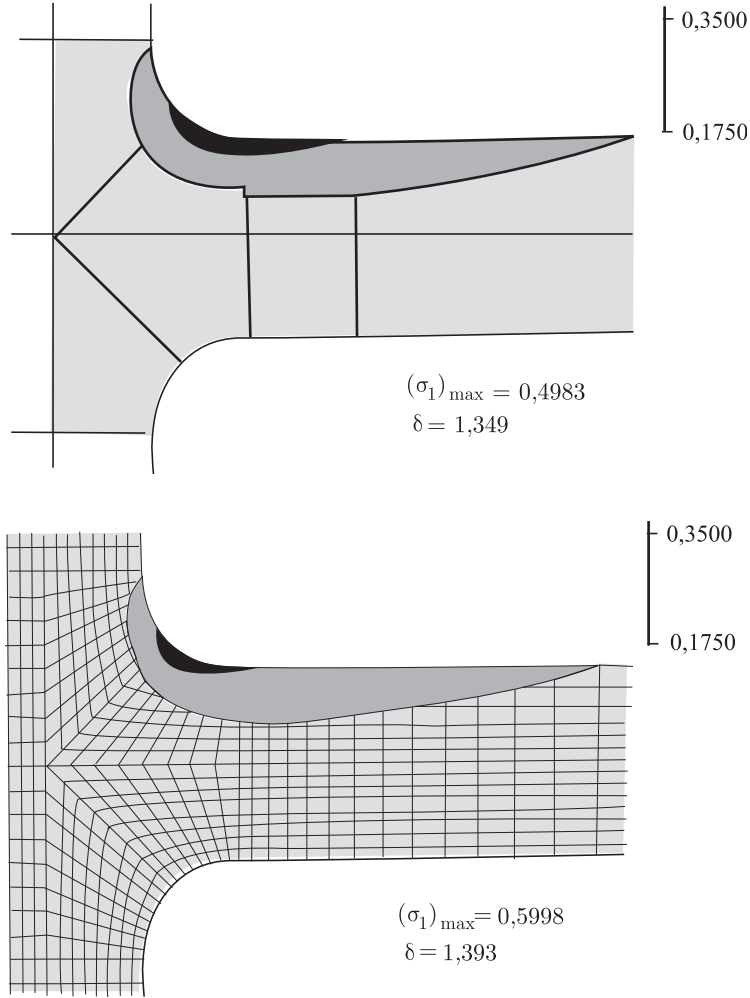
Рис. 4.46. Анализ для консольного кронштейна в условиях плоских деформаций. Кронштейн показан на рис. 4.45 а. Используются те же сетки, что и на рис. 4.45, но с элементом, имеющим 9 узлов при смешанной интерполяции (элемент 9/3). Сравните полученные результаты с теми, которые даны на рис. 4.45

Мы начинаем, полагая в выражении (4.114) $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon}$ и получая функционал Хеллингера-Рейсснера,

$$\Pi_{\text{HR}}^*(\mathbf{u}, \boldsymbol{\epsilon}) = - \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} dV + \int_V \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\partial}_\epsilon \mathbf{u} dV - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{f}^B dV - \int_{S_f} \mathbf{u}^{S_f T} \mathbf{f}^{S_f} dS, \quad (\text{a})$$

где мы предполагаем, что граничные условия для смещений удовлетворяются точно (и, следовательно, вариации смещений на поверхности их задания также будут равны нулю).

После этого мы определяем вклады, соответствующие отклонениям, и вклады объемного характера, а также постулируем, что вклад от отклонения будут вычислен по



6. Полосы с максимальным главным напряжением. Случай, когда коэффициент Пуассона $\nu = 0,499$. Результаты для сеток с 16-ю и с 16×64 элементами

Рис. 4.46. Продолжение

данным о смещениях. Поэтому можно дать конкретную форму выражения (а) в виде

$$\tilde{\Pi}_{\text{HR}}^*(\mathbf{u}, p) = \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}'^T \mathbf{C}' \boldsymbol{\epsilon}' dV - \int_V \frac{1}{2} \frac{p^2}{\kappa} dV - \int_V p \epsilon_V dV - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{f}^B dV - \int_{S_f} \mathbf{u}^{S_f T} \mathbf{f}^{S_f} dS, \quad (\text{b})$$

где штрих обозначает величины, связанные с отклонениями, ϵ_V — объемная деформация, рассчитанная по смещениям, p — давление, а κ — объемный модуль. Отметим, что в то время, как в (а) независимыми переменными являются \mathbf{u} и $\boldsymbol{\epsilon}$, независимыми переменными в (b) являются \mathbf{u} и p .

Если привлечь условия постоянства $\tilde{\Pi}_{\text{HR}}^*$ по отношению к вариациям смещений и давления, то получим

$$\int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}'^T \mathbf{C}' \boldsymbol{\epsilon}' dV - \int_V p \delta \epsilon_V dV = \mathcal{R}$$

и

$$\int_V \left(\frac{p}{\kappa} + \epsilon_V \right) \delta p dV = 0,$$

где символ \mathcal{R} соответствует виртуальной работе нагрузки, приложенной извне (см. (4.7)).

Интересно отметить, что о выражении из формулы (b) мы можем думать, как о полном потенциале, выраженном в терминах смещений и давления, плюс член с множителями Лагранжа, обеспечивающий принудительную связь между объемными деформациями и давлением.

$$\widetilde{\pi}_{\text{HR}}^* =$$

$$= - \int_V \frac{1}{2} \epsilon'^T \mathbf{C}' \epsilon' dV + \int_V \frac{1}{2} \frac{p^2}{\kappa} dV - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{f}^B dV - \int_{S_f} \mathbf{u}^{S_f T} \mathbf{f}^{S_f} dS - \int_V \lambda \left(\epsilon_V + \frac{p}{\kappa} \right) dV. \quad (c)$$

Последний интеграл в правой части (c) характеризует принудительную связь с помощью множителя Лагранжа, причем мы находим, что $\lambda = p$.

Теперь, чтобы получить определяющие уравнения конечных элементов, мы должны, как делалось в разделе 4.2.1, воспользоваться соотношениями (4.140) и (4.143), однако в дополнение к интерполяции смещений будем интерполировать также и давление p . Как показало обсуждение в разделе 4.2.1, нам нужно рассмотреть формулировку для одного-единственного элемента; после этого матрицы для комплекса элементов формулируются стандартным образом.

Используя, как и в разделе 4.2.1, выражение

$$\mathbf{u} = \mathbf{H} \hat{\mathbf{u}}, \quad (4.144)$$

мы можем вычислить

$$\epsilon' = \mathbf{B}_D \hat{\mathbf{u}}; \quad \epsilon_V = \mathbf{B}_V \hat{\mathbf{u}}. \quad (4.145)$$

Дополнительное предположение об интерполяции имеет вид

$$p = \mathbf{H}_p \hat{\mathbf{p}}, \quad (4.146)$$

где вектор $\hat{\mathbf{p}}$ содержит перечень переменных давления (см. обсуждение после формулы (4.148)).

Если выражения (4.144)–(4.146) подставить в (4.140) и (4.143), то получим

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{up} \\ \mathbf{K}_{pu} & \mathbf{K}_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.147)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{uu} &= \int_V \mathbf{B}_D^T \mathbf{C}' \mathbf{B}_D dV, \\ \mathbf{K}_{up} &= \mathbf{K}_{pu}^T = - \int_V \mathbf{B}_V^T \mathbf{H}_p dV, \\ \mathbf{K}_{pp} &= - \int_V \mathbf{H}_p^T \frac{1}{\kappa} \mathbf{H}_p dV \end{aligned} \quad (4.148)$$

и где \mathbf{C}' — это матрица напряжение–деформация для компонентов этих величин, соответствующих отклонениям.

Соотношения (4.144)–(4.148) дают в совокупности основные уравнения для модели элементов со смещениями и давлением в качестве переменных. На этом этапе ключевой вопрос звучит так: «Какие интерполяции должны быть использованы для давления и смещений, чтобы элементы оказались эффективными?». Например, если интерполяция давления имеет степень, слишком высокую в сравнении со степенью интерполяции смещений, то элемент может вновь повести себя как элемент на основе смещений и оказаться неэффективным.

Если рассматривать пока что только интерполяцию давления, то существуют две основные возможности, которые мы и именуем по-разному.

Модель u/p . Для этой схемы переменные, соответствующие давлению, принадлежат только конкретному, рассматриваемому сейчас элементу. В процессе анализа поведения почти несжимаемой среды (что мы пока что и делаем) переменные для давления в элементах могут быть подвергнуты статическому сгущению еще до объединения элементов в комплекс. Непрерывность давления при пересечении границ между элементами не обеспечивается принудительно, однако она проявится как результат конечно-элементного решения, если только используемая сетка достаточно мелкая.

Модель u/p -с. Буква «с» обозначает непрерывность давления.

Для этой модели давление в элементе определяется узловыми значениями переменных, соответствующих давлению и принадлежащих соседствующим элементам внутри комплекса. Поэтому переменные с давлением не могут быть подвергнуты статическому сгущению до образования комплекса элементов. Непрерывность давления при пересечении границ между элементами реализуется путем прямого принуждения и, следовательно, всегда будет результатом решения независимо от того, является ли используемая сетка мелкой или грубой.

Рассмотрим два описываемых ниже элемента, один из которых соответствует каждой из вышеописанных формулировок.

Пример 4.32:

Для показанного здесь элемента с плоскими деформациями, имеющего четыре узла, предположите, что смещения интерполируются с использованием четырех узлов и что давление постоянно. Требуется рассчитать выражения для матриц по схеме u/p .

Данный элемент будет именоваться, как элемент u/p 4/1. При анализе с плоскими деформациями мы имеем

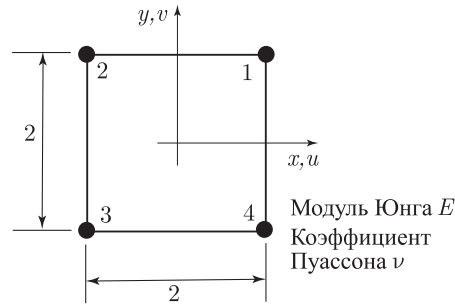


Рис. 4.47. Элемент 4/1

$$\epsilon' = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} - \frac{1}{3}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \\ \epsilon_{yy} - \frac{1}{3}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \\ \gamma_{xy} \\ -\frac{1}{3}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ -\frac{1}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{bmatrix}; \quad \epsilon_V = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} \quad (a)$$

и $S = C' \epsilon'$, где

$$C' = \begin{bmatrix} 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix}; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Интерполяция смещений здесь такая же, как в примере 4.6,

$$u = H\hat{u}$$

при

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(x, y) &= \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}; \quad \hat{\mathbf{u}}^T = [u_1 \ 1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad \vdots \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4]; \\
\mathbf{H} &= \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \end{bmatrix}; \\
h_1 &= \frac{1}{4}(+x)(1+y); \quad h_2 = \frac{1}{4}(1-x)(1+y); \\
h_3 &= \frac{1}{4}(1-x)(1-y); \quad h_4 = \frac{1}{4}(1+x)(1-y).
\end{aligned} \tag{b}$$

Если использовать (а) и (б), то матрицы интерполяции деформация–смещение имеют вид

$$\mathbf{B}_D = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}h_{1,x} & \frac{2}{3}h_{2,x} & \dots & \vdots & -\frac{1}{3}h_{1,y} & -\frac{1}{3}h_{2,y} & \dots \\ -\frac{1}{3}h_{1,x} & -\frac{1}{3}h_{2,x} & \dots & \vdots & \frac{2}{3}h_{1,y} & \frac{2}{3}h_{2,y} & \dots \\ h_{1,y} & h_{2,y} & \dots & \vdots & h_{1,x} & h_{2,x} & \dots \\ -\frac{1}{3}h_{1,x} & -\frac{1}{3}h_{2,x} & \dots & \vdots & -\frac{1}{3}h_{1,y} & -\frac{1}{3}h_{2,y} & \dots \end{bmatrix}$$

и

$$\mathbf{B}_V = [h_{1,x} \quad h_{2,x} \quad \dots \quad \vdots \quad h_{1,y} \quad h_{2,y} \quad \dots].$$

В предположении постоянства давления имеем

$$\mathbf{H}_p = [1]; \quad \hat{\mathbf{p}} = [p_0].$$

Если учесть, что степень свободы $\hat{\mathbf{p}} = [p_0]$ соответствует только этому элементу, но не соответствует соседним элементам, то мы можем провести статическое сгущение, чтобы получить из (4.147) матрицу жесткости элемента, соответствующую только степеням свободы смещений в узловых точках:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{uu} - \mathbf{K}_{ip}\mathbf{K}_{pp}^{-1}\mathbf{K}_{pu}.$$

Дальнейшее рассмотрение этого элемента проводится в примере 4.38.

Пример 4.33:

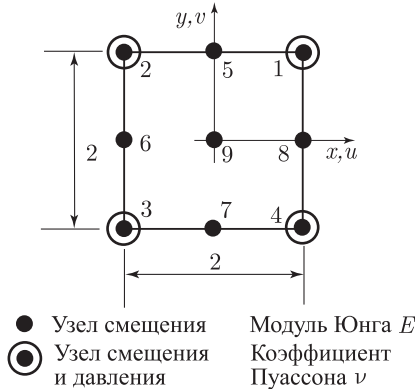


Рис. 4.48. Элемент 9/4-с

Рассмотрим элемент с девятью узлами, соответствующий плоским деформациям и показанный на рис. 4.48. Предположим, что смещения интерполируются с использованием девяти узлов и что давление интерполируется за счет всего лишь четырех угловых узлов. Обратитесь к информации, данной в примере 4.32, и обсудите дополнительные соображения, требуемые для расчета выражений, соответствующих матрицам данного элемента.

Этот элемент был предложен в работе [Hood, Taylor 1974]. При используемой формулировке узловые значения давления соответствуют соседствующим элементам

и согласно приведенной выше номинации данный элемент будет именоваться элементом u/p -с (здесь это 9/4-с элемент).

Деформации отклонения и объемные деформации будут такими, как это представлено в формулах (а) в примере 4.32. Интерполяция смещений соответствует девяти узлам данного элемента.

$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1^* & \dots & h_9^* & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & h_1^* & \dots & h_9^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_9 \\ \dots \\ v_1 \\ \vdots \\ v_9 \end{bmatrix}, \quad (\text{а})$$

где интерполяционные функции h_i^* построены так, как это объясняется в разделе 4.2.3 (или см. раздел 5.3 и рис. 5.5.).

Матрицы, связывающие смещения и деформации с отклонением, а также объемные деформации, получаются так, как и в примере 4.32.

Интерполяция давления задается формулой

$$p = [h_1 \quad h_2 \quad h_3 \quad h_4] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix},$$

где выражения для h_i — это те, которые даны в (b) в примере 4.32.

Главное вычислительное различие между данным элементом и элементом с четырьмя узлами, рассмотренным в примере 4.32, состоит в том, что степени свободы для давления не могут подвергаться статическому сгущению на элементном уровне, так как переменные p_1, \dots, p_4 соответствуют элементу, рассматриваемому здесь, а также соседним с ним элементам, и таким образом описывают непрерывное поле давления, соответствующее принятой дискретизации.

Давайте теперь вернемся к обсуждению вопроса о том, какие именно формы интерполяции давления и смещений должны быть использованы для того, чтобы получить эффективный элемент.

Например, в примере 4.32 мы пользовались четырьмя узлами для интерполяции смещений и предполагали давление постоянным; мы можем задать себе вопрос, является ли предположение о постоянстве давления правильным выбором для элемента с четырьмя узлами? Фактически, для данного элемента этот выбор оказывается в определенной мере естественным, так как объемная деформация, вычисляемая по данным о смещениях, содержит линейные вариации по x и y , и наше предположение о давлении должно иметь более низкий порядок.

Когда для смещений используются интерполяции высокого порядка, то выбор надлежащей формы интерполяции для давления не является очевидным и даже оказывается значительно более трудным: давление не должно интерполироваться со слишком низким порядком, потому что тогда прогноз для давления может оказаться имеющим более высокий порядок и, следовательно, более точным; вместе с тем, давление не должно интерполироваться и со слишком высоким порядком, потому что тогда элемент поведет себя подобно элементам на базе смещений и приведет к запиранию. Следовательно, нам желательно иметь наивысшую степень интерполяции давления из числа тех, которые не создают в элементе запирания.

Если, например, рассмотреть схему u/p и биквадратную интерполяцию смещений (т.е. с девятью узлами для описания смещений), то мы можем, естественно, попытаться исследовать следующие случаи:

- 1) Постоянное давление, $p = p_0$ (элемент 9/1),
- 2) Линейно изменяющееся давление, $p = p_0 + p_1x + p_2y$ (элемент 9/3),
- 3) Билинейно изменяющееся давление, $p = p_0 + p_1x + p_2y + p_3xy$ (элемент 9/4)

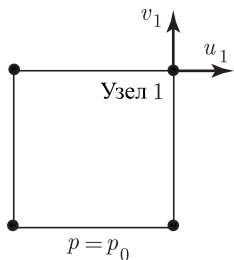
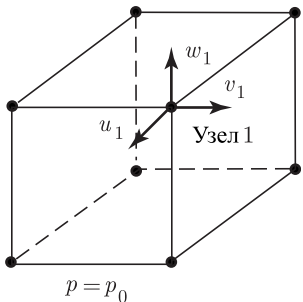
и так далее, вплоть до квадратичной интерполяции давления (которая соответствует элементу 9/9).

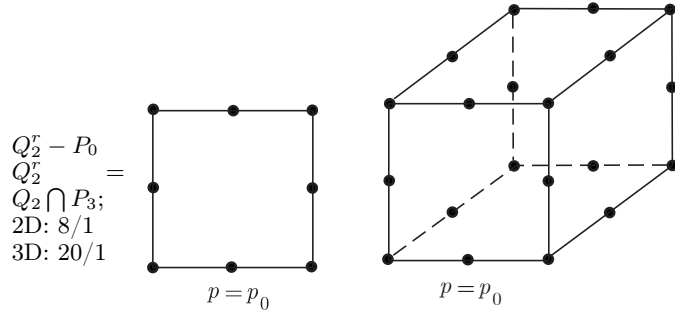
Эти элементы были проанализированы теоретически и с помощью проведения численных экспериментов. Изучение этих элементов показывает, что элемент 9/1 не дает запираения, но скорость сходимости по давлению (и, следовательно, по напряжениям) по мере измельчения сетки имеет порядок всего лишь $o(h)$, потому что в каждом из элементов с девятью узлами давление предполагается постоянным. Конечно, низкое качество прогноза по давлению может оказать негативное влияние также и на прогноз по смещениям.

Исследование показывает также, что элемент 9/3 является наиболее привлекательным, так как он не дает запираения, а сходимость по давлению имеет порядок $o(h^2)$. Отсюда следует, что способность к прогнозу является оптимальной, так как при использовании биквадратного разложения для смещений нельзя ожидать более высокого порядка сходимости по напряжениям. Кроме того, элемент 9/3 является эффективным при значениях коэффициента Пуассона вплоть до 0,5 (однако статическое сгущение степеней свободы для давления оказывается возможным только при значениях $\nu < 0,5$).

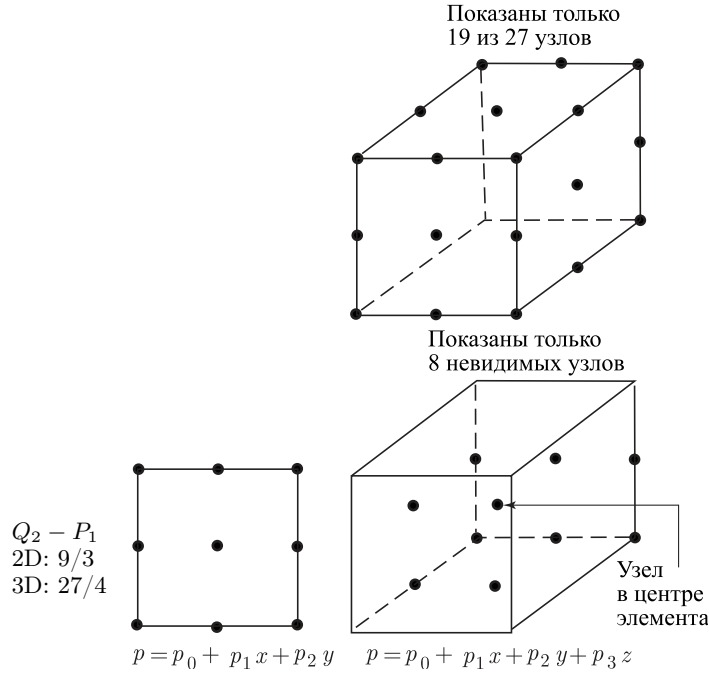
Итак, перед нами стоит искушение — всегда использовать элемент 9/3 (вместо элемента на базе смещений с девятью узлами). Однако на практике обнаруживается, что в вычислительном плане элемент 9/3 является несколько более дорогостоящим, чем элемент с девятью узлами на базе смещений, а когда ν имеет значение меньше 0,48, то введение дополнительных членов в разложение давления для элемента на базе смещений позволяет получить несколько лучший прогноз для напряжений.

Таблица 4.6 Различные эффективные элементы u/p (смещения на границах между элементами непрерывны и переменные давления имеют отношение к индивидуальным элементам)*

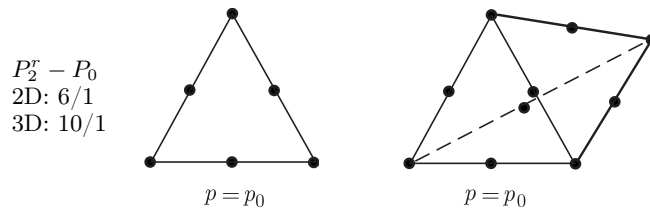
Узловые точки		Примечания
Элемент	Двумерный элемент	
	Трехмерный элемент	
		<p>Элемент хорошо предсказывает смещения, но напряжения могут оказаться неточными вследствие предположения о постоянном давлении и возможных флуктуаций давления. Элемент не удовлетворяет условию inf-sup (см. обсуждение элемента в разделе 4.5.5)</p>
		
<p>$Q_1 - P_0$ 2D: 4/1 3D: 8/1</p>		



Элемент удовлетворяет условию inf-sup, но предположение о постоянном давлении может потребовать измельченной дискретизации для точного предсказания напряжения

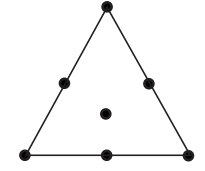


Оптимальный четырехугольный элемент с использованием биквадратного разложения для смещения. Наибольшее число переменных давлений используется вследствие необходимости удовлетворения условию inf-sup. Первый член семейства четырехугольных элементов $Q_n - P_{n-1}$, $n \leq 2$. Все эти элементы удовлетворяют условию inf-sup (см. пример 4.36)

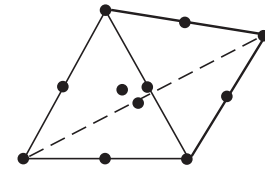


См. [Crouzeix M., Raviart P.-A. 1973] Элемент удовлетворяет условию inf-sup, но предположение о постоянном давлении может потребовать измельченной дискретизации

$P_2^+ - P_1$
2D: 7/3
3D: 11/4



$$p = p_0 + p_1 x + p_2 y$$



$$p = p_0 + p_1 x + p_2 y + p_3 z$$

См. [Crouzeix M., Raviart P.-A. 1973]. Оптимальный треугольный элемент с использованием квадратичного разложения для смещения (с кубическим пузырьком). P_2^+ обозначает пространство полиномов P_2 , обогащенное кубическим пузырьком. Самое большое число переменных для давления используется вследствие необходимости удовлетворения условию inf-sup. Первый член семейства треугольных элементов $P_n^+ - P_{n-1}, n \geq 2$. Все элементы удовлетворяют условию inf-sup

*Интерполяционные функции показаны на рис. 4.32, 5.5, 5.6, 5.25, и 5.27

Следующий элемент типа u/p , представляющий интерес для нас, — это элемент 9/4 и, как показывают исследования, при значениях ν , близких к 0,50, этот элемент приводит к запираанию; следовательно, при анализе почти несжимаемой среды этот элемент не может быть рекомендован к использованию.

Аналогичным образом могут быть построены и другие элементы типа u/p ; данные о некоторых из них приводятся в таблице 4.6. В отношении этих элементов можно отметить, что двумерный элемент с четырьмя узлами и трехмерный элемент с восемью узлами имеют широкий диапазон практического применения. Однако зачастую более мощными оказываются двумерный элемент с девятью узлами и трехмерный элемент с 27-ю узлами.

Как указывается в табл. 4.6, элементы $Q_2 - P_1$ и $P_2^+ - P_1$ представляют собой первые члены тех двух семейств элементов, которые могут использоваться. Это значит, что четырехугольные элементы $Q_n - P_{n-1}$, а также треугольные элементы $P_n^+ - P_{n-1}$, $n > 2$, также являются эффективными.

В таблице 4.6 имеется указание на условие inf-sup, которое будет обсуждаться в разделе 4.5.

С вычислительной точки зрения элементы u/p являются привлекательными, так как степени свободы элемента по давлению могут быть подвергнуты статическому сгущению до объединения элементов в комплекс (в предположении $\nu < 0,5$, но, возможно, при ν , очень близком к 0,5). Следовательно, степени свободы для комплекса элементов — это всего лишь те же самые смещения в узловых точках, которые представляют собой также и степени свободы для решения, построенного на базе учета смещений.

Однако схема u/p -с имеет то преимущество, что она всегда обеспечивает расчет непрерывного поля давлений. В таблице 4.7 перечисляются некоторые эффективные разновидности таких элементов.

Конечно-элементное решение в условиях абсолютной несжимаемости среды

Если мы желаем считать материал абсолютно несжимаемым, то мы все же можем использовать уравнения (4.140) и (4.143), однако при этом полагаем $\kappa \rightarrow \infty$. По этой причине

Таблица 4.7. Различные эффективные элементы $u/p - c$ (смещения и давления на границах между элементами непрерывны и все элементы удовлетворяют условию $\inf\text{-sup}$)*

Узловые точки			
Элемент	Двумерный элемент	Трехмерный элемент	Примечания
		Показаны только 8 невидимых узлов	
$P_2 - P_1$ 2D: 9/4-с 3D: 27/8-с			См. [Hood, Taylor 1974]. Первый член семейства $Q_n - Q_{n-1}$ четырехугольных элементов $n \geq 2$. Узел в центре элемента
		Показаны только 19 из 27 узлов	
$P_2 - P_1$ 2D: 6/3-с -с 3D: 10/4			См. [Hood, Taylor 1974]. Первый член семейства $P_n - P_{n-1}$ треугольных элементов, $n \geq 2$
$P_1^+ - P_1$ 2D: 4/3-с -с 3D: 5/4			См. [Arnold, Brezzi, Fortin 1984] P_1^+ обозначает пространство полиномов P_1 , обогащенное кубическим пузырьком. Имеют также название элементов MINI
<ul style="list-style-type: none">• Узел с переменными смещения;⊙ Узел с переменными смещения и давления			
* Интерполяционные функции показаны на рисунках 4.32, 5.5, 5.6, 5.25 и 5.27			

данный случай мы называем *предельной задачей*. Тогда уравнение (4.143) принимает вид

$$\int_V \epsilon_V \bar{p} dV = 0 \quad (4.149)$$

и, соответственно, уравнения (4.147) приобретают форму

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{up} \\ \mathbf{K}_{pu} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.150)$$

Следовательно, диагональные элементы матрицы коэффициентов, соответствующие степеням свободы для давления, теперь оказываются равными нулю. Отсюда следует и тот факт, что статическое сгущение степеней свободы для давления, определенное по схеме u/p уже не является возможным и что решение уравнений для всего комплекса элементов требует принятия специальных мер (помимо тех, которые требуются при решении, базирующемся только на учете смещений) для того, чтобы избежать встречи с нулевым центральным элементом (см. раздел 8.2.5).

Элементы, подходящие для построения решения, перечисляются в таблицах 4.6 и 4.7. Эти элементы являются эффективными (за исключением элементов типа $Q_1 - P_0$), так как они обладают хорошей способностью к прогнозу независимо от того, насколько поведение среды близко к условиям абсолютной несжимаемости (однако процедура решения определяющих конечно-элементных уравнений должна принимать во внимание то обстоятельство, что элементы матрицы \mathbf{K}_{pp} становятся все меньше и меньше по мере приближения к абсолютной несжимаемости).

Как уже отмечалось ранее, в табл. 4.6 и 4.7 фигурирует условие inf-sup. Это условие представляет собой основной математический критерий того, является ли некоторая смешанная конечно-элементная дискретизация устойчивой и сходящейся (и, следовательно, будет приводить к надежному решению). Это условие было введено в качестве *конкретного* фундаментального теста для смешанных конечно-элементных формулировок в работах [Babuska 1973] и [Brezzi 1974], и после его введения активно использовалось при исследовании смешанных формулировок. В дополнение к условию inf-sup имеется также условие эллиптичности, которому не было уделено столь же серьезного внимания, так как зачастую — как, например, при исследовании поведения почти несжимаемой среды — условие эллиптичности оказывается выполненным автоматически.

Мы можем задать себе вопрос — будет ли действительно важным на практике выполнять условие inf-sup, иначе говоря, не будет ли это условие слишком сильным и могут ли элементы, не удовлетворяющие этому условию, все-таки использоваться с достаточной степенью надежности. Как свидетельствует наш опыт, если условие inf-sup выполняется, то при используемых интерполяциях элемент будет настолько эффективным, насколько этого можно разумно ожидать, и будет, в этом смысле, оптимальным. Например, элемент 9/3 для анализа с плоскими деформациями, включенный в табл. 4.6, основывается на параболической интерполяции смещений и линейной интерполяции давления. Этот элемент не дает запирания, и порядок сходимости смещений всегда равен $o(h^3)$, а для напряжений — $o(h^2)$, и такое поведение является, безусловно, наилучшим для используемых нами интерполяций.

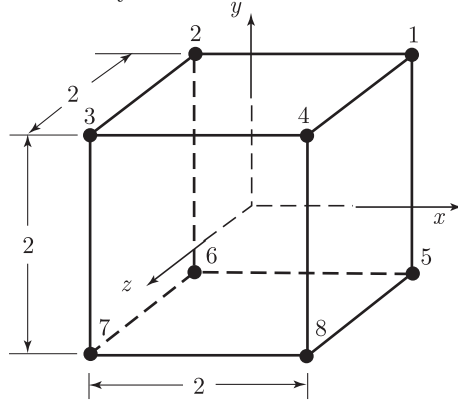
С другой стороны, если условие inf-sup не выполняется, то при решении любых аналитических задач (соответствующих рассматриваемой математической модели) данный элемент не всегда будет обладать теми характеристиками сходимости, которых мы могли бы ожидать и, действительно, требовать их проявления на практике. Отсюда следует, что этот элемент не является сильным и надежным.

Учитывая тот факт, что условие inf-sup имеет большую фундаментальную важность, в следующем разделе мы приводим вывод, который, хотя и не является завершенным математически, но все же обладает ценностью для проникновения в сущность процесса. В ходе этого обсуждения мы встретим также и условие эллиптичности и дадим краткие примеры его применения. Что касается математически полных выводов условий эллиптичности и inf-sup, а также других, связанных с ними подробностей, то читатель может найти их в книге [Brezzi, Fortin 1991].

В процессе выкладок, приводимых в следующем разделе, мы изучаем проблему упругости несжимаемой среды, однако наши соображения могут быть также непосредственно распространены на проблему течения несжимаемой жидкости и, как показано в разделе 4.5.7, на модели для конструкционных элементов.

4.4.4. Упражнения

- 4.33. Используйте элементы для оболочек с четырьмя и с восемью узлами, включенные в программу для конечных элементов и проведите групповые тесты, описанные на рис. 4.39.
- 4.34. Рассмотрите показанный здесь трехмерный элемент с восемью узлами. Спроектируйте групповой тест и установите аналитически, пройден ли этот тест для данного элемента успешно.



$$u = \sum_{i=1}^8 h_i u_i + \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 + \alpha_3 \phi_3;$$

$$v = \sum_{i=1}^8 h_i v_i + \alpha_4 \phi_1 + \alpha_5 \phi_2 + \alpha_6 \phi_3;$$

$$w = \sum_{i=1}^8 h_i w_i + \alpha_7 \phi_1 + \alpha_8 \phi_2 + \alpha_9 \phi_3;$$

$$h_i = \frac{1}{8} (1 + x_i x) (1 + y_i y) (1 + z_i z)$$

$$\phi_1 = 1 - x^2; \quad \phi_2 = 1 - y^2; \quad \phi_3 = 1 - z^2.$$

Интерполяционные функции для смещений

- 4.35. Рассмотрите функционал Ху–Вашизу Π_{HW} , соответствующий (4.114), и проведите детальный вывод соотношений (4.116)–(4.121).
- 4.36. Приводимый ниже функционал называется функционалом Хеллингера–Рейсснера ¹⁾

$$\Pi_{\text{HR}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}) = \int_V -\frac{1}{2} \boldsymbol{\tau}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\tau} dV + \int_V \boldsymbol{\tau}^T \boldsymbol{\epsilon} dV -$$

$$- \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{f}^B dV - \int_{S_f} \mathbf{u}^{S_f T} \mathbf{f}^{S_f} dS - \int_{S_u} \mathbf{f}^{S_u T} (\mathbf{u}^{S_u} - \mathbf{u}_p) dS,$$

где предписанными (теми, которые не должны варьироваться) величинами являются \mathbf{f}^B в объеме V , \mathbf{u}_p на поверхности S_u и \mathbf{f}^{S_f} на поверхности S_f .

Выведите этот функционал из выражения для функционала Ху–Вашизу, применяя соотношение $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\tau}$. После этого используйте условие постоянства Π_{HR} и установите все оставшиеся дифференциальные условия для объема и поверхности данного тела.

- 4.37. Рассмотрите функционал

$$\Pi_1 = \Pi - \int_{S_u} \mathbf{f}^{S_u T} (\mathbf{u}^{S_u} - \mathbf{u}_p) dS,$$

где Π задано формулой (4.109), а \mathbf{u}_p — это смещения, которые должны быть заданы на поверхности S_u .

- 4.38. Рассмотрите ферменный элемент с тремя узлами, показанный на рис. 4.42. Воспользуйтесь вариационным принципом Ху–Вашизу и определите матрицы жесткости при предположениях, соответствующих одному из следующих вариантов:

(а) Параболическое смещение, линейная деформация и постоянное напряжение.

¹⁾ Иногда этот функционал представляют в другой форме путем применения теоремы о дивергенции ко второму члену.

(b) Параболическое смещение, постоянная деформация и постоянное напряжение.

Обсудите ваши результаты, устанавливая для каждого случая, насколько разумным является выбор формы интерполяции (см. пример 4.29).

4.39. Покажите, что перечисленные ниже выражения для связи напряжений с деформациями в изотропном материале являются эквивалентными.

$$\tau_{ij} = \kappa \epsilon_V \delta_{ij} + 2G \epsilon'_{ij}, \quad (a)$$

$$\tau_{ij} = C_{ijrs} \epsilon_{rs}, \quad (b)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}, \quad (c)$$

где κ — объемный модуль, G — модуль сдвига,

$$\kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)}; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, ϵ_V — объемная деформация, а ϵ'_{ij} — это компоненты деформации отклонения,

$$\epsilon_V = \epsilon_{kk}; \quad \epsilon'_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{\epsilon_V}{3} \delta_{ij}.$$

Кроме того,

$$C_{irjs} = \lambda \delta_{ij} \delta_{rs} + \mu (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr}),$$

где λ и μ — это постоянные Ляме,

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

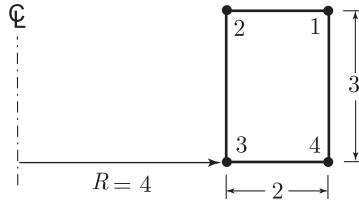
В формулах (a) и (b) используются тензорные величины, тогда как в формуле (c) вектор деформаций содержит инженерные представления деформации сдвига (которые равны удвоенным компонентам тензора; например, $\gamma_{xy} = \epsilon_{12} + \epsilon_{21}$). Кроме того, матрица напряжение–деформация \mathbf{C} в формуле (c) приводится в табл. 4.3.

4.40. Идентифицируйте тот порядок интерполяции давления, который должен быть использован для модели u/p для того, чтобы получить ту же самую матрицу жесткости, что и для модели, базирующейся только на учете смещений. Рассмотрите следующие элементы с геометрией 2×2 :

- (a) Элемент с четырьмя узлами в случае плоских деформаций.
- (b) Элемент с четырьмя узлами в осесимметричных условиях.
- (c) Элемент с девятью узлами в случае плоских деформаций.

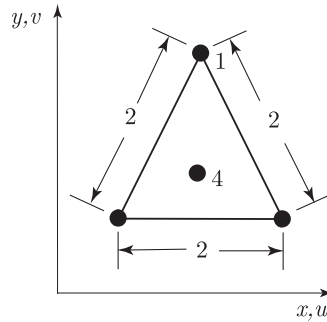
4.41. Рассмотрите элемент 4/1, представленный в примере 4.32, и предположите, что то граничное условие для смещений, которое следует выставить, имеет форму $u_1 = \bar{u}$. Покажите формально, что постановка этого граничного условия до или после статического сгущения степеней свободы для давления дает один и тот же вклад от данного элемента в матрицу жесткости для комплекса.

4.42.

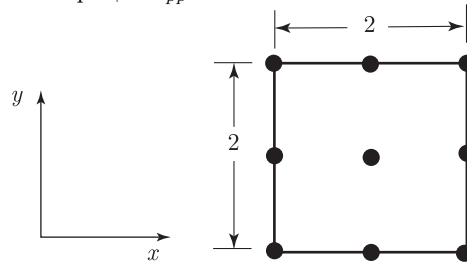


Рассмотрите показанный здесь осесимметричный элемент 4/1 типа u/p . Постройте матрицы \mathbf{B}_D , \mathbf{B}_V , \mathbf{C}' и \mathbf{H}_p для данного элемента.

- 4.43. Рассмотрите показанный здесь элемент 4/3-с в условиях плоских деформаций. Сформулируйте все интерполяционные матрицы для смещений и деформаций применительно к данному элементу (см. таблицу 4.7).

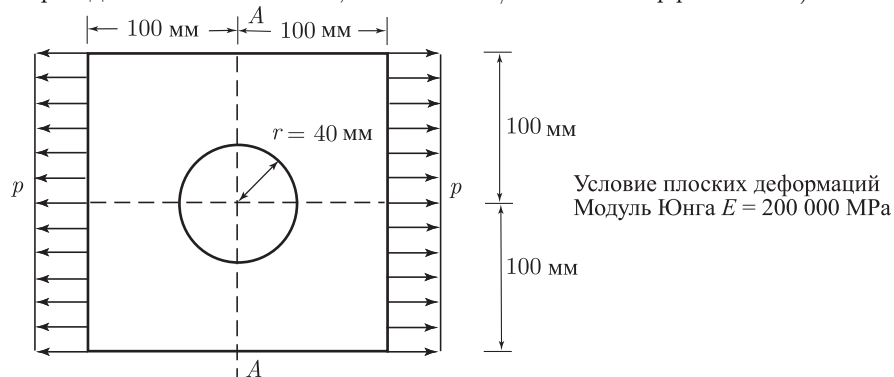


- 4.44. Рассмотрите показанный здесь элемент 9/3 типа u/p в условиях плоских деформаций. Проведите расчет матрицы \mathbf{K}_{pp} .

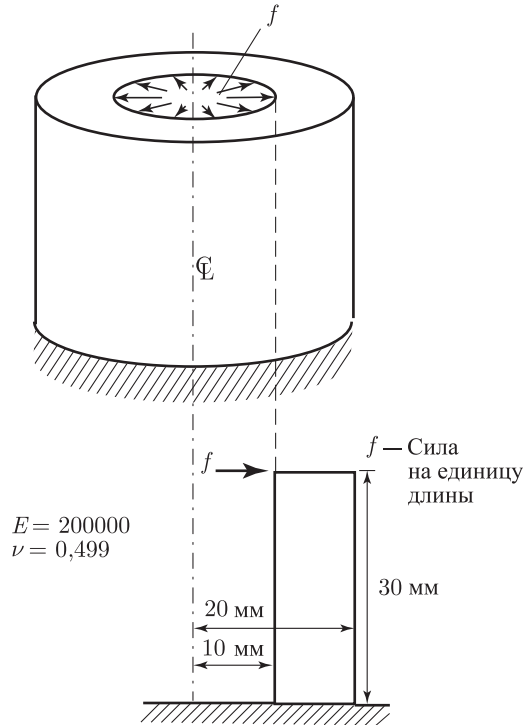


Модуль Юнга E
Коэффициент Пуассона $\nu = 0,49$

- 4.45. Рассмотрите показанную здесь пластину с круглым отверстием. Воспользуйтесь конечно-элементной программой, чтобы построить решение для распределения напряжений в сечении AA для двух значений коэффициента Пуассона: $\nu = 0,3$ и $\nu = 0,499$. Оцените точность ваших результатов путем выбора масштаба ошибки (*подсказка: при проведении анализа с $\nu = 0,499$ элемент 9/3 является эффективным*).



- 4.46. Требуется рассчитать статическую реакцию показанного здесь толстого цилиндра, используя для этого конечно-элементную программу.



Для исследования поведения цилиндра используйте одну из форм идеализации на основе следующих элементов:

- (a) Элемент с четырьмя узлами, базирующийся на учете смещений.
- (b) Элемент с девятью узлами, базирующийся на учете смещений.
- (c) Элемент 4/1 типа u/p .
- (d) Элемент 9/3 типа u/p .

В каждом случае используйте последовательность сеток и определите скорость сходимости по энергии деформаций.

4.5. Условие inf-sup для исследования поведения несжимаемой среды и проблемы создания конструкций

Как мы уже отмечали в предыдущем разделе, весьма важно, чтобы конечно-элементная дискретизация для исследования почти несжимаемых и, конечно же, абсолютно несжимаемых сред удовлетворяла условию inf-sup. В данном разделе мы ставим своей целью сформулировать это условие. Сначала мы рассмотрим модель, связанную только со смещениями и предназначенную для исследования твердых тел, а затем и модели типа смещение/давление. Наконец, мы обсудим также вкратце условие inf-sup в применении к конструкционным элементам.

В процессе нашего обсуждения мы применяем формулировки, базирующиеся на смещении и на смещении/давлении, к твердотельной среде. Однако основные наблюдения и выводы оказываются также непосредственно применимыми к решению задач о течениях несжимаемой жидкости, если только взамен смещений использовать скорости (см. раздел 7.4).

4.5.1. Условие inf-sup, выводимое из соображений сходимости Мы желаем решить общую линейную задачу теории упругости (см. раздел 4.2.1) в ситуации, когда тело подвергается действию массовых сил \mathbf{f}^B , поверхностных тяговых сил \mathbf{f}^{S_f} на поверхности S_f , и граничным условиям для смещений \mathbf{u}^{S_u} на поверхности S_u . Без ущерба для общности тех выводов, к которым мы хотели бы прийти в данном разделе, мы можем предположить, что заданные смещения \mathbf{u}^{S_u} и заданные тяговые силы \mathbf{f}^{S_f} равны нулю. Мы, разумеется, предполагаем, что тело надлежащим образом оперто, так что никакие твердотельные движения не являются возможными. Тогда мы можем записать интересующую нас проблему анализа, как проблему минимизации,

$$\min_{\mathbf{v} \in V} \left\{ \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \frac{\kappa}{2} \int_{\text{Vol}} (\text{div } \mathbf{v})^2 d\text{Vol} - \int_{\text{Vol}} \mathbf{f}^B \cdot \mathbf{v} d\text{Vol} \right\}, \quad (4.151)$$

где, если использовать индексные обозначения и ввести тензорные величины (см. разделы 4.3.4 и 4.4.3), имеем

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= 2G \int_{\text{Vol}} \sum_{i,j} \epsilon'_{ij}(\mathbf{u}) \epsilon'_{ij}(\mathbf{v}) d\text{Vol}, \\ \epsilon'_{ij} &= \epsilon_{ij}(\mathbf{u}) - \frac{1}{3} \text{div } \mathbf{u} \delta_{ij}, \\ \epsilon_{ij}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad \text{div } \mathbf{v} = v_{i,i}, \end{aligned} \quad (4.152)$$

где $\kappa = E/(3(1-2\nu))$ (объемный модуль), $G = E/(2(1+\nu))$ (модуль сдвига), E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

$$V = \left\{ \mathbf{v} \mid \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\text{Vol}), i, j = 1, 2, 3; v_i|_{S_u} = 0, i = 1, 2, 3 \right\}.$$

В этих выражениях используются те же обозначения, что и ранее (см. раздел 4.3), а символом «Vol» обозначается область интегрирования, во избежание путаницы с обозначением векторного пространства V . Кроме того, для вектора \mathbf{v} и скаляра q используются нормы

$$\|\mathbf{v}\|_V^2 = \sum_{ij} \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\text{Vol})}^2; \quad \|q\|_0^2 = \|q\|_{L^2(\text{Vol})}^2, \quad (4.153)$$

где с векторной нормой $\|\cdot\|_V$ работать несколько легче, но она эквивалентна норме Соболева $\|\cdot\|_1$, определяемой в (4.76) (с помощью неравенства Пуанкаре–Фридрихса).

В процессе последующего обсуждения мы не будем явно применять нижних индексов при обозначениях норм, однако всегда будем подразумевать, что вектор \mathbf{w} имеет норму $\|\mathbf{w}\|_V$, а скаляр γ — норму $\|\gamma\|_0$.

Пусть \mathbf{u} будет минимизирующей величиной в соответствии с (4.151) (т.е. точным решением задачи) и пусть V_h будет пространством последовательности конечно-элементных пространств, выбираемой нами для решения задачи. Эти пространства определяются согласно (4.84). Разумеется, каждая конкретная задача

$$\min_{\mathbf{v}_h \in V_h} \left\{ \frac{1}{2} a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \frac{\kappa}{2} \int_{\text{Vol}} (\text{div } \mathbf{v}_h)^2 d\text{Vol} - \int_{\text{Vol}} \mathbf{f}^B \cdot \mathbf{v}_h d\text{Vol} \right\} \quad (4.154)$$

имеет единственное конечно-элементное решение \mathbf{u}_h . Свойства этого решения рассматривались в разделе 4.3.4 и, в частности, мы указали на свойства (4.95) и (4.101). Однако мы констатировали также, что постоянные c в этих соотношениях зависят от свойств материала. В этой связи теперь важно отметить, что если объемный модуль κ очень велик, то соотношения (4.95) и (4.101) оказываются бесполезными, так как упомянутые постоянные слишком велики. Поэтому мы хотим теперь, чтобы наше конечно-элементное пространство V_h обладало другим свойством, все еще сохраняющим форму (4.95), где, однако, постоянная c , в дополнение к ее независимости от h , не зависит также и от κ .

Чтобы зафиксировать это новое желательное свойство, определим прежде всего «расстояние» между точным решением \mathbf{u} и конечно-элементным пространством V_h

(см. рис. 4.49),

$$d(\mathbf{u}, V_h) = \inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\| = \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|, \quad (4.155)$$

где \mathbf{u}_h представляет собой элемент в V_h , но, вообще говоря, не является конечно-элементным решением.

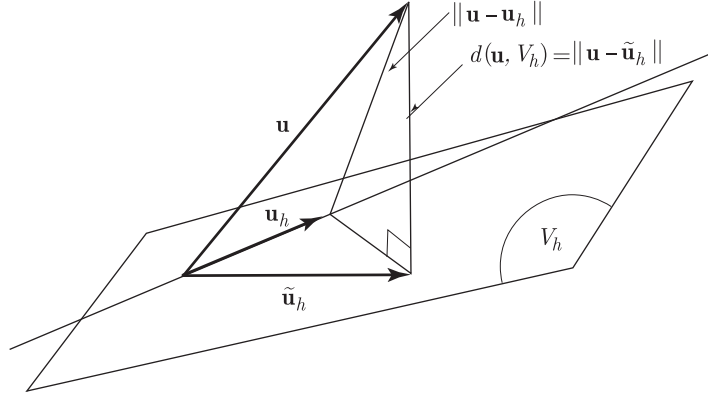


Рис. 4.49. Схематическое представление решений и расстояний; для оптимальной сходимости $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| \leqslant cd(\mathbf{u}, V_h)$ при c , не зависящем от h и k

Основные требования

В инженерной практике объемный модуль κ может изменяться от значений порядка G до очень больших значений и даже, фактически, до бесконечности, если рассматривается полная несжимаемость. Нашей целью является использование таких конечных элементов, которые обладают однородной эффективностью независимо от того, какие значения принимает модуль κ . Поэтому математически нашей целью является нахождение таких условий для V_h , чтобы получить

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| \leqslant cd(\mathbf{u}, V_h) \quad (4.156)$$

при постоянной c , не зависящей от h и κ .

Эти условия будут направлять нас в процессе выбора эффективных конечных элементов и эффективных дискретизаций.

Неравенство (4.156) означает, что расстояние между непрерывным решением \mathbf{u} и конечно-элементным решением \mathbf{u}_h будет меньше, чем $d(\mathbf{u}, V_h)$, умноженное на (имеющую разумный размер) постоянную c , причем это соотношение будет соблюдаться при *одной и той же* постоянной c независимо от используемого объемного модуля. Отметим, что эта *независимость* постоянной c от объемного модуля представляет собой то ключевое свойство, которого у нас не было в разделе 4.3.4 при выводе соотношения такого же типа, как (4.156) (см. (4.95)).

Предположим, что условие (4.156) выполняется (при имеющей разумную величину постоянной c). Тогда, если $d(\mathbf{u}, V_h)$ имеет порядок $o(h^k)$, то мы будем знать, что $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|$ также имеет порядок $o(h^k)$, и в силу разумной величины и независимости от κ постоянной c мы сможем, фактически, наблюдать ту же точность решения, а также повышение этой точности при уменьшении h , независимо от величины объемного модуля, соответствующего данной задаче. В этом случае конечно-элементные пространства обладают хорошими аппроксимационными свойствами при любом значении κ , и конечно-элементная дискретизация оказывается надежной (см. раздел 1.3).

Соотношение (4.156) выражает собой наше фундаментальное требование к конечно-элементной дискретизации, и те конечно-элементные схемы, которые удовлетворяют условию (4.156), не приводят к записанию (см. раздел 4.4.3). В ходе последующего обсуждения мы записываем (4.156) только в таких формах, с которыми нам будет легче заниматься

выбором эффективных конечных элементов. Одна из этих форм использует inf-sup значение и представляет собой именно замечательное условие inf-sup.

Желая продвинуться дальше, определим пространства K и D , а именно,

$$K(q) = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in V, \operatorname{div} \mathbf{v} = q\} \quad (4.157)$$

$$D = \{q \mid q = \operatorname{div} \mathbf{v} \text{ для некоторого } \mathbf{v} \in V\} \quad (4.158)$$

и соответствующие пространства для наших дискретизаций,

$$K_h(q_h) = \{\mathbf{v}_h \mid \mathbf{v}_h \in V_h, \operatorname{div} \mathbf{v}_h = q_h\} \quad (4.159)$$

$$D_h = \{q_h \mid q_h = \operatorname{div} \mathbf{v}_h \text{ для некоторого } \mathbf{v}_h \in V_h\}. \quad (4.160)$$

Следовательно, при заданном q_h пространство $K_h(q_h)$ соответствует всем тем элементам \mathbf{v}_h в пространстве V_h , которые удовлетворяют условию $\operatorname{div} \mathbf{v}_h = q_h$. Также и пространство D_h соответствует всем тем элементам q_h , $q_h = \operatorname{div} \mathbf{v}_h$, которых достигают элементы \mathbf{v}_h внутри V_h ; иначе говоря, для любого q_h , являющегося элементом D_h , имеется по меньшей мере один элемент q_h , принадлежащий V_h и такой, что $q_h = \operatorname{div} \mathbf{v}_h$. Аналогичные рассуждения применимы к пространствам K и D .

Напомним, что когда величина κ велика, то величина $\|\operatorname{div} \mathbf{u}_h\|$ будет мала; чем больше κ , тем меньше будет $\|\operatorname{div} \mathbf{v}_h\|$, и оказывается затруднительным дать точный прогноз для давления $p_h = -\kappa \operatorname{div} \mathbf{u}_h$. В пределе $\kappa \rightarrow \infty$ мы имеем $\operatorname{div} \mathbf{u}_h = 0$, однако давление все еще остается конечным (и, разумеется, имеет тот же порядок, что и приложенные тяговые силы, а поэтому $\kappa(\operatorname{div} \mathbf{u}_h)^2 = 0$).

Прежде чем сформулировать условие inf-sup, давайте поставим условие эллиптичности для задачи, соответствующей абсолютной несжимаемости: существует постоянная α , большая нуля и независимая от h , такая, что

$$a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \geq \alpha \|\mathbf{v}_h\|^2 \quad \forall \mathbf{v}_h \in K_h(0). \quad (4.161)$$

По существу, это условие констатирует, что энергия отклоняющих деформаций должна быть ограничена снизу, что, очевидно, выполняется. В дальнейшем мы обращаемся к условию эллиптичности и разъясняем его сущность при рассмотрении в разделе 4.5.2 задачи о несжимаемой упругой среде.

Подчеркнем, что единственным видом переменных при этой конечно-элементной модели являются смещения.

Получение условия inf-sup

Значение условия inf-sup состоит в том, что при его выполнении обеспечивается соблюдение неравенства (4.156). Теперь это условие можно вывести следующим образом. Учитывая, что условие абсолютной несжимаемости представляет собой, очевидно, чрезвычайно суровое ограничение, мы рассмотрим именно этот случай. Тогда $q = 0$, величина \mathbf{u} принадлежит $K(q)$ при $q = 0$ (то есть $K(0)$), и континуальная проблема (4.151) приобретает вид

$$\min_{\mathbf{v} \in K(0)} \left\{ \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \int_{\operatorname{Vol}} \mathbf{f}^B \cdot \mathbf{v} d\operatorname{Vol} \right\} \quad (4.162)$$

и имеет решение \mathbf{u} , тогда как дискретная проблема принимает форму

$$\min_{\mathbf{v}_h \in K_h(0)} \left\{ \frac{1}{2} a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) - \int_{\operatorname{Vol}} \mathbf{f}^B \cdot \mathbf{v}_h d\operatorname{Vol} \right\} \quad (4.163)$$

и имеет решение \mathbf{u}_h .

Рассмотрим теперь условие (4.156). Мы замечаем, что это условие сводится к сравнению расстояний. При последующем обсуждении мы называем некое расстояние «малым», если при уменьшении h оно остается имеющим тот же порядок величины, что и $d(\mathbf{u}, V_h)$. Аналогично этому, мы будем называть некий вектор малым, если его длина соответствует тому же определению, и будем также говорить, что вектор «близок» другому вектору, если векторная разность этих двух векторов мала.

Если учесть, что $\mathbf{u}_h \in K_h(0)$ и, поэтому, всегда $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| \leq \tilde{c}d[\mathbf{u}, K_h(0)]$ (см. упражнение 4.47), то мы можем также записать условие (4.156) в форме

$$d[\mathbf{u}, K_h(0)] \leq cd(\mathbf{u}, V_h), \quad (4.164)$$

которая означает, что мы хотели бы сделать расстояние от \mathbf{u} до $K_h(0)$ малым. Это соотношение выражает собой требование о том, что если расстояние между \mathbf{u} и V_h (полное пространство конечно-элементных смещений) уменьшается с определенной скоростью при $h \rightarrow 0$, то расстояние между \mathbf{u} и тем пространством, в котором располагается фактическое решение (так как $\mathbf{u}_h \in K_h(0)$), уменьшается с той же скоростью.

Рисунок 4.50 схематически показывает те пространства и векторы, которые мы используем. Пусть \mathbf{u}_{h0} будет выбранный нами вектор в пространстве $K_h(0)$ и пусть \mathbf{w}_h будет соответствующим вектором, таким, что

$$\tilde{\mathbf{u}}_h = \mathbf{u}_{h0} + \mathbf{w}_h. \quad (4.165)$$

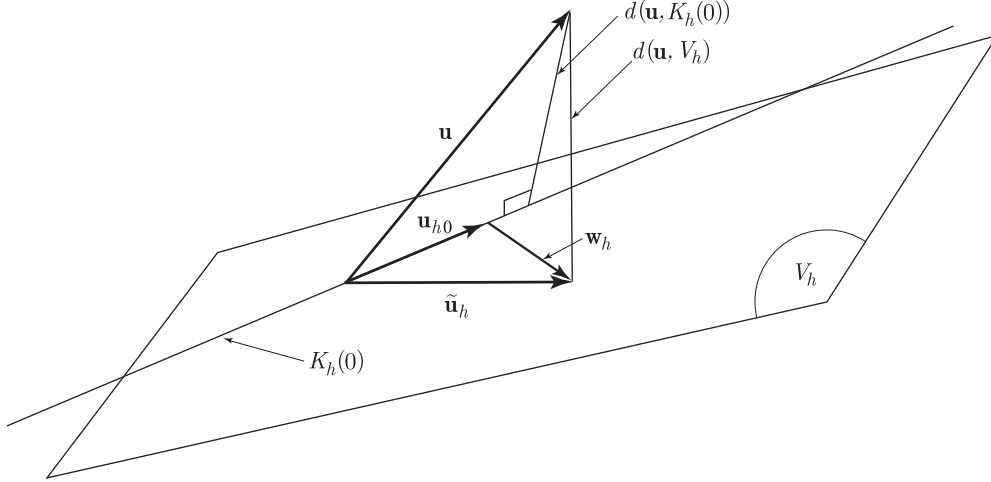


Рис. 4.50. Пространства и векторы, рассматриваемые при выводе условия inf-sup

Тогда мы сможем доказать, что условие (4.164) выполняется, если только для всех $q_h \in D_h$ существует $\mathbf{w}_h \in K_h(q_h)$, такой, что

$$\|\mathbf{w}_h\| \leq c' \|q_h\|, \quad (4.166)$$

где c не зависит ни от h , ни от объемного модуля κ .

Во-первых, мы всегда имеем (см. упражнение 4.48)

$$\|\operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}_h\| \leq \alpha \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\| \quad (4.167)$$

и, следовательно,

$$\|\operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}_h\| \leq \alpha d(\mathbf{u}, V_h), \quad (4.168)$$

где α — постоянная, и где мы использовали равенство $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$.

Во-вторых, мы полагаем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{h0}\| &= \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h + \mathbf{w}_h\| \leq \\ &\leq \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\| + \|\mathbf{w}_h\|. \end{aligned}$$

Теперь предположим, что условие (4.166) выполняется при $q_h = \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}_h$. В силу того, что $\operatorname{div} \mathbf{u}_{h0} = 0$, мы имеем $\operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}_h = \operatorname{div} \mathbf{w}_h$, где, как мы замечаем, $\tilde{\mathbf{u}}_h$ фиксируется соотношением (4.155), и поэтому фиксируется величина q_h , однако путем выбора различных значений \mathbf{u}_{h0} значения \mathbf{w}_h также получаются различными. Тогда, как следствие, получим

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{h0}\| &\leq d(\mathbf{u}, V_h) + c' \|q_h\| = \\ &= d(\mathbf{u}, V_h) + c' \|\operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}_h\| \leq \\ &\leq d(\mathbf{u}, V_h) + c' \alpha d(\mathbf{u}, V_h). \end{aligned} \quad (4.169)$$

Подчеркнем, что при этом выводе мы использовали условие (4.166) и предположили, что \mathbf{u}_{h0} является элементом пространства $K_h(0)$, притом таким, что \mathbf{w}_h удовлетворяет

условию (4.166). Кроме того, отметим, что неравенство (4.168) фиксирует только малость величины $\|\operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}_h\|$, но тогда в силу (4.169) выясняется, что и величина $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{h0}\|$ является малой.

В-третьих, если учесть, что $\mathbf{u}_{h0} \in K_h(0)$, из (4.169) мы получим

$$d[\mathbf{u}, K_h(0)] \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{h0}\| \leq (1 + \alpha c') d(\mathbf{u}, V_h), \quad (4.170)$$

что совпадает с (4.164) при $c = 1 + \alpha c'$, и мы замечаем, что c не зависит ни от h , ни от объемного модуля.

Критический шаг при выводе неравенства (4.164) связан с тем, что, используя (4.166) при $q_h = \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}_h$, мы можем выбрать малый вектор \mathbf{w}_h (это следует из (4.166) и (4.168)). Отметим, что условие (4.166) является единственным, которое требуется нам для доказательства справедливости (4.164) и, следовательно, это и есть то фундаментальное требование, которое необходимо выполнить для достижения конечно-элементной дискретизации, обеспечивающей оптимальную скорость сходимости.

Если учесть (4.164), то для достижения оптимальной скорости сходимости постоянная c' , фигурирующая в неравенстве (4.166), должна быть независимой от h . Предположим, например, что вместо (4.166) мы имеем условие $\|\mathbf{w}_h\| \leq (1/\beta_h)\|q_h\|$, при коэффициенте β_h , уменьшающемся вместе с h . Тогда (4.170) примет вид

$$d[\mathbf{u}, K_h(0)] \leq \left(1 + \frac{\alpha}{\beta_h}\right) d(\mathbf{u}, V_h) \quad (4.171)$$

и, следовательно, расстояние между \mathbf{u} и $K_h(0)$ не будет уменьшаться с той же скоростью, что и $d(\mathbf{u}, V_h)$. Однако сходимость, хотя и не оптимальная, все же будет иметь место, если $d(\mathbf{u}, V_h)$ уменьшается быстрее, чем β_h . Как показывает это обстоятельство, условие (4.166) дает надежную гарантию того, что наша дискретизация будет иметь хорошие свойства сходимости.

Давайте теперь перепишем условие (4.166) в форме условия inf-sup. При переменных q_h и \mathbf{w}_h , $\mathbf{w}_h \in K_h(q_h)$, мы получаем из (4.166) условие

$$\|\mathbf{w}_h\| \|q_h\| \leq c' \|q_h\|^2 = c' \int_{\operatorname{Vol}} q_h \operatorname{div} \mathbf{w}_h d\operatorname{Vol}, \quad (4.172)$$

или условие о том, что при всех $q_h \in D_h$ существует такое $\mathbf{w}_h \in K_h(q_h)$, что

$$\frac{1}{c'} \|q_h\| \leq \frac{\int_{\operatorname{Vol}} q_h \operatorname{div} \mathbf{w}_h d\operatorname{Vol}}{\|\mathbf{w}_h\|}. \quad (4.173)$$

Следовательно, мы хотим, чтобы

$$\frac{1}{c'} \|q_h\| \leq \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{\int_{\operatorname{Vol}} q_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h d\operatorname{Vol}}{\|\mathbf{v}_h\|}, \quad (4.174)$$

а отсюда следует условие inf-sup:

$$\inf_{q_h \in D_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{\int_{\operatorname{Vol}} q_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h d\operatorname{Vol}}{\|\mathbf{v}_h\| \|q_h\|} \geq \beta > 0 \quad (4.175)$$

при постоянной β , не зависящей от κ и h .

Отметим, что $\beta = 1/c'$.

Таким образом, выполнение условия (4.166) подразумевает и выполнение условия (4.175), причем можно доказать и то, что выполнение (4.175) подразумевает выполнение (4.166) (см. пример 4.42).

Мы приведем это доказательство несколько ниже, потому что вначале следует обсудить некоторые важные дополнительные факты. Как следует из сказанного выше, мы должны говорить об условии (4.166), как об одной из форм условия inf-sup.

Условие inf-sup гласит, что для достижения эффективности конечно-элементной дискретизации при наличии последовательности конечно-элементных пространств, выбирая

любое $q_h \in D_h$, мы должны иметь такое $\mathbf{v}_h \in V_h$, что частное из неравенства (4.175) будет больше или равно β , причем $\beta > 0$. Если условие inf-sup выполняется за счет определенной последовательности конечно-элементных пространств, то наша схема конечно-элементной дискретизации будет проявлять требуемые нам хорошие аппроксимационные свойства, а именно — будет выполняться условие (4.156).

Заметим, что если параметр β зависит от h , например, если условие (4.175) выполняется при β_h вместо β , то оказывается применимым выражение из (4.171) (в качестве примера см. изопараметрический балочный элемент с тремя узлами из раздела 4.5.7).

Выполняется ли условие inf-sup, — это зависит, вообще говоря, от конкретного вида используемых конечных элементов, от топологии сетки и от граничных условий. Если дискретизация, использующая некий конкретный конечный элемент, всегда приводит к выполнению условия (4.175), при любой топологии сетки и при любых граничных условиях, то мы просто говорим, что данный элемент удовлетворяет условию inf-sup. Если, с другой стороны, нам известно об одном виде топологии сетки и/или об одном комплекте (физически реальных) граничных условий, при которых данная дискретизация не удовлетворяет условию (4.175), то мы просто говорим, что данный элемент не удовлетворяет условию inf-sup.

Другая форма условия inf-sup

Для того, чтобы установить, удовлетворяет ли некий элемент условию inf-sup (4.175), весьма полезно воспользоваться другой формой этого условия, а именно

Для всех \mathbf{u} существует такое $\mathbf{u}_I \in V_h$
(вектор, интерполирующий \mathbf{u}), что

$$\int_{\text{Vol}} \text{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_I) q_h \, d\text{Vol} = 0 \quad \text{при всех } q_h \in D_h \quad (4.176)$$

$$\|\mathbf{u}_I\| \leq c \|\mathbf{u}\|$$

при постоянной c , не зависящей от \mathbf{u} , \mathbf{u}_I и h .

Эквивалентность условий (4.176) и (4.175) (а следовательно, и (4.166)) может быть доказана формально (см. [Brezzi, Fortin 1991], а также [Brezzi, Bathe 1986], [Brezzi, Bathe 1990]), однако просто для того, чтобы связать утверждения в (4.176) с нашими предыдущими утверждениями, отметим, что при выводе условия inf-sup были выявлены два фундаментальных требования; а именно — что существует вектор \mathbf{w}_h , такой, что (см. рис. 4.50)

$$\text{div } \mathbf{w}_h = \text{div } \tilde{\mathbf{u}}_h, \quad (4.177)$$

а также — что (см. (4.166) и (4.168))

$$\|\mathbf{w}_h\| \leq c^* d(\mathbf{u}, V_h), \quad (4.178)$$

где c^* — некоторая постоянная.

Отметим, что (4.176) соответствует (4.177) и (4.178), если мы будем считать вектор $\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}$ (т.е. вектор разности между наилучшей аппроксимацией в пространстве V_h и точным решением) *вектором решения*, а вектор \mathbf{w}_h — *вектором интерполяции*.

Следовательно, условия состоят в том, что для получения эффективной схемы дискретизации вектор интерполяции \mathbf{w}_h должен соответствовать приведенной выше дивергенции и удовлетворять условиям «малого размера» для \mathbf{u} в масштабе измерения вектора $(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u})$.

Три выражения для условия inf-sup, а именно, (4.166), (4.175) и (4.176), оказываются полезными в различных приложениях, однако все они, конечно же, выражают одно и то же требование. При математических исследованиях обычно применяются формы (4.166) и (4.175), тогда как форма (4.176) зачастую оказывается очень легко используемой при доказательстве того, удовлетворяет ли данный конкретный элемент интересующему нас условию (см. пример 4.36).

При обсуждении условия inf-sup мы обнаруживаем, что чем богаче пространство $K_h(0)$, тем более возможным оказывается удовлетворение условию (4.175) (то есть (4.164)). Однако, к сожалению, при использовании стандартных элементов на базе учета

смещений, предлагаемое ограничение оказывается в общем случае слишком сильным как для элементов, так и для сеток (т.е. для пространств V_h), представляющих интерес для нас, и соответствующие дискретизации приводят к запиранию (см. рис. 4.45). Поэтому мы обращаемся к смешанным схемам, не приводящим к запиранию и обнаруживающим желательные скорости сходимости. Отличными кандидатами являются схемы типа смещение/давление, которые уже приводились нами в разделе 4.3.3. Однако, если схема, базирующаяся только на смещениях, является (всегда) устойчивой, но обычно ведет к запиранию, то при выборе любой смешанной модели главная дополнительная забота сводится к выяснению того, является ли она устойчивой. При последующем обсуждении мы увидим, что условия отсутствия запирания и устойчивости будут выполняться, если за счет надлежащего выбора интерполяций для смещений и для давления удовлетворяется условие inf-sup, тогда как при указанном надлежащем выборе интерполяций будет достигаться также и желательная (оптимальная) скорость сходимости.

Ослабление ограничения

Рассмотрим схему u/p . Дискретная вариационная задача для модели u/p имеет вид (в соответствии с (4.140) и (4.143))

$$\min_{\mathbf{v}_h \in V_h} \left\{ \frac{1}{2} a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \frac{\kappa}{2} \int_{\text{Vol}} [P_h(\text{div } \mathbf{v}_h)]^2 d\text{Vol} - \int_{\text{Vol}} \mathbf{f}^B \cdot \mathbf{v}_h d\text{Vol} \right\}, \quad (4.179)$$

где проекционный оператор P_h определяется соотношением

$$\int_{\text{Vol}} [P_h(\text{div } \mathbf{v}_h) - \text{div } \mathbf{v}_h] q_h d\text{Vol} = 0 \quad \text{при всех } q_h \in Q_h \quad (4.180)$$

и где Q_h представляет собой то «пространство давления», которое предстоит выбрать. Мы видим, что Q_h всегда содержит в себе $P_h(D_h)$, но что иногда Q_h бывает больше, чем $P_h(D_h)$, и этот случай мы обсудим позднее.

Желая убедиться в том, что соотношения (4.179) и (4.180) действительно эквивалентны схеме u/p , мы перепишем эти соотношения в форме

$$2G \int_{\text{Vol}} \epsilon'_{ij}(\mathbf{u}_h) \epsilon'_{ij}(\mathbf{v}_h) d\text{Vol} - \int_{\text{Vol}} p_h \text{div } \mathbf{v}_h d\text{Vol} = \int_{\text{Vol}} \mathbf{f}^B \cdot \mathbf{v}_h d\text{Vol} \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \quad (4.181)$$

$$\int_{\text{Vol}} \left(\frac{p_h}{\kappa} + \text{div } \mathbf{u}_h \right) q_h d\text{Vol} = 0 \quad \forall q_h \in Q_h. \quad (4.182)$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями (4.140) и (4.143) из раздела 4.4.3, и мы вспоминаем, что они справедливы для любого значения $\kappa > 0$. Ключевой момент в схеме u/p состоит в том, что (4.180) [т.е. (4.182)] применяется к каждому элементу по отдельности и, если только значение κ является конечным, то переменные давления могут быть статически сгущены на элементном уровне (до того, как матрицы жесткости элементов будут объединены в матрицу жесткости для конструкции в целом).

Рассмотрим приводимый ниже пример.

Пример 4.34: Требуется вывести выражение для $P_h(\text{div } \mathbf{v}_h)$ применительно к показанному на рис. 4.51 элементу 4/1.

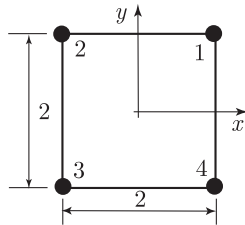


Рис. 4.51. Элемент 4/1 с плоскими деформациями

После этого требуется вычислить член $(\kappa/2) \int_{\text{vol}} [P_h(\text{div } \mathbf{v}_h)]^2 d\text{Vol}$ в соотношении (4.179). Мы имеем

$$\text{div } \mathbf{v}_h = [h_{1,x} \quad \dots \quad h_{4,x} \quad \vdots \quad h_{1,y} \quad \dots \quad h_{4,y}] \hat{\mathbf{u}},$$

$$\text{где } \hat{\mathbf{u}}^T = [u_1 \quad \dots \quad u_4 \quad \vdots \quad v_1 \quad \dots \quad v_4].$$

Теперь воспользуемся соотношением (4.180), полагая q_h произвольной, отличной от нуля постоянной (например, $q_h = \alpha$), потому что здесь Q_h представляет собой пространство постоянных давлений.

Поскольку величина $P_h(\operatorname{div} \mathbf{v}_h)$ также постоянна, то из (4.180) получим

$$4P_h(\operatorname{div} \mathbf{v}_h)\alpha = \alpha \int_{\text{vol}} \operatorname{div} \mathbf{v}_h d\text{Vol},$$

а это дает

$$P_h(\operatorname{div} \mathbf{v}_h) = \frac{1}{4} [1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad \vdots \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1] \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{D} \hat{\mathbf{u}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\kappa}{2} \int_{\text{Vol}} [P_h(\operatorname{div} \mathbf{v}_h)]^2 d\text{Vol} = \frac{\kappa}{2} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{G}_h \hat{\mathbf{u}},$$

где

$$\mathbf{G}_h = 4\mathbf{D}^T \mathbf{D}.$$

Заметим, что хотя мы и использовали пространство давлений Q_h , полученная из (4.179) матрица жесткости будет соответствовать только смещениям в узловых точках.

Отметим также, что при $x = y$ член $P_h(\operatorname{div} \mathbf{v}_h)$ равен просто $\operatorname{div} \mathbf{v}_h$.

Пример 4.35: Рассмотрим показанный на рис. 4.52 элемент с девятью узлами и предположим, что \mathbf{v}_h задается посредством смещений в узловых точках $u_1 = 1$, $u_5 = 0,5$, $u_8 = 0,5$, $u_9 = 0,25$, при смещениях во всех остальных узловых точках, равных нулю. Пусть Q_h будет пространством, соответствующим $\{1, x, y\}$. Требуется вычислить $P_h(\operatorname{div} \mathbf{v}_h)$.

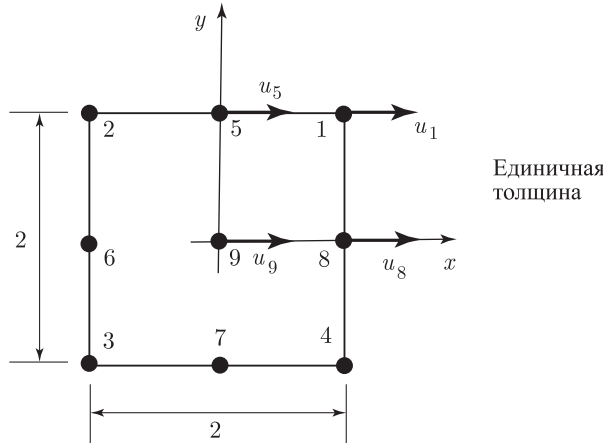


Рис. 4.52. Элемент 9/3, подвергнутый смещениям в узловых точках

Для вычисления $P_h(\operatorname{div} \mathbf{v}_h)$ воспользуемся общим соотношением

$$\int_{\text{Vol}} (P_h(\operatorname{div} \mathbf{v}_h) - \operatorname{div} \mathbf{v}_h) q_h d\text{Vol} = 0 \quad \forall q_h \in Q_h. \quad (\text{a})$$

В данном случае

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_h = \frac{\partial u_h}{\partial x} + \frac{\partial v_h}{\partial y},$$

где u_h и v_h соответствуют смещениям в узловых точках элемента. Следовательно,

$$\begin{aligned} u_h &= \frac{1}{4} (1+x)(1+y), \\ v_h &= 0 \end{aligned}$$

и

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_h = \frac{1}{4} (1+y).$$

Положим

$$P_h(\operatorname{div} \mathbf{v}_h) = a_1 + a_2 x + a_3 y,$$

тогда (a) дает

$$\int_{\operatorname{Vol}} \left[(a_1 + a_2 x + a_3 y) - \frac{1}{4} (1+y) \right] q_h dx dy = 0 \quad (\text{b})$$

для $q_h = 1, x$ и y . Следовательно, (b) дает систему уравнений

$$\begin{bmatrix} \int_{\operatorname{Vol}} dx dy & \int_{\operatorname{Vol}} x dx dy & \int_{\operatorname{Vol}} y dx dy \\ & \int_{\operatorname{Vol}} x^2 dx dy & \int_{\operatorname{Vol}} xy dx dy \\ \text{симметрия} & & \int_{\operatorname{Vol}} y^2 dx dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\operatorname{Vol}} \frac{1}{4} (1+y) dx dy \\ \int_{\operatorname{Vol}} \frac{1}{4} (1+y)x dx dy \\ \int_{\operatorname{Vol}} \frac{1}{4} (1+y)y dx dy \end{bmatrix}$$

или

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ & 4/3 & 0 \\ \text{симм.} & & 4/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{bmatrix}. \quad (\text{c})$$

Решение уравнений (c) дает $a_1 = 1/4$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1/4$ и, следовательно,

$$P_h(\operatorname{div} \mathbf{v}_h) = \frac{1}{4} (1+y).$$

Этот результат является правильным, так как $\operatorname{div} \mathbf{v}_h$ может быть точно представлена в пространстве Q_h , а в таком случае, разумеется, проекция дает значение $\operatorname{div} \mathbf{v}_h$.

Теперь условие inf-sup, соответствующее соотношению (4.179), оказывается подобным тому условию inf-sup, которое мы обсуждали ранее, но с использованием члена $P_h(\operatorname{div} \mathbf{v}_h)$ вместо $\operatorname{div} \mathbf{v}_h$. Следовательно, теперь наше условие имеет вид

$$\inf_{q_h \in P_h(D_h)} \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{\int_{\operatorname{Vol}} q_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h d\operatorname{Vol}}{\|\mathbf{v}_h\| \|q_h\|} \geq \beta > 0. \quad (4.183)$$

Другими словами, условие inf-sup соответствует теперь любому элементу в пространстве V_h и $P_h(D_h)$. Следовательно, если применить одно из соотношений (4.166), (4.175) или (4.176) к элементам типа u/p со смешанной интерполяцией, то нам теперь нужно будет рассмотреть конечно-элементные пространства V_h и $P_h(D_h)$, где $P_h(D_h)$ применяется взамен D_h .

Пример 4.36: Требуется доказать, что представленный в разделе 4.4.3 двумерный элемент 9/3, типа u/p , удовлетворяет условию inf-sup.

Для доказательства воспользуемся формой условия inf-sup, представленной в (4.176) (см. [Brezzi, Bathe 1986]). Предполагая величину \mathbf{u} гладкой, необходимо найти такую интерполяцию $\mathbf{u}_I \in V_h$, чтобы для каждого элемента m иметь

$$\int_{\operatorname{Vol}^{(m)}} (\operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{div} \mathbf{u}_I) q_h d\operatorname{Vol}^{(m)} = 0 \quad (\text{a})$$

для всех полиномов q_h со степенью ≤ 1 в объеме $\text{Vol}^{(m)}$. Чтобы определить \mathbf{u}_I , зададим значения каждого смещения в девяти узлах элемента (узлы в углах, в серединах сторон, и узел в центре). Начнем с угловых узлов и потребуем, чтобы для этих узлов, $i = 1, 2, 3, 4$, выполнялись условия

$$\mathbf{u}_I|_i = \mathbf{u}|_i \text{ — восемь условий.} \quad (\text{b})$$

После этого мы подстраиваем значения для узлов в серединах сторон, $j = 5, 6, 7, 8$, таким образом, чтобы получить

$$\int_{S_j} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_I) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_j} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_I) \cdot \boldsymbol{\tau} dS = 0 \text{ — восемь условий} \quad (\text{c})$$

для каждой из кромок S_1, \dots, S_4 данного элемента, при единичном векторе нормали \mathbf{n} и при единичном касательном векторе по отношению к кромке $\boldsymbol{\tau}$.

Далее отметим, что при каждом постоянном q_h выполнение условия (а) подразумевает, что

$$\int_{\text{Vol}^{(m)}} \text{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_I) q_h d\text{Vol}^{(m)} = q_h \sum_{S_1, \dots, S_4} \int_{S_j} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_I) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (\text{d})$$

Нам остается использовать две степени свободы для узла в центре. Мы выбираем эти степени свободы таким образом, чтобы иметь

$$\int_{\text{Vol}^{(m)}} \text{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_I) x d\text{Vol}^{(m)} = \int_{\text{Vol}^{(m)}} \text{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_I) y d\text{Vol}^{(m)} = 0. \quad (\text{e})$$

Отметим, что соотношения (d) и (e) подразумевают и выполнение (а), а также, что \mathbf{u}_I , будучи построено элемент за элементом, с использованием (b) и (c), окажется непрерывным при переходе от элемента к элементу. Наконец, отметим, что, как очевидно, если \mathbf{u} представляет собой (векторный) полином степени ≤ 2 в данном элементе, то мы получим $\mathbf{u}_I \equiv \mathbf{u}$, а это обеспечивает оптимальные ограничения для $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_I\|$ и подразумевает выполнение условия $\|\mathbf{u}_I\| \leq c\|\mathbf{u}\|$ в (4.176) при всех \mathbf{u} .

Если при схеме u/p проекция (4.180) выполняется для каждого элемента по отдельности, то при схеме u/p -с предполагается наличие непрерывной интерполяции для давления, а тогда применяются соотношения (4.181) и (4.182). Соотношение (4.182) при непрерывной интерполяции давления дает систему уравнений, связывающих между собой смещения и давления в соседних элементах. В этом случае условие inf-sup все еще задается с помощью (4.183), однако теперь пространство давлений соответствует непрерывным интерполяциям давлений в узловых точках.

Имея дело с условием inf-sup, мы убеждаемся, что способность удовлетворить этому условию зависит от того, как пространство $P_h(D_h)$ связано с пространством смещений V_h . Здесь, опять-таки, P_h представляет собой оператор, осуществляющий проекцию на пространство Q_h (см. (4.180) и (4.182)), и, в общем случае, чем меньше пространство Q_h , тем легче оказывается выполнить указанное условие. Конечно, если при заданном пространстве V_h условие inf-sup удовлетворяется при меньшем, чем это необходимо, Q_h , то мы получим устойчивый элемент, однако способность к прогнозу будет не настолько высока, насколько это возможно (а именно, как это было бы при большем пространстве Q_h и при удовлетворении условию inf-sup).

Рассмотрим, например, изопараметрический элемент с девятью узлами (см. раздел 4.3.3). Если воспользоваться схемой u/p при $P_h = I$ (оператор идентичности), то получится модель, базирующаяся на учете смещений, и элемент дает запираание. Если уменьшить ограничение так, чтобы получить элемент 9/3, то условие inf-sup будет удовлетворено (см. пример 4.36), а для смещений и для давления получаются оптимальные скорости сходимости; а именно, скорость сходимости для смещений приобретает порядок $o(h^3)$, а для напряжений — $o(h^2)$, и это — наилучший вариант, которого можно ожидать при параболической интерполяции смещений и линейной интерполяции давления. Производя дальнейшее снижение ограничений вплоть до получения элемента 9/1, мы приходим вновь

к выполнению условия inf-sup и, хотя поведение элемента в отношении используемых интерполяций все еще остается оптимальным, однако прогнозирующая способность такого элемента с девятью узлами не является наилучшей из возможных (это связано с тем, что давление в элементе предполагается постоянным, тогда как могла бы быть использована линейная вариация давления).

Сделанное выше замечание относительно качества решения связано с ограничениями на величину ошибки (см., например, [Brezzi, Bathe 1990]). Пусть $\mathbf{u}_i \in V_h$ является интерполянт \mathbf{u} , удовлетворяющим условиям

$$\left. \begin{aligned} & \int_{\text{Vol}} [\text{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_I)] q_h d\text{Vol} = 0 \quad \forall q_h \in P_h(D_h) \\ & \text{и} \quad \|\mathbf{u}_I\| \leq c \|\mathbf{u}\| \end{aligned} \right\} \quad (4.184)$$

Если условия (4.184) выполняются для всех возможных решений \mathbf{u} , то

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| \leq c_1 (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_I\| + \|(I - P_h)p\|) \quad (4.185)$$

и

$$\|p + \kappa P_h(\text{div } \mathbf{u}_h)\| \leq c_2 (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_I\| + \|(I - P_h)p\|), \quad (4.186)$$

где $p = -\kappa \text{div } \mathbf{u}$, а c_1 и c_2 — постоянные, не зависящие от h и κ . Мы, разумеется, замечаем, что условие (4.184) является условием inf-sup с ослабленным ограничением $q_h \in P_h(D_h)$ (см. (4.176)), и что правые части (4.185) и (4.186) оказываются тем меньше, чем ближе P_h к I .

4.5.2. Условие inf-sup, выводимое из матричных уравнений

Более полная информация об условии inf-sup может быть получена путем изучения определяющих алгебраических конечно-элементных уравнений. Рассмотрим случай абсолютной несжимаемости (это — наиболее суровый случай), для которого имеем

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{uu})_h & (\mathbf{K}_{up})_h \\ (\mathbf{K}_{pu})_h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_h \\ \mathbf{P}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_h \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.187)$$

где в \mathbf{U}_h входят все неизвестные смещения в узловых точках, а в \mathbf{P}_h — неизвестные переменные значения давления. Если учесть, что материал предполагается абсолютно несжимаемым, то мы получим квадратную нулевую матрицу, размер которой равен числу переменных значений давления в нижнем правом углу матрицы коэффициентов.

Математический анализ модели, приводящей к (4.187), состоит в исследовании *разрешимости* и *устойчивости* уравнений, причем устойчивость уравнений подразумевает под собой и их разрешимость.

Разрешимость уравнений (4.187) относится просто к тому факту, что система (4.187) может на самом деле быть разрешена относительно единственных векторов \mathbf{U}_h и \mathbf{P}_h , если задана величина \mathbf{R}_h .

Условия разрешимости (см. упражнение 4.54) имеют вид:

Условие 1:

$$\mathbf{V}_h^T (\mathbf{K}_{uu})_h \mathbf{V}_h > 0 \quad \text{при всех } \mathbf{V}_h, \text{ удовлетворяющих} \quad (4.188) \\ \text{условию } (\mathbf{K}_{pu})_h \mathbf{V}_h = 0.$$

Условие 2:

$$(\mathbf{K}_{up})_h \mathbf{Q}_h = 0 \quad \text{подразумевает, что величина } \mathbf{Q}_h \quad (4.189) \\ \text{должна быть равна нулю.}$$

Пространство векторов смещения \mathbf{V}_h , удовлетворяющих условию $(\mathbf{K}_{pu})_h \mathbf{V}_h = 0$, представляет собой ядро $(\mathbf{K}_{pu})_h$.

Устойчивость модели исследуется путем рассмотрения последовательности задач, представленных в форме (4.187) со все более и более мелкими сетками. Пусть S представляет собой наименьшую постоянную из тех, которые удовлетворяют неравенству

$$\frac{\|\Delta \mathbf{u}_h\|_V + \|\Delta p_h\|_0}{\|\mathbf{u}_h\|_V + \|p_h\|_0} \leq S \frac{\|\Delta \mathbf{f}^B\|_{DV}}{\|\mathbf{f}^B\|_{DV}} \quad (4.190)$$

при всех \mathbf{u}_h , p_h , \mathbf{f}^B , $\Delta \mathbf{u}_h$, Δp_h и $\Delta \mathbf{f}^B$, где $\|\cdot\|_V$ и $\|\cdot\|_0$ представляют собой нормы, определенные в (4.153), тогда как $\|\cdot\|_{DV}$ означает двойственную норму по отношению

к $\|\cdot\|_V$ (см. раздел 2.7), а $\Delta \mathbf{f}^B$, $\Delta \mathbf{u}_h$ и Δp_h означают заданное возмущение функции нагрузки \mathbf{f}^B и соответствующие ему возмущения вектора смещений \mathbf{u}_h и давления p_h . Разумеется, мы имеем

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{uu})_h & (\mathbf{K}_{up})_h \\ (\mathbf{K}_{pu})_h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U}_h \\ \Delta \mathbf{P}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{R}_h \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.191)$$

где $\Delta \mathbf{R}_h$ соответствует вариации нагрузки $\Delta \mathbf{f}^B$, а входящие в неравенство (4.190) нормы конечно-элементных переменных задаются через посредство значений в узловых точках, фигурирующих в векторах решения. Следовательно, соотношение (4.190) выражает собой тот факт, что при заданном относительном значении возмущения вектора нагрузки соответствующее ему относительное возмущение решения ограничено умноженным на S относительным возмущением нагрузки.

При любой заданной фиксированной сетке удовлетворение условий разрешимости подразумевает, что неравенство (4.190) соблюдается при некотором S , значение которого зависит от размера сетки.

Модель является устойчивой, если для любой последовательности сеток постоянная устойчивости S остается равномерно ограниченной. Следовательно, наш вопрос, касающийся устойчивости, сводится к поиску таких условий для матриц $(\mathbf{K}_{uu})_h$ и $(\mathbf{K}_{up})_h$, которые обеспечивали бы равномерную ограниченность постоянной S при использовании любой последовательности сеток.

В разделе 2.7 мы кратко рассмотрели условия устойчивости по отношению к некоторой схеме, приводящей к матрице коэффициентов общего вида \mathbf{A} (см. (2.169)–(2.179)). Если мы конкретизируем выдвинутые там соображения применительно к матрице коэффициентов частного вида, используемой для моделей типа смещение/давление, то мы придем к весьма естественному результату (см. [Brezzi, Bathe 1990]), а именно — к тому, что условия устойчивости являются расширением условий разрешимости (4.188) и (4.189) в том смысле, что при использовании этих соотношений со все более и более мелкими сетками устойчивость должна сохраняться.

Условие устойчивости, соответствующее условию разрешимости (4.188), состоит в том, что существует некоторое $\alpha > 0$, не зависящее от размера сетки и такое, что

$$\mathbf{V}_h^T (\mathbf{K}_{uu})_h \mathbf{V}_h \geq \alpha \|\mathbf{v}_h\|_v^2 \quad \text{при всех } \mathbf{V}_h \in \text{ядро}[(\mathbf{K}_{pu})_h]. \quad (4.192)$$

Это условие представляет собой то условие эллиптичности, которое уже коротко упоминалось в разделе 4.5.1. Как гласит это соотношение, при любой степени измельчения сетки частное Рэлея, полученное при любом векторе \mathbf{V}_h , удовлетворяющем условию $(\mathbf{K}_{pu})_h \mathbf{V}_h = 0$, будет ограничено снизу постоянной α (не зависящей от размера элементной сетки). Это условие эллиптичности всегда (т. е. при любом выборе элементной интерполяции) выполняется посредством наших формулировок типа смещение/давление. Мы более детально используем этот факт на приводимом ниже примере.

Пример 4.37: Рассмотрите условие эллиптичности, содержащееся в соотношении (4.192), и обсудите тезис о том, что оно выполняется при любой (практически) схеме типа смещение/давление.

Желая понять, что условие эллиптичности выполняется, нам необходимо вспомнить, что уравнения (4.187) являются результатом конечно-элементной дискретизации согласно (4.179). Следовательно,

$$\mathbf{V}_h^T (\mathbf{K}_{uu})_h \mathbf{V}_h; \quad \mathbf{V}_h \in \text{ядро}(\mathbf{K}_{pu})_h \quad (a)$$

соответствует удвоенному значению энергии деформации, запасенной при конечно-элементной дискретизации, когда \mathbf{v}_h соответствует некоему элементу в пространстве V_h , удовлетворяющему условию $P_h(\text{div } \mathbf{v}_h) = 0$. Однако если мы не выбираем пространство давлений $Q_h = \{0\}$, то есть, если мы не откажемся полностью от ограничения в форме несжимаемости и если модель не содержит энергии деформации, обусловленной сжатием — непрактичный и тривиальный случай, — то выражение в (a) всегда будет больше нуля (и ограничено снизу).

Если условие (4.192) не выполняется, то мы могли бы без труда стабилизировать решение. Это достигается путем рассмотрения почти несжимаемого случая и использо-

вания вариационной формулировки

$$\min_{\mathbf{v}_h \in V_h} \left\{ \frac{1}{2} a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \frac{\kappa^*}{2} \int_{\text{Vol}} (\text{div } \mathbf{v}_h)^2 d\text{Vol} + \frac{\kappa - \kappa^*}{2} \int [P_h(\text{div } \mathbf{v}_h)]^2 d\text{Vol} - \int_{\text{Vol}} \mathbf{f}^B \cdot \mathbf{v}_h d\text{Vol} \right\},$$

где κ^* — это объемный модуль, который имеет тот же порядок, что и модуль сдвига, и не приводит к запираанию. Конечно же, теперь мы можем предположить, что $(\kappa - \kappa^*) \rightarrow \infty$.

Эта процедура сводится к расчету части объемной энергии так, как это делается по методу смещений, и к применению проекции для оставшейся части. Заметим, что если κ равно κ^* , то часть, подлежащая проекции, равна нулю. Это означает, что сущность предлагаемой схемы состоит в том, что хорошо ведущая себя часть трудного для анализа члена сдвигается так, чтобы ее можно было рассчитать без использования проекции. Стабилизация такого рода, направленная на выполнение условия эллиптичности, может оказаться важной при проектировании формулировок (см. [Brezzi, Fortin 1991]). Указанная процедура была предложена для стабилизации модели типа смещение/давление при изучении поведения невязких жидкостей (см. [Nitikitpaiboon, Bathe, 1992]), а также для развития элементов с пластинами и оболочками (см. [Arnold, Brezzi 1993]). Однако трудность, связанная с этим подходом, может сводиться к выбору тех частей энергии, которые должны рассчитываться с проекцией и без нее, в частности тогда, когда полностью спариваются между собой разнообразные кинематические действия и как это получается, например, при анализе конструкций типа оболочка (см. раздел 5.4.2).

Условие устойчивости, соответствующее условию разрешимости в форме (4.189), состоит в том, что существует некоторое $\beta > 0$, не зависящее от размера сетки h и такое, что

$$\inf_{\mathbf{Q}} \sup_{\mathbf{v}_h} \frac{\mathbf{Q}_h^T (\mathbf{K}_{pu})_h \mathbf{v}_h}{\|q_h\| \|\mathbf{v}_h\|} \geq \beta > 0 \quad (4.193)$$

для каждой из задач в рассматриваемой нами последовательности.

Отметим, что здесь мы принимаем sup, используя элементы в пространстве \mathbf{V}_h , и одновременно принимаем inf, используя элементы в пространстве \mathbf{Q}_h . Разумеется, это соотношение есть не что иное, как наше условие inf-sup (4.183), представленное в алгебраической форме, однако теперь мы имеем $q_h \in Q_h$, где Q_h не обязательно равно $P_h(D_h)$.

Нужно отметить, что простой тест, состоящий в определении числа переменных, соответствующих смещениям и давлению, и в сравнении числа таких переменных, не является подходящим для выяснения устойчивости или неустойчивости смешанной модели. Как показывает проведенное выше обсуждение, такой тест, безусловно, не является достаточным для обеспечения устойчивости некой модели, и в общем случае он не обеспечивает даже и того, чтобы выполнялось условие разрешимости (4.189) (см. также упражнения 4.60 и 4.64).

4.5.3. Постоянная (физическая) мода давления

В этом разделе мы будем предполагать, что наша конечно-элементная дискретизация не содержит лишних мод давления (такие моды мы обсудим в следующем разделе), и что условие inf-sup для $q_h \in P_h(D_h)$ выполняется.

Ранее (см. раздел 4.3.3) мы упоминали о том, что когда интересующая нас задача теории упругости соответствует абсолютной несжимаемости (т.е. мы рассматриваем случай $q = \text{div } \mathbf{u} = 0$) и заданы все смещения, направленные нормально к поверхности тела (т.е. $S_u = S$), то необходимо вводить специальные соображения. Фактически, мы можем рассмотреть два следующих случая.

Случай 1: Все смещения, направленные нормально к поверхности тела, заданы и равны нулю. В этом случае давление остается неопределенным, если только оно не задано в одной из точек тела. А именно, предположим, что p_0 — постоянное давление. Тогда

$$\int_{\text{Vol}} p_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_h d\text{Vol} = p_0 \int_S \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \quad (4.194)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности тела. Следовательно, если давление не задано в какой-либо одной точке, то к любому предлагаемому решению мы можем добавить произвольное постоянное давление p_0 . Отсюда следует, что уравнения (4.187) не могут быть решены, если только давление не будет задано в одной точке, а это сводится к исключению одной степени свободы для давления (т. е. к исключению одного столбца из $(\mathbf{K}_{up})_h$ и соответствующей строки из $(\mathbf{K}_{pu})_h$). Если эта степень свободы для давления не исключена, то Q_h будет больше, чем $P_h(D_h)$, условие разрешимости (4.189) не будет выполнено, и значение $\inf\text{-sup}$, включающее моду давления, равно нулю. Обсуждение того случая, когда Q_h больше, чем $P_h(D_h)$, но относится к лишним модам давления, предлагается в разделе 4.5.4.

Разумеется, на практике вместо исключения одной степени свободы для давления может оказаться удобнее отказаться от некоторых степеней свободы для смещений в направлении по нормали к поверхности тела.

Случай 2: Все смещения по направлению к поверхности тела заданы и имеют некоторые ненулевые значения. В этом случае трудность состоит в необходимости выполнения условия несжимаемости

$$\int_{\text{Vol}} \operatorname{div} \mathbf{v}_h d\text{Vol} = \int_S \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h. \quad (4.195)$$

Мода постоянного давления также будет присутствовать здесь, и она может быть исключена так, как это предлагалось для случая 1. Если тело имеет сложную геометрическую форму, то точное выполнение условия с поверхностным интегралом в (4.195) может оказаться затруднительным. Если учесть, что любая ошибка, связанная с выполнением этого условия, может повлечь за собой большую ошибку в прогнозе давления, то на практике может оказаться лучше всего оставить смещение (смещения) по нормали к поверхности в некотором узле (узлах) свободным.

Давайте теперь считать, что тело является лишь почти несжимаемым. Что величина κ велика, но конечна, и что используется схема u/p . Тогда в случае 1 произвольное постоянное давление p_0 будет автоматически положено равным нулю (точно так же, как и лишние моды полагаются равными нулю; см. раздел 4.5.4). Этот результат весьма удобен для нас, потому что отпадает надобность заниматься исключением степени свободы для давления. Разумеется, на практике мы могли бы также оставить свободными некоторые степени свободы для смещений в узловых точках по нормали к поверхности тела, так как это привело бы к исключению постоянной моды давления.

Если в модели присутствует мода постоянного давления, то Q_h будет (на один базовый вектор) больше, чем $P_h(D_h)$, и значение $\inf\text{-sup}$, соответствующее этой моде, равно нулю. Тем не менее, мы можем решить получаемые алгебраические уравнения и получить надежное решение (если только величина κ не настолько велика, что плохая обусловленность матрицы коэффициентов приведет к значительным ошибкам округления; см. раздел 8.2.6).

В случае 2, возможно, лучше всего действовать так, как рекомендовано выше, а именно, — оставить свободными значения смещений по нормали к поверхности в некоторых узлах, чтобы тем самым дать материалу свободу для выполнения ограничения, касающегося условия почти полной несжимаемости. После этого постоянная мода давления не будет присутствовать в конечно-элементной модели.

Важная особенность высказанных соображений относится к тому, что если будут заданы все значения смещений по нормали к поверхности тела, то пространство давлений окажется больше, чем $P_h(D_h)$, но превышение будет только на постоянную моду давления. Разумеется, эта мода представляет собой физическое явление и не является лишней модой. Если условие $\inf\text{-sup}$ для $q_h \in P_h(D_h)$ выполняется, то решение становится устойчивым и точным просто за счет исключения постоянной моды давления (или за счет использования модели u/p с не слишком большим значением κ , чтобы автоматически положить значение постоянного давления равным нулю). В следующем разделе мы рассмотрим тот случай, когда Q_h больше, чем $P_h(D_h)$, в результате наличия лишних мод давления.

4.5.4. Лишние моды давления — случай абсолютной несжимаемости

В этом разделе мы полагаем, что выполняется условие абсолютной несжимаемости и, просто для упрощения обсуждения, что упомянутая ранее постоянная мода давления в данной модели отсутствует. Если бы фактически она присутствовала, то приведенные выше соображения могли бы быть применены в дополнение к тем, которые сейчас будут представлены.

Сделаем эту оговорку, вспомним, что при нашем обсуждении условия inf-sup мы предполагали, что пространство Q_h равно пространству $P_h(D_h)$ (см. (4.183)), тогда как в условии (4.193) такого ограничения нет. При реальном конечно-элементном решении очень возможно, что $P_h(D_h) \subsetneq Q_h$, и весьма важно установить последствия такой ситуации.

Если пространство Q_h больше, чем пространство $P_h(D_h)$, то в решении будут обнаруживаться лишние моды давления. Эти моды являются всего лишь результатом процедуры численного решения, а именно, конкретных форм конечных элементов и используемых сеток, и никакого физического объяснения появлению этих мод не имеется.

Мы даем определение лишней моды давления в виде некоторого (отличного от нуля) распределения давления p_s , удовлетворяющего соотношению

$$\int_{\text{Vol}} p_s \operatorname{div} \mathbf{v}_h d\text{Vol} = 0, \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h. \quad (4.196)$$

В матричной формулировке (4.187) лишняя мода давления отвечает случаю

$$(\mathbf{K}_{up})_h \mathbf{P}_s = 0, \quad (4.197)$$

где \mathbf{P}_s представляет собой (отличный от нуля) вектор, составленный из переменных давления, соответствующих p_s . Отсюда следует, что при наличии лишних мод давления не выполняется условие разрешимости (4.189) и, конечно же, значение inf-sup при проверке этого условия во всем пространстве Q_h в (4.193) оказывается равным нулю.

Покажем, что если Q_h равно $P_h(D_h)$, то в этом пространстве не может быть лишних мод давления. Предположим, что \hat{p}_h предлагается в качестве лишней моды давления. Если $Q_h = P_h(D_h)$, то всегда существует такой вектор $\hat{\mathbf{v}}_h$, для которого $\hat{p}_h = -P_h(\operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}_h)$. Однако, если представить $\hat{\mathbf{v}}_h$ в соотношение (4.196), то получим

$$-\int_{\text{Vol}} \hat{p}_h \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}_h d\text{Vol} = -\int_{\text{Vol}} \hat{p}_h P_h(\operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}_h) d\text{Vol} = \int_{\text{Vol}} \hat{p}_h^2 d\text{Vol} > 0, \quad (4.198)$$

а это означает, что соотношение (4.196) не удовлетворяется. С другой стороны, если Q_h больше, чем $P_h(D_h)$, в особенности если $P_h(D_h) \subsetneq Q_h$, то мы можем найти распределение давления в пространстве, ортогональном $P_h(D_h)$, и, следовательно, при таком распределении давления соотношение (4.196) будет удовлетворяться (см. пример 4.38).

На основании вышесказанного теперь мы убеждаемся, что, по существу, имеются два явления, которые могут возникнуть при проверке конкретной конечно-элементной дискретизации с использованием смещений и давления в качестве переменных:

1. *Явление запирания*, которое обнаруживается посредством того, что наименьшее значение выражения inf-sup не ограничивается снизу значением $\beta > 0$ (см. обсуждение вслед за соотношением (4.156)).
2. *Явление лишних мод*, соответствующее нулевому значению выражения inf-sup, когда проверка проводится при $q_h \in Q_h$.

Разумеется, если рассматривается дискретизация с лишними модами, то мы могли бы все-таки интересоваться наименьшим, отличным от нуля значением выражения inf-sup, и мы можем сосредоточиться именно на этом значении просто путем проверки при $q_h \in P_h(D_h)$, другими словами, путем игнорирования всех лишних мод давления.

Численная проверка для inf-sup, описанная в разделе 4.5.6, фактически дает наименьшее ненулевое значение выражения inf-sup, а также позволяет определить число лишних мод давления.

В качестве побочного замечания отметим здесь, что лишние моды давления не имеют никакого отношения к лишним нулевым модам энергии, упоминавшимся в разделе 5.5.6 (и которые являлись результатом использования укороченного или избирательного численного интегрирования в процессе расчета матриц жесткости элементов). При

рассматриваемых здесь моделях типа смещение/давление каждый элемент матрицы жесткости вычисляется точно и обнаруживает только правильные физические твердотельные моды. Лишние моды давления при *полной* сетке являются результатом конкретных пространств смещений и давления, используемых при *полной* дискретизации.

Один из путей для получения более полного представления об особенностях соотношения (4.193) состоит в том, чтобы представить матрицу $(\mathbf{K}_{up})_h$ или $(\mathbf{K}_{pu})_h = (\mathbf{K}_{up})_h^T$ в диагонализированной форме (путем выбора надлежащего базиса для переменных смещений и давления), а в этом случае мы получили бы

$$(\mathbf{K}_{up})_h = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{Ядро } (\mathbf{K}_{up})_h \\ \begin{array}{c} \sqrt{\lambda_n} \\ \sqrt{\lambda_{n-1}} \\ \vdots \\ \sqrt{\lambda_k} \\ 0 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \vdots \\ 0 \end{array} \\ \text{Ядро } (\mathbf{K}_{pu})_h \\ \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \end{array} \end{array} \quad (4.199)$$

Не показанные
здесь элементы
суть нули

Мы обозначаем элементы
символом $\sqrt{\lambda_n}$ в предвидении
нашего обсуждения
в разделе 4.5.6

В этом выражении нулевые столбцы определяют собой ядро $(\mathbf{K}_{up})_h$, причем каждый нулевой столбец соответствует некоторой лишней моде давления. Помимо этого, в силу того, что при любом векторе смещения $\hat{\mathbf{U}}_h$ требуется выполнить условие

$$(\mathbf{K}_{pu})_h \hat{\mathbf{U}}_h = 0, \quad (4.200)$$

и что $(\mathbf{K}_{pu})_h = (\mathbf{K}_{up})_h^T$, размер ядра $(\mathbf{K}_{pu})_h$ определяет собой, не является ли данное решение чрезмерно принужденным. Если, с одной стороны, мы хотели бы, чтобы ядро $(\mathbf{K}_{up})_h$ было равно нулю (лишние моды давления отсутствуют), то, с другой стороны, мы хотели бы, чтобы ядро $(\mathbf{K}_{pu})_h$ было настолько большим, чтобы допустить появление многих, линейно независимых векторов $\hat{\mathbf{U}}_h$, удовлетворяющих условию (4.200). Наше фактическое решение задачи (4.187) для смещений будет располагаться в подпространстве, охватываемом этими векторами, а если это подпространство оказывается чрезмерно малым в результате слишком большой величины пространства давлений Q_h , то данное решение будет чрезмерно принужденным. Теория, связанная с условием inf-sup (см. обсуждение в разделе 4.5.1, а также (4.193)), показывает, что это чрезмерное принуждение обнаруживается за счет уменьшения $\sqrt{\lambda_k}$ вплоть до нуля по мере измельчения сетки. И наоборот, если $\sqrt{\lambda_k} \geq \beta > 0$, или при любой сетке и по мере увеличения размера элементов, при β , не зависящем от размера сетки, пространство решений не является чрезмерно принужденным, и дискретизация дает надежное решение (при оптимальной скорости сходимости по смещениям и давлению, достигаемой, когда пространство давлений оказывается самым большим без нарушения условия inf-sup; см. раздел 4.5.1).

4.5.5. Лишние моды давления — случай почти несжимаемого материала

В процессе проведенного выше обсуждения мы предполагали, что выполняются условия абсолютной несжимаемости, и что используется модель типа u/p или u/p -с. Будем считать теперь, что мы имеем конечное (но большое) значение κ и пользуемся схемой u/p

со статическим сгущением по степеням свободы давления (как это имеет место в типичном случае). В этом случае для типичного элемента (или для полной сетки) определяющие конечно-элементные уравнения имеют вид

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{uu})_h & (\mathbf{K}_{up})_h \\ (\mathbf{K}_{pu})_h & (\mathbf{K}_{pp})_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_h \\ \mathbf{P}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_h \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.201)$$

или

$$[(\mathbf{K}_{uu})_h - (\mathbf{K}_{up})_h(\mathbf{K}_{pp})_h^{-1}(\mathbf{K}_{pu})_h]\mathbf{U}_h = \mathbf{R}_h. \quad (4.202)$$

До сих пор мы предполагали, что заданы смещения, отличные от нуля. Как свидетельствует важное наблюдение, в этом случае никакая лишняя мода давления не оказывает влияния на прогнозируемые смещения и давление. Причину этого можно продемонстрировать посредством рассмотрения $(\mathbf{K}_{up})_h$ в (4.199) с некоторыми нулевыми столбцами. Учитывая, что матрица $(\mathbf{K}_{pp})_h$, рассчитанная в том же базисе, является диагональной и имеет в качестве диагональных элементов $-\kappa^{-1}$ (κ — объемный модуль), а соответствующая правая часть представляет собой нулевой вектор, то решение для значений, определяющих собой лишние моды давления, является нулевым (см. также пример 4.39).

Другое наблюдение состоит в том, что матрица коэффициентов в (4.201) содержит большой объемный модуль, а это при κ^{-1} , близком к нулю, приводит к плохой обусловленности — однако эта плохая обусловленность наблюдается независимо от того, присутствуют или отсутствуют лишние моды давления.

Однако лишние моды давления могут оказывать критическое воздействие, если задаются отличные от нуля значения смещений. В этом случае мы убеждаемся, что правая часть, соответствующая степеням свободы давления, может быть отличной от нуля (см. раздел 4.2.2 по поводу того, как налагаются ненулевые значения смещений), и может появиться весьма большое лишнее давление.

Ясно, что надежный элемент не должен приводить к запиранию и, в идеале, не должен приводить к появлению каких-либо лишних мод давления при любой выбранной сетке.

Элементы, перечисленные в таблицах 4.6 и 4.7, имеют именно такие свойства, если не считать двумерного элемента 4/1 типа u/p (и аналогичного ему трехмерного элемента 8/1). При использовании элемента 4/1 сетки определенного вида при некоторых граничных условиях выявляют лишнюю моду давления, причем элемент 4/1 не удовлетворяет условию inf-sup (4.183), если только он не используется в специального вида геометрических конфигурациях из макроэлементов (см., например, [Le Tallec, Ruas 1986]). Однако вследствие своей простоты элемент 4/1 весьма широко используется на практике. Мы проведем более детальное обследование этого элемента в нижеследующем примере.

Пример 4.38: Рассмотрим конечно-элементную дискретизацию, состоящую из элементов 4/1 и показанную на рис. 4.53; требуется показать, что существует лишняя мода давления, задействованная в шахматном порядке и схематически изображенная на рисунке.

Отметим, что для этой модели все касательные смещения на границе положены равными нулю. Желая показать, что указанное на рис. 4.53 распределение давления соответствует лишней моде давления, нам необходимо доказать, что здесь справедливо соотношение (4.196). Рассмотрим одиночный элемент, показанный на рис. 4.53(a). Мы имеем

$$\int_{\text{Vol}} p^{e_i} \operatorname{div} \mathbf{v}_h^e d\text{Vol} = p^{e_i} [1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad \vdots \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1] \hat{\mathbf{u}},$$

где p^{e_i} — постоянное давление в элементе e_i .

Если после этого рассмотреть группу из четырех соседствующих элементов, то отметим, что для показанного на рис. 4.53 б смещения u_i мы имеем

$$\int_{\text{Vol}} p \operatorname{div} \mathbf{v}_h d\text{Vol} = [p^{e_1}(1) + p^{e_2}(1) + p^{e_3}(-1) + p^{e_4}(-1)]u_i = 0 \quad (\text{a})$$

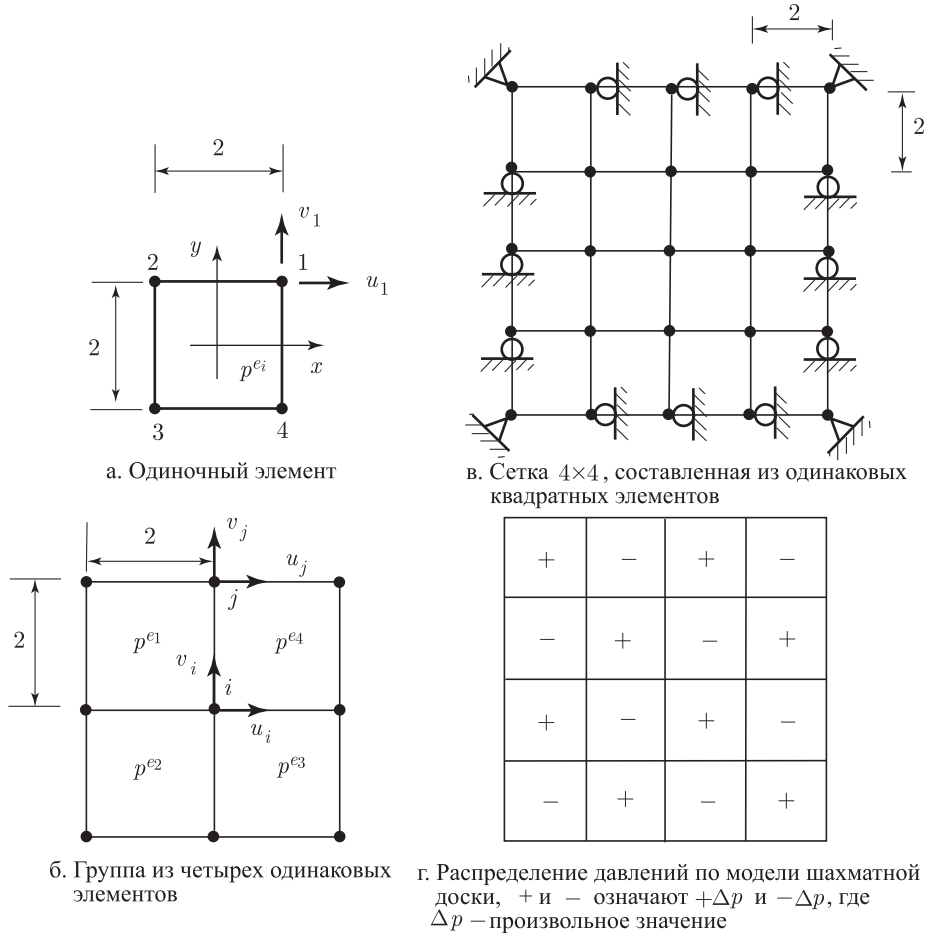


Рис. 4.53. Элементы 4/1

при том условии, что распределение давления соответствует соотношениям $p^{e1} = -p^{e2} = p^{e3} = -p^{e4}$. Аналогично этому, для любого смещения v_i будем иметь

$$\int_{\text{Vol}} p \operatorname{div} \mathbf{v}_h d\text{Vol} = [p^{e1}(-1) + p^{e2}(1) + p^{e3}(1) + p^{e4}(-1)]v_i = 0. \quad (\text{b})$$

По аналогии, для нормального смещения v_j на краю всей группы мы получим

$$\int_{\text{Vol}} p \operatorname{div} \mathbf{v}_h d\text{Vol} = [p^{e1}(1) + p^{e2}(1)]v_j = 0. \quad (\text{c})$$

С другой стороны, для касательного смещения u_j имеем интеграл

$$\int_{\text{Vol}} p \operatorname{div} \mathbf{v}_h d\text{Vol} \neq 0.$$

Однако в модели, представленной на рис. 4.53 в, все касательные смещения принуждаются быть равными нулю. Следовательно, если применить принцип суперпозиции и использовать выражения (а), (b) и (c), то мы убедимся, что соотношение (4.196) удовлетворяется при любых смещениях в узловых точках, если только распределение давления соответствует вышеуказанному шахматному расположению.

Отметим, что то же самое распределение давления в шахматном порядке представляет собой также и лишнюю моду давления, если число смещений в узловых

точках, большее, чем то, которое приводится на рис. 4.53 в, принуждается к обращению в нуль. Отметим также, что распределение давления (предполагаемое), показанное на рис. 4.53 г, не может быть получено через посредство любых смещений в узловых точках, так как это распределение давления не соответствует элементу в пространстве $P_h(D_h)$.

В приведенном выше примере мы показали, что если элемент 4/1 используется в дискретизациях в виде комплекса квадратных элементов одинакового размера с граничными условиями определенного вида, то здесь будет присутствовать лишняя мода давления. Эта лишняя мода уже не будет присутствовать при применении неоднородных сеток, или тогда, когда, как минимум, одно тангенциальное смещение на поверхности оставляется свободным.

Рассмотрим теперь такой вариант, когда к одной из свободных степеней свободы на рис. 4.53 в приложена некая сила. Тогда для решения используются уравнения (4.201) и, как уже отмечалось выше, лишняя мода давления не будет фигурировать в решении (она не будет наблюдаться).

Однако лишняя мода давления оказывает очень значительное влияние на вычисляемые напряжения тогда, когда, например, одному касательному граничному смещению приписывается ненулевое значение, хотя все остальные касательные граничные смещения поддерживаются на нулевом уровне¹⁾. В этом случае наличие заданного смещения в одной узловой точке приводит к появлению отличного от нуля вектора силы для степеней свободы давления, и возбуждается лишняя мода давления. Следовательно, на практике оказывается выгодным не вводить принуждений для всех касательных смещений в узловых точках на исследуемом нами теле.

В заключение данного раздела предлагается рассмотреть нижеследующий пример, так как он в весьма простой форме иллюстрирует некоторые из сделанных нами наблюдений общего характера.

Пример 4.39: Этот пример предложен F. Brezzi и K. J. Bathe [Brezzi, Bathe 1990]. Предположим, что определяющие уравнения (4.187) имеют вид

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & | & \beta_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & | & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & | & 0 & 0 \\ \hline \beta_1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & | & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \hline p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \hline g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}. \quad (a)$$

Разумеется, такие простые уравнения не встречаются при практическом конечно-элементном анализе, однако их существенные черты соответствуют тем, которые присущи общим уравнениям (4.187). Отметим, что здесь матрица коэффициентов соответствует условию абсолютной несжимаемости материала, и что величины g_1 и g_2 соответствуют заданным граничным значениям смещений.

Эти уравнения можно записать также в форме

$$\alpha_i u_i + \beta_i p - i = r - i; \quad \beta - i u - i = g - i; \quad i = 1, 2; \quad \alpha - 3u - 3 = r - 3.$$

Предположим, что при всех i имеем $\alpha_i > 0$ (что мы и имели бы на практике). Кроме того, $u_3 = r_3/\alpha_3$, и нам нужно лишь рассмотреть типовые уравнения

$$\alpha u + \beta p = r; \quad \beta u = g, \quad (b)$$

(где мы опустили нижний индекс i).

¹⁾ Можно отметить, что предлагаемые условия анализа и его результаты аналогичны тем условиям и результатам, которые получаются, если все смещения по нормали к поверхности тела принудительно приравниваются нулю, за исключением одного — в точке, где нормальное смещение задается (см. (4.195)).

Когда материал считается почти несжимаемым, то величина u_3 не меняется, однако уравнения (b) принимают форму

$$\alpha u - \epsilon + \beta p_\epsilon = r; \quad \beta u_\epsilon - \epsilon p_\epsilon = g, \quad (c)$$

где $\epsilon = 1/\kappa$ (величина ϵ очень мала, если объемный модуль очень велик), а величины u_ϵ и p_ϵ определяют собой искомое решение. Уравнения (c) дают

$$u_\epsilon = \frac{\epsilon r + \beta g}{\epsilon \alpha + \beta^2}; \quad p_\epsilon = \frac{\beta r - \alpha g}{\epsilon \alpha + \beta^2}. \quad (d)$$

Теперь мы можем сформулировать следующие наблюдения.

Прежде всего мы рассматриваем случай лишней моды давления, т. е. $\beta = 0$.

Случай 1: $\beta = g = 0$.

Этот случай соответствует лишней моде давления и нулевым значениям заданных смещений.

Решение уравнений (b) дает $u = r/\alpha$, при неопределенном p .

Решение уравнений (c) дает $u_\epsilon = r/\alpha$, $p_\epsilon = 0$.

Следовательно, мы замечаем, что использование конечного объемного модуля позволяет решить данные уравнения и подавить лишнюю моду давления.

Случай 2: $\beta = 0$, $g \neq 0$.

Этот случай соответствует лишней моде давления и ненулевым заданным смещениям (соответствующим этой моде).

Теперь уравнения (b) не имеют решения для u и p .

Решение уравнений (c) дает $u_\epsilon = r/\alpha$, $p_\epsilon = g/\epsilon$.

Следовательно, лишнее давление возрастает до больших значений при увеличении κ .

Далее рассмотрим тот случай, когда β очень мало.

Следовательно, мы не имеем лишней моды давления. Разумеется, условие inf-sup не выполняется, если $\beta \rightarrow 0$.

Случай 3: величина β мала.

Предположим также, что $g = 0$.

Теперь уравнения (b) дают решение $u = 0$, $p = r/\beta$.

Решение уравнений (c) имеет форму $u_\epsilon \rightarrow 0$ и $p_\epsilon \rightarrow r/\beta$ при $\epsilon \rightarrow 0$ (значение β зафиксировано и, следовательно, мы имеем $\beta^2 \gg \epsilon \alpha$), что согласуется с решением уравнений (b). Следовательно, смещение приближается к нулю, а давление становится большим, когда β мало, а объемный модуль возрастает. Разумеется, проверку на это поведение мы делаем с помощью условия inf-sup. Применительно к фактическому конечно-элементному решению это наблюдение можно интерпретировать как принятие фиксированной сетки (фиксируется β) и возрастающего значения κ . Результат же выражается в том, что давление в той моде, для которой β мало, возрастает, тогда как смещения в этой же моде уменьшаются.

Однако уравнения (c) дают также $u_\epsilon \rightarrow r/\alpha$ и $p_\epsilon \rightarrow 0$ при $\beta \rightarrow 0$ (фиксированное ϵ и, следовательно, имеем $\beta^2 \ll \epsilon \alpha$), а это соответствует поведению, отмеченному ранее в случае 1. Применительно к фактическому конечно-элементному решению это наблюдение можно интерпретировать, как принятие фиксированного κ и постоянного измельчения сетки. По мере того, как β уменьшается в результате измельчения сетки, соответствующее этой моде давление становится малым. Следовательно, поведение этой моды давления при достаточно малом β (что может означать очень мелкую сетку при большом κ) подобно поведению лишней моды.

4.5.6. Проверка условия inf-sup

Результаты аналитического изучения inf-sup-характеристик различных элементов типа смещение/давление приводятся в таблицах 4.6 и 4.7 (см. также [Brezzi, Fortin 1991]). Однако аналитическое доказательство того факта, что условие inf-sup удовлетворяется при применении элемента конкретного вида, может оказаться затруднительным, и по

этой причине весьма ценной является численная проверка. Такая проверка может быть проведена применительно ко вновь предлагаемым элементам, а также к дискретизациям с элементами искаженной геометрической формы (вспомним, что аналитическое изучение предполагает наличие однородных сеток из квадратных элементов). Конечно, численная проверка не может оказаться абсолютно решающей (как это имеет место при аналитическом доказательстве), однако если надлежащим образом спланированная численная проверка дает положительный результат, то весьма вероятно, что данная схема является эффективной. Та же самая идея используется и тогда, когда групповой тест проводится только в численной форме (для исследования несовместимых формулировок со смещением, а также для выяснения влияния геометрических искажений элемента) по причине неосуществимости аналитической оценки (см. раздел 4.4.1).

В процессе последующего обсуждения мы описываем численную проверку условия inf-sup, предлагаемую в работе [Chapelle, Bathe 1993].

Вначале рассмотрим модель u/p . В этом случае условие inf-sup, соответствующее (4.183), может быть записано в форме

$$\inf_{\mathbf{w}_h \in V_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{\int_{\text{Vol}} P_h(\text{div } \mathbf{w}_h) \text{div } \mathbf{v}_h d\text{Vol}}{\|P_h(\text{div } \mathbf{w}_h)\| \|\mathbf{v}_h\|} \geq \beta > 0 \quad (4.203)$$

или

$$\inf_{\mathbf{w}_h \in V_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{b'(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h)}{[b'(\mathbf{w}_h, \mathbf{w}_h)]^{1/2} \|\mathbf{v}_h\|} \geq \beta > 0, \quad (4.204)$$

где

$$b'(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h) = \int_{\text{Vol}} P_h(\text{div } \mathbf{w}_h) P_h(\text{div } \mathbf{v}_h) d\text{Vol} = \int_{\text{Vol}} P_h(\text{div } \mathbf{w}_h) \text{div } \mathbf{v}_h d\text{Vol}. \quad (4.205)$$

Соотношение (4.204), будучи представлено в матричной форме, имеет вид

$$\inf_{\mathbf{w}_h} \sup_{\mathbf{v}_h} \frac{\mathbf{W}_h^T \mathbf{G}_h \mathbf{V}_h}{[\mathbf{W}_h^T \mathbf{G}_h \mathbf{W}_h]^{1/2} [\mathbf{V}_h^T \mathbf{S}_h \mathbf{V}_h]^{1/2}} \geq \beta > 0, \quad (4.206)$$

где \mathbf{W}_h и \mathbf{V}_h представляют собой векторы смещений в узловых точках, соответствующие \mathbf{w}_h и \mathbf{v}_h , а \mathbf{G}_h и \mathbf{S}_h — это матрицы, соответствующие оператору b' и норме $\|\cdot\|_V$ соответственно. Матрицы \mathbf{G}_h и \mathbf{S}_h являются, соответственно, положительными полуопределенными и положительными определенными (рассматриваемую задачу см. в разделе 4.5.1).

Пример 4.40: В примере 4.34 мы рассчитывали матрицу \mathbf{G}_h для элемента 4/1. Теперь определим также матрицу \mathbf{S}_h для этого элемента.

Для вычисления \mathbf{S}_h вспомним, что норма \mathbf{w} дается формулой (см. (4.153))

$$\|\mathbf{w}\|_V^2 = \sum_{i,j} \left\| \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\text{Vol})}^2.$$

Следовательно, для нашего случая

$$\|\mathbf{w}_h\|_V^2 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (a)$$

где u и v — это компоненты w_i , $i = 1, 2$.

Пронумеруем смещения в узловых точках для \mathbf{u} так, как в примере 4.34,

$$\hat{\mathbf{u}}^T = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad \vdots \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4].$$

Согласно определению, $\|\mathbf{w}_h\|_V^2 = \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{S}_h \hat{\mathbf{u}}$. Кроме того, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 h_{i,x} u_i; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{i=1}^4 h_{i,y} u_i, \quad (b)$$

и тогда в правой части (а) будем иметь

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^T \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 &= \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^T \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right).\end{aligned}\tag{c}$$

Подставляя (с) и (b) в правую часть (а), получим

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_h(1, 1) &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [(h_{1,x})^2 + (h_{1,y})^2] dx dy = \frac{2}{3}, \\ \mathbf{S}_h(1, 2) &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [h_{1,x} h_{2,x} + h_{1,y} h_{2,y}] dx dy = -\frac{1}{6}\end{aligned}$$

и так далее.

Подобным же образом вычисляются и члены, соответствующие степеням свободы v_i , и мы получим

$$\mathbf{S}_h = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_h & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{S}}_h \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{S}}_h = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Теперь рассмотрим модель u/p -с. В этом случае годится то же выражение, что и в (4.206), однако нам нужно использовать $\mathbf{G}_h = (\mathbf{K}_{pu})_h^T \mathbf{T}_h^{-1} (\mathbf{K}_{pu})_h$, где \mathbf{T}_h представляет собой матрицу для L^2 -нормы p_h (см. упражнение 4.59); то есть для любого вектора узловых значений давления \mathbf{P}_h мы имеем $\|p_h\| = \mathbf{P}_h^T \mathbf{T}_h \mathbf{P}_h$.

Форма (4.206) для выражения условия inf-sup является эффективной, потому что мы можем численно рассчитать inf-sup значение для левой части и проделывать это для последовательности сеток. Если inf-sup значение приближается (асимптотически) к некоторому значению, большему нуля (и если отсутствуют лишние моды давления, о которых речь пойдет ниже), то условие inf-sup удовлетворяется. На практике достаточно рассмотреть только последовательность примерно из трех сеток (см. приводимые ниже примеры).

Ключевую роль играет вычисление inf-sup значения для выражения из (4.206). Мы можем показать, что это значение дается корнем квадратным из наименьшего ненулевого собственного значения задачи

$$\mathbf{G}_h \phi = \lambda \mathbf{S}_h \phi_h. \tag{4.207}$$

Следовательно, если имеется $(k-1)$ нулевых собственных значений (так как \mathbf{G}_h представляет собой положительную полуопределенную матрицу), и если мы нумеруем эти собственные значения в нисходящем порядке, то мы найдем, что inf-sup значение для выражения из (4.206) есть $\sqrt{\lambda_k}$. Этот результат мы доказываем в приводимом ниже примере.

Пример 4.41: Рассмотрим функцию $f(\mathbf{U}, \mathbf{V})$, определяемую выражением

$$f(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \frac{\mathbf{U}^T \mathbf{G} \mathbf{V}}{(\mathbf{U}^T \mathbf{G} \mathbf{U})^{1/2} (\mathbf{V}^T \mathbf{S} \mathbf{V})^{1/2}}, \tag{a}$$

где \mathbf{G} представляет собой симметричную, положительную, полуопределенную матрицу размером $n \times n$, \mathbf{S} — положительно-определенная матрица такого же размера, а \mathbf{U} и \mathbf{V} — векторы порядка n . Требуется показать, что

$$\inf_{\mathbf{U}} \sup_{\mathbf{V}} f(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \sqrt{\lambda_k}, \tag{b}$$

где λ_k есть наименьшее ненулевое собственное значение задачи

$$\mathbf{G} \phi = \lambda \mathbf{S} \phi. \tag{c}$$

Пусть собственными значениями задачи (с) будут

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{k-1} = 0 < \lambda_k \leq \lambda_{k+1} \leq \dots \leq \lambda_n,$$

а соответствующими собственными векторами будут $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$.

Чтобы вычислить $f(\mathbf{U}, \mathbf{V})$, представим \mathbf{U} и \mathbf{V} в виде

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^n \tilde{u}_i \phi_i; \quad \mathbf{V} = \sum_{i=1}^n \tilde{v}_i \phi_i.$$

На этом основании для любого \mathbf{U} имеем

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{V}} f(\mathbf{U}, \mathbf{V}) &= \sup_{\tilde{v}_i} \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{u}_i \tilde{v}_i}{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{u}_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \tilde{v}_i^2 \right)^{1/2}} = \\ &= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{u}_i^2 \right)^{1/2}} \sup_{\tilde{v}_i} \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{u}_i \tilde{v}_i}{\left(\sum_{i=1}^n \tilde{v}_i^2 \right)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (d)$$

Желая вычислить значение supremum'a в (d), дадим определение $\alpha_i = \lambda_i \tilde{u}_i$; тогда мы заметим, что

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{u}_i \tilde{v}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \tilde{v}_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \sum_{i=1}^n \tilde{v}_i^2} \quad (e)$$

(используя неравенство Шварца), причем равенство достигается, когда $\tilde{v}_i = \alpha_i$. Деля подстановку из (e) в (d) и пользуясь тем, что $\lambda_1 = \dots = \lambda_{k-1} = 0$, получим

$$\sup_{\mathbf{V}} f(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=k}^n \lambda_i^2 \tilde{u}_i^2}{\sum_{i=k}^n \lambda_i \tilde{u}_i^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=k}^n \lambda_i^2 \tilde{u}_i^2}{\sum_{i=k}^n \lambda_i \tilde{u}_i^2}}.$$

Если теперь положить $\sqrt{\lambda_i} \tilde{u}_i = \beta_i$, то можно написать

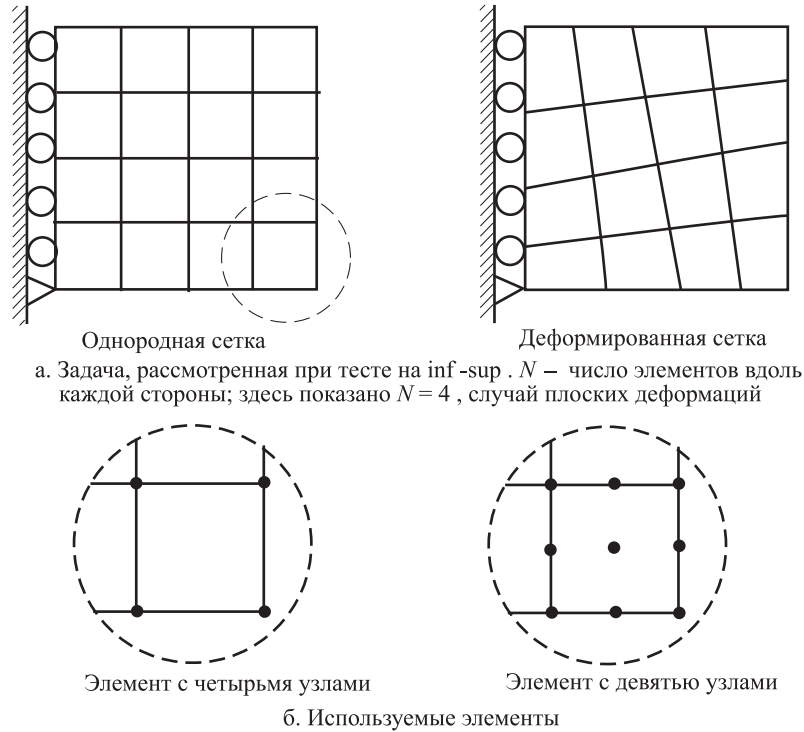
$$\inf_{\mathbf{U}} \sup_{\mathbf{V}} f(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \inf_{(\tilde{u}_i)_{i=1}^n} \sqrt{\frac{\sum_{i=k}^n \lambda_i^2 \tilde{u}_i^2}{\sum_{i=k}^n \lambda_i \tilde{u}_i^2}} = \inf_{(\beta_i)_{i=k}^n} \sqrt{\frac{\sum_{i=k}^n \lambda_i \beta_i^2}{\sum_{i=k}^n \beta_i^2}}. \quad (f)$$

Последнее из выражений в (f) имеет форму частного Рэлея (см. раздел 2.6), причем мы знаем, что наименьшее значение есть $\sqrt{\lambda_k}$, достигаемое при $\beta_k \neq 0$, а при $i \neq k$ $\beta_i = 0$, что и дает требуемый результат.

На практике для вычисления inf-sup значения $\sqrt{\lambda_k}$ должна быть использована рутинная процедура решения для собственных значений, которая может перескакивать через все нулевые собственные значения, и после этого вычислять λ_k . Тест с последовательностью Штурма (см. раздел 11.4.3) даст после этого значение k , а затем мы можем придти к прямому выводу о том, содержит ли данная модель лишние моды давления. А именно, пусть n_p будет означать число степеней свободы для давления, а n_u — число степеней свободы для смещений. Тогда число мод давления k_{pm} выражается формулой

$$k_{pm} = k - (n_u - n_p + 1).$$

Если $k_{pm} > 0$, то конечно-элементная дискретизация содержит либо постоянную моду давления, либо лишние моды давления (значение inf-sup в (4.193) равно нулю, хотя λ_k (первое ненулевое собственное значение) может асимптотически приближаться к значению, большему нуля). Эта формула следует из того, что для отсутствия какой-либо моды давления ядро $(\mathbf{K}_{up})_h$ должно быть равно нулю (см. (4.199)).

Рис. 4.54. Тест на условие \inf - \sup в применении к простой задаче

Чтобы продемонстрировать эту проверку условия \inf - \sup , на рис. 4.54 мы показываем результаты, полученные для элементов с четырьмя и с девятью узлами. Мы видим, что последовательность из трех сеток, используемых для расчета $\sqrt{\lambda_k}$ применительно к каждой из дискретизаций, была в этих случаях достаточна для того, чтобы установить, приводит ли данный элемент к заперению. Мы замечаем, что, очевидно, элементы, базирующиеся на смещениях и имеющие четыре узла или девять узлов, не удовлетворяют условию \inf - \sup , и что искажения формы элементов оказывают пренебрежимо малое влияние на результаты. При каждой из этих проверок величина k_{pt} была равной нулю и, следовательно, как и ожидалось, не содержат никаких мод давления. Разумеется, лишняя мода давления была бы найдена для элемента $4/1$, если бы были использованы граничные условия из примера 4.38. Иначе говоря, при общей проверке элементов на наличие лишних мод должно учитываться условие о нулевых смещениях на границе комплекса в целом (чем меньше размер V_h при заданном Q_h , тем более возможным является удовлетворение условию (4.196)).

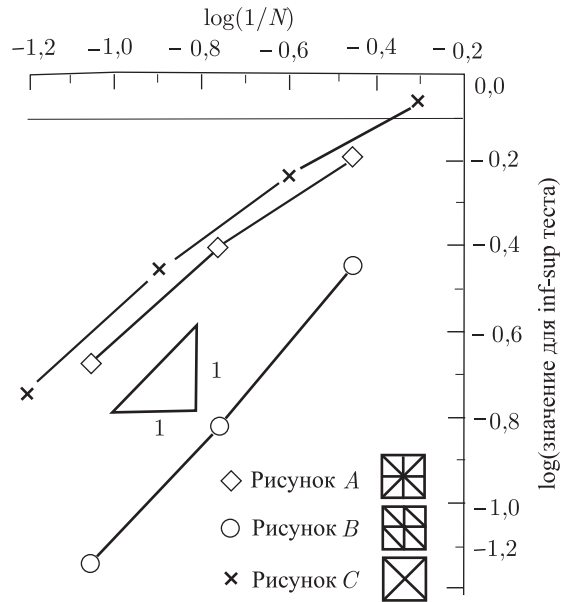
Решения, показанные на рис. 4.54, — это численные результаты, относящиеся только к одной задаче и к одной топологии сетки. Однако, если в этих результатах не выполняется условие \inf - \sup , то мы можем прийти к выводу о том, что оно не выполняется и в общем случае.

Рисунок 4.55 показывает результаты, относящиеся к треугольному элементу с постоянным давлением, имеющему три узла и сформулированному в качестве элемента типа u/p (см. упражнение 4.50). Результаты показывают, что этот элемент не удовлетворяет условию \inf - \sup . Интересно отметить также, что сетки с рисунком В не содержат лишних мод давления, тогда как сетки с другими рисунками в общем случае содержат такие моды.

Дополнительные результаты приводятся в таблице 4.8 (см. [Chapelle, Bathe 1993]). В этой таблице дается сводка результатов численных оценок выполнения условия \inf - \sup , а также показаны аналитические результаты, приводимые, например, в работе [Brezzi,



Рис. 4.54. Продолжение











Рис. 4.55. Тест на условие $\inf\text{-sup}$ для треугольных элементов, применительно к задаче 4.24 а. (Результаты с рисунками А и С обнаруживают лишние моды)

Fortin 1991]. Численная оценка является весьма полезной, так как та же самая процедура применима и ко всем элементам типов u/p и $u/p\text{-с}$, в однородных или искаженных сетках, причем оценка может быть дана даже и для таких элементов, для которых не имеется (пока что) аналитических результатов. Кроме того, нетрудно оценить и воздействие формы построения макроэлементов, составляемых из базовых элементов (см. работу [Chapelle,

Bathe 1993], где приводятся некоторые результаты, относящиеся к элементу 4/1, используемому в некоем макроэлементе).

Могут быть проведены и некоторые подобные численные оценки выполнения условия inf-sup для других задач с принудительными ограничениями, в частности, при использовании смешанных формулировок (см., например, упражнение 4.63).

Таблица 4.8. Численные оценки выполнения условия inf-sup

	Элемент*	Условие inf-sup		Примечания
		Аналитические данные	Численная оценка	
	3/1**	Не выполняется	Не выполняется	см. рис. 4.55
	4/1**	Не выполняется	Не выполняется	см. рис. 4.54
	8/3	Не выполняется	Не выполняется	
	8/1	Выполняется	Выполняется	
	9/4	Не выполняется	Не выполняется	
	9/3	Выполняется	Выполняется	см. пример 4.36 рис. 4.54
	4/3-с	Выполняется	Выполняется	
	9/9-с	Не выполняется	Не выполняется	
	9/8-с	Не выполняется	Не выполняется	
	9/5-с	?	Не выполняется	

	9/4-с	Выполняется	Выполняется	
	9/(4-с + 1)?		Выполняется	Об элементе см. [Gresho et al. 1980]

* \bigcirc — степень свободы для непрерывного давления;
 \times — степень свободы для давления с разрывом;

** Дискретизации, относящиеся к элементам 3/1 и 4/1, могут содержать лишние моды давления

Вспомним, наконец, что при выводе условия inf-sup (см. раздел 4.5.1) мы показали, что если выполняется условие (4.166), то из него следует и условие inf-sup (4.175). Однако, как это было указано, эквивалентность условий (4.166) и (4.175) требует также и доказательства того, что выполнение условия (4.175) влечет за собой и выполнение условия (4.166). Мы отложили это доказательство до рассмотрения примера 4.42, который мы и представляем ниже.

Пример 4.42: Предположим, что условие inf-sup (4.175) выполняется. Требуется доказать, что отсюда следует и выполнение условия (4.166).

Пусть собственные векторы и собственные значения для задачи (4.207), при \mathbf{G}_h , соответствующем D_h (но не $P_h(D_h)$), так как в (4.175) мы рассматриваем D_h), будут ϕ_i и λ_i , $i = 1, \dots, n$. Векторы ϕ_i образуют ортонормированный базис для V_h . После этого мы можем представить любой вектор \mathbf{w}_h в пространстве V_h , как

$$\mathbf{w}_h = \sum_{i=1}^n w_h^i \phi_i, \quad (\text{a})$$

и с учетом свойств собственных значений и собственных векторов (см. раздел 2.5) мы имеем

$$\|\operatorname{div} \mathbf{w}_h\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i (w_h^i)^2.$$

Теперь выберем любое q_h и любой $\tilde{\mathbf{w}}_h$, удовлетворяющие условию $\operatorname{div} \tilde{\mathbf{w}}_h = q_h$. Мы можем разложить $\tilde{\mathbf{w}}_h$ в форме (а),

$$\tilde{\mathbf{w}}_h = \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{w}_h^i \phi_i + s_{i=k}^n \tilde{w}_h^i \phi_i. \quad (\text{b})$$

Первый знак суммирования в (b) определяет собой вектор, который принадлежит $K_h(0)$ и может быть компонентом большой величины. Однако нас интересует только тот компонент, который не является элементом $K_h(0)$ и который мы называем \mathbf{w}_h ,

$$\mathbf{w}_h = \sum_{i=k}^n \tilde{w}_h^i \phi_i;$$

при таком \mathbf{w}_h мы имеем

$$\frac{\|q_h\|^2}{\|\mathbf{w}_h\|^2} = \frac{\sum_{i=k}^n \lambda_i (\tilde{w}_h^i)^2}{\sum_{i=k}^n (\tilde{w}_h^i)^2} \geq \lambda_k = \beta_h^2 \geq \beta^2,$$

откуда следует (4.166) со значением $c' = 1/\beta$.

4.5.7. Приложение к конструкционным элементам: изопараметрические элементы типа балок

В процессе приведенного выше обсуждения мы рассматривали общую задачу теории упругости (4.151) и соответствующую ей вариационную дискретную задачу (4.154) в условиях принудительного ограничения, касающегося несжимаемости (почти полной или абсолютной). однако условия эллиптичности и inf-sup также представляют собой те основные условия, которые необходимо соблюсти при построении элементов типа балок, пластин и оболочек, подверженных ограничительным деформациям сдвигового типа и мембранного типа (см. раздел 5.4). Краткий обзор поведения смешанного элемента балочного типа был дан в примере 4.30, а в разделе 5.4.1 мы рассматриваем как этот элемент, так и элементы более высокого порядка, относящиеся к тому же типу. Сейчас предлагается коротко обсудить условия эллиптичности и inf-sup для элементов со смешанной интерполяцией и элементов, базирующихся только на учете смещений.

Общие соображения

Вариационная дискретная задача для модели, базирующейся на учете смещений, имеет вид

$$\min_{\mathbf{v}_h \in V_h} \left\{ \frac{EI}{2} \int_0^L (\beta'_h)^2 dx + \frac{Gak}{2} \int_0^L (\gamma_h)^2 dx - \int_0^L p w_h dx \right\}, \quad (4.208)$$

где EI и Gak представляют собой изгибные и сдвиговые жесткости балки (см. раздел 5.4.1), L — длина балки, p — поперечная нагрузка на единицу длины, β_h — угол поворота сечения, γ_h — поперечная сдвиговая деформация,

$$\gamma_h = \frac{\partial w_h}{\partial x} - \beta_h, \quad (4.209)$$

w_h — поперечное смещение, а элемент пространства V_h — это

$$\mathbf{v}_h = \begin{bmatrix} w_h \\ \beta_h \end{bmatrix}. \quad (4.210)$$

Ограничение, с которым нужно сейчас иметь дело, — это ограничение на сдвиг,

$$\gamma_h = \frac{\partial w_h}{\partial x} - \beta_h \rightarrow 0. \quad (4.211)$$

На практике величина γ_h обычно очень мала и, конечно, может быть равной нулю. Следовательно, если воспользоваться нашими прежними обозначениями, мы имеем пространства

$$K_h(q_h) = \{\mathbf{v}_h \mid \mathbf{v}_h \in V_h, \gamma_h(\mathbf{v}_h) = q_h\}, \quad (4.212)$$

$$D_h = \{q_h \mid q_h = \gamma_h(\mathbf{v}_h) \text{ для некоторого } \mathbf{v}_h \in V_h\}, \quad (4.213)$$

а также нормы

$$\|\mathbf{v}_h\|^2 = \int_{\text{Vol}} \left[\left(\frac{\partial w_h}{\partial x} \right)^2 + L^2 \left(\frac{\partial \beta_h}{\partial x} \right)^2 \right] d\text{Vol}; \quad \|\gamma_h\|^2 = \int_{\text{Vol}} (\gamma_h)^2 d\text{Vol}. \quad (4.214)$$

При этой формулировке условие эллиптичности выполняется, так как

$$EI \int_0^L (\beta'_h)^2 dx \geq \alpha \|\mathbf{v}_h\|^2 \quad \forall \mathbf{v}_h \in K_h(0) \quad (4.215)$$

при $\alpha > 0$ и не зависящем от h . Чтобы доказать справедливость этого соотношения, нам следует только заметить, что

$$\int_0^L \left(\frac{\partial w_h}{\partial x} \right)^2 dx = \int_0^L (\beta_h)^2 dx \leq \int_0^L L L^2 \left(\frac{\partial \beta_h}{\partial x} \right)^2 dx \quad (4.216)$$

и, поэтому, что

$$\|\mathbf{v}_h\|^2 \leq 2L^2 \int_{\text{Vol}} \left(\frac{\partial \beta_h}{\partial x} \right)^2 d\text{Vol}, \quad (4.217)$$

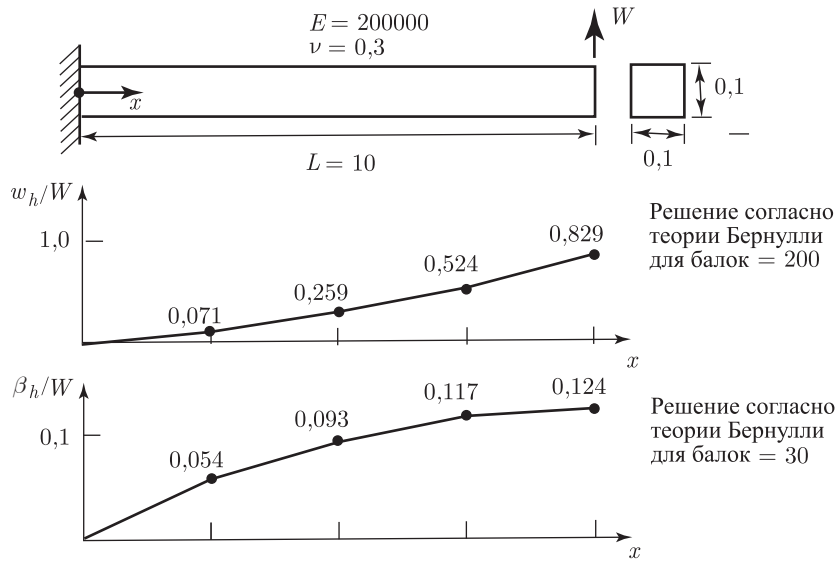
а это дает $\alpha = EI/2L^2$.

При данной формулировке условие inf-sup имеет вид

$$\inf_{\gamma_h \in D_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{\int_{\text{Vol}} \gamma_h [(\partial w_h / \partial x) - \beta_h] d\text{Vol}}{\|\gamma_h\| \|\mathbf{v}_h\|} \geq c > 0, \quad (4.218)$$

где постоянная c не зависит от h .

Элемент с двумя узлами. Давайте для начала рассмотрим элемент, базирующийся на учете смещений и имеющий два узла, для которого w_h и β_h предполагаются изменяющимися линейно в пределах каждого элемента (см. пример решения, показанный на рис. 4.56 а).

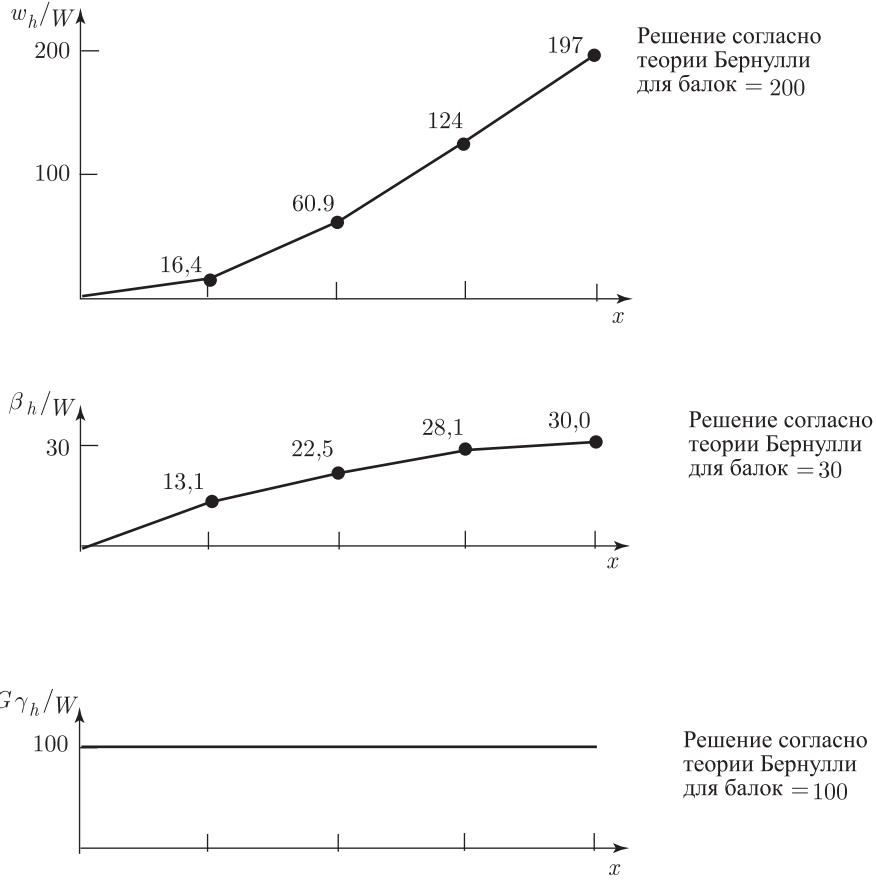


а. Анализ только с элементом, базирующимся на смещениях: величины w_h и β_h изменяются для каждого элемента по линейному закону, а $\gamma_h = (\partial w_h / \partial x) - \beta_h$; если учесть, что значения w_h и β_h очень неточны, то такими же являются и сдвиговые деформации

Рис. 4.56. Анализ консольной балки с использованием элементов балки, содержащих по 2 узла (поправочный коэффициент сдвига k , определяемый согласно (5.57), принят равным 1,0)

Сравнение результатов, полученных численным путем, с данными решения на основе теории Бернулли для балок, приводимое на рис. 4.56, свидетельствует об очень плохом качестве расчетов для этого элемента. В этом случае $K_h(0) = \{0\}$, так что условие inf-sup, соответствующее (4.218), не выполняется. Если обратиться к условию (4.164), то мы можем увидеть также, что недостижимо и хорошее качество сходимости; а именно, $d(\mathbf{u}, V_h) \rightarrow 0$ по мере увеличения пространства V_h , тогда как $d[\mathbf{u}, K_h(0)] = \|\mathbf{u}\|$ (постоянное значение).

Теперь рассмотрим элемент со смешанной интерполяцией, имеющий два узла, для которого w_h и β_h изменяются линейно, а γ_h — постоянно в пределах каждого элемента. Рисунок 4.56 б демонстрирует результаты, полученные при исследовании консоли, и указывает на хорошую способность к прогнозу применительно к данному элементу. Условие эллиптичности, опять-таки, выполняется (см. упражнение 4.61), и, кроме того, мы должны



б. Анализ для элемента со смешанной интерполяцией: величины w_h и β_h для каждого элемента изменяются по линейному закону, а величина γ_h для каждого элемента постоянна

Рис. 4.56. Продолжение

теперь исследовать, выполняется ли следующее условие inf-sup:

$$\inf_{\gamma_h \in P_h(D_h)} \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{\int_{\text{Vol}} \gamma_h [(\partial w / \partial x) - \beta_h] d\text{Vol}}{\|\gamma_h\| \|\mathbf{v}_h\|} \geq c > 0. \quad (4.219)$$

Теперь $K_h(0) \neq \{0\}$, и мы проводим проверку на выполнение условия inf-sup, рассматривая типичное значение γ_h (где γ_h рассматривается как переменная). Тогда при заданном типичном значении γ_h мы выбираем

$$\hat{\mathbf{v}}_h = \begin{bmatrix} \hat{w}_h \\ \hat{\beta}_h \end{bmatrix} \quad (4.220)$$

при $\hat{\beta}_h = 0$ и $\partial \hat{w}_h / \partial x = \gamma_h$.

Теперь рассмотрим

$$\frac{\int_{\text{Vol}} g_h [(\partial \hat{w}_h / \partial x) - \hat{\beta}_h] d\text{Vol}}{\|\hat{\mathbf{v}}_h\|} = \sqrt{\int_{\text{Vol}} (\gamma_h)^2 d\text{Vol}}. \quad (4.221)$$

Следовательно, получим

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{\int_{\text{Vol}} \gamma_h [(\partial w_h / \partial x) - \beta_h] d\text{Vol}}{\|\mathbf{v}_h\|} \geq \frac{\int_{\text{Vol}} \gamma_h [(\partial \hat{w}_h / \partial x) - \hat{\beta}_h] d\text{Vol}}{\|\hat{\mathbf{v}}_h\|} = \sqrt{\int_{\text{Vol}} (\gamma_h)^2 d\text{Vol}}, \quad (4.222)$$

где γ_h по-прежнему является переменной. Поэтому для балочного элемента со смешанной интерполяцией и с двумя узлами получим

$$\inf_{\gamma_h \in P_h(D_h)} \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{\int_{\text{Vol}} \gamma_h [(\partial w_h / \partial x) - \beta_h] d\text{Vol}}{\|\gamma_h\| \|\mathbf{v}_h\|} \geq 1, \quad (4.223)$$

и условие inf-sup выполняется.

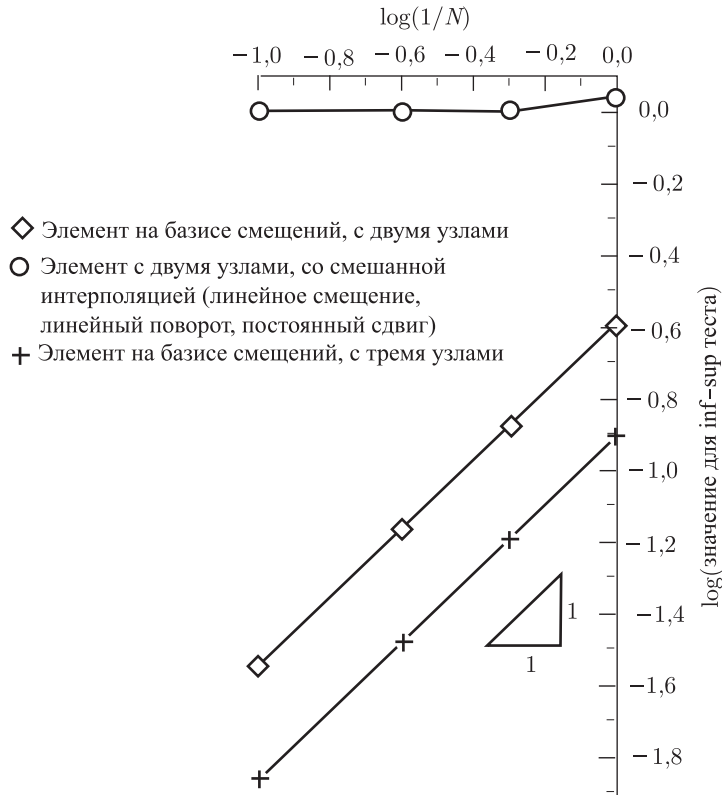


Рис. 4.57. Тест на inf-sup для элементов типа балки (рассматривается консольная балка)

Мы можем также применить проверочный тест на inf-sup с собственными значениями к балочным элементам с двумя узлами. Используемые при этом уравнения — это те, которые были представлены для задачи теории упругости, но здесь мы используем пространства для балочных элементов (см. упражнение 4.63). Полученные результаты показаны на рис. 4.57. Отметим, что в задаче (4.207) наименьшее, отличное от нуля собственное значение для случая дискретизации, базирующейся только на учете смещений, приближается к нулю по мере измельчения сетки, тогда как сетки для балочного элемента

со смешанной интерполяцией дают собственное значение, равное 1,0 для всех сеток (что соответствует знаку равенства в условии (4.223)).

Балочные элементы со смешанной интерполяцией, имеющие более высокий порядок, могут быть исследованы совершенно таким же образом, как и элементы с двумя узлами (см. упражнение 4.62). На рис. 4.57 показаны также результаты, полученные для элемента, базирующегося только на учете смещений и имеющего три узла; при этом проверка выполнения условия inf-sup проводилась численным методом.

4.5.8. Упражнения

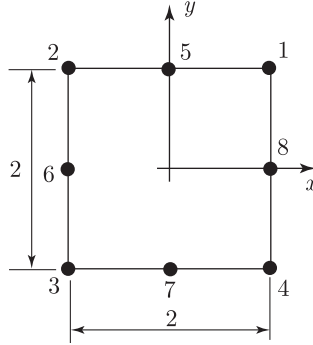
- 4.47. Докажите, что неравенство $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| \leq \tilde{c}d[\mathbf{u}, K_h(0)]$ всегда справедливо, где \mathbf{u}_h представляет собой конечно-элементное решение, а $K_h(0)$ определяется посредством (4.159). Воспользуйтесь тем, что

$$\exists \alpha > 0 \text{ такое, что } \forall \mathbf{v}_h \in K_h(0), \alpha(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \geq \alpha \|\mathbf{v}_h\|^2,$$

$$\exists M > 0 \text{ такое, что } \forall \mathbf{v}_{h1}, \mathbf{v}_{h2} \in V_h, |a(\mathbf{v}_{h2}, \mathbf{v}_{h1})| \leq M \|\mathbf{v}_{h1}\| \|\mathbf{v}_{h2}\|,$$

а также подходом, указанным в (4.94). Заметим, что постоянная c не зависит от объемного модуля.

- 4.48. Докажите, что $\|\operatorname{div}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\|_0 \leq c \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V$. Здесь $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V_h$, а c — постоянная.
4.49. Вычислите $P_h(\operatorname{div} \mathbf{v}_h)$ для показанного здесь элемента с восемью узлами, предполагая, что вокруг элемента располагается поле постоянного давления.



- 4.50. Рассчитайте матрицу жесткости для треугольного элемента 3/1, имеющего общий тип u/p , при его двумерном анализе. Элемент, следовательно, имеет три узла, и предполагается наличие постоянного давления, имеющего разрыв. Используйте данные, указанные на рис. 4.19, и рассмотрите условия плоских напряжений, плоских деформаций, а также осесимметричные условия.

- Определите все необходимые матрицы, пользуясь общей процедурой для элементов u/p (см. пример 4.32), однако не выполняйте никаких матричных умножений. Рассмотрите случай, когда κ конечно.
- Сравните результаты, полученные в примере 4.17, с результатами пункта (а).
- Выдайте матрицу элемента u/p в предположении об абсолютной несжимаемости (следовательно, когда статическое сгущение по степеням свободы не может быть осуществлено).

(Примечание: Этот элемент не является надежным для практического исследования в условиях полной (или почти полной) несжимаемости, однако используется здесь просто в качестве упражнения.)

- 4.51. Рассмотрите элемент 4/1 из примера 4.32. Покажите, что использование члена $P_h(\operatorname{div} \mathbf{v}_h)$ (рассчитанного в примере 4.34) в задаче (4.179) приводит к получению той же самой элементной матрицы жесткости, как и та, которая была найдена в примере 4.32.

- 4.52. Рассмотрите элемент 9/3 из примера 4.36; иначе говоря, предположите, что $Q_h = [1, x, y]$. Предположите, что смещения в узловых точках, соответствующие \mathbf{v}_h , имеют вид

$$u_1 = 1; \quad u_2 = -1; \quad u_3 = -1; \quad u_4 = 1; \quad u_7 = -1; \quad u_8 = 1;$$

$$v_1 = 1; \quad v_2 = -1; \quad v_3 = -1; \quad v_4 = 1; \quad v_6 = -1; \quad v_8 = 1$$

при смещениях во всех остальных узловых точках, равных нулю. Рассчитайте проекцию $P_h(\operatorname{div} \mathbf{v}_h)$.

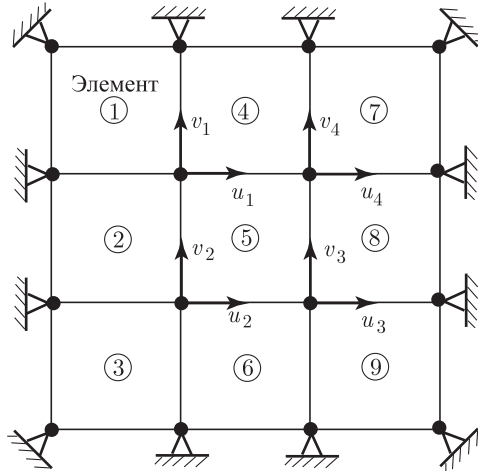
- 4.53. Покажите, что элемент 8/1 типа u/p удовлетворяет условию inf-sup (а следовательно, что дискретизации, использующие такой элемент, не будут содержать лишней моды давления). За схемой доказательства обратитесь к примеру 4.36.
- 4.54. Рассмотрите решение уравнений (4.187) и покажите, что условия 1 и 2 в (4.188) и (4.189) необходимы и достаточны для получения единственного решения.
- 4.55. Рассмотрите условие эллиптичности (4.192). Докажите, что это условие выполняется для элемента 4/1 в вариантах двумерного анализа с плоскими напряжениями и с плоскими деформациями.
- 4.56. В двумерной квадратной области с плоскими деформациями для несжимаемого материала, который моделируется с использованием четырех элементов 9/3 при всех граничных смещениях, приравняемых нулю, постоянная мода давления, $p_0 \in Q_h$, не является лишней модой (так как она должна существовать физически). Покажите, что эта мода не является элементом пространства $P_h(D_h)$.
- 4.57. Рассмотрите элемент 4/1. Можете ли вы построить двухэлементную модель с надлежащими граничными условиями, которая содержала бы лишнюю моду давления? Поясните ваш ответ.
- 4.58. Рассмотрите показанные здесь девять элементов 4/1. Предположите, что все граничные смещения равны нулю.

- (a) Выберите распределение давления \hat{p}_h , при котором существует вектор \mathbf{v}_h , такой, что

$$\int_{\operatorname{Vol}} \hat{p}_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h d\operatorname{Vol} > 0.$$

- (b) Выберите распределение давления \hat{p}_h , при котором любое распределение смещений \mathbf{v}_h в пространстве V_h давало бы

$$\int_{\operatorname{Vol}} \hat{p}_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h d\operatorname{Vol} = 0.$$



- 4.59. Рассмотрите схему u/p -с.

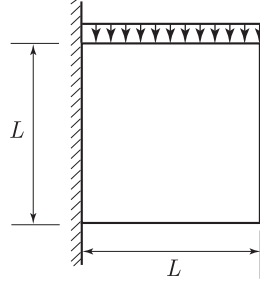
- (а) Покажите, что условие inf-sup может быть записано так, как в (4.206), но что при этом $\mathbf{G}_h = (\mathbf{K}_{pu})_h \mathbf{T}_h^{-1} (\mathbf{K}_{up})_h$.
- (б) Покажите также, что альтернативным образом может быть рассмотрена задача на собственные значения

$$\mathbf{G}'_h \mathbf{Q}_h = \lambda' \mathbf{T}_h \mathbf{Q}_h, \quad (\text{а})$$

где $\mathbf{G}_h = (\mathbf{K}_{pu})_h \mathbf{S}_h^{-1} (\mathbf{K}_{up})_h$, и что наименьшие ненулевые собственные значения для задач (а) и (4.207) одни и те же.

Здесь \mathbf{T}_h представляет собой матрицу нормы L^2 для p_h ; иначе говоря, для любого вектора узловых значений давления \mathbf{P}_h мы имеем $\|p_h\| = \mathbf{P}_h^T \mathbf{T}_h \mathbf{P}_h$; следовательно, $\mathbf{T}_h = -\kappa(\mathbf{K}_{pp})_h$.

- 4.60. Проведите исследование поведения показанной здесь консольной пластины в условиях плоских деформаций. Предположите, что элемент 3/1 типа u/p должен быть использован в последовательности однородных, непрерывно измельчаемых сеток. Пусть n_u будет числом смещений в узловых точках, а n_p — числом переменных давления. Покажите, что по мере измельчения сетки отношение n_u/n_p приближается к единице (очевидно, что это указывает на трудности построения решения).



Модуль Юнга E
 Коэффициент Пуассона $\nu = 0,499$
 Условия плоских деформаций

Рассчитайте вышеуказанное отношение для случаев использования элементов 9/3 и 9/8-с (элемент 9/8-с определен в табл. 4.8) и обсудите ваши результаты.

- 4.61. Покажите, что балочные элементы со смешанной интерполяцией, с двумя, тремя и четырьмя узлами, удовлетворяют условию эллиптичности. Элемент с двумя узлами был рассмотрен в разделе 4.5.7, а элементы с тремя и с четырьмя узлами рассматриваются в разделе 5.4.1 (см. также упражнение 4.62).
- 4.62. Покажите аналитически, что условие inf-sup не выполняется для балочных элементов, базирующихся на учете смещений и имеющих три или четыре узла, и что это условие выполняется для балочных элементов со смешанной интерполяцией, при γ_h , изменяющемся, соответственно, по линейному или по параболическому закону (см. раздел 5.4.1).
- 4.63. Сформулируйте задачу на собственные значения для проверки выполнения условия inf-sup применительно к балочным элементам, рассмотренным в разделе 4.5.7. Воспользуйтесь формой (4.207) и определите в деталях все матрицы.
- 4.64. Рассмотрите задачу, показанную на рис. 4.54, и элементы, упоминаемые в таблице 4.8. Для каждого из этих элементов вычислите коэффициент ограничения, определяемый, как число степеней свободы по давлению; значения этого коэффициента рассчитайте для все более измельчаемых сеток, то есть при $h \rightarrow 0$. После этого заметьте, что один лишь этот коэффициент ограничения не показывает, будет или не будет выполняться условие inf-sup.

Глава 5

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И РАСЧЕТ ИЗОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ МАТРИЦ

5.1. Введение

Очень важный этап конечно-элементного решения состоит в расчете конечно-элементных матриц. В главе 4 мы обсуждали определение и расчет обобщенно-координатных конечно-элементных моделей. Основной целью представления обобщенно-координатных конечных элементов было расширение нашего понимания метода конечных элементов. Мы уже указывали на то, что в большинстве практических исследований использование изопараметрических конечных элементов оказывается наиболее эффективным. Что касается оригинальных разработок таких элементов, то см. работы [Taig 1961] и [Irons 1966-A], [Irons 1966-B].

Наша цель в данной главе состоит в том, чтобы представить модели изопараметрических конечных элементов и описать их эффективные воплощения. При выводе обобщенно-координатных конечно-элементных моделей мы использовали локальные элементные системы координат x, y, z и сделали предположение о представлении элементных смещений $u(x, y, z), v(x, y, z)$ и $w(x, y, z)$ (а в случае применения смешанных методов — также и элементных переменных, определяющих напряжения и деформации в элементах) в форме полиномов по степеням x, y и z с неопределенными постоянными коэффициентами α_i, β_i и $\gamma_i, i = 1, 2, \dots$, которые идентифицируются как обобщенные координаты. Установить а priori какую-то связь обобщенных координат с физическим смыслом задачи оказалось невозможным; однако после проведения расчетов мы обнаружили, что обобщенные координаты, определяющие собой смещения, являются линейными комбинациями смещений в узловых точках элемента. Основная идея изопараметрической конечно-элементной модели состоит в том, чтобы достичь установления взаимозависимости между смещениями в любой точке элемента и смещениями в его узловых точках непосредственно, путем использования *интерполяционных функций* (называемых также *функциями формы*). Это означает, что матрица преобразования A^{-1} (см. (4.57)) не вычисляется; вместо этого осуществляется прямое установление элементных матриц, соответствующих требуемым степеням свободы.

5.2. Изопараметрический вывод матрицы жесткости для стержневого элемента

В качестве примера для иллюстрации процедуры изопараметрического описания матрицы жесткости рассмотрим стержневой элемент. Чтобы упростить объяснение, предположим, что стержень лежит на глобальной оси координат X , как это показано на рис. 5.1. Первый шаг состоит в том, чтобы связать фактическую глобальную координату X с *естественной системой координат*, имеющей переменную $r, -1 \leq r \leq 1$ (рис. 5.1). Это преобразование дается формулой

$$X = \frac{1}{2}(1-r)X_1 + \frac{1}{2}(1+r)X_2 \quad (5.1)$$

или

$$X = \sum_{i=1}^2 h_i X_i, \quad (5.2)$$

где $h_1 = (1/2)(1 - r)$ и $h_2 = (1/2)(1 + r)$ представляют собой интерполяционные функции, или функции формы. Отметим, что формула (5.2) устанавливает однозначную взаимосвязь между координатами X и r на стержне.

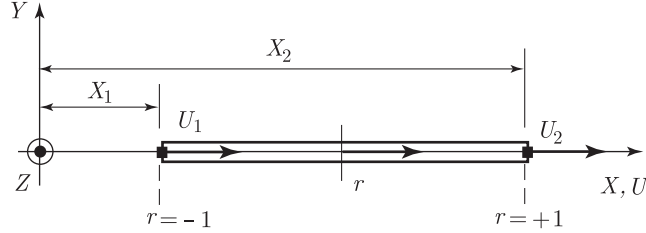


Рис. 5.1. Элемент, представленный в глобальной и в естественной системах координат

Глобальные смещения на стержне выражаются тем же способом, что и глобальные координаты:

$$U = \sum_{i=1}^2 h_i U_i, \quad (5.3)$$

где в данном случае задается линейная вариация смещений. *Интерполяция элементных координат и элементных смещений с использованием одних и тех же интерполяционных функций, определяемых в естественной системе координат, представляет собой основу изопараметрической конечно-элементной модели.*

Для расчета матрицы жесткости исследуемого элемента нам необходимо определить деформации этого элемента $\epsilon = dU/dX$. Здесь мы используем

$$\epsilon = \frac{dU}{dr} \frac{dr}{dX}, \quad (5.4)$$

где, исходя из (5.3),

$$\frac{dU}{dr} = \frac{U_2 - U_1}{2}, \quad (5.5)$$

и, используя (5.2), получаем

$$\frac{dX}{dr} = \frac{X_2 - X_1}{2} = \frac{L}{2}, \quad (5.6)$$

где L — длина стержня. Следовательно, как это и ожидалось, имеем

$$\epsilon = \frac{U_2 - U_1}{L}. \quad (5.7)$$

В результате матрица преобразования деформация–смещение, соответствующая (4.32), имеет вид

$$\mathbf{B} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

В общем случае матрица преобразования деформация–смещение представляет собой функцию естественных координат, и поэтому мы вычисляем объемный интеграл для матрицы жесткости, выражаемый по формуле (4.33), путем интегрирования по естественным координатам. Следуя общей процедуре, хотя для данного примера это не является необходимым, мы получаем

$$\mathbf{K} = \frac{AE}{L^2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} J dr, \quad (5.9)$$

где площадь сечения стержня A и модуль упругости E предполагаются постоянными, а J — это якобиан, связывающий длину элемента в глобальной системе координат с той же длиной в естественной системе координат; иначе говоря,

$$dX = J dr. \quad (5.10)$$

Из (5.6) мы получаем

$$J = \frac{L}{2}. \quad (5.11)$$

После этого, произведя вычисления по формуле (5.9), получим хорошо известную матрицу

$$\mathbf{K} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

Как это утверждалось во введении, изопараметрическая модель позволяет обойти построение матрицы преобразования \mathbf{A}^{-1} . Чтобы сравнить эту модель с обобщенно-координатной моделью, мы должны разрешить соотношение (5.1) относительно r , а затем подставить получаемое выражение в (5.3). Таким образом получаем

$$r = \frac{X - [(X_1 + X_2)/2]}{L/2}, \quad (5.13)$$

а после этого

$$U = \alpha_0 + \alpha_1 X, \quad (5.14)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2}(U_1 + U_2) - \frac{X_1 + X_2}{2L}(U_2 - U_1) \\ \alpha_1 &= \frac{1}{L}(U_2 - U_1) \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

или

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{X_1 + X_2}{2L} & \frac{1}{2} - \frac{X_1 + X_2}{2L} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \mathbf{U}, \quad (5.16)$$

где

$$\boldsymbol{\alpha}^T = [\alpha_0 \quad \alpha_1]; \quad \mathbf{U}^T = [U_1 \quad U_2], \quad (5.17)$$

а матрица, связывающая $\boldsymbol{\alpha}$ с \mathbf{U} , согласно (5.16), — это \mathbf{A}^{-1} . Следует отметить, что в данном примере обобщенные координаты α_0 и α_1 связывают смещение в глобальном элементе с координатой глобального элемента [см. (5.14)].

5.3. Модели для элементов сплошной среды

Для конечного элемента, представляющего собой сплошную среду, в большинстве случаев оказывается эффективным провести прямой расчет элементных матриц в соответствии с глобальными степенями свободы. Однако вначале мы представим выражения для тех матриц, которые соответствуют локальным степеням свободы элемента, так как для прямого расчета элементных матриц, соответствующих глобальным степеням свободы, могут понадобиться дополнительные соображения (см. раздел 5.3.4). Ниже мы рассмотрим построение элементных матриц для прямолинейных ферменных элементов; сделаем это также для двумерных элементов с плоскими напряжениями, с плоскими деформациями и для осесимметричных элементов, а также для трехмерных элементов, имеющих переменное число узлов. Типичные элементы показаны на рис. 5.2.

Наше обсуждение направлено на расчет конечно-элементных матриц при моделировании, базирующемся на учете смещений. Однако те же самые процедуры используются и при расчете элементных матриц для смешанных формулировок и, в частности, для формулировок на базе смещение–давление при исследовании несжимаемого материала, как это вкратце и обсуждается в разделе 5.3.5.

5.3.1. Четырехугольные элементы

Основная процедура для изопараметрической конечно-элементной модели состоит в том, чтобы выразить элементные координаты и элементные смещения в форме интерполяций, используя естественную систему координат данного элемента. Эта система координат является одно-, двух- или трехмерной, в зависимости от размерности элемента. Модель для элементных матриц остается одной и той же, независимо от того, имеем

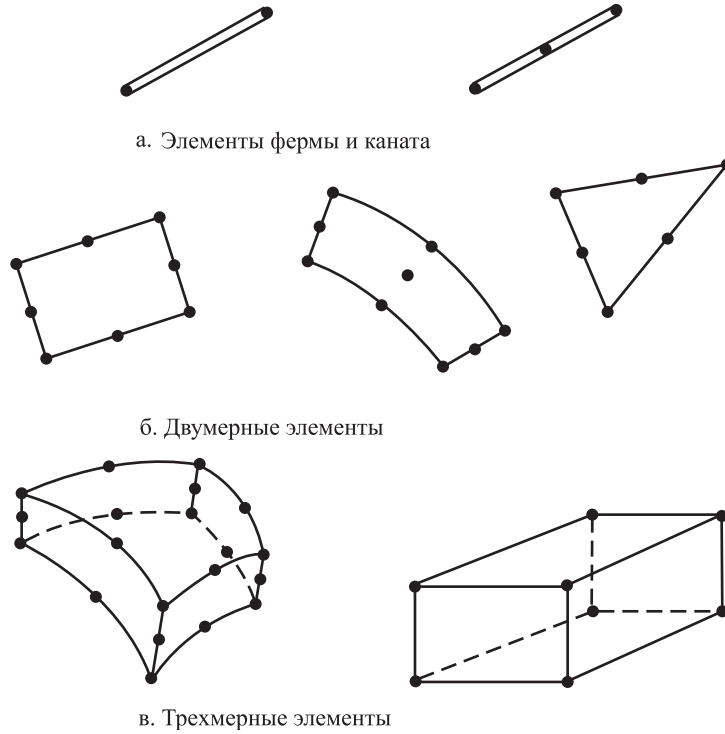


Рис. 5.2. Некоторые типовые элементы сплошной среды

ли мы дело с одно-, двух- или трехмерным элементом. По этой причине в приводимых ниже выкладках общего характера мы используем уравнения для трехмерного элемента. Однако одномерные и двумерные элементы включены в этот анализ за счет простого использования нужных осей координат и надлежащего вида интерполяционных функций.

Если рассматривать общий случай трехмерного элемента, то координатные интерполяции имеют вид

$$x = \sum_{i=1}^q h_i x_i; \quad y = \sum_{i=1}^q h_i y_i; \quad z = \sum_{i=1}^q h_i z_i, \quad (5.18)$$

где x , y и z — координаты любой точки элемента (здесь — это локальные координаты), а x_i , y_i и z_i , $i = 1, \dots, q$ — это координаты узлов элемента, число которых равно q . Интерполяционные функции h_i определяются в естественной системе координат данного элемента, имеющего переменные r , s и t , каждая из которых изменяется в пределах от -1 до $+1$. Для одномерных и двумерных элементов будут применены только нужные уравнения из числа (5.18), а интерполяционные функции будут зависеть только от естественных координатных переменных r и r, s соответственно.

Неизвестными величинами в (5.18) являются пока что интерполяционные функции h_i . Фундаментальное свойство интерполяционной функции h_i состоит в том, что в естественной системе координат ее значение в узле i есть единица, а во всех остальных узлах — нуль. Если использовать эти условия, то функции h_i , соответствующие конкретному расположению узловых точек, могут быть определены неким систематическим образом. Однако эти функции удобно строить путем инспекции, и это демонстрируется на приводимом ниже простом примере.

Пример 5.1: Требуется построить интерполяционные функции, соответствующие ферменному элементу, имеющему три узла и показанному на рис. 5.3.

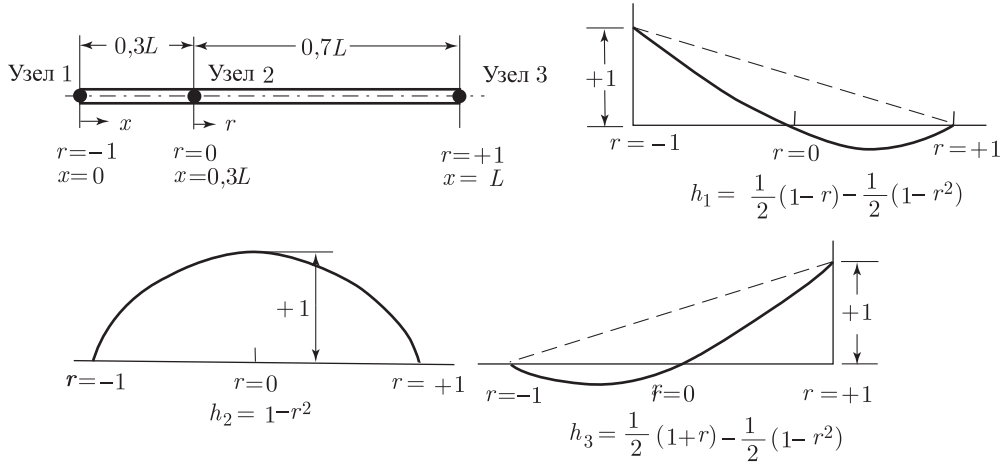


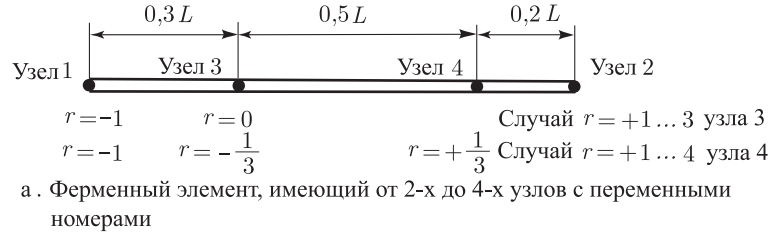
Рис. 5.3. Одномерные интерполяционные функции для ферменного элемента

Первое наблюдение состоит в том, что для ферменного элемента с тремя узлами мы желаем иметь интерполяционные полиномы, содержащие r^2 как наивысшую степень r ; другими словами, интерполяционными функциями будут параболы. Таким образом, функция h_2 может быть построена без особых усилий. А именно, та парабола, которая удовлетворяет условиям равенства нулю при $r = \pm 1$ и должна быть равна 1 при $r = 0$, дается формулой $(1 - r^2)$. Две другие интерполяционные функции, h_1 и h_3 , строятся путем суперпозиции линейной функции и параболы. Рассмотрим интерполяционную функцию h_3 . Если использовать комбинацию $(1/2)(1 + r)$, то условия о том, что функция будет нулем при $r = -1$ и единицей при $r = +1$, удовлетворяются. Чтобы обеспечить обращение h_3 в нуль также и при $r = 0$, нам нужно использовать $h_3 = (1/2)(1 + r) - (1/2)(1 - r^2)$. Интерполяционная функция h_1 строится аналогичным образом.

Использованная в примере 5.3 процедура построения требуемых интерполяционных функций в их окончательном виде подсказывает привлекательную модель для некоторого элемента, имеющего переменное число узлов. Эта модель реализуется, если вначале построить интерполяции, соответствующие базовому элементу с двумя узлами. Добавление еще одного узла влечет за собой после этого введение дополнительной интерполяционной функции. На рис. 5.4 приводятся интерполяционные функции для одномерного элемента, рассмотренного в примере 5.1, при возможном добавлении четвертого узла. Как показано на рисунке, данный элемент может иметь от двух до четырех узлов. Следует отметить, что узлы 3 и 4 являются теперь внутренними узлами, так как узлы 1 и 2 используются для определения элемента с двумя узлами.

Описанная здесь процедура построения интерполяционных функций для элемента при его одномерном анализе может быть непосредственно обобщена применительно к случаям двух и трех измерений. На рисунках 5.5 показаны интерполяционные функции для двумерного элемента, имеющего переменное число узлов, — от четырех до девяти, — а на рис. 5.6 приводятся интерполяционные функции для трехмерных элементов, имеющих от 8 до 20 узлов. Двумерные и трехмерные интерполяции были построены по аналогии с одномерными интерполяциями, где используемыми базовыми функциями являются, фактически, те, которые уже применялись на рис. 5.4. На рисунках 5.5 и 5.6 мы рассматриваем параболическую интерполяцию, как имеющую наивысший порядок, однако элементы с переменным числом узлов, имеющие интерполяции более высоких порядков, могут быть рассмотрены аналогичным образом.

Привлекательность элементов, показанных на рис. 5.4–5.6, состоит в том, что эти элементы могут иметь любое число узлов — от минимума до максимума. Кроме того,



	Включается только если присутствует узел 3	Включается только если присутствуют узлы 3 и 4
$height h_1 = \frac{1}{2}(1 - r)$	$-\frac{1}{2}(1 - r^2)$	$+\frac{1}{16}(-9r^3 + r^2 + 9r - 1)$
$h_2 = \frac{1}{2}(1 + r)$	$-\frac{1}{2}(1 - r^2)$	$+\frac{1}{16}(9r^3 + r^2 - 9r - 1)$
$h_1 = \frac{1}{2}(1 - r^2)$		$+\frac{1}{16}(27r^3 + 7r^2 - 27r - 7)$
$h_4 = \frac{1}{16}(-27r^3 - 9r^2 + 27r + 9)$		

б. Интерполяционные функции

Рис. 5.4. Интерполяционные функции для одномерного элемента, имеющего от двух до четырех узлов с переменными номерами

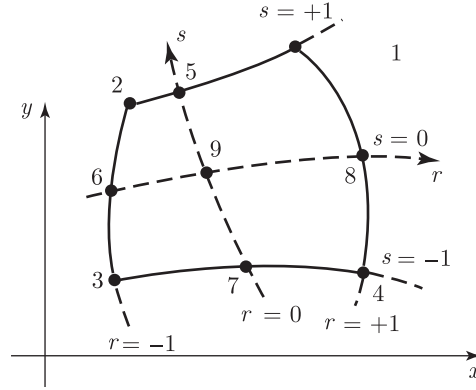
могут быть образованы и треугольные элементы (см. раздел 5.3.2). Однако в общем случае для получения максимальной точности элементы с переменным числом узлов должны иметь форму, возможно более близкую к прямоугольной (при трехмерном анализе — к прямоугольной форме в каждой локальной плоскости), а узлы, не располагающиеся в углах, должны, вообще говоря, располагаться на своих естественных координатных позициях; например, для двумерного элемента с девятью узлами промежуточные узлы на сторонах этого элемента должны, как правило, располагаться посередине между угловыми узлами, а девятый узел должен находиться в центре элемента (по поводу некоторых исключений из этих правил см. раздел 5.3.2, а по поводу дополнительных подробностей в связи со сделанными наблюдениями см. раздел 5.3.3).

При рассмотрении геометрии двумерных и трехмерных элементов на рис. 5.5 и 5.6 мы замечаем, что через посредство координатных интерполяций согласно (5.18) элементы могут иметь криволинейные границы, и это не вызывает каких-либо трудностей. Это обстоятельство является важным преимуществом в сравнении с обобщенно-координатной конечно-элементной схемой. Другое важное преимущество — это легкость, с которой могут быть построены функции, определяющие смещения в элементах.

Для *изопараметрической* модели смещения в элементах интерполируются таким же образом, как и геометрия; иначе говоря, мы используем

$$u = \sum_{i=1}^q h_i u_i; \quad v = \sum_{i=1}^q h_i v_i; \quad w = \sum_{i=1}^q h_i w_i, \quad (5.19)$$

где u , v и w — это локальные смещения в любой точке элемента, а u_i , v_i и w_i , $i = 1, \dots, q$ — это соответствующие смещения в узлах элемента. Поэтому предполагается, что каждой из



а. Двумерный элемент, имеющий от 4 до 9 узлов с переменными номерами

Включается только если определен узел i

		$i = 5$	$i = 6$	$i = 7$	$i = 8$	$i = 9$
$h_1 =$	$\frac{1}{4}(1+r)(1+s)$	$-\frac{1}{2}h_5$			$-\frac{1}{2}h_8$	$-\frac{1}{4}h_9$
$h_2 =$	$\frac{1}{4}(1-r)(1+s)$	$-\frac{1}{2}h_5$	$-\frac{1}{2}h_6$			$-\frac{1}{4}h_9$
$h_3 =$	$\frac{1}{4}(1-r)(1-s)$		$-\frac{1}{2}h_6$	$-\frac{1}{2}h_7$		$-\frac{1}{4}h_9$
$h_4 =$	$\frac{1}{4}(1+r)(1-s)$			$-\frac{1}{2}h_7$	$-\frac{1}{2}h_8$	$-\frac{1}{4}h_9$
$h_5 =$	$\frac{1}{2}(1-r^2)(1+s)$					$-\frac{1}{2}h_9$
$h_6 =$	$\frac{1}{2}(1-s^2)(1-r)$					$-\frac{1}{2}h_9$
$h_7 =$	$\frac{1}{2}(1-r^2)(1-s)$					$-\frac{1}{2}h_9$
$h_8 =$	$\frac{1}{2}(1-s^2)(1+r)$					$-\frac{1}{2}h_9$
$h_9 =$	$(1-r^2)(1-s^2)$					

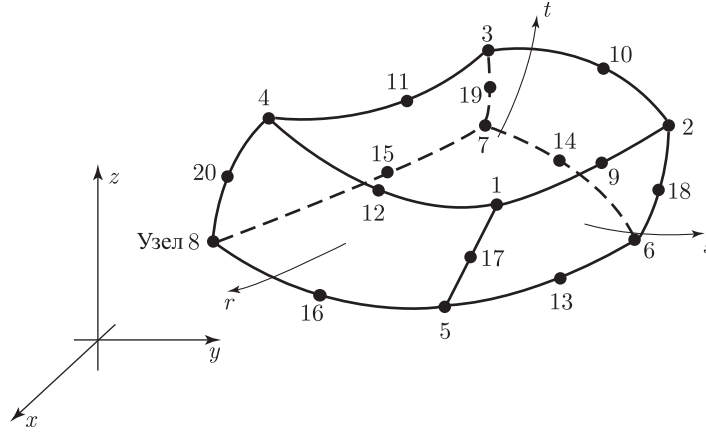
б. Интерполяционные функции

Рис. 5.5. Интерполяционные функции для двумерного элемента, имеющего от четырех до девяти узлов с переменными номерами

координат узловых точек, необходимых для описания геометрии элемента, соответствует одно значение смещения в узловой точке ¹⁾.

Чтобы иметь возможность рассчитать матрицу жесткости некоторого элемента, нам нужно вычислить матрицу преобразования деформация–смещение. Деформации элемента выражаются в терминах производных от смещений элемента, вычисленных по отношению к локальным координатам. В связи с тем, что смещения элемента определяются в естественной системе координат, с использованием (5.19), нам нужно связать производные по

¹⁾ В дополнение к изопараметрическим элементам существуют *субпараметрические* элементы, для которых геометрия интерполируется с более низкой степенью, чем смещения (см. конец данного раздела), а также *суперпараметрические* элементы, к которым применимо противоположное правило (см. раздел 5.4).



а. Трехмерный элемент, имеющий от 8 до 20 узлов с переменными номерами

$$\begin{aligned}
 h_1 &= g_1 - (g_9 + g_{12} + g_{17})/2 & h_6 &= g_6 - (g_{13} + g_{14} + g_{18})/2 \\
 h_2 &= g_2 - (g_9 + g_{10} + g_{18})/2 & h_7 &= g_7 - (g_{14} + g_{15} + g_{19})/2 \\
 h_3 &= g_3 - (g_{10} + g_{11} + g_{19})/2 & h_8 &= g_8 - (g_{15} + g_{16} + g_{20})/2 \\
 h_5 &= g_5 - (g_{13} + g_{16} + g_{17})/2 \\
 g_i &= 0 \text{ если узел } i \text{ не включен; иначе} \\
 g_i &= G(r, r_i)G(s, s_i)G(t, t_i) \\
 G(\beta, \beta_i) &= \frac{1}{2} (1 + \beta_i \beta) \text{ для } \beta = \pm 1 & ; \beta = r, s, t \\
 G(\beta, \beta_i) &= (1 - \beta^2) \text{ для } \beta_i = 0
 \end{aligned}$$

б. Интерполяционные функции

Рис. 5.6. Интерполяционные функции для трехмерного элемента, имеющего от 8-ми до 20-ти узлов с переменными номерами

x, y, z с производными по r, s, t , где мы признаем, что выражения (5.18) имеют форму

$$x = f_1(r, s, t); \quad y = f_2(r, s, t); \quad z = f_3(r, s, t), \quad (5.20)$$

где символ f_i означает «функция от». Обратное соотношение имеет вид

$$r = f_4(x, y, z); \quad s = f_5(x, y, z); \quad t = f_6(x, y, z). \quad (5.21)$$

Нам требуются производные $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ и $\partial/\partial z$, и представляется естественным использовать правило цепочки в следующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} \quad (5.22)$$

при аналогичных соотношениях для определения $\partial/\partial y$ и $\partial/\partial z$. Однако для вычисления $\partial/\partial x$ согласно (5.22) мы должны вычислить $\partial r/\partial x$, $\partial s/\partial x$ и $\partial t/\partial x$, а это означает, что нужно воспользоваться явной формой обратных соотношений в форме (5.21). Вообще говоря, эти обратные соотношения бывает трудно получить в явной форме и, следовательно, необходимо вычислять требуемые производные так, как это описывается ниже. Используя

правило цепочки, мы имеем

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

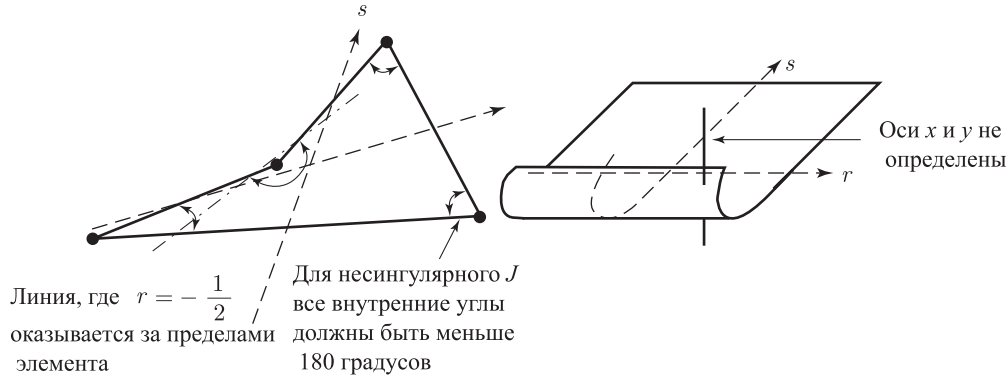
или, в матричных обозначениях,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{J} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \quad (5.24)$$

где \mathbf{J} представляет собой *оператор Якоби* (*якобиан*), связывающий производные по естественным координатам с производными по локальным координатам. Следует отметить, что интересующий нас якобиан легко найти, используя (5.18). Нам требуется $\partial/\partial \mathbf{x}$, и тогда мы используем формулу

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{J}^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}, \quad (5.25)$$

а для этого требуется, чтобы существовал оператор, обратный \mathbf{J} . Этот обратный оператор существует при условии, что имеется один-к-одному (т.е. однозначное) соответствие между естественными и локальными координатами элемента, как это выражается в соотношениях (5.20) и (5.21). При большинстве формулировок такое однозначное соответствие между системами координат (т.е. каждой совокупности r , s и t соответствует только одна совокупность x , y и z) оказывается, очевидно, заданным, как это имеет место для элементов на рисунках 5.4–5.6. Однако в тех случаях, когда рассматриваемый элемент сильно искажен или складывается сам на себя, как на рис. 5.7, однозначного соответствия между системами координат не существует (см. также раздел 5.3.2 по поводу особенностей преобразования Якоби, пример 5.17).



а. Деформированный элемент

б. Элемент, складывающийся сам на себя

Рис. 5.7. Элементы, для которых возможен сингулярный якобиан

Используя (5.19) и (5.25), мы вычисляем $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial u/\partial z$, $\partial v/\partial x$, ..., $\partial w/\partial z$, и можем в результате построить матрицу преобразования деформация–смещение \mathbf{B} , используя затем формулу

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}, \quad (5.26)$$

где $\hat{\mathbf{u}}$ представляет собой вектор, компонентами которого являются смещения в узловых точках элемента, фигурирующие в (5.19), и мы замечаем, что \mathbf{J} оказывает влияние на элементы матрицы \mathbf{B} . После этого матрица жесткости элемента, соответствующая локальным степеням свободы данного элемента, имеет вид

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV. \quad (5.27)$$

Следует отметить, что элементы матрицы \mathbf{B} представляют собой функции естественных координат r , s и t . Поэтому объемное интегрирование охватывает объем, определяемый в естественных координатах, и объемный дифференциал dV также должен быть записан в терминах естественных координат. В общем случае мы имеем

$$dV = \det \mathbf{J} dr ds dt, \quad (5.28)$$

где $\det \mathbf{J}$ представляет собой определитель оператора Якоби из (5.24) (см. упражнение 5.6).

Явное вычисление объемного интеграла в (5.27) является, вообще говоря, неэффективным, в особенности если используются интерполяции высших порядков или если рассматриваемый элемент имеет искаженную форму. Поэтому здесь применяется численное интегрирование. Действительно, численное интегрирование должно рассматриваться как неотъемлемая часть процесса вычисления матриц для изопараметрических элементов. Подробности процедур численного интегрирования описываются в разделе 5.5, однако краткий обзор этого процесса будет следующим. Во-первых, мы записываем (5.27) в форме

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{F} dr ds dt, \quad (5.29)$$

где $\mathbf{F} = \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \det \mathbf{J}$, а интегрирование выполняется в системе естественных координат данного элемента. Как уже говорилось выше, элементы матрицы \mathbf{F} зависят от r , s и t , однако детальная функциональная зависимость обычно не рассчитывается. Далее матрица жесткости определяется с помощью численного интегрирования, согласно формуле

$$\mathbf{K} = \sum_{i,j,k} \alpha_{ijk} \mathbf{F}_{ijk}, \quad (5.30)$$

где \mathbf{F}_{ijk} — это матрица \mathbf{F} , вычисленная в точке (r_i, s_j, t_k) , а α_{ijk} — это заданная постоянная, зависящая от значений r_i , s_j и t_k . Расчетные точки (r_i, s_j, t_k) для интересующей нас функции и соответствующие весовые множители α_{ijk} выбираются так, чтобы добиться максимальной точности при интегрировании. Естественно, что точность интегрирования может возрасти по мере увеличения числа расчетных точек.

Целью этого краткого обзора процедуры численного интегрирования было завершение описания общей изопараметрической модели. Относительная простота описанной здесь модели может быть отмечена уже сейчас. Именно простота описания элемента и та эффективность, с которой элементные матрицы могут быть практически рассчитаны на компьютере, привлекли усиленное внимание исследователей к развитию изопараметрических и связанных с ними элементов.

Описание матрицы масс элемента и определение векторов нагрузки теперь не вызывают затруднений. А именно, если записать выражения для смещений элемента в форме

$$\mathbf{u}(r, s, t) = \mathbf{H} \hat{\mathbf{u}}, \quad (5.31)$$

где \mathbf{H} представляет собой матрицу интерполяционных функций, то, как и согласно формулам (4.34)–(4.37), мы получим

$$\mathbf{M} = \int_V \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} dV, \quad (5.32)$$

$$\mathbf{R}_B = \int_V \mathbf{H}^T \mathbf{f}^B dV, \quad (5.33)$$

$$\mathbf{R}_S = \int_S \mathbf{H}^{S^T} \mathbf{f}^S dS, \quad (5.34)$$

$$\mathbf{R}_I = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\tau}^I dV. \quad (5.35)$$

Эти матрицы вычисляются с помощью численного интегрирования, так, как это указывалось для матрицы жесткости \mathbf{K} в (5.30). При проведении расчетов нам необходимо использовать надлежащую функцию \mathbf{F} . Чтобы вычислить вектор массовой силы \mathbf{R}_B , мы используем $\mathbf{F} = \mathbf{H}^T \mathbf{f}^B \det \mathbf{J}$, для вектора поверхностных сил используем $\mathbf{F} = \mathbf{H}^{S^T} \mathbf{f}^S \det \mathbf{J}$,

для вектора начального напряжения — $\mathbf{F} = \mathbf{B}^T \boldsymbol{\tau}^i \det \mathbf{J}$, а для матрицы масс мы имеем $\mathbf{F} = \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} \det \mathbf{J}$.

Данное описание было выполнено для одно-, двух — или трехмерных элементов. Теперь мы рассмотрим некоторые частные случаи и продемонстрируем подробности расчета элементных матриц.

Пример 5.2: Требуется получить интерполяционную матрицу для смещений \mathbf{H} , интерполяционную матрицу для связи деформация–смещение \mathbf{B} и оператор Якоби \mathbf{J} для показанного на рис. 5.8 ферменного элемента с тремя узлами.

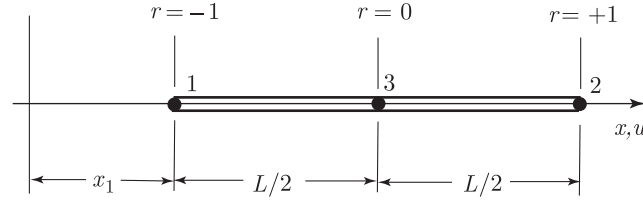


Рис. 5.8. Ферменный элемент, в центре которого находится узел 3

Интерполяционные функции для данного элемента были приведены на рис. 5.3. Так, мы имеем

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -\frac{r}{2}(1-r) & \frac{r}{2}(1+r) & (1-r^2) \end{bmatrix}. \quad (a)$$

Матрица деформация–смещение \mathbf{B} получается путем дифференцирования \mathbf{H} по r и умножения результата на оператор, обратный оператору Якоби:

$$\mathbf{B} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + r & \left(\frac{1}{2} + r\right) & -2r \end{bmatrix}. \quad (b)$$

Чтобы формально вычислить \mathbf{J} , мы используем

$$x = -\frac{r}{2}(1-r)x_1 + \frac{r}{2}(1+r)(x_1 + L) + (1-r^2)\left(x_1 + \frac{L}{2}\right)$$

и, следовательно,

$$x = x_1 + \frac{L}{2} + \frac{L}{2}r, \quad (c)$$

где мы можем заметить, что вследствие размещения узла 3 в центре фермы, между узлами 1 и 2, переменная x интерполируется линейно. Тот же самый результат был бы получен, если бы для геометрической интерполяции использовались только узлы 1 и 2. Теперь, используя соотношение (c), получим

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{L}{2} \end{bmatrix} \quad (d)$$

и

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{L} \end{bmatrix}; \quad \det \mathbf{J} = \frac{L}{2}.$$

Имея в своем распоряжении соотношения от (a) до (d), мы можем теперь вычислить все конечно-элементные матрицы и векторы, определяемые формулами (5.27)–(5.35).

Пример 5.3: Требуется получить оператор Якоби для двумерных элементов, показанных на рис. 5.9.

Оператор Якоби — один и тот же как для глобальной системы координат X, Y , так и для локальной x, y . Поэтому для удобства мы будем использовать локальные координатные системы. Подставляя указанные на рисунке данные в (5.18) и (5.23) и используя интерполяционные функции, приведенные на рис. 5.5, для элемента 1 получим

$$x = 3r; \quad y = 2s;$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

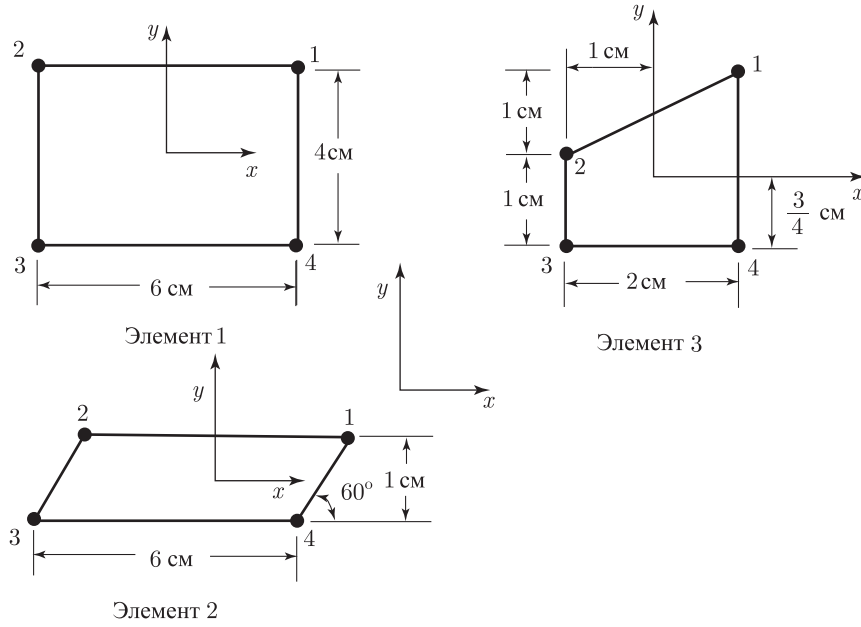


Рис. 5.9. Некоторые двумерные элементы

Аналогично этому для элемента 2 получим

$$x = \frac{1}{4} \left\{ (1+r)(1+s) \left(3 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) + (1-r)(1+s) \left(- \left(3 - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \right) + \right. \\ \left. + (1-r)(1-s) \left(- \left(3 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \right) + (1+r)(1-s) \left(3 - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \right\};$$

$$y = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{2}(1+r)(1+s) + \frac{1}{2}(1-r)(1+s) - \frac{1}{2}(1-r)(1-s) - \frac{1}{2}(1+r)(1-s) \right\}$$

и, следовательно,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Таким же образом для элемента 3 получаем

$$x = \frac{1}{4} [(1+r)(1+s)(1) + (1-r)(1+s)(-1) + (1-r)(1-s)(-1) + \\ + (1+r)(1-s)(+1)];$$

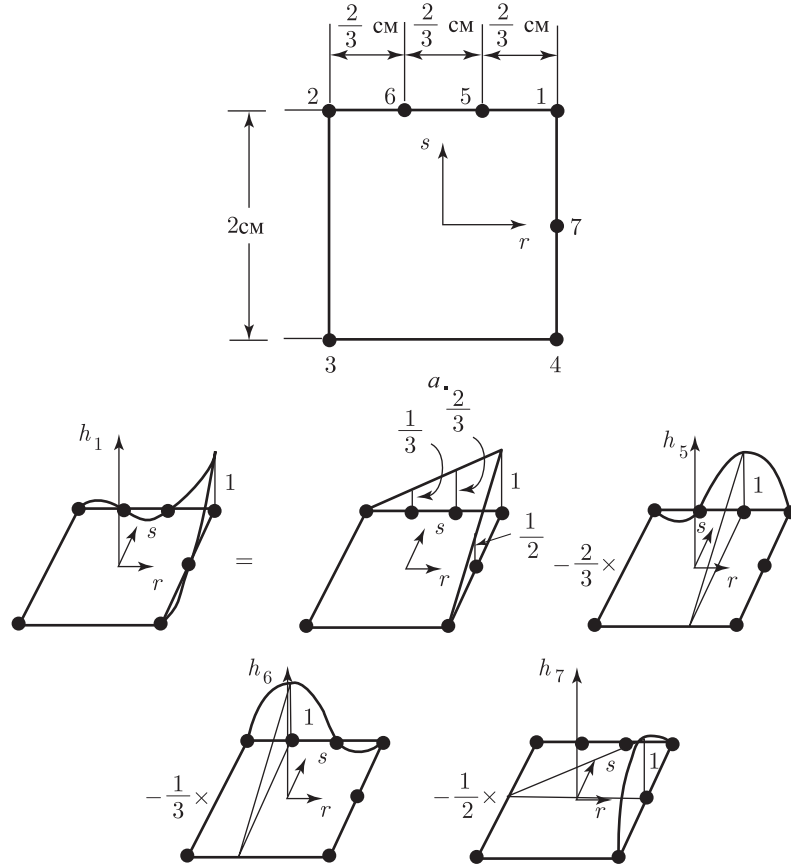
$$y = \frac{1}{4} \left(\frac{5}{4}(1+r)(1+s) + \frac{1}{4}(1-r)(1+s) - \frac{3}{4}(1-r)(1-s) - \frac{3}{4}(1+r)(1-s) \right),$$

и поэтому

$$\mathbf{J} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & (1+s) \\ 0 & (3+r) \end{bmatrix}.$$

Мы можем убедиться, что оператор Якоби для квадратного элемента 2×2 представляет собой матрицу тождественности, и что в операторе \mathbf{J} для элемента общего вида содержатся свои компоненты, выражающие степень искажения данного элемента по сравнению с квадратным элементом 2×2 . Если учесть, что искажение в любой точке (r, s) элементов 1 и 2 является постоянным, то и оператор \mathbf{J} для этих элементов будет постоянным.

Пример 5.4: Требуется определить интерполяционные функции для двумерного элемента, показанного на рис. 5.11.



б. Построение h_1

Рис. 5.10. Элемент с семью узлами

Индивидуальные функции получают путем комбинирования базовых линейных, параболических и кубических интерполяций, соответствующих направлениям r и s . Так, например, используя функции, приведенные на рис. 5.4, получим

$$\begin{aligned}
 h_5 &= \left[\frac{1}{16} (-27r^3 - 9r^2 + 27r + 9) \right] \left[\frac{1}{2} (1 + s) \right]; \\
 h_6 &= \left[(1 - r^2) + \frac{1}{16} (27r^3 + 7r^2 - 27r - 7) \right] \left[\frac{1}{2} (1 + s) \right]; \\
 h_2 &= \left[\frac{1}{2} (1 - r) - \frac{1}{2} (1 - r^2) + \frac{1}{16} (-9r^3 + r^2 + 9r - 1) \right] \left[\frac{1}{2} (1 + s) \right]; \\
 h_3 &= \frac{1}{4} (1 - r)(1 - s); \\
 h_7 &= \frac{1}{2} (1 - s^2)(1 + r); \\
 h_4 &= \frac{1}{4} (1 + r)(1 - s) - \frac{1}{2} h_7;
 \end{aligned}$$

$$h_1 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s) - \frac{2}{3}h_5 - \frac{1}{3}h_6 - \frac{1}{2}h_7,$$

где h_1 строится так, как это показано в изометрической проекции на рис. 5.10.

Пример 5.5: Требуется вывести выражения, нужные для расчета матрицы жесткости для изопараметрического конечного элемента, имеющего четыре узла и показанного на рис. 5.11. Предположите, что имеют место условия плоских напряжений или плоских деформаций.

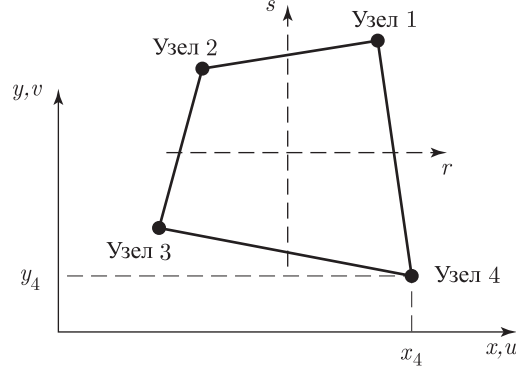


Рис. 5.11. Двумерный элемент с четырьмя узлами

Если использовать интерполяционные функции h_1 , h_2 , h_3 и h_4 , приведенные на рис. 5.5, то в соответствии с формулами (5.18) координатная интерполяция для этого элемента имеет вид

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4}(1+r)(1+s)x_1 + \frac{1}{4}(1-r)(1+s)x_2 + \frac{1}{4}(1-r)(1-s)x_3 + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)x_4, \\ y &= \frac{1}{4}(1+r)(1+s)y_1 + \frac{1}{4}(1-r)(1+s)y_2 + \frac{1}{4}(1-r)(1-s)y_3 + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)y_4. \end{aligned}$$

В соответствии с (5.19) интерполяция по смещениям принимает форму

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{4}(1+r)(1+s)u_1 + \frac{1}{4}(1-r)(1+s)u_2 + \frac{1}{4}(1-r)(1-s)u_3 + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)u_4, \\ v &= \frac{1}{4}(1+r)(1+s)v_1 + \frac{1}{4}(1-r)(1+s)v_2 + \frac{1}{4}(1-r)(1-s)v_3 + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)v_4. \end{aligned}$$

Деформации элемента задаются выражением

$$\boldsymbol{\epsilon}^T = [\epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad \gamma_{xy}],$$

где

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Желая вычислить производные для смещений, нам нужно воспользоваться соотношениями (5.23):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{J} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}},$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \frac{1}{4}(1+s)x_1 - \frac{1}{4}(1+s)x_2 - \frac{1}{4}(1-s)x_3 + \frac{1}{4}(1-s)x_4, \\ \frac{\partial x}{\partial s} &= \frac{1}{4}(1+r)x_1 + \frac{1}{4}(1-r)x_2 - \frac{1}{4}(1-r)x_3 - \frac{1}{4}(1+r)x_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial r} &= \frac{1}{4}(1+s)y_1 - \frac{1}{4}(1+s)y_2 - \frac{1}{4}(1-s)y_3 + \frac{1}{4}(1-s)y_4, \\ \frac{\partial y}{\partial s} &= \frac{1}{4}(1+r)y_1 + \frac{1}{4}(1-r)y_2 - \frac{1}{4}(1-r)y_3 - \frac{1}{4}(1+r)y_4.\end{aligned}$$

Используя приведенные выше выражения для $\partial x/\partial r$, $\partial x/\partial s$, $\partial y/\partial x$ и $\partial y/\partial s$ при любых значениях r и s , $-1 \leq r \leq +1$ и $-1 \leq s \leq +1$, мы можем сформулировать оператор Якоби \mathbf{J} . Предположим, что мы вычислили \mathbf{J} при $r = r_i$ и $s = s_j$, и обозначим получаемый оператор символом \mathbf{J}_{ij} , а его определитель — символом $\det \mathbf{J}_{ij}$. Тогда будем иметь

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}_{\text{при } \substack{r=r_i \\ s=s_j}} = \mathbf{J}_{ij}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix}_{\text{при } \substack{r=r_i \\ s=s_j}}.$$

Для вычисления деформаций элемента используем выражения

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{4}(1+s)u_1 - \frac{1}{4}(1+s)u_2 - \frac{1}{4}(1-s)u_3 + \frac{1}{4}(1-s)u_4, \\ \frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{1}{4}(1+r)u_1 + \frac{1}{4}(1-r)u_2 - \frac{1}{4}(1-r)u_3 - \frac{1}{4}(1+r)u_4, \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{1}{4}(1+s)v_1 - \frac{1}{4}(1+s)v_2 - \frac{1}{4}(1-s)v_3 + \frac{1}{4}(1-s)v_4, \\ \frac{\partial v}{\partial s} &= \frac{1}{4}(1+r)v_1 + \frac{1}{4}(1-r)v_2 - \frac{1}{4}(1-r)v_3 - \frac{1}{4}(1+r)v_4.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix}_{\text{при } \substack{r=r_i \\ s=s_j}} = \frac{1}{4} \mathbf{J}_{ij}^{-1} \begin{bmatrix} 1+s_j & 0 & -(1+s_j) & 0 & -(1-s_j) & 0 & 1-s_j & 0 \\ 1+r_i & 0 & 1-r_i & 0 & -(1-r_i) & 0 & -(1+r_i) & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}, \quad (\text{a})$$

а также

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}_{\text{при } \substack{r=r_i \\ s=s_j}} = \frac{1}{4} \mathbf{J}_{ij}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1+s_j & 0 & -(1+s_j) & 0 & -(1-s_j) & 0 & 1-s_j \\ 0 & 1+r_i & 0 & 1-r_i & 0 & -(1-r_i) & 0 & -(1+r_i) \end{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}, \quad (\text{b})$$

где

$$\hat{\mathbf{u}}^T = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4].$$

Если вычислить соотношения в (a) и (b), то мы можем определить матрицу преобразования деформация–смещение в точке (r_i, s_j) ; следовательно, получим

$$\boldsymbol{\epsilon}_{ij} = \mathbf{B}_{ij} \hat{\mathbf{u}},$$

где индексы i и j указывают на то, что преобразование деформация–смещение вычисляется в точке (r_i, s_j) . Например, если $x = r$, $y = s$ (в этом случае матрица жесткости квадратного элемента обязательно имеет стороны длиной 2), то оператор Якоби представляет собой матрицу тождественности и, следовательно,

$$\mathbf{B}_{ij} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1+s_j & 0 & -(1+s_j) & 0 & -(1-s_j) & 0 & 1-s_j & 0 \\ 0 & 1+r_i & 0 & 1-r_i & 0 & -(1-r_i) & 0 & -(1+r_i) \\ 1+r_i & 1+s_j & 1-r_i & -(1+s_j) & -(1-r_i) & -(1-s_j) & -(1+r_i) & 1-s_j \end{bmatrix}.$$

Теперь матрица \mathbf{F}_{ij} из соотношения (5.30) выражается просто как

$$\mathbf{F}_{ij} = \mathbf{B}_{ij}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{ij} \det \mathbf{J}_{ij},$$

где матрица материальных свойств \mathbf{C} дается в табл. 4.3. Если имеют место условия плоских напряжений или плоских деформаций, то мы вычислим интегралы в плоскости r , s и будем предполагать, что функция \mathbf{F} остается постоянной по всей толщине элемента. На этом основании матрица жесткости элемента имеет вид

$$\mathbf{K} = \sum_{i,j} t_{ij} \alpha_{ij} \mathbf{F}_{ij},$$

где t_{ij} — это толщина рассматриваемого элемента в выбранной точке (r_i, s_j) (при условии плоских деформаций имеем $t_{ij} = 1,0$). При приведенных нами выше выражениях для матриц \mathbf{F}_{ij} и при подобранных нами весовых множителях α_{ij} нетрудно рассчитать нужную нам матрицу жесткости.

В отношении практического воплощения изложенной методики следует заметить, что при вычислении \mathbf{J}_{ij} , а также матриц, определяющих производные смещений согласно (а) и (б), нам потребуется не более восьми производных от интерполяционных функций h_1, \dots, h_4 . Поэтому целесообразно вычислить эти производные, соответствующие точке (r_i, s_j) , один раз — в начале процесса определения \mathbf{B}_{ij} — и затем использовать их по мере надобности.

Следует также иметь в виду, что, если рассматривается конкретная точка (r_i, s_j) , то соотношения (а) и (б) могут быть записаны, соответственно, в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial x} u_i \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial y} u_i \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial x} v_i \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial y} v_i \end{aligned} \right\}. \quad (d)$$

Следовательно, получим

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial y} \\ \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_3}{\partial y} & \frac{\partial h_3}{\partial x} & \frac{\partial h_4}{\partial y} & \frac{\partial h_4}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (e)$$

где подразумевается, что в соотношениях (с) и (d) производные вычисляются в точке (r_i, s_j) , а поэтому формула (е) определяет собой, фактически, матрицу \mathbf{B}_{ij} .

Пример 5.6: Требуется вывести выражения, нужные для вычисления матрицы масс для элемента, рассмотренного в примере 5.5.

Матрица масс данного элемента выражается формулой

$$\mathbf{M} = \sum_{i,j} \alpha_{ij} t_{ij} \mathbf{F}_{ij},$$

где

$$\mathbf{F}_{ij} = \rho_{ij} \mathbf{H}_{ij}^T \mathbf{H}_{ij} \det \mathbf{J}_{ij},$$

а \mathbf{H}_{ij} — это матрица интерполяции смещений. Интерполяционные функции смещений по u и v для элемента с четырьмя узлами были приведены в примере 5.5, и мы имеем

$$\mathbf{H}_{ij} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1+r_i)(1+s_j) & 0 & (1-r_i)(1+s_j) & 0 \\ 0 & (1+r_i)(1+s_j) & 0 & (1-r_i)(1+s_j) \\ (-r_i)(1-s_j) & 0 & (1+r_i)(1-s_j) & 0 \\ 0 & (1-r_i)(1-s_j) & 0 & (1+r_i)(1-s_j) \end{bmatrix}.$$

Определитель матрицы Якоби, $\det \mathbf{J}_{ij}$, был приведен в примере 5.5, а ρ_{ij} — это массовая плотность в заданной точке (r_i, s_j) . Таким образом, теперь определены все необходимые переменные величины для вычисления матрицы масс.

Пример 5.7: Требуется вывести выражения, нужные для вычисления вектора массовых сил \mathbf{R}_B и вектора начальных напряжений \mathbf{R}_I для элемента, рассмотренного в примере 5.5.

Указанные векторы определяются с использованием матриц \mathbf{H}_{ij} , \mathbf{B}_{ij} и \mathbf{J}_{ij} , полученных в примерах 5.5 и 5.6; это означает, что мы имеем

$$\mathbf{R}_B = \sum_{i,j} \alpha_{ij} t_{ij} \mathbf{H}_{ij}^T \mathbf{f}_{ij}^B \det \mathbf{J}_{ij},$$

$$\mathbf{R}_I = \sum_{i,j} \alpha_{ij} t_{ij} \mathbf{B}_{ij}^T \boldsymbol{\tau}_{ij}^I \det \mathbf{J}_{ij},$$

где \mathbf{f}_{ij}^B и $\boldsymbol{\tau}_{ij}^I$ — это, соответственно, векторы массовых сил и начальных напряжений, вычисленные по расчетным точкам для интегрирования.

Пример 5.8: Требуется вывести выражения, нужные для вычисления вектора поверхностных сил \mathbf{R}_S тогда, когда кромка 1–2 изопараметрического элемента с четырьмя узлами, рассмотренного в примере 5.5, нагружена так, как это показано на рис. 5.12.

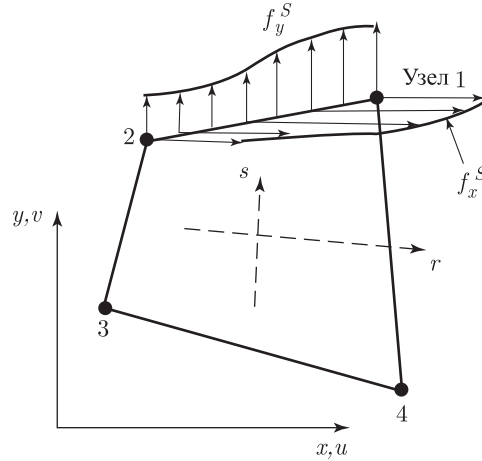


Рис. 5.12. Распределение натяжений вдоль кромки 1–2 элемента с четырьмя узлами

Первый шаг состоит в задании интерполяций по смещениям. Учитывая, что на кромке 1–2 имеем $s = +1$, то при использовании интерполяционных функций, приведенных в примере 5.5, получим

$$u^S = \frac{1}{2}(1+r)u_1 + \frac{1}{2}(1-r)u_2,$$

$$v^S = \frac{1}{2}(1+r)v_1 + \frac{1}{2}(1-r)v_2.$$

Следовательно, для вычисления \mathbf{R}_S по формуле (5.34) мы можем использовать

$$\mathbf{H}^S = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+r) & 0 & \frac{1}{2}(1-r) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1+r) & 0 & \frac{1}{2}(1-r) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и

$$\mathbf{f}^S = \begin{bmatrix} f_x^S \\ f_y^S \end{bmatrix},$$

где f_x^S и f_y^S — это, соответственно, x - и y -составляющие приложенной к элементу поверхностной силы. Эти составляющие могут быть заданы в виде функций от r .

Для вычисления интеграла в формуле (5.34) нам нужно выразить также дифференциал площади поверхности dS в естественной системе координат r, s . Если t_r — это толщина элемента, то $dS = t_r dl$, где dl — это дифференциальная длина.

Производные $\partial x/\partial r$ и $\partial y/\partial r$ были уже, однако, приведены в примере 5.5. Если использовать равенство $s = +1$, то в данном случае будем иметь

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{x_1 - x_2}{2}; \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{y_1 - y_2}{2}.$$

Несмотря на то, что вектор \mathbf{R}_S в данном случае может быть определен путем решения в замкнутой форме (если только функции, используемые для выражения \mathbf{f}^S , достаточно просты), все же для поддержания общности в программе для расчета \mathbf{R}_S целесообразно использовать численное интегрирование. Если следовать такому пути, то одна программа может элегантно охватить и элементы с переменным числом узлов. Таким образом, используя введенные нами ранее в этом разделе обозначения, получим

$$\mathbf{R}_S = \sum_i \alpha_i t_{ri} \mathbf{F}_i,$$

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{H}_i^{ST} \mathbf{f}_i^S \det \mathbf{J}_i^S.$$

Следует отметить, что в рассматриваемом случае требуется выполнять только одномерное численное интегрирование, так как величина s не является переменной.

Пример 5.9: Требуется объяснить, как должны быть видоизменены выражения, приведенные в примерах 5.5–5.7, если рассматриваемый элемент имеет осесимметричную форму.

В этом случае необходимо произвести две модификации. Во-первых, будем рассматривать 1 радиан всей данной конструкции. Следовательно, и толщина, которую следует вводить во все интегрирования, это именно та, которая соответствует одному радиану, а это означает, что в точке интегрирования толщина равна радиусу в той же точке:

$$t_{ij} = \sum_{k=1}^4 h_k \Big|_{r_i, s_j} x_k. \quad (\text{a})$$

Во-вторых, следует иметь в виду, что здесь возникают также деформации и напряжения в окружном направлении (см. табл. 4.2). Следовательно, матрица деформация–смещение должна быть увеличена на одну строку, чтобы включить окружную деформацию u/R ; иначе говоря, мы имеем

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \dots & & & & \dots \\ \frac{h_1}{t} & 0 & \frac{h_2}{t} & 0 & \frac{h_3}{t} & 0 & \frac{h_4}{t} & 0 \\ \dots & & & & \dots \end{bmatrix}, \quad (\text{b})$$

где три первых строки уже были определены в примере 5.5, а величина t равна радиусу. Чтобы получить матрицу деформация–смещение в точке интегрирования (i, j) , мы используем (а) для вычисления t и результат подставляем в (b).

Пример 5.10: Требуется вычислить силы в узловых точках для показанного на рис. 5.13 осесимметричного конечного элемента с четырьмя узлами, если данный элемент подвергается центробежной нагрузке.

Здесь нам требуется вычислить

$$\mathbf{R}_B = \int_V \mathbf{H}^T \mathbf{f}^B dV,$$

где

$$f_x^B = \rho \omega^2 R; \quad f_y^B = 0;$$

$$R = \frac{1}{2} (1 - r) R_0 + \frac{1}{2} (1 + r) R_1;$$

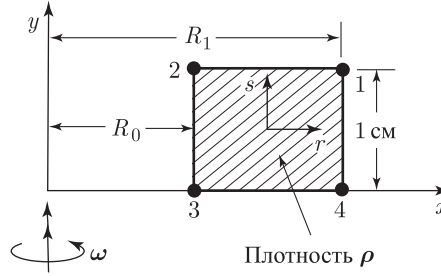


Рис. 5.13. Осесимметричный элемент с четырьмя узлами, вращающийся с угловой скоростью ω (радиан/с)

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{R_1 - R_0}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

тогда как величины h_i определены на рис. 5.5. Кроме того, если рассматривается 1 радиан, то

$$dV = \det \mathbf{J} dr ds R = \left(\frac{R_1 - R_0}{4} \right) dr ds \left(\frac{R_1 + R_0}{2} + \frac{R_1 - R_0}{2} r \right).$$

Следовательно,

$$\mathbf{R}_B = \frac{\rho \omega^2 (R_1 - R_0)}{64} \int_{r=-1}^{+1} \int_{s=-1}^{+1} \begin{bmatrix} (1+r)(1+s) & 0 \\ 0 & (1+r)(1+s) \\ (1-r)(1+s) & 0 \\ 0 & (1-r)(1+s) \\ (1-r)(1-s) & 0 \\ 0 & (1-r)(1-s) \\ (1+r)(1-s) & 0 \\ 0 & (1+r)(1-s) \end{bmatrix} \times \\ \times [(R_1 + R_0) + (R_1 - R_0)r]^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dr ds.$$

Если положить $A = R_1 + R_0$ и $B = R_1 - R_0$, то будем иметь

$$\mathbf{R}_B = \frac{\rho \omega^2 B}{64} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} (6A^2 + 4AB + 2B^2) \\ 0 \\ \frac{2}{3} (6A^2 - 4AB + 2B^2) \\ 0 \\ \frac{2}{3} (6A^2 - 4AB + 2B^2) \\ 0 \\ \frac{2}{3} (6A^2 + 4AB + 2B^2) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Пример 5.11: Показанный на рис. 5.14 элемент с плоскими напряжениями и с четырьмя узлами подвергается воздействию заданного распределения температуры. Если θ_0 — это температура, соответствующая ненапряженному состоянию, то требуется

вычислить такие силы в узловых точках, которые должны воздействовать на элемент так, чтобы в узловых точках смещения были равны нулю.

Толщина элемента 1 см
 Модуль Юнга E
 Коэффициент Пуассона ν
 Коэффициент теплового
 расширения α

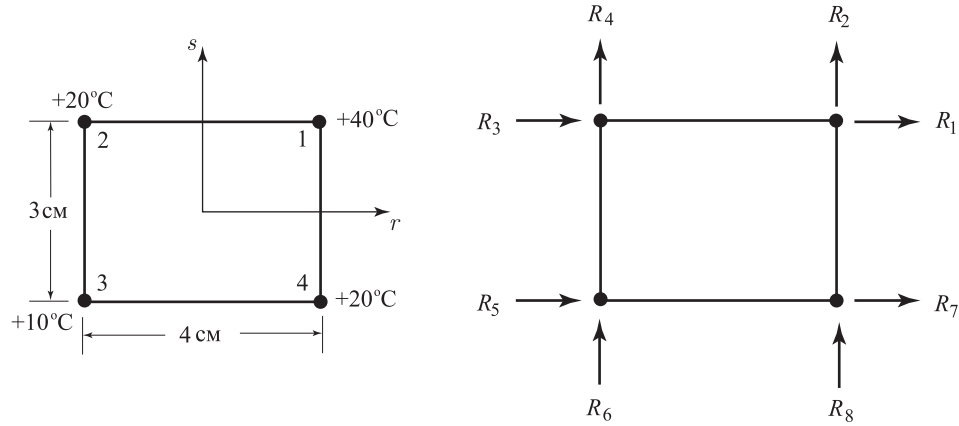


Рис. 5.14. Силы в узловых точках, обусловленные начальным распределением температуры

В данном случае для полных напряжений, обусловленных полными деформациями ϵ и тепловыми деформациями ϵ^{th} , имеем выражение

$$\tau = \mathbf{C}(\epsilon - \epsilon^{\text{th}}), \quad (\text{a})$$

где $\epsilon_{xx}^{\text{th}} = \alpha(\theta - \theta_0)$, $\epsilon_{yy}^{\text{th}} = \alpha(\theta - \theta_0)$, $\gamma_{xy}^{\text{th}} = 0$. Если смещения в узловых точках равны нулю, то мы имеем $\epsilon = 0$, и напряжения, обусловленные тепловыми деформациями, могут рассматриваться как начальные напряжения. В таком случае силы в узловых точках выражаются, как

$$\mathbf{R}_I = \int_V \mathbf{B}^T \tau^I dV,$$

$$\tau' = -\frac{E\alpha}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left\{ \left(\sum_{i=1}^4 h_i \theta_i \right) - \theta_0 \right\},$$

тогда как h_i — это интерполяционные функции, определенные на рис. 5.5. Кроме того,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}; \quad \det \mathbf{J} = 3;$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1+s}{8} & 0 & -\frac{1+s}{8} & 0 & -\frac{1-s}{8} & 0 & \frac{1-s}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1+r}{6} & 0 & \frac{1-r}{6} & 0 & -\frac{1-r}{6} & 0 & -\frac{1+r}{6} \\ \frac{1+r}{6} & \frac{1+s}{8} & \frac{1-r}{6} & -\frac{1+s}{8} & \frac{1-r}{6} & -\frac{1-s}{8} & -\frac{1+r}{6} & \frac{1-s}{8} \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{R}_I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} - \begin{bmatrix} \frac{1+s}{8} & 0 & \frac{1+r}{6} \\ 0 & \frac{1+r}{6} & \frac{1+s}{8} \\ -\frac{1+s}{8} & 0 & \frac{1-r}{6} \\ 0 & \frac{1-r}{6} & -\frac{1+s}{8} \\ -\frac{1-s}{8} & 0 & -\frac{1-r}{6} \\ 0 & -\frac{1-r}{6} & -\frac{1-s}{8} \\ \frac{1-s}{8} & 9 & -\frac{1+r}{6} \\ 0 & -\frac{1+r}{6} & \frac{1-s}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+\nu \\ 1+\nu \\ 0 \end{bmatrix} \frac{E\alpha}{1-\nu^2} \times \\ \times [2,5(s+3)(r+3) - \theta_0] 3 dr ds, \\ \mathbf{R}_I = -\frac{E\alpha}{(1-\nu)} \begin{bmatrix} 37,5 - 1,5\theta_0 \\ 50 - 2\theta_0 \\ -37,5 + 1,5\theta_0 \\ 40 - 2\theta_0 \\ -30 + 1,5\theta_0 \\ -40 + 2\theta_0 \\ +30 - 1,5\theta_0 \\ -50 + 2\theta_0 \end{bmatrix}.$$

Вычисление вектора начальных напряжений по описанной здесь схеме является типовым этапом при исследовании тепловых напряжений. При полном анализе тепловых напряжений температуры рассчитываются так, как это описано в разделе 7.2, векторы нагрузок на элемент, обусловленные тепловым воздействием, вычисляются так, как это иллюстрируется в данном примере, а затем решение уравнений равновесия (4.17) для всего комплекса элементов позволяет получить смещения в узловых точках. Полные деформации в элементе ϵ вычисляются по смещениям в узловых точках, после чего с помощью соотношения (а) рассчитываются окончательные значения напряжений в элементах.

Пример 5.12: Рассмотрим элементы, показанные на рис. 5.15. Требуется вычислить совместимые силы в узловых точках, соответствующие поверхностной нагрузке (будем предполагать, что силы в узловых точках имеют положительные значения, когда они действуют в направлении давления).

В данном случае мы желаем вычислить

$$\mathbf{R}_S = \int_S \mathbf{H}^{s^T} \mathbf{f}^S dS.$$

Вначале рассмотрим двумерный элемент. Если учесть, что на кромке 1–2 имеем $s = +1$, то, используя интерполяционные функции для элемента с восемью узлами (см. рис. 5.5), мы получим

$$h_5 = \frac{1}{2} (1 - r^2)(1 + s) \Big|_{s=+1} = 1 - r^2, \\ h_1 = \frac{1}{4} (1 + r)(1 + s)(r + s - 1) \Big|_{s=+1} = \frac{1}{2} r(1 + r),$$

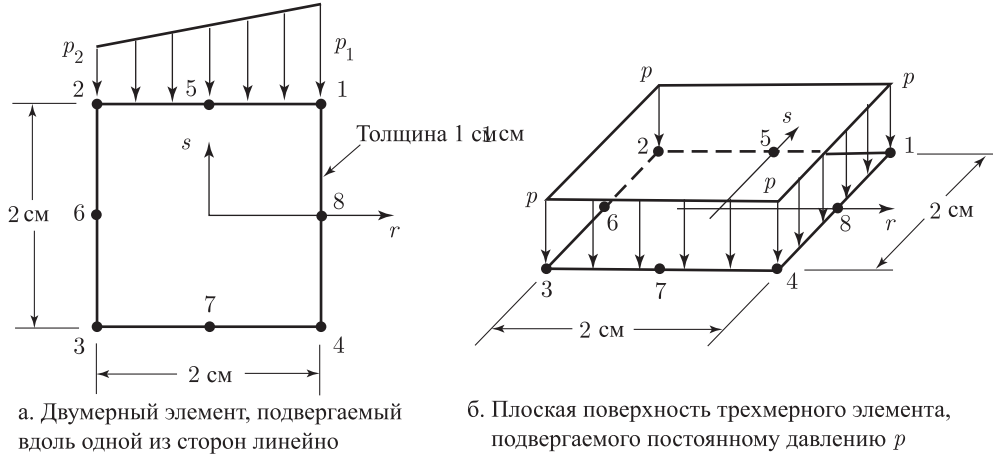


Рис. 5.15. Двумерный и трехмерный элементы, подвергаемые нагрузке в форме давления

$$h_2 = \frac{1}{4} (1-r)(1+s)(s-r-1)|_{s=+1} = -\frac{1}{2} r(1-r),$$

а эти функции совпадают с интерполяционными функциями для стержня с тремя узлами, показанного на рис. 5.8. Следовательно, имеем

$$\begin{bmatrix} u^S \\ v^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} r(1+r) & 0 & -\frac{1}{2} r(1-r) & 0 & (1-r^2) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} r(1+r) & 0 & -\frac{1}{2} r(1-r) & 0 & (1-r^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_5 \\ v_5 \end{bmatrix}.$$

Кроме того,

$$\mathbf{f}^S = \begin{bmatrix} f_r^S \\ f_s^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} (1+r)p_1 + \frac{1}{2} (1-r)p_2 \end{bmatrix}; \quad \det \mathbf{J}^S = 1.$$

Следовательно,

$$\mathbf{R}_S = \int_{-1}^{+1} \frac{t}{2} \begin{bmatrix} r(1+r) & 0 \\ 0 & r(1+r) \\ -r(1-r) & 0 \\ 0 & -r(1-r) \\ 2(1-r^2) & 0 \\ 0 & 2(1-r^2) \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ (1+r)p_1 + (1-r)p_2 \end{bmatrix} dr,$$

$$\mathbf{R}_S = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ p_1 \\ 0 \\ p_2 \\ 0 \\ 2(p_1 + p_2) \end{bmatrix}. \quad (\text{a})$$

При исследовании трехмерного элемента мы будем действовать аналогичным образом. Если учесть, что поверхность плоская, а нагрузка направлена по нормали к ней, то отличными от нуля будут только те силы в узловых точках, которые направлены по

нормали к поверхности [см. также соотношение (a)]. Кроме того, вследствие симметрии мы знаем, что силы в узлах 1, 2, 3, 4 и 5, 6, 7, 8, соответственно, равны между собой. Используя интерполяционные функции, приведенные на рис. 5.5, для силы в узле 1 получаем выражение

$$R_1 = p \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{4} (1+r)(1+s)(r+s-1) dr ds = -\frac{1}{3} p,$$

а для силы в узле 5 получаем

$$R_5 = p \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} (1-r^2)(1+s) dr ds = \frac{4}{3} p.$$

Суммарная нагрузка на поверхность, создаваемая давлением, равна $4p$, а как показывает проверка, эта величина равна сумме всех сил в узловых точках. Однако следует отметить, что совместимые силы в узловых точках, совпадающих с углами данного элемента, действуют в направлении, противоположном направлению движения!

Пример 5.13: Требуется рассчитать отклонение u_A для модельной конструкции, показанной на рис. 5.16.

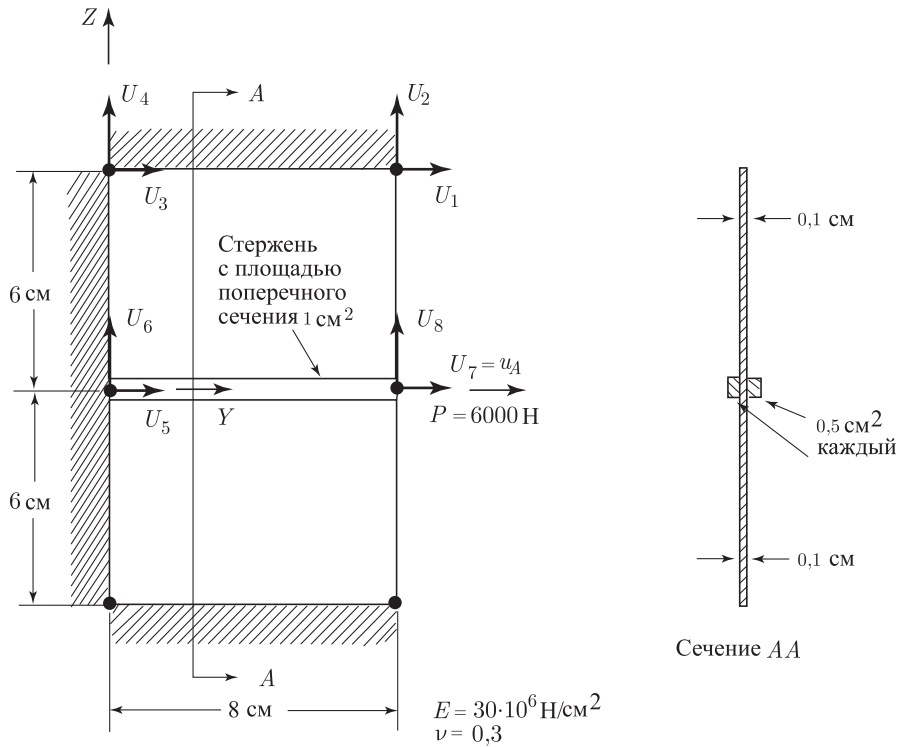


Рис. 5.16. Простая модельная конструкция

С учетом симметрии и граничных условий нам нужно вычислить только коэффициент жесткости, соответствующий u_A . В данном случае для элемента с четырьмя узлами имеем

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \frac{1}{48} \begin{bmatrix} 3(1-s) & & \\ \dots & 0 & \dots \\ & -4(1+r) & \end{bmatrix},$$

$$k_{77} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1}{48} \right)^2 \frac{E}{1-\nu^2} [3(1-s) \ 0 \ -4(1+r)] \begin{bmatrix} 3(1-s) \\ 3\nu(1-s) \\ -2(1-\nu)(1+r) \end{bmatrix} \times (12)(0,1) dr ds,$$

или $k_{77} = 1\,336\,996,34 \text{ Н/см}$. Далее, жесткость фермы равна AE/L , или

$$k = \frac{(1)(30 \times 10^6)}{8} = 3\,750\,000 \text{ Н/см}.$$

Следовательно, $k_{\text{полное}} = 6,424 \times 10^6 \text{ Н/см}$ и $u_A = 9,34 \times 10^{-4} \text{ см}$.

Пример 5.14: Рассмотрим показанный на рис. 5.17 элемент с пятью узлами. Требуется вычислить совместимые силы в узловых точках, соответствующие заданным напряжениям.

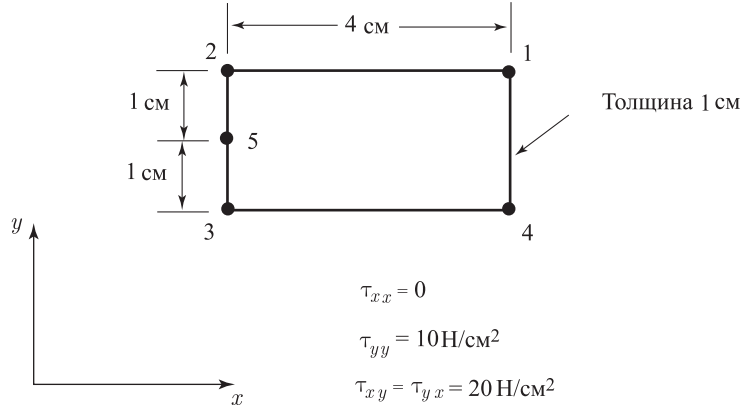


Рис. 5.17. Элемент с пятью узлами при заданных напряжениях

Используя интерполяционные функции, приведенные на рис. 5.5, мы можем вычислить матрицу деформация–смещение для данного элемента:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} (1+s) & 0 & -s(1+s) & 0 & s(1-s) \\ 0 & 2(1+r) & 0 & 2(1-r)(1+2s) & 0 \\ 2(1+r) & (1+s) & 2(1-r)(1+2s) & -s(1+s) & -2(1-r)(1-2s) \\ 0 & (1-s) & 0 & -2(1-s^2) & 0 \\ -2(1-r)(1-2s) & 0 & -2(1+r) & 0 & -8(1-r)s \\ s(1-s) & -2(1+r) & (1-s) & -8(1-r)s & -2(1-s^2) \end{bmatrix},$$

где мы использовали

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Теперь искомые силы в узловых точках могут быть вычислены по формуле (5.35); следовательно,

$$\mathbf{R}_I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} (2) dr ds,$$

а это дает

$$\mathbf{R}_I^T = \begin{bmatrix} 40 & 40 & 40 & \frac{40}{3} & -40 & -\frac{80}{3} & -40 & 0 & 0 & -\frac{80}{3} \end{bmatrix}.$$

Следует отметить, что силы, из которых складывается этот вектор, также оказываются равными тем совместимым силам в узловых точках, которые соответствуют (постоянным) поверхностным сдвиговым силам, находящимся в равновесии со внутренними напряжениями, приведенными на рис. 5.17.

Ранее мы уже кратко упоминали о возможности использования *субпараметрических* элементов: в этих элементах геометрия интерполируется с более низкой степенью, чем смещения. В приведенных выше примерах узлы, соответствующие интерполяционным функциям наивысшего порядка (узлы 5 и выше для двумерных элементов), всегда располагались на своих «естественных» местах, так что матрица Якоби была бы такой же, как если бы для геометрической интерполяции использовались только «базовые» функции низкого порядка. Следовательно, в этом случае субпараметрический двумерный элемент, использующий только четыре угловых узла для интерполяции геометрической формы, дает те же самые элементные матрицы, что и изопараметрический элемент. В частности, в примере 5.14 матрица Якоби \mathbf{J} осталась бы такой же, как и при использовании только базовых четырехузловых интерполяционных функций, а следовательно, и вектор \mathbf{R}_I для субпараметрического элемента (использующего четыре угловых узла для геометрической интерполяции и пять узлов для интерполяции смещений) был бы тем же самым, что и для изопараметрического элемента с пятью узлами.

Однако, хотя применение субпараметрических элементов несколько уменьшает объем вычислительной работы, но оно также и делает менее общим характер конечно-элементной дискретизации, а также приводит к значительным усложнениям процедуры решения при анализе элементов с нелинейной геометрией (когда новая геометрия элемента получается путем добавления смещений к прежней геометрии; см. главу 6).

5.3.2. Треугольные элементы

В предыдущем разделе мы обсудили четырехугольные изопараметрические элементы, которые могут использоваться для моделирования геометрических форм весьма общего характера. Однако в некоторых случаях может оказаться привлекательным использование треугольных или клиновидных элементов. Треугольные элементы могут формулироваться с помощью различных подходов, которые мы вкратце и обсудим в данном разделе.

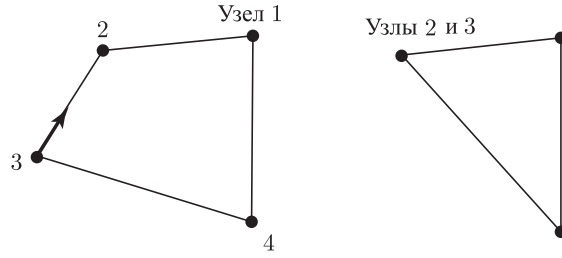
Треугольные элементы, образуемые путем разрушения четырехугольных элементов

Если учесть рассмотренную в разделе 5.3.1 возможность искажения элементов, как это и показано, например, на рис. 5.2, то естественным путем создания треугольных элементов представляется простое искажение базового четырехугольного элемента вплоть до придания ему требуемой треугольной формы (см. рис. 5.18). Это достигается на практике путем совмещения двух угловых узлов рассматриваемого элемента в одном и том же глобальном узле. Мы демонстрируем эту процедуру на приводимом ниже примере.

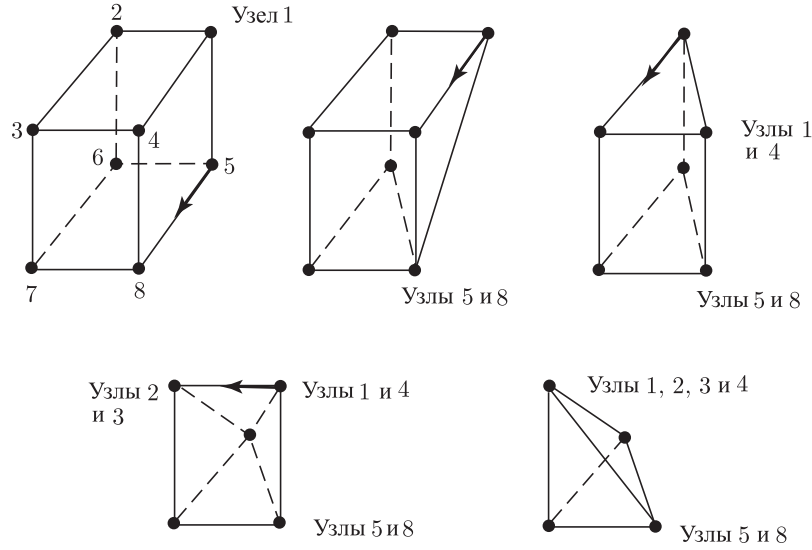
Пример 5.15: Требуется показать, что путем разрушения стороны 1–2 показанного на рис. 5.19 четырехугольного элемента с четырьмя узлами получается треугольник с постоянной деформацией.

Используя приведенные на рис. 5.5 интерполяционные функции, мы получим

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4}(1+r)(1+s)x_1 + \frac{1}{4}(1-r)(1+s)x_2 + \frac{1}{4}(1-r)(1-s)x_3 + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)x_4, \\ y &= \frac{1}{4}(1+r)(1+s)y_1 + \frac{1}{4}(1-r)(1+s)y_2 + \frac{1}{4}(1-r)(1-s)y_3 + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)y_4. \end{aligned}$$



а. Вырождение двумерного элемента с 4-мя узлами в элемент с 3-мя узлами



б. Вырожденные формы трехмерного элемента с 8-ю узлами

Рис. 5.18. Вырожденные формы элементов с 4-мя и с 8-ю узлами, рассмотренных на рисунках 5.5 и 5.6

Теперь, если использовать условия $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$, то получим

$$x = \frac{1}{2}(1+s)x_2 + \frac{1}{4}(1-r)(1-s)x_3 + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)x_4,$$

$$y = \frac{1}{2}(1+s)y_2 + \frac{1}{4}(1-r)(1-s)y_3 + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)y_4,$$

и, следовательно, при узловых координатах, заданных на рис. 5.19,

$$x = \frac{1}{2}(1+r)(1-s),$$

$$y = 1+s.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{1}{2}(1-s) \quad \frac{\partial y}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = -\frac{1}{2}(1+r) \quad \frac{\partial y}{\partial s} = 1$$

$$; \quad \mathbf{J} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1-s) & 0 \\ -(1+r) & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{1-s} & 0 \\ \frac{1+r}{1-s} & 1 \end{bmatrix}.$$

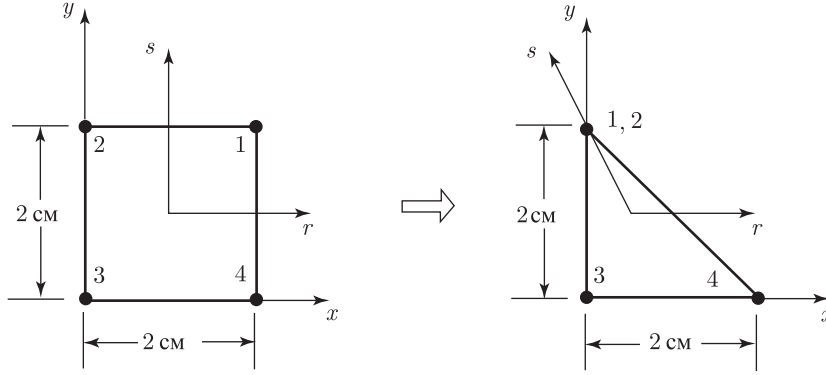


Рис. 5.19. Разрушение элемента с плоскими напряжениями, имеющего 4 узла, с превращением его в треугольный элемент

Если воспользоваться предположением об изопараметричности, то мы имеем также

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{2}(1+s)u_2 + \frac{1}{4}(1-r)(1-s)u_3 + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)u_4; \\
 v &= \frac{1}{2}(1+s)v_2 + \frac{1}{4}(1-r)(1-s)v_3 + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)v_4; \\
 \frac{\partial u}{\partial r} &= -\frac{1}{4}(1-s)u_3 + \frac{1}{4}(1-s)u_4; \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{4}(1-s)v_3 + \frac{1}{4}(1-s)v_4; \\
 \frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{4}(1-r)u_3 - \frac{1}{4}(1+r)u_4; \quad \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{4}(1-r)v_3 - \frac{1}{4}(1+r)v_4; \\
 \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} &= \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{1-s} & 0 \\ \frac{1+r}{1-s} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{4}(1-s) & 0 & \frac{1}{4}(1-s) & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4}(1-r) & 0 & -\frac{1}{4}(1+r) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

и

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ \vdots \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}.$$

Аналогично этому

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ \vdots \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, получим

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}.$$

Для любых значений u_2, v_2, u_3, v_3 и u_4, v_4 вектор деформации остается постоянным и не зависящим от r, s . Таким образом, построенный треугольный элемент является треугольником постоянной деформации.

В приведенном выше примере мы рассмотрели только один частный случай. Однако если использовать тот же самый подход, то становится очевидным, что разрушение любой из сторон элемента с плоскими напряжениями или с плоскими деформациями, имеющего четыре узла, всегда будет иметь своим результатом получение треугольника постоянной деформации.

При рассмотрении процесса разрушения одной из сторон элемента интересно отметить, что в схеме, используемой в примере 5.15, матрица \mathbf{J} оказывается особенной при $s = +1$, но что эта особенность исчезает, когда вычисляется матрица деформация–смещение. Если в компьютерную программу заложена общая схема для четырехузловых элемента, предназначенная для формирования треугольника постоянной деформации (как в примере 5.15), то практическое следствие вышеупомянутого поведения состоит в том, что напряжения не нужно вычислять в тех двух локальных узлах, которые были предписаны одному и тому же глобальному узлу (если учесть, что напряжения во всем элементе оказываются постоянными, то их удобно вычислять в центре элемента, т.е. при $r = 0, s = 0$).

Та же самая процедура может быть применена и при трехмерном анализе с тем, чтобы базовый элемент с восемью узлами превратить в элемент, имеющий форму клина или тетраэдра. Эта процедура иллюстрируется на рис. 5.18 и на приводимом ниже примере.

Пример 5.16: Требуется показать, что трехмерный элемент в форме тетраэдра, сформированный на рис. 5.20 из трехмерного «кирпичика» с восемью узлами, является элементом постоянной деформации.

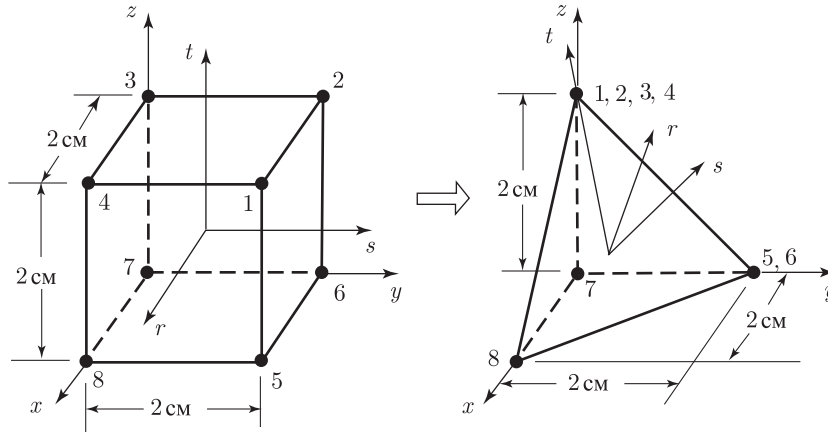


Рис. 5.20. Разрушение элемента в форме кирпичика с 8-ю узлами и превращение его в тетраэдральный элемент 1 см

Здесь мы действуем в той же последовательности, что и в примере 5.15. Так, если использовать интерполяционные функции для элемента в форме кирпича (см. рис. 5.6) и подставить в них координаты узловых точек тетраэдра, то получим

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{4}(1+r)(1-s)(1-t), \\y &= \frac{1}{2}(1+s)(1-t), \\z &= 1+t.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1-s)(1-t) & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4}(1+r)(1-t) & \frac{1}{2}(1-t) & 0 \\ -\frac{1}{4}(1+r)(1-s) & -\frac{1}{2}(1+s) & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{(1-s)(1-t)} & 0 & 0 \\ \frac{2(1+r)}{(1-s)(1-t)} & \frac{2}{1-t} & 0 \\ \frac{2(1+r)}{(1-s)(1-t)} & \frac{1+s}{1-t} & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{a})$$

Если использовать те же самые интерполяционные функции для u , а также условия: $u_1 = u_2 = u_3 = u_4$ и $u_5 = u_6$, то мы получим

$$u = h_4^* u_4 + h_5^* u_5 + h_7^* u_7 + h_8^* u_8,$$

причем

$$\begin{aligned}h_4^* &= \frac{1}{2}(1+r); \quad h_5^* = \frac{1}{4}(1+s)(1-t); \\h_7^* &= \frac{1}{8}(1-r)(-s)(1-t); \quad h_8^* = \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-t).\end{aligned}$$

Аналогичным образом получим также

$$\begin{aligned}v &= h_4^* v_4 + h_5^* v_5 + h_7^* v_7 + h_8^* v_8, \\w &= h_4^* w_4 + h_5^* w_5 + h_7^* w_7 + h_8^* w_8.\end{aligned}$$

Если теперь вычислить производные смещений u , v и w по r , s и t и использовать выражение для \mathbf{J}^{-1} из (а), то мы получим

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & \frac{1}{2} & 0 & | & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 & | & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & | & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & | & 0 & 0 & \frac{1}{2} & | & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & | & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & | & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ w_4 \\ - \\ u_5 \\ v_5 \\ w_5 \\ - \\ u_7 \\ v_7 \\ w_7 \\ - \\ u_8 \\ v_8 \\ w_8 \end{bmatrix}.$$

Как видно отсюда, для любого из смещений в узловых точках деформации оказываются постоянными, а это означает, что данному элементу могут соответствовать только условия постоянной деформации.

Описанный здесь процесс разрушения одной из сторон элемента, или — в случае трехмерного анализа — некоторого числа сторон элемента, может привести непосредственно к формированию желаемого элемента, однако если применяются двумерные или трехмерные элементы высшего порядка, то могут понадобиться некоторые специальные соображения, касающиеся используемых интерполяционных функций. В частности, если применяются низкопорядковые элементы из числа показанных на рис. 5.18, то пространственно изотропные треугольные и клиновые элементы формируются автоматически, однако это не обязательно будет так, если используются элементы высокого порядка.

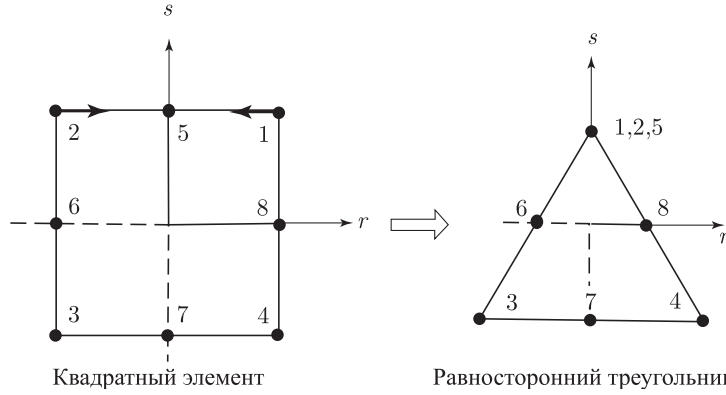


Рис. 5.21. Разрушение элемента с восемью узлами и превращение его в треугольник

В качестве примера рассмотрим треугольный двумерный элемент с шестью узлами, формируемый путем разрушения одной стороны элемента с восемью узлами так, как это показано на рис. 5.21. Если нужный нам треугольный элемент имеет стороны одинаковой длины, то нам может понадобиться, чтобы элемент был пространственно изотропным; иначе говоря, мы можем пожелать, чтобы внутренние смещения u и v в данном элементе изменялись одинаковым образом для каждого из узловых смещений в углах, а также, соответственно, и для каждого из узловых смещений в серединах сторон. Однако те интерполяционные функции, которые построены для треугольника в том случае, когда сторона 1-2-5 квадрата просто разрушается, не отвечают требованию о том, что мы должны иметь возможность изменить нумерацию вершин без изменения предположений о смещениях. Чтобы выполнить это требование, необходимо внести поправки в интерполяционные функции для узлов 3, 4 и 7 и, таким образом, получить окончательную форму интерполяционных функций h_i^* для треугольного элемента (см. упражнение 5.25):

$$\begin{aligned}
 h_1^* &= \frac{1}{2}(1+s) - \frac{1}{2}(1-s^2), \\
 h_3^* &= \frac{1}{4}(1-r)(1-s) - \frac{1}{4}(1-s^2)(1-r) - \frac{1}{4}(1-r^2)(1-s) + \Delta h, \\
 h_4^* &= \frac{1}{4}(1+r)(1-s) - \frac{1}{4}(1-r^2)(1-s) - \frac{1}{4}(1-s^2)(1+r) + \Delta h, \\
 h_6^* &= \frac{1}{2}(1-s^2)(1-r), \\
 h_7^* &= \frac{1}{2}(1-r^2)(1-s) - 2\Delta h, \\
 h_8^* &= \frac{1}{2}(1-s^2)(1+r),
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

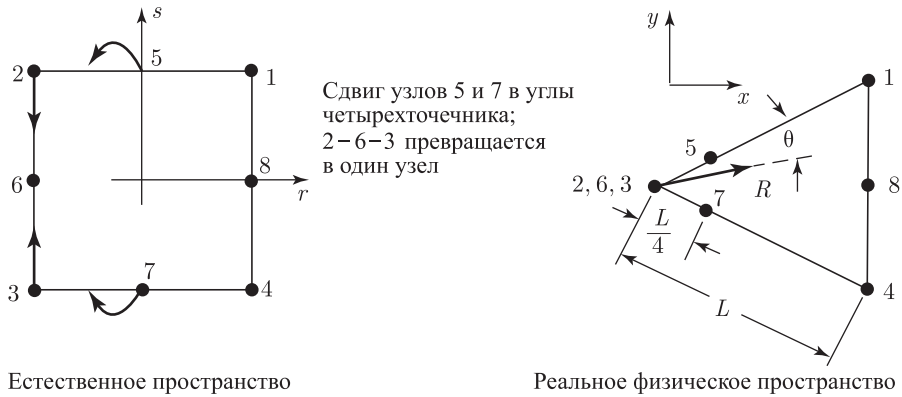
где мы добавили надлежащие интерполяционные функции, приведенные на рис. 5.5, и где

$$\Delta h = \frac{(1-r^2)(1-s^2)}{8}. \tag{5.37}$$

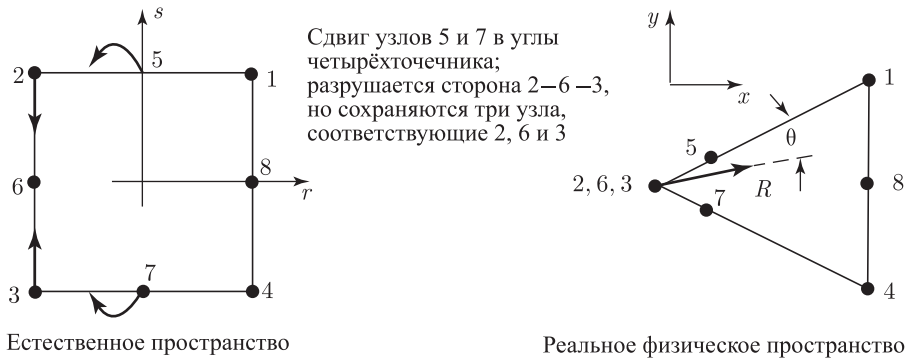
Таким образом, чтобы сформировать треугольный элемент высокого порядка путем разрушения стороны квадратного элемента, может оказаться необходимым внести поправки в выражения для используемых интерполяционных функций.

Треугольные элементы в механике разломов и трещин

В процессе предшествующего анализа мы предполагали, что желательно иметь пространственно изотропный элемент, так как этот элемент должен был быть использован в комплексе конечных элементов, предназначенном для расчета достаточно однородного поля напряжений. Однако в некоторых случаях должны прогнозироваться весьма специфические изменения напряжений, и при исследовании таких случаев более эффективным может оказаться пространственно неизотропный элемент. Одна из областей анализа, в которой применяются подобные специфические, пространственно неизотропные элементы, — это область механики разломов и трещин.



а. Четырехточечный элемент в форме треугольника, имеющий особенность типа $1/\sqrt{R}$ в узле 2–6–3



б. Четырехточечный элемент в форме треугольника, имеющий в узлах 2, 6 и 3 особенности деформаций типа $1/\sqrt{R}$ и $1/R$

Рис. 5.22. Двумерные деформированные (четырёхточечные) изопараметрические элементы, полезные в механике разломов и трещин. При любом угле и особенности деформаций остаются внутри элемента (отметим, что один узел в случае а. (2–6–3) имеет две степени свободы, и что в случае б. каждый из узлов 2, 3 и 6 имеет две степени свободы)

Как известно, специфические особенности напряжений существуют на концах трещин, и для расчета коэффициентов интенсивности напряжений или предельных нагрузок может оказаться более эффективным использовать такие конечные элементы, которые сами содержат в себе требуемые особенности напряжений. Исследователями были

спроектированы различные элементы такого рода, однако чрезвычайно простые и привлекательные элементы могут быть получены путем искажения изопараметрических элементов высокого порядка (см. [Henshell, Shaw 1975], а также [Barsoum 1976], [Barsoum 1977]). На рис. 5.22 показаны двумерные изопараметрические элементы, которые весьма успешно применялись в линейной и нелинейной механике переломов и трещин, так как эти элементы содержат особенности в деформациях типа $1/\sqrt{R}$ и $1/R$ соответственно. Следует отметить, что эти элементы имеют интерполяционные функции, заданные формулами (5.36), но при $\Delta h = 0$. Те же самые процедуры, связанные со сдвигом узлов и с разрушением сторон, могут быть использованы также и по отношению к трехмерным элементам высокого порядка с целью внесения требуемых особенностей. В приводимом ниже примере демонстрируется процедура сдвига узлов, осуществляемая с целью внесения особенности в деформации.

Пример 5.17: Рассмотрим элемент фермы, имеющий три узла и показанный на рис. 5.23. Требуется показать, что когда местом расположения узла 3 является точка, отстоящая от узла 1 на одну четверть длины, то в узле 1 деформация приобретает особенность типа $1/\sqrt{x}$.

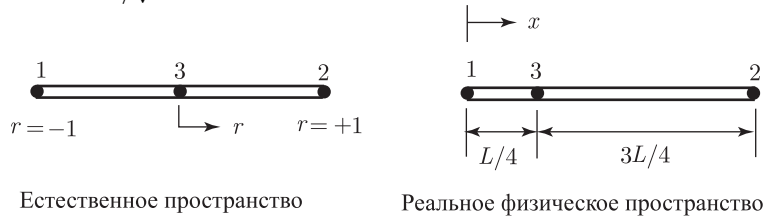


Рис. 5.23. Одномерный четырехточечный элемент

В примере 5.2 мы уже рассматривали ферменный элемент с тремя узлами. Действуя так же, как там, теперь мы получим

$$x = \frac{r}{2} (1 + r)L + (1 - r^2) \frac{L}{4},$$

или

$$x = \frac{L}{4} (1 + r)^2. \quad (a)$$

Следовательно, и матрица деформация-смещение принимает вид (если использовать (b) из примера 5.2)

$$\mathbf{B} = \left[\frac{1}{L/2 + rL/2} \right] \left[\left(-\frac{2}{1} + r \right) \left(\frac{1}{2} + r \right) - 2r \right]. \quad (b)$$

Желая показать особенность типа $1/\sqrt{x}$, мы должны выразить r через x . Используя (a), получаем

$$r = 2\sqrt{\frac{x}{L}} - 1.$$

Подставляя это выражение для r в формулу (b), получим

$$\mathbf{B} = \left[\left(\frac{2}{L} - \frac{3}{2\sqrt{L}} \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \left(\frac{2}{L} - \frac{1}{2\sqrt{L}} \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{L}} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{4}{L} \right) \right].$$

Следовательно, при $x = 0$ показанный на рис. 5.23 элемент с узлом, расположенным на одной четверти длины, имеет особенность для деформаций порядка $1/\sqrt{x}$.

Треугольные элементы с координатами на базе площадей

В некоторых описанных нами выше случаях процедура искажения прямоугольного изопараметрического элемента с целью формирования треугольного элемента может оказаться эффективной. Вместе с тем, треугольные (в особенности пространственно изотропные) элементы могут формироваться путем непосредственного использования координат на базе площадей. Для треугольника, показанного на рис. 5.24, положение характерной внутренней точки P с координатами x и y определяется координатами на базе площадей

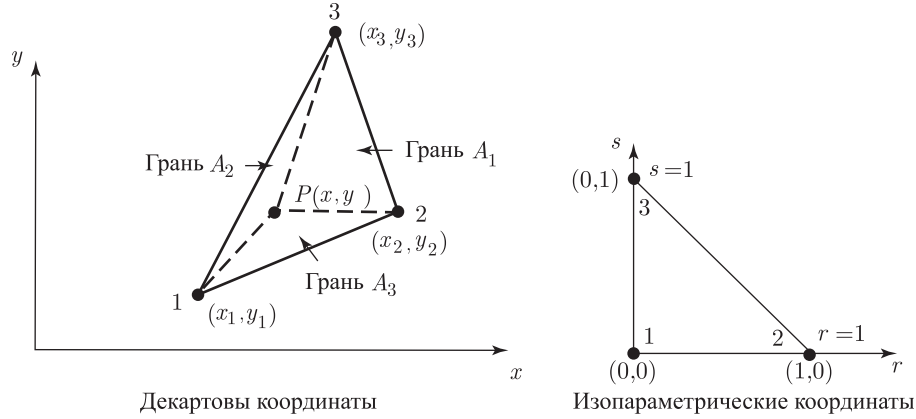


Рис. 5.24. Описание треугольника с тремя узлами

$$L_1 = \frac{A_1}{A}; \quad L_2 = \frac{A_2}{A}; \quad L_3 = \frac{A_3}{A}, \quad (5.38)$$

где площади A_i , $i = 1, 2, 3$, определены на рисунке, тогда как A — это полная площадь треугольника. Следовательно, мы имеем также

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1. \quad (5.39)$$

Учитывая, что деформации в элементе определяются путем взятия производных по декартовым координатам, нам нужно иметь соотношение, выражающее координаты на базе площадей через координаты x и y . Здесь мы имеем

$$x = L_1x_1 + L_2x_2 + L_3x_3, \quad (5.40)$$

$$y = L_1y_1 + L_2y_2 + L_3y_3, \quad (5.41)$$

так как эти соотношения справедливы в точках 1, 2 и 3, а в промежуточных точках x и y изменяются по линейному закону. Используя (5.39)–(5.41), мы получим

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix}, \quad (5.42)$$

а это дает

$$L_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y); \quad i = 1, 2, 3,$$

где

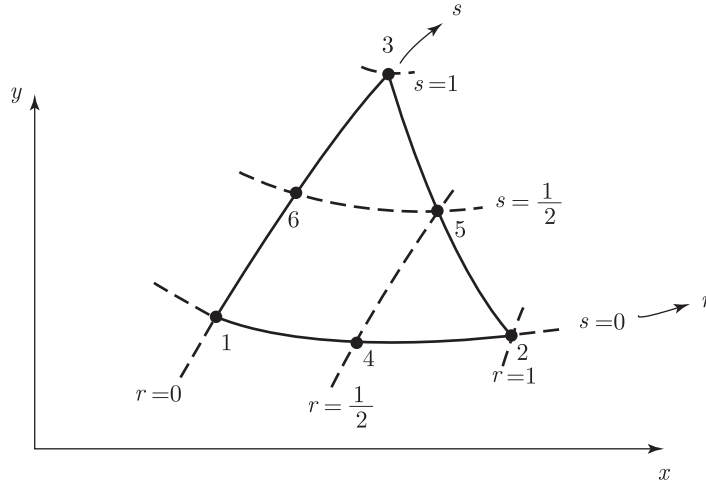
$$\begin{aligned} 2A &= x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - y_1x_2 - y_2x_3 - y_3x_1; \\ a_1 &= x_2y_3 - x_3y_2; \quad a_2 = x_3y_1 - x_1y_3; \quad a_3 = x_1y_2 - x_2y_1; \\ b_1 &= y_2 - y_3; \quad b_2 = y_3 - y_1; \quad b_3 = y_1 - y_2; \\ c_1 &= x_3 - x_2; \quad c_2 = x_1 - x_3; \quad c_3 = x_2 - x_1. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Как и следовало ожидать, приведенные здесь L_i равны интерполяционным функциям для треугольника постоянных деформаций. Если суммировать наши результаты, то для показанного на рис. 5.24 треугольного элемента с тремя узлами имеем

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^3 h_i u_i; \quad x \equiv \sum_{i=1}^3 h_i x_i; \\ v &= \sum_{i=1}^3 h_i v_i; \quad y \equiv \sum_{i=1}^3 h_i y_i; \end{aligned} \quad (5.44)$$

где $h = L_i$, $i = 1, 2, 3$, а h_i являются функциями координат x и y .

Непосредственно с помощью соотношений (5.44) могут быть вычислены различные конечно-элементные матрицы (5.27)–(5.35). Однако на практике, точно так, как это было при моделировании четырехугольных элементов (см. раздел 5.3.1), нередко оказывается целесообразным для описания элементных координат и смещений использовать естествен-



а. Система координат и узловые точки
Включается только если определен узел i

		$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$
$h_1 =$	$1 - r - s$	$-\frac{1}{2} h_4$	\dots	$-\frac{1}{2} h_6$
$h_2 =$	r	$-\frac{1}{2} h_4$	$-\frac{1}{2} h_5$	
$h_3 =$	s	\dots	$-\frac{1}{2} h_5$	$-\frac{1}{2} h_6$
$h_4 =$	$4r(1 - r - s)$			
$h_5 =$	$4rs$			
$h_6 =$	$4s(1 - r - s)$			

б. Интерполяционные функции

Рис. 5.25. Интерполяционные функции для двумерного треугольника с переменным числом узлов — от трех до шести

ное координатное пространство. Если использовать естественную систему координат, показанную на рис. 5.24, то мы получим

$$h_1 = 1 - r - s; \quad h_2 = r; \quad h_3 = s, \quad (5.45)$$

и теперь нахождение элементных матриц связано с применением преобразования Якоби. К тому же все интегралы вычисляются в естественных координатах, т. е. интегрирование по r проводится в пределах от 0 до 1, а интегрирование по s — от 0 до $(1 - r)$.

Пример 5.18: Используя представленную на рис. 5.24 изопараметрическую систему естественных координат, требуется найти интерполяционную матрицу смещений и матрицу деформация-смещение для треугольного элемента с тремя узлами, при значениях

$$\begin{aligned} x_1 = 0; \quad x_2 = 4; \quad x_3 = 1; \\ y_1 = 0; \quad y_2 = 0; \quad y_3 = 3. \end{aligned}$$

В данном случае, используя соотношения (5.44), получим

$$\begin{aligned}x &= 4r + s, \\y &= 3s.\end{aligned}$$

Следовательно, с помощью (5.23) найдем

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}.$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} (1-r-s) & 0 & r & 0 & s & 0 \\ 0 & (1-r-s) & 0 & r & 0 & s \end{bmatrix}$$

и

$$\mathbf{B} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ -3 & -3 & -1 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

По прямой аналогии с моделью четырехугольных элементов высокого порядка мы можем также дать описание и треугольных элементов высокого порядка. Будем использовать систему естественных координат, данную на рис. 5.24 и приводимую к виду

$$L_1 = 1 - r - s; \quad L_2 = r; \quad L_3 = s, \quad (5.46)$$

где L_i — это координаты «единичного треугольника», измеряемые на базе площадей. Интерполяционные функции для элемента с переменным числом узлов — от 3 до 6 — приводятся на рис. 5.25. Эти функции строятся обычным образом, а именно, — h_i должно быть равно единице в узле i и равно нулю во всех других узлах (см. пример 5.1)¹⁾.

Интерполяционные функции для треугольных элементов еще более высокого порядка определяются аналогичным образом. Тогда применяется также «кубическая пузырьковая функция» $L_1 L_2 L_3$.

Теперь, используя тот же подход, мы можем осуществить непосредственное построение интерполяционных функций для трехмерных тетраэдральных элементов. Отметим, во-первых, что по аналогии с (5.46) мы будем применять теперь *объемные координаты*

$$\begin{aligned}L_1 &= 1 - r - s - t; & L_2 &= r; \\ L_3 &= s; & L_4 &= t,\end{aligned} \quad (5.47)$$

где, как можно убедиться путем проверки, $L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1$. Фигурирующие в (5.47) L_i — это интерполяционные функции для показанного на рис. 5.26 элемента с четырьмя узлами, в естественном пространстве этого элемента. Интерполяционные функции для трехмерного элемента с переменным числом узлов — от 4 до 10 — приводятся на рис. 5.27.

Чтобы вычислить элементные матрицы, необходимо, в соответствии с (5.24), включить в процедуру преобразование Якоби и осуществить интегрирование по r от 0 до 1, по s — от 0 до $(1-r)$, и по t — от 0 до $(1-r-s)$. Как и для четырехугольных элементов, при

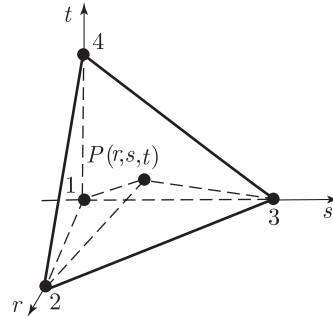
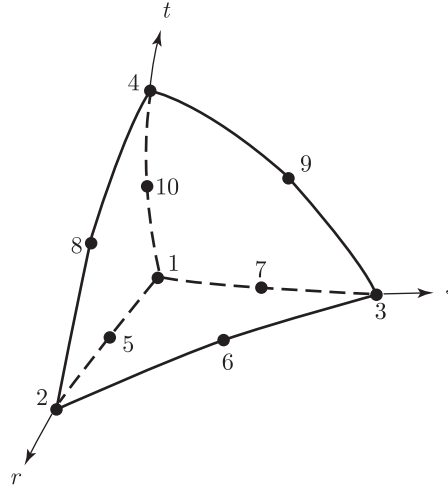


Рис. 5.26. Естественная система координат для тетраэдрального элемента

¹⁾ Интересно отметить, что функции для треугольника с шестью узлами, показанного на рис. 5.25, точно совпадают с приведенными в (5.36), если только переменные r и s на рис. 5.25 заменить, соответственно, на $(1/4)(1+r)(1-s)/4$ и $(1/2)(1+s)$, чтобы принять во внимание различие систем естественных координат. Следовательно, поправка Δh в (5.36) может быть найдена с помощью функций, приведенных на рис. 5.25.



а. Система координат и узловые точки

Включается только если определен узел i

		$i = 5$	$i = 6$	$i = 7$	$i = 8$	$i = 9$	$i = 10$
$h_1 =$	$1 - r - s - t$	$-\frac{1}{2} h_5$	$..$	$-\frac{1}{2} h_7$	$..$	$..$	$-\frac{1}{2} h_{10}$
$h_2 =$	r	$-\frac{1}{2} h_5$	$-\frac{1}{2} h_6$	$..$	$-\frac{1}{2} h_8$		
$h_3 =$	s	$..$	$-\frac{1}{2} h_6$	$-\frac{1}{2} h_7$	$..$	$-\frac{1}{2} h_9$	
$h_4 =$	t	$..$	$..$	$..$	$-\frac{1}{2} h_8$	$-\frac{1}{2} h_9$	$-\frac{1}{2} h_{10}$
$h_5 =$	$4r(1 - r - s - t)$						
$h_6 =$	$4rs$						
$h_7 =$	$4s(1 - r - s - t)$						
$h_8 =$	$4rt$						
$h_9 =$	$4st$						
$h_{10} =$	$4t(1 - r - s - t)$						

б. Интерполяционные функции

Рис. 5.27. Интерполяционные функции для трехмерного тетраэдрального элемента с переменным числом узлов — от четырех до десяти

исследовании общего случая все эти операции интегрирования эффективно выполняются с помощью численного метода, однако используемые здесь правила интегрирования отличны от тех, которые использовались для четырехугольных элементов (см. раздел 5.5.4).

Пример 5.19: Треугольный элемент, показанный на рис. 5.28, подвергается воздействию массовой силы, характеризуемой вектором \mathbf{f}^B на единицу объема. Требуется вычислить совместимый вектор нагрузки в узловой точке.

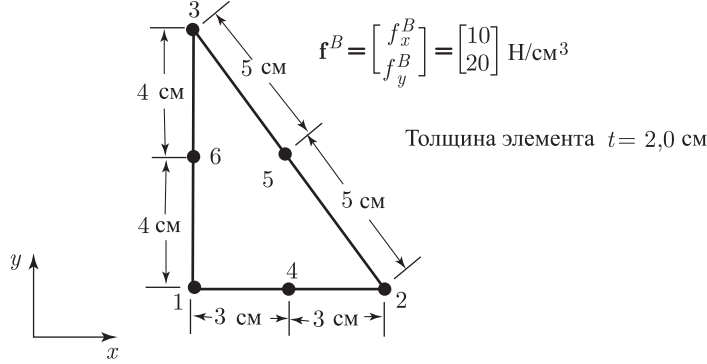


Рис. 5.28. Треугольный элемент с шестью узлами

Будем использовать вектор смещений

$$\hat{\mathbf{u}}^T = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ \dots \ v_6].$$

Следовательно, вектор нагрузки, соответствующий приложенной массовой силе, равен

$$\mathbf{R}_B = \int_V \begin{bmatrix} h_1 & f_x^B \\ h_1 & f_y^B \\ \vdots & \\ h_6 & f_y^B \end{bmatrix} dV.$$

Мы имеем

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix},$$

причем отметим, что матрица Якоби является диагональной и постоянной, а также что $\det \mathbf{J}$ равен удвоенной площади треугольника. Операции интегрирования связаны узлом i , имеющим вид

$$f_i = \int_{r=0}^1 \int_{s=0}^{1-r} h_i t \det \mathbf{J} ds dr,$$

а это дает $f_1 = f_2 = f_3 = 0$, тогда как $f_4 = f_5 = f_6 = (t/6) \det \mathbf{J}$. Следовательно, получим

$$\mathbf{R}_B^T = [0 \ \dots \ 0 \ 160 \ 320 \ 160 \ 320 \ 160 \ 320], \quad (a)$$

при совместимых узловых силах в угловых узлах, равных нулю. Отметим, что полная приложенная нагрузка оказывается, конечно же, статически эквивалентной узловым силам, перечисленным в выражении (a).

5.3.3. Соображения, касающиеся сходимости

В разделе 4.3 мы обсуждали те требования, которые должны выполняться для монотонной сходимости конечно-элементной дискретизации. Учитывая, что изопараметрические элементы используются весьма широко, рассмотрим некоторые ключевые вопросы, связанные со сходимостью, именно в применении к этим элементам.

Основные требования для обеспечения сходимости

Два требования для обеспечения монотонной сходимости сводятся к тому, что элементы (или сетка) должны быть совместимыми и полными.

Чтобы исследовать совместимость комплекса элементов, нам необходимо рассмотреть каждую кромку или, скорее, линию соприкосновения примыкающих друг к другу элементов. Для совместимости необходимо, чтобы координаты и смещения на этой общей линии соприкосновения были одними и теми же. Отметим, что для рассматриваемых нами здесь элементов координаты и смещения на линии соприкосновения определяются только узлами и узловыми степенями свободы на этой линии. Поэтому совместимость будет обеспечена, если элементы имеют одни и те же узлы на общей линии соприкосновения и если координаты и смещения на этой линии определяются в каждом из элементов посредством одних и тех же интерполяционных функций.

Примеры соприкасающихся элементов, обладающих совместимостью и не обладающих ею, показаны на рис. 5.29.

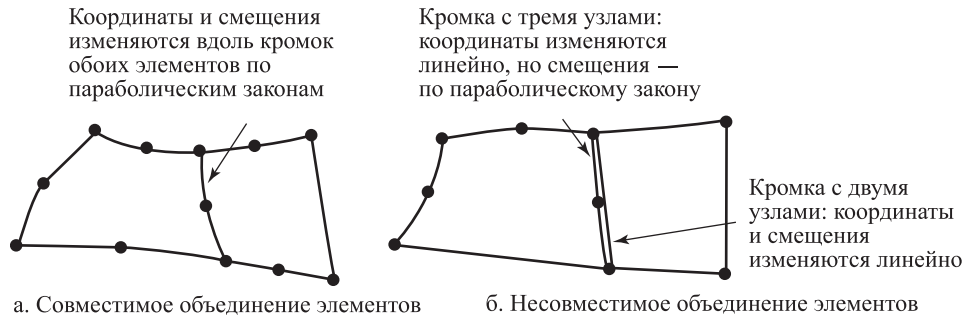


Рис. 5.29. Совместимые и несовместимые объединения двумерных элементов

На практике часто оказывается необходимым применять сетку с изменяемым шагом (см. раздел 4.3), причем изопараметрические элементы проявляют особую гибкость в связи с получением совместимых сеток с изменяемым шагом (см. рис. 5.30).

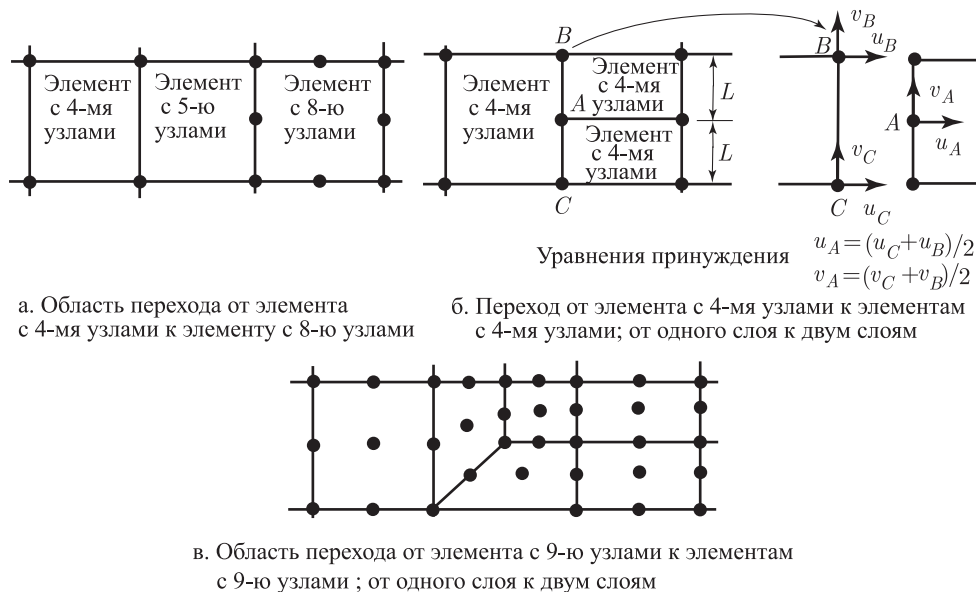


Рис. 5.30. Некоторые переходы с совместимым расположением элементов

Полнота требует, чтобы оказались возможными такие смещения, как в твердом теле, а также состояния с постоянной деформацией. Для изопараметрического элемента один из путей определения того, выполняются ли эти критерии, состоит в том, чтобы следовать соображениям, данным в разделе 4.3.2. Однако сейчас мы хотели бы более подробно изучить те специальные условия, которые относятся к изопараметрическому описанию элемента сплошной среды. С этой целью при последующем обсуждении мы будем рассматривать трехмерный элемент сплошной среды, так как одномерные и двумерные элементы могут рассматриваться как частные случаи трехмерного варианта. Для того, чтобы были возможны состояния по образцу твердого тела и состояние постоянных деформаций, изопараметрическая схема должна содержать нижеследующие выражения для смещений, определяемых в локальной элементной системе координат:

$$\left. \begin{aligned} u &= a_1 + b_1x + c_1y + d_1z \\ v &= a_2 + b_2x + c_2y + d_2z \\ w &= a_3 + b_3x + c_3y + d_3z \end{aligned} \right\}, \quad (5.48)$$

где a_j , b_j , c_j и d_j , $j = 1, 2, 3$, — это постоянные величины. Смещения в узловых точках, соответствующие указанному полю смещений, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} u_i &= a_1 + b_1x_i + c_1y_i + d_1z_i \\ v_i &= a_2 + b_2x_i + c_2y_i + d_2z_i \\ w_i &= a_3 + b_3x_i + c_3y_i + d_3z_i \end{aligned} \right\}, \quad (5.49)$$

где $i = 1, \dots, q$, а q — это число узлов.

Теперь проверка на полноту сводится к следующему: требуется показать, что смещения, соответствующие (5.48), *фактически* происходят *внутри* данного элемента, когда с помощью (5.49) заданы смещения в узловых точках этого элемента. Другими словами, мы должны установить, что при смещениях в узловых точках, соответствующих (5.49), смещения *внутри* элемента действительно соответствуют соотношениям (5.48).

Для изопараметрической модели интерполяция смещений соответствует формулам

$$u = \sum_{i=1}^q h_i u_i; \quad v = \sum_{i=1}^q h_i v_i; \quad w = \sum_{i=1}^q h_i w_i,$$

которые при использовании (5.49) сводятся к выражениям

$$\left. \begin{aligned} u &= a_1 \sum_{i=1}^q h_i + b_1 \sum_{i=1}^q h_i x_i + c_1 \sum_{i=1}^q h_i y_i + d_1 \sum_{i=1}^q h_i z_i \\ v &= a_2 \sum_{i=1}^q h_i + b_2 \sum_{i=1}^q h_i x_i + c_2 \sum_{i=1}^q h_i y_i + d_2 \sum_{i=1}^q h_i z_i \\ w &= a_3 \sum_{i=1}^q h_i + b_3 \sum_{i=1}^q h_i x_i + c_3 \sum_{i=1}^q h_i y_i + d_3 \sum_{i=1}^q h_i z_i \end{aligned} \right\}. \quad (5.50)$$

Если учесть, что при изопараметрическом описании координаты интерполируются по той же схеме, что и смещения, то мы можем использовать формулы (5.18), чтобы из (5.50) получить

$$\left. \begin{aligned} u &= a_1 \sum_{i=1}^q h_i + b_1x + c_1y + d_1z \\ v &= a_2 \sum_{i=1}^q h_i + b_2x + c_2y + d_2z \\ w &= a_3 \sum_{i=1}^q h_i + b_3x + c_3y + d_3z \end{aligned} \right\}. \quad (5.51)$$

Однако смещения, определяемые согласно (5.51), совпадают с теми, которые получаются из (5.48), если только для любой точки элемента имеем

$$\sum_{i=1}^q h_i = 1. \quad (5.52)$$

Соотношение (5.52) представляет собой то условие, которому должны удовлетворять интерполяционные функции, чтобы выполнялось требование о полноте. Можно отметить, что условие (5.52) определенно выполняется в узлах элемента, так как в силу своего построения интерполяционная функция h_i равна единице в узле i при обращении в нуль в этом же узле всех других интерполяционных функций h_j , $j \neq i$; однако для того, чтобы изопараметрический элемент был построен надлежащим образом, указанное условие должно удовлетворяться для всех точек данного элемента.

При проведенном выше обсуждении мы рассматривали трехмерный элемент сплошной среды, однако все сделанные выводы непосредственно применимы и к другим изопараметрическим моделям для элемента сплошной среды. При исследовании одномерных или двумерных элементов сплошной среды мы просто включаем в соотношения (5.48)–(5.52) только нужные нам интерполяции координат и смещений. Соображения, касающиеся сходимости, иллюстрируются на приводимом ниже примере.

Пример 5.20: Требуется исследовать, выполняются ли требования о монотонной сходимости для элементов с переменным числом узлов, показанных на рис. 5.5 и 5.6.

Совместимость между кромками элементов при двумерном анализе и между поверхностями соприкосновения элементов при трехмерном анализе будет поддерживаться, если на соединяющих элементы кромках или на поверхностях соприкосновения используется одно и то же число узлов. Типичное расположение совместимых элементов показано на рис. 5.29 а.

Второе требование для обеспечения монотонной сходимости — это выполнение условия полноты. Рассматривая вначале базовый двумерный элемент с четырьмя узлами, мы убеждаемся в применимости к нему условия (5.52), реализуемой при рассмотрении только координат x и y , а также смещений u и v .

При вычислении суммы $\sum_{i=1}^4 h_i$ для данного элемента находим

$$\frac{1}{4}(1+r)(1+s) + \frac{1}{4}(1-r)(1+s) + \frac{1}{4}(1-r)(1-s) + \frac{1}{4}(1+r)(1-s) = 1.$$

Следовательно, основной элемент с четырьмя узлами является полным. Теперь изучим интерполяционные функции, приведенные на рис. 5.5 для элемента с переменным числом узлов, и найдем, что полный добавок к базовым интерполяционным функциям для четырех узлов всегда равен нулю независимо от того, какой именно дополнительный узел включается. Следовательно, любой из возможных элементов, определяемых на рис. 5.5, как элемент с переменным числом узлов, является полным. Доказательство для показанных на рис. 5.6 трехмерных элементов проводится аналогичным образом.

Как следует из вышеизложенного, элементы сплошной среды с переменным числом узлов удовлетворяют требованиям о монотонной сходимости.

Порядок сходимости и влияние искажений элемента

Как показало проведенное выше обсуждение, если изопараметрические элементы имеют общую (но приемлемую) геометрическую форму, то для них выполняются основные требования, касающиеся монотонной сходимости, а именно — совместимость и полнота. Поэтому такие элементы всегда способны представлять моды твердого тела и состояния постоянных деформаций, так что сходимость гарантируется.

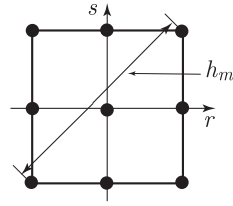
В разделе 4.3.5 мы обсуждали скорости сходимости для последовательностей конечно-элементных дискретизаций, пользуясь допущениями о том, что рассматриваемые элементы базируются на полиномиальных разложениях, и что для элементов используются однородные сетки с характерным размером h . В процессе обсуждения мы использовали треугольник Паскаля с целью показать, какие именно полиномиальные члены присутствуют в различных элементах. Полный полином наивысшего порядка в треугольнике Паскаля определяет собой порядок сходимости. Пусть степень этого полинома (теперь для r, s, t) будет равна k . Тогда, если точное решение \mathbf{u} является достаточно гладким и если используются однородные сетки, то скорость сходимости конечно-элементного решения

\mathbf{u}_h определяется выражением (см. (4.102))

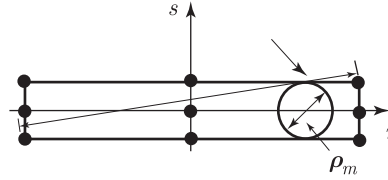
$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| \leq ch^k, \quad (5.53)$$

где k — это порядок сходимости. Постоянная c не зависит от h , однако зависит от точного решения математической модели и от материальных свойств.

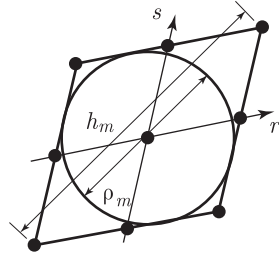
В общем случае практического конечно-элементного анализа точное решение математической модели не является гладким (например, вследствие быстрых изменений нагрузки или изменений материальных свойств), и при однородных сетках порядок сходимости значительно уменьшается. Поэтому необходимо применять сетки с переменным шагом, со введением утонченной дискретизации в областях с неплывным распределением напряжений, и грубой дискретизации — в других областях. Поэтому сетки становятся неодно-



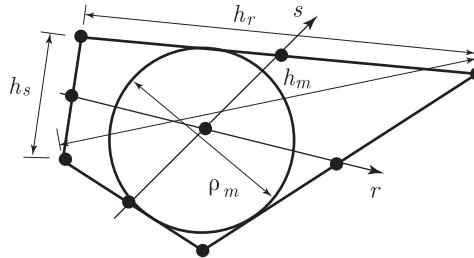
а. Недеформированная конфигурация, используемая при однородных сетках



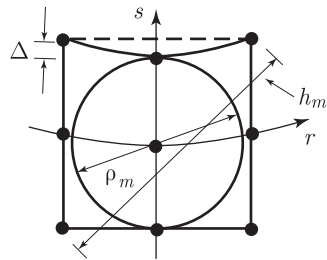
б. Деформация в форме удлинения



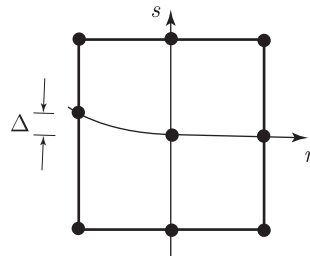
в. Деформация в форме параллелограмма



г. Угловая деформация



д. Деформация с искривлением кромок



е. Деформация центрального узла

Рис. 5.31. Классификация деформаций элементов для случая двумерного элемента с 9-ю узлами; все внутренние узлы и узлы в серединах сторон расположены в своих «естественных» положениях для случаев от (а) до (д); чтобы обеспечить применимость соотношения (5.53), значение Δ должно быть меньше h_m^2 ; на практике реальная деформация должна была бы представлять собой сочетания тех, которые показаны здесь

родными и базируются на геометрически искаженных элементах, когда, например, при двумерном анализе используются четырехугольные и треугольные элементы общего вида; см. рис. 5.31, где дается пример четырехугольного элемента с девятью узлами.

Целью подобных построений является получение таких сеток, при которых плотность ошибки решения оказывается (почти) постоянной в пределах рассматриваемой области, а также использование *регулярных*¹⁾ сеток. При использовании регулярных сеток скорость сходимости по-прежнему выражается в форме, подобной (5.53) (см. (4.101с)), а именно,

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1^2 \leq c \sum_m h_m^{2k} \|\mathbf{u}\|_{k+1, m}^2,$$

где h_m означает наибольший размер элемента m (см. рис. 5.31). Мы замечаем, что, по существу, в этом соотношении складываются интерполяционные ошибки от всех элементов, дающие возможность получить суммарную интерполяционную ошибку, которая впоследствии дает нам обычный предел, ограничивающий фактическую ошибку решения.

Разумеется, постоянная (почти) плотность ошибки решения в общем случае может быть достигнута только за счет надлежащего выбора переменного шага сетки и адаптивного измельчения сетки; это связано с тем, что вид той сетки, которую следует использовать, зависит от точного (и неизвестного нам) решения. На практике измельчение сетки строится на основе локальных оценок ошибки, рассчитываемых по только что полученному решению (при более грубой сетке).

Чтобы ввести критерий регулярности сетки, используется геометрический параметр σ_m , а именно,

$$\sigma_m = \frac{h_m}{\rho_m},$$

где h_m — это наибольший размер, а ρ_m — это диаметр той наибольшей окружности (или сферы), которая может быть вписана в элемент m (см. рис. 5.31). Последовательность сеток является *регулярной*, если $\sigma_m \leq \sigma_0$ для всех элементов m и для всех используемых сеток, где σ_0 — фиксированная положительная величина. Кроме того, когда при двумерном анализе используются сетки с четырехугольными элементами, а при трехмерном анализе — с гексаэдральными элементами, то мы требуем также, чтобы для каждого элемента отношение длины наибольшей стороны к длине наименьшей (h_l/h_s на рис. 5.31) было меньше некоторого разумного положительного числа. Вышеуказанные условия предотвращают возможность чрезмерно больших удлинений и чрезмерных геометрических искажений элементов. Обращаясь к рис. 5.31, отметим, что элементы, показанные на схемах (б), (в) и, в особенности, (г), широко используются в регулярных сетках²⁾.

Описанное выше введение сеток с переменным шагом может, вообще говоря, быть осуществлено при наличии элементов с прямыми сторонами, причем узлы, не совпадающие с углами элемента, могут обычно размещаться на своих естественных местах (т.е. с физическими координатами x, y, z в пропорции с расстояниями r, s, t от угловых узлов); при этом наиболее широко используемый элемент из числа показанных на рис. 5.31 — это четырехугольный, приведенный на рис. 5.31 г. Однако в тех случаях, когда требуется

¹⁾ Говоря о «регулярной сетке», мы всегда имеем в виду «сетку из регулярной последовательности сеток».

²⁾ В дополнение ко всему вышеописанному, мы можем также дать определение некой последовательности сеток, которая является *квазиоднородной*. Для такой последовательности в дополнение к условию о регулярности мы ставим условие о том, чтобы отношение максимального h_m , встречающегося в данной сетке. К минимальному h_m , встречающемуся в той же сетке, оставалось для всех сеток меньше некоторого разумного положительного числа. Это значит, что если регулярность позволяет отношению размеров элемента принимать любое значение, то квазиоднородность ограничивает величину допустимых относительных размеров. Поэтому критерий ошибки, соответствующий (4.101с), остается справедливым при использовании квазиоднородной последовательности сеток.

моделировать искривленные границы, тогда и стороны элемента также будут искривлены (см. рис. 5.31 д), и мы должны поставить вопрос о том, как все эти геометрические искажения будут влиять на порядок сходимости.

В то время как случаи, описанные на рис. 5.31, схемы от (а) до (д), интенсивно используются при построении сеток, мы отмечаем, что исследователи избегают применять такое искажение элемента, как показанное на рис. 5.31 е, если только им не требуется моделировать какие-то специфические эффекты в связи с напряжениями, наподобие тех, которые встречаются в механике переломов и трещин (где используются даже искажения, более серьезные, чем показанные на рис. 5.31 е; см. рис. 5.22). Однако искажения типа приводимого на рис. 5.31 е могут появиться при геометрически нелинейном анализе.

В математических исследованиях, проведенных P.G. Ciarlet и P.-A. Raviart (см. [Ciarlet, Raviart 1972], а также [Ciarlet 1978]), было показано, что порядок сходимости для последовательности регулярных сеток при прямых сторонах каждого элемента по-прежнему соответствует соотношению (5.53) (даже несмотря на то, что, например, при двумерном анализе четырехугольники общего вида с прямыми сторонами используются вместо квадратных элементов), а также что порядок сходимости также все еще выражается согласно (5.53) при искривленных сторонах элементов и при узлах, не совпадающих с углами и не размещаемых на своих естественных местах, если только искажения малы в сравнении с размерами рассматриваемого элемента. Для элемента, показанного на рис. 5.31, искажения должны иметь порядок $o(h^2)$. В силу изложенного искажения элемента, обусловленные искривлением сторон, а также тем, что внутренние узлы не размещаются на своих естественных местах, должны быть малы; кроме того, в процессе измельчения сетки все эти искажения должны уменьшаться значительно быстрее, чем размер элемента. Порядок сходимости, определяемый согласно (5.53), достигается непосредственно тогда, когда точное решение u является гладким, в то время как если оно негладкое, то необходимо вводить сетку с переменным шагом (стремясь выполнить требование о том, чтобы плотность ошибки была (почти) постоянной во всей области решения). В разделе 5.5.5 мы представляем некоторые решения для иллюстрации части этих результатов (см. рис. 5.64)¹⁾.

Разумеется, фактическая точность, достигаемая при заданной сетке, определяется также и постоянной c из соотношения (5.53). Эта постоянная зависит от того, какие именно элементы используются (все они представлены полиномами степени k), а также от геометрических искажений этих элементов. Следует отметить, что если эта постоянная велика, то порядок сходимости может оказаться мало интересным, так как член h^k может существенно уменьшить ошибку только при очень малых значениях h .

Сделанные замечания относятся только к порядку сходимости, достигаемому при малых размерах элементов. Однако некоторые интересные наблюдения относятся также и к изучению возможности прогнозирования для элементов, имеющих большие размеры. А именно, геометрические искажения таких элементов могут весьма существенно повлиять на их общую способность к прогнозу.

В качестве примера, демонстрирующего возможную потерю способности к прогнозу изопараметрическим элементом, когда этот элемент испытывает геометрическое искажение, рассмотрим результаты, приводимые на рис. 5.32. Одиночный элемент с восемью узлами, имеющий неискаженную форму, позволяет получить точное (теория балок) решение задачи об изгибе балки. Однако если используются два элемента искаженной формы, то в решении возникают значительные ошибки. С другой стороны, если та же задача решается с элементами, имеющими по девять узлов, то сетка для двух элементов искаженной формы дает правильный результат.

Как показывает этот пример, при грубых сетках способность некоторых элементов к прогнозу напряжений может значительно снижаться за счет геометрических искажений

¹⁾ Эти решения приводятся в разделе 5.5.5, так как элементные матрицы искаженных элементов вычисляются с помощью численного интегрирования и, следовательно, влияние ошибки при численном интегрировании также должно быть принято во внимание.

элемента. Учитывая, что на практике используются довольно грубые сетки, а полный анализ сходимости не проводится, то оказывается, бесспорно, предпочтительным использовать такие элементы, которые являются наименее чувствительными к их геометрическим искажениям.

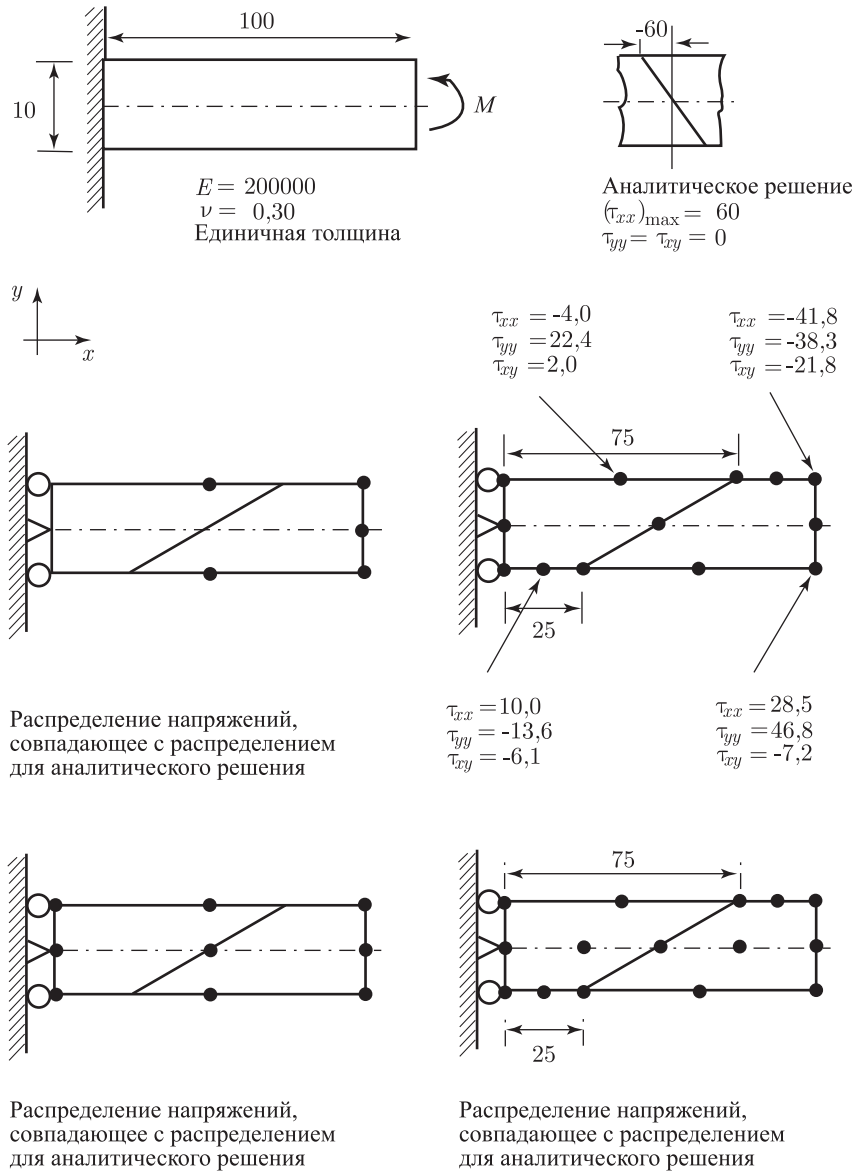


Рис. 5.32. Пример, демонстрирующий влияние деформаций элементов на их способность к прогнозу

При изучении случая потери способности к прогнозу мы находим, что подобная потеря связана с теми элементами, которые после геометрического искажения уже не могут соответствовать в физических координатах x, y, z полиномам того же порядка, какой имел

место без искажения. Например, четырехугольный элемент общего вида, имеющий девять узлов и показанный на рис. 5.31 г, способен представлять *точно* изменения смещений типа x^2 , xy и y^2 , тогда как аналогичный четырехугольный элемент с восемью узлами не способен к этому. Следовательно, четырехугольный элемент с восемью узлами не содержит квадратичных членов в треугольнике Паскаля, построенном в физических координатах.

Сделанное выше замечание объясняет результаты, показанные на рис. 5.32, и исследование описанного феномена применительно к широко используемым видам элементов и к обычным формам искажений представляет общий интерес. При таком исследовании мы можем количественно оценить потерю способности к прогнозу путем определения того, какие именно члены в треугольнике Паскаля, построенном в физических координатах, уже не могут быть представлены точно (см. [Lee, Bathe 1993]).

В качестве примера рассмотрим двумерный элемент, показанный на рис. 5.31. Для элементов неискаженной конфигурации или с искажениями, касающимися только удлинения, физические координаты x, y имеют линейную связь с изопараметрическими координатами r, s ; иначе говоря, мы имеем $x = c_1 r$, $y = c_2 s$, где c_1 и c_2 — постоянные. Следовательно, члены из треугольника Паскаля в физических координатах — это просто члены по степеням r, s , полученные из интерполяционных функций h_i , в которых произведена замена на x и y соответственно.

Эффекты показанных на рис. 5.31, схемы от (а) до (д), искажений типа параллелограмм, общее угловое и искривленная кромка, могут быть изучены путем установления для этих частных случаев вариаций физических координат при координатных интерполяциях (5.18) с последующим заданием вопроса о том, какие полиномиальные члены по x и y содержатся в полиномиальных членах по r и s для вариаций смещений, задаваемых согласно (5.19) (см. пример 5.21).

В таблице 5.1 дается сводка результатов, полученных при исследованиях такого типа применительно к двумерным четырехугольным элементам (см. [Lee, Bathe 1993]). Первый столбец этой таблицы дает члены из треугольника Паскаля, получаемые, когда данный элемент не искажен или подвергается только искажениям типа удлинение или параллелограмм. Члены, расположенные ниже пунктирной линии, присутствуют только тогда, когда элемент или вовсе не искажен, или подвергнут лишь искажению по удлинению, а *также* не испытал поворота. В частности, табл. 5.1 свидетельствует о том, что угловое искажение общего вида оказывает значительное влияние на способность к прогнозу у элементов с восемью и с двенадцатью узлами; иначе говоря, при таких искажениях эти элементы могут представлять *точно* только линейные вариации смещений по x и y , тогда как 9-узловые и 16-узловые элементы могут в своей искаженной форме по-прежнему *точно* представлять параболические и кубические поля смещений.

С другой стороны, искажения с искривленными кромками уменьшают порядок тех полиномов для смещений, которые могут быть представлены *точно* для элементов, рассматриваемых в табл. 5.1, и, действительно, только элемент двойного четвертого порядка с 25-ю узлами может еще точно представлять параболическое поле смещений.

Хотя информация, приведенная в табл. 5.1, со всей очевидностью показывает, что элементы Лагранжа являются предпочтительными в сравнении с 8-узловыми и 12-узловыми элементами в отношении их способности к прогнозу, необходимо также напомнить, что элементы Лагранжа требуют несколько большего объема вычислительных затрат, а для мелких сеток порядок сходимости оказывается одним и тем же [хотя постоянная c в соотношении (5.53) будет отличаться].

Приводимый ниже пример дается для демонстрации процедуры анализа, нужного для получения информации, данной в табл. 5.1.

Пример 5.21: Рассмотрим показанный на рис. 5.33 элемент с восемью узлами, подвергнутый угловому искажению общего вида. Для этого элемента требуется определить члены, входящие в треугольник Паскаля, в координатах x, y .

Вариации физических координат определяются путем использования интерполяционных функций, приведенных на рис. 5.5; если узлы на сторонах данного элемента размещаются посередине между угловых узлов, то мы получим

Таблица 5.1. Полиномиальные поля смещений в физических координатах, которые могут быть разрешены точно с помощью различных элементов в их недеформированных и деформированных конфигурациях

Тип элемента	Поля для конфигурации без деформаций, с деформацией типа удлинения и типа параллелограмма	Угловая деформация	Квадратичная деформация с искривленными кромками
Элемент с 8-ю узлами	$ \begin{array}{ccc} & 1 & \\ x & & y \\ x^2 & xy & y^2 \\ \hline x^2y & xy^2 & \end{array} $	$ \begin{array}{ccc} & 1 & \\ x & y & \end{array} $	$ \begin{array}{ccc} & 1 & \\ x & y & \end{array} $
Элемент с 8-ю узлами	$ \begin{array}{cccc} & & 1 & \\ & x & & y \\ x^2 & & xy & y^2 \\ x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 \\ \hline x^3y & & xy^3 & \end{array} $	$ \begin{array}{ccc} & 1 & \\ x & y & \end{array} $	$ \begin{array}{ccc} & 1 & \\ x & y & \end{array} $
Элемент Лагранжа с 9-ю узлами	$ \begin{array}{ccc} & 1 & \\ x & & y \\ x^2 & xy & y^2 \\ \hline x^2y & xy^2 & \\ x^2y^2 & & \end{array} $	$ \begin{array}{ccc} & 1 & \\ x & y & \\ x^2 & xy & y^2 \end{array} $	$ \begin{array}{ccc} & 1 & \\ x & y & \end{array} $
Элемент Лагранжа с 16-ю узлами	$ \begin{array}{cccc} & & 1 & \\ & x & & y \\ x^2 & & xy & y^2 \\ x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 \\ \hline x^3y & x^2y^2 & xy^3 & \\ x^3y^2 & x^2y^3 & & \\ x^3y^3 & & & \end{array} $	$ \begin{array}{cccc} & & 1 & \\ & x & & y \\ x^2 & & xy & y^2 \\ x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 \end{array} $	$ \begin{array}{ccc} & 1 & \\ x & y & \end{array} $
Элемент Лагранжа с 25-ю узлами	$ \begin{array}{cccccc} & & & 1 & & \\ & & x & & y & \\ & x^2 & & xy & & y^2 \\ x^3 & & x^2y & & xy^2 & y^3 \\ x^4 & x^3y & x^2y^2 & xy^3 & y^4 & \\ \hline x^4y & x^3y^2 & x^2y^3 & xy^4 & & \\ x^4y^2 & x^3y^3 & x^2y^4 & & & \\ x^4y^3 & x^3y^4 & & & & \\ x^4y^4 & & & & & \end{array} $	$ \begin{array}{cccccc} & & & 1 & & \\ & & x & & y & \\ & x^2 & & xy & & y^2 \\ x^3 & & x^2y & & xy^2 & y^3 \\ x^4 & x^3y & x^2y^2 & xy^3 & y^4 & \end{array} $	$ \begin{array}{cccccc} & & & & 1 & \\ & & & x & & y \\ & & x^2 & & xy & y^2 \\ x^2 & & x^2y & & xy^2 & y^3 \\ x^2 & xy & x^2y^2 & xy^3 & y^4 & \end{array} $

$$x = \gamma_1 + \gamma_2 r + \gamma_3 s + \gamma_4 rs, \quad (a)$$

$$y = \delta_1 + \delta_2 r + \delta_3 s + \delta_4 rs, \quad (b)$$

при постоянных $\gamma_1, \dots, \gamma_4$ и $\delta_1, \dots, \delta_4$. Мы воспользуемся выражениями (a) и (b) с целью определить, какие члены по x и y содержатся в выражениях для интерполяции смещений

$$u = \sum_{i=1}^8 h_i u_i, \quad (c)$$

$$v = \sum_{i=1}^8 h_i v_i, \quad (d)$$

где h_i — это, опять-таки, функции, приведенные на рис. 5.5.

Рассмотрим интерполяцию составляющей смещения u . Ясно, что аддитивные постоянные, а также члены с x и y из выражений (a) и (b) будут содержаться и в (c), так как соотношение (c) интерполирует u в терминах функций $(1, r, s, r^2, rs, s^2, r^2s, rs^2)$, умножаемых на постоянные. Мы уже обсуждали этот факт ранее, когда рассматривали требования, касающиеся сходимости.

Однако если мы рассмотрим теперь член x^2 , то заметим, что член $r^2 s^2$ (полученный при возведении в квадрат правой части выражения (a)) не присутствует в соотношении (c). Аналогично этому, в выражении (c) для интерполяции смещений не присутствуют члены $xy, y^2, x^2 y$ и xy^2 .

Разумеется, анализ для составляющей смещения v будет таким же. Следовательно, если изопараметрический элемент с восемью узлами подвергается угловому искажению общего вида, то уменьшение способности к прогнозу выражается в том, что квадратичные вариации смещений по x и y сохраняются. Эти выводы объясняют результаты, показанные на рис. 5.31.

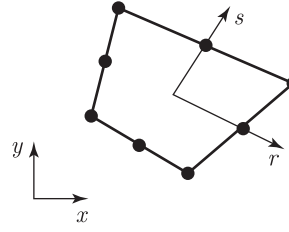


Рис. 5.33. Изопараметрический элемент с восемью узлами, подвергаемый угловой деформации
* Рассматриваются двумерные, четырехугольные элементы

5.3.4. Элементные матрицы в глобальной системе координат

До сих пор мы рассматривали расчет матриц изопараметрического элемента, соответствующих локальным степеням свободы этого элемента. В процессе расчета мы использовали те из локальных координат элемента x, y и z , которые были применимы при рассмотрении, а также локальные степени свободы элемента, u, v и w . Однако можно заметить, что для двумерного элемента, рассмотренного в примерах 5.5, 5.6 и 5.7, элементные матрицы могли быть рассчитаны с использованием глобальных координатных переменных X и Y , а также глобальных смещений в узловых точках, U_i и V_i . Действительно, при описываемых здесь расчетах локальные координаты x и y , а также локальные составляющие смещений u и v , должны быть просто заменены на глобальные координаты X и Y и, соответственно, на составляющие глобальных смещений U и V . В подобных случаях матрицы оказались бы в прямом соответствии с составляющими глобальных смещений.

В общем случае, если число переменных в естественных координатах равно числу глобальных переменных, то расчет элементных матриц должен проводиться в глобальной системе координат. Типичными примерами являются двумерные элементы, определяемые в глобальной плоскости, а также трехмерный элемент, показанный на рис. 5.6. В этих случаях оператор Якоби, соответствующий (5.24), представляет собой квадратную матрицу, которая может быть обращена, как этого требует (5.25), и элементные матрицы прямо соответствуют глобальным составляющим смещений.

В тех случаях, когда порядок глобальной системы координат выше порядка естественной системы координат, наиболее целесообразным оказывается обычно вначале рассчитать элементные матрицы в локальной системе координат и в соответствии с локальными составляющими смещений. После этого матрицы должны быть преобразованы к системе глобальных смещений. Примерами являются ферменный элемент или элемент с плоскими напряжениями, когда они имеют произвольную ориентировку в трехмерном пространстве. Однако в альтернативном варианте преобразование к глобальным составляющим смещений может быть непосредственно включено в схему. Это реализуется путем введения некоего преобразования, которое при интерполяции смещений выражает локальные смещения в узловых точках в терминах глобальных составляющих.

Пример 5.22: Требуется вычислить матрицу жесткости для ферменного элемента, показанного на рис. 5.34, с помощью прямого использования глобальных смещений в узловых точках.

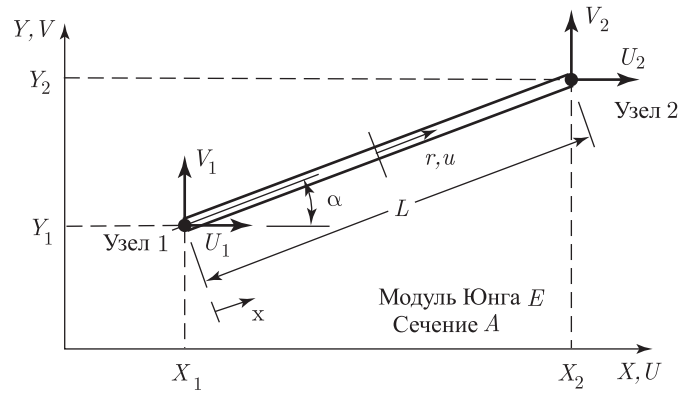


Рис. 5.34. Ферменный элемент в глобальной системе координат

Матрица жесткости для рассматриваемого элемента определяется формулой (5.27), т. е.

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV,$$

где \mathbf{B} — матрица деформация–смещение, а \mathbf{C} — матрица напряжение–деформация. Для рассматриваемого здесь ферменного элемента имеем

$$u = [\cos \alpha \quad \sin \alpha] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (1-r) U_1 + \frac{1}{2} (1+r) U_2 \\ \frac{1}{2} (1-r) V_1 + \frac{1}{2} (1+r) V_2 \end{bmatrix}.$$

После этого, используя выражение $\epsilon = \partial u / \partial x$, представляемое в естественной системе координат как $\epsilon = (2/L) \partial u / \partial r$ (см. раздел 5.2), мы можем записать преобразование деформация–смещение, соответствующее вектору смещения $\mathbf{U}^T = [U_1 \quad V_1 \quad U_2 \quad V_2]$, как

$$\mathbf{B} = \frac{1}{L} [\cos \alpha \quad \sin \alpha \quad \cos \alpha \quad \sin \alpha] \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Кроме того, как это представлено в разделе 5.2, мы имеем $dV = (AL/2) dr$ и $\mathbf{C} = E$. После подстановки выражений для \mathbf{B} , \mathbf{C} и dV и вычисления интеграла получим

$$\mathbf{K} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix}.$$

5.3.5. Элементы, базирующиеся на учете сочетания смещение/давление для несжимаемой среды

В разделе 4.4.3 мы обсудили тот факт, что элементы, базирующиеся только на учете смещений, не являются эффективными при исследовании несжимаемых (или почти несжимаемых) сред и ввели две модели типа смещение/давление. Для схемы типа u/p давление интерполируется для каждого элемента индивидуально и может (в случае почти полной несжимаемости) быть подвергнуто статическому сгущению до объединения элементных матриц в комплекс, тогда как для схемы типа u/p -с давления в элементах определяются через посредство узловых переменных, которые, как и для смещений, принадлежат примыкающим друг к другу элементам. Для формулировок этих типов были предложены различные эффективные элементы (см. табл.4.6 и т4.7) и проведено соответствующее обсуждение (см. раздел 4.5).

Что касается элементов, базирующихся только на учете смещений, то в главе 4 мы ввели предположение о том, что матрицы интерполяции смещений и давления строятся с помощью подхода, основанного на применении обобщенных координат. Теперь, однако, очевидно, что эти матрицы могут быть получены непосредственно при использовании изопараметрической модели.

Для схемы типа u/p для элемента используются те же самые интерполяции координат и смещений, что и для модели, базирующейся только на учете смещений (см. (5.18) и (5.19)), и мы интерполируем давление, используя выражение

$$p = p_0 + p_1 r + p_2 s + p_3 t + \dots, \quad (5.54)$$

где $p_0, p_1, p_2, p_3, \dots$ — это подлежащие вычислению параметры давления, а r, s и t — это изопараметрические координаты. Конечно, в качестве альтернативы, мы могли бы также интерполировать давление с помощью выражения

$$p = p_0 + p_1 x + p_2 y + p_3 z + \dots,$$

где x, y и z — это обычные декартовы координаты.

Для модели типа u/p -с мы также используем те интерполяции координат и смещений, которые применялись при описании только на основе смещений, и, кроме того,

$$p = \sum_{i=1}^{q_p} \tilde{h}_i \hat{p}_i, \quad (5.55)$$

где $\tilde{h}_i, i = 1, \dots, q_p$ — это интерполяционные функции для давления по узловым точкам, а \hat{p}_i — это неизвестные значения давления в узлах.

Отметим, что функции \tilde{h}_i отличаются от тех h_i , которые используются для интерполяции смещений и координат. Например, для двумерного элемента типа 9/4-с интерполяции смещений и координат реализуются с помощью функций, соответствующих элементу с девятью узлами из таблицы 5.4, тогда как \tilde{h}_i — это функции, соответствующие элементу с четырьмя угловыми узлами.

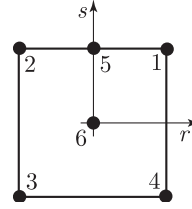
На практике изопараметрическая модель элементов типа u/p и u/p -с оказывается эффективной, так как при этом может быть достигнута общность, соответствующая непрямоугольным и искривленным элементам (см. рис. 4.46, а также [Sussman, Bathe 1986], [Sussman, Bathe 1987]).

5.3.6. Упражнения

- 5.1. Используйте процедуру, описанную в примере 5.1, для доказательства того, что функции, приводимые на рис. 5.4 для ферменного элемента с четырьмя узлами, являются правильными.
- 5.2. Используйте процедуру, описанную в примере 5.1, для доказательства того, что функции, приводимые на рис. 5.5 для двумерного элемента, являются правильными.

5.3.

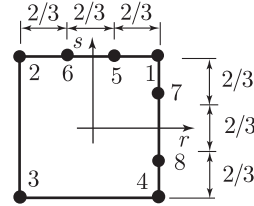
Используйте функции, приводимые на рис. 5.5, для построения интерполяционных функций, применимых к показанному здесь элементу с шестью узлами. Постройте графики интерполяционных функций в изометрической проекции (как в примере 5.4).



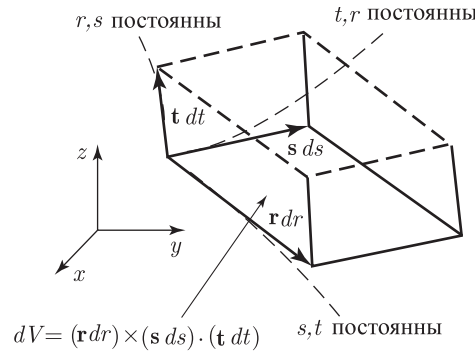
5.4. Докажите, что построение интерполяционных функций, приводимых на рис. 5.6, дает правильные функции для трехмерного элемента.

5.5.

Для показанного здесь элемента определите интерполяционную функцию h_i так, чтобы использовать ее в совместимой конечно-элементной сетке.



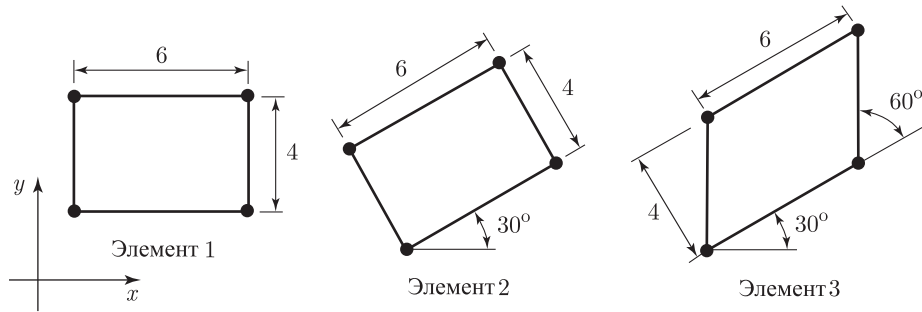
5.6. При расчете изопараметрических элементных матриц интегрирование проводится в естественных координатах r, s, t , а это требует преобразования согласно формуле (5.28). Осуществите вывод этого преобразования, используя показанный здесь элементарный объем $dV = (\mathbf{r} dr) \times (\mathbf{s} ds) \cdot (\mathbf{t} dt)$.



Здесь векторы $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}$ задаются формулами

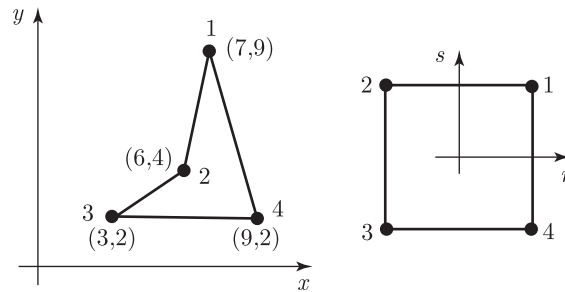
$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial z}{\partial r} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial s} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix}.$$

5.7. Определите матрицы Якоби для следующих элементов с четырьмя узлами:

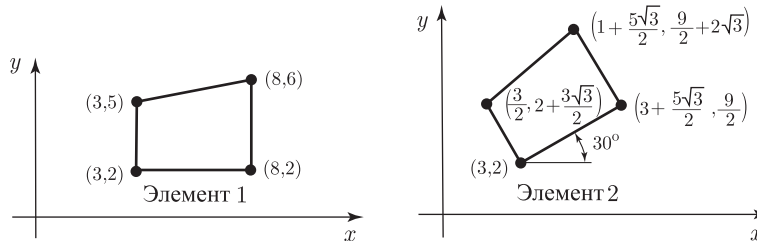


Покажите в явной форме, что матрицы Якоби для элементов 2 и 3 содержат матрицу поворота, соответствующую повороту на угол 30 градусов.

- 5.8. Рассчитайте матрицу Якоби для показанного здесь элемента для всех r, s .
Определите значения r, s , при которых матрица Якоби имеет особенность.



- 5.9. Определите матрицу Якоби \mathbf{J} для изображаемых элементов с четырьмя узлами.



Покажите, что матрица Якоби \mathbf{J} для элемента 2 может быть определена путем применения матрицы поворота к матрице Якоби \mathbf{J} для элемента 1. Представьте эту матрицу поворота.

- 5.10. Рассмотрите изопараметрические элементы, заданные приводимыми ниже выражениями.

(a) Случай 1:

$$x = \sum_{i=1}^8 h_i x_i; \quad x_1 = 12, x_2 = 4, x_3 = 4, x_4 = 12, x_5 = 9, x_6 = 5, x_7 = 8, x_8 = 11;$$

$$y = \sum_{i=1}^8 h_i y_i; \quad y_1 = 12, y_2 = 8, y_3 = 2, y_4 = 2, y_5 = 8, y_6 = 5, y_7 = 1, y_8 = 7.$$

(b) Случай 2:

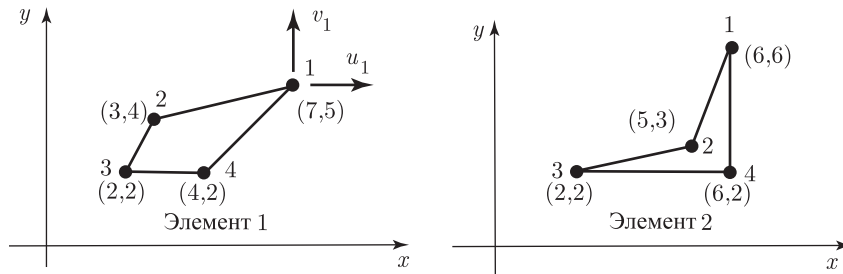
$$x = \sum_{i=1}^6 h_i^* x_i; \quad x_1 = 8, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = 9, x_5 = 5, x_6 = 5;$$

$$y = \sum_{i=1}^6 h_i^* y_i; \quad y_1 = 10, y_2 = 8, y_3 = 3, y_4 = 1, y_5 = 9, y_6 = 2.$$

Сделайте аккуратный чертеж, изобразив элементы на графленной бумаге, и покажите физическое расположение линий $r = 1/2$, $r = -1/4$, $s = 3/4$ и $s = -1/3$ для каждого из случаев (для выполнения этой задачи вы можете также написать небольшую программу).

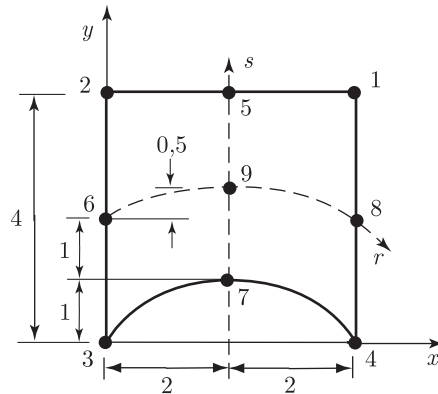
5.11. Рассмотрите показанные здесь изопараметрические элементы. Сделайте для каждого элемента следующие наброски.

- (a) Линии при переменном s и при постоянном $r = -2/3, -1/3, 0, 1/3, 2/3$.
- (b) Линии при переменном r и при постоянном $s = -2/3, -1/3, 0, 1/3, 2/3$.
- (c) Определитель Якоби для элемента 1 (в изометрической проекции).

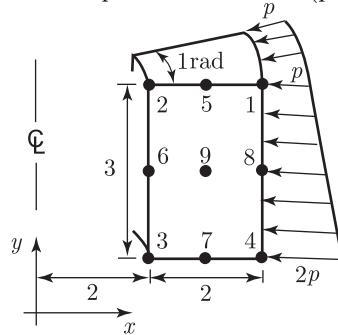


5.12. Докажите, что для любого изопараметрического элемента в форме параллелограмма определитель Якоби представляет собой постоянную. Кроме того, докажите, что определитель Якоби изменяется по r и/или по s в тех случаях, когда элемент не имеет формы квадрата, прямоугольника или параллелограмма.

5.13. Рассмотрите показанный здесь изопараметрический элемент. Рассчитайте координаты x, y любой точки элемента, как функции r и s , и определите матрицу Якоби.

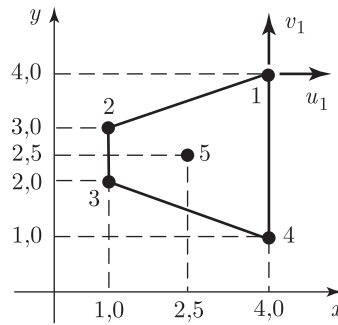


- 5.14. Рассчитайте силы в узловых точках, соответствующие нагрузке на поверхность показанного здесь осесимметричного элемента (рассмотрите 1 радиан).



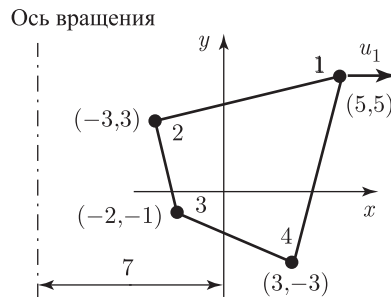
- 5.15. Рассмотрите показанный здесь изопараметрический элемент с плоскими деформациями, имеющий пять узлов.

- (a) Определите интерполяционные функции надлежащего вида h_i , $i = 1, \dots, 5$.
 (b) Вычислите столбец матрицы деформация–смещение, соответствующий смещению u_1 в точке $x = 2,5$, $y = 2,5$.



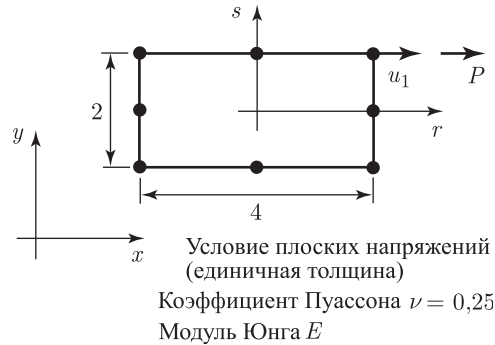
- 5.16. Рассмотрите показанный здесь двумерный, осесимметричный, изопараметрический конечный элемент.

- (a) Постройте матрицу Якоби \mathbf{J} .
 (b) Дайте аналитическое выражение столбца матрицы деформация–смещение $\mathbf{B}(r, s)$, соответствующее смещению u_1 .

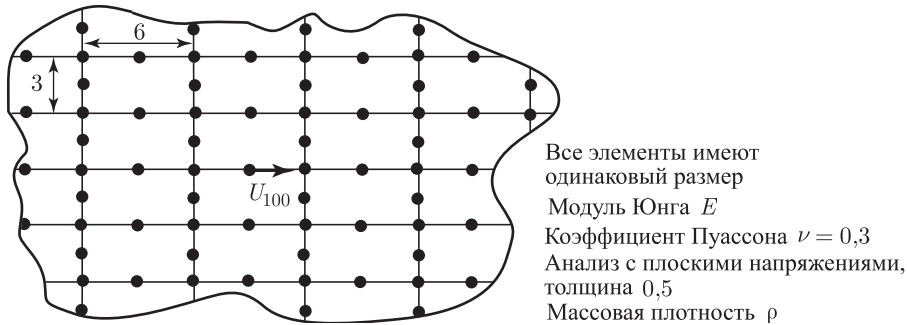


- 5.17. Показанный здесь изопараметрический элемент с восемью узлами имеет смещения во всех своих узловых точках принудительно приравненными нулю, за исключением смещения u_1 . На элемент действует сосредоточенная нагрузка P , приложенная там же, где u_1 .

- (a) Рассчитайте смещения, соответствующие P , и покажите их на наброске.
- (b) Сделайте наброски всех напряжений в элементе, соответствующих деформированной конфигурации. Для ваших набросков используйте изометрическую проекцию.

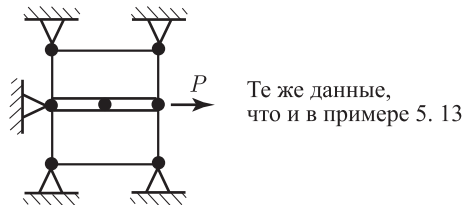


- 5.18. Показанный здесь комплекс из элементов с восемью узлами каждый используется для конечно-элементного анализа. Рассчитайте диагональные элементы матрицы жесткости и совместимую матрицу масс, соответствующую степени свободы U_{100} .



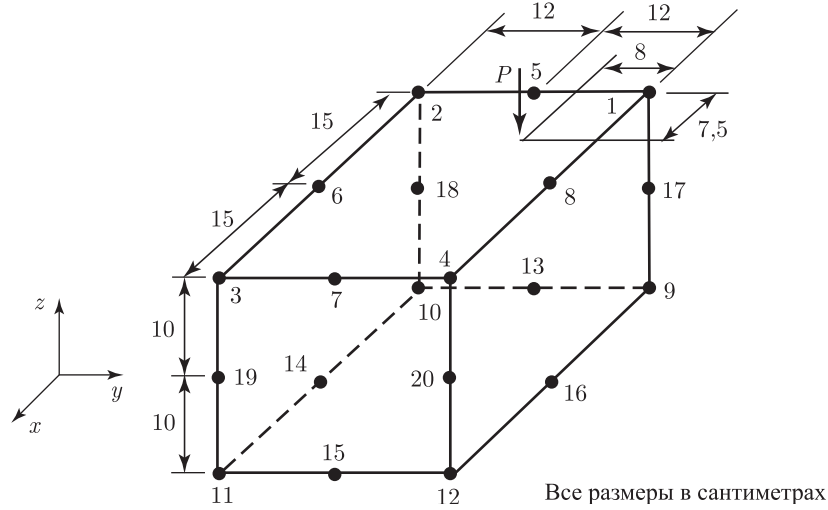
5.19.

Задача, сформулированная в примере 5.13, моделируется путем сочетания двух элементов с плоскими напряжениями, имеющих по пять узлов, и одного стержневого элемента с тремя узлами:

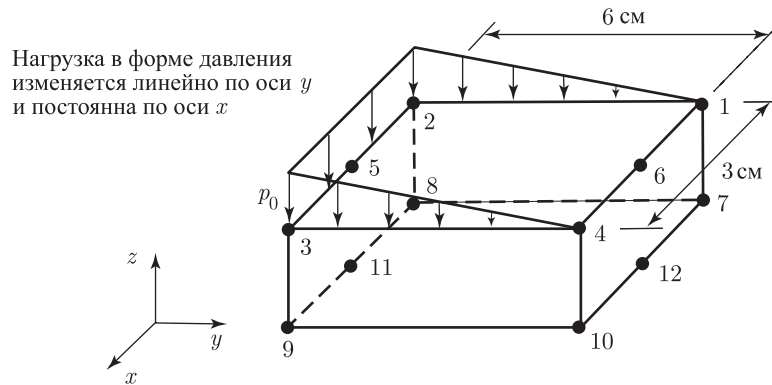


- (a) Определите в подробностях все матрицы, используемые при формулировке уравнений, определяющих равновесие, но не выполняйте операций интегрирования.
- (b) Предположите, что вы уже рассчитали неизвестные значения смещений в узловых точках. Дайте графическое изображение в изометрической проекции для всех смещений и напряжений в исследуемых элементах.

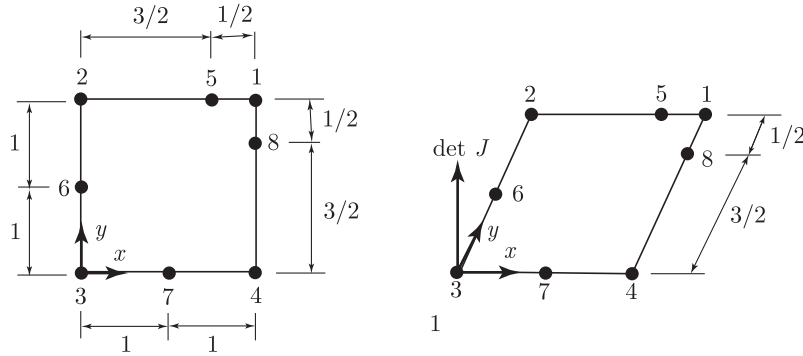
- 5.20. Показанный здесь элемент в форме кирпича, имеющий 20 узлов, подвергается воздействию сосредоточенной нагрузки, приложенной согласно указанию на схеме. Рассчитайте совместимые нагрузки в узловых точках.



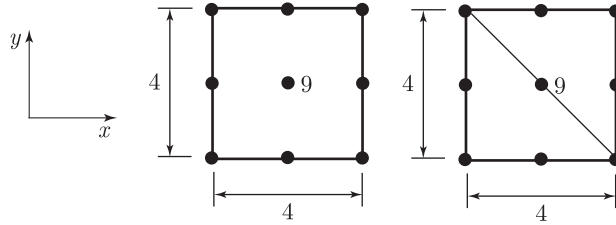
- 5.21. Элемент, представленный в упражнении 5.20, должен быть использован в динамическом анализе. Постройте разумно разбитую на блоки матрицу масс для данного элемента; используйте значение $\rho = 7,8 \times 10^{-3} \text{ кг/см}^3$.
- 5.22. Показанный здесь трехмерный элемент с 12-ю узлами подвергается действию нагрузки в форме давления, как указано на схеме. Рассчитайте совместимый вектор нагрузки для узловых точек 1, 2, 7 и 8.



- 5.23. Рассчитайте для показанного здесь элемента матрицу Якоби \mathbf{J} как функцию r , s и постройте в изометрической проекции график изменения $\det \mathbf{J}$ по поверхности элемента.



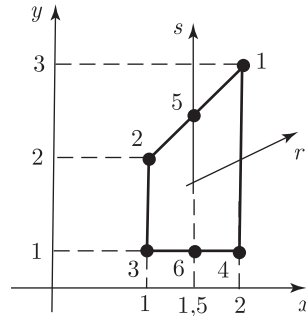
- 5.24. Рассмотрите показанные здесь элемент с девятью узлами и комплекс из двух треугольников с шестью узлами каждый (образованный с использованием интерполяционных функций, приведенных на рис. 5.25); для обоих вариантов постройте графики изменения интерполяционных функций и их производных по x , определяемых для узла 9.



- 5.25. Докажите, что интерполяционные функции, определяемые согласно (5.36) при Δh , определяемом согласно (5.37), соответствуют тем же самым допущениям относительно смещений, что и функции на рис. 5.25 (заметим, что начала координат, используемых при двух моделях, отличаются друг от друга).
- 5.26. Подвергните разрушению элемент в форме кирпича с 20-ю узлами, превратив его в пространственно изотропный тетраэдр с 10-ю узлами (используйте схему разрушения сторон, представленную на рис. 5.20). Определите ту поправку, которая должна быть внесена в выражение интерполяционной функции h_{16} кирпичного элемента для того, чтобы получить предполагаемое значения h_6 для тетраэдра (данного на рис. 5.27).
- 5.27.

Рассмотрите показанный здесь изопараметрический конечный элемент с плоскими деформациями, имеющий шесть узлов.

- (a) Постройте интерполяционные функции $h_i(r, s)$, $i = 1, \dots, 6$ для данного элемента.
- (b) Дайте в деталях доказательство того, что этот конечный элемент удовлетворяет (или не удовлетворяет) всем требованиям относительно сходимости, когда он используется в совместимом конечно-элементном комплексе.



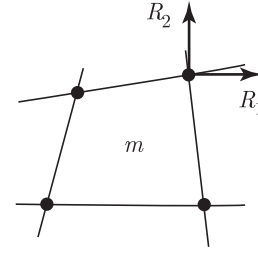
- 5.28. Рассмотрите изопараметрический элемент общего вида с четырьмя узлами, используемый в комплексе элементов так, как показано здесь.

- (a) Докажите, что силы в узловых точках, определяемые как

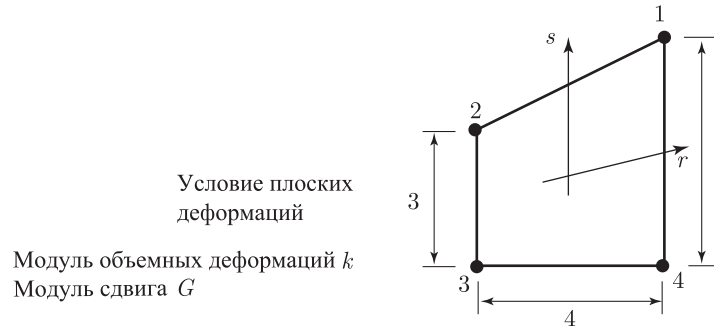
$$\mathbf{F}^{(m)} = \sum_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \boldsymbol{\tau}^{(m)} dV^{(m)},$$

находятся в равновесии для элемента m , где величина $\boldsymbol{\tau}^{(m)} = \mathbf{C}\mathbf{B}^{(m)}\mathbf{U}$ уже была рассчитана.

- (b) Покажите, что сумма сил в узловых точках, подсчитанных в каждом узле, находится в равновесии с приложенными внешними нагрузками R_i (включая реакции). (Подсказка: обратитесь к разделу 4.2.1, рис. 4.8.)



- 5.29. Рассмотрите таблицу 5.1 и случай углового искажения. Докажите, что члены, перечисляемые для элементов с 12-ю и 16-ю узлами, действительно являются правильными.
- 5.30. Рассмотрите таблицу 5.1 и случай искажения с искривлением кромок. Докажите, что члены, перечисляемые в столбце для элементов с 8-ю, 9-ю, 12-ю и 16-ю узлами, являются правильными.
- 5.31. Рассмотрите изопараметрический элемент 4/1 типа u/p , показанный здесь. Постройте все матрицы, требуемые для вычисления матрицы жесткости данного элемента, но не выполняйте никаких операций интегрирования.



5.4. Описание конструктивных элементов

Те понятия о геометрических интерполяциях и интерполяциях для смещений, которые были применены при описании двумерных и трехмерных элементов сплошной среды, могут применяться также при расчете элементных матриц для конструктивных элементов типа балок, пластин и оболочек. Однако если при описании элементов сплошной среды смещения u , v , w (те, которые применимы в конкретных условиях) интерполируются в терминах смещений того же типа в узловых точках, то при описании конструктивных элементов смещения u , v и w интерполируются в терминах смещений и поворотов срединной поверхности. Мы покажем, что эта процедура, по существу, соответствует модели для изопараметрического элемента сплошной среды с принудительными ограничениями на смещения. Кроме того, здесь, разумеется, имеет место главное предположение о том, что составляющая напряжения, нормальная к срединной поверхности, равна нулю. В силу этих причин конструктивные элементы справедливо называются *вырожденными изопараметрическими элементами*, но зачастую мы все же называем их просто *изопараметрическими элементами*.

Рассматривая модель для конструктивных элементов, в разделе 4.2.3 мы уже провели краткое обсуждение вопроса о том, как элементы типа балки, пластины или оболочки могут быть описаны с помощью теорий Бернулли для балок и Кирхгофа для пластин, в которых пренебрегается сдвиговыми деформациями. Если использовать теорию Кирхгофа,

то оказывается затруднительным удовлетворить условию межэлементной непрерывности по смещениям и поворотам кромок, так как повороты пластины (или оболочки) рассчитываются по поперечным смещениям. К тому же, если для представления конструкции типа оболочки используется комплекс плоских элементов, то для обеспечения достаточной точности в представлении геометрии данной оболочки может потребоваться сравнительно большое число элементов.

В данном разделе мы ставим своей целью обсудить альтернативный подход к описанию элементов типа балок, пластин и оболочек. В основе применяемого метода лежит теория, включающая, помимо прочего, учет сдвиговых деформаций. В этой теории смещения и повороты нормалей к срединным поверхностям являются независимыми переменными, а условия межэлементной непрерывности указанных величин могут быть выполнены напрямую, как и при исследовании сплошных сред. Кроме того, если применяются понятия изопараметрической интерполяции, то геометрия искривленных поверхностей оболочек интерполируется и может быть отображена с большой степенью точности. В последующих разделах мы обсудим вначале модель элементов типа балки и осесимметричной оболочки, где мы сможем в деталях продемонстрировать основные используемые принципы, а затем будет представлена модель для элементов общего вида, типа пластины и оболочки.

5.4.1. Элементы типа балки и осесимметричной оболочки

Обсудим вначале некоторые основные допущения, относящиеся к описанию элементов типа балки. Главное допущение при анализе изгиба балок с исключением сдвиговых деформаций состоит в том, что нормаль к срединной поверхности (нейтральная ось) исследуемой балки в процессе деформации остается прямой и что угол поворота этой нормали равен углу наклона срединной поверхности балки.

Это предположение кинематического характера, оно проиллюстрировано на рис. 5.35 а, соответствует теории Бернулли для балок и приводит к хорошо известному дифференциальному уравнению, определяющему изгиб балки, в котором роль единственной переменной играет поперечное смещение w (см. пример 3.20). Поэтому при использовании элементов типа балки, формулируемых с помощью этой теории, непрерывное поведение смещений между элементами требует, чтобы были непрерывными w и dw/dx .

Если теперь рассмотреть анализ изгиба балок с учетом сдвиговых деформаций, то мы будем сохранять допущение о том, что плоское сечение, первоначально нормальное к нейтральной оси, останется плоским, однако вследствие сдвиговых деформаций это сечение уже не останется нормальным к нейтральной оси. Как это показано на рис. 5.35 б, полный поворот плоскости, первоначально нормальной к нейтральной оси балки, задается поворотом перпендикуляра к нейтральной оси, а также сдвиговой деформацией

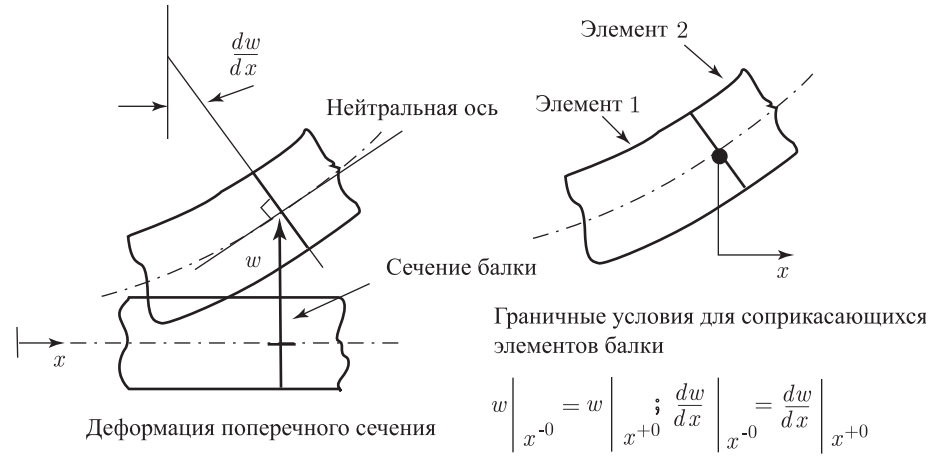
$$\beta = \frac{dw}{dx} - \gamma, \quad (5.56)$$

где γ — это постоянная сдвиговая деформация поперек рассматриваемого сечения. Это кинематическое допущение соответствует теории балок по Тимошенко (см. [Crandall et al. 1978]).

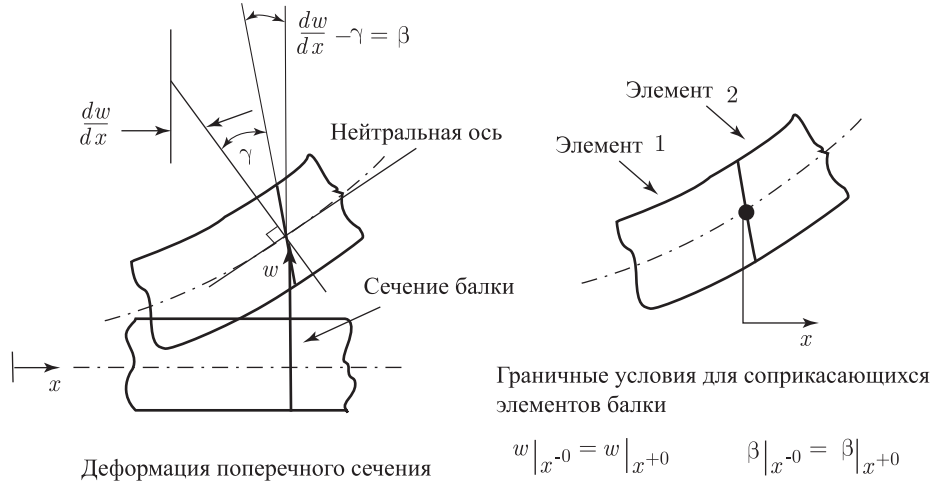
Если учесть, что фактические значения сдвигового напряжения и сдвиговой деформации изменяются по площади сечения, то сдвиговая деформация γ в соотношении (5.56) представляет собой некую эквивалентную постоянную деформации, реализуемую на соответствующей сдвиговой площади A_s , т. е.

$$\tau = \frac{V}{A_s}; \quad \gamma = \frac{\tau}{G}; \quad k = \frac{A_s}{A}, \quad (5.57)$$

где V — сдвиговая сила, действующая в рассматриваемом сечении. Чтобы дать разумную оценку коэффициенту k , можно воспользоваться различными предположениями (см. [Timo+shenko, Goodier 1970], а также [Washizu 1975]). Одна простая процедура состоит в том, чтобы вычислить поправочный коэффициент на влияние сдвига, используя условие о том, что постоянное сдвиговое напряжение, соответствующее (5.57), при своем воздействии на площади A_s должно дать ту же самую энергию сдвиговых деформаций, что и фактическое сдвиговое напряжение (определяемое с помощью теории балок), воздействующее на фактическую площадь поперечного сечения балки A . Рассмотрим приводимый ниже пример.



а. Деформации балки, за исключением сдвигового эффекта



б. Деформации балки, включая сдвиговый эффект

Рис. 5.35. Предположения, связанные с деформацией балки

Пример 5.23: Требуется вычислить поправочный коэффициент k на влияние сдвига применительно к балке прямоугольного поперечного сечения, имеющего ширину b и глубину h .

Энергия сдвиговых деформаций U для балки, приходящаяся на единицу ее длины, равна

$$\mathcal{U} = \int_A \frac{1}{2G} \tau_a^2 dA, \quad (a)$$

где τ_a — это фактическое значение сдвигового напряжения, G — модуль сдвига, а A — площадь поперечного сечения, $A = bh$.

Согласно предположению, в нашей конечно-элементной модели сдвиговая деформация остается постоянной по площади поперечного сечения балки (см. (5.56)). Учитывая, что в действительности сдвиговая деформация меняется по поперечному сечению балки, мы хотели бы найти эквивалентную площадь поперечного сечения A_s ,

соответствующую нашей конечно-элементной модели. Эта эквивалентность будет базироваться на приравнивании значений энергии сдвиговых деформаций.

Следовательно, если использовать значение U , заданное соотношением (а), при фактическом распределении сдвиговых деформаций, мы можем вычислить A_s из соотношения

$$\int_A \frac{1}{2G} \tau_a^2 dA = \int_{A_s} \frac{1}{2G} \left(\frac{V}{A_s} \right)^2 dA, \quad (b)$$

где V — это суммарная сдвиговая сила, действующая в сечении, т. е.

$$V = \int_A \tau_a dA. \quad (c)$$

Если мы используем выражение $k = A_s/A$, то из (b) получим

$$k = \frac{V^2}{A \int_A \tau_a^2 dA}.$$

Теперь используем соотношения (b) и (c) для балки с прямоугольным поперечным сечением. Элементарная теория балок дает (см. [Crandall et al. 1978])

$$\tau_a = \frac{3}{2} \frac{V}{A} \left[\frac{(h/2)^2 - y^2}{(h/2)^2} \right],$$

а это дает $k = 5/6$.

Конечно-элементная схема для элемента типа балки при допущении (5.56) получается, если использовать основные выражения (4.19)–(4.22), касающиеся виртуальной работы. В дальнейшем мы рассмотрим сначала, с чисто иллюстративными целями, специфическую модель матриц для элемента типа балки, соответствующую простому элементу, показанному на рис. 5.36, а после этого обсудим модель для трехмерных элементов типа балки более общего вида, а также модель для осесимметричных элементов типа оболочки.

Двумерные прямые элементы типа балки

На рис. 5.36 показана двумерная балка с прямоугольным поперечным сечением, рассматриваемая здесь. Если использовать общее выражение принципа виртуальной работы, то при обсуждавшихся нами выше предположениях будем иметь (см. упражнение 5.32)

$$EI = \int_0^L \left(\frac{d\beta}{dx} \right) \left(\frac{d\bar{\beta}}{dx} \right) dx + GAk \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} - \beta \right) \left(\frac{d\bar{w}}{dx} - \bar{\beta} \right) dx = \int_0^L p\bar{w} dx + \int_0^L m\bar{\beta} dx, \quad (5.58)$$

где p и m представляют собой поперечную и моментную нагрузки в расчете на единицу длины. Если использовать интерполяции

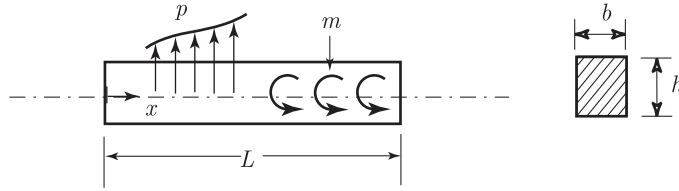
$$w = \sum_{i=1}^q h_i w_i; \quad \beta = \sum_{i=1}^q h_i \theta_i, \quad (5.59)$$

где q — это число используемых узлов, а h_i — одномерные интерполяционные функции, перечисленные на рис. 5.4, то мы можем непосредственно применить изопараметрические модели, обсуждавшиеся в разделе 5.3, чтобы получить все нужные нам элементные матрицы. Будем полагать, что

$$\begin{aligned} w &= \mathbf{H}_w \hat{\mathbf{u}}; & \beta &= \mathbf{H}_\beta \hat{\mathbf{u}}; \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= \mathbf{B}_w \hat{\mathbf{u}}; & \frac{\partial \beta}{\partial x} &= \mathbf{B}_\beta \hat{\mathbf{u}}, \end{aligned} \quad (5.60)$$

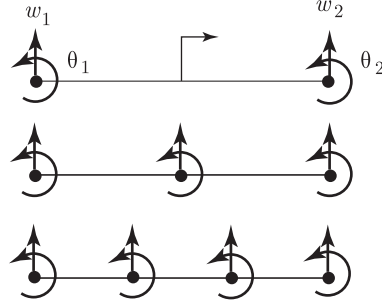
где

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}^T &= [w_1 \dots w_q \quad \theta_1 \dots \theta_q], \\ \mathbf{H}_w &= [h_1 \dots h_q \quad 0 \dots 0], \\ \mathbf{H}_\beta &= [0 \dots 0 \quad h_1 \dots h_q] \end{aligned} \quad (5.61)$$



а. Балка с приложенной к ней нагрузкой

$$\text{Модуль Юнга } E \quad \text{Модуль сдвига } G \quad k = \frac{5}{6}; \quad A = hb; \quad I = \frac{bh^3}{12}$$



$\theta_i = \beta_i, i = 1, \dots, q$
(интерполяционные функции
заданы на рис. 5.3)

б. Модели с двумя, тремя и четырьмя узлами

Рис. 5.36. Модель для двумерного элемента в форме балки

и

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_w &= J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial r} & \dots & \frac{\partial h_q}{\partial r} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}_\beta &= J^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{\partial h_1}{\partial r} & \dots & \frac{\partial h_q}{\partial r} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.62)$$

где $J = \partial x / \partial r$; тогда для одиночного элемента имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= EI \int_{-1}^1 \mathbf{B}_\beta^T \mathbf{B}_\beta \det J dr + GAk \int_{-1}^1 (\mathbf{B}_w - \mathbf{H}_\beta)^T (\mathbf{B}_w - \mathbf{H}_\beta) \det J dr, \\ \mathbf{R} &= \int_{-1}^1 \mathbf{H}_w^T p \det J dr + \int_{-1}^1 \mathbf{H}_\beta^T m \det J dr. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Кроме того, при динамическом анализе матрица масс может быть рассчитана путем применения принципа Даламбера (см. (4.23)); следовательно,

$$\mathbf{M} = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \mathbf{H}_w \\ \mathbf{H}_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho b h & 0 \\ 0 & \frac{\rho b h^3}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_w \\ \mathbf{H}_\beta \end{bmatrix} \det J dr. \quad (5.64)$$

При этих расчетах мы используем естественную систему координат для данной балки, так как именно такой подход эффективен применительно к модели имеющих более общий характер элементов типа балки, пластины или оболочки. Однако если рассматривается прямая балка, имеющая постоянное поперечное сечение, то интегралы также могут эффективно вычисляться и без использования естественных координат, как это и демонстрируется на приводимом ниже примере.

Пример 5.24: Требуется определить детальные выражения, нужные для расчета матрицы жесткости и вектора нагрузки применительно к показанному на рис. 5.37 элементу типа балки с тремя узлами.

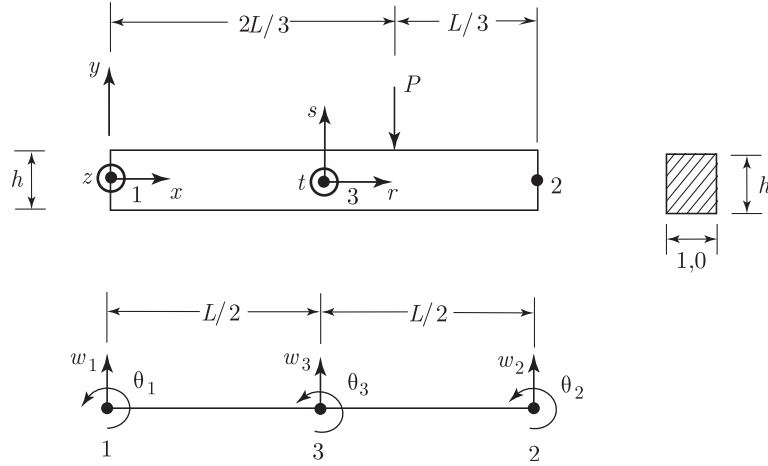


Рис. 5.37. Элемент типа балки с тремя узлами

Те интерполяционные функции, которые следует использовать, приводятся на рис. 5.4. Эти функции задаются в терминах r и позволяют получить

$$x = \sum_{i=1}^3 h_i x_i.$$

При $x_1 = 0$, $x_2 = L$ и $x_3 = L/2$ получим

$$x = \frac{L}{2} (1 + r).$$

Следовательно, те же интерполяционные функции в терминах x имеют вид

$$h_1 = \frac{2x^2}{L^2} - \frac{3x}{L} + 1,$$

$$h_2 = \frac{2x^2}{L^2} - \frac{x}{L},$$

$$h_3 = \frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2}.$$

Если использовать обозначение $(\)' \equiv \partial/\partial x$, то отсюда следует, что

$$h_1' = \frac{4x}{LL^2} - \frac{3}{L},$$

$$h_2' = \frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L},$$

$$h_3' = \frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2}.$$

При степенях свободы, указываемых в том порядке, как в (5.61), мы имеем

$$\mathbf{K} = \frac{Eh^3}{12} \int_0^L \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ h_1' \\ h_2' \\ h_3' \end{bmatrix} [000h_1'h_2'h_3'] dx + \frac{5Gh}{6} \int_0^L \begin{bmatrix} h_1' \\ h_2' \\ h_3' \\ -h_1 \\ -h_2 \\ -h_3 \end{bmatrix} [h_1'h_2'h_3'-h_1-h_2-h_3] ds$$

и

$$\mathbf{R}^T = -P \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{8}{9} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Элемент, показанный на рис. 5.36, — это элемент, базирующийся только на учете смещений (в предположении о том, что все интегралы могут быть вычислены точно), и он может быть применен при условии, что будут использованы три или четыре узла (причем внутренние узлы размещаются или в серединах сторон, или на одной трети их длины соответственно). Однако если применяется элемент с двумя узлами или если внутренние узлы для элементов с тремя или с четырьмя узлами располагаются не так, как указано выше, то использование такого элемента не может быть рекомендовано, так как сдвиговые деформации не будут представлены с достаточной степенью точности. Этот недостаток оказывается выраженным особенно ярко, если исследуемый элемент — тонкий.

Чтобы получить более детальное представление о поведении этих элементов в условиях, когда балка становится тонкой, вспомним, что принцип виртуальной работы является эквивалентным условию постоянства полного потенциала (см. пример 4.4). При формулировке для балки полный потенциал определяется выражением

$$\Pi = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d\beta}{dx} \right)^2 dx + \frac{GAk}{2} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} - \beta \right)^2 dx - \int_0^L p w dx - \int_0^L m \beta dx, \quad (5.65)$$

где первые два интеграла характеризуют, соответственно, энергию изгиба и энергию сдвига, а два последних интеграла выражают потенциал нагрузок.

Рассмотрим полный потенциал Π

$$\tilde{\Pi} = \int_0^L \left(\frac{d\beta}{dx} \right)^2 dx + \frac{GAk}{EI} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} - \beta \right)^2 dx, \quad (5.66)$$

полученный из выражения (5.65) путем пренебрежения вкладами от нагрузок и деления на $(1/2)EI$. Выражение (5.66) показывает относительную важность вкладов в матрицу жесткости элемента, определяемых изгибом и сдвигом, причем мы замечаем, что множитель GAk/EI у сдвигового члена может стать очень большим, когда рассматривается тонкий элемент. Этот множитель может рассматриваться как некое штрафное число (см. раздел 3.4.1); это значит, что мы можем написать

$$\tilde{\Pi} = \int_0^L \left(\frac{d\beta}{dx} \right)^2 dx + \alpha \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} - \beta \right)^2 dx; \quad \alpha = \frac{GAk}{EI}, \quad (5.67)$$

где $\alpha \rightarrow \infty$ при $h \rightarrow 0$. Однако это означает, что когда балка становится тонкой, то мы будем приближаться к условию о принудительном ограничении, касающемся нулевых сдвиговых деформаций (т. е. $dw/dx = \beta$ при $\gamma = 0$).

Этот аргумент справедлив и для реальной модели сплошной среды, подчиняющейся условию постоянства Π .

Теперь, если мы рассматриваем конечно-элементное представление задачи, то важно иметь в виду, что соответствующие этому представлению предположения относительно β и w допускают возможность того, что при больших значениях α сдвиговые деформации могут оставаться малыми во всей области, занимаемой данным элементом. Если в силу предположений, касающихся w и β , сдвиговые деформации не могут оставаться малыми — в действительности, равными нулю, — повсюду, то в наш анализ будет включено ошибочное значение энергии сдвиговых деформаций (которое может быть велико в сравнении с энергией изгиба). Если исследуется конструкция с тонкой балкой, то в результате указанной ошибки мы получим значения смещений, оказывающихся значительно меньше точных значений. Следовательно, в подобного рода случаях конечно-элементные модели оказываются чрезмерно жесткими.

Это явление наблюдается при использовании показанного на рис. 5.36 элемента в виде балки с двумя узлами, и с учетом этого указанный элемент не следовало бы применять при исследовании конструкций в виде тонких балок, причем сделанный вывод распространяется также на базирующиеся на учете смещений элементы низкого порядка типа пластин и оболочек; такие элементы рассматриваются в разделе 5.4.2. Чрезмерно жесткое поведение, свойственное тонкими элементами, было названо *сдвиговым затуплением элемента*.

Рисунок 5.38 показывает пример записи при использовании элемента с двумя узлами, базирующегося на учете смещений. Явление сдвигового записи изучается нами при рассмотрении ниже следующего примера (см. также раздел 4.5.7).

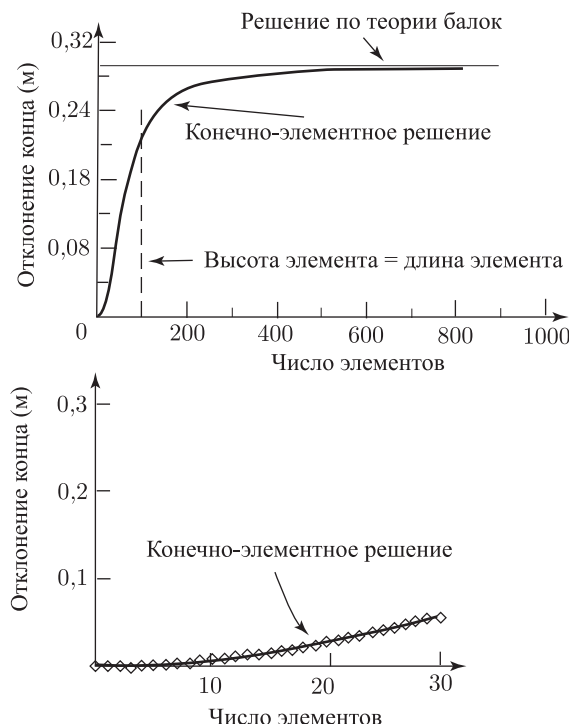
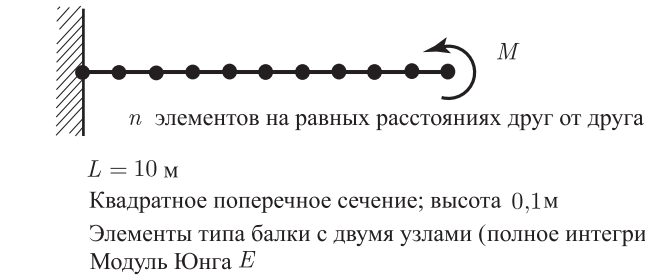


Рис. 5.38. Решение задачи о консольной балке; отклонение конца связано с числом элементов и обнаруживает записи элементов

Пример 5.25: Рассмотрим изопараметрический элемент типа балки с двумя узлами, моделирующий консольную балку, которая подвергается только моментной нагрузке на своем конце (см. рис. 5.39). Требуется определить, какие значения θ_2 и w_2 были бы получены в предположении о том, что сдвиговая деформация равна нулю.

Приведенная здесь информация позволяет получить выражения для интерполяции w и β в виде

$$\beta = \frac{1+r}{2} \theta_2,$$

$$w = \frac{1+r}{2} w_2.$$

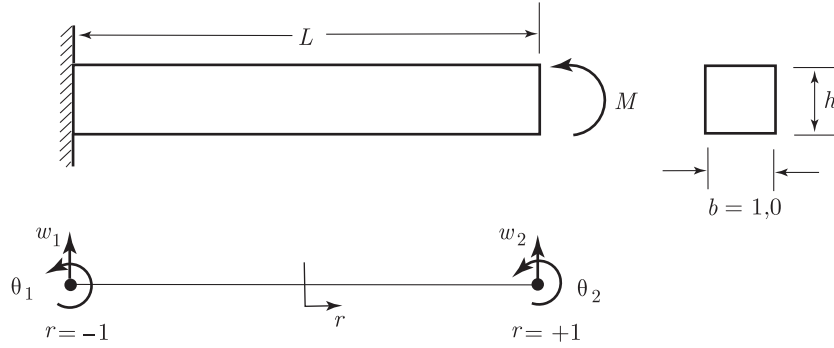


Рис. 5.39. Элемент с двумя узлами как представление консольной балки

Следовательно, сдвиговая деформация выражается как

$$\gamma = \frac{w_2}{L} - \frac{1+r}{2} \theta_2.$$

При приложении только моментной нагрузки сдвиговая деформация должна быть равна нулю. Если поставить это условие, то мы получим

$$0 = \frac{w_2}{L} - \frac{1+r}{2} \theta_2. \quad (a)$$

Однако для того, чтобы это выражение оставалось равным нулю по всей длине балки (т.е. для любого значения $-1 \leq r \leq +1$), мы, очевидно, должны иметь $w_2 = \theta_2 = 0$. Следовательно, нулевое значение сдвиговой деформации в балке может быть достигнуто только тогда, когда деформаций нет вообще!

Аналогично этому, если принудить условие (a) выполняться в двух точках Гаусса, $r = \pm 1/\sqrt{3}$ (т.е. если мы проводим интегрирование по Гауссу в двух точках), то получим два уравнения,

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1+1/\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1-1/\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Учитывая, что матрица коэффициентов не является особенной, единственное решение имеет вид $w_2 = \theta_2 = 0$. Разумеется, это тот же результат, который был получен ранее, так как если мы полагаем линейно изменяющуюся сдвиговую деформацию равной нулю в двух точках, то это означает наличие нулевой сдвиговой деформации по всей длине элемента.

Однако мы можем воспользоваться соотношением (a) также и с целью исследовать, что случится, если мы поставим принудительное условие о том, чтобы сдвиговая деформация была равна нулю только в средней точке балки (т.е. при $r = 0$). В этом случае уравнение (a) приводит к соотношению

$$w_2 = \frac{\theta_2}{2} L. \quad (b)$$

Следовательно, если бы мы предположили, что сдвиговая деформация постоянна и имеет значение

$$\gamma = \frac{w_2}{L} - \frac{\theta_2}{2},$$

то у нас мог бы получиться более привлекательный элемент. Мы уже фактически использовали это предположение в примере 4.30.

Чтобы модифицировать вышеизложенную модель, предназначенную для изопараметрических элементов, базирующихся только на учете смещений и имеющих форму балки, а также форму изгибающейся пластины, могут быть предложены различные процедуры, позволяющие получить эффективные элементы, не приводящие к запиранию.

Для любой из таких формулировок ключевым моментом является то, что соответствующий элемент должен быть надежным и эффективным; в частности, это означает, что матрица жесткости данного элемента не должна содержать никакой лишней моды с нулевой энергией, и что элемент должен обладать высокой способностью к прогнозу при достаточно общих условиях в отношении геометрической формы и нагрузок. Эти требования значительно легче выполнить при исследовании поведения элементов в форме балки, чем для элементов общего характера типа пластин и оболочек.

Эффективный элемент типа балки получается путем использования смешанной интерполяции смещений и поперечных сдвиговых деформаций. Эта смешанная интерполяция представляет собой приложение более общей процедуры, применяемой для описания элементов типа изгибающейся пластины и оболочки (см. раздел 5.4.2).

Обсуждение, проведенное при рассмотрении примера 5.25, приводит к предположению о том, что для реализации возможности нулевых поперечных сдвиговых деформаций в элементе мы можем допустить, что для элемента, имеющего q узлов, пригодны интерполяции (см. также пример 4.30)

$$\left. \begin{aligned} w &= \sum_{i=1}^q h_i w_i \\ \beta &= \sum_{i=1}^q h_i \theta_i \end{aligned} \right\} \quad (5.68)$$

$$\gamma = \sum_{i=1}^{q-1} h_i^* \gamma_i^{\text{DI}}. \quad (5.69)$$

Здесь h_i — это интерполяционные функции для смещений и для поворота сечения, определяемые в q узлах, а h_i^* — интерполяционные функции для поперечных сдвиговых деформаций. Эти функции связаны с дискретными значениями γ_i^{DI} , число которых равно $q - 1$, где γ_i^{DI} — это сдвиговая деформация в точке Гаусса i , непосредственно получаемая из интерполяций смещение/поворот сечения (т. е. посредством интерполяции смещений); следовательно,

$$\gamma_i^{\text{DI}} = \left(\frac{dw}{dx} - \beta \right) \Big|_{G_i}. \quad (5.70)$$

На рис. 5.40 показаны интерполяции сдвиговых деформаций, используемые для элементов типа балки с двумя, тремя или четырьмя узлами. Эти элементы в форме балок со смешанной интерполяцией являются очень надежными, так как они не подвержены запиранию, демонстрируют отличную сходимостъ и, разумеется, не содержат никаких лишних мод с нулевой энергией. При решении задачи, показанной на рис. 5.38, для получения точных значений смещения на конце и угла поворота нужно применить только один элемент. Мы можем без труда доказать справедливость этого результата для элемента с двумя узлами с помощью продолжения анализа, проведенного в примере 5.25, а элементы с тремя и с четырьмя узлами содержат интерполяции элемента с двумя узлами и, поэтому, также должны дать точное решение. Следовательно, в результате использования смешанной интерполяции выявляется решительное улучшение в поведении элемента.

Кроме того, следует указать на привлекательную особенность, касающуюся вычислений: матрицы жесткости этих элементов могут эффективно вычисляться путем простого интегрирования модели, базирующейся на учете смещений, при однотоочечном интегрировании по Гауссу для элемента с двумя узлами, при двухточечном интегрировании по Гауссу для элемента с тремя узлами, и при трехточечном интегрировании по Гауссу для элемента с четырьмя узлами. А именно, когда используется однотоочечное интегрирование при вычислении матрицы жесткости элемента с двумя узлами, то поперечная сдвиговая деформация предполагается постоянной, тогда как вклад от изгибной деформации по-прежнему рассчитывается точно. Аналогичная аргументация справедлива для элементов с тремя и с четырьмя узлами. Этот подход к численному расчету матриц жесткости рассматриваемых элементов можно назвать «укороченным интегрированием» для элемента, базирующегося на учете смещений, однако в действительности он представляет

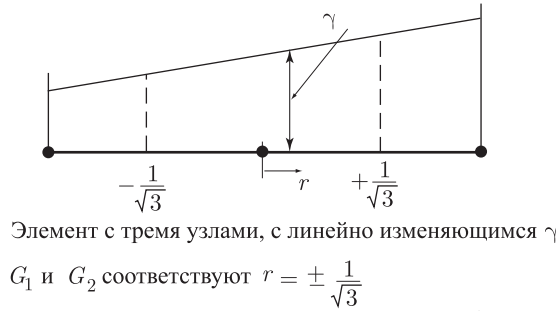
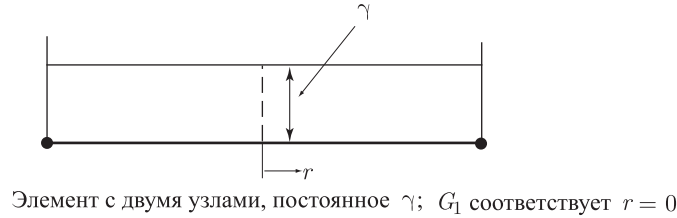


Рис. 5.40. Интерполяции сдвиговых деформаций для элементов типа балки со смешанной интерполяцией

собой полное интегрирование для элемента со смешанной интерполяцией. Математический анализ таких элементов дается в разделе 4.5.7.

Элементы в форме искривленной балки общего вида

При проводившемся выше обсуждении мы предполагали рассмотренные элементы прямыми; поэтому соответствующая схема базировалась на уравнении (5.58). Чтобы прийти к общей трехмерной модели для элемента в форме искривленной балки, мы продвигаемся аналогичным путем, однако теперь нужно интерполировать криволинейную геометрию и соответствующие ей смещения балки. При таких интерполяциях строится элемент, базирующийся только на учете смещений, который, как и в случае прямого элемента, оказывается очень жестким и не является полезным. В случаях прямых элементов типа балки генерируются только лишние сдвиговые деформации (всегда для элемента с двумя узлами, а для элементов с тремя и с четырьмя узлами — когда внутренние узлы размещаются не на своих естественных позициях; см. упражнение 5.34), а в случае искривленных элементов появляются также и лишние деформации мембранного типа. Следовательно, искривленный элемент приводит также и к *мембранному заперению* (см., например, [Stolarski, Belytschko 1983]).

Эффективные элементы в форме балок общего типа получаются с помощью уже описанной здесь смешанной интерполяции. Однако сдвиговые деформации, а также изгибные и мембранные деформации, интерполируются с использованием функций, приведенных на рис. 5.40. Эти интерполяции для деформаций связаны со смещениями и с углами поворота в узловых точках посредством вычисления деформаций, получаемых с учетом

$${}^{\ell}z(r, s, t) = \sum_{k=1}^q h_k {}^{\ell}z_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k {}^{\ell}V_{tz}^k + \frac{s}{2} \sum_{k=1}^q b_k h_k {}^{\ell}V_{sz}^k,$$

где $h_k(r)$ — интерполяционные функции, приведенные на рис. 5.4, и

$$\begin{aligned} {}^{\ell}x, {}^{\ell}y, {}^{\ell}z &— \text{декартовы координаты произвольной точки элемента,} \\ {}^{\ell}x_k, {}^{\ell}y_k, {}^{\ell}z_k &— \text{декартовы координаты узловой точки } k, \\ a_k, b_k &— \text{размеры поперечного сечения балки в узловой точке } k, \\ {}^{\ell}V_{tx}^k, {}^{\ell}V_{ty}^k, {}^{\ell}V_{tz}^k &— \text{составляющие единичного вектора } {}^{\ell}\mathbf{V}_t^k \\ &\text{в направлении } t, \text{ в узловой точке } k, \\ {}^{\ell}V_{sx}^k, {}^{\ell}V_{sy}^k, {}^{\ell}V_{sz}^k &— \text{составляющие единичного вектора } {}^{\ell}\mathbf{V}_s^k \\ &\text{в направлении } s, \text{ в узловой точке } k; \text{ мы называем } {}^{\ell}\mathbf{V}_t^k \\ &\text{и } {}^{\ell}\mathbf{V}_s^k \text{ нормальными векторами, или управляющими} \\ &\text{векторами в узловой точке } k. \end{aligned}$$

Левый верхний индекс ℓ обозначает конфигурацию элемента, т. е. значение $\ell = 0$ обозначает первоначальную конфигурацию, тогда как значение $\ell = 1$ соответствует конфигурации в деформированном состоянии. Здесь мы предполагаем, что векторы ${}^0\mathbf{V}_s^k$ и ${}^0\mathbf{V}_t^k$ нормальны к нейтральной оси балки и нормальны друг по отношению к другу. Однако это условие может быть смягчено, как это делается при описании элемента типа оболочки (см. раздел 5.4.2).

Составляющие смещения в произвольной точке элемента выражаются как

$$\begin{aligned} u(r, s, t) &= {}^1x - {}^0x, \\ v(r, s, t) &= {}^1y - {}^0y, \\ w(r, s, t) &= {}^1z - {}^0z, \end{aligned} \quad (5.72)$$

и, после подстановки выражений из (5.71), получим

$$\begin{aligned} u(r, s, t) &= \sum_{k=1}^q h_k u_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k V_{tx}^k + \frac{s}{2} \sum_{k=1}^q b_k h_k V_{sx}^k, \\ v(r, s, t) &= \sum_{k=1}^q h_k v_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k V_{ty}^k + \frac{s}{2} \sum_{k=1}^q b_k h_k V_{sy}^k, \\ w(r, s, t) &= \sum_{k=1}^q h_k w_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k V_{tz}^k + \frac{s}{2} \sum_{k=1}^q b_k h_k V_{sz}^k, \end{aligned} \quad (5.73)$$

где

$$\mathbf{V}_t^k = {}^1\mathbf{V}_t^k - {}^0\mathbf{V}_t^k, \quad \mathbf{V}_s^k = {}^1\mathbf{V}_s^k - {}^0\mathbf{V}_s^k. \quad (5.74)$$

Наконец, мы выражаем векторы \mathbf{V}_t^k и \mathbf{V}_s^k в терминах углов поворота относительно декартовых осей x, y, z :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_t^k &= \boldsymbol{\theta}_k \times {}^0\mathbf{V}_t^k, \\ \mathbf{V}_s^k &= \boldsymbol{\theta}_k \times {}^0\mathbf{V}_s^k, \end{aligned} \quad (5.75)$$

где $\boldsymbol{\theta}_k$ — вектор, составляющими которого являются углы поворота в узловой точке k (см. рис. 5.41):

$$\boldsymbol{\theta}_k = \begin{bmatrix} \theta_x^k \\ \theta_y^k \\ \theta_z^k \end{bmatrix}. \quad (5.76)$$

Используя соотношения (5.71)–(5.76), мы будем иметь все основные уравнения, необходимые для построения интерполяционных матриц по смещениям и деформациям, применяемых для вычисления элементных матриц для балки.

Члены, входящие в матрицу интерполяции смещений \mathbf{H} , получаются путем подстановки (5.75) в (5.73). Для вычисления матрицы деформация–смещение следует признать, что

в случае балки единственная группа интересных для нас компонентов деформации — это продольная деформация $\epsilon_{\eta\eta}$ и поперечные сдвиговые деформации $\gamma_{\eta\xi}$ и $\gamma_{\eta\zeta}$, где η , ξ и ζ — это конвектируемые (связанные с телом) оси координат (см. рис. 5.41). Таким образом, мы отыскиваем некое соотношение в форме

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{\eta\eta} \\ \gamma_{\eta\xi} \\ \gamma_{\eta\zeta} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^q \mathbf{B}_k \hat{\mathbf{u}}_k, \quad (5.77)$$

где

$$\hat{\mathbf{u}}_k^T = [u_k v_k w_k \quad \theta_x^k \theta_y^k \theta_z^k], \quad (5.78)$$

а совокупность матриц \mathbf{B}_k , $k = 1, \dots, q$ составляет матрицу \mathbf{B} ,

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \dots \quad \mathbf{B}_q]. \quad (5.79)$$

Следуя обычной процедуре описания для изопараметрического конечного элемента и используя соотношения (5.73), получаем

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^q \begin{bmatrix} \frac{\partial h_k}{\partial r} & [1 \quad (g)_{1i}^k \quad (g)_{2i}^k \quad (g)_{3i}^k] \\ h_k & [0 \quad (\hat{g})_{1i}^k \quad (\hat{g})_{2i}^k \quad (\hat{g})_{3i}^k] \\ h_k & [0 \quad (\bar{g})_{1i}^k \quad (\bar{g})_{2i}^k \quad (\bar{g})_{3i}^k] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ \theta_x^k \\ \theta_y^k \\ \theta_z^k \end{bmatrix}, \quad (5.80)$$

причем производные от v и w получаются отсюда путем простой замены u на v или w . В формулах (5.80) имеем $i = 1$ для u , $i = 2$ для v и $i = 3$ для w , и применяем обозначения

$$(\hat{g})^k = \frac{b_k}{2} \begin{bmatrix} 0 & -{}^0V_{sz}^k & {}^0V_{sy}^k \\ {}^0V_{sz}^k & 0 & -{}^0V_{sx}^k \\ -{}^0V_{sy}^k & {}^0V_{sx}^k & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.81)$$

$$(\bar{g})^k = \frac{a_k}{2} \begin{bmatrix} 0 & -{}^0V_{tz}^k & {}^0V_{ty}^k \\ {}^0V_{tz}^k & 0 & -{}^0V_{tx}^k \\ -{}^0V_{ty}^k & {}^0V_{tx}^k & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.82)$$

$$(g)_{ij}^k = s(\hat{g})_{ij}^k + t(\bar{g})_{ij}^k. \quad (5.83)$$

Чтобы получить производные смещений, соответствующие координатам x , y и z , применим преобразование Якоби

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{J}^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}, \quad (5.84)$$

где матрица Якоби \mathbf{J} содержит производные координат x , y и z по естественным координатам r , s и t . Подставляя (5.80) в (5.84), получим

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^q \begin{bmatrix} J_{11}^{-1} \frac{\partial h_k}{\partial r} & (G1)_{i1}^k & (G2)_{i1}^k & (G3)_{i1}^k \\ J_{21}^{-1} \frac{\partial h_k}{\partial r} & (G1)_{i2}^k & (G2)_{i2}^k & (G3)_{i2}^k \\ J_{31}^{-1} \frac{\partial h_k}{\partial r} & (G1)_{i3}^k & (G2)_{i3}^k & (G3)_{i3}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ \theta_x^k \\ \theta_y^k \\ \theta_z^k \end{bmatrix}, \quad (5.85)$$

причем, опять-таки, производные от функций v и w получаются отсюда путем простой замены u на v или w . В (5.85) мы используем обозначение

$$(Gm)_{in}^k = [J_{n1}^{-1} (g)_{mi}^k] \frac{\partial h_k}{\partial r} + [J_{n2}^{-1} (\hat{g})_{mi}^k + J_{n3}^{-1} (\bar{g})_{mi}^k] h_k. \quad (5.86)$$

Используя выражения для производных от смещений из (5.85), мы можем теперь вычислить элементы матрицы деформация–смещение в точках Гаусса рассматриваемого

элемента путем определения составляющих деформации, соответствующих осям x , y , z и преобразования этих составляющих в локальные деформации $\epsilon_{\eta\eta}$, $\gamma_{\eta\xi}$ и $\gamma_{\eta\zeta}$.

Соответствующий закон связи напряжение–деформация, который должен быть использован в модели, имеет вид (при использовании k в качестве поправочного коэффициента на учет влияния сдвига)

$$\begin{bmatrix} \tau_{\eta\eta} \\ \tau_{\eta\xi} \\ \tau_{\eta\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & Gk & 0 \\ 0 & 0 & Gk \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{\eta\eta} \\ \gamma_{\eta\xi} \\ \gamma_{\eta\zeta} \end{bmatrix}. \quad (5.87)$$

Таблица 5.2. Данные об использовании изопараметрических элементов типа балки при анализе задачи, представленной на рис. 5.42

а. $\theta_{\text{конечно-элемент}}/\theta_{\text{аналит}}$ на конце балки, решение для одного элемента с тремя узлами

	Центр узла при $\alpha = 22, 5^\circ$		Центр узла при $\alpha = 22^\circ$	
h/R	На основе смещений	Смешанная интерполяция	На основе смещений	Смешанная интерполяция
0,50	0,92	1,00	0,91	1,00
0,10	0,31	1,00	0,31	1,00
0,01	0,004	1,00	0,005	1,00
00,001	0,00004	1,00	0,00005	1,00

б. $\theta_{\text{конечно-элемент}}/\theta_{\text{аналит}}$ на конце балки, решение для одного элемента с четырьмя узлами

	Центр узла при $\alpha_1 = 15^\circ$, $\alpha_2 = 30^\circ$		Центр узла при $\alpha_1 = 10^\circ$, $\alpha_2 = 25^\circ$	
h/R	На основе смещений	Смешанная интерполяция	На основе смещений	Смешанная интерполяция
0,50	1,00	1,00	0,97	0,997
0,10	0,999	1,00	0,70	0,997
0,01	0,998	1,00	0,37	0,997
00,001	0,998	1,00	0,37	0,997

После этого матрица жесткости данного элемента получается путем численного интегрирования, причем для интегрирования по r используются показанные на рис. 5.40 точки Гаусса, а для интегрирования по s и t — формулы Ньютона–Котеса или Гаусса (см. раздел 5.5).

Таблица 5.2 показывает характеристики элементов со смешанной интерполяцией при исследовании поведения показанной на рис. 5.42 искривленной консоли и демонстрирует эффективность используемых элементов.

Как уже отмечалось ранее, рассматриваемый элемент не охватывает эффекты коробления, которые могут быть значительными для элементов в форме балки с прямоугольным

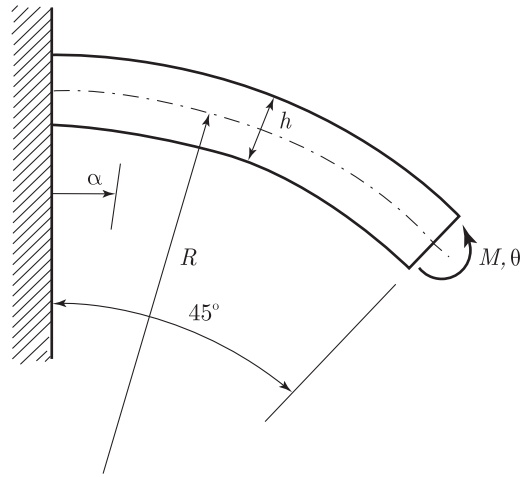


Рис. 5.42. Задача об искривленной консоли, предназначенная для теста изопараметрических элементов типа балки

поперечным сечением, а также, разумеется, для элементов в форме балки с поперечным сечением общего вида. Смещения типа коробления могут быть включены в рассмотрение путем добавления надлежащих интерполяций смещения к тем, которые задаются формулами (5.73). Если вводятся также добавочные степени свободы, соответствующие деформациям коробления, то может быть наложено условие непрерывности коробления при пересечении границы между элементами. Однако может оказаться достаточным допустить «свободное» коробление в каждом элементе без введения принудительного условия о непрерывности коробления на границе между элементами. Это достигается путем добавления к интерполяциям смещений членов, отвечающих за деформации типа коробления, и к последующему статическому сгущению интенсивности деформаций этого типа (см. [Bathe, Chaudhary 1982], а также упражнение 5.37).

Другое приложение модели для искривленной балки общего вида состоит в том, что поперечное сечение — круглое, с пустотой внутри, иначе говоря, рассматривается поперечное сечение трубы. В этом случае, если элемент искривлен, то могут оказаться важными деформации типа коробления и сжатия круга с его превращением в овал и, опять-таки, в интерполяции смещений, заданные формулами (5.73), должны быть внесены поправки. В этой ситуации важно также поставить условия непрерывности деформаций коробления и сжатия круга, а по этой причине необходимо ввести дополнительные степени свободы в узлах элементов (см. [Bathe, Almeida 1982]).

Рассматривая основы данной модели согласно соотношениям (5.71)–(5.87), мы устанавливаем, что исследуемый элемент может быть произвольным образом искривлен и что размеры его поперечного сечения могут изменяться вдоль оси элемента. В этой модели ось элемента совпадает с его геометрической срединной линией, однако это отнюдь не необходимо, и имеется возможность прямой формулировки для элементов более общего характера (см. упражнение 5.38).

Вдобавок к представлению общей модели в рамках линейного анализа, данный подход оказывается особенно полезным для нелинейного анализа больших смещений в конструкциях типа балки. Как об этом будет идти речь в разделе 6.5.1, при такого рода анализе элемент в форме балки, первоначально прямой, становится искривленным и искажается, и эти деформации могут моделироваться весьма точно.

Разумеется, если проводится линейный анализ и если элемент — прямой и имеет поперечное сечение постоянной площади, то модель сводится к той, которая дана в соотношениях (5.56)–(5.70). Это обстоятельство иллюстрируется на приводимом ниже примере.

Пример 5.26: Требуется показать, что применение общей формулировки согласно соотношениям (5.71)–(5.87) к элементу в форме балки, показанному на рис. 5.37, сводится к использованию уравнения (5.58).

С целью применения общих соотношений (5.71)–(5.87), обратимся к рисункам 5.37 и 5.41, в результате чего имеем

$${}^0\mathbf{V}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^0\mathbf{V}_t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad a_k = 1; \quad b_k = h; \quad k = 1, 2, 3.$$

Следовательно, соотношения (5.71) приводятся к виду

$$\begin{aligned} {}^0x &= \sum_{k=1}^3 h_k {}^0x_k, \\ {}^0y &= \frac{s}{2} h, \\ {}^0z &= \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

После этого следует провести вычисления, соответствующие (5.75), получая в результате

$$\mathbf{V}_t^k = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \theta_x^k & \theta_y^k & \theta_z^k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

или

$$\mathbf{V}_t^k = \theta_y^k \mathbf{e}_x - \theta_x^k \mathbf{e}_y, \quad (\text{a})$$

а также

$$\mathbf{V}_s^k = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \theta_x^k & \theta_y^k & \theta_z^k \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

или

$$\mathbf{V}_s^k = -\theta_z^k \mathbf{e}_x + \theta_x^k \mathbf{e}_z. \quad (\text{b})$$

Соотношения (a) и (b) соответствуют трехмерному поведению балки. Повороты допускаются только относительно оси z , и в этих условиях

$$\mathbf{V}_t^k = 0; \quad \mathbf{V}_s^k = -\theta_z^k \mathbf{e}_x.$$

Кроме того, мы предполагаем, что узловые точки могут смещаться только в направлении оси y . Следовательно, в соответствии со сделанными предположениями выражения (5.73) дают

$$u(r, s) = -\frac{sh}{2} \sum_{k=1}^3 h_k \theta_z^k, \quad (\text{c})$$

$$v(r) = \sum_{k=1}^3 h_k v_k, \quad (\text{d})$$

где можно отметить, что u является функцией только r и s , а v — функция только r . Эти соотношения идентичны использовавшимся ранее предположениям о смещениях, однако при использовании более традиционных обозначений для смещений в балке мы обозначили поперечное смещение и угол поворота сечения в узловой точке символами w_k и θ_k вместо v_k и θ_z^k .

Теперь, используя выражения (5.80), мы получим

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial s} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^3 \begin{bmatrix} -\frac{sh}{2} \frac{\partial h_k}{\partial r} \end{bmatrix} \theta_z^k,$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial s} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^3 \begin{bmatrix} \frac{\partial h_k}{\partial r} \\ 0 \end{bmatrix} v_k.$$

Эти соотношения могли бы быть также получены путем прямого дифференцирования смещений в выражениях (с) и (d). Если учесть, что

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{L}{2} & 0 \\ 0 & \frac{h}{2} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{L} & 0 \\ 0 & \frac{2}{h} \end{bmatrix},$$

то мы получим

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^3 \begin{bmatrix} -\frac{h}{2} \frac{2}{L} s \frac{\partial h_k}{\partial r} \\ -h_k \end{bmatrix} \theta_z^k \quad (e)$$

и

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^3 \begin{bmatrix} \frac{2}{L} & \frac{\partial h_k}{\partial r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (f)$$

Чтобы исследовать реакцию балки, показанной на рис. 5.37, мы воспользуемся теперь принципом виртуальной работы (см. (4.7)) при надлежащих масштабах измерения деформаций:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [\bar{\epsilon}_{xx} \quad \bar{\gamma}_{xy}] \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & Gk \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \det \mathbf{J} ds dr = -P\bar{v}|_{r=1/3}, \quad (g)$$

где

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \bar{\epsilon}_{xx} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; & \bar{\gamma}_{xy} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}. \end{aligned}$$

Рассматривая соотношения (e), (f), (g) и (5.58), мы убеждаемся, что (g) соответствует (5.58), если только обозначить $\beta \equiv \theta_z$ и $w \equiv v$.

Переходные элементы

При проведенных выше обсуждениях мы рассматривали по отдельности элементы сплошной среды и элементы типа балок. Однако необходимо признать наличие весьма тесной взаимосвязи между элементами этих двух типов; единственная группа различий связана с наличием кинематического предположения о том, что плоские сечения, первоначально нормальные к нейтральной оси, остаются плоскими, а также предположения о том, что напряжения, нормальные к нейтральной оси, равны нулю. В представленной здесь схеме для элементов типа балки кинематическое предположение было непосредственно включено как в базовую геометрию, так и в интерполяцию для смещений, а предположение, касающееся напряжений, было использовано в законе связи напряжение–деформация. Если учесть, что эти два предположения составляют два единственных базовых различия между элементами типа балки и элементами сплошной среды, то очевидно, что матрицы для конструктивных элементов также могут быть выведены из матриц для элементов сплошной среды путем принудительного вырождения. Кроме того, можно придумать и такие элементы, которые работают как переходные между элементами сплошной среды и конструктивными элементами. Рассмотрим нижеследующий пример.

Пример 5.27: Предположим, что для элемента с плоскими напряжениями, имеющего четыре узла, уже была выведена матрица деформация–смещение. Требуется показать,

как может быть построена матрица деформация–смещение для элемента в форме балки, имеющего два узла.

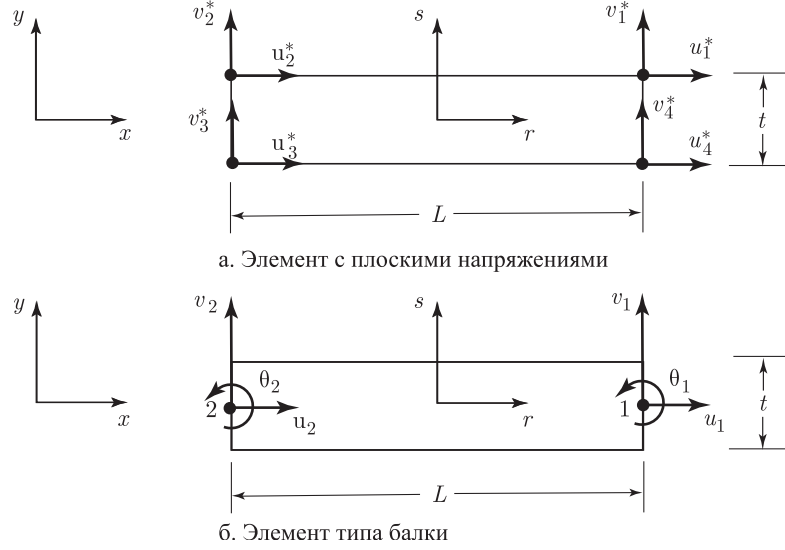


Рис. 5.43. Переход от элемента с плоскими напряжениями к элементу типа балки

Рисунок 5.43 демонстрирует элемент с плоскими напряжениями вместе с его степенями свободы, а также элемент в форме балки, для которого мы хотим определить матрицу деформация–смещение. Рассмотрим узел 2, принадлежащий элементу в форме балки, и узлы 2 и 3 элемента с плоскими напряжениями. Члены, входящие в матрицу деформация–смещение для элемента с плоскими напряжениями, таковы:

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & -\frac{1}{2L}(1+s) & 0 & \vdots & -\frac{1}{2L}(1-s) & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \frac{1}{2t}(1-r) & \vdots & 0 & -\frac{1}{2t}(1-r) & \vdots \\ \vdots & \vdots & \frac{1}{2t}(1-r) & -\frac{1}{2L}(1+s) & \vdots & -\frac{1}{2t}(1-r) & -\frac{1}{2L}(1-s) & \vdots \end{bmatrix}. \quad (a)$$

Если теперь воспользоваться предположениями относительно деформаций балки, то мы получим следующие ограничительные условия кинематического характера:

$$\begin{aligned} u_2^* &= u_2 - \frac{t}{2} \theta_2, \\ u_3^* &= u_2 + \frac{t}{2} \theta_2, \\ v_2^* &= v_2; \quad v_3^* = v_2. \end{aligned} \quad (b)$$

Эти ограничительные выражения теперь подставляются в (a) так, чтобы получить из элементов \mathbf{B}^* элементы матрицы деформация–смещение для балки. Используя строки матрицы \mathbf{B}^* , при наличии условия (b) получим

$$-\frac{1}{2L}(1+s)u_2^* - \frac{1}{2L}(1-s)u_3^* = -\frac{1}{2L}(1+s) \left(u_2 - \frac{t}{2} \theta_2 \right) - \frac{1}{2L}(1-s) \left(u_2 + \frac{t}{2} \theta_2 \right), \quad (c)$$

$$\frac{1}{2t}(1-r)v_2^* - \frac{1}{2t}(1-r)v_3^* = \frac{1}{2t}(1-r)v_2 - \frac{1}{2t}(1-r)v_2, \quad (d)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2t}(1-r)u_2^* - \frac{1}{2L}(1+s)v_2^* - \frac{1}{2t}(1-r)u_3^* - \frac{2l}{2t}(1-s)v_3^* = \\ & = \frac{1}{2t}(1-r)\left(u_2 - \frac{t}{2}\theta_2\right) - \frac{1}{2L}(1+s)v_2 - \frac{1}{2t}(1-r)\left(u_2 + \frac{t}{2}\theta_2\right) - \frac{1}{2L}(1-s)v_2. \quad (e) \end{aligned}$$

Соотношения, находящиеся в правых частях формул (с), (d) и (e), представляют собой члены, входящие в матрицу деформация–смещение для балки

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} & \begin{matrix} u_2 & v_2 & \theta_2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\ \dots & \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & \frac{t}{2L}s \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{2}(1-r) \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Однако члены, находящиеся в первой и в третьей строках, — это те самые, которые получаются при использовании модели для балки согласно (5.71)–(5.86). Следует заметить, что нули во второй строке матрицы \mathbf{B} выражают лишь тот факт, что деформация ϵ_{yy} не включена в данную модель. Фактически эта деформация равна $-\nu\epsilon_{xx}$, так как напряжение τ_{yy} равно нулю. Как уже указывалось ранее, нам желательно использовать члены матрицы \mathbf{B} при $r = 0$.

Модель конструкционного элемента, осуществленная на основе подхода, рассмотренного нами в примере 5.27, является неэффективной в вычислительном плане и, разумеется, не может быть рекомендована для общего анализа. Однако весьма поучительно изучить этот подход и убедиться в том, что матрицы для конструкционного элемента могут быть, в принципе, получены из матриц для элемента сплошной среды путем введения надлежащих статических и кинематических предположений. Кроме того, эта модель подсказывает прямой путь к построению таких переходных элементов, которые могут использоваться для установления эффективной взаимосвязи конструкционных элементов и элементов сплошной среды, осуществляемой без использования соотношений, вводящих принудительные ограничения (см. рис. 5.44 а). Чтобы продемонстрировать модель переходных элементов, в приводимом ниже примере мы рассматриваем простой переходный элемент в форме балки.

Пример 5.28: Требуется построить матрицу интерполяции смещений и матрицу деформация–смещение для переходного элемента, показанного на рис. 5.44.

Вектор смещений в узловой точке исследуемого элемента определим как

$$\hat{\mathbf{u}}^T = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ \theta_3]. \quad (a)$$

Учитывая, что при $r = +1$ мы имеем степени свободы, соответствующие элементу с плоскими напряжениями, для узлов 1 и 2 интерполяционные функции имеют вид (см. рис. 5.5)

$$h_1 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s); \quad h_2 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s).$$

Узел 3 — это узел, принадлежащий балке, и соответствующая интерполяционная функция имеет форму (см. рис. 5.4)

$$h_3 = \frac{1}{2}(1-r).$$

Таким образом, смещения исследуемого элемента представляются как

$$u(r, s) = h_1u_1 + h_2u_2 + h_3u_3 - \frac{t}{2}sh_3\theta_3.$$

Следовательно, в соответствии с вектором смещений, заданным посредством (a), мы имеем

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & -\frac{t}{2}sh_3 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

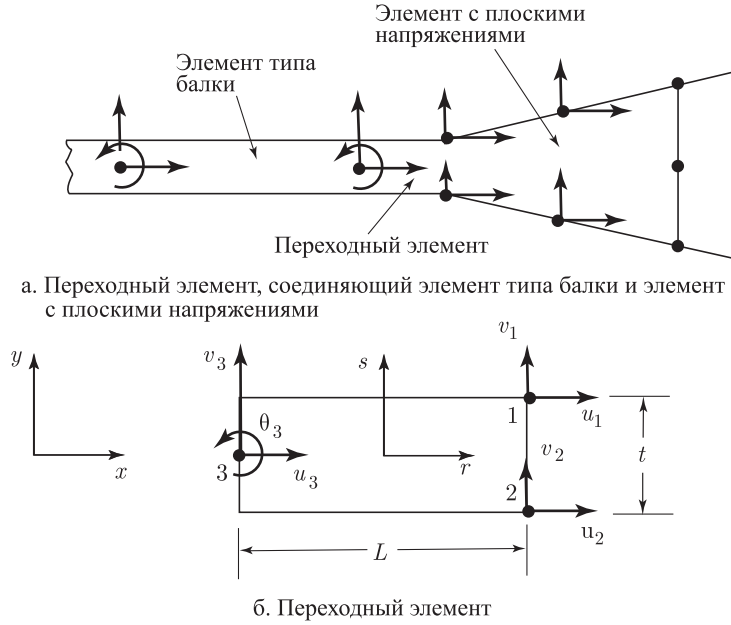


Рис. 5.44. Двумерный переходный элемент типа балки, на базе смещений

Координатная интерполяция оказывается здесь той же самой, что и для элемента с плоскими напряжениями, имеющего четыре узла:

$$x(r, s) = \frac{1}{2}(1+r)L,$$

$$y(r, s) = \frac{s}{2}t.$$

Следовательно,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{L}{2} & 0 \\ 0 & \frac{t}{2} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{L} & 0 \\ 0 & \frac{2}{t} \end{bmatrix}.$$

После этого, используя (5.25), мы получим

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2L}(1+s) & 0 & \frac{1}{2L}(1-s) & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & \frac{t}{2L}s \\ 0 & \frac{1}{2t}(1+r) & 0 & -\frac{1}{2t}(1+r) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2t}(1+r) & \frac{1}{2L}(1+s) & -\frac{1}{2t}(1+r) & \frac{1}{2L}(1-s) & 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{2}(1-r) \end{bmatrix}.$$

В заключение можно отметить, что три последних столбца матрицы \mathbf{B} могли бы быть получены так, как это описывается в примере 5.27.

Рассмотренные в этом разделе изопараметрические элементы в форме балки представляют собой альтернативу классическим элементам Эрмита той же формы (см. пример 4.16), и можно поставить вопрос о том, какова сравнительная эффективность этих двух типов элемента в форме балки. Не возникает сомнения в том, что при линейном анализе прямых и тонких балок элементы Эрмита оказываются обычно более эффективными, так как при кубическом описании смещений изопараметрический элемент в форме балки требует вдвое большего числа степеней свободы. Однако изопараметрический элемент охватывает эффекты сдвиговых деформаций и обладает тем преимуществом, что все смещения интерполируются в одинаковой степени (что в случае кубического элемента

приводит к кубическому закону изменения осевого смещения), а также и тем, что можно точно отразить криволинейную геометрию. Поэтому данный элемент эффективно используется при анализе оболочек с дополнительной жесткостью (потому что этот элемент естественным образом отображает дополнительные жесткости для рассматриваемых в следующем разделе элементов в форме оболочки), а также в качестве базы для описания более сложных элементов, таких как трубы и переходные элементы. Кроме того, общность данной модели при всех смещениях, интерполируемых с одинаковой степенью возможных изменений, делает этот элемент эффективным при исследованиях в условиях геометрической нелинейности (см. раздел 6.5.1).

Дальнейшие приложения данной здесь общей модели для балок связаны с ее использованием в условиях плоских деформаций (см. упражнение 5.40), а также с разработкой элементов типа осесимметричной оболочки.

Элементы типа осесимметричной оболочки

Данная выше изопараметрическая схема для элемента в форме балки может быть непосредственно модифицирована применительно к анализу осесимметричных оболочек. Рисунок 5.45 показывает типичный для такого анализа элемент с тремя узлами.

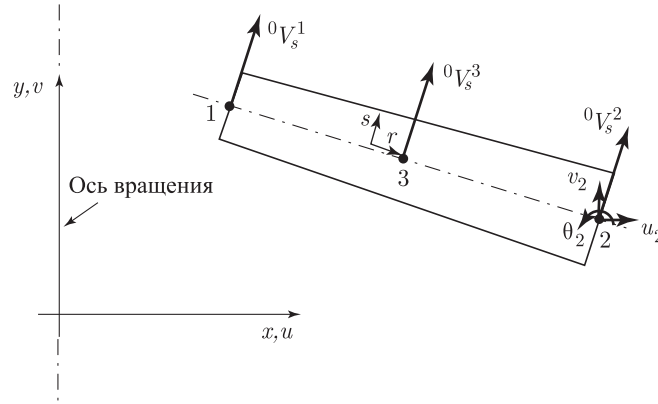


Рис. 5.45. Осесимметричный элемент типа оболочки

В данной модели кинематика элемента в форме балки используется так, как если бы этот элемент применялся в двумерном случае (т.е. при движении в плоскости x, y), однако эффекты кольцеобразных напряжений и деформаций также принимаются во внимание. Следовательно, матрица деформация–смещение для данного элемента — это матрица для балки, исправленная путем добавления строки, соответствующей кольцеобразной деформации u/x . Такой образ действия совершенно аналогичен построению **В**-матрицы для двумерного осесимметричного элемента, когда этот элемент сравнивается с двумерным элементом в условиях плоских напряжений. В этом случае к матрице **В** для элемента с плоскими напряжениями добавлялась еще и строка, соответствующая кольцеобразной деформации, и это давало возможность получить **В**-матрицу для осесимметричного элемента. Конечно, в дополнение к этому должен быть использован надлежащий закон взаимосвязи напряжение–деформация (дающий возможность проявления взаимодействия между кольцевым направлением и направлением r , а также возможность равенства нулю напряжения в направлении s), а интегрирование должно выполняться в соответствии с условиями осевой симметрии, т.е. по одному радиану данной конструкции (см. пример 5.9 и упражнение 5.41). Разумеется, если воспользоваться процедурами, приведенными в примере 5.28, то можно спроектировать также и переходные элементы для оболочек в осесимметричных условиях (см. упражнение 5.42).

5.4.2. Элементы типа пластины и оболочки общего вида

Те процедуры, которые были применены в предыдущем разделе для модели элементов в форме балки, могут быть непосредственно использованы также и для создания

эффективных элементов типа пластин и оболочек. В последующем изложении мы обсудим вначале модель для элементов в виде пластин, а затем перейдем к рассмотрению вопросов, связанных с описанием элементов типа оболочек общего вида.

Элементы в виде пластин

Модель для элемента в виде пластины представляет собой частный случай излагаемой ниже модели для элемента в форме оболочки общего вида и базируется на теории пластин, принимающей во внимание поперечные сдвиговые деформации. Эта теория, авторами которой являются E. Reissner [Reissner 1945] и R. D. Mindlin [Mindlin 1951], использует предположение о том, что частицы, принадлежащие пластине и находящиеся первоначально на прямой линии, нормальной к недеформированной срединной поверхности, остаются на прямой линии и в процессе деформации, хотя эта линия не обязательно нормальна к деформированной срединной поверхности. При этом предположении составляющие смещения в точке с координатами x , y и z , в соответствии с теорией изгиба при малых смещениях представляются как

$$u = -z\beta_x(x, y); \quad v = -z\beta_y(x, y); \quad w = w(x, y), \quad (5.88)$$

где w — это поперечное смещение, а β_x и β_y — это углы поворота нормали к недеформированной срединной поверхности, измеряемые в плоскостях x, z и y, z соответственно (см. рис. 5.46). Было бы поучительным отметить, что согласно теории Кирхгофа для пластин, сформулированной без учета сдвиговых деформаций, имеем $\beta_x = w_{,x}$ и $\beta_y = w_{,y}$ (а мы, действительно, выбираем систему отсчета β_x и β_y так, чтобы получить эти соотношения Кирхгофа).

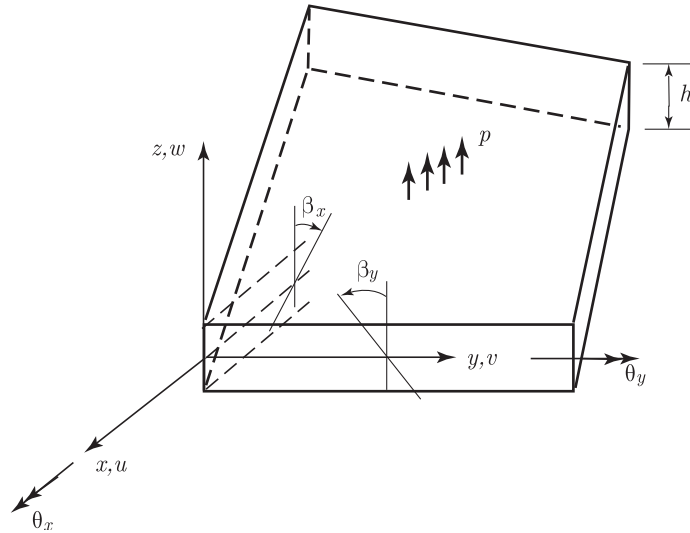


Рис. 5.46. Предположения, касающиеся деформации и выдвигаемые при анализе пластины со включением сдвиговых деформаций

Если рассмотреть пластину, показанную на рис. 5.46, то ясно, что изгибные деформации ϵ_{xx} , ϵ_{yy} и γ_{xy} линейно изменяются по толщине пластины и выражаются через кривизны пластины с использованием (5.88), то есть

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = -z \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (5.89)$$

тогда как поперечные сдвиговые деформации предполагаются постоянными по толщине пластины:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} - \beta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \end{bmatrix}. \quad (5.90)$$

Можно отметить, что каждая из поперечных составляющих сдвиговой деформации имеет форму (5.56), использовавшуюся при описании деформаций балки. Состояние напряжений в пластине соответствует условиям плоских напряжений (т. е. $\tau_{zz} = 0$). Таким образом для изотропного материала мы можем написать

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = -z \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (5.91)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} - \beta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \end{bmatrix}. \quad (5.92)$$

Чтобы написать уравнения равновесия для данного элемента, мы будем теперь действовать так, как при описании двумерного элемента в форме балки с прямоугольным поперечным сечением (см. (5.58)–(5.64)). При рассмотрении пластины выражение принципа виртуальной работы, если положить p равным поперечной нагрузке, приходящейся на единицу площади срединной поверхности A , имеет вид

$$\int_{A-h/2}^{h/2} \int_A [\bar{\epsilon}_{xx} \quad \bar{\epsilon}_{yy} \quad \bar{\gamma}_{xy}] \begin{bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz dA + k \int_{A-h/2}^{h/2} \int_A [\bar{\gamma}_{xz} \quad \bar{\gamma}_{yz}] \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} dz dA = \int_A \bar{w} p dA, \quad (5.93)$$

где черта сверху обозначает виртуальные величины, а k — это снова некая постоянная, требуемая для учета фактической неоднородности сдвиговых напряжений (обычно используемым значением является $k = 5/6$; см. пример 5.23). Проводя подстановку выражений (5.89)–(5.92) в соотношение (5.93), мы, таким образом, получим

$$\int_A \bar{\kappa}^T \mathbf{C}_b \kappa dA + \int_A \bar{\gamma}^T \mathbf{C}_s \gamma dA = \int_A \bar{w} p dA, \quad (5.94)$$

где обозначения $\mathbf{C}_b \kappa$ и $\mathbf{C}_s \gamma$ соответствуют внутренним изгибающим моментам и силам сдвига, причем

$$\kappa = \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{bmatrix}; \quad \gamma = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} - \beta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \end{bmatrix} \quad (5.95)$$

и

$$\mathbf{C}_b = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}_s = \frac{Ehk}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.97)$$

Отметим, что вариационный индикатор, соответствующий (5.93), задается выражением (см. пример 4.4)

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_{A-h/2}^{h/2} \int_{A-h/2}^{h/2} [\epsilon_{xx} \ \epsilon_{yy} \ \gamma_{xy}] \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} dz dA + \\ + \frac{k}{2} \int_{A-h/2}^{h/2} \int_{A-h/2}^{h/2} [\gamma_{xz} \ \gamma_{yz}] \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} dz dA - \int_A w p dA, \end{aligned} \quad (5.98)$$

где деформации определяются согласно (5.89) и (5.90). Принцип виртуальной работы соответствует условию $\delta\Pi = 0$ при поперечном смещении w и углах поворота сечения β_x и β_y в качестве независимых переменных.

Мы еще раз подчеркиваем, что в этой теории w , β_x и β_y являются независимыми переменными. Следовательно, при конечно-элементной дискретизации с использованием метода смещений нам необходимо ставить условия межэлементной непрерывности только для w , β_x и β_y , но не для каких-либо производных от этих величин, а это может быть легко достигнуто, если действовать так же, как и при изопараметрическом конечно-элементном исследовании поведения твердых тел.

Вначале предлагается рассмотреть дискретизацию только на базе учета смещений. Как и при исследовании поведения балок, дискретизация такого рода не приведет к построению эффективных элементов низкого порядка, однако она обеспечит базис для осуществления смешанной интерполяции, которую мы обсудим позднее.

При дискретизации, базирующейся только на учете смещений, мы используем представления

$$\begin{aligned} w &= \sum_{i=1}^q h_i w_i; \quad \beta_x = - \sum_{i=1}^q h_i \theta_y^i; \\ \beta_y &= \sum_{i=1}^q h_i \theta_x^i, \end{aligned} \quad (5.99)$$

где h_i — интерполяционные функции, а q — число узлов данного элемента. При наличии таких интерполяций мы можем теперь продолжить свой анализ обычным путем, и все понятия, относящиеся к обсужденным нами ранее изопараметрическим конечным элементам, остаются непосредственно применимыми и здесь. Например, некоторые интерполяционные функции, применимые в модели элементов типа пластин, перечисляются на рис. 5.5, а треугольные элементы могут быть построены так, как это предлагалось при обсуждении в разделе 5.3.2. Учитывая, что интерполяционные функции задаются в терминах изопараметрических координат r , s , мы можем также непосредственно рассчитывать матрицы элементов в форме пластин, искривленных в своей плоскости (чтобы моделировать, например, круглую пластину).

Мы демонстрируем модель простого элемента с четырьмя узлами на приводимом ниже примере.

Пример 5.29: Требуется вывести выражения, используемые при расчете матрицы жесткости для показанного на рис. 5.47 элемента в форме пластины с четырьмя узлами.

Соответствующие расчеты очень похожи на те, которые проводились при описании двумерного элемента с плоскими напряжениями, описанного в примере 5.5.

Для элемента, показанного на рис. 5.47, мы имеем (см. пример 5.3)

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

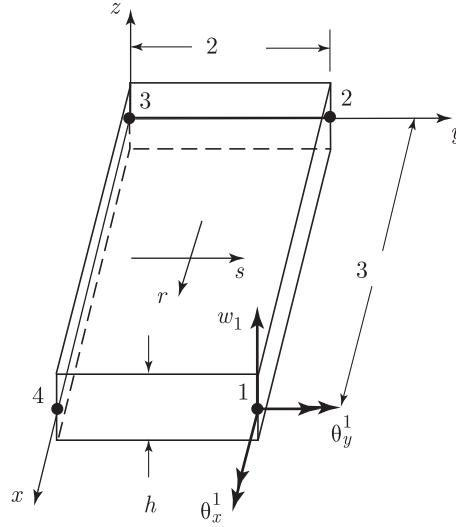


Рис. 5.47. Элемент типа пластины с четырьмя узлами

после чего, используя интерполяционные функции, определенные на рис. 5.5, получим

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1+s) & -(1+s) & -(1-s) & (1-s) \\ (1+r) & (1-r) & -(1-r) & -(1+r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}$$

при аналогичных выражениях для производных функций β_x и β_y . Таким образом, если воспользоваться обозначениями

$$\begin{aligned} \kappa(r, s) &= \mathbf{B}_\kappa \hat{\mathbf{u}}, \\ \gamma(r, s) &= \mathbf{B}_\gamma \hat{\mathbf{u}}, \\ w(r, s) &= \mathbf{H}_w \hat{\mathbf{u}}, \end{aligned}$$

где

$$\hat{\mathbf{u}}^T = [w_1 \quad \theta_x^1 \quad \theta_y^1; w_2 \quad \dots \quad \theta_y^4],$$

мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_\kappa &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{6}(1+s) & | & -\frac{1}{6}(1-s) \\ 0 & \frac{1}{4}(1+r) & 0 & | & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}(1+s) & -\frac{1}{4}(1+r) & | & \frac{1}{4}(1+r) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}_\gamma &= \begin{bmatrix} \frac{1}{6}(1+s) & 0 & \frac{1}{4}(1+r)(1+s) & | & \frac{1}{4}(1+r)(1-s) \\ & & & | & \dots \\ \frac{1}{4}(1+r) & -\frac{1}{4}(1+r)(1+s) & 0 & | & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{H}_w &= \frac{1}{4} [(1+r)(1+s) \quad 0 \quad 0 \quad | \quad \dots \quad 0]. \end{aligned}$$

После этого матрица жесткости для данного элемента записывается в виде

$$\mathbf{K} = \frac{3}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (\mathbf{B}_\kappa^T \mathbf{C}_b \mathbf{B}_\kappa + \mathbf{B}_\gamma^T \mathbf{C}_s \mathbf{B}_\gamma) dr ds, \quad (\text{a})$$

а совместимый вектор нагрузки имеет вид

$$\mathbf{R}_s = \frac{3}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{H}_w^T p \, dr \, ds, \quad (\text{b})$$

причем интегралы в выражениях (а) и (b) могут быть вычислены в замкнутой форме, однако обычно вычисляются с помощью численного интегрирования (см. раздел 5.5).

Эта модель элемента в форме пластины, базирующаяся только на учете смещений, имеет некоторую ценность только в случае применения элементов высокого порядка. В самом деле, наименьший порядок той интерполяции, которая должна использоваться, — это кубическая интерполяция, а это приводит к построению четырехугольного элемента с 16-ю узлами, или треугольного элемента с 10-ю узлами. Однако даже эти элементы высокого порядка все же не обнаруживают хорошей способности к прогнозу, в особенности тогда, когда элементы подверглись геометрическому искажению и когда они используются для прогноза напряжений (см., например, [Bucalem, Bathe 1993]).

Так же, как и при описании изопараметрических элементов в форме балок, основная трудность заключается в том, что при наличии элементов, базирующихся на учете смещений, прогнозируются лишние сдвиговые напряжения. Эти лишние сдвиговые напряжения влекут за собой усиленное искусственное повышение жесткости элементов по мере уменьшения отношения толщина/длина. Этот эффект сдвигового запирания более ярко выражен для элементов низкого порядка, а также при геометрическом искажении элементов, по той простой причине, что значения сдвиговых напряжений в этих условиях оказываются больше.

Чтобы получить эффективные и надежные элементы в форме изгибающихся пластин, необходимо расширить модель, базирующуюся только на учете смещений, и успешный подход сводится к использованию смешанной интерполяции для поперечных смещений, углов поворота сечений, а также сдвиговых напряжений.

Здесь следует отметить, что при проведенном выше обсуждении предполагалось, что интегралы, нужные для расчета элементных матриц (матрицы жесткости и масс, а также векторы нагрузок), вычисляются точно; следовательно, как мы предполагали при этом обсуждении и будем предполагать впредь, ошибка численного интегрирования (та, которая обычно получается на практике; см. раздел 5.5) мала и, безусловно, не изменяет свойств элементных матриц. Некоторые авторы были сторонниками использования простого сокращенного интегрирования, чтобы тем самым устранить проблему сдвигового запирания. В разделе 5.5.6 мы проведем краткое обсуждение таких методов.

В дальнейшем мы собираемся предложить семейство элементов в форме изгибающихся пластин, имеющих добротный математический базис, а также являющихся надежными и эффективными. Эти элементы будут называться элементами МТС n , где n обозначает число узлов элемента, причем $n = 4, 9, 16$ для четырехугольного элемента и $n = 7, 12$ — для треугольного (сокращение МТС соответствует первым буквам английских слов «смешанная интерполяция тензорных компонентов», см. [Bathe, Bucalem, Brezzi 1990]). Рассмотрим в деталях элемент МТС4 и приведем в табличной форме основные варианты интерполяции для других элементов.

Важная особенность модели для элемента МТС состоит в таком использовании тензорных компонентов сдвиговых деформаций, которое позволило бы сделать построенный элемент сравнительно нечувствительным к искажениям. На рис. 5.48 показан типовой элемент с четырьмя узлами, вместе с используемой системой координат.

Желая обойти проблему сдвигового запирания, мы формулируем матрицу жесткости данного элемента со включением изгиба и сдвига через посредство различных интерполяций. Для характеристик кривизны сечений, входящих в (5.95), мы используем ту же самую интерполяцию, которая применялась в методе, базирующемся на учете смещений, и которая соответствует формуле (5.99), однако при расчете поперечных сдвиговых деформаций мы действуем по-иному.

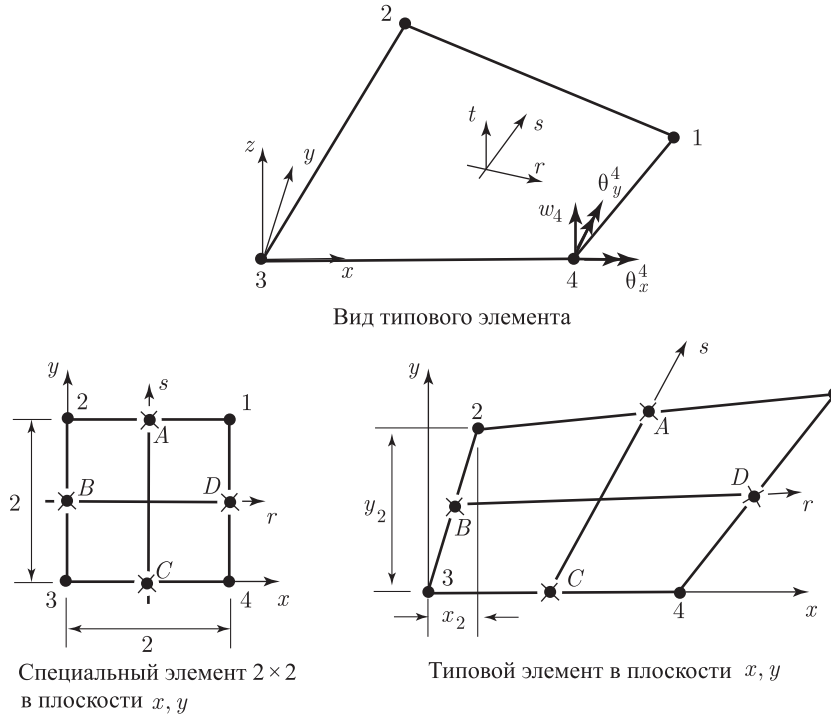


Рис. 5.48. Особенности модели элемента типа изгибающейся пластины с четырьмя узлами

Рассмотрим вначале элемент MITC4, имеющий геометрию 2×2 (в этом случае можно принять координаты x, y равными изопараметрическим координатам r, s). Для этого элемента мы используем интерполяцию вида (см. [Bathe, Dvorkin 1985])

$$\begin{aligned}\gamma_{rz} &= \frac{1}{2}(1+s)\gamma_{rz}^A + \frac{1}{2}(1-s)\gamma_{rz}^C, \\ \gamma_{sz} &= \frac{1}{2}(1+r)\gamma_{sz}^D + \frac{1}{2}(1-r)\gamma_{sz}^B,\end{aligned}\quad (5.100)$$

где $\gamma_{rz}^A, \gamma_{rz}^C, \gamma_{sz}^D$ и γ_{sz}^B — это сдвиговые деформации (физические) в точках A, B, C и D , рассчитываемые по данным о смещениях и об углах поворота смещений, входящих в (5.99). Следовательно, имеем

$$\begin{aligned}\gamma_{rz} &= \frac{1}{2}(1+s) \left(\frac{w_1 - w_2}{2} + \frac{\theta_y^1 + \theta_y^2}{2} \right) + \frac{1}{2}(1-s) \left(\frac{w_4 - w_3}{2} + \frac{\theta_y^4 + \theta_y^3}{2} \right), \\ \gamma_{sz} &= \frac{1}{2}(1+r) \left(\frac{w_1 - w_4}{2} - \frac{\theta_x^1 + \theta_x^4}{2} \right) + \frac{1}{2}(1-r) \left(\frac{w_2 - w_3}{2} - \frac{\theta_x^2 + \theta_x^3}{2} \right).\end{aligned}\quad (5.101)$$

Если эти интерполяции заданы, то все матрицы интерполяции деформация-смещение могут быть построены непосредственно, а матрица жесткости формулируется стандартным образом. Разумеется, та же самая процедура может быть непосредственно применена также и к любому другому прямоугольному элементу.

Если теперь рассмотреть общий случай четырехугольного элемента с четырьмя узлами, то мы воспользуемся той же самой основной идеей об интерполяции поперечных сдвиговых деформаций, однако — используя интерполяцию согласно (5.100) — мы интерполируем ковариантные компоненты тензора, измеряемые в системе координат r, s, z . Таким путем мы непосредственно принимаем во внимание искажение элемента (по сравнению с геометрией 2×2). Продолжая обращаться таким же образом с тензорными компонентами сдвиговых деформаций, мы получим (см. пример 5.30) следующие

выражения для сдвиговых напряжений γ_{xz} и γ_{yz} :

$$\begin{aligned}\gamma_{xz} &= \gamma_{rz} \sin \beta - \gamma_{sz} \sin \alpha, \\ \gamma_{yz} &= -\gamma_{rz} \cos \beta + \gamma_{sz} \cos \alpha,\end{aligned}\tag{5.102}$$

где α и β представляют собой углы между осями r и x , s и x соответственно, а также

$$\begin{aligned}\gamma_{rz} &= \frac{\sqrt{(C_x + rB_x)^2 + (C_y + rB_y)^2}}{8 \det \mathbf{J}} \times \\ &\times \left\{ (1+s) \left[\frac{w_1 - w_2}{2} + \frac{x_1 - x_2}{4} (\theta_y^1 + \theta_y^2) - \frac{y_1 - y_2}{4} (\theta_x^1 + \theta_x^2) \right] + \right. \\ &\left. + (1-s) \left[\frac{w_4 - w_3}{2} + \frac{x_4 - x_3}{4} (\theta_y^4 + \theta_y^3) - \frac{y_4 - y_3}{4} (\theta_x^4 + \theta_x^3) \right] \right\},\end{aligned}\tag{5.103}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{sz} &= \frac{\sqrt{(A_x + sB_x)^2 + (A_y + sB_y)^2}}{8 \det \mathbf{J}} \times \\ &\times \left\{ (1+r) \left[\frac{w_1 - w_4}{2} + \frac{x_1 - x_4}{4} (\theta_y^1 + \theta_y^4) - \frac{y_1 - y_4}{4} (\theta_x^1 + \theta_x^4) \right] + \right. \\ &\left. + (1-r) \left[\frac{w_2 - w_3}{2} + \frac{x_2 - x_3}{4} (\theta_y^2 + \theta_y^3) - \frac{y_2 - y_3}{4} (\theta_x^2 + \theta_x^3) \right] \right\}.\end{aligned}$$

В уравнениях (5.103) мы имеем

$$\det \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix},\tag{5.104}$$

а также

$$\begin{aligned}A_x &= x_1 - x_2 - x_3 + x_4, \\ B_x &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4, \\ C_x &= x_1 + x_2 - x_3 - x_4, \\ A_y &= y_1 - y_2 - y_3 + y_4, \\ B_y &= y_1 - y_2 + y_3 - y_4, \\ C_y &= y_1 + y_2 - y_3 - y_4.\end{aligned}\tag{5.105}$$

В приводимом ниже примере эти соотношения рассматриваются более подробно.

Пример 5.30: Требуется вывести интерполяционные функции для поперечной сдвиговой деформации применительно к имеющему общий вид элементу МТС4 в форме изгибающейся пластины.

В системе естественных координат для элемента в форме изгибающейся пластины ковариантные базовые векторы определяются как

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_r &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r}; \quad \mathbf{g}_s = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}; \\ \mathbf{g}_z &= \frac{h}{2} \mathbf{e}_z,\end{aligned}\tag{a}$$

где \mathbf{x} — это вектор координат, а \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y и \mathbf{e}_z — единичные векторы декартовой системы.

Вспомним, что в естественной системе координат тензор деформаций может быть выражен через посредство ковариантных тензорных компонентов и контравариантных базовых векторов (см. раздел 2.4)

$$\epsilon = \tilde{\epsilon}_{ij} \mathbf{g}^i \mathbf{g}^j; \quad i, j \equiv r, s, z,$$

где значок тильды (\sim) указывает на то, что компоненты тензора измеряются в естественной системе координат.

Чтобы получить компоненты тензора сдвиговых деформаций, мы используем теперь выражения, эквивалентные (5.100),

$$\tilde{\epsilon}_{rz} = \frac{1}{2}(1+s)\tilde{\epsilon}_{rz}^A + \frac{1}{2}(1-s)\tilde{\epsilon}_{rz}^C, \quad (b)$$

$$\tilde{\epsilon}_{sz} = \frac{1}{2}(1+r)\tilde{\epsilon}_{sz}^D + \frac{1}{2}(1-r)\tilde{\epsilon}_{sz}^B, \quad (c)$$

где $\tilde{\epsilon}_{rz}^A$, $\tilde{\epsilon}_{rz}^C$, $\tilde{\epsilon}_{sz}^D$ и $\tilde{\epsilon}_{sz}^B$ — это компоненты тензора сдвиговых деформаций в точках A , B , C и D , вычисляемые по интерполяциям смещений. Чтобы получить эти компоненты, мы используем линейные члены из общего выражения для компонентов деформации в терминах базовых векторов (см. пример 2.28),

$${}^1_0\tilde{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} [{}^1\mathbf{g}_i \cdot {}^1\mathbf{g}_j - {}^0\mathbf{g}_i \cdot {}^0\mathbf{g}_j],$$

где левый верхний индекс у базовых векторов равен 1 для деформированной конфигурации и равен 0 — для начальной. Подставляя в (a) выражения, определяемые согласно (5.99), получим

$$\tilde{\epsilon}_{rz}^A = \frac{1}{4} \left[\frac{h}{2}(w_1 - w_2) + \frac{h}{4}(x_1 - x_2)(\theta_y^1 + \theta_y^2) - \frac{h}{4}(y_1 - y_2)(\theta_x^1 + \theta_x^2) \right]$$

и

$$\tilde{\epsilon}_{rz}^C = \frac{1}{4} \left[\frac{h}{2}(w_4 - w_3) + \frac{h}{4}(x_4 - x_3)(\theta_y^4 + \theta_y^3) - \frac{h}{4}(y_4 - y_3)(\theta_x^4 + \theta_x^3) \right].$$

На основе этого и используя (b), мы получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{rz} = \frac{1}{8}(1+s) \left[\frac{h}{2}(w_1 - w_2) + \frac{h}{4}(x_1 - x_2)(\theta_y^1 + \theta_y^2) - \frac{h}{4}(y_1 - y_2)(\theta_x^1 + \theta_x^2) \right] + \\ + \frac{1}{8}(1-s) \left[\frac{h}{2}(w_4 - w_3) + \frac{h}{4}(x_4 - x_3)(\theta_y^4 + \theta_y^3) - \frac{h}{4}(y_4 - y_3)(\theta_x^4 + \theta_x^3) \right] \end{aligned}$$

и таким же путем, используя (c), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{sz} = \frac{1}{8}(1+r) \left[\frac{h}{2}(w_1 - w_4) + \frac{h}{4}(x_1 - x_4)(\theta_y^1 + \theta_y^4) - \frac{h}{4}(y_1 - y_4)(\theta_x^1 + \theta_x^4) \right] + \\ + \frac{1}{8}(1-r) \left[\frac{h}{2}(w_2 - w_3) + \frac{h}{4}(x_2 - x_3)(\theta_y^2 + \theta_y^3) - \frac{h}{4}(y_2 - y_3)(\theta_x^2 + \theta_x^3) \right]. \end{aligned}$$

Далее мы используем выражение

$$\tilde{\epsilon}_{ij}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j = \epsilon_{kl}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l, \quad (d)$$

где ϵ_{kl} — это компоненты тензора деформаций, измеряемые в декартовой системе координат. Из (d) мы получаем

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} &= 2\tilde{\epsilon}_{rz}(\mathbf{g}^4 \cdot \mathbf{e}_x)(\mathbf{g}^z \cdot \mathbf{e}_z) + 2\tilde{\epsilon}_{sz}(\mathbf{g}^s \cdot \mathbf{e}_x)(\mathbf{g}^z \cdot \mathbf{e}_z), \\ \gamma_{yz} &= 2\tilde{\epsilon}_{rz}(\mathbf{g}^r \cdot \mathbf{e}_y)(\mathbf{g}^z \cdot \mathbf{e}_z) + 2\tilde{\epsilon}_{sz}(\mathbf{g}^s \cdot \mathbf{e}_y)(\mathbf{g}^z \cdot \mathbf{e}_z). \end{aligned} \quad (e)$$

Однако (если использовать стандартную процедуру, описанную в разделе 2.4)

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^r &= \sqrt{g^{rr}}(\sin\beta\mathbf{e}_x - \cos\beta\mathbf{e}_y), \\ \mathbf{g}^s &= \sqrt{g^{ss}}(-\sin\alpha\mathbf{e}_x + \cos\alpha\mathbf{e}_y), \\ \mathbf{g}^z &= \sqrt{g^{zz}}\mathbf{e}_z, \end{aligned}$$

где α и β — это углы между осями r и x , а также s и x соответственно, и

$$\begin{aligned} g^{rr} &= \frac{(C_x + rB_x)^2 + (C_y + rB_y)^2}{16(\det \mathbf{J})^2}, \\ g^{ss} &= \frac{(A_x + sB_x)^2 + (A_y + sB_y)^2}{16(\det \mathbf{J})^2}, \end{aligned}$$

где величины A_x , B_x , A_y , B_y и C_y определяются формулами (5.105), и

$$\gamma^{zz} = \frac{4}{h^2}.$$

Если провести подстановку в (e), то получатся соотношения (5.102).

Элемент МПТС4 в форме изгибающейся пластины, будучи в геометрической конфигурации прямоугольника или параллелограмма, оказывается идентичным или тесно связанным с другими четырехузловыми элементами в форме изгибающейся пластины (см. [Hughes, Tezduyar 1981], а также [MacNeal 1982]). Однако важное свойство пластинчатого элемента МПТС состоит в том, что это — особый случай элемента в форме оболочки общего вида как при линейном, так и при нелинейном анализе. Особенно важно, что использование ковариантных интерполяций деформации придает этому элементу сравнительно высокую способность к прогнозу, даже если он используется при наличии угловых геометрических искажений типа показанных на рис. 5.54 (см. также [Bathe, Dvorkin 1985]). Разумеется, элементы с угловыми искажениями широко используются на практике.

В отношении элемента МПТС4 можно высказать следующие наблюдения.

Данный элемент ведет себя подобно изопараметрическому элементу в форме балки, имеющему два узла и построенному со смешанной интерполяцией (такой элемент рассматривался в предыдущем разделе); элементы такого рода использовались при анализе двумерного поведения балки.

Данный элемент может быть построен исходя из вариационного принципа Ху–Вашизу (см. пример 4.30).

Данный элемент выдерживает групповую проверку (аналитическое доказательство этого см. в работе [Bathe, Dvorkin 1986]).

Математический анализ сходимости для поперечного смещения и для углов поворота сечений был проведен К. J. Bathe and F. Brezzi [Bathe, Brezzi 1985] (в предположении наличия однородных сеток, т. е. в предположении о том, что комплекс состоит из квадратных элементов со стороной h). Этот анализ дает результаты

$$\|\beta - \beta_h\|_1 \leq c_1 h; \quad \|\nabla w - \nabla w_h\|_0 \leq c_2 h, \quad (5.106)$$

где β и w — это точные решения, β_h и w_h — конечно-элементные решения, соответствующие сетке элементов со сторонами h , а c_1 и c_2 — это постоянные, не зависящие от h . Анализ сходимости по поперечным сдвиговым деформациям привел к выводу о том, что L^2 -норма ошибки не является ограниченной вне зависимости от толщины пластины (см. [Brezzi et al. 1991]).

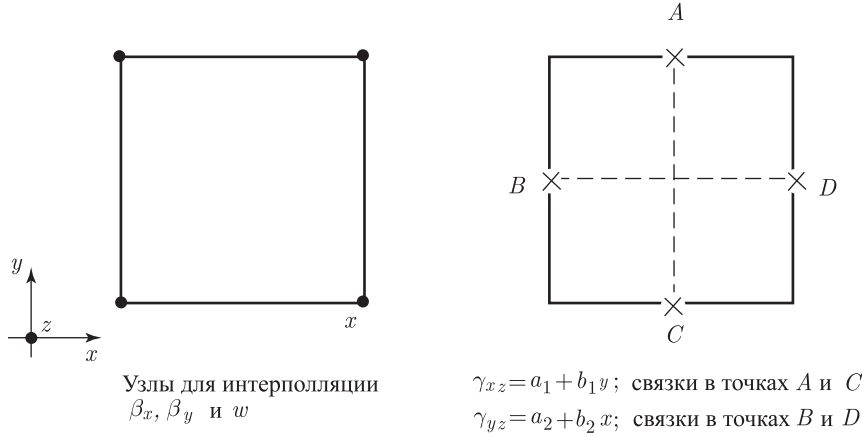
Сущность результатов этих аналитических исследований сходимости видна также и на практике, как для однородных, так и для искаженных сеток. Данный элемент дает хороший прогноз по поперечным смещениям и по изгибным деформациям, однако прогноз по поперечным сдвиговым деформациям может оказаться неудовлетворительным, в особенности если исследуются очень тонкие пластины.

Наиболее важным наблюдением, сделанным при математическом анализе элемента МПТС4, оказался тот факт, что в своей математической основе этот элемент является аналогом элемента 4/1, принадлежащего семейству элементов u/p , представленному в разделе 4.4.3: при схеме u/p смещения и давление интерполируются так, чтобы выполнялось ограничительное условие относительно (почти) полной несжимаемости, $e_V \simeq 0$, тогда как при описании элемента МПТС4 поперечные смещения, углы поворота сечений и поперечные сдвиговые деформации интерполируются с целью выполнения условия для тонкой пластины, $\gamma \simeq 0$. Эта аналогия между ограничительным условием о несжимаемости в механике твердого тела и условием о нулевой сдвиговой деформации в теории Рейсснера–Миндлина для пластин вылилась в разработку математического базиса для построения новых элементов в форме изгибающейся пластины (см. [Bathe, Brezzi 1987]). Учитывая, что все эти элементы базируются на смешанной интерполяции поперечных смещений, углов поворота сечений и поперечных сдвиговых деформаций и, при геометрических формах общего типа, используют тензорные компоненты (так, как для элемента МПТС4), то мы будем называть эти элементы элементами МПТС с n узлами (т. е. элементами МПТС n).

Основная трудность при анализе состоит в выборе порядков интерполяции поперечных смещений, углов поворота сечений и поперечных сдвиговых деформаций, которые в совокупности приводили бы к поведению элемента без запираения и к оптимальной сходимости для него. Перечень математических соображений для выбора надлежащих форм интерполяции был дан в работах [Bathe, Brezzi 1987], [Bathe, Bucelem, Brezzi 1990],

а также [Brezzi, Bathe, Fortin 1989], где были представлены элементы, показанные на рис. 5.49, и еще некоторые дополнительные элементы, а также были приведены численные результаты.

Элемент MITC4: 4 узла для интерполяции поворотов сечений и поперечного смещения (интегрирование 2×2 по Гауссу)



Элемент MITC9: 9 узлов для интерполяции поворотов сечений и 8 узлов для интерполяции поперечного смещения (интегрирование 3×3 по Гауссу)

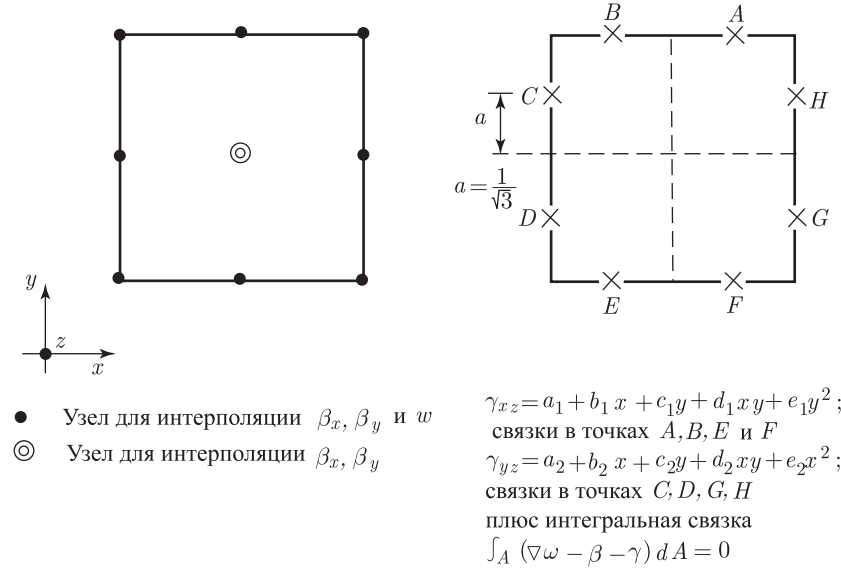
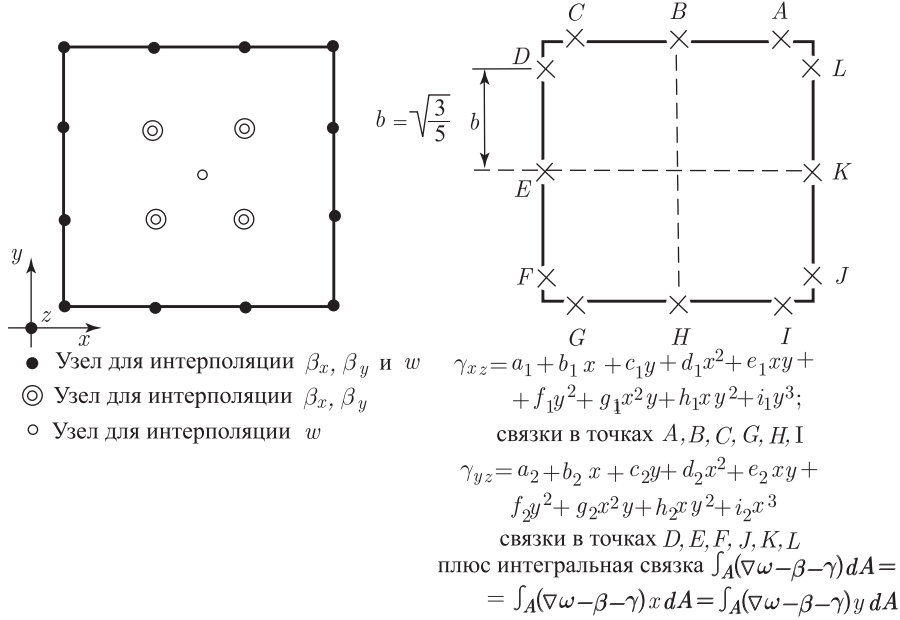


Рис. 5.49. Элементы типа изгибающейся пластины; рассматриваются квадраты и равно-
 сторонние треугольники со сторонами длиной в две единицы

Элемент MITC 16 : 16 узлов для интерполяции поворотов сечений
и 13 узлов для интерполяции поперечного
смещения (интегрирование 4×4 по Гауссу)



Элемент MITC7: 7 узлов для интерполяции поворотов сечений
и 6 узлов для интерполяции поперечного смещения
(7-точечное интегрирование по Гауссу)

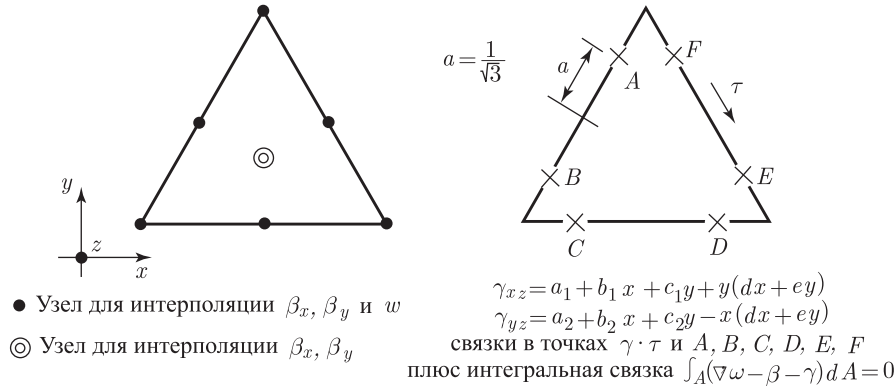
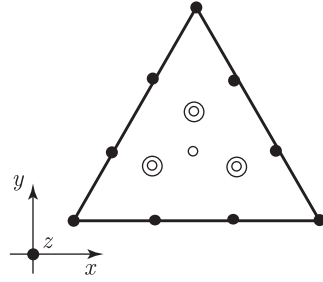


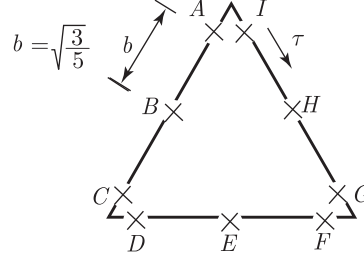
Рис. 5.49. Продолжение

На рисунке 5.49 и в таблице 5.3 дается перечень интерполяционных функций для четырехугольных элементов с девятью и с шестнадцатью узлами, а также для треугольных элементов с семью и с двенадцатью узлами, и приводятся соответствующие скорости сходимости. На рис. 5.49 интерполяционные функции даются для элементов, имеющих неискаженную геометрическую форму, и мы используем тензорные компоненты, как и для элемента MITC4, для обобщения данных интерполяций применительно к элементам с геометрическими искажениями. Проиллюстрируем применение интерполяционных функций, приведенных на рис. 5.49, на данном здесь примере.

Элемент MITC12: 12 узлов для интерполяции поворотов сечений
и 10 узлов для интерполяции поперечного смещения
(13-точечное интегрирование по Гауссу)



- Узел для интерполяции β_x, β_y и w
- ⊙ Узел для интерполяции β_x, β_y
- Узел для интерполяции w



$$\begin{aligned}\gamma_{xz} &= a_1 + b_1 x + c_1 y + d_1 x^2 + e_1 x y + \\ &\quad + f_1 y^2 + y(gx^2 + hxy + iy^2) \\ \gamma_{yz} &= a_2 + b_2 x + c_2 y + d_2 x^2 + e_2 xy + \\ &\quad + f_2 y^2 - x(gx^2 + hxy + iy^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{связки в точках } \gamma \cdot \tau \text{ и } A, B, C, D, E, F, G, H, I \\ \text{плюс интегральная связка } \int_A (\nabla \omega - \beta - \gamma) dA = \\ = \int_A (\nabla \omega - \beta - \gamma) x dA = \int_A (\nabla \omega - \beta - \gamma) y dA = 0\end{aligned}$$

Рис. 5.49. Продолжение

Таблица 5.3. Интерполяционные пространства и оценки теоретически предсказанных ошибок для элементов типа изгибающейся пластины

Элемент	Пространства, используемые для поворотов сечений и для поперечных смещений*	Оценки ошибок
MITC4	$\beta_h \in Q_1 \times Q_1$ $w_h \in Q_1$	$\ \beta - \beta_h\ _1 \leq ch$ $\ \nabla w - \nabla w_h\ _0 \leq ch$
MITC9	$\beta_h \in Q_2 \times Q_2$ $w_h \in Q_2 \cap P_3$	$\ \beta - \beta_h\ _1 \leq ch^2$ $\ \nabla w - \nabla w_h\ _0 \leq ch^2$
MITC16	$\beta_h \in Q_3 \times Q_3$ $w_h \in Q_2 \cap P_4$	$\ \beta - \beta_h\ _1 \leq ch^3$ $\ \nabla w - \nabla w_h\ _0 \leq ch^3$
MITC7	$\beta_h \in (P_2 \oplus \{L_1 L_2 L_3\}) \times (P_2 \oplus \{L_1 L_2 L_3\})$ $w_h \in P_2$	$\ \beta - \beta_h\ _1 \leq ch^2$ $\ \nabla w - \nabla w_h\ _0 \leq ch^2$
MITC12	$\beta_h \in (P_3 \oplus \{L_1 L_2 L_3\} P_1) \times (P_3 \oplus \{L_1 L_2 L_3\} P_1)$ $w_h \in P_3$	$\ \beta - \beta_h\ _1 \leq ch^3$ $\ \nabla w - \nabla w_h\ _0 \leq ch^3$

* Используемые обозначения см. в разделе 4.3

Пример 5.31: Требуется показать, как формируются матрицы интерполяции деформаций для матрицы жесткости применительно к показанному на рис. 5.50 элементу MITC9.

Элемент имеет ту же геометрию, что и рассмотренный на рис. 5.47 элемент с четырьмя узлами; следовательно, той же самой будет и матрица Якоби.

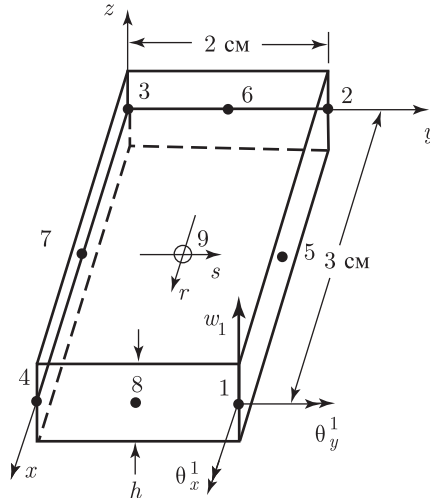


Рис. 5.50. Элемент типа изгибающейся пластины с девятью узлами

Если учесть, что поперечные смещения определяются с помощью приведенных на рис. 5.5 интерполяций с восемью узлами, то мы будем иметь

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1+2r)(1+s) - (1-s^2) & | & \dots \\ (1+2s)(1+r) - (1-r^2) & | & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_8 \end{bmatrix}. \quad (a)$$

Углы поворота сечений определяются при помощи интерполяционных функций с девятью узлами, которые также приводятся на рис. 5.5, и мы имеем

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \end{bmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1+2r)(1+s) - (1+2r)(1-s^2) & | & \dots \\ (1+2s)(1+r) - (1+2s)(1-r^2) & | & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_y^1 \\ \theta_y^2 \\ \vdots \\ \theta_y^9 \end{bmatrix}, \quad (b)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1+2r)(1+s) - (1+2r)(1-s^2) & | & \dots \\ (1+2s)(1+r) - (1+2s)(1-r^2) & | & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_x^1 \\ \theta_x^2 \\ \vdots \\ \theta_x^9 \end{bmatrix}. \quad (c)$$

Воспользуемся следующей системой упорядочения смещений и углов поворота в узловых точках:

$$\hat{\mathbf{u}}^T = [w_1 \quad \theta_x^1 \quad \theta_y^1 \quad | \quad \dots \quad | \quad w_8 \quad \theta_x^8 \quad \theta_y^8 \quad | \quad \theta_x^9 \quad \theta_y^9].$$

После этого интерполяционная матрица поперечных смещений \mathbf{H}_w задается выражением

$$\mathbf{H}_w = [h_1 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad h_2 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad \dots \quad | \quad h_8 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 0 \quad 0],$$

где величины, начиная с h_1 и кончая h_8 , приводятся на рис. 5.5 и соответствуют элементу с восемью узлами.

Матрица интерполяции значений кривизны \mathbf{B}_x получается непосредственно из соотношений (b) и (c), а именно

$$\mathbf{B}_\kappa = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} [(1+2s)(1+r) - (1+2s)(1-r^2)] \\ 0 & \frac{1}{6} [(1+2r)(1+s) - (1+2r)(1-s^2)] \\ & -\frac{1}{6} [(1+2r)(1+s) - (1+2r)(1-s^2)] & | & \\ & 0 & | & \dots \\ & -\frac{1}{4} [(1+2s)(1+r) - (1+2s)(1-r^2)] & | & \end{bmatrix}.$$

Интерполяционная матрица для поперечных сдвиговых деформаций получается из сдвиговых интерполяций, приведенных на рис. 5.49, и из процедуры привязывания, показанной на том же рисунке. Следовательно, получим

$$\mathbf{B}_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & r & s & rs & s^2 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & r & s & rs & r^2 \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}, \quad (\text{e})$$

где

$$\boldsymbol{\alpha}^T = [a_1 \quad b_1 \quad c_1 \quad d_1 \quad e_1 \quad | \quad a_2 \quad b_2 \quad c_2 \quad d_2 \quad e_2].$$

Значения, входящие в вектор $\boldsymbol{\alpha}$, выражаются в терминах смещений в узловых точках и углов поворота, с использованием соотношений привязывания. Например, учитывая, что точка A имеет координаты $x = (3/2)[1 + 1/\sqrt{3}]$, $y = 2$, мы имеем

$$\begin{aligned} \gamma_{sz}|_A &= a_1 + b_1 \left(\frac{3}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + c_1(2) + d_2(3) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + e_1(4) \\ &= \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \beta_x\right) \Big|_{\text{при } r=1/\sqrt{3}, s=1}. \end{aligned} \quad (\text{f})$$

Разумеется, производная $\partial w/\partial x$ задается с помощью (а), а угол поворота сечения β_x задается с помощью (5.99) при значениях h_i , соответствующих девяти узлам.

Используя все 10 приведенных на рис. 5.49 соотношений привязывания так, как это сделано в (f), мы можем получить решения для всех элементов матрицы, выражаемой согласно (e), в терминах смещений и углов поворота в узловых точках.

Результаты численного исследования поведения элементов MITCn были опубликованы в работе [Bathe, Bucelem, Brezzi 1990]. Однако можно вкратце отметить, что

Все элементные матрицы рассчитываются с использованием полного численного интегрирования по Гауссу (см. рис. 5.49).

Элементы не содержат никаких лишних мод с нулевой энергией.

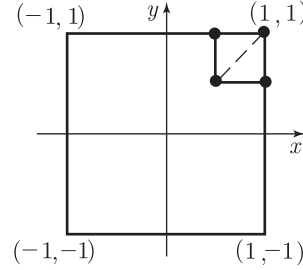
Элементы успешно проходят групповую проверку на чистый изгиб (см. рис. 4.40).

Чтобы проиллюстрировать поведение исследуемых элементов и представить ценную тестовую задачу, рассмотрим рисунки от 5.51 до 5.55. На рис. 5.51 формулируется тестовая задача. Отметим, что в данном случае поперечные смещения и углы поворота сечений задаются вдоль всей границы квадратной пластины и что в этой задаче отсутствуют пограничные слои (которые встречаются при исследовании практических случаев; см. [Häggblad, Bathe 1990]). Поэтому численно определяемые порядки сходимости должны оказаться близкими к значениям, прогнозируемым аналитически. На рис. 5.52 демонстрируются результаты, полученные с использованием однородных сеток, причем эти результаты находятся в хорошем соответствии с аналитически прогнозируемым поведением (эти прогнозы предполагают использование однородных сеток). На рисунках 5.53 и 5.54 показаны результаты, полученные с использованием последовательности квазиоднородных ¹⁾ сеток, и мы убеждаемся, что искажения элемента не оказывают чрезмерно большого влияния на порядок сходимости. Наконец, сходимость по поперечным сдвиговым

¹⁾ Определение последовательности квазиоднородных сеток дается в разделе 5.3.3.

деформациям, определяемая численным методом, демонстрируется на рис. 5.55. При этих конечно-элементных решениях сдвиговые деформации специального вида прогнозируются с удивительно высоким порядком сходимости (в общем случае этого, конечно, ожидать нельзя).

а. В качестве специально сформулированной задачи об изгибающейся пластине рассматривается случай квадратной пластины; поперечная нагрузка $= 0$, граничные условия отличны от нуля. Показан типичный элемент с четырьмя узлами. Пунктирная линия указывает на подразделение, используемое для треугольных элементных сеток; $h = 2/N$, где N — число элементов в расчете на одну сторону.



б. Точные значения поперечного смещения и углов поворота: $w = \sin kx \exp\{ky\} + \sin k \exp\{-k\}$; $\theta_x = k \sin kx \exp\{ky\}$; $\theta_y = -k \cos kx \exp\{ky\}$.

в. Тестовая задача: задайте функциональные значения w, θ_x и θ на всей границе и положите $p = 0$; рассчитайте внутренние значения; k — выбранная константа; нами используется $k = 5$.

Рис. 5.51. Специально сформулированная тестовая задача для элементов типа изгибающейся пластины

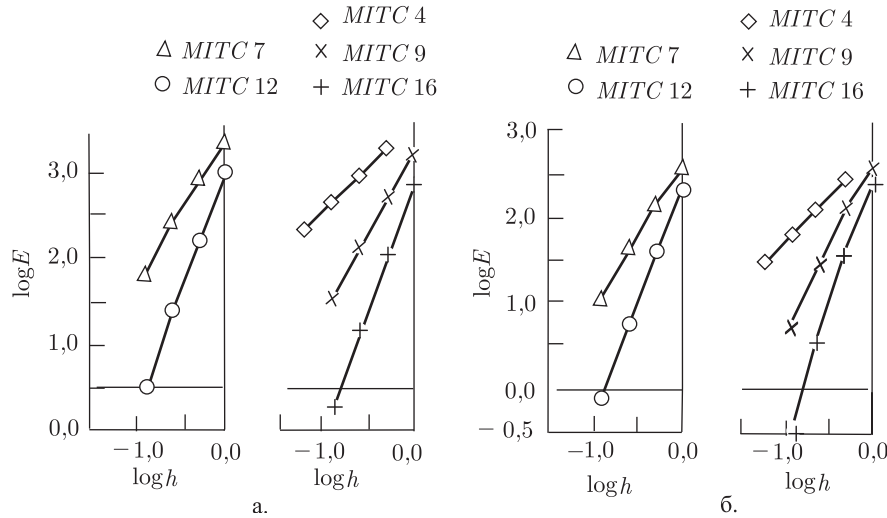


Рис. 5.52. Сходимость по повороту сечений при анализе специально сформулированной задачи с использованием однородных сеток. Мера ошибки $E = \|\beta - \beta_h\|_1$ (а). Сходимость по градиенту вертикального смещения при анализе специально сформулированной задачи с использованием однородных сеток. Мера ошибки $E = \|\nabla w - \nabla_h\|_1$ (б)

Элементы типа оболочки общего вида

Рассмотрим теперь модель элементов в форме оболочки общего вида, которую можно использовать в применении к анализу весьма сложных геометрических представлений оболочки и разнообразных распределений напряжений. Имея в виду эту цель, нам нужно дать обобщение предложенного выше подхода к описанию для элемента в форме пластины, действуя при этом почти таким же образом, как мы поступали при обобщении

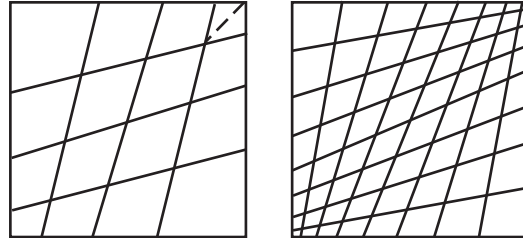


Рис. 5.53. Две типичные деформированные сетки, применяемые при анализе специально сформулированной задачи, штриховая линия указывает на подразделение, используемое для треугольных элементных сеток

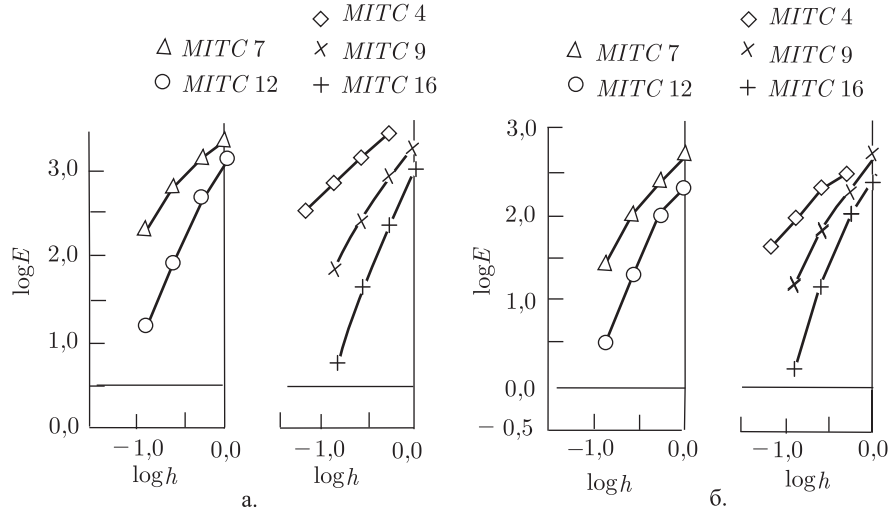


Рис. 5.54. Сходимость по повороту сечений при анализе специально сформулированной задачи с использованием деформированных сеток. Мера ошибки $E = \|\beta - \beta_h\|_1$ (а). Сходимость по градиенту вертикального смещения при анализе специально сформулированной задачи с использованием деформированных сеток. Мера ошибки $E = \|\nabla w - \nabla_h\|_1$ (б)

модели для изопараметрического элемента типа балки, переходя от прямой двумерной балки к искривленной трехмерной. Как и в случае модели элемента типа балки (см. раздел 5.4.1), мы рассматриваем такую интерполяцию по смещениям, которая приводит к элементу, базирующемуся только на учете смещений (см. [Ahmad et al. 1970]), после чего мы модифицируем данную схему с тем, чтобы предотвратить сдвиговое и мембранное зажатие.

Интерполяция смещений реализуется путем рассмотрения геометрической интерполяции. Рассмотрим элемент в форме оболочки общего вида, имеющий переменное число узлов q . На рис. 5.56 показан элемент с девятью узлами, для которого $q = 9$. Если воспользоваться естественными координатами r , s и t , то декартовы координаты точки элемента, имеющего q узловых точек, до и после деформаций представляются формулами

$$\begin{aligned} x(r, s, t) &= \sum_{k=1}^q h_k^\ell x_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k^\ell V_{nx}^k, \\ y(r, s, t) &= \sum_{k=1}^q h_k^\ell y_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k^\ell V_{ny}^k, \end{aligned} \quad (5.107)$$

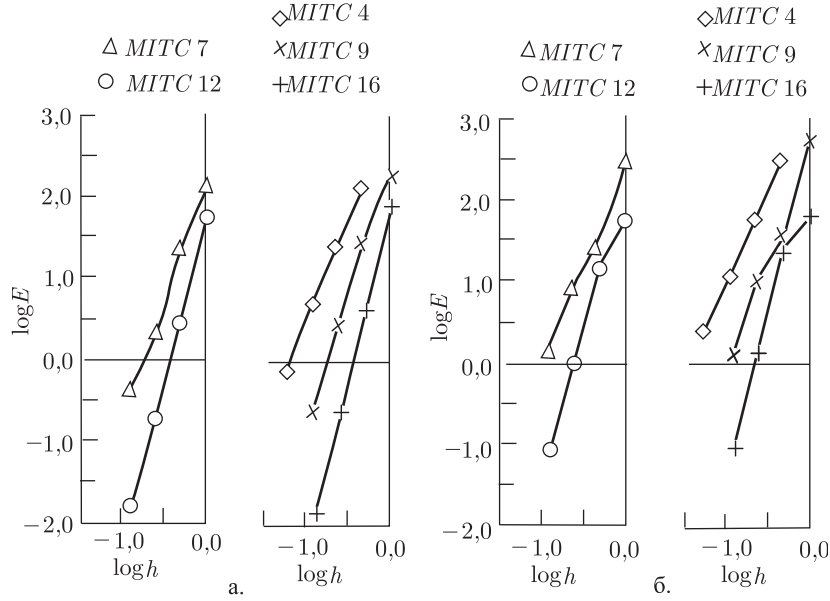


Рис. 5.55. Сходимость по поперечным сдвиговым деформациям при анализе специально сформулированной задачи. Мера ошибки $E = \|\gamma - \gamma_h\|_0$. Однородные сетки (а). Деформированные сетки (б)

$${}^\ell z(r, s, t) = \sum_{k=1}^q h_k {}^\ell z_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k {}^\ell V_{nz}^k,$$

где $h_k(r, s)$ — это интерполяционные функции, приведенные на рис. 5.5 и, кроме того, ${}^\ell x, {}^\ell y, {}^\ell z$ — декартовы координаты произвольной точки элемента,

${}^\ell x_k, {}^\ell y_k, {}^\ell z_k$ — декартовы координаты узловой точки k ,

a_k — толщина оболочки, измеряемая в направлении t , в узловой точке k ,

${}^\ell V_{nx}^k, {}^\ell V_{ny}^k, {}^\ell V_{nz}^k$ — компоненты единичного вектора ${}^\ell \mathbf{V}_n^k$, «нормального» к срединной поверхности оболочки, в направлении t , в узловой точке k ; мы называем ${}^\ell \mathbf{V}_n^k$ нормальным вектором¹⁾ или, что является более подходящим, направляющим вектором в узловой точке k .

Левый верхний индекс ℓ обозначает, как и в модели балки общего вида, конфигурацию элемента; иначе говоря, значения $\ell = 0$ и $\ell = 1$ соответствуют первоначальной и окончательной конфигурациям элемента. Следовательно, если использовать (5.107), то составляющие смещений выражаются как

$$\begin{aligned} u(r, s, t) &= \sum_{k=1}^q h_k u_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k V_{nx}^k, \\ v(r, s, t) &= \sum_{k=1}^q h_k v_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k V_{ny}^k, \\ w(r, s, t) &= \sum_{k=1}^q h_k w_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k V_{nz}^k, \end{aligned} \quad (5.108)$$

¹⁾ Мы называем вектор ${}^\ell \mathbf{V}_n^k$ нормальным, хотя он может и не быть в точности нормальным к срединной поверхности оболочки в ее первоначальной конфигурации (см. пример 5.32), но будет таким в окончательной конфигурации (например, вследствие сдвиговой деформации).

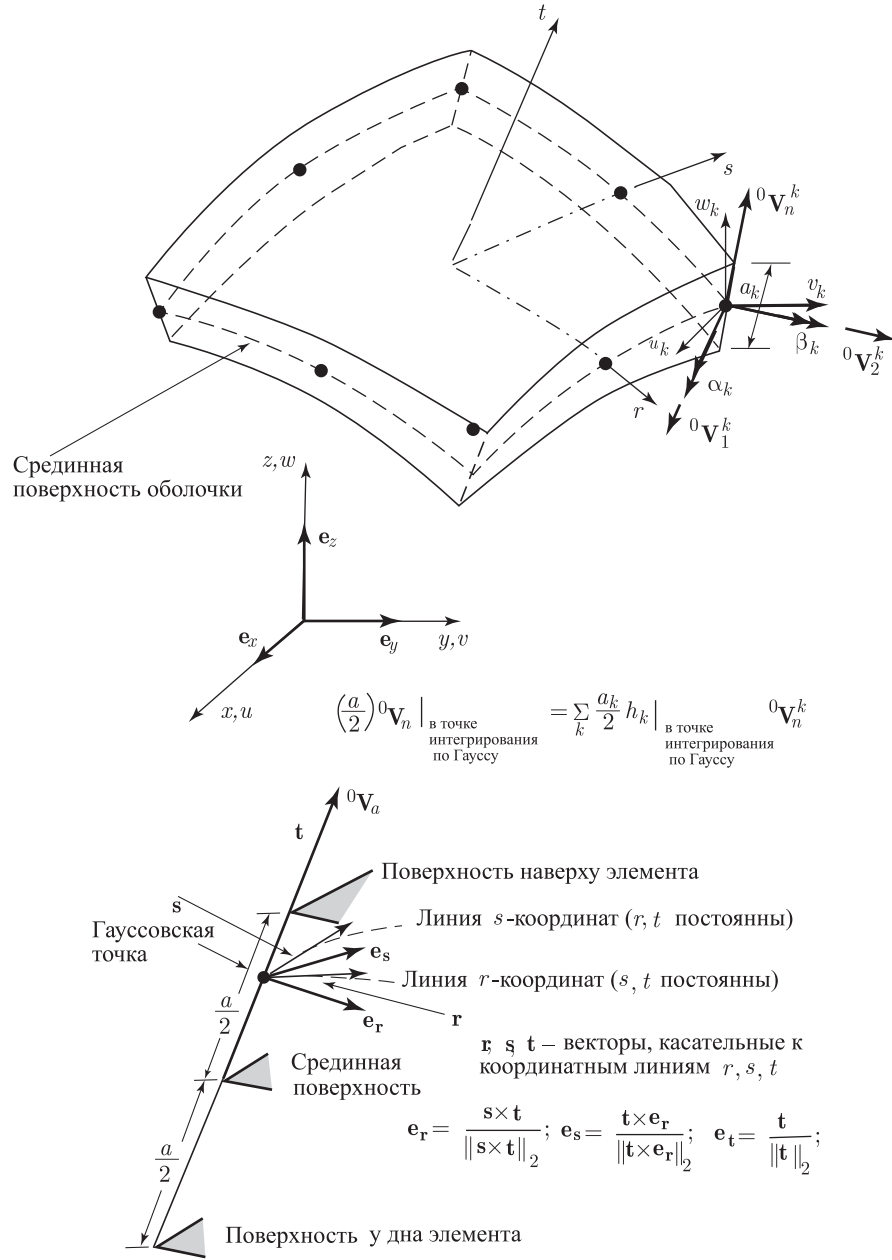


Рис. 5.56. Элемент типа оболочки с девятью узлами; дается также определение ортогональных осей $\bar{r}, \bar{s}, \bar{t}$ для формулировки основополагающих соотношений

где \mathbf{V}_n^k — это вводимые в память приращения направляющих косинусов величин ${}^0 \mathbf{V}_n^k$, то есть

$$\mathbf{V}_n^k = {}^1 \mathbf{V}_n^k - {}^0 \mathbf{V}_n^k. \quad (5.109)$$

Компоненты вектора \mathbf{V}_n^k могут быть выражены в терминах углов поворота в узловой точке k ; однако соответствующие действия проводятся не единственным образом. Эффективный путь связан с тем, чтобы определить два единичных вектора ${}^0\mathbf{V}_1^k$ и ${}^0\mathbf{V}_2^k$, ортогональных к ${}^0\mathbf{V}_n^k$:

$${}^0\mathbf{V}_1^k = \frac{\mathbf{e}_y \times {}^0\mathbf{V}_n^k}{\|\mathbf{e}_y \times {}^0\mathbf{V}_n^k\|_2}, \quad (5.110a)$$

где \mathbf{e}_y — единичный вектор, направленный по оси y (при анализе особого случая, когда векторы ${}^0\mathbf{V}_n^k$ и \mathbf{e}_y параллельны, мы можем просто считать вектор ${}^0\mathbf{V}_1^k$ равным \mathbf{e}_z). Теперь можем найти ${}^0\mathbf{V}_2^k$, а именно

$${}^0\mathbf{V}_2^k = {}^0\mathbf{V}_n^k \times {}^0\mathbf{V}_1^k. \quad (5.110b)$$

Пусть α_k и β_k будут углы поворота направляющего вектора ${}^0\mathbf{V}_n^k$ относительно векторов ${}^0\mathbf{V}_1^k$ и ${}^0\mathbf{V}_2^k$. Учитывая, что углы α_k и β_k малы, мы получим

$$\mathbf{V}_n^k = -{}^0\mathbf{V}_2^k \alpha_k + {}^0\mathbf{V}_1^k \beta_k. \quad (5.111)$$

Справедливость этого соотношения нетрудно доказать, если ${}^0\mathbf{V}_1 = \mathbf{e}_x$, ${}^0\mathbf{V}_2 = \mathbf{e}_y$ и ${}^0\mathbf{V}_n = \mathbf{e}_z$, однако учитывая, что эти векторы являются тензорами, то данное соотношение должно быть справедливым и в общем случае (см. раздел 2.4). Подстановка (5.111) в (5.108) дает, таким образом,

$$\begin{aligned} u(r, s, t) &= \sum_{k=1}^q h_k u_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k (-{}^0V_{2x}^k \alpha_k + {}^0V_{1x}^k \beta_k), \\ v(r, s, t) &= \sum_{k=1}^q h_k v_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k (-{}^0V_{2y}^k \alpha_k + {}^0V_{1y}^k \beta_k), \\ w(r, s, t) &= \sum_{k=1}^q h_k w_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k (-{}^0V_{2z}^k \alpha_k + {}^0V_{1z}^k \beta_k). \end{aligned} \quad (5.112)$$

Имея в своем распоряжении смещения и координаты элемента, определенные согласно (5.112) и (5.107), мы можем продолжать действовать обычным образом, чтобы рассчитать элементные матрицы для элемента, базирующегося только на учете смещений. Члены, входящие в матрицу интерполяции смещений \mathbf{H} для элемента в форме оболочки, задаются с помощью формул (5.112), а члены, входящие в матрицу интерполяции деформация–смещение, могут быть вычислены при использовании тех процедур, которые уже были описаны в модели элемента типа балки (см. раздел 5.4.1).

Для расчета матрицы деформация–смещение из формул (5.112) получаем

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^q \begin{bmatrix} \frac{\partial h_k}{\partial r} [1 & t g_{1x}^k & t g_{2x}^k] \\ \frac{\partial h_k}{\partial s} [1 & t g_{1x}^k & t g_{2x}^k] \\ h_k [0 & g_{1x}^k & g_{2x}^k] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ \alpha_k \\ \beta_k \end{bmatrix}, \quad (5.113)$$

а производные компонентов v и w получатся, если просто заменить переменные u и x на переменные v , y и w , z , соответственно. В соотношениях (5.113) мы используем обозначения

$$\mathbf{g}_1^k = -\frac{1}{2} a_k {}^0\mathbf{V}_2^k; \quad \mathbf{g}_2^k = \frac{1}{2} a_k {}^0\mathbf{V}_1^k. \quad (5.114)$$

Чтобы получить производные смещений относительно декартовых координат x , y , z , используем стандартное преобразование

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{J}^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}, \quad (5.115)$$

где матрица Якоби \mathbf{J} содержит производные координат x, y, z по отношению к естественным координатам r, s, t . Подставляя в (5.115) выражения из (5.113), получим

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^q \begin{bmatrix} \frac{\partial h_k}{\partial x} & g_{1x}^k G_x^k & g_{2x}^k G_x^k \\ \frac{\partial h_k}{\partial y} & g_{1y}^k G_y^k & g_{2y}^k G_y^k \\ \frac{\partial h_k}{\partial z} & g_{1z}^k G_z^k & g_{2z}^k G_z^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ \alpha_k \\ \beta_k \end{bmatrix}, \quad (5.116)$$

а производные функций v и w получаются аналогичным образом. В соотношениях (5.116) мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_k}{\partial x} &= J_{11}^{-1} \frac{\partial h_k}{\partial r} + J_{12}^{-1} \frac{\partial h_k}{\partial s}, \\ G_x^k &= t \left(J_{11}^{-1} \frac{\partial h_k}{\partial r} + J_{12}^{-1} \frac{\partial h_k}{\partial s} \right) + J_{13}^{-1} h_k, \end{aligned} \quad (5.117)$$

где J_{ij}^{-1} — это элемент (i, j) матрицы \mathbf{J}^{-1} , и так далее.

Располагая производными смещений, определенными согласно (5.116), мы можем теперь прямо перейти к комплектованию матрицы \mathbf{B} для элемента в форме оболочки. Если предположить, что строки этой матрицы соответствуют всем шести глобальным декартовым компонентам деформации, $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \dots, \gamma_{zx}$, то члены, входящие в \mathbf{B} , определяются обычным образом (см. раздел 5.3), однако при этом закон взаимосвязи напряжение–деформация должен содержать свойственное оболочке допущение о том, что напряжение, нормальное к поверхности оболочки, равно нулю. Соответствующее условие ставится в процессе анализа. Таким образом, если $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\epsilon}$ обозначают декартовы компоненты напряжений и деформаций, то мы используем закон связи

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}_{\text{sh}} \boldsymbol{\epsilon}, \quad (5.118)$$

где

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}^T &= [\tau_{xx} \quad \tau_{yy} \quad \tau_{zz} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}], \\ \boldsymbol{\epsilon}^T &= [\epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad \epsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}], \\ \mathbf{C}_{\text{sh}} &= \mathbf{Q}_{\text{sh}}^T \left(\frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ \text{симметрично} & & & k \frac{1-\nu}{2} & 0 & \\ & & & & k \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \right) \mathbf{Q}_{\text{sh}}, \end{aligned} \quad (5.119)$$

а \mathbf{Q}_{sh} представляет собой матрицу, преобразующую закон связи напряжение–деформация из представления в декартовой системе координат $\bar{r}, \bar{s}, \bar{t}$, связанных с оболочкой, в глобальную декартову систему координат. Элементы матрицы \mathbf{Q}_{sh} получаются из направляющих косинусов координатных осей $\bar{r}, \bar{s}, \bar{t}$ по отношению к координатным направлениям x, y, z . Мы получаем

$$\mathbf{Q}_{\text{sh}} = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & n_1 l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & n_2 l_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & m_3 n_3 & n_3 l_3 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & n_1 l_2 + n_2 l_1 \\ 2l_1 l_3 & 2m_1 m_3 & 2n_1 n_3 & l_1 m_3 + l_3 m_1 & m_1 n_3 + m_3 n_1 & n_1 l_3 + n_3 l_1 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_2 m_3 + l_3 m_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & n_2 l_3 + n_3 l_2 \end{bmatrix}, \quad (5.120)$$

где

$$\begin{aligned} l_1 &= \cos(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_{\bar{r}}); & m_1 &= \cos(\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_{\bar{r}}); & n_1 &= \cos(\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_{\bar{r}}); \\ l_2 &= \cos(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_{\bar{s}}); & m_2 &= \cos(\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_{\bar{s}}); & n_2 &= \cos(\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_{\bar{s}}); \\ l_3 &= \cos(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_t); & m_3 &= \cos(\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_t); & n_3 &= \cos(\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_t), \end{aligned} \quad (5.121)$$

а соотношения из (5.119) соответствуют преобразованию тензора четвертого порядка, описанному в разделе 2.4.

Как следует из вышеизложенного, при исследовании оболочки общего вида может оказаться необходимым рассчитывать матрицу \mathbf{Q}_{sh} заново в каждой из тех точек интегрирования, которые задействованы при численном интегрировании матрицы жесткости (см. раздел 5.5). Однако, когда рассматриваются оболочки специального вида и, в частности, когда исследуется пластина, то матрица преобразования и матрица напряжение–деформация \mathbf{C}_{sh} должны рассчитываться только в специальных точках и могут после этого использоваться повторно. Например, при исследовании некоего комплекса плоских пластин матрицу напряжение–деформация \mathbf{C}_{sh} необходимо рассчитывать только по одному разу для каждой из плоских частей конструкции.

При данной выше формулировке матрица деформация–смещение формируется в соответствии с декартовыми компонентами деформаций, причем это может быть сделано непосредственно, путем использования производных согласно (5.116). Действуя альтернативно этому, мы могли бы вычислить компоненты деформаций, соответствующие координатным осям, располагающимся на срединной поверхности элемента типа оболочки, и определить матрицу деформация–смещение именно для этих компонентов деформаций, как мы это делали в разделе 5.4.1 для модели элемента, относящегося к балке общего вида. Сравнительная вычислительная эффективность этих двух подходов зависит от того, будет ли более эффективным провести преобразование компонентов деформаций (которые всегда разнятся в точках интегрирования), или же преобразовать закон связи напряжение–деформация.

Было бы поучительным сравнить данную схему для элемента в форме оболочки с такой схемой, в которой применяются плоские элементы с наложенными друг на друга формами проявления напряжений, соответствующими поведению изгибающейся пластины или мембраны (см. раздел 4.2.3). Чтобы уяснить различия, предположим, что элемент в форме оболочки общего вида используется как плоский элемент при моделировании оболочки; тогда матрица жесткости данного элемента могла бы быть получена также путем наложения матрицы жесткости для изгибающейся пластины, вводимой соотношениями (5.94)–(5.99) (см. пример 5.29), на аналогичную матрицу для элемента с плоскими напряжениями, рассмотренную в разделе 5.3.1. Таким образом, в рассматриваемом здесь случае элемент в форме оболочки общего вида сводится к элементу в форме изгибающейся пластины, *наложенному* на элемент с плоскими напряжениями, однако вычислительное различие связано с тем фактом, что матрицы для этих элементов вычисляются путем численного интегрирования только в срединных плоскостях r – s каждого элемента, тогда как при расчете жесткости элемента в форме оболочки численное интегрирование проводится также и в направлении t (если только общая формулировка не модифицируется применительно к специальному случаю).

Некоторые из описанных выше соотношений иллюстрируются на приводимом ниже примере.

Пример 5.32: Рассмотрим элемент в форме оболочки, имеющий четыре узла и показанный на рис. 5.57.

- (а) Требуется определить члены, входящие в матрицу интерполяции смещений.
- (б) Требуется рассчитать толщину в средней точке данного элемента и указать направление, в котором измеряется эта толщина.

Рассматриваемый здесь элемент в форме оболочки имеет переменную толщину, однако в некоторых отношениях этот элемент может быть сравним с элементом в форме пластины, рассмотренным в примере 5.29.

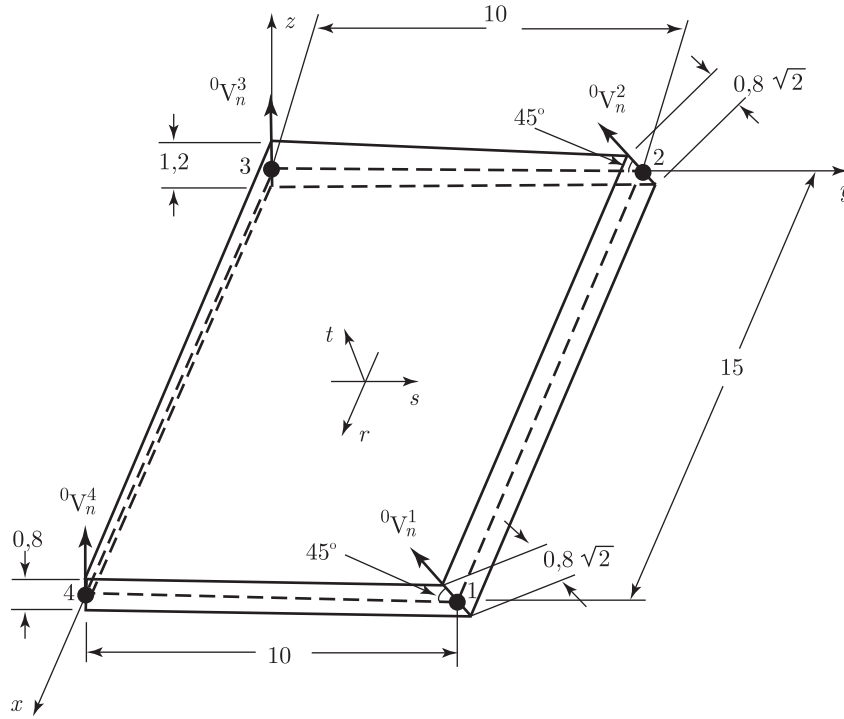


Рис. 5.57. Элемент оболочки с четырьмя узлами

Матрица интерполяции смещений \mathbf{H} задается соотношениями (5.112). Здесь функции h_k — это те, которые вводились для двумерного элемента с четырьмя узлами (см. рис. 5.5 и пример 5.29). Направляющие векторы ${}^0\mathbf{V}_n^k$ задаются исходя из геометрии элемента:

$${}^0\mathbf{V}_n^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}; \quad {}^0\mathbf{V}_n^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}; \quad {}^0\mathbf{V}_n^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad {}^0\mathbf{V}_n^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$${}^0\mathbf{V}_1^1 = {}^0\mathbf{V}_1^2 = {}^0\mathbf{V}_1^3 = {}^0\mathbf{V}_1^4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$${}^0\mathbf{V}_2^1 = {}^0\mathbf{V}_2^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}; \quad {}^0\mathbf{V}_2^3 = {}^0\mathbf{V}_2^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Кроме того,

$$a_1 = a_2 = 0,8\sqrt{2}; \quad a_3 = 1,2; \quad a_4 = 0,8.$$

Приведенные выше выражения определяют собой все члены в правых частях (5.112).

Чтобы вычислить толщину в средней точке элемента, а также направление, в котором эта толщина измеряется, воспользуемся соотношением

$$\left(\frac{a}{2}\right) {}^0\mathbf{V}_n \Big|_{\text{ср. точка}} = \sum_{k=1}^4 \frac{a_k}{2} h_k \Big|_{r=s=0} {}^0\mathbf{V}_n^k,$$

где символом a обозначается толщина, а направляющий вектор ${}^0\mathbf{V}_n$ определяет собой искомое направление. Приведенное выше выражение дает

$$\frac{a_0}{2}\mathbf{V}_n = \frac{0,8\sqrt{2}}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} + \frac{1,2}{8} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{0,8}{9} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,2 \\ 0,45 \end{bmatrix},$$

а это, в свою очередь, дает

$${}^0\mathbf{V}_n = \begin{bmatrix} 0,0 \\ -0,406 \\ 0,914 \end{bmatrix}; \quad a = 0,985.$$

Очевидно, что эта модель для элемента в форме оболочки обладает неким важным свойством, сводящимся к тому, что любая геометрическая форма оболочки может быть представлена непосредственно. Общность модели еще более возрастает, если эта модель распространяется на переходные элементы (наподобие того, как осуществляется аналогичное распространение для изопараметрического элемента в форме балки, рассмотренное в разделе 5.4.1). На рис. 5.58 показано, как переходные элементы для оболочек могут использоваться для моделирования поверхностей пересечения оболочек, а также поверхностей пересечения оболочки с твердым телом. Для этой цели используются совместимые идеализации элементов без введения специальных уравнений, характеризующих ограничительные условия. Характерные особенности, определяющие общность и точность моделирования конструкций типа оболочки, могут быть особенно важными при материальном и геометрическом нелинейном анализе таких конструкций, так как именно при такого рода анализах геометрические особенности оболочек должны учитываться с достаточной точностью. Распространение данной формулировки на случай общего нелинейного анализа обсуждается в разделе 6.5.2.

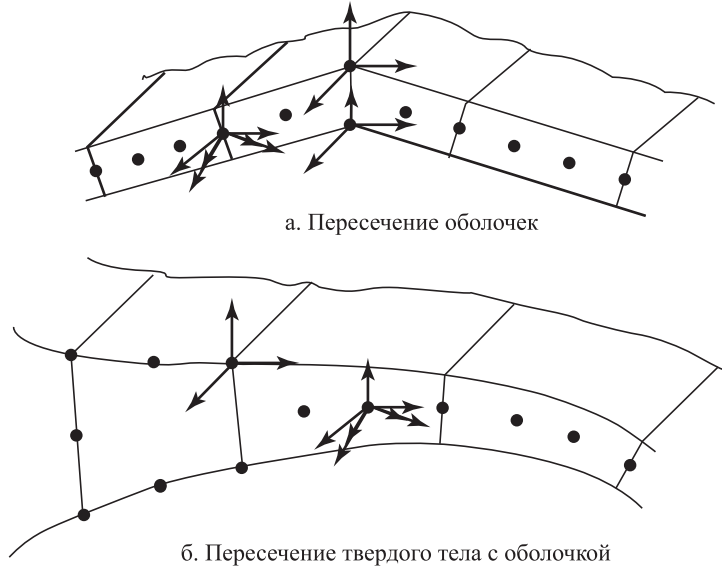


Рис. 5.58. Использование элементов перехода для оболочки

Как и в случае изопараметрических элементов типа балки, базирующихся на учете смещений, здесь модель, связанная только со смещениями, обладает тем недостатком, что низкпорядковые элементы приводят к заклипанию в результате появления лишних сдвиговых деформаций; если же эти элементы искривлены, то заклипание происходит также и вследствие появления лишних мембранных деформаций. Действительно, наименьший

порядок той интерполяции, которую необходимо использовать, — это кубическая интерполяция смещений (и геометрии), приводящая к построению четырехугольных элементов с 16-ю узлами и треугольных элементов с 10-ю узлами (все элементы в форме оболочек). Однако даже и эти элементы, будучи подвергнуты геометрическим искажениям, приводят к некоторым формам заклипания сдвигового и мембранного типа (именно по этим причинам на рис. 5.49 представлены элементы в форме изгибающихся пластин, типа MITC16 и MITC12). Чтобы избавиться от поведения, приводящего к заклипанию, используется смешанная интерполяция. Кроме того, особенно привлекательным оказывается использование тензорных компонентов, предложенное в работах [Dvorkin, Bathe 1984], а также [Bathe, Dvorkin 1986].

Первое, что нужно сделать при смешанной интерполяции, — это записать полный тензор деформаций в некоторой точке интегрирования, как

$$\epsilon = \underbrace{\tilde{\epsilon}_{rr} \mathbf{g}^r \mathbf{g}^r + \tilde{\epsilon}_{ss} \mathbf{g}^s \mathbf{g}^s + \tilde{\epsilon}_{rs} (\mathbf{g}^r \mathbf{g}^s + \mathbf{g}^s \mathbf{g}^r)}_{\text{деформации в слое}} + \underbrace{\tilde{\epsilon}_{rt} (\mathbf{g}^r \mathbf{g}^t + \mathbf{g}^t \mathbf{g}^r) + \tilde{\epsilon}_{st} (\mathbf{g}^s \mathbf{g}^t + \mathbf{g}^t \mathbf{g}^s)}_{\text{поперечные сдвиговые деформации}}, \quad (5.122)$$

где $\tilde{\epsilon}_{rr}$, $\tilde{\epsilon}_{ss}$, ..., — это ковариантные компоненты деформаций, соответствующие базовым векторам

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^r &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r}; \quad \mathbf{g}^s = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}; \quad \mathbf{g}^t = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}; \\ \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.123)$$

тогда как \mathbf{g}^r , \mathbf{g}^s , \mathbf{g}^t — это соответствующие контравариантные базовые векторы (см. раздел 2.4). Отметим, что если использовать индексные обозначения при $i = 1, 2, 3$, соответствующих r, s и t , то есть $r_1 = r$, $r_2 = s$, $r_3 = t$, то мы можем дать определение

$${}^0 \mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r_i}; \quad {}^1 \mathbf{g}_i = \frac{\partial (\mathbf{x} + \mathbf{u})}{\partial r_i}, \quad (5.124)$$

после чего ковариантные компоненты тензора деформаций Грина–Лагранжа принимают вид

$${}^1_0 \tilde{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} ({}^1 \mathbf{g}_i \cdot {}^1 \mathbf{g}_j - {}^0 \mathbf{g}_i \cdot {}^0 \mathbf{g}_j). \quad (5.125)$$

Компоненты тензора деформаций в (5.118) представляют собой линейные декартовы компоненты тензора деформаций, выражаемые согласно (5.125) (см. пример 2.28).

Целью применения смешанной интерполяции является проведение независимой интерполяции деформаций внутри слоя и поперечных сдвиговых деформаций, с последующим установлением связи этих интерполяций с обычными интерполяциями смещений. В результате оказывается, что получаемая после этого матрица жесткости соответствует только тем переменным для узловых точек (смещения и углы поворота сечений), которые используются для элементов, базирующихся на учете смещений. При этом, конечно, ключевая проблема состоит в том, чтобы при использовании конкретного вида интерполяций для смещений сделать такой выбор интерполяций для деформаций в слое и поперечных сдвиговых деформаций, при котором построенный элемент имел бы оптимальную способность к прогнозу.

Привлекательной разновидностью элемента с четырьмя узлами является элемент MITC4 в форме оболочки, предложенный в работе [Dvorkin, Bathe 1984], для которого деформации в слое рассчитываются, исходя из интерполяций для смещений (учитывая, что элемент не имеет искривленной формы и мембранное заклипание не имеет места в элементе, базирующемся на учете смещений), а ковариантные компоненты деформаций поперечного сдвига интерполируются и связываются с интерполяциями для смещений так, как это делалось при рассмотрении элемента в форме пластины см. (5.101). Элемент проявляет вполне доброкачественное поведение при изгибе с выходом из плоскости (изгиб пластины), а также при деформации без выхода из плоскости (мембранная деформация), если к основным интерполяциям для смещений в элементе с четырьмя узлами добавляются несовместимые моды, наподобие обсуждавшихся в примере 4.28.

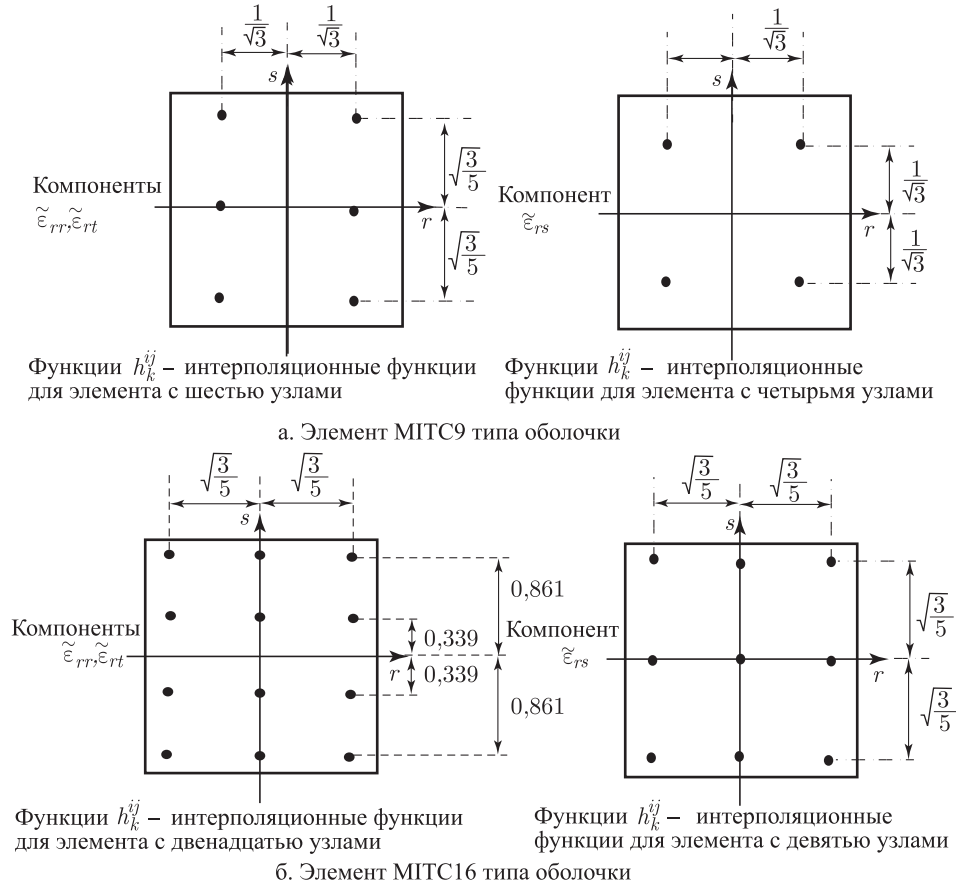


Рис. 5.59. Элементы MITC типа оболочки; интерполяции компонент деформации и точек связи

Значительно улучшенная способность к прогнозу достигается при применении элементов высшего порядка, и рис. 5.59 демонстрирует интерполяционные функции и точки привязывания, используемые для предложенных в работе [Bucalem, Bathe 1993] элементов с 9-ю и с 16-ю узлами. Эти элементы называются в дальнейшем элементами MITC9 и MITC16 в форме *оболочек*.

Следуя тому, что мы делали ранее при обсуждении смешанной интерполяции для элементов в форме пластин, при описании рассматриваемых здесь элементов в форме оболочек мы используем выражение

$$\tilde{\epsilon}_{ij} = \sum_{k=1}^{n_{ij}} h_k^{ij} \mathbf{B}_{ij}^{\text{DI}}|_k \hat{\mathbf{u}}, \quad (5.126)$$

где символ n_{ij} обозначает число точек привязывания, используемых для рассматриваемого компонента тензора деформаций, h_k^{ij} — это интерполяционная функция, соответствующая точке привязывания k , а $\mathbf{B}_{ij}^{\text{DI}}|_k \hat{\mathbf{u}}$ — это компонент тензора деформаций, вычисляемый в точке привязывания k при допущении о смещениях (т.е. при интерполяции смещений). Отметим, что согласно (5.126) осуществляется только точечное, но не интегральное привязывание (такое, как для элементов высшего порядка MITC типа пластин).

К сожалению, такой математический анализ, какой был проведен для элементов типа пластины и кратко описан на рис. 5.49, пока что невозможно провести для элементов

MITC9 и MITC16 типа оболочки, хотя некоторое, весьма ценное проникновение в суть вопроса было осуществлено в работе [Pitkäranta 1991]. Следовательно, пока что модель элементов типа оболочек основывается на математическом и физическом уяснении сути вопроса, достигнутом при рассмотрении формулировок и при анализе элементов типа балок и пластин, на интуиции в связи с точным представлением поведения оболочек, а также на хорошо подобранных численных экспериментах.

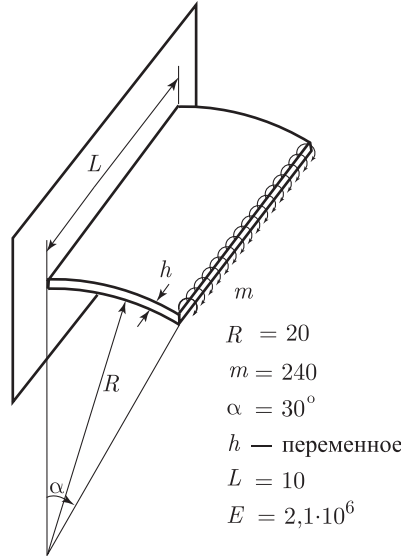


Рис. 5.60. Задача об искривленной консоли в применении к тесту для искривленных элементов типа оболочки

Разумеется, представленные здесь элементы MITC в форме оболочек не содержат никаких лишних мод с нулевой энергией. Кроме того, эти элементы успешно проходят групповые проверки на мембранные деформации и чистый изгиб. Еще одна ценная проверка состоит в анализе задачи, показанной на рис. 5.60. Эта проверка говорит о том, приводит ли элемент к запиранию (в результате появления лишних мембранных или сдвиговых напряжений) и показывает, насколько чувствительной является способность элемента к прогнозу, если искривленный элемент подвергается геометрическому искажению в рамках модели искривленной оболочки. Таблица 5.4 показывает результаты анализа задачи, представленной на рис. 5.60, и свидетельствует о хороших качествах поведения элементов MITC9 и MITC16.

Дополнительные численные результаты в связи с использованием элементов MITC9 и MITC16 типа оболочек приводятся в работе [Bucalem, Bathe 1993]; элементы, сформулированные аналогичным образом, были представлены в работах [Huang, Hinton 1986], [Park, Stanley 1986], а также [Jang, Pinsky 1987].


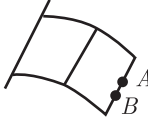
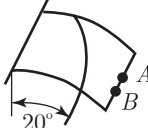
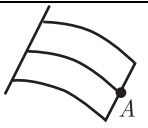
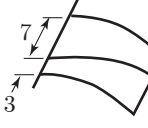
Граничные условия

Элементы в форме пластин, представленные в этом разделе, основываются на теории пластин Рейсснера–Миндлина, в которой роль независимых переменных играют поперечные смещения и углы поворота сечений. Это предположение фундаментальным образом отличается от кинематического предположения, используемого в теории пластин Кирхгофа, где единственной независимой является поперечное смещение. Следовательно, если в теории Кирхгофа все граничные условия записываются только в терминах поперечного смещения (и, конечно же, его производных), то в теории Рейсснера–Миндлина все граничные условия записываются в терминах поперечного смещения и углов поворота сечений (а также их производных). Если учесть, что углы поворота сечений используются дополнительных кинематических переменных, то истинное физическое условие в месте крепления также может моделироваться более точно.

В качестве примера рассмотрим условия крепления на кромке тонкой конструкции, показанной на рис. 5.61. Если бы эта конструкция моделировалась как трехмерная сплошная среда, то элементная идеализация могла быть такой, как это показано на рис. 5.62 а, а тогда граничные условия были бы такими, как показано на том же рисунке. Разумеется, такого рода модель была бы неэффективной и непрактичной, так как для получения достаточно точного решения конечно-элементная дискретизация должна была бы быть чрезвычайно измельченной (напомним, что трехмерные элементы имеют тенденцию к проявлению сдвигового запирания).

Применяя теорию пластин Рейсснера–Миндлина, можно представить тонкую конструкцию с помощью предположений, введенных в соотношениях (5.88) и на рис. 5.46. Граничные условия выражаются в том, что поперечное смещение поддерживается рав-

Таблица 5.4. Характеристики элементов МТС и МТС16, относящихся к типу оболочки, в применении к анализу задачи, представленной на рис. 5.60

Сетка	h/R	θ_{FE}/θ_{AN}	
		Элемент МТС9 типа оболочки (результаты для точки A*)	Элемент МТС16 типа оболочки (ре- зультаты для точки B**)
	1/1100	0,9995	1,0001
	1/1000	0,9995	1,0001
	1/100000	0,9995	1,0001
	1/1100	1,0000	1,0000
	1/1000	1,0000	1,0000
	1/100000	1,0000	0,9999
	1/1100	0,9956	0,9975
	1/1000	0,9913	0,9796
	1/100000	0,9983	0,9318
	1/1100	0,9995	1,0001
	1/1000	0,9995	1,0001
	1/100000	0,9995	1,0001
	1/1100	0,9995	1,0000
	1/1000	0,9995	1,0001
	1/100000	0,9995	1,0001

* Точка A расположена в середине кромки

** Точка B является третьей точкой на кромке

ным нулю, но углы поворота сечений остаются свободными; см. рис. 5.62б. Конечно, эти условия представляют физическую ситуацию так, чтобы она была в максимально возможном соответствии с предположениями указанной теории.

С другой стороны, отметим, что при использовании теории пластин Кирхгофа были бы равны нулю и поперечное смещение, и угол поворота у кромки, заданный посредством $\partial w / \partial x$, а поэтому конечно-элементная модель должна была бы также наложить условие $\theta_y = 0$.

В итоге, следовательно, условия на кромке для конструкции на рис. 5.61 при построении конечно-элементного решения моделировались бы следующим образом.

При использовании трехмерных элементов

$$\text{у кромки: } u = v = w = 0. \quad (5.127)$$

При использовании элементов, базирующихся на теории Рейсснера–Миндлина для пластин (например, элементов МТС, показанных на рис. 5.49)

$$\text{у кромки: } w = 0; \text{ значения } \theta_x \text{ и } \theta_y \text{ остаются свободными.} \quad (5.128)$$

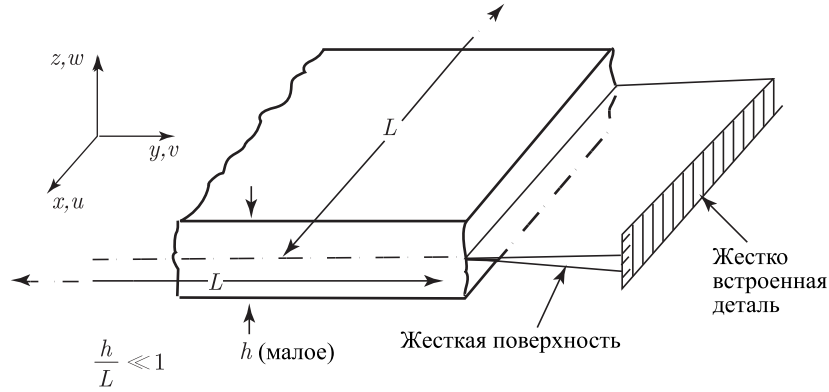


Рис. 5.61. Крепление для тонкой конструкции типа кромки ножа

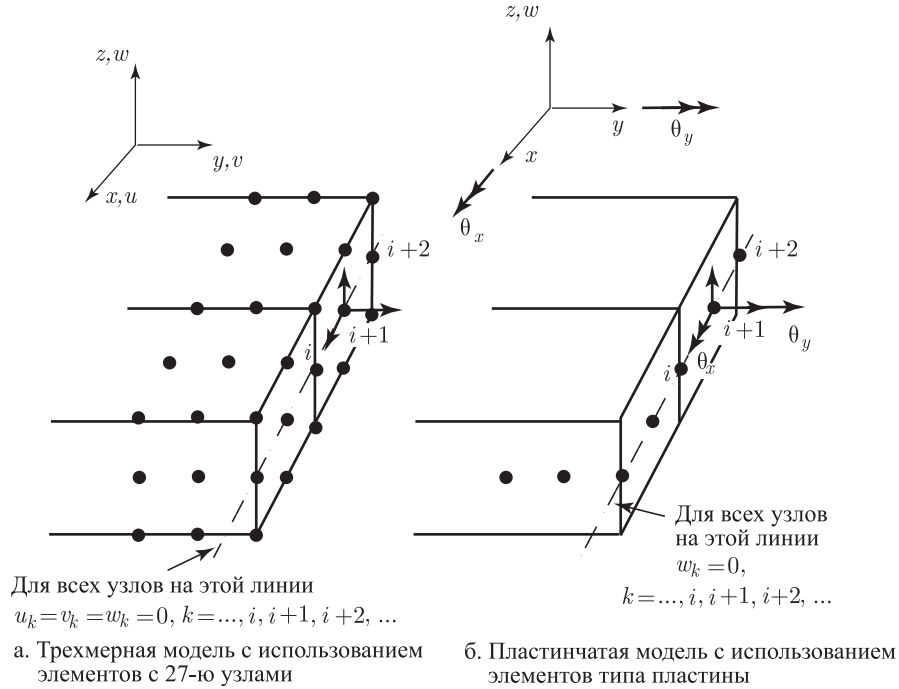


Рис. 5.62. Трехмерная и пластиночная модели для задачи на рис. 5.61

При использовании элементов, базирующихся на теории Кирхгофа для пластин (например, элементов, описанных в примере 4.18)

$$\text{у кромки: } w = \theta_y = 0; \text{ значение } \theta_x \text{ остается свободным,} \quad (5.129)$$

где в рамках теории Кирхгофа для пластин

$$\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x}. \quad (5.130)$$

Разумеется, мы могли бы также сформулировать физическое условие крепления, которое, в дополнение к условию крепления с кромкой жесткого ножа, показанному на рис. 5.61, предотвращало бы поворот сечения β_x . В этом случае, при использовании элементов, базирующихся на теории Рейсснера–Миндлина для пластин, мы также положили

бы θ_y равным нулю, а при использовании трехмерных элементов — положили бы равными нулю все u -компоненты смещений на лицевой стороне пластины.

Граничное условие, соответствующее (5.128), принято называть «мягким» граничным условием для простого крепления, тогда как если значение θ_y также приравняется нулю, то граничное условие относится к типу «жесткого». Возможности подобного же рода существуют и тогда, когда кромка пластины «зажата», т. е. когда кромка не имеет возможности поворота с изменением θ_x . Очевидно, что в этом случае мы имеем $w = 0$ и $\theta_x = 0$ у кромки пластины. Однако здесь вновь возникает возможность выбора в отношении θ_y : при мягком граничном условии значение θ_y остается свободным, а при жестком граничном условии $\theta_y = 0$. На практике мы обычно используем мягкие граничные условия, однако, конечно, в зависимости от истинной физической ситуации может применяться также и жесткое граничное условие.

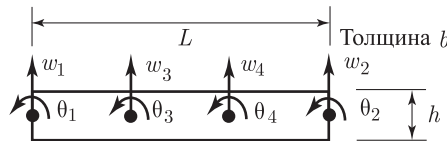
Важно отметить, что когда используются элементы, базирующиеся на теории Рейсснера–Миндлина для пластин, то граничные условия для поперечных смещений и углов поворота не обязательно являются такими же, как и при использовании теории Кирхгофа для пластин, и должны быть выбраны так, чтобы надлежащим образом моделировать истинную физическую ситуацию.

Разумеется, те же замечания справедливы и при использовании элементов типа оболочек, представленных нами ранее, для которых углы поворота сечений также являются независимыми переменными (но не задаются с помощью производных поперечного смещения).

Если учесть, что теория Рейсснера–Миндлина содержит большее число переменных, описывающих поведение пластины, чем теория Кирхгофа, то возникают различные интересные вопросы, связанные со сравнением этих теорий, а также касающиеся сходимости результатов, полученных с применением каждой из них. Вопросы такого рода были поставлены, например, такими авторами, как K. O. Friedrichs and R. F. Dressler [Friedrichs, Dressler 1961], E. Reissner [Reissner 1976], D. Häggblad and K. J. Bathe [Häggblad, Bathe 1990], а также D. N. Arnold and R. S. Falk [Arnold, Falk 1990]. Главный результат состоит в том, что при использовании теории Рейсснера–Миндлина с постановкой специальных граничных условий и при очень малых значениях отношения толщина/длина для данной пластины, вдоль кромок этой пластины развиваются пограничные слои. Эти пограничные слои представляют истинную физическую ситуацию более реалистично, чем это делает теория Кирхгофа для пластин. Следовательно, представленные в этом разделе элементы в форме пластин и оболочек не только привлекательны с вычислительной точки зрения, но и могут быть использованы для более точного воспроизведения истинных природных ситуаций. Некоторые численные результаты и сравнительные оценки, касающиеся теорий Кирхгофа и Рейсснера–Миндлина для пластин, приводятся в работах [Häggblad, Bathe 1990], а также [Bathe, Lee, Bucalem 1990].

5.4.3. Упражнения

- 5.32. Рассмотрите показанную на рис. 5.36 балку с постоянной площадью поперечного сечения. Исходя из (4.7) и используя предположения, указанные на рис. 5.35, выведите выражение (5.58), соответствующее принципу виртуальной работы.
- 5.33. Рассмотрите показанный здесь изопараметрический кубический элемент в форме балки, основанный на учете смещений. Постройте все матрицы, требуемые для расчета матриц жесткости и масс (но не проводите никаких операций интегрирования для вычисления этих матриц).

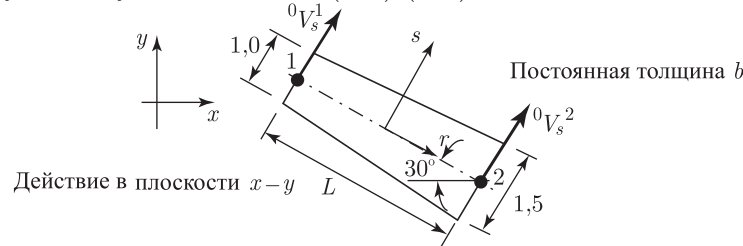


- 5.34. Рассмотрите изопараметрический элемент, базирующийся на учете смещений, имеющий форму балки с тремя узлами и используемый для моделирования задачи о консольной балке, представленной на рис. 5.38.

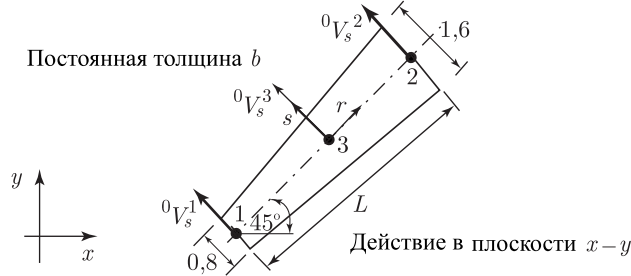


Покажите аналитически, что отличные результаты получаются тогда, когда узел 3 располагается точно посередине балки, и что, однако, эти результаты ухудшаются при сдвиге указанного узла из центрального положения.

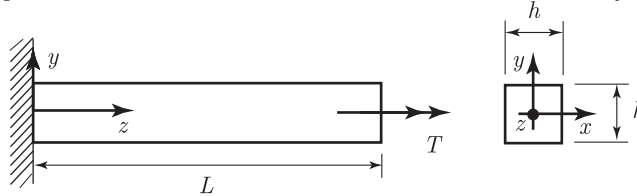
- 5.35. Рассмотрите показанный здесь элемент в форме балки с двумя узлами. Примените к анализу этого случая соотношения (5.71)–(5.86).



- 5.36. Рассмотрите показанный здесь элемент в форме балки с тремя узлами. Примените к анализу этого случая соотношения (5.71)–(5.86).



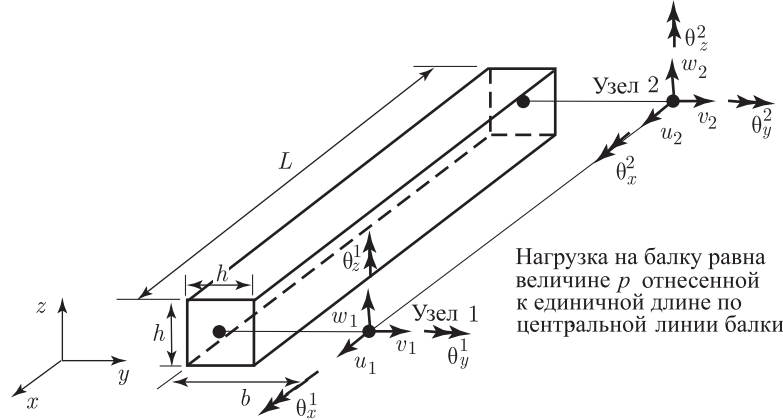
- 5.37. Рассмотрите показанную здесь консольную балку. Идеализируйте эту конструкцию, представляя ее одним элементом в форме балки с двумя узлами, с применением смешанной интерполяции, и проанализируйте реакцию этого элемента. Сначала следует пренебречь эффектами коробления. Затем введите смещения, приводящие к +короблению, используя определяющую их функцию $w_w = xy(x^2 - y^2)$ и предполагая, что коробление изменяется вдоль оси элемента по линейному закону.



Модуль Юнга E
Модуль сдвига G

- 5.38. Рассмотрите показанный здесь элемент в форме балки с двумя узлами, с применением смешанной интерполяции. Выведите все выражения, требуемые для вычисления

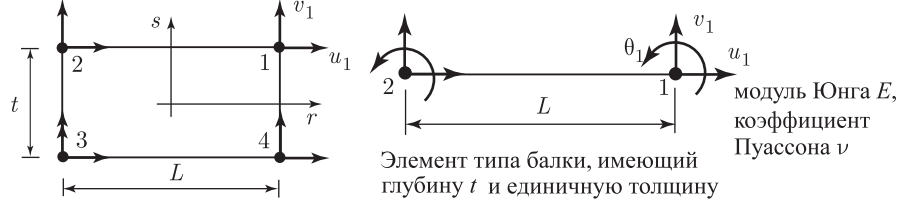
матрицы жесткости, матрицы масс и вектора узловых сил, при степенях свободы, указанных на рисунке. Не выполняйте, однако, никаких операций интегрирования.



- 5.39. Рассмотрите показанный здесь элемент с плоскими напряжениями и вычислите матрицу деформация–смещение для этого элемента (обозначаемую, как \mathbf{B}_{pl}). Рассмотрите также показанный здесь изопараметрический, базирующийся на учете смещений элемент в форме балки с двумя узлами и вычислите для него матрицу деформация–смещение (обозначаемую, как \mathbf{B}_b). Используя полученную матрицу \mathbf{B}_{pl} и надлежащие кинематические ограничительные условия, постройте матрицу деформация–смещение для вырожденного элемента с плоскими напряжениями (обозначаемую, как $\tilde{\mathbf{B}}_{pl}$) при степенях свободы, используемых для элемента в виде балки. Покажите в явной форме, что

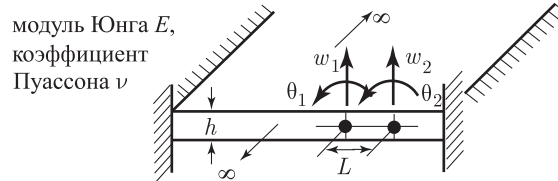
$$\int_V \mathbf{B}_b^T \mathbf{C}_b \mathbf{B}_b dV = \int_V \tilde{\mathbf{B}}_{pl}^T \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{B}}_{pl} dV$$

при \mathbf{C}_b и \mathbf{C} , определяемых непосредственно вами.



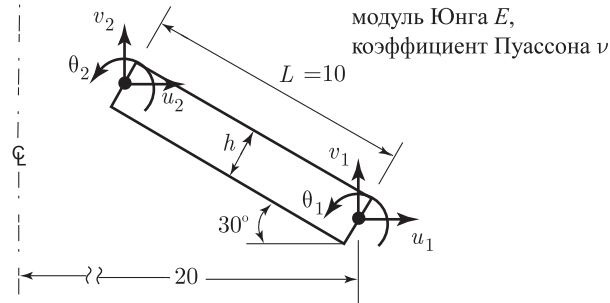
Элемент с плоскими напряжениями (единичная толщина)

- 5.40. Рассмотрите задачу о бесконечно длинной, тонкой пластине, жестко зажатой с двух сторон, как показано здесь. Рассчитайте матрицу жесткости для элемента в форме балки с плоскими деформациями, имеющей два узла и используемой для анализа поведения пластины (воспользуйтесь смешанной интерполяцией согласно (5.68) и (5.69)).



- 5.41. Рассмотрите показанный здесь осесимметричный элемент в форме оболочки. Постройте матрицу деформация–смещение в предположении о смешанной интерполяции с постоянной поперечной сдвиговой деформацией. Кроме того, определите

соответствующую матрицу напряжение–деформация, которую следует использовать при вычислении матрицы жесткости.

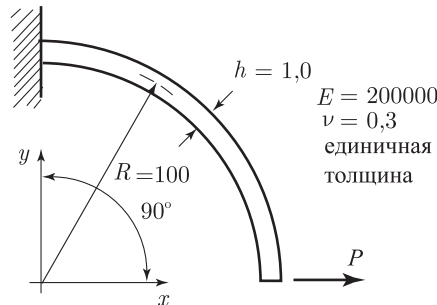


5.42. Предположите, что пример 5.28 рассматривается в условиях осевой симметрии. Постройте матрицу деформация–смещение для переходного элемента. Предположите, что ось вращения, т. е. ось y , находится на расстоянии R от узла 3.

5.43. Используйте компьютерную программу для исследования поведения показанной здесь искривленной балки в отношении деформаций и внутренних напряжений.

- (а) Воспользуйтесь дискретизацией на базе учета смещений, рассматривая, во-первых, элементы с плоскими напряжениями, имеющие четыре узла, и, во-вторых, аналогичные элементы, имеющие восемь узлов.
- (б) Воспользуйтесь вариантами дискретизации для элементов в форме балки, имеющих, во-первых, два узла и, во-вторых, три узла.

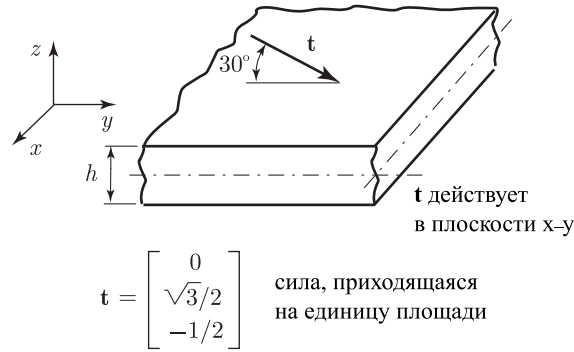
Сравните результаты рассчитанных решений с аналитическим решением и повышайте степень измельчения ваших сеток до тех пор, пока не получите точного решения.



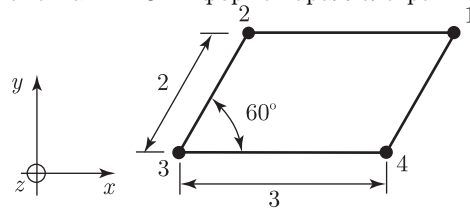
5.44. Проведите анализ, описанный в упражнении 5.43, однако предположите наличие осесимметричных условий; иначе говоря, предположите, что рисунок из упражнения 5.43 показывает поперечное сечение осесимметричной оболочки с осевой линией при $x = 0$, и что P — это нагрузка, приходящаяся на единицу длины.

5.45. Рассмотрите элемент в форме изгибающейся пластины, имеющий четыре узла и описанный в примере 5.29. Предположите, что $w_1 = 0,1$ и $\theta_y^1 = 0,01$, и что смещения и углы поворота во всех остальных узловых точках равны нулю. Постройте графики изменения кривизны κ и поперечных сдвиговых деформаций γ , как функций от r и s , вдоль срединной поверхности элемента.

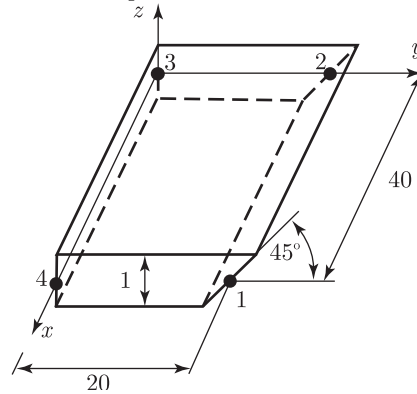
5.46. Рассмотрите элемент в форме изгибающейся пластины, имеющий четыре узла и описанный в примере 5.29. Предположите, что на верхнюю поверхность этого элемента действует, как это показано здесь, постоянная и направленная под углом к поверхности нагрузка. Рассчитайте совместимые силы и моменты в узловых точках.



- 5.47. Определите интерполяционную матрицу поперечных сдвиговых деформаций \mathbf{B}_γ для показанного здесь элемента МПТС4 в форме параллелограмма.



- 5.48. Рассмотрите модель элемента МПТС4 и пример 4.30. Покажите, что модель элемента МПТС4 может быть выведена из вариационного принципа Ху–Вашизу.
- 5.49. Рассмотрите показанный здесь элемент в форме оболочки с четырьмя узлами и постройте интерполяции для геометрии и для смещений согласно (5.107) и (5.112).



- 5.50. Покажите в явной форме, что если общую модель для элемента в форме оболочки, соответствующую соотношениям (5.107)–(5.118), применить к плоскому элементу, то это будет эквивалентно суперпозиции модели Рейсснера–Миндлина для элемента в форме пластины, соответствующей (5.88)–(5.99), и модели для элемента в форме мембраны с плоскими напряжениями, предложенной в разделе 5.3.1.
- 5.51. Воспользуйтесь компьютерной программой для решения задачи, показанной на рис. 5.60 для элементов в форме искривленных оболочек. Сначала используйте одиночный элемент, а затем — конструкцию из двух геометрически искаженных элементов с целью исследования чувствительности к искажению элементов.
- 5.52. Рассмотрите следующие граничные условия на кромке пластины, соответствующие теории Кирхгофа для пластин:

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (\text{a})$$

Сделайте соответствующий этому разумный выбор граничных условий согласно теории Рейсснера–Миндлина для пластин. Кроме того, обсудите и дайте графическую иллюстрацию того факта, что граничные условия (а) не определяют собой однозначно граничных условий, соответствующих теории Рейсснера–Миндлина для пластин.

5.5. Численное интегрирование

Важный аспект изопараметрического конечно-элементного анализа и его разновидностей, — это необходимость проведения численного интегрирования. Интегралы, необходимые для определения матриц при конечно-элементных расчетах, были записаны в одной из форм

$$\int \mathbf{F}(r) dr; \quad \int \mathbf{F}(r, s) dr ds; \quad \int \mathbf{F}(r, s, t) dr ds dt \quad (5.131)$$

для одномерного, двумерного и трехмерного случая соответственно. Как было сказано, на практике эти интегралы определялись численным методом, с помощью выражений

$$\left. \begin{aligned} \int \mathbf{F}(r) dr &= \sum_i \alpha_i \mathbf{F}(r_i) + \mathbf{R}_n \\ \int \mathbf{F}(r, s) dr ds &= \sum_{i,j} \alpha_{ij} \mathbf{F}(r_i, s_j) + \mathbf{R}_n \\ \int \mathbf{F}(r, s, t) dr ds dt &= \sum_{i,j,k} \alpha_{ijk} \mathbf{F}(r_i, s_j, t_k) + \mathbf{R}_n \end{aligned} \right\}, \quad (5.132)$$

где суммирование распространяется на все заданные значения i, j и k , α_i , α_{ij} и α_{ijk} — это весовые множители, а $\mathbf{F}(r_i)$, $\mathbf{F}(r_i, s_j)$ и $\mathbf{F}(r_i, s_j, t_k)$ — это соответствующие матрицы, рассчитываемые в определенных точках. Матрицы \mathbf{R}_n — это матрицы ошибки, которые на практике обычно не вычисляются. На этом основании мы используем выражения

$$\left. \begin{aligned} \int \mathbf{F}(r) dr &= \sum_i \alpha_i \mathbf{F}(r_i) \\ \int \mathbf{F}(r, s) dr ds &= \sum_{i,j} \alpha_{ij} \mathbf{F}(r_i, s_j) \\ \int \mathbf{F}(r, s, t) dr ds dt &= \sum_{i,j,k} \alpha_{ijk} \mathbf{F}(r_i, s_j, t_k) \end{aligned} \right\}. \quad (5.133)$$

Цель, поставленная нами в данном разделе, состоит в том, чтобы изложить теорию численного интегрирования и сделать некоторые практические выводы. Важный аспект связан с требуемой точностью интегрирования, т. е. с числом точек интегрирования, требуемым при формировании элемента.

Как указано выше, в процессе конечно-элементного анализа мы интегрируем матрицы, а это означает, что каждый элемент рассматриваемой матрицы интегрируется индивидуально. Следовательно, для вывода формул численного интегрирования мы можем рассмотреть некий типичный элемент матрицы, обозначаемый символом F .

Рассмотрим сначала одномерный случай, т. е. интегрирование вида $\int_a^b F(r) dr$. При расчете изопараметрического элемента мы фактически имели бы $a = -1$ и $b = +1$.

Численная оценка вышеуказанного интеграла основывается, по существу, на том, что по заданным значениям $F(r)$ строится некий полином $\psi(r)$, а затем интеграл $\int_a^b \psi(r) dr$

используется в качестве аппроксимации интеграла $\int_a^b F(r) dr$. Число задаваемых значений $F(r)$ и расположение точек, выбираемых в интервале от a до b , определяет, насколько хорошо $\psi(r)$ аппроксимирует $F(r)$, а следовательно, и какова ошибка численного интегрирования (см., например, [Fröberg 1969]).

5.5.1. Интерполяция с использованием полинома

Предположим, что функция $F(r)$ вычислена в дискретных точках r_0, r_1, \dots, r_n , общим числом $(n+1)$, чтобы получить, соответственно, F_0, F_1, \dots, F_n , и что по этим данным строится некий полином $\psi(r)$. Тогда существует единственный полином $\psi(r)$, задаваемый формулой

$$\psi(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_n r^n. \quad (5.134)$$

Пользуясь условием $\psi(r) = F(r)$ в $(n+1)$ точках интерполяции, мы имеем

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{a}, \quad (5.135)$$

где

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad (5.136)$$

а \mathbf{V} представляет собой матрицу Вандермонде,

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & r_0 & r_0^2 & \dots & r_0^n \\ 1 & r_1 & r_1^2 & \dots & r_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & r_n & r_n^2 & \dots & r_n^n \end{bmatrix}. \quad (5.137)$$

Если учесть, что при различающихся между собой дискретных точках r_i будем иметь $\mathbf{V} \neq 0$, то получим единственное решение для \mathbf{a} .

Однако более удобный путь получения $\psi(r)$ состоит в использовании интерполяции Лагранжа. Напомним, во-первых, что $(n+1)$ функций $1, r, r^2, \dots, r^n$ образуют в совокупности $(n+1)$ -мерное векторное пространство V_n , в котором $\psi(r)$ является элементом (см. раздел 2.3). Учитывая, что координаты $\psi(r)$, т.е. $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, довольно трудно вычислить с помощью (5.135), мы ищем другой базис для пространства V_n , в котором координаты $\psi(r)$ вычисляются легче. Этот базис обеспечивается фундаментальными полиномами интерполяции по Лагранжу, задаваемыми как

$$l_j(r) = \frac{(r-r_0)(r-r_1)\dots(r-r_{j-1})(r-r_{j+1})\dots(r-r_n)}{(r_j-r_0)(r_j-r_1)\dots(r_j-r_{j-1})(r_j-r_{j+1})\dots(r_j-r_n)}, \quad (5.138)$$

где

$$l_j(r_i) = \delta_{ij} \quad (5.139)$$

и где δ_{ij} — это символ Кронекера, т.е. $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Если использовать свойство (5.139), то координаты базовых векторов — это просто значения $F(r)$, и полином $\psi(r)$ имеет вид

$$\psi(r) = F_0 l_0(r) + F_1 l_1(r) + \dots + F_n l_n(r). \quad (5.140)$$

Пример 5.33: Определить интерполяционный полином $\psi(r)$ для функции $F(r) = 2^r - r$, если используются данные в точках $r = 0, 1$ и 3 . В этом случае $r_0 = 0, r_1 = 1, r_2 = 3$ и $F_0 = 1, F_1 = 1, F_2 = 5$.

При нашем первом подходе мы пользуемся соотношением (5.135) для вычисления неизвестных коэффициентов a_0, a_1 и a_2 полинома $\psi(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2$. В этом случае мы имеем

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Решение этих уравнений дает $a_0 = 1, a_1 = -2/3, a_2 = 2/3$, так что $\psi(r) = 1 - (2/3)r + (2/3)r^2$.

Если применяется интерполяция Лагранжа, то мы используем соотношение (5.140), которое в данном случае дает

$$\psi(r) = (1) \frac{(r-1)(r-3)}{(-1)(-3)} + (1) \frac{(r)(r-3)}{(1)(-2)} + (5) \frac{(r)(r-1)}{(3)(2)}$$

или, как и прежде, $\psi(r) = 1 - (2/3)r + (2/3)r^2$.

5.5.2. Формула Ньютона–Котеса (одномерное интегрирование)

Если интерполяционный полином $\psi(r)$ построен, то после этого мы можем получить некую аппроксимацию интеграла $\int_a^b F(r) dr$. При интегрировании по Ньютону–Котесу предполагается, что точки для выбора значений F располагаются на равных расстояниях друг от друга, и мы даем определение

$$r_0 = a; \quad r_n = b; \quad h = \frac{b-a}{n}. \quad (5.141)$$

Пользуясь интерполяцией Лагранжа, чтобы получить $\psi(r)$, как аппроксимацию $F(r)$, мы имеем

$$\int_a^b F(r) dr = \sum_{i=1}^n \left[\int_a^b l_i(r) dr \right] F_i + R_n \quad (5.142)$$

или, после проведения вычислений,

$$\int_a^b F(r) dr = (b-a) \sum_{i=1}^n C_i^n F_i + R_n, \quad (5.143)$$

где R_n — это остаток, а C_i^n — это *постоянные Ньютона–Котеса* для численного интегрирования с n интервалами.

Постоянные Ньютона–Котеса и соответствующие остаточные члены приводятся в таблице 5.5 для $n = 1$ и вплоть до 6. Случаи $n = 1$ и $n = 2$ — это хорошо известные *правило трапеций* и *формула Симпсона*. Мы замечаем, что формулы для $n = 3$ и $n = 5$ обеспечивают тот же порядок точности, что и формулы для $n = 2$ и $n = 4$ соответственно. По этой причине на практике используются четные формулы с $n = 2$ и $n = 4$.

Таблица 5.5. Числа Ньютона–Котеса и оценка ошибки

Количество интервалов n	C_0^n	C_1^n	C_2^n	C_3^n	C_4^n	C_5^n	C_6^n	Верхняя граница ошибки R_n как функция производной от F
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$						$10^{-1}(b-a)^3 F^{II}(r)$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$					$10^{-3}(b-a)^5 F^{IV}(r)$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$				$10^{-3}(b-a)^5 F^{IV}(r)$
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$			$10^{-6}(b-a)^7 F^{VI}(r)$
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{19}{288}$			$10^{-6}(b-a)^7 F^{VI}(r)$
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{272}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{41}{840}$	$10^{-9}(b-a)^9 F^{VIII}(r)$

Пример 5.34: Требуется вычислить постоянные Ньютона–Котеса, когда интерполяционный полином имеет порядок 2, т. е. функция $\psi(r)$ представляет собой параболу.

В данном случае мы имеем

$$\int_a^b F(r) dr \doteq \int_a^b \left[F_0 \frac{(r-r_1)(r-r_2)}{(r_0-r_1)(r_0-r_2)} + F_1 \frac{(r-r_0)(r-r_2)}{(r_1-r_0)(r_1-r_2)} + F_2 \frac{(r-r_0)(r-r_1)}{(r_2-r_0)(r_2-r_1)} \right] dr.$$

Если использовать формулы $r_0 = a$, $r_1 = a + h$, $r_2 = a + 2h$, где $h = (b-a)/2$, то вычисление вышеприведенного интеграла дает

$$\int_a^b F(r) dr \doteq \frac{b-a}{6} (F_0 + 4F_1 + F_2).$$

Следовательно, постоянные Ньютона–Котеса — это те же величины, которые приводятся в табл. 5.5 для случая $n = 2$.

Пример 5.35: Требуется воспользоваться правилом Симпсона для вычисления интеграла $\int_0^3 (2^r - r) dr$.

В данном случае $n = 2$ и $h = 3/2$. На этом основании $r_0 = 0$, $r_1 = 3/2$, $r_2 = 3$ и $F_0 = 1$, $F_1 = 1,328427$, $F_2 = 5$, и мы получим

$$\int_0^3 (2^r - r) dr \equiv \frac{3}{6} [(1)(1) + (4)(1,328427) + (1)(5)],$$

или

$$\int_0^3 (2^r - r) dr \equiv 5,656854.$$

Точный результат соответствует значению

$$\int_0^3 (2^r - r) dr = 5,598868.$$

Следовательно, ошибка равна $R = 0,057986$. Однако если использовать верхнюю границу значения ошибки, то получим

$$R < \frac{(3-0)^5}{1000} (\ln 2)^4 (2^r) = 0,448743.$$

Желая получить более высокую точность при интегрировании с использованием формул Ньютона–Котеса, мы должны использовать меньший интервал h , т.е. включить большее число вычисляемых значений той функции, которую нужно проинтегрировать. Тогда мы должны сделать выбор между двумя различными вариантами стратегии: можно использовать формулу Ньютона–Котеса более высокого порядка или, в качестве альтернативы, применять формулу низкого порядка с ее многократным повторением, и в этом случае процедура интегрирования носит название *композиционной формулы*. Рассмотрим приводимый ниже пример.

Пример 5.36: Требуется повысить точность интегрирования в примере 5.35 путем использования половинного значения интервала этого интегрирования.

В этом случае мы будем иметь $h = 3/4$, а требуемыми значениями функции будут $F_0 = 1$, $F_1 = 0,931792$, $F_2 = 1,328427$, $F_3 = 2,506828$, $F_4 = 5$. Выбор состоит теперь в том, воспользоваться ли формулами Ньютона–Котеса более высокого порядка с $n = 4$, или же применить правило Симпсона дважды, т.е. к двум первым интервалам, а затем к двум вторым интервалам. Если использовать формулу Ньютона–Котеса с $n = 4$, то получим

$$\int_0^3 (2^r - r) dr \equiv \frac{3}{90} (7F_0 + 32F_1 + 12F_2 + 32F_3 + 7F_4).$$

Следовательно,

$$\int_0^3 (2^r - r) dr \equiv 5,599232.$$

С другой стороны, если дважды использовать правило Симпсона, то получим

$$\int_0^3 (2^r - r) dr = \int_0^{3/2} (2^r - r) dr + \int_{3/2}^3 (2^r - r) dr.$$

Интегрирование выполняется с помощью формулы

$$\int_0^{3/2} (2^r - r) dr \equiv \frac{3/2 - 0}{6} (F_0 + 4F_1 + F_2),$$

где F_0 , F_1 и F_2 — это значения данной функции при $r = 0$, $r = 3/4$ и $r = 3/2$ соответственно; т. е. имеем

$$F_0 = 1; \quad F_1 = 0,931792; \quad F_2 = 1,328427.$$

Следовательно, получаем

$$\int_0^{3/2} (2^r - r) dr \equiv 1,513899. \quad (a)$$

После этого нам нужно вычислить

$$\int_{3/2}^3 (2^r - r) dr \equiv \frac{3 - 3/2}{6} (F_0 + 4F_1 + F_2),$$

где F_0 , F_1 и F_2 — это значения рассматриваемой функции при $r = 3/2$, $r = 9/4$ и $r = 3$ соответственно, то есть

$$F_0 = 1,328427; \quad F_1 = 2,506828; \quad F_2 = 5.$$

Следовательно, получаем

$$\int_{3/2}^3 (2^r - r) dr = 4,088935. \quad (b)$$

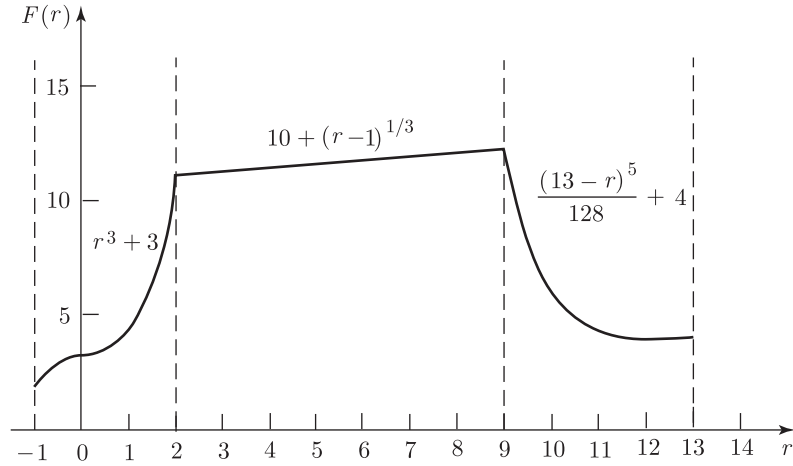
Складывая результаты из выражений (a) и (b), получаем

$$\int_0^3 (2^r - r) dr \equiv 5,602834.$$

Использование композитной формулы обладает рядом преимуществ в сравнении с применением формул Ньютона–Котеса высокого порядка. Такую композитную формулу, как повторное применение правила Симпсона, применить нетрудно. Сходимость обеспечивается по мере того, как уменьшается интервал выборки, и на практике можно было бы использовать интервал выборки, изменяющийся при переходе от одного применения базовой формулы к следующему. Это дает особенное преимущество тогда, когда у той функции, которую требуется интегрировать, имеются разрывы. В силу этих причин использование композитных формул является общепринятым на практике.

Пример 5.37: Требуется воспользоваться композитной формулой с применением правила Симпсона для вычисления интеграла $\int_{-1}^{+13} F(r) dr$ от функции $F(r)$, показанной на рис. 5.63.

Эту функцию лучше всего проинтегрировать путем рассмотрения трех интервалов интегрирования, а именно

Рис. 5.63. Функция $F(r)$

$$\int_{-1}^{13} F dr = \int_{-1}^2 (r^3 + 3) dr + \int_2^9 (10 + (r-1)^{1/3}) dr + \int_9^{13} \left(\frac{1}{128} (13-r)^5 + 4 \right) dr.$$

Каждый из этих трех интегралов вычисляется с использованием правила Симпсона, и мы получим

$$\int_{-1}^2 (r^3 + 3) dr = \frac{2 - (-1)}{6} [(1)(2) + (4)(3,125) + (1)(11)],$$

или

$$\int_{-1}^2 (r^3 + 3) dr = 12,75; \int_2^9 [10 + (r-1)^{1/3}] dr \equiv \frac{9-2}{6} [(1)(11) + (4)(11,650964) + (1)(12)],$$

или

$$\begin{aligned} \int_2^9 [10 + (r-1)^{1/3}] dr &\equiv 81,204498; \int_9^{13} \left[\frac{1}{128} (13-r)^5 + 4 \right] dr \equiv \\ &\equiv \frac{13-9}{6} [(1)(12) + (4)(4,25) + (1)(4)], \end{aligned}$$

или

$$\int_9^{13} \left[\frac{1}{128} (13-r)^5 + 4 \right] dr \equiv 22.$$

Следовательно,

$$\int_{-1}^{13} F dr \equiv 12,75 + 81,204498 + 22,$$

или

$$\int_{-1}^{13} F dr \equiv 115,954498.$$

5.5.3. Формулы Гаусса (одномерное интегрирование)

Те основные схемы интегрирования, которые рассмотрены к настоящему моменту, используют точки выборки, расположенные на одинаковых расстояниях друг от друга, хотя могли бы быть использованы и такие базовые методы, при которых строятся процедуры, позволяющие варьировать интервал выборки; иначе говоря, нами были предложены композитные формулы. Рассмотренные нами до сих пор методы являются эффективными тогда, когда замеры той неизвестной функции, которую нужно проинтегрировать, делаются с определенными интервалами. Однако при интегрировании конечно-элементных матриц вызывается подпрограмма для вычисления значений неизвестной функции F в заданных точках, а эти точки могут располагаться в любом месте исследуемого элемента. Если точки выборки не отделяются друг от друга одинаковыми интервалами, то никаких дополнительных трудностей не возникает. Поэтому представляется естественным попытаться улучшить точность, достигаемую при заданном количестве вычисляемых значений функции, также и путем оптимизации расположения точек выборки. Очень важной процедурой численного интегрирования, при которой оптимизируются и положения точек выборки, и весовые множители, является *квадратура Гаусса*. Основное предположение при численном интегрировании по Гауссу связано с представлением

$$\int_a^b F(r) dr = \alpha_1 F(r_1) + \alpha_2 F(r_2) + \dots + \alpha_n F(r_n) + R_n, \quad (5.144)$$

где переменными являются и весовые коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, и точки выборки r_1, \dots, r_n . Следует напомнить, что при выводе формул Ньютона–Котеса неизвестными были только весовые коэффициенты, которые определялись путем интегрирования такого полинома $\psi(r)$, который проходил бы через расположенные на одинаковых интервалах точки выборки для функции $F(r)$. Теперь мы будем вычислять также и места расположения точек выборки и, поэтому, мы имеем $2n$ неизвестных, подлежащих определению для построения схемы интегрирования высокого порядка.

По аналогии с выводом формул Ньютона–Котеса мы используем интерполяционный полином $\psi(r)$ в форме, заданной соотношением (5.140),

$$\psi(r) = \sum_{j=1}^n F_j l_j(r), \quad (5.145)$$

где теперь рассматриваются n точек выборки, r_1, \dots, r_n , пока что нам неизвестных. Для определения значений r_1, \dots, r_n мы представляем некую функцию $P(r)$,

$$P(r) = (r - r_1)(r - r_2) \dots (r - r_n), \quad (5.146)$$

представляющую собой полином порядка n . Отметим, что в точках выборки r_1, \dots, r_n имеем $P(r) = 0$. Поэтому мы можем написать

$$F(r) = \psi(r) + P(r)(\beta_0 + \beta_1 r + \beta_2 r^2 + \dots). \quad (5.147)$$

Интегрируя $F(r)$, получаем

$$\int_a^b F(r) dr = \sum_{j=1}^n F_j \left(\int_a^b l_j(r) dr \right) + \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \left(\int_a^b r^j P(r) dr \right), \quad (5.148)$$

где следует отметить, что в первом из интегралов в правой части (5.148) интегрируются функции порядка $(n - 1)$ и ниже, а во втором из этих интегралов интегрируемые функции имеют порядок n и выше. Теперь неизвестные значения r_j , $j = 1, 2, \dots, n$ могут быть определены путем использования условий

$$\int_a^b P(r) r^k dr = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n - 1. \quad (5.149)$$

После этого, учитывая, что полином $\psi(r)$ проходит через n точек выборки для функции $F(r)$, и что $P(r)$ в этих точках обращается в нуль, то условия (5.149) означают, что

интересующий нас интеграл $\int_a^b F(r) dr$ аппроксимируется путем интегрирования не функции $F(r)$, а полинома порядка $(2n - 1)$.

Суммируя вышеизложенное, отметим, что при применении формул Ньютона–Котеса мы используем $(n + 1)$ точек выборки, разделяемых одинаковыми интервалами, и проводим точное интегрирование полинома порядка не выше n . С другой стороны, при использовании квадратуры Гаусса нам нужно иметь n точек выборки, разделяемых неодинаковыми интервалами, и выполнить точное интегрирование полинома порядка не выше $(2n - 1)$. Полиномы, имеющие порядок ниже, соответственно, чем n или $(2n - 1)$, в этих двух случаях также интегрируются точно.

Желая определить точки выборки и весовые коэффициенты для интегрирования, мы обнаруживаем, что они зависят от интервала между a и b . Однако чтобы придать общность проводимым расчетам, мы рассматриваем естественный интервал от -1 до $+1$, располагая точки выборки и определяя веса для любых интервалов. А именно, если r_i — это точка выборки, а α_i — это весовой коэффициент для интервала от -1 до $+1$, то соответствующая точка выборки и соответствующий весовой коэффициент при интегрировании от a до b будут равны, соответственно,

$$\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} r_i \quad \text{и} \quad \frac{b-a}{2} \alpha_i.$$

На основании вышеизложенного рассмотрим интервал от -1 до $+1$. Точки выборки определяются из (5.149), полагая $a = -1$ и $b = +1$. Чтобы вычислить весовые коэффициенты при интегрировании, мы подставляем в (5.144) вместо $F(r)$ интерполяционный полином $\psi(r)$, определяемый согласно (5.145), и выполняем интегрирование. Следует заметить, что, так как точки выборки были уже определены, полином $\psi(r)$ теперь известен и, следовательно,

$$\alpha_j = \int_{-1}^{+1} l_j(r) dr; \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (5.150)$$

Данные о точках выборки и о весовых коэффициентах для интервала от -1 до $+1$ были опубликованы в работе [Lowan et al. 1942] и воспроизводятся в табл. 5.6 для значений n от 1 до 6.

Значения коэффициентов, приведенных в табл. 5.6, могут быть вычислены непосредственно путем использования соотношений (5.149) и (5.150) (см. пример 5.38). Однако для больших значений n решение становится затруднительным и, чтобы получить значения коэффициентов, целесообразно использовать полиномы Лежандра, а получаемые таким образом коэффициенты называются коэффициентами Гаусса–Лежандра.

Пример 5.38: Требуется определить точки выборки и весовые коэффициенты для двухточечной квадратуры Гаусса.

В этом случае $P(r) = (r - r_1)(r - r_2)$, и соотношение (5.149) дает два уравнения:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} (r - r_1)(r - r_2) dr &= 0, \\ \int_{-1}^{+1} (r - r_1)(r - r_2)r dr &= 0. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения, получим $r_1 r_2 = -1/3$ и $r_1 + r_2 = 0$. Следовательно, $r_1 = -1/\sqrt{3}$; $r_2 = +1/\sqrt{3}$.

С помощью (5.150) получаются соответствующие весовые коэффициенты, что в данном случае дает

$$\alpha_1 = \int_{-1}^{+1} \frac{r - r_2}{r_1 - r_2} dr,$$

Таблица 5.6. Точки выборки и весовые коэффициенты при численном интегрировании по Гауссу–Лежандру (интервал от -1 до $+1$)

n	r_i			α_i		
1	0.	(15 нулей)		2.	(15 нулей)	
2	$\pm 0,57735$	02691	89626	1,00000	00000	00000
3	$\pm 0,77459$	66692	41483	0,55555	55555	55556
	0,00000	00000	00000	0,88888	88888	88889
4	$\pm 0,86113$	63115	94053	0,34785	48451	37454
	$\pm 0,33998$	10435	84856	0,65214	51548	62546
5	$\pm 0,90617$	98459	38664	0,23692	68850	56189
	$\pm 0,53846$	93101	05683	0,47862	86704	99366
	0,00000	00000	00000	0,56888	88888	88889
6	$\pm 0,93246$	95142	03152	0,17132	44923	79170
	$\pm 0,66120$	93864	66265	0,36076	15730	48139
	$\pm 0,23861$	91860	83197	0,46791	39345	72691

$$\alpha_2 = \int_{-1}^{+1} \frac{r - r_1}{r_2 - r_1} dr.$$

Учитывая, что $r_2 = -r_1$, получим $\alpha_1 = \alpha_2 = 1,0$.

Пример 5.39: Используя двухточечную квадратуру Гаусса, требуется вычислить интеграл $\int_0^3 (2^r - r) dr$, рассмотренный в примерах 5.35 и 5.36.

Если использовать двухточечную квадратуру Гаусса, то соотношение (5.144) дает

$$\int_0^3 (2^r - r) dr \equiv \alpha_1 F(r_1) + \alpha_2 F(r_2), \quad (\text{a})$$

где α_1 , α_2 и r_1 , r_2 — это, соответственно, весовые коэффициенты и точки выборки. Учитывая, что интервал соответствует пределам от 0 до 3, нам нужно определить значения α_1 , α_2 , r_1 и r_2 , исходя из значений, приводимых в таблице 5.6, а именно

$$\alpha_1 = \frac{3}{2}(1); \quad \alpha_2 = \frac{3}{2}(1);$$

$$r_1 = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right); \quad r_2 = \frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right),$$

где $1/\sqrt{3} = 0,5773502692$. Таким образом, $F(r_1) = 0,91785978$; $F(r_2) = 2,78916389$, и, следуя формуле (a), получим $\int_0^3 (2^r - r) dr \doteq 5,56053551$.

Процедура интегрирования Гаусса–Лежандра обычно используется при изопараметрическом конечно-элементном анализе. Однако необходимо отметить, что были разработаны также и другие схемы интегрирования, при которых и весовые коэффициенты, и положения точек выборки варьируются так, чтобы добиться максимальной точности (см. [Fröberg 1969], а также [Stroud, Secrest 1966]).

5.5.4. Интегрирование в двух и в трех измерениях

Пока что мы рассмотрели интегрирование одномерной функции $F(r)$. Однако при двумерном и трехмерном вариантах конечно-элементного анализа необходимо вычислять двумерные и трехмерные интегралы. В процессе расчета прямоугольных элементов мы можем применять приведенные выше формулы для одномерного интегрирования в каждом из направлений последовательно ¹⁾. Как и при аналитическом определении многомерных интегралов, самый внутренний интеграл вычисляется, если положить постоянными те переменные, которые соответствуют другим интегралам. Поэтому для случая двумерного интеграла имеем

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(r, s) dr ds = \sum_i \alpha_i \int_{-1}^{+1} F(r_i, s) ds, \quad (5.151)$$

или

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(r, s) dr ds = \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j F(r_i, s_j), \quad (5.152)$$

и, в соответствии с (5.133), $\alpha_{ij} = \alpha_i \alpha_j$, где α_i и α_j представляют собой интегральные весовые коэффициенты для одномерного интегрирования. Аналогично этому, для случая трехмерного интеграла имеем

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(r, s, t) dr ds dt = \sum_{i,j,k} \alpha_i \alpha_j \alpha_k F(r_i, s_j, t_k), \quad (5.153)$$

и $\alpha_{ijk} = \alpha_i \alpha_j \alpha_k$. Следует отметить, что при проведении численного интегрирования не обязательно использовать одно и то же правило в двух или в трех измерениях; иначе говоря, мы можем применять различные схемы численного интегрирования в направлениях r , s и t .

Пример 5.40: Предположим, что (i, j) -й элемент матрицы жесткости \mathbf{K} имеет форму $\int_{-1}^{+1} r^2 s^2 dr ds$. Требуется вычислить этот интеграл, используя (1) правило Симпсона по r и по s , (2) квадратуру Гаусса по r и правило Симпсона по s .

1. Пользуясь правилом Симпсона, имеем

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} r^2 s^2 dr ds &= \int_{-1}^{+1} \frac{1}{3} [(1)(1) + (4)(0) + (1)(1)] s^2 ds = \\ &= \int_{-1}^{+1} \frac{2}{3} s^2 ds = \frac{1}{3} \left[(1) \left(\frac{2}{3} \right) + (4)(0) + (1) \left(\frac{2}{3} \right) \right] = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

¹⁾ Это дает в результате достаточно большую общность интегрирования, но для специальных случаев могут быть построены некоторые, не столь дорогостоящие процедуры (см. [Irons 1971]).

2. Используя двухточечную квадратуру Гаусса, имеем

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} r^2 s^2 dr ds &= \int_{-1}^{+1} \left[(1) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + (1) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right] s^2 ds = \\ &= \int_{-1}^{+1} \frac{2}{3} s^2 ds = \frac{2}{3} \left[(1) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + (1) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right] = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

3. Наконец, используя квадратуру Гаусса по r и правило Симпсона по s , мы имеем

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left[(1) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + (1) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right] s^2 ds &= \\ &= \int_{-1}^{+1} \frac{2}{3} s^2 ds = \frac{1}{3} \left[(1) \left(\frac{2}{3} \right) + (4)(0) + (1) \left(\frac{2}{3} \right) \right] = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

Следует заметить, что эти численные интегрирования являются точными, так как обе схемы интегрирования, т. е. правило Симпсона и двухточечная квадратура Гаусса, приводят к точному вычислению интеграла от параболы.

Вышеописанная процедура непосредственно применима к вычислению матриц четырехугольных элементов, у которых, у всех, пределы интегрирования составляют от -1 до $+1$. Следовательно, при расчете двумерного конечного элемента операции интегрирования могут выполняться для каждого члена в матрицах жесткости и масс, а также для векторов нагрузки, как это и иллюстрируется в примере 5.40. На основе информации, приведенной в табл. 5.6, сводка некоторых общепринятых правил квадратур по Гауссу при двумерном анализе дается в таблице 5.7.

Если теперь рассмотреть расчет матриц для треугольных и тетраэдральных элементов, то процедура, предложенная в примере 5.40, уже не будет, однако, непосредственно применимой, так как в этих условиях пределы интегрирования связаны с самими переменными. Построению подходящих формул интегрирования для треугольных областей было посвящено много исследований и здесь, опять-таки, могут применяться формулы типа Ньютона–Котеса (см. [Silvester 1969]), а также типа квадратуры Гаусса (см. [Hammer et al. 1956], а также [Cowper 1973]). Что касается интегрирования для четырехугольных областей, то квадратурные правила Гаусса являются в общем случае более эффективными, так как обеспечивают более высокую точность интегрирования при том же числе расчетных циклов. В табл. 5.8 приводятся данные о расположении точек интегрирования и об интегральных весовых коэффициентах для формул интегрирования по Гауссу; эти данные были опубликованы в работе [Cowper 1973].

5.5.5. Надлежащий порядок численного интегрирования

При практическом применении изложенных в предыдущем разделе процедур численного интегрирования возникают два основных вопроса, а именно, — какую схему интегрирования использовать и какой порядок полинома выбрать. Как мы отмечали, при использовании формул Ньютона–Котеса необходимо иметь $(n + 1)$ значений функции, чтобы вычислить без ошибки интеграл от полинома порядка n . С другой стороны, если используется квадратура Гаусса, то полином порядка $(2n - 1)$ интегрируется точно при наличии всего лишь n значений функции. Конечно, в каждом из этих случаев любой полином порядка ниже, чем, соответственно, n или $(2n - 1)$ также интегрируется точно.

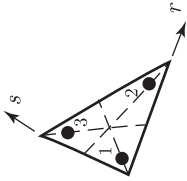
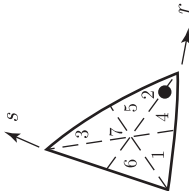
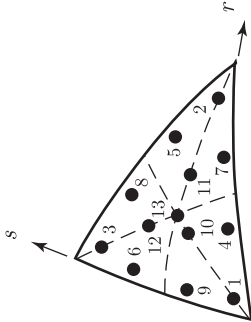
При конечно-элементном анализе большое число требуемых значений функции приводит к прямому возрастанию стоимости этого анализа, а это делает привлекательным использование квадратуры Гаусса. Однако при нелинейном анализе формулы Ньютона–Котеса могут оказаться эффективными по причинам, обсуждаемым в разделе 6.8.4.

Таблица 5.7. Параметры численного интегрирования по Гауссу, соответствующие четырехугольным областям

Порядок интегрирования	Степень точности	Расположение точек интегрирования
2×2	3	
3×3	5	
4×4	7	

Расположение любой точки интегрирования в системе координат x, y соответствует выражениям $x_p = \sum_i h_i(r_p, s_p)x_i$ и $y_p = \sum_i h_i(r_p, s_p)y_i$. Весовые коэффициенты для интегрирования даются в табл. 5.6 с использованием соотношения (5.152).

Таблица 5.8 Параметры численного интегрирования по Гауссу для треугольных областей $\iint F dr ds = (1/2) \sum w_i F(r_i, s_i)$

Порядок интегрирования	Степень точности	Точки интегрирования	Координаты r	Координаты s	Весовые коэффициенты
3-точечное	2		$r_1 = 0,16666\ 666666667$	$s_1 = r_1$	$w_1 = 0,33333\ 33333\ 333$
			$r_2 = 0,16666\ 66666\ 667$	$s_2 = r_1$	$w_2 = w_1$
			$r_3 = r_1$	$s_3 = r_2$	$w_3 = w_1$
7-точечное	5		$r_1 = 0,10128\ 65073\ 235$	$s_1 = r_1$	$w_1 = 0,12593\ 91805\ 448$
			$r_2 = 0,79742\ 69853\ 531$	$s_2 = r_1$	$w_2 = w_1$
			$r_3 = r_1$	$s_3 = r_2$	$w_3 = w_1$
			$r_4 = 0,47014\ 20641\ 051$	$s_4 = r_6$	$w_4 = 0,13239\ 41527\ 885$
			$r_5 = r_1$	$s_5 = r_4$	$w_5 = w_4$
			$r_6 = 0,05971\ 58717\ 898$	$s_6 = r_4$	$w_6 = w_4$
			$r_7 = 0,33333\ 33333\ 333$	$s_7 = r_7$	$w_7 = 0,225$
13-точечное	7		$r_1 = 0,06513\ 01029\ 022$	$s_1 = r_1$	$w_1 = 0,05334\ 72356\ 089$
			$r_2 = 0,79742\ 69853\ 531$	$s_2 = r_1$	$w_2 = w_1$
			$r_3 = r_1$	$s_3 = r_2$	$w_3 = w_1$
			$r_4 = 0,31286\ 54960\ 049$	$s_4 = r_6$	$w_4 = 0,07711\ 37608\ 903$
			$r_5 = 0,63844\ 41885\ 698$	$s_5 = r_4$	$w_5 = w_4$
			$r_6 = 0,04869\ 03154\ 253$	$s_6 = r_5$	$w_6 = w_4$
			$r_7 = r_5$	$s_7 = r_6$	$w_7 = w_4$
			$r_8 = r_4$	$s_8 = r_5$	$w_8 = w_4$
			$r_9 = r_6$	$s_9 = r_4$	$w_9 = w_4$
			$r_{10} = 0,26034\ 59660\ 790$	$s_{10} = r_{10}$	$w_{10} = 0,17561\ 52574\ 332$
			$r_{11} = 0,47930\ 80678\ 419$	$s_{11} = r_{10}$	$w_{11} = w_{10}$
			$r_{12} = r_{10}$	$s_{12} = r_{11}$	$w_{12} = w_{10}$
			$r_{13} = 0,33333\ 33333\ 333$	$s_{13} = r_{13}$	$w_{13} = -0,14957\ 00444\ 677$

После того, как схема численного интегрирования выбрана, необходимо определить порядок конкретных форм интегрирования, используемых при вычислении различных конечно-элементных интегралов. Выбор порядка численного интегрирования весьма важен на практике, так как, во-первых, стоимость анализа возрастает вместе с повышением порядка интегрирования и, во-вторых, изменение порядка интегрирования очень существенно влияет на результаты. Эти соображения особенно важны при проведении трехмерного анализа.

Матрицы, которые нужно вычислять путем численного интегрирования, это матрица жесткости \mathbf{K} , матрица масс \mathbf{M} , вектор массовых сил \mathbf{R}_B , вектор начальных напряжений \mathbf{R}_I и вектор поверхностной нагрузки \mathbf{R}_S . В общем случае надлежащий порядок интегрирования зависит от вида вычисляемой матрицы и от конкретной формы рассматриваемого конечного элемента. Чтобы продемонстрировать наиболее важные аспекты, рассмотрим порядок численного интегрирования по Гауссу, требуемый для вычисления матриц, соответствующих элементам сплошной среды и конструкционным элементам, обсуждавшимся в разделах 5.3 и 5.4.

Первое наблюдение, связанное с выбором порядка численного интегрирования, состоит в том, что, теоретически, если используется достаточно высокий порядок, то все матрицы будут рассчитываться очень точно. С другой стороны, при использовании слишком низкого порядка интегрирования матрицы могут рассчитываться весьма неточно и, фактически, решение поставленной задачи может оказаться невозможным. Рассмотрим, например, матрицу жесткости некоего элемента. Если порядок численного интегрирования слишком низок, то матрица может иметь количество нулевых собственных значений, большее, чем число физических твердотельных мод. Следовательно, для успешного решения одних лишь уравнений равновесия может оказаться необходимым, чтобы моды деформации, соответствующие всем нулевым собственным значениям элемента, надлежащим образом сдерживались в комплексе конечных элементов, так как в противном случае матрица жесткости конструкции оказалась бы особенной. Простым примером является расчет матрицы жесткости для ферменного элемента с тремя узлами. Если используется одноточечное интегрирование по Гауссу, то строка и столбец, соответствующие степени свободы в центральном узле элемента, являются нулевыми векторами, а это может привести к тому, что матрица жесткости конструкции окажется особенной. Поэтому в общем случае порядок интегрирования должен быть выше определенного предела.

Порядок интегрирования, необходимый для точного расчета матрицы некоторого конкретного элемента, может быть определен путем изучения порядка той функции, которую требуется проинтегрировать. В случае матрицы жесткости нам требуется вычислить

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \det \mathbf{J} dV, \quad (5.154)$$

где \mathbf{C} — это постоянная матрица материальных свойств, \mathbf{B} — матрица деформация–смещение в системе естественных координат r, s, t , $\det \mathbf{J}$ — якобиан преобразования для перехода от локальных (или глобальных) координат к естественным (см. раздел 5.3), а интегрирование производится по объему элемента в естественной системе координат. Поэтому та матричная функция \mathbf{F} , которую нужно проинтегрировать, имеет вид

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \det \mathbf{J}. \quad (5.155)$$

Определения матриц \mathbf{J} и \mathbf{B} были даны в разделах 5.3 и 5.4.

Случай, для которого порядок неизвестных, входящих в функцию \mathbf{F} , определяется сравнительно легко, возникает тогда, когда изучавшийся в примере 5.5 двумерный элемент с четырьмя узлами используется, как имеющий форму прямоугольника или параллелограмма. Этот случай было бы поучительным рассмотреть подробнее, так как ему соответствует четкое представление процедуры определения требуемого порядка интегрирования.

Пример 5.41: Требуется определить порядок численного интегрирования по Гауссу, необходимый при расчете матрицы жесткости для базирующегося на учете смещений прямоугольного элемента с четырьмя узлами.

Тот порядок интегрирования, который следует здесь использовать, зависит от порядка вхождения переменных r и s в функцию \mathbf{F} , выражаемую согласно (5.155). Для прямоугольного элемента со сторонами $2a$ и $2b$ мы можем написать $x = ar$; $y = bs$, и, следовательно, матрица Якоби \mathbf{J} имеет вид

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}.$$

Если учесть, что элементы матрицы \mathbf{J} постоянны, и обратиться к информации, приводимой в примере 5.5, то нетрудно видеть, что элементы матрицы деформация–смещение \mathbf{B} представляют собой функции только от r или от s . Однако определитель матрицы \mathbf{J} также постоянен; следовательно,

$$\mathbf{F} = f(r^2, rs, s^2),$$

где f символизирует функциональную зависимость.

Если воспользоваться двухточечной схемой численного интегрирования по Гауссу в направлениях r и s , то все функции от r и s , включающие члены не выше третьего порядка, интерпретируются без ошибки; например, при интегрировании порядка n порядков членов с r и s , интегрируемых точно, равен $(2n - 1)$. Следовательно, двухточечная схема интегрирования по Гауссу отвечает поставленным требованиям.

Заметим, что матрица Якоби \mathbf{J} оказывается постоянной также и для элемента в форме параллелограмма с четырьмя узлами; следовательно, к этому случаю применимы те же выкладки и имеет место тот же результат.

Аналогичным образом можно определить порядок интегрирования, необходимый для точного (или близкого к точному) вычисления матриц жесткости, матриц масс и векторов нагрузки для элементов другого типа. В этом контексте следует отметить, что якобиан не будет постоянным для элементов, имеющих форму, отличную от прямоугольника или параллелограмма, а это может означать, что для вычисления элементных матриц с большой точностью может понадобиться очень высокий порядок интегрирования.

В приведенном выше примере рассматривался элемент, базирующийся на учете смещений, однако мы должны подчеркнуть, что, разумеется, те же самые схемы численного интегрирования используются также и при расчете элементных матриц, соответствующих смешанным схемам. Следовательно, при смешанных схемах требуемый порядок интегрирования также должен определяться с помощью только что описанной процедуры (см. упражнение 5.57).


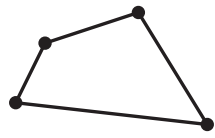
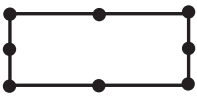
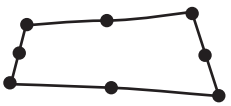
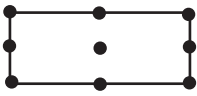
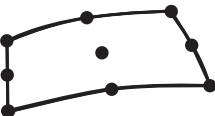
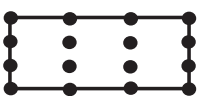
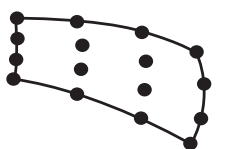
При изучении вопроса о том, какой порядок интегрирования следует использовать для геометрически искаженных элементов, мы обнаруживаем, что зачастую нет необходимости вычислять матрицы с очень высокой степенью точности, используя очень высокий порядок численного интегрирования. А именно, изменения величины входящих в матрицу членов (и их воздействий), обусловленные использованием порядка l вместо $(l - 1)$, могут оказаться пренебрежимо малыми. Следовательно, нам нужно поставить вопрос о том, какой порядок интегрирования является достаточным в общем случае, и мы представляем следующий способ ответа на этот вопрос.

Мы рекомендуем, чтобы при конечно-элементной схеме, базирующейся на учете смещений или относящейся к смешанному типу, всегда использовалось *полное численное интегрирование*¹⁾, где термин «полное» соответствует тому порядку, который приводит к получению точных матриц (т. е. к аналитическим интегральным значениям), если только элементы не подверглись геометрическому искажению. Таблица 5.9 приводит перечень таких порядков для элементов, используемых при двумерном анализе.

Использование указанного порядка интегрирования для элемента, подвергшегося геометрическому искажению, не приведет к получению точно интегрируемых элементных матриц. Однако анализ является все же надежным, так как ошибки численного интегри-

¹⁾ В разделе 5.5.6 мы вкратце обсуждаем «укороченное» численное интегрирование, являющееся противоположностью полного численного интегрирования.

Т а б л и ц а 5.9. Рекомендуемые значения полных порядков численного интегрирования по Гауссу для оценки матриц в изопараметрических элементах, созданных на основе смещений (используется таблица 5.7)

Двумерные элементы (с плоскими напряжениями, с плоскими деформациями и осесимметричные)		Порядок интегрирования
с четырьмя узлами		2×2
с четырьмя узлами, деформированный		2×2
с восемью узлами		3×3
с восемью узлами, деформированный		3×3
с девятью узлами		3×3
с девятью узлами, деформированный		3×3
с шестнадцатью узлами		4×4
с шестнадцатью узлами, деформированный		4×4
Примечание: при осесимметричном анализе эффект обручеобразных деформаций во всех случаях интегрируется хотя и не точно, но с достаточной точностью		

рования оказываются приемлемо малыми, если, конечно, допустить, что геометрические искажения умеренно велики. Действительно, как показано в работе [Ciarlet 1978], если геометрические искажения не чрезмерно велики и являются такими, что при точном интегрировании все еще достигается полный порядок сходимости (при условиях, обсуждаемых в разделе 5.3.3), то тогда тот же порядок сходимости достигается и при использовании рекомендуемого здесь полного численного интегрирования. Следовательно, в этом случае рекомендованный в табл. 5.9 порядок численного интегрирования не приводит

в результате к уменьшению порядка сходимости. С другой стороны, если геометрические искажения данного элемента очень велики, а также, разумеется, если проводится нелинейный анализ, то повышенный порядок интегрирования может оказаться вполне уместным (см. раздел 6.8.4).

На рис. 5.64 показаны некоторые результаты решения задачи о случайной проверке, описанной на рис. 4.31. Эти результаты были получены с использованием последовательности искаженных квазиоднородных сеток. Рисунок 5.64а предлагает описание используемых геометрических искажений, а рисунки 5.64б и 5.64в показывают результаты по сходимости; эти результаты были получены для элементов с восемью и с девятью узлами, с использованием порядка интегрирования по Гауссу, взятого из табл. 5.9. Как показывают полученные результаты, порядок сходимости (наклоны кривых на графиках при малых значениях h) во всех случаях приближенно равен 4, как это и предсказывает теория. Однако фактическое значение ошибки при заданном значении h оказывается больше, когда исследуемые элементы искажены. Это означает, что постоянная c в формуле (4.102) возрастает по мере усиления искажения элементов.

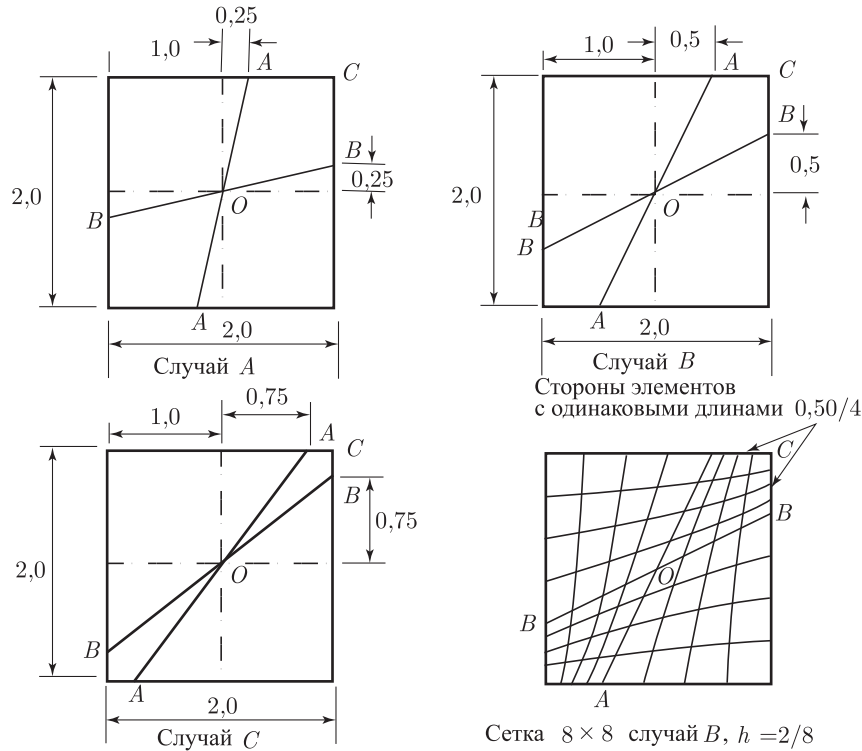
Причина для внесения рекомендаций, касающихся порядков численного интегрирования и фигурирующих в табл. 5.9, состоит в том, что *надежность конечно-элементных процедур имеет первостепенное значение* (см. раздел 1.3), и если используется порядок интегрирования, оказывающийся ниже «полного» порядка (для модели на базе учета смещений или для смешанной модели), то в общем случае такой анализ является ненадежным.

Интересным для нас случаем является прямоугольный изопараметрический элемент с двумерными плоскими напряжениями, построенный на базе учета смещений и имеющий восемь узлов. Расчеты для этого элемента проводятся с интегрированием по Гауссу порядка 2×2 . Этот порядок интегрирования приводит к получению элементной матрицы жесткости с одной лишней модой нулевой энергии (см. упражнение 5.56); иначе говоря, элементная матрица не только имеет три нулевых собственных значения (соответствующих физическим движениям твердого тела), но и имеет еще одно дополнительное нулевое собственное значение, являющееся просто-напросто результатом использования слишком низкого порядка интегрирования. На рис. 5.65 дается схема очень простого случая с использованием одиночного элемента с восемью узлами, анализируемого с помощью интегрирования по Гауссу порядка 2×2 , причем модель в этом случае оказывается неустойчивой; это означает, что если решение получено, то расчетные смещения узловых точек оказываются очень большими и не имеют никакого сходства с правильным решением¹⁾. При этом простом анализе сразу же видно, что элемент с восемью узлами при использовании интегрирования по Гауссу порядка 2×2 оказывается неадекватным, хотя и можно предполагать, что при более сложном анализе лишняя (одиночная) мода нулевой энергии оказывается обычно адекватно сдерживаемой в комплексе элементов. Однако если рассматривается большая комплексная модель, то в общем случае элементы с лишними модами нулевой энергии в неконтролируемой форме улучшают суммарные результаты решения, внося большие ошибки или приводят к неустойчивому решению.

В качестве примера рассмотрим динамический анализ показанной на рис. 5.66 консольной подпорки и используем элемент, базирующийся на учете смещений и имеющий девять узлов, при интегрировании по Гауссу порядка 2×2 ; в этом случае матрица жесткости каждого элемента имеет три лишних моды нулевой энергии. Мы уже рассматривали эту подпорку на рис. 4.45, но с двумя остроконечными опорами вместо используемой сейчас жесткой фиксации (как было отмечено в том случае, 16-элементная модель подпорки с остроконечными опорами при использовании для элементных матриц жесткости интегрирования по Гауссу порядка 2×2 была неустойчивой).

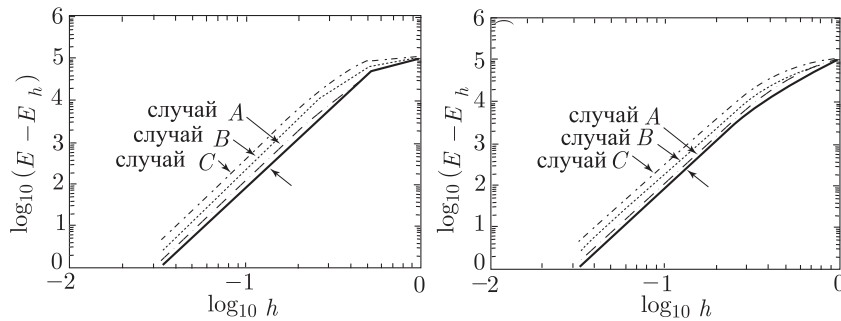
Частное решение для 16-элементной сетки, состоящей из элементов с девятью узлами, базирующихся на учете смещений, и моделирующей жестко зажатую консольную подпорку, дает результаты, приведенные в табл. 5.10. Как видно из этой таблицы,

¹⁾ При точной арифметике матрица жесткости является особенной, но вследствие ошибок округления при расчетах решение обычно бывает получено.



Линии AA' и BB' проведены, после чего стороны AC, CB, BO и OA подразделены на участки одинаковой длины, чтобы сформировать элементы в область $ACBO$. Подобный же процесс используется для трех других областей

а. Используемые деформации



б. Результаты, полученные при использовании элементов с восемью узлами

в. Результаты, полученные при использовании элементов с девятью узлами

Рис. 5.64. Результаты решения тестовой задачи из рис. 4.12 с элементами, подвергнутому геометрическим деформациям, с порядком интегрирования по Гауссу согласно таблице 5.9. $E = a(\mathbf{u}, \mathbf{u})$, $E = a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h)$

использование интегрирования по Гауссу порядка 2×2 (названного укороченным интегрированием; см. раздел 5.5.6) не приводит к появлению лишней моды нулевой энергии для модели в целом (так как подпорка зажата на своем левом конце), но дает одну *лишнюю моду ненулевой энергии*, которая является частью шести наименьших прогнозируемых

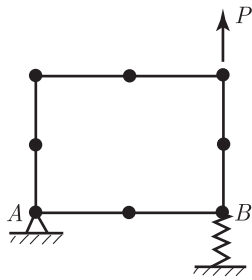


Рис. 5.65. Элемент с плоскими напряжениями, имеющий 8 узлов и поддерживаемый в точке B с помощью пружины. При интегрировании по Гауссу с порядком 2×2 анализ оказывается неустойчивым

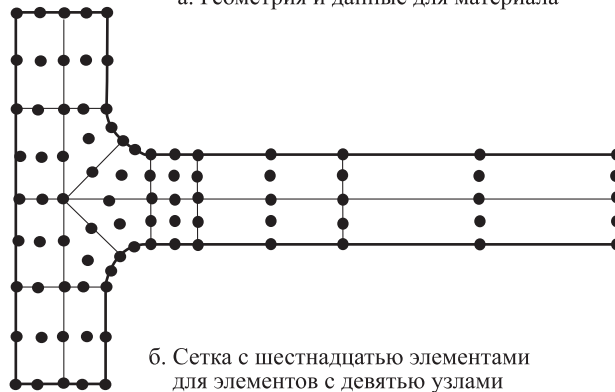
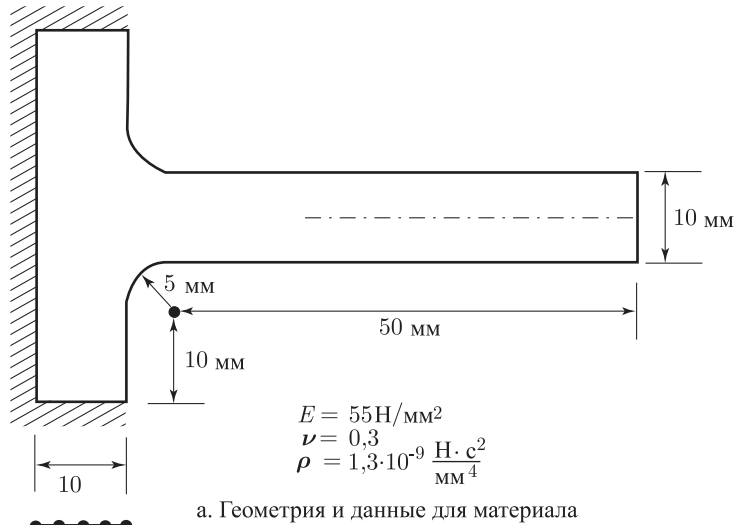


Рис. 5.66. Частотное решение для жестко зажатого консольного кронштейна

частот. Такие моды, не связанные с физической реальностью — которые мы называем также «призрачными» модами — могут внести неконтролируемые ошибки в строящееся шаг за шагом динамическое решение¹⁾; эти ошибки могут оказаться с трудом обнаруживаемыми, но если бы даже они и были обнаружены, то для построения решения потребо-

¹⁾ Формы мод, соответствующих призрачным частотам, могут свидетельствовать о том, что реакция не имеет физического смысла, однако при строящемся шаг за шагом динамическом решении ни частоты, ни формы мод обычно не рассчитываются.

вались бы дополнительные попытки, совокупность которых может свестись к проведению интенсивных и нежелательных численных экспериментов.

Таблица 5.10. Шесть наименьших частот [Герц] для 16-элементной сетки с рис. 5.666, полученных при использовании совместимой матрицы масс *

Номер моды	Модель с 16-ю элементами Модель с 16 × 64 элементами **		
	Интегрирование по Гауссу		
	3 × 3	2 × 2	3 × 3
1	112,4	110,5	110,6
2	634,5	617,8	606,4
3	906,9	905,5	905,2
4	1548	958,4***	1441
5	2654	1528	2345
6	2691	2602	2664

* Массовые матрицы совместимых элементов всегда интегрируются с использованием интегрирования по Гауссу порядка 3×3 .

** Для сравнения сюда включены результаты с использованием мелкой сетки (с 64-мя элементами, заменяющими каждый 9-узловой элемент 16-элементной сетки).

*** Лишняя, т. е. прозрачная мода.

В силу указанных причин никакой элемент, обладающий лишней модой нулевой энергии, не должен был бы использоваться в инженерной практике, при линейном или при нелинейном анализе, и поэтому в этой книге такие элементы не рассматриваются. Однако следует заметить, что с целью предотвращения вредоносного воздействия лишних мод значительные усилия исследователей были направлены на возможность контроля за поведением этих мод (см., например, работы [Belytschko et al. 1985], а также [Hughes 1987]).

При проведенном выше обсуждении мы сосредоточили свое внимание на расчете элементных матриц жесткости. При рассмотрении элементных векторов сил обычно бывает целесообразно применять ту же схему интегрирования и тот же порядок интегрирования, что и для матриц жесткости. Чтобы рассчитать элементную матрицу масс, следует иметь в виду, что для матрицы суммируемых масс требуется правильно оценить только объем данного элемента, а для построения совместимой матрицы масс подходит обычно тот порядок, который указывается в табл. 5.9. Однако имеют место и особые случаи, когда для достаточно точной оценки совместимой матрицы масс может оказаться необходимым провести интегрирование с более высоким порядком, чем при расчете матрицы жесткости.

Пример 5.42: Требуется рассчитать матрицы жесткости и масс, а также вектор массовых сил для элемента 2, описанного в примере 4.5, используя численное интегрирование по Гауссу.

Выражения, которые нужно проинтегрировать, были получены в примере 4.5. Они имеют вид

$$\mathbf{K} = E \int_0^{80} \left(1 + \frac{x}{40}\right)^2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{80} \\ \frac{1}{80} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{80} & \frac{1}{80} \end{bmatrix} dx, \quad (a)$$

$$\mathbf{M} = \rho \int_0^{80} \left(1 + \frac{x}{40}\right)^2 \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{80} \\ \frac{x}{80} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{80}\right) & \frac{x}{80} \end{bmatrix} dx, \quad (b)$$

$$\mathbf{R}_B = \frac{1}{10} \int_0^{80} \left(1 + \frac{x}{40}\right)^2 \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{80} \\ \frac{x}{80} \end{bmatrix} dx. \quad (c)$$

Выражения в формулах (a) и (c) интегрируются точно, с использованием двухточечной схемы, тогда как вычисление интеграла из формулы (b) требует применения трехточечной схемы. При вычислении матрицы масс требуется более высокий порядок интегрирования, так как эта матрица получается из интерполяционных функций для смещений, тогда как матрица жесткости рассчитывается с использованием производных от функций, определяющих собой смещения.

Если для вычисления выражений в формулах (a), (b) и (c) воспользоваться одноточечными, двухточечными и трехточечными схемами интегрирования по Гауссу, то мы получим

одноточечная схема интегрирования:

$$\mathbf{K} = \frac{12E}{240} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = \frac{\rho}{6} \begin{bmatrix} 480 & 480 \\ 480 & 480 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_B = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 96 \\ 96 \end{bmatrix}.$$

двухточечная схема интегрирования:

$$\mathbf{K} = \frac{13E}{240} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = \frac{\rho}{6} \begin{bmatrix} 373,3 & 346,7 \\ 346,7 & 1013,3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_B = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 72 \\ 136 \end{bmatrix}.$$

трехточечная схема интегрирования:

$$\mathbf{K} = \frac{13E}{240} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = \frac{\rho}{6} \begin{bmatrix} 384 & 336 \\ 336 & 1024 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_B = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 72 \\ 136 \end{bmatrix}.$$

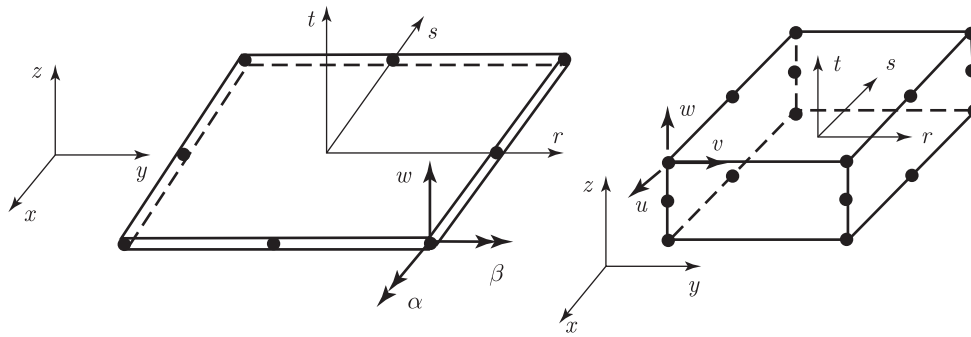
Интересно отметить, что если выбранный порядок интегрирования слишком мал, то ни общая масса элемента, ни общая нагрузка, действующая на этот элемент, не принимаются полностью во внимание.

Таблица 5.9 дает сводку результатов анализа при надлежащим образом выбранных порядках интегрирования в процессе расчета матриц жесткости для двумерных элементов. Разумеется, данная в этой таблице информация оказывается ценной также и при определении надлежащих порядков интегрирования для расчета матриц, относящихся к другим элементам.

Пример 5.43: Требуется обсудить порядок интегрирования, нужный для расчета элемента МПС9 в форме пластины, а также изопараметрического трехмерного элемента; оба элемента показаны на рис. 5.67.

Рассмотрим сначала элемент в форме пластины. Интегрирование в плоскости r, s соответствует, в сущности, расчету для элемента с девятью узлами, отраженному в табл. 5.9. В общем случае порядок интегрирования 3×3 останется эффективным и тогда, когда элемент используется в искаженной форме.

Порядок интегрирования, требуемый для вычисления матрицы жесткости трехмерного твердотельного элемента, также может быть определен, исходя из информации, приводимой в табл. 5.9. Смещения изменяются по линейному закону в направлении r ; следовательно, достаточно использовать двухточечное интегрирование. В плоскостях (t, s) , т.е. при постоянных значениях r , смещения данного элемента соответствуют



а. MITC9-элемент типа изгибающейся пластины б. Трехмерный элемент типа твердого тела

Рис. 5.67. Элементы, рассматриваемые в примере 5.43

смещениям для элемента с восемью узлами из таблицы 5.9. Следовательно, для точного расчета матрицы жесткости данного элемента требуется выполнить интегрирование по Гауссу порядка $2 \times 3 \times 3$.

5.5.6. Укороченное и выборочное интегрирование

В таблице 5.9 приводятся рекомендуемые порядки численного интегрирования по Гауссу для двумерных изопараметрических элементов, базирующихся на учете смещений, а рекомендуемые порядки для элементов других типов могут быть получены из этой же информации (см. пример 5.43). При этих порядках интегрирования (о которых мы говорим как о порядках «полного» интегрирования) матрицы для элементов без геометрических искажений вычисляются точно, тогда как для геометрически искаженных элементов строится достаточно точная аппроксимация (если только не имеют места слишком большие геометрические искажения, когда рекомендуется применять более высокий порядок интегрирования).

Однако имея в виду обсуждение, проведенное в разделе 4.3.4, вспомним, что конечно-элементный анализ на базе смещений дает энергию деформаций, меньшую точной энергии деформаций для рассматриваемой математико-механической модели, и с точки зрения физики модель на базе смещений приводит к завышенной оценке жесткости системы. Поэтому мы можем ожидать, что за счет неточности численного интегрирования при расчете матрицы жесткости для элемента, базирующегося на учете смещений, получаемые окончательные результаты могут оказаться улучшенными. Это должно иметь место, если ошибка численного интегрирования *надлежащим образом* компенсирует завышенную оценку конструктивной жесткости, обусловленную конечно-элементной дискретизацией. Другими словами, можно ожидать, что понижение порядка численного интегрирования по сравнению с тем порядком, который требуется для точной оценки матрицы жесткости элемента (без учета геометрических искажений), приведет к получению улучшенных результатов. Когда используется такое понижение порядка численного интегрирования, то соответствующую процедуру мы называем *укороченным интегрированием*. Например, использование интегрирования по Гауссу порядка 2×2 (хотя и не рекомендуемое для практического использования; см. раздел 5.5.5) для расчета матрицы жесткости изопараметрического элемента с девятью узлами соответствует укороченному интегрированию. В дополнение к использованию просто *укороченного* интегрирования (с пониженным порядком) можно рассмотреть еще и *выборочное* интегрирование, при котором различные члены, характеризующие деформации, интегрируются с различными порядками интегрирования. В случаях применения укороченного и выборочного интегрирования специализированная схема интегрирования должна рассматриваться как неотъемлемая часть описания рассматриваемого элемента.

Некий конечный элемент, который формулируется с помощью укороченного и/или выборочного интегрирования, мог бы быть рекомендован к практическому применению.

Однако в этой связи возникает следующий ключевой вопрос: была ли модель этого элемента (с использованием конкретной процедуры интегрирования) достаточно хорошо испытана и подвергнута анализу на устойчивость и сходимость? Разумеется, если математический анализ устойчивости и сходимости поддается простой трактовке, то он и является наиболее желательным.

Вполне естественный первый шаг при проведении такого анализа состоит в том, чтобы рассмотреть элемент, связанный с укороченным и/или выборочным интегрированием, как смешанный элемент (см. [Malkus, Hughes 1978]). Примером является элемент в форме балки с двумя узлами, со смешанной интерполяцией, рассмотренный в разделе 5.4.1 и упоминаемый ниже). Коль скоро будет установлена точная эквивалентность смешанной модели и модели для элемента с укороченным и/или выборочным интегрированием, то вторым шагом будет проведение анализа смешанной модели на устойчивость и сходимость. Осуществление обоих указанных шагов дает возможность полного выяснения свойств элемента, базирующегося на укороченном/выборочном интегрировании.

Если учесть разнообразие возможности для выдвижения предположений при смешанных моделях, то вполне естественно предположить, что существует *некая* смешанная модель, эквивалентная выбору элемента, базирующегося на укороченном/выборочном интегрировании, и отыскать такую схему для целей анализа. Однако тот простой факт, что *в общем случае* схемы для элементов с укороченным/выборочным интегрированием могут рассматриваться как смешанные, отнюдь не оправдывает использования укороченного интегрирования, ибо, конечно же, не каждая смешанная модель представляет надежную и эффективную конечно-элементную схему. Мы предпочли бы сказать, что *эта эквивалентность* (детали которой должны уточняться в каждом конкретном случае) *всего лишь указывает на подход к анализу элементов с укороченным/выборочным интегрированием*.

Из сказанного выше следует также, что *как только полная эквивалентность установлена, мы можем рассматривать укороченное/выборочное интегрирование просто как некий эффективный путь к достаточно точному расчету конечно-элементных матриц при смешанной модели*; именно эту точку зрения мы и принимаем здесь, соглашаясь с такой интерпретацией укороченного и выборочного интегрирования.

Сравнительно простым примером является изопараметрический элемент в форме балки с двумя узлами, базирующийся на одноточечном (в направлении r) интегрировании по Гауссу. В изложении примера 4.30 и в разделе 5.4.1 мы показали, что этот элемент полностью эквивалентен элементу в форме балки, полученному с использованием вариационного принципа Ху–Вашизу при линейно изменяющихся поперечном смещении w и угле поворота сечения β , а также при постоянной сдвиговой деформации γ внутри каждого элемента. Устойчивость и сходимость данного элемента были рассмотрены в разделе 4.5.7, где мы показали, что условие эллиптичности и условие $\inf\text{--}\sup$ здесь выполняются.

Чтобы лишний раз подчеркнуть сделанные наблюдения, рассмотрим приводимый ниже дополнительный пример.

Пример 5.44: Простой треугольный элемент в форме изгибающейся пластины может быть задан с помощью изопараметрической модели на базе смещений, предложенной в разделе 5.4.2, но при интегрировании членов, входящих в матрицу жесткости, путем применения одноточечной схемы. Этот вид интегрирования позволяет точно рассчитать члены матрицы жесткости, соответствующие изгибу, тогда как члены, соответствующие поперечному сдвигу, интегрируются приближенно. Следовательно, элементная матрица жесткости базируется на укороченном интегрировании (или, можно сказать также, на выборочном интегрировании, так как неточно интегрируются только сдвиговые члены).

Требуется вывести вариационную формулировку и построить матрицу жесткости для данного элемента.

Этот элемент и его вариационная модель были представлены в работе [Batoz et al. 1980]. Если учесть, что нам известно об успехе изопараметрического элемента в форме балки, на базе одноточечного интегрирования (см. пример 4.30, а также разделы 4.5.7 и 5.4.1), то элемент, описанный в начале данного примера, является естественным развитием. Этот элемент типа балки обладает мощным вариационным базисом, его

математический анализ обеспечивает хорошие качества, касающиеся сходимости, а с вычислительной точки зрения данный элемент оказывается простым и эффективным.

Имея в виду разработку вариационного базиса для этого элемента в форме пластины, отметим, что одноточечная схема интегрирования неявно предполагает наличие постоянной поперечной сдвиговой деформации (как и для изопараметрического элемента в форме балки с двумя узлами, на базе одноточечного интегрирования). Поэтому, обращаясь к примеру 4.30, мы можем напрямую сформулировать вариационный индикатор для пластинчатого элемента в виде

$$\tilde{\Pi}_{\text{HR}}^* = \int_A \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{C}_b \boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{C}_s \boldsymbol{\gamma}^{\text{AS}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma}^{\text{AS}T} \mathbf{C}_s \boldsymbol{\gamma}^{\text{AS}} \right) dA - \int_A w p dA +$$

+ граничные члены, (a)

где $\boldsymbol{\kappa}$, \mathbf{C}_b , $\boldsymbol{\gamma}$, \mathbf{C}_s были определены формулами (5.95)–(5.97), а $\boldsymbol{\gamma}^{\text{AS}}$ содержит предполагаемые поперечные сдвиговые деформации,

$$\boldsymbol{\gamma}^{\text{AS}} = \begin{bmatrix} \gamma_{xz}^{\text{AS}} \\ \gamma_{yz}^{\text{AS}} \end{bmatrix} = \text{const.}$$

Соотношение (a) выражает собой модифицированный функционал Хеллингера–Рейсснера. Если подставить интерполяционные выражения для w , β_x и β_y в выражения для $\boldsymbol{\kappa}$ и $\boldsymbol{\gamma}$, провести интегрирование по площади срединной поверхности элемента A и принять во внимание постоянство $\tilde{\Pi}_{\text{HR}}^*$ по отношению к изменениям переменных для узловых точек $\hat{\mathbf{u}}$,

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_x^1 \\ \theta_y^1 \\ \vdots \\ \theta_y^3 \end{bmatrix},$$

а также величин $\boldsymbol{\gamma}^{\text{AS}}$, то мы получим

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_b & \mathbf{G}^T \\ \mathbf{G} & -\mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\gamma}^{\text{AS}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ 0 \end{bmatrix},$$

где

$$\mathbf{K}_b = \int_A \mathbf{B}_b^T \mathbf{C}_b \mathbf{B}_b dA,$$

$$\mathbf{D} = \int_A \mathbf{C}_s dA = AC,$$

$$\mathbf{G} = \int_A \mathbf{B}_s dA,$$

а \mathbf{B}_b и \mathbf{B}_s представляют собой матрицы деформация–смещение,

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{B}_b \hat{\mathbf{u}},$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{B}_s \hat{\mathbf{u}}.$$

Используя статическое сгущение, получим матрицу жесткости данного элемента по отношению только к переменным в узловых точках, то есть

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_b + \mathbf{G}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{G}.$$

Как мы уже обсуждали это в разделе 5.4.2, изопараметрический элемент в форме пластины, базирующийся только на учете смещений (т.е. использующий для определения матрицы жесткости на базе смещений полное численное интегрирование для членов с изгибом и с поперечным сдвигом), оказывается чрезмерно жестким (обнаруживает

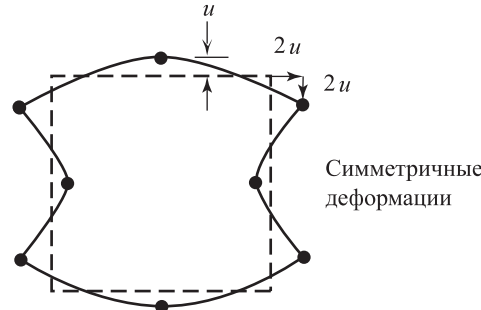
явление сдвигового заклипания). Информация в примере 5.44 указывает на то, что элемент, базирующийся на одноточечном интегрировании, обладает вариационным базисом, вполне аналогичным базису изопараметрического элемента типа балки, также базирующегося на одноточечном интегрировании. Однако если элемент типа балки является надежным и эффективным, то матрица жесткости элемента типа пластины из примера 5.44 имеет лишнее нулевое собственное значение, откуда следует, что этот элемент ненадежен и не должен использоваться на практике (как на это указывалось в работе [Batoz et al. 1980]).

Важный вывод, основанный на материалах данного примера, состоит в том, что хотя вариационный базис для элемента вполне может существовать, но будет ли этот элемент полезным и эффективным, — это, разумеется, может быть определено только путем более глубокого анализа его модели.

Эквивалентность модели для некоторого изопараметрического элемента, базирующегося на учете смещений и на укороченном или выборочном интегрировании, и смешанной модели может оказаться справедливой только для элементов особой геометрической формы и может стать несправедливой при введении законов материальной анизотропии (или геометрических нелинейностей). Если такие факторы имеют место, то необходимо проанализировать влияние каждого из них в отдельности.

5.5.7. Упражнения

- 5.53. Вычислите постоянные Ньютона–Котеса при условии, что интерполяционный полином имеет порядок 3, т. е. $\psi(r)$ является полиномом третьей степени.
- 5.54. Определите точки выборки и весовые коэффициенты для трехточечного интегрирования по Гауссу.
- 5.55. Покажите, что численное интегрирование по Гауссу порядка 3×3 является достаточным для расчета матриц жесткости и масс применительно к геометрически неискаженному элементу, базирующемуся на учете смещений и имеющему девять узлов, если анализируется случай осевой симметрии.
- 5.56. Покажите, что если рассчитывается матрица жесткости квадратного элемента с плоскими напряжениями, базирующегося на учете смещений и имеющего восемь узлов, то применение интегрирования по Гауссу порядка 2×2 приводит к появлению показанной здесь лишней моды нулевой энергии (*подсказка*: вам нужно показать, что $\mathbf{B}\hat{\mathbf{u}} = 0$ при заданных смещениях).

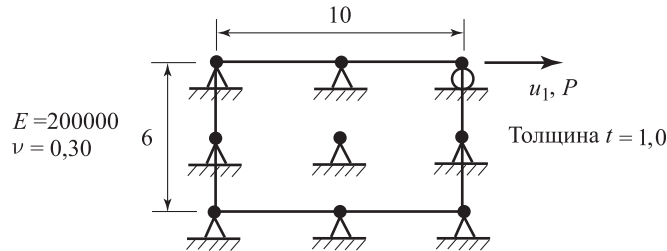


- 5.57. Рассмотрите элемент типа u/p , а именно $9/3$, и покажите, что интегрирование по Гауссу порядка 3×3 дает для неискаженного элемента точную форму матрицы жесткости. Кроме того, покажите, что интегрирование по Гауссу порядка 2×2 является неадекватным.
- 5.58. Определите требуемый порядок интегрирования в случае полного интегрирования при расчете матрицы жесткости для треугольного элемента, базирующегося на учете смещений и имеющего шесть узлов, если используется интегрирование по Гауссу в соответствии с табл. 5.8.



5.59. Рассмотрите показанный здесь элемент с плоскими напряжениями, имеющий девять узлов. Смещения во всех узловых точках зафиксированы, за исключением значения u_1 , оставленного свободным. Рассчитайте величину смещения u_1 , вызванного нагрузкой P .

- (а) Воспользуйтесь аналитическим интегрированием для расчета коэффициента жесткости.
- (б) Используйте схемы численного интегрирования по Гауссу порядка 1×1 , 2×2 и 3×3 , чтобы рассчитать коэффициент жесткости. Сравните полученные вами результаты.



- 5.60. Рассмотрите расчет матриц группируемых масс для элементов, показанных в таблице 5.9. Определите порядки интегрирования по Гауссу, подходящие для расчета этих матриц.
- 5.61. Рассмотрите данную в примере 5.29 схему для элемента в форме изгибающейся пластины. Предположите, что матрица жесткости этого элемента рассчитана с помощью одноточечного интегрирования по Гауссу. Покажите, что этот элемент имеет лишние моды нулевой энергии¹⁾.
- 5.62. Рассмотрите данную в примере 5.29 схему для элемента в форме изгибающейся пластины и предположите, что энергия деформаций рассчитывается с помощью интегрирования по Гауссу порядка 2×2 и что энергия сдвиговых деформаций рассчитывается с помощью одноточечного интегрирования по Гауссу. Покажите, что этот элемент имеет лишние моды энергии¹⁾.

5.6. Компьютерная программа для практического применения изопараметрических конечных элементов

В разделе 5.3 мы обсудили модель изопараметрического конечного элемента и дали конкретные выражения, требуемые для расчета элементов с плоскими напряжениями (или с плоскими деформациями), имеющих четыре узла (см. пример 5.5). Важным преимуществом вычислений, связанных с изопараметрическим элементом, является сходство расчетов, проводимых для различных элементов. Например, расчет трехмерных элементов представляет собой сравнительно простое обобщение расчета двумерных элементов. Кроме того, элементы с разнообразными конфигурациями расположения узловых точек могут рассчитываться с помощью одной подпрограммы, если при этом использовать некий алгоритм для надлежащего выбора интерполяционных функций (см. раздел 5.3).

¹⁾ Отметим, что в связи с этим упомянутые элементы не должны использоваться на практике (см. раздел 5.5.5).

	SUBROUTINE QUADS (NEL, ITYPE, NINT, THIC, YM, PR, XX, S, IOUT)	QQA00001
C		QQA00002
	QQA00003
C		QQA00004
C	P R O G R A M	QQA00005
C	TO CALCULATE ISOPARAMETRIC QUADRILATERAL ELEMENT STIFFNESS	QQA00006
C	MATRIX FOR AXISYMMETRIC, PLANE STRESS, AND PLANE STRAIN	QQA00007
C	CONDITIONS	QQA00008
C	-- INPUT VARIABLES --	QQA00010
C	NEL = NUMBER OF ELEMENT	QQA00011
C	ITYPE = ELEMENT TYPE	QQA00012
C	EQ.0 = AXISYMMETRIC	QQA00013
C	EQ.1 = PLANE STRAIN	QQA00014
C	EQ.2 = PLANE STRESS	QQA00015
C	NINT = GAUSS NUMERICAL INTEGRATION ORDER	QQA00016
C	THIC = THICKNESS OF ELEMENT	QQA00017
C	YM = YOUNG'S MODULUS	QQA00018
C	PR = POISSON'S RATIO	QQA00019
C	XX(2,4) = ELEMENT NODE COORDINATES	QQA00020
C	S(8,8) = STORAGE FOR STIFFNESS MATRIX	QQA00021
C	IOUT = UNIT NUMBER USED FOR OUTPUT	QQA00022
C	-- OUTPUT --	QQA00024
C	S(8,8) = CALCULATED STIFFNESS MATRIX	QQA00025
C		QQA00026
C	QQA00027
	IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)	QQA00028
C	QQA00029
C	THIS PROGRAM IS USED IN SINGLE PRECISION ARITHMETIC ON CRAY	QQA00030
C	EQUIPMENT AND DOUBLE PRECISION ARITHMETIC ON IBM MACHINES,	QQA00031
C	ENGINEERING WORKSTATIONS AND PCS. DEACTIVATE ABOVE LINE FOR	QQA00032
C	SINGLE PRECISION ARITHMETIC.	QQA00033
C	QQA00034
	DIMENSION D(4,4),B(4,4),XX(2,4),S(8,8),XG(4,4)WGT(4,4),DB(4)	QQA00035
C		QQA00036
C	MATRIX XG STORES GAUSS-LEGENDRE SAMPLING POINTS	QQA00037
		QQA00038
	DATA XG/ 0.D0, 0.D0, 0.D0, 0.D0, -.5773502691896D0,	QQA00039
	1.5773502691896D0, 0.D0, 0.D0, -.7745966692415D0, 0.D0,	QQA00040
	2.7745966692415D0, 0.D0, -.8611363115941D0,	QQA00041
	3-.3399810435849D0, .3399810435849D0, .8611363115941D0 /	QQA00042
C	MATRIX WGT STORES GAUSS-LEGENDRE WEIGHTING FACTORS	QQA00044
C		QQA00045
	DATA WGT / 2.D0, 0.D0, 0.D0, 0.D0, 1.D0, 1.D0,	QQA00046
	1 0.D0, 0.D0, .55555555555556D0, .88888888888889D0,	QQA00047
	2.55555555555556D0, 0.D0, .3478548451375D0, .6521451548625D0,	QQA00048
	3.6521451548625D0, .3478548451375D0 /	QQA00049
C		QQA00050
C	O B T A I N S T R E S S - S T R A I N L A W	QQA00051
C		QQA00052
	F=YM/(1.+PR)	QQA00053
	G=F*PR/(1.-2.*PR)	QQA00054
	H=F + G	QQA00055
C		QQA00056

```

C      PLANE STRAIN ANALYSIS                                QUA00057
C
      D(1,1)=H                                              QUA00058
      D(1,2)=G                                              QUA00059
      D(1,3)=0.                                             QUA00060
      D(2,1)=G                                              QUA00061
      D(2,2)=H                                              QUA00062
      D(2,3)=0.                                             QUA00063
      D(3,1)=0.                                             QUA00064
      D(3,2)=0.                                             QUA00065
      D(3,3)=F/2.                                           QUA00066
      IF (ITYPE.EQ.1) THEN                                  QUA00067
      THIC=1.                                                QUA00068
      GO TO 20                                              QUA00069
      ENDIF                                                 QUA00070
C
C      AXISYMMETRIC ANALYSIS                                QUA00071
C
      D(1,4)=G                                              QUA00072
      D(2,4)=G                                              QUA00073
      D(3,4)=0.                                             QUA00074
      D(4,1)=G                                              QUA00075
      D(4,2)=G                                              QUA00076
      D(4,3)=0.                                             QUA00077
      D(4,4)=H                                              QUA00078
      IF (ITPE.EQ.0) GO TO 20                               QUA00079
C
C      FOR PLANE STRESS ANALYSIS CONDENSE STRESS-STRAIN MATRIX QUA00080
C
      DO 10 I=1,3                                           QUA00081
      A=D(1,4)/D(4,4)                                       QUA00082
      DO 10 J=1,3                                           QUA00083
      D(I,J)=D(I,J)-D(4,J)*A                               QUA00084
10    D(J,I)=D(I,J)                                         QUA00085
C
C      C A L C U L A T E   E L E M E N T   S T I F F N E S S QUA00086
C
      DO 30 I=1,8                                           QUA00087
      DO 30 J=1,8                                           QUA00088
      S(I,J)=0.                                             QUA00089
30    IST=3                                                 QUA00090
      IF (ITYPE.EQ.0) IST=4                                  QUA00091
      DO 80 LX=1,NINT                                       QUA00092
      RI=XG(LX,NINT)                                       QUA00093
      DO 80 LY=1,NINT                                       QUA00094
      SI=XG(LY,NINT)                                       QUA00095
C
C      EVALUATE DERIVATIVE OPERATOR B AND THE JACOBIAN DETERMINANT DET QUA00096
C
      CALL STDM (XX,B,DET,RI,SI,XBAR,NEL,ITPE,IOUT)         QUA00097
C
C      ADD CONTRIBUTION TO ELEMENT STIFFNESS                QUA00098
C
      IF (ITYPE.GT.0) XBAR=THIC                             QUA00099
      WT=WGT(LX,NINT)*WGT(LY,NINT)*XBAR*DET                QUA00100
      DO 70 J=1,8                                           QUA00101
      DO 40 K=1,IST                                         QUA00102
      DB(K)=0.0                                             QUA00103
      DO 40 L=1,IST                                         QUA00104
40    DB(K)=DB(K) + D(K,L)*B(L,J)                         QUA00105
      DO 60 I=J,8                                           QUA00106
      STIFF=0.0                                             QUA00107
      DO 50 L=1,IST                                         QUA00108
50    STIFF=STIFF + B(L,T)*DB(L)                          QUA00109
60    S(I,J)=S(I,J) + STIFF*WT                            QUA00110

```

```

70      CONTINUE                                QUA00122
80      CONTINUE                                QUA00123
C                                          QUA00124
      DO 90 J=1,8                                QUA00125
      DO 90 I=J,8                                QUA00126
90      S(J,I)=S(I,J)                            QUA00127
C                                          QUA00128
      RETURN                                    QUA00129
C                                          QUA00130
      END                                        QUA00131
      SUBROUTINE STDM (XX,B,DET,R,S,XBAR,NEL,ITYPE,IOUT) QUA00132
C                                          QUA00133
C      . . . . .                                QUA00134
C      .                                          QUA00135
C      .      P R O G R A M                      QUA00136
C      .      TO EVALUATE THE STRAIN-DISPLACEMENT TRANSFORMATION MATRIX B QUA00137
C      .      AT POINT (R,S) FOR A QUADRILATERAL ELEMENT QUA00138
C      .                                          QUA00139
C      . . . . .                                QUA00140
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)        QUA00141
      DIMENSION XX(2,4),B(4,8),H(4),P(2,4),XJ(2,2),XJI(2,2) QUA00142
C                                          QUA00143
      RP = 1.0 + R                                QUA00144
      SP = 1.0 + S                                QUA00145
      RM = 1.0 - R                                QUA00146
      SM = 1.0 - S                                QUA00147
C                                          QUA00148
C      INTERPOLATION FUNCTIONS                    QUA00149
C                                          QUA00150
      H(1) = 0.25* RP* 2P                        QUA00151
      H(2) = 0.25* RM* SP                        QUA00152
      H(3) = 0.25* RM* SM                        QUA00153
      H(4) = 0.25* RP* SM                        QUA00154
C                                          QUA00155
C      NATURAL COORDINATE DERIVATIVES OF THE INTERPOLATION FUNCTIONS QUA00156
C                                          QUA00157
C      1. WITH RESPECT TO R                      QUA00158
C                                          QUA00159
      P(1,1) = 0.25* SP                          QUA00160
      P(1,2) = - P(1,1)                          QUA00161
      P(1,3) = - 0.25* SM                        QUA00162
      P(1,4) = - P(1,3)                          QUA00163
C                                          QUA00164
C      2. WITH RESPECT TO S                      QUA00165
C                                          QUA00166
      P(2,1) = 0.25* RP                          QUA00167
      P(2,2) = 0.25* RM                          QUA00168
      P(2,3) = - P(2,2)                          QUA00169
      P(2,4) = - P(2,1)                          QUA00170
C                                          QUA00171
C      EVALUATE THE JACOBIAN MATRIX AT POINT (R,S) QUA00172
C                                          QUA00173
C      10 DO 30 I=1,2                            QUA00174
      DO 30 J=1,2                                QUA00175
      DUM = 0.0                                  QUA00176
      DO 20 K=1,4                                QUA00177
20      DUM=DUM + P(1,K)*XX(J,K)                QUA00178
30      XJ(I,J)=DUM                              QUA00179
C                                          QUA00180
C      COMPUTE THE DETERMINANT OF THE JACOBIAN MATRIX AT POINT (R,S) QUA00181
C                                          QUA00182
      DET = XJ(1,1)* XJ(2,2) - XJ(2,1)* XJ(1,2) QUA00183
      IF (DET.GT.0.00000001) GO TO 40            QUA00184
      WRITE (IOUT,2000) NEL                      QUA00185
      GO TO 800                                  QUA00186

```


C		QUA00187
C	COMPUTE INVERSE OF THE JACOBIAN MATRIX	QUA00188
C		QUA00189
40	DUM=1./DET	QUA00190
	XJI(1,1) = XJ(2,2)* DUM	QUA00191
	XJI(1,2) =-XJ(1,2)* DUM	QUA00192
	XJI(2,1) =-XJ(2,1)* DUM	QUA00193
	XJI(2,2) = XJ(1,1)* DUM	QUA00194
C		QUA00195
C	EVALUATE GLOBAL DERIVATIVE OPERATOR B	QUA00196
C		QUA00197
	K2=0	QUA00198
	DO 60 K=1,4	QUA00199
	K2=K2 + 2	QUA00200
	B(1,K2-1) = 0.	QUA00201
	B(1,K2) = 0.	QUA00202
	B(2,K2-1) = 0.	QUA00203
	B(2,K2) = 0.	QUA00204
	DO 50 I=1,2	QUA00205
	B(1,K2-1) = B(1,K2-1) + XJI(1,I) * P(I,K)	QUA00206
50	B(2,K2) = B(2,K2) + XJI(2,1) * P(I,K)	QUA00207
	B(3,K2) = B(1,K2-1)	QUA00208
60	B(3,K2-1) = B(2,K2)	QUA00209
C		QUA00210
C	IN CASE OF PLANE STAIN OR PLANE STRESS ANALYSIS GO NOT INCLUDE	QUA00211
C	THE NORMAL STRAIN COMPONENT	QUA00212
C		QUA00213
	IF (ITYPE.GT.0) GO TO 900	QUA00214
C		QUA00215
C	COMPUTE THE RADIUS AT POINT (R,S)	QUA00216
C		QUA00217
	XBAR=0.0	QUA00218
	DO 70 K=1,4	QUA00219
70	XBAR=XBAR + H(K)*XX(1,K)	QUA00220
C		QUA00221
C	EVALUATE THE HOOP STRAIN-DISPLACEMENT RELATION	QUA00222
C		QUA00223
	IF (XBAR.GT.0.00000001) GO TO 90	QUA00224
C		QUA00225
C	FOR THE CASE OF ZERO RADIUS EQUATE RADIAL TO HOOP STRAIN	QUA00226
C		QUA00227
	DO 80 K=1,8	QUA00228
80	B(4,K)=B(1,K)	QUA00229
	GO TO 900	QUA00230
C		QUA00231
C	NON-ZERO RADIUS	QUA00232
C		QUA00233
90	DUM=1./XBAR	QUA00234
	K2=0	QUA00235
	DO 100 K=1,4	QUA00236
	K2=K2 + 2	QUA00237
	B(4,K2) = 0.	QUA00238
100	B(4,K2-1) = H(K)*DUM	QUA00239
	GO TO 900	QUA00240
C		QUA00241
800	STOP	QUA00242
900	RETURN	QUA00243
C		QUA00244
2000	FORMAT (//,' *** ERROR *** ',	QUA00245
1	' ZERO OR NEGATIVE JACOBIAN DETERMINANT FOR ELEMENT (' ,19,')')	QUA00246
C		QUA00247
	END	QUA00248

Глава 6

НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ ДЛЯ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В МЕХАНИКЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ И МЕХАНИКЕ КОНСТРУКЦИЙ

6.1. Введение в нелинейный анализ

В разделе 4.2 при описании конечно-элементной модели мы предполагали, что смещения в комплексе конечных элементов бесконечно малы и что материал является линейно упругим. Кроме того, мы предполагали также, что во время наложения нагрузок на комплекс конечных элементов природа граничных условий остается неизменной. При этих предположениях, в случае статического анализа конечно-элементные уравнения равновесия были приведены к форме

$$\mathbf{KU} = \mathbf{R}. \quad (6.1)$$

Эти уравнения соответствуют *линейному* анализу задачи о поведении конструкции, так как реакция в форме смещения \mathbf{U} является линейной функцией вектора наложенной нагрузки \mathbf{R} ; иначе говоря, если нагрузка равна не \mathbf{R} , а $\alpha\mathbf{R}$, где α — постоянная, то соответствующее смещение равно $\alpha\mathbf{U}$. Если ситуация не такова, то проводимый анализ является *нелинейным*.

Прогноз, касающийся линейного характера реакции, базируется на только что выдвинутых предположениях, и было бы поучительным установить во всех подробностях, как именно эти предположения возникали применительно к уравнениям равновесия (6.1). То обстоятельство, что смещения должны быть малыми, непосредственно отразилось на вычислении матрицы \mathbf{K} и вектора нагрузки \mathbf{R} , так как все интегрирования были осуществлены по первоначальному объему конечных элементов, а матрица деформация–смещение \mathbf{B} для каждого элемента предполагалась постоянной и не зависящей от смещений этих элементов. Предположение о линейном поведении упругого материала считается оправданным при использовании постоянной матрицы напряжение–деформация \mathbf{C} и, наконец, предположение о неизменности граничных условий отражается в использовании соотношений, выражающих постоянство ограничительных условий (см. (4.43)–(4.46)) при определении полной реакции. Если во время наложения нагрузки граничное условие для смещений должно меняться, например, если степень свободы, бывшая вначале неограниченной, при определенном уровне нагрузки начинает подвергаться ограничению, то реакция остается линейной лишь до изменения граничного условия. Эта ситуация возникает, например, при анализе контактной задачи (см. пример 6.2 и раздел 6.7).

Проведенное выше обсуждение основных допущений, используемых при линейном анализе, позволяет уяснить наше представление о нелинейном анализе, а также подсказывает, как классифицировать различные формы такого анализа. Классификация, приводимая в таблице 6.1, удобна для использования в силу того, что она рассматривает по отдельности материальные и кинематические нелинейные эффекты. Перечисляемые в таблице модели соответствуют тому, что будет обсуждаться в этой главе.

Рисунок 6.1 демонстрирует те типы встречающихся здесь задач, которые перечисляются в табл. 6.1. Следует отметить, что при анализе, связанном только с материальной нелинейностью, нелинейный эффект сосредотачивается в нелинейной связи напряжения с деформацией. Смещения и деформации являются бесконечно малыми; поэтому при описании реакции могут использоваться обычные инженерные масштабы измерения напряжений и деформаций. Рассматривая условия, когда смещение велико, но деформация

Таблица 6.1. Классификация разновидностей нелинейного анализа

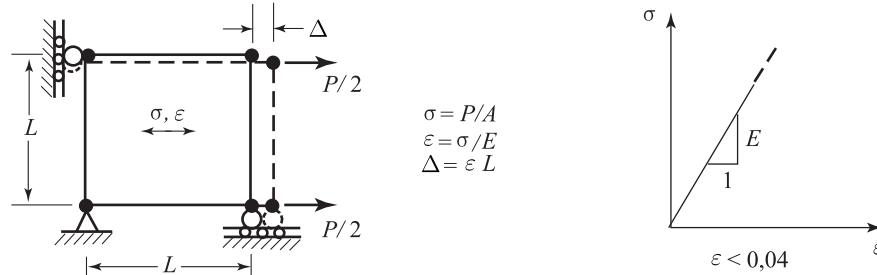
Тип анализа	Описание	Типичная используемая модель	Характеристики измерения напряжений и деформаций
Только материальные нелинейности	Бесконечно малые смещения и деформации; соотношение связи напряжений с деформациями — нелинейное	Только материальная нелинейность	Инженерные напряжения и деформации
Большие смещения и повороты, но малые деформации	Смещения и повороты волокон — большие, но протяженности волокон и изменения углов между ними малы; связь напряжений с деформациями может быть как линейной, так и нелинейной	Полностью лагранжева (ПЛ) Модернизированная лагранжева (МЛ)	Второе напряжение Пиолы–Кирхгофа, деформация Грина–Лагранжа Напряжение Коши, деформация Алманзи
Большие смещения и повороты, большие деформации	Протяженности волокон и изменения углов между ними велики, смещения и повороты волокон также могут быть большими; связь напряжений с деформациями может быть как линейной, так и нелинейной	Полностью лагранжева (ПЛ) Модернизированная лагранжева (МЛ)	Второе напряжение Пиолы–Кирхгофа, деформация Грина–Лагранжа Напряжение Коши, деформация Алманзи

мала, мы замечаем, что, по существу, исследуемый материал подвергается бесконечно малым деформациям, измеряемым в связанной с телом системе координат x', y' , тогда как сама эта система испытывает большие смещения и повороты, присущие твердому телу. Связь напряжения с деформацией может быть для данного материала как линейной, так и нелинейной.

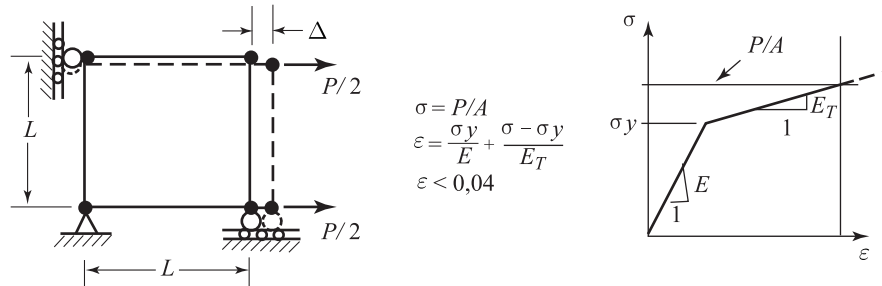
Как показано на рис. 6.1 и в табл. 6.1, наиболее общий случай анализа — это тот, при котором материал подвергается большим смещениям и большим деформациям. В этом случае соотношение связи напряжение–деформация обычно также является нелинейным.

В дополнение к разновидностям анализа, перечисленным в табл. 6.1, рис. 6.1 иллюстрирует еще один тип нелинейного анализа, а именно, анализ таких задач, для которых при движении рассматриваемого тела происходит изменение граничных условий. Такая

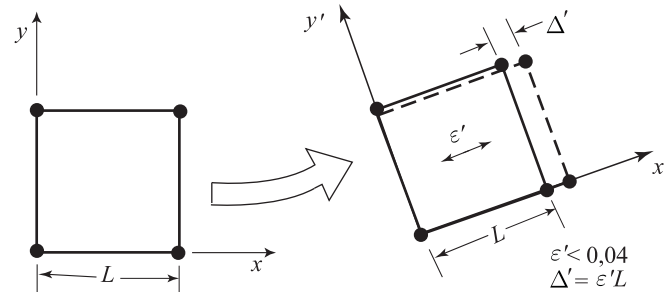
ситуация возникает, в частности, при анализе контактных задач, простой пример одной из которых дан на рис. 6.1 (д). Вообще говоря, это изменение граничного условия может встречаться при любой из форм анализа, перечисленных в табл. 6.1.



а. Линейный упругий анализ (бесконечно малые смещения)



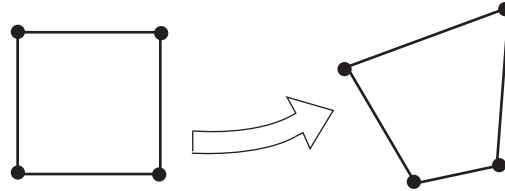
б. Только материально нелинейный анализ (бесконечно малые смещения, но нелинейное соотношение связи напряжений с деформациями)



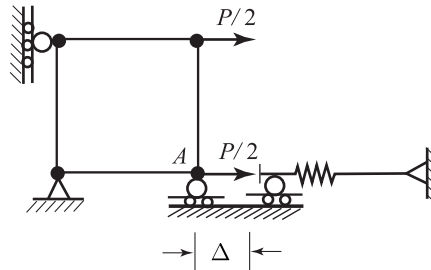
в. Большие смещения и углы поворота, но малые деформации. Линейное или нелинейное поведение материала

Рис. 6.1. Классификация разновидностей анализа

При фактическом анализе необходимо решить, попадает ли некая задача в ту или иную из категорий анализа, а результат этого решения диктует, какая именно модель будет использована для описания реальной физической ситуации. И наоборот, можно сказать, что при использовании некоторой конкретной модели предполагается и некая модель истинной физической ситуации, а выбор модели является частью всего процесса моделирования. Несомненно, использование наиболее общей модели, пригодной для больших деформаций, «будет всегда правильным»; однако принятие более ограничительной модели может оказаться более эффективным с вычислительной точки зрения и, кроме того, может обеспечить более глубокое уяснение сущности прогноза реакции.



г. Большие смещения и повороты, большие деформации.
Линейное или нелинейное поведение материала

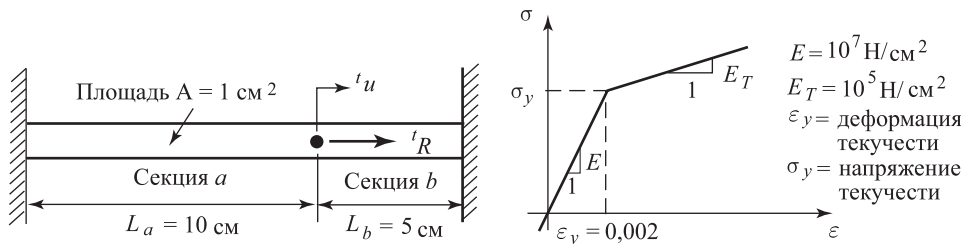


д. Изменение граничного условия при смещении Δ

Рис. 6.1. Продолжение

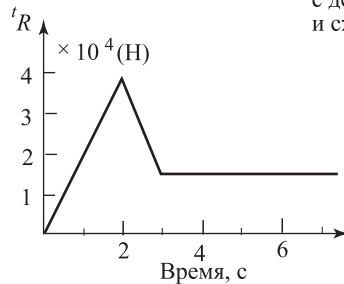
Прежде чем обсудить общие модели для разных видов нелинейного анализа, было бы поучительным рассмотреть два простых примера, демонстрирующих некоторые из перечисляемых в табл. 6.1 характеристик.

Пример 6.1: Брус, жестко закрепленный на обоих концах, подвергается осевой нагрузке так, как это показано на рис. 6.2 а. Соотношение связи напряжение–деформация и кривая зависимости нагрузки от времени приводятся на рис. 6.2 б и 6.2 в соответственно. Предполагая, что смещения и деформации малы и что нагрузка прилагается медленно, требуется рассчитать смещение в точке приложения нагрузки.



а. Простая конструкция типа бруса

б. Соотношение связи напряжения с деформацией (в терминах натяжения и сжатия)



в. Изменение нагрузки

Рис. 6.2. Анализ простой конструкции типа бруса

В силу замедленного характера приложения нагрузки и малости смещений и деформаций мы рассчитываем реакцию бруса с помощью статического анализа, учитывая только нелинейные свойства материала. Для секций a и b мы имеем соотношения деформации

$${}^t\epsilon_a = \frac{{}^tu}{L_a}; \quad {}^t\epsilon_b = -\frac{{}^tu}{L_b}, \quad (a)$$

уравнения равновесия

$${}^tR + {}^t\sigma_b A = {}^t\sigma_a A, \quad (b)$$

а также основополагающие соотношения в условиях нагружения:

$${}^t\epsilon = \frac{{}^t\sigma}{E} \quad \text{в упругой области,} \quad (c)$$

${}^t\epsilon = \epsilon_y + \text{frac}^t\sigma - \sigma_y E_T$ в пластичной области
и в условиях отсутствия нагрузки:

$$\Delta s p = \frac{\Delta \sigma}{E}.$$

В этих соотношениях верхний индекс t означает «в момент времени t ».

(i) Обе секции, a и b , являются упругими

Во время начальной стадии приложения нагрузки обе секции, a и b , являются упругими. Тогда, пользуясь соотношениями (a)–(b), имеем

$${}^tR = EA {}^tu \left(\frac{1}{L_a} + \frac{1}{L_b} \right),$$

а подставляя значения, приведенные на рис. 6.2, получим

$${}^tu = \frac{{}^tR}{3 \times 10^6}$$

при

$${}^t\sigma_a = \frac{{}^tR}{3A}; \quad 6t\sigma_b = -\frac{2}{3} \frac{{}^tR}{A}. \quad (d)$$

(ii) Секция a является упругой, тогда как секция b — пластичной

Секция b станет пластичной в момент времени t^* , когда, пользуясь (d), будем иметь

$${}^{t^*}R = \frac{3}{2} \sigma_y A.$$

После этого с учетом вышесказанного получим

$$\begin{aligned} {}^t\sigma_a &= E \frac{{}^tu}{L_a}, \\ {}^t\sigma_b &= -E_T \left(\frac{{}^tu}{L_b} - \epsilon_y \right) - \sigma_y. \end{aligned} \quad (e)$$

Используя (e), для $t \geq t^*$ получаем

$${}^tR = \frac{EA {}^tu}{L_a} + \frac{E_T A {}^tu}{L_b} - E_T \epsilon_y A + \sigma_y A$$

и, таким образом,

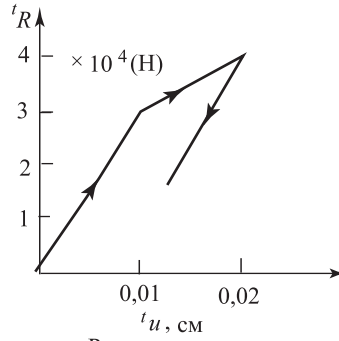
$$\begin{aligned} {}^tu &= \frac{{}^tR/A + E_T \epsilon_y - \sigma_y}{(E/L_a) + (E_T/L_b)} = \\ &= \frac{{}^tR}{1,02 \times 10^6} - 1,9412 \times 10^{-2}. \end{aligned}$$

Можно заметить, что секция a становится пластичной при ${}^t\sigma_a = \sigma_y$, или же при ${}^tR = 4,02 \times 10^4$ Н. Учитывая, что нагрузка не достигает этого значения (см. рис. 6.2 с), секция a остается упругой в течение всей истории реакции.

(iii) При снятии нагрузки обе секции действуют в упругом режиме. Здесь мы имеем

$$\Delta u = \frac{\Delta R}{EA[(1/L_a) + (1/L_b)]}.$$

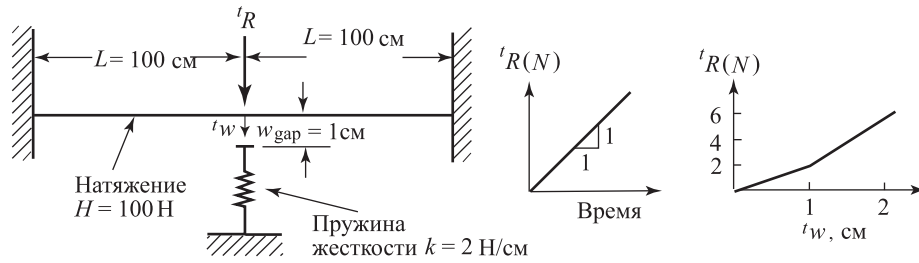
Рассчитанная величина реакции показана на рис. 6.2 г.



г. Рассчитанная реакция

Рис. 6.2. Продолжение

Пример 6.2: Предварительно натянутый канат подвергается воздействию поперечной нагрузки посередине между точками крепления, как это показано на рис. 6.3а. Ниже точки приложения нагрузки, на расстоянии w_{gap} , помещена пружина. Предположим смещения настолько малыми, что сила в канате остается постоянной, а нагрузка прилагается медленно. Требуется рассчитать смещение под воздействием нагрузки как функцию интенсивности этой нагрузки.



а. Предварительно натянутый канат, подвергнутый поперечной нагрузке

б. Нагрузка

в. Рассчитанная реакция

Рис. 6.3. Анализ предварительно натянутого каната с пружинным закреплением

Как и в примере 6.1, мы пренебрегаем силами инерции и предполагаем смещения малыми. До тех пор, пока смещение ${}^t w$ под воздействием нагрузки остается меньшим, чем w_{gap} , условие вертикального равновесия при малых ${}^t w$ требует, чтобы

$${}^t R = 2H \frac{{}^t w}{L}. \quad (a)$$

Как только смещение станет больше, чем w_{gap} , справедливым становится следующее уравнение равновесия:

$${}^t R = 2H \frac{{}^t w}{L} + k({}^t w - w_{\text{gap}}). \quad (b)$$

На рис. 6.3 в графически показана связь сила–смещение, соответствующая выражениям (a) и (b).

Необходимо отметить, что при проведении этого анализа мы пренебрегли упругостью каната; в связи с этим реакция рассчитывается только с использованием уравнений равновесия (a) и (b), а единственная нелинейность обуславливается условием контакта, возникающего при ${}^t w \geq w_{\text{gap}}$.

Несмотря на то, что эти примеры описывают две очень простые задачи, приведенные решения выявляют некоторые важные общие особенности. Основная проблема общего нелинейного анализа состоит в том, чтобы найти состояние равновесия тела, соответствующее приложенным нагрузкам. Если предположить, что нагрузки, приложенные извне, описываются как функции времени, как это было в примерах 6.1 и 6.2, то уравнения равновесия системы конечных элементов, представляющей рассматриваемое тело, могут быть записаны в форме

$${}^t\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F} = 0, \quad (6.2)$$

где вектор ${}^t\mathbf{R}$ представляет силы в узловых точках, приложенные к данной конфигурации извне в момент времени t , а вектор ${}^t\mathbf{F}$ представляет силы в узловых точках, соответствующие элементным напряжениям в этой конфигурации. Следовательно, если использовать обозначения главы 4, в соотношениях (4.18) и (4.20)–(4.22), то мы получим

$${}^t\mathbf{R} = {}^t\mathbf{R}_B + {}^t\mathbf{R}_S + {}^t\mathbf{R}_C \quad (6.3)$$

и, рассматривая текущие значения напряжений как начальные, $\mathbf{R}_i = {}^t\mathbf{F}$, будем иметь

$${}^t\mathbf{F} = \sum_m \int_{{}^tV^{(m)}} {}^t\mathbf{B}^{(m)T} {}^t\boldsymbol{\tau}^{(m)} dV^{(m)}, \quad (6.4)$$

где при проведении общего анализа с большими деформациями не известны ни напряжения, ни объем тела в момент времени t .

Соотношение (6.2) должно отражать равновесие системы в ее текущей деформированной геометрии, при надлежащем учете всех нелинейностей. Кроме того, при динамическом анализе вектор ${}^t\mathbf{R}$ должен включать силы инерции и силы демпфирования, как это обсуждалось в разделе 4.2.1.

Рассматривая решение с нелинейной реакцией, мы отдаем себе отчет в том, что уравнение равновесия (6.2) должно удовлетворяться в течение всей истории приложения нагрузки; иначе говоря, временная переменная t может принимать любое значение, от нуля до максимального, интересующего нас (см. примеры 6.1 и 6.2). При статическом анализе, проводимом без учета каких-либо временных эффектов помимо определения уровня нагрузки (например, без учета эффектов ползучести; см. раздел 6.6.3), время представляет собой лишь некоторую удобную переменную, обозначающую различные интенсивности приложения нагрузок и, соответственно этому, различные конфигурации. Однако при динамическом анализе и при статическом анализе с учетом времени на материал, время представляет собой реальную переменную, которую следует надлежащим образом учитывать при моделировании реальной физической ситуации. Основываясь на этих соображениях, мы убеждаемся, что использование времени, как переменной, описывающей процесс приложения нагрузки и историю решения, представляет собой весьма общий подход и соответствует высказанному ранее утверждению о том, что «динамический анализ есть, в своей основе, статический анализ, проводимый с учетом эффектов инерции».

Если говорить о тех результатах анализа, которые требуется рассчитать, то при любых вариантах решения необходимо определить только те напряжения и смещения, которые получаются при определенных уровнях или в определенные моменты времени. При некоторых вариантах нелинейного статического анализа равновесные конфигурации, соответствующие этим уровням нагрузки, могут быть рассчитаны без построения решений для других равновесных конфигураций. Однако если проводимый анализ включает нелинейные геометрические или материальные условия, зависящие от проходимого пути, или же явления, зависящие от времени, то уравнения равновесия (6.2) необходимо будет решать для всего, интересующего нас диапазона времени. Этот расчет реакции системы эффективно реализуется при использовании решения с пошаговым приростом, которое сводится к одношаговому анализу, если в статическом, не зависящем от времени решении суммарная нагрузка прилагается вся сразу, и тогда рассчитывается только конфигурация, соответствующая этой нагрузке. Однако мы сможем увидеть, что на практике, в силу причин вычислительного характера, даже анализ такого случая нередко требует построения решения с пошаговым приростом, реализуемого автоматически (см. также раздел 8.4), при

некотором числе шагов изменения нагрузки, требуемом, чтобы в конечном итоге достичь полной величины прикладываемой нагрузки.

Подход к построению решения с пошаговым приростом в своей основе связан с предположением о том, что для конкретного значения времени t решение известно и что требуется найти решение для конкретного значения $t + \Delta t$, где Δt представляет собой надлежащим образом выбранное приращение времени. Следовательно, если рассмотреть уравнение (6.2) в момент времени $t + \Delta t$, то мы будем иметь

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = 0, \quad (6.5)$$

где левый верхний индекс означает «в момент времени $t + \Delta t$ ». Будем предполагать, что ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}$ не зависит от деформаций. Учитывая, что решение для момента времени t известно, мы можем написать

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = {}^t\mathbf{F} + \mathbf{F}, \quad (6.6)$$

где \mathbf{F} — это прирост сил в узловой точке, соответствующий приросту смещений элемента и напряжений за время от t до $t + \Delta t$. Этот вектор можно аппроксимировать с помощью использования матрицы касательной жесткости ${}^t\mathbf{K}$, соответствующей геометрическим и материальным условиям в момент времени t , а именно

$$\mathbf{F} \doteq {}^t\mathbf{K}\mathbf{U}, \quad (6.7)$$

где \mathbf{U} — вектор прироста смещений в узловой точке, и где

$${}^t\mathbf{K} = \frac{\partial {}^t\mathbf{F}}{\partial {}^t\mathbf{U}}. \quad (6.8)$$

Следовательно, касательная матрица жесткости соответствует производной вектора внутренних элементарных сил в узловой точке по смещениям в узловой точке ${}^t\mathbf{U}$.

Подставляя (6.7) и (6.6) в (6.5), мы получаем

$${}^t\mathbf{K}\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F} \quad (6.9)$$

и, разрешая относительно \mathbf{U} , мы можем рассчитать приближенное выражение для смещений в момент времени $t + \Delta t$,

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} \doteq {}^t\mathbf{U} + \mathbf{U}. \quad (6.10)$$

Точные значения смещений в момент времени $t + \Delta t$ — это те, которые соответствуют приложенным нагрузкам ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}$. Формула (6.10) позволяет рассчитать только приближенные значения этих смещений, так как мы пользовались формулой (6.7).

Обсуждение, проводимое нами в этой главе, будет в значительной мере сосредоточено на надлежащей и эффективной оценке величин ${}^t\mathbf{F}$ и ${}^t\mathbf{K}$.

Получив приближенные выражения для смещений, соответствующие моменту времени $t + \Delta t$, мы могли бы теперь построить приближенное решение для напряжений и соответствующих сил в узловых точках при $t + \Delta t$, а затем перейти к расчетам со следующим значением приращенного времени. Однако вследствие допущения, сделанного при получении выражения (6.7), в решении такого рода могут возникнуть весьма значительные ошибки и, в зависимости от шагов по времени или по величине нагрузки, это решение может стать неустойчивым. Поэтому на практике необходимо проводить итерации до тех пор, пока решение уравнения (6.5) не будет построено с достаточной точностью.

Методы итераций, широко применяемые в конечно-элементном анализе, основываются на классической технике Ньютона–Рафсона (см., например, [Kreyszig 1977], а также [Bićanić, Johnson 1978]), формальное обоснование которой дается в разделе 8.4. Этот метод является обобщением простой техники шагов с приростом, данной в соотношениях (6.9) и (6.10). Эта техника состоит в том, что, произведя расчет *прироста* смещений в узловых точках, позволяющего определить *новый полный* вектор смещений, мы можем повторить вышеописанное решение с приростом, используя известные в данный момент полные значения смещений вместо значений для момента времени t .

Уравнения, используемые в итерационной схеме Ньютона–Рафсона при $i = 1, 2, 3, \dots$ имеют форму

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)}\Delta\mathbf{U}^{(i)} &= {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)}, \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i)} &= {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)} + \Delta\mathbf{U}^{(i)} \end{aligned} \quad (6.11)$$

при начальных условиях

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(0)} = {}^t\mathbf{U}; \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(0)} = {}^t\mathbf{K}; \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(0)} = {}^t\mathbf{F}. \quad (6.12)$$

Отметим, что в рамках первой итерации соотношения (6.11) приводятся к уравнениям (6.9) и (6.10). Затем, в последующих итерациях, последние оценки смещений в узловых точках используются для вычисления соответствующих элементных напряжений и сил в узловых точках, ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)}$, а также матрицы касательной жесткости ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)}$.

Неуравновешенный вектор нагрузки ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)}$ соответствует той нагрузке, которая пока что не уравновешивается элементными напряжениями и, следовательно, требуется некий прирост смещений в узловых точках. Это опережающее определение смещений в узловых точках в рамках одной итерации продолжается до тех пор, пока неуравновешенные нагрузки и приросты смещений не станут малыми.

Составим сводку некоторых важных соображений, касающихся итерационного решения по Ньютону–Рафсону.

Важно отметить, что решающее значение имеет правильность расчета ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)}$ по данным о ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)}$. Результатом любых ошибок в этом расчете будет, в общем случае, неправильный прогноз реакции.

Не менее важным является также правильный расчет матрицы касательной жесткости ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)}$. Использование надлежащей матрицы касательной жесткости может оказаться необходимым для обеспечения сходимости и в общем случае приведет к уменьшению числа итераций, требуемого для достижения сходимости.

Однако, вследствие высокой стоимости вычисления новой матрицы касательной жесткости и ее умножения на соответствующий коэффициент, на практике может оказаться более эффективным, в зависимости от присутствующих при анализе нелинейностей, вычислять новую матрицу касательной жесткости только при определенных значениях времени. В частности, при применении модифицированного метода Ньютона–Рафсона новая матрица касательной жесткости определяется только в начале каждого этапа изменения нагрузки, тогда как в квазиньютоновских методах вместо матрицы касательной жесткости используются матрицы текущей жесткости (см. раздел 8.4). Отметим, что если сходимость достигнута, то вопрос о том, какую именно схему использовать, решается только в зависимости от ее вычислительной эффективности.

Использование итерационного решения требует наличия надлежащих критериев сходимости. Если используются неподходящие критерии, то итерация может завершиться прежде, чем будет достигнута необходимая точность решения, или, наоборот, будет продолжаться после достижения требуемой точности.

Эти соображения, касающиеся численных расчетов, обсуждаются в разделе 8.4, но здесь мы отметим, что какая бы техника итераций ни использовалась, основные требования состоят в том, чтобы можно было осуществить (1) вычисление матрицы (касательной) жесткости, соответствующей заданному состоянию и (2) вычисление вектора узловых сил, соответствующих напряжениям в этом состоянии (это «состояние» задается с помощью либо ${}^t\mathbf{U}$, либо ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)}$, $i = 1, 2, 3, \dots$). Следовательно, в данной главе мы в первую очередь сосредоточиваемся на том, как при исходном состоянии, а именно — при состоянии в момент времени t , могут быть рассчитаны матрицы касательной жесткости ${}^t\mathbf{K}$ и векторы сил ${}^t\mathbf{F}$ для элементов различного вида и для различных соотношений связи напряжения с деформацией.

Давайте продемонстрируем реализацию данных концепций на двух примерах.

Пример 6.3: Требуется идеализировать простую арочную конструкцию, показанную на рис. 6.4 (а), в виде комплекса из двух стержневых элементов. Предположим, что сила, действующая на один из стержней, задается формулой ${}^tF_{\text{бар}} = k^t\delta$, где k — постоянная, а ${}^t\delta$ — это удлинение стержня в момент времени t (по всей вероятности, допущение о постоянстве k справедливо только в случае малых деформаций стержня, однако мы используем его для упрощения анализа). Требуется составить уравнения равновесия (6.5) применительно к данной задаче.

Эта задача является задачей о больших смещениях, и реакция системы рассчитывается, если сосредоточить внимание на равновесии комплекса стержней в конфигурации,

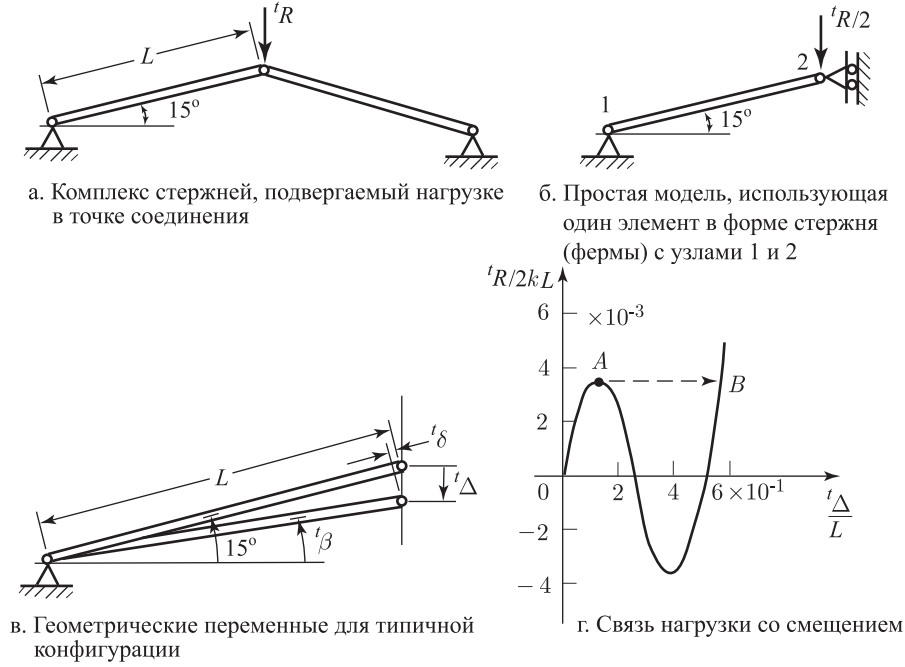


Рис. 6.4. Простая арочная конструкция

соответствующей моменту времени t . Используя симметрию, как это показано на рисунках 6.4б и 6.4в, мы имеем

$$\begin{aligned}(L - {}^t\delta) \cos {}^t\beta &= L \cos 15^\circ, \\ (L - {}^t\delta) \sin {}^t\beta &= L \sin 15^\circ - {}^t\Delta\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}{}^t\delta &= L - \sqrt{L^2 - 2L {}^t\Delta \sin 15^\circ + {}^t\Delta^2}, \\ \sin {}^t\beta &= \frac{L \sin 15^\circ - {}^t\Delta}{L - {}^t\delta}.\end{aligned}$$

Для равновесия в момент времени t требуется, чтобы

$$2 {}^tF_{\text{bar}} \sin {}^t\beta = {}^tR,$$

и, следовательно, соотношение (6.5) принимает форму

$$\frac{{}^tR}{2kL} = \left(-1 + \frac{1}{\left[1 - 2 {}^t\Delta L \sin 15^\circ + \left(\frac{{}^t\Delta}{L} \right)^2 \right]^{1/2}} \right) \left(\sin 5^\circ - \frac{{}^t\Delta}{L} \right). \quad (a)$$

График на рис. 6.4г показывает зависимость силы от смещения, определяемую формулой (а). Следует отметить, что при заданном уровне нагрузки между точками A и B мы имеем две возможные конфигурации смещения. Если данная конструкция нагружается силой tR при ее монотонном возрастании, то резкое изменение смещения между A и B , наблюдаемое на рис. 6.4г, будет весьма вероятно, происходить в реальной физической ситуации.

Пример 6.4: Требуется рассчитать реакцию комплекса стержней, рассмотренного в примере 6.1, используя модифицированный метод итераций Ньютона–Рафсона. Используйте два одинаковых шага по величине нагрузки до достижения максимального значения этой нагрузки.

При применении модифицированного метода итераций Ньютона–Рафсона мы пользуемся соотношениями (6.11) и (6.12), но вычисляем новые матрицы касательной жесткости только в начале каждого шага. Следовательно, при этом анализе итерационные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} ({}^t K_a + {}^t K_b) \Delta u^{(i)} &= {}^{t+\Delta t} R - {}^{t+\Delta t} F_a^{(i-1)} - {}^{t+\Delta t} F_b^{(i-1)} \\ {}^{t+\Delta t} u^{(i)} &= {}^{t+\Delta t} u^{(i-1)} + \Delta u^{(i)} \end{aligned} \quad (a)$$

при

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} u^{(0)} &= {}^t u; \\ {}^{t+\Delta t} F_a^{(0)} &= {}^t F_a; \quad {}^{t+\Delta t} F_b^{(0)} = {}^t F_b; \\ {}^t K_a &= \frac{{}^t C A}{L_a}; \quad {}^t K_b = \frac{{}^t C A}{L_b}, \end{aligned} \quad (b)$$

где

$${}^t C = \begin{cases} = E & \text{если секция — упругая,} \\ = E_T & \text{если секция — пластичная.} \end{cases}$$

Для упругой секции

$${}^{t+\Delta t} F^{(i-1)} = E A {}^{t+\Delta t} \epsilon^{(i-1)}, \quad (c)$$

а для пластичной секции

$${}^{t+\Delta t} F^{(i-1)} = E A {}^{t+\Delta t} \epsilon^{(i-1)}, \quad (d)$$

тогда как деформации в секциях определяются выражениями

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \epsilon_a^{(i-1)} &= \frac{{}^{t+\Delta t} \epsilon^{(i-1)}}{L_a}, \\ {}^{t+\Delta t} \epsilon_b^{(i-1)} &= \frac{{}^{t+\Delta t} u^{(i-1)}}{L_b}. \end{aligned} \quad (e)$$

На первом шаге изменения нагрузки мы имеем $t = 0$ и $\Delta t = 1$. Таким образом, применение соотношений (a)–(e) дает

$t = 1$:

$$\begin{aligned} ({}^0 K_a + {}^0 K_b) \Delta u^{(1)} &= {}^1 R - {}^1 F_a^{(0)} - {}^1 F_b^{(0)}, \\ \Delta u^{(1)} &= \frac{2 \times 10^4}{10^7 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5} \right)} = 6,6667 \times 10^{-3} \text{ см}, \\ (i = 1) \quad {}^1 u^{(1)} &= {}^1 u^{(0)} + \Delta u^{(1)} = 6,6667 \times 10^{-3} \text{ см}, \\ {}^1 \epsilon_a^{(1)} &= \frac{{}^1 u^{(1)}}{L_a} = 6,6667 \times 10^{-4} < \epsilon_y \rightarrow \text{секция } a \text{ является упругой}, \\ {}^1 \epsilon_b^{(1)} &= \frac{{}^1 u^{(1)}}{L_b} = 11,3333 \times 10^{-3} < \epsilon_y \rightarrow \text{секция } b \text{ является упругой}, \\ {}^1 F_a^{(1)} &= 6,6667 \times 10^3 \text{ Н}, \\ {}^1 F_b^{(1)} &= 1,3333 \times 10^4 \text{ Н}, \\ ({}^0 K_a + {}^0 K_b) \Delta u^{(2)} &= {}^1 R - {}^1 F_a^{(1)} - {}^1 F_b^{(1)} = \\ &= 0, \\ \therefore \text{Сходимость достигается за одну итерацию,} \\ {}^1 u &= 6,6667 \times 10^{-3} \text{ см}. \end{aligned}$$

$t = 2$:

$$\begin{aligned} {}^1 K_a &= \frac{E A}{L_a}; \quad {}^1 K_b = \frac{E A}{L_b}; \\ {}^2 F_a^{(0)} &= {}^1 F_a; \quad {}^2 F_b^{(0)} = {}^1 F_b; \\ ({}^1 K_a + {}^1 K_b) \Delta u^{(1)} &= {}^2 R - {}^2 F_a^{(0)} - {}^2 F_b^{(0)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta u^{(1)} &= \frac{(4 \times 10^4) - (6,6667 \times 10^3) - (1,3333 \times 10^4)}{10^7 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5} \right)} = \\
&= 6,6667 \times 10^{-3} \text{ см}; \\
(i=1) \quad {}^2u^{(1)} &= {}^2u^{(0)} + \Delta u^{(1)} = 1,3333 \times 10^{-2} \text{ см}; \\
{}^2\epsilon_a^{(1)} &= 1,3333 \times 10^{-3} < \epsilon_y \rightarrow \text{секция } a \text{ является упругой}, \\
{}^2\epsilon_b^{(1)} &= 2,6667 \times 10^{-3} > \epsilon_y \rightarrow \text{секция } b \text{ является пластичной}, \\
{}^2F_a^{(1)} &= 1,3333 \times 10^4 \text{ Н}, \\
{}^2F_b^{(1)} &= [E_T({}^2\epsilon_b^{(1)} - \epsilon_y) + \sigma_y]A = 2,0067 \times 10^4 \text{ Н}, \\
({}^1K_a + {}^1K_b) \Delta u^{(2)} &= {}^2R - {}^2F_a^{(1)} - {}^2F_b^{(1)}, \\
\Delta u^{(2)} &= 2,2 \times 10^{-3} \text{ см}, \\
(i=2) \quad {}^2u^{(2)} &= {}^2u^{(1)} + \Delta u^{(2)} = 1,5533 \times 10^{-2} \text{ см}, \\
{}^2\epsilon_a^{(2)} &= 1,5533 \times 10^{-3} < \epsilon_y, \\
{}^2\epsilon_b^{(2)} &= 3,1066 \times 10^{-3} > \epsilon_y, \\
\therefore {}^2F_a^{(2)} &= 1,5533 \times 10^4 \text{ Н}, \\
{}^2F_b^{(2)} &= 2,011 \times 10^4 \text{ Н}, \\
({}^1K_a + {}^1K_b) \Delta u^{(3)} &= {}^2R - {}^2F_a^{(2)} - {}^2F_b^{(2)}, \\
\Delta u^{(3)} &= 1,4521 \times 10^{-3} \text{ см}.
\end{aligned}$$

Эта процедура повторяется, и результаты последовательных итераций приводятся в прилагаемой таблице

i	$\Delta u^{(i)}$ (см)	${}^2u^{(i)}$ см
3	$1,4521 \times 10^{-3}$	$1,6985 \times 10^{-2}$
4	$9,5832 \times 10^{-4}$	$1,7944 \times 10^{-2}$
5	$6,3249 \times 10^{-4}$	$1,8576 \times 10^{-2}$
6	$4,1744 \times 10^{-4}$	$1,8994 \times 10^{-2}$
7	$2,7551 \times 10^{-4}$	$1,9269 \times 10^{-2}$

После семи итераций мы имеем

$${}^2u \doteq {}^2u^{(7)} = 1,9269 \times 10^{-2} \text{ см}.$$

6.2. Формулировка уравнений движения в механике сплошной среды, составленных с пошаговым приростом

Целью вводного обсуждения вопросов нелинейного анализа, проведенного в разделе 6.1, было описание различных форм нелинейности, а также вида основных конечно-элементных уравнений, используемых при анализе нелинейной реакции некоторой конструкционной системы. Чтобы показать конкретную процедуру анализа, мы просто сформулировали конечно-элементные уравнения, обсудили методы их решения и привели физическую аргументацию в пользу того, что использование этих уравнений позволяет надлежащим образом прогнозировать вышеупомянутую нелинейную реакцию. Мы

продемонстрировали возможность применения такого подхода на решении двух очень простых задач, имея в виду лишь дать возможность некоторого углубленного рассмотрения этапов используемого анализа. В каждом из вариантов такого анализа пригодные к применению конечно-элементные матрицы и векторы были подробно рассмотрены с использованием физической аргументации.

Физический подход к анализу, реализовавшийся в примерах 6.3 и 6.45, является весьма поучительным и позволяет получить углубленное представление об этом анализе; однако при рассмотрении какого-то более сложного решения следует применять некий совместимый подход, базирующийся на представлениях механики сплошной среды и позволяющий получить исходные конечно-элементные уравнения. В данном разделе мы ставим своей целью представить читателю эти определяющие уравнения механики сплошной среды при построении решения с конечными элементами, базирующимися на учете смещений. Как и в разделе 4.2.1, мы пользуемся принципом виртуальной работы, однако теперь принимаем во внимание возможность того, что рассматриваемое тело претерпевает большие смещения и повороты, а также большие деформации, причем связь напряжения с деформацией является нелинейной. Поэтому те определяющие уравнения механики сплошной среды, которые мы собираемся представить, могут рассматриваться как обобщение основного уравнения (4.7). При линейном анализе поведения тела общего вида уравнение (4.7) использовалось в качестве основы для построения определяющих линейных конечно-элементных уравнений (представленных соотношениями (4.17)–(4.27)). В процессе нелинейного анализа поведения тела общего вида, после построения надлежащих уравнений механики сплошной среды мы совершенно аналогичным путем перейдем к установлению тех нелинейных конечно-элементных уравнений, которыми определяется нелинейная реакция рассматриваемого тела (см. раздел 6.3).

6.2.1. Основная проблема В разделе 6.1 мы особо отметили тот факт, что равновесие рассматриваемого тела при нелинейном анализе должно определяться для текущей конфигурации системы. Мы указали также и на то, что в общем случае необходимо применять схему с пошаговым приростом, и что временная переменная используется для удобства описания процесса нагрузки и движения данного тела.

При последующем развитии нашего исследования мы рассматриваем движение тела общего вида в некоторой неподвижной декартовой системе координат, как это показано на рис. 6.4, и предполагаем, что тело может испытывать большие смещения, большие деформации, а также закономерную нелинейную реакцию. Цель исследования состоит в расчете равновесных положений всего тела для дискретных точек шкалы времени $0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$, где Δt — это прирост времени. Чтобы выработать стратегию построения решения, предположим, что решения для статических и кинематических переменных на всех шагах по времени, от нуля до момента времени t включительно, уже были получены. Тогда процесс построения решения для следующего, интересующего нас положения равновесия, соответствующего моменту времени $t + \Delta t$, является типичным и повторяется до тех пор, пока не будет пройден путь до получения полного решения. Следовательно, при проводимом анализе мы прослеживаем движение всех частиц данного тела, начиная от первоначальной его конфигурации и вплоть до конечной, а это означает, что мы принимаем *лагранжеву* (или *материальную*) формулировку данной проблемы. Этот подход является противоположностью *эйлеровой формулировки*, обычно используемой при анализе задач механики жидкости, когда внимание сосредоточивается на движении материала через неподвижный контрольный объем. Когда речь идет об анализе поведения твердых тел и конфигураций, то лагранжева формулировка обычно реализует более естественный и эффективный подход к этому анализу, чем формулировка Эйлера. Например, если при исследовании задачи о поведении конструкции с большими смещениями используется эйлерова формулировка, то нужно неизменно создавать новые контрольные объемы (так как границы твердого тела непрерывно изменяются), и весьма трудно иметь дело с нелинейными членами, соответствующими конвективным ускорениям (см. раздел 7.4).

При нашем лагранжевом подходе к анализу с пошаговым приростом мы выражаем равновесие данного тела в момент времени $t + \Delta t$, пользуясь принципом виртуальных

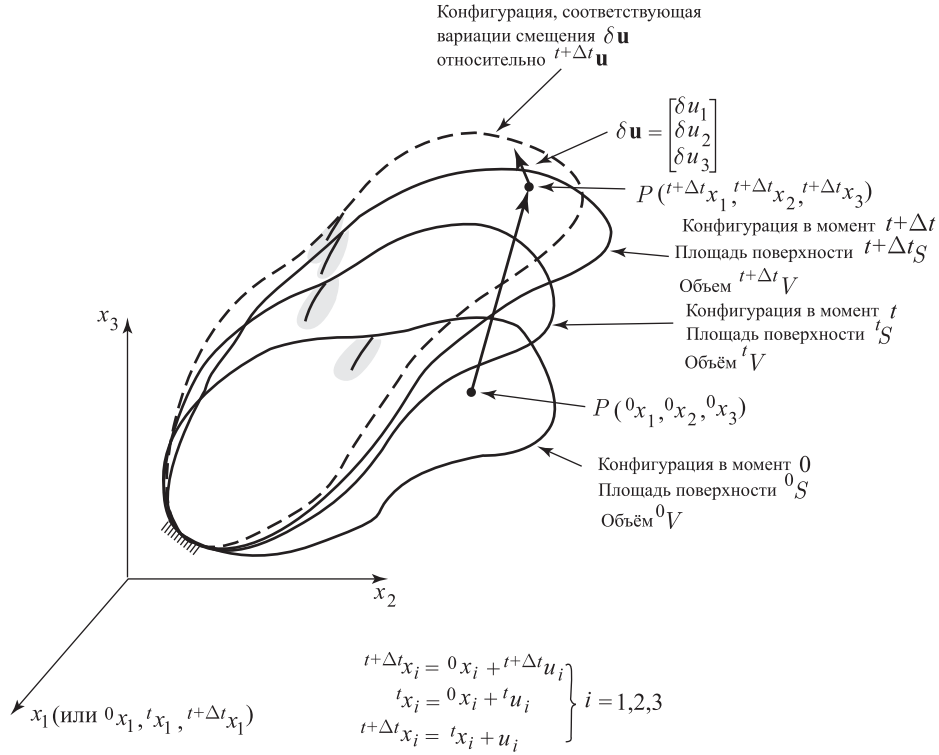


Рис. 6.4. Движение тела в декартовой системе координат

перемещений. Если использовать тензорные обозначения (см. раздел 2.4), то этот принцип требует выполнения соотношения

$$\int_{t+\Delta t V} {}^{t+\Delta t}\tau_{ij} \delta_{t+\Delta t} e_{ij} d^{t+\Delta t} V = {}^{t+\Delta t}\mathcal{R}, \quad (6.13)$$

где

${}^{t+\Delta t}\tau_{ij}$ — декартовы компоненты тензора *напряжений Коши* (силы, приходящиеся на единицу площади деформированной геометрии),

$\delta_{t+\Delta t} e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial {}^{t+\Delta t}x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial {}^{t+\Delta t}x_i} \right)$ — тензор деформаций, соответствующих виртуальным смещениям,

δu_i — компоненты вектора виртуальных смещений, наложенных на конфигурацию в момент $t + \Delta t$, — функции от ${}^{t+\Delta t}x_j$, $j = 1, 2, 3$,

${}^{t+\Delta t}x_i$ — декартовы координаты материальной точки в момент $t + \Delta t$,

${}^{t+\Delta t}V$ — объем в момент $t + \Delta t$,

и

$${}^{t+\Delta t}\mathcal{R} = \int_{t+\Delta t V} {}^{t+\Delta t}f_i^B \delta u_i d^{t+\Delta t} V + \int_{t+\Delta t S_f} {}^{t+\Delta t}f_i^S \delta u_i^S d^{t+\Delta t} S \quad (6.14)$$

где

${}^{t+\Delta t}f_i^B$ — компоненты сил, приложенных извне и рассчитанных на единицу объема в момент $t + \Delta t$,

${}^{t+\Delta t}f_i^S$ — компоненты приложенных извне поверхностных натяжений в расчете на единицу площади поверхности в момент $t + \Delta t$,

${}^{t+\Delta t}S_f$ — поверхность в момент $t + \Delta t$, на которую действуют внешние поверхностные натяжения,

δu_i^S — величина δu_i , рассчитанная на поверхности ${}^{t+\Delta t}S_f$ (компоненты δu_i равны нулю на поверхности ${}^{t+\Delta t}S_u$ и соответствуют заданным смещениям на этой поверхности).

Левая часть уравнения (6.13) представляет собой внутреннюю виртуальную работу, а правая часть — это внешняя виртуальная работа. Это уравнение выведено так же, как и при линейном анализе бесконечно малых смещений (см. пример 4.2), однако здесь используется текущая конфигурация в момент времени $t + \Delta t$ (при напряжениях и силах для этого же момента). Следовательно, вывод уравнения (6.13) базируется на следующих уравнениях равновесия.

Внутри объема ${}^{t+\Delta t}V$ для $i = 1, 2, 3$

$$\frac{\partial {}^{t+\Delta t}\tau_{ij}}{\partial {}^{t+\Delta t}x_j} + {}^{t+\Delta t}f_i^B = 0 \quad \text{сумма по } j = 1, 2, 3 \quad (6.15a)$$

и на поверхности ${}^{t+\Delta t}S_f$ для $i = 1, 2, 3$

$${}^{t+\Delta t}\tau_{ij} {}^{t+\Delta t}n_j = {}^{t+\Delta t}f_i^S \quad \text{сумма по } j = 1, 2, 3, \quad (6.15b)$$

где величины ${}^{t+\Delta t}n_j$ — это компоненты единичной нормали к поверхности ${}^{t+\Delta t}S_f$ в момент времени $t + \Delta t$.

Как показано в примере 4.2, уравнение (6.15a) умножается на произвольные непрерывные смещения δu_i , которые равны нулю при заданных смещениях и соответствуют им. Интегрирование выражения, полученного из (6.15 a), по объему в момент $t + \Delta t$, использование теоремы о дивергенции и уравнения (6.15 b), — все это вместе дает нам соотношение (6.13).

Мы замечаем, что компоненты тензора деформаций $\delta_{t+\Delta t}e_{ij}$, соответствующие наложенным виртуальным смещениям, похожи на компоненты тензора бесконечно малых деформаций, однако входящие в них производные берутся по отношению к текущим координатам в момент времени $t + \Delta t$. Использование тензора деформаций $\delta_{t+\Delta t}e_{ij}$ в уравнении (6.13) представляет собой *прямой* результат преобразования с помощью теоремы о дивергенции, используемого при выводе уравнения (6.13), причем этот тензор деформаций получен независимо от величины виртуальных смещений.

Однако теперь мы убеждаемся, что виртуальные смещения δu_i могут рассматриваться как *вариации* реальных смещений ${}^{t+\Delta t}u_i$ (подверженных тому ограничению, что эти вариации должны быть равны нулю при заданных смещениях и соответствовать им). Эти вариации смещений приводят к вариациям текущих значений деформации рассматриваемого тела и позднее мы, в частности, будем использовать вариации компонентов деформации по Грину–Лагранжу, соответствующих δu_i (см. пример 6.10).

Чрезвычайно важно признать, что сформулированный в уравнении (6.13) принцип виртуальной работы представляет собой просто приложение уравнения (4.7) (используемого в линейном анализе) к исследованию рассматриваемого тела в конфигурации, соответствующей моменту времени $t + \Delta t$. На этом основании все предшествующие обсуждения и результаты, относящиеся к использованию принципа виртуальной работы в рамках линейного анализа, оказываются теперь непосредственно применимыми к рассмотрению текущей конфигурации в момент времени $t + \Delta t$ ¹⁾.

В общем случае применения уравнения (6.13) фундаментальная трудность состоит в том, что конфигурация интересующего нас тела в момент времени $t + \Delta t$ неизвестна. В этом состоит важное отличие от условий линейного анализа, при котором предполагается, что смещения бесконечно малы, так что в уравнениях (6.13)–(6.15) используется первоначальная конфигурация. Непрерывное изменение конфигурации тела влечет за собой некоторые следствия, важные для разработки процедуры анализа с пошаговым приростом. Например, весьма важным должно быть соображение о том, что напряжения Коши в момент $t + \Delta t$ не могут быть получены путем простого добавления к напряжениям

¹⁾ Мы можем представить себе, что при рассмотрении движущегося тела в момент времени $t + \Delta t$ делается фотоснимок, а затем принцип виртуальных смещений применяется к состоянию тела, запечатленному на этом снимке.

Коши в момент t прироста напряжений, обусловленного только деформацией материала. А именно, расчет напряжений Коши в момент $t + \Delta t$ должен принять во внимание также и поворот материала, как твердого тела, потому что компоненты тензора напряжений Коши изменяются и тогда, когда материал подвергается только вращению как твердое тело.

Тот факт, что конфигурация тела непрерывно изменяется в процессе анализа с большими деформациями, принимается во внимание весьма элегантно способом за счет использования надлежащих масштабов измерения напряжений и деформаций, а также выбора основополагающих соотношений, как это и будет подробно обсуждаться в последующих разделах.

Имея в виду проводимое в дальнейшем обсуждение, мы должны признать, что при представлении уравнений механики сплошной среды с целью общего анализа при больших деформациях весьма трудным оказывается выбор эффективной системы обозначений, так как исследователь должен иметь дело со многими различными величинами. Используемые символы должны были бы выставить напоказ всю необходимую информацию, но сделать это в компактной форме, так, чтобы уравнения могли читаться сравнительно просто. Для эффективного использования обозначений весьма полезно разобраться в принимаемых при этом условиях, и с этой целью мы даем здесь краткий обзор некоторых основных фактов и соглашений, используемых в системе наших обозначений.

При проведении нашего анализа мы рассматриваем движение тела в фиксированной (неподвижной) системе декартовых координат, как это и показано на рис. 6.4. Все кинематические и статические переменные измеряются именно в этой системе координат, и во всех случаях нашего описания мы используем тензорные обозначения.

Координаты некоторой, условно выбранной точки тела P в момент времени $t = 0$, равны ${}^0x_1, {}^0x_2, {}^0x_3$; в момент времени t они равны ${}^tx_1, {}^tx_2, {}^tx_3$, а в момент времени $t + \Delta t$ — ${}^{t+\Delta t}x_1, {}^{t+\Delta t}x_2, {}^{t+\Delta t}x_3$, где левые верхние индексы относятся к конфигурации данного тела, а нижние индексы — к координатным осям.

Обозначения для смещений тела подобны обозначениям для координат: в момент времени t смещения имеют вид ${}^tu_i, i = 1, 2, 3$, а в момент $t + \Delta t$ они равны ${}^{t+\Delta t}u_i, i = 1, 2, 3$. На этом основании мы имеем

$$\left. \begin{aligned} {}^tx_i &= {}^0x_i + {}^tu_i \\ {}^{t+\Delta t}x_i &= {}^0x_i + {}^{t+\Delta t}u_i \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.16)$$

Приросты смещений за время от t до $t + \Delta t$ обозначаются как

$$u_i = {}^{t+\Delta t}u_i - {}^tu_i; \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.17)$$

Во время движения тела его объем, площадь поверхности, массовая плотность, напряжения и деформации непрерывно изменяются. Мы обозначаем плотность, площадь и объем тела в моменты времени $0, t$ и $t + \Delta t$ символами ${}^0\rho, {}^t\rho, {}^{t+\Delta t}\rho; {}^0A, {}^tA, {}^{t+\Delta t}A$; и ${}^0V, {}^tV, {}^{t+\Delta t}V$ соответственно.

Учитывая, что конфигурация тела в момент $t + \Delta t$ неизвестна, мы будем относить приложенные силы, напряжения и деформации к некоторой известной равновесной конфигурации. По аналогии с обозначениями, используемыми для координат и смещений, левый верхний индекс указывает, в какой именно конфигурации находится данная величина (массовая сила, поверхностное натяжение, напряжение, и т. п.); кроме того, этот индекс указывает, по отношению к какой конфигурации данная величина измеряется. Например, компоненты поверхностных и массовых сил в момент времени $t + \Delta t$, но измеряемые в конфигурации 0 , имеют вид ${}^{t+\Delta t}{}_0f_i^S, {}^{t+\Delta t}{}_0f_i^B, i = 1, 2, 3$. Здесь мы встречаемся с исключением, гласящим, что если рассматриваемая величина находится в той же самой конфигурации, в какой она и измеряется, то левый нижний индекс может не применяться; например, для напряжений Коши мы имеем

$${}^{t+\Delta t}{}_{t+\Delta t}\tau_{ij} \equiv {}^{t+\Delta t}{}_{t+\Delta t}\tau_{ij}.$$

При формулировке уравнений, определяющих равновесие, нам нужно также рассматривать производные от смещений и координат. В наших обозначениях запятая обозначает дифференцирование по отношению к следующей за ней координате, а левый нижний

индекс, обозначающий время, указывает на ту конфигурацию, в которой эта координата измеряется; так, например, мы имеем

$${}^{t+\Delta t}_0 u_{i,j} = \frac{\partial^{t+\Delta t} u_i}{\partial x_j}$$

и

$${}^{0}_{t+\Delta t} x_{m,n} = \frac{\partial^0 x_m}{\partial^{t+\Delta t} x_n}. \quad (6.18)$$

Используя эти соглашения, мы получим представление о новых символах, когда они впервые нам встретятся.

6.2.2. Градиент деформаций, тензоры деформаций и напряжений

В предыдущем разделе мы упомянули о том, что при проведении анализа с большими деформациями необходимо уделять особое внимание тому факту, что конфигурация тела непрерывно изменяется. Это изменение конфигурации можно принимать в расчет элегантно, за счет введения вспомогательных масштабов измерения напряжений и деформаций. Цель введения таких масштабов состоит в том, чтобы выразить внутреннюю виртуальную работу в уравнении (6.13) в терминах интеграла, взятого по известному объему, а также чтобы иметь возможность провести в эффективной форме пошаговое разложение напряжений и деформаций. Существуют различные разновидности тензоров напряжений и деформаций, которые могли бы, в принципе, использоваться (см. [Malvern, 1969], [Fung, 1965], [Green, Zerna, 1954], а также [Hill, 1983]). Однако если целью является построение эффективной и всеобщей конечно-элементной процедуры решения, то нужно рассмотреть всего лишь небольшое число масштабов измерения напряжений и деформаций. В дальнейшем мы рассмотрим вначале движение тела общего вида и определим кинематические масштабы измерения этого движения. Затем мы введем надлежащие тензоры деформаций и соответствующие им тензоры напряжений. Позднее в данной главе эти тензоры будут использованы для того, чтобы вывести общую форму конечно-элементных уравнений с пошаговым приростом.

Рассмотрим тело, показанное на рис. 6.4, в условно выбранный момент времени t . Фундаментальный критерий измерения деформации данного тела задается с помощью *градиента деформаций*, определяемого как ¹⁾

$${}^t_0 \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^t x_1}{\partial^0 x_1} & \frac{\partial^t x_1}{\partial^0 x_2} & \frac{\partial^t x_1}{\partial^0 x_3} \\ \frac{\partial^t x_2}{\partial^0 x_1} & \frac{\partial^t x_2}{\partial^0 x_2} & \frac{\partial^t x_2}{\partial^0 x_3} \\ \frac{\partial^t x_3}{\partial^0 x_1} & \frac{\partial^t x_3}{\partial^0 x_2} & \frac{\partial^t x_3}{\partial^0 x_3} \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

или

$${}^t_0 \mathbf{X} = ({}_0 \nabla^t \mathbf{x}^T)^T, \quad (6.20)$$

где ${}_0 \nabla$ представляет собой оператор градиента,

$${}_0 \nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial^0 x_1} \\ \frac{\partial}{\partial^0 x_2} \\ \frac{\partial}{\partial^0 x_3} \end{bmatrix}; \quad {}^t \mathbf{x}^T = [{}^t x_1 \quad {}^t x_2 \quad {}^t x_3]. \quad (6.21)$$

Градиент деформаций описывает те растяжения и повороты, которые волокна данного материала испытали за время от момента 0 до момента t . А именно, пусть $d^0 \mathbf{x}$ будет дифференциалом материального волокна в момент времени 0; затем, пользуясь правилом

¹⁾ В других книгах градиент деформаций обозначается символом \mathbf{F} , однако в данном тексте мы используем обозначение ${}^t_0 \mathbf{X}$, так как этот символ более естественно указывает на дифференцирование координат ${}^t x_i$ по отношению к координатам ${}^0 x_j$.

цепочки при дифференцировании, найдем, что для материального волокна в момент времени t дифференциал выражается как

$$d^t \mathbf{x} = {}^t_0 \mathbf{X} d^0 \mathbf{x}. \quad (6.22)$$

Если вновь использовать цепное дифференцирование, то отсюда следует, что

$$d^0 \mathbf{x} = {}^0_t \mathbf{X} d^t \mathbf{x}, \quad (6.23)$$

где ${}^0_t \mathbf{X}$ — это обратный градиент деформаций. Из соотношений (6.22) и (6.23) получим

$$d^0 \mathbf{x} = ({}_t^0 \mathbf{X}) ({}_0^t \mathbf{X}) d^0 \mathbf{x} \quad (6.24)$$

и, следовательно (в силу того, что соотношение (6.24) должно оставаться справедливым для любой дифференциальной длины $d^0 \mathbf{x}$), мы получим

$${}_t^0 \mathbf{X} = ({}_0^t \mathbf{X})^{-1}. \quad (6.25)$$

Это значит, что обратный градиент деформаций ${}_t^0 \mathbf{X}$ является, фактически, обращением исходного градиента деформаций ${}_0^t \mathbf{X}$.

Приложением формулы (6.18) является определение массовой плотности ${}^t \rho$ данного тела в момент времени t , а именно

$${}^t \rho = \frac{{}_0 \rho}{\det({}_0^t \mathbf{X})}. \quad (6.26)$$

Это соотношение мы обосновываем и иллюстрируем на приводимых ниже примерах.

Пример 6.5: Требуется рассмотреть общий случай движения тела, показанного на рис. 6.4 и вывести формулу, согласно которой массовая плотность изменяется как функция определителя градиента деформаций,

$${}^t \rho = \frac{{}_0 \rho}{\det({}_0^t \mathbf{X})}.$$

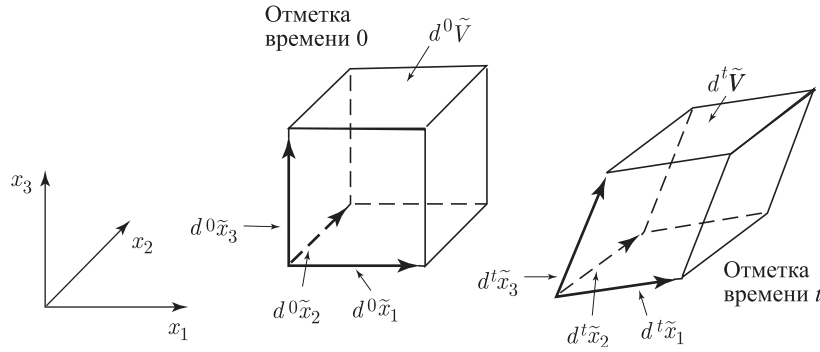


Рис. 6.5. Бесконечно малые объемы в моменты времени 0 и t

Любой бесконечно малый объем материала в момент времени 0 может быть представлен выражением (см. рис. 6.5)

$$d^0 \tilde{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ds_1; \quad d^0 \tilde{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ds_2; \quad d^0 \tilde{\mathbf{x}}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ds_3$$

и

$$d^0 \tilde{\mathbf{V}} = ds_1 ds_2 ds_3.$$

Используя формулу (6.22), после деформации мы имеем

$$d^t \tilde{\mathbf{x}}_i = {}^t_0 \mathbf{X} d^0 \tilde{\mathbf{x}}_i \quad i = 1, 2, 3,$$

где замечаем, что, конечно же, один и тот же градиент деформаций пригоден для всех материальных волокон вышеуказанного бесконечно малого объема, и мы получаем

$$d^t \tilde{\mathbf{V}} = (d^t \tilde{\mathbf{x}}_1 \times d^t \tilde{\mathbf{x}}_2) \cdot d^t \tilde{\mathbf{x}}_3 = (\det {}^t_0 \mathbf{X}) ds_1 ds_2 ds_3 = \det {}^t_0 \mathbf{X} d^0 \tilde{\mathbf{V}}.$$

Однако если предположить, что в процессе деформации не происходит потери массы, то получим

$${}^t\rho d^t\tilde{V} = {}^0\rho d^0\tilde{V}$$

и, следовательно,

$${}^t\rho = \frac{{}^0\rho}{\det {}^t_0\mathbf{X}}.$$

Пример 6.6: Рассмотрим элемент на рис. 6.6. Требуется вычислить градиент деформаций и массовую плотность, соответствующие конфигурации в момент времени t .

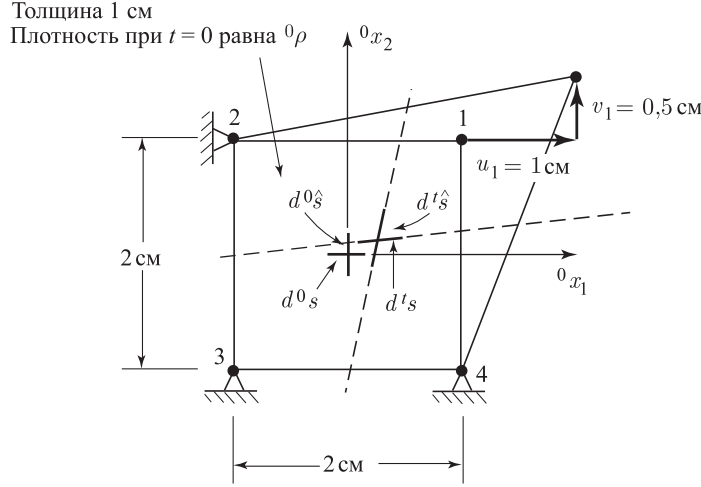


Рис. 6.6. Элемент с четырьмя узлами, подвергаемый большим деформациям

Функции интерполяции смещений для этого элемента были приведены на рис. 5.5. Учитывая, что оси ${}^0x_1, {}^0x_2$ соответствуют осям r, s , соответственно, мы имеем

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{4}(1 + {}^0x_1)(1 + {}^0x_2); & h_2 &= \frac{1}{4}(1 - {}^0x_1)(1 + {}^0x_2); \\ h_3 &= \frac{1}{4}(1 - {}^0x_1)(1 - {}^0x_2); & h_4 &= \frac{1}{4}(1 + {}^0x_1)(1 - {}^0x_2) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial {}^0x_1} &= \frac{1}{4}(1 + {}^0x_2); & \frac{\partial h_2}{\partial {}^0x_1} &= -\frac{1}{4}(1 + {}^0x_2); \\ \frac{\partial h_3}{\partial {}^0x_1} &= -\frac{1}{4}(1 - {}^0x_2); & \frac{\partial h_4}{\partial {}^0x_1} &= \frac{1}{4}(1 - {}^0x_2); \\ \frac{\partial h_1}{\partial {}^0x_2} &= \frac{1}{4}(1 + {}^0x_1); & \frac{\partial h_2}{\partial {}^0x_2} &= \frac{1}{4}(1 - {}^0x_1); \\ \frac{\partial h_3}{\partial {}^0x_2} &= -\frac{1}{4}(1 - {}^0x_1); & \frac{\partial h_4}{\partial {}^0x_2} &= -\frac{1}{4}(1 + {}^0x_1). \end{aligned}$$

Теперь мы используем выражение

$${}^t x_i = \sum_{k=1}^4 h_k {}^t x_i^k$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial {}^t x_i}{\partial {}^0 x_j} = \sum_{k=1}^4 \left(\frac{\partial h_k}{\partial {}^0 x_j} \right) {}^t x_i^k.$$

Координаты узловых точек в момент времени t равны

$$\begin{aligned} {}^t x_1^1 &= 2; & {}^t x_2^1 &= 1,5; & {}^t x_1^2 &= -1; & {}^t x_2^2 &= 1; \\ {}^t x_1^3 &= -1; & {}^t x_2^3 &= -1; & {}^t x_1^4 &= 1; & {}^t x_2^4 &= -1. \end{aligned}$$

Следовательно, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^t x_1}{\partial {}^0 x_1} &= \frac{1}{4} [(1 + {}^0 x_2)(2) - (1 + {}^0 x_2)(-1) - (1 - {}^0 x_2)(-1) + (1 - {}^0 x_2)(1)] = \\ &= \frac{1}{4} (5 + {}^0 x_2) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^t x_1}{\partial {}^0 x_2} &= \frac{1}{4} (1 + {}^0 x_1); & \frac{\partial {}^t x_2}{\partial {}^0 x_1} &= \frac{1}{8} (1 + {}^0 x_2); \\ \frac{\partial {}^t x_2}{\partial {}^0 x_2} &= \frac{1}{8} (9 + {}^0 x_1), \end{aligned}$$

так что градиент деформаций имеет вид

$${}_0^t \mathbf{X} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (5 + {}^0 x_2) & (1 + {}^0 x_1) \\ \frac{1}{2} (1 + {}^0 x_2) & \frac{1}{2} (9 + {}^0 x_1) \end{bmatrix}$$

и, если использовать формулу (6.26), то массовая плотность в деформированной конфигурации равна

$${}^t \rho = \frac{32 {}^0 \rho}{(5 + {}^0 x_2)(9 + {}^0 x_1) - (1 + {}^0 x_1)(1 + {}^0 x_2)}.$$

Градиент деформаций используется также для того, чтобы измерить натяжение материального волокна и изменение угла между соседними материальными волокнами, обусловленное деформацией. При этом расчете мы используем *правый тензор деформаций Коши–Грина*,

$${}_0^t \mathbf{C} = {}_0^t \mathbf{X}^T {}_0^t \mathbf{X}. \quad (6.27)$$

Мы замечаем, что в общем случае тензор ${}_0^t \mathbf{C}$ не равен левому тензору деформаций Коши–Грина

$${}_0^t \mathbf{B} = {}_0^t \mathbf{X} {}_0^t \mathbf{X}^T. \quad (6.28)$$

Пример 6.7: Натяжение ${}^t \lambda$ линейного элемента движущегося тела общего вида определяется, как ${}^t \lambda = d^t s / d^0 s$, где $d^0 s$ и $d^t s$ — это первоначальная и текущая длины линейного элемента, показанные на рис. 6.7. Требуется доказать, что

$${}^t \lambda = ({}^0 \mathbf{n}^T {}_0^t \mathbf{C} {}^0 \mathbf{n})^{1/2}, \quad (a)$$

где ${}^0 \mathbf{n}$ — это вектор направляющих косинусов линейного элемента в начальный момент времени. Кроме того, требуется доказать, что если рассматривать два линейных элемента, исходящих из одной и той же материальной точки, то угол ${}^t \theta$ между этими элементами в момент времени t определяется формулой

$$\cos {}^t \theta = \frac{{}^0 \mathbf{n}^T {}_0^t \mathbf{C} {}^0 \hat{\mathbf{n}}}{\widehat{{}^t \lambda} {}^t \lambda}, \quad (b)$$

где шапка обозначает второй линейный элемент (см. рис. 6.7).

В качестве примера применим формулы (a) и (b) к вычислению натяжений конкретных линейных элементов $d^0 s$ и $d^t \hat{s}$, показанных на рис. 6.6, и, кроме того, рассчитаем угловое искажение между ними.

Чтобы доказать справедливость формулы (a), следует учесть, что

$$(d^t s)^2 = d^t \mathbf{x}^T d^t \mathbf{x}; \quad d^t \mathbf{x} = {}_0^t \mathbf{X} d^0 \mathbf{x}$$

и, значит, используя выражение (6.27),

$$(d^t s)^2 = d^0 \mathbf{x}^T {}_0^t \mathbf{C} d^0 \mathbf{x}.$$

Следовательно,

$${}^t \lambda^2 = \frac{d^2 \mathbf{x}^T}{{d^0 s}^2} {}_0^t \mathbf{C} \frac{d^0 \mathbf{x}}{d^0 s}.$$

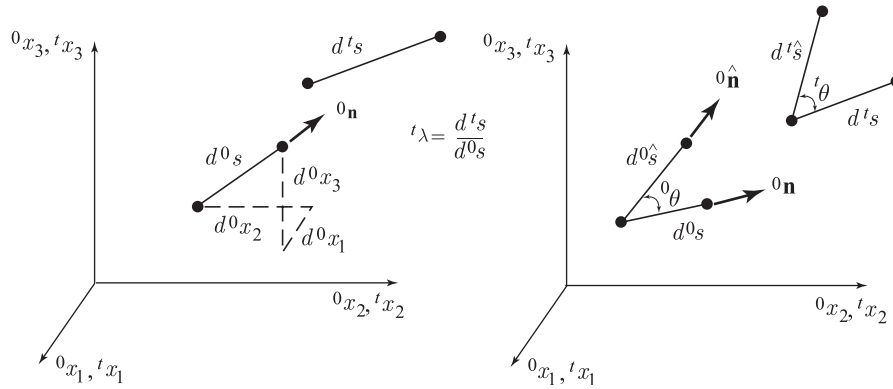


Рис. 6.7. Натяжение и поворот линейных элементов

Если учесть, что

$${}^0\mathbf{n} = \frac{d^0\mathbf{x}}{d^0s},$$

то получим

$${}^t\lambda = ({}^0\mathbf{n}^T {}^t\mathbf{C} {}^0\mathbf{n})^{1/2}.$$

Чтобы доказать справедливость формулы (b), используем формулу (2.50)

$$d^t\mathbf{x}^T d^t\hat{\mathbf{x}} = (d^t s)(d^t\hat{s}) \cos {}^t\theta,$$

откуда следует

$$\cos {}^t\theta = \frac{d^0\mathbf{x}^T {}^t\mathbf{C} {}^t\hat{\mathbf{x}} d^0\hat{\mathbf{x}}}{(d^t s)(d^t\hat{s})}. \quad (c)$$

Учитывая, что ${}^t\mathbf{X} \equiv {}^t\mathbf{X}$ (это градиент деформаций в месте расположения дифференциальных линейных элементов), из формулы (c) получим

$$\cos {}^t\theta = \frac{{}^0\mathbf{n}^T {}^t\mathbf{C} {}^0\hat{\mathbf{n}}}{{}^t\lambda {}^t\hat{\lambda}}.$$

Следует отметить, что, как показывают соотношения в формулах (a) и (b), при ${}^t\mathbf{C} = \mathbf{I}$ натяжения линейных элементов равны 1, а угол между этими элементами при движении тела не изменяется. Следовательно, когда тензор деформаций Коши–Грина равен единичной матрице, то движение могло бы быть, в пределе, — движением твердого тела.

Если мы применим формулы (a) и (b) к линейным элементам, показанным на рис. 6.6, то при ${}^0x_1 = 0$ и ${}^0x_2 = 0$ получим (см. пример 6.6)

$${}^t\mathbf{C} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 25,25 & 7,25 \\ 7,25 & 21,25 \end{bmatrix};$$

$${}^0\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^0\hat{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, пользуясь формулой (a), получим ${}^t\lambda = 1,256$; ${}^t\hat{\lambda} = 1,152$, а пользуясь формулой (b), получим также $\cos {}^t\theta = 0,313$, ${}^t\theta = 71,75^\circ$. Следовательно, угловое искажение между линейными элементами d^0s и $d^0\hat{s}$, обусловленное движением в период времени от 0 до t , составляет 18,25 градусов.

Самое важное свойство градиента деформаций состоит в том, что он всегда может быть представлен в форме произведения двух матриц, — симметричной матрицы натяжения ${}^t\mathbf{U}$ и ортогональной матрицы ${}^t\mathbf{R}$, соответствующей повороту, так что

$${}^0\mathbf{X} = {}^t\mathbf{R} {}^t\mathbf{U}. \quad (6.29)$$

В концептуальном плане мы можем интерпретировать соотношение (6.29) как означающее, что полная деформация реализуется путем наложения на тело вначале натяжения, а затем — поворота. Иначе говоря, мы могли бы записать (6.29) также и в форме ${}^t_0\mathbf{X} = {}^t_0\mathbf{R} {}^\tau_0\mathbf{U}$, где τ соответствует промежуточному (концептуальному) моменту времени. После этого нам становится ясно, что представление в форме произведения (разложение) является, фактически, применением правила цепочки, ${}^t_0\mathbf{X} = {}^t_\tau\mathbf{X} {}^\tau_0\mathbf{X}$, где ${}^t_\tau\mathbf{X} = {}^t_\tau\mathbf{R}$, а ${}^\tau_0\mathbf{X} = {}^\tau_0\mathbf{U}$. Однако, состояние, соответствующее моменту τ , является всего лишь концептуальным, а поэтому обычно используются обозначения, данные в (6.29).

Соотношение (6.29) называют *полярным разложением* градиента деформаций, и это свойство мы докажем и продемонстрируем на приводимых ниже примерах.

При последующем обсуждении соотношений механики сплошной среды, с целью упрощения обозначений мы зачастую не будем явно вводить верхние и нижние индексы t и 0 , но всегда будем подразумевать их наличие, а в тех случаях, когда имеют место сомнения, то и действительно вводить их. Например, соотношение (6.29) записывается как $\mathbf{X} = \mathbf{R}\mathbf{U}$.

Пример 6.8: Требуется показать, что градиент деформаций \mathbf{X} всегда может быть разложен с приведением к форме

$$\mathbf{X} = \mathbf{R}\mathbf{U}, \quad (\text{a})$$

где \mathbf{R} — ортогональная матрица (матрица поворота), а \mathbf{U} — матрица натяжения (симметричная).

Для доказательства справедливости соотношения (a) рассмотрим тензор деформаций Коши–Грина \mathbf{C} и представим этот тензор в его главных координатных осях. С этой целью решим задачу о собственных значениях

$$\mathbf{C}\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p}. \quad (\text{b})$$

Полное решение уравнения (b) может быть записано в виде (см. раздел 2.5)

$$\mathbf{C}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{C}',$$

где столбцы матрицы \mathbf{P} представляют собой собственные векторы матрицы \mathbf{C} , а \mathbf{C}' — это диагональная матрица, содержащая соответствующие собственные значения. Кроме того, мы имеем

$$\mathbf{P}^T\mathbf{C}\mathbf{P} = \mathbf{C}', \quad (\text{c})$$

а \mathbf{C}' представляет собой тензор деформаций Коши–Грина в его главных координатных осях. Подобным же образом получается и представление градиента деформаций в этой системе координат, а именно

$$\mathbf{X}' = \mathbf{P}^T\mathbf{X}\mathbf{P}, \quad (\text{d})$$

где мы отмечаем, что соотношения (c) и (d) представляют собой, фактически, тензорные преобразования перехода от первоначальной системы координат к новой (см. раздел 2.4).

Используя эти соотношения и соотношение $\mathbf{C} = \mathbf{X}^T\mathbf{X}$, мы получаем

$$\mathbf{C}' = \mathbf{X}'^T\mathbf{X}',$$

замечая при этом, что матрица

$$\mathbf{R}' = \mathbf{X}'(\mathbf{C}')^{-1/2}$$

представляет собой ортогональную матрицу; иначе говоря, $\mathbf{R}'^T\mathbf{R}' = \mathbf{I}$. Следовательно, мы можем написать

$$\mathbf{X}' = \mathbf{R}'\mathbf{U}', \quad (\text{e})$$

где

$$\mathbf{U}' = (\mathbf{C}')^{1/2},$$

а для вычисления \mathbf{U} мы используем положительные значения корней квадратных из диагональных элементов матрицы \mathbf{C}' . Следует использовать именно положительные значения, так как диагональные значения матрицы \mathbf{U}' символизируют значения натяжений в новой системе координат.

Соотношение (e) представляет собой разложение градиента деформаций \mathbf{X}' на произведение ортогональной матрицы \mathbf{R}' и матрицы натяжений \mathbf{U}' . Это разложение было

выполнено в главных осях матрицы \mathbf{C} , однако оно справедливо также в любой (допустимой) системе координат, так как градиент деформаций является тензором (см. раздел 2.4). Действительно, теперь мы можем определить \mathbf{R} и \mathbf{U} непосредственно исходя из разложения (а); то есть, получим

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \mathbf{P}\mathbf{R}'\mathbf{P}^T, \\ \mathbf{U} &= \mathbf{P}\mathbf{U}'\mathbf{P}^T,\end{aligned}$$

где мы использовали преобразование, обратное тому, которое было применено в (d).

Пример 6.9: Рассмотрим элемент с четырьмя узлами и его деформированный вариант, показанный на рис. 6.8. Требуется (а) вычислить градиент деформаций и его полярное разложение в момент времени t . (b) предположите, что движение в период времени от момента t до момента $t + \Delta t$ состоит только из поворота на 45 градусов, как твердого тела, против часовой стрелки. Требуется вычислить новый градиент деформаций.

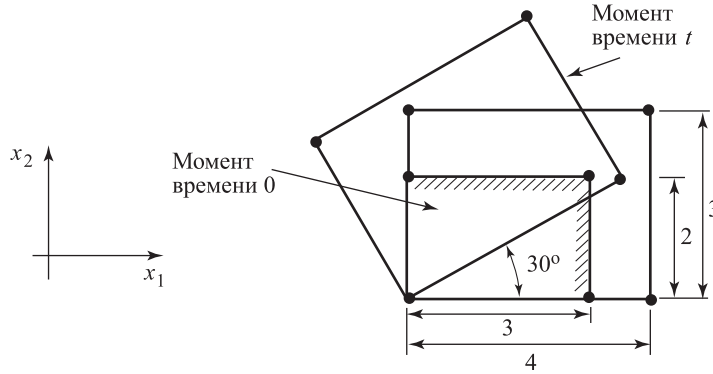


Рис. 6.8. Элемент с четырьмя узлами, подвергаемый натяжению и повороту

Чтобы вычислить градиент деформаций в момент времени t , нам будет удобно здесь использовать соотношение ${}^t_0\mathbf{X} = {}^\tau_0\mathbf{R}_0\mathbf{U}$, где гипотетическая (или концептуальная) конфигурация τ соответствует только натяжению волокон. Следовательно, получим

$${}^\tau_0\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}; \quad {}^\tau_0\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

и

$${}^t_0\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{3\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}.$$

Разумеется, тот же самый результат получится, если записать ${}^t x_i$ в терминах ${}^0 x_j$, $i = 1, 2; j = 1, 2$, а также использовать определение ${}^t_0\mathbf{X}$, данное в соотношении (6.19).

После этого давайте подвергнем наш элемент повороту против часовой стрелки на 45 градусов. Тогда градиент деформаций принимает форму

$${}^{t+\Delta t}_0\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{3\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{3}-2}{3} & \frac{-3+3\sqrt{3}}{4} \\ \frac{2\sqrt{3}+2}{3} & \frac{-3+3\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}.$$

Доказательство, данное в примере 6.8, указывает также и на то, как любой градиент деформаций может быть разложен в произведение согласно (6.29). Предположим, что градиент \mathbf{X} задан, и что мы желаем найти \mathbf{R} и \mathbf{U} ; тогда мы можем вычислить $\mathbf{C} = \mathbf{X}^T \mathbf{X} = \mathbf{U}^2$ и, используя (2.109), мы получаем (для $n = 2$ или 3) $\mathbf{U} = \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda} \mathbf{p}_i \mathbf{p}_i^T$, при $\mathbf{C} \mathbf{p}_i = \lambda_i \mathbf{p}_i$. Если задана величина \mathbf{U} , то мы получим \mathbf{R} из формулы $\mathbf{R} = \mathbf{X} \mathbf{U}^{-1}$.

Приведенные выше соотношения могут быть теперь использованы для расчета дополнительных кинематических соотношений, описывающих движение тела. Иначе говоря, можно доказать (см. упражнение 6.7), что мы имеем также

$$\mathbf{X} = \mathbf{V} \mathbf{R}, \quad (6.30)^1$$

где \mathbf{V} также представляет собой симметричную матрицу,

$$\mathbf{V} = \mathbf{R} \mathbf{U} \mathbf{R}^T. \quad (6.31)$$

Матрицу \mathbf{U} мы называем правой матрицей натяжения, а матрицу \mathbf{V} — левой матрицей натяжения.

Как показывает пример 6.8, мы имеем спектральное разложение \mathbf{U} ,

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}_L \mathbf{\Lambda} \mathbf{R}_L^T. \quad (6.32)$$

Физически $\mathbf{\Lambda}$ соответствует главным натяжениям, а \mathbf{R}_L содержит в себе направления этих натяжений, причем поворот по типу твердого тела здесь не отражен, так как этот поворот фигурирует в \mathbf{R} (в примере 6.8 матрица \mathbf{P} равна \mathbf{R}_L). Кроме того, мы имеем

$$\mathbf{V} = \mathbf{R}_E \mathbf{\Lambda} \mathbf{R}_E^T \quad (6.33)$$

и

$$\mathbf{R}_E = \mathbf{R} \mathbf{R}_L. \quad (6.34)$$

Отметим, что \mathbf{R}_E содержит базовые векторы главных натяжений в неподвижной системе координат x_i .

Желая продолжить наше описание движения материальных частиц рассматриваемого тела, мы рассмотрим теперь скорости изменения во времени величин, определения которых были даны выше. С этой целью мы даем теперь определения

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{\Omega}_R \mathbf{R}, \quad (6.35)$$

$$\dot{\mathbf{R}}_L = \mathbf{R}_K \mathbf{\Omega}_L, \quad (6.36)$$

$$\dot{\mathbf{R}}_E = \mathbf{R}_E \mathbf{\Omega}_E, \quad (6.37)$$

где $\mathbf{\Omega}_R$, $\mathbf{\Omega}_L$ и $\mathbf{\Omega}_E$ — это кососимметричные тензоры спина, причем ясно, что при использовании (6.34) получим

$$\mathbf{\Omega}_R = \mathbf{R}_E (\mathbf{\Omega}_E - \mathbf{\Omega}_L) \mathbf{R}_E^T. \quad (6.38)$$

Градиент скорости \mathbf{L} определяется как градиент поля скоростей относительно текущего положения ${}^t x_j$ материальных частиц,

$$\mathbf{L} = \left[\frac{\partial {}^t \dot{u}_i}{\partial {}^t x_j} \right], \quad (6.39)$$

или

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{X}} \mathbf{X}^{-1}. \quad (6.40)$$

Симметричная часть \mathbf{L} — это *тензор скоростей деформации* \mathbf{D} (называемый также тензором натяжений), а кососимметричная часть — это *тензор спина* \mathbf{W} (называемый также тензором завихренности). Отсюда следует, что

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W}. \quad (6.41)$$

Воспользовавшись полярным разложением \mathbf{X} , из уравнения (6.40) получим

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \mathbf{R} (\dot{\mathbf{U}} \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1} \dot{\mathbf{U}}) \mathbf{R}^T, \quad (6.42)$$

¹⁾ Отметим, что, учитывая возможность записать (6.30) в форме ${}^t_0 \mathbf{X} = {}^t_\tau \mathbf{V}_0^T \mathbf{R}$, то концептуально можно представить себе, что волокна вначале поворачиваются, а потом натягиваются (в противоположность концептуальной интерпретации соотношения (6.29)).

$$\mathbf{W} = \mathbf{\Omega}_R + \frac{1}{2} \mathbf{R}(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} - \mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}})\mathbf{R}^T. \quad (6.43)$$

Подставляя выражение для \mathbf{U} из (6.32), мы можем написать

$$\mathbf{D} = \mathbf{R}_E \mathbf{D}_E \mathbf{R}_E^T, \quad (6.44)$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{R}_E \mathbf{W}_E \mathbf{R}_E^T, \quad (6.45)$$

где

$$\mathbf{D}_E = \dot{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{\Lambda}^{-1} + \frac{1}{2} (\mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{\Omega}_L \mathbf{\Lambda} - \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Omega}_L \mathbf{\Lambda}^{-1}), \quad (6.46)$$

$$\mathbf{W}_E = \mathbf{\Omega}_E - \frac{1}{2} (\mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{\Omega}_L \mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Omega}_L \mathbf{\Lambda}^{-1}). \quad (6.47)$$

Следовательно, для элементов, входящих в $\dot{\mathbf{\Lambda}}$, получим

$$[\dot{\mathbf{\Lambda}}]_{\alpha\alpha} = \lambda_\alpha [\mathbf{D}_E]_{\alpha\beta} \quad \text{без суммирования по } \alpha, \quad (6.48)$$

где λ_α — это натяжения, а для элементов, входящих в $\mathbf{\Omega}_L$ и $\mathbf{\Omega}_E$, предполагая, что $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$, получим

$$[\mathbf{\Omega}_L]_{\alpha\beta} = \frac{2\lambda_\beta\lambda_\alpha}{\lambda_\beta^2 - \lambda_\alpha^2} [\mathbf{D}_E]_{\alpha\beta}, \quad (6.49)$$

$$[\mathbf{\Omega}_E]_{\alpha\beta} = [\mathbf{W}_E]_{\alpha\beta} + \frac{\lambda_\beta^2 + \lambda_\alpha^2}{\lambda_\beta^2 - \lambda_\alpha^2} [\mathbf{D}_E]_{\alpha\beta}. \quad (6.50)$$

Заметим, что \mathbf{D}_E и \mathbf{W}_E — это тензоры скоростей деформации и спина, определяемые в главных осях деформации, в момент времени t . Следовательно, если представить тензоры скоростей деформации и спина в базисе, заданном с помощью \mathbf{R}_E , то мы получим соотношения, которые могут быть непосредственно использованы для вычисления компонентов $\dot{\mathbf{\Lambda}}$, $\mathbf{\Omega}_L$ и $\mathbf{\Omega}_E$.

Теперь мы хотели бы дать определения тех тензоров деформаций, которые оказываются ценными при конечно-элементном анализе. Тензор деформаций Грина–Лагранжа ${}^t_0\epsilon$ определяется как

$${}^t_0\epsilon = {}^t_0\mathbf{R}_L \left[\frac{1}{2} ({}^t\mathbf{\Lambda}^2 - \mathbf{I}) \right] {}^t_0\mathbf{R}_L^T. \quad (6.51)$$

Тензор деформаций Генцки (или логарифмический) определяется, как

$${}^t_0\mathbf{E}^H = {}^t_0\mathbf{R}_L (\ln {}^t\mathbf{\Lambda}) {}^t_0\mathbf{R}_L^T. \quad (6.52)$$

Отметим, что поскольку ${}^t_0\mathbf{R}$ не включается в определения (6.51) и (6.52), то оба тензора деформаций не зависят от твердотельных движений частиц.

Тензор деформаций Грина–Лагранжа часто записывается в терминах правого тензора натяжений ${}^t_0\mathbf{U}$; это значит, что, используя (6.51), мы получим

$$\begin{aligned} {}^t_0\epsilon &= \frac{1}{2} [({}^t_0\mathbf{R}_L {}^t\mathbf{\Lambda} {}^t_0\mathbf{R}_L^T)({}^t_0\mathbf{R}_L {}^t\mathbf{\Lambda} {}^t_0\mathbf{R}_L^T) - \mathbf{I}] = \\ &= \frac{1}{2} ({}^t_0\mathbf{U} {}^t_0\mathbf{U} - \mathbf{I}). \end{aligned} \quad (6.53)$$

Кроме того, мы можем записать тензор деформаций Грина–Лагранжа в терминах тензора деформаций Коши–Грина,

$$\begin{aligned} {}^t_0\epsilon &= \frac{1}{2} ({}^t_0\mathbf{U} {}^t_0\mathbf{R}^T {}^t_0\mathbf{R} {}^t_0\mathbf{U} - \mathbf{I}) = \\ &= \frac{1}{2} ({}^t_0\mathbf{X}^T {}^t_0\mathbf{X} - \mathbf{I}) = \\ &= \frac{1}{2} ({}^t_0\mathbf{C} - \mathbf{I}). \end{aligned} \quad (6.54)$$

Если, к тому же, выразить компоненты этого тензора в терминах смещений (т. е. используя (6.16) и (6.19) для подстановки в (6.54)), то получим

$${}^t_0\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}^t_0u_{i,j} + {}^t_0u_{j,i} + {}^t_0u_{k,i} {}^t_0u_{k,j}). \quad (6.55)$$

Необходимо отметить, что в определении тензора деформаций Грина–Лагранжа все производные берутся по отношению к начальным координатам материальных частиц. По этой

причине мы говорим, что тензор деформаций определяется по отношению к начальным координатам рассматриваемого тела. Отметим также, что, хотя в выражении (6.55) фигурируют только члены с производными смещений, вплоть до квадратичных, все же этот тензор напряжений является полным; иначе говоря, мы не пренебрегли никакими членами высших порядков.

Ясно, что тензоры деформаций Грина–Лагранжа и Генцки имеют общую форму

$$\mathbf{E}_g = \mathbf{R}_L g(\mathbf{\Lambda}) \mathbf{R}_L^T, \quad (6.56)$$

где $g(\mathbf{\Lambda}) = \text{diag}[g(\lambda_i)]$. Следовательно, скорость изменения тензоров деформаций может быть записана как

$$\dot{\mathbf{E}}_g = \mathbf{R}_L \dot{\mathbf{E}}_L \mathbf{R}_L^T, \quad (6.57)$$

где мы имеем

$$\dot{\mathbf{E}}_L = \dot{\mathbf{\Lambda}} g'(\mathbf{\Lambda}) + \mathbf{\Omega}_L g(\mathbf{\Lambda}) - g(\mathbf{\Lambda}) \mathbf{\Omega}_L. \quad (6.58)$$

Раскрывая выражения в этом уравнении, мы можем представить компоненты \mathbf{E}_L в форме

$$[\dot{\mathbf{E}}_L]_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} [\mathbf{D}_E]_{\alpha\beta}, \quad (6.59)$$

где для тензора деформаций Грина–Лагранжа имеем

$$\gamma_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha \lambda_\beta, \quad (6.60)$$

а для тензора деформаций Генцки —

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{если } \lambda_\alpha = \lambda_\beta, \\ \frac{2\lambda_\alpha \lambda_\beta}{\lambda_\beta^2 - \lambda_\alpha^2} \ln \frac{\lambda_\beta}{\lambda_\alpha} & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (6.61)$$

Используя (6.57) и (6.59), мы можем теперь установить важное соотношение, связывающее скорость изменения во времени тензора деформаций Грина–Лагранжа ${}^t_0\dot{\mathbf{E}}$ и тензора скоростей деформаций ${}^t\mathbf{D}$. Используя (6.57), (6.59), (6.60) и (6.44), мы получим

$${}^t_0\mathbf{R}_L^T {}^t_0\dot{\mathbf{E}} {}^t_0\mathbf{R}_L = {}^t\mathbf{\Lambda}_0 {}^t\mathbf{R}_E^T {}^t\mathbf{D}_0 {}^t\mathbf{R}_E {}^t\mathbf{\Lambda} \quad (6.62)$$

и, следовательно, с помощью (6.32) и (6.34) получим

$$\begin{aligned} {}^t_0\dot{\mathbf{E}} &= {}^t_0\mathbf{X}^T {}^t\mathbf{D}_0 {}^t\mathbf{X}, \\ {}^t\mathbf{D} &= {}^0_0\mathbf{X}^T {}^t_0\dot{\mathbf{E}} {}^0_0\mathbf{X}, \end{aligned} \quad (6.63)$$

или в компонентной форме (используя верхние и нижние индексы)

$$\begin{aligned} {}^t_0\dot{\epsilon}_{ij} &= {}^t_0x_{m,i} {}^t_0x_{n,j} {}^tD_{mn}, \\ {}^tD_{mn} &= {}^0_0x_{i,m} {}^0_0x_{j,n} {}^t_0\dot{\epsilon}_{ij}. \end{aligned} \quad (6.64)$$

Если не стараться проникнуть в суть проблемы, то мы можем получить тот же результат путем простого дифференцирования тензора деформаций Грина–Лагранжа по времени,

$${}^t_0\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} ({}^t_0\dot{\mathbf{X}}^T {}^t_0\mathbf{X} + {}^t_0\mathbf{X}^T {}^t_0\dot{\mathbf{X}}). \quad (6.65)$$

Используя (6.40) и (6.41) для подстановок в (6.65), мы непосредственно получим (6.63). Мы демонстрируем этот вывод для виртуальных приращений смещений, или же для вариаций текущих значений времени, на приводимом ниже примере.

Пример 6.10: Рассмотрим некое тело в его деформированной конфигурации, в момент времени t (см. рис. 6.9). Текущие координаты материальных частиц тела равны ${}^t x_i$, $i = 1, 2, 3$, а текущие значения смещений равны ${}^t u_i = {}^t x_i - {}^0 x_i$.

Предположим, что наложено поле виртуальных смещений, обозначаемых нами как δu_i (см. рис. 6.9). Это поле виртуальных смещений может рассматриваться как вариация текущих смещений; следовательно, мы можем написать $\delta u_i \equiv \delta^t u_i$. Однако вариация текущих смещений должна соответствовать вариации текущих компонентов тензора деформаций Грина–Лагранжа, $\delta_0^t \epsilon_{ij}$ и также малому тензору деформаций $\delta^t e_{mn}$, относящихся к текущей конфигурации. Вычислить компоненты $\delta_0^t \epsilon_{ij}$ и показать, что

$$\delta_0^t \epsilon_{ij} = {}^t_0x_{m,i} {}^t_0x_{n,j} \delta^t e_{mn}, \quad (a)$$

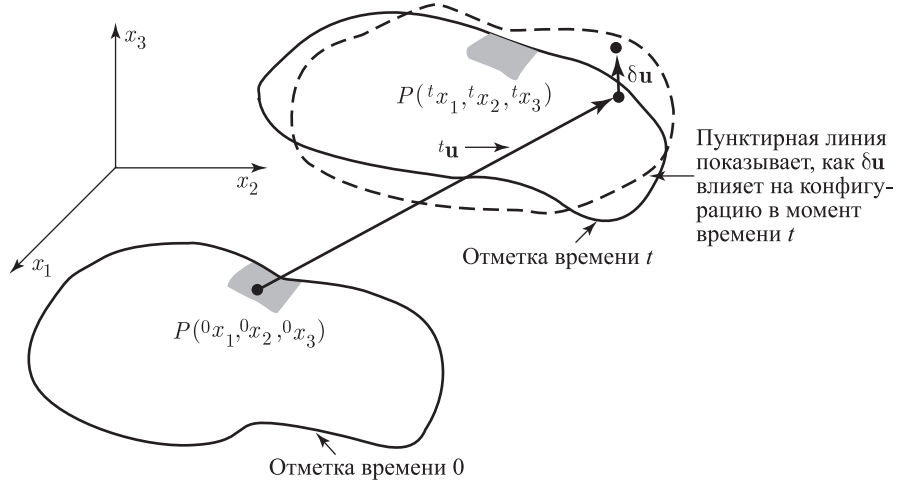


Рис. 6.9. Тело в момент времени t под воздействием поля виртуальных перемещений, заданных посредством $\delta \mathbf{u}$. Отметим, что $\delta \mathbf{u}$ является функцией ${}^t x_i$, $i = 1, 2, 3$, и мы можем представить себе δu_i как вариацию по отношению к ${}^t u_i$

где

$$\delta_t e_{mn} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_m}{\partial {}^t x_n} + \frac{\partial \delta u_n}{\partial {}^t x_m} \right).$$

Воспользуемся определением тензора деформаций Грина–Лагранжа, данным в (6.54), чтобы получить

$$\delta_0^t \epsilon = \frac{1}{2} [(\delta_0^t \mathbf{X}^T)({}_0^t \mathbf{X}) + ({}_0^t \mathbf{X}^T)(\delta_0^t \mathbf{X})]. \quad (\text{b})$$

Дадим определение $\delta_t \mathbf{u}$ в форме

$$\delta_t \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \delta u_t}{\partial {}^t x_1} & \frac{\partial \delta u_t}{\partial {}^t x_2} & \cdots \\ \frac{\partial \delta u_2}{\partial {}^t x_1} & \frac{\partial \delta u_2}{\partial {}^t x_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

и тогда

$$\delta_0^t \mathbf{X} = \delta_t \mathbf{u}_0^t \mathbf{X},$$

а следовательно, выражение (b) может быть записано как

$$\begin{aligned} \delta_0^t \epsilon &= \frac{1}{2} [{}_0^t \mathbf{X}^T (\delta_t \mathbf{u})^T {}_0^t \mathbf{X} + {}_0^t \mathbf{X}^T (\delta_t \mathbf{u})_0^t \mathbf{X}] = \\ &= {}_0^t \mathbf{X}^T \left\{ \frac{1}{2} [(\delta_t \mathbf{u})^T + \delta_t \mathbf{u}] \right\} {}_0^t \mathbf{X} = \\ &= {}_0^t \mathbf{X}^T \delta_t \mathbf{e}_0^t \mathbf{X}, \end{aligned}$$

т. е. как соотношение (a) в матричной форме.

Отметим тот факт, что невозможно установить простую, представимую в замкнутой форме взаимосвязь между скоростью изменения во времени тензора деформаций Генцки и тензором скоростей деформации (вследствие сложности выражения в (6.61)). Масштабом Генцки для измерения деформаций мы воспользуемся только позднее, при проведении исследования больших неупругих деформаций, и тогда надлежащие соотношения будут определены по данным о сопряженности работ (см. раздел 6.4.4).

Однако мы будем часто использовать тензор деформаций Грина–Лагранжа и сейчас хотели бы определить тот тензор напряжений, который надлежит применять вместе с этим

тензором деформаций. Чтобы дать соответствующий масштаб измерения напряжений, мы будем использовать *второй тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа* ${}^t\mathbf{S}$, который сопряжен по работе с тензором деформаций Грина–Лагранжа ¹⁾.

Рассмотрим интенсивность напряжения в расчете на единицу характерного объема, ${}^t\mathbf{J}^t\boldsymbol{\tau} \cdot {}^t\mathbf{D}$ ²⁾, где ${}^t\boldsymbol{\tau}$ — это тензор напряжений Коши и ${}^tJ = \det {}^t\mathbf{X}$. Тогда второй тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа ${}^t\mathbf{S}$ определяется формулой

$${}^tJ^t\boldsymbol{\tau} \cdot {}^t\mathbf{D} = {}^1\mathbf{S} \cdot {}^t\dot{\mathbf{e}}. \quad (6.66)$$

Чтобы найти явное выражение для ${}^t\mathbf{S}$, сделаем подстановку из (6.63), в результате чего получим

$${}^tJ^t\boldsymbol{\tau} \cdot {}^t\mathbf{D} = {}^t\mathbf{S} \cdot ({}^t\mathbf{X}^T {}^t\mathbf{D} {}^t\mathbf{X}). \quad (6.67)$$

Учитывая, что это соотношение должно оставаться справедливым при любом ${}^t\mathbf{D}$, мы получаем ³⁾

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{S} &= \frac{{}^0\rho}{{}^t\rho} {}^0\mathbf{X}^T {}^t\boldsymbol{\tau} {}^0\mathbf{X}, \\ {}^t\boldsymbol{\tau} &= \frac{{}^t\rho}{{}^0\rho} {}^t\mathbf{X} {}^t\mathbf{S} {}^t\mathbf{X}^T, \end{aligned} \quad (6.68)$$

или, в компонентной форме,

$$\begin{aligned} {}^tS_{ij} &= \frac{{}^0\rho}{{}^t\rho} {}^0x_{i,m} {}^0x_{j,n} {}^t\tau_{mn}, \\ {}^t\tau_{mn} &= \frac{{}^t\rho}{{}^0\rho} {}^tx_{m,i} {}^tx_{n,j} {}^tS_{ij}. \end{aligned} \quad (6.69)$$

Физическая природа второго тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа подвергалась многочисленным обсуждениям. Однако, хотя и возможно, как это обсуждается в следующем примере, связать преобразование тензора напряжений Коши, заданного согласно (6.68), с некоторыми геометрическими аргументами, следует все же признать, что вторые напряжения Пиолы–Кирхгофа не имеют большого физического смысла, и на практике должны вычисляться напряжения Коши.

Пример 6.11:

На рис. 6.10 показано некоторое тело в конфигурациях, соответствующих моментам времени 0 и t . Пусть $d^t\mathbf{T}$ есть реальная сила, действующая на площадь поверхности d^tS в конфигурации для момента t , и давайте определим некую (фиктивную) силу

$$d^0\mathbf{T} = {}^0\mathbf{X} d^t\mathbf{T}; \quad {}^0\mathbf{X} = \left[\frac{\partial {}^0x_i}{\partial {}^tx_j} \right], \quad (a)$$

которая действует на площадь поверхности d^0S , где d^0S со временем превращается в d^tS , а ${}^0\mathbf{X}$ представляет собой обращение градиента деформаций, ${}^0\mathbf{X} = {}^t\mathbf{X}^{-1}$. Требуется показать, что вторые напряжения Пиолы–Кирхгофа, измеренные в первоначальной конфигурации, представляют собой компоненты напряжений, соответствующие силе $d^0\mathbf{T}$.

Пусть ${}^0\mathbf{n}$ и ${}^t\mathbf{n}$ будут единичными нормальными к площадям поверхностей d^0S и d^tS соответственно. Равновесие сил (для клина ABC на рис. 6.10) в конфигурации для момента t требует, чтобы было

$$d^t\mathbf{T} = {}^t\boldsymbol{\tau}^T {}^t\mathbf{n} d^tS, \quad (b)$$

¹⁾ В данной книге интенсивно используется второй тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа ${}^t\mathbf{S}$, определяемый формулами (6.66) и (6.68). Первый тензор Пиолы–Кирхгофа задается выражением ${}^t\mathbf{S}_0^t\mathbf{X}^T$ (или его транспонированным вариантом). Кроме того, мы имеем также тензор напряжений Кирхгофа ${}^t\mathbf{J}^t\boldsymbol{\tau}$ (см., например, [Malvern, 1969]).

²⁾ Отметим, что здесь и в дальнейшем мы используем такое обозначение: если \mathbf{a} и \mathbf{b} — это тензоры второго порядка, то $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}_{ij}\mathbf{b}_{ij}$ (суммирование по всем i и j , см. (2.79)).

³⁾ Здесь мы используем соотношение ${}^t\mathbf{S} \cdot ({}^t\mathbf{X}^T {}^t\mathbf{D} {}^t\mathbf{X}) = ({}^t\mathbf{X} {}^t\mathbf{S} {}^t\mathbf{X}^T) \cdot {}^t\mathbf{D}$, как это можно доказать, если записать матрицы в компонентной форме (см. упражнение 2.14).

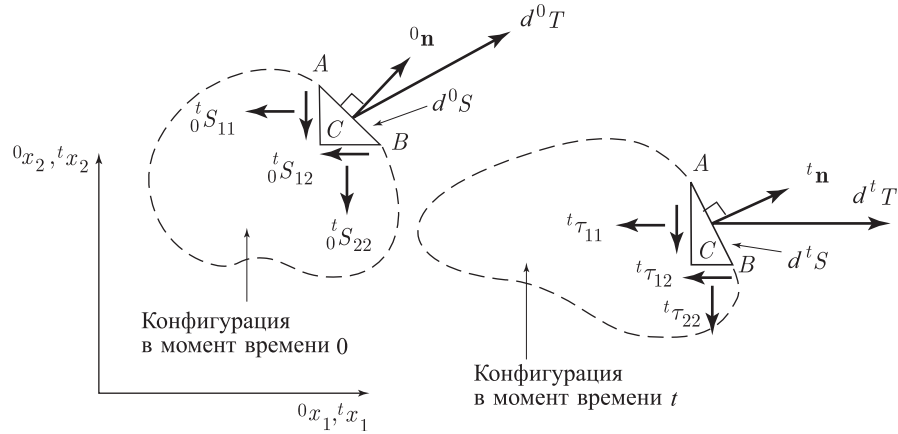


Рис. 6.10. Второе напряжение Пиолы-Кирхгофа и напряжение Коши в процессе двумерного воздействия

и, аналогично этому, в конфигурации для момента 0 имеем

$$d^0 \mathbf{T} = {}^0 \mathbf{S}^T {}^0 \mathbf{n} d^0 S. \quad (c)$$

Каждое из соотношений (b) и (c) мы будем называть *формулой Коши*. Однако можно показать, что существует следующая кинематическая взаимосвязь:

$${}^t \mathbf{n} d^t S = \frac{{}^0 \rho}{{}^t \rho} {}^0 \mathbf{X}^T {}^0 \mathbf{n} d^0 S. \quad (d)$$

Это соотношение известно как *формула Нансона*. Теперь, используя формулы (a)–(d), мы получим

$${}^0 \mathbf{S}^T {}^0 \mathbf{n} d^0 S = {}^0 \mathbf{X}^T {}^t \boldsymbol{\tau}^T \frac{{}^0 \rho}{{}^t \rho} {}^0 \mathbf{X}^T {}^0 \mathbf{n} d^0 S,$$

или

$$\left({}^0 \mathbf{S}^T - \frac{{}^0 \rho}{{}^t \rho} {}^0 \mathbf{X}^T {}^t \boldsymbol{\tau}^T {}^0 \mathbf{X}^T \right) {}^0 \mathbf{n} d^0 S = 0.$$

Однако это последнее соотношение должно оставаться справедливым для любой площади поверхности, а также для любой «внутренней площади поверхности», которая может быть создана посредством осуществления разреза в данном теле. Следовательно, нормаль ${}^0 \mathbf{n}$ является произвольной и может быть выбрана так, чтобы быть равной, последовательно, единичным координатным векторам. Отсюда следует, что

$${}^t \mathbf{S} = \frac{{}^0 \rho}{{}^t \rho} {}^0 \mathbf{X}^T {}^t \boldsymbol{\tau} {}^0 \mathbf{X},$$

где мы воспользовались свойством симметричности матриц ${}^t \boldsymbol{\tau}$ и ${}^t \mathbf{S}$.

В заключение мы можем дать интерпретацию силы, определяемой согласно формуле (a). Мы замечаем, что сила $d^0 \mathbf{T}$, уравновешиваемая на клине ABC вторыми напряжениями Пиолы-Кирхгофа, связана с истинной силой $d^t \mathbf{T}$ таким же образом, как происходит деформация первоначального волокна в $d^0 S$,

$$d^0 \mathbf{x} = {}^0 \mathbf{X} d^t \mathbf{x}.$$

Поэтому можно сказать, что если мы используем формулу (a) для получения $d^0 \mathbf{T}$, то сила $d^t \mathbf{T}$ «натягивается и поворачивается» точно таким же образом, как $d^t \mathbf{x}$ натягивается и поворачивается для получения $d^0 \mathbf{x}$.

Отметим, что компоненты тензора деформаций Грина–Лагранжа и второго тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа не изменяются, когда материал подвергается только переносу как твердое тело, потому что такое движение не изменяет градиента деформаций.

Определение второго тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа подразумевает также, что компоненты не изменяются, если рассматриваемое тело испытывает поворот как твердое тело. Учитывая большую важность инвариантности компонентов тензора деформаций Грина–Лагранжа и компонентов второго тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа по отношению к поворотам конфигурации, как твердого тела, мы рассматриваем эти свойства в приводимых ниже четырех примерах.

Разумеется, инвариантность компонентов тензора деформаций Грина–Лагранжа по отношению к поворотам конфигурации, как твердого тела, следует уже из формулы (6.53), если учесть, что, как мы уже указывали на это ранее, поворот волокон как твердого тела, отраженный в матрице ${}^t_0\mathbf{R}$, не включен в определение согласно (6.53). Чтобы получить более углубленное представление о данном предмете, рассмотрим следующий пример.

Пример 6.12: Требуется показать, что компоненты тензора деформаций Грина–Лагранжа обладают инвариантностью по отношению к поворотам материала как твердого тела.

Пусть компоненты тензора деформаций Грина–Лагранжа в момент времени t задаются выражением

$${}^t_0\epsilon = \frac{1}{2} ({}^t_0\mathbf{X}^T {}^t_0\mathbf{X} - \mathbf{I}), \quad (\text{a})$$

где ${}^t_0\mathbf{X}$ — это градиент деформаций в момент времени t , соответствующий неподвижной системе координат x_i , $i = 1, 2, 3$.

Предположим, что материал испытывает поворот как твердое тело, за время от момента t до момента $t + \Delta t$. Тогда в соответствии с неподвижной системой координат x_i мы имеем

$${}^{t+\Delta t}_0\mathbf{X} = \mathbf{R} {}^t_0\mathbf{X}, \quad (\text{b})$$

где \mathbf{R} соответствует повороту, и после этого

$${}^{t+\Delta t}_0\epsilon = \frac{1}{2} ({}^{t+\Delta t}_0\mathbf{X}^T {}^{t+\Delta t}_0\mathbf{X} - \mathbf{I}). \quad (\text{c})$$

Если подставить (b) в (c) и сравнить получаемый результат с (a), то получим

$${}^{t+\Delta t}_0\epsilon = {}^t_0\epsilon.$$

Пример 6.13: Элемент с четырьмя узлами подвергается натяжению вплоть до момента времени t , а затем испытывает, без искажений, большой поворот, как твердое тело, от момента t до момента $t + \Delta t$, как это и показано на рис. 6.11. Требуется показать в явной форме, что для этого элемента компоненты тензора деформаций в момент t и в момент $t + \Delta t$ в точности равны между собой.

Компоненты тензора деформаций Грина–Лагранжа в момент t могут быть вычислены путем осмотра, с использованием (6.51),

$${}^t_0\epsilon_{22} = 0; \quad {}^t_0\epsilon_{12} = {}^t_0\epsilon_{21} = 0$$

и

$$\begin{aligned} {}^t_0\epsilon_{11} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{3}{2} \right)^2 - 1 \right] = \\ &= \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$${}^t_0\epsilon = \begin{bmatrix} 5/8 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

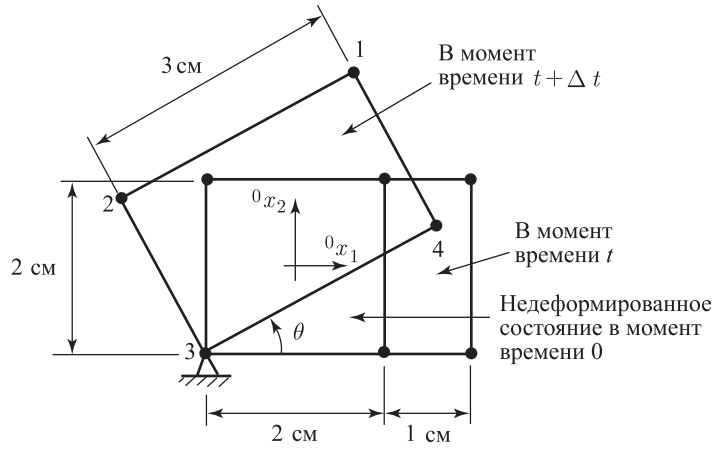


Рис. 6.11. Элемент, подвергаемый повороту как большое твердое тело, после начального натяжения

В альтернативном варианте мы можем использовать (6.54), причем сначала мы вычисляем, как в примере 6.6, градиент деформаций:

$${}^t_0\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$${}^t_0\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 9/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и, как и прежде,

$${}^t_0\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} 5/8 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{a})$$

После того, как элемент испытает поворот как твердое тело, координаты его узловых точек становятся такими:

Узел	${}^{t+\Delta t}x_1$	${}^{t+\Delta t}x_2$
1	$3 \cos \theta - 1 - 2 \sin \theta$	$3 \sin \theta - 1 + 2 \cos \theta$
2	$-1 - 2 \sin \theta$	$2 \cos \theta - 1$
3	-1	-1
4	$3 \cos \theta - 1$	$3 \sin \theta - 1$

Если вновь использовать для вычисления градиента деформаций процедуру, применявшуюся в примере 6.6, то мы получим

$${}^{t+\Delta t}_0\mathbf{X} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1+{}^0x_2)(3\cos\theta-1-2\sin\theta) & (1+{}^0x_1)(3\cos\theta-1-2\sin\theta) \\ -(1+{}^0x_2)(-1-2\sin\theta) & +(1-{}^0x_1)(-1-2\sin\theta) \\ -(1-{}^0x_2)(-1) & -(1-{}^0x_1)(-1) \\ +(1-{}^0x_2)(3\cos\theta-1) & -(1+{}^0x_1)(3\cos\theta-1) \\ \hline (1+{}^0x_2)(3\sin\theta-1+2\cos\theta) & (1+{}^0x_1)(3\sin\theta-1+2\cos\theta) \\ -(1+{}^0x_2)(2\cos\theta-1) & +(1-{}^0x_1)(2\cos\theta-1) \\ -(1-{}^0x_2)(-1) & -(1-{}^0x_1)(-1) \\ +(1-{}^0x_2)(3\sin\theta-1) & -(1+{}^0x_1)(3\sin\theta-1) \end{bmatrix} \quad (b)$$

или

$${}^{t+\Delta t}_0\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\cos\theta & -\sin\theta \\ \frac{3}{2}\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \quad (c)$$

Обращаясь к (6.29), отметим, что этот градиент деформаций может быть записан как

$${}^{t+\Delta t}_0\mathbf{X} = {}^{t+\Delta t}_t\mathbf{R} \quad {}^t_0\mathbf{U}, \quad (d)$$

где

$${}^{t+\Delta t}_t\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}; \quad {}^t_0\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Приведенное разложение безусловно соответствует истинной физической ситуации, когда мы измеряем натяжение в направлении 0x_1 , а затем оцениваем поворот. Поэтому вместо проведения всех вычислений, приводящих к (b), а затем — к (c), мы могли бы определить ${}^{t+\Delta t}_0\mathbf{X}$, используя формулу (d)!

Используя (d) и (6.27), получаем

$${}^{t+\Delta t}_0\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 9/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и, следовательно, с помощью (6.54) получаем

$${}^{t+\Delta t}_0\epsilon = \begin{bmatrix} 5/8 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (e)$$

Как видим, выражение ${}^t_0\epsilon$ в (a) равно выражению ${}^{t+\Delta t}_0\epsilon$ в (e), а это свидетельствует о том, что компоненты тензора деформаций Грина–Лагранжа не изменились в результате поворота элемента как твердого тела.

Пример 6.14: Требуется показать, что компоненты второго тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа являются инвариантными по отношению к повороту материала как твердого тела.

Здесь мы рассматриваем неподвижную систему координат x_i , $i = 1, 2, 3$, и будем предполагать, что компоненты вторых напряжений Пиолы–Кирхгофа задаются, как ${}^t_0\mathbf{S}$. Пусть символы ${}^t\boldsymbol{\tau}$, ${}^t_0\mathbf{X}$ и ${}^t\rho$ соответствуют напряжению Коши, градиенту деформаций и массовой плотности в момент времени t . Следовательно,

$${}^t_0\mathbf{S} = \frac{{}^o\rho}{{}^t\rho} {}^t_0\mathbf{X} {}^t\boldsymbol{\tau} {}^t_0\mathbf{X}^T, \quad (a)$$

где ${}^t_0\mathbf{X}$ — обратный градиент деформаций.

Если за время от t до $t + \Delta t$ материал испытывает поворот как твердое тело, то градиент деформаций изменяется вплоть до

$${}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{X} = \mathbf{R} {}^t_0 \mathbf{X},$$

где \mathbf{R} — это ортогональная матрица (матрица поворота) и, следовательно,

$${}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{X} = {}^0_t \mathbf{X} \mathbf{R}^T. \quad (\text{b})$$

Уравнения (a) и (b) показывают, что

$${}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{S} = \frac{{}^0_t \rho}{{}^t_t \rho} {}^0_t \mathbf{X} \mathbf{R}^T {}^{t+\Delta t}_t \boldsymbol{\tau} \mathbf{R} {}^0_t \mathbf{X}^T. \quad (\text{c})$$

Во время поворота материала, как твердого тела, компоненты напряжений остаются постоянными во вращающейся системе координат. Следовательно, напряжение Коши в момент $t + \Delta t$ в фиксированной системе координат имеют вид

$${}^{t+\Delta t}_t \boldsymbol{\tau} = \mathbf{R} {}^t_t \boldsymbol{\tau} \mathbf{R}^T. \quad (\text{d})$$

Производя подстановку из (d) в (c), получим

$${}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{S} = \frac{{}^0_t \rho}{{}^t_t \rho} {}^0_t \mathbf{X}^T {}^t_t \boldsymbol{\tau} {}^0_t \mathbf{X}^T,$$

что и завершает требуемое доказательство. Отметим — причина того, что компоненты вторых напряжений Пиолы–Кирхгофа не изменяются, состоит в том, что одна и та же матрица \mathbf{R} используется как в уравнении (b), так и в уравнении (d).

Пример 6.15: На рис. 6.12 элемент с четырьмя узлами показывается в конфигурации, соответствующей моменту времени 0. Элемент подвергается воздействию напряжения (начальное напряжение), равного ${}^0\tau_{11}$. Предположим, что за время от момента 0 до момента Δt элемент поворачивается как твердое тело на большой угол θ и что напряжение в системе координат, связанной с телом, не изменяется. Следовательно, показанная на рис. 6.12 величина $\Delta t \bar{\tau}_{11}$ равна ${}^0\tau_{11}$. Требуется показать, что компоненты второго тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа не изменяются в результате поворота элемента как твердого тела.

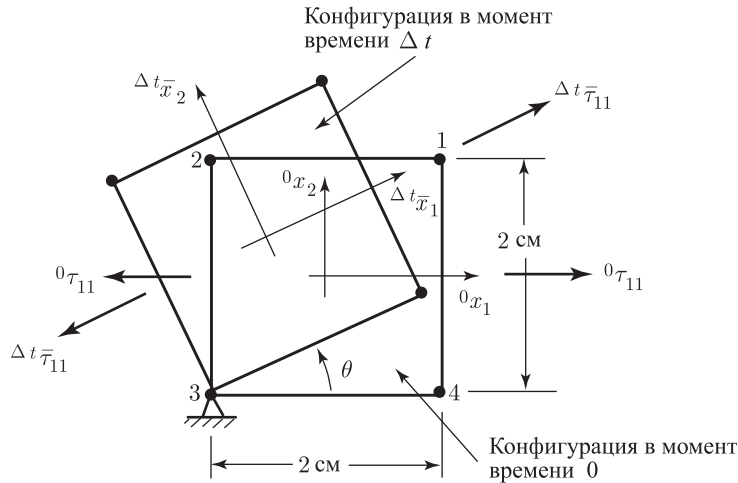


Рис. 6.12. Элемент с четырьмя узлами, имеющий начальное напряжение и подвергаемый большому повороту

Второй тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа в момент времени 0 равен тензору напряжений Коши, так как деформации элемента равны нулю,

$${}^0_0\mathbf{S} = \begin{bmatrix} {}^0\tau_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{a})$$

Компоненты тензора напряжений Коши в момент Δt , если они выражены в координатных осях ${}^0x_1, {}^0x_2$, представляют собой

$$\Delta^t\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta^t\bar{\tau}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \quad (\text{b})$$

Это преобразование соотносится с тензором второго порядка преобразований компонентов $\Delta^t\bar{\tau}_{ij}$ из координатной сетки $\Delta^t\bar{x}_1, \Delta^t\bar{x}_2$, привязанной к телу, в стационарную координатную сетку ${}^0x_1, {}^0x_2$ (см. раздел 2.4).

Связь между напряжениями Коши и вторыми напряжениями Пиолы–Кирхгофа в момент времени Δt равна, согласно (6.68),

$$\Delta^t\boldsymbol{\tau} = \frac{\Delta^t\rho}{{}^0\rho} \Delta^t\mathbf{X} \Delta^t_0\mathbf{S} \Delta^t_0\mathbf{X}^T, \quad (\text{c})$$

где в данном случае $\Delta^t\rho/{}^0\rho = 1$. Градиент деформаций может быть вычислен так, как в примере 6.6, причем мы замечаем, что координаты узловых точек в момент t имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta^t x_1^1 &= 2\cos\theta - 1 - 2\sin\theta; & \Delta^t x_2^1 &= 2\sin\theta - 1 + 2\cos\theta; \\ \Delta^t x_1^2 &= -1 - 2\sin\theta; & \Delta^t x_2^2 &= 2\cos\theta - 1; \\ \Delta^t x_1^3 &= -1; & \Delta^t x_2^3 &= -1; \\ \Delta^t x_1^4 &= 2\cos\theta - 1; & \Delta^t x_2^4 &= 2\sin\theta - 1. \end{aligned}$$

Следовательно, если использовать производные интерполяционных функций, данных в примере 6.6, мы получаем

$$\Delta^t_0\mathbf{X} = \frac{1}{4} \left[\begin{array}{cc|cc} (1+{}^0x_2)(2\cos\theta - 1 - 2\sin\theta) & & (1+{}^0x_1)(2\cos\theta - 1 - 2\sin\theta) & \\ -(1+{}^0x_2)(-1 - 2\sin\theta) & & +(1-{}^0x_1)(-1 - 2\sin\theta) & \\ -(1-{}^0x_2)(-1) & & -(1-{}^0x_1)(-1) & \\ +(1-{}^0x_2)(2\cos\theta - 1) & & -(1+{}^0x_1)(2\cos\theta - 1) & \\ \hline (1+{}^0x_2)(2\sin\theta - 1 + 2\cos\theta) & & (1+{}^0x_1)(2\sin\theta - 1 + 2\cos\theta) & \\ -(1+{}^0x_2)(2\cos\theta - 1) & & +(1-{}^0x_1)(2\cos\theta - 1) & \\ -(1-{}^0x_2)(-1) & & -(1-{}^0x_1)(-1) & \\ +(1-{}^0x_2)(2\sin\theta - 1) & & -(1+{}^0x_1)(2\sin\theta - 1) & \end{array} \right]$$

или

$$\Delta^t_0\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \quad (\text{d})$$

Подставляя в (c) выражения из (b) и (d), получим

$$\Delta^t_0\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \Delta^t\bar{\tau}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{e})$$

Однако если учесть, что величина $\Delta^t\bar{\tau}_{11}$ равна ${}^0\tau_{11}$, то соотношения в (a) и (e) показывают, что компоненты второго тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа не изменились за время поворота элемента как твердого тела. Причина того, что второй тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа не изменяется, состоит в том, что в этом случае градиент деформаций соответствует той матрице поворота, которая используется при преобразовании согласно (b).

Важно отметить, что в этих примерах мы считаем систему координат неподвижной, а материальное тело — движущимся в этой системе координат. Разумеется, эта ситуация коренным образом отличается от процесса выражения заданных тензоров напряжений и деформаций в новой системе координат.

Приведенные выше соотношения между напряжениями и деформациями показывают, что если использовать (6.69) для преобразования напряжений и (6.64) для преобразования деформаций (однако, как и в примере 6.10, используя скорее вариации деформаций, чем производные по времени), то получим

$$\begin{aligned} \int_{tV} {}^t\tau_{kl} \delta {}^te_{kl} d^tV &= \int_{tV} \left(\frac{{}^t\rho}{{}_0\rho} {}^tS_{ij} {}^tx_{k,i} {}^tx_{l,j} \right) ({}_0x_{m,k} {}_0x_{n,l} \delta {}^t\epsilon_{mn}) d^tV = \\ &= \int_{tV} \frac{{}^t\rho}{{}_0\rho} {}^tS_{ij} \delta {}^t\epsilon_{mn} \delta {}^t\epsilon_{mn} d^tV = \int_{{}_0V} {}^tS_{ij} \delta {}^t\epsilon_{ij} d^0V, \end{aligned} \quad (6.70)$$

где мы также воспользовались тем, что ${}^t\rho d^tV = {}^0\rho d^0V$.

Разумеется, соотношение (6.70) следует из определения второго тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа, данного в (6.66), и, действительно, соотношение (6.70) есть всего лишь соотношение (6.66), проинтегрированное по объему тела (и записанное для вариаций деформаций).

В соотношении (6.70) мы использовали специальную декартову систему координат, причем следует отметить, что в своей компонентной форме это соотношение представляет собой тензорное уравнение общего вида. При этом могли бы быть выбраны и другие подходящие системы координат (см. (6.178)).

Уравнение (6.70) представляет собой основное выражение для полных и предварительно заданных лагранжевых формулировок, используемых при проводимом с пошаговым приростом исследовании твердых тел и конструкций, которое мы и рассмотрим в дальнейшем. Важным аспектом уравнения (6.70) является то, что в его окончательном представлении интегрирование совершается по начальному объему данного тела. Вместо начальной конфигурации можно использовать любую другую, предварительно рассчитанную конфигурацию, после чего как вторые напряжения Пиолы–Кирхгофа, так и деформации Грина–Лагранжа определяются именно по отношению к этой конфигурации. Более конкретно, если требуется использовать конфигурацию для момента времени τ , $\tau < t$, и если мы обозначим координаты для этого момента времени символом ${}^\tau x_i$, тогда было бы желательно использовать соотношение

$$\int_{tV} {}^t\tau_{mn} \delta {}^te_{mn} d^tV = \int_{{}_\tau V} {}^tS_{ij} \delta {}^\tau\epsilon_{ij} d{}^\tau V, \quad (6.71)$$

где вторые напряжения Пиолы–Кирхгофа ${}^tS_{ij}$ и деформации Грина–Лагранжа ${}^\tau\epsilon_{ij}$ определяются так, как это обсуждалось ранее, однако вместо ${}_0x_i$ используются координаты ${}^\tau x_i$, соответствующие конфигурации в момент времени τ . В последующих разделах мы будем часто использовать соотношения (6.70) и (6.71).

Отметим, что до сих пор мы дали определения тем тензорам напряжений и деформаций, которые мы будем применять; использование надлежащих основополагающих соотношений обсуждается в разделе 6.6.

6.2.3. Механика сплошной среды для полных и предварительно заданных лагранжевых формулировок с пошаговым приростом. Анализ, основанный только на нелинейных свойствах материала

В разделах 6.1 и 6.2.1 мы обсудили основные трудности и подход к решению в условиях, когда исследуется общая нелинейная задача. Мы пришли к выводу о том, что для проведения эффективного анализа с пошаговым приростом необходимо применять надлежащие масштабы измерения напряжений и деформаций. В разделе 6.2.2 это привело к введению некоторых тензоров напряжений и деформаций, эффективно применяемых на практике, а затем — к формулировке принципа виртуальных перемещений, выраженного в терминах вторых напряжений Пиолы–Кирхгофа и деформаций Грина–Лагранжа. Теперь мы воспользуемся этим фундаментальным результатом для разработки двух общих

формулировок нелинейных задач механики сплошной среды, сделанных с применением пошагового прироста. В этом разделе мы рассмотрим только уравнения механики сплошной среды безотносительно к какой-либо конкретной схеме конечно-элементного решения. Вопросы использования полученных результатов и обобщения формулировок с пошаговым приростом применительно к общим переменным конечно-элементного решения обсуждаются позднее в разделе 6.3.1 (и в разделах, следующих за этим).

Основным уравнением, которое мы хотели бы решить, является уравнение (6.13), выражающее требования равновесия и совместности применительно к телу общего вида, рассматриваемому в конфигурации, соответствующей моменту времени $t + \Delta t$ (основополагающие уравнения также входят в (6.13), а именно, в расчет напряжений). Учитывая, что в общем случае тело может претерпевать большие смещения и большие деформации, а основополагающие соотношения нелинейны, прямое решение уравнения (6.13) невозможно; однако можно построить его приближенное решение, если отнести все переменные к известной, предварительно рассчитанной равновесной конфигурации и линеаризовать полученное уравнение. Впоследствии это решение можно улучшить с помощью итераций.

Чтобы вывести линеаризованное определяющее уравнение, вспомним, что решения для моментов времени $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, t$ уже были рассчитаны и что мы можем применить уравнение (6.70) или уравнение (6.71) и отнести напряжения и деформации к одной из этих известных равновесных конфигураций. При этом может быть, в принципе, использована любая из уже рассчитанных равновесных конфигураций. Однако на практике речь идет, по существу, о выборе между двумя формулировками, которые были названы полной лагранжевой (TL) формулировкой и предварительно заданной лагранжевой (UL) формулировкой (см. [Bathe, Ramm and Wilson, 1975]). Формулировка TL называлась также лагранжевой формулировкой. При решении согласно этой схеме все статические и кинематические переменные отнесены к начальной конфигурации в момент времени 0. Формулировка UL основывается на тех же процедурах, какие используются в формулировке TL, однако при решении все статические и кинематические переменные отнесены к последней из уже рассчитанных конфигураций. *Обе указанные конфигурации, TL и UL, охватывают все нелинейные кинематические эффекты, обусловленные большими смещениями, большими поворотами и большими деформациями, однако моделируется ли поведение с большими деформациями надлежащим образом, — это зависит от конкретной формы основополагающих соотношений* (см. раздел 6.6). Единственное возможное преимущество какой-то одной из формулировок может состоять в ее большей численной эффективности.

Используя (6.70) в формулировке TL мы рассматриваем основное уравнение

$$\int_{0V} {}^{t+\Delta t}S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t}e_{ij} d^0V = {}^{t+\Delta t}\mathcal{R}, \quad (6.72)$$

тогда как в формулировке UL мы рассматриваем

$$\int_{tV} {}^{t+\Delta t}S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t}e_{ij} d^tV = {}^{t+\Delta t}\mathcal{R}, \quad (6.73)$$

где ${}^{t+\Delta t}\mathcal{R}$ — это внешняя виртуальная работа, заданная выражением (6.14). В общем случае это выражение зависит также от площади поверхности и объема рассматриваемого тела. Однако сейчас для упрощения обсуждения мы предположим, что нагрузка не зависит от деформации, причем очень важная форма такой нагрузки — это сосредоточенные силы, направление и интенсивность которых не зависят от реакции рассматриваемой конструкции. Позднее мы обсудим, каким образом следует включить в анализ нагрузку, зависящую от деформации (см. (6.83) и (6.84)).

В таблицах 6.2 и 6.3 дается сводка соотношений, используемых при построении уравнений движения, линеаризуемых по отношению к состоянию в момент времени t , в формулировках TL и UL. Линеаризованные уравнения равновесия в формулировке TL имеют вид

$$\int_{0V} {}_0C_{ijrs} {}_0e_{rs} \delta {}_0e_{ij} d^0V + \int_{0V} {}_0S_{ij} \delta {}_0\eta_{ij} d^0V = {}^{t+\Delta t}\mathcal{R} - \int_{0V} {}_0S_{ij} \delta {}_0e_{ij} d^0V, \quad (6.74)$$

а в формулировке UL —

$$\int_{tV} {}^t C_{ijrs} {}^t e_{rs} \delta {}^t e_{ij} d^t V + \int_{tV} {}^t \tau_{ij} \delta {}^t \eta_{ij} d^t V = {}^{t+\Delta t} \mathcal{R} - \int_{tV} {}^t \tau_{ij} \delta {}^t e_{ij} d^t V, \quad (6.75)$$

где ${}_0 C_{ijrs}$ и ${}_t C_{ijrs}$ представляют собой построенные с пошаговым приростом тензоры напряжение–деформация в момент времени t , отнесенные к конфигурациям в моменты 0 и t соответственно. Дериация ${}_0 C_{ijrs}$ и ${}_t C_{ijrs}$ для различных материалов обсуждается в разделе 6.6. Заметим, что в выражениях (6.74) и (6.75) ${}_0 S_{ij}$ и ${}_t S_{ij}$ — вторые напряжения Пиолы–Кирхгофа и Коши в момент t : а ${}_0 e_{ij}$, ${}_0 \eta_{ij}$ и ${}_t e_{ij}$, ${}_t \eta_{ij}$ — линейные и нелинейные пошаговые деформации, относящиеся соответственно к моментам времени 0 и t .

Т а б л и ц а 6.2. Инкрементальное расчленение в механике сплошной среды: полная лагранжева формулировка

1. Уравнение движения

$$\int_{{}_0 V} {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} {}_0 \epsilon_{ij} d^0 V = {}^{t+\Delta t} \mathcal{R},$$

где

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} S_{ij} &= \frac{{}_0 \rho}{t+\Delta t} {}_{t+\Delta t} x_{i,m} {}^{t+\Delta t} \tau_{mn} {}_{t+\Delta t} x_{j,n}; \\ \delta {}^{t+\Delta t} {}_0 \epsilon_{ij} &= \delta \frac{1}{2} ({}^{t+\Delta t} {}_0 u_{i,j} + {}^{t+\Delta t} {}_0 u_{j,i} + {}^{t+\Delta t} {}_0 u_{k,i} {}^{t+\Delta t} {}_0 u_{k,j}). \end{aligned}$$

2. Инкрементальные расчленения

а. Напряжения

$${}^{t+\Delta t} S_{ij} = {}^t S_{ij} + {}_0 S_{ij}.$$

б. Деформации

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} {}_0 \epsilon_{ij} &= {}^t {}_0 \epsilon_{ij} + {}_0 \epsilon_{ij}; \quad {}_0 \epsilon_{ij} = {}_0 e_{ij} + {}_0 \eta_{ij}; \\ {}_0 e_{ij} &= \frac{1}{2} ({}_0 u_{i,j} + {}_0 u_{j,i} + \underbrace{{}_0 u_{k,i} {}_0 u_{k,j} + {}_0 u_{k,i} {}^t {}_0 u_{k,j}}); \quad {}_0 \eta_{ij} = \frac{1}{2} {}_0 u_{k,i} {}_0 u_{k,j}. \end{aligned}$$

3. Уравнение движения с инкрементальными расчленениями

Если заметить, что $\delta {}^{t+\Delta t} {}_0 \epsilon_{ij} = \delta {}_0 \epsilon_{ij}$, то уравнение движения имеет форму

$$\int_{{}_0 V} {}_0 S_{ij} \delta {}_0 \epsilon_{ij} d^0 V + \int_{{}_0 V} {}^t S_{ij} \delta {}_0 \eta_{ij} d^0 V = {}^{t+\Delta t} \mathcal{R} - \int_{{}_0 V} {}^t S_{ij} \delta {}_0 e_{ij} d^0 V.$$

4. Линеаризация уравнения движения

Если использовать аппроксимации ${}_0 S_{ij} = {}_0 C_{ijrs} {}_0 e_{rs}$, $\delta {}_0 \epsilon_{ij} = \delta {}_0 e_{ij}$, то в качестве приближенно представленного уравнения движения получим:

$$\int_{{}_0 V} {}_0 C_{ijrs} {}_0 e_{rs} \delta {}_0 e_{ij} d^0 V + \int_{{}_0 V} {}^t S_{ij} \delta {}_0 \eta_{ij} d^0 V = {}^{t+\Delta t} \mathcal{R} - \int_{{}_0 V} {}^t S_{ij} \delta {}_0 e_{ij} d^0 V.$$

Таблица 6.3. Инкрементальное расчленение в механике сплошной среды: модифицированная лагранжева формулировка

1. Уравнение движения

$$\int_{tV} {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} d^t V = {}^{t+\Delta t} \mathcal{R},$$

где

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} S_{ij} &= \frac{{}^t \rho}{{}^{t+\Delta t} \rho} {}^{t+\Delta t} x_{i,m} {}^{t+\Delta t} \tau_{mn} {}^{t+\Delta t} x_{j,n}; \\ \delta {}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} &= \delta \frac{1}{2} ({}^t u_{i,j} + {}^t u_{j,i} + {}^t u_{k,i} {}^t u_{k,j}). \end{aligned}$$

2. Инкрементальные расчленения

а. Напряжения

$${}^{t+\Delta t} S_{ij} = {}^t \tau_{ij} + {}^t S_{ij} \quad \text{заметим, что } {}^t S_{ij} \equiv {}^t \tau_{ij}.$$

б. Деформации

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} &= {}^t \epsilon_{ij}; & {}^t \epsilon_{ij} &= {}^t e_{ij} + {}^t \eta_{ij}; \\ {}^t e_{ij} &= \frac{1}{2} ({}^t u_{i,j} + {}^t u_{j,i}); & {}^t \eta_{ij} &= \frac{1}{2} {}^t u_{k,i} {}^t u_{k,j}. \end{aligned}$$

3. Уравнение движения с инкрементальными расчленениями

Уравнение движения имеет форму

$$\int_{tV} {}^t S_{ij} \delta {}^t \epsilon_{ij} d^t V + \int_{tV} {}^t \tau_{ij} \delta {}^t \eta_{ij} d^t V = {}^{t+\Delta t} \mathcal{R} - \int_{tV} {}^t \tau_{ij} \delta {}^t e_{ij} d^t V.$$

4. Линеаризация уравнения движения

С помощью аппроксимаций ${}^t S_{ij} = {}^t C_{ijrs} {}^t e_{rs}$, $\delta {}^t \epsilon_{ij} = \delta {}^t e_{ij}$ мы получаем приближенную форму уравнения движения:

$$\int_{tV} {}^t C_{ijrs} {}^t e_{rs} \delta {}^t e_{ij} d^t V + \int_{tV} {}^t \tau_{ij} \delta {}^t \eta_{ij} d^t V = {}^{t+\Delta t} \mathcal{R} - \int_{tV} {}^t \tau_{ij} \delta {}^t e_{ij} d^t V.$$

Рассмотрим более подробно этапы анализа, перечисленные в таблице 6.2. Этапы, перечисленные в таблице 6.3, вполне аналогичны этому.

На этапе 2 мы проводим разложение напряжений и деформаций с пошаговым приростом, что допустимо, потому что все напряжения и деформации, а также их приращения, отнесены к первоначальной конфигурации. Отметим также, что компоненты деформаций Грина–Лагранжа с пошаговым приростом, приведенные в таблице 6.2, получены просто путем вычисления ${}^0 \epsilon_{ij} = {}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} - {}^t \epsilon_{ij}$ и выражения ${}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij}$ и ${}^t \epsilon_{ij}$ в терминах смещений, где ${}^{t+\Delta t} u_i = {}^t u_i + u_i$.

На этапе 3 мы используем выражение $\delta {}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} = \delta ({}^t \epsilon_{ij} - {}^0 \epsilon_{ij}) = \delta {}^0 \epsilon_{ij}$; иначе говоря, здесь $\delta {}^t \epsilon_{ij} = 0$, так как вариация берется относительно конфигурации в момент $t + \Delta t$. Кроме того, в уравнении принципа виртуальной работы мы переносим все известные величины в правую часть этого уравнения. Отметим, что при заданной вариации смещения выражение $\int_{0V} {}^t S_{ij} \delta {}^0 \epsilon_{ij} d^0 V$ является известным. Пока что мы не сделали никаких предположений, а лишь переписали исходное уравнение принципа виртуальной работы.

В общем случае левая часть уравнения принципа виртуальной работы, применяемого на этапе 3, обладает ярко выраженной нелинейностью по отношению к приращениям

смещений u_i . Далее, на этапе 4 мы линеаризуем это выражение, и указанная линеаризация осуществляется следующим образом.

Во-первых, мы замечаем, что член $\int_{0V} {}^t_0 S_{ij} \delta_0 \eta_{ij} d^0 V$ уже является линейным по отношению к приращениям смещений; следовательно, этот член мы оставляем без изменений. Нелинейные эффекты обуславливаются членом $\int_{0V} {}_0 S_{ij} \delta_0 \epsilon_{ij} d^0 V$, который мы линеаризуем с помощью разложения в ряд Тейлора,

$$\begin{aligned}
 & \int_{0V} {}_0 S_{ij} \delta_0 \epsilon_{ij} d^0 V = \\
 & = \int_{0V} \left(\left. \frac{\partial {}^t_0 S_{ij}}{\partial {}^t_0 \epsilon_{rs}} \right|_t {}_0 \epsilon_{rs} + \text{члены высшего порядка} \right) \delta({}_0 e_{ij} + {}_0 \eta_{ij}) d^0 V = \\
 & = \int_{0V} \left(\underbrace{\left. \frac{\partial {}^t_0 S_{ij}}{\partial {}^t_0 \epsilon_{rs}} \right|_t}_{\downarrow {}_0 C_{ijrs}} ({}_0 e_{rs} + \underbrace{{}_0 \eta_{rs}}_{\downarrow \text{пренебречь}}) + \underbrace{\text{члены высшего порядка}}_{\downarrow \text{пренебречь}} \right) \delta({}_0 e_{ij} + \underbrace{{}_0 \eta_{ij}}_{\downarrow \text{пренебречь}}) d^0 V = \\
 & \doteq \int_{0V} {}_0 C_{ijrs} {}_0 e_{rs} \delta_0 e_{ij} d^0 V.
 \end{aligned}$$

Теперь этот член оказывается линейным по отношению к приращениям смещений, так как величина $\delta_0 e_{ij}$ не зависит от u_i .

Сравнивая формулировки UL и TL в таблицах 6.2 и 6.3, мы замечаем, что они вполне аналогичны и что, фактически, единственное теоретическое различие между двумя формулировками состоит в выборе разных базовых конфигураций для кинематических и статических переменных. Действительно, если при реализации численного решения применяются надлежащие основополагающие тензоры, то получаемые результаты оказываются идентичными (см. раздел 6.6).

При проведении конечно-элементного решения выбор использования формулировки UL или TL зависит, практически, от их относительной численной эффективности, которая, в свою очередь, зависит от того, какие именно конечные элементы используются и какой основополагающий закон при этом применяется. Однако по отношению к таблицам 6.2 и 6.3 можно сделать одно замечание общего характера, связанное с тем, что линейные приращения деформаций ${}_0 e_{ij}$ в формулировке TL содержат эффект начального смещения, приводящий к матрице деформация–смещение более сложного вида, чем в формулировке UL.

Соотношения (6.74) и (6.75) могут быть применены для расчета приращений смещения, которые впоследствии используются для вычисления приближенных выражений для смещений, деформаций и напряжений, соответствующих моменту времени $t + \Delta t$. Приближенные выражения для смещений, соответствующих указанному моменту, получаются путем простого сложения вычисленных приращений и смещений в момент t , а приближенные выражения для деформаций вычисляются по данным о смещениях с использованием имеющихся кинематических соотношений (например, соотношение (6.54) для формулировки TL). Однако вычисление напряжений, соответствующих моменту $t + \Delta t$, зависит от конкретного вида используемых основополагающих соотношений и подробно обсуждается в разделе 6.6.

Предполагая, что приближенные выражения для смещений, деформаций, а значит и напряжений, уже получены, мы можем теперь проверить, какова разница между внутренней виртуальной работой, определяемой по расчетным данным о статических и кинематических переменных в момент времени $t + \Delta t$, и внешней виртуальной работой.

Если обозначить приближенные значения верхним индексом (1) в предвидении того, что итерации будут, вообще говоря, необходимы, то обусловленная линеаризацией ошибка

в формулировке TL соответствует выражению

$$\text{ошибка} = {}^{t+\Delta t}\mathcal{R} - \int_{{}^0V} {}^{t+\Delta t}S_{ij}^{(1)} \delta {}^{t+\Delta t}e_{ij}^{(1)} d^0V, \quad (6.76)$$

а в формулировке UL — выражению

$$\text{ошибка} = {}^{t+\Delta t}\mathcal{R} - \int_{{}^{t+\Delta t}V^{(1)}} {}^{t+\Delta t}\tau_{ij}^{(1)} \delta {}^{t+\Delta t}e_{ij}^{(1)} d^{t+\Delta t}V. \quad (6.77)$$

Следует отметить, что правые части формул (6.76) и (6.77) эквивалентны правым частям уравнений (6.74) и (6.75), соответственно, однако в каждом случае используются текущие конфигурации вместе с соответствующими переменными, характеризующими напряжения и деформации. В формулировке UL указанное соответствие может быть обнаружено непосредственно, но при рассмотрении формулировки TL следует признать, что $\delta {}^0e_{ij}$ эквивалентно $\delta {}^{t+\Delta t}e_{ij}^{(1)}$, если используются одни и те же текущие смещения (см. упражнение 6.29).

Как показывают приведенные выше соображения, правые части соотношений (6.74) и (6.75) характеризуют «неуравновешенную виртуальную работу», найденную до вычисления приращений смещения, тогда как правые части соотношений (6.76) и (6.77) характеризуют ту же «неуравновешенную виртуальную работу» после построения решения, в качестве результата проведенных линеаризаций. Чтобы в дальнейшем уменьшить «неуравновешенную виртуальную работу», нам необходимо провести итерацию, при которой вышеуказанный этап решения повторяется до тех пор, пока разница между внешней и внутренней виртуальными работами не станет пренебрежимо малой в пределах некоторого интервала сходимости. Если используется формулировка TL, то уравнение, решаемое с повторениями, при $k = 1, 2, 3, \dots$, принимает вид

$$\begin{aligned} \int_{{}^0V} {}^0C_{ijrs}^{(k-1)} \Delta {}^0e_{rs}^{(k)} \delta {}^0e_{ij} d^0V + \int_{{}^0V} {}^{t+\Delta t}S_{ij}^{(k-1)} \delta \Delta {}^0\eta_{ij}^{(k)} d^0V = \\ = {}^{t+\Delta t}\mathcal{R} - \int_{{}^0V} {}^{t+\Delta t}S_{ij}^{(k-1)} \delta {}^{t+\Delta t}e_{ij}^{(k-1)} d^0V, \end{aligned} \quad (6.78)$$

тогда как при использовании формулировки UL интересующее нас уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \int_{{}^{t+\Delta t}V^{(k-1)}} {}^{t+\Delta t}C_{ijrs}^{(k-1)} \Delta {}^{t+\Delta t}e_{rs}^{(k)} \delta {}^{t+\Delta t}e_{ij} d^{t+\Delta t}V + \\ + \int_{{}^{t+\Delta t}V^{(k-1)}} {}^{t+\Delta t}\tau_{ij}^{(k-1)} \delta \Delta {}^{t+\Delta t}\eta_{ij}^{(k)} d^{t+\Delta t}V = \\ = {}^{t+\Delta t}\mathcal{R} - \int_{{}^{t+\Delta t}V^{(k-1)}} {}^{t+\Delta t}\tau_{ij}^{(k-1)} \delta {}^{t+\Delta t}e_{ij}^{(k-1)} d^{t+\Delta t}V, \end{aligned} \quad (6.79)$$

где случай $k = 1$ соответствует соотношениям (6.74) и (6.75), а предварительное задание смещений осуществляется следующим образом:

$${}^{t+\Delta t}u_i^{(k)} = {}^{t+\Delta t}u_i^{(k-1)} + \Delta u_i^{(k)}; \quad {}^{t+\Delta t}u^{(0)} = {}^tu. \quad (6.80)$$

Соотношения (6.78)–(6.80) соответствуют итерациям по Ньютону–Рафсону, уже введенным нами в разделе 6.1. Поэтому все выражения под знаком интеграла вычисляются в соответствии со смещениями, известными на текущий момент, и с соответствующими им напряжениями. Заметим, что в уравнении (6.79) напряжения Коши, основополагающее соотношение для касательных сил, а также приращения деформаций, — все они отнесены к конфигурации и объему в момент времени $t + \Delta t$, и в конце $(k-1)$ -й итерации; иначе говоря, все величины отнесены к ${}^{t+\Delta t}V^{(k-1)}$, где при $k = 1$ имеем ${}^{t+\Delta t}V^{(0)} = {}^tV$.

Проводя обзор содержания данного раздела, отметим еще раз одно, очень важное обстоятельство. Нашей целью является получение решения для уравнения равновесия (6.13), которое можно рассматривать как обобщение принципа виртуальной работы, используемого при линейном анализе. Как мы видели, при проведении общего анализа с пошаговым

приростом можно эффективно использовать определенные масштабы измерения напряжений и деформаций, а это привело к преобразованию уравнения (6.13) с приведением его к полной лагранжевой формулировке или к предварительно заданной лагранжевой формулировке. После этого линейаризация соответствующих уравнений привела к получению соотношений (6.78) и (6.79). Весьма важно убедиться, что решение одного из уравнений, (6.78) или (6.79), находится в полном соответствии с решением уравнения (6.13). А именно, при том условии, что применяются надлежащие основополагающие соотношения, решение любого из уравнений, (6.78) или (6.79), приводит к идентичным численным результатам и, как это уже упоминалось ранее, какую из этих двух формулировок, TL или UL, использовать на практике, зависит только от относительной численной эффективности этих двух подходов к решению.

До сих пор мы предполагали, что нагрузка не зависит от деформаций и может быть задана до начала анализа с пошаговыми приращениями. Так, мы предположили, что выражение в формуле (6.14) может вычисляться с использованием соотношения

$${}^{t+\Delta t}\mathcal{R} = \int_{{}^0V} {}^{t+\Delta t}f_i^B \delta u_i d^0V + \int_{{}^0S_f} {}^{t+\Delta t}f_i^S \delta u_i^S d^0S, \quad (6.81)$$

а это возможно только для нагрузок определенного типа, таких, как сосредоточенная нагрузка, не изменяющая своего направления в зависимости от деформаций. Используя изопараметрические элементы, базирующиеся на учете смещений, можно указать на другое важное условие нагрузки, которое может моделироваться с помощью соотношения (6.81), и это — нагрузка, обусловленная силами инерции, которая должна включаться в динамический анализ. В этом случае мы имеем

$$\int_{{}^{t+\Delta t}V} {}^{t+\Delta t}\rho {}^{t+\Delta t}\ddot{u}_i \delta u_i d^{t+\Delta t}V = \int_{{}^0V} {}^0\rho {}^{t+\Delta t}\ddot{u}_i \delta u_i d^0V, \quad (6.82)$$

и, следовательно, матрица масс может вычисляться с использованием начальной конфигурации данного тела. Практическое следствие этого факта состоит в том, что при динамическом анализе матрицы масс изопараметрических элементов могут рассчитываться до начала построения пошагового решения.

Предположим теперь, что внешняя виртуальная работа зависит от испытываемых деформаций и не может вычисляться с помощью соотношения (6.81). Если в этом случае шаг изменения нагрузки (или изменения времени) достаточно мал, то внешняя виртуальная работа может с достаточной степенью точности аппроксимироваться с использованием интенсивности нагрузки, соответствующей моменту $t + \Delta t$, но при проведении интегрирования по объему и площади, вычисленным на последней итерации,

$$\int_{{}^{t+\Delta t}V} {}^{t+\Delta t}f_i^B \delta u_i d^{t+\Delta t}V \doteq \int_{{}^{t+\Delta t}V^{(k-1)}} {}^{t+\Delta t}f_i^B \delta u_i d^{t+\Delta t}V \quad (6.83)$$

и

$$\int_{{}^{t+\Delta t}S_f} {}^{t+\Delta t}f_i^S \delta u_i^S d^{t+\Delta t}S \doteq \int_{{}^{t+\Delta t}S_f^{(k-1)}} {}^{t+\Delta t}f_i^S \delta u_i^S d^{t+\Delta t}S. \quad (6.84)$$

Чтобы получить такую итеративную схему, которая обычно сходилась бы при меньшем числе итераций, нужно включить в матрицу жесткости эффект влияния неизвестных приращений смещения на члены с нагрузкой. Тогда, в зависимости от формы рассматриваемой нагрузки, получается несимметричная матрица жесткости (см., например, [Schweizerhof, Ramm 1984]), которая может на каждой итерации потребовать существенно большего объема вычислений.

Полная и предварительно заданная лагранжевы формулировки дают уравнения механики сплошной среды с пошаговым приростом, которые включают в себя все нелинейные эффекты, обусловленные большими смещениями, большими деформациями и нелинейностями поведения материала; однако на практике зачастую бывает достаточно ограничиться учетом только нелинейных эффектов материала. В этом случае пренебрегают и нелинейными компонентами деформаций и любыми формами предварительного задания площадей поверхности и объемов. Поэтому соотношения (6.78) и (6.79) приводятся

к одному и тому же уравнению движения, а именно,

$$\int_V C_{ijrs}^{(k-1)} \Delta e_{rs}^{(k)} \delta e_{ij} dV = {}^{t+\Delta t}\mathcal{R} - \int_V {}^{t+\Delta t}\sigma_{ij}^{(k-1)} \delta e_{ij} dV, \quad (6.85)$$

где ${}^{t+\Delta t}\sigma_{ij}^{(k-1)}$ — это истинное физическое напряжение в момент времени $t + \Delta t$ и в конце итерации $(k - 1)$. В процессе этого анализа мы предполагаем, что объем тела не изменяется и что, поэтому, ${}^{t+\Delta t}S_{ij} \equiv {}^{t+\Delta t}\tau_{ij} \equiv {}^{t+\Delta t}\sigma_{ij}$, и нагрузки, зависящей от деформации, попросту не может быть. Учитывая тот факт, что уравнение (6.85) не принимает во внимание никаких кинематических нелинейностей, отсюда следует, что в случае линейно упругого материала это уравнение, в принципе, равносильно принципу виртуальной работы, обсуждавшемуся в разделе 4.2.1, и может привести к линейному конечно-элементному решению.

При данных выше формулировках мы предполагали, что предлагаемые нами итерации сходятся, так что анализ, связанный с пошаговыми приращениями, может быть проведен в действительности. Этот вопрос подробно обсуждается в разделе 8.4. Кроме того, при этих формулировках мы предполагали, что проводится статический анализ или делается попытка провести динамический анализ с применением неявной схемы интегрирования по времени (см. раздел 9.5.2). Если динамический анализ должен проводиться с использованием явного метода интегрирования по времени, то при использовании формулировки TL определяющие уравнения механики сплошной среды имеют вид

$$\int_{{}^0V} {}^tS_{ij} \delta {}^t\epsilon_{ij} d^0V = {}^t\mathcal{R}, \quad (6.86)$$

а при использовании формулировки UL принимают форму

$$\int_{{}^tV} {}^t\tau_{ij} \delta {}^te_{ij} d^tV = {}^t\mathcal{R}, \quad (6.87)$$

и, наконец, если использовать анализ, учитывающий только нелинейность материала, то получим

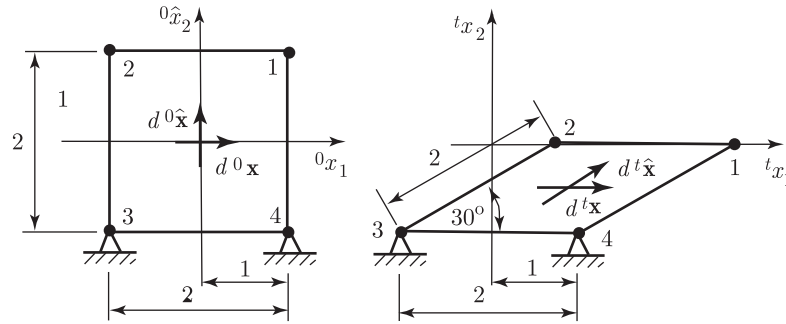
$$\int_v {}^t\sigma_{ij} \delta e_{ij} dV = {}^t\mathcal{R}, \quad (6.88)$$

где тензоры напряжений и деформаций соответствуют данным ранее определениям, а равновесие рассматривается в момент времени t . При этих вариантах анализа внешняя виртуальная работа должна включать в себя силы инерции, соответствующие моменту t , а решение с пошаговым приростом соответствует алгоритму маршевого продвижения вперед, без равновесных итераций. По этой причине нагрузка, зависящая от деформации, может быть непосредственно включена в анализ путем простого предварительного задания интенсивности нагрузки и использования обновленной геометрии при вычислении ${}^t\mathcal{R}$. Подробности фактического пошагового решения обсуждаются в разделе 9.5.1.

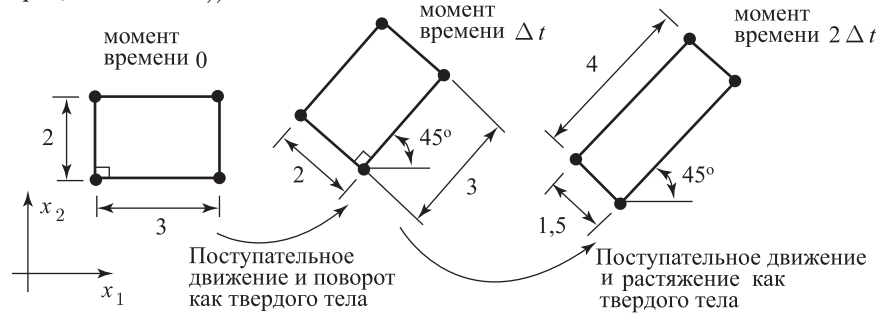
6.2.4. Упражнения

6.1. Конечный элемент с плоскими деформациями, имеющий четыре узла, испытывает показанную здесь деформацию. Первоначально элемент представлял собой квадрат, плотность ${}^0\rho$ элемента равна 0,05, а $d^0\mathbf{x}$ и $d^0\hat{\mathbf{x}}$ — это бесконечно малые волокна. Для деформированной конфигурации в момент времени t :

- Рассчитайте смещения материальных точек внутри данного элемента как функции 0x_1 и 0x_2 .
- Рассчитайте градиент деформаций ${}^t\mathbf{X}$, правый тензор деформаций Коши–Грина ${}^t\mathbf{C}$ и массовую плотность ${}^t\rho$ как функции 0x_1 и 0x_2 .



- 6.2. Для элемента, представленного в упражнении 6.1, рассчитайте натяжения ${}^t\lambda$ и ${}^t\hat{\lambda}$ линейных отрезков $d^0\mathbf{x}$ и $d^0\hat{\mathbf{x}}$, а также искажение угла между этими линейными отрезками.
- 6.3. Рассмотрите показанный здесь элемент с плоскими деформациями, имеющий четыре узла. Рассчитайте градиент деформаций для моментов времени Δt и $2\Delta t$ (*подсказка*: определите (путем осмотра) такие матрицы ${}^t_0\mathbf{R}$ и ${}^t_0\mathbf{U}$, чтобы было ${}^t_0\mathbf{X} = {}^t_0\mathbf{K} {}^t_0\mathbf{U}$, где ${}^t_0\mathbf{R}$ — ортогональная матрица (матрица поворота), а ${}^t_0\mathbf{U}$ — симметричная матрица (матрица натяжения)).



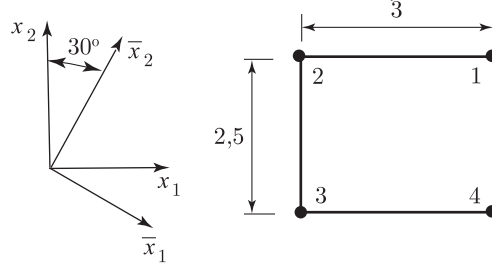
- 6.4. Показанный здесь элемент с плоскими напряжениями, имеющий четыре узла, вначале растягивается в направлениях x_1 и x_2 , а затем поворачивается на 30 градусов как твердое тело.

- (а) Рассчитайте градиент деформаций ${}^{2\Delta t}_0\mathbf{X}$ материальных точек данного элемента.
- (б) Рассчитайте натяжения линейных элементов d^0s_1 и d^0s_2 .



- 6.5. Рассмотрите элемент с четырьмя узлами из упражнения 6.4 и его деформации к моменту времени Δt . Предполагается, что градиент деформаций в этот момент времени выражается в координатных осях \bar{x}_1, \bar{x}_2 , показанных здесь. Рассчитайте градиент деформаций ${}^{\Delta t}_0\bar{\mathbf{X}}$ и покажите, что этот градиент не равен градиенту ${}^{2\Delta t}_0\bar{\mathbf{X}}$,

рассчитанному в упражнении 6.4 (в упражнении 6.4 этот элемент был растянут и повернут, тогда как здесь элемент *только* растянут).



- 6.6. Рассмотрите движение двух бесконечно малых волокон в двумерной сплошной среде. В момент времени 0 эти волокна определяются выражениями

$$d^0 \mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} d^0 s; \quad d^0 \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^0 \hat{s},$$

и в момент времени t волокна выражаются как

$$d^t \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} d^0 s; \quad d^t \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} d^0 \hat{s}.$$

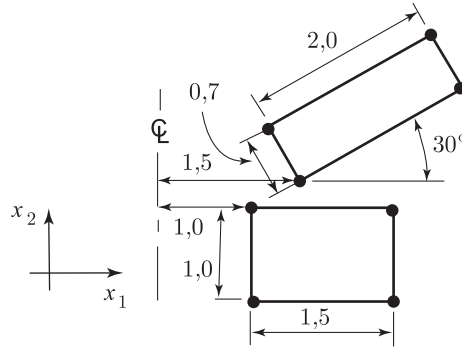
Оба волокна исходят из одной и той же материальной точки.

- Рассчитайте градиент деформации ${}^t_0 \mathbf{X}$ в этой материальной точке.
 - Рассчитайте обратный градиент деформации ${}^0_t \mathbf{X}$ в этой материальной точке
 - путем обращения ${}^t_0 \mathbf{X}$ и (ii) без обращения ${}^t_0 \mathbf{X}$.
 - Рассчитайте отношение массовых плотностей ${}^t\rho/{}^0\rho$ в этой материальной точке.
- 6.7. Докажите, что градиент деформаций \mathbf{X} всегда может быть разложен с приведением к форме $\mathbf{X} = \mathbf{V}\mathbf{R}$, где \mathbf{V} — это симметричная матрица, а \mathbf{R} — ортогональная матрица. Определите \mathbf{V} и \mathbf{R} для деформации, заданной в упражнении 6.4.
- 6.8. Элемент с плоскими деформациями, имеющий четыре узла, подвергается следующим деформациям:

$$\text{за время от момента 0 до момента } \Delta t: \quad {}^{\Delta t}_0 \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix};$$

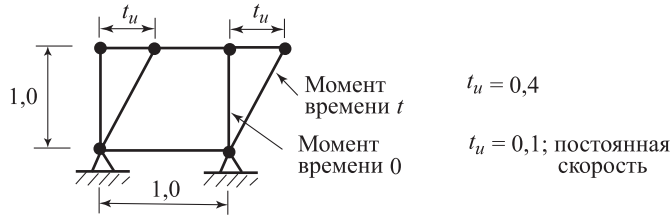
$$\text{за время от момента } \Delta t \text{ до момента } 2\Delta t: \quad {}^{2\Delta t}_{\Delta t} \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix}.$$

- Сделайте схематический рисунок элемента и его движений и определите градиент деформаций ${}^{2\Delta t}_0 \mathbf{X}$.
 - Рассчитайте спектральное разложение ${}^{\Delta t}_0 \mathbf{U}$ по типу (6.32).
 - Рассчитайте элементы разложения $\mathbf{X} = \mathbf{V}\mathbf{R}$ и дайте этому разложению концептуальную интерпретацию.
- 6.9. Рассмотрите показанный здесь осесимметричный элемент с четырьмя узлами. Рассчитайте градиент деформаций, а также правый и левый тензоры натяжений \mathbf{U} , \mathbf{V} .



6.10. Рассмотрите движение показанного здесь конечного элемента с четырьмя узлами. Рассчитайте для момента времени t

- градиент деформаций и полярные разложения $\mathbf{X} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ и $\mathbf{X} = \mathbf{V}\mathbf{R}$.
- Спектральные разложения тензоров \mathbf{U} и \mathbf{V} , выражаемые согласно (6.32) и (6.33).
- Тензоры скоростей деформации и спина, выражаемые согласно (6.42) и (6.43).



- Докажите справедливость соотношений (6.48)–(6.50).
- Докажите справедливость соотношений (6.56)–(6.61).
- Рассмотрите движение элемента с четырьмя узлами, заданного в упражнении 6.10. Рассчитайте $[\mathbf{A}]_{\alpha\alpha}$, $[\mathbf{\Omega}_L]_{\alpha\beta}$ и $[\mathbf{\Omega}_E]_{\alpha\beta}$, используя соотношения (6.48)–(6.50). Проверьте справедливость соотношений (6.46) и (6.47).
- Рассчитайте компоненты тензоров деформаций Грина–Лагранжа для элементов и их деформаций, показанных в упражнениях 6.1, 6.3 и 6.4. Для каждого случая конкретизируйте вид соотношений (6.51) и (6.53)–(6.55).
- Рассчитайте компоненты тензора деформаций Генcki в соответствии с (6.52) для элементов и их деформаций, показанных в упражнениях 6.1, 6.3 и 6.4.
- Рассмотрите элемент и его движение, заданные в упражнении 6.10. Для тензоров деформаций Грина–Лагранжа и Генcki рассчитайте $\dot{\mathbf{E}}_g$ согласно (6.57) путем прямого дифференцирования (6.56). Кроме того, определите $\dot{\mathbf{E}}_g$, используя детальные выражения из (6.59)–(6.61).
- Рассмотрите движение материального волокна $d^0\mathbf{x}$ в некотором теле.

- Докажите путем использования тензора деформаций Грина–Лагранжа, что для материального волокна справедливо соотношение

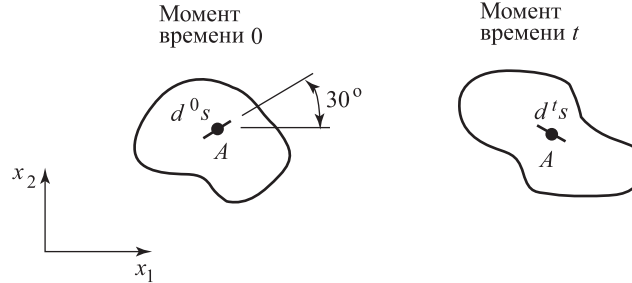
$${}^t_0\epsilon_{ij} d^0x_i d^0x_j = \frac{1}{2} [(d^t s)^2 - (d^0 s)^2],$$

где $(d^t s)^2 = d^t x_i d^t x_i$, $(d^0 s)^2 = d^0 x_i d^0 x_i$ и применимо соотношение (6.22).

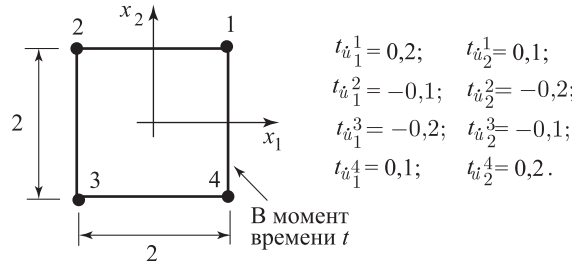
- Известно, что в точке A деформированного тела тензор деформаций Грина–Лагранжа равен

$${}^t_0\epsilon = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,2 & -0,3 \end{bmatrix}.$$

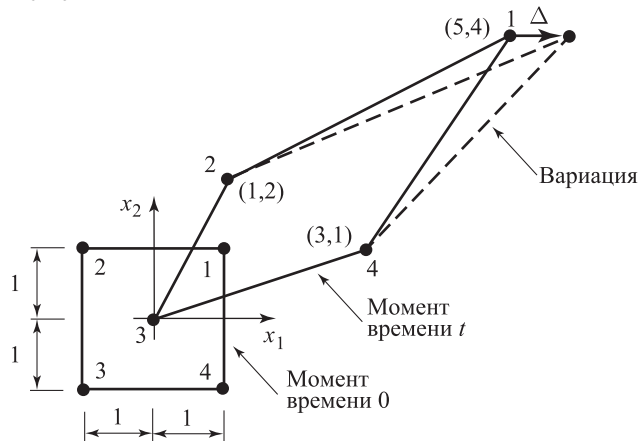
Найдите натяжение ${}^t\lambda$ показанного здесь линейного элемента $d^0s = \|d^0\mathbf{x}\|_2$. Можете ли вы рассчитать угол поворота этого линейного элемента? Поясните ваш ответ.



- 6.18. Скорости в узловых точках элемента с четырьмя узлами — такие, как показано здесь. Используя интерполяционные функции этого элемента, рассчитайте тензор скоростей деформаций и тензор спина для данного элемента. Объясните с помощью физической аргументации, почему ваш ответ правилен.



- 6.19. Рассмотрите элемент с плоскими деформациями, имеющий четыре узла, и его движение, в соответствии с упражнением 6.10. Вычислите компоненты ${}^tD_{mn}$, используя соотношение (6.64).
- 6.20. Рассмотрите показанный здесь элемент с плоскими деформациями, имеющий четыре узла. Вычислите компоненты тензора $\delta_t e_{mn}$, соответствующие виртуальному смещению $\delta u_1^1 = \Delta$ в узле 1, как функции 0x_1 и 0x_2 (все остальные $\delta u_j^k = 0$). Вычислите все требуемые матричные выражения, но не обязательно выполнять матричные умножения.



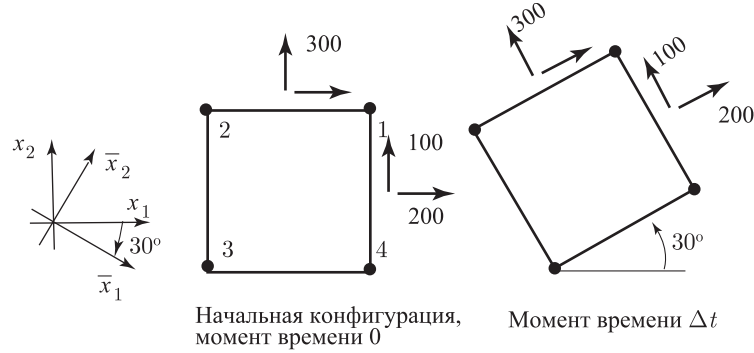
- 6.21. Рассмотрите показанный здесь элемент с четырьмя узлами, подвергаемый воздействию начального напряжения с компонентами

$$\begin{array}{l} \text{Начальное напряжение} \\ \text{(напряжение в момент 0)} \end{array} = {}^0_0\mathbf{S} \equiv {}^0\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} 200 & 100 \\ 100 & 300 \end{bmatrix}.$$

В своей начальной конфигурации элемент не деформирован. Предположите, что элемент подвергается повороту, как твердое тело, против часовой стрелки, на угол 30 градусов, за время от момента 0 до момента Δt .

- Рассчитайте напряжения Коши ${}^{\Delta t}\boldsymbol{\tau}$, соответствующие неподвижной системе координат x_1, x_2 .
- Рассчитайте вторые напряжения Пиолы–Кирхгофа ${}^{\Delta t}_0\mathbf{S}$, соответствующие x_1, x_2 .
- Рассчитайте градиент деформаций ${}^{\Delta t}_0\mathbf{X}$.

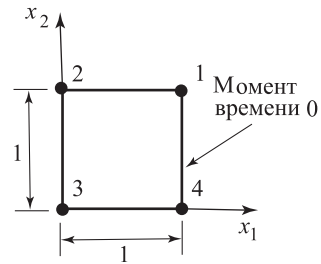
После этого предположите, что элемент сохраняет свою начальную конфигурацию, но что система поворачивается против часовой стрелки на угол 30 градусов.



- Рассчитайте напряжения Коши ${}^0\boldsymbol{\tau}$, соответствующие \bar{x}_1, \bar{x}_2 .
- Рассчитайте вторые напряжения Пиолы–Кирхгофа ${}^0_0\mathbf{S}$, соответствующие x_1, x_2 .
- Рассчитайте градиент деформаций ${}^0_0\mathbf{X}$, соответствующий \bar{x}_1, \bar{x}_2 .

6.22.

Показанный здесь конечный элемент с плоскими деформациями, имеющий четыре узла, в момент времени t испытывает воздействие вторых напряжений Пиолы–Кирхгофа



$${}^t_0\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 100 & 50 & 0 \\ 50 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}.$$

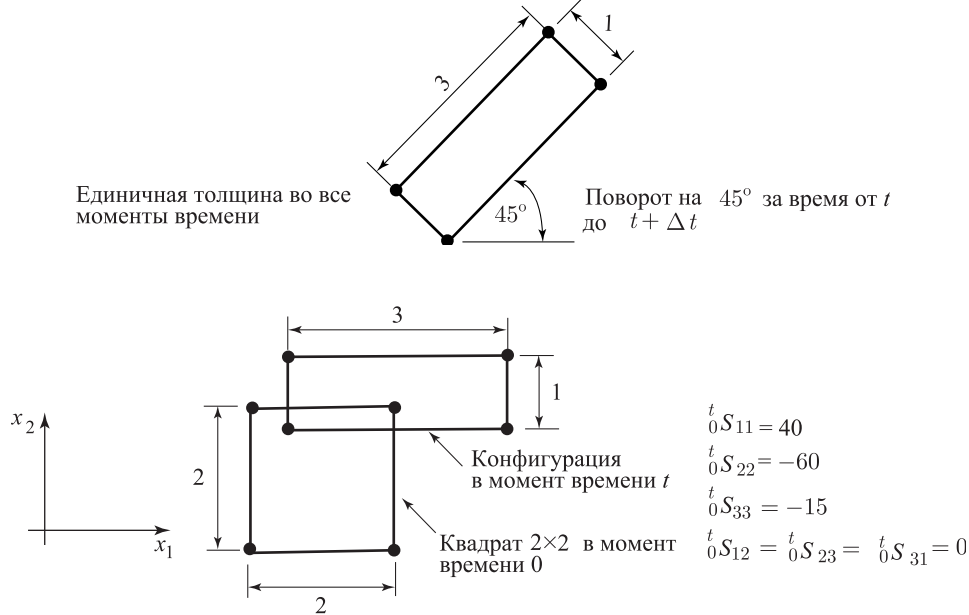
Градиент деформаций в момент t равен

$${}^t_0\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

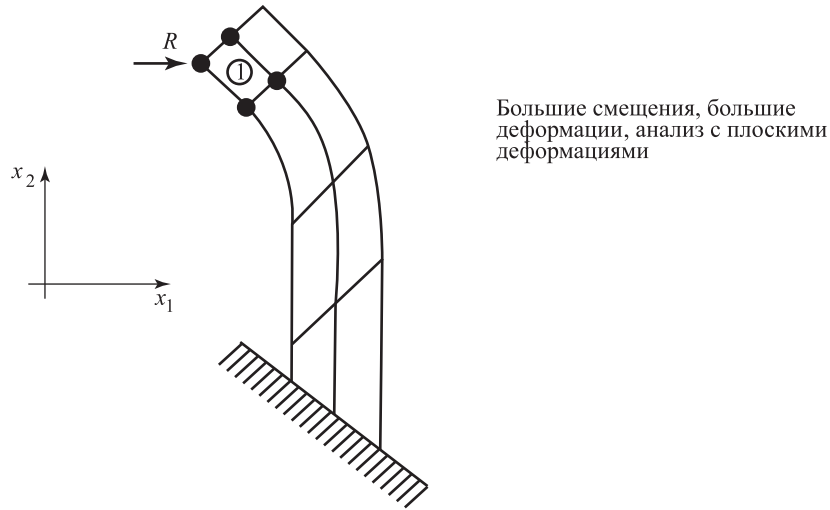
- (a) Сделайте схематический рисунок деформированной конфигурации в момент t .
- (b) В период времени от момента t до момента $t + \Delta t$ элемент подвергается повороту на угол 30 градусов против часовой стрелки, как твердое тело. Сделайте схематический рисунок конфигурации в момент $t + \Delta t$.
- (c) Рассчитайте соответствующие неподвижной декартовой системе координат
- напряжения Коши в момент t ,
 - напряжения Коши в момент $t + \Delta t$, и
 - вторые напряжения Пиолы–Кирхгофа в момент $t + \Delta t$.
- 6.23. Для показанного здесь элемента с плоскими деформациями, имеющего четыре узла, вторые напряжения Пиолы–Кирхгофа ${}^t_0\mathbf{S}$ соответствуют рисунку.

- (a) Рассчитайте напряжения Коши в момент времени t .
- (b) Определите вторые напряжения Пиолы–Кирхгофа в момент $t + \Delta t$, ${}^{t+\Delta t}_0\mathbf{S}$, а также напряжения Коши в момент $t + \Delta t$, ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\tau}$.

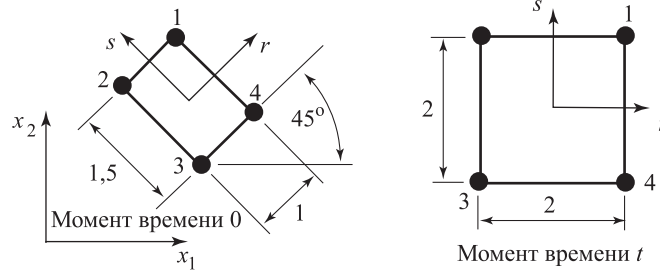
Все компоненты напряжений измеряются в неподвижной системе координат x_1, x_2 .



- 6.24. Мы использовали компьютерную программу для реализации представляемого на рисунке конечно-элементного анализа.



Мы хотели бы убедиться в том, что программа работает надлежащим образом. Этот процесс отчасти связан с рассмотрением элемента 1:



- (a) Рассчитайте градиент деформаций ${}^t_0\mathbf{X}$ порядка 2×2 в центроиде элемента (подсказка: вспомните, что ${}^t_0\mathbf{X} = {}^0_t\mathbf{X}^{-1}$).
- (b) Программа выдает также напряжения Коши в центроиде элемента:

$$\begin{bmatrix} {}^t\tau_{11} \\ {}^t\tau_{22} \\ {}^t\tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20,50 \\ 20,50 \\ 12,50 \end{bmatrix}.$$

Закон поведения материала, используемый при проводимом анализе, задается соотношением

$$\begin{bmatrix} {}^t_0S_{11} \\ {}^t_0S_{22} \\ {}^t_0S_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 7 & 0 \\ 7 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^t_0\epsilon_{11} \\ {}^t_0\epsilon_{22} \\ {}^t_0\epsilon_{12} \end{bmatrix}.$$

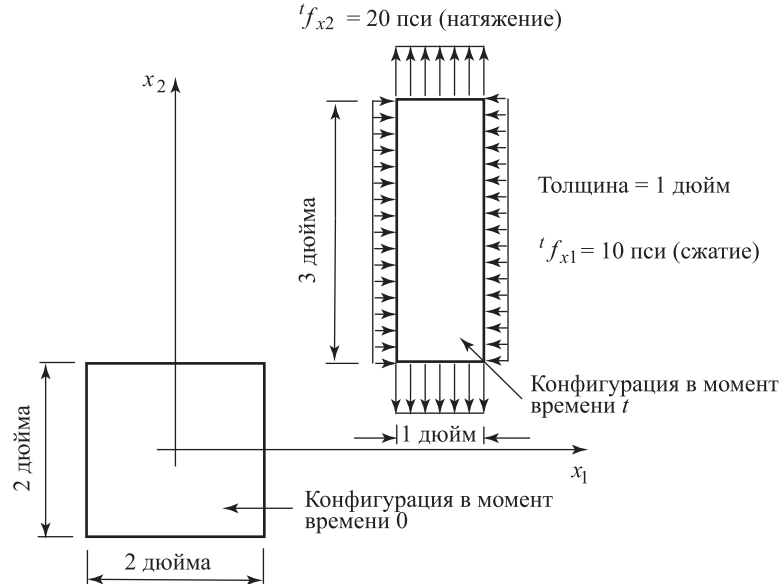
Покажите, что напряжения Коши, выдаваемые данной программой, не являются правильными, и вычислите правильные значения этих напряжений, базирующиеся на заданных смещениях элемента.

Можете ли вы идентифицировать ошибку программы?

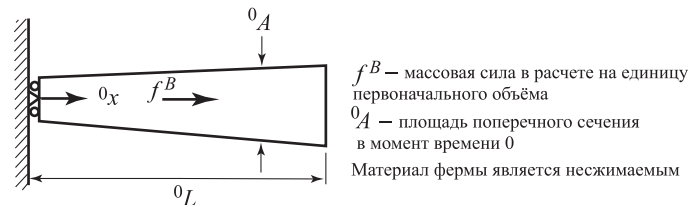
- 6.25. Рассмотрите показанный на рисунке лист материала.
Здесь

$${}^t u_1 = -\frac{1}{2} {}^0 x_1 + 3; \quad {}^t u_2 = \frac{1}{2} {}^0 x_2 + 2,5.$$

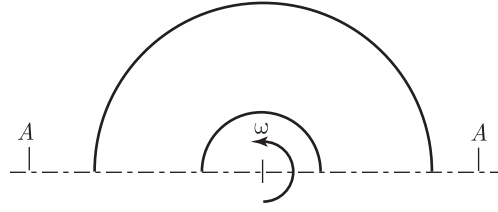
Кроме того, напряжения равны ${}^t\tau_{11} = -10$ пси; ${}^t\tau_{22} = 20$ пси; ${}^t\tau_{12} = 0$. Идентифицируйте шесть простых независимых форм распределения смещений и покажите, что для этих форм удовлетворяется принцип виртуальной работы.



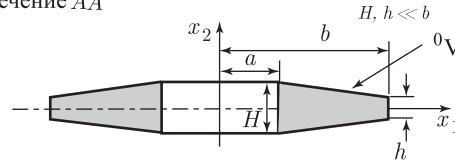
6.26. Рассмотрите одномерный анализ с большими деформациями для показанного здесь стержня.



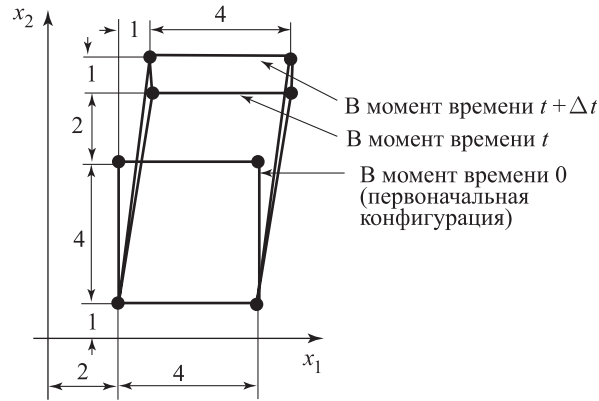
- Для поперечного сечения стержня выведите выражение второго напряжения Пиолы–Кирхгофа как функции напряжения Коши, отношения площадей ${}^t A / A_0$ и градиента деформаций.
 - Используя для начала принцип виртуальной работы, выведите определяющее дифференциальное уравнение равновесия в терминах величин, отнесенных к параметрам первоначальной конфигурации. Выведите также граничные условия.
 - Следующий шаг — перепишите определяющее дифференциальное уравнение в терминах величин, отнесенных к параметрам текущей конфигурации, и сравните это уравнение с дифференциальным уравнением, связанным с анализом на базе малых деформаций.
- 6.27. Рассмотрите тонкий диск, вращающийся относительно своей оси симметрии с постоянной угловой скоростью ω , как это показано здесь. Этот диск испытывает большие смещения. Конкретизируйте применительно к данному случаю общие уравнения принципа виртуальной работы, приведенные в таблицах 6.2 и 6.3. При проведении этого анализа рассматриваются только смещения частиц диска в направлении x_1 .



Сечение AA



- 6.28. Рассмотрите показанный здесь элемент с плоскими деформациями, имеющий четыре узла. Смещения узловых точек в моменты времени t и $t + \Delta t$ показаны на рисунке. Рассчитайте компоненты тензора деформаций Грина–Лагранжа с пошаговым приростом ${}^0\epsilon$ для периода времени от t до $t + \Delta t$.



- 6.29. При выводе формул в разделе 6.2.3 мы использовали соотношение

$$\int_{{}^0V} {}^{t+\Delta t}{}_0S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t}{}_0\epsilon_{ij} d{}^0V = \int_{{}^0V} {}^{t+\Delta t}{}_0S_{ij} \delta {}_0\epsilon_{ij} d{}^0V$$

и, следовательно, здесь $\delta {}^t{}_0\epsilon_{ij} = 0$. Однако мы использовали также и соотношение

$$\int_{{}^0V} {}^t{}_0S_{ij} \delta {}_0e_{ij} d{}^0V = \int_{{}^0V} {}^t{}_0S_{ij} \delta {}^t{}_0\epsilon_{ij} d{}^0V,$$

и здесь, следовательно, $\delta {}_0e_{ij} = \delta {}^t{}_0\epsilon_{ij}$ и ясно, что $\delta {}^t{}_0\epsilon_{ij} \neq 0$. Обсудите кратко, почему все эти уравнения верны.

- 6.30. Определите вторые напряжения Пиолы–Кирхгофа ${}^t{}_0S_{ij}$ и вариации деформаций Грина–Лагранжа $\delta {}^t{}_0\epsilon_{ij}$ для диска, представленного в упражнении 6.27, и покажите в явной форме, что для этого случая соотношение $\int_{{}^tV} {}^t\tau_{ij} \delta {}_ie_{ij} d{}^tV = \int_{{}^0V} {}^t{}_0S_{ij} \delta {}^t{}_0\epsilon_{ij} d{}^0V$ действительно оказывается справедливым.

6.3. Изапараметрические конечные элементы сплошной среды, базирующиеся на учете смещений

В предыдущем разделе мы сформулировали линеаризованный принцип виртуальных перемещений (линеаризованный по отношению к состоянию в момент времени t) применительно к *сплошной среде*. Единственной группой переменных в этих уравнениях являются смещения материальных частиц.

Если рассматриваются конечные элементы, степенями свободы которых являются только смещения узловых точек, то определяющие конечно-элементные матрицы, соответствующие полной линеаризации принципа виртуальных перемещений относительно состояния в момент времени t , могут быть получены непосредственно, путем использования приведенных в предыдущем разделе уравнений. Ключевое замечание, которое следует при этом сделать, сводится к тому, что в этом случае элементные степени свободы, т.е. элементные смещения, являются именно теми переменными, по отношению к которым был линеаризован общий принцип виртуальных перемещений. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, давайте рассмотрим приводимый ниже вывод. Этот вывод покажет также, что если используются иные степени свободы, отличные от смещений, наподобие поворотов в конструкционных элементах или напряжений при смешанных формулировках, то линеаризация по отношению к таким конечно-элементным степеням свободы более эффективно реализуется с помощью прямого разложения в ряд Тейлора по отношению к таким переменным.

6.3.1. Линеаризация принципа виртуальной работы по отношению к конечно-элементным переменным

Принцип виртуальных перемещений в полной лагранжевой формулировке задается соотношением

$$\int_{0V} {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} d^0 V = {}^{t+\Delta t} \mathcal{R}. \quad (6.89)$$

Давайте линеаризуем выражение в левой части этого соотношения по отношению к конечно-элементной узловой степени свободы общего вида ${}^t a_k$, где ${}^t a_k$ может обозначать или смещение, или поворот. Мы предполагаем, что ${}^{t+\Delta t} \mathcal{R}$ не зависит от деформаций. Тогда с помощью разложения в ряд Тейлора получим

$${}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} \doteq {}^t S_{ij} \delta {}^t \epsilon_{ij} + \frac{\partial}{\partial {}^t a_k} ({}^t S_{ij} \delta {}^t \epsilon_{ij}) da_k, \quad (6.90)$$

где da_k представляет собой дифференциальное приращение величины ${}^t a_k$. Заметим, что

$$\delta {}^t \epsilon_{ij} = \frac{\partial {}^t \epsilon_{ij}}{\partial {}^t a_l} \delta a_l, \quad (6.91)$$

где da_l — это вариация величины ${}^t a_l$ и, следовательно, эта вариация вычисляется по отношению к узловому параметру ${}^t a_l$, определяемому для конфигурации в момент времени t .

Второй член правой части (6.90) может дифференцироваться по правилу цепочки, чтобы получить

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial {}^t a_k} ({}^t S_{ij} \delta {}^t \epsilon_{ij}) da_k &= \frac{\partial {}^t S_{ij}}{\partial {}^t a_k} \delta {}^t \epsilon_{ij} da_k + {}^t S_{ij} \frac{\partial}{\partial {}^t a_k} (\delta {}^t \epsilon_{ij}) da_k = \\ &= \left(\frac{\partial {}^t S_{ij}}{\partial {}^t \epsilon_{rs}} \frac{\partial {}^t \epsilon_{rs}}{\partial {}^t a_k} \right) \left(\frac{\partial {}^t \epsilon_{ij}}{\partial {}^t a_l} \delta a_l \right) da_k + {}^t S_{ij} \frac{\partial}{\partial {}^t a_k} \left(\frac{\partial {}^t \epsilon_{ij}}{\partial {}^t a_l} \delta a_l \right) da_k = \end{aligned} \quad (6.92)$$

$$= {}^0 C_{ijrs} \frac{\partial {}^t \epsilon_{rs}}{\partial {}^t a_k} \frac{\partial {}^t \epsilon_{ij}}{\partial {}^t a_l} \delta a_l da_k + {}^t S_{ij} \frac{\partial^2 {}^t \epsilon_{ij}}{\partial {}^t a_k \partial {}^t a_l} \delta a_l da_k,$$

где на последнем этапе мы воспользовались выражением

$$\frac{\partial {}^t S_{ij}}{\partial {}^t \epsilon_{rs}} = {}^0 C_{ijrs}. \quad (6.93)$$

Далее, используя определение деформации Грина–Лагранжа, мы получаем

$$\frac{\partial_0^t \epsilon_{ij}}{\partial^t a_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_0^t u_{i,j}}{\partial^t a_k} + \frac{\partial_0^t u_{j,i}}{\partial^t a_k} + {}^t_0 u_{m,i} \frac{\partial_0^t u_{m,j}}{\partial^t a_k} + {}^t_0 u_{m,j} \frac{\partial_0^t u_{m,i}}{\partial^t a_k} \right) \quad (6.94)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 {}^t_0 \epsilon_{ij}}{\partial^t a_k \partial^t a_l} = \frac{1}{2} \left({}^t_0 x_{m,i} \frac{\partial^2 {}^t_0 u_{m,j}}{\partial^t a_k \partial^t a_l} + {}^t_0 x_{m,j} \frac{\partial^2 {}^t_0 u_{m,i}}{\partial^t a_k \partial^t a_l} + \right. \\ \left. + \frac{\partial_0^t u_{m,i}}{\partial^t a_k} \frac{\partial_0^t u_{m,j}}{\partial^t a_l} + \frac{\partial_0^t u_{m,i}}{\partial^t a_l} \frac{\partial_0^t u_{m,j}}{\partial^t a_k} \right). \quad (6.95) \end{aligned}$$

Подстановка выражений (6.90) и (6.92) в уравнение принципа виртуальных перемещений дает

$$\begin{aligned} \left\{ \int_{{}_0V} {}_0 C_{ijrs} \frac{\partial_0^t \epsilon_{rs}}{\partial^t a_k} \frac{\partial_0^t \epsilon_{ij}}{\partial^t a_l} d^0 V + \int_{{}_0V} {}^t_0 S_{ij} \frac{\partial^2 {}^t_0 \epsilon_{ij}}{\partial^t a_k \partial^t a_l} d^0 V \right\} da_k \delta a_l = \\ = {}^{t+\Delta t} \mathcal{R}_l - \left(\int_{{}_0V} {}^t_0 S_{ij} \frac{\partial_0^t \epsilon_{ij}}{\partial^t a_l} d^0 V \right) \delta a_l, \quad (6.96) \end{aligned}$$

где символ ${}^{t+\Delta t} \mathcal{R}$ означает внешнюю виртуальную работу, соответствующую δa_l .

Если теперь мы сравним выражение в (6.96) (используя также (6.94) и (6.95)) с линеаризованным выражением принципа виртуальных перемещений из таблицы 6.2, то обнаружим, что для изопараметрических, базирующихся на учете смещений элементов сплошной среды, имеющих только степени свободы, соответствующие узловым смещениям, оба вышеуказанных выражения могут быть непосредственно и без труда применены для получения одних и тех же конечно-элементных уравнений. А именно, вторые производные градиентов смещений по отношению к фигурирующим в (6.95) переменным для узловых точек тогда уже не будут равны нулю, и их влияние также должно быть учтено при анализе. Следовательно, если используются линеаризации для сплошной среды, приводимые в таблицах 6.2 и 6.3, то следует признать, что члены ${}^t_0 S_{ij} \delta_0 e_{ij}$ и ${}^t \tau_{ij} \delta_t e_{ij}$, фигурирующие в правых частях этих уравнений, вносят свой вклад в выражения матриц жесткости, если только δe_{ij} и δe_{ij} не являются линейными функциями переменных для узловых точек (см. раздел 6.5).

Если, в качестве дополнения, используются элементные степени свободы, отличные от смещений и поворотов, то приведенный выше подход к линеаризации оказывается, бесспорно, весьма эффективным (см. раздел 6.4 с выводом формулировок типа смещение/давление).

Мы рассмотрели здесь только полностью лагранжеву формулировку, однако должны признать, что та же самая процедура линеаризации применима и к предварительно заданным лагранжевым формулировкам, а также и ко всей совокупности этих формулировок с различными описаниями поведения материала. Та же процедура может использоваться и для линеаризации члена уравнения (6.89), соответствующего внешней виртуальной работе в том случае, когда нагрузка зависит от деформации.

6.3.2. Общие матричные уравнения для элементов сплошной среды, базирующихся на учете смещений

Сейчас мы рассмотрим более подробно матрицы изопараметрических конечных элементов сплошной среды, имеющих только степени свободы типа смещений.

Основные этапы вывода определяющих конечно-элементных уравнений остаются теми же, какие использовались при линейном анализе: выбор интерполяционных функций и с помощью этих функций интерполяция элементных координат и смещений, входящих в определяющие уравнения механики сплошной среды. Определяющие конечно-элементные уравнения получаются путем привлечения линеаризованного принципа виртуальных смещений для каждого из смещений в узловых точках по очереди. Как и при линейном анализе, при этом выводе нам нужно рассматривать только одиночный элемент конкретного типа, так как определяющие уравнения равновесия для комплекса элементов могут быть построены с использованием процедуры прямой жесткости.

Рассматривая элементные интерполяции координат и смещений, мы должны признать важность того, чтобы одни и те же интерполяции для координат и смещений применялись во все моменты движения исследуемого элемента. Если учесть, что новые элементные координаты получаются путем прибавления элементных смещений к первоначальным координатам, то, следовательно, использование одних и тех же интерполяций для смещений и координат представляет собой последовательный подход к решению и означает, что обсуждения требований сходимости, приведенные в разделах 4.3 и 5.3.3, непосредственно применимы к анализу с пошаговыми приращениями. Тогда, в частности, будет обеспечено, что комплекс элементов, совместимых по смещениям при пересечении границ между элементами в первоначальной конфигурации, будет сохранять эту совместимость во всех последующих конфигурациях.

В разделах 6.2.3 и 6.3.1 мы вывели основные уравнения с пошаговым приростом, используемые в наших конечно-элементных моделях. На практике необходимо проводить итерации, причем мы убедились, что уравнения из таблиц 6.2 и 6.3, а также из раздела 6.3.1, представляют собой те основные уравнения, которые используются при таких итерациях. Следовательно, в нашем последующем изложении нам нужно только сосредоточиться на основных уравнениях с пошаговым приростом, приводимых в таблицах 6.2 и 6.3 (с обсуждением их в разделе 6.3.1) и подытоженных в (6.74) и (6.75).

Далее, подставляя в эти уравнения интерполяции для координат и смещений данного элемента, как мы уже делали это при линейном анализе, мы получаем — для одиночного элемента или для комплекса элементов —
при анализе, связанном только с нелинейным поведением материала:
статический анализ:

$${}^t\mathbf{K}\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F}; \quad (6.97)$$

динамический анализ при неявном интегрировании по времени:

$$\mathbf{M} {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} + {}^t\mathbf{K}\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F}; \quad (6.98)$$

динамический анализ при явном интегрировании по времени:

$$\mathbf{M} {}^t\ddot{\mathbf{U}} = {}^t\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F}; \quad (6.99)$$

при использовании формулировки TL:

статический анализ:

$$({}_0^t\mathbf{K}_L + {}_0^t\mathbf{K}_{NL})\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}_0^t\mathbf{F}; \quad (6.100)$$

динамический анализ при неявном интегрировании по времени:

$$\mathbf{M} {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} + ({}_0^t\mathbf{K}_L + {}_0^t\mathbf{K}_{NL})\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}_0^t\mathbf{F}; \quad (6.101)$$

динамический анализ при явном интегрировании по времени:

$$\mathbf{M} {}^t\ddot{\mathbf{U}} = {}^t\mathbf{R} - {}_0^t\mathbf{F}; \quad (6.102)$$

и при использовании формулировки UL:

статический анализ:

$$({}_t^t\mathbf{K}_L + {}_t^t\mathbf{K}_{NL})\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}_t^t\mathbf{F}; \quad (6.103)$$

динамический анализ при неявном интегрировании по времени:

$$\mathbf{M} {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} + ({}_t^t\mathbf{K}_L + {}_t^t\mathbf{K}_{NL})\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}_t^t\mathbf{F}; \quad (6.104)$$

динамический анализ при явном интегрировании по времени:

$$\mathbf{M} {}^t\ddot{\mathbf{U}} = {}^t\mathbf{R} - {}_t^t\mathbf{F}, \quad (6.105)$$

где \mathbf{M} — не зависящая от времени матрица масс,

${}^t\mathbf{K}$ — матрица жесткости при линейных деформациях, с пошаговым приростом, не включающая эффект начального смещения,

${}_0^t\mathbf{K}_L$, ${}_t^t\mathbf{K}$ — матрицы жесткости при линейных деформациях с пошаговым приростом, ${}_0^t\mathbf{K}_{NL}$, ${}_t^t\mathbf{K}_{NL}$ — матрицы жесткости при нелинейных деформациях (геометрических или вследствие начального напряжения) с пошаговым приростом,

${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}$ — вектор внешних нагрузок, приложенных в узловых точках в момент времени $t + \Delta t$; этот же вектор используется в момент времени t при явном интегрировании по времени,

${}^t\mathbf{F}, {}_0^t\mathbf{F}, {}^t\mathbf{F}$ — векторы сил, действующих в узловых точках и эквивалентных элементарным напряжениям в момент времени t ,

\mathbf{U} — вектор приращения смещений в узловой точке ${}^t\ddot{\mathbf{U}}, {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}$ — векторы ускорений в узловой точке в моменты времени t и $t + \Delta t$.

При вышеописанной конечно-элементной дискретизации мы предположили, что эффекты демпфирования пренебрежимо малы или могут моделироваться с помощью нелинейных основополагающих соотношений (например, путем применения закона поведения материала, зависящего от скорости деформации). Мы предположили также, что нагрузки, приложенные извне, не зависят от деформаций и, следовательно, вектор нагрузки, соответствующий всем пространственным (или временным) шагам изменения этой нагрузки может быть рассчитан до начала анализа с пошаговыми приращениями. Если нагрузки содержат компоненты, зависящие от деформаций, то вектор нагрузки необходимо предварительно задать и итерировать, как это вкратце обсуждалось в разделе 6.2.3.

Приведенные выше конечно-элементные матрицы вычисляются так же, как и при линейном анализе. Таблица 6.4 сводит воедино — для одиночного элемента — основные интегралы, встречающиеся при расчетах, и соответствующие им матричные выражения. При расчете элементных матриц используются следующие обозначения:

- \mathbf{H}^S, \mathbf{H} — интерполяционные матрицы для поверхностных и объемных смещений,
- ${}^{t+\Delta t}{}_0\mathbf{f}^S, {}^{t+\Delta t}{}_0\mathbf{f}^B$ — векторы поверхностных и объемных сил, определяемые в расчете на единицу площади и единицу объема элемента в момент времени 0,
- $\mathbf{B}_L, {}_0^t\mathbf{B}_L, {}^t\mathbf{B}_L$ — нелинейные матрицы преобразования деформация–смещение,
- \mathbf{C} — матрица напряжение–деформация, определяющая свойство материала (полная или с пошаговым приростом,)
- ${}_0\mathbf{C}, {}^t\mathbf{C}$ — матрицы с пошаговым приростом, определяющие свойство материала,
- ${}^t\boldsymbol{\tau}, {}^t\hat{\boldsymbol{\tau}}$ — матрица и вектор напряжений Коши,
- ${}_0^t\mathbf{S}, {}^t\hat{\mathbf{S}}$ — матрица и вектор вторых напряжений Пиолы–Кирхгофа,
- ${}^t\hat{\mathbf{S}}$ — вектор напряжений при нелинейном анализе, базирующемся только на свойствах материала.

Эти матрицы зависят от конкретного вида рассматриваемого элемента. Матрицы интерполяции смещений, как и при линейном анализе, просто комплектуются из интерполяционных функций для смещений. В последующих разделах мы обсудим расчет матриц деформация–смещение, а также матриц и векторов напряжений, соответствующих элементам сплошной среды и рассмотренных ранее в главе 5 для случая линейного анализа. Это обсуждение будет сокращенным, так как основные численные процедуры, применяемые при расчете конечно-элементных матриц, — это те процедуры, которые уже были рассмотрены. Например, мы вновь рассматриваем элементы с переменным числом узлов, интерполяционные функции для которых уже были представлены ранее. Как и прежде, интерполяционные функции для смещений и матрицы деформация–смещение выражаются в терминах изопараметрических координат. Так, вычисление интегралов, приводимых в табл. 6.4, реализуется так, как это объясняется в разделе 5.5.

В процессе последующего обсуждения мы рассматриваем только формулировки UL и TL, так как матрицы анализа, нелинейного только для материала, могут быть непосредственно получены из этих формулировок, и нам следует позаботиться лишь о необходимых кинематических выражениях. Вычисление напряжений и матриц напряжение–

Таблица 6.4. Конечно-элементные матрицы

Тип анализа	Интеграл	Оценка вида матриц
При всех видах анализа	$\int_{^0V} {}^0\rho^{t+\Delta t} \ddot{u}_i \delta u_i d^0V$ ${}^{t+\Delta t}\mathcal{R} = \int_{^0S_f} {}^{t+\Delta t}f_i^S \delta u_i^S d^0S$ $+ \int_{^0V} {}^{t+\Delta t}f_i^B \delta u_i d^0V$	$\mathbf{M}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}} = \left(\int_{^0V} {}^0\rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} d^0V \right) {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}}$ ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R} = \int_{^0S_f} \mathbf{H}^{S^T} {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^S d^0S$ $+ \int_{^0V} \mathbf{H}^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^B d^0V$
Только материально нелинейный	$\int_V C_{ijrs} e_{rs} \delta e_{ij} dV$ $\int_V {}^i\sigma_{ij} \delta e_{ij} dV$	${}^t\mathbf{K}\hat{\mathbf{u}} = \left(\int_V \mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L dV \right) \hat{\mathbf{u}}$ ${}^t\mathbf{F} = \int_V \mathbf{B}_L^T {}^t\hat{\boldsymbol{\Sigma}} dV$
Полная лагранжева формулировка	$\int_{^0V} {}^0C_{ijrs} {}^0e_{rs} \delta {}^0e_{ij} d^0V$ $\int_{^0V} {}^0S_{ij} \delta {}^0\eta_{ij} d^0V$ $\int_{^0V} {}^0S_{ij} \delta {}^0e_{ij} d^0V$	${}^t_0\mathbf{K}_L\hat{\mathbf{u}} = \left(\int_{^0V} {}^T_0 \mathbf{B}_L L^T {}^t_0 \mathbf{C} {}^t_0 \mathbf{B}_L d^0V \right) \hat{\mathbf{u}}$ ${}^t_0\mathbf{K}_{NL}\hat{\mathbf{u}} = \left(\int_{^0V} {}^t_0 \mathbf{B}_{NL}^T {}^t_0 \mathbf{S} {}^t_0 \mathbf{B}_{NL} d^0V \right) \hat{\mathbf{u}}$ ${}^t_0\mathbf{F} = \int_{^0V} {}^t_0 \mathbf{B}_L^T {}^t_0 \hat{\mathbf{S}} d^0V$
Модифицированная лагранжева формулировка	$\int_{^tV} {}^tC_{ijrs} {}^te_{rs} \delta {}^te_{ij} d^tV$ $\int_{^tV} {}^t\tau_{ij} \delta {}^t\eta_{ij} d^tV$ $\int_{^tV} {}^t\tau_{ij} \delta {}^te_{ij} d^tV$	${}^t\mathbf{K}_L\hat{\mathbf{u}} = \left(\int_{^tV} {}^t\mathbf{B}_L^T {}^t\mathbf{C} {}^t\mathbf{B}_L d^tV \right) \hat{\mathbf{u}}$ ${}^t\mathbf{K}_N\hat{\mathbf{u}} = \left(\int_{^tV} {}^t\mathbf{B}_{NL}^T {}^t\boldsymbol{\tau} {}^t\mathbf{B}_{NL} d^tV \right) \hat{\mathbf{u}}$ ${}^t\mathbf{F} = \int_{^tV} {}^t\mathbf{B}_L^T {}^t\hat{\boldsymbol{\tau}} d^tV$

деформация для интересующих нас элементов зависит от используемой модели материала. Эти соображения обсуждаются в разделе 6.6.

6.3.3. Элементы, моделирующие фермы и канаты

Как это уже обсуждалось в разделе 4.2.3, ферменный элемент представляет собой деталь конструкции, способную передавать напряжения только в направлении, нормальном к поперечному сечению. Предполагается, что это нормальное напряжение остается постоянным вдоль всей площади поперечного сечения.

Ниже мы рассмотрим ферменный элемент, имеющий произвольную ориентацию в пространстве. Для описания этого элемента выделяется от двух до четырех узлов, как это показано на рис. 6.13, а сам элемент испытывает большие смещения и большие деформации. Глобальные координаты узловых точек элемента в момент времени 0 равны ${}^0x_1^k, {}^0x_2^k, {}^0x_3^k$, а в момент времени t — ${}^tx_1^k, {}^tx_2^k, {}^tx_3^k$, где $k = 1, \dots, N$, а N — это число узлов ($2 \leq N \leq 4$). Предполагается, что эти координаты узловых точек определяют собой пространственную конфигурацию рассматриваемой фермы в моменты 0 и t ,

с использованием формул

$${}^0x_1(r) = \sum_{k=1}^N h_k {}^0x_1^k; \quad {}^0x_2(r) = \sum_{k=1}^N h_k {}^0x_2^k; \quad {}^0x_3 = \sum_{k=1}^N h_k {}^0x_3^k \quad (6.106)$$

и

$${}^tx_1(r) = \sum_{k=1}^N h_k {}^tx_1^k; \quad {}^tx_2(r) = \sum_{k=1}^N h_k {}^tx_2^k; \quad {}^tx_3(r) = \sum_{k=1}^N h_k {}^tx_3^k, \quad (6.107)$$

где интерполяционные функции $h_k(r)$ были определены на рис. 5.4. Если использовать (6.106) и (6.107), то получим, следовательно,

$${}^tu_i(r) = \sum_{k=1}^N h_k {}^tu_i^k \quad (6.108)$$

и

$$u_i(r) = \sum_{k=1}^N h_k u_i^k, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.109)$$

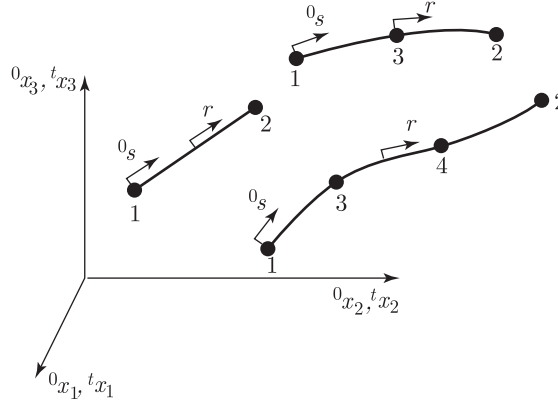


Рис. 6.13. Ферменный элемент, имеющий от двух до четырех узлов

Учитывая, что единственный вид напряжения для ферменного элемента — это нормальное напряжение, действующее на площади его поперечного сечения, мы рассматриваем только соответствующие продольные деформации. Обозначая волной сверху продольную локальную деформацию элемента, в формулировке TL будем иметь

$${}^t\tilde{\epsilon}_{11} = \frac{d^0x_i}{d^0s} \frac{d^tu_i}{d^0s} + \frac{1}{2} \frac{d^tu_i}{d^0s} \frac{d^tu_i}{d^0s}, \quad (6.110)$$

где ${}^0s(r)$ — это длина дуги в момент времени 0 для материальной точки ${}^0x_1(r)$, ${}^0x_2(r)$, ${}^0x_3(r)$, заданная выражением

$${}^0s(r) = \sum_{k=1}^N h_k {}^0s_k. \quad (6.111)$$

Приращение компонента деформации ${}^t\tilde{\epsilon}_{11}$ обозначается как ${}^0\tilde{\epsilon}_{11}$, где ${}^0\tilde{\epsilon}_{11} = {}^0\tilde{\epsilon}_{11} + {}^0\tilde{\eta}_{11}$, а также

$${}^0\tilde{\epsilon}_{11} = \frac{d^0x_i}{d^0s} \frac{du_i}{d^0s} + \frac{d^tu_i}{d^0s} \frac{du_i}{d^0s}, \quad (6.112)$$

$${}^0\tilde{\eta}_{11} = \frac{1}{2} \frac{du_i}{d^0s} \frac{du_i}{d^0s}. \quad (6.113)$$

Для матриц деформация–смещение мы вводим обозначения

$${}^0\hat{\mathbf{x}}^T = [{}^0x_1^1 \quad {}^0x_2^1 \quad {}^0x_3^1 \quad \dots \quad {}^0x_1^N \quad {}^0x_2^N \quad {}^0x_3^N], \quad (6.114)$$

$${}^t\hat{\mathbf{u}}^T = [{}^tu_1^1 \quad {}^tu_2^1 \quad {}^tu_3^1 \quad \dots \quad {}^tu_1^N \quad {}^tu_2^N \quad {}^tu_3^N],$$

$$\hat{\mathbf{u}}^T = [u_1^1 \quad u_2^1 \quad u_3^1 \quad \dots \quad u_1^N \quad u_2^N \quad u_3^N], \quad (6.115)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ h_1 \mathbf{I}_3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}; \quad \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.116)$$

и, следовательно, используя (6.112) и (6.113), получаем

$${}^t_0 \mathbf{B}_L = ({}^0 J^{-1})^2 ({}^0 \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{H}_{,r}^T \mathbf{H}_{,r} + {}^t \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{H}_{,r}^T \mathbf{H}_{,r}) \quad (6.117)$$

и

$${}^t_0 \mathbf{B}_{NL} = {}^0 J^{-1} \mathbf{H}_{,r}, \quad (6.118)$$

где ${}^0 J^{-1} = dr/d^0 s$. Заметим, что поскольку матрица ${}^t_0 \mathbf{B}_{NL}$ не зависит от ориентации элемента, то то же самое относится и к матрице ${}^t_0 \mathbf{K}_{NL}$.

Единственным отличным от нуля компонентом напряжения является ${}^t_0 \tilde{S}_{11}$, который мы предполагаем заданным в форме функции от деформации Грина–Лагранжа ${}^t_0 \tilde{\epsilon}_{11}$ в момент t (см. раздел 6.6). В силу этого отношение касательных напряжений и деформаций равно

$${}^t_0 \tilde{C}_{1111} = \frac{\partial {}^t_0 \tilde{S}_{11}}{\partial {}^t_0 \tilde{\epsilon}_{11}}. \quad (6.119)$$

Если использовать формулы (6.114)–(6.119), то матрицы ферменного элемента можно непосредственно рассчитать по формулам данным в таблице 6.4. Если обратиться к таблицам 6.2, 6.3 и 6.4, то приведенные выше соотношения могут быть непосредственно применены к построению формулировки UL и, конечно же, к схеме с нелинейностью, обусловленной только поведением материала. Рассмотрим приводимые ниже примеры.

Пример 6.16: Для ферменного элемента с двумя узлами, показанного на рис. 6.14, требуется построить матрицу касательной жесткости и вектор силы, соответствующие конфигурации в момент времени t . Следует рассматривать условия больших смещений и больших деформаций.

Отметим, что элемент является прямолинейным и в момент времени 0 направлен вдоль оси ${}^0 x_1$. Поэтому нам нет необходимости использовать значок волны над обозначениями компонентов напряжений и деформаций, а уравнения для выбираемой модели оказываются несколько проще, чем уравнения (6.110)–(6.119). Чтобы подчеркнуть некоторые важные обстоятельства, в последующем изложении мы используем подходы с двумя формулировками.

Первый подход: вычисление элементных матриц с использованием таблиц 6.4: Если воспользоваться формулировкой TL, то мы должны выразить приведенные в таблице 6.2 (а также в формулах (6.112) и (6.113)) деформации ${}^0 e_{11}$ и ${}^0 \eta_{11}$ в терминах функций, определяющих элементные смещения. Учитывая, что ферменный элемент испытывает смещения только в плоскости ${}^0 x_1, {}^0 x_2$, мы получаем

$${}^0 e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial {}^0 x_1} + \frac{\partial^t u_1}{\partial {}^0 x_1} \frac{\partial u_1}{\partial {}^0 x_1} + \frac{\partial^t u_2}{\partial {}^0 x_1} \frac{\partial u_2}{\partial {}^0 x_1},$$

$${}^0 \eta_{11} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial {}^0 x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial {}^0 x_1} \right)^2 \right].$$

Однако в силу геометрии задачи, или используя выражения ${}^t u_i = \sum_{k=1}^2 h_k {}^t u_i^k$ при ${}^t u_1^1 = 0$, ${}^t u_2^1 = 0$, ${}^t u_1^2 = ({}^0 L + \Delta L) \cos \theta - {}^0 L$, ${}^t u_2^2 = ({}^0 L + \Delta L) \sin \theta$, ${}^0 J = {}^0 L/2$ и при интерполяционных функциях, приведенных на рис. 5.4, получаем

$$\frac{\partial^t u_1}{\partial {}^0 x_1} = \frac{({}^0 L + \Delta L) \cos \theta}{{}^0 L} - 1; \quad \frac{\partial^t u_2}{\partial {}^0 x_1} = \frac{({}^0 L + \Delta L) \sin \theta}{{}^0 L}.$$

На этом основании мы имеем

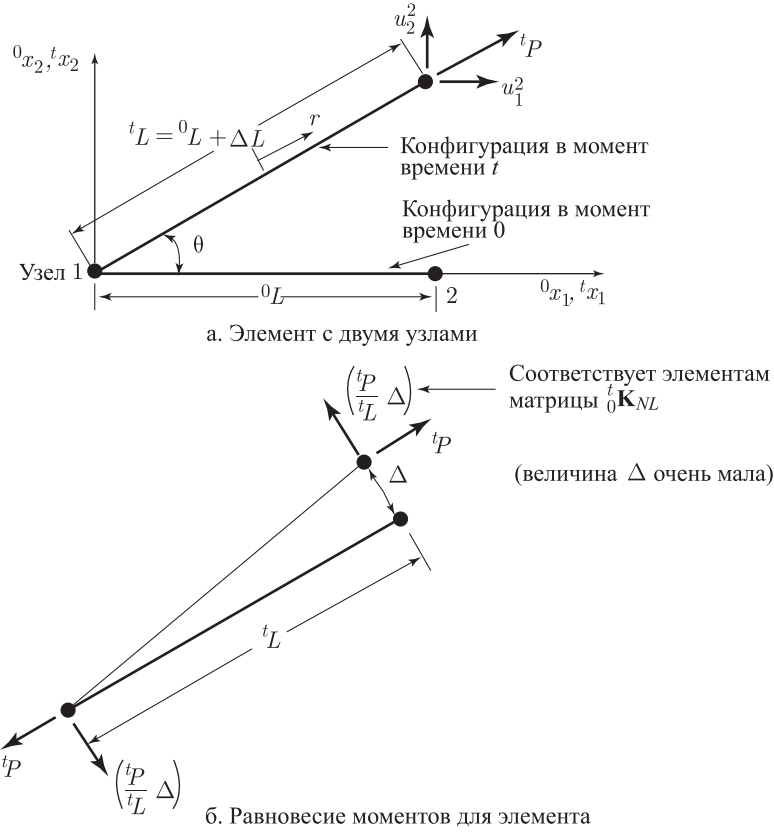


Рис. 6.14. Схема для ферменного элемента с двумя узлами

$$\begin{aligned}
 {}_0e_{11} &= \frac{1}{{}_0L} \left\{ [-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0] + \left(\frac{{}_0L + \Delta L}{{}_0L} \cos \theta - 1 \right) [-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0] + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{{}_0L + \Delta L}{{}_0L} \sin \theta \right) [0 \quad -1 \quad 0 \quad 1] \right\} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{{}_0L + \Delta L}{{}_0L^2} [-\cos \theta \quad -\sin \theta \quad \cos \theta \quad \sin \theta] \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

и, следовательно,

$${}^t\mathbf{B}_L = \frac{{}_0L + \Delta L}{{}_0L^2} [-\cos \theta \quad -\sin \theta \quad \cos \theta \quad \sin \theta].$$

Разумеется, тот же самый результат для ${}^t\mathbf{B}_L$ получается, если воспользоваться выражением (6.117). Нелинейная матрица деформация–смещение имеет вид (как это следует

из формулы (6.118))

$${}^t\mathbf{B}_{NL} = \frac{1}{{}^0L} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

При использовании полной лагранжевой формулировки мы предполагаем, что ${}^tS_{11}$ задается в терминах ${}^t\epsilon_{11}$ и, следовательно, имеем

$${}^0C_{1111} = \frac{\partial {}^tS_{11}}{\partial {}^t\epsilon_{11}}.$$

Если мы используем соотношение ${}^tS_{11} = E_0^t\epsilon_{11}$, то, естественно, мы имеем ${}^0C_{1111} = E$. А отсюда следует, что матрица касательной жесткости и вектор силы выражаются как

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{K} = {}^0C_{1111} \frac{({}^0L + \Delta L)^2}{({}^0L)^3} {}^0A & \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ & \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta \\ & & \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ & & & \sin^2 \theta \end{bmatrix} + \\ & + \frac{{}^tP}{{}^0L + \Delta L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (a) \\ {}^t\mathbf{F} = {}^tP & \begin{bmatrix} -\cos \theta \\ -\sin \theta \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где tP — это текущее значение силы, действующей на ферменный элемент. Полагая, что напряжение Коши равно ${}^tP/{}^tA$, мы использовали здесь соотношения

$$\begin{aligned} {}^tS_{11} &= \frac{{}^0\rho}{{}^t\rho} \left(\frac{{}^0L}{{}^0L + \Delta L} \right)^2 \frac{{}^tP}{{}^tA}; \quad {}^t\epsilon_{11} = \frac{\Delta L}{{}^0L} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta L}{{}^0L} \right)^2; \\ {}^0\rho {}^0L {}^0A &= {}^t\rho ({}^0L + \Delta L) {}^tA; \quad {}^tS_{11} = \frac{{}^0L}{{}^0L + \Delta L} \frac{{}^tP}{{}^0A}; \\ {}^tP &= {}^tS_{11} {}^0A \frac{{}^0L + \Delta L}{{}^0L}. \end{aligned} \quad (b)$$

Первый член правой части (а) определяет собой матрицу жесткости для линейных деформаций, а второй член — это матрица жесткости нелинейных деформаций, которая, как уже отмечалось ранее, не зависит от угла θ .

Второй подход: использование производной вектора силы ${}^t\mathbf{F}$. Матрица касательной жесткости любого элемента может быть получена путем прямого дифференцирования вектора силы ${}^t\mathbf{F}$ (см. раздел 6.3.1); иначе говоря,

$${}^t\mathbf{K} = \frac{\partial {}^t\mathbf{F}}{\partial {}^t\mathbf{\hat{u}}}, \quad (c)$$

где ${}^t\mathbf{\hat{u}}$ — вектор смещений в узловых точках, соответствующий моменту времени t . Здесь для общей модели ферменного элемента согласно соотношениям (6.106)–(6.119) мы имеем ${}^t\mathbf{F} = \int_{{}^0V} {}^t\mathbf{B}_L^T {}^t\tilde{S}_{11} d^0V$, так что

$$\frac{\partial {}^t\mathbf{F}}{\partial {}^t\mathbf{\hat{u}}} = \int_{{}^0V} {}^t\mathbf{B}_L^T \frac{\partial {}^t\tilde{S}_{11}}{\partial {}^t\epsilon_{11}} \frac{\partial {}^t\epsilon_{11}}{\partial {}^t\mathbf{\hat{u}}} d^0V + \int_{{}^0V} \frac{\partial {}^t\mathbf{B}_L^T}{\partial {}^t\mathbf{\hat{u}}} {}^t\tilde{S}_{11} d^0V. \quad (d)$$

Используя формулы (6.117) и (6.118), мы получим

$$\frac{\partial {}^t\mathbf{B}_L^T}{\partial {}^t\mathbf{\hat{u}}} = ({}^0J^{-1})^2 \mathbf{H}_{,r}^T \mathbf{H}_{,r} = {}^t\mathbf{B}_{NL}^T {}^t\mathbf{B}_{NL},$$

так что второй член правой части уравнения (d) определяет собой матрицу ${}^t_0\mathbf{K}_{NL}$. Кроме того, используя (6.110) и (6.117), мы видим непосредственно, что

$$\frac{\partial {}^t_0\tilde{\epsilon}_{11}}{\partial {}^t\hat{\mathbf{u}}} = {}^t_0\mathbf{B}_L$$

и, следовательно, первый член правой части уравнения (d) определяет собой матрицу ${}^t_0\mathbf{K}_L$.

Однако, чтобы получить более всестороннюю информацию, рассмотрим вывод выражения для матрицы ${}^t_0\mathbf{K}$, определяемой согласно (с), для конкретного варианта ферменного элемента, показанного на рис. 6.14 и имеющего два узла, используя при этом следующие детали.

Для элемента с двумя узлами вектор ${}^t_0\mathbf{F}$ задается с помощью простых условий равновесия,

$${}^t_0\mathbf{F} = {}^tP \begin{bmatrix} -\cos \theta \\ -\sin \theta \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix},$$

где tP — это текущая величина силы (положительная, если речь идет о силе натяжения), действующей на элемент, и мы имеем

$${}^t\hat{\mathbf{u}}^T = [{}^tu_1^1 \quad {}^tu_2^1 \quad {}^tu_1^2 \quad {}^tu_2^2].$$

Давайте рассмотрим третий и четвертый столбцы матрицы жесткости (из которых могут быть выведены первый и второй столбцы). Мы имеем

$$\begin{aligned} {}^tu_1^2 &= ({}^0L + \Delta L) \cos \theta - {}^0L, \\ {}^tu_2^2 &= ({}^0L + \Delta L) \sin \theta \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial(\Delta L)} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -({}^0L + \Delta L) \sin \theta & ({}^0L + \Delta L) \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial {}^tu_1^2} \\ \frac{\partial}{\partial {}^tu_2^2} \end{bmatrix},$$

откуда получаем

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial {}^tu_1^2} \\ \frac{\partial}{\partial {}^tu_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\frac{\sin \theta}{{}^0L + \Delta L} \\ \sin \theta & +\frac{\cos \theta}{{}^0L + \Delta L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial(\Delta L)} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix}.$$

На этом основании третий столбец матрицы ${}^t_0\mathbf{K}$ определяется выражением ¹⁾

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^t_0\mathbf{F}}{\partial {}^tu_1^2} &= \frac{\partial {}^t_0\mathbf{F}}{\partial(\Delta L)} \frac{\partial(\Delta L)}{\partial {}^tu_1^2} + \frac{\partial {}^t_0\mathbf{F}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial {}^tu_1^2} = \\ &= \frac{\partial {}^tP}{\partial(\Delta L)} \begin{bmatrix} -\cos \theta \\ -\sin \theta \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \cos \theta + {}^tP \begin{bmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} \left(\frac{-\sin \theta}{{}^0L + \Delta L} \right) = \end{aligned} \quad (e)$$

¹⁾ Отметим, что если для данного материала соотношение напряжение–деформация таково, что величина tP является постоянной при изменениях только за счет ΔL , то лишь второй член во второй строке этого уравнения отличен от нуля.

$$= \frac{\partial \left(\frac{{}^t P}{{}^0 L + \Delta L} \right)}{\partial(\Delta L)} ({}^0 L + \Delta L) \begin{bmatrix} -\cos^2 \theta \\ -\sin \theta \cos \theta \\ \cos^2 \theta \\ \sin \theta \cos \theta \end{bmatrix} + \frac{{}^t P}{{}^0 L + \Delta L} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Аналогично этому, для четвертого столбца матрицы ${}^t_0 \mathbf{K}$ получаем выражение

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^t_0 \mathbf{F}}{\partial {}^t u_2^2} &= \frac{\partial {}^t_0 \mathbf{F}}{\partial(\Delta L)} \frac{\partial(\Delta L)}{\partial {}^t u_2^2} + \frac{\partial {}^t_0 \mathbf{F}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial {}^t u_2^2} = \\ &= \frac{\partial \left(\frac{{}^t P}{{}^0 L + \Delta L} \right)}{\partial(\Delta L)} ({}^0 L + \Delta L) \begin{bmatrix} -\cos \theta \sin \theta \\ -\sin^2 \theta \\ \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta \end{bmatrix} + \frac{{}^t P}{{}^0 L + \Delta L} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (f)$$

Однако, если использовать выражение (b), то получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\frac{{}^t P}{{}^0 L + \Delta L} \right)}{\partial(\Delta L)} ({}^0 L + \Delta L) &= \frac{\partial {}^t_0 S_{11}}{\partial(\Delta L)} \frac{{}^0 L + \Delta L}{{}^0 L} {}^0 A = \\ &= \frac{\partial {}^t_0 S_{11}}{\partial {}^t_0 \epsilon_{11}} \frac{\partial {}^t_0 \epsilon_{11}}{\partial(\Delta L)} \frac{{}^0 L + \Delta L}{{}^0 L} {}^0 A = \frac{\partial {}^t_0 S_{11}}{\partial {}^t_0 \epsilon_{11}} \frac{({}^0 L + \Delta L)^2}{{}^0 L^3} {}^0 A = \\ &= {}^0 C_{1111} \frac{({}^0 L + \Delta L)^2}{{}^0 L^3} {}^0 A. \end{aligned}$$

Следовательно, результаты, даваемые соотношениями (e) и (f), совпадают с теми, которые уже были даны в (a).

Отметим, что члены, входящие в выражение матрицы жесткости при нелинейных деформациях, могут быть получены путем непосредственного использования соотношений, касающихся равновесия и приведенных на рис. 6.14б.

Предварительно заданная лагранжева формулировка также может быть получена, исходя из выражений (a), если воспользоваться соотношениями (см. пример 6.23)

$${}^0 C_{1111} = \frac{{}^0 \rho}{{}^t \rho} \left(\frac{{}^0 L}{{}^0 L + \Delta L} \right)^4 {}^t C_{1111},$$

так что в (a) мы имеем

$${}^0 C_{1111} \frac{({}^0 L + \Delta L)^2}{{}^0 L^3} {}^0 A = {}^t C_{1111} \frac{{}^t A}{{}^0 L + \Delta L}. \quad (g)$$

Если подметить также, что в случае бесконечно малых смещений матрица жесткости для линейных деформаций приводится к хорошо известной матрице для ферменного элемента (см. пример 4.1), то мы убеждаемся, что после подстановки (g) в (a) лагранжева матрица жесткости с предварительным заданием представляет собой именно то, что ожидалось бы исходя из физических соотношений.

Пример 6.17: Требуется сформулировать уравнения равновесия, используемые при нелинейном анализе простой арочной конструкции, рассмотренной в примере 6.3, если при построении решения используется модифицированный метод итераций Ньютона–Рафсона.

Применяя модифицированный метод итераций Ньютона–Рафсона, мы используем соотношения (6.11) и (6.12), но рассчитываем новые касательные матрицы жесткости только в начале каждого этапа.

Как и в примере 6.3, мы идеализируем конструкцию, используя один ферменный элемент (см. рис. 6.4б). В силу того, что смещения в узле 1 равны нулю, нам нужно

рассмотреть только смещения в узле 2. Используя выкладки, проведенные в примере 6.16, при $\theta = {}^t\beta$ мы имеем

$$\begin{aligned} {}^t_0\mathbf{K}_L &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} (\cos {}^t\beta)^2 & \sin {}^t\beta \cos {}^t\beta \\ \sin {}^t\beta \cos {}^t\beta & (\sin {}^t\beta)^2 \end{bmatrix}, \\ {}^t_0\mathbf{K}_{NL} &= \frac{{}^tP}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ {}^t_0\mathbf{F} &= {}^tP \begin{bmatrix} \cos {}^t\beta \\ \sin {}^t\beta \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где при выводе выражений для матрицы жесткости мы предположили, что величины L и EA/L остаются неизменно постоянными.

Матрицы соответствуют глобальным смещениям ${}^tu_1^2$ и ${}^tu_2^2$ в узле 2. Однако величина ${}^tu_1^2$ равна нулю и, следовательно, определяющее уравнение равновесия имеет вид

$$\left[\frac{EA}{L} (\sin {}^t\beta)^2 + \frac{{}^tP}{L} \right] \Delta u_2^{2(i)} = -\frac{{}^{t+\Delta t}R}{2} - {}^{t+\Delta t}P^{(i-1)} \sin({}^{t+\Delta t}\beta^{(i-1)}),$$

где величина ${}^{t+\Delta t}R/2$ положительна, как это показано на рис. 6.4б, а величина ${}^{t+\Delta t}P^{(i-1)}$ представляет собой силу, действующую в стержне (сила натяжения считается положительной) и соответствующую смещениям в момент времени $t + \Delta t$ и окончанию $(i - 1)$ -й итерации.

6.3.4. Двумерные и осесимметричные элементы, элементы с плоскими деформациями и с плоскими напряжениями

Имея в виду построение необходимых матриц и векторов, рассмотрим типичный двумерный элемент в конфигурациях, соответствующих моментам времени 0 и t ; это иллюстрируется на рис. 6.15 применительно к элементу с девятью узлами. Глобальные координаты узловых точек данного элемента в момент времени 0 равны ${}^0x_1^k, {}^0x_2^k$, где $k = 1, 2, \dots, N$, а N обозначает полное число узлов элемента.

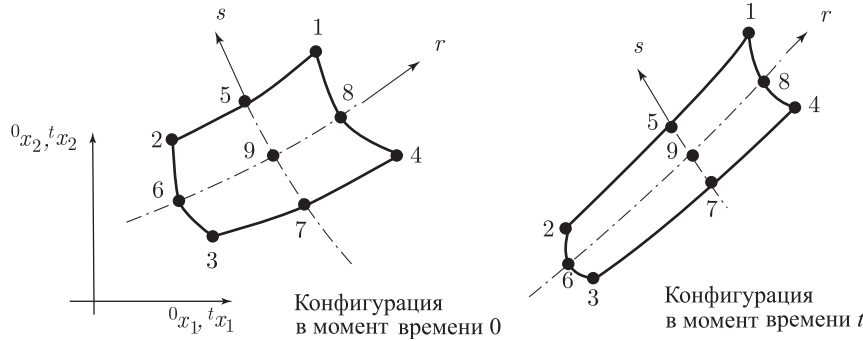


Рис. 6.15. Двумерный элемент, показанный в глобальной плоскости ${}^tx_1, {}^tx_2$

Пользуясь концепциями интерполяции, обсужденными в разделе 5.3, в момент 0 мы имеем

$${}^0x_1 = \sum_{k=1}^N h_k {}^0x_1^k; \quad {}^0x_2 = \sum_{k=1}^N h_k {}^0x_2^k, \quad (6.120)$$

и в момент t —

$${}^tx_1 = \sum_{k=1}^N h_k {}^tx_1^k; \quad {}^tx_2 = \sum_{k=1}^N h_k {}^tx_2^k, \quad (6.121)$$

где h_k — это интерполяционные функции, приведенные на рис. 5.5.

Если учесть, что мы используем изопараметрическую конечно-элементную дискретизацию, то смещения элемента следует интерполировать таким же образом, как и геометрию; следовательно, имеем

$${}^t u_1 = \sum_{k=1}^N h_k {}^t u_1^k; \quad {}^t u_2 = \sum_{k=1}^N h_k {}^t u_2^k; \quad (6.122)$$

$$u_1 = \sum_{k=1}^N h_k u_1^k; \quad u_2 = \sum_{k=1}^N h_k u_2^k. \quad (6.123)$$

Для вычисления деформаций требуется получить следующие производные:

$$\frac{\partial {}^t u_i}{\partial {}^0 x_j} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial h_k}{\partial {}^0 x_j} \right) {}^t u_i^k; \quad (6.124)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial {}^0 x_j} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial h_k}{\partial {}^0 x_j} \right) u_i^k, \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \\ j = 1, 2; \end{matrix} \quad (6.125)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial {}^t x_j} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial h_k}{\partial {}^t x_j} \right) u_i^k. \quad (6.126)$$

Эти производные вычисляются таким же образом, как и при линейном анализе, т. е. с использованием преобразования Якоби. В качестве примера рассмотрим вкратце вычисление производных по формуле (6.126). Другие производные получаются аналогичным образом.

Правило цепочки для связи между производными по ${}^t x_1$, ${}^t x_2$ и производными по r , s имеет вид

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} = {}^t \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial {}^t x_1} \\ \frac{\partial}{\partial {}^t x_2} \end{bmatrix},$$

где

$${}^t \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^t x_1}{\partial r} & \frac{\partial {}^t x_2}{\partial r} \\ \frac{\partial {}^t x_1}{\partial s} & \frac{\partial {}^t x_2}{\partial s} \end{bmatrix}.$$

Обращая оператор Якоби \mathbf{J} , получим

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial {}^t x_1} \\ \frac{\partial}{\partial {}^t x_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det {}^t \mathbf{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^t x_2}{\partial s} & -\frac{\partial {}^t x_2}{\partial r} \\ -\frac{\partial {}^t x_1}{\partial s} & \frac{\partial {}^t x_1}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix},$$

где определитель Якоби равен

$$\det {}^t \mathbf{J} = \frac{\partial {}^t x_1}{\partial r} \frac{\partial {}^t x_2}{\partial s} - \frac{\partial {}^t x_1}{\partial s} \frac{\partial {}^t x_2}{\partial r},$$

а производные координат по отношению к r и s получаются, как и обычно, с помощью формул (6.121); например,

$$\frac{\partial {}^t x_1}{\partial r} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial r} {}^t x_1^k.$$

После того, как все нужные производные получены, появляется возможность построить матрицы преобразования деформация–смещение для элементов. Таблица 6.5 приводит требуемые матрицы для формулировок UL и TL. При проведении численного интегрирования эти матрицы вычисляются в точках интегрирования по Гауссу (см. раздел 5.5).

Как мы уже отмечали ранее, выбор между формулировками TL и UL существенно зависит от их относительной вычислительной эффективности. Как показывает таблица 6.5, все матрицы для этих двух формулировок имеют соответствующие картины расположения нулевых элементов, за исключением того, что матрица ${}^t_0 \mathbf{B}_L$ является полной,

тогда как матрица ${}^t\mathbf{B}_L$ — разреженная. Матрица преобразования деформация–смещение ${}^t_0\mathbf{B}_L$ является полной вследствие воздействия начальных смещений на линейные члены деформаций (см. таблицы 6.2 и 6.3). Поэтому расчет матричного произведения ${}^t\mathbf{B}_L^T {}^t\mathbf{C}_0 {}^t\mathbf{B}_L$ при формулировке UL требует меньше времени, чем расчет произведения ${}^t_0\mathbf{B}_L^T {}^t_0\mathbf{C}_0 {}^t\mathbf{B}_L$ при формулировке TL.

Второе отличие между двумя указанными формулировками, связанное с численными расчетами, состоит в том, что при формулировке TL все производные интерполяционных функций берутся относительно начальных координат, тогда как при формулировке UL все производные берутся относительно координат в момент времени t . Поэтому при формулировке TL производные могли бы вычисляться только один раз на первом шаге по нагрузке, а затем введены в память с целью использования на всех последующих шагах по нагрузке. Однако на практике такое занесение в память может оказаться дорогостоящим и при компьютерной реализации общего случая производные интерполяционных функций лучше всего вычислять заново на каждом шаге по времени.

Таблица 6.5. Матрицы, используемые для описания двумерного элемента

А. Полностью лагранжска формулировка

1. Инкременты деформаций

$$\begin{aligned} {}_0\epsilon_{11} &= {}_0u_{1,1} + {}^t_0u_{1,1} {}_0u_{1,1} + {}^t_0u_{2,1} {}_0u_{2,1} + \frac{1}{2}(({}_0u_{1,1})^2 + ({}_0u_{2,1})^2), \\ {}_0\epsilon_{22} &= {}_0u_{2,2} + {}^t_0u_{1,2} {}_0u_{1,2} + {}^t_0u_{2,2} {}_0u_{2,2} + \frac{1}{2}(({}_0u_{1,2})^2 + ({}_0u_{2,2})^2), \\ {}_0\epsilon_{12} &= \frac{1}{2}({}_0u_{1,2} + {}_0u_{2,1}) + \frac{1}{2}({}^t_0u_{1,1} {}_0u_{1,2} + {}^t_0u_{2,1} {}_0u_{2,2} + {}^t_0u_{1,2} {}_0u_{1,1} + {}^t_0u_{2,2} {}_0u_{2,1}) + \\ &\quad + \frac{1}{2}({}_0u_{1,1} {}_0u_{1,2} + {}_0u_{2,1} {}_0u_{2,2}), \\ {}_0\epsilon_{33} &= \frac{u_1}{{}_0x_1} + \frac{{}^tu_1u_1}{({}_0x_1)^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{u_1}{{}_0x_1}\right)^2 \\ &\text{— для осесимметричного анализа,} \\ \text{где } {}_0u_{i,j} &= \frac{\partial u_i}{\partial {}_0x_j}; \quad {}^tu_{i,j} = \frac{\partial {}^tu_i}{\partial {}^tx_j}. \end{aligned}$$

2. Линейная матрица преобразования деформация–смещение

Используя ${}_0\mathbf{e} = {}^t_0\mathbf{B}_L \hat{\mathbf{u}}$,

где ${}_0\mathbf{e}^T = [{}_0e_{11} \ {}_0e_{22} \ 2{}_0e_{12} \ {}_0e_{33}]$; $\hat{\mathbf{u}}^T = [u_1^1 \ u_2^1 \ u_1^2 \ u_2^2 \ \dots \ u_1^N \ u_2^N]$

и ${}^t_0\mathbf{B}_L = {}^t_0\mathbf{B}_{L0} + {}^t_0\mathbf{B}_{L1}$.

$${}^t_0\mathbf{B} = \begin{bmatrix} {}_0h_{1,1} & 0 & {}_0h_{2,1} & 0 & {}_0h_{3,1} & 0 & \dots & {}_0h_{N,1} & 0 \\ 0 & {}_0h_{1,2} & 0 & {}_0h_{2,2} & 0 & {}_0h_{3,2} & \dots & 0 & {}_0h_{N,2} \\ {}_0h_{1,2} & {}_0h_{1,1} & {}_0h_{2,2} & {}_0h_{2,1} & {}_0h_{3,2} & {}_0h_{3,1} & \dots & {}_0h_{N,2} & {}_0h_{N,1} \\ \frac{h_1}{{}_0\bar{x}_1} & 0 & \frac{h_2}{{}_0\bar{x}_1} & 0 & \frac{h_3}{{}_0\bar{x}_1} & 0 & \dots & \frac{h_N}{{}_0\bar{x}_1} & 0 \end{bmatrix},$$

где ${}_0h_{k,j} = \frac{\partial h_k}{\partial {}_0x_j}$; $u_j^k = {}^{t+\Delta t}u_j^k - {}^tu_j^k$; ${}_0\bar{x} = \sum_{k=1}^N h_k {}_0x_1^k$; N — число узлов

и

$${}^t_0\mathbf{B}_{L1} = \begin{bmatrix} l_{11} {}_0h_{1,1} & l_{21} {}_0h_{1,1} & l_{11} {}_0h_{2,1} \\ l_{12} {}_0h_{1,2} & l_{22} {}_0h_{1,2} & l_{12} {}_0h_{2,2} \\ (l_{11} {}_0h_{1,2} + l_{12} {}_0h_{1,1}) & (l_{21} {}_0h_{1,2} + l_{22} {}_0h_{1,1}) & (l_{11} {}_0h_{2,2} + l_{12} {}_0h_{2,1}) \\ l_{33} \frac{h_1}{{}_0\bar{x}_1} & 0 & l_{33} \frac{h_2}{{}_0\bar{x}_1} \\ \dots & l_{21} {}_0h_{2,1} & l_{11} {}_0h_{N,1} & l_{21} {}_0h_{N,1} \\ \dots & l_{22} {}_0h_{2,2} & l_{12} {}_0h_{N,2} & l_{22} {}_0h_{N,2} \\ \dots & (l_{21} {}_0h_{2,2} + l_{22} {}_0h_{2,1}) & l_{11} {}_0h_{N,2} + l_{12} {}_0h_{N,1} & (l_{21} {}_0h_{N,2} + l_{22} {}_0h_{N,1}) \\ \dots & 0 & l_{33} \frac{h_N}{{}_0\bar{x}_1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{где } l_{11} = \sum_{k=1}^N {}_0h_{k,1} {}^tu_1^k; \quad l_{22} = \sum_{k=1}^N {}_0h_{k,2} {}^tu_2^k; \quad l_{21} = \sum_{k=1}^N {}_0h_{k,1} {}^tu_2^k;$$

$$l_{12} = \sum_{k=1}^N {}_0h_{k,2} {}^tu_1^k; \quad l_{33} = \frac{\sum_{k=1}^N h_k {}^tu_1^k}{{}_0\bar{x}_1}.$$

3. Нелинейная матрица преобразования деформация–смещение

$${}^t_0\mathbf{B} = \begin{bmatrix} {}_0h_{1,1} & 0 & {}_0h_{2,1} & 0 & {}_0h_{3,1} & 0 & \dots & {}_0h_{N,1} & 0 \\ {}_0h_{1,2} & 0 & {}_0h_{2,2} & 0 & {}_0h_{3,2} & 0 & \dots & {}_0h_{N,2} & 0 \\ 0 & {}_0h_{1,1} & 0 & {}_0h_{2,1} & 0 & {}_0h_{3,1} & \dots & 0 & {}_0h_{N,1} \\ 0 & {}_0h_{1,2} & 0 & {}_0h_{2,2} & 0 & {}_0h_{3,2} & \dots & 0 & {}_0h_{N,2} \\ \frac{h_1}{{}_0\bar{x}_1} & 0 & \frac{h_2}{{}_0\bar{x}_1} & 0 & \frac{h_3}{{}_0\bar{x}_1} & 0 & \dots & \frac{h_N}{{}_0\bar{x}_1} & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Вторая матрица напряжений Пиолы–Кирхгофа и вектор напряжений

$${}^t_0\mathbf{S} = \begin{bmatrix} {}^t_0S_{11} & {}^t_0S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ {}^t_0S_{21} & {}^t_0S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^t_0S_{11} & {}^t_0S_{12} & 0 \\ 0 & 0 & {}^t_0S_{21} & {}^t_0S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t_0S_{33} \end{bmatrix}; \quad {}^t_0\hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} {}^t_0S_{11} \\ {}^t_0S_{22} \\ {}^t_0S_{12} \\ {}^t_0S_{33} \end{bmatrix}.$$

В. Модифицированная лагранжска формулировка

1. Инкременты деформаций

$${}^t\epsilon_{11} = {}^tu_{1,1} + \frac{1}{2}(({}^tu_{1,1})^2 + ({}^tu_{2,1})^2),$$

$${}^t\epsilon_{22} = {}^tu_{2,2} + \frac{1}{2}(({}^tu_{1,2})^2 + ({}^tu_{2,2})^2),$$

$${}^t\epsilon_{12} = \frac{1}{2}({}^tu_{1,2} + {}^tu_{2,1}) + \frac{1}{2}({}^tu_{1,1} {}^tu_{1,2} + {}^tu_{2,1} {}^tu_{2,2}),$$

$${}^t\epsilon_{33} = \frac{u_1}{{}^tx_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{u_1}{{}^tx_1}\right)^2$$

— для осесимметричного анализа, где ${}^tu_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial {}^tx_j}$.

2. Линейная матрица преобразования деформация-смещение

Используя ${}^t\mathbf{e} = {}^t\mathbf{B}_L \hat{\mathbf{u}}$,

где ${}^t\mathbf{e}^T = [{}^te_{11} \quad {}^te_{22} \quad 2{}^te_{12} \quad {}^te_{33}]$; $\hat{\mathbf{u}}^T = [u_1^1 \quad u_2^1 \quad u_1^2 \quad u_2^2 \quad \dots \quad u_1^N \quad u_2^N]$.

$${}^t\mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} {}^th_{1,1} & 0 & {}^th_{2,1} & 0 & {}^th_{3,1} & 0 & \dots & {}^th_{N,1} & 0 \\ 0 & {}^th_{1,2} & 0 & {}^th_{2,2} & 0 & {}^th_{3,2} & \dots & 0 & {}^th_{N,2} \\ {}^th_{1,2} & {}^th_{1,1} & {}^th_{2,2} & {}^th_{2,1} & {}^th_{3,2} & {}^th_{3,1} & \dots & {}^th_{N,2} & {}^th_{N,1} \\ \frac{h_1}{{}^t\bar{x}_1} & 0 & \frac{h_2}{{}^t\bar{x}_1} & 0 & \frac{h_3}{{}^t\bar{x}_1} & 0 & \dots & \frac{h_N}{{}^t\bar{x}_1} & 0 \end{bmatrix}$$

где ${}^th_{k,j} = \frac{\partial h_k}{\partial {}^tx_j}$; $u_j^k = {}^{t+\Delta t}u_j^k - {}^tu_j^k$; ${}^t\bar{x}_1 = \sum_{k=1}^N h_k {}^tx_1^k$; N — число узлов.

3. Нелинейная матрица преобразования деформация-смещение

$${}^t\mathbf{B}_{NL} = \begin{bmatrix} {}^th_{1,2} & 0 & {}^th_{2,1} & 0 & {}^th_{3,1} & 0 & \dots & {}^th_{N,1} & 0 \\ {}^th_{1,2} & 0 & {}^th_{2,2} & 0 & {}^th_{3,2} & 0 & \dots & {}^th_{N,2} & 0 \\ 0 & {}^th_{1,1} & 0 & {}^th_{2,1} & 0 & {}^th_{3,1} & \dots & 0 & {}^th_{N,1} \\ 0 & {}^th_{1,2} & 0 & {}^th_{2,2} & 0 & {}^th_{3,2} & \dots & 0 & {}^th_{N,2} \\ \frac{h_1}{{}^t\bar{x}_1} & 0 & \frac{h_2}{{}^t\bar{x}_1} & 0 & \frac{h_3}{{}^t\bar{x}_1} & 0 & \dots & \frac{h_N}{{}^t\bar{x}_1} & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Матрица напряжений Коши и вектор напряжений

$${}^t\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} {}^t\tau_{11} & {}^t\tau_{12} & 0 & 0 & 0 \\ {}^t\tau_{21} & {}^t\tau_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^t\tau_{11} & {}^t\tau_{12} & 0 \\ 0 & 0 & {}^t\tau_{21} & {}^t\tau_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t\tau_{33} \end{bmatrix}; \quad {}^t\hat{\boldsymbol{\tau}} = \begin{bmatrix} {}^t\tau_{11} \\ {}^t\tau_{22} \\ {}^t\tau_{12} \\ {}^t\tau_{33} \end{bmatrix}.$$

Пример 6.18: Требуется построить матрицы ${}^t_0\mathbf{B}_{L0}$, ${}^t_0\mathbf{B}_{L1}$ и ${}^t_0\mathbf{B}_{NL}$, соответствующие формулировке TL для двумерного элемента с плоскими деформациями, показанного на рис. 6.16.

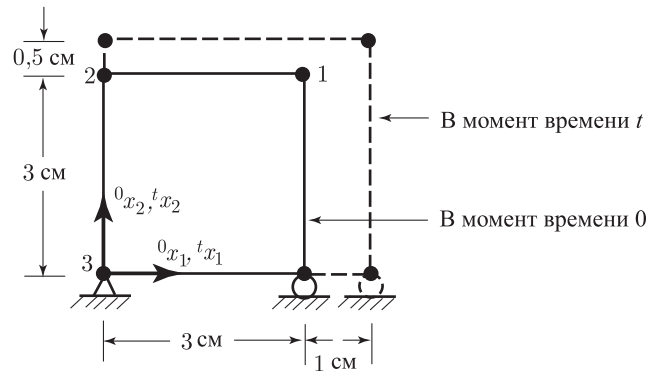


Рис. 6.16. Элемент с четырьмя узлами, соответствующий плоским деформациям в условиях больших смещений/больших деформаций

В данном случае мы можем непосредственно использовать информацию, данную в таблице 6.5, при

$$\begin{aligned} {}^t u_1^1 &= 1; & {}^t u_2^1 &= 0,5 \\ {}^t u_1^2 &= 0; & {}^t u_2^2 &= 0,5 \\ {}^t u_1^3 &= 0; & {}^t u_2^3 &= 0 \\ {}^t u_1^4 &= 1; & {}^t u_2^4 &= 0 \end{aligned} \quad {}_0 \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix}.$$

Интерполяционные функции для элемента с четырьмя узлами приводятся на рис. 5.5 (а нужные производные были приведены в примере 5.5), так что мы получаем

$${}_0 \mathbf{B}_{L0} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} (1+s) & 0 & -(1+s) & 0 & -(1-s) & 0 & (1-s) & 0 \\ 0 & (1+r) & 0 & (1-r) & 0 & -(1-r) & 0 & -(1+r) \\ (1+r)(1+s) & (1-r) & -(1+s) & -(1-r) & -(1-s) & -(1+r) & (1-s) & (1-s) \end{bmatrix}.$$

Чтобы рассчитать матрицу ${}_0 \mathbf{B}_{L1}$, нам нужно иметь также значения l_{ij} , где

$$\begin{aligned} l_{11} &= \sum_{k=1}^4 {}_0 h_{k,1} {}^t u_1^k = \frac{2}{3} \{h_{1,r} {}^t u_1^1 + h_{4,r} {}^t u_1^4\} = \frac{1}{3}, \\ l_{12} &= \sum_{k=1}^4 {}_0 h_{k,2} {}^t u_1^k = \frac{2}{3} \{h_{1,s} {}^t u_1^1 + h_{4,s} {}^t u_1^4\} = 0, \\ l_{21} &= \sum_{k=1}^4 {}_0 h_{k,1} {}^t u_2^k = \frac{2}{3} \{h_{1,r} {}^t u_2^1 + h_{2,r} {}^t u_2^2\} = 0, \\ l_{22} &= \sum_{k=1}^4 {}_0 h_{k,2} {}^t u_2^k = \frac{2}{3} \{h_{1,2} {}^t u_2^1 + h_{2,s} {}^t u_2^2\} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Следовательно, мы имеем

$${}_0 \mathbf{B}_{L1} = \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 2(1+s) & 0 & -2(1+s) & 0 & -2(1-s) & 0 & 2(1-s) & 0 \\ 0 & (1+r) & 0 & (1-r) & 0 & -(1-r) & 0 & -(1+r) \\ 2(1+r)(1+s) & 2(1-r) & -(1+s) & -2(1-r) & -(1-s) & -2(1+r) & (1-s) & (1-s) \end{bmatrix}.$$

Нелинейная матрица деформация–смещение также может быть непосредственно построена путем использования интерполяционных функций и матрицы Якоби:

$${}_0 \mathbf{B}_{NL} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} (1+s) & 0 & -(1+s) & 0 & -(1-s) & 0 & (1-s) & 0 \\ (1+r) & 0 & (1-r) & 0 & -(1-r) & 0 & -(1+r) & 0 \\ 0 & (1+s) & 0 & -(1+s) & 0 & -(1-s) & 0 & (1-s) \\ 0 & (1+r) & 0 & (1-r) & 0 & -(1-r) & 0 & -(1+r) \end{bmatrix}.$$

6.3.5. Трехмерные элементы типа твердого тела

Вычисление матриц, требуемых при трехмерном анализе для изопараметрических конечных элементов, осуществляется с использованием тех же процедур, что и при двумерном анализе.

Таблица 6.6. Матрицы, используемые для описания трехмерного элемента

А. Полностью лагранжска формулировка

1. Инкременты деформаций

$$\begin{aligned} {}_0 \epsilon_{ij} &= \frac{1}{2} ({}_0 u_{i,j} + {}_0 u_{j,i}) + \frac{1}{2} ({}_0^t u_{k,i} {}_0 u_{k,j} + {}_0 u_{k,i} {}_0^t u_{k,j}) + \frac{1}{2} ({}_0 u_{k,i} {}_0 u_{k,j}) \\ i &= 1, 2, 3; j = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

$$\text{где } {}_0 u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

2. Линейная матрица преобразования деформация–смещение

используя ${}_0\mathbf{e} = {}^t_0\mathbf{B}_L\hat{\mathbf{u}}$,

$$\begin{aligned} \text{где } {}_0\mathbf{e}^T &= [{}_0e_{11} \quad {}_0e_{22} \quad {}_0e_{33} \quad {}_0e_{12} \quad {}_0e_{23} \quad {}_0e_{31}]; \\ \hat{\mathbf{u}}^T &= [u_1^1 \quad u_2^1 \quad u_3^1 \quad u_1^2 \quad u_2^2 \quad u_3^2 \quad \dots \quad u_1^N \quad u_2^N \quad u_3^N]; \\ {}^t_0\mathbf{B}_L &= {}^t_0\mathbf{B}_{L0} + {}^t_0\mathbf{B}_{L1}; \end{aligned}$$

$${}^t_0\mathbf{B}_{L0} = \begin{bmatrix} {}_0h_{1,1} & 0 & 0 & {}_0h_{2,1} & \dots & 0 \\ 0 & {}_0h_{1,2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & {}_0h_{1,3} & 0 & \dots & {}_0h_{N,3} \\ {}_0h_{1,2} & {}_0h_{1,1} & 0 & {}_0h_{2,2} & \dots & 0 \\ 0 & {}_0h_{1,3} & {}_0h_{1,2} & 0 & \dots & {}_0h_{N,2} \\ {}_0h_{1,3} & 0 & {}_0h_{1,1} & {}_0h_{2,3} & \dots & {}_0h_{N,1} \end{bmatrix},$$

$$\text{где } {}_0h_{k,j} = \frac{\partial h_k}{\partial {}^0x_j}; \quad u_j^k = {}^{t+\Delta t}u_j^k - {}^tu_j^k$$

$${}^t_0\mathbf{B}_{L1} = \begin{bmatrix} l_{11} {}_0h_{1,1} & l_{21} {}_0h_{1,1} & l_{31} {}_0h_{1,1} \\ l_{12} {}_0h_{1,2} & l_{22} {}_0h_{1,2} & l_{32} {}_0h_{1,2} \\ l_{13} {}_0h_{1,3} & l_{23} {}_0h_{1,3} & l_{33} {}_0h_{1,3} \\ (l_{11} {}_0h_{1,2} + l_{12} {}_0h_{1,1}) & (l_{21} {}_0h_{1,2} + l_{22} {}_0h_{1,1}) & (l_{31} {}_0h_{1,2} + l_{32} {}_0h_{1,1}) \\ (l_{12} {}_0h_{1,3} + l_{13} {}_0h_{1,2}) & (l_{22} {}_0h_{1,3} + l_{23} {}_0h_{1,2}) & (l_{32} {}_0h_{1,3} + l_{33} {}_0h_{1,2}) \\ (l_{11} {}_0h_{1,3} + l_{13} {}_0h_{1,1}) & (l_{21} {}_0h_{1,3} + l_{23} {}_0h_{1,1}) & (l_{31} {}_0h_{1,3} + l_{33} {}_0h_{1,1}) \\ l_{11} {}_0h_{2,1} & \dots & l_{31} {}_0h_{N,1} \\ l_{12} {}_0h_{2,2} & \dots & l_{32} {}_0h_{N,2} \\ l_{13} {}_0h_{2,3} & \dots & l_{33} {}_0h_{N,3} \\ (l_{11} {}_0h_{2,2} + l_{12} {}_0h_{2,1}) & \dots & (l_{31} {}_0h_{N,2} + l_{32} {}_0h_{N,1}) \\ (l_{12} {}_0h_{2,3} + l_{13} {}_0h_{2,2}) & \dots & (l_{32} {}_0h_{N,3} + l_{33} {}_0h_{N,2}) \\ (l_{11} {}_0h_{2,3} + l_{13} {}_0h_{2,1}) & \dots & (l_{31} {}_0h_{N,3} + l_{33} {}_0h_{N,1}) \end{bmatrix},$$

$$\text{где } l_{ij} = \sum_{k=1}^N {}_0h_{k,j} {}^tu_i^k$$

3. Нелинейная матрица преобразования деформация–смещение

$${}^t_0\mathbf{B}_{NL} = \begin{bmatrix} {}^t_0\tilde{\mathbf{B}}_{NL} & \tilde{\mathbf{0}} & \tilde{\mathbf{0}} \\ \tilde{\mathbf{0}} & {}^t_0\tilde{\mathbf{B}}_{NL} & \tilde{\mathbf{0}} \\ \tilde{\mathbf{0}} & \tilde{\mathbf{0}} & {}^t_0\tilde{\mathbf{B}}_{NL} \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{где } {}^t_0\tilde{\mathbf{B}}_{NL} = \begin{bmatrix} {}_0h_{1,1} & 0 & 0 & {}_0h_{2,1} & \dots & {}_0h_{N,1} \\ {}_0h_{1,2} & 0 & 0 & {}_0h_{2,2} & \dots & {}_0h_{N,2} \\ {}_0h_{1,3} & 0 & 0 & {}_0h_{2,3} & \dots & {}_0h_{N,3} \end{bmatrix}$$

4. Вторая матрица напряжений Пиолы-Кирхгофа и вектор напряжений

$${}^t_0\mathbf{S} = \begin{bmatrix} {}^t_0\tilde{\mathbf{S}} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & {}^t_0\tilde{\mathbf{S}} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & {}^t_0\tilde{\mathbf{S}} \end{bmatrix}; \quad \bar{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{где } {}^t_0\widehat{\mathbf{S}}^T = [{}^t_0S_{11} \quad {}^t_0S_{22} \quad {}^t_0S_{33} \quad {}^t_0S_{12} \quad {}^t_0S_{23} \quad {}^t_0S_{31}];$$

$${}^t_0\tilde{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} {}^t_0S_{11} & {}^t_0S_{12} & {}^t_0S_{13} \\ {}^t_0S_{21} & {}^t_0S_{22} & {}^t_0S_{23} \\ {}^t_0S_{31} & {}^t_0S_{32} & {}^t_0S_{33} \end{bmatrix}.$$

В. Модифицированная лагранжова матрица

1. Инкременты деформаций

$${}^t\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}^ru_{i,j} + {}^tu_{j,i}) + \frac{1}{2} ({}^tu_{k,i} {}^tu_{k,j}) \quad i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3,$$

$$\text{где } {}^tu_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial {}^tx_j}.$$

2. Линейная матрица преобразования деформация-смещение

используя ${}^t\mathbf{e} = {}^t\mathbf{B}_L \hat{\mathbf{u}}$,

$$\text{где } {}^t\mathbf{e}^T = [{}^te_{11} \quad {}^te_{22} \quad {}^te_{33} \quad 2{}^te_{12} \quad 2{}^te_{23} \quad 2{}^te_{31}];$$

$$\hat{\mathbf{u}}^T = [u_1^1 \quad u_2^1 \quad u_3^1 \quad u_1^2 \quad u_2^2 \quad u_3^2 \quad \dots \quad u_1^N \quad u_2^N \quad u_3^N];$$

$${}^t\mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} {}^th_{1,1} & 0 & 0 & {}^th_{2,1} & \dots & 0 \\ 0 & {}^th_{1,2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & {}^th_{1,3} & 0 & \dots & {}^th_{N,3} \\ {}^th_{1,2} & {}^th_{1,1} & 0 & {}^th_{2,2} & \dots & 0 \\ 0 & {}^th_{1,3} & {}^th_{1,2} & 0 & \dots & {}^th_{N,2} \\ {}^th_{1,3} & 0 & {}^th_{1,1} & {}^th_{2,3} & \dots & {}^th_{N,1} \end{bmatrix},$$

$$\text{где } {}^th_{k,j} = \frac{\partial h_k}{\partial {}^tx_j}; \quad u_j^k = {}^{t+\Delta t}u_j^k - {}^tu_j^k; \quad N - \text{число узлов.}$$

3. Нелинейная матрица преобразования деформация-смещение

$${}^t\mathbf{B} = \begin{bmatrix} {}^t\tilde{\mathbf{B}}_{NL} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & {}^t\tilde{\mathbf{B}}_{NL} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & {}^t\tilde{\mathbf{B}}_{NL} \end{bmatrix}; \quad \tilde{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где

$${}^t\tilde{\mathbf{B}}_{NL} = \begin{bmatrix} {}^th_{1,1} & 0 & 0 & {}^th_{2,1} & \dots & {}^th_{N,1} \\ {}^th_{1,2} & 0 & 0 & {}^th_{2,2} & \dots & {}^th_{N,2} \\ {}^th_{1,3} & 0 & 0 & {}^th_{2,3} & \dots & {}^th_{N,3} \end{bmatrix}.$$

4. Матрица напряжений Коши и вектор напряжений

$${}^t\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} {}^t\tilde{\tau} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & {}^t\tilde{\tau} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & {}^t\tilde{\tau} \end{bmatrix}; \quad \tilde{\tau} = \begin{bmatrix} {}^t\tau_{11} \\ {}^t\tau_{22} \\ {}^t\tau_{33} \\ {}^t\tau_{12} \\ {}^t\tau_{23} \\ {}^t\tau_{31} \end{bmatrix}; \quad \bar{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{где } {}^t\tilde{\tau} = \begin{bmatrix} {}^t\tau_{11} & {}^t\tau_{12} & {}^t\tau_{13} \\ {}^t\tau_{21} & {}^t\tau_{22} & {}^t\tau_{23} \\ {}^t\tau_{31} & {}^t\tau_{32} & {}^t\tau_{33} \end{bmatrix}.$$

Так, если обратиться к разделу 6.3.4, то отметим просто, что для типичного элемента мы используем теперь интерполяции координат и смещений вида

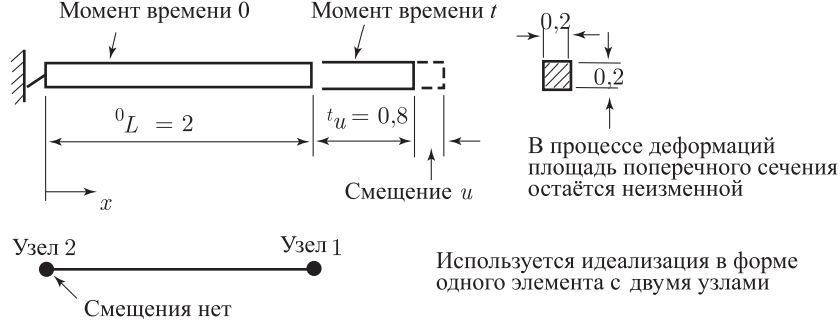
$${}^0x_i = \sum_{k=1}^N h_k {}^0x_i^k; \quad {}^tx_i = \sum_{k=1}^N h_k {}^tx_i^k; \quad i = 1, 2, 3; \quad (6.127)$$

$${}^tu_i = \sum_{k=1}^N h_k {}^tu_i^k; \quad u_i = \sum_{k=1}^N h_k u_i^k; \quad i = 1, 2, 3, \quad (6.128)$$

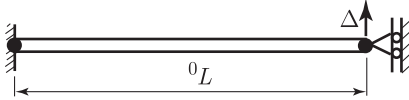
где интерполяционные функции для элементов h_k были приведены на рис. 5.6. Используя выражения (6.127) и (6.128) таким же образом, как и при двумерном анализе, мы можем построить надлежащие элементные матрицы, применяемые при формулировках TL и UL в случае трехмерного анализа (см. таблицу 6.6).

6.3.6. Упражнения

- 6.31. Рассмотрите показанную на рисунке задачу и вычислите следующие величины в терминах указанных на рисунке данных: ${}^0e_{ij}$, ${}^0\eta_{ij}$, ${}^0u_{k,i}$, ${}^0u_{k,j}$, ${}^0x_{i,k}$.



- 6.32. Рассмотрите показанный здесь ферменный элемент. Ферма имеет площадь поперечного сечения A и модуль Юнга E . Мы предполагаем, что выполняется условие малых деформаций, т. е. $\Delta/{}^0L \ll 1$.



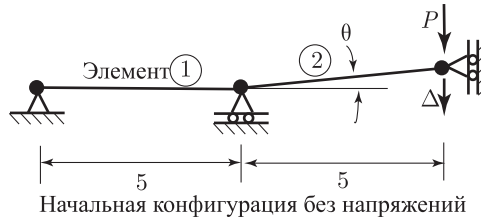
- (а) Вычислите полную матрицу жесткости, как функцию Δ и постройте график изменения элемента линейной матрицы жесткости ${}^t_0\mathbf{K}_L$ и элемента нелинейной матрицы жесткости ${}^t_0\mathbf{K}_{NL}$, как функций смещения Δ .
- (б) Пусть R — это внешняя нагрузка, приложенная так, чтобы получить смещение Δ . Постройте график изменения R , как функции Δ .

6.33. Рассмотрите защелкивающееся соединение, показанное в его начальной конфигурации. Предположите, что выполняются условия малых деформаций и что каждый из элементов имеет площадь поперечного сечения A и модуль Юнга E .

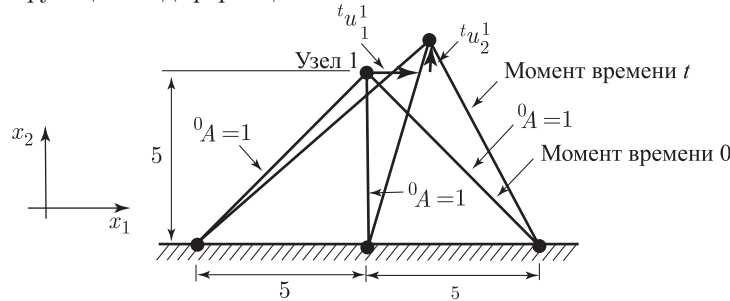
- Для каждого из элементов рассчитайте матрицы жесткости для линейных и нелинейных деформаций, ${}^t_0\mathbf{K}_L$ и ${}^t_0\mathbf{K}_{NL}$, а также вектор силы ${}^t_0\mathbf{F}$.
- Рассчитайте матрицы жесткости для линейных и нелинейных деформаций, ${}^t_0\mathbf{K}_L$ и ${}^t_0\mathbf{K}_{NL}$, а также вектор силы для соединения в целом.

Исключите предписанные степени свободы.

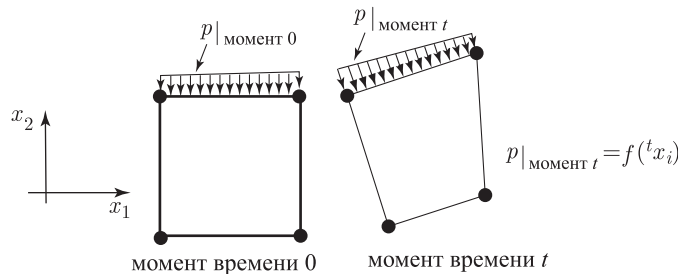
- Пользуясь результатами пункта (b), постройте кривую зависимости сила–отклонение, т. е. зависимости P от Δ .



6.34. Рассмотрите показанную здесь ферменную конструкцию из трех элементов. Выведите выражения для касательной матрицы жесткости ${}^t_0\mathbf{K}$ и вектора силы ${}^t_0\mathbf{F}$, соответствующие конфигурации в момент времени t при наличии больших смещений, больших углов поворота и больших деформаций. Предположите, что основополагающее соотношение имеет вид ${}^t_0S_{11} = C {}^t_0\epsilon_{11}$, при величине C , заданной в форме некоторой функции от деформации.



6.35. Рассмотрите схему расчета матрицы жесткости для показанного элемента с четырьмя узлами, полагая, что расчет ведется на основе информации, приведенной в табл. 6.5.

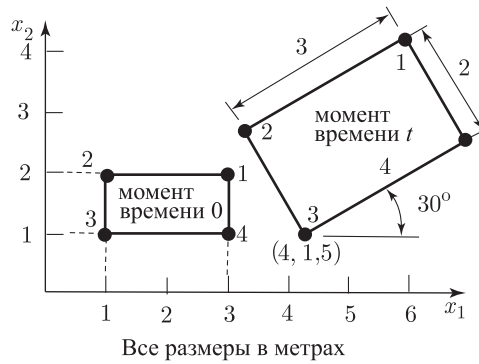


Пусть двумерный элемент будет нагружен посредством давления, зависящего от деформации и приложенного между узлами 1 и 2. Определите те члены, которые должны быть добавлены в матрицу жесткости, если эффект давления включен в линеаризацию так, чтобы получить точное выражение касательной матрицы жесткости.

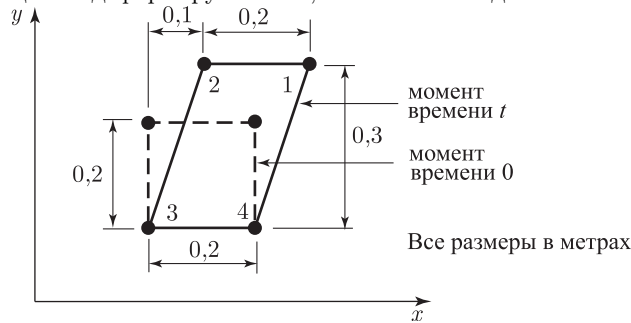
Рассмотрите условия плоских напряжений, плоских деформаций и осесимметричные условия.

- 6.36. Начальная конфигурация и конфигурация в момент времени t для элемента с плоскими деформациями, имеющего четыре узла, таковы, как это показано на рисунке. Закон поведения материала — линейный, ${}^tS_{ij} = {}^tC_{ijrs} {}^t\epsilon_{rs}$, при $E = 20\,000 \text{ н/м}^2$ и $\nu = 0,3$.

- (a) Рассчитайте силы в узловых точках, требуемые для поддержания элемента в равновесии в момент t . Используйте надлежащую конечно-элементную модель.
- (b) Если теперь элемент поворачивается как твердое тело, в период времени от t до $t + \Delta t$, на угол 90 градусов против часовой стрелки, то рассчитайте новые значения сил в узловых точках, соответствующие конфигурации в момент $t + \Delta t$.



- 6.37. При проведении анализа с формулировкой TL мы обнаруживаем, что элемент с плоскими деформациями деформируется так, как показано здесь.

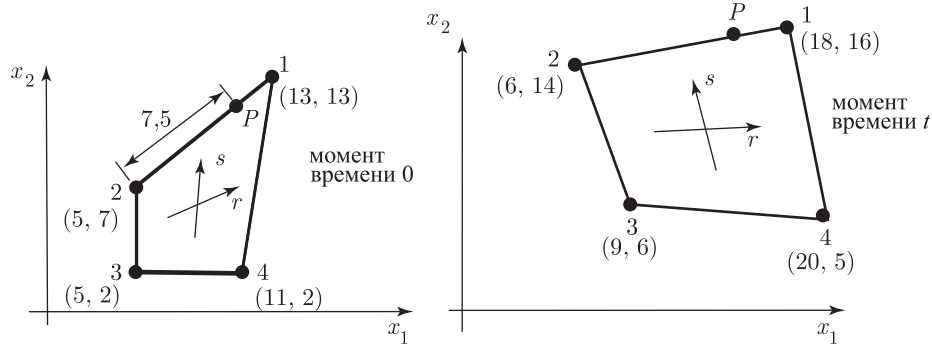


Напряженное состояние, не включающее ${}^t\tau_{zz}$, имеет вид

$${}^t\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} 5,849 \times 10^7 & 6,971 \times 10^7 \\ 6,971 \times 10^7 & 1,514 \times 10^8 \end{bmatrix} \text{ Паскаль.}$$

Коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, а касательный модуль Юнга равен E . Рассчитайте ${}^t_0K_{11}$.

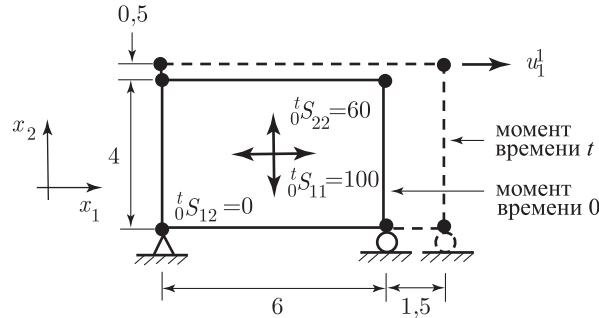
- 6.38. Показанный здесь двумерный изопараметрический элемент с четырьмя узлами используется при осесимметричном анализе. Вычислите последние строки матриц ${}^t_0\mathbf{B}_L$, ${}^t_0\mathbf{B}_{NL}$ и ${}^t\mathbf{B}_L$, ${}^t\mathbf{B}_{NL}$ для материальной частицы P , соответствующие формулировкам TL и UL. Последние строки матриц деформация-смещение соответствуют окружным деформациям.



6.39. Рассмотрите показанный здесь элемент с плоскими деформациями, имеющий четыре узла. Используя полную лагранжеву формулировку, произведите следующие расчеты:

- Определите элемент матрицы касательной жесткости, соответствующий смещению с пошаговым приростом u_1^1 ; иначе говоря, вычислите элемент (1, 1) матрицы $({}^0\mathbf{K}_L + {}^t\mathbf{K}_{NL})$.
- Определите элемент вектора силы ${}^t\mathbf{F}$, соответствующий u_1^1 ; иначе говоря, вычислите элемент (1) указанного вектора силы, соответствующий текущим значениям напряжений элемента.

Предположите, что модуль Юнга E и коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$ связывают определяемые с пошаговым приростом вторые напряжения Пиолы–Кирхгофа с деформациями Грина–Лагранжа; предположите также, что в момент времени 0 толщина равна h .

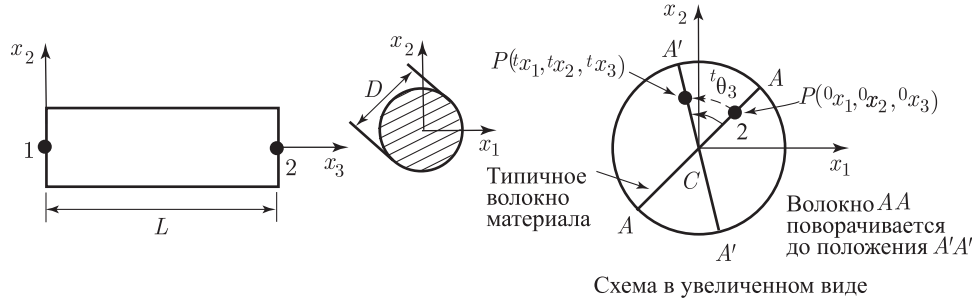


6.40. Требуется построить конечный элемент с двумя узлами для моделирования задач о кручении с большими деформациями. Элемент имеет круговое поперечное сечение и является прямолинейным, причем все его поперечные сечения параллельны плоскости x_1, x_2 , как показано на рисунке.

По отношению к данному элементу следует сделать кинематическое допущение о том, что каждое поперечное сечение поворачивается вокруг своего центра как твердое тело. Это иллюстрируется на прилагаемом рисунке. Обратите внимание на то, что поворот волокна AA полностью описывается углом ${}^t\theta_3$ и что этот поворот волокна может быть большим. Отметим также, что волокно AA не растягивается и не сжимается, и что центр этого волокна (точка C) остается фиксированным.

- Рассчитайте градиент деформаций ${}^t\mathbf{X}$ в терминах начальных координат и угла ${}^t\theta_3$.
- Рассчитайте тензор деформаций Грина–Лагранжа ${}^t\epsilon$. Четко идентифицируйте все члены, связанные с эффектами больших деформаций.
- Рассчитайте отношение массовых плотностей ${}^t\rho/{}^0\rho$ в терминах начальных координат и ${}^t\theta_3$.

(d) Постройте матрицу деформация–смещение для данного элемента.



6.4. Модели смещение/давление для больших деформаций

Как это обсуждалось в разделе 4.4.3, при исследовании несжимаемой (почти) среды процедура, базирующаяся только на учете смещений является, вообще говоря, неэффективной, и применяемая взамен нее модель смещение/давление оказывается привлекательной. При больших деформациях материалы часто ведут себя, как почти несжимаемые, а поэтому важно распространить на исследование несжимаемой среды полные и предварительно заданные лагранжевы формулировки, рассматривавшиеся в предыдущих разделах книги. Типичные приложения связаны с анализом поведения резиноподобных материалов при больших деформациях, а также с неупругим анализом поведения материалов при больших деформациях.

Те модели, которые мы представляем здесь, представляют собой прямое и естественное обобщение формулировок, базирующихся только на учете смещений при больших деформациях и приведенных в предыдущем разделе, а также тех формулировок типа смещение/давление, которые мы обсуждали применительно к линейному анализу в разделах 4.4.3 и 5.3.5.

6.4.1. Полная лагранжева формулировка

Мы делаем здесь фундаментальное предположение о том, что в используемое нами описание поведения материала входит потенциал $d_0^t \bar{W}$, связанный с пошаговым приращением, такой, что

$$d_0^t \bar{W} = {}_0^t \bar{S}_{ij} d_0^t \epsilon_{ij}, \quad (6.129)$$

и, следовательно,

$${}_0^t \bar{S}_{ij} = \frac{\partial_0^t \bar{W}}{\partial_0^t \epsilon_{ij}}, \quad (6.130)$$

где черта сверху в символе $d_0^t \bar{W}$ и в обозначении второго напряжения Пиолы–Кирхгофа (а также в обозначениях других величин при последующем обсуждении) означает, что данная величина рассчитывается только по полям смещений. Если учесть, что смещения и давление мы будем интерполировать независимо друг от друга, то истинное напряжение ${}_0^t S_{ij}$ также будет содержать интерполированное давление.

Отметим, что такой потенциал, связанный с пошаговым приращением, вводится для упругих материалов, а также и для неупругих материалов при условии соблюдения правила нормальности. Следствием формулы (6.129) является то, что тензор

$${}_0 \bar{C}_{ijrs} = \frac{\partial_0^t \bar{S}_{ij}}{\partial_0^t \epsilon_{rs}} = \frac{\partial^2 {}_0^t \bar{W}}{\partial_0^t \epsilon_{rs} \partial_0^t \epsilon_{ij}} \quad (6.131)$$

обладает свойством симметрии, и что модели, базирующиеся только на смещениях и модели типа смещение/давление приводят к симметричным матрицам для коэффициентов.

Если воспользоваться соотношением (6.130), то принцип виртуальных смещений в момент времени t , в полной лагранжевой форме и со смещениями в качестве единственной группы переменных, может быть записан как

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial_0^t \bar{W}}{\partial_0^t \epsilon_{ij}} \delta_0^t \epsilon_{ij} d^0 V &= \int_{\mathcal{V}} \delta_0^t \bar{W} d^0 V = \\ &= \delta \left(\int_{\mathcal{V}} {}^t_0 \bar{W} d^0 V \right) = {}^t \mathcal{R}. \end{aligned} \quad (6.132)$$

Линеаризация соотношения (6.132) и его конечно-элементная дискретизация были представлены в разделе 6.3. Теперь мы используем это соотношение в качестве того уравнения, с которого можно начать построение модели смещение/давление для случая больших деформаций.

Теми основными элементарными интерполяциями, которые мы будем использовать, являются

$${}^t u_i = \sum_{k=1}^N h_k {}^t u_i^k; \quad {}^t \bar{p} = \sum_{i=1}^q g_i {}^t \hat{p}_i, \quad (6.133)$$

где h_k — это интерполяционные функции для смещений, а g_i — интерполяционные функции для давления, тогда как ${}^t \bar{p}$ — это *полное* элементное давление в момент времени t . Отметим, что интерполяция давления может соответствовать как модели u/p , так и модели u/p -с (см. раздел 5.3.5).

Ключевой этап построения модели смещение/давление состоит в том, чтобы надлежащим образом модифицировать потенциал с целью включить в него эффект интерполяционного давления. Имея в виду эту модификацию, мы добавляем к потенциалу ${}^t_0 \bar{W}$ надлежащим образом выбранный потенциал ${}^t_0 Q$, представляющий собой некую функцию смещений и отдельно интерполированного давления ${}^t \bar{p}$ (см. [Sussman, Bathe 1987]). После этого принцип виртуальной работы определяется уравнением

$$\delta \left(\int_{\mathcal{V}} {}^t_0 W d^0 V \right) = {}^t \mathcal{R}, \quad (6.134)$$

где

$${}^t_0 W = {}^t_0 \bar{W} + {}^t_0 Q, \quad (6.135)$$

после чего мы рассматриваем вариацию по отношению к интерполированным смещениям и интерполированному давлению.

Модифицированный потенциал ${}^t_0 W$ должен отвечать тем требованиям, чтобы использование соотношения (6.134) давало ${}^t \bar{p}$ в качестве истинного решения для давления, а также позволяло бы получить физически осмысленную ограничительную связь между интерполированным давлением и давлением, вычисляемым только по данным о смещениях.

Потенциал, позволяющий выполнить указанные требования для рассматриваемых нами в дальнейшем изотропных материалов, задается выражением

$${}^t_0 W = {}^t_0 \bar{W} - \frac{1}{2\kappa} ({}^t \bar{p} - {}^t \hat{p})^2, \quad (6.136)$$

где κ — это постоянный объемный модуль рассматриваемого материала. Используя выражение (6.136) и применяя подход к линеаризации, предложенный в разделе 6.3.1, можно вывести определяющие конечно-элементные уравнения. В результате для типичного элемента получаем

$$\begin{pmatrix} {}^t \mathbf{K}_{UU} & {}^t \mathbf{K}_{UP} \\ {}^t \mathbf{K}_{PU} & {}^t \mathbf{K}_{PP} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} {}^t \mathbf{F}_U \\ {}^t \mathbf{F}_P \end{pmatrix}, \quad (6.137)$$

где $\hat{\mathbf{u}}$ и \hat{p} представляют собой векторы приращений для смещений в узловых точках ${}^t \hat{u}_i$ и переменных, характеризующих внутреннее давление, ${}^t \hat{p}_i$, в элементе или в узловых точках (отметим, что здесь величина ${}^t \hat{u}_i$ — это любой из компонентов ${}^t u_i^k$, соответствующих

формулам (6.122), (6.128) и (6.133)). Векторы ${}^t\mathbf{F}\mathbf{U}$ и ${}^t\mathbf{F}\mathbf{P}$ имеют компоненты

$$\begin{aligned} {}^tFU_i &= \frac{\partial}{\partial {}^t\widehat{u}_i} \left(\int_{{}_0V} {}^t_0W d^0V \right), \\ {}^tFP_i &= \frac{\partial}{\partial {}^t\widehat{p}_i} \left(\int_{{}_0V} {}^t_0W d^0V \right), \end{aligned} \quad (6.138)$$

а матрицы ${}^t\mathbf{K}\mathbf{U}\mathbf{U}$, ${}^t\mathbf{K}\mathbf{U}\mathbf{P}$, ${}^t\mathbf{K}\mathbf{P}\mathbf{U}$ и ${}^t\mathbf{K}\mathbf{P}\mathbf{P}$ содержат элементы

$$\begin{aligned} {}^tKUU_{ij} &= \frac{\partial {}^tFU_i}{\partial {}^t\widehat{u}_j}, \\ {}^tKUP_{ij} &= \frac{\partial {}^tFU_i}{\partial {}^t\widehat{p}_j} = \frac{\partial {}^tFP_j}{\partial {}^t\widehat{u}_i} = {}^tKPU_{ji}, \\ {}^tKPP_{ij} &= \frac{\partial {}^tFP_i}{\partial {}^t\widehat{p}_j}. \end{aligned} \quad (6.139)$$

Проводя дифференцирование по правилу цепочки, получим

$$\begin{aligned} {}^tFU_i &= \int_{{}_0V} {}^t_0S_{kl} \frac{\partial {}^t_0\epsilon_{kl}}{\partial {}^t\widehat{u}_i} d^0V, \\ {}^tFP_i &= \int_{{}_0V} \frac{1}{\kappa} ({}^t\bar{p} - {}^t\widetilde{p}) \frac{\partial {}^t\bar{p}}{\partial {}^t\widehat{p}_i} d^0V, \\ {}^tKUU_{ij} &= \int_{{}_0V} {}_0CUU_{klrs} \frac{\partial {}^t_0\epsilon_{kl}}{\partial {}^t\widehat{u}_i} \frac{\partial {}^t_0\epsilon_{rs}}{\partial {}^t\widehat{u}_j} d^0V + \int_{{}_0V} {}^t_0S_{kl} \frac{\partial^2 {}^t_0\epsilon_{kl}}{\partial {}^t\widehat{u}_i \partial {}^t\widehat{u}_j} d^0V, \\ {}^tKUP_{ij} &= \int_{{}_0V} {}_0CUP_{kl} \frac{\partial {}^t_0\epsilon_{kl}}{\partial {}^t\widehat{u}_i} \frac{\partial {}^t\bar{p}}{\partial {}^t\widehat{p}_j} d^0V, \\ {}^tKPP_{ij} &= \int_{{}_0V} -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial {}^t\bar{p}}{\partial {}^t\widehat{p}_i} \frac{\partial {}^t\bar{p}}{\partial {}^t\widehat{p}_j} d^0V, \end{aligned} \quad (6.140)$$

где

$$\begin{aligned} {}^t_0S_{kl} &= {}^t_0\bar{S}_{kl} - \frac{1}{\kappa} ({}^t\bar{p} - {}^t\widetilde{p}) \frac{\partial {}^t\bar{p}}{\partial {}^t_0\epsilon_{kl}}, \\ {}_0CUU_{klrs} &= {}_0\bar{C}_{klrs} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial {}^t\bar{p}}{\partial {}^t_0\epsilon_{kl}} \frac{\partial {}^t\bar{p}}{\partial {}^t_0\epsilon_{rs}} - \frac{1}{\kappa} ({}^t\bar{p} - {}^t\widetilde{p}) \frac{\partial^2 {}^t\bar{p}}{\partial {}^t_0\epsilon_{kl} \partial {}^t_0\epsilon_{rs}}, \\ {}_0CUP_{kl} &= \frac{1}{\kappa} \frac{\partial {}^t\bar{p}}{\partial {}^t_0\epsilon_{kl}}. \end{aligned} \quad (6.141)$$

Заметим, что в правых частях соотношений (6.141) мы имеем

$$\begin{aligned} {}^t_0\bar{S}_{kl} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial {}^t_0\bar{W}}{\partial {}^t_0\epsilon_{kl}} + \frac{\partial {}^t_0\bar{W}}{\partial {}^t_0\epsilon_{lk}} \right), \\ {}_0\bar{C}_{klrs} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial {}^t_0\bar{S}_{kl}}{\partial {}^t_0\epsilon_{rs}} + \frac{\partial {}^t_0\bar{S}_{kl}}{\partial {}^t_0\epsilon_{sr}} \right). \end{aligned} \quad (6.142)$$

Кроме того, мы замечаем, что при интерполяциях по формулам (6.133) имеем

$$\frac{\partial {}^t\bar{p}}{\partial {}^t\widehat{p}_i} = g_i, \quad (6.143)$$

а также (см. упражнение 6.42)

$$\frac{\partial {}^t_0\epsilon_{kl}}{\partial {}^tu_n^L} = \frac{1}{2} ({}^tu_{n,k} {}^0h_{L,I} + {}^tu_{n,l} {}^0h_{L,k}), \quad (6.144)$$

$$\frac{\partial^2 {}^t_0\epsilon_{kl}}{\partial {}^tu_n^L \partial {}^tu_m^M} = \frac{1}{2} ({}^0h_{L,k} {}^0h_{M,I} + {}^0h_{L,I} {}^0h_{M,k}) \delta_{nm}, \quad (6.145)$$

где типичное смещение в узловой точке обозначается символом ${}^t u_n^L$ (при надлежащих индексах n и L). Эти производные от деформаций вносят такой же вклад в уравнения, как и величины ${}^0 e_{ij}$ и ${}^0 \eta_{ij}$, использованные в таблице 6.2.

Как показывает изучение приведенных выше соотношений, если интерполяция давления не включается в анализ, то уравнения сводятся к тому, что дает полная лагранжева формулировка, уже представленная нами в разделе 6.2.3 (см. упражнение 6.43).

Модель смещение/давление эффективна при анализе задач, связанных с использованием резиноподобных материалов в условиях больших деформаций. В этих случаях можно применять законы Муни–Ривлина или Огдена, определяющие поведение материала, и с применением этих законов плотность энергии деформаций в расчете на единицу объема, ${}^0 \bar{W}$, определяется в явной форме (см. раздел 6.6.2).

Мы намереваемся показать, что вышеуказанная модель, будучи использована при анализе малых упругих деформаций, сводится к той модели, которую мы уже обсуждали в разделе 5.3.5.

Пример 6.19: Требуется показать, как рассмотренная выше модель смещение/давление сводится к модели, представленной в разделе 5.3.5, если исследуется случай изотропной линейной упругости с малыми смещениями и малыми деформациями.

Рассматривая общие уравнения (6.137)–(6.145), отметим, что в данном случае:

Второе напряжение Пиолы–Кирхгофа ${}^t S_{kl}$ сводится к инженерному масштабу напряжения ${}^t \sigma_{kl}$.

Деформации Грина–Лагранжа ${}^t e_{kl}$ сводятся к бесконечно малым инженерным деформациям ${}^t e_{kl}$.

Матрицей жесткости нелинейных деформаций в (6.140) пренебрегаем.

Интегрирование осуществляется по объему V (который равен ${}^0 V$), и индекс 0 у обозначений основополагающих тензоров также не нужен.

В данном случае мы имеем

$$\bar{C}_{klrs} = \lambda \delta_{kl} \delta_{rs} + \mu (\delta_{kr} \delta_{ls} + \delta_{ks} \delta_{lr}),$$

где λ и μ — это постоянные Ляме,

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

при E и ν , обозначающих модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Объемный модуль κ выражается согласно формуле

$$\kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)}.$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} {}^t \bar{p} &= -\kappa {}^t e_{mm}, \\ \frac{\partial {}^t \bar{p}}{\partial {}^t e_{kl}} &= -\kappa \delta_{kl}, \\ \frac{\partial^2 {}^t \bar{p}}{\partial {}^t e_{kl} \partial {}^t e_{rs}} &= 0, \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} {}^t \sigma_{kl} &= {}^t S_{kl} - {}^t \bar{p} \delta_{kl}, \\ CUU_{klrs} &= \bar{C}_{klrs} - \kappa \delta_{kl} \delta_{rs}, \\ CUP_{kl} &= -\delta_{kl}. \end{aligned}$$

Подставляя эти величины в соотношение (6.137), мы замечаем, что общая модель в данном случае сводится к модели, уже представленной в разделах 4.4.3 и 5.3.5.

6.4.2. Предварительно заданная лагранжева формулировка

Как мы уже обсуждали это в разделе 6.2.3, предварительно заданная лагранжева формулировка концептуально идентична полной лагранжевой формулировке, однако

в качестве образцовой конфигурации она использует конфигурацию в момент времени t . В этом случае ${}^t_S S_{ij} = {}^t_{\tau_{ij}}$ и $d_T \epsilon_{ij} = d_t e_{ij}$, где индекс T обозначает фиксированную конфигурацию¹⁾, которая используется в качестве образцовой, причем

$$d_t e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial du_i}{\partial^t x_j} + \frac{\partial du_j}{\partial^t x_i} \right). \quad (6.146)$$

Таким образом, следуя тому, что излагалось в предыдущем разделе, мы получаем

$$d_T^t \bar{W} = {}^t_{\tau_{ij}} d_t e_{ij} \quad (6.147)$$

и замечаем, что

$${}^t_T \bar{W} d^T V = {}^t_0 \bar{W} d^0 V. \quad (6.148)$$

Если в дополнение к этому использовать соотношения

$${}^t_T Q d^T V = {}^t_0 Q d^0 V; \quad \frac{d^T V}{d^0 V} = \det {}^T_0 \mathbf{X}, \quad (6.149)$$

то мы можем записать принцип виртуальной работы (6.134) в форме

$$\delta \int_{{}^T V} ({}^t_T \bar{W} + {}^t_T Q) d^T V = {}^t \mathcal{R}. \quad (6.150)$$

Отметим, что если мы используем предложенную в предыдущем разделе модификацию полного потенциала ${}^t_0 \bar{W}$,

$${}^t_0 Q = -\frac{1}{2\kappa} ({}^t \bar{p} - {}^t \tilde{p})^2, \quad (6.151)$$

то

$${}^t_T Q = -\frac{1}{2\kappa^*} ({}^t \bar{p} - {}^t \tilde{p})^2 \quad (6.152)$$

при

$$\kappa^* = \kappa \det {}^T_0 \mathbf{X}. \quad (6.153)$$

Теперь определяющие конечно-элементные уравнения могут быть выведены путем дифференцирования с применением правила цепочки, а также при том условии, что используются одни и те же физические описания материала. Если все это соблюдено, то получаются те же самые конечно-элементные уравнения, что и при полной лагранжевой формулировке. Подробности этого вывода приводятся в работе [Sussman, Bathe 1987].

6.4.3. Упражнения

6.41. Покажите, что если использовать соотношение (6.136), то истинное решение для давления дается через посредство независимо интерполированного значения ${}^t \tilde{p}$.

6.42. Положите ${}^t u_n = \sum_L h_L {}^t u_n^L$ и докажите, что справедливы соотношения (6.144) и (6.145). При этом, возможно, вы захотите вспомнить, что

$$\frac{\partial(A_{M,i} {}^t u_i^M)}{\partial {}^t u_k^L} = A_{M,i} \delta_{ik} \delta_{ML} = A_{L,k},$$

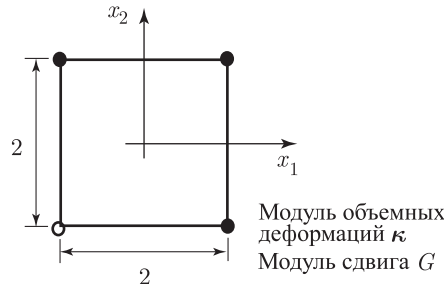
где δ_{ik} — это оператор дельта Кронекера.

6.43. Покажите в явной форме, что смешанная модель давление/смещение сводится к модели, базирующейся только на учете смещений, если в анализ не включается интерполяция давления.

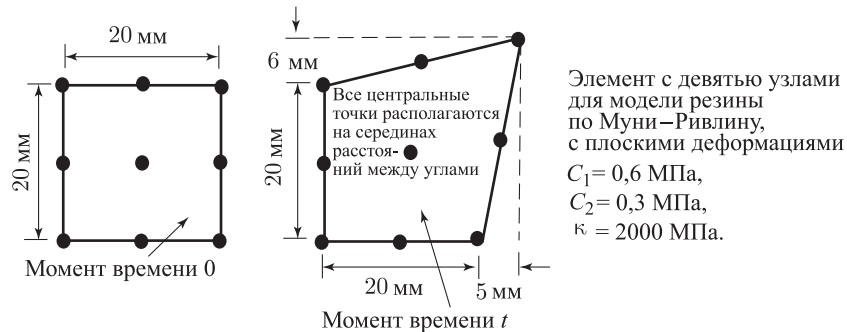
6.44. Докажите справедливость соотношений (6.140) и (6.141).

6.45. Рассмотрите показанный здесь элемент с плоскими деформациями типа 4/1. Дайте подробное построение всех выражений, нужных для расчета матриц в соотношении (6.137), в предположении анализа с большими деформациями, но не выполняя никаких операций интегрирования (*подсказка*: см. пример 4.32).

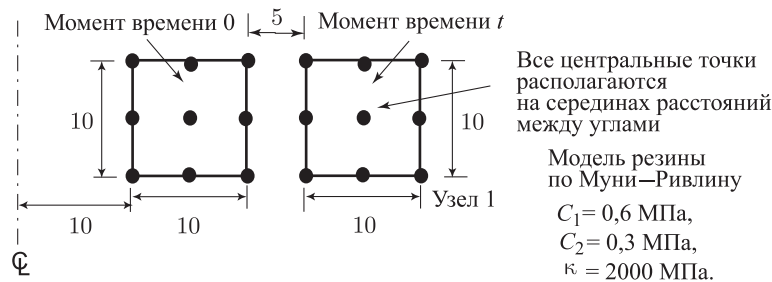
¹⁾ Мы используем заглавную букву T для обозначения образцовой конфигурации, зафиксированной в момент времени t , так что когда проводятся операции дифференцирования, то обнаруживается, что эта конфигурация не подлежит варьированию.



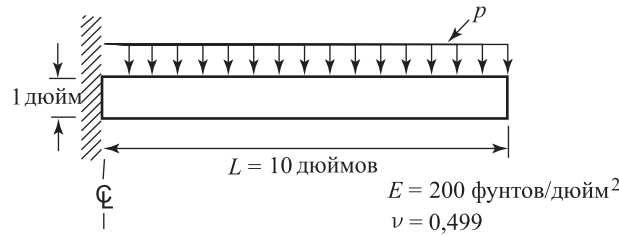
- 6.46. Рассмотрите элемент типа 4/1 из упражнения 6.45 и дайте подробное построение всех выражений, нужных для расчета матриц в соотношении (6.137), но в соответствии с предварительно заданной лагранжевой формулировкой. Однако не выполняйте никаких операций интегрирования.
- 6.47. Вы хотели бы разобраться в том, использует ли применяемая вами компьютерная программа касательную матрицу жесткости при анализе с плоскими деформациями. Рассмотрите одиночный элемент с девятью узлами в показанном здесь деформированном состоянии. Исходя из предположения о том, что расчет напряжений и вектора сил ${}^t\mathbf{F}$ проведен правильно, спланируйте тестовую процедуру для вычисления того, правильно проведен также и расчет матрицы жесткости для узла 1. Для анализа этого случая будет, вероятно, эффективной модель u/p (элемент типа 9/3) (подсказка: заметьте, что ${}^t\mathbf{K} = \partial {}^t\mathbf{F} / \partial {}^t\mathbf{U}$).



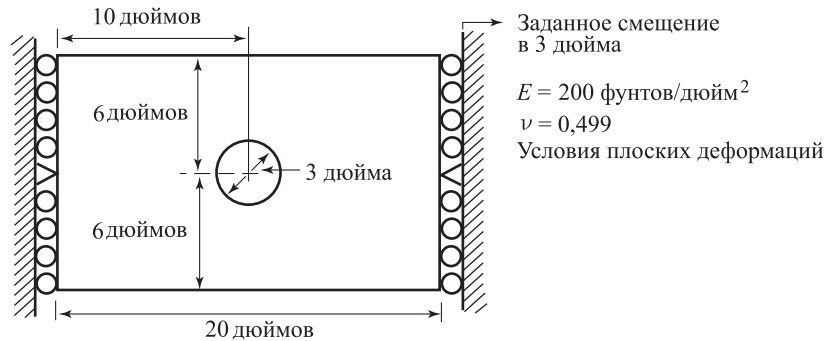
- 6.48. Проведите численный эксперимент, описанный в упражнении 6.47, для случая показанного здесь осесимметричного элемента.



- 6.49. Воспользуйтесь компьютерной программой для исследования поведения показанного здесь толстого диска. Приложенное давление равномерно возрастает, причем анализ следует проводить вплоть до достижения максимального смещения, равного трем дюймам.



- 6.50. Воспользуйтесь компьютерной программой для исследования поведения показанной здесь пластины с отверстием. Пластина растягивается путем создания равномерно возрастающего смещения на ее правом краю.



6.5. Конструкционные элементы

Большое число элементов типа балок, пластин и оболочек было предложено с целью проведения их нелинейного анализа (см., например, [Noor 1991]). Здесь мы отнюдь не собираемся давать обзор различных формулировок, предложенных в научной литературе, а хотим лишь дать краткое представление тех элементов, которые уже были обсуждены при их линейном анализе в разделе 5.4. Указанные элементы в форме балок, пластин и оболочек охватываются изопараметрической моделью и являются особенно привлекательными вследствие совместимости модели, общего характера элементов, а также вычислительной эффективности их расчета.

При последующем обсуждении мы рассмотрим вначале элементы в форме балок и осесимметричных оболочек, а затем обсудим элементы в форме пластин и оболочек общего вида.

6.5.1. Элементы типа балок и осесимметричных оболочек

В этом разделе мы рассмотрим одномерные изгибающиеся элементы, уже обсуждавшиеся нами в разделе 5.4.1 в рамках линейного анализа; там мы рассмотрели элементы в форме плоскостных балок с плоскими напряжениями и с плоскими деформациями, осесимметричный элемент в форме оболочки, а также элемент в форме трехмерной балки общего вида. Мы отметили, что модели для элементов типа плоскостной балки и осесимметричной оболочки представляют собой, фактически, легко выводимые частные случаи общей модели для трехмерной балки. Исходя из этого, здесь мы рассмотрим расчет элементных матриц, соответствующих поведению балки общего вида, имеющей поперечное сечение прямоугольной формы и подвергающейся большим смещениям и большим углам поворота. Получаемые в результате соотношения могут быть непосредственно использованы и для построения матриц, соответствующих плоскостным элементам типа балки и осесимметричным элементам типа оболочки (см. примеры 6.20 и 6.21).

На рис. 6.17 показан типичный элемент в его начальной конфигурации, а также в конфигурации для момента времени t . Для описания поведения этого элемента используются

те же самые предположения, которые применялись нами при линейном анализе (а именно, — что плоские сечения, первоначально нормальные к нейтральной оси, остаются плоскими, и что отличными от нуля являются только одно продольное напряжение и два касательных), однако теперь смещения и углы поворота элемента могут быть сколь угодно велики. Элементные деформации по-прежнему предполагаются малыми, а это означает, что площадь поперечного сечения не изменяется¹⁾. Это предположение является подходящим для большинства случаев геометрически нелинейного анализа поведения конструкций типа балки.

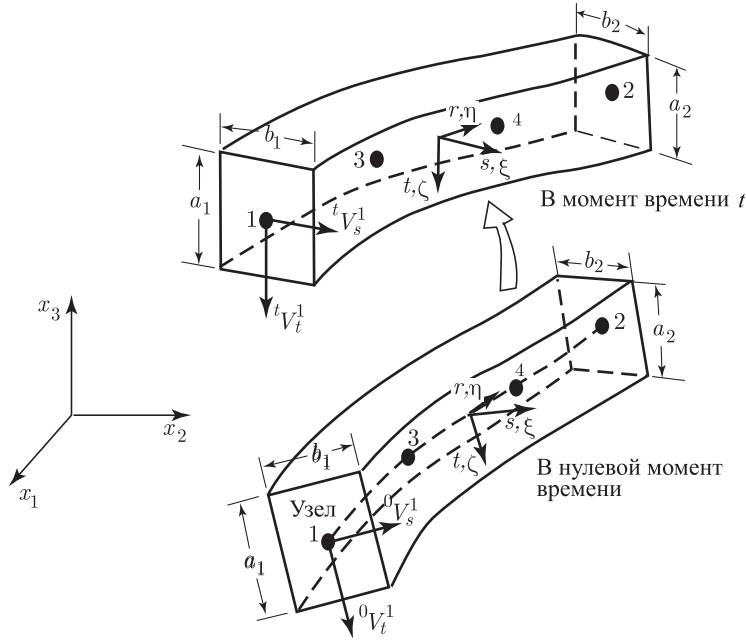


Рис. 6.17. Элемент типа балки, испытывающей большие смещения и повороты

Если воспользоваться общими уравнениями механики сплошной среды, представленными в разделе 6.2 для случая нелинейного анализа, то матрицы для такого анализа в применении к балочному элементу вычисляются путем прямого обобщения модели, данной в разделе 5.4.1. Расчеты выполняются так же, как и при вычислении матриц для конечных элементов со степенями свободы, определяемыми только смещениями (см. разделы 5.4.1 и 6.3).

Если использовать обозначения, применявшиеся нами в разделе 5.4.1, то геометрия балочного элемента в момент времени t задается формулами

$${}^t x_i = \sum_{k=1}^q h_k {}^t x_i^k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k {}^t V_{ri}^k + \frac{s}{2} \sum_{k=1}^q b_k h_k {}^t V_{si}^k, \quad i = 1, 2, 3, \quad (6.154)$$

где координаты некоторой характерной точки балки равны ${}^t x_1, {}^t x_2, {}^t x_3$. При рассмотрении конфигураций в моменты времени 0, t и $t + \Delta t$ компоненты смещений будут равны

$${}^t u_i = {}^t x_i - {}^0 x_i \quad (6.155)$$

¹⁾ Чтобы приспособить модель рассматриваемого элемента к случаю больших деформаций, понадобилось бы рассчитывать изменения толщины и ширины по длине элемента. Эти изменения зависят от соотношения напряжение–деформация для материала данного элемента.

и

$$u_i = {}^{t+\Delta t}x_i - {}^tx_i. \quad (6.156)$$

Подставляя выражения (6.154) в формулы (6.155) и (6.156), мы получим выражения для компонентов смещений в терминах смещений в узловых точках, а также приращений направляющих косинусов для векторов, определяющих направление смещений в узловых точках; следовательно, имеем

$${}^tu_i = \sum_{k=1}^q h_k {}^tu_i^k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k ({}^tV_{ti}^k - {}^0V_{ti}^k) + \frac{s}{2} \sum_{k=1}^q b_k h_k ({}^tV_{si}^k - {}^0V_{si}^k) \quad (6.157)$$

и

$$u_i = \sum_{k=1}^q h_k u_i^k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k V_{ti}^k + \frac{s}{2} \sum_{k=1}^q b_k h_k V_{si}^k, \quad (6.158)$$

где

$$V_{ti}^k = {}^{t+\Delta t}V_{ti}^k - {}^tV_{ti}^k, \quad (6.159)$$

$$V_{si}^k = {}^{t+\Delta t}V_{si}^k - {}^tV_{si}^k. \quad (6.160)$$

Соотношение (6.157) применяется непосредственно для вычисления полных смещений и полных деформаций (а следовательно — и полных напряжений) для формулировок UL и TL, причем оно остается справедливым для компонентов смещений любой величины.

Соотношение (6.158) используется при линеаризации принципа виртуальной работы. Причем нам нужно выразить компоненты V_{ti}^k и V_{si}^k векторов \mathbf{V}_t^k и \mathbf{V}_s^k в терминах вращательных степеней свободы для узловых точек. В зависимости от величины пошаговых приращений истинный угол поворота, соответствующий векторам \mathbf{V}_t^k и \mathbf{V}_s^k , может быть большим, а поэтому он не может быть представлен поворотами компонентов каждого вектора относительно декартовых осей. Вспомним, однако, что мы ставим своей целью выразить линейные и нелинейные приращения деформаций сплошной среды (см. таблицы 6.2 и 6.3) через конечно-элементные степени свободы, а также соответствующие интерполяции, имея в виду провести полную линеаризацию принципа виртуальной работы (см. раздел 6.3.1). С этой целью мы определяем вектор вращательных степеней свободы в узле θ_k с компонентами, измеряемыми относительно декартовых осей, используя при этом аппроксимацию второго порядка (см. упражнение 6.56),

$$\mathbf{V}_t^k = \theta_k \times {}^t\mathbf{V}_t^k + \frac{1}{2} \theta_k \times (\theta_k \times {}^t\mathbf{V}_t^k), \quad (6.161)$$

$$\mathbf{V}_s^k = \theta_k \times {}^t\mathbf{V}_s^k + \frac{1}{2} \theta_k \times (\theta_k \times {}^t\mathbf{V}_s^k). \quad (6.162)$$

Использование величин θ_k требуется только для того, чтобы вычислить новые векторы направления смещений (их приближенные представления), а после этого θ_k уже не нужны.

Подставляя выражения (6.161) и (6.162) в формулу (6.158), мы получаем выражение для u_i и, следовательно, можем рассчитать линейные и нелинейные тензоры деформаций с пошаговым приростом для сплошной среды (см. таблицы 6.2 и 6.3). Учитывая, что соотношения (6.161) и (6.162) содержат квадратичные выражения, мы пренебрегаем всеми членами высших порядков по отношению к переменным решения, чтобы получить полностью линеаризованную форму уравнения, выражающего принцип виртуальной работы, — линеаризованную по отношению к состоянию в момент времени t , по переменным решения (смещения и углы поворота в узловых точках). При проведении этого процесса в конечно-элементном решении с пошаговым приростом появляется и используется касательная матрица жесткости. Следует отметить, однако, что *линейные* приращения деформаций сплошной среды, приводимые в таблицах 6.2 и 6.3, содержат теперь *квадратичные* члены по углам поворота и, следовательно, члены из правых частей

$$\int_0^t S_{ij} \delta_0 e_{ij} d^0V \quad \text{и} \quad \int_0^t \tau_{ij} \delta_i e_{ij} d^tV$$

уравнений (6.74) и (6.75) вносят, в данном случае, свой вклад в выражения касательных матриц жесткости при формулировках TL и UL. Разумеется, те же самые уравнения для

приращений получатся также и тогда, когда для их вывода мы используем процедуру, описанную в разделе 6.3.1.

При интерполяциях используется предположение кинематического характера о том, что «плоские сечения остаются плоскими» и что, следовательно, эффект коробления не включается в анализ. Однако, как об этом уже говорилось в разделе 5.4.1, коробящие смещения могут быть добавлены к предполагаемым деформациям.

Теперь линейная и нелинейная матрицы деформация–смещение для элемента типа балки, соответствующие формулировке UL, могут быть вычислены с помощью подхода, применявшегося при линейном анализе. Другими словами, при использовании выражения (6.158) вычисляются компоненты деформаций, соответствующие глобальным осям, после чего они преобразуются так, чтобы получить компоненты деформаций, соответствующие локальным осям балки, η , ξ , ζ . Если учесть, что матрица жесткости элемента вычисляется с помощью численного интегрирования, то и преобразование с переходом от глобальных компонентов деформаций к локальным должно реализовываться с помощью численного интегрирования в каждой из исследуемых точек.

Рассматривая формулировку TL, мы обнаруживаем, что, во-первых, нам потребуются производные, аналогичные тем, которые нужны при формулировке UL, но эти производные берутся по отношению к координатам в момент времени 0. Однако в дополнение к этому, чтобы включить эффект начального смещения, нам понадобятся и производные смещений в момент t по отношению к начальным координатам. Эти производные вычисляются с использованием формулы (6.157).

Вышеупомянутые интерполяции приводят к конечно-элементной схеме, основанной на учете смещений, которая, как упоминается в разделе 5.4.1, приводит к очень медленно сходящейся дискретизации. Чтобы получить эффективную схему, следует воспользоваться смешанной интерполяцией, которая в случае модели балки эквивалентна применению надлежащего порядка интегрирования по Гауссу в направлении r : а именно, одноточечная схема интегрирования для элемента с двумя узлами, двухточечная — для элемента с тремя узлами, и трехточечная схема — для элемента с четырьмя узлами.

Таким образом мы приходим к следующей форме конечно-элементных уравнений:

$${}^t\mathbf{K} \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{u}_k \\ \boldsymbol{\theta}_k \\ \vdots \end{bmatrix} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F}. \quad (6.163)$$

После разрешения уравнений (6.163) относительно \mathbf{u}_k и $\boldsymbol{\theta}_k$ мы получим приближенные выражения для смещений в узловых точках, а также для векторов, определяющих направление смещений в момент времени $t + \Delta t$, используя при этом формулы

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}_k = {}^t\mathbf{u}_k + \mathbf{u}_k \quad (6.164)$$

и

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{V}_t^k = {}^t\mathbf{V}_t^k + \int_{\boldsymbol{\theta}_k} d\boldsymbol{\theta}_k \times {}^\tau\mathbf{V}_t^k, \quad (6.165)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{V}_s^k = {}^t\mathbf{V}_s^k + \int_{\boldsymbol{\theta}_k} d\boldsymbol{\theta}_k \times {}^\tau\mathbf{V}_s^k. \quad (6.166)$$

Операции интегрирования в (6.165) и (6.166) могут быть выполнены за один шаг при использовании ортогональной матрицы для конечных углов поворота (см., например, [Argyris 1982] и упражнение 6.55), или же за несколько шагов при использовании простого метода Эйлера со сдвигом вперед (см. раздел 9.6). Разумеется, величины $\boldsymbol{\theta}_k$ (и \mathbf{u}_k) представляют собой аппроксимации истинных требуемых приращений (вследствие линеаризации принципа виртуальной работы), однако при выполнении аналогичных операций в (6.165) и (6.166) мы намереемся получить более точную оценку новых векторов, указывающих направление смещения, чем просто путем подстановки в (6.161) и (6.162).

Вышеуказанная последовательность действий соответствует, конечно, лишь первой итерации процесса итеративного решения по Ньютону–Рафсону, или же некой типичной итерации, если используются последние рассчитанные значения координат и направляющих векторов.

Следует отметить, что данная модель балочного элемента допускает очень большие смещения и углы поворота и обладает некоторым важным преимуществом при ее сравнении с моделью прямолинейного балочного элемента, основанной на применении интерполяций для смещений по Эрмиту: все индивидуальные компоненты смещений выражаются с использованием одних и тех же функций, так как выражения для этих смещений выводятся, исходя из геометрической интерполяции. Таким образом, в интерполяции смещений нет никакой направленности, и изменение геометрии балочной конструкции с возрастающими деформациями моделируется более точно, чем при использовании прямолинейных балочных элементов с интерполяциями по Эрмиту, как это и показано, например, в работе [Bathe, Bolourchi 1979].

Ранее мы уже упоминали о том, что эта общая модель балки может быть использована для построения матриц, соответствующих описанию для плоскостных балочных элементов в условиях плоских напряжений или плоских деформаций, или же для осесимметричных элементов в форме оболочки. Такого рода построения мы демонстрируем в приводимых ниже примерах.

Пример 6.20: Рассмотрим показанный на рис. 6.18 балочный элемент с двумя узлами. Требуется вычислить интерполяции координат и смещений, а также производные, нужные для расчета матриц деформация–смещение в формулировках UL и TL.

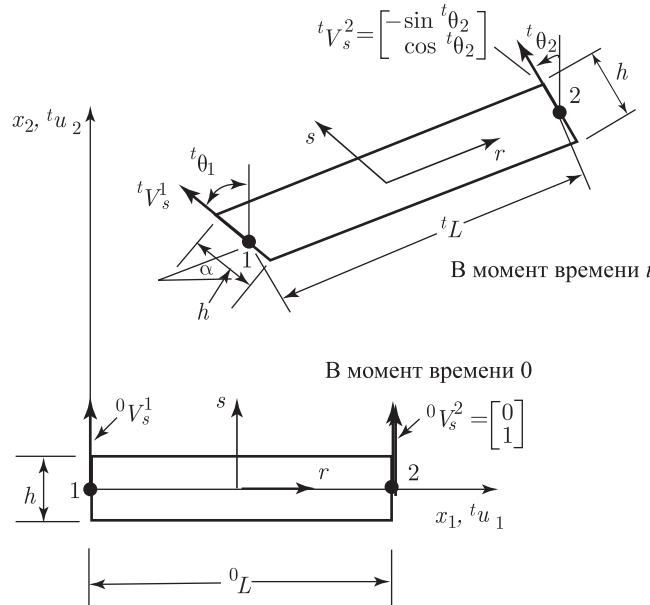


Рис. 6.18. Элемент типа балки с двумя узлами, испытывающей большие смещения и повороты

Используя переменные, указанные на рис. 6.18, в соответствии с (6.154) мы имеем

$$\begin{aligned} {}^t x_1 &= \left(\frac{1-r}{2} \right) {}^t x_1^1 + \left(\frac{1+r}{2} \right) {}^t x_1^2 - \frac{sh}{2} \left(\frac{1-r}{2} \right) \sin {}^t\theta_1 - \frac{sh}{2} \left(\frac{1+r}{2} \right) \sin {}^t\theta_2, \\ {}^t x_2 &= \left(\frac{1-r}{2} \right) {}^t x_2^1 + \left(\frac{1+r}{2} \right) {}^t x_2^2 + \frac{sh}{2} \left(\frac{1-r}{2} \right) \cos {}^t\theta_1 + \frac{sh}{2} \left(\frac{1+r}{2} \right) \cos {}^t\theta_2, \end{aligned}$$

$${}^0x_1 = \left(\frac{1+r}{2}\right) {}^0L,$$

$${}^0x_2 = \frac{sh}{2}.$$

Следовательно, компоненты смещений в любой точке, в момент времени t , равны

$$\begin{aligned} {}^t u_1 &= \left(\frac{{}^t x_1 + {}^t x_1^2 - {}^0 L}{2}\right) + \left(\frac{{}^t x_1^2 - {}^t x_1 - {}^0 L}{2}\right) r - \frac{sh}{2} \left[\left(\frac{1-r}{2}\right) \sin {}^t \theta_1 + \left(\frac{1+r}{2}\right) \sin {}^t \theta_2 \right], \\ {}^t u_2 &= \left(\frac{{}^t x_2 + {}^t x_2^2}{2}\right) + \left(\frac{{}^t x_2^2 - {}^t x_1}{2}\right) r + \frac{sh}{2} \left[\left(\frac{1-r}{2}\right) \cos {}^t \theta_1 + \left(\frac{1+r}{2}\right) \cos {}^t \theta_2 - 1 \right]. \end{aligned}$$

Смещения, определяемые с пошаговым приростом, задаются формулой (6.158); следовательно,

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1-r}{2} u_1^1 + \frac{1+r}{2} u_1^2 + \frac{sh}{2} \left(\frac{1-r}{2}\right) \left[(-\cos {}^t \theta_1) \theta_1 + \frac{1}{2} \sin {}^t \theta_1 (\theta_1)^2 \right] + \\ &\quad + \frac{sh}{2} \left(\frac{1+r}{2}\right) \left[(-\cos {}^t \theta_2) \theta_2 + \frac{1}{2} \sin {}^t \theta_2 (\theta_2)^2 \right], \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{1-r}{2} u_2^1 + \frac{1+r}{2} u_2^2 + \frac{sh}{2} \left(\frac{1-r}{2}\right) \left[(-\sin {}^t \theta_1) \theta_1 - \frac{1}{2} \cos {}^t \theta_1 (\theta_1)^2 \right] + \\ &\quad + \frac{sh}{2} \left(\frac{1+r}{2}\right) \left[(-\sin {}^t \theta_2) \theta_2 - \frac{1}{2} \cos {}^t \theta_2 (\theta_2)^2 \right]. \end{aligned} \quad (b)$$

Отметим наличие квадратичных членов с углами поворота в узловых точках, подчеркнутых пунктирными линиями. Если использовать формулы (a) и (b) для вычисления деформационных членов для сплошной среды, полученных с пошаговым приростом, т.е. ${}^0 e_{ij}$, ${}^t e_{ij}$, ${}^0 \eta_{ij}$ и ${}^t \eta_{ij}$ из таблиц 6.2 и 6.3, то мы обнаруживаем, что полностью линеаризованные конечно-элементные уравнения получаются путем включения подчеркнутых членов в процесс вычисления интегралов $\int_{{}^0 V} {}^t S_{ij} \delta_0 e_{ij} d^0 V$ и $\int_{{}^t V} {}^t \tau_{ij} \delta_t e_{ij} d^t V$.

Для конструкционных элементов эти члены вносят свой вклад в выражения матриц жесткости при нелинейных деформациях. Однако эти квадратичные члены с углами поворота не дают вклада в линеаризованные формы других интегралов, потому что в этих интегралах они фигурируют в виде членов высшего порядка, которыми при линеаризации пренебрегают.

При рассмотрении формулировки UL производные, требуемые для вычисления якобиана, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^t x_1}{\partial r} &= \frac{L \cos \alpha}{2} - \frac{sh}{4} (\sin {}^t \theta_2 - \sin {}^t \theta_1), \\ \frac{\partial {}^t x_1}{\partial s} &= \left(-\frac{h}{2}\right) \left[\left(\frac{1-r}{2}\right) \sin {}^t \theta_1 + \left(\frac{1+r}{2}\right) \sin {}^t \theta_2 \right], \\ \frac{\partial {}^t x_2}{\partial r} &= \frac{L \sin \alpha}{2} + \frac{sh}{4} (\cos {}^t \theta_2 - \cos {}^t \theta_1), \\ \frac{\partial {}^t x_2}{\partial s} &= \frac{h}{2} \left[\left(\frac{1-r}{2}\right) \cos {}^t \theta_1 + \left(\frac{1+r}{2}\right) \cos {}^t \theta_2 \right], \end{aligned}$$

где мы предположили, что ${}^t L = {}^0 L = L$.

Теперь мы рассмотрим формулировку TL. Здесь мы используем

$${}^0 \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{{}^0 L}{2} & 0 \\ 0 & \frac{h}{2} \end{bmatrix}.$$

Кроме того, эффект начальных смещений принимается во внимание путем использования производных

$${}^t {}_0 u_{1,1} = (\cos \alpha - 1) - \frac{sh}{2L} (\sin {}^t \theta_2 - \sin {}^t \theta_1),$$

$$\begin{aligned}
{}^t_0 u_{1,2} &= -\left(\frac{1-r}{2}\right) \sin {}^t\theta_1 - \left(\frac{1+r}{2}\right) \sin {}^t\theta_2, \\
{}^t_0 u_{2,1} &= \sin \alpha + \frac{sh}{2L} (\cos {}^t\theta_2 - \cos {}^t\theta_1), \\
{}^t_0 u_{2,2} &= \left(\frac{1-r}{2}\right) \cos {}^t\theta_1 + \left(\frac{1+r}{2}\right) \cos {}^t\theta_2 - 1,
\end{aligned}$$

где мы вновь предположили, что ${}^tL = {}^0L = L$.

В каждом из рассмотренных случаев мы замечаем, что полученные выражения приводят к членам с деформациями, соответствующим глобальной неподвижной системе координат. Эти члены должны быть преобразованы с переходом к локальным осям η, ξ для построения матрицы деформация–смещение для данного элемента.

Наконец, необходимо отметить, что данный элемент можно использовать в условиях плоских напряжений или плоских деформаций, в зависимости от используемого соотношения напряжение–деформация (см. раздел 4.2.3). При анализе с плоскими напряжениями должна, конечно же, быть задана толщина исследуемого элемента (измеряемая по нормали к плоскости x_1, x_2 и предполагаемая равной единице при анализе с плоскими деформациями).

Пример 6.21: Элемент с двумя узлами из примера 6.20 должен использоваться в осесимметричных условиях, как элемент типа оболочки. Требуется обсудить, какие члены в дополнение к приведенным в указанном примере должны быть включены в процессе построения матриц деформация–смещение при формулировке TL.

При осесимметричном анализе интегрирование выполняется по углу в 1 радиан, должен быть включен эффект окружной деформации (см. пример 5.9). В таблице 6.5 приводится выражение для добавочной окружной деформации ${}^0\epsilon_{33}$, которая должна вычисляться с использованием приведенных в примере 6.20 интерполяций с целью определения третьей строки в представлениях матриц ${}^t_0\mathbf{B}_{L0}$ и ${}^t_0\mathbf{B}_{L1}$. Третья строка матрицы ${}^t_0\mathbf{B}_{L0}$ соответствует члену $u_1/{}^0x_1$ и, следовательно,

$${}^t_0\mathbf{B}_{L0} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1-r}{2} \frac{1}{{}^0x_1} & 0 & \frac{-sh}{2} \left(\frac{1-r}{2}\right) \frac{\cos {}^t\theta_1}{{}^0x_1} & \frac{1+r}{2} \frac{1}{{}^0x_1} & 0 & \frac{-sh}{2} \left(\frac{1+r}{2}\right) \frac{\cos {}^t\theta_2}{{}^0x_1} \end{bmatrix},$$

где мы использовали следующий порядок перечисления узловых переменных в выражении для вектора решения:

$$\hat{\mathbf{u}}^T = [u_1^1 \quad u_2^1 \quad \theta_1 \quad u_1^2 \quad u_2^2 \quad \theta_2]$$

и где также ${}^0x_1 = [(1+r)/2]L$. Третья строка матрицы ${}^t_0\mathbf{B}_{L1}$ соответствует деформационному члену ${}^tu_1u_1/({}^0x_1)^2$, для вычисления которого требуется знать интерполяции величин tu_1 , 0x_1 и u_1 .

Члены матрицы жесткости для нелинейных деформаций, соответствующие ${}^t_0S_{33}$, вычисляются из выражения

$$\begin{aligned}
{}^t_0S_{33} \Big\{ & \delta\theta_1 \left[\frac{sh}{2} \left(\frac{1-r}{2}\right) \frac{\sin {}^t\theta_1}{{}^0x_1} \left(1 + \frac{{}^tu_1}{{}^0x_1}\right) \right] \theta_1 + \\
& + \delta\theta_2 \left[\frac{sh}{2} \left(\frac{1+r}{2}\right) \frac{\sin {}^t\theta_2}{{}^0x_1} \left(1 + \frac{{}^tu_1}{{}^0x_1}\right) \right] \theta_2 + \\
& + \left(\frac{1-r}{2} \frac{1}{{}^0x_1} \delta u_1^1 - \left[\frac{sh}{2} \left(\frac{1-r}{2}\right) \frac{\cos {}^t\theta_1}{{}^0x_1} \right] \delta\theta_1 + \right. \\
& \left. + \frac{1+r}{2} \frac{1}{{}^0x_1} \delta u_1^2 - \left[\frac{sh}{2} \left(\frac{1+r}{2}\right) \frac{\cos {}^t\theta_2}{{}^0x_1} \right] \delta\theta_2 \right) \times
\end{aligned}$$

$$\times \left(\frac{1-r}{2} \frac{1}{x_1} u_1 - \left[\frac{sh}{2} \left(\frac{1-r}{2} \right) \frac{\cos {}^t\theta_1}{x_1} \right] \theta_1 + \right. \\ \left. + \frac{1+r}{2} \frac{1}{x_1} u_1^2 - \left[\frac{sh}{2} \left(\frac{1+r}{2} \right) \frac{\cos {}^t\theta_2}{x_1} \right] \theta_2 \right) \Bigg\}.$$

Это выражение имеет форму $\delta \hat{\mathbf{u}}^T ({}_0^t \mathbf{K}_{NL}^*) \hat{\mathbf{u}}$, где \mathbf{K}_{NL}^* представляет собой вклад в матрицу жесткости, соответствующий нелинейным деформациям данного элемента.

6.5.2. Элементы в форме пластины и оболочки общего вида

Многие элементы в форме пластин и оболочек были предложены для проведения нелинейного анализа конструкций в виде пластин и оболочек как частного, так и общего вида. Однако так же, как и в случае балочного элемента, рассмотренного в предыдущем разделе, изопараметрические модели элементов в форме пластин и оболочек при их нелинейном анализе оказываются весьма привлекательными, так как модели являются и совместимыми, и общими, а сами элементы могут эффективно применяться для анализа разнообразных пластин и оболочек. Как и при линейном анализе, здесь, по существу, модель базируется на весьма общей теории оболочек, и в принципе такие оболочечные элементы могут применяться к анализу любых конструкций в виде пластин и оболочек.

Если рассмотреть пластину, испытывающую большие отклонения, то мы обнаруживаем, что, коль скоро эти отклонения становятся значительными, поведение данной конструкции является, фактически, поведением оболочки; иначе говоря, сейчас конструкция является искривленной, и для нее имеют значение как мембранные напряжения, так и изгибающие. Поэтому в процессе проводимого ниже обсуждения мы рассматриваем только элементы в форме оболочки общего вида, причем мы подразумеваем, что если конкретный элемент вначале является плоским, то он представляет собой пластину.

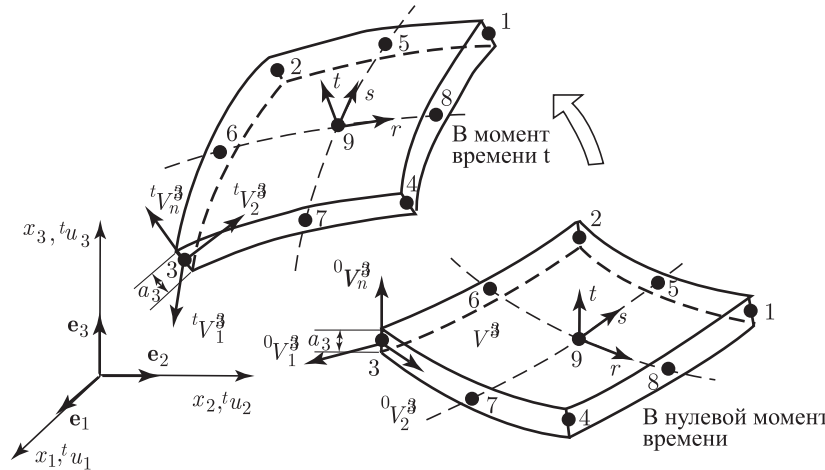


Рис. 6.19. Элемент типа оболочки, испытывающей большие смещения и повороты

В дальнейшем мы рассматриваем нелинейную модель элемента типа оболочки МТС, исследованного в случае линейного анализа в разделе 5.4.2. На рис. 6.19 показан типичный элемент с девятью узлами в его первоначальном положении, а также его конфигурация в момент времени t . Поведение этого элемента основывается на тех же предположениях, которые применялись и при линейном анализе, а именно о том, что прямые линии, определяемые направляющими векторами в узлах (которые обычно, в первоначальной конфигурации, оказываются близкими к нормальным по отношению к срединной поверхности оболочки), остаются прямыми и в процессе деформаций элемента, а также что в направлениях направляющих векторов не образуются никакие поперечные нормальные

напряжения. Однако даваемая здесь нелинейная модель допускает произвольно большие смещения и углы поворота элемента типа оболочки¹⁾.

Формулировки UL и TL для элемента типа оболочки основываются на общих уравнениях механики сплошной среды, приведенных в разделе 6.2.3, и являются прямым обобщением формулировок для случая линейного анализа. Кроме того, процесс расчета элементных матриц весьма близко следует методике расчетов, используемых для балочных элементов (см. раздел 6.5.1).

Если воспользоваться теми же обозначениями, которые применялись в разделе 5.4.2, то координаты характерной точки элемента типа оболочки, который теперь претерпевает очень большие смещения и углы поворота, представляются в виде (см. [Bathe, Bolourchi, 1980])

$${}^t x_i = \sum_{k=1}^q h_k {}^t x_i^k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k {}^t V_{ni}^k. \quad (6.167)$$

Используя выражения (6.167) для моментов времени 0, t и $t + \Delta t$, мы, таким образом, имеем

$${}^t u_i = {}^t x_i - {}^0 x_i \quad (6.168)$$

и

$$u_i = {}^{t+\Delta t} x_i - {}^t x_i. \quad (6.169)$$

Подставляя выражения (6.167) в формулы (6.168) и (6.169), получаем

$${}^t u_i = \sum_{k=1}^q h_k {}^t u_i^k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k ({}^t V_{ni}^k - {}^0 V_{ni}^k) \quad (6.170)$$

и

$$u_i = \sum_{k=1}^q h_k u_i^k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k V_{ni}^k, \quad (6.171)$$

где

$$V_{ni}^k = {}^{t+\Delta t} V_{ni}^k - {}^t V_{ni}^k. \quad (6.172)$$

Соотношение (6.170) применяется для вычисления полных смещений и полных деформаций (а следовательно, также и полных напряжений для обеих формулировок, UL и TL) частиц данного элемента. Чтобы применить формулу (6.171), пригодны те же рассуждения, которые проводились при формулировке для балочного элемента в отношении использования формул (6.158), (6.161) и (6.162). Теперь мы выражаем компоненты вектора V_{ni}^k в терминах углов поворота относительно двух векторов, ортогональных вектору ${}^t \mathbf{V}_n^k$. Эти два вектора, ${}^t \mathbf{V}_1^k$ и ${}^t \mathbf{V}_2^k$, определяются в момент времени 0 (как и при линейном анализе), с использованием выражений

$${}^0 \mathbf{V}_1^k = \frac{\mathbf{e}_2 \times {}^0 \mathbf{V}_n^k}{\|\mathbf{e}_2 \times {}^0 \mathbf{V}_n^k\|_2}, \quad (6.173)$$

$${}^0 \mathbf{V}_2^k = {}^0 \mathbf{V}_n^k \times {}^0 \mathbf{V}_1^k, \quad (6.174)$$

где мы положили вектор ${}^0 \mathbf{V}_1^k$ равным \mathbf{e}_3 , если вектор ${}^0 \mathbf{V}_n^k$ параллелен вектору \mathbf{e}_2 . Эти же векторы для момента времени t определяются затем путем процесса интегрирования, кратко описываемого формулой (6.177).

Пусть α_k и β_k являются углами поворота направляющего вектора ${}^t \mathbf{V}_n^k$ относительно векторов ${}^t \mathbf{V}_1^k$ и ${}^t \mathbf{V}_2^k$ в конфигурации, соответствующей моменту времени t . Тогда в случае малых углов α_k и β_k , но при учете эффектов второго порядка по поворотам (см. упражнение 6.57), имеем, приближенно,

$$\mathbf{V}_n^k = -{}^t \mathbf{V}_2^k \alpha_k + {}^t \mathbf{V}_1^k \beta_k - \frac{1}{2} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) {}^t \mathbf{V}_n^k. \quad (6.175)$$

¹⁾ Как и для модели балки в разделе 6.5.1, для того, чтобы модель данного элемента была применимой к случаю больших деформаций, необходимо было бы рассчитывать изменение толщины вдоль поверхности элемента. Это изменение толщины зависит от соотношения напряжение–деформация для материала, из которого состоит элемент.

Члены, квадратичные по углам поворота, включены по той причине, что мы хотим получить совместимую матрицу касательной жесткости, а эти члены вносят свой вклад в нелинейные эффекты жесткости по деформациям. А именно, после подстановки (6.175) в (6.171) мы получим

$$u_i = \sum_{k=1}^q h_k u_i^k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k \left[-{}^tV_{2i}^k \alpha_k + {}^tV_{1i}^k \beta_k - \frac{1}{2} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) {}^tV_{ni}^k \right]. \quad (6.176)$$

Используя это выражение для вычисления континуальных членов в таблицах 6.2 и 6.3, мы замечаем, что члены $\int_{{}^tV} \tau_{ij} \delta_t e_{ij} d^tV$ и $\int_{{}^0V} {}^tS_{ij} \delta_0 e_{ij} d^0V$ приводят ко вкладу в жесткость, обусловленному наличием квадратичных членов в выражении (6.176), который мы, естественно, добавляем к другим членам в выражении матрицы жесткости для нелинейных деформаций.

Мы пришли к аналогичному результату в модели для изопараметрических балочных элементов, обсуждавшейся в предыдущем разделе (см. уравнения (6.161) и (6.162) и последующее обсуждение).

Конечно-элементное решение позволит получить значения переменных u_i^k , α_k и β_k в узловых точках, которые затем могут быть применены для расчета вектора ${}^{t+\Delta t}\mathbf{V}_n^k$,

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{V}_n^k = {}^t\mathbf{V}_n^k + \int_{\alpha_k, \beta_k} -V^\tau \mathbf{V}_2^k d\alpha_k + {}^t\mathbf{V}_1^k, d\beta_k. \quad (6.177)$$

Это интегрирование может быть реализовано за один шаг, если использовать ортогональную матрицу для конечных углов поворота (см., например, [Argyris 1982] и упражнение 6.57), или применяя метод Эйлера с разностью вперед и с несколькими шагами (см. раздел 9.6).

Соотношения (6.167)–(6.176) могут быть напрямую использованы для определения матриц деформация–смещение применительно к элементам типа оболочки, базирующимся на учете смещений. Однако, как это следует из обсуждения в разделе 5.4.2, указанные элементы неэффективны из-за явления сдвигового и мембранного запираания. В разделе 5.4.2 мы ввели для линейного анализа элементы со смешанной интерполяцией, причем важная особенность этих элементов состоит в том, что они могут быть непосредственно распространены на случай нелинейного анализа (на самом деле эти элементы были первоначально сформулированы для нелинейного анализа, а элементы для линейного анализа получаются из них просто за счет пренебрежения всеми нелинейными членами).

Стартовым пунктом для модели является принцип виртуальной работы, записанный в терминах ковариантных компонентов деформаций и контравариантных компонентов напряжений. При полной лагранжевой формулировке мы используем соотношения

$$\int_{{}^0V} {}^{t+\Delta t}\tilde{S}^{ij} \delta {}^{t+\Delta t}\tilde{\epsilon}_{ij} d^0V = {}^{t+\Delta t}\mathcal{R}, \quad (6.178)$$

а при предварительно заданной лагранжевой формулировке — соотношения

$$\int_{{}^tV} {}^{t+\Delta t}\tilde{S}^{ij} \delta {}^{t+\Delta t}\tilde{\epsilon}_{ij} d^tV = {}^{t+\Delta t}\mathcal{R}. \quad (6.179)$$

Формы представления с пошаговым приростом, конечно же, приводятся в таблицах 6.2 и 6.3, но здесь используются ковариантные компоненты деформаций и контравариантные компоненты напряжений.

Как это уже обсуждалось в разделе 5.4.2, основной этап описания элемента типа оболочки МТС сводится к предположению относительно интерполяции деформаций, которое следует связать со значениями деформаций, полученными исходя из интерполяции смещений.

Интерполяции деформаций подробно обсуждались в разделе 5.4.2, но сейчас, разумеется, интерполяции используются для компонентов деформаций по Грину–Лагранжу, ${}^{t+\Delta t}\tilde{\epsilon}_{ij}^{AS}$ и ${}^{t+\Delta t}\tilde{\epsilon}_{ij}^{AS}$, где верхний индекс AS означает предполагаемую деформацию. Эти предполагаемые компоненты деформаций связаны с теми компонентами

деформаций ${}^{t+\Delta t}\tilde{\epsilon}_{ij}^{\text{DI}}$ и ${}^{t+\Delta t}\tilde{\epsilon}_{ij}^{\text{DI}}$, которые получены по данным об интерполяции смещений согласно (6.170) и (6.171).

Ковариантные компоненты деформаций, ${}^{t+\Delta t}\tilde{\epsilon}_{ij}^{\text{DI}}$ и ${}^{t+\Delta t}\tilde{\epsilon}_{ij}^{\text{DI}}$, вычисляются из фундаментальных выражений с использованием базовых векторов,

$${}^{t+\Delta t}\tilde{\epsilon}_{ij}^{\text{DI}} = \frac{1}{2} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{g}_i \cdot {}^{t+\Delta t}\mathbf{g}_j - {}^0\mathbf{g}_i \cdot {}^0\mathbf{g}_j) \quad (6.180)$$

и

$${}^{t+\Delta t}\tilde{\epsilon}_{ij}^{\text{DI}} = \frac{1}{2} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{g}_i \cdot {}^{t+\Delta t}\mathbf{g}_j - {}^t\mathbf{g}_i \cdot {}^t\mathbf{g}_j), \quad (6.181)$$

где

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{g}_i = \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{x}}{\partial r_i}; \quad {}^t\mathbf{g}_i = \frac{\partial {}^t\mathbf{x}}{\partial r_i}; \quad {}^0\mathbf{g}_i = \frac{\partial {}^0\mathbf{x}}{\partial r_i}, \quad (6.182)$$

и где мы используем тождества $r_1 \equiv r$, $r_2 \equiv s$, $r_3 \equiv t$, а также, конечно,

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{x} = {}^0\mathbf{x} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}; \quad {}^t\mathbf{x} = {}^0\mathbf{x} + {}^t\mathbf{u}. \quad (6.183)$$

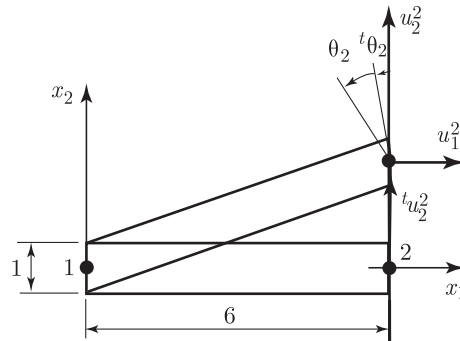
Используя интерполяции, обсуждавшиеся в разделе 5.4.2, и при перечисленных выше компонентах деформаций, можем получить теперь сведения об элементах МТС типа оболочки, ранее представленные в разделе 5.4.2 для случая линейного анализа; теперь эти сведения включают эффекты больших смещений и больших углов поворота. Эти элементы удовлетворяют тем критериям надежности и эффективности, которые перечислялись в разделе 5.4.2.

Можно отметить еще раз тот факт, что рассмотренные выше элементы типа оболочки являются элементами общего вида, так как при их описании не применялась никакая специальная теория оболочек. Фактически использование общего уравнения принципа виртуальной работы с пошаговым приростом и введение всего лишь двух базовых предположений, касающихся оболочек — о том, что линии, первоначально нормальные к срединной поверхности оболочки, остаются прямыми, и что поперечные нормальные напряжения остаются равными нулю (более точно, здесь, фактически, используются направления направляющих векторов) — эквивалентно использованию общей нелинейной теории оболочек. Этот общий характер модели сохраняется благодаря применению вышеуказанных форм интерполяции для геометрии оболочки, смещений и деформаций. Важная особенность проводимого анализа связана с использованием направляющего вектора для срединной поверхности оболочки, что предоставляет элементам возможность подвергаться сколь угодно большим смещениям и углам поворота.

6.5.3. Упражнения

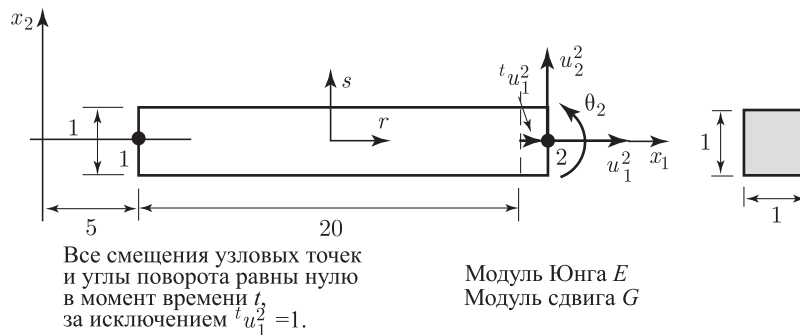
6.51. Рассмотрите показанный здесь элемент типа балки с двумя узлами.

- (а) Постройте графики смещений материальных частиц, соответствующих ${}^t u_1^2$, ${}^t u_2^2$ и ${}^t \theta_2$, и рассчитайте компоненты деформаций Грина–Лагранжа, соответствующих этим смещениям при $r = s = 0$.
- (б) Найдите производные ${}_0 u_{i,j}$ (т. е. $\partial u_i / \partial x_j$), $i = 1, 2$; $j = 1, 2$, соответствующие переменным u_1^2 , u_2^2 и θ_2 , т. е. определяемым с пошаговым приростом смещениям и углам поворота.
В узле 1 смещения и углы поворота равны нулю; в узле 2 ${}^t u_1^2 = 0$, ${}^t u_2^2 = 2$, ${}^t \theta_2 = 10^\circ$.

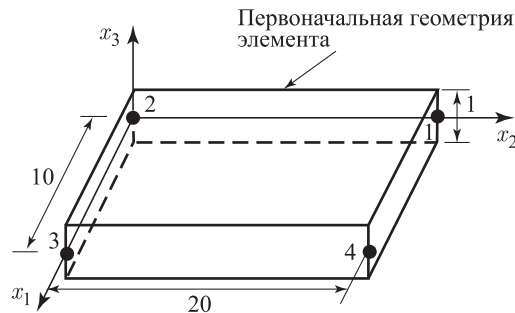


6.52. Рассмотрите показанный здесь элемент типа балки с двумя узлами. Рассчитайте для степеней свободы u_1^2 , u_2^2 и θ_2 матрицу жесткости ${}^t\mathbf{K}$ и векторы сил в узлах ${}^t\mathbf{F}$, используя полную лагранжеву формулировку.

- Воспользуйтесь методом смещений и аналитическим интегрированием.
- Используйте одноточечное интегрирование по Гауссу в направлении r .



- Проведите те же расчеты, что и в упражнении 6.52, но теперь предположите, что элемент представляет собой осесимметричную оболочку при оси x_2 в качестве оси вращения.
- Рассмотрите элемент типа балки, представленный в упражнении 6.52. Рассчитайте матрицу жесткости ${}^t\mathbf{K}$ и векторы сил ${}^t\mathbf{F}$ для степеней свободы в узле 2, используя смешанную интерполяцию линейных смещений и углов поворота, а также постоянную поперечную сдвиговую деформацию (см. раздел 5.4.1).
- Рассмотрите показанный здесь элемент типа оболочки с четырьмя узлами. Рассчитайте смещения частиц элемента при заданных смещениях в узловых точках и заданных направляющих векторах в момент времени t . Изобразите графически эти смещения на схеме первоначальной геометрии элемента.



$${}^t u_i^k = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, 2, 3; \quad k = 1, 2, 3;$$

$${}^t V_n^k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad k = 1, 2, 3$$

$${}^t u_1^4 = 0, 1; \quad {}^t u_2^4 = 0, 1; \quad {}^t u_3^4 = 1;$$

$${}^t V_n^k = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

- 6.56. Покажите, что выражения (6.161) и (6.162) содержат все члены второго порядка по θ_k , нужные для нахождения приращений направляющих векторов. Добейтесь этого результата путем простых геометрических выкладок и основываясь на том факте, что поворот может быть выражен посредством матрицы поворота \mathbf{Q} (см., например, [Argyris 1982]), где

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} + \frac{\sin \gamma_k}{\gamma_k} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{\gamma_k}{2}}{\frac{\gamma_k}{2}} \right)^2 \mathbf{S}_k; \quad \gamma_k = (\theta_{k1}^2 + \theta_{k2}^2 + \theta_{k3}^2)^{1/2}$$

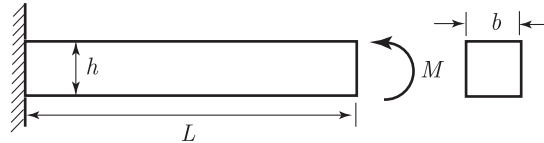
и

$$\mathbf{S}_k = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_{k3} & \theta_{k2} \\ \theta_{k3} & 0 & -\theta_{k1} \\ -\theta_{k2} & \theta_{k1} & 0 \end{bmatrix}.$$

- 6.57. Покажите, что выражение (6.175) содержит все члены второго порядка по α_k и β_k , нужные для нахождения приращения направляющего вектора ${}^t \mathbf{V}_n^k$. Добейтесь этого результата путем простых геометрических выкладок и с помощью использования матрицы \mathbf{Q} из упражнения 6.56, но при

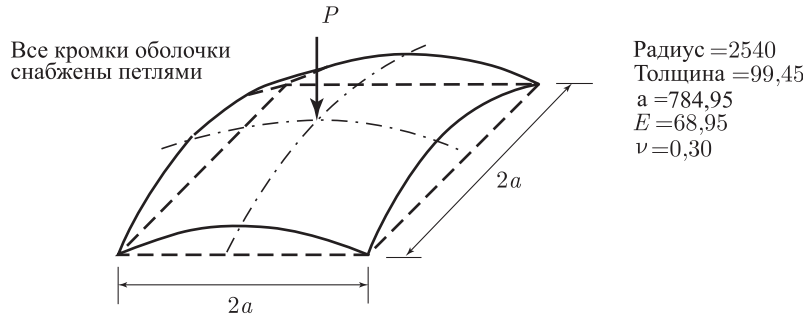
$$\gamma_k = (\alpha_k^2 + \beta_k^2)^{1/2}; \quad \mathbf{S}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_k \\ 0 & 0 & -\alpha_k \\ -\beta_k & \alpha_k & 0 \end{bmatrix}.$$

- 6.58. Рассчитайте ковариантные компоненты напряжений ${}^t \tilde{\epsilon}_{ij}^{\text{DI}}$ для элемента и его деформаций, заданных в упражнении 6.56.
- 6.59. Воспользуйтесь компьютерной программой, чтобы рассчитать реакцию показанной здесь консоли в случае больших смещений. Проанализируйте случай, когда свободный конец поворачивается на угол π (180 градусов), и сравните ваши результаты по смещениям и напряжениям с аналитическим решением (*подсказка*: в анализируемом здесь случае особенно удобно использовать изопараметрический элемент типа балки с четырьмя узлами, со смешанной интерполяцией).



$$E = 200000; \quad \nu = 0,30; \quad h = 1; \quad L = 100; \quad b = 1$$

- 6.60. Воспользуйтесь компьютерной программой для расчета реакции показанной здесь конструкции в виде сферической оболочки. Проведите достаточно точный расчет смещений и напряжений (решение для данной конструкции интенсивно использовалось при расчете элементов типа оболочки; см., например, работу [Dvorkin, Bathe 1984]).



6.6. Использование основополагающих соотношений

В разделах 6.3–6.5 мы обсудили проблему расчета смещений и соотношений деформация–смещение применительно к различным элементам. Мы указали на тот факт, что эти кинематические соотношения дают достаточно точное представление о больших деформациях (включая большие деформации в случаях двумерных и трехмерных элементов сплошной среды).

Как видно отсюда, кинематические описания при формулировках для элементов имеют весьма общий характер. Однако необходимо заметить, что для того, чтобы некая модель для элемента была применимой к прогнозу реакции в конкретном случае, *необходимо также использовать надлежащие основополагающие описания*. Ясно, что конечно-элементные уравнения равновесия содержат матрицы для смещений и для связи деформация–смещение плюс основополагающую матрицу для материала (см. таблицу 6.4). Поэтому для того, чтобы некая формулировка была применима к прогнозу реакции в конкретном случае, *настоятельно необходимо, чтобы надлежащую форму имело как кинематическое описание, так и основополагающее*. Предположим, например, что формулировка TL применяется к описанию кинематического поведения некоторого двумерного элемента и используется закон поведения материала, сформулированный только для случая малых деформаций. В этом случае проводимый анализ может моделировать только малые деформации, хотя кинематическая формулировка TL вполне допускает и большие деформации.

Цель настоящего раздела состоит в том, чтобы представить некоторые фундаментальные наблюдения, относящиеся к использованию законов поведения материала при нелинейном конечно-элементном анализе. На практике применяется множество различных законов поведения материала, и мы не будем пытаться дать обзор всех этих моделей и подвести какие-то итоги. Вместо этого наши намерения сводятся лишь к тому, чтобы обсудить свойства тензоров напряжений и деформаций, эффективно используемых с определенными классами моделей материала, а также представить некоторые важные общие наблюдения в отношении моделей материала, их реализации и их использования.

Три класса моделей, рассматриваемые в последующих разделах, — это те, с которыми мы очень часто имеем дело на практике, а именно, — упругая и упруго-пластическая модели, а также модель материала с ползучестью. Некоторые важнейшие свойства этих описаний поведения материала приводятся в таблице 6.7, дающей очень краткий обзор основных классов поведения материала.

Таблица 6.7. Обзор описания некоторых свойств материалов

Модель материала	Характеристики	Примеры
Упругая, в линейном или нелинейном варианте	<p>Напряжения является только функцией деформации; путь изменения напряжения при разгрузке — такой же, как при нагрузке.</p> ${}^t\sigma_{ij} = {}^tC_{ijrs}^t e_{rs}$ <p>линейный вариант упругости: величина ${}^tC_{ijrs}$ — постоянна; нелинейный вариант упругости ${}^tC_{ijrs}$ изменяется как функция деформации</p>	Почти все материалы, если только напряжения достаточно малы; разные сорта стали, литое железо, стекло, скальные породы, дерево и так далее, прежде чем материал деформируется или потерпит разрыв
Гиперупругая	<p>Напряжение рассчитывается по данным о функционале W энергии деформаций.</p> ${}^t\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial {}^t\epsilon_{ij}}$	Резиноподобные материалы, например, соответствующие моделям Муни–Ривлина или Огдена
Гипоупругая	<p>Инкременты напряжений рассчитываются по данным об инкрементах деформаций</p> $d\sigma_{ij} = C_{ijrs} de_{rs}$ <p>Модули материала C_{ijrs} определяются как функции напряжения, деформации, критериев разрыва, параметров нагрузки и разгрузки, наибольших достигаемых деформаций, и так далее</p>	Конкретные модели (см. например [Bathe, Walczak, Welch and Mistry, 1989])
Упруго-пластическая	<p>Линейное упругое поведение до начала податливости, использование условия начала податливости, а также законов течения и отвердевания для расчета инкрементов напряжения и пластической деформации; инкременты пластической деформации возникают мгновенно.</p>	Металлы, почвенные и скальные породы под воздействием высоких напряжений
Ползучая	<p>Эффект увеличения деформации во времени при постоянной нагрузке или уменьшения напряжений при постоянстве деформаций; инкременты ползучей деформации не являются мгновенным</p>	Металлы при высоких температурах

Модель материала	Характеристики	Примеры
Вязкопластическая	Зависящие от времени неупругие деформации; эффекты темпа деформации включены	Полимерные материалы, металлы

При нашем обсуждении использования моделей материала мы должны знать и помнить о том, как нелинейный анализ в целом реализуется с применением пошаговых приращений. Обращаясь к содержанию предыдущих разделов и, в особенности, к соотношениям (6.11), (6.78) и (6.79), а также к разделу 6.2.3, мы можем подытожить информацию о процессе в целом так, как это дается в таблице 6.8.

Таблица 6.8. Процесс решения при нелинейном конечно-элементном анализе с введением инкрементов

Принятое и известное решение для момента времени t :

напряжения ${}^t\boldsymbol{\sigma}$;
деформации ${}^t\mathbf{e}$;
внутренние параметры материала ${}^t\kappa_1, {}^t\kappa_2, \dots$

...

1. *Известны:* переменные в узловых точках ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}(i-1)$ и, следовательно, деформации элементов ${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}^{(i-1)}$;
2. *Требуется рассчитать:*
напряжения ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{(i-1)}$;
матрица связи касательное напряжение–деформация, соответствующая этим напряжениям и обозначаемая, как $\mathbf{C}^{(i-1)}$;
внутренние параметры материала ${}^{t+\Delta t}\kappa_1^{(i-1)}, {}^{t+\Delta t}\kappa_2^{(i-1)}, \dots, \dots$
 - а. При упругом анализе: деформации ${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}^{(i-1)}$ непосредственно дают напряжения ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{(i-1)}$ и матрицу напряжение–деформация $\mathbf{C}^{(i-1)}$;
 - б. При неупругом анализе: напряжения определяются с помощью интегрирования

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{(i-1)} = {}^t\boldsymbol{\sigma} + \int_t^{t+\Delta t} d\boldsymbol{\sigma},$$

а матрица $\mathbf{C}^{(i-1)}$, связывающая касательное напряжение с деформацией и соответствующая состоянию при $t + \Delta t$ в конце итерации $(i-1)$, оценивается в согласовании с этим процессом интегрирования.

При изопараметрическом конечно-элементном анализе эти расчеты напряжений и деформаций реализуются в точках интегрирования сетки, чтобы сформулировать уравнения, используемые на этапе 3.

3. *Требуется рассчитать:* переменные в узловых точках $\Delta\mathbf{U}^{(i)}$, используя ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)}\Delta\mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)}$, а затем ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)} + \Delta\mathbf{U}^{(i)}$.

Повторить действия на этапах 1–3 до достижения сходимости.

Как показывает эта таблица, материальные соотношения используются на двух стадиях процесса построения решения: при вычислении напряжений и при определении

касательных матриц напряжение–деформация. Напряжения используются при расчете векторов сил в узловых точках, а также матриц жесткости с нелинейными деформациями, а касательные матрицы напряжение–деформация используются при расчете матриц жесткости с линейными деформациями. Как мы уже указывали ранее (см. раздел 6.1), настоятельно необходимо, чтобы напряжения вычислялись с высокой степенью точности, так как в противном случае результат решения не является правильным, и важно, чтобы матрицы жесткости действительно были касательными, так как в противном случае для достижения сходимости потребуется, вообще говоря, больше итераций, чем это необходимо.

Таблица 6.8 показывает, что главная задача при вычислении напряжений и касательной матрицы напряжение–деформация сводится к следующему:

При условии задания всех компонентов напряжений ${}^t\sigma$, а также компонентов деформаций ${}^t\epsilon$ и любых внутренних материальных переменных, которые будем называть здесь ${}^t\kappa_i$, причем все соответствует моменту времени t ,

$$\{{}^t\sigma, {}^t\epsilon, {}^t\kappa_1, {}^t\kappa_2, \dots\},$$

а также при условии задания всех компонентов деформаций, соответствующих моменту времени $t + \Delta t$ и концу $(i - 1)$ -й итерации, обозначаемых ${}^{t+\Delta t}\epsilon^{(i-1)}$,

Рассчитать все компоненты напряжений, внутренние материальные переменные, а также касательную матрицу напряжение–деформация, соответствующие ${}^{t+\Delta t}\epsilon^{(i-1)}$,

$$\{{}^{t+\Delta t}\sigma^{(i-1)}, \mathbf{C}^{(i-1)}, {}^{t+\Delta t}\kappa_1^{(i-1)}, {}^{t+\Delta t}\kappa_2^{(i-1)}, \dots\}.$$

Следовательно, при последующем обсуждении мы будем предполагать, что известны деформации, соответствующие тому состоянию, для которого требуется найти напряжения и касательное соотношение напряжение–деформация. Для простоты записи мы зачастую не будем включать в обозначения верхний индекс $(i - 1)$, просто обозначая деформацию в текущем состоянии, как ${}^{t+\Delta t}\epsilon$. Принятие такого упрощения отнюдь не будет означать, что итерации по достижению равновесия не проводятся. Однако если учесть, что процессы определения напряжений и касательной матрицы напряжение–деформация остаются одними и теми же независимо от того, проводятся ли или не проводятся итерации по достижению равновесия, то нам нет необходимости вставлять верхний индекс с номером итерации. Для нас важно лишь то, что в момент времени t все условия известны и что уже рассчитано новое деформационное состояние, для которого будут вычислены новые напряжения, новые внутренние материальные параметры и новая касательная матрица напряжение–деформация.

Следует отметить, что при нашем численном определении матрицы жесткости и вектора сил для данного элемента вычисление напряжений и касательной матрицы напряжение–деформация проводится в каждой точке элемента, выбранной для численного интегрирования. Следовательно, настоятельно необходимо, чтобы эти вычисления производились как можно более эффективным образом.

При неупругом анализе интегрирование следует проводить от состояния в момент времени t до текущего деформированного состояния, однако при упругом анализе не требуется проводить интегрирования напряжений (так как мы применяем схему с полной деформацией, а не схему скоростного типа; см. пример 6.24). При упругом анализе напряжения и касательная матрица напряжение–деформация могут быть вычислены непосредственно для заданного деформированного состояния. Следовательно, при последующем обсуждении, рассматривая упругие условия (разделы 6.6.1 и 6.6.2), мы будем также, с целью дальнейшего упрощения записи, просто рассматривать деформированное состояние в момент времени t и вычислять соответствующие напряжения и касательную матрицу напряжение–деформация в этот же момент времени (одна и та же процедура используется для любого момента времени, включая момент $t + \Delta t$).

6.6.1. Поведение упругого материала — обобщение закона Гука

Простое и широко используемое описание поведения упругого материала при анализе с большими деформациями достигается путем обобщения соотношений линейной

упругости, итоговое описание которых дается в главе 4 (см. таблицу 4.3) применительно к формулировке TL:

$${}^tS_{ij} = {}^tC_{ijrs} {}^t\epsilon_{rs}, \quad (6.184)$$

где ${}^tS_{ij}$ и ${}^t\epsilon_{rs}$ — это компоненты второго тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа и тензора деформаций Грина–Лагранжа, а ${}^tC_{ijrs}$ — компоненты постоянного тензора упругости. Рассматривая трехмерные условия для напряжений, мы имеем

$${}^tC_{ijrs} = \lambda \delta_{ij} \delta_{rs} + \mu (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr}), \quad (6.185)$$

где λ и μ — это коэффициенты Ламе, а δ_{ij} — символ Кронекера,

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)};$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0; & i \neq j, \\ 1; & i = j. \end{cases}$$

Компоненты тензора упругости, заданные выражениями (6.185), тождественны значениям, приводимым в таблице 4.3 (см. упражнение 2.10).

Рассматривая это описание поведения материала, можно высказать несколько важных замечаний. Мы обнаруживаем, что при проведении анализа для бесконечно малых смещений соотношение (6.184) сводится к описанию, используемому при линейном упругом анализе, так как при этих условиях переменные, соответствующие напряжению и деформации, сводятся к инженерным выражениям для этих величин. Однако важное наблюдение состоит в том, что *при больших смещениях и больших углах поворота, но при анализе для малых деформаций* соотношение (6.184) обеспечивает естественное описание поведения материала, так как компоненты второго тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа и тензора деформаций Грина–Лагранжа не изменяются при поворотах комплекса, как твердого тела (см. раздел 6.2.2 и примеры 6.12–6.15). Таким образом, только реальное деформирование материала приведет к возрастанию компонентов тензора напряжений и до тех пор, пока это деформирование материала (сопровожаемое большими углами поворота и большими смещениями) остается малым, использование соотношения (6.184) совершенно эквивалентно использованию закона Гука в условиях бесконечно малых смещений.

Фундаментальное наблюдение состоит в том, что «компоненты второго тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа и тензора деформаций Грина–Лагранжа не изменяются, будучи измерены в фиксированной системе координат, если материал совершает движения как твердое тело». Это наблюдение является важным не только при упругом анализе. И действительно, оно подразумевает, что любое описание поведения материала, разработанное для анализа бесконечно малых смещений с использованием инженерных критериев измерения напряжений и деформаций, может быть непосредственно распространено на анализ с большими смещениями и с большими углами поворота, но с малыми деформациями, если только используются вторые напряжения Пиолы–Кирхгофа и деформации Грина–Лагранжа. Этот фундаментальный факт иллюстрируется на рис. 6.20. Его практическое следствие состоит в том, что, например, упруго-пластическая модель материала и модель с ползучестью (см. раздел 6.3.3) могут быть напрямую применены в случае анализа больших смещений и больших углов поворота, но малых деформаций, путем простой замены вторых напряжений Пиолы–Кирхгофа и деформаций Грина–Лагранжа на инженерные выражения напряжений и деформаций.

Вышеописанные наблюдения особенно важны потому, что на практике закон Гука применим только к случаю малых деформаций, а также потому, что имеется много инженерных задач, при которых встречаются условия больших смещений и углов поворота, но только малых деформаций. Это, например, нередко имеет место в случае упругого или упруго-пластического выпучивания или при анализе разрушения тонких (типа балки или оболочки) конструкций.

Описание соотношения связи напряжение–деформация, данное в формуле (6.184), неявно предполагает, что для анализа физической проблемы используется формулировка TL. Теперь давайте предположим, что мы хотим применить формулировку UL, но что в качестве основополагающего нам задано соотношение (6.184). В этом случае, заменяя

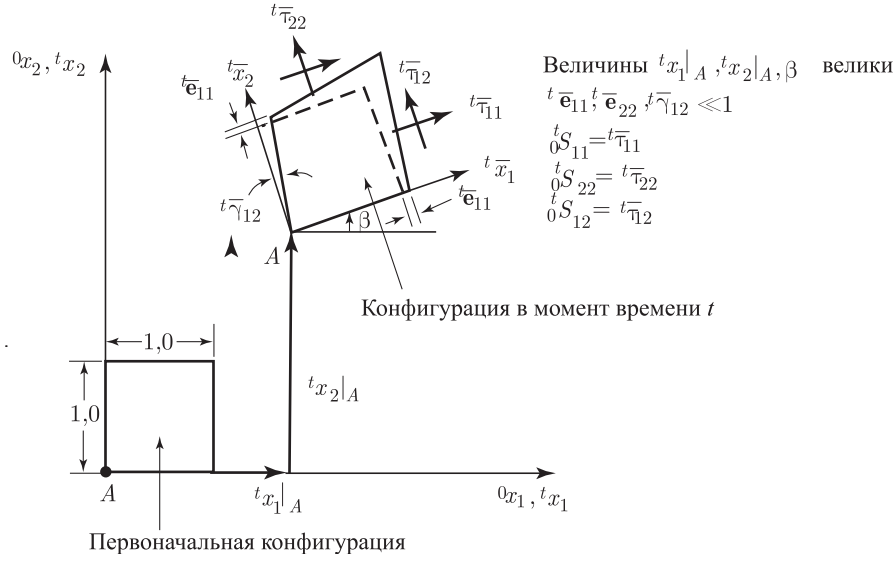


Рис. 6.20. Условия большие смещения/большие углы поворота, но малые деформации

(6.184) на (6.72), мы можем написать

$$\int_{0V} {}^t_0 C_{ijrs} {}^t_0 \epsilon_{rs} \delta {}^t_0 \epsilon_{ij} d^0 V = {}^t \mathcal{R}. \quad (6.186)$$

Таким образом, если мы введем в рассмотрение новый основополагающий тензор

$${}^t C_{mnpq} = \frac{{}^t \rho}{{}_0 \rho} {}^t_0 x_{m,i} {}^t_0 x_{n,j} {}^t_0 C_{ijrs} {}^t_0 x_{p,r} {}^t_0 x_{q,s}, \quad (6.187)$$

означающий, что

$${}^t_0 C_{ijrs} = \frac{{}_0 \rho}{{}^t \rho} {}^0_0 x_{i,m} {}^0_0 x_{j,n} {}^t C_{mnpq} {}^0_0 x_{r,p} {}^0_0 x_{s,q}, \quad (6.188)$$

и если мы используем выражение

$$\delta {}^t e_{mn} = {}^0_0 x_{i,m} {}^0_0 x_{j,n} \delta {}^t_0 \epsilon_{ij}, \quad (6.189)$$

то обнаруживаем, что соотношение (6.186) может быть записано как

$$\int_{{}^t V} {}^t C_{mnpq} {}^t \epsilon_{pq}^A \delta {}^t e_{mn} d^t V = {}^t \mathcal{R}, \quad (6.190)$$

где

$${}^t \tau_{mn} = {}^t C_{mnpq} {}^t \epsilon_{pq}^A, \quad (6.191)$$

а величины ${}^t \epsilon_{pq}^A$ представляют собой компоненты *тензора деформаций Альманзи*,

$${}^t \epsilon_{pq}^A = {}^0_0 x_{r,p} {}^0_0 x_{s,q} {}^t_0 \epsilon_{rs}. \quad (6.192)$$

Подобно тензору деформаций Грина–Лагранжа, тензор деформаций Альманзи также может быть определен несколькими различными, но эквивалентными способами ¹⁾, а именно,

$${}^t \epsilon_{ij}^A = \frac{1}{2} ({}^t u_{i,j} + {}^t u_{j,i} - {}^t u_{k,i} {}^t u_{k,j}), \quad (6.193)$$

и мы имеем

$${}^t \epsilon_{ij}^A d^t x_i d^t x_j = \frac{1}{2} \{ (d^t s)^2 - (d^0 s)^2 \}. \quad (6.194)$$

¹⁾ Однако в противоположность тензору деформаций Грина–Лагранжа, компоненты тензора деформаций Альманзи не являются инвариантными по отношению к повороту материала как твердого тела.

Пример 6.22: Докажите, что определения тензора деформаций Альманзи, данные формулами (6.192)–(6.194), все являются эквивалентными.

Соотношение (6.192) может быть записано в матричной форме, как

$${}^t\epsilon^A = {}^0\mathbf{X}^T {}^t\epsilon {}^0\mathbf{X}. \quad (\text{a})$$

Используя для подстановки в (а) выражение (6.54) и обнаруживая, что ${}^0\mathbf{X} {}^t\epsilon {}^0\mathbf{X} = \mathbf{I}$, мы получаем

$${}^t\epsilon^A = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - {}^0\mathbf{X}^T {}^t\epsilon {}^0\mathbf{X}). \quad (\text{b})$$

Однако мы имеем ${}^0\mathbf{X} = [{}^t\nabla {}^0\mathbf{x}^T]^T$ где, в соответствии с (6.21),

$${}^t\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix}; \quad {}^0\mathbf{x}^T = [{}^0x_1 \quad {}^0x_2 \quad {}^0x_3].$$

Подстановка в формулу (b) дает

$${}^t\epsilon^A = \frac{1}{2} \{ \mathbf{I} - [{}^t\nabla ({}^t\mathbf{x}^T - {}^t\mathbf{u}^T)] [{}^t\nabla ({}^t\mathbf{x}^T - {}^t\mathbf{u}^T)]^T \}.$$

Учитывая, что ${}^t\nabla {}^t\mathbf{x}^T = \mathbf{I}$, мы, таким образом, получим

$${}^t\epsilon^A = \frac{1}{2} [\mathbf{I} - (\mathbf{I} - {}^t\nabla {}^t\mathbf{u}^T)(\mathbf{I} - {}^t\nabla {}^t\mathbf{u}^T)^T],$$

или

$${}^t\epsilon^A = \frac{1}{2} [{}^t\nabla {}^t\mathbf{u}^T + ({}^t\nabla {}^t\mathbf{u}^T)^T - ({}^t\nabla {}^t\mathbf{u}^T)({}^t\nabla {}^t\mathbf{u}^T)^T], \quad (\text{c})$$

и компоненты ${}^t\epsilon^A$ в (c) есть соотношения в (6.193). Чтобы показать, что соотношение (6.194) также справедливо, используем (в), полагая

$$d^t\mathbf{x}^T {}^t\epsilon^A d^t\mathbf{x} = \frac{1}{2} (d^t\mathbf{x}^T d^t\mathbf{x} - d^0\mathbf{x}^T d^0\mathbf{x}), \quad (\text{d})$$

потому что $d^0\mathbf{x} = {}^0\mathbf{X} d^t\mathbf{x}$.

Но (d) можно также записать в виде

$$d^t\mathbf{x}^T {}^t\epsilon^A d^t\mathbf{x} = \frac{1}{2} [(d^t s)^2 - (d^0 s)^2], \quad (\text{e})$$

потому что

$$d^t\mathbf{x}^T d^t\mathbf{x} = (d^t s)^2; \quad d^0\mathbf{x}^T d^0\mathbf{x} = (d^0 s)^2$$

и, следовательно, соотношение (e) эквивалентно соотношению (6.194).

Разумеется, использование соотношения (6.190) с деформациями по Альманзи и с основополагающим тензором ${}^tC_{mnpq}$ оказывается совершенно эквивалентным преобразованию второго напряжения Пиолы–Кирхгофа ${}^tS_{ij}$ (полученного с использованием выражения ${}^tS_{ij} = {}^tC_{ijrs} {}^t\epsilon_{rs}$) в напряжение Коши, с последующим использованием формулы (6.13) для вычисления ${}^t\mathcal{R}$. Действительно, если тензор ${}^tC_{ijrs}$ известен, то данная процедура оказывается более эффективной с точки зрения вычислений, а определение и использование деформаций Альманзи и формулы (6.190) может рассматриваться как представляющее только теоретический интерес.

Однако при рассмотрении следующего примера мы доказываем некий важный результат, который вкратце можно сформулировать следующим образом.

Рассмотрим формулировки TL и UL в таблицах 6.2 и 6.3,

$$\int_{{}^0V} {}^0C_{ijrs} {}^0e_{rs} \delta_0 e_{ij} d^0V + \int_{{}^0V} {}^tS_{ij} \delta_0 \eta_{ij} d^0V = {}^{t+\Delta t}\mathcal{R} - \int_{{}^0V} {}^tS_{ij} \delta_0 e_{ij} d^0V, \quad (\text{6.195})$$

$$\int_{{}^tV} {}^tC_{ijrs} {}^te_{rs} \delta_t e_{ij} d^tV + \int_{{}^tV} {}^t\tau_{ij} \delta_t \eta_{ij} d^tV = {}^{t+\Delta t}\mathcal{R} - \int_{{}^tV} {}^t\tau_{ij} \delta_t e_{ij} d^tV. \quad (\text{6.196})$$

Соответствующие друг другу интегральные члены в этих формулировках оказываются идентичными при условии использования преобразований для напряжений по формулам (6.69), а для основополагающих тензоров — по формуле (6.187). Следовательно, вопрос о том, выбирать ли для сплошной среды формулировку TL или формулировку UL, решается просто из соображений вычислительной эффективности.

Пример 6.23: Рассмотрим полную и предварительно заданную формулировки Лагранжа в формах с пошаговым приростом (см. таблицы 6.2 и 6.3).

(а) Требуется вывести соотношение, которое должно соблюдаться между тензорами ${}_0C_{ijrs}$ и ${}_tC_{ijrs}$ так, чтобы выражения с приращениями

$${}_0S_{ij} = {}_0C_{ijrs} {}_0\epsilon_{rs}, \quad (a)$$

$${}_tS_{ij} = {}_tC_{ijrs} {}_t\epsilon_{rs} \quad (b)$$

относились к *одной и той же* материальной реакции.

(б) Требуется показать, что когда соблюдается соотношение, выведенное в пункте (а), то каждый интегральный член в линейаризованной формулировке TL идентичен соответствующему члену в формулировке UL.

Основополагающий закон связывает меры измерения напряжений и деформаций. Если учесть, что существуют различные меры измерения напряжений и соответствующие им меры измерения деформаций, то и основополагающий закон для данного материала может принимать различные формы, однако эти формы связаны в силу того факта, что все они описывают поведение одного и того же заданного материала. Следовательно, если соотношения (а) и (б) описывают поведение одного и того же материала, то тензоры ${}_0C_{ijrs}$ и ${}_tC_{ijrs}$ должны быть связаны между собой посредством чисто кинематических преобразований.

Чтобы вывести кинематические преобразования, мы выражаем ${}_tS_{ij}$ в терминах ${}_0S_{ij}$, а ${}_t\epsilon_{rs}$ — в терминах ${}_0\epsilon_{rs}$.

Мы имеем

$${}_tS_{ij} = {}^{t+\Delta t}{}_tS_{ij} - {}^t\tau_{ij}. \quad (c)$$

Используя выражение

$${}^t\tau_{ij} = \frac{{}^t\rho}{{}_0\rho} {}^t{}_0x_{i,r} {}^t{}_0S_{rs} {}^t{}_0x_{j,s} \quad (d)$$

и

$${}^{t+\Delta t}{}_tS_{ij} = \frac{{}^t\rho}{{}_0\rho} {}^t{}_0x_{i,r} {}^{t+\Delta t}{}_0S_{rs} {}^t{}_0x_{j,s},$$

а также выражение (с), получаем

$${}_tS_{ij} = \frac{{}^t\rho}{{}_0\rho} {}^t{}_0x_{i,r} {}^t{}_0x_{j,s} {}_0S_{rs}. \quad (e)$$

Кроме того, для членов тензора деформаций имеем

$${}_0\epsilon_{ij} = {}^{t+\Delta t}{}_0\epsilon_{ij} - {}^t{}_0\epsilon_{ij}$$

и

$${}_t\epsilon_{ij} = {}^{t+\Delta t}{}_t\epsilon_{ij}.$$

Следовательно,

$${}_0\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}^{t+\Delta t}{}_0x_{k,i} {}^{t+\Delta t}{}_0x_{k,j} - {}^t{}_0x_{k,i} {}^t{}_0x_{k,j}) \quad (f)$$

и

$${}_t\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}^{t+\Delta t}{}_tx_{k,i} {}^{t+\Delta t}{}_tx_{k,j} - \delta_{ij}). \quad (g)$$

Затем следует отметить, что ${}_t\epsilon_{ij}$ представляет собой деформацию Грина–Лагранжа, базирующуюся на смещениях от момента времени t до момента $t + \Delta t$, при характерной конфигурации в момент времени t ¹⁾.

¹⁾ Например, ${}_t\epsilon_{ij} = 0$, и эту меру измерения деформации не следует путать с деформацией по Альманзи ${}^t\epsilon_{ij}^A$, определяемой согласно (6.192).

Используя выражения (f) и (g), получаем

$$\begin{aligned} {}_0\epsilon_{ij} &= \frac{1}{2} {}^t_0x_{p,i} {}^t_0x_{q,j} ({}^{t+\Delta t}_t x_{k,p} {}^{t+\Delta t}_t x_{k,q} - \delta_{pq}) = \\ &= {}^t_0x_{p,i} {}^t_0x_{q,j} {}^t\epsilon_{pq}. \end{aligned} \quad (h)$$

Теперь в выражении для закона поведения материала (b) можно использовать выражения (e) и (h), и это дает

$$\frac{{}^t\rho}{{}_0\rho} {}^t_0x_{i,a} {}^t_0x_{j,b} {}_0S_{ab} = {}^tC_{ijrs} {}^0_0x_{p,r} {}^0_0x_{q,s} {}_0\epsilon_{pq},$$

или

$${}_0S_{ij} = \left(\frac{{}_0\rho}{{}^t\rho} {}^0_0x_{i,m} {}^0_0x_{j,n} {}^tC_{mnpq} {}^0_0x_{r,p} {}^0_0x_{s,q} \right) {}_0\epsilon_{rs}.$$

Следовательно, чтобы описать поведение одного и того же материала, нужно соблюсти следующую взаимосвязь между основополагающими тензорами:

$${}_0C_{ijrs} = \frac{{}_0\rho}{{}^t\rho} {}^0_0x_{i,m} {}^0_0x_{j,n} {}^tC_{mnpq} {}^0_0x_{r,p} {}^0_0x_{s,q}. \quad (i)$$

Отметим, что если тензор ${}^tC_{ijrs}$ известен и если должна применяться формулировка ТЛ с выражением (a), то следует использовать то же самое преобразование, связанное с законом поведения материала, которое было сформулировано ранее как соотношение (6.188). Разумеется, если известен тензор ${}_0C_{ijrs}$ и если должна использоваться формулировка УЛ, то можно применить преобразование в форме соотношения (6.187).

Далее, мы хотим показать, что каждый член формулировки ТЛ идентичен соответствующему члену формулировки УЛ. Если сравнивать правые части, то величина ${}^{t+\Delta t}\mathcal{R}$, конечно же, одна и та же в обеих формулировках, и

$$\int_{{}_0V} {}^t_0S_{ij} \delta_0 e_{ij} d^0V = \int_{{}^tV} \delta_t e_{ij} d^tV,$$

так как $\delta_0 e_{ij} = \delta_0^t \epsilon_{ij}$.

Тот факт, что $\delta_0 e_{ij} = \delta_0^t \epsilon_{ij}$, требует некоторого объяснения. При вычислении величины $\delta_0^t \epsilon_{ij}$ мы рассматриваем вариацию деформации Грина–Лагранжа, соответствующую конфигурации в момент времени t , и уравнение гласит, что это значение равно приращению линейной деформации, соответствующему виртуальному смещению δu_i . Напомним, что создавая вариацию относительно конфигурации в момент $t + \Delta t$, мы использовали соотношение $\delta^{t+\Delta t}_0 \epsilon_{ij} = \delta_0 e_{ij} + \delta_0 \eta_{ij}$ (см. таблицу 6.2). Если смещения, рассчитанные с пошаговым приростом, равны нулю, т. е. если $u_i = 0$, то конфигурация в момент времени $t + \Delta t$ идентична конфигурации в момент времени t . Следовательно,

$$\delta^{t+\Delta t}_0 \epsilon_{ij} \big|_{u_i=0} = \delta_0^t \epsilon_{ij}.$$

Отсюда следует, что, если рассматривать δu_i как вариацию u_i , то

$$\begin{aligned} \delta^{t+\Delta t}_0 \epsilon_{ij} \big|_{u_i=0} &= \delta_0^t \epsilon_{ij} + \delta_0 \epsilon_{ij} \big|_{u_i=0} \\ &= \delta_0 \epsilon_{ij} \big|_{u_i=0} \quad \text{здесь } \delta_0^t \epsilon_{ij} = 0, \text{ так как } {}^t_0\epsilon_{ij} \text{ не зависит от } u_i, \\ &= \delta_0 e_{ij} \big|_{u_i=0} + \delta_0 \eta_{ij} \big|_{u_i=0} \\ &= \delta_0 e_{ij}, \end{aligned}$$

так как $\delta_0 \eta_{ij}$ является линейной функцией от u_i и, поэтому, $\delta_0 \eta_{ij} \big|_{u=0} = 0$.

Далее, мы доказываем, что

$$\int_{{}_0V} {}^t_0S_{ij} \delta_0 \eta_{ij} d^0V = \int_{{}^tV} {}^t\tau_{ij} \delta_t \eta_{ij} d^tV. \quad (j)$$

Однако из (h) следует также, что, если сгруппировать члены, нелинейные по определяемым с пошаговым приростом смещениям u_i , то

$${}_0\eta_{ij} = {}^t_0x_{p,i} {}^t_0x_{q,j} {}^t\eta_{pq}$$

и, следовательно,

$$\delta_0 \eta_{ij} = {}^t_0 x_{p,i} {}^t_0 x_{q,j} \delta_t \eta_{pq}. \quad (k)$$

Подставляя выражения из (d) и (k) в соотношение (j) при надлежащих изменениях индексов, получим прямое подтверждение соотношения (j).

Наконец, мы доказываем, что

$$\int_{{}_0V} {}_0 C_{ijs} {}_0 e_{rs} \delta_0 e_{ij} d^0 V = \int_{{}_tV} {}_t C_{ijrs} {}_t e_{rs} \delta_t e_{ij} d^t V. \quad (l)$$

Теперь мы вновь используем (h), а это дает также

$${}_0 e_{ij} = {}^t_0 x_{p,i} {}^t_0 x_{q,j} {}_t e_{ij} \quad (m)$$

и, следовательно,

$$\delta_0 e_{ij} = {}^t_0 x_{p,i} {}^t_0 x_{q,j} \delta_t e_{ij}. \quad (n)$$

Подстановка выражений из (i), (m) и (n), при надлежащем изменении индексов, в соотношение (l) также дает прямое подтверждение справедливости этого соотношения.

Суммируя вышеизложенное, отметим, что если тензоры ${}_0 C_{ijrs}$ и ${}_t C_{ijrs}$, входящие в определяемые с пошаговым приростом соотношения напряжение–деформация в формулах (a) и (b), сформулированы для *любого материала* таким образом, чтобы представлять одну и ту же физическую материальную реакцию, то формулировки TL и UL для уравнений механики сплошной среды с пошаговым приростом, оказываются идентичными. Это наблюдение относится не только к упругим материалам, но является общим и справедливо для любого материала.

Как показывает проведенное выше обсуждение, если известно основополагающее соотношение, соответствующее формулировке TL (данное наблюдение остается в силе для любого закона поведения материала, который может быть представлен применительно к формулировке TL), то может быть использована и формулировка UL, и vice versa. Разумеется, эта эквивалентность формулировок UL и TL остается справедливой при любом уровне деформации, однако при исследовании большинства практических случаев линейное упругое поведение материала (закон Гука) имеет место только в условиях малых деформаций. В этом случае при исследовании изотропного упругого материала результаты, использующие либо (6.184) и (6.185), либо непосредственно соотношения

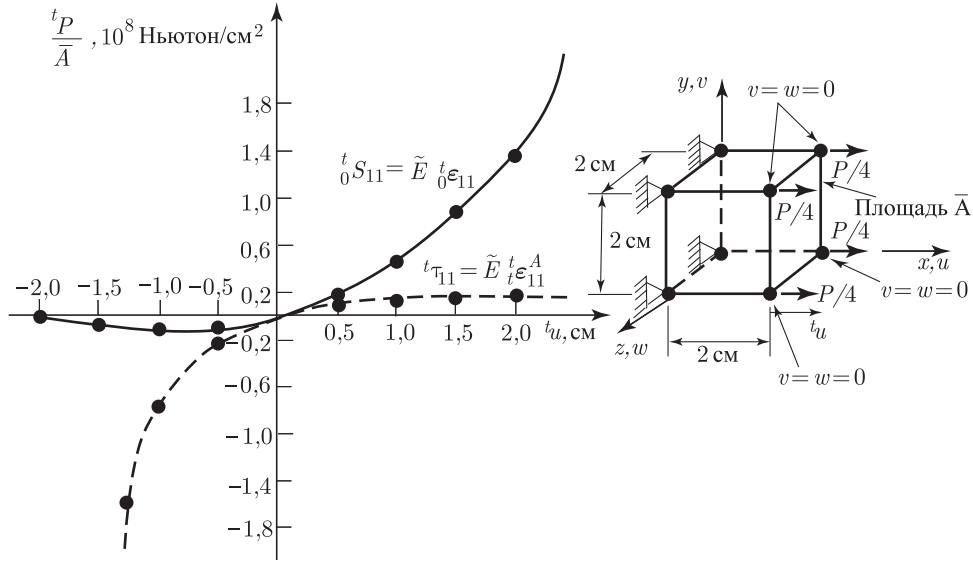
$${}^t \tau_{ij} = {}^t C_{ijrs} {}^t \epsilon_{rs}^A, \quad (6.197)$$

$${}^t C_{ijrs} = \lambda \delta_{ij} \delta_{rs} + \mu (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr}), \quad (6.198)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

где λ и μ — это те же постоянные, что и в соотношении (6.185). Следовательно, эти же постоянные могут использоваться, чтобы определить закон поведения материала для полной и предварительно заданной лагранжеевых формулировок. При этом в результатах решения для больших смещений и больших углов поворота наблюдались бы лишь небольшие различия, если только деформации остались бы малыми. Причина этого состоит в том, что когда рассматриваются большие смещения и большие углы поворота, но малые деформации, тогда преобразования основополагающих тензоров, задаваемых формулами (6.187) и (6.188), сводятся к простым поворотам. Поэтому, и с учетом того, что материал считается изотропным, эти преобразования не изменяют компонентов основополагающих тензоров, а тогда использование либо (6.184) и (6.185), либо (6.197) и (6.198), с целью охарактеризовать реакцию материала, оказывается совершенно эквивалентным.

Однако если для моделирования больших деформаций используются формулы (6.184) и (6.197) с одними и теми же упругими материальными постоянными, то следует ожидать совершенно различных прогнозов относительно реакции материала. На рис. 6.21 показаны результаты, полученные при простом анализе такого рода. Мы замечаем, что при использовании двух версий описания реакции сила–смещение оказываются совершенно



а. Реакция $P-\Delta$ элемента с восемью узлами, подвергаемого равномерной нагрузке ($E = 10^7$ Ньютон/см², $\nu = 0,30$), площадь A сохраняется постоянной

$$\tilde{E} = \frac{E(1\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

(i) Используя ${}_0^tS_{11} = \tilde{E} {}_0^t\epsilon_{11}$

$${}^tP = \frac{\tilde{E}\bar{A}}{2} \left(1 + \frac{{}^tu}{{}_0L}\right) \left(\left(1 + \frac{{}^tu}{{}_0L}\right)^2 - 1 \right).$$

(ii) Используя ${}^t\tau_{11} = \tilde{E} {}^t\epsilon_{11}^A$

$${}^tP = \frac{\tilde{E}\bar{A}}{2} \left(1 - \left(\frac{{}_0L}{{}_0L + {}^tu}\right)^2\right)$$

б. Основные соотношения

Рис. 6.21. Анализ одномерной реакции

различными, а также что с использованием формулировки TL, при смещении, равном $(-2 + 2\sqrt{3})$, наблюдается неустойчивость.

Разумеется, если преобразования типа (6.187) и (6.188), какие бы из них ни оказались применимыми, уже проведены, то одинаковые кривые сила-смещение были бы получены с использованием либо полной, либо предварительно заданной лагранжевой формулировки (см. упражнение 6.62).

В приводимом ниже примере мы более подробно продемонстрируем различия реакции, наблюдаемые при использовании различных мер измерения напряжение-деформация с использованием одних и тех же характерных постоянных материала.

Пример 6.24: Рассмотрим показанный на рис. 6.22 элемент с четырьмя узлами. Смещения элемента заданы как функции времени.

Требуется рассчитать напряжения Коши, используя две следующие меры измерения напряжений:

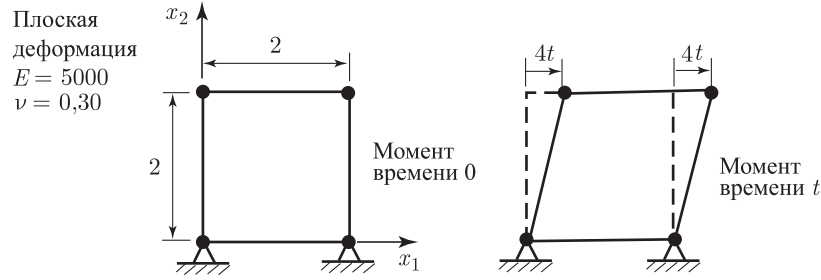


Рис. 6.22. Элемент с четырьмя узлами в состоянии движения

(i) Воспользуйтесь *полной моделью* второго тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа и тензора деформаций Грина–Лагранжа

$${}^t_0 S_{ij} = {}^t_0 C_{ijrs} {}^t_0 \epsilon_{rs}. \quad (a)$$

(ii) Воспользуйтесь *скоростной формулировкой* для скорости изменения напряжений по Яуманну и для тензоров скоростей деформаций (см. [Malvern, 1969])

$${}^i \nabla \tau_{ij} = {}^t C_{ijrs} {}^t D_{rs}, \quad (b)$$

и пусть основополагающие тензоры ${}^t_0 C_{ijrs}$ и ${}^t C_{ijrs}$ будут заданы посредством одной и той же матрицы в таблице 4.2.

Мы замечаем, что компоненты тензора скоростей изменения напряжений по Яуманну задаются формулой (см. [Malvern, 1969])

$${}^i \nabla \tau_{ij} = {}^t \dot{\tau}_{ij} + {}^t \tau_{ip} {}^t W_{pj} + {}^t \tau_{jp} {}^t W_{pi}, \quad (c)$$

где ${}^t W_{ij}$ — это компоненты тензора спина (см. (6.43)). Соотношение (c) указывает на то, что скорость изменения напряжения Коши, ${}^t \tau_{ij}$, равна скорости изменения напряжения по Яуманну (определяющей скорость изменения напряжения Коши вследствие деформации материала) плюс эффект скорости поворота материала, как твердого тела (и, следовательно, скорости поворота напряжения). Скорость изменения напряжения по Яуманну используется на практике, хотя эта скоростная формулировка приводит к ошибкам численного интегрирования и к нефизичному поведению (см. раздел 6.6, а также работу [Kojić, Bathe, 1987-A]).

Рассмотрим случай (i). Градиент деформаций равен

$${}^t_0 \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

и, следовательно,

$${}^t_0 \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0 & t \\ t & 2t^2 \end{bmatrix}.$$

Используя таблицу 4.2 при заданных значениях E и ν , мы получаем в качестве отличных от нуля значений $C_{1111} = 6731$, $C_{2211} = C_{1122} = 2885$, $C_{2222} = 6731$, $C_{1212} = 1923$.

Следовательно, используя полное лагранжево описание, получаем

$${}^t_0 S_{11} = 5770t^2; \quad {}^t_0 S_{22} = 13462t^2; \quad {}^t_0 S_{12} = 3846t$$

и, пользуясь стандартными формулами преобразования вторых напряжений Пиолы–Кирхгофа в напряжения Коши, имеем (с точностью до двух значащих цифр)

$$\begin{bmatrix} {}^t \tau_{11} \\ {}^t \tau_{22} \\ {}^t \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21000t^2 + 54000t^4 \\ 13000t^2 \\ 3800t + 27000t^3 \end{bmatrix}. \quad (c)$$

Теперь рассмотрим случай (ii). Тензор скоростей деформации ${}^t \mathbf{D}$ рассчитывается в соответствии с формулой (6.42). Следовательно,

$${}^t \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad {}^t \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad {}^t \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

После этого используем ту же основополагающую матрицу \mathbf{C} , чтобы получить

$$\begin{bmatrix} {}^t\tau_{11} \\ {}^t\tau_{22} \\ {}^t\tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3846 \end{bmatrix}.$$

Мы замечаем, что скорость изменения напряжений по Яуманну не зависит от времени. Однако материал также поворачивается, как это выражено в представлении ${}^t\mathbf{W}$, а скорости изменения во времени компонентов напряжений Коши задаются соотношением

$$\begin{bmatrix} {}^t\dot{\tau}_{11} \\ {}^t\dot{\tau}_{22} \\ {}^t\dot{\tau}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{}^t\tau_{12} \\ -2{}^t\tau_{12} \\ 3846 + {}^t\tau_{22} - {}^t\tau_{11} \end{bmatrix}.$$

Эти дифференциальные уравнения могут быть решены, что дает нам (вновь с точностью до двух значащих цифр и, следовательно, используя $G = E/[2(1 + \nu)] \doteq 1900$)

$$\begin{bmatrix} {}^t\tau_{11} \\ {}^t\tau_{22} \\ {}^t\tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1900(1 - \cos 2t) \\ -1900(1 - \cos 2t) \\ 1900 \sum 2t \end{bmatrix}. \quad (d)$$

Мы замечаем, что результаты, заданные посредством (c) и (d), совершенно различны, и если значение t превышает приближенную величину 0,1, и что при каждом из описаний материала порождаются нормальные напряжения (которые равны нулю, когда предполагается наличие бесконечно малых деформаций). Кроме того, определяемое в соответствии с (d) колебательное поведение напряжений Коши с периодом π представляется необычным.

6.6.2. Поведение резиноподобного материала

В разделе 6.4 мы предложили модели типа смещение/давление, которые более всего подходят для исследования резиноподобных материалов, потому что такие материалы обнаруживают почти несжимаемую реакцию. Основную роль в этих моделях играет плотность энергии деформаций ${}^t_0\overline{W}$, которая определяется конкретной моделью используемого материала.

Существуют различные определения величины ${}^t_0\overline{W}$, однако двумя обычно используемыми моделями являются модель Муни–Ривлина и модель Огдена (см. [Rivlin, 1948] и [Ogden, 1984]).

Условная модель материала Муни–Ривлина описывается плотностью энергии деформаций в расчете на единицу первоначального объема

$${}^t_0\widetilde{W} = C_1({}^t_0I_1 - 3) + C_2({}^t_0I_2 - 3); \quad {}^t_0I_3 = 1, \quad (6.199)$$

где C_1 и C_2 — материальные константы, а инварианты t_0I_i задаются в терминах компонентов тензора деформаций Коши–Грина (см. (6.22))

$$\begin{aligned} {}^t_0I_1 &= {}^t_0C_{kk}, \\ {}^t_0I_2 &= \frac{1}{2} [({}^t_0I_1)^2 - {}^t_0C_{ij} {}^t_0C_{ij}], \\ {}^t_0I_3 &= \det {}^t_0\mathbf{C}. \end{aligned} \quad (6.200)$$

Отметим, что значение ${}^t_0\widetilde{W}$ в выражении (6.199) — это та плотность энергии деформаций ${}^t_0\overline{W}$, которую мы используем в нашей формулировке, и это мы обсудим ниже.

Отметим также, что так называемое нео-гукианское описание поведения материала получается при $C_2 = 0$ и, если рассматривается случай малых деформаций, то $2(C_1 + C_2)$ есть модуль сдвига, а $6(C_1 + C_2)$ — это модуль Юнга.

Пример 6.25: Рассмотрим одномерную реакцию стержня, показанного на рис. 6.23. Требуется построить график зависимости сила–смещение для двух следующих случаев: (i) $C_1 = 100$, $C_2 = 0$ и (ii) $C_1 = 75$, $C_2 = 25$.

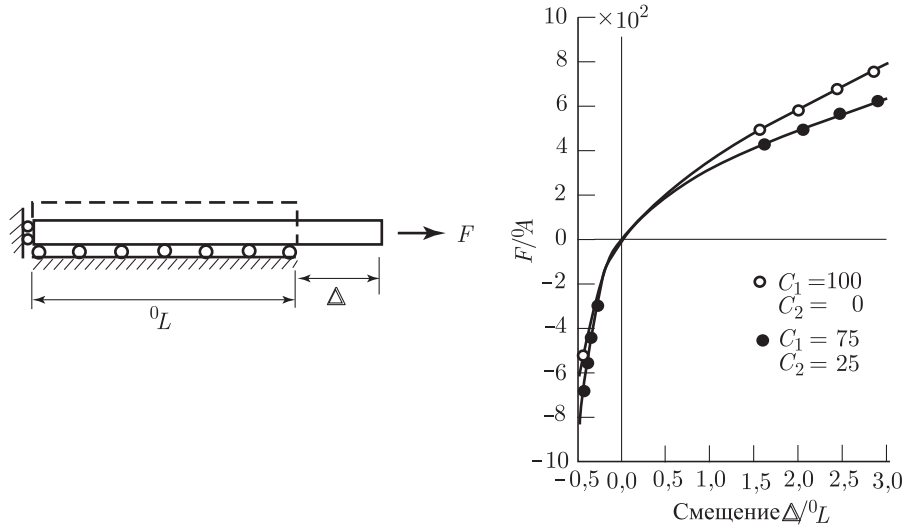


Рис. 6.23. Одномерная реакция стержня из резиноподобного материала

Используя выражение ${}^t_0S_{ij} = \partial_0^t \widetilde{W} / \partial_0^t \epsilon_{ij}$ (см. (6.129)) и модель материала Муни–Ривлина согласно (6.199), приспособленную к рассматриваемому случаю, мы получим (используя удлинение λ в качестве единственной переменной для расчета ${}^t_0 \widetilde{W}$)

$$F = 2^0 A [C_1(\lambda - \lambda^{-2}) + C_2(1 - \lambda^{-3})],$$

$$\lambda = 1 + \frac{\Delta}{{}^0L}.$$

Подставляя сюда значения C_1 и C_2 , мы получаем кривые, показанные на рисунке.

Описание, даваемое выражением (6.199), предполагает, что материал является совершенно несжимаемым (так как ${}^t_0I_3 = 1$). Несколько лучшее предположение сводится к тому, что модуль объемных деформаций считается превышающим модуль сдвига в несколько тысяч раз, а это означает, что материал является почти несжимаемым. Это предположение реализуется за счет отказа от ограничительного условия ${}^t_0I_3 = 1$ и включения в выражение для функции энергии деформаций члена, определяющего гидростатическую работу; в результате получим

$${}^t_0 \widetilde{W} = C_1({}^t_0I_1 - 3) + C_2({}^t_0I_2 - 3) + W_H({}^t_0I_3). \quad (6.201)$$

Однако это выражение нельзя непосредственно использовать в моделях типа смещение/давление, так как все три его члена дают вклады в давление. Желая получить надлежащее выражение, дадим определения приведенных инвариантов

$$\begin{aligned} {}^t_0J_1 &= {}^t_0I_1({}^t_0I_3)^{-1/3}, \\ {}^t_0J_2 &= {}^t_0I_2({}^t_0I_3)^{-2/3}, \\ {}^t_0J_3 &= ({}^t_0I_3)^{1/2}, \end{aligned} \quad (6.202)$$

после чего воспользуемся выражением

$${}^t_0 \overline{W} = C_1({}^t_0J_1 - 3) + C_2({}^t_0J_2 - 3) + \frac{1}{2} \kappa ({}^t_0J_3 - 1)^2, \quad (6.203)$$

где κ — модуль объемных деформаций. Отметим, что при этом описании

$${}^t\overline{p} = -\kappa({}^t_0J_3 - 1). \quad (6.204)$$

Соотношения, фигурирующие в формулах (6.203) и (6.204), используются для того, чтобы путем применения цепного правила рассчитать все производные, требуемые для описанной в разделе 6.4 модели типа смещение/давление.

Основное (трехчленное) описание поведения материала по Огдену использует форму

$${}^t_0\widetilde{W} = \sum_{n=1}^3 \frac{\mu_n}{\alpha_n} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3); \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1, \quad (6.205)$$

где λ_i представляют собой главные значения тензора растяжений ${}^t_0\mathbf{U}$, а μ_i и α_i — постоянные, характеризующие материал. Отметим, что $1/2 \sum_{n=1}^3 \alpha_n \mu_n$ есть малая величина, определяющая собой модуль сдвиговых деформаций.

Описание поведения материала станет более эффективным, если воспользоваться главными значениями L_i тензора ${}^t_0\mathbf{C}$ (вместо главных значений тензора ${}^t_0\mathbf{U}$, где ${}^t_0\mathbf{C} = ({}^t_0\mathbf{U})^2$). Тогда получим

$${}^t_0\widetilde{W} = \sum_{n=1}^3 \frac{\mu_n}{\alpha_n} (L_1^{\alpha_n/2} + L_2^{\alpha_n/2} + L_3^{\alpha_n/2} - 3); \quad L_1 L_2 L_3 = 1. \quad (6.206)$$

Как и при рассмотрении модели материала Муни–Ривлина, теперь будет предполагаться, что резиноподобный материал является лишь почти несжимаемым. Кроме того, член L_i будет заменен на $L_i (L_1 L_2 L_3)^{-1/3}$ для того, чтобы исключить влияние объемных деформаций на три члена, стоящие под знаком суммирования. Тогда модифицированный закон поведения материала по Огдену задается выражением

$${}^t_0\widetilde{W} = \sum_{n=1}^3 \left\{ \frac{\mu_n}{\alpha_n} [(L_1^{\alpha_n/2} + L_2^{\alpha_n/2} + L_3^{\alpha_n/2})(L_1 L_2 L_3)^{-\alpha_n/6} - 3] \right\} + \frac{1}{2} \kappa ({}^t_0J_3 - 1)^2. \quad (6.207)$$

Теперь, используя выражения (6.207) и (6.204), мы можем путем прямого дифференцирования получить все члены модели смещение/давление, представленной в разделе 6.4 (см. работу [Sussman, Bathe 1987]).

В приведенном выше изложении неявно предполагалось, что при анализе используется полная лагранжева формулировка. Если учесть, что для этой формулировки определяются плотности энергии деформаций с коэффициентами, соответствующими данному материалу, то использование полного лагранжева решения оказывается наиболее естественным и эффективным. Однако могло бы быть применено и лагранжево решение с предварительным заданием вышеуказанных значений ${}^t_0\widetilde{W}$, посредством которого были бы получены совершенно такие же численные результаты, если только при этом были бы соблюдены правила преобразования, изложенные в разделе 6.4.2 (или 6.6.1).

Наконец, мы должны отметить также и тот факт, что фундаментальные модели поведения материала по Муни–Ривлину и Огдену могут быть непосредственно расширены с превращением в модели более высокого порядка с большим числом членов в выражениях для ${}^t_0\widetilde{W}$ (см. упражнение 6.69).

6.6.3. Поведение неупругого материала; упругопластичность, ползучесть и вязкопластичность

Фундаментальное наблюдение, связанное со сравнением упругого анализа с неупругим, состоит в том, что при реализации упругого решения для вычисления полного напряжения достаточно знать только полную деформацию (заданную посредством формул (6.184) и (6.191)), тогда как при расчете неупругой реакции полное напряжение в момент времени t зависит также и от истории напряжений и деформаций. Типичными неупругими явлениями представляются упругопластичность, ползучесть и вязкопластичность, и для того, чтобы охарактеризовать соответствующую реакцию материала, были разработаны многочисленные модели поведения этого материала. И наша цель состоит, опять-таки, не в том, чтобы дать итоговый обзор существующих моделей, а скорее — чтобы изложить некоторые из основных конечно-элементных процедур, применяемых при расчете неупругих реакций. Мы будем заниматься, преимущественно, общим подходом к неупругому конечно-элементному анализу, а также некоторыми формулировками и численными процедурами, эффективно используемыми при этом.

В процессе исследования неупругих реакций методом малых приращений встречаются, как правило, три группы кинематических условий.

Условия малых смещений и малых деформаций.

В этом случае используется модель, основанная только на нелинейном поведении материала, при которой предполагается наличие бесконечно малых смещений и поворотов, а нелинейности учитываются только в поведении материала. До тех пор, пока этот материал остается упругим, основанное на использовании данной модели решение совпадает с линейным решением, рассмотренным в разделе 4.2.

Большие смещения и большие углы поворота, но малые деформации.

В этом случае эффективно применяется полная лагранжева формулировка. Как это обсуждалось в разделе 6.2.3, кинематические допущения позволяют получить большие смещения, большие углы поворота и большие деформации. Однако если предположить, что деформации малы, то модель материала, связанная только с нелинейным поведением этого материала, может быть непосредственно применена в формулировке ТЛ для анализа больших смещений и больших углов поворота за счет того, что в материальной характеристике вторые напряжения Пиолы–Кирхгофа и деформации Грина–Лагранжа заменяются на инженерные значения напряжений и деформаций для случая малых смещений (см. раздел 6.6.1, рис. 6.20). Таким образом, использование формулировки ТЛ в неупругом анализе является прямым обобщением принятия этой формулировки в условиях малых деформаций, но больших смещений и больших углов поворота для упругого режима.

Большие смещения и большие деформации.

В этом случае может быть эффективно применена полная лагранжева формулировка или аналогичная формулировка с предварительным заданием. Однако основополагающие формулировки, соответствующие такому анализу, являются более сложными, хотя и служат прямым обобщением двух предыдущих случаев распределения кинематических условий. Имеются некоторые проблемы, нуждающиеся в особом обсуждении применительно к случаю анализа с большими деформациями, и на этом основании мы откладываем рассмотрение этого случая до раздела 6.6.4.

Если учесть, что случай больших смещений и малых деформаций с вычислительной точки зрения представляет собой простое обобщение случая, связанного только с нелинейным поведением материала, то в данном разделе мы рассмотрим лишь неупругие условия, соответствующие малым смещениям и малым деформациям. Однако, как это видно из таблицы 6.9, при упругопластическом анализе некоторые из наиболее важных и обсуждаемых в дальнейшем уравнений без труда используются со вторыми напряжениями Пиолы–Кирхгофа и с деформациями Грина–Лагранжа, что позволяет включить в этот анализ эффекты больших смещений. Обращаясь к сводке методов расчета, приводимой в таблице 6.8, предположим, что решение уже было получено с достаточной точностью в момент времени t и что были рассчитаны полные деформации ${}^{t+\Delta t}e_{rs}$, соответствующие моменту $t + \Delta t$ (сейчас мы опускаем любой верхний индекс, обозначающий номер итерации). Следовательно, мы предполагаем, что все напряжения, неупругие деформации и переменные состояния для момента времени t известны точно. Тогда для построения схемы нашего решения нужно выполнить два основных требования:

Возможность расчета напряжений, неупругих деформаций и переменных состояния, соответствующих полным деформациям в момент времени $t + \Delta t$.

Возможность расчета касательного основополагающего соотношения, соответствующего рассчитанному выше состоянию, которое при анализе, основанном только на нелинейном поведении материала, может быть записано в форме

$$C_{ijrs}^{IN} = \frac{\partial^{t+\Delta t}\sigma_{ij}}{\partial^{t+\Delta t}e_{rs}}. \quad (6.208)$$

Касательный закон взаимосвязи напряжение–деформация применяется при вычислении касательной матрицы жесткости. Если соотношение напряжение–деформация, используемое при вычислении матрицы жесткости, не является истинным касательным соотношением, то следующее из рассчитываемых приращений смещения (а следовательно, и деформации) не дает, вообще говоря, той точной аппроксимации решения, которая

Таблица 6.9. Модели для упругопластичной сплошной среды

Модель только для линейно деформируемого материала (бесконечно малые смещения)

$$\begin{aligned} \int_V C_{ijrs}^E e_{rs} \delta e_{ij} dV &= {}^{t+\Delta t}\mathcal{R} - \int_V {}^t\sigma_{ij} \delta e_{ij} dV \\ {}^tF({}^t\sigma_{ij}, {}^t\kappa, \dots) &= 0; \quad de_{ij}^P = d\lambda \frac{\partial {}^tF}{\partial {}^t\sigma_{ij}}; \\ d\sigma_{ij} &= C_{ijrs}^E (de_{rs} - de_{rs}^P); \quad {}^{t+dt}\sigma_{ij} = {}^t\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}. \end{aligned}$$

Полностью лагранжеева формулировка (большие смещения и большие углы поворота, но малые деформации)

$$\begin{aligned} {}^t\bar{\epsilon}^P &= \int_0^t \left[2/3 d_0 \epsilon_{ij}^P d_0 \epsilon_{ij}^P \right]^{1/2} < 2\% : \\ \int_{{}_0V} {}_0C_{ijrs}^{EP} e_{rs} \delta_0 e_{ij} d^0V + \int_{{}_0V} {}_0S_{ij} \delta_0 \eta_{ij} d^0V &= {}^{t+\Delta t}\mathcal{R} - \int_{{}_0V} {}_0S_{ij} \delta_0 e_{ij} d^0V \\ {}^tF({}_0^tS_{ij}, {}^t\kappa, ls) &= 0; \quad d_0 \epsilon_{ij}^P = d\lambda \frac{\partial {}^tF}{\partial {}_0^tS_{ij}}; \\ d_0 S_{ij} &= {}_0C_{ijrs}^E (d_0 \epsilon_{rs} - d_0 \epsilon_{rs}^P); \quad {}^{t+dt}{}_0S_{ij} = {}_0^tS_{ij} + d_0 S_{ij}. \end{aligned}$$

является возможной (а это уменьшит скорость сходимости итераций для равновесного решения; см. раздел 8.4).

Решающее значение имеет то требование, чтобы напряжения для нового состояния рассчитывались точно. Если мы обозначим расчетные значения полных деформаций как ${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}$, то наше требование состоит в том, чтобы получить точные значения напряжений ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}$. Следует отметить, что в общем случае любая ошибка, вносимая при расчете ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}$, является такой ошибкой, которую нельзя компенсировать на более поздней стадии решения за счет принятия некоторой корректирующей схемы. Вместо этого те ошибки, которые имеют место в значениях напряжений и пластических деформаций, а также переменных состояния для момента времени $t + \Delta t$, будут, вообще говоря, необратимо ухудшать последующий прогноз реакции.

Здесь следует отметить, что в процессе построения итераций равновесного состояния касательное основополагающее соотношение (6.10) должно рассчитываться, как соответствующее текущему состоянию системы, а также что напряжения, которые нужно рассчитать, это величины ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{(i-1)}$ для заданных деформаций ${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}^{(i-1)}$ (см. раздел 8.4).

В процессе дальнейшего изложения мы прежде всего рассмотрим основную расчетную схему для случая упругопластичности, а затем рассмотрим вкратце случаи ползучести и вязкопластичности.

Упругопластичность

Мы предполагаем, что упругопластическая реакция определяется положениями классической теории пластичности с малыми приращениями, основанной на уравнениях Прандтля-Рейсса (см., например, [Malvern, 1969], [Hill, 1983], [Mendelson 1983] и [Zyczkowski 1981]).

Если использовать аддитивное разложение деформаций, $de_{ij} = de_{ij}^E + de_{ij}^P$, то приращение напряжения задается с помощью основного соотношения

$$d\sigma_{ij} = C_{ijrs}^E (de_{rs} - de_{rs}^P), \quad (6.209)$$

где C_{ijrs}^E — это компоненты упругого основополагающего тензора, а de_{ij} , de_{ij}^E , de_{ij}^P — это компоненты приращения полной деформации, приращения упругой деформации и приращения пластической деформации, соответственно. Приведенное соотношение для приращений остается справедливым в процессе возникновения неупругой реакции. Чтобы рассчитать пластические деформации, мы используем три свойства, характеризующие поведение материала:

Функция податливости, которая определяет собой условие податливости, соответствующее состоянию многоосевого напряжения в начале пластического течения.

Правило течения, которое связывает приращения пластических деформаций с текущими значениями напряжений и с приращениями напряжений.

Правило отвердевания, которое выражает собой, как изменяется функция податливости в процессе пластического течения.

Функция податливости в момент времени t имеет общую форму

$${}^t f_y({}^t \sigma_{ij}, {}^t e_{ij}^P, \dots), \quad (6.210)$$

где точки соответствуют тем переменным состояния, которые зависят от характерных свойств материала. Мгновенная реакция материала является упругой, если

$${}^t f_y < 0, \quad (6.211)$$

и либо упругой, либо пластичной в зависимости от условия нагружения, если

$${}^t f_y = 0, \quad (6.212)$$

тогда как неравенство ${}^t f_y > 0$ является недопустимым. Следовательно, соотношение (6.212) представляет собой условие податливости, которое должно оставаться справедливым в процессе пластической реакции.

Если предположить, что для данного материала соответствующее правило течения является применимым в процессе пластической реакции, то в рамках этого правила мы воспользуемся функцией ${}^t f_y$, чтобы получить приращения пластических деформаций

$$de_{ij}^P = d\lambda \frac{\partial {}^t f_y}{\partial {}^t \sigma_{ij}}, \quad (6.213)$$

где $d\lambda$ представляет собой скаляр, определяемый впоследствии (а в зависимости от переменных состояния в соотношении (6.213) могут появиться некоторые добавочные величины). Правило отвердевания — которое зависит также от используемой нами конкретной модели материала — изменяет значения переменных состояния в выражении для ${}^t f_y$ как результат пластического течения и, поэтому, изменяет условие податливости при возникновении реакции.

Рассмотрим пластичность согласно теории Мизеса, при изотропном отвердевании и при трехмерном напряженном состоянии общего вида. В дальнейшем мы предложим простую процедуру решения, которая весьма широко используется и которая называется *методом радиального возврата* (см. [Willkins, 1964], а также [R. D. Krieg and D. B. Krieg 1977]). Мы ставим своей целью дать такую процедуру, которая могла бы рассматриваться в качестве основы для общего подхода к решению в условиях неупругих напряжений.

Если учесть, что в теории пластичности Мизеса пластические объемные деформации равны нулю (как мы это и увидим позднее), то будет эффективным записать общее соотношение напряжение–деформация в момент времени $t + \Delta t$ в форме (см. также соотношения (4.125)–(4.133)).

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{S} = \frac{E}{1+\nu} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{e}^t - {}^{t+\Delta t} \mathbf{e}^P), \quad (6.214)$$

$${}^{t+\Delta t} \sigma_m = \frac{E}{1-2\nu} {}^{t+\Delta t} e_m, \quad (6.215)$$

где ${}^{t+\Delta t}\mathbf{S}$ — это отклоняющий тензор напряжений с компонентами ¹⁾

$${}^{t+\Delta t}S_{ij} = {}^{t+\Delta t}\sigma_{ij} - {}^{t+\Delta t}\sigma_m \delta_{ij}, \quad (6.216)$$

${}^{t+\Delta t}\sigma_m$ — это среднее напряжение,

$${}^{t+\Delta t}\sigma_m = \frac{{}^{t+\Delta t}\sigma_{ij}}{3}, \quad (6.217)$$

${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}'$ — это отклоняющий тензор деформаций с компонентами

$${}^{t+\Delta t}e'_{ij} = {}^{t+\Delta t}e_{ij} - {}^{t+\Delta t}e_m \delta_{ij}, \quad (6.218)$$

${}^{t+\Delta t}e_m$ — это средняя деформация,

$${}^{t+\Delta t}e_m = \frac{{}^{t+\Delta t}e_{ii}}{3}, \quad (6.219)$$

а ${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}^P$ — это тензор пластических деформаций с компонентами ${}^{t+\Delta t}e_{ij}^P$. Отметим, что в обеих частях соотношения (6.214) мы имеем матрицы 3×3 , содержащие компоненты тензоров. Мы должны вспомнить, что полная деформация в момент времени $t + \Delta t$ известна (см. таблицу 6.8) и, следовательно, известны также ${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}'$ и ${}^{t+\Delta t}e_m$.

Соотношения (6.214) и (6.215) представляют собой проинтегрированные формы соотношения (6.209), где мы замечаем, что отклоняющие напряжения зависят от истории напряжений, а также что среднее напряжение не зависит от пластических деформаций (так как средняя пластическая деформация равна нулю; другими словами, пластическая деформация является изохорической). Следовательно, величина ${}^{t+\Delta t}\sigma_m$ задается непосредственно формулой (6.215), и теперь наша задача состоит в том, чтобы рассчитать ${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}^P$ и ${}^{t+\Delta t}\mathbf{S}$.

Если учесть, что полный набор условий для напряжений и деформаций в момент времени t предполагается известным, то мы можем записать соотношение (6.214) в форме

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{S} = \frac{E}{1+\nu} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{e}'' - \Delta\mathbf{e}^P), \quad (6.220)$$

где

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}'' = {}^{t+\Delta t}\mathbf{e}' - {}^t\mathbf{e}^P \quad (6.221)$$

представляет собой известную величину.

Следовательно, задача об интегрировании основополагающих соотношений сводится теперь к определению по формуле (6.220) напряжений ${}^{t+\Delta t}\mathbf{S}$, а также приращений пластических деформаций $\Delta\mathbf{e}^P$, если при этом выполняется условие податливости и соблюдаются правило течения и правило отвердевания.

Согласно теории пластичности Мизеса условие податливости в момент времени $t + \Delta t$ имеет вид

$${}^{t+\Delta t}f_y^M = \frac{1}{2} {}^{t+\Delta t}\mathbf{S} \cdot {}^{t+\Delta t}\mathbf{S} - \frac{1}{3} ({}^{t+\Delta t}\sigma_y)^2 = 0, \quad (6.222) \quad ^2)$$

где ${}^{t+\Delta t}\sigma_y$ представляет собой напряжение податливости в момент времени $t + \Delta t$. Это напряжение является функцией эффективной пластической деформации, которая определяет собой отвердевание материала,

$${}^{t+\Delta t}\sigma_y = f_e({}^{t+\Delta t}\bar{e}^P) \quad (6.223)$$

при

$${}^{t+\Delta t}\bar{e}^P = \int_0^{t+\Delta t} \sqrt{\frac{2}{3}} d\mathbf{e}^P \cdot d\mathbf{e}^P. \quad (6.224)$$

Кривая податливости схематически показана на рис. 6.24.

¹⁾ Заметим, что отклоняющее напряжение не несет индекса 0, как это имеет место для второго напряжения Пиолы–Кирхгофа.

²⁾ Отметим, что здесь и в дальнейшем мы используем обозначение, согласно которому для тензоров второго ранга \mathbf{a} и \mathbf{b} мы имеем $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_{ij}b_{ij}$ (суммирование по всем i и j ; см. (2.79)).

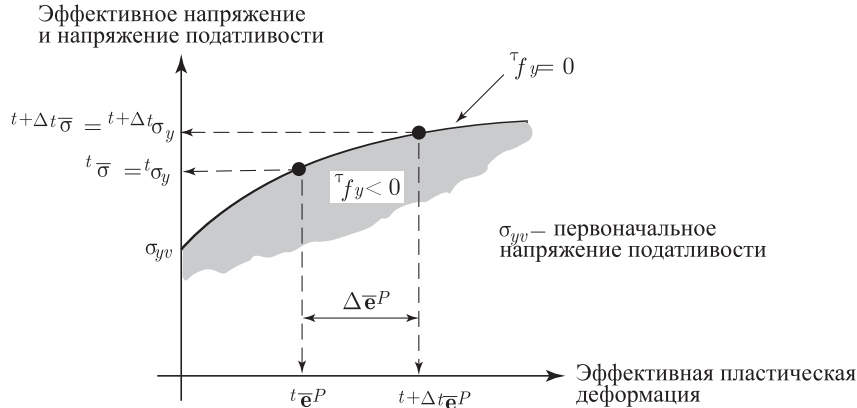


Рис. 6.24. Общий вид характерной кривой податливости. Предполагается, что податливость имеет место в моменты времени t и $t+\Delta t$. В момент времени τ пусть будет $\tau f_y = \tau \bar{\sigma} - \tau \sigma_y$; тогда реакция должна удовлетворять условиям $\tau f_y \leq 0$, $\bar{\epsilon}^P \geq 0$, $\bar{\epsilon}^P \tau f_y = 0$

При конечном шаге по времени правило течения дает

$$\Delta \mathbf{e}^P = \lambda \frac{\partial^{t+\Delta t} f_y^{vM}}{\partial^{t+\Delta t} \bar{\sigma}} = \lambda^{t+\Delta t} \mathbf{S}. \quad (6.225)$$

Геометрически это уравнение означает, что $\Delta \mathbf{e}^P$ реализуется в направлении $^{t+\Delta t} \mathbf{S}$, а также показывает, что объемные пластические деформации равны нулю (равен нулю след матрицы $^{t+\Delta t} \mathbf{S}$).

Чтобы определить величину λ , мы берем скалярное произведение компонентов тензоров в обеих частях (6.225), чтобы получить ¹⁾

$$\Delta \bar{\epsilon}^P = \frac{2}{3} \lambda^{t+\Delta t} \bar{\sigma}, \quad (6.226)$$

где $\Delta \bar{\epsilon}^P$ представляет собой приращение эффективной пластической деформации, а $^{t+\Delta t} \bar{\sigma}$ — это эффективное напряжение

$$\Delta \bar{\epsilon}^P = \sqrt{\frac{2}{3} \Delta \mathbf{e}^P \cdot \Delta \mathbf{e}^P}; \quad ^{t+\Delta t} \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} ^{t+\Delta t} \mathbf{S} \cdot ^{t+\Delta t} \mathbf{S}}. \quad (6.227)$$

Соотношения (6.227) соответствуют пластической деформации и напряжению при одноосевом условии напряженности (см. упражнение 6.73), а если использовать (6.225), то мы получаем, что при общем трехмерном анализе пластическая работа $^t \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^P$ задается выражением $^t \bar{\sigma} d\bar{\epsilon}^P$. Из соотношения (6.226) получаем

$$\lambda = \frac{3}{2} \frac{\Delta \bar{\epsilon}^P}{^{t+\Delta t} \bar{\sigma}}. \quad (6.228)$$

Однако если воспользоваться требованием о том, чтобы в процессе податливости соответствующее напряжение было равно эффективному напряжению (потому что условие податливости выполняется), то мы можем связать $\Delta \bar{\epsilon}^P$ с эффективным напряжением в момент времени $t + \Delta t$ (а также с другими известными переменными). Это соотношение получается из кривой связи между эффективным напряжением и эффективной пластической деформацией, показанной схематически на рис. 6.24.

После этого мы проводим подстановку из (6.225) в (6.220), чтобы получить

$$^{t+\Delta t} \mathbf{S} = \frac{1}{a_E + \lambda} ^{t+\Delta t} \mathbf{e}'' \quad (6.229)$$

и убедиться, что $^{t+\Delta t} \mathbf{e}''$ также идет в направлении $^{t+\Delta t} \mathbf{S}$. Чтобы вычислить скалярный множитель в соотношении (6.229), мы можем вновь взять скалярное произведение

¹⁾ Отметим, то геометрически величина λ означает просто разность «длин» тензоров $\Delta \mathbf{e}^P$ и $^{t+\Delta t} \mathbf{S}$.

компонентов тензоров в обеих частях (6.229). Тогда получим

$$a^2 {}^{t+\Delta t}\bar{\sigma}^2 - d^2 = 0, \quad (6.230)$$

где

$$a = a_E + \lambda; \quad a_E = \frac{1 + \nu}{E}, \quad (6.231)$$

$$d^2 = \frac{3}{2} {}^{t+\Delta t}\mathbf{e}'' \cdot {}^{t+\Delta t}\mathbf{e}''. \quad (6.232)$$

Заметим, что коэффициент d является постоянной величиной, тогда как коэффициент a изменяется вместе с λ и, следовательно, с ${}^{t+\Delta t}\bar{\sigma}$.

Дадим определение функции

$$f(\bar{\sigma}^*) = a^2 (\bar{\sigma}^*)^2 - d^2 \quad (6.233)$$

и назовем $f(\bar{\sigma}^*)$ *эффективной функцией напряжения*. Обращаясь к соотношению (6.230), мы видим, что при $\bar{\sigma}^* = {}^{t+\Delta t}\bar{\sigma}$ имеем $f = 0$. Это значит, что путем построения решения для нулевого значения эффективной функции напряжения мы получаем решение для ${}^{t+\Delta t}\bar{\sigma}$ и λ и, следовательно, решение для текущего напряженного состояния ${}^{t+\Delta t}\mathbf{S}$ (см. (6.229)), а также для приращения пластической деформации $\Delta \mathbf{e}^P$ (см. (6.225)). Если учесть, что ключевой этап решения — как здесь, так и при более сложном неупругом анализе — состоит в вычислении нуля функции $f(\bar{\sigma}^*)$, то полный алгоритм решения был назван алгоритмом эффективной функции напряжения (ESF, см. работу [Bathe, Chaudhary, Dvorkin and Kojić, 1984], где тот же метод предложен для более сложных решений с учетом влияния термоупругопластичности и ползучести).

Привлекательность алгоритма ESF состоит в общей применимости данного метода. Эффективная функция напряжения может оказаться весьма сложной (вследствие сложности взаимосвязи между эффективным напряжением и эффективной пластической деформацией, или вследствие тепловых эффектов и эффектов ползучести, рассматриваемых позднее). В общем случае нуль интересующей нас функции может быть эффективно найден путем применения численной схемы деления пополам. Эта схема может быть сделана весьма устойчивой, так как функция содержит лишь одну неизвестную величину — эффективное напряжение.

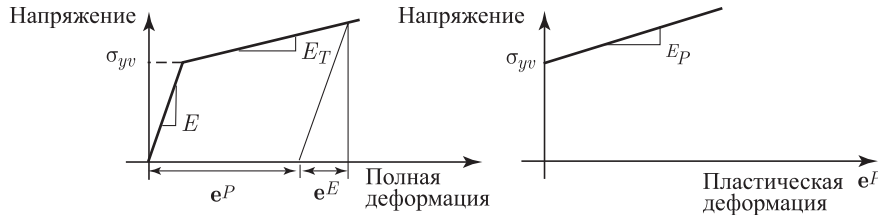


Рис. 6.25. Билинейная упругопластическая модель материала

Однако если материал моделируется как билинейный (см. рис. 6.25), то взаимосвязь между эффективным напряжением и эффективной деформацией определяется прямой линией с наклоном E_P , и мы можем непосредственно получить решение для эффективного напряжения в момент времени $t + \Delta t$. А именно,

$$\Delta \bar{e}^P = \frac{{}^{t+\Delta t}\bar{\sigma} - {}^t\sigma_y}{E_P} \quad (6.234)$$

при

$$E_P = \frac{E E_T}{E - E_T}, \quad (6.235)$$

где E_T — это касательный модуль и, следовательно,

$${}^{t+\Delta t}\bar{\sigma} = \frac{2 E_P d + 3 {}^t\sigma_y}{2 E_P a_E + 3}. \quad (6.236)$$

В случае идеальной пластичности имеем $E_P = 0$ и ${}^{t+\Delta t}\bar{\sigma} = \sigma_{yv}$, так что из (6.230) получим

$$\lambda = \frac{d}{\sigma_{yv}} - a_E. \quad (6.237)$$

Расчеты, связанные с упругопластичностью, начинаются, разумеется, с проверки того, проявляет ли материал податливость в период времени от момента t до момента $t + \Delta t$. Предполагается, что податливость имеет место в течение всего указанного интервала времени, если ${}^{t+\Delta t}\bar{\sigma}^E > {}^t\sigma_y$, где ${}^{t+\Delta t}\bar{\sigma}^E$ представляет собой решение для упругого напряжения

$${}^{t+\Delta t}\bar{\sigma}^E = \frac{d}{a_E}. \quad (6.238)$$

Вышеописанный процесс решения можно интерпретировать как состоящий, во-первых, из упругого прогноза напряжения (когда $\Delta \mathbf{e}^P$ предполагается равным нулю), а затем, если указанный прогноз напряжения оказывается за пределами поверхности податливости, соответствующей моменту времени t , то проводится коррекция напряжения. Рисунок 6.26 дает геометрическую иллюстрацию процесса решения.

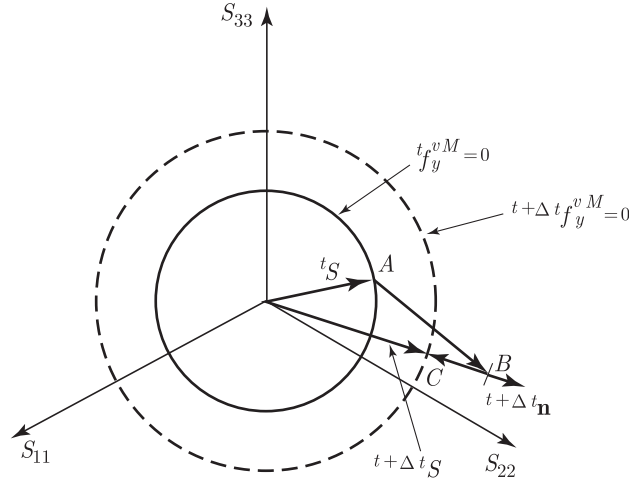


Рис. 6.26. Геометрическое представление решения для напряжений при упругопластическом анализе (с использованием главных направлений для напряжения)

Точка A соответствует решению для напряжения в момент времени t . Точка B соответствует упругому прогнозу для напряжения, который на основании формулы (6.220) равен

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{S}^E = \frac{E}{1+\nu} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{e}''). \quad (6.239)$$

Коррекция напряжения соответствует вектору BC , причем она равна

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{S}^c = \frac{E}{1+\nu} (-\Delta \mathbf{e}^P), \quad (6.240)$$

где $\Delta \mathbf{e}^P$ определяется по формуле (6.225).

Учитывая то, что ${}^{t+\Delta t}\mathbf{S}$ и ${}^{t+\Delta t}\mathbf{S}^c$ имеют одинаковое направление и что ${}^{t+\Delta t}\mathbf{S} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{S}^E + {}^{t+\Delta t}\mathbf{S}^c$, мы замечаем, что нормаль ${}^{t+\Delta t}\mathbf{n}$ проходит в направлении ${}^{t+\Delta t}\mathbf{S}^E$ (а также ${}^{t+\Delta t}\mathbf{S}$, $\Delta \mathbf{e}^P$ и ${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}''$) и задается выражением

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{n} = \frac{{}^{t+\Delta t}\mathbf{e}''}{\|{}^{t+\Delta t}\mathbf{e}''\|_2}. \quad (6.241)$$

С учетом того, что коррекция напряжения вдоль этого вектора возвращает напряженное состояние на поверхность податливости, причем делает это в радиальном направлении, то рассматриваемый нами метод был назван методом радиального возврата (см. [R. D. Krieg and D. B. Krieg 1977]).

Данная здесь интерпретация схемы решения дает некое указание на величину численной ошибки, возникающей в процессе этого решения. Мы видим, что условие податливости и закон отвердевания точно соблюдаются на дискретных периодах решения, однако величина пластических деформаций определяется согласно (6.225) путем оценки, основанной на интегрировании по Эйлера со сдвигом назад, и с использованием правила течения. Если направление отклоняющего вектора напряжения не изменяется (и, следовательно, если ${}^{\tau}\mathbf{n}$ остается постоянным при всех τ), то решение является точным, но любое изменение направления этого вектора будет вносить ошибки численного интегрирования. Некоторые исследования, касающиеся ошибок решения, представлены в работах [R. D. Krieg and D. B. Krieg 1977], [Schreyer, Kulak and Kramer, 1979], [Ortiz, Popov, 1985], а также [Lee, Bathe 1994]. Эти исследования указывают на высокую точность, достигаемую при использовании данного алгоритма решения.

Как мы уже указывали ранее, второе важное требование, предъявляемое к вычислительной схеме, связано с вычислением точной формы связи между касательным напряжением и деформацией, нужной для определения матрицы жесткости. Указанная матрица связи между касательным напряжением и деформацией должна быть *совместимой* со схемой численного интегрирования для напряжений, используемой с целью достижения преимуществ полной сходимости итераций по Ньютону–Рафсону (см. раздел 8.4.1). Будем считать, что нам требуется получить касательную матрицу, соответствующую моменту времени $t + \Delta t$. Мы предполагаем, что здесь применима схематическая кривая податливости, представленная на рис. 6.24.

Для упрощения записи определим векторы напряжений и деформаций,

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^T &= [{}^{t+\Delta t}\sigma_{11} \quad {}^{t+\Delta t}\sigma_{22} \quad {}^{t+\Delta t}\sigma_{33} \quad {}^{t+\Delta t}\sigma_{12} \quad {}^{t+\Delta t}\sigma_{23} \quad {}^{t+\Delta t}\sigma_{31}] = \\ &= [{}^{t+\Delta t}\sigma_1 \quad {}^{t+\Delta t}\sigma_2 \quad {}^{t+\Delta t}\sigma_3 \quad {}^{t+\Delta t}\sigma_4 \quad {}^{t+\Delta t}\sigma_5 \quad {}^{t+\Delta t}\sigma_6], \end{aligned} \quad (6.242)$$

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\mathbf{e}^T &= [{}^{t+\Delta t}e_{11} \quad {}^{t+\Delta t}e_{22} \quad {}^{t+\Delta t}e_{33} \quad {}^{t+\Delta t}\gamma_{12} \quad {}^{t+\Delta t}\gamma_{23} \quad {}^{t+\Delta t}\gamma_{31}] = \\ &= [{}^{t+\Delta t}e_1 \quad {}^{t+\Delta t}e_2 \quad {}^{t+\Delta t}e_3 \quad {}^{t+\Delta t}e_4 \quad {}^{t+\Delta t}e_5 \quad {}^{t+\Delta t}e_6], \end{aligned} \quad (6.243)$$

где мы используем инженерные сдвиговые деформации ${}^{t+\Delta t}\gamma_{ij} = {}^{t+\Delta t}e_{ij} + {}^{t+\Delta t}e_{ji}$. После этого матрица связи касательного напряжения с деформацией в момент времени $t + \Delta t$ задается посредством производной напряжения по отношению к деформации, вычисляемой момент времени $t + \Delta t$ и записываемой в виде

$$\mathbf{C}^{EP} = \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}}{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{e}}. \quad (6.244)$$

Теперь нам потребуется найти производную в соответствии с формулой (6.244) и с использованием предположений об интегрировании в применении к напряжению и, в частности, с использованием того факта, что одно лишь эффективное напряжение (или одна лишь эффективная пластическая деформация) определяет собой текущее напряженное состояние. Следовательно, если использовать предположение об интегрировании в применении к напряжению и о том, что ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}$ представляет собой функцию ${}^{t+\Delta t}\bar{\sigma}$ и ${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}$, то

$$\mathbf{C}^{EP} = \left. \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}}{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{e}} \right|_{t+\Delta t\bar{\sigma}=\text{const}} + \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}}{\partial {}^{t+\Delta t}\bar{\sigma}} \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\bar{\sigma}}{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{e}}, \quad (6.245)$$

причем вместо эффективного напряжения мы можем использовать эффективную деформацию.

Вычисление производной осуществляется посредством тщательно выполняемых операций дифференцирования. Дадим описание первых стадий этого процесса, используя для выражения всех напряжений и деформаций представления по формулам (6.242) и (6.243).

Располагая ранее выведенными соотношениями, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\sigma_i &= {}^{t+\Delta t}S_i + {}^{t+\Delta t}\sigma_m; & i &= 1, 2, 3 \\ {}^{t+\Delta t}\sigma_i &= {}^{t+\Delta t}S_i; & i &= 4, 5, 6 \end{aligned} \right\}. \quad (6.246)$$

Пользуясь формулой (6.244), получим выражения для элементов матрицы связи между касательными напряжениями и деформациями,

$$\left. \begin{aligned} C_{ij}^{EP} &= C'_{ij} + \frac{E}{3(1-2\nu)}; & 1 \leq i, j \leq 3 \\ C_{ij}^{EP} &= C'_{ij}; & \text{в остальных случаях} \end{aligned} \right\}. \quad (6.247)$$

где

$$C'_{ij} = \frac{\partial^{t+\Delta t} S_i}{\partial^{t+\Delta t} e_j}. \quad (6.248)$$

Однако величина $^{t+\Delta t} S_i$ задается формулой (6.229), где λ определяется согласно (6.228), а a_E представляет собой постоянную. Поэтому формула (6.248) будет, в конечном итоге, охватывать дифференцирование λ (и, следовательно, Δ^{-P} и $^{t+\Delta t} \bar{\sigma}$) по отношению к компонентам тензора деформаций. Пользуясь правилом цепочки, получим

$$\frac{\partial^{t+\Delta t} S_i}{\partial^{t+\Delta t} e_j} = \frac{\partial^{t+\Delta t} S_i}{\partial^{t+\Delta t} e_k''} \frac{\partial^{t+\Delta t} e_k''}{\partial^{t+\Delta t} e_l'} \frac{\partial^{t+\Delta t} e_l'}{\partial^{t+\Delta t} e_j}, \quad (6.249)$$

где на основании (6.221) имеем

$$\frac{\partial^{t+\Delta t} e_k''}{\partial^{t+\Delta t} e_l'} = \delta_{kl}, \quad (6.250)$$

а на основании (6.218) —

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\partial^{t+\Delta t} e_l'}{\partial^{t+\Delta t} e_j} \right] &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}; & 1 \leq l, j \leq 3 \\ \frac{\partial^{t+\Delta t} e_i'}{\partial^{t+\Delta t} e_j} &= \frac{1}{2} \delta_{ij}; & \text{в остальных случаях} \end{aligned} \right\}. \quad (6.251)$$

Кроме того, пользуясь выражением (6.229), получим

$$\frac{\partial^{t+\Delta t} S_i}{\partial^{t+\Delta t} e_k''} = \frac{1}{a_E + \lambda} \delta_{ik} - \frac{1}{(a_E + \lambda)^2} \frac{\partial \lambda}{\partial^{t+\Delta t} e_k''} ^{t+\Delta t} e_i''. \quad (6.252)$$

Чтобы завершить определение производной, при вычислении $\partial \lambda / \partial^{t+\Delta t} e_k''$, мы используем соотношение (6.228), заданную материальную зависимость эффективного напряжения от эффективной пластической деформации, а также условие равенства нулю эффективной функции напряжения.

Разумеется, при вышеизложенном обсуждении мы принимали весьма специальное, но широко используемое предположение об упругопластическом поведении материала. Мы рассматривали также общий случай трехмерного напряженного состояния. Однако операции интегрирования для вычисления напряжений и соотношения связи касательного напряжения с деформацией при других условиях, касающихся напряжений и деформаций, могут быть выведены путем непосредственного использования вышеописанных процедур. Например, в условиях осесимметричных и плоских деформаций надлежащие переменные, характеризующие деформацию, могли бы быть просто положены равными нулю. В случае плоских напряжений то напряжение, которое действует по всей толщине системы, полагается равным нулю, и так далее (см. рис. 4.17).

Мы представили здесь процедуру решения применительно к пластичности по Мизесу с изотропным отвердеванием, однако алгоритм может быть разработан и непосредственно для условий кинематического отвердевания, а также комбинированного изотропно-кинематического (т. е. смешанного) отвердевания (см. [Kojić, Bathe, 1987-B], а также [Eterovic, Bathe, 1990-A]).

Весьма заметная особенность используемой здесь модели пластичности состоит в том, что определяющее уравнение (уравнение для эффективной функции напряжения) должно разрешаться относительно одной единственной переменной состояния (эффективное напряжение), чтобы тем самым определить полное напряженное состояние. Разумеется, эта же процедура решения может быть применена также и к более сложным моделям пластичности, в которых напряженное состояние определяется посредством некоторого

числа переменных внутреннего состояния или определяющих параметров. В этом случае необходимо сформулировать и решить надлежащие уравнения с переменными состояния, делая это аналогично тому, как решалось рассмотренное выше уравнение для эффективной функции напряжения.

Чтобы проиллюстрировать приложение данной процедуры решения к варианту с другим, легко интерпретируемым законом поведения материала, мы рассмотрим приводимый ниже пример, где речь идет о модели материала Друккера–Прагера, широко используемой при описании почвенных и горных пород.

Пример 6.26: Рассмотрим модель материала Друккера–Прагера, при применении которой функция податливости в момент времени $t + \Delta t$ задается выражением (см. [Drucker, Prager, 1952], [Desai, Siriwardane, 1984])

$${}^{t+\Delta t}f_y^{DP} = \alpha {}^{t+\Delta t}I_1 + \sqrt{{}^{t+\Delta t}J_2} - k, \quad (a)$$

где ${}^{t+\Delta t}I_1 = {}^{t+\Delta t}\sigma_{ii}$, а ${}^{t+\Delta t}J_2 = \frac{1}{2} {}^{t+\Delta t}S_{ij} {}^{t+\Delta t}S_{ij}$, тогда как α и k — это параметры, характеризующие свойства материала, см. рис. 6.27.

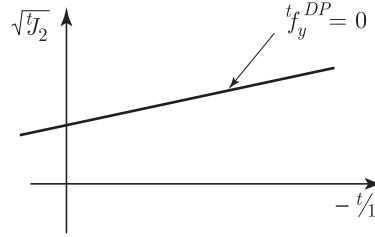


Рис. 6.27. Функция податливости Друккера–Прагера

Например, если сила сцепления c и угол трения θ рассматриваемого материала измеряются путем трехосной проверки, то мы имеем

$$\alpha = \frac{2 \sin \theta}{\sqrt{3} (3 - \sin \theta)},$$

$$k = \frac{6c \cos \theta}{\sqrt{3} (3 - \sin \theta)}.$$

Рассмотрим случай идеальной пластичности, т. е. случай постоянных c и θ , и выведем соотношения, нужные для интегрирования напряжений.

Если сравнить функцию податливости для модели материала Друккера–Прагера с функцией податливости Мизеса, то мы увидим, что в выражении (a) фигурирует среднее напряжение. Следовательно, при использовании модели материала Друккера–Прагера в выражение для реакции будут входить объемные пластические деформации.

Основополагающее соотношение для данного материала имеет вид

$${}^{t+\Delta t}S_{ij} = \frac{1}{\alpha_E} ({}^{t+\Delta t}e'_{ij} - {}^t e_{ij}^{P'} - \Delta e_{ij}^{P'}), \quad (b)$$

$${}^{t+\Delta t}\sigma_m = \frac{1}{a_m} ({}^{t+\Delta t}e_m - {}^t e_m^P - \Delta e_m^P), \quad (c)$$

где ${}^t e_{ij}^{P'}$ и $\Delta e_{ij}^{P'}$ представляют собой отклоняющие пластические деформации в момент времени t и их приращения, ${}^t e_m^P$ и Δe_m^P представляют собой среднюю пластическую деформацию в момент времени t и ее приращение, а $a_m = (1 - 2\nu)/E$.

Правило течения (6.213) дает

$$\Delta e_{ij}^P = \lambda \alpha \delta_{ij} + \lambda \frac{{}^{t+\Delta t}S_{ij}}{2\sqrt{{}^{t+\Delta t}J_2}}.$$

Следовательно,

$$\Delta e_m^P = \frac{1}{3} \Delta e_{ii}^P = \lambda \alpha \quad (d)$$

и

$$\Delta e_{ij}^{P'} = \Delta e_{ij}^P - \Delta e_m^P \delta_{ij} = \lambda \frac{{}^{t+\Delta t} S_{ij}}{2\sqrt{{}^{t+\Delta t} J_2}}. \quad (e)$$

Теперь нашей целью является вычисление λ . Учитывая, что материал является неэластичным, это вычисление может быть проведено аналитически, в терминах известных величин и, как только значение λ определено, напряжения в момент $t + \Delta t$ могут быть вычислены непосредственно.

Пользуясь основополагающим соотношением и правилом течения, мы подставляем выражение (e) в соотношение (b), разрешаем его относительно ${}^{t+\Delta t} S_{ij}$ и подвергаем обе части получаемого уравнения операции умножения, чтобы таким образом получить

$$\lambda = \sqrt{2} {}^{t+\Delta t} d - 2a_E \sqrt{{}^{t+\Delta t} J_2}, \quad (f)$$

где

$${}^{t+\Delta t} d^2 = {}^{t+\Delta t} e_{ij}'' \cdot {}^{t+\Delta t} e_{ij}''$$

и

$${}^{t+\Delta t} e_{ij}'' = {}^{t+\Delta t} e_{ij}' - {}^t e_{ij}^{P'}.$$

Кроме того, подставляя (d) в (c), мы получим

$${}^{t+\Delta t} \sigma_m = \frac{1}{a_m} ({}^{t+\Delta t} e_m'' - \lambda \alpha), \quad (g)$$

где

$${}^{t+\Delta t} e_m'' = {}^{t+\Delta t} e_m - {}^t e_m^P.$$

Наконец, воспользуемся условием податливости ${}^{t+\Delta t} f_y^{\text{DP}} = 0$ и подставим выражения из (f) и (g) в представления для ${}^{t+\Delta t} I_1$ и $\sqrt{{}^{t+\Delta t} J_2}$, получим

$$\lambda = \frac{\frac{3\alpha}{a_m} {}^{t+\Delta t} e_m'' + \frac{{}^{t+\Delta t} d}{\sqrt{2} a_E} - k}{3 \frac{\alpha^2}{a_m} + \frac{1}{2a_E}}.$$

Теперь, зная λ , мы можем непосредственно рассчитать приращения пластических деформаций, пользуясь соотношениями (b), (d) и (e) (где выражение (f) подставляется в (e) чтобы получить $\sqrt{{}^{t+\Delta t} J_2}$). Значения напряжений в момент $t + \Delta t$ получится после этого с помощью формул (b) и (c).

Термоупругость и ползучесть

Представленный выше алгоритм с использованием эффективной функции напряжения был первоначально построен для сложного случая термоупругости и ползучести (см. [Bathe, Chaudhary, Dvorkin and Kojić, 1984]). В этом случае представленные ранее соотношения должны быть обобщены, и мы получим

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{S} = \frac{{}^{t+\Delta t} E}{1 + {}^{t+\Delta t} \nu} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{e}' - {}^{t+\Delta t} \mathbf{e}^P - {}^{t+\Delta t} \mathbf{e}^C), \quad (6.253)$$

$${}^{t+\Delta t} \sigma_m = \frac{{}^{t+\Delta t} E}{1 - 2{}^{t+\Delta t} \nu} ({}^{t+\Delta t} e_m - {}^{t+\Delta t} e^{TH}), \quad (6.254)$$

где теперь предполагается, что и модуль Юнга, и коэффициент Пуассона зависят от температуры (которая сама предполагается зависящей от времени, причем значения температуры задаются на каждом шаге по времени), а величины ${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}^C$, ${}^{t+\Delta t} e^{TH}$ характеризуют деформации, связанные с ползучестью и с температурными изменениями соответственно. Температурная деформация вычисляется по формуле

$${}^{t+\Delta t} e^{TH} = {}^{t+\Delta t} \alpha_m ({}^{t+\Delta t} \theta - \theta_{\text{ref}}), \quad (6.255)$$

где ${}^{t+\Delta t} \alpha_m$ есть средний коэффициент теплового расширения, а θ_{ref} — характерная температура.

Теперь соотношение (6.220) приобретает вид

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{S} = \frac{{}^{t+\Delta t} E}{1 + {}^{t+\Delta t} \nu} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{e}'' - \Delta \mathbf{e}^P - \Delta \mathbf{e}^C), \quad (6.256)$$

где фигурируют уже известные значения деформаций, в частности

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}'' = {}^{t+\Delta t}\mathbf{e}' - {}^t\mathbf{e}^P - {}^t\mathbf{e}^C. \quad (6.257)$$

Давайте вновь рассмотрим условие податливости Мизеса и изотропный закон отвердевания. Приращение пластической деформации $\Delta\mathbf{e}^P$ рассчитывается таким же образом, как это описано выше, за исключением того, что теперь поведение кривых взаимосвязи эффективного напряжения с эффективной пластической деформацией зависит от температуры (см. рис. 6.28). Следовательно, все ранее выведенные соотношения остаются непосредственно применимыми, однако постоянные, характеризующие поведение материала, являются теперь функциями температуры.

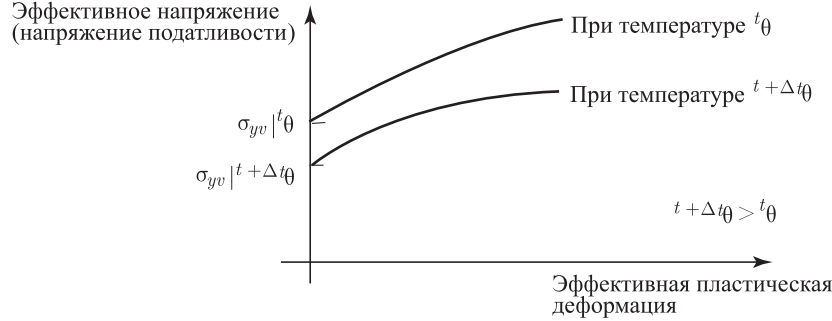


Рис. 6.28. Кривые зависимости эффективного напряжения от эффективной пластической деформации при различных температурах (схематическое представление)

Определяемая методом приращений деформация ползучести $\Delta\mathbf{e}^C$ вычисляется совершенно аналогично определяемой таким же методом пластической деформации (см., например, [Kraus, 1983]). Используя α -метод интегрирования по времени (см. [Snyder, Bathe, 1981], а также раздел 9.6), мы получаем

$$\Delta\mathbf{e}^C = \Delta t {}^\tau\gamma {}^\tau\mathbf{S}, \quad (6.258)$$

где

$${}^\tau\mathbf{S} = (1 - \alpha) {}^t\mathbf{S} + \alpha {}^{t+\Delta t}\mathbf{S}, \quad (6.259)$$

а α представляет собой параметр интегрирования ($0 \leq \alpha \leq 1$).

Функция ${}^\tau\gamma$ задается выражением

$${}^\tau\gamma = \frac{3}{2} \frac{{}^\tau\dot{\bar{e}}^C}{{}^\tau\bar{\sigma}}, \quad (6.260)$$

где эффективное приращение деформации ползучести равно

$$\Delta\bar{e}^C = \sqrt{\frac{2}{3} \Delta\mathbf{e}^C \cdot \Delta\mathbf{e}^C}, \quad (6.261)$$

а взвешенное значение эффективного напряжения выражается как

$${}^\tau\bar{\sigma} = (1 - \alpha) {}^t\bar{\sigma} + \alpha {}^{t+\Delta t}\bar{\sigma}. \quad (6.262)$$

Учитывая, что при ползучести материал предполагается несжимаемым, мы имеем одноосные условия для напряжения, ${}^t\bar{\sigma} = {}^t\sigma_{11}$ и ${}^t\bar{e}^C = {}^te_{11}$.

Эти соотношения подобны тем, которые использовались при расчете приращения пластической деформации, однако в том случае мы проводили интегрирование со значением $\alpha = 1$ (метод Эйлера со сдвигом назад).

Вычисление скалярной функции ${}^\tau\gamma$ основывается на законе реализации ползучести. Типичный одноосный закон ползучести, используемый на практике, имеет вид

$${}^te^C = a_0 {}^t\sigma^{a_1} {}^te^{a_2} e^{-a_3/({}^t\theta + 273,16)}, \quad (6.263)$$

где ${}^te^C$ и ${}^t\sigma$ представляют собой, соответственно, деформацию ползучести и напряжение ползучести, ${}^t\theta$ — это температура в градусах Цельсия, а a_0 , a_1 , a_2 и a_3 — это постоянные. Обобщение соотношения (6.263) на случай многоосных условий достигается путем замены

эффективного напряжения и эффективной деформации ползучести на одноосные переменные,

$${}^t\bar{\epsilon}^C = a_0 {}^t\bar{\sigma}^{a_1} t^{a_2} e^{-a_3/({}^t\theta+273,16)}. \quad (6.264)$$

Это уравнение, а также другие законы ползучести, представляются в форме

$${}^t\bar{\epsilon}^C = f_1({}^t\bar{\sigma})f_2(t)f_3({}^t\theta), \quad (6.265)$$

и мы используем соотношение

$$\Delta\bar{\epsilon}^C = \Delta t f_1({}^\tau\bar{\sigma})\dot{f}_2(\tau)f_3({}^\tau\theta), \quad (6.266)$$

где

$${}^\tau\theta = (1 - \alpha) {}^t\theta + \alpha {}^{t+\Delta t}\theta \quad (6.267)$$

и $\tau = t + \alpha \Delta t$. Закон изменения приращений (6.266) основывается на использовании экспериментальных данных и соответствует дифференцированию по времени одной лишь функции f_2 .

Если воспользоваться соотношениями (6.266) и (6.262), то функция ${}^\tau\gamma$ может быть определена для заданного значения ${}^\tau\bar{\sigma}$ и, следовательно, может быть рассчитано приращение деформации ползучести. Этот подход соответствует так называемой *процедуре отвердевания во времени*. Однако физические наблюдения свидетельствуют о том, что *процедура отвердевания, связанного с деформациями*, дает лучшие результаты при переменных условиях напряжения. При использовании метода отвердевания, связанного с деформациями, скорость изменения деформации ползучести выражается в терминах эффективной деформации ползучести ${}^t\bar{\epsilon}^C$, а не в терминах времени τ . Это достигается путем вычисления с помощью (6.265) и (6.266) псевдовремени τ_P ,

$${}^t\bar{\epsilon}^C + f_1({}^\tau\bar{\sigma})f_3({}^\tau\theta)\alpha \Delta t \dot{f}_2(\tau_P) - f_2(\tau_P) = 0. \quad (6.268)$$

В общем случае это уравнение должно быть численно разрешено относительно τ_P . После этого приращение деформации ползучести $\Delta\bar{\epsilon}^C$ может быть вычислено по формуле (6.266) при замене τ на τ_P . Рисунок 6.29 дает схематическую иллюстрацию различия между предположениями об отвердевании во времени и об отвердевании, связанном с деформациями, при расчетах деформаций ползучести.

Необходимо отметить, что в случае циклических условий нагрузки учет изменения направления напряжения требует введения дополнительных соображений (см. [Kraus, 1983]).

Ключевое наблюдение, касающееся вышеописанных расчетов, состоит в том, что приращения неупругих деформаций зависят только от неизвестного эффективного напряжения ${}^{t+\Delta t}\bar{\sigma}$. Чтобы получить решение для этого значения напряжения, в данной задаче используется эффективная функция напряжения.

Обращаясь к соотношению (6.256), подставим в него значение $\Delta\mathbf{e}^P$, соответствующее (6.225), и значение $\Delta\mathbf{e}^C$, соответствующее (6.258). Учитывая тот факт, что все свойства материала являются теперь функциями температуры, мы получим

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{S} = \frac{1}{{}^{t+\Delta t}a_E + \alpha \Delta t {}^\tau\gamma + \lambda} [{}^{t+\Delta t}\mathbf{e}'' - (1 - \alpha)\Delta t {}^\tau\gamma {}^t\mathbf{S}], \quad (6.269)$$

где

$${}^{t+\Delta t}a_E = \frac{1 + {}^{t+\Delta t}\nu}{{}^{t+\Delta t}E}. \quad (6.270)$$

Проводя операцию скалярного произведения для обеих частей уравнения (6.269), мы находим, что неизвестное эффективное напряжение удовлетворяет соотношению

$$a^2 {}^{t+\Delta t}\bar{\sigma}^2 + b {}^\tau\gamma + c^2 {}^\tau\gamma^2 - d^2 = 0, \quad (6.271)$$

где

$$\begin{aligned} a &= {}^{t+\Delta t}a_E + \alpha \Delta t {}^\tau\gamma + \lambda, \\ b &= 3(1 - \alpha) \Delta t {}^{t+\Delta t}\mathbf{e}'' \cdot {}^t\mathbf{S}, \\ c &= (1 - \alpha) \Delta t {}^t\bar{\sigma}, \\ d^2 &= \frac{3}{2} {}^{t+\Delta t}\mathbf{e}'' \cdot {}^{t+\Delta t}\mathbf{e}'' . \end{aligned} \quad (6.272)$$

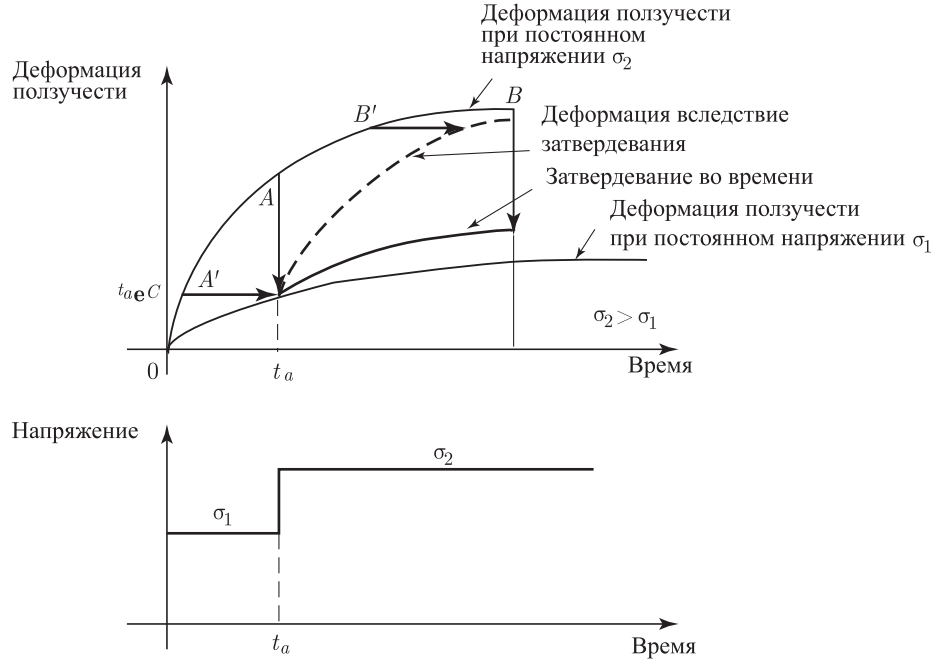


Рис. 6.29. Деформация ползучести при предположениях о затвердевании, связанных со временем и с деформацией затвердевания. Кривая $A-B$ определяет собой инкремент деформации ползучести при затвердевании во времени, начиная с момента t_a . Кривая $A'-B'$ соответствует инкременту деформации ползучести, связанному с затвердеванием, начиная также с момента t_a

Коэффициенты b , c и d представляют собой постоянные, зависящие только от известных значений, тогда как коэффициент a является функцией $t+\Delta t\bar{\sigma}$. Если учесть, что $t+\Delta t\bar{\sigma}$ представляет собой ту переменную, которую нужно найти, мы даем определение *эффективной функции напряжения*

$$f(\bar{\sigma}^*) = a^2(\bar{\sigma}^*)^2 + b^T\gamma - c^2\gamma^2 - d^2. \quad (6.273)$$

Функция $f(\bar{\sigma}^*)$ обращается в нуль при $t+\Delta t\bar{\sigma}$ (см. рис. 6.30). Следовательно, данное значение $t+\Delta t\bar{\sigma}$ может, вообще говоря, быть вычислено с помощью любой численной схемы с итерациями, определяющей нуль некоторой функции, например, путем применения устойчивой и эффективной техники деления отрезка пополам. Как только величина $t+\Delta t\bar{\sigma}$ становится известной, мы можем воспользоваться приведенными выше уравнениями для вычисления неупругих деформаций и напряжений в момент времени $t + \Delta t$.

Эта схема определения неупругой реакции, связанной с термопластичностью и ползучестью, является, очевидно, неким расширением метода, предложенного для проведения расчетов изотермических пластических деформаций. Поэтому выдвинутые ранее соображения относительно точности предложенной схемы решения, применимы также и здесь. Однако при расчете деформаций ползучести используются соотношения для приращений, а также α -метод при $0 \leq \alpha \leq 1$. На практике соображения устойчивости приводят обычно к требованию о том, чтобы было $\alpha \geq 1/2$ (схема α -интегрирования является безусловно устойчивой при линейном анализе, если только $\alpha \geq 1/2$), и мы зачастую используем значение $\alpha = 1$. Схема α -интегрирования рассматривается более подробно в разделе 9.6.

При изложении вышеописанного материала мы обсудили, как рассчитываются напряжения в момент времени $t + \Delta t$, однако не указали, как следует определять касательное соотношение напряжение–деформация. Определение этого соотношения требует вычисления производных напряжений по отношению к деформациям (см. (6.244)), и мы отсылаем

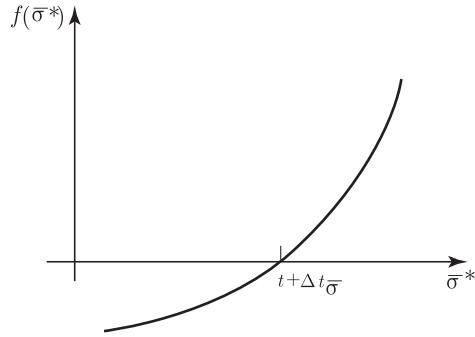


Рис. 6.30. Эффективная функция напряжения, показанная схематически, с нулевым значением при $t + \Delta t \bar{\sigma}$

читателя к замечаниям, сделанным в конце следующего раздела, где мы рассматриваем вязкопластические деформации.

Вязкопластичность

Рассмотренная выше модель пластичности не моделирует те временные эффекты, которые физически возникают в данном материале. Эффекты такого рода могут оказаться важными, и вязкопластическая модель материала может стать более подходящей для того, чтобы охарактеризовать реакцию данного материала. Мы предлагаем рассмотреть весьма широко используемую вязкопластическую модель, предложенную в работе [Perzyna 1966]. Эта модель использует представления модели пластичности Мизеса, однако вводит эффекты, связанные со скоростью изменений во времени. Важным аспектом теории вязкопластичности является то, что в ней отсутствует условие податливости, а вместо него вводится понятие о скорости неупругой реакции, определяемой мгновенным значением разности между эффективным напряжением и «материальным» эффективным напряжением.

Реальное введение вышеуказанной модели характерно для ряда вязкопластических моделей и может быть осуществлено при использовании уже описанных нами методов.

Рассмотрим модель Пержины без температурных эффектов. В этом случае предлагаемая модель постулирует, что приращения деформаций в любой момент времени представляются в виде

$$de_{ij} = de_{ij}^E + de_{ij}^{VP}, \quad (6.274)$$

где верхние индексы E и VP обозначают приращения упругих и вязкопластических деформаций. Приращения упругих деформаций рассчитываются так, как обычно, а приращения вязкопластических деформаций в момент времени t задается в виде

$$de_{ij}^{VP} = \begin{cases} \beta \phi(\bar{\sigma}) \frac{3}{2 \bar{\sigma}} {}^t S_{ij} dt & \text{если } {}^t \bar{\sigma} > {}^t \bar{\sigma}_0, \\ 0 & \text{если } {}^t \bar{\sigma} \leq {}^t \bar{\sigma}_0. \end{cases} \quad (6.275)$$

В этом соотношении β есть постоянная, соответствующая данному материалу, а ${}^t \bar{\sigma}$ есть текущее значение эффективного напряжения, и

$$\phi(\bar{\sigma}) = \left(\frac{{}^t \bar{\sigma} - {}^t \bar{\sigma}_0}{{}^t \bar{\sigma}_0} \right)^N, \quad (6.276)$$

где ${}^t \bar{\sigma}_0$ — это «материальное» эффективное напряжение, то есть эффективное напряжение, соответствующее накопленной эффективной вязкопластической деформации ${}^t \bar{e}^{VP}$ (см. рис. 6.31), а N — еще одна постоянная, связанная со свойствами материала. Соотношения, нужные для расчета отклоняющих напряжений, эффективного напряжения и эффективной неупругой деформации были даны ранее (см. (6.216), (6.227) и (6.224)). Отметим, что выражение для вязкопластических деформаций имеет ту же форму, что и выражения для деформаций ползучести (см. (6.258)), а также для пластических деформаций (см. (6.225)), потому что физические явления, лежащие в основе всех этих

компонентов деформации, подобны друг другу (хотя и соответствуют различным масштабам времени). Как следствие этого, вязкопластические деформации соответствуют также реакции для несжимаемого материала (как это имеет место для компонентов пластических деформаций и деформаций ползучести согласно (6.225) и (6.258)).

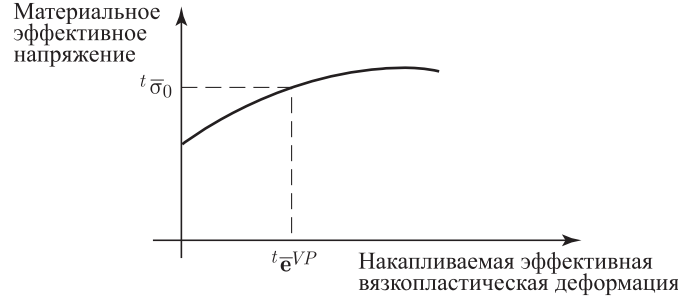


Рис. 6.31. Схематическое представление зависимости материального эффективного напряжения от накапливаемой эффективной вязкопластической деформации

Данная модель требует задания упругих постоянных E (модуль Юнга) и ν (коэффициент Пуассона), постоянных, характеризующих материал, β и N , а также кривой на рис. 6.31. Отметим, что величина β (с единицей измерения $1/\text{время}$) и постоянная N определяют собой скоростное поведение исследуемого материала. Это означает, что вязкопластические деформации накапливаются до тех пор, пока эффективное напряжение остается больше «материального» эффективного напряжения, причем скорость такого накопления определяется постоянными β и N .

Теперь рассмотрим, как проводить расчет напряжений в момент времени $t + \Delta t$. Мы будем действовать так же, как и в случае пластичности и ползучести. Если предположить, что полные деформации, соответствующие моменту $t + \Delta t$, а также все переменные, характеризующие напряжения и деформации и соответствующие моменту t , известны, то мы будем иметь (как и в случае пластичности и ползучести)

$${}^{t+\Delta t}\sigma_m = \frac{E}{1-2\nu} {}^{t+\Delta t}e_m, \quad (6.277)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{S} = \frac{E}{1+\nu} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{e}'' - \Delta\mathbf{e}^{VP}), \quad (6.278)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}'' = {}^{t+\Delta t}\mathbf{e}' - {}^t\mathbf{e}^{VP}, \quad (6.279)$$

где фигурируют те же переменные, что и в соотношениях (6.214)–(6.221), но где вместо пластических деформаций мы рассматриваем вязкопластические деформации.

Приращение вязкопластической деформации задается выражением (сравните с выражением (6.258))

$$\Delta\mathbf{e}^{VP} = \Delta t {}^\tau\gamma {}^\tau\mathbf{S}, \quad (6.280)$$

где при использовании α -метода интегрирования имеем

$${}^\tau\mathbf{S} = (1-\alpha) {}^t\mathbf{S} + \alpha {}^{t+\Delta t}\mathbf{S}, \quad (6.281)$$

а скалярная величина ${}^\tau\gamma$ задается в виде

$${}^\tau\gamma = \begin{cases} \beta {}^\tau\phi \frac{3}{2 {}^\tau\bar{\sigma}} & \text{если } {}^\tau\bar{\sigma} > {}^\tau\bar{\sigma}_0, \\ 0 & \text{если } {}^\tau\bar{\sigma} \leq {}^\tau\bar{\sigma}_0. \end{cases} \quad (6.282)$$

Отметим, что ${}^\tau\gamma$ зависит от ${}^\tau\bar{\sigma}$ и ${}^\tau\bar{\sigma}_0$, причем ${}^\tau\bar{\sigma}_0$ зависит от накопленной эффективной вязкопластической деформации (см. рис. 6.31).

Следовательно, как и при анализе реакции в условиях ползучести, приведенные выше соотношения соответствуют однопараметрической системе уравнений для эффективного напряжения ${}^{t+\Delta t}\bar{\sigma}$, которое получается, как нуль функции эффективного напряжения,

$$f(\bar{\sigma}^*) = a^2(\bar{\sigma}^*)^2 + b {}^\tau\gamma - c^2 {}^\tau\gamma^2 - d^2, \quad (6.283)$$

где

$$\begin{aligned}
 a &= a_E + \alpha \Delta t^\tau \gamma, \\
 b &= 3(1 - \alpha) \Delta t^\tau \gamma, \\
 c &= (1 - \alpha) \Delta t^t \bar{\sigma}, \\
 d^2 &= \frac{3}{2} {}^{t+\Delta t} \mathbf{e}'' \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{e}'', \\
 a_E &= \frac{1 + \nu}{E}.
 \end{aligned} \tag{6.284}$$

Вышеуказанная функция определяется так же, как и в случае термопластичности и ползучести (см. (6.271) и (6.272)), но в пренебрежении всеми зависимостями от температуры, а также параметром пластичности λ (с учетом того, что вязкопластические деформации рассчитываются с помощью процедуры, используемой для деформаций ползучести). Разумеется, зависимость свойств материала от температуры могла бы быть непосредственно учтена при расчете. Действительно, важное соображение, связанное с использованием вязкопластических моделей, состоит в том, что в процедуры расчета могут быть непосредственно и сравнительно легко включены различные функциональные зависимости. Основная причина этой легкости использования состоит в том, что здесь нет никакого условия податливости в явной форме. вместо этого решение строится путем интегрирования неупругих деформаций до тех пор, пока эффективное напряжение не станет равным «материальному» эффективному напряжению (заданному посредством эффективной вязкопластической деформации). Это интегрирование эффективно реализуется с помощью α -метода, так как при $\alpha \geq 1/2$ оно может проводиться со сравнительно большими шагами по времени (см. раздел 9.6).

В процессе проведенных выше обсуждений проблем термоупругопластичности и ползучести, а также вязкопластичности, мы рассматривали только вопрос о вычислении напряжений, соответствующих заданным полным деформациям. Совместимые касательные основополагающие матрицы могли бы быть рассчитаны так, как это описывалось для случая пластичности, однако в общем случае они могут быть получены только в аналитической форме при условии использования удобоприменяемых функциональных соотношений для неупругих деформаций. Если аналитический вывод невозможен, то можно провести численный расчет касательного основополагающего соотношения путем использования конечно-разностной схемы для реализации необходимых операций дифференцирования согласно выражению (6.208) (см., например, [Kojić, Bathe, 1987-B]).

6.6.4. Упругопластичность с большими деформациями

Те модели для неупругих реакций, которые обсуждались в предыдущем разделе, были даны для реакций с малыми или большими смещениями и с малыми деформациями. Когда же моделируются большие деформации, то важно выдвинуть дополнительные соображения.

Распространение теории пластичности с бесконечно малыми деформациями на случай больших деформаций может быть осуществлено с помощью некоторого числа альтернативных формулировок (см., например, [Green, Naghdi, 1965], [Lee, 1969], [Lubliner, 1986], а также [Simo, 1988]). Однако здесь наша цель состоит просто в том, чтобы представить основные соображения и, поэтому, мы вкратце обсуждаем только одну модель, а именно, модель для полных деформаций, основанную на понятиях о напряжениях Коши и о логарифмических деформациях. В силу ряда причин, перечисляемых ниже, этот подход оказывается также и весьма привлекательным.

При любой формулировке основные соображения связаны с выбором адекватных масштабов измерения напряжений и деформаций, с представлением характеристики упругого поведения и надлежащей характеристики пластического течения.

Некая эффективная процедура для анализа больших деформаций должна, несомненно, при переходе к случаю малых деформаций сводиться к моделям, представленным в предыдущем разделе. Однако важное свойство процедур, связанных только с нелинейным поведением материала и с анализом для случая больших смещений и малых

деформаций, состоит в том, что эти модели относятся к типу *полной деформации*, а не к типу анализа со скоростью. Это значит, что уравнения равновесия записываются для момента времени $t + \Delta t$ и именно для этого момента вычисляется полная деформация. Следовательно, численное интегрирование применяется только для расчета неупругой деформации, начиная от момента времени t и кончая моментом $t + \Delta t$. В противоположность этому, при использовании схемы типа анализа со скоростью интегрируются выражения для скоростей изменения напряжений, деформаций, а также эффектов поворота, а это ведет к дополнительным численным ошибкам и для получения достаточно точного решения требует применения процесса с шагами существенно меньшего размера, чем это нужно при схеме с полной деформацией.

Схемы скоростного типа, применяемые при анализе процессов с большими деформациями, часто базируются на предложенном Яуманном (Jaumann) описании, использующем скорости изменения напряжений и деформаций (см. пример 6.24). В дополнение к численным ошибкам интегрирования такого рода описание псевдоупругих напряжений и деформаций приводит также к неконсервативным, а следовательно и к нефизическим прогнозам, касающимся чисто *упругих* циклических движений (см. [Kojić, Bathe, 1987-A]). Масштаб этого нефизического поведения может рассматриваться как малый, однако он не связан с ошибкой численного интегрирования.

Естественный подход, основанный на микромеханических наблюдениях над процессами упругопластичности с большими деформациями, связан с псевдоупругим описанием поведения материала, базирующимся на разложении градиента деформаций в форме произведения сомножителей, представляющих собой упругую и пластичную компоненты (см. [Lee, 1969], [Rice, 1975], а также [Asaro, 1983]). Помимо прочего, такой подход помогает построить полную модель, являющуюся естественным обобщением модели для бесконечно малых деформаций, обсуждавшейся нами в предыдущем разделе.

Одна важная особенность упругопластического анализа с большими деформациями состоит в том, что одноосный закон взаимосвязи между напряжением и деформацией, используемый для определения реакций, задается посредством соотношения между напряжением Коши и логарифмической деформацией (см. рис. 6.32). При этом для определения напряжений Коши используются условие податливости, правило течения и правило отвердевания.

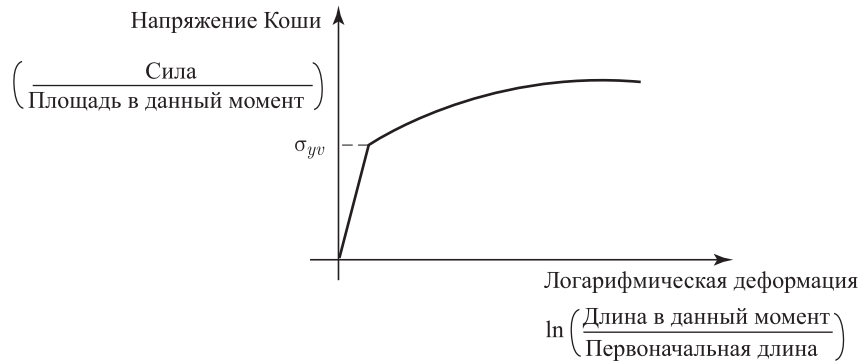


Рис. 6.32. Модель одномерной реакции для большой упругопластической деформации

Если использовать разложение градиента деформаций на произведение неких сомножителей (с целью охарактеризовать упругопластическое изменение формы тела с большими деформациями), то мы будем иметь

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^E \mathbf{X}^P, \quad (6.285)$$

где \mathbf{X}^E и \mathbf{X}^P определяют собой, соответственно, градиенты упругих и пластических деформаций. Предполагается, что соотношение (6.285) остается справедливым в течение всего периода действия реакции, однако для упрощения записи мы не включаем в нее

верхние и нижние индексы слева (до тех пор, пока мы не представим здесь истинную вычислительную процедуру); следовательно, мы имеем, например, $\mathbf{X} \equiv {}^t_0\mathbf{X}$.

Соотношение (6.285) представляет собой ключевое уравнение в рамках нашей упругопластической модели для случая больших деформаций. В момент времени t это соотношение имеет вид ${}_0^t\mathbf{X} = {}^t_0\mathbf{X}^E {}^t_0\mathbf{X}^P$, или же, как это упоминалось после воспроизведения соотношения (6.29) и использовалось нами в примере 6.9, мы можем также написать ${}_0^t\mathbf{X} = {}^t_\tau\mathbf{X}^E {}^t_\tau\mathbf{X}^P$, чтобы обеспечить концептуальное понимание. Следовательно, используемый здесь подход в *концептуальном* плане основывается на некой ослабленной гипотетической конфигурации (соответствующей моменту времени τ), которая для каждой из частиц получается путем снятия нагрузки с материала в его текущей конфигурации вплоть до достижения состояния с нулевыми напряжениями; эта операция осуществляется так, чтобы не имели места никакие неупругие процессы. Градиент пластических деформаций \mathbf{X}^P соответствует деформации первоначальной конфигурации вплоть до ее превращения в указанную гипотетическую конфигурацию. Упругие деформации, а значит, и упругие напряжения, измеряются посредством использования \mathbf{X}^E , который можно представить себе как градиент деформаций, измеряемый для ослабленного варианта конфигурации в момент τ .

Как это делалось и в разделе 6.6.3, давайте охарактеризуем исследуемый материал с помощью условия податливости Мизеса и условия изотропного отвердевания. Следовательно, наша единственная цель при последующем обсуждении будет состоять в распространении предложенной в разделе 6.6.3 формулировки пластичности на случай больших деформаций.

Как и в теории пластичности с малыми деформациями, мы предполагаем, что пластическая деформация соответствует условиям несжимаемости; следовательно,

$$\det \mathbf{X}^P = 1 \quad (6.286)$$

и $J = \det \mathbf{X} = \det \mathbf{X}^E = {}^0\rho/{}^t\rho$. Если мы сделаем временное допущение о том, что величина \mathbf{X}^P известна, то получим

$$\mathbf{X}^E = \mathbf{X}(\mathbf{X}^P)^{-1}. \quad (6.287)$$

Если, кроме того, учесть, что градиент скорости $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{X}}\mathbf{X}^{-1}$ (см. (6.40)), то мы можем написать

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^E + \mathbf{L}^P, \quad (6.288)$$

причем, используя соотношение (6.285), можно выразить упругую и пластическую части в формах, соответственно,

$$\mathbf{L}^E = \dot{\mathbf{X}}^E(\mathbf{X}^E)^{-1}; \quad \mathbf{L}^P = \mathbf{X}^E \dot{\mathbf{X}}^P(\mathbf{X}^P)^{-1}(\mathbf{X}^E)^{-1}. \quad (6.289)$$

Отсюда следует, что переменными, характеризующими упругопластическую реакцию с большими деформациями, являются \mathbf{X} , \mathbf{X}^P , $\boldsymbol{\tau}$ и σ_y , где $\boldsymbol{\tau}$ — это напряжение Коши, а σ_y — это текущее напряжение податливости (включающее эффект отвердевания). Вычисление величины $\boldsymbol{\tau}$ должно основываться на уравнениях эволюции для \mathbf{X}^P и σ_y (где в рамках сравнения с теорией пластичности при малых деформациях \mathbf{X}^P используется вместо \mathbf{e}^P). Учитывая, что напряжения Коши рассчитываются на каждом этапе решения, основополагающее описание эффективно используется в лагранжевой формулировке с предварительным заданием.

Если учесть, что $\det \mathbf{X}^P = 1$, то мы имеем $J = \det \mathbf{X}^E > 0$ и можем рассчитать полярное разложение

$$\mathbf{X}^E = \mathbf{R}^E \mathbf{U}^E. \quad (6.290)$$

При описании одномерной реакции с большими деформациями используется представление о логарифмической деформации (см. рис. 6.32) и, следовательно, вполне естественно воспользоваться понятием об упругой деформации Хенки или о логарифмической деформации,

$$\mathbf{E}^E = \ln \mathbf{U}^E \quad (6.291)$$

при многомерном описании напряжения Коши. Отметим, что вычисление \mathbf{E}^E требует применения спектрального разложения для \mathbf{U}^E (см. (6.32) и (6.52)).

Учитывая, что величина \mathbf{E}^E связана с (концептуальной) промежуточной конфигурацией в момент τ , мы определяем после этого масштаб измерения напряжения $\bar{\boldsymbol{\tau}}$, соответствующий указанной конфигурации,

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = J(\mathbf{R}^E)^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{R}^E. \quad (6.292)$$

При данных масштабах измерения напряжений и деформаций мы получаем связанное представление для упругой работы (см. [Atluri, 1984] и упражнение 6.86),

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \dot{\mathbf{E}}^E = J \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}^E, \quad (6.293)$$

где $\mathbf{D}^E = \text{sym}(\mathbf{L}^E)$. Тогда выражение для градиента скорости, используемого в условиях пластичности, имеет вид ¹⁾

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{L}}^P &= (\mathbf{X}^E)^{-1} \cdot \mathbf{L}^P \mathbf{X}^E = \\ &= \dot{\mathbf{X}}^P (\mathbf{X}^P)^{-1}. \end{aligned} \quad (6.294)$$

Напряжение $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ задается с помощью соотношения напряжение–деформация, обычного в теории изотропной упругости. Пусть $\bar{\mathbf{S}}$ — это компоненты отклоняющих напряжений, а $\bar{\sigma}_m$ — это среднее напряжение; тогда

$$\bar{\mathbf{S}} = 2\mu \mathbf{E}^{E'}; \quad \bar{\sigma}_m = 3\kappa E_m^E, \quad (6.295)$$

где компоненты упругих отклоняющих деформаций заданы посредством $\mathbf{E}^{E'}$, а E_m^E — это компонент средней упругой деформации. Этот выбор (псевдоупругого) закона связи напряжение–деформация использует *полную* упругую деформацию и обладает тем преимуществом, что обеспечивает отличное описание напряжения даже тогда, когда упругие деформации имеют умеренную величину (см. [Anand, 1979]).

Условие податливости имеет такой же вид, как соотношение (6.222), однако включает в себя отклоняющие напряжения Коши \mathbf{S} и мы, следовательно, имеем ²⁾

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}} \\ &= J^{-1} \sqrt{\frac{3}{2} \bar{\mathbf{S}} \cdot \bar{\mathbf{S}}}, \end{aligned} \quad (6.296)$$

где $\bar{\mathbf{S}}$ — это отклоняющее напряжение, соответствующее ослабленной конфигурации, $\bar{\mathbf{S}} = J(\mathbf{R}^E)^T \mathbf{S} \mathbf{R}^E$. Заметим также, что единичная нормаль к поверхности податливости для ослабленной гипотетической конфигурации выражается в виде

$$\bar{\mathbf{n}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\bar{\mathbf{S}}}{J\bar{\sigma}}. \quad (6.297)$$

Чтобы получить уравнение эволюции градиента пластических деформаций, мы используем соотношение (6.293), а также выражение для тензора скорости пластических деформаций,

$$\bar{\mathbf{D}}^P = \text{sym}(\bar{\mathbf{L}}^P). \quad (6.298)$$

Тензор деформаций определяется с помощью правила течения и, по аналогии с (6.225), мы получаем ³⁾

$$\bar{\mathbf{D}}^P = \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{\epsilon}^P \bar{\mathbf{n}}, \quad (6.299)$$

¹⁾ Мы можем доказать, что при определениях $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ согласно (6.292) и $\bar{\mathbf{L}}^P$ согласно (6.294) мы имеем

$$J \boldsymbol{\tau} \mathbf{D} = \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \dot{\mathbf{E}}^E + \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \bar{\mathbf{D}}^P,$$

где \mathbf{D} — это (полная) скорость деформации (см. (6.41)), а $\bar{\mathbf{D}}^P$ задается формулой (6.298) (см. упражнение 6.87).

²⁾ Отметим, что символ эффективного напряжения имеет черту сверху и определяется согласно (6.227).

³⁾ Это правило течения может быть выведено, исходя из принципа максимума пластической диссипации (см. [Lubliner, 1986], а также [Eterovic, Bathe, 1990-B]).

где

$$\dot{\bar{\mathbf{e}}}^P = \sqrt{\frac{2}{3} \bar{\mathbf{D}}^P \cdot \bar{\mathbf{D}}^P}. \quad (6.300)$$

Подставляя в соотношение (6.299) выражение для $\bar{\mathbf{n}}$ согласно формуле (6.297), получим соотношение, соответствующее в случае малых деформаций выражению (6.225). Разумеется, из одноосного соотношения связи напряжение–деформация на рис. 6.32 получается соотношение $\dot{\bar{\sigma}} = f(\dot{\bar{\mathbf{e}}}^P)$. В соответствии с другими используемыми здесь предположениями модифицированный тензор пластического спина $\bar{\mathbf{W}}^P = \text{skw}(\bar{\mathbf{L}}^P)$ предполагается равным нулю.

Таблица 6.10. Модель для модернизированной большой упругопластической деформации

Пробное упругое состояние:

Получить пробный градиент упругой деформации

$$\mathbf{X}_*^E = {}^{t+\Delta t}\mathbf{X}_0({}_0\mathbf{X}^P)^{-1}.$$

Выполнить полярное разложение

$$\mathbf{X}_*^E = \mathbf{R}_*^E \mathbf{U}_*^E.$$

Получить пробный тензор упругой деформации

$$\mathbf{E}_*^E = \ln \mathbf{U}_*^E.$$

Получить пробный тензор упругой деформации $\bar{\boldsymbol{\tau}}_*$, используя уравнение для среднего напряжения и напряжения отклонения

$$\begin{aligned} \text{tr}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_*) &= 3\kappa \text{tr}(\mathbf{E}_*^E), \\ \bar{\mathbf{S}}_* &= 2\mu \mathbf{E}_*^{E'}. \end{aligned}$$

Получить пробное эквивалентное напряжение на разрыв

$$\bar{\sigma}_* = J^{-1} \sqrt{\frac{3}{2} \bar{\mathbf{S}}_* \cdot \bar{\mathbf{S}}_*}.$$

Проверить, соответствует ли этап решения условиям упругости:

Если $\bar{\sigma}_* < {}^t\sigma_y$, то этап решения был упругим и мы завершаем решение, полагая

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\bar{\sigma} &= \bar{\sigma}_*; \quad {}^{t+\Delta t}\sigma_y = {}^t\sigma_y; \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{E}^E = \mathbf{E}_*^E; \\ {}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{\tau}} &= \bar{\boldsymbol{\tau}}_*; \quad {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\tau} = ({}^{t+\Delta t}J)^{-1} \mathbf{R}_*^E \bar{\boldsymbol{\tau}}_* (\mathbf{R}_*^E)^T. \end{aligned}$$

Если это не так, продолжаем следующим образом.

Этап пластического решения:

Использовать алгоритм с эффективной функцией напряжения, чтобы рассчитать ${}^{t+\Delta t}\bar{\sigma}$ и ${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{e}}^P$ (см. 6.233).

Рассчитать девиатор напряжения для ${}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{\tau}}$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{3}{2} \frac{{}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{e}}^P - {}^t\bar{\mathbf{e}}^P}{{}^{t+\Delta t}J {}^{t+\Delta t}\bar{\sigma}}, \\ {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{S}} &= \frac{\bar{\mathbf{S}}_*}{1 + 2\mu\lambda}. \end{aligned}$$

Рассчитать ${}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{\tau}}$

$${}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{\tau}} = {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{S}} + \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_*) \mathbf{I}.$$

Рассчитать напряжения Коши

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\tau} = ({}^{t+\Delta t}J)^{-1} \mathbf{R}_*^E {}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{\tau}} (\mathbf{R}_*^E)^T.$$

Модернизировать градиент пластической деформации посредством интегрирования выражения (6.294)

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{X}^P = \exp \left\{ \lambda^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{S}} \right\} {}^t_0 \mathbf{X}^P.$$

Мы отмечаем, следовательно, что основные уравнения, использовавшиеся для решения задач с бесконечно малыми деформациями, были обобщены на случай больших деформаций посредством показанной на рис. 6.32 связи между напряжением Коши и логарифмической деформацией, закона зависимости между упругими напряжениями и деформациями для напряжения Коши и логарифмической (по Хенки) деформацией, а также градиента пластических деформаций при неупругой реакции и, концептуально, той деформации, на основании которой изменяется упругая реакция. Если учесть, что модель для больших деформаций представляет собой прямое обобщение модели, используемой для малых деформаций (см. также упражнение 6.84), то те вычислительные процедуры, которые обсуждались нами ранее, оказываются непосредственно применимыми и сейчас, и в таблице 6.10 дается итоговая сводка последовательности этапов решения (см. также [Eterovic, Bathe, 1990-A]).

В процессе приведенного выше обсуждения мы предполагали наличие трехмерной реакции общего вида, однако те же уравнения могут быть также непосредственно использованы и при разных вариантах двумерного анализа, то есть для ситуаций с плоскими напряжениями и с плоскими деформациями, а также для осесимметричных задач; это делается путем наложения тех фундаментальных условий, которые соответствуют рассматриваемому частному виду двумерной реакции (см. рис. 4.17).

Эти уравнения могут быть применены также и при анализе поведения балок и оболочек, однако представленные в разделе 6.5 кинематические соотношения должны тогда включать в себя эффекты изменения толщины элементов.

Модель для больших деформаций была представлена выше применительно к случаю упругопластической реакции, однако мы замечаем, что тот же самый подход может быть применен и к анализу вязкопластической реакции и реакции с ползучестью — вследствие аналогий, упомянутых в разделе 6.6.3, — если только сделать надлежащие замены переменных и использовать экспериментально полученные формулы (см. упражнение 6.90).

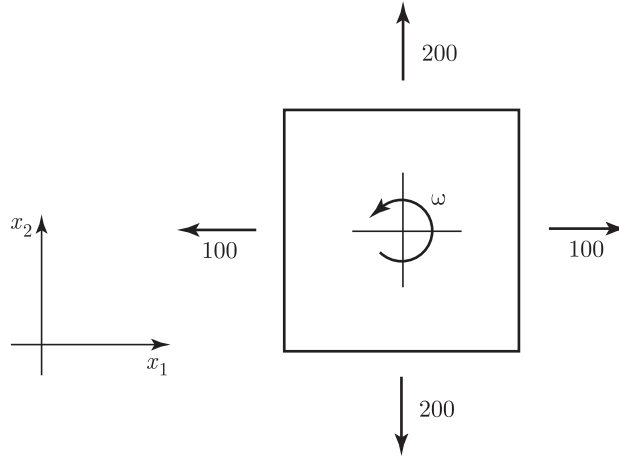
Наконец, мы должны отметить, что вследствие ограничительного условия о несжимаемости в форме (6.286), касающегося неупругих деформаций, оказывается важным при анализе двумерных ситуаций с плоскими деформациями, а также осесимметричных или полностью трехмерных ситуаций, характеризующих реакцию, воспользоваться рассмотренными нами в разделе 6.4 моделями типа смещение/давление. Это наблюдение справедливо в теории упругопластичности для условий малых деформаций и, в особенности, в случае больших деформаций. Даже и при исследовании случая малых деформаций пластические деформации оказываются обычно значительно больше, чем упругие, и это же, конечно, имеет место и в условиях больших деформаций.

6.6.5. Упражнения

- 6.61. Рассмотрите показанный на рис. 6.21 элемент в форме кирпича, имеющий восемь узлов. Постройте график зависимости силы реакции от смещения, предполагая, что в направлениях y и z выполняются условия плоских напряжений.
- 6.62. Рассмотрите показанный на рис. 6.21 элемент в форме кирпича, имеющий восемь узлов. Покажите в явной форме, что если использовать (6.188) для преобразования $\bar{E}(\equiv {}^tC_{ijrs})$ в полной лагранжевой формулировке (i), представленной на рисунке, то реакция силы в зависимости от смещения будет такой, как при расчете по схеме (ii) на той же рисунке. Покажите также, что если использовать (6.187) для преобразования $E(\equiv {}^t_0C_{ijrs})$ в лагранжевой формулировке с предварительным заданием (ii),

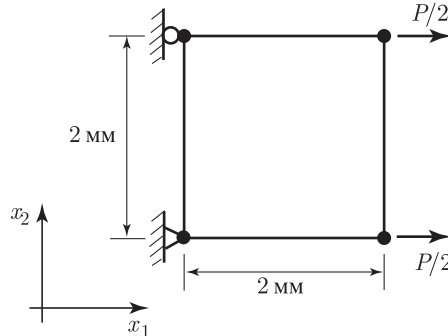
представленной на рисунке, то силовая реакция в зависимости от смещения будет такой, как при расчете по схеме (i), представленной на том же рисунке.

- 6.63. Элемент с четырьмя узлами подвергается вращению относительно своего центра с постоянной угловой скоростью ω так, как это показано здесь. Используйте тот факт, что скорость изменения напряжений по Яуманну равна нулю, для расчета напряжений Коши (соответствующих осям x_1, x_2) в любой момент времени t .



$${}^t\nabla\tau_{ij} = 0 = {}^t\dot{\tau}_{ij} + {}^t\tau_{ip}{}^tW_{pj} + {}^t\tau_{jp}{}^tW_{pi}$$

- 6.64. Рассмотрите описание материала по Муни–Ривлину согласно соотношению (6.199). Покажите, что применение этой формулы дает давление, значение которого зависит от t_0I_1 и t_0I_2 . После этого покажите, что в описании согласно (6.203) на величину давления влияет только последний член с модулем объемной деформации.
- 6.65. Рассмотрите описание материала по Огдену согласно формуле (6.205) с тремя членами. Покажите, что применение этой формулы дает давление, являющееся функцией растяжений, тогда как члены выражения (6.207), находящиеся под знаком суммирования, не влияют на величину давления.
- 6.66. Покажите, что для двучленной модели Муни–Ривлина, соответствующей (6.199), при малых деформациях модуль Юнга задается выражением $6(C_1 + C_2)$, а модуль сдвиговых деформаций — выражением $2(C_1 + C_2)$. Покажите также, что для модели Огдена (6.205) эти модули задаются выражениями $(3/2) \sum_{n=1}^3 \alpha_n \mu_n$ и $(1/2) \sum_{n=1}^3 \alpha_n \mu_n$ соответственно.
- 6.67. Рассмотрите показанный здесь элемент, имеющий четыре узла и находящийся в условиях плоских деформаций. Рассчитайте реакцию в форме сила–смещение. Предположите, что модуль объемных деформаций κ очень велик.



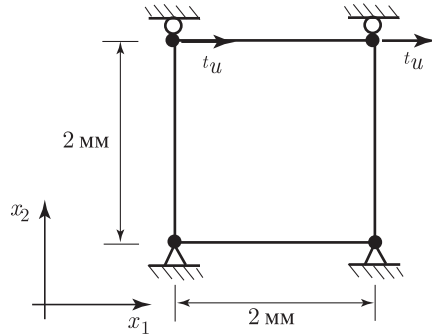
Условие плоской деформации
Случай 1: материал Муни–Ривлина

$$C_1 = 0,3 \text{ МПа}, \\ C_2 = 0,2 \text{ МПа}.$$

Случай 2: материал Огдена

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 1 \text{ МПа}, & \alpha_1 &= 2, \\ \mu_2 &= -0,51 \text{ МПа}, & \alpha_2 &= -1, \\ \mu_3 &= 0,1 \text{ МПа}, & \alpha_3 &= 4. \end{aligned}$$

- 6.68. Рассмотрите деформацию показанного здесь элемента с четырьмя узлами. Рассчитайте реакцию в форме сила–смещение. Предположите, что модуль объемных деформаций κ очень велик.

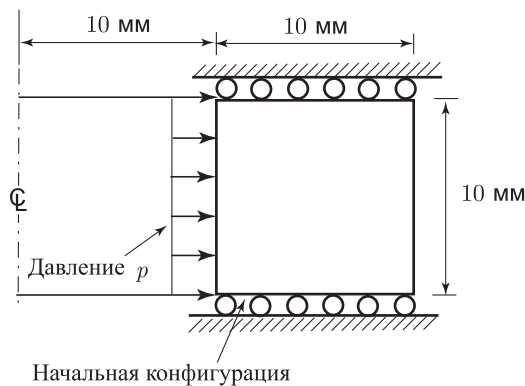


Условие плоской деформации
материал Муни–Ривлина

$$C_1 = 0,3 \text{ МПа},$$

$$C_2 = 0,2 \text{ МПа}.$$

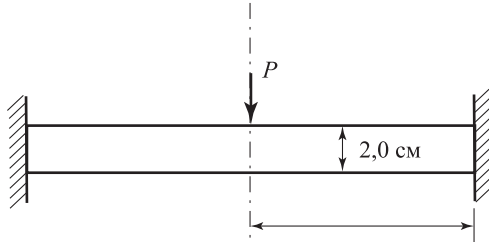
- 6.69. Предположите, что вместо формулы (6.199) используется приводимая ниже модель материала по Муни–Ривлину, имеющая высокий порядок:
- $${}^t_0\widetilde{W} = C_1({}^t_0I_1 - 3) + C_2({}^t_0I_2 - 3) + C_3({}^t_0I_1 - 3)^2 + C_4({}^t_0I_1 - 3)({}^t_0I_2 - 3) + C_5({}^t_0I_2 - 3)^2,$$
- при $C_1 = 75$; $C_2 = 25$; $C_3 = 10$; $C_4 = 10$; $C_5 = 10$. Постройте график зависимости сила–смещение для одномерной задачи о стержне на рис. 6.23.
- 6.70. При решении задач об определении реакции для несжимаемого материала в условиях *плоских напряжений* мы можем воспользоваться методом, основанном только на анализе смещений в рамках конечно-элементного анализа. При этом мы можем так приспособить толщину элемента, чтобы всегда действовала ограничительная связь относительно несжимаемости. Воспользуйтесь этим подходом и выведите для закона Муни–Ривлина согласно (6.199) соотношение связи напряжение–деформация ${}^t_0S_{ij} = {}^t_0C_{ijrs} {}^t_0\epsilon_{rs}$, а также касательный основополагающий тензор ${}^t_0C_{ijrs}$.
- 6.71. Воспользуйтесь компьютерной программой, чтобы исследовать поведение показанного здесь толстого цилиндра. Основополагающее поведение задается с помощью закона Муни–Ривлина (6.203) при $C_1 = 0,6 \text{ МПа}$, $C_2 = 0,3 \text{ МПа}$ и $\kappa = 2000 \text{ МПа}$. Внутреннее давление равномерно возрастает вплоть до достижения максимального смещения, равного 10 мм.



Воспользуйтесь достаточно мелкой сеткой, чтобы получить точное решение (*подсказка*: элемент типа 9/3 оказывается значительно более эффективным, чем элемент типа 4/1).

- 6.72. Воспользуйтесь компьютерной программой, чтобы получить решение для реакции толстой, упругой круглой пластины, обусловленной приложением в ее центре концентрированной нагрузки. Увеличивайте нагрузку P до тех пор, пока отклонение

под этой нагрузкой не станет равным 2 см. (подсказка: здесь эффективна схема типа u/p с осесимметричными элементами).



Радиус пластины $R = 10$ см

Закон для материала Огдена

$$\mu_1 = 0,7 \text{ МПа},$$

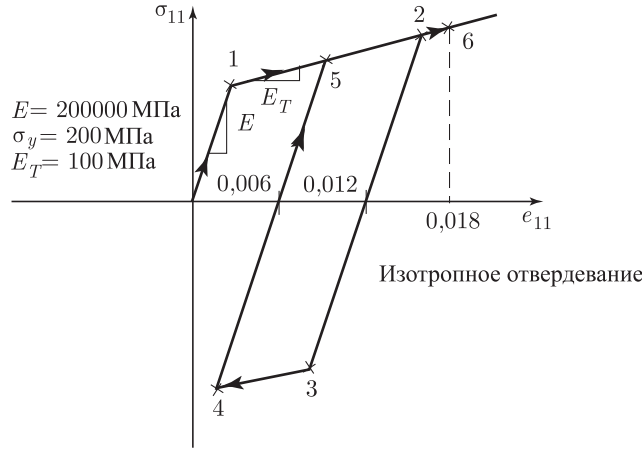
$$\mu_2 = -0,3 \text{ МПа},$$

$$\mu_3 = 0,01 \text{ МПа},$$

$$\alpha_1 = 1,8; \quad \alpha_2 = -1,6; \quad \alpha_3 = 7,5;$$

$$\kappa = 1000 \text{ МПа}.$$

- 6.73. Покажите, что при одноосном условии для напряжения эффективное напряжение ${}^t\bar{\sigma}$ и эффективная пластическая деформация ${}^t\bar{e}^P$ приводятся к одноосному (отличному от нуля) напряжению и к соответствующей пластической деформации. После этого предположите, что при одноосном эксперименте для напряжений это напряжение изменяется так, как это показано здесь посредством точек от 1 до 6. Постройте график зависимости напряжения от эффективной пластической деформации для показанной последовательности изменения напряжения.



- 6.74. Докажите, что для билинейного упругопластического материала, описываемого посредством условия податливости Мизеса и правила течения, метод эффективной функции напряжения дает решение в форме (6.236). Сформулируйте, как следует рассчитать напряженное состояние в момент времени $t + \Delta t$, если в момент t известно полное состояние конфигурации и если были вычислены деформации для момента $t + \Delta t$.
- 6.75. Покажите, что эффективная функция напряжений, соответствующая формуле (6.233), может быть записана также в терминах эквивалентной пластической деформации как

$$\tilde{f}(e_*^P) = 3\mu(e_*^P - {}^t e^P) + {}_y(e_*^P) - \bar{\sigma}_*,$$

где решение $\tilde{f}(e_*^P) = 0$ соответствует равенству $e_*^P = {}^{t+\Delta t}e^P$. Здесь символ $\sigma_y(\cdot)$ обозначает функцию напряжения податливости, а $\bar{\sigma}_*$ символизирует эффективное напряжение, соответствующее прогнозу для упругого напряжения (см. (6.239)).

- 6.76. Рассмотрите изотермический вариант пластичности Мизеса с кинематическим отвердеванием, в трехмерных условиях для напряжений. В этом случае условие податливости имеет вид

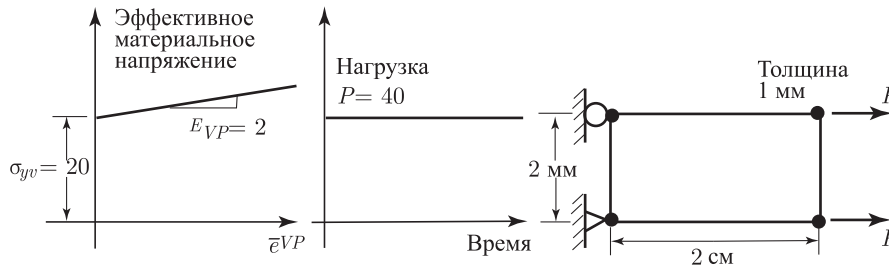
$${}^{t+\Delta t}f_y^v = \frac{1}{2} {}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{S}} \cdot {}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{S}} - \frac{1}{3} (\sigma_{yv})^2 = 0,$$

где ${}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{S}}$ — это отклоняющее сдвиговое напряжение, обусловленное фоновым напряжением ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\alpha}$,

$${}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{S}} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{S} - {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\alpha},$$

тогда как σ_{yv} — это постоянное (девственное) напряжение податливости. Предположите соблюдение условия малости деформаций и выведите для этого случая алгоритм с применением эффективной функции напряжения.

- 6.77. Предположите, что рассматривается соответствующая рис. 6.25 билинейная упругопластическая модель материала, согласно Мизесу, с изотропным отвердеванием. Выведите матрицу связи касательных напряжений и деформаций, применяя алгоритм с эффективной функцией напряжения, как это указано в соотношениях (6.245)–(6.252).
- 6.78. Рассмотрите закон ползучести в форме (6.263) при $a_0 = 6,4 \times 10^{-18}$, $a_1 = 4,4$, $a_2 = 2,0$ и $a_3 = 0,0$. Напряженные состояния соответствуют данным: $\sigma = 100$ МПа при $0 \leq t < 4$ часа и $\sigma = 200$ МПа при $t \geq 4$ часа. Для интервала $0 \leq t \leq 10$ часов постройте график изменения деформации, соответствующей реакции ползучести, пользуясь методом отвердевания во времени и методом отвердевания в соответствии с деформацией.
- 6.79. Выведите соотношение (6.268).
- 6.80. Выведите выражение для эффективной функции напряжения, заданной посредством (6.273) и покажите, что в окрестности решения эта функция имеет кривизну, показанную на рис. 6.30.
- 6.81. Одномерная вязкопластическая реакция определяется выражением $\dot{\epsilon}^{VP} = \hat{\gamma}[\sigma - (\sigma_{yv} + E_{VP}\epsilon^{VP})]$. Упругая реакция в форме деформации задается, как и обычно, формулой $e^E = \sigma/E$.
Рассчитайте аналитически полную реакцию в форме деформации, если приложенное напряжение $\sigma_{\text{приложен}} > \sigma_{yv}$. Рассмотрите случаи $E_{VP} > 0$ и $E_{VP} = 0$; $\hat{\gamma} = \text{const}$.
- 6.82. Основополагающее поведение элемента с четырьмя узлами, действующего с плоскими напряжениями, задается моделью вязкопластического материала в соответствии с (6.275), при постоянных $\beta = 10^{-4}$ (1/сек), $N = 1$. Кроме того, $E = 20\,000$ МПа, $\nu = 0,3$, а соответствующая этому материалу кривая зависимости эффективного напряжения от вязкопластической деформации представлена на рисунке.
Предположите одномерную ситуацию для напряжений, а также что в момент времени 0 напряжение равно нулю и что постоянная нагрузка приложена так, как это показано. Рассчитайте реакцию в форме вязкопластической деформации и смещения для данного элемента.

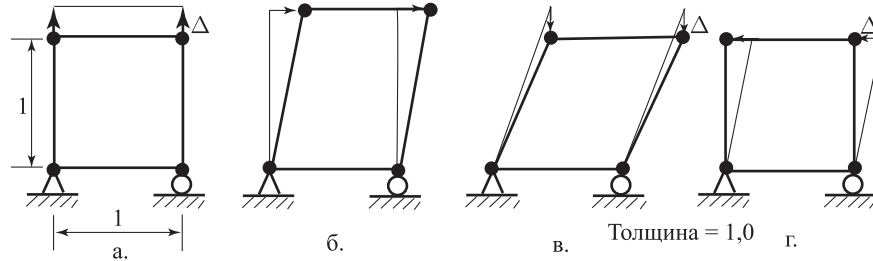


- 6.83. Рассмотрите данную в разделе 6.6.4 общую упругопластическую модель с большими деформациями. Исходя из этих уравнений общего вида выведите все уравнения для описания одномерной реакции стержня, показанного на рис. 6.25.
- 6.84. Для каждого из уравнений, представленных в табл. 6.10, покажите в явной форме, что модель, данная для случая больших упругопластических деформаций, приводится к модели, соответствующей только нелинейному поведению материала, если смещения и деформации малы.
- 6.85. Рассмотрите показанный на рис. 6.21 элемент в форме кирпича с восемью узлами. Предположите наличие упругих условий при $E = 10^7$ Н/см² и $\nu = 0,30$ и постройте

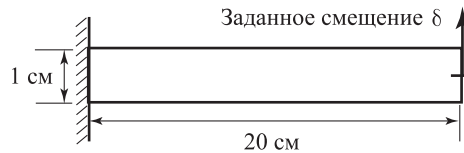
график реакции в форме зависимости сила–смещение, используя лагранжеву формулировку с предварительным заданием по Хенки, представленную в разделе 6.6.4. Кроме того, постройте график этой реакции для условий плоских напряжений в направлениях y и z .

- 6.86. Рассмотрите упругий материал и покажите, что соотношение (6.293) справедливо, если значения напряжений и деформаций определяются так, как в разделе 6.6.4 (обратитесь к общим уравнениям механики сплошной среды, представленным в разделе 6.2.2).
- 6.87. Покажите, что при использовании определений, данных в разделе 6.6.4, мы имеем $J\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D} = \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \dot{\mathbf{E}}^E + \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \bar{\mathbf{D}}^P$, где $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)$ (см. (6.41)).
- 6.88. Используйте представления теории упругопластичности с большими деформациями в компьютерной программе, предназначенной для расчета реакции в форме напряжения для элемента с четырьмя узлами, действующего в условиях плоских напряжений. Эта реакция соответствует следующей последовательности деформаций: а. — элемент вытягивается, б. — элемент подвергается сдвигу с поворотом, в. — сдвинутый элемент подталкивается вниз, г. — элемент возвращается в свою первоначальную конфигурацию. Дайте пояснение, имеют ли ваши результаты физический смысл.

Предположите, что $\Delta = 1/100$, $E = 200\,000$, $\nu = 0,3$, $\sigma_{yv} = 4000$.



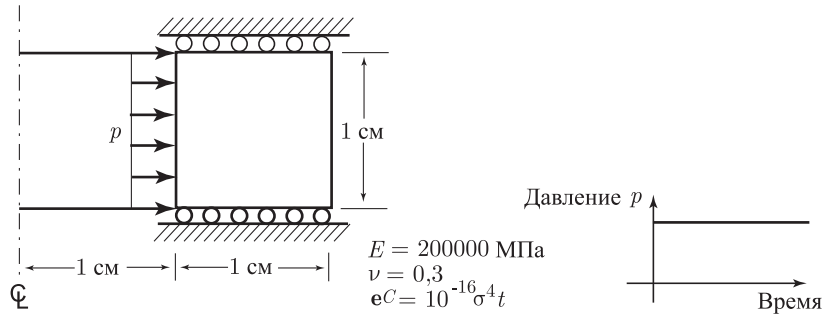
- 6.89. Воспользуйтесь компьютерной программой для расчета упругопластической реакции с большими деформациями применительно к показанной здесь консоли с плоскими деформациями.



Положите $E = 200\,000$ МПа, $\nu = 0,3$, $E^T = 200$ МПа, $\sigma_y = 200$ МПа, и увеличьте δ до значения $L/2$. Постройте график зависимости сила–смещение, а также найдите напряжения при $\delta = L/1000$, $\delta = L/10$, $\delta = L/2$. Усовершенствуйте конечно-элементную модель с целью получения относительно точного прогноза для напряжений (подсказка: элемент типа 9/3 обнаруживает хорошие качества при анализе в случае больших деформаций).

- 6.90. Предположите, что реакция материала в условиях ползучести с большими деформациями может быть описана с помощью теории, изложенной в разделе 6.6.4, при \mathbf{X}^P , замененном на градиент неупругих деформаций \mathbf{X}^{IN} , заданный посредством деформаций ползучести. Модифицируйте содержание строк в таблице 6.10 так, чтобы они соответствовали решению в условиях ползучести.

После этого используйте компьютерную программу для расчета реакции показанного здесь толстого цилиндра при больших деформациях типа ползучести. Получите точный прогноз для напряжений при различных значениях внутреннего давления p .



6.7. Условия контакта

Особенно трудное для анализа нелинейное поведение соответствует контакту между двумя или несколькими телами. Контактные задачи охватывают диапазон от контакта без трения и с малыми смещениями до контакта с трением в неупругих условиях общего вида, с большими деформациями. Хотя во всех этих случаях модель контакта остается одной и той же, однако решение нелинейных задач может в некоторых случаях оказаться гораздо более затруднительным, чем в других случаях. Нелинейность самого анализа поставленной задачи определяется теперь не только рассматривавшимися до сих пор геометрическими и материальными нелинейностями, но еще и условиями контакта.

В этом разделе мы ставим своей целью коротко сформулировать условия контакта в контексте конечно-элементного анализа, а также предложить общий подход к решению соответствующих задач.

6.7.1. Уравнения механики сплошной среды

Рассмотрим N тел, находящихся в контакте между собой в момент времени t . Пусть tS_c определяют собой полную площадь контакта для каждого из тел L , $L = 1, \dots, N$; тогда принцип виртуальной работы для системы из N тел в момент времени t дает

$$\sum_{L=1}^N \left\{ \int_{{}^tV} {}^t\tau_{ij} \delta e_{ij} d^tV \right\} = \sum_{L=1}^N \left\{ \int_{{}^tV} \delta u_i {}^t f_i^B d^tV + \int_{{}^tS_f} \delta u_i {}^t f_i^S d^tS \right\} + \sum_{L=1}^N \int_{{}^tS_c} \delta u_i {}^t f_i^c d^tS, \quad (6.301)$$

где часть, заключенная в скобки, соответствует обычно вводимым членам (см. раздел 6.2.3), а последний член со знаком суммирования соответствует вкладу контактных сил. Мы замечаем, что эффект контактных сил проявляется в форме вклада от совокупности тяговых сил, приложенных извне. Компоненты этих контактных тяговых сил обозначаются символом ${}^t f_i^c$ и действуют на площадях tS_c , а компоненты известных, приложенных извне тяговых сил обозначаются как ${}^t f_i^S$ и действуют на площадях tS_f . Мы могли бы предположить, что площади tS_f не являются частью площадей tS_c , хотя такое предположение и не является необходимым.

Рисунок 6.33 дает схематическую иллюстрацию для того случая двух тел, который мы рассмотрим теперь более подробно. Приводимые ниже понятия могут быть непосредственно распространены на случай контакта многих тел.

На рисунке 6.33 мы обозначаем два тела, как тело I и тело J . Отметим, что каждое из тел поддерживается таким образом, что в отсутствии контакта нет возможности реализации движения конкретного тела как твердого. Пусть ${}^t \mathbf{f}^{IJ}$ — это вектор тяговых сил на контактной поверхности, действующих на тело I вследствие контакта с телом J , и тогда ${}^t \mathbf{f}^{IJ} = -{}^t \mathbf{f}^{JI}$. Следовательно, фигурирующая в уравнении (6.301) виртуальная работа, производимая контактными тяговыми силами, может быть записана в форме

$$\int_{S^{IJ}} \delta u_i {}^t f_i^{IJ} dS^{IJ} + \int_{S^{JI}} \delta u_i {}^t f_i^{JI} dS^{JI} = \int_{S^{IJ}} \delta u_i {}^t f_i^{IJ} dS^{IJ}, \quad (6.302)$$

где λ и t представляют собой нормальную и касательную компоненты (для краткости обозначений мы не используем вторичные индексы). Следовательно,

$$\lambda = ({}^t\mathbf{f}^{IJ})^T \mathbf{n}; \quad t = ({}^t\mathbf{f}^{IJ})^T \mathbf{s}. \quad (6.305)$$

Чтобы определить те фактические значения \mathbf{n} и \mathbf{s} , которые мы используем при наших расчетах для задачи о контакте, рассмотрим характерную точку на поверхности S^{IJ} , и пусть $\mathbf{y}^*(\mathbf{x}, t)$ будет точкой на S^{JI} , удовлетворяющей условию

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}^*(\mathbf{x}, t)\|_2 = \min_{y \in S^{JI}} \{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2\}. \quad (6.306)$$

Тогда вычисляемое со знаком расстояние от \mathbf{x} до S^{JI} задается выражением

$$g(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{x} - \mathbf{y}^*)^T \mathbf{n}^*, \quad (6.307)$$

где \mathbf{n}^* — это тот единичный «нормальный вектор», который мы используем в точке $\mathbf{y}^*(\mathbf{x}, t)$ (см. рис. 6.34), а \mathbf{n}^* и \mathbf{s}^* используются в выражении (6.304), соответствующем точке \mathbf{x} . Функция g — это функция интервала для пары контактных поверхностей.

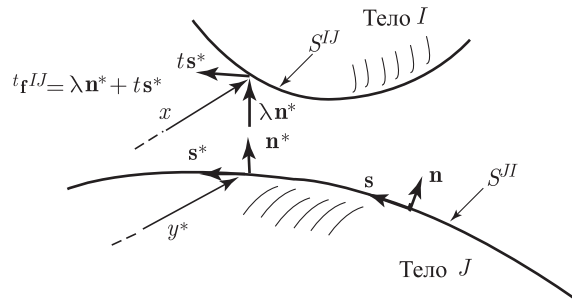


Рис. 6.34. Определения, используемые при анализе контакта

Теперь, имея эти определения, условия для нормального контакта мы можем записать в виде

$$g \geq 0; \quad l \geq 0; \quad g\lambda = 0, \quad (6.308)$$

где последнее уравнение отражает тот факт, что если $g > 0$, то мы должны иметь $\lambda = 0$, и наоборот.

Чтобы включить условия, связанные с трением, предположим, что закон Кулона для трения справедлив в каждой точке поверхности контакта и что μ представляет собой коэффициент трения. Разумеется, это предположение означает, что эффекты трения включаются в анализ в чрезвычайно упрощенной форме (более подробную информацию см., например, в работах [Rabinowicz, 1965], а также [Oden, Martins 1985]).

Дадим определение безразмерной переменной τ , задаваемой в виде

$$\tau = \frac{t}{\mu\lambda}, \quad (6.309)$$

где $\mu\lambda$ представляет собой «сопротивление трения». Величина относительной скорости, соответствующей единичному касательному вектору \mathbf{s} в точке $\mathbf{y}^*(\mathbf{x}, t)$, равна

$$\dot{u}(\mathbf{x}, t) = (\dot{\mathbf{u}}^J|_{\mathbf{y}^*(\mathbf{x}, t)} - \dot{\mathbf{u}}^I|_{(\mathbf{x}, t)}) \cdot \mathbf{s}^*. \quad (6.310)$$

Следовательно, $u(\mathbf{x}, t)\mathbf{s}^*$ — это касательная скорость материальной точки с координатой \mathbf{y}^* в момент времени t относительно материальной точки с координатой \mathbf{x} . При этих определениях закон Кулона для трения гласит

$$\left. \begin{aligned} |\tau| &\leq 1, \\ \text{и} \quad |\tau| < 1 &\text{ подразумевает } \dot{u} = 0, \\ \text{тогда как} \quad |\tau| = 1 &\text{ подразумевает } \text{sign}(\dot{u}) = \text{sign}(\tau) \end{aligned} \right\}. \quad (6.311)$$

Рисунок 6.35 предлагает иллюстрацию этих условий на промежуточной поверхности.

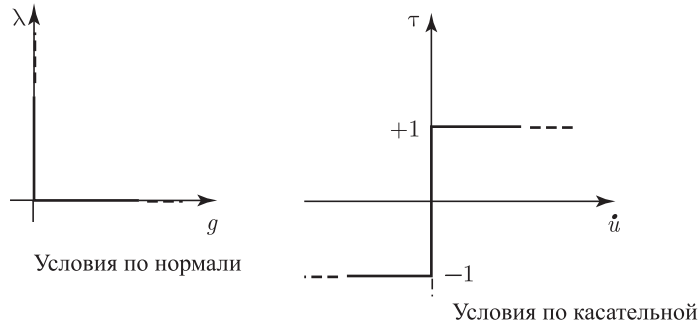


Рис. 6.35. Условия на промежуточной поверхности при анализе контакта

Как вытекает из вышесказанного, решение задачи о контакте, изображенной на рис. 6.33, влечет за собой решение уравнения виртуальной работы (6.301) (сформулированной для тел I и J) при условиях (6.308) и (6.311).

Приведенные выше уравнения связаны, по существу, с рассмотрением статических (или псевдостатических) условий контакта. При динамическом анализе распределенные массовые силы включают в себя и силы инерции, а кинематические условия на промежуточной поверхности должны выполняться в любой момент времени, причем у контактирующих тел должна быть обеспечена совместимость смещений, скоростей и ускорений. Схема интегрирования по времени, например, описываемое в разделе 9.5.2 правило трапеций, в общем случае не гарантирует автоматического соблюдения того условия, чтобы производные смещений по времени оказывались совместимыми в области контакта. Требование, касающееся такой совместимости, должно быть специально наложено на строящееся поэтапно решение (см., например, [Hughes et al., 1976]).

Для решения задач о контакте были предложены различные алгоритмические процедуры, основанные на конечно-элементном анализе. Большинство этих процедур связано с использованием методов штрафных функций и множителей Лагранжа (см. раздел 3.4), позволяющих принудительно наложить контактные ограничительные связи (см., например, работы [Hughes et al., 1976], [Oden, Pires, 1983], [Simo, Wriggers and Taylor, 1985], [Bathe, Chaudhary 1985], а также содержащиеся в этих работах ссылки).

Желая дать пример решения задач о контакте, в следующем разделе мы рассмотрим, как при одном из подходов к решению налагаются ограничительные связи, обусловленные контактом (см. также [Eterovic, Bathe, 1991]).

6.7.2. Подход к решению задач о контакте: метод функции принудительной связи

Пусть w представляет собой такую функцию аргументов g и λ , что решения уравнения $w(g, \lambda) = 0$ удовлетворяют условиям (6.308) и, аналогично этому, пусть v представляет собой такую функцию аргументов τ и \dot{u} , что уравнения $v(\dot{u}, \tau) = 0$ удовлетворяют условиям (6.311). Тогда условия контакта задаются уравнениями

$$w(g, \lambda) = 0 \quad (6.312)$$

и

$$v(\dot{u}, \tau) = 0. \quad (6.313)$$

Теперь эти условия могут быть наложены на решение уравнения принципа виртуальной работы, строящееся либо методом штрафных функций, либо методом множителей Лагранжа (см. раздел 3.4). Переменные λ и τ могут рассматриваться как множители Лагранжа, так что мы полагаем, что $\delta\lambda$ и $\delta\tau$ представляют собой вариации этих величин (см. раздел 4.4.2).

Если умножить (6.312) на $\delta\lambda$, а (6.313) — на $\delta\tau$, и проинтегрировать затем по площади S^{IJ} , то мы получим уравнение принудительной связи

$$\int_{S^{IJ}} [\delta\lambda w(g, \lambda) + \delta\tau v(\dot{u}, \tau)] dS^{IJ} = 0. \quad (6.314)$$

Короче говоря, те определяющие уравнения, которые соответствуют представленной на рис. 6.33 задаче о контакте двух тел, сводятся к обычному уравнению принципа виртуальной работы при эффекте контакта, включенном через посредство приложенных извне (но неизвестных) сил, рассматриваемому совместно с уравнением принудительной связи (6.314). Разумеется, уравнение принципа виртуальной работы (6.301) формулируется только для задачи о контакте тел I и J , а член, соответствующий контактной силе, определяется соотношениями (6.302) и (6.303).

Чтобы дать пример формулировки определяющих уравнений в конечно-элементной форме, рассмотрим двумерный случай при телах, представляющих собой контактор и мишень и схематически показанных на рис. 6.36. Заметим, что узлы k_1 и k_2 определяют собой прямолинейную границу, но не обязательно соответствуют углам элемента. Вместо этого они представляют собой любые близлежащие узлы на поверхности тела, являющегося мишенью.

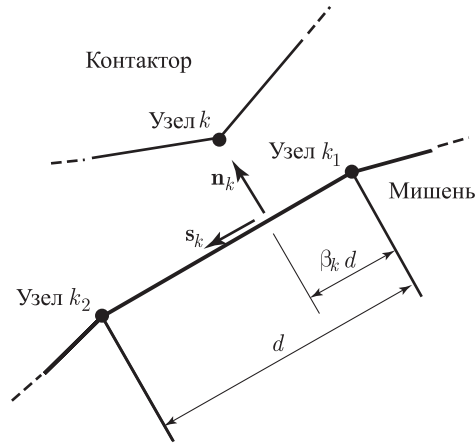


Рис. 6.36. Двумерный случай контакта

Дискретизация уравнений механики сплошной среды (6.301) и (6.314), соответствующая условиям в момент времени $t + \Delta t$, дает

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}) = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}_c({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}, {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\tau}) \quad (6.315)$$

и

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_c({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}, {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\tau}) = 0, \quad (6.316)$$

где при наличии m узлов на контакторе имеем

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\tau}^T = [\lambda_1, \tau_1, \dots, \lambda_k, \tau_k, \dots, \lambda_m, \tau_m]. \quad (6.317)$$

Отметим, что функции, характеризующие относительную скорость и величину зазора, выражаются, конечно же, в терминах смещений узловых точек.

Вектор ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}_c$ строится путем сложения обусловленных контактом векторов сил в узловых точках для всей совокупности m узлов контактора, $k = 1, \dots, m$. Для узла k контактора и соответствующих узлов мишени вектор узловой силы выражается как

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}_k^c = \begin{bmatrix} -\lambda_k(\mathbf{n}_k + \mu\tau_k\mathbf{s}_k) \\ (1 - \beta_k)\lambda_k(\mathbf{n}_k + \mu\tau_k\mathbf{s}_k) \\ \beta_k\lambda_k(\mathbf{n}_k + \mu\tau_k\mathbf{s}_k) \end{bmatrix}, \quad (6.318)$$

где значения символов β_k , \mathbf{n}_k и \mathbf{s}_k поясняются на рис. 6.36.

Вектор ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_c$ может быть представлен в виде

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_c^T = [{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_1^T, \dots, {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_m^T], \quad (6.319)$$

где

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_k^c = \begin{bmatrix} w(g_k, \lambda_k) \\ v(u_k, \tau_k) \end{bmatrix}. \quad (6.320)$$

Уравнения в приращениях, предназначенные для решения (6.315) и (6.316), получаются путем линеаризации по отношению к состоянию, рассчитанному последним. Следуя процедурам, обсуждавшимся в разделе 6.3.1, сформулируем уравнения, соответствующие линеаризации по отношению к состоянию в момент времени t , получая в результате

$$\begin{bmatrix} ({}^t\mathbf{K} + {}^t\mathbf{K}_{uu}^c) & {}^t\mathbf{K}_{u\tau}^c \\ {}^t\mathbf{K}_{\tau u}^c & {}^t\mathbf{K}_{\tau\tau}^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{U} \\ \Delta\boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F} - {}^t\mathbf{R}_c \\ -{}^t\mathbf{F}_c \end{bmatrix}, \quad (6.321)$$

где $\Delta\mathbf{U}$ и $\Delta\boldsymbol{\tau}$ представляют собой приращения переменных ${}^t\mathbf{U}$ и ${}^t\boldsymbol{\tau}$, а ${}^t\mathbf{K}_{uu}^c$, ${}^t\mathbf{K}_{u\tau}^c$, ${}^t\mathbf{K}_{\tau u}^c$ и ${}^t\mathbf{K}_{\tau\tau}^c$ представляют собой матрицы жесткости в условиях контакта,

$$\left. \begin{aligned} {}^t\mathbf{K}_{uu}^c &= \frac{\partial {}^t\mathbf{R}_c}{\partial {}^t\mathbf{U}}; & {}^t\mathbf{K}_{u\tau}^c &= \frac{\partial {}^t\mathbf{R}_c}{\partial {}^t\boldsymbol{\tau}} \\ {}^t\mathbf{K}_{\tau u}^c &= \frac{\partial {}^t\mathbf{F}_c}{\partial {}^t\mathbf{U}}; & {}^t\mathbf{K}_{\tau\tau}^c &= \frac{\partial {}^t\mathbf{F}_c}{\partial {}^t\boldsymbol{\tau}} \end{aligned} \right\} \quad (6.322)$$

Детализированные формы выражения этих матриц зависят от фактического вида используемых функций принудительной связи. На практике используются функции, весьма близко аппроксимирующие принудительные связи, показанные на рис. 6.35, но дифференцируемые так, как это требуется выражениями в соотношениях (6.322) (см. упражнение 6.93). Модель, данная в разделе 6.7.1 для случая механики сплошной среды, была реализована применительно к весьма общим условиям деформации и представлению основополагающих соотношений (хотя и предполагалось, что справедлив закон Кулона для трения). Разумеется, эта модель может быть применена также и к случаю контакта без трения. В этом случае нужно наложить только принудительную связь (6.308), а конечно-элементные уравнения содержат в качестве неизвестных в узлах контактора только нормальные силы. Отметим, что матрица коэффициентов в (6.321), включающая условия с трением, является, вообще говоря, несимметричной, но если трением пренебрегается, то можно получить и симметричную матрицу.

При решении контактных задач чрезвычайно важно знать, какова способность алгоритма к сходимости в тех случаях, когда исследуются сложные варианты геометрических форм, деформаций и условий контакта. При этом следует отметить, что хотя уравнения для приращений (6.321) соответствуют случаю полной линеаризации, но все же использование слишком больших шагов для приращений может привести к трудностям в отношении сходимости равновесных итераций, так как прогнозируемое промежуточное состояние оказывается слишком далеким от решения. Кроме того, вблизи решения может не наблюдаться полная квадратичная сходимость, если изменение касательной матрицы коэффициентов не является достаточно гладким, как например, в результате геометрических переключений на поверхности мишени.

6.7.3. Упражнения

- 6.91. Покажите, что при принятии соглашения о знаках, используемого в соотношениях (6.303)–(6.310), модели, описывающие контакт с трением и данные в (6.308) и (6.311), являются правильными.
- 6.92. Рассмотрите контакт без трения между двумя телами. Выведите определяющие конечно-элементные уравнения при наложении функции принудительной связи (6.312), используя при этом метод штрафных функций (см. раздел 3.4.1).
- 6.93. Для построения алгоритма, содержащего функцию принудительной связи, предлагается функция $w(g, \lambda)$ вида

$$w(g, \lambda) = \frac{g + \lambda}{2} - \sqrt{\left(\frac{g - \lambda}{2}\right)^2 + \epsilon},$$

где величина ϵ очень мала, но больше нуля. Постройте график изменения этой функции для различных значений ϵ и покажите, что эта функция $w(g, \lambda)$ действительно является подходящей.

- 6.94. Постройте такую функцию $v(u, \tau)$, как используемая в (6.313), для наложения принудительной связи с трением, задаваемой согласно (6.311).

6.8. Некоторые практические соображения

Построение надлежащей математической модели, пригодной для анализа некой инженерной задачи, в значительной степени основывается на степени понимания существа рассматриваемой задачи, а также на знании тех конечно-элементных процедур, которые имеются в нашем распоряжении для построения решения (см. раздел 1.2). Это наблюдение особенно приложимо к случаю нелинейного анализа, так как при этом необходимо отобрать надлежащие нелинейные кинематические модели, модели материала, а также выбрать стратегию реализации решения.

В настоящем разделе мы ставим своей целью провести краткое обсуждение некоторых важных практических аспектов, касающихся выбора надлежащих моделей и методов решения при нелинейном анализе.

6.8.1. Общий подход к нелинейному анализу

Хорошая практика при проведении реального инженерного анализа состоит в том, что нелинейному анализу некоторой задачи всегда предшествует ее линейный анализ, так что нелинейный анализ рассматривается как расширение процесса анализа в целом за пределы допущений линейного анализа. Основываясь на решении, касающемся линейной реакции, исследователь может предсказать, какие именно нелинейности будут существенными и как в наиболее должной форме учесть влияние этих нелинейностей. А именно, результаты линейного анализа указывают на те области, где могут сыграть существенную роль геометрические нелинейности и где материал работает с превышением своего упругого предела.

К сожалению, при проведении нелинейного анализа зачастую проявляется тенденция к тому, чтобы сразу же выбрать большое число элементов и самые общие нелинейные модели, подходящие для моделирования данной задачи. Инженерное время, используемое для построения модели, достаточно велико, весьма существенным оказывается также и время компьютерного счета, требуемого для анализа данной модели, причем обычно выдается большой объем такой информации, которую невозможно ни полностью воспринять, ни интерпретировать. Если в процессе моделирования или реализации программы расчета возникают существенные ошибки, то может случиться также, что проводящий анализ исследователь «в отчаянии опускает руки», так как этот анализ уже потребовал затраты сравнительно большой суммы денег, тогда как существенных результатов пока что не получено, а сам исследователь неспособен дать реалистичную оценку того, каковы должны быть дальнейшие затраты, нужные для получения надежных результатов.

Важно отметить, что такой подход к проведению нелинейного анализа не может быть рекомендован. Вместо этого вначале должна быть сформулирована линейная модель, содержащая в себе важные характеристики исследуемой задачи. После того, как будут проведены определенные линейные исследования, обеспечивающие важную информацию об особенностях рассматриваемой задачи, необходимо принять во внимание и некоторые нелинейности — причем необязательно сразу же все те нелинейности, появления которых можно было ожидать — путем выбора надлежащих нелинейных формулировок и моделей материала. Здесь необходимо отметить, что посредством принятия формулировок, обсужденных как в данной главе, так и в главе 5, можно объединить в одну конечно-элементную идеализацию и конечные элементы, сформулированные при допущениях линейного анализа, и формулировку, связанную только с нелинейными свойствами материала, и формулировки типа TL и UL. Если выбранная конечно-элементная сетка обеспечивает совместимость при линейном анализе, то те же элементы останутся совместимыми и при нелинейном анализе. Подразделение конечно-элементной идеализации в целом на элементы, определяемые различными нелинейными формулировками, соответствует просто тому факту, что в процессе анализа нелинейности различного рода принимаются во внимание в различных частях данной конструкции. Эффективная процедура, позволяющая вводить

в анализ различного рода нелинейности состоит в использовании линейных и нелинейных элементарных групп.

Процесс анализа в целом можно сравнить с некой серией лабораторных экспериментов, каждый из которых проводится с использованием различных допущений, — при конечно-элементном анализе эти эксперименты реализуются на компьютере с помощью соответствующей программы.

Преимущества процедуры решения, начинающейся с линейного анализа, вслед за которым реализуется разумно выбранная версия нелинейного анализа, состоят в том, что, во-первых, становится легче объяснить форму воздействия каждой из вводимых нелинейностей и, во-вторых, что можно обеспечить доверие к результатам анализа, а также, в-третьих, что полезная информация накапливается в течение всего процесса анализа.

В дополнение к данным выше общим рекомендациям относительно надлежащего подхода к проведению нелинейного анализа могут оказаться важными и некоторые практические аспекты, вкратце обсуждаемые в последующих разделах.

6.8.2. Исследование разрушения и прогиба

Во многих случаях целью нелинейного анализа является оценка той максимальной нагрузки, которую конструкция может вынести до проявления своей конструкционной неустойчивости или до разрушения. При этом анализе распределение нагрузки на конструкцию известно, однако величина той нагрузки, которую конструкция может вынести, неизвестна.

На рисунке 6.37 приводится схематическая иллюстрация поведения некоторых конструкций, испытывающих разрушение или прогиб. В каждом случае рассматриваются только нелинейности кинематического рода, а если бы имели место также и нелинейные свойства материала, то поведение конструкции было бы иным.

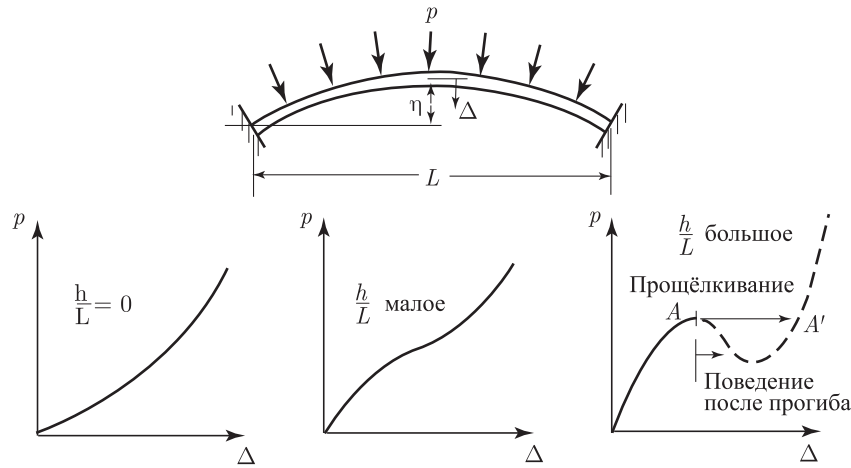
Тонкая пластина не имеет точки разрушения; в самом деле, благодаря своему мембранному поведению пластина повышает свою жесткость по мере возрастания смещений. Однако арка, вследствие ее специфических геометрических параметров, при увеличении нагрузки будет разрушаться. Как показано на рис. 6.37 а, поведение пластины при смещении за точкой разрушения A характеризуется как послепрогибное. В действительности поведение за точкой A , обусловленное увеличением нагрузки, является динамическим поведением. Однако прогноз (идеализированного) статического послепрогибного поведения может оказаться важным, так как если точки A и A' располагаются очень близко одна к другой, то разрушающая нагрузка, соответствующая точке A , может привести к ограничению при проектировании, не столь серьезному, как это было бы при расположении точек A и A' вдалеке друг от друга.

Поведение стойки, изображенной на рис. 6.37 б, зависит от значения β . Этот параметр характеризует собой несовершенство геометрии и материальных свойств стойки, или же вида приложения нагрузки (ее отклонение от строгой вертикали). Отметим, что при очень малых значениях β характер прогибного поведения идеально прямолинейной стойки, испытывающей только концевую сжимающую нагрузку, приближается к бифуркационному.

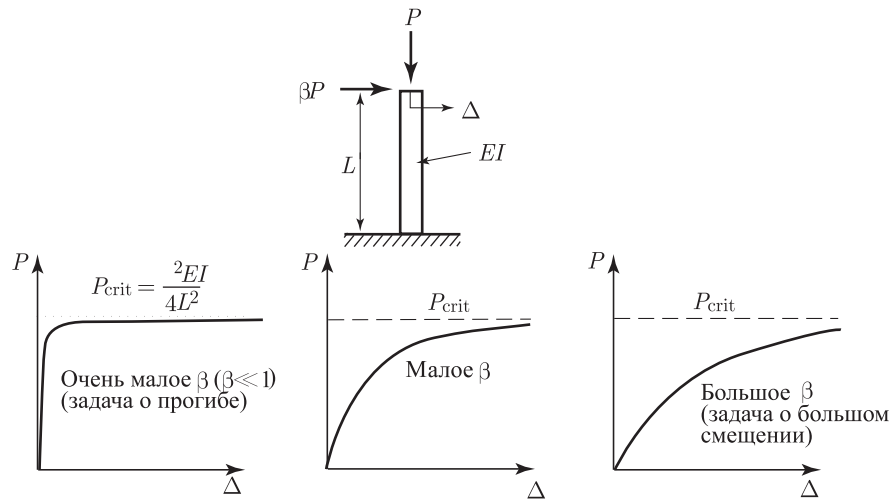
Однако во всех случаях поведение конструкции может быть рассчитано путем анализа на основе смещений при том условии, что нагрузка сможет уменьшаться так, как это требуется согласно реакции конструкции в послепрогибном режиме. Следовательно, мы должны рассмотреть излагаемое ниже общее описание задачи.

Пусть $\Delta^t \mathbf{R}$ — это вектор, определяющий собой *распределение нагрузки*. Этот вектор соответствует первому шагу по нагрузке. Кроме того, пусть ${}^\tau \beta$ представляет собой *множитель нагрузки* для любого момента времени τ применительно к вектору нагрузки $\Delta^t \mathbf{R}$ такой, что нагрузка в момент времени τ выражается как ${}^\tau \beta \Delta^t \mathbf{R}$. На практике мы нередко интересуемся расчетом реакции конструкции по мере увеличения τ . Как видно из рис. 6.37 а, решение такой задачи требует, чтобы множитель нагрузки увеличивался или уменьшался вместе с τ в процессе расчета реакции конструкции.

В разделе 8.4.3 мы предлагаем конкретный алгоритм для решения задачи об изменении множителя нагрузки ${}^\tau \beta$ и о реакции конструкции. При использовании этого метода решения проводится расчет реакции конструкции такого типа, как показанные на рис. 6.37.



а. Реакция тонкой пластины/оболочки



б. Реакция стойки

Рис. 6.37. Анализ неустойчивости и разрушения

Однако, построение полного нелинейного решения на основе учета приращений, проводимое для некоторой конструкции вплоть до ее разрушения и после него может оказаться дорогостоящим и, возможно, целесообразно проводить линеаризованный анализ для случая прогиба, при наименьших нагрузках, обеспечивающих этот прогиб (см. раздел 3.2.3), наименьшая расчетная нагрузка для прогиба может соответствовать приемлемой оценке фактической нагрузки разрушения (но только тогда, когда смещения до прогиба остаются малыми), причем может оказаться важным использовать моды, соответствующие прогибу, для определения геометрических несовершенств исследуемой конструкции. Иначе говоря, если те несовершенства, которые соответствуют наименьшим модам, обеспечивающим прогиб, налагаются на «идеализированную» геометрию модели данной конструкции, то способность несения нагрузки может быть существенно снижена и будет значительно более реалистично характеризовать способность несения нагрузки для реальной физической конструкции (см. обсуждение форм анализа, представленных на рис. 6.39).

Рассмотрим расчет линеаризованной нагрузки, соответствующей прогибу. Матрицы жесткости для моментов времени $t - \Delta t$ и t равны ${}^{t-\Delta t}\mathbf{K}$ и ${}^t\mathbf{K}$, а соответствующие векторы

внешних нагрузок равны ${}^{t-\Delta t}\mathbf{R}$ и ${}^t\mathbf{R}$. В процессе линеаризованного анализа для случая прогиба мы предполагаем, что в любой момент времени τ имеем

$${}^\tau\mathbf{K} = {}^{t-\Delta t}\mathbf{K} + \lambda({}^t\mathbf{K} - {}^{t-\Delta t}\mathbf{K}) \quad (6.323)$$

и

$${}^\tau\mathbf{R} = {}^{t-\Delta t}\mathbf{R} + \lambda({}^t\mathbf{R} - {}^{t-\Delta t}\mathbf{R}), \quad (6.324)$$

где λ представляет собой масштабный коэффициент, причем мы интересуемся теми значениями λ , которые больше единицы.

При разрушении или прогибе касательная матрица жесткости является особенной и, следовательно, условие для расчета λ сводится к тому, что

$$\det {}^\tau\mathbf{K} = 0 \quad (6.325)$$

или, эквивалентно этому, что (см. раздел 10.2)

$${}^\tau\mathbf{K}\phi = 0, \quad (6.326)$$

где ϕ — некий, отличный от нуля, вектор. Если подставить (6.323) в (6.326), получим задачу о собственных значениях

$${}^{t-\Delta t}\mathbf{K}\phi = \lambda({}^{t-\Delta t}\mathbf{K} - {}^t\mathbf{K})\phi. \quad (6.327)$$

Собственные значения λ_i , $i = 1, \dots, n$, определяют собой нагрузки, соответствующие прогибу (используя при этом (6.324)), а собственные векторы ϕ_i определяют собой моды, соответствующие прогибу. Мы предполагаем, что обе матрицы, ${}^t\mathbf{K}$ и ${}^{t-\Delta t}\mathbf{K}$, являются положительно определенными, однако замечаем, что в общем случае разность ${}^{t-\Delta t}\mathbf{K} - {}^t\mathbf{K}$ является неопределенной; следовательно, задача о собственных значениях будет иметь как положительные, так и отрицательные решения (т. к. некоторые из собственных значений будут отрицательными). Нас интересуют только наименьшие положительные собственные значения и, поэтому, (6.327) мы переписываем в виде

$${}^t\mathbf{K}\phi = \gamma {}^{t-\Delta t}\mathbf{K}\phi, \quad (6.328)$$

где

$$\gamma = \frac{\lambda - 1}{\lambda}. \quad (6.329)$$

Все собственные значения в (6.328) являются положительными и, обычно, представляют интерес только наименьшие значения $\gamma_1, \gamma_2, \dots$. А именно, γ_1 соответствует наименьшему положительному значению λ для задачи (6.327).

Весьма важно, что стандартная техника решения задач о собственных значениях, представленная в главе 11, может быть применена непосредственно к решению сформулированной в виде (6.328) задачи о нахождении наименьших собственных значений и соответствующих им векторов, так как обе матрицы в уравнении (6.328) предполагаются положительно определенными. Однако, как показывает формула (6.329), собственные значения γ_i могут оказаться очень близкими по своей величине, в результате чего может оказаться важным воспользоваться некой эффективной стратегией переключения (см. разделы 10.2.3 и 11.2.3).

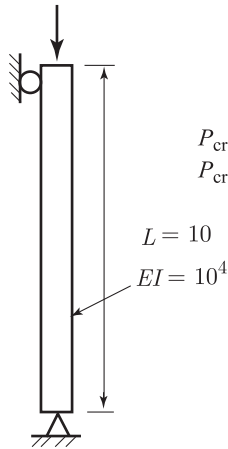
Найдя значение γ_1 , мы с помощью (6.329) получаем λ_1 , и тогда нагрузка, соответствующая прогибу (или разрушению), определяется из соотношения (6.324),

$$\mathbf{R}_{\text{buckling}} = {}^{t-\Delta t}\mathbf{R} + \lambda_1({}^t\mathbf{R} - {}^{t-\Delta t}\mathbf{R}). \quad (6.330)$$

Аналогичным образом мы можем рассчитать и линеаризованные нагрузки для прогиба, соответствующие γ_i , $i > 1$.

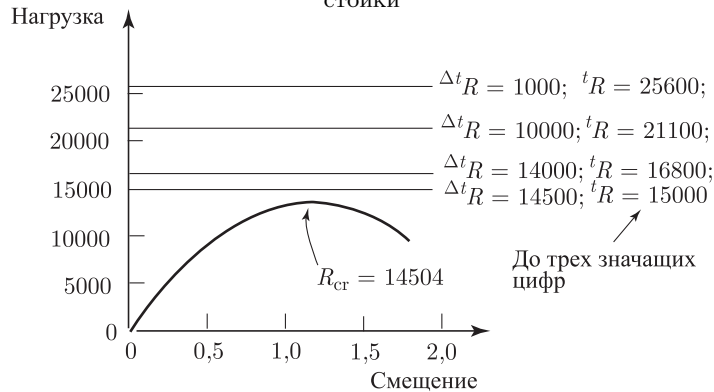
Чаше всего на практике моменты времени $t - \Delta t$ и t соответствуют моментам 0 (начальная конфигурация при ${}^0\mathbf{R} = 0$) и Δt (первый шаг по нагрузке при ${}^{\Delta t}\mathbf{R}$). Однако приведенные выше уравнения применимы для любого шага по нагрузке вплоть до разрушения. Кроме того, как видно из соотношений (6.323) и (6.324), этот анализ может проводиться столь же успешно и в том случае, когда принимаются во внимание геометрические или материальные нелинейности.

Допущения, используемые в процессе линеаризованного анализа на прогиб, ясны из уравнений (6.323) и (6.324); а именно, предполагается, что элементы, входящие в матрицу жесткости, изменяются линейным образом, начиная с момента $t - \Delta t$ и далее, причем



P_{cr} для математической модели (аналитическое решение) = 986,96
 P_{cr} для конечно-элементной модели = 986,212 (при $\Delta t P = 1, 10$ и 100)

а. Линеаризованный анализ прогиба стойки; два эрмитовских элемента типа балки, обсуждавшихся в работе [Bathe, Bolourchi 1979], используются для моделирования стойки



б. Линеаризованный анализ прогиба арочной конструкции, показанной на рис. 6.4;
 $L = 10$; $EA = 2,1 \times 10^6$

Рис. 6.38. Линеаризованный анализ прогиба двух конструкций; в каждом случае момент времени $t - \Delta t$ соответствует моменту 0 (ненапряженное состояние)

наклон кривой этого изменения задается разницей между моментами времени $t - \Delta t$ и t . На этом основании линеаризованный анализ на прогиб дает разумную оценку нагрузки разрушения, если только смещения, предшествующие разрушению, сравнительно малы (и если любые изменения свойств материала не влекут за собой существенного нарушения допущения о линейности). На рис. 6.38 приводятся результаты двух вариантов анализа, иллюстрирующих сделанное выше наблюдение. При анализе варианта со стойкой смещения, предшествующие прогибу, пренебрежимо малы, и получаются отличные результаты. С другой стороны, при анализе поведения арки смещения в стадии до разрушения велики и линеаризованное исследование прогиба приводит к весьма завышенной оценке нагрузки разрушения, если только состояние нагрузки, соответствующее моменту Δt , не оказывается уже и так близким к этой нагрузке. В общем случае линеаризованное исследование прогиба будет давать хорошие результаты, если поведение конструкции в отношении прогиба соответствует тому, что происходит со стойкой.

Однако, как уже упоминалось ранее, даже если линеаризованная нагрузка для прогиба не может быть использована в качестве оценки фактической нагрузки разрушения исследуемой конструкции, то может оказаться важным наложить прогибную моду на

конструкционную модель и рассматривать ее как некое отклонение от совершенства. Это несовершенство вполне может оказаться присутствующим в реальной физической конструкции и если его влияние является существенным, то оно должно быть включено в анализ.

Чтобы проиллюстрировать высказанные мысли, рассмотрим анализ поведения арки, показанной на рис. 6.39. Конструкция в целом моделируется путем использования десяти изопараметрических элементов типа балки с двумя узлами. В процессе анализа не были использованы условия симметрии, чтобы таким образом допустить антисимметричное поведение данной модели. Целью исследования была возможность предсказать разрушение и изучить поведение конструкции после этого разрушения.



Рис. 6.39. Анализ разрушения арочной конструкции

На рис. 6.39б демонстрируется поведение конструкции при его расчете методом нагрузка–смещение–принудительная связь, как он описан в разделе 8.4.3. Кроме того, проводился и линеаризованный анализ с учетом прогиба, при котором состояние в момент времени $t - \Delta t$ использовалось в качестве ненагруженной конфигурации, а в качестве состояния в момент Δt была выбрана конфигурация, соответствующая давлению в 10 единиц. Два наименьших значения критического давления и соответствующие им прогибные моды показаны на рис. 6.39в. Мы замечаем, что наименьшее критическое давление соответствует антисимметричному смещению с прогибом. Однако реакция, показанная на рис. 6.39б, была получена в предположении об идеально симметричной арке и, следовательно, на каждом шаге решения вычислялись симметричные деформации.

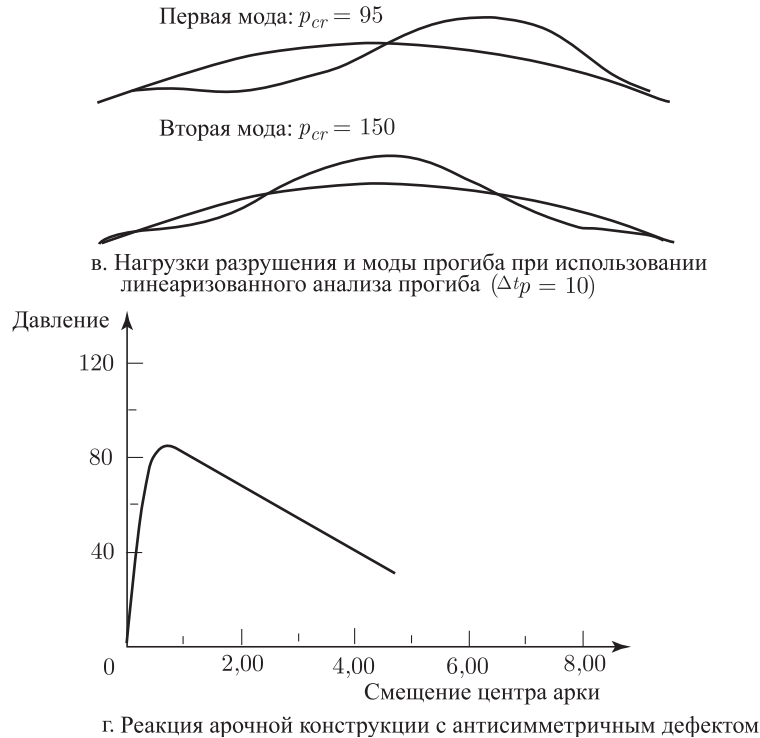


Рис. 6.39. Продолжение

Как видно из появления антисимметричных линеаризованных деформаций с прогибом, данная конструкция является чувствительной к антисимметричным отклонениям от совершенства. Следовательно, мы ввели в модель арки геометрическое несовершенство путем добавления к геометрии недеформированной арки первой прогибной моды ϕ_1 с некоторым множителем. При таком добавлении мода масштабируется так, чтобы величина несовершенства оказалась меньше, чем 0,01 (одна сотая глубины в поперечном сечении).

Рисунок 6.39г демонстрирует реакцию, рассчитанную, опять-таки, по методу нагрузка–смещение–принудительная связь, рассмотренному в разделе 8.4.3 для арки, имеющей вышеуказанное геометрическое несовершенство. Мы замечаем, что прогнозируемая теперь нагрузка разрушения оказывается значительно меньше, чем значение, показанное на рис. 6.39б. Это уменьшение нагрузки разрушения связано с несимметричным поведением исследуемой конструкционной модели, которое оказалось допустимым благодаря наложению геометрического несовершенства.

В общем случае исследование разрушения конструкции требует проведения такого анализа изменения нагрузки с приращениями, который включал бы себя учет геометрических и материальных нелинейностей. Как видно из проведенного выше обсуждения, несовершенства конструкции могут оказать существенное влияние также и на прогнозируемое значение способности этой конструкции к несению нагрузки. Отсюда следует, что если ожидается возникновение такой ситуации, то несовершенства должны быть включены в модель конструкции. Здесь мы рассматриваем несовершенства геометрического типа и некий простой пример. При исследовании сложной конструкции к геометрии следует добавить также и прогибные моды, кратные 2, 3, ..., однако может оказаться целесообразным ввести возмущения также либо в материальные свойства, либо в приложенную нагрузку. Все эти меры должны способствовать тому, чтобы конструкция начала испытывать та-

кую форму деформаций, которая способствовала бы наименьшему значению способности к несению нагрузки.

В этой главе мы представили формулировку уравнений для приращений, причем решение этих уравнений и решение задачи о собственных значениях для прогиба обсуждаются в главах 8 и 11 соответственно.

Наконец, необходимо отметить, что в дополнение к статическим формам анализа при исследовании прогиба может оказаться необходимым рассмотреть также и динамические решения. Для проведения динамических исследований при наличии прогиба или разрушения требуется, чтобы полный динамический анализ на основе приращений был проведен для различных заданных значений нагрузки (включая, разумеется, и возможные эффекты несовершенств). На рис. 6.40 демонстрируется последовательность такого рода анализов.

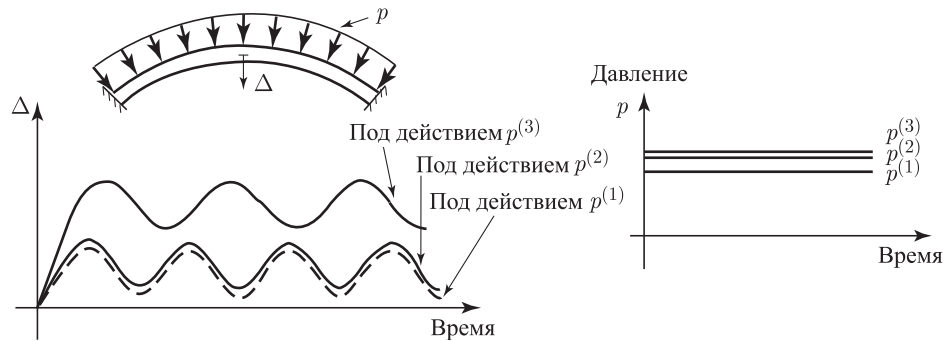


Рис. 6.40. Динамический прогиб арочной конструкции; конструкция обнаруживает устойчивую динамическую реакцию на нагрузки $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$ и значительно более ярко выраженную реакцию на $p^{(3)}$

Конструктивная модель устойчива при значениях давления $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$, однако она неустойчива при значении нагрузки $p^{(3)}$. Если разность между значениями $p^{(2)}$ и $p^{(3)}$ мала, то величина $p^{(2)}$ дает хорошую оценку нагрузки разрушения; в противном случае необходимо провести дальнейшие исследования с целью уменьшения разности между тем значением нагрузки, при котором конструкция сохраняет устойчивость, и тем значением, при котором она неустойчива. Динамические решения такого рода строятся с использованием процедур, описанных в главе 9.

6.8.3. Влияние искажений формы элемента

Как мы упоминали в разделах 5.3.3 и 5.3.5, при расчете смещений и напряжений конечные элементы оказываются, вообще говоря, наиболее эффективными тогда, когда их форма не искажена. Однако в большинстве практических случаев элементы должны иметь некую общую форму с прямыми сторонами при наличии угловых искажений (например, при двумерном анализе мы используем четырехугольные элементы общего вида), чтобы обеспечивать постепенное изменение размеров сеток и эффективное построение этих сеток для сложных геометрических форм. Чтобы моделировать криволинейные границы, необходимо использовать также элементы с криволинейными сторонами или гранями. Кроме того, при нелинейном геометрическом анализе вследствие деформаций могут возникнуть весьма значительные искажения в углах и на криволинейных краях, а также искажения, обусловленные движением узлов элемента, расположенных не на углах. Если фактическая ошибка решения в результате всех этих искажений элементов возрастает, то до тех пор, пока искажения остаются «малыми» (как это обсуждалось в разделе 5.3.3), порядок сходимости останется прежним. Мы отметили также и тот факт, что зачастую элементы Лагранжа оказываются более эффективными, чем элементы, не имеющие внутренних узлов.

Если использовать модели для больших смещений, то принцип виртуальных перемещений применяется к каждому индивидуальному элементу, соответствующему текущей конфигурации, а не начальной, как это делается при линейном анализе. Таким образом,

следует ожидать, что искажения формы элемента повлияют на точность расчета нелинейной реакции аналогично тому, как это имеет место при линейном анализе. теперь, однако соображения, касающиеся искажений элемента при линейном анализе и описанные в разделе 5.3.3, оказываются теперь применимыми на протяжении всей истории поведения сетки. Поэтому в процессе анализа необходимо следить за изменениями формы каждого элемента и, если искажения элемента оказывают негативное влияние на расчет реакции, то для геометрически нелинейного анализа может понадобиться другая, более мелкая сетка. Кроме того, в некоторые критические моменты времени, если ставится цель сделать расположение элементов как можно ближе к варианту, при котором имеют место только угловые искажения, то можно провести изменение разбиения сетки по зонам. При этих операциях с сетками лагранжевы элементы используются весьма эффективно (см. [Lee, Bathe 1993], [Lee, Bathe 1994]).

Необходимо указать также и на то обстоятельство, что все эти соображения в равной мере применимы к формулировкам как типа TL, так и типа UL, в силу того, что если не считать некоторых основополагающих допущений, то обе указанные формулировки являются совершенно эквивалентными (см. пример 6.23).

6.8.4. Влияние порядка численного интегрирования

В процессе нелинейного анализа, при выборе надлежащей схемы численного интегрирования и порядка интегрирования важную роль играют некоторые особые соображения помимо тех, которые уже обсуждались в разделе 5.5.5.

Если основываться на информации относительно требуемого порядка интегрирования для искаженных и неискаженных элементов, данной выше и в разделе 5.5.5, то мы можем сделать непосредственный вывод о том, что при анализе с нелинейной геометрией должен выбираться, как минимум, тот же самый порядок интегрирования, что и при линейном анализе.

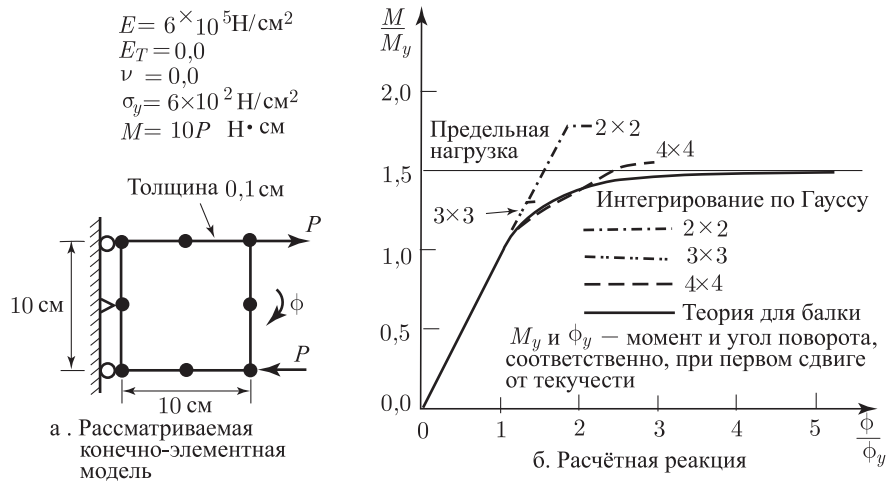


Рис. 6.41. Влияние порядка интегрирования при упругопластическом анализе поведения балки

Однако при анализе материально нелинейной реакции может потребоваться более высокий порядок интегрирования, чем при линейном анализе; это нужно просто для того, чтобы достаточно правильно выделить как возникновение, так и распространение материально нелинейных условий. Конкретно, если учесть, что материальные нелинейности замечаются в точках интегрирования на элементах, то использование сравнительно невысокого порядка интегрирования может означать, что распространение материально нелинейных условий по элементам отображается неточно. Это соображение особенно важным при материально нелинейном анализе конструкций типа балки, пла-

стины или оболочки, а также приводит к заключению о том, что эффективными могут оказаться методы Ньютона–Котеса (например, для проведения интегрирования в определенных направлениях), так как при этом точки интегрирования для расчетов жесткости и напряжений попадают на границы элементов (например, на верхнюю и нижнюю поверхности оболочки).

На рис. 6.41 приводятся результаты использования различных порядков интегрирования по Гауссу для плоского напряженного элемента с восемью узлами, моделирующего сечение балки. Элемент подвергается воздействию возрастающего изгибающего момента и реакция, рассчитанная численно, сравнивается с реакцией, рассчитанной с использованием теории балки. Этот анализ показывает, что для достаточно точного расчета материально нелинейной реакции требуется выбрать более высокий порядок интегрирования в направлении толщины балки, чем при линейном анализе. Ниже приводится другой пример, демонстрирующий влияние использования различных порядков интегрирования при материально нелинейном анализе.

Пример 6.27: Рассмотрите элемент 2 из примера 4.5 и предположите, что при упругопластическом анализе напряжения в этом элементе в момент времени t таковы, что касательные модули данного материала равны $E/100$ при $0 \leq x \leq 40$ и E при $40 < x \leq 80$, как это и иллюстрируется на рис. 6.42. Рассчитайте касательную матрицу жесткости ${}^t\mathbf{K}$, используя интегрирование по Гауссу с вариантами для одной, двух, трех и четырех точек. Полученные результаты сравните с точным значением матрицы жесткости. Примите во внимание только материальные нелинейности.

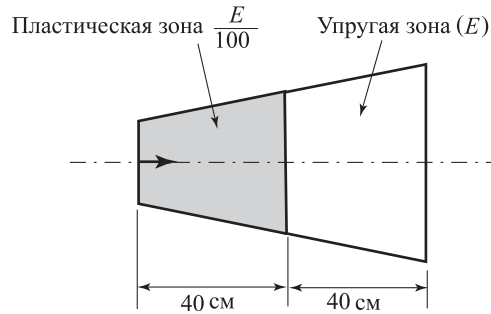


Рис. 6.42. Элемент 2 из примера 4.5 в упругопластических условиях

Для расчета матрицы ${}^t\mathbf{K}$ мы используем информацию, данную в примере 4.5 и в табл. 5.6. Таким образом мы получаем следующие результаты:

Одноточечное интегрирование:

$${}^t\mathbf{K} = 2 \times 40 \begin{bmatrix} -1/80 \\ 1/80 \end{bmatrix} \frac{E}{100} \begin{bmatrix} -\frac{1}{80} & \frac{1}{80} \end{bmatrix} (1+1)^2 = 0,0005E \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Двухточечное интегрирование:

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{K} &= 1 \times 40 \begin{bmatrix} -1/80 \\ 1/80 \end{bmatrix} \frac{E}{100} \begin{bmatrix} -\frac{1}{80} & \frac{1}{80} \end{bmatrix} \left(1+1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \\ &+ 1 \times 40 \begin{bmatrix} -1/80 \\ 1/80 \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} -\frac{1}{80} & \frac{1}{80} \end{bmatrix} \left(1+1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \\ &= 0,04164E \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Трехточечное интегрирование:

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{K} &= \frac{5}{9} 40 \begin{bmatrix} -1/80 \\ 1/80 \end{bmatrix} \frac{E}{100} \begin{bmatrix} -1/80 & 1/80 \end{bmatrix} \left(1 + 1 - \frac{\sqrt{3}}{5}\right)^2 + \\ &+ \frac{8}{9} 40 \begin{bmatrix} -1/80 \\ 1/80 \end{bmatrix} \frac{E}{100} \begin{bmatrix} -1/80 & 1/80 \end{bmatrix} (1 + 1)^2 + \\ &+ \frac{5}{9} 40 \begin{bmatrix} -1/80 \\ 1/80 \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} -1/80 & 1/89 \end{bmatrix} (1 + 1 + \sqrt{3}/5)^2, \\ {}^t\mathbf{K} &= 0,02700E \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Четырехточечное интегрирование:

$$\begin{aligned} &\begin{matrix} r_i & \alpha_i \\ n = 4 & \pm 0,9611 \dots & 0,3478 \dots \\ & \pm 0,3399 \dots & 0,6521 \dots \end{matrix} \\ {}^t\mathbf{K} &= 0,3478 \dots (40) \begin{bmatrix} -1/80 \\ 1/80 \end{bmatrix} \frac{E}{100} \begin{bmatrix} -1/80 & 1/80 \end{bmatrix} (1 + 1 - 0,8611 \dots)^2 + \dots \\ {}^t\mathbf{K} &= 0,04026E \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Точное выражение для матрицы жесткости имеет вид

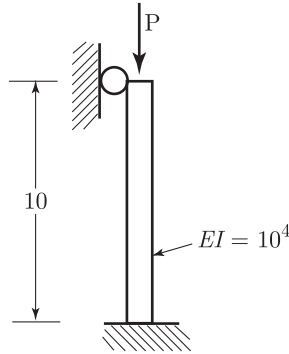
$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{K} &= \begin{bmatrix} -1/80 \\ 1/80 \end{bmatrix} \frac{E}{100} \begin{bmatrix} -1/80 & 1/80 \end{bmatrix} \left\{ \int_0^{40} \left(1 + \frac{y}{40}\right)^2 dy + \int_{40}^{80} 100 \left(1 + \frac{y}{40}\right)^2 dy \right\} = \\ &= \begin{bmatrix} -1/80 \\ 1/80 \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} -1/80 & 1/80 \end{bmatrix} \left\{ \frac{40}{300} \left(1 + \frac{y}{40}\right)^3 \Big|_0^{40} + \frac{40}{3} \left(1 + \frac{y}{40}\right)^3 \Big|_{40}^{80} \right\}, \\ {}^t\mathbf{K} &= 0,03973E \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Интересно отметить, что в рассматриваемом случае двухточечное интегрирование дает более точные результаты, чем трехточечное, и что хорошее приближение к точному выражению для матрицы жесткости получается с помощью четырехточечного интегрирования.

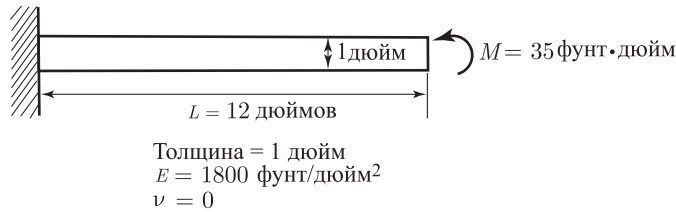
Сделанные выше наблюдения свидетельствуют о том, что при нелинейном анализе может оказаться уместным использовать порядок интегрирования более высокий, чем при линейном анализе. Если такой повышенный порядок интегрирования нужен, то он, разумеется, должен использоваться для конечных элементов, базирующихся на использовании смещений и для конечных элементов смешанного типа. Следовательно, если обратиться к разделу 5.5.6, где мы кратко упоминали об использовании укороченного и выборочного интегрирования, то данные в этом разделе рекомендации годятся также и при нелинейном анализе и имеют в этом случае, как минимум, столь же важное значение. Если дать краткую формулировку, то эти рекомендации сводились к тому, что нужно использовать только хорошо сформулированные элементы, базирующиеся на использовании смещений и смешанного типа. Чтобы эффективно рассчитать элементные матрицы для смешанной модели, в некоторых особых случаях можно воспользоваться формулировкой, базирующейся на использовании смещений, но со специальной схемой интегрирования. Однако следует отметить, что такое замечание может быть справедливым только при линейном анализе, и важно, чтобы в случае нелинейного анализа это обстоятельство изучалось применительно к каждому отдельному случаю.

6.8.5. Упражнения

- 6.95. Воспользуйтесь компьютерной программой с целью расчета линеаризованной нагрузки прогиба для показанной здесь конструкции в форме столба. Сравните результаты ваших расчетов с аналитическим решением (*подсказка*: здесь для моделирования столба вы можете использовать элементы в форме балки Эрмита, изопараметрические элементы в форме балки или элементы с плоскими напряжениями).



- 6.96. Воспользуйтесь компьютерной программой для расчета реакции в форме больших смещений применительно к показанной здесь консольной балке. Сравните ваши результаты с аналитическим решением (см., например, [Holden, 1972]).



- 6.97. Воспользуйтесь компьютерной программой для исследования арки, показанной на рис. 6.39.
- Реализуйте анализ, описанный на рис. 6.39.
 - После этого измените геометрию, чтобы рассмотреть случай $2H/h = 20,0$, и повторите анализ.
- 6.98. Проверьте результаты, приведенные на рис. 6.41.

Глава 7

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ, ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПОЛЯ И ТЕЧЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

7.1. Введение

В предшествующих главах мы рассматривали конечно-элементную модель и решение задач об исследовании напряжений в твердых телах и конструкциях. Однако в настоящее время процедуры конечно-элементного анализа широко используются при решении задач, не связанных с исследованием конструкций, в частности, задач теории теплопередачи, теории поля и задач о течении жидкости.

В последующих разделах наша цель состоит в приложении метода конечных элементов к решению такого рода задач. Учитывая тот факт, что многие из конечно-элементных процедур, приведенных в предшествующих главах, оказываются непосредственно применимыми и здесь, мы можем зачастую быть весьма краткими. Мы сосредоточиваемся на некоторых практических процедурах решения, однако в дополнение к этому особо выделяем применяемые нами общие приемы исследования и демонстрируем единообразие различных формулировок анализируемых задач. Действуя таким образом, мы надеемся также сделать очевидной возможность применения конечно-элементных процедур к решению задач, не рассматриваемых здесь (например, задачи о течении жидкости в сочетании с исследованием поведения конструкций, анализ общих условий неньютоновского течения).

7.2. Исследование теплопередачи

Прежде чем заняться конечно-элементным исследованием задач о теплопередаче, было бы поучительным вспомнить вначале те дифференциальные и вариационные уравнения, которые определяют собой условия теплопередачи, подлежащие нашему исследованию. Как будет видно из последующего обсуждения, именно эти уравнения создают основу для конечно-элементной модели и решения задач о теплопередаче.

7.2.1. Уравнения, определяющие реализацию процессов теплопередачи

Рассмотрим трехмерное тело, находящееся в условиях теплопередачи, как это показано на рис. 7.1, причем вначале рассмотрим стационарные условия. Желая провести исследование теплопередачи, мы предполагаем, что материал подчиняется закону теплопроводности Фурье (см., например, [Lienhard, 1987]),

$$q_x = -k_x \frac{\partial \theta}{\partial x}; \quad q_y = -k_y \frac{\partial \theta}{\partial y}; \quad q_z = -k_z \frac{\partial \theta}{\partial z},$$

где q_x , q_y и q_z — это тепловые потоки, проводимые через единицу площади, θ — температура тела, а k_x , k_y и k_z — это значения коэффициентов теплопроводности, соответствующие главным осям, x , y и z . Если рассмотреть равновесие тепловых потоков во внутренней области тела, то мы получим, таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = -q^B, \quad (7.1)$$

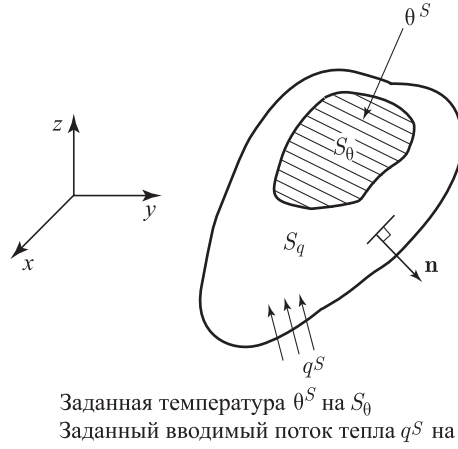


Рис. 7.1. Тело под воздействием теплопередачи

где q^B — это скорость порождения тепла в единице объема. На поверхностях тела должны удовлетворяться следующие условия:

$$\theta|_{S_\theta} = \theta^S, \quad (7.2)$$

$$k_n \frac{\partial \theta}{\partial n} \Big|_{S_q} = q^S, \quad (7.3)$$

где θ^S — это заданная температура поверхности на S_θ , k_n — коэффициент теплопроводности тела, причем символ n обозначает координатную ось в направлении единичного вектора нормали \mathbf{n} (направленного во внешнюю область) к поверхности, q^S — это заданный тепловой поток на поверхности S_q тела, и $S_\theta \cup S_q = S$, $S_\theta \cap S_q = \emptyset$.

Использование соотношений (7.1)–(7.3) связано с некоторым числом важных допущений. Главное допущение состоит в том, что материальные частицы исследуемого тела находятся в покое и, следовательно, мы таким образом рассматриваем условия теплопроводности в твердых телах и конструкциях. Если требуется исследовать теплопередачу в движущейся жидкости, то в уравнение (7.1) необходимо ввести член, отвечающий за конвективную передачу тепла в среде (см. раздел 7.4). Другое допущение состоит в том, что условия теплопередачи могут исследоваться вне связи с условиями для напряжений. Это допущение справедливо для многих вариантов конструкционного анализа, но может оказаться неуместным, например, при исследовании процессов формовки металла, когда деформации могут порождать тепло и изменять температурное поле. В свою очередь, такое изменение может повлиять на свойства материала и повлечь за собой дальнейшие деформации. Еще одно допущение состоит в том, что фазовые изменения отсутствуют и нет воздействия каких-либо видов скрытой теплоты (см. пример 7.5, где показано, как принять во внимание подобные эффекты). Однако при последующих формулировках мы будем предполагать, что параметры, характеризующие материал, зависят от температуры.

При исследовании процессов теплопередачи встречаются различные варианты граничных условий:

Температурные условия

Температура может быть задана в конкретных точках или на конкретных поверхностях тела, обозначаемых символом S_θ в формуле (7.2).

Условия для теплового потока

В конкретных точках или на конкретных поверхностях могут быть заданы значения теплового потока. Эти граничные условия для теплового потока конкретизируются в форме (7.3).

Граничные условия для конвекции

Соотношение (7.3) включает в себя граничное условие для конвекции, если положить

$$q^S = h(\theta_e - \theta^S), \quad (7.4)$$

где h представляет собой коэффициент конвекции, который может зависеть от температуры. Здесь температура окружающей среды θ_e известна, однако температура поверхности θ^S неизвестна.

Граничные условия для радиации

Граничные условия для радиации также конкретизируются с помощью (7.3) при

$$q^S = \kappa(\theta_r - \theta^S), \quad (7.5)$$

где θ_r — известная температура внешнего источника радиации, а κ — некий коэффициент, вычисляемый по значениям абсолютной температуры,

$$\kappa = h_r[(\theta_r)^2 + (\theta^S)^2](\theta_r + \theta^S). \quad (7.6)$$

Переменная h_r определяется по следующим данным: постоянная Стефана–Больцмана, излучательная способность как излучающего, так и поглощающего материала, а также геометрические факторы, характеризующие видимость.

Здесь мы предполагаем, что величина θ_r известна. С другой стороны, если рассматривается ситуация с двумя телами, излучающими тепло друг на друга, то анализ существенно упрощается (см. пример 7.6, где приводится такой случай).

Если исследуется нестационарная задача, то в дополнение к вышеуказанным граничным условиям должны быть заданы также и начальные условия для температуры.

Для построения конечно-элементного решения задачи о теплопередаче мы пользуемся *принципом виртуальных температур*, представляемым в форме

$$\int_V \bar{\theta}'^T \mathbf{k} \theta' dV = \int_V \bar{\theta} q^B dV + \int_{S_q} \bar{\theta}^S q^S dS + \sum_i \bar{\theta}^i Q^i, \quad (7.7)$$

где

$$\theta'^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (7.8)$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix}, \quad (7.9)$$

и где Q^i представляет собой сосредоточенные притоки тепла. Каждый из Q^i является эквивалентом поверхностного притока тепла через очень малую площадь. Черта над символом температуры θ указывает на то, что рассматривается виртуальное распределение температуры.

Принцип виртуальных температур представляет собой уравнение, определяющее равновесие тепловых потоков: для того, чтобы величина θ была решением для температуры рассматриваемого тела, уравнение (7.7) должно быть справедливым для произвольных виртуальных (непрерывных) распределений температуры, обращающихся в нуль на S_θ .

Отметим, что принцип виртуальных температур представляет собой выражение, подобное применявшемуся при анализе напряжений принципу виртуальных перемещений (см. раздел 4.2). Мы используем принцип виртуальных температур таким же образом, как и принцип виртуальных перемещений и, действительно, все процедуры, обсуждавшиеся в главах 4 и 5, являются здесь непосредственно применимыми, если не считать того, что теперь мы имеем лишь скаляр в форме неизвестной температуры, тогда как в процессе предшествовавшего обсуждения мы строили решение для вектора неизвестных смещений.

Чтобы еще более углубить наше понимание принципа виртуальных температур, в приводимом ниже примере мы даем вывод соотношения (7.7) (вывод аналогичен тому, что дается в примере 4.2).

Пример 7.1: Выведите принцип виртуальных температур из основных дифференциальных уравнений (7.1)–(7.3). Здесь мы следуем процедуре, предложенной в примере 4.2 (см. также раздел 3.3.4).

Запишем уравнения, определяющие собой теплопередачу, в индексных обозначениях. Если обозначить $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$, а также использовать более ранние обозначения, то мы придем к следующему.

Дифференциальное уравнение равновесия тепловых потоков, которое должно удовлетворяться во всех точках тела:

$$(k_i \theta_{,i})_{,i} + q^B = 0 \quad (\text{суммирование по } i \text{ в скобках не проводится}). \quad (a)$$

Существенное граничное условие:

$$\theta = \theta^S \quad \text{на } S_\theta. \quad (b)$$

Естественное граничное условие:

$$k_n \theta_{,n} = q^S \quad \text{на } S_q, \quad (c)$$

где $S = S_\theta \cup S_q$, $S_\theta \cap S_q = 0$.

Рассмотрим любое, произвольно выбранное непрерывное распределение температуры $\bar{\theta}$, при условии, что $\bar{\theta} = 0$ на S_q . Тогда имеем

$$\int_V [(k_i \theta_{,i})_{,i} + q^B] \bar{\theta} dV = 0. \quad (d)$$

Будем называть $\bar{\theta}$ «виртуальным распределением температуры». Учитывая, что распределение $\bar{\theta}$ произвольно, соотношение (d) может удовлетворяться тогда и только тогда, когда обращается в нуль величина в квадратных скобках. Следовательно, соотношение (d) эквивалентно соотношению (a).

Теперь наша цель сводится к такому преобразованию соотношения (d), которое понизило бы порядок производных под знаком интеграла (со второго порядка на первый), и тогда мы сможем ввести естественное граничное условие (c). С этой целью воспользуемся математическим тождеством

$$[\bar{\theta}(k_i \theta_{,i})]_{,i} = \bar{\theta}_{,i}(k_i \theta_{,i}) + \bar{\theta}(k_i \theta_{,i})_{,i}$$

с целью преобразования соотношения (d), получая таким образом

$$\int_V \{ [\bar{\theta}(k_i \theta_{,i})]_{,i} - \bar{\theta}_{,i}(k_i \theta_{,i}) + q^B \bar{\theta} \} dV = 0. \quad (e)$$

После этого наша цель будет достигнута, если воспользоваться теоремой о дивергенции (см. также пример 4.2). Мы имеем

$$\int_V [\bar{\theta}(k_i \theta_{,i})]_{,i} dV = \int_S [\bar{\theta}(k_i \theta_{,i})] n_i dS = \int_S \bar{\theta}(k_n \theta_{,n}) dS.$$

Таким образом из соотношения (e) получаем

$$\int_V [-\bar{\theta}_{,i}(k_i \theta_{,i}) + q^B \bar{\theta}] dV + \int_S \bar{\theta}(k_n \theta_{,n}) dS = 0.$$

С учетом выполнения условия (c) и условия о том, что на S_θ имеем $\bar{\theta} = 0$, мы приходим к искомому результату:

$$\int_V \bar{\theta}_{,i}(k_i \theta_{,i}) dV = \int_V \bar{\theta} q^B dV + \int_{S_q} \bar{\theta}^S q^S dS,$$

где отмечаем, что заданное условие, касающееся теплового потока (естественное граничное условие), фигурирует теперь в качестве вынуждающего члена в правой части полученного уравнения.

Весьма ценно признать также, что принцип виртуальных температур соответствует условию постоянства следующего функционала:

$$\Pi = \int_V \frac{1}{2} \left[k_x \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + k_y \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 + k_z \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \right] dV - \int_V \theta q^B dV - \int_{S_q} \theta^S q^S dS - \sum_i \theta^i Q^i, \quad (7.10)$$

а именно, привлекая условие $\delta \Pi = 0$, получаем

$$\int_V \delta \theta'^T \mathbf{k} \theta' dV = \int_V \delta \theta q^B dV + \int_{S_q} \delta \theta^S q^S dS + \sum_i \delta \theta^i Q^i, \quad (7.11)$$

где величина $\delta \theta$ может быть произвольной, но должна быть равной нулю на S_θ . Пользуясь интегрированием по частям (т. е. теоремой о дивергенции) применительно к (7.11), мы можем, разумеется, вернуться к дифференциальному уравнению (7.1), определяющему равновесие, и к граничному условию относительно теплового потока (7.3) (а это, по существу, соответствует обращению процесса, используемого в примере 7.1; см. также пример 3.18). Однако, сравнивая соотношение (7.11) с соотношением (7.7), мы обнаруживаем, что соотношение (7.11) выражает собой принцип виртуальных температур при $\delta \theta \equiv \bar{\theta}$.

При проведенном выше рассмотрении задачи о теплопередаче мы предполагаем наличие условий стационарности. Однако если на протяжении «короткого» периода времени фиксируются значительные изменения притока тепла (обусловленные изменением какого-либо из граничных условий или образованием тепла в самом теле), причем этот период оказывается коротким, будучи измерен в естественных временных единицах данной системы (заданных посредством тепловых собственных значений; см. главу 9), то оказывается важным включить в рассмотрение член, характеризующий ту скорость, с которой тепло накапливается внутри материала. Эта скорость поглощения тепла выражается как

$$q^c = \rho c \dot{\theta}, \quad (7.12)$$

где c — удельная теплоемкость материала. Переменную величину q^c можно представлять себе как часть образующегося тепла, — разумеется, величину q^c следует вычесть из образующегося иным способом тепла q^B (см. соотношение (7.7)), потому что q^c есть запасенное тепло, — и в результате мы получаем решение для нестационарного отклика.

7.2.2. Уравнения для приращений

Принцип виртуальных температур выражает собой равновесие тепловых потоков в любой, интересующий нас момент времени. При составлении схемы построения общего решения для линейных и нелинейных, стационарных и нестационарных задач мы ставим своей целью вывести уравнения равновесия для приращений. Так же, как и при проводимом для приращений конечно-элементном анализе напряжений (см. раздел 6.1), мы предполагаем, что условия в момент времени t уже рассчитаны и что температуры следует определять в момент времени $t + \Delta t$, где Δt — приращение времени.

Стационарные условия

При изучении стационарных условий, когда пошаговое представление времени используется лишь для того, чтобы описать процесс тепловой загрузки, принцип виртуальных температур, примененный в момент времени $t + \Delta t$, приводит к соотношению

$$\int_V \bar{\theta}^T{}^{t+\Delta t} \theta' dV = {}^{t+\Delta t} \mathcal{Q} + \int_{S_c} \bar{\theta}^S{}^{t+\Delta t} h({}^{t+\Delta t} \theta_e - {}^{t+\Delta t} \theta_S) dS + \int_{S_r} \bar{\theta}^S{}^{t+\Delta t} \kappa({}^{t+\Delta t} \theta_r - {}^{t+\Delta t} \theta^S) dS, \quad (7.13)$$

где верхний индекс $t + \Delta t$ означает «в момент времени $t + \Delta t$ », S_c и S_r — это площади поверхностей с конвективными и радиационными граничными условиями, соответственно, а величина ${}^{t+\Delta t} \mathcal{Q}$ соответствует дальнейшему притоку тепла к системе извне в момент времени $t + \Delta t$. Отметим, что входящие в соотношение (7.13) температуры ${}^{t+\Delta t} \theta_e$ и ${}^{t+\Delta t} \theta_r$ известны, тогда как ${}^{t+\Delta t} \theta^S$ представляет собой неизвестную температуру на поверхностях S_c и S_r . Величина ${}^{t+\Delta t} \mathcal{Q}$ включает в себя эффекты внутреннего образования тепла ${}^{t+\Delta t} q^B$,

поверхностные притоки тепла ${}^{t+\Delta t}q^S$, не включенные в конвективные и радиационные граничные условия, а также сосредоточенные притоки тепла ${}^{t+\Delta t}Q^i$,

$${}^{t+\Delta t}Q = \int_V \bar{\theta} {}^{t+\Delta t}q^B dV + \int_{S_q} \bar{\theta}^S {}^{t+\Delta t}q^S dS + \sum_i \bar{\theta}^i {}^{t+\Delta t}Q^i. \quad (7.14)$$

Рассматривая соотношение (7.13), определяющее собой общее равновесие тепловых потоков, мы замечаем, что при линейном анализе величины ${}^{t+\Delta t}\mathbf{k}$ и ${}^{t+\Delta t}h$ постоянны, а радиационные граничные условия не включаются в анализ. Следовательно, соотношение (7.13) может быть переписано в таком виде, чтобы в случае линейного анализа получить

$$\int_V \bar{\theta}'^T \mathbf{k} {}^{t+\Delta t}\theta' dV + \int_{S_c} \bar{\theta}^S h {}^{t+\Delta t}\theta^S dS = {}^{t+\Delta t}Q + \int_{S_e} \bar{\theta}^S h {}^{t+\Delta t}\theta_e dS, \quad (7.15)$$

то есть соотношение, которое может быть непосредственно разрешено относительно неизвестной температуры ${}^{t+\Delta t}\theta$.

При общем нелинейном анализе теплопередачи соотношение (7.13) представляет собой нелинейное уравнение для неизвестной температуры в момент времени $t + \Delta t$. Приближенное решение для этой температуры может быть получено путем представления соотношения (7.13) в приращениях так, как это описывается в таблице 7.1. Как и при анализе напряжений, это преобразование можно рассматривать в качестве первого шага в итерационном процессе Ньютона–Рафсона для равновесия тепловых потоков, при котором

$${}^{t+\Delta t}\theta^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\theta^{(i-1)} + \Delta\theta^{(i)}, \quad (7.16)$$

где ${}^{t+\Delta t}\theta^{(i-1)}$ — распределение температуры в конце $(i-1)$ -й итерации, а $\Delta\theta^{(i)}$ — приращение температуры при i -й итерации; кроме того, ${}^{t+\Delta t}\theta^{(0)} = {}^t\theta$. В таблице 7.1 мы используем θ для описания $\Delta\theta^{(1)}$ и рассматриваем уравнение для первой итерации.

При реализации полной итерации по Ньютону–Рафсону решение соотношения (7.13) было бы получено путем использования соотношения (7.16) и видоизменения всех переменных, входящих в уравнение для приращений из таблицы 7.1, применительно к каждой итерации. Следовательно, для $i = 1, 2, \dots$ получим решение

$$\begin{aligned} & \int_V \bar{\theta}'^T {}^{t+\Delta t}\mathbf{k}^{(i-1)} \Delta\theta^{(i)} dV + \\ & + \int_{S_c} \bar{\theta}^S {}^{t+\Delta t}h^{(i-1)} \Delta\theta^{S(i)} dS + \int_{S_r} \bar{\theta}^S {}^{t+\Delta t}\kappa^{(i-1)} \Delta\theta^{S(i)} dS = \\ & = {}^{t+\Delta t}Q + \int_{S_c} \bar{\theta}^S {}^{t+\Delta t}h^{(i-1)} ({}^{t+\Delta t}\theta_e - {}^{t+\Delta t}\theta^{S(i-1)}) dS + \\ & + \int_{S_r} \bar{\theta}^S {}^{t+\Delta t}\kappa^{(i-1)} ({}^{t+\Delta t}\theta_r - {}^{t+\Delta t}\theta^{S(i-1)}) dS - \\ & - \int_V \bar{\theta}'^T {}^{t+\Delta t}\mathbf{k}^{(i-1)} {}^{t+\Delta t}\theta^{(i-1)} dV, \quad (7.17) \end{aligned}$$

где величины ${}^{t+\Delta t}h^{(i-1)}$, ${}^{t+\Delta t}\kappa^{(i-1)}$ и ${}^{t+\Delta t}\mathbf{k}^{(i-1)}$ представляют собой коэффициенты конвекции и радиации, а также основополагающую матрицу теплопроводности, причем все они соответствуют температуре ${}^{t+\Delta t}\theta^{(i-1)}$.

Зачастую на практике применяется модифицированный процесс итераций Ньютона–Рафсона, при котором левая часть соотношения (7.17) оценивается только в начале шага по времени и не видоизменяется вплоть до следующего приращения во времени (см. раздел 8.4.1).

Несмотря на то, что могло бы показаться, что фактическая линеаризация уравнения равновесия тепловых потоков осуществляется в таблице 7.1, более тщательное изучение свидетельствует о том, что уравнения в этой таблице соответствуют всего лишь приближенной линеаризации. Следовательно, в общем случае соотношение (7.17) также не осуществляет полной линеаризации относительно состояния предыдущей итерации. Трудность состоит в том, что в процесс линеаризации должно быть включено и упрощение

Таблица 7.1. Уравнение в приращениях для нелинейного равновесного потока тепла

1. Уравнение равновесия в момент времени $t + \Delta t$.

$$\int_V \bar{\theta}'^T t+\Delta t \mathbf{k}^{t+\Delta t} \theta' dV = {}^{t+\Delta t}Q + \int_{S_c} \bar{\theta}^S t+\Delta t h({}^{t+\Delta t}\theta_c - {}^{t+\Delta t}\theta^S) dS + \\ + \int_{S_r} \bar{\theta}^S t+\Delta t \kappa({}^{t+\Delta t}\theta_r - {}^{t+\Delta t}\theta^S) dS.$$

2. Линеаризация уравнения

Мы используем ${}^{t+\Delta t}\theta = {}^t\theta + \theta'$; ${}^{t+\Delta t}\theta' = {}^t\theta' + \theta''$; ${}^t\tilde{\kappa} = 4 {}^t h_r ({}^t\theta^S)^3$;

$${}^t\kappa = {}^t h_r (({}^{t+\Delta t}\theta_r)^2 + ({}^t\theta^S)^2)({}^{t+\Delta t}\theta_r + {}^t\theta^S).$$

Подставляя результат в уравнение для теплового потока в равновесии, получаем

$$\int_V \bar{\theta}'^T {}^t\mathbf{k}\theta' dV + \int_{S_c} \bar{\theta}^S {}^t h \theta^S dS + \int_{S_c} \bar{\theta}^S {}^t\tilde{\kappa} \theta^S dS = \\ = {}^{t+\Delta t}Q + \int_{S_c} \bar{\theta}^S {}^t h ({}^{t+\Delta t}\theta_c - {}^t\theta^S) dS + \int_{S_r} \bar{\theta}^S {}^t\kappa ({}^{t+\Delta t}\theta_r - {}^t\theta^S) dS - \int_V \bar{\theta}'^T {}^t\mathbf{k} {}^t\theta' dV.$$

соотношений, связывающих такие материальные константы, как коэффициенты теплопроводности, конвекции и излучения, если только они зависят от температуры, а это можно осуществить только тогда, когда функциональные связи этих материальных свойств с температурой задаются в аналитической форме. Как реализуется это наблюдение, мы демонстрируем на следующем примере.

Пример 7.2: Рассмотрим анализ плиты, показанной на рис. 7.2. Построим сформулированную в приращениях форму принципа виртуальных температур для модифицированной и полной версий процесса итераций Ньютона-Рафсона.

Принцип виртуальных температур для одномерной задачи, в которой рассматривается единица площади поперечного сечения плиты, имеет вид

$$\int_0^L \bar{\theta}' {}^{t+\Delta t} k {}^{t+\Delta t} \theta' dx = [\bar{\theta}^S q^S]_{x=0} + [\bar{\theta}^S {}^{t+\Delta t} h ({}^{t+\Delta t}\theta_e - {}^{t+\Delta t}\theta^S)]_{x=L} + \\ + [\bar{\theta}^S {}^{t+\Delta t} \kappa ({}^{t+\Delta t}\theta_r - {}^{t+\Delta t}\theta^S)]_{x=L}, \quad (a)$$

где ${}^{t+\Delta t}\theta' = \partial {}^{t+\Delta t}\theta / \partial x$, $\bar{\theta}' = \partial \bar{\theta} / \partial x$, а величина ${}^{t+\Delta t}\kappa$ измеряется в градусах Кельвина.

Форма итерационного процесса Ньютона-Рафсона, представленная в приращениях, основывается на представлении, данном (для первой итерации) в таблице 7.1, а именно

$$\int_0^L \bar{\theta}' (10 + 2 {}^t\theta) \Delta \theta'^{(i)} dx + [\bar{\theta}^S (2 + {}^t\theta^S) \Delta \theta^{S(i)}]_{x=L} + \\ + [\bar{\theta}^S 4 h_r ({}^t\theta^S)^3 \Delta \theta^{S(i)}]_{x=L} = [\bar{\theta}^S q^S]_{x=0} + \\ + [\bar{\theta}^S (2 + {}^{t+\Delta t}\theta^{S(i-1)}) (20 - {}^{t+\Delta t}\theta^{S(i-1)})]_{x=L} + \\ + \{\bar{\theta}^S {}^{t+\Delta t}\kappa^{(i-1)} [100 - {}^{t+\Delta t}\theta^{S(i-1)}]\}_{x=L} - \\ - \int_0^L \bar{\theta}' (10 + 2 {}^{t+\Delta t}\theta^{(i-1)}) {}^{t+\Delta t}\theta'^{(i-1)} dx. \quad (b)$$

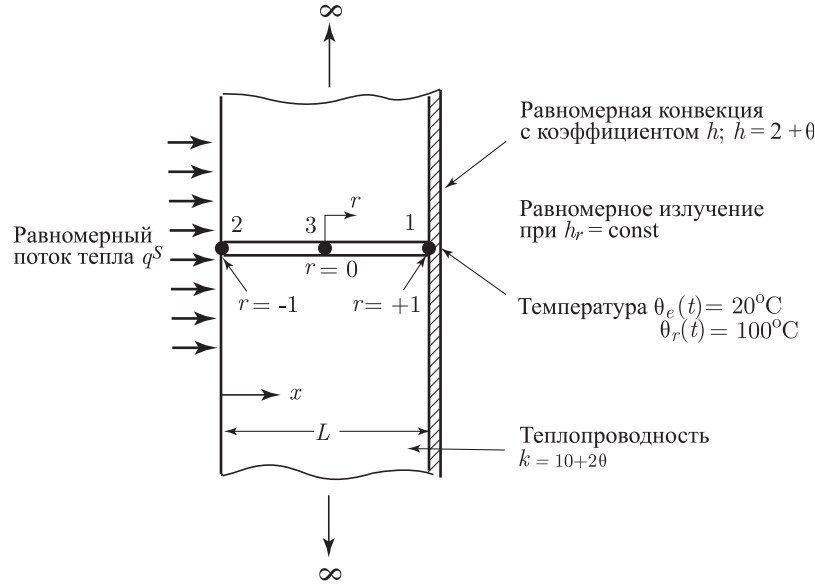


Рис. 7.2. Анализ бесконечной плиты

В случае полной версии итерационного процесса Ньютона–Рафсона используется тот же вид правой части уравнения, однако его левая часть задается в виде

$$\begin{aligned} \text{Левая часть} = & \int_0^L \bar{\theta}' (10 + 2^{t+\Delta t} \theta^{(i-1)}) \Delta \theta^{(i)} dx + \\ & + [\bar{\theta}^S (2 + {}^{t+\Delta t} \theta^{S(i-1)}) \Delta \theta^{S(i)}] \Big|_{x=L} + \\ & + [\bar{\theta}^S 4h_r ({}^{t+\Delta t} \theta^{S(i-1)})^3 \Delta \theta^{S(i)}] \Big|_{x=L}. \quad (\text{с}) \end{aligned}$$

Однако фактическая линейаризация осуществляется путем дифференцирования уравнения принципа виртуальных температур по отношению к последнему из рассчитанных состояний, причем используются аналитические выражения.

В качестве примера рассмотрим член с теплопроводностью в соотношении (а) и воспользуемся той процедурой линейаризации относительно состояния в момент времени t , которую мы применяли в разделе 6.3.1. Следовательно, мы используем разложение в ряд Тейлора

$$\bar{\theta}' {}^{t+\Delta t} q \doteq \bar{\theta}' {}^t q + \frac{\partial}{\partial \theta} (\bar{\theta}' {}^t q) d\theta.$$

Если учесть, однако, что $\partial \bar{\theta}' / \partial \theta = 0$, то получаем

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\bar{\theta}' {}^t q) d\theta = \left[\bar{\theta}' \frac{\partial}{\partial \theta} {}^t q \right] d\theta.$$

Теперь, подставив ${}^t q = -(10 + 2^t \theta)(\partial^t \theta / \partial x)$, имеем

$$\bar{\theta}' {}^{t+\Delta t} q \doteq -\bar{\theta}' \left(\underbrace{[10 + 2^t \theta]}_{\text{член 1}} \frac{\partial^t \theta}{\partial x} + \underbrace{2 \frac{\partial^t \theta}{\partial x}}_{\text{член 2}} d\theta + \underbrace{(10 + 2^t \theta) d\theta'}_{\text{член 3}} \right). \quad (\text{d})$$

Отметим, что член 1 и член 3 в правой части соотношения (d) включены в сформулированную в приращениях версию принципа виртуальных температур, данную в соотношении (b) (а также в соотношении (с)), но что, однако, член 2 представляет собой добавочное выражение, никак не отраженное ни в соотношениях (b) и (с), ни в табл. 7.1. В процессе построения конечно-элементного решения для плиты наличие этого члена привело бы к появлению несимметричной касательной матрицы теплопроводности.

Аналогичным способом может быть осуществлена также и фактическая линеаризация конвективного и радиационного членов. Как показывает эта процедура, членом, зависящим от температуры, пренебрегается также и в конвективном слагаемом, тогда как линеаризация радиационного слагаемого является полной, поскольку в данном примере коэффициент h_r не зависит от температуры (см. упражнение 7.2).

Как показано выше на специально подобранном примере, уравнение (7.17) в общем случае не соответствует точной линеаризации принципа виртуальных температур по отношению к последнему из рассчитанных температурных состояний. Однако уравнение (7.17) является частью общей схемы итерационного решения, которая, в частности, может быть применена и к случаю, когда материальные соотношения задаются в зависимости от температуры кусочно-линейным образом (такое определение может оказаться удобным при использовании некой общей программы, не основывающейся на конкретных аналитических выражениях для материальных свойств). Если сходимость итераций достигнута, то оказывается рассчитанным подходящее решение для принципа виртуальных температур (учитывая, что уравнение (7.7) удовлетворяется при правой части соотношения (7.17), равной нулю), и зачастую на практике для разумных величин шага по времени (или по нагрузке) требуется осуществить лишь несколько итераций.

Разумеется, если для представления материальных констант должны использоваться конкретные аналитические соотношения, и если возникают затруднения со сходимостью для уравнения (7.17), то может оказаться предпочтительным в процессе построения итерационного решения воспользоваться точной линеаризацией принципа виртуальных температур (см. упражнение 7.3).

Нестационарные условия

При анализе нестационарной задачи эффект теплоемкости включается в рассмотрение примерно таким же образом, как при анализе напряжений принимались во внимание силы инерции (см. разделы 4.2.1 и 6.2.3).

Принцип виртуальных температур для момента времени $t + \Delta t$ имеет форму

$$\begin{aligned} \int_V \bar{\theta}^{t+\Delta t} (\rho c)^{t+\Delta t} \dot{\theta} dV + \int_V \bar{\theta}'^{t+\Delta t} \mathbf{k}^{t+\Delta t} \theta' dV = \\ = {}^{t+\Delta t} Q + \int_{S_c} \bar{\theta}^{t+\Delta t} h ({}^{t+\Delta t} \theta_e - {}^{t+\Delta t} \theta^S) dS + \\ + \int_{S_r} \bar{\theta}^{t+\Delta t} \kappa ({}^{t+\Delta t} \theta_r - {}^{t+\Delta t} \theta^S) dS, \quad (7.18) \end{aligned}$$

где величина ${}^{t+\Delta t} Q$ определяется так, как в (7.14), однако величина ${}^{t+\Delta t} q^B$ представляет собой теперь скорость образования тепла за вычетом эффекта теплоемкости.

Соотношение (7.18) используется для расчета температуры в момент времени $t + \Delta t$ в случае, если используется неявный метод интегрирования по времени (такой, как метод Эйлера со сдвигом назад). С другой стороны, при использовании явной схемы интегрирования по времени принцип виртуальных температур применяется в момент времени t с целью расчета неизвестной температуры в момент $t + \Delta t$ (см. разделы 7.2.3 и 9.6). Если итерационный метод Ньютона–Рафсона, учитывающий влияние теплоемкости, используется при неявном интегрировании (когда имеются нелинейности), то простое интегрирование с продвижением вперед и без итераций применяется на основе явного метода.

7.2.3. Конечно-элементная дискретизация уравнений теплопроводности

Конечно-элементное решение уравнений, определяющих теплопередачу, строится с применением процедур, аналогичных тем, которые используются при анализе напряжений. Рассмотрим вначале анализ стационарных условий. Предположим, что рассматриваемое тело в целом было идеализировано как система конечных элементов;

тогда по аналогии с анализом напряжений в момент времени $t + \Delta t$ для элемента m мы имеем

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\theta^{(m)} &= \mathbf{H}^{(m)} {}^{t+\Delta t}\theta, \\ {}^{t+\Delta t}\theta^{S(m)} &= \mathbf{H}^{S(m)} {}^{t+\Delta t}\theta, \\ {}^{t+\Delta t}\theta'^{(m)} &= \mathbf{B}^{(m)} {}^{t+\Delta t}\theta, \end{aligned} \quad (7.19)$$

где верхний индекс (m) обозначает элемент m , а величина ${}^{t+\Delta t}\theta$ представляет собой вектор всех температур в узловых точках в момент времени $t + \Delta t$,

$${}^{t+\Delta t}\theta^T = [{}^{t+\Delta t}\theta_1 \ {}^{t+\Delta t}\theta_2 \ \dots \ {}^{t+\Delta t}\theta_n]. \quad (7.20)$$

Матрицы $\mathbf{H}^{(m)}$ и $\mathbf{B}^{(m)}$ — это элементные интерполяционные матрицы температуры и температурного градиента, соответственно, а матрица $\mathbf{H}^{S(m)}$ — это интерполяционная матрица поверхностной температуры. С помощью формул (7.19) мы даем оценку элементных температур и температурных градиентов в момент времени $t + \Delta t$, однако те же самые интерполяционные матрицы используются также и для расчет температурных условий элемента в любой другой момент времени, а следовательно, для определения приращений температур и температурных градиентов.

Линейные стационарные условия

Используя соотношения (7.19) и подставляя их в уравнение (7.15), мы получим определяющие конечно-элементные уравнения в рамках линейного анализа теплопередачи:

$$(\mathbf{K}^k + \mathbf{K}^c) {}^{t+\Delta t}\theta = {}^{t+\Delta t}\mathbf{Q} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}_c, \quad (7.21)$$

где \mathbf{K}^k представляет собой матрицу проводимости,

$$\mathbf{K}^k = \sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \mathbf{k}^{(m)} \mathbf{B}^{(m)} dV^{(m)}, \quad (7.22)$$

а \mathbf{K}^c — матрицу конвекции,

$$\mathbf{K}^c = \sum_m \int_{S_c^{(m)}} h^{(m)} \mathbf{H}^{S(m)T} \mathbf{H}^{S(m)} dS^{(m)}. \quad (7.23)$$

Вектор теплового потока ${}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}$, вводимого в узловой точке, задается в виде

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{Q} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}_B + {}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}_S + {}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}_C, \quad (7.24)$$

где

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}_B = \sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{H}^{(m)T} {}^{t+\Delta t}q^{B(m)} dV^{(m)}, \quad (7.25)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}_S = \sum_m \int_{S_q^{(m)}} \mathbf{H}^{S(m)T} {}^{t+\Delta t}q^{S(m)} dS^{(m)}, \quad (7.26)$$

а величина ${}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}_C$ представляет собой вектор концентрированного ввода теплового потока в узловой точке. Вклад ${}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}^e$ в тепловой поток в узловой точке обусловлен действием конвективных граничных условий. Если воспользоваться интерполяциями температуры поверхности элемента с целью определения температуры ${}^{t+\Delta t}\theta_e$ на поверхности элемента в зависимости от заданных температур в заданных узловых точках окружающей области ${}^{t+\Delta t}\theta_e$, то мы имеем

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}^e = \sum_m \int_{S_c^{(m)}} h^{(m)} \mathbf{H}^{S(m)T} \mathbf{H}^{S(m)} {}^{t+\Delta t}\theta_e dS^{(m)}. \quad (7.27)$$

Данная выше формулировка эффективно используется при наличии изопараметрических конечных элементов с переменным числом узлов, как это было обсуждено в главе 5. Расчет элементных матриц мы демонстрируем на следующем примере.

Пример 7.3: Рассмотрим показанный на рис. 7.3 изопараметрический элемент с четырьмя узлами. Обсудим вопрос о расчете матрицы теплопроводности \mathbf{K}^k , матрицы конвекции \mathbf{K}^c , а также векторов ввода теплового потока ${}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}_B$ и ${}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}^e$.

Матрицы и векторы, используемые в соотношении (7.28), получаются непосредственно из тех индивидуальных членов, которые используются в соотношении (7.17) и которые определены в табл. 7.2. Вектор потока тепла в узловой точке $t+\Delta t \mathbf{Q}$ был определен ранее посредством формулы (7.24).

Таблица 7.2. Конечно-элементные матрицы при нелинейном анализе

Интеграл	Оценка для конечного элемента
$\int_v \bar{\theta}'^T t+\Delta t \mathbf{t}^{(i-1)} \Delta \theta'^{(i)} dV$	$t+\Delta t \mathbf{K}^{k(i-1)} \Delta \theta^{(i)} =$ $= \left(\sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} t+\Delta t \mathbf{K}^{(m)(i-1)} \mathbf{B}^{(m)} dV^{(m)} \right) \Delta \theta^{(i)}$
$\int_{S_c} \bar{\theta}^S t+\Delta t h^{(i-1)} \Delta \theta^{S(i)} dS$	$t+\Delta t \mathbf{K}^{c(i-1)} \Delta \theta^{(i)} =$ $= \left(\sum_m \int_{S_c^{(m)}} t+\Delta t h^{(m)(i-1)} \mathbf{H}^{S(m)T} \mathbf{H}^{S(m)} dS^{(m)} \right) \Delta \theta^{(i)}$
$\int_{S_r} \bar{\theta}^S t+\Delta t \tilde{\kappa}^{(i-1)} \Delta \theta^{S(i)} dS$	$t+\Delta t \mathbf{K}^{r(i-1)} \Delta \theta^{(i)} =$ $= \left(\sum_m \int_{S_r^{(m)}} t+\Delta t \tilde{\kappa}^{(m)(i-1)} \mathbf{H}^{S(m)T} \mathbf{H}^{S(m)} dS^{(m)} \right) \Delta \theta^{(i)}$
$\int_{S_c} \bar{\theta}^S t+\Delta t h^{(i-1)} (t+\Delta t \theta_e - t+\Delta t \theta^{S(i-1)}) dS$	$t+\Delta t \mathbf{Q}^{c(i-1)} =$ $= \sum_m \int_{S_c^{(m)}} t+\Delta t h^{(m)(i-1)} \mathbf{H}^{S(m)T} [\mathbf{H}^{S(m)} (t+\Delta t \theta_e -$ $- t+\Delta t \theta^{(i-1)})] dS^{(m)}$
$\int_{S_r} \bar{\theta}^S t+\Delta t \kappa^{(i-1)} (t+\Delta t \theta_r - t+\Delta t \theta^{S(i-1)}) dS$	$t+\Delta t \mathbf{Q}^{r(i-1)} =$ $= \sum_m \int_{S_r^{(m)}} t+\Delta t \kappa^{(m)(i-1)} \mathbf{H}^{S(m)T} [\mathbf{H}^{S(m)} (t+\Delta t \theta_r -$ $- t+\Delta t \theta^{(i-1)})] dS^{(m)}$
$\int_V \bar{\theta}'^T t+\Delta t \mathbf{K}^{(i-1)} t+\Delta t \theta'^{(i-1)} dV$	$t+\Delta t m b q^{k(i-1)} =$ $= \sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} [t+\Delta t \mathbf{K}^{(m)(i-1)} \mathbf{B}^{(m)} t+\Delta t \theta^{(i-1)}] dV^{(m)}$

Заданные значения температуры

Помимо задания конвективных и радиационных граничных условий могут быть заданы также и условия, касающиеся значений температуры в узловых точках. Эти граничные условия могут быть оформлены аналогично тому, как известные значения смещений в узловых точках задаются при анализе напряжений.

Общепринятая процедура состоит в том, чтобы подставить известные значения температуры в узловых точках в уравнения (7.21) и (7.28), определяющие равновесие тепловых потоков, и вычеркнуть соответствующие уравнения из числа тех, которые нужно решить (см. раздел 4.2.2). Однако эффективным путем задания значений температуры в узловых точках может оказаться та процедура, которая применяется для задания конвективных граничных условий. А именно, если приписать коэффициенту конвекции h очень большое значение, и притом значительно превышающее проводимость материала, то температура узловой точки на поверхности будет равна заданной температуре окружающей среды в той же узловой точке.

Пример 7.4: Дайте вывод определяющих конечно-элементных уравнений для анализа показанной на рис. 7.2 плиты с параллельными сторонами, пренебрегая, однако, радиационными эффектами. Воспользуйтесь модифицированным решением Ньютона–Рафсона с применением одного единственного параболического одномерного элемента для моделирования плиты (на практике, в зависимости от величины температурного

градиента, определяемого при анализе, может понадобиться значительно большее число элементов).

Определяющие уравнения для решения этой задачи получаются из уравнения (7.28),

$$({}^t\mathbf{K}^k + {}^t\mathbf{K}^c) \Delta\theta^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{Q} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}^{c(i-1)} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}^{k(i-1)}, \quad (\text{a})$$

где

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{K}^k &= \int_V \mathbf{B}^T {}^t k \mathbf{B} dV, \\ {}^t\mathbf{K}^c &= \int_{S_c} {}^t h \mathbf{H}^{ST} \mathbf{H}^S dS, \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}^{c(i-1)} &= \int_{S_c} {}^{t+\Delta t} h^{(i-1)} \mathbf{H}^{ST} [\mathbf{H}^S ({}^{t+\Delta t}\theta_e - {}^{t+\Delta t}\theta^{(i-1)})] dS, \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}^{k(i-1)} &= \int_V \mathbf{B}^T [{}^{t+\Delta t} k^{(i-1)} \mathbf{B} {}^{t+\Delta t}\theta^{(i-1)}] dV, \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}^T &= [0 \quad q^S \quad 0], \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned} \Delta\theta^{(i)T} &= [\Delta\theta_1^{(i)} \quad \Delta\theta_2^{(i)} \quad \Delta\theta_3^{(i)}], \\ {}^{t+\Delta t}\theta^{(i)T} &= [{}^{t+\Delta t}\theta_1^{(i-1)} \quad {}^{t+\Delta t}\theta_2^{(i-1)} \quad {}^{t+\Delta t}\theta_3^{(i-1)}], \\ {}^{t+\Delta t}\theta_e^T &= [20 \quad 0 \quad 0]. \end{aligned}$$

В случае одномерного параболического элемента мы используем интерполяционные функции h_1 , h_2 и h_3 , показанные на рис. 5.4, чтобы построить \mathbf{H} ,

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} r(1+r) & -\frac{1}{2} r(1-r) & (1-r^2) \end{bmatrix},$$

и матрица \mathbf{H}^S , соответствующая узлу 1, равна \mathbf{H} , вычисляемой при $r = +1$,

$$\mathbf{H}^S = [1 \quad 0 \quad 0].$$

Кроме того, мы имеем $J = L/2$; следовательно,

$$\mathbf{B} = \frac{2}{L} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} 9(1+2r) & -\frac{1}{2} (1-2r) & -2r \end{bmatrix}.$$

Далее, проводимость материала задается, например, для момента времени t , как

$${}^t k = 10 + 2 \sum_{i=1}^3 h_i {}^t \theta_i.$$

И, подобно этому, для коэффициента конвекции имеем:

$${}^t h|_{r=+1} = 2 + {}^t t_1.$$

Когда все эти величины определены, мы можем вычислить все матрицы, входящие в уравнение (а), и осуществить температурный анализ. Отметим, что мы используем равенства $S_c = 1$ и $V = 1 \times L$.

Анализ, включающий эффекты радиации, предлагается провести в упражнении 7.6.

Нестационарный анализ

Как уже упоминалось ранее, при проведении нестационарного анализа теплопередачи эффекты теплоемкости включаются в этот анализ, характеризуя собой часть скорости порождения тепла. Однако уравнения, используемые в процессе решения, зависят, как и при анализе конструкций, от того, используется ли явная или неявная схема интегрирования по времени (см. главу 9, а также, например, работу [Bathe, Khoshgoftaar, 1979-A]).

Если используется *неявная схема Эйлера интегрирования по времени со сдвигом назад*, то используемые при этом уравнения равновесия тепловых потоков получаются

непосредственно из уравнений, определяющих стационарные условия (см. (7.18)). А именно, если использовать для элемента m соотношение

$$\dot{\theta}^{(m)}(x, y, z, t) = \mathbf{H}^{(m)}(x, y, z) \dot{\theta}(t), \quad (7.30)$$

а затем воспользоваться формулой (7.12), то в уравнении (7.28) будем иметь

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}_B = \sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{H}^{(m)T} ({}^{t+\Delta t}q^{B(m)} - {}^{t+\Delta t}(\rho c)^{(m)} \mathbf{H}^{(m)} {}^{t+\Delta t}\dot{\theta}) dV^{(m)}, \quad (7.31)$$

где величина ${}^{t+\Delta t}q^{B(m)}$ уже не включает в себя ту скорость, с которой тепло накапливается в материале. Следовательно, конечно-элементные уравнения, определяющие равновесие тепловых потоков и рассматриваемые в нестационарных условиях, при линейном анализе имеют форму

$$\mathbf{C} {}^{t+\Delta t}\dot{\theta} + (\mathbf{K}^k + \mathbf{K}^c) {}^{t+\Delta t}\theta = {}^{t+\Delta t}\mathbf{Q} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}^e, \quad (7.32)$$

а при нелинейном анализе (используя полную итерацию Ньютона–Рафсона, но без линеаризации эффекта теплоемкости, см. раздел 9.6), —

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\mathbf{C}^{(i)} {}^{t+\Delta t}\dot{\theta}^{(i)} + ({}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{k(i-1)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{c(i-1)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{r(i-1)}) \Delta\theta^{(i)} = \\ = {}^{t+\Delta t}\mathbf{Q} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}^{c(i-1)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}^{r(i-1)} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}^{k(i-1)}, \end{aligned} \quad (7.33)$$

где \mathbf{C} и ${}^{t+\Delta t}\mathbf{C}^{(i)}$ представляют собой матрицы теплоемкости,

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{H}^{(m)T} \rho c^{(m)} \mathbf{H}^{(m)} dV^{(m)}, \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{C}^{(i)} &= \sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{H}^{(m)T} {}^{t+\Delta t}(\rho c)^{(m)(i)} \mathbf{H}^{(m)} dV^{(m)}. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Матрицы, определяемые согласно (7.34), представляют собой совместимые матрицы теплоемкости, так как одни и те же элементные интерполяции применяются как для температур, так и для производных температур по времени. Если следовать представлениям анализа смещений, то имеется также возможность использовать огрубленную матрицу теплоемкости и огрубленный вектор вводимого потока тепла, вычисляемые путем простого огрубления теплоемкостей и вводимых тепловых потоков с использованием надлежащих площадей ввода для узлов элемента (см. раздел 4.2.4).

Если, в противоположность этому, используется явная схема Эйлера интегрирования по времени со сдвигом вперед, то решение для неизвестных температур в момент времени $t + \Delta t$ получается путем рассмотрения уравнения равновесия тепловых потоков в момент времени t . Применяя соотношение (7.7) для момента времени t и подставляя конечно-элементные интерполяции для температур, градиентов температуры и производных от температур по времени, мы получаем для случаев линейного и нелинейного анализа, соответственно,

$$\mathbf{C}^t \dot{\theta} = {}^t\mathbf{Q} + {}^t\mathbf{Q}^c - {}^t\mathbf{Q}^k, \quad (7.35)$$

$${}^t\mathbf{C}^t \dot{\theta} = {}^t\mathbf{Q} + {}^t\mathbf{Q}^c + {}^t\mathbf{Q}^t - {}^t\mathbf{Q}^k, \quad (7.36)$$

где векторы потоков тепла, вводимого в узловых точках, фигурирующие в правых частях формул (7.35) и (7.36), определяются согласно таблице 7.2 (но верхний индекс $(i-1)$ не применяется, а $t + \Delta t$ заменяется на t). Решение, использующее явную схему интегрирования по времени, эффективно только тогда, когда применяется огрубленная матрица теплоемкости.

В заключение данного раздела следует напомнить, что в приведенные выше формулировки мы не включили эффекты фазовых превращений, а также образования скрытой теплоты и взаимного влияния тел, излучающих друг в друга. Эти эффекты могут быть включены в анализ, как это вкратце и описывается в приводимых ниже примерах. Решение определяющих уравнений, зависящее от времени, мы обсудим в разделе 9.6.

Пример 7.5: Будем считать, что плита, показанная на рис. 7.2, имеет первоначально температуру θ_i , и что эта температура меньше температуры изменения фаз θ_{ph} . Нагрев плиты будет происходить с прохождением значения θ_{ph} и, следовательно, со сменой

фазы. Предположим, что плита состоит из чистого вещества со скрытой теплотой l в расчете на единицу массы, с постоянными плотностью ρ и удельной теплоемкостью c . Требуется показать, как эффект скрытой теплоты может быть включен в нестационарный анализ плиты.

В процессе этого решения задачи на поверхности разделения фаз S_{ph} должны выполняться следующие граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \theta_{ph} \\ \Delta q^S dS &= -\rho l \frac{dV}{dt} \end{aligned} \right\} \quad \text{на поверхности } S_{ph}, \quad (a)$$

где dV/dt соответствует скорости объема, в данный момент испытывающего фазовый переход на поверхности S_{ph} . Соотношения (a) констатируют, что на поверхности, разделяющей две фазы, тепло поглощается со скоростью, пропорциональной объемной скорости фазового перехода данного материала.

В данном случае необходимо проводить нестационарный анализ. Мы пользуемся простой элементной идеализацией с тремя узлами и с огрубленной матрицей теплоемкости (для единицы площади поперечного сечения),

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \rho c \frac{L}{4} & & \\ & \rho c \frac{L}{2} & \\ & & \rho c \frac{L}{4} \end{bmatrix}. \quad (b)$$

Кроме того, мы предпочитаем воспользоваться схемой интегрирования Эйлера со сдвигом назад (детали см. в разделе 9.6), при постоянном шаге по времени Δt , когда

$${}^{t+\Delta t}\dot{\theta}^{(i)} = \frac{{}^{t+\Delta t}\theta^{(i)} - {}^t\theta}{\Delta t} = \frac{\theta^{(i)}}{\Delta t}. \quad (c)$$

Используя соотношения (b) и (c) при заданном начальном условии и с матрицами, определяемыми в примере 7.4, можно непосредственно осуществить нестационарный анализ, не включающий в себя эффекты скрытой теплоты.

Однако, желая ввести фигурирующие в (a) условия на поверхности разделения фаз, мы вычисляем в каждой узловой точке «вклад скрытой теплоты». Это дает в результате вектор \mathbf{H}_l ,

$$\mathbf{H}_l = \begin{bmatrix} \rho l \frac{L}{4} \\ \rho l \frac{L}{2} \\ \rho l \frac{L}{4} \end{bmatrix}. \quad (d)$$

Обозначим символом $H_{l, \text{total}, k}$ тот компонент \mathbf{H}_l , который соответствует узловой точке k . После этого нестационарный анализ с учетом эффектов скрытой теплоты, может быть осуществлен следующим образом.

До тех пор, пока величина ${}^{t+\Delta t}\theta_k^{(i)}$, рассчитанная посредством обычного пошагового решения, оказывается меньше, чем θ_{ph} , решение не будет содержать ничего, связанного со скрытой теплотой.

Рассмотрим однако тот случай, когда в начале нового шага ${}^t\theta + \Delta\theta_k^{(1)} = {}^{t+\Delta t}\theta_k^{(1)} \geq \theta_{ph}$, и когда в процессе приводимого ниже приспособления к учету скрытой теплоты «проектируемые» (но не принятые) приращения узловых значений температуры имеют форму $\Delta\theta_k^{(i)} > 0$. После этого мы вычисляем на первом шаге после пересечения поверхности смены фазы:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_k &= \theta_{ph} - {}^t\theta_k, \\ \Delta Q_{l, k}^{(1)} &= \int_{V_k} \frac{1}{\Delta t} \rho c (\Delta\theta_k^{(1)} - \tilde{\theta}_k) dV, \end{aligned} \quad (e)$$

$$\Delta Q_{l,k}^{(i)} = \int_{V_k} \frac{1}{\Delta t} \rho c \Delta \theta_k^{(i)} dV; \quad i = 2, 3, \dots,$$

для всех последующих шагов и итераций с пересечением поверхности смены фазы:

$$\Delta Q_{l,k}^{(i)} = \int_{V_k} \frac{1}{\Delta t} \rho c \Delta \theta_k^{(i)} dV; \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

где объемное интегрирование осуществляется по объему V_k , связанному с узлом k конечного элемента, пока не получим

$$\sum_{\substack{\text{шаги,} \\ \text{итерации}}} \Delta Q_{l,k}^{(i)} \Delta t = H_{l, \text{total}, k}. \quad (f)$$

При проведении последней итерации для достижения значения $H_{l, \text{total}, k}$ можно использовать только часть значения $\Delta Q_{l,k}^{(i)} \Delta t$.

Процедура решения основана на соблюдении того условия, что до тех пор, пока применимо значение $\Delta Q_{l,k}^{(i)}$, приращение температуры в узле k задается только через значение $\tilde{\theta}_k$, определяемое формулой (е), а не через обычную сумму всех $\Delta \theta_k^{(i)}$. Эти температурные приращения добавляются, как и обычно, к текущим значениям температуры только после того, как будет выполнено условие (f). Следовательно, по существу, повышение температуры в узле ограничено значением температуры смены фаз θ_{ph} до тех пор, пока величина $H_{l, \text{total}, k}$ подводится к этому узлу. Та же самая концепция используется и тогда, когда смена фаз происходит при охлаждении и когда рассматривается не чистое вещество (в последнем случае температура не остается постоянной при смене фаз). Подробности, соответствующие такому подходу к решению, приводятся в работе [Rolph, Bathe, 1982].

Пример 7.6: Рассмотрим две плиты, показанные на рис. 7.4 и излучающие только друг на друга. Предположим, что имеет место серое, диффузное, поверхностное излучение. Предлагается сформулировать задачу о потоке тепла между плитами.

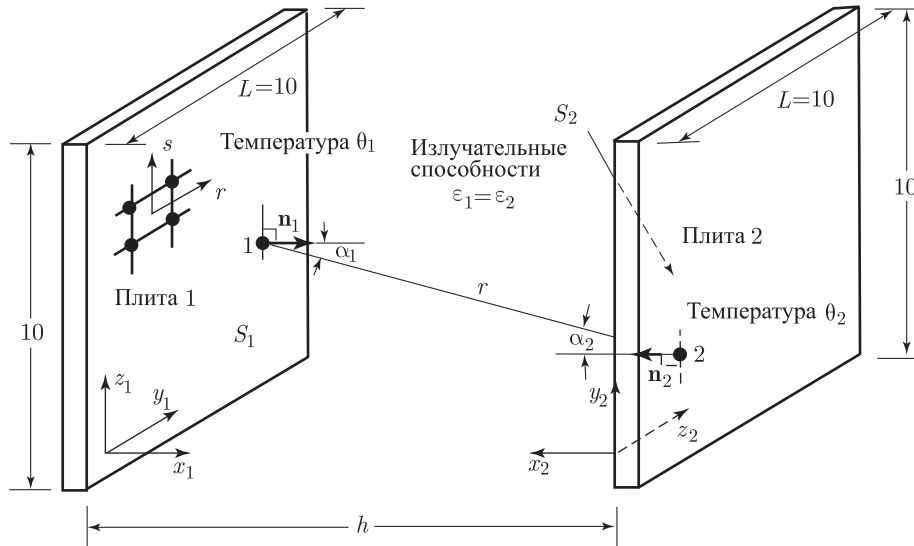


Рис. 7.4. Две плиты, излучающие тепло друг на друга

В данном примере предполагается, что температуры обеих плит заданы. Разумеется, при фактическом анализе температуры поверхностей плит также должны рассчитываться. Чтобы определить обусловленный излучением тепловой поток между двумя плитами, мы вводим в дополнение к температуре еще одну переменную величину, а именно — излучаемость. Уравнения излучаемости между двумя излучающими поверхностями, именуемых как поверхность 1 и поверхность 2, основываются на законе косинусов Ламберта (см. [Sparrow, Cess, 1978]).

$$R_1(y_1, z_1) = \epsilon_1 \sigma \theta_1^4(y_1, z_1) + \rho_1 \int_{S_2} R_2(y_2, z_2) \frac{\cos \alpha_1(y_1, z_1) \cos \alpha_2(y_2, z_2)}{\pi r^2(y_1, z_1, y_2, z_2)} dy_2 dz_2, \quad (a)$$

$$R_2(y_2, z_2) = \epsilon_2 \sigma \theta_2^4(y_2, z_2) + \rho_2 \int_{S_1} R_1(y_1, z_1) \frac{\cos \alpha_1(y_1, z_1) \cos \alpha_2(y_2, z_2)}{\pi r^2(y_1, z_1, y_2, z_2)} dy_1 dz_1, \quad (b)$$

где для двух поверхностей ϵ_1 и ϵ_2 представляют собой излучательные способности, σ — постоянная Стефана–Больцмана, ρ_1 и ρ_2 — отражательные способности (для случая серого диффузного излучения $\rho_1 = 1 - \epsilon_1$, $\rho_2 = 1 - \epsilon_2$), а α_1 и α_2 — это углы между нормальными и лучом излучения между двумя рассматриваемыми точками. Длина этого луча равна r . Если излучаемости на поверхностях плит известны, то излучательный поток тепла, исходящий из поверхности i в точке (y_i, z_i) , задается формулой

$$q_i(y_i, z_i) = \frac{\epsilon_i}{\rho_i} (\sigma \theta_i^4 - R_i) \big|_{y_i, z_i}. \quad (c)$$

Для конечно-элементного решения уравнений излучаемости воспользуемся методом Галеркина, придавая соотношению (a) вес δR_1 , а соотношению (b) — вес δR_2 (см. (3.14)). После этого мы дискретизируем обе поверхности обычным образом; например, используя элементы с четырьмя узлами, для каждого элемента на поверхности 1 имеем

$$\begin{aligned} y_1 &= \sum_{k=1}^4 h_k(r, s) y_1^k, \\ z_1 &= \sum_{k=1}^4 h_k(r, s) z_1^k, \\ R_1 &= \sum_{k=1}^4 h_k(r, s) R_1^k, \end{aligned}$$

где R_1^k — это неизвестные излучаемости в узлах элемента на поверхности 1.

После этого процедура Галеркина с конечно-элементным разложением дает уравнение

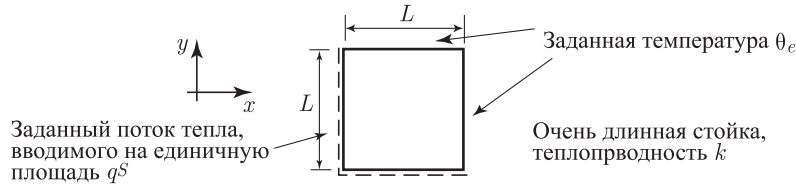
$$\mathbf{K}_R \mathbf{R} = \mathbf{Q}^\epsilon, \quad (d)$$

где вектор \mathbf{R} содержит список всех узловых переменных в форме излучаемости (для обеих поверхностей), а \mathbf{Q}^ϵ представляет собой вынуждающий вектор, соответствующий эмитируемым значениям энергии $(\epsilon_1/\rho_1)\sigma\theta_1^4$ и $(\epsilon_2/\rho_2)\sigma\theta_2^4$ на поверхностях. Решение уравнения (d) дает значения излучаемости на поверхностях, а затем с использованием соотношения (c) рассчитывается тепловой поток по направлению к поверхностям. Отметим, что оценка элементов в \mathbf{K}_R осуществляется путем численного интегрирования, включающего в себя оценку члена $(\cos \alpha_1 \cos \alpha_2)/\pi r^2$.

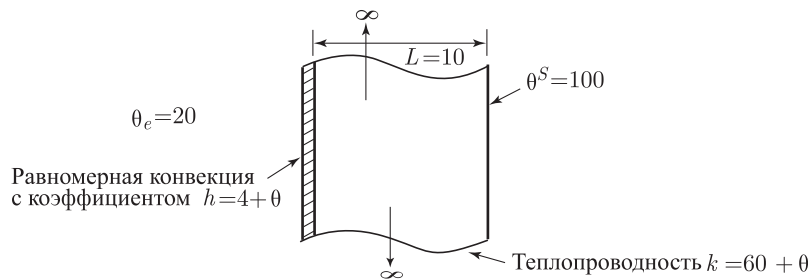
При практическом анализе эта процедура может охватывать искривленные поверхности общего вида и некоторые препятствия, а в этом случае следует включать проверку того факта, что две дифференциальные поверхности (такие, как создающие вклады площадки в окрестности точек интегрирования) могут «видеть друг друга». Разумеется, как это уже отмечалось ранее, на практике значения температур поверхностей обычно неизвестны и их также требуется рассчитывать.

7.2.4. Упражнения

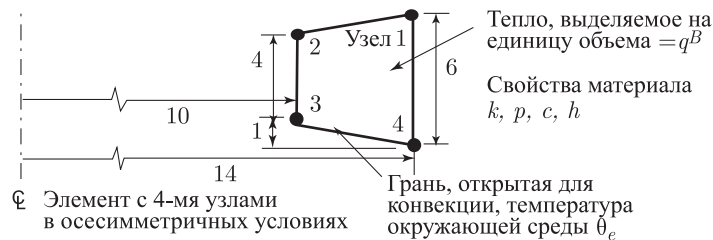
- 7.1. Рассмотрим показанный здесь столбик квадратного сечения. Предположите, что соблюдаются условия плоского теплового потока (в плоскости x, y) и сформулируйте для этого случая принцип виртуальных температур (7.7). После этого, исходя из указанного принципа, дайте вывод определяющих дифференциальных уравнений потока тепла внутри столбика и на его поверхности.



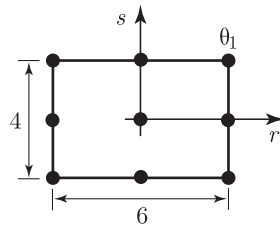
- 7.2. Рассмотрите пример 7.2 и проведите фактическую линеаризацию принципа виртуальных температур относительно состояния $t + \Delta t$, итерация $(i - 1)$ (фактическая линеаризация члена с теплопроводностью была проведена в примере 7.2).
- 7.3. Предположите, что показанная здесь плита должна быть проанализирована в стационарных условиях, пользуясь полной итерацией Ньютона–Рафсона. Дайте вывод сформулированного в приращениях уравнения для принципа виртуальных температур, соответствующего общему уравнению из таблицы 7.1, а затем определите любые дополнительные члены, которые необходимо включить для осуществления полной линеаризации для полного решения Ньютона–Рафсона.



- 7.4. Показанный здесь изопараметрический элемент с четырьмя узлами должен быть использован при линейном нестационарном анализе теплопередачи. Сформулируйте все выражения/матрицы, требуемые для расчета матриц теплоемкости, теплопроводности и конвекции, а также векторы нагрузки для тепловых потоков, однако не проводите никаких интегрирований (для осесимметричного анализа рассмотрите 1 радиан).

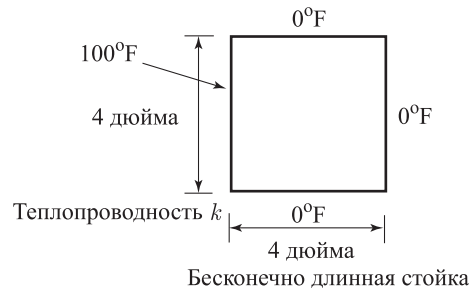


- 7.5. Рассмотрите изопараметрический элемент с девятью узлами, используемый при анализе теплопередачи и показанный здесь. Рассчитайте члены $K(1, 1)$ и $C(1, 1)$, соответствующие матрицам теплопроводности и теплоемкости при температуре θ_1 .



Условия плоской теплопередачи
 Толщина = 2,0
 Изотропная теплопроводность k
 Удельная теплоемкость c
 Плотность ρ

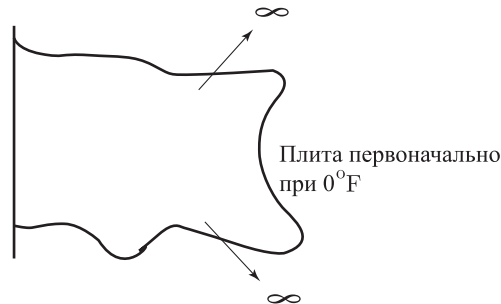
- 7.6. Рассмотрите пример 7.4 и рассчитайте все дополнительные матрицы, требуемые для в анализ радиационных эффектов, показанных на рис. 7.2.
- 7.7. Используйте компьютерную программу, желая определить стационарные распределения температуры и теплового потока в показанном здесь столбике квадратного сечения. Убедитесь в том, что было получено точное решение (*подсказка*: для определения ошибки решения можно использовать линии постоянного теплового потока, см. раздел 4.3.6).



- 7.8. Используйте компьютерную программу, желая рассмотреть затвердевание показанной здесь полубесконечной плиты из жидкого материала (см. пример 7.5, используйте одномерную модель).

Внезапно создается температура поверхности -45°F и она поддерживается постоянной

Свойства материала:
 $k = 1,08$ б.т.е./ (с·дюйм· $^\circ\text{F}$)
 $\rho C = 1$ б.т.е./ (дюйм 3 · $^\circ\text{F}$)
 $\rho I = 70,26$ б.т.е./ дюйм 3
 $\theta_{ph} = -0,1^\circ\text{F}$



7.3. Анализ задач, связанных с полем

Уравнения, определяющие теплопередачу и описанные в разделе 7.2 с использованием конечно-элементных процедур, остаются непосредственно применимыми и к некоторым задачам, связанным с полями. Эта аналогия конкретизируется в табл. 7.3. Отсюда следует, что на практике, если в нашем распоряжении имеется конечно-элементная программа для анализа теплопередачи, то та же самая программа может быть непосредственно применена и для целого ряда других задач путем простого использования надлежащих переменных поля. Ниже мы рассмотрим более подробно некоторые задачи, связанные с полем.

7.3.1. Фильтрация

Уравнения, рассмотренные в разделе 7.2.1, оказываются непосредственно применимыми к анализу процессов фильтрации при условии, что в рассматриваемой ситуации поток является ограниченным. В этом случае все граничные поверхности и все граничные

Таблица 7.3. Аналогии при анализе задач, связанных с полем

Тип задачи	Переменная θ	Постоянные k_x, k_y, k_z	Вводимая величина q^B	Вводимая величина q^S
Теплопередача	Температура	Теплопроводность	Внутренняя генерация тепла	Заданный тепловой поток
Фильтрация	Полный напор	Проницаемость	Внутренняя генерация течения	Заданное условие течения
Кручение	Функция напряжения	(Модуль сдвига) ⁻¹	2×(Угол кручения)	—
Безвихревое течение невязкой несжимаемой жидкости	Функция потенциала	1	Источник или сток	Заданная скорость
Электрический ток	Электрическое напряжение	Электропроводность	Внутренний источник тока	Заданный ток
Анализ электростатического поля	Потенциал поля	Диэлектрическая проницаемость	Плотность заряда	Заданное поле тока

условия известны. Чтобы построить решение для условий неограниченного потока, нам понадобится также рассчитать положение свободной поверхности, а для этой цели применить специальную процедуру решения (см. работы [Desai, 1976], а также [Bathe, Khoshgoftaar, 1979-B]).

Основной закон фильтрации, используемый при анализе, — это закон Дарси, выражающий поток через пористую среду в терминах градиента полного потенциала ϕ (см., например, работу [Verruijt, 1970]),

$$q_x = -k_x \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad q_y = -k_y \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad q_z = -k_z \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (7.37)$$

Непрерывность условий течения выражается после этого уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = -q^B, \quad (7.38)$$

где k_x, k_y и k_z — это коэффициенты проницаемости среды, а q^B — это поток, создаваемый в единице объема. Граничные условия сводятся к заданию значений полного потенциала ϕ на поверхности S_ϕ ,

$$\phi|_{S_\phi} = \phi^S, \quad (7.39)$$

а также к заданию условия течения вдоль поверхности S_q ,

$$k_n \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{S_q} = q^S, \quad (7.40)$$

где символ n обозначает координатную ось в направлении единичного вектора нормали \mathbf{n} (указывающего наружу) к поверхности. В соотношениях (7.38)–(7.40) мы используем

те же обозначения, что и в соотношениях (7.1)–(7.3) и, сравнивая эти группы уравнений, мы обнаруживаем полную аналогию между условиями теплопередачи, рассмотренными в разделе 7.2, и рассмотренными здесь условиями фильтрации. Рисунок 7.5 служит иллюстрацией конечно-элементного анализа задачи о фильтрации.

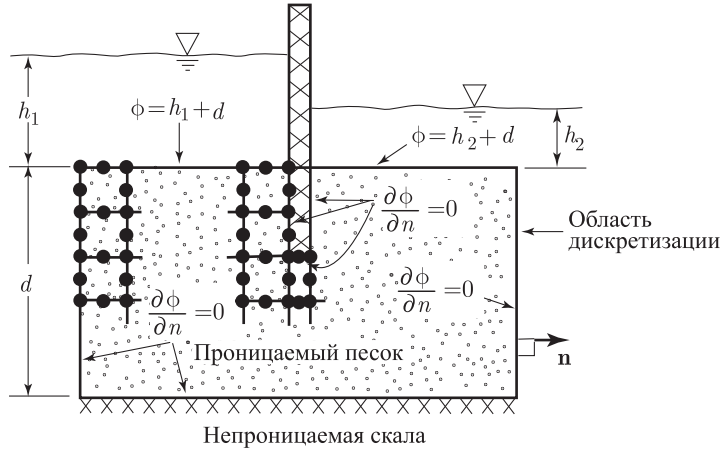


Рис. 7.5. Анализ условий фильтрации под плотиной

7.3.2. Несжимаемое невязкое течение

Рассмотрим несжимаемую жидкость в условиях безвихревого двумерного течения. В этом случае завихренность исчезает, так что (см., например, книгу [White, 1986])

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0, \quad (7.41)$$

где v_x и v_y — это скорости течения жидкости в направлениях x и y соответственно. Условие неразрывности задается уравнением

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (7.42)$$

Чтобы решить уравнения (7.41) и (7.42), определим функцию потенциала $\phi(x, y)$, такую, что

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (7.43)$$

После этого соотношение (7.41) удовлетворяется тождественно, а соотношение (7.42) приводится к форме

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0. \quad (7.44)$$

Используя соотношение (7.43), мы задаем все граничные нормальные скорости v_n^S , обращаясь при этом к выражению

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_S = v_n^S, \quad (7.45)$$

где символ $\partial \phi / \partial n$ обозначает производную ϕ по направлению единичного вектора нормали (указывающего наружу) к границе. Кроме того, нам следует задать произвольное значение ϕ в некой произвольной точке, так как решение уравнения (7.44) с условием (7.45) может быть определено только после того, как будет зафиксировано одно значение ϕ .

Решение уравнения (7.44) с соответствующими граничными условиями аналогично решению задачи о теплопередаче. Как только потенциальная функция ϕ определена, мы можем использовать уравнение Бернулли для расчета распределения давления в жидкости. Рисунок 7.6 служит иллюстрацией конечно-элементного анализа течения вокруг некоторого объекта в канале.

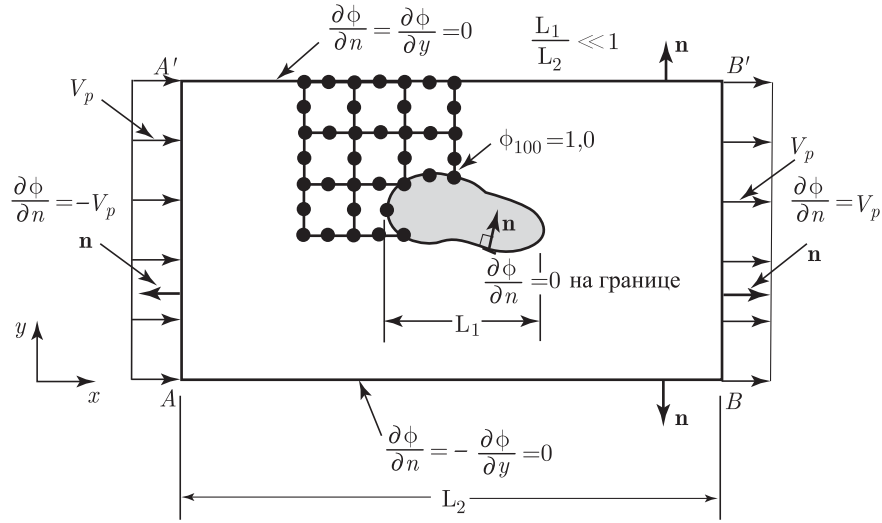


Рис. 7.6. Анализ течения в канале, содержащем островок, причем v_p — это заданная скорость. Отметим, что согласно условию втекания на границе $A-A'$ требуется задать отрицательный градиент ϕ , тогда как на границе $B-B'$ он задается положительным значением (однако при использовании программы теплопередачи граничные условия имели бы вид $q^S = v_p$ на $A-A'$ и $q^S = -v_p$ на $B-B'$ для течения вправо, поскольку поток рассчитывается как величина, пропорциональная градиенту потенциала с минусом)

7.3.3. Кручение

Если ввести функцию напряжений ϕ , то упругое поведение вала с его кручением определяется уравнением (см., например, книгу [Fung, 1965])

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2G\theta = 0, \quad (7.46)$$

где θ — это угол закрутки в расчете на единицу длины, а G — модуль сдвига материала вала. Компоненты напряжения сдвига в любой точке могут быть рассчитаны путем использования формул

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (7.47)$$

тогда как действующий на систему крутящий момент задается в виде

$$T = 2 \int_A \phi dA, \quad (7.48)$$

где A — площадь поперечного сечения вала. Граничное условие для ϕ выражается в том, что функция ϕ равна нулю на границе вала. Следовательно, уравнения теплопередачи (7.1) и (7.2) определяют также и крутильное поведение вала при том условии, что используются надлежащие переменные поля.

Пример 7.7: Требуется рассчитать крутильную жесткость вала квадратного сечения с использованием двух различных конечно-элементных сеток, показанных на рис. 7.7.

Пользуясь аналогией между данной задачей о кручении и задачей о теплопередаче, для которой определяющие конечно-элементные уравнения были сформулированы в разделе 7.2.3, мы хотели бы теперь решить уравнение

$$\left[\sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \mathbf{k}^{*(m)} \mathbf{B}^{(m)} dV^{(m)} \right] \phi = \sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{H}^{(m)T} \theta dV^{(m)}, \quad (a)$$

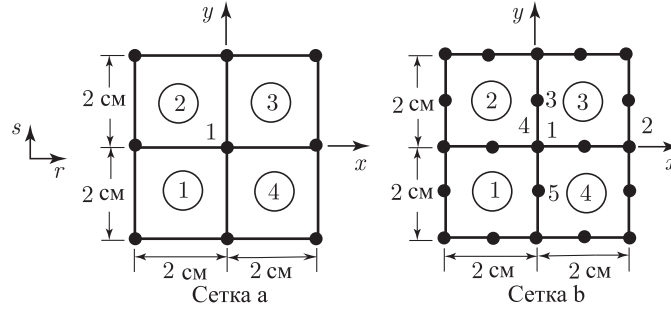


Рис. 7.7. Конечно-элементные сетки, используемые при расчете жесткости на кручение для вала квадратного сечения

где

$$\begin{aligned}\phi^{(m)} &= \mathbf{H}^{(m)} \phi, \\ \phi^{r(m)} &= \mathbf{B}^{(m)} \phi, \\ \phi^T &= [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_n], \\ \mathbf{k}^{*(m)} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2G} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2G} \end{bmatrix}, \\ \phi'^{(m)} &= \begin{bmatrix} -\tau_{zy} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{(m)} \phi\end{aligned}$$

и

$$T = \sum_m \int_{A^{(m)}} 2\phi^{(m)} dA^{(m)}. \quad (\text{b})$$

В каждом случае анализа нам требуется рассмотреть только один элемент вследствие наличия условий симметрии. Пользуясь сеткой (а), мы имеем для элемента 1

$$\phi = \frac{1}{4} (1+r)(1+s)\phi_1$$

и

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ \frac{\partial \phi}{\partial s} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1+s) \\ (1+r) \end{bmatrix} \phi_1.$$

Следовательно, уравнения из (а) приводятся к виду (если рассматривать единицу длины вала)

$$\begin{aligned}\left\{ 4 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{4} [(1+s)(1+r)] \frac{1}{2G} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1+s) \\ (1+r) \end{bmatrix} \det \mathbf{J} dr ds \right\} \phi_1 = \\ = 4\theta \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{4} (1+r)(1+s) \det \mathbf{J} dr ds; \quad \det \mathbf{J} = 1,\end{aligned}$$

или

$$\frac{1}{3G} \phi_1 = \theta.$$

Следовательно,

$$\phi_1 = 3G\theta.$$

Таким образом, используя формулу (b), получим

$$T = 4 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} (1+r)(1+s)(3G\theta) dr ds = 24G\theta,$$

так что

$$\frac{T}{\theta} = 24G.$$

Рассматривая после этого сетку (b), мы убеждаемся, что значения ϕ на границе равны нулю и что для элемента 1 мы имеем $\phi_4 = \phi_5$. Следовательно, нам требуется вычислить только две неизвестные величины, ϕ_1 и ϕ_4 . Интерполяционные функции для элемента с восемью узлами приводятся на рис. 5.6. Проводя выкладки таким же образом, как и при анализе с сеткой (a), мы получаем

$$\phi_1 = 2,157G\theta,$$

$$\phi_4 = 1,921G\theta,$$

$$T = 35,2G\theta,$$

так что

$$\frac{T}{\theta} = 35,2G.$$

Точное решение уравнения (7.46) для T/θ равно $36,1G$. Следовательно, анализ с сеткой (a) дает ошибку 33,5 процента, тогда как анализ с сеткой (b) дает результат с ошибкой всего лишь 2,5 процента ¹⁾.

7.3.4. Акустическая жидкость

Рассмотрим невязкую изэнтропическую жидкость, испытывающую лишь малые смещения. Если не включать в рассмотрение эффекты массовых сил, то уравнения, определяющие реакцию жидкости, — это уравнения количества движения (см., например, книгу [White, 1986]),

$$\rho \dot{\mathbf{v}} + \nabla p = 0, \quad (7.49)$$

а также уравнение изменения давления

$$\beta \nabla \cdot \mathbf{v} + \dot{p} = 0, \quad (7.50)$$

где \mathbf{v} — это скорость частиц жидкости, p — давление, а β — объемный модуль. Граничные условия имеют следующий вид:

На границе S_v задается скорость v_n^S в направлении единичного вектора нормали \mathbf{n} (указывающего наружу) к границе жидкости,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{S_v} = v_n^S. \quad (7.51)$$

На границе S_f задается давление p^S ,

$$p|_{S_f} = p^S. \quad (7.52)$$

Чтобы построить решение, определяющее движение жидкости, удобно ввести потенциал скорости ϕ , где

$$\mathbf{v} = \nabla \phi; \quad p = -\rho \dot{\phi}. \quad (7.53)$$

¹⁾ Отметим, что этот конечно-элементный анализ недооценивает значения функции напряжения ϕ (при заданном значении закрутки θ), и это дает нижнюю границу для значения крутильной жесткости, тогда как анализ смещений и напряжений, проводимый с помощью процедур из главы 4, дал бы верхнюю границу для T/θ (при том условии, что выполняются требования монотонной сходимости из раздела 4.3.2).

При таком определении уравнение (7.49) тождественно удовлетворяется (если пренебречь изменениями плотности в (7.49)), а уравнение (7.50) превращается в уравнение акустики

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2} \ddot{\phi} \quad (7.54)$$

с волновой скоростью $c = \sqrt{\beta/\rho}$. Разумеется, теперь граничные условия имеют вид

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{S_v} = v_n^S \quad (7.55)$$

и

$$-\rho \dot{\phi}|_{S_f} = p^S. \quad (7.56)$$

Если сравнить определяющие уравнения (7.54)–(7.56) с определяющими уравнениями для теплопередачи, то мы убеждаемся, что имеет место ярко выраженная аналогия. Однако при анализе жидкости берется вторая производная по времени от переменной, характеризующей решение, вместо первой производной при анализе теплопередачи. Следовательно, если пользоваться, например, программой для теплопередачи в применении к расчету частот акустического поля, то искомые частоты будут найдены путем вычисления квадратных корней от рассчитанных частот. Мы демонстрируем справедливость этого наблюдения на следующем примере.

Пример 7.8: Рассмотрим акустическую жидкость, находящуюся в замкнутой жесткой полости (см. рис. 7.8). Воспользуйтесь сеткой 2×2 применительно к элементам с восемью узлами, чтобы моделировать исследуемую жидкость, и дайте оценку минимальной частоты вибрации жидкости.

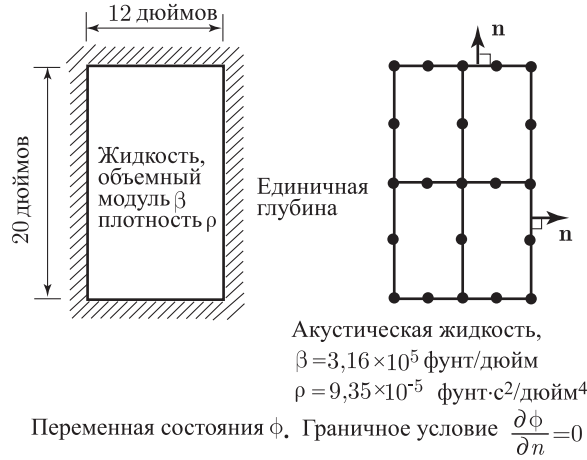


Рис. 7.8. Постановка задачи и конечно-элементная дискретизация для жидкости внутри жесткой полости

Мы используем уравнение (7.54), определяющее движение жидкости, с граничным условием (7.55). Следовательно, по аналогии с выводом уравнения для принципа виртуальных температур (см. пример 7.1), соответствующее вариационное уравнение имеет вид

$$\int_V \delta \phi \frac{1}{c^2} \ddot{\phi} dV + \int_V (\nabla \delta \phi) \cdot (\nabla \phi) dV = 0. \quad (a)$$

Подставляя в уравнение (a) конечно-элементные интерполяции, получим

$$\mathbf{M} \ddot{\phi} + \mathbf{K} \phi = 0, \quad (b)$$

где член $\mathbf{M}\ddot{\phi}$ соответствует энергии деформаций, а член $\mathbf{K}\phi$ — кинетической энергии. Соответствующая задача о собственных значениях имеет вид

$$\mathbf{K}\phi = \omega^2 \mathbf{M}\phi. \quad (c)$$

Матрицы \mathbf{K} и \mathbf{M} рассчитываются так, как при анализе теплопередачи матрица теплопроводности \mathbf{K} (с единичными материальными теплопроводностями во всех направлениях) соответствует матрице \mathbf{K} из уравнения (b), а матрица теплоемкости \mathbf{C} (при члене $\rho c|_{\text{перенос тепла}}$, замененном на член $1/c^2|_{\text{акустическая жидкость}}$) соответствует матрице \mathbf{M} из уравнения (b)).

Таким образом, задача (c) может быть решена непосредственно, с использованием программы анализа теплопередачи, которая вычисляет собственные значения для задачи $\mathbf{K}\theta = \lambda \mathbf{C}\theta$ (см. раздел 9.6). Для конечно-элементной дискретизации 2×2 применительно к элементам с восемью узлами результаты имеют вид $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = (9166)^2$, $\lambda_3 = (15277)^2$ и, следовательно, минимальная из отличных от нуля расчетных частот для задачи (c) равна $\omega_2 = 9166$. Следует отметить, что нулевая частота соответствует значению $\phi = \text{const}$ в полости. Аналитическое решение задачи дает $\omega_2 = 9132$.

Соотношения (7.54)–(7.56) были использованы для того, чтобы разработать эффективную конечно-элементную схему для моделирования взаимодействия между акустическими жидкостями и конструкциями (см. работы [Everstine, 1981], [Olson, Bathe, 1985], а также пример 7.9). Кроме того, процедура анализа была обобщена с целью рассмотрения жидкости, испытывающей очень существенные движения частиц (см. работу [Nitikitpaiboon, Bathe, 1993]).

Пример 7.9: Рассмотрим задачу, показанную на рис. 7.9 и приведенную здесь же модель. Определите матрицы для задачи о взаимодействии жидкости с конструкцией и рассчитайте минимальную частоту вибраций.

Единичная площадь поперечного сечения
Объемный модуль $\beta = 2,1 \times 10^9$ Па
Массовая плотность $\rho = 1000$ кг/м³

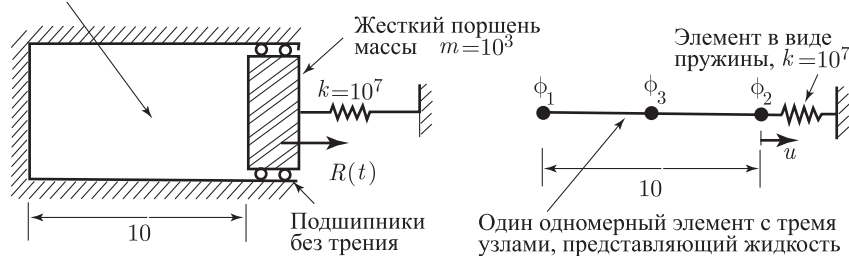


Рис. 7.9. Акустическая жидкость в полости с поршнем

Анализ рассматриваемой задачи требует совместного исследования реакции жидкости и реакции пружины.

Принцип виртуальной работы для системы поршень/пружина дает

$$\bar{u}m\ddot{u} + \bar{u}ku = \bar{u}f^F + \bar{u}R(t), \quad (a)$$

где символ f^F соответствует той силе, с которой жидкость воздействует на систему поршень/пружина. «Принцип виртуальных потенциалов» для данной жидкости имеет вид

$$\int_{V_f} \bar{\phi} \frac{1}{c^2} \ddot{\phi} dV_f + \int_{V_f} \nabla \bar{\phi} \cdot \nabla \phi dV_f = \int_I \bar{\phi}^I \dot{u}_n dI, \quad (b)$$

где символом I обозначается (смачиваемая) поверхность раздела жидкость–конструкция, а символом u_n — скорость движения этой поверхности (т. е. скорость поршня). Мы отмечаем, что уравнение (b) выводится из уравнения (7.54), как мы это показали (для

принципа виртуальных температур) в примере 7.1. Кроме того, мы имеем $\partial\phi/\partial n|_I = \dot{u}_n$, где n обозначает направление единичного вектора нормали (указывающего наружу от этой области).

Далее, мы представляем область, занятую жидкостью, с помощью одного элемента с тремя узлами. Используя выкладки, приводимые в главе 5 (см., в частности, раздел 5.3), мы в соответствии с соотношением (b) имеем

$$\mathbf{M}_F \ddot{\phi} + \mathbf{K}_F \phi = \mathbf{R}_{\dot{u}}$$

при матрицах \mathbf{M}_F , \mathbf{K}_F и $\mathbf{R}_{\dot{u}}$, определяемых выражением

$$\frac{1}{c^2} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \text{симм.} & & \frac{16}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \\ \ddot{\phi}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{7}{30} & \frac{1}{30} & -\frac{8}{30} \\ & \frac{7}{30} & -\frac{8}{30} \\ \text{симм.} & & \frac{16}{30} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{u}_n \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (c)$$

После этого мы можем объединить (a) и (c), замечая, что величина u_n в (c) равна производной смещения по времени из уравнения (a) и что величина f^F задается через давление жидкости,

$$f^F = -\rho_F \dot{\phi}|_I = -\rho_F \dot{\phi}_2,$$

так как полость имеет единичную площадь поперечного сечения.

Объединенные уравнения для системы жидкость–конструкция имеют вид

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & -\rho_F \mathbf{M}_F & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \\ \ddot{\phi}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \rho_F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho_F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & -\rho_F \mathbf{K}_F & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (d)$$

Таблица 7.4. Частоты в модели жидкость–структура

Совмещенная система	Поршень без жидкости	Жидкость без поршня, открытая полость	Жидкость со стационарным поршнем, $k = \infty$
$\omega_1 = 0$		0	0
$\omega_2 = 212$	$\omega = \sqrt{k/m} = 100$	229	502
$\omega_3 = 744$		822	1122

Мы видим, что для получения в (d) симметричных матриц из коэффициентов мы умножаем обе части соотношения (c) на $-\rho_F$. Отметим также, что в (d) матрица коэффициентов при первых производных по времени от узловых переменных не является амортизирующей матрицей; она просто представляет собой матрицу, связывающую реакцию жидкости с реакцией конструкции. Физическое затухание в данной задаче не имеет места.

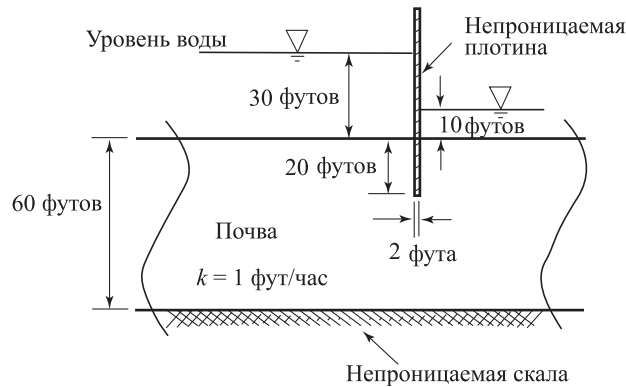
Решение данной задачи могло бы быть получено с помощью интегрирования по времени динамической реакции с использованием, например, правила трапеций (см. раздел 9.2.4). Однако представляет интерес также рассчитать частоты свободных

вибраций системы жидкость–конструкция и сравнить их с частотами колебаний жидкости и конструкции, когда они действуют по отдельности. Эти частоты перечисляются в таблице 7.4. Отметим, что вследствие наличия жидкости в системе жидкость–конструкция структурная вибрация (минимальная частота) возникает при частоте, превышающей исходную на 112 процентов. Эта частота может быть выражена по формуле $\omega_2 = \sqrt{(k + k')/(m + m')}$, где величины k' и m' определяют собой увеличение жесткости и массы вследствие присутствия жидкости. Отметим также, что первая частота $\omega_1 = 0$ соответствует «твердотельной форме» при $u = 0$ и $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \text{const}$.

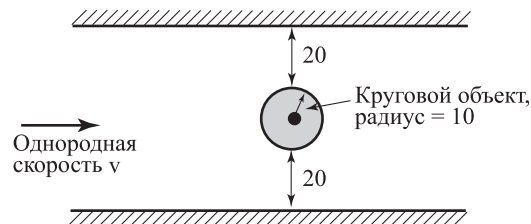
Дальнейшие подробности, связанные с этой формулировкой, приводятся в работах [Olson, Bathe, 1985], а также [Nitikitpaiboon, Bathe, 1993].

7.3.5. Упражнения

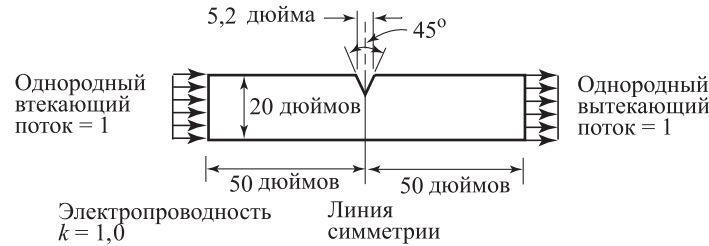
- 7.9. Используйте компьютерную программу, чтобы получить решение для фильтрационного течения в иллюстрируемой здесь задаче. Предположите, что перемычка очень длинная. Убедитесь, что вы получили точное решение для реакции системы.



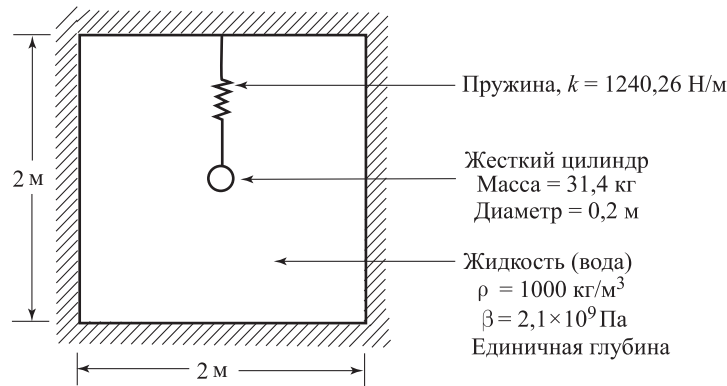
- 7.10. Используйте компьютерную программу, чтобы получить решение для течения жидкости вокруг показанного здесь кругового объекта. Предположите, что жидкость невязкая и что условия течения соответствуют плоскому потоку.



- 7.11. Используйте компьютерную программу, чтобы дать решение для крутильной жесткости вала, рассмотренного в примере 7.7.
- 7.12. Рассчитайте стационарное распределение напряжения в показанном здесь образце. Решение такого рода задачи представляет интерес при наблюдении за ростом трещин (см., например, работу [Ritchie, Bathe, 1979]).



- 7.13. Используйте компьютерную программу, чтобы получить решение для трех наименьших частот системы жидкость-пружина, рассмотренной в примере 7.9. Воспользуйтесь грубой и тонкой конечно-элементной дискретизацией и сравните ваши результаты с теми, которые приведены в примере 7.9.
- 7.14. Используйте компьютерную программу, чтобы получить решение для частот показанного здесь цилиндра, колеблющегося в полости, наполненной водой (*подсказка*: здесь эффективна модель с потенциалом ϕ , данная в разделе 7.3.4).



7.4. Анализ течений вязкой несжимаемой жидкости

Подход, часто используемый при анализе задач механики жидкости, состоит в выводе определяющих дифференциальных уравнений для конкретной формы течения, учете геометрии и соответствующих граничных условий, и последующего решения этих уравнений с использованием конечно-разностных процедур.

Однако в течение последнего десятилетия был достигнут значительный прогресс в направлении анализа *общих* задач о течении жидкости с использованием конечно-элементных процедур, и в настоящее время построены решения для очень сложных задач о течении жидкости. Исследуются течения вязкой и невязкой, сжимаемой и несжимаемой жидкости с теплопередачей или без нее, а также рассматривается взаимосвязь между реакциями конструкции и жидкости (см., например, работу [Bathe, Zhang, Wang, 1995]).

В этом разделе ставится цель обсудить вкратце вопрос о том, как представленные ранее конечно-элементные процедуры могут быть применены к анализу задач о течении жидкости, а также описать некоторые важные дополнительные технические приемы, нужные для решения практических задач о течении жидкости. Мы рассматриваем весьма широкий диапазон приложений, связанных с изучением течения несжимаемой вязкой жидкости с теплопередачей или без нее. Методы, применяемые в этой области анализа, непосредственно используются также и при построении решений для сжимаемых течений, хотя при анализе течений сжимаемой жидкости необходимо обратиться также и к анализу дополнительных сложных явлений (в особенности к расчету фронтов ударных волн).

Желая идентифицировать сходства и различия основных конечно-элементных формулировок задач в механике твердого тела (см. гл. 6) и в механике жидкости, рассмотрим

приведенную в табл. 7.5 сводку определяющих уравнений механики сплошной среды. В этой таблице и при последующем обсуждении мы используем те индексные обозначения, которые применялись в гл. 6. Если речь идет о кинематике вязкой жидкости, то частицы такой жидкости могут совершать очень большие движения, и для общего описания оказывается эффективным использовать формулировку Эйлера. Сущность этой формулировки состоит в том, что мы сосредоточиваем свое внимание на неподвижном контрольном объеме и что мы используем этот объем для проверки путем измерения равновесия и неразрывности массы жидких частиц. Это означает, что при формулировке Эйлера пишется отдельное уравнение для того, чтобы выразить соотношение, касающееся сохранения массы, — условие, которое при использовании формулировки Лагранжа воплощает в себе определитель градиента деформаций. Кроме того, это означает, что выражения для сил инерции содержат конвективные члены, которые при построении численного решения приводят к появлению несимметричной матрицы коэффициентов, зависящей от тех скоростей, которые нужно рассчитать.

Преимущество формулировки Эйлера заключается в использовании простых масштабов измерения напряжений и деформаций, а именно — тех масштабов, которые мы используем при анализе бесконечно малых смещений, за исключением того, что вместо смещений должны вычисляться скорости. Однако, если область решения изменяется, как это имеет место для задач со свободной поверхностью, то чисто эйлеровская формулировка потребует создания новых контрольных объемов, и более эффективным оказывается использование произвольной лагранжево-эйлеровской формулировки, как это вкратце и приводится ниже.

При формулировках Лагранжа (обсуждаемых в гл. 6) сетка движется вместе (является «прикрепленной») с материальными частицами. Следовательно, одна и та же материальная частица всегда находится в одной и той же точке элементной сетки (задаваемой в случае изопараметрического элемента координатами r, s, t). В чисто эйлеровской конечно-элементной формулировке точки сетки неподвижны и материальные частицы движутся через конечно-элементную сетку в любом из тех направлений, которые определяются условиями течения. В произвольной лагранжево-эйлеровской формулировке точки сетки движутся, но не обязательно вместе с материальными частицами. Фактически движение сетки соответствует характеру данной задачи и определяется алгоритмом решения. В то время, как конечно-элементная сетка проходит в процессе решения через всю область анализа, а ее границы движутся вместе с перемещениями свободных поверхностей и конструктивных (или твердых) границ, частицы жидкости движутся по отношению к точкам сетки. Этот подход позволяет моделировать свободные поверхности общего вида, а также различные взаимодействия между потоками жидкости и конструкциями (см., например, работы [Huerta, Liu, 1988], [Nitikitpaiboon, Bathe, 1993], а также [Bathe, Zhang, Wang, 1995]).

Желая продемонстрировать различия лагранжевой и эйлеровой формулировок, рассмотрим нижеследующий пример.

Пример 7.10: Движение жидких частиц в канале задается формулой

$${}^t x_1 = -5 + \sqrt{25 + 10 {}^0 x_1 + ({}^0 x_1)^2 + 4t}. \quad (a)$$

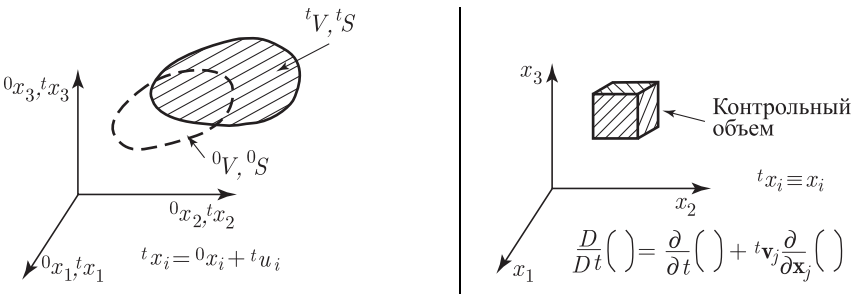
(i) Рассчитайте скорости и ускорения частиц. Выразите ваши результаты в лагранжевой форме, ${}^t \dot{u}_1 = f_1({}^0 x_1, t)$, ${}^t \ddot{u}_1 = f_2({}^0 x_1, t)$.

(ii) Исключите ${}^0 x_1$ из ваших выражений согласно п. (i), чтобы получить пространственные выражения для скоростей и ускорений.

(iii) Покажите, что ваше выражение для ускорения согласно п. (ii) может быть получено также путем сочетания локального ускорения и конвективного ускорения (т. е. путем применения обычного эйлеровского выражения).

Чтобы получить результат, требуемый согласно п. (i), мы просто дифференцируем по времени выражение из формулы (a) и замечаем, что $d^t x_1 / dt = d^t u_1 / dt$ (так как

Таблица 7.5. Основные уравнения механики сплошной среды, используемые в лагранжевой и эйлеровой формулировках

Лагранжева формулировка	Эйлерова формулировка
<p>Геометрическое представление</p> 	
<p>Сохранение массы</p> $m = \int_{0V} \rho d^0V = \int_{tV} \rho dtV \Rightarrow \Rightarrow \frac{0\rho}{t\rho} = \det({}_0^t\mathbf{X});$ $m = \int_{0V} {}^0\rho d^0V = \int_{tV} {}^t\rho dtV \Rightarrow \Rightarrow \frac{D}{Dt}({}^t\rho) + {}^t\rho \frac{\partial {}^t v_i}{\partial x_i} = 0;$ <p>Несжимаемый поток: ${}^t v_{i,i} = 0$.</p>	
<p>Уравнения движения</p> $\frac{\partial}{\partial {}^t x_j} ({}^t \tau_{ij}) + {}^t \tilde{f}_i^B = 0;$ ${}^t \tilde{f}_i^B = {}^t f_i^B - {}^t \rho {}^t \ddot{u}_i.$ $\frac{\partial}{\partial x_j} ({}^t \tau_{ij}) + {}^t \tilde{f}_i^B = 0;$ ${}^t \tilde{f}_i^B = {}^t f_i^B - {}^t \rho \frac{D}{Dt} ({}^t v_i).$	
<p>Принцип виртуальных перемещений</p> $\int_{tV} {}^t \tau_{ij} \delta {}^t e_{ij} d^tV = \int_{tV} {}^t \tilde{f}_i^B \delta u_i d^tV +$ $+ \int_{tS} {}^t f_i^S \delta u_i^S d^tS.$	<p>Принцип виртуальных скоростей</p> $\int_V {}^t \tau_{ij} \delta e_{ij} dV = \int_V {}^t \tilde{f}_i^B \delta v_i dV +$ $+ \int_S {}^t f_i^S \delta v_i^S dS.$
<p>Полная лагранжева формулировка:</p> $\int_{0V} {}^T S_{ij} \delta {}_0^t \epsilon_{ij} d^0V = {}^t \mathcal{R}.$	${}^t \tau_{ij} = -{}^t p \delta_{ij} + 2\mu {}^t e_{ij}; {}^t e_{ij} =$ $= \frac{1}{2} ({}^t v_{i,j} + {}^t v_{j,i}).$

$d^0x_1/dt = 0$); следовательно,

$$\frac{d^t u_1}{dt} = \frac{2}{[25 + 10 {}^0x_1 + ({}^0x_1)^2 + 4t]^{1/2}}. \quad (b)$$

Аналогично этому

$$\frac{d^2 {}^t u_1}{dt^2} = \frac{-4}{[25 + 10 {}^0 x_1 + ({}^0 x_1)^2 + 4t]^{3/2}}. \quad (c)$$

Чтобы переформулировать (b) и (c) в терминах ${}^t x_1$, мы могли бы с помощью (a) выразить ${}^0 x_1$, как функцию ${}^t x_1$ и t . Однако мы замечаем, что в данном простом примере имеем

$${}^t x_1 + 5 = \sqrt{25 + 10 {}^0 x_1 + ({}^0 x_1)^2 + 4t}$$

и, следовательно,

$$\frac{d {}^t u_1}{dt} = \frac{2}{{}^t x_1 + 5}; \quad \frac{d^2 {}^t u_1}{dt^2} = \frac{-4}{({}^t x_1 + 5)^3}. \quad (d)$$

В формулировке Эйлера мы просто пишем $x_1 \equiv {}^t x_1$, причем подразумевается, что величина x_1 соответствует любому координатному значению. Разумеется, выражения в формулах (d) справедливы также и для любого момента времени. Мы должны признать, что в формулах (d) мы сосредоточиваем свое внимание на координате x_1 и измеряем скорость и ускорение частиц в тот момент, когда частицы проходят через эту координату. При этом расчете мы не используем (и, вообще говоря, не желаем знать) начальные положения частиц.

С другой стороны, если мы используем формулы (b) и (c), то мы сосредоточиваем свое внимание на частицах, определяемых начальными положениями и измеряем скорости и ускорения этих частиц в конкретный заданный момент времени.

Мы можем получить ускорение также и из формулы (d), исходя из общего эйлеровского выражения для ускорения (см. таблицу 7.4). Здесь мы используем соотношения (не вводя в обозначения верхний индекс) что позволяет получить

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} v; \quad v \equiv \frac{d {}^t u_1}{d x_1}; \quad x_1 \equiv x,$$

что дает

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2}{x+5} \right) + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{x+5} \right) \right] \left(\frac{2}{x+5} \right) = 0 - \frac{4}{(x+5)^3}.$$

Следовательно, локальная производная скорости равна нулю, а конвективная часть ускорения равна $-4/(x+5)^3$.

7.4.1. Уравнения механики сплошной среды

Давайте приведем сводку уравнений механики сплошной среды для течения несжимаемой жидкости со включением эффектов теплопередачи. Разумеется, подробный вывод этих уравнений приводится в стандартных учебниках по механике жидкости (см., например, [White, 1986] или [Schlichting, 1986]), однако здесь даем сводку этих уравнений, чтобы показать систему обозначений и обеспечить основу для вывода определяющих конечно-элементных уравнений. Мы увидим, что в некоторых отношениях обозначения, используемые ниже, отличаются от обозначений, использованных нами при анализе задач механики твердого тела (см. главу 6), так как, например, скорость v_i является теперь основной кинематической переменной, подлежащей расчету вместо смещения, решение для которого строилось при анализе твердых тел.

Если использовать неподвижную декартову систему отсчета $(x_i, i = 1, 2, 3)$, то определяющие уравнения для течения несжимаемой жидкости в области V при использовании индексных обозначений, общепринятого условия суммирования, и подразумевая, что условия в момент времени t рассматриваются без использования верхнего индекса t (который используется в табл. 7.5), имеют вид

$$\text{количество движения:} \quad \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_{i,j} v_j \right) = \tau_{ij,j} + f_i^B; \quad (7.57)$$

$$\text{закон деформации:} \quad \tau_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}; \quad (7.58)$$

$$\text{неразрывность:} \quad v_{i,i} = 0; \quad (7.59)$$

теплопередача:
$$\rho c_p \left[\frac{\partial \theta}{\partial t} + \theta_{,i} v_i \right] = (k \theta_{,i})_{,i} + q^B. \quad (7.60)$$

Здесь мы имеем:

v_i — скорость течения жидкости в направлении x_i ,

ρ — массовая плотность,

τ_{ij} — компоненты тензора напряжений,

f_i^B — компоненты вектора массовых сил,

p — давление,

δ_{ij} — дельта Кронекера,

μ — вязкость жидкости (ламинарный режим),

e_{ij} — компоненты тензора скоростных деформаций $= \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i})$,

c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении,

θ — температура,

k — теплопроводность,

q^B — скорость создания тепла в единице объема (этот член включает в себя также скорость диссипации тепла $(= 2\mu e_{ij} e_{ij})$).

Граничные условия, соответствующие уравнениям (7.57)–(7.60), имеют вид

Задание скорости жидкости v_i^S на поверхности S_v ,

$$v_i|_{S_v} = v_i^S. \quad (7.61)$$

Задание значений тяги f_i^S на поверхности S_f ,

$$\tau_{ij} n_j|_{S_f} = f_i^S, \quad (7.62)$$

где n_j — это компоненты единичного вектора нормали \mathbf{n} (указывающего наружу) по отношению к поверхности жидкости, а f_i^S — компоненты вектора тяги (физической).

Задание значений температуры θ^S на поверхности S_θ ,

$$\theta|_{S_\theta} = \theta^S. \quad (7.63)$$

Задание значений теплового потока на поверхности S_q ,

$$k \frac{\partial \theta}{\partial n} \Big|_{S_q} = q^S, \quad (7.64)$$

где q^S — поток тепла, вводимого в тело. Отметим, что к формулам (7.61)–(7.64) оказываются непосредственно применимыми те обсуждения, которые были представлены в разделах 4.2.1 и 7.2.1.

Вводимый тепловой поток из выражения (7.64) содержит в себе эффект фактически приложенного распределенного теплового потока, а также эффекты конвекции и теплопередачи путем излучения. Эти приложенные тепловые потоки включаются в анализ так, как это обсуждается в разделе 7.2.

Другая форма уравнений (7.57) получается, если эти уравнения количества движения записать так, чтобы включить в них также и условие неразрывности, см. пример 7.12. Такая форма представления называется консервативной формой (так как требование сохранения количества движения здесь налагается в явной форме) и широко используется в методах дискретизации с помощью конечных объемов, см. работу [Patankar, 1980].

Уравнения (7.57)–(7.60) представляют собой стандартные уравнения Навье–Стокса, определяющие движение вязкой, несжимаемой жидкости при ламинарном течении с теплопередачей. Присущие им нелинейности связаны с конвективными членами в (7.57) и (7.60), а также с граничным условием (7.64), обусловленным излучением. Дополнительные нелинейности возникают, если коэффициент вязкости зависит от температуры или от скоростной деформации, если удельная теплоемкость c_p , теплопроводность k ,

коэффициенты конвекции и излучения зависят от температуры, а также, разумеется, если задача включает описание турбулентности (см., например, работу [Rodi, 1984]).

Прежде чем перейти к выводу конечно-элементных уравнений, предположим, что величины μ , c_p и k постоянны и перепишем уравнения (7.57)–(7.60) в стандартной форме, отражающей некоторые важные характеристики течений жидкости. Если подставить выражения (7.58) и (7.59) в уравнение (7.57), то мы получим

$$\rho(\dot{v}_i + v_{i,j}v_j) = -p_{,i} + f_i^B + \mu v_{i,jj}. \quad (7.65)$$

Следовательно, уравнение (7.65) представляет собой уравнение количества движения, содержащее условие несжимаемости.

Теперь определим безразмерные переменные

$$\begin{aligned} x_i^* &= \frac{x_i}{L}; & v_i^* &= \frac{v_i}{v}; & t^* &= \frac{tv}{L}; \\ p^* &= \frac{p}{\rho v^2}; & f_i^{B*} &= \frac{f_i^B L}{\rho v^2}; \\ \theta^* &= \frac{\theta - \theta_0}{\Delta\theta}; & q^{B*} &= \frac{q^B L}{\rho c_p \Delta\theta}, \end{aligned} \quad (7.66)$$

где L , v , θ_0 и $\Delta\theta$ — это выбранные нами характеристические значения длины, скорости, температуры и температурного перепада для рассматриваемой здесь задачи. Используя эти безразмерные переменные, мы можем переписать уравнения количества движения и энергии в нижеследующих формах.

$$\dot{v}_i^* + \underbrace{v_{i,j}^* v_j^*}_{\text{конвекция}} = -p_{,i}^* + f_i^{B*} + \underbrace{\frac{1}{\text{Re}} v_{i,jj}^*}_{\text{диффузия}} \quad (7.67)$$

и

$$\dot{\theta}^* + \underbrace{\theta_{,i}^* v_i^*}_{\text{конвекция}} = q^{B*} + \underbrace{\frac{1}{\text{Pe}} \theta_{,ii}^*}_{\text{диффузия}}, \quad (7.68)$$

где Re — число Рейнольдса,

$$\text{Re} = \frac{vL}{\nu}; \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}, \quad (7.69)$$

а Pe — число Пекле,

$$\text{Pe} = \frac{vL}{\alpha}; \quad \alpha = \frac{k}{\rho c_p}, \quad (7.70)$$

а входящие в эти формулы величины ν и α — это кинематическая вязкость и коэффициент диффузии жидкости. Отметим, что если использовать число Прандтля $\text{Pr} = \nu/\alpha$, то мы имеем $\text{Pe} = (\text{Pr})(\text{Re})$.

Соотношения (7.67) и (7.68) демонстрируют фундаментальную трудность, возникающую при решении задач о течении жидкости: по мере того, как число Рейнольдса возрастает, течение жидкости во все большей степени определяется конвективным членом в (7.67) и, аналогично этому, по мере возрастания числа Пекле теплопередача в жидкости во все большей степени определяется конвективным членом в (7.68). В связи с этим общие процедуры анализа должны давать возможность строить решение так, чтобы находить реакцию, определяемую в первую очередь диффузией при малых числах Рейнольдса и Пекле, а при больших числах Рейнольдса и Пекле — в первую очередь конвекцией. Мы еще раз обратимся к этому замечанию в разделе 7.4.3.

7.4.2. Конечно-элементные определяющие уравнения

Конечно-элементное решение для уравнений сплошной среды, определяющих течение жидкости, строится путем установления слабой формы уравнений с помощью процедуры Галеркина (см. раздел 3.3.4, а также примеры 4.2 и 7.1). В уравнения количества движения вводятся в качестве весовых функций скорости, в уравнение неразрывности — давле-

ние, а в уравнении теплопередачи роль весовой функции играет температура. Проводя интегрирование по интересующей нас области V и пользуясь теоремой о дивергенции, чтобы понизить порядок производных в выражениях и включить естественные граничные условия как вынуждающие члены, мы получаем вариационные уравнения, подлежащие дискретизации с помощью конечно-элементных интерполяций. В результате имеем количество движения:

$$\int_V \bar{v}_i \rho (\dot{v}_i + v_{i,j} v_j) dV + \int_V \bar{e}_{ij} \tau_{ij} dV = \int_V \bar{v}_i f_i^B dV + \int_{S_f} \bar{v}_i^S f_i^S dS; \quad (7.71)$$

неразрывность:

$$\int_V \bar{p} v_{i,i} dV = 0; \quad (7.72)$$

теплопередача:

$$\int_V \bar{\theta} \rho c_p (\dot{\theta} + \theta_{,i} v_i) dV + \int_V k \bar{\theta}_{,i} \theta_{,i} dV = \int_V \bar{\theta} q^B dV + \int_{S_q} \bar{\theta}^S q^S dS, \quad (7.73)$$

где черта сверху обозначает виртуальное значение.

Мы можем считать, что соотношение (7.71) выражает собой принцип виртуальных скоростей и, конечно же, соотношение (7.73) выражает принцип виртуальных температур (см. (7.7)). Соотношения (7.71)–(7.73) весьма сходны с теми уравнениями, которые использовались в разделах 4.2 и 7.2 при исследовании напряжений и температур в твердых телах, однако эйлеровские формулировки в (7.71) и (7.73) включают в себя конвективные члены. Кроме того, рассматриваются условия несжимаемости и, поэтому, теперь становятся важными конечно-элементные формулировки и обсуждения, проведенные в разделах 4.4.3 и 4.5. Действительно, теперь мы можем непосредственно применить смешанные схемы, введенные в разделе 4.4.3, но при этом в качестве переменных использовать скорость (вместо смещения) и давление.

Предположим, что конечно-элементная дискретизация соотношений (7.71) – (7.73) осуществляется с помощью одного из элементов, введенных в разделе 4.4.3, при скорости и давлении в качестве переменных и при температуре в качестве дополнительной переменной во всех узлах для скорости (на практике мы, разумеется, воспользовались бы изопараметрическими обобщениями; см. раздел 5.3.5). Тогда матричные уравнения для одного элемента, определяющие решение, имеют вид

$$\mathbf{M}_v \hat{\mathbf{v}} + (\mathbf{K}_{\mu vv} + \mathbf{K}_{vv}) \hat{\mathbf{v}} + \mathbf{K}_{vp} \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{R}_B + \mathbf{R}_S, \quad (7.74)$$

$$\mathbf{K}_{vp}^T \hat{\mathbf{v}} = 0, \quad (7.75)$$

$$\mathbf{C} \hat{\theta} + (\mathbf{K}_{v\theta} + \mathbf{K}_{\theta\theta}) \hat{\theta} = \mathbf{Q}_B + \mathbf{Q}_S, \quad (7.76)$$

где $\hat{\mathbf{v}}$, $\hat{\theta}$ и $\hat{\mathbf{p}}$ представляют собой, соответственно, неизвестные скорости и температуры в узловых точках, а также переменную величину внутреннего давления в узловой точке или в элементе.

Например, при анализе плоского двумерного течения для элемента в плоскости x_2, x_3 мы имеем

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{v_2} & & & \\ & \mathbf{M}_{v_3} & \text{нули} & \\ & & 0 & \\ \text{симм.} & & & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}_2 \\ \hat{\mathbf{v}}_3 \\ \hat{\mathbf{p}} \\ \hat{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\mu v_2 v_2} + \mathbf{K}_{vv_2} & \mathbf{K}_{\mu v_2 v_3} & \mathbf{K}_{v_2 p} & 0 \\ \mathbf{K}_{\mu v_2 v_3}^T & \mathbf{K}_{\mu v_3 v_3} + \mathbf{K}_{vv_3} & \mathbf{K}_{v_3 p} & 0 \\ \mathbf{K}_{v_2 p}^T & \mathbf{K}_{v_3 p}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{v\theta} + \mathbf{K}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}_2 \\ \hat{\mathbf{v}}_3 \\ \hat{\mathbf{p}} \\ \hat{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{B_2} + \mathbf{R}_{S_2} \\ \mathbf{R}_{B_3} + \mathbf{R}_{S_3} \\ 0 \\ \mathbf{Q}_B + \mathbf{Q}_S \end{bmatrix}. \quad (7.77)$$

Пусть выражения для \mathbf{H} и $\tilde{\mathbf{H}}$ содержат интерполяционные функции, соответствующие скоростям, температуре и давлению. Тогда

$$\mathbf{M}_{v_2} = \mathbf{M}_{v_3} = \rho \int_V \mathbf{H}^T \mathbf{H} dV, \quad (7.78)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\mu v_2 v_2} &= \int_V (2\mu \mathbf{H}_{,x_2}^T \mathbf{H}_{,x_2} + \mu \mathbf{H}_{,x_3}^T \mathbf{H}_{,x_3}) dV, \\ \mathbf{K}_{\mu v_2 v_3} &= \int_V (\mu \mathbf{H}_{,x_3}^T \mathbf{H}_{,x_2}) dV, \\ \mathbf{K}_{\mu v_3 v_3} &= \int_V (2\mu \mathbf{H}_{,x_3}^T \mathbf{H}_{,x_3} + \mu \mathbf{H}_{,x_2}^T \mathbf{H}_{,x_2}) dV, \end{aligned} \quad (7.79)$$

$$\mathbf{K}_{vv_2} = \mathbf{K}_{vv_3} = \rho \int_V (\mathbf{H}^T \mathbf{H} \hat{\mathbf{v}}_2 \mathbf{H}_{,x_2} + \mathbf{H}^T \mathbf{H} \hat{\mathbf{v}}_3 \mathbf{H}_{,x_3}) dV, \quad (7.80)$$

$$\mathbf{K}_{v_2 p} = - \int_V \mathbf{H}_{,x_2}^T \tilde{\mathbf{H}} dV, \quad (7.81)$$

$$\mathbf{K}_{v_3 p} = - \int_V \mathbf{H}_{,x_3}^T \tilde{\mathbf{H}} dV, \quad (7.82)$$

$$\mathbf{R}_B = \int_V \mathbf{H}^T \mathbf{f}^B dV, \quad (7.83)$$

$$\mathbf{R}_S = \int_{S_f} \mathbf{H}^{ST} \mathbf{f}^S dS, \quad (7.84)$$

$$\mathbf{C} = \rho \int_V c_p \mathbf{H}^T, \mathbf{H} dV, \quad (7.85)$$

$$\mathbf{K}_{\theta\theta} = \int_V k(\mathbf{H}_{,x_2}^T \mathbf{H}_{,x_2} + \mathbf{H}_{,x_3}^T \mathbf{H}_{,x_3}) dV, \quad (7.86)$$

$$\mathbf{K}_{v\theta} = \rho \int_V c_p \mathbf{H}^T \mathbf{H} \hat{\mathbf{v}}_2 \mathbf{H}_{,x_2} dV + \rho \int_V c_p \mathbf{H}^T \mathbf{H} \hat{\mathbf{v}}_3 \mathbf{H}_{,x_3} dV, \quad (7.87)$$

$$\mathbf{Q}_B = \int_V \mathbf{H}^T q^B dV, \quad (7.88)$$

$$\mathbf{Q}_S = \int_{S_q} \mathbf{H}^{ST} q^S dS. \quad (7.89)$$

Здесь необходимо отметить, что если рассматривается прямолинейная граница, то компоненты вектора \mathbf{f}^S имеют вид

$$f_n = -p + 2\mu \frac{\partial v_n}{\partial n}, \quad (7.90)$$

$$f_t = \mu \left(\frac{\partial v_t}{\partial n} + \frac{\partial v_n}{\partial t} \right), \quad (7.91)$$

где символы n и t обозначают координатные оси, направленные по нормали и по касательной к границе, а символы v_n и v_t — нормальную и касательную компоненты скоростей на границе.

Отметим, что в силу рассмотрения условий полной несжимаемости диагональные элементы, соответствующие переменным давления, равны нулю. Следовательно, даже если переменные давления, введенные в память ячейки $\hat{\mathbf{p}}$, соответствуют внутренним переменным элемента, а не переменным в узловых точках (как при модели u/p ; см. раздел 4.4.3), то эти переменные давления не могут быть подвергнуты статическому сгущению

на уровне рассматриваемого элемента. Чтобы такая процедура могла быть применена, мы должны рассмотреть условие почти полной несжимаемости, имея в виду, что уравнение (7.72) должно было бы быть заменено на (см. разделы 4.4.3 и 4.5)

$$\int_V \bar{p} \left(\frac{\dot{p}}{\kappa} + v_{i,i} \right) dV = 0, \quad (7.92)$$

где величина κ (очень большая) соответствует объемному модулю.

Теперь мы можем обратиться ко всем тем процедурам, которые обсуждались в главах 4 (в особенности в разделах 4.4 и 4.5) и 5. Эти процедуры могут быть непосредственно применены к построению надлежащих конечно-элементных дискретизаций уравнений, определяющих течение жидкости (см. также упражнения в конце данного раздела). Мы, разумеется, можем отметить, что получаемые в результате конечно-элементные уравнения являются, в общем случае, существенно нелинейными (см. (7.77)) в силу наличия конвективных членов и граничных условий для излучения, а также потому, что в общем случае материальные свойства системы непостоянны (например, вязкость μ существенно зависит от температуры θ).

Конечно-элементные уравнения, определяющие течение жидкости и приведенные для двумерного элемента в форме (7.77), могут быть записаны в виде

$$\mathbf{R} - \mathbf{F} = 0. \quad (7.93)$$

Это соотношение должно оставаться справедливым для всех рассматриваемых моментов времени, и решение может быть получено в форме приращений для моментов времени $\Delta t, 2\Delta t, \dots$, как это обсуждается в главах 6 и 9. При стационарном анализе членами $\mathbf{M}\dot{\mathbf{v}}$ и $\mathbf{C}\dot{\theta}$ пренебрегается, и анализ в форме приращений может реализовываться с использованием итераций Ньютона–Рафсона для каждого из моментов $t + \Delta t$, причем время соответствует тогда изменяемым формам нагрузки (см. главу 6). При нестационарном анализе с использованием неявной версии интегрирования на каждом шаге по времени также должна использоваться некая форма итераций Ньютона–Рафсона. В другом варианте решения явная форма интегрирования может быть реализована применительно к скоростным и температурным переменным, тогда как для уравнения с давлением ограничение, связанное с несжимаемостью, требует применения неявной формы интегрирования.

Главная трудность при решении задач о течении жидкости состоит в том, что число искоемых переменных в общем случае является очень большим (чтобы получить реалистическое представление о реакции жидкости, нужно применять чрезвычайно подробные варианты конечно-элементной дискретизации), а также в том, что матрицы коэффициентов оказываются несимметричными. Следовательно, весьма привлекательными являются явные схемы, не требующие решения системы уравнений (см. разделы 9.5.1 и 9.6.1), а также итеративные методы решения уравнений (см. раздел 8.3).

Наконец, мы можем задать вопрос, почему для вывода конечно-элементных уравнений были использованы соотношения (7.57) и (7.60), а не соотношения (7.67) и (7.68)? Одна из причин этого состоит в том, что уравнения (7.57) и (7.60) непосредственно применимы к случаю течения с непостоянными материальными условиями. Другая причина заключается в том, что уравнение количества движения (7.57) при своем использовании в методе Галеркина приводит к появлению вектора поверхностной силы, содержащего *физические* тяговые компоненты, заданные формулами (7.90) и (7.91), тогда как если используется уравнение (7.67), то результирующий вектор поверхностной «силы» содержит компоненты не физического характера (см. пример 7.11). Поэтому модель, основанная на использовании (7.57), является зачастую более общей и естественной, в особенности при применении произвольных лагранжево-эйлеровых формулировок, используемых с целью анализа течений со свободными поверхностями, а также взаимодействий между течениями жидкости и конструкциями. Разумеется, конечно-элементные матричные уравнения (7.74)–(7.76) применимы к решению задач о течении жидкости и о теплопередаче в любом комплексе совместимых единиц измерения, в том числе при использовании безразмерных переменных.

В приводимых ниже примерах мы рассматриваем две дополнительные формы представления уравнений Навье–Стокса, которые могут быть использованы для построения конечно-элементных решений.

Пример 7.11: Рассмотрите решение уравнений Навье–Стокса (см. (7.67))

$$v_{i,j}v_j = -p_{,i} + \frac{1}{\text{Re}} v_{i,jj}; \quad i, j = 1, 2.$$

Воспользуйтесь процедурой Галеркина, проведя взвешивание членов этого уравнения умножением на скорость, и получите естественным образом возникающие граничные члены. Рассмотрите случай двумерного анализа и сравните эти члены с выражениями для физических тяговых сил.

Используя процедуру Галеркина, получим

$$\int_V \bar{v}_i \left(v_{i,j}v_j + p_{,i} - \frac{1}{\text{Re}} v_{i,jj} \right) dV = 0. \quad (\text{a})$$

Граничные члены определяются так же, как и в примерах 4.2 и 7.1. Здесь мы используем тождества

$$\bar{v}_i p_{,j} \delta_{ij} = (\bar{v}_i p \delta_{ij})_{,j} - \bar{v}_{i,j} p \delta_{ij}$$

и

$$\bar{v}_i v_{i,jj} = (\bar{v}_i v_{i,j})_{,j} - \bar{v}_{i,j} v_{i,j}.$$

Следовательно, если воспользоваться теоремой о дивергенции, мы получим из (a) граничный член

$$\int_S \bar{v}_i \left(-p \delta_{ij} + \frac{1}{\text{Re}} v_{i,j} \right) n_j dS.$$

Однако это выражение можно интерпретировать в форме

$$\int_S \bar{v}_i \tilde{f}_i dS,$$

где

$$\tilde{f}_i = \left(-p \delta_{ij} + \frac{1}{\text{Re}} v_{i,j} \right) n_j.$$

Если рассматривается прямолинейная граница, то мы имеем

$$\begin{aligned} \tilde{f}_n &= -p + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial v_n}{\partial n}, \\ \tilde{f}_t &= \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial v_t}{\partial n}, \end{aligned} \quad (\text{b})$$

где символы n и t обозначают координатные оси, направленные по нормали и по касательной к границе поверхности.

Соотношение (7.67) было получено при использовании безразмерных переменных, и при заданных характерных значениях скорости и длины мы имеем $1/\text{Re} \sim \nu$. Мы видим, следовательно, что выражения в формулах (b) не совпадают с выражениями для фактических сил в (7.90) и (7.91).

Пример 7.12: Покажите, что уравнение количества движения (7.57) может быть записано также и в форме

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + F_{ij,j} = f_i^B, \quad (\text{a})$$

где

$$F_{ij} = \rho v_j v_i - \tau_{ij}. \quad (\text{b})$$

После этого установите конкретное отличие, возникающее при использовании (a) вместо (7.57) в процедуре Галеркина для получения определяющих конечно-элементных уравнений.

Используя формулу (b), мы получим

$$F_{ij,j} = (\rho v_j v_i - \tau_{ij})_{,j} = \rho v_{j,j} v_i + \rho v_j v_{i,j} - \tau_{ij,j} = \rho v_{i,j} v_j - \tau_{ij,j}. \quad (\text{c})$$

Следовательно, как показывает проверка, использование выражения (с) в уравнении (а) приводит к уравнению (7.57).

Форма (а) называется консервативной формой уравнения количества движения, так как в силу теоремы о дивергенции для *любой* подобласти V_{SD} жидкости мы имеем

$$\int_{V_{SD}} F_{ij,j} dV = \int_{S_{SD}} F_{ij} n_j dS,$$

где S_{SD} — это площадь поверхности объема V_{SD} , а величины n_j — это компоненты единичного вектора нормали к S_{SD} . Аналогично этому, уравнение энергии также может быть записано в консервативной форме.

Чтобы установить конкретное различие в формах конечно-элементной дискретизации, нам нужно только сравнить между собой члены $f_v \bar{v}_i (v_j v_i)_{,j} dV$ и $f_v \bar{v}_i (v_{i,j} v_j) dV$, так как остальные члены являются идентичными, а различие выражается членом $f_v \bar{v}_i (v_i v_{j,i}) dV$. Как правило, в методах конечных объемов (см. книгу [Patankar, 1980]) уравнение количества движения представляется в форме (а). Отметим, однако, что если уравнение (а) используется при конечно-элементной (галеркинской) формулировке, то использование теоремы о дивергенции дает на поверхности S_f обычный тяговый член (см. пример 4.2), а также дополнительный член, включающий зависимость от неизвестных скоростей.

7.4.3. Течения с большими числами Рейнольдса и Пекле

Конечно-элементная модель течений жидкости, представленная в предыдущем разделе, является естественным развитием тех формулировок, которые были представлены ранее для анализа поведения твердых тел. Стандартная процедура Галеркина использовалась по отношению к дифференциальным уравнениям движения и теплопередачи и приводила к выводу «принципа виртуальных скоростей» и «принципа виртуальных температур». Конечно-элементная дискретизация реализуется надлежащим образом при выборе конечных элементов, являющихся устойчивыми и сходящимися при наличии ограничения на несжимаемость. Следовательно, мы использовали элементы, удовлетворяющие условию inf-sup, как это обсуждалось в разделах 4.4.3 и 4.5. С такими элементами при анализе течений с малыми числами Рейнольдса достигаются отличные результаты (в частности, для течений Стокса).

Однако, как это уже отмечалось в разделе 7.4.2, основное различие между формулировками, предназначенными для анализа течений жидкости и поведения твердых тел, связано с конвективными членами, возникающими при эйлеровской формулировке течения жидкости. Эти конвективные члены приводят к проявлению несимметричности в матрицах коэффициентов для конечных элементов и, если конвекция достаточно сильна, (как это определяется числами Рейнольдса и Пекле; см. приводимое ниже обсуждение), то система уравнений будет сильно несимметричной, и тогда возникает дополнительная трудность при численном анализе.

Однако прежде чем обсудить эту трудность, следует вспомнить, что в зависимости от вида рассматриваемого течения при повышении числа Рейнольдса и достижении определенного уровня его величины ламинарный характер течения превращается в турбулентный. Теоретически, расчет турбулентного течения остается возможным путем решения общих уравнений Навье–Стокса, представленных в предыдущем разделе, однако построение такого решения потребовало бы чрезвычайно измельченной дискретизации, позволяющей моделировать турбулентность в ее деталях. Применительно к практическим условиям течения, получаемые в результате конечно-элементные системы были бы слишком велики с точки зрения возможностей современного математического и технического обеспечения. По этой причине общепринятая практика сводится к решению уравнений Навье–Стокса для осредненного течения и к выражению эффектов турбулентности с помощью коэффициентов турбулентной вязкости и теплопроводности, а также к использованию пристеночных функций для описания поведения потока вблизи стенки.

Моделирование турбулентности представляет собой весьма обширное и важное поле исследований (см. [Rodi, 1984]), и те конечно-элементные процедуры решения, которые

мы представили ранее, во многих отношениях остаются непосредственно применимыми и здесь. Однако тогда весьма важным фактором конечно-элементной схемы должна была бы стать возможность решения уравнений Навье–Стокса, соответствующих ламинарному течению при больших числах Рейнольдса и Пекле (при сетках умеренных размеров). Именно такое решение обеспечивает основу для построения решения задачи о турбулентном течении.

Исходя из вышеизложенного, в дальнейшем мы кратко обсудим трудности построения решения при больших числах Рейнольдса (или Пекле) в предположении о ламинарном характере течения. С этой целью рассмотрим тот простейший из возможных случаев, который выявляет трудности, встречающиеся нам при общих условиях течения. Эти трудности выявляются в зависимости от величины конвективных членов, когда они сравниваются с диффузионными членами в уравнениях (7.67) и (7.68). Следовательно, мы рассмотрим модельную задачу об одномерном течении с заданной скоростью v (см. рис. 7.10). Температура задается в двух точках, определяемых значениями $x = 0$ и $x = L$, причем мы хотим рассчитать температуру в интервале $0 < x < L$.

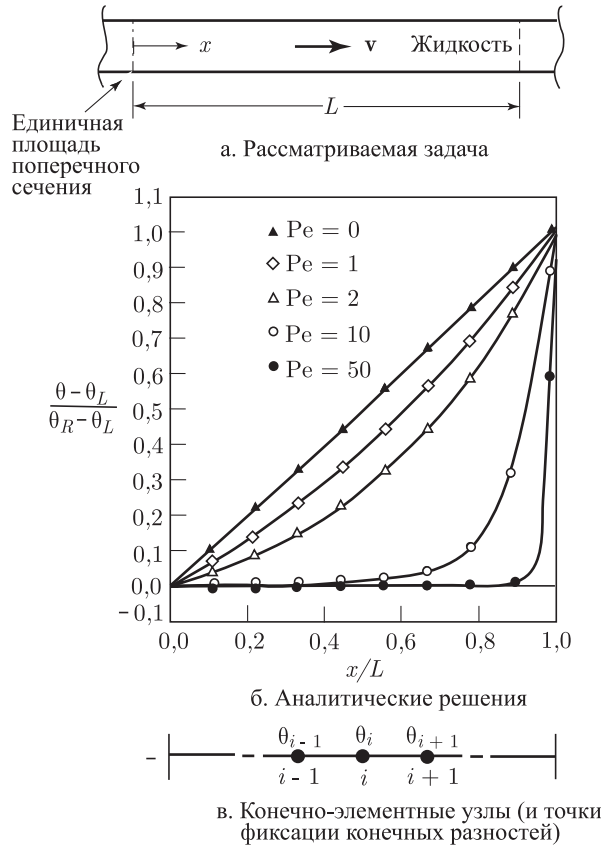


Рис. 7.10. Теплопередача при условии одномерного течения; заданная скорость v ; $q^B = 0$;

$$\text{Pe} = \frac{vL}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{k}{\rho c_p}$$

Определяющее дифференциальное уравнение, получаемое из (7.60), имеет вид

$$\rho c_p \frac{d\theta}{dx} v = k \frac{d^2\theta}{dx^2} \quad (7.94)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_l \quad \text{при } x = 0, \\ \theta &= \theta_R \quad \text{при } x = L,\end{aligned}\tag{7.95}$$

причем левая часть уравнения (7.94) характеризует конвективные, а правая часть — диффузионные члены.

Разумеется, конвективные и диффузионные члены появляются в аналогичной форме и в уравнениях Навье–Стокса (см. (7.67)), которые также могут рассматриваться в подобном же простом, одномерном варианте. Однако получаемое таким путем дифференциальное уравнение обладает нелинейностью по v , тогда как уравнение (7.94) является линейным по θ . Если учесть, что решение уравнения (7.94) уже выявляет основные трудности решения в целом, то мы предпочтем рассматривать именно уравнение (7.94), но признаем, что основные замечания справедливы также и в отношении решения уравнений Навье–Стокса.

Рисунок 7.10 демонстрирует для различных чисел Пекле, $Pe = vL/\alpha$, точное решение задачи, представленной уравнением (7.94), определяемое формулой

$$\frac{\theta - \theta_L}{\theta_R - \theta_L} = \frac{\exp\left\{\frac{Pe}{L}x\right\} - 1}{\exp\{Pe\} - 1}.\tag{7.96}$$

Следовательно, по мере того, как Pe возрастает, кривая точного решения указывает на наличие мощного пограничного слоя при $x = L$.

Чтобы продемонстрировать трудность, присущую конечно-элементному решению, используем элементы с двумя узлами, каждый из которых имеет длину h и соответствует температуре, линейно изменяющейся в пределах каждого элемента. Если мы воспользуемся принципом виртуальных температур, соответствующим соотношению (7.73) (т. е. мы используем (стандартный) метод Галеркина), то для узла i конечного элемента мы получим определяющее уравнение

$$\left(-1 - \frac{Pe^e}{2}\right)\theta_{i-1} + 2\theta_i + \left(\frac{Pe^e}{2} - 1\right)\theta_{i+1} = 0,\tag{7.97}$$

где элементное число Пекле равно $Pe^e = vh/\alpha$. Следовательно,

$$\theta_i = \frac{1 - Pe^e/2}{2}\theta_{i+1} + \frac{1 + Pe^e/2}{2}\theta_{i-1}.\tag{7.98}$$

Это уравнение показывает, однако, что при больших числах Pe^e получаются результаты, не имеющие реального физического смысла. Например, если $\theta_{i-1} = 0$ и $\theta_{i+1} = 100$, то мы имеем $\theta_i = 50(1 - Pe^e/2)$, а это дает отрицательное значение при $Pe > 2$!

Рисунок 7.11 демонстрирует результаты, полученные при решении модельной задачи, взятой с рис. 7.10 с двухузловой элементной дискретизацией, для случая $Pe = 20$, при использовании постепенно измельчаемых сеток. Фактически, аналитическое решение уравнения (7.97) показывает, что для получения достаточно точного прогноза реакции нам нужно, чтобы число Pe^e было меньше, чем 2. Этот результат также отражается на рис. 7.11, и он означает, что когда число Pe велико, требуется чрезвычайно измельченная сетка. При практических вариантах анализа нужно строить решения для течений с очень большими числами Пекле и Рейнольдса ($Re \sim 10^6$), и схема конечно-элементной дискретизации, обсужденная в предыдущем разделе, должна быть подправлена, чтобы оказаться применимой к решению таких задач.

Недостаток, выявленный нами выше, был признан и преодолен исследователями, использовавшими конечно-разностные методы на ранней стадии (см. работу [Courant, Isaacson, Rees, 1952]. А именно, рассматривая уравнение (7.97), мы обнаруживаем, что оно получается также и тогда, когда для решения уравнения (7.94) используются центральные разности (см. раздел 3.3.5). Следовательно, те же самые неточности решения выявляются, когда для решения уравнения (7.94) используется общепринятый метод центральных разностей.

Мера, предназначенная для преодоления вышеуказанных трудностей, состоит в использовании сдвига вверх по потоку. Применяя конечно-разностную схему со сдвигом

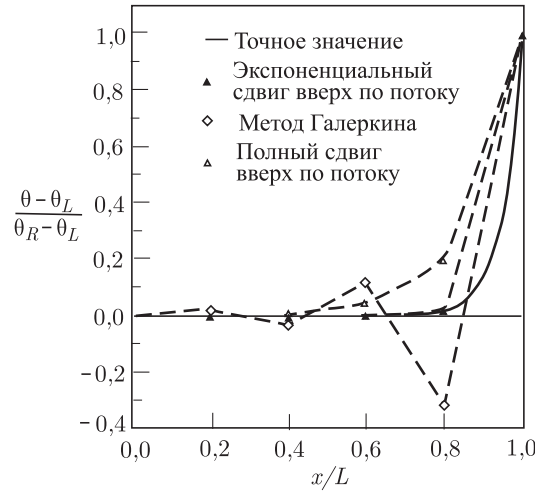
а. Случай пяти элементов, $Re^e = 4$

Рис. 7.11. Решение задачи из рис. 7.10 с использованием элементов с двумя узлами. $Re = 20$. Методы экспоненциального сдвига вверх по потоку, Петрова–Галеркина и Галеркина с наименьшими квадратами дают точные значения в узлах

вверх по потоку, мы используем выражения

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_i &\doteq \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{h} & \text{если } v > 0, \\ \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_i &\doteq \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{h} & \text{если } v < 0. \end{aligned} \quad (7.99)$$

При последующем обсуждении мы предполагаем вначале, что $v > 0$, а затем обобщаем полученные результаты с тем, чтобы рассматривать любое значение v (см. (7.115)).

Если $v > 0$, то конечно-разностная аппроксимация уравнения (7.94) имеет вид

$$(-1 - Re^e)\theta_{i-1} + (2 + Re^e)\theta_i - \theta_{i+1} = 0. \quad (7.100)$$

На рис. 7.11 показаны результаты, полученные с этим сдвигом вверх по потоку (обозначенным, как «полный сдвиг вверх по потоку») при решении рассматриваемой задачи; здесь же показано, что осциллирующее поведение решения уже не имеет места.

Это улучшение решения объясняется природой (точного) аналитического решения: если поток движется в положительном направлении оси x , то значения θ оказываются под более сильным влиянием значения θ_L в области вверх по потоку, чем под влиянием значения θ_R в области вниз по потоку. Действительно, когда значение Re велико, то значение θ оказывается близким к значению в области вверх по потоку θ_L в пределах большей части области решения. То же самое наблюдение справедливо и тогда, когда поток движется в отрицательном направлении оси x , однако тогда, конечно же, θ_R представляет собой значение в области вверх по потоку.

Интуитивный подтекст этого наблюдения состоит в том, что при конечно-разностной дискретизации уравнения (7.94) должно стать уместным придать больше веса значению из области вверх по потоку и, по существу, именно это соблюдается в соотношении (7.100). Желательно, конечно, осуществить дальнейшее повышение точности решения, и для сравнительно простого (одномерного) уравнения (7.94) такое улучшение достигается путем использования различных приемов. Ниже мы предлагаем краткое изложение трех таких приемов, являющихся, фактически, тесно связанными между собой и дающих отличную точность в случаях одномерного анализа. Однако обобщение этих методов с целью получения малых ошибок решения при использовании сравнительно грубых вариантов дискретизации в общих, двумерных и трехмерных условиях течения, представляет собой весьма трудное дело (см. конец данного раздела).

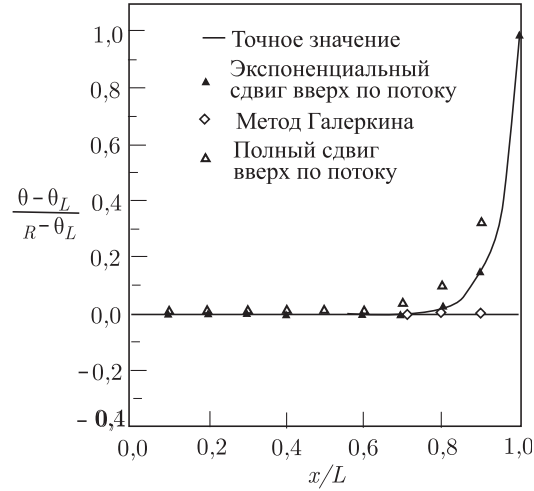
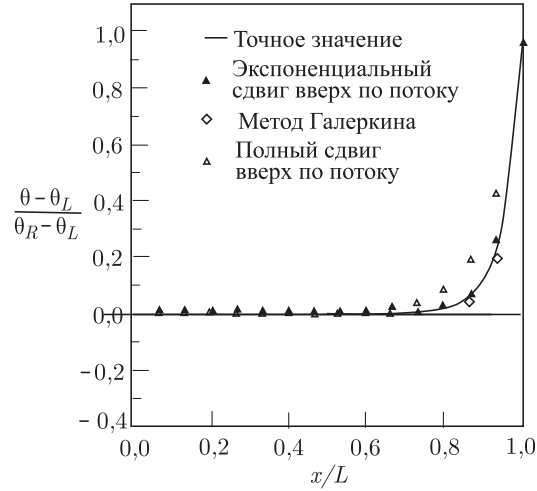
б. Случай десяти элементов, $Pe^e = 2$ в. Случай пятнадцати элементов, $Pe^e = 4/3$

Рис. 7.11. Продолжение

Экспоненциальная схема

Основная идея экспоненциальной схемы состоит в том, чтобы срастить численное решение с аналитическим (точным), которое в рассматриваемом здесь случае известно (см. работы [Spalding, 1972] и [Patankar, 1980], где дано построение конечно-разностных процедур с контрольным объемом).

Для построения схемы перепишем уравнение (7.94) в форме

$$\frac{df}{dx} = 0, \quad (7.101)$$

где поток f задается как конвективная часть за вычетом диффузионной,

$$f = v\theta - \alpha \frac{d\theta}{dx}. \quad (7.102)$$

Конечно-разностная аппроксимация соотношения (7.101) для точки i дает

$$f|_{i+1/2} - f|_{i-1/2} = 0. \quad (7.103)$$

Разумеется, это уравнение соответствует также и удовлетворению условия равновесия потоков для конкретного объема между точками $i + 1/2$ и $i - 1/2$.

Теперь мы воспользуемся точным решением согласно (7.96), чтобы выразить $f_{i+1/2}$ и $f_{i-1/2}$ в терминах значений температуры в точках $i - 1$, i , $i + 1$. Следовательно, если использовать формулу (7.96) для интервала между i и $i + 1$, то мы получаем

$$f_{i+1/2} = v \left(\theta_i + \frac{\theta_i - \theta_{i+1}}{\exp\{\text{Pe}^e\} - 1} \right). \quad (7.104)$$

Аналогичным образом мы получаем выражение для $f_{i-1/2}$, и соотношение (7.103) дает

$$(-1 - c)\theta_{i-1} + (2 + c)\theta_i - \theta_{i+1} = 0, \quad (7.105)$$

где

$$c = \exp(\text{Pe}^e) - 1. \quad (7.106)$$

Следует отметить, что при $\text{Pe}^e = 0$ соотношение (7.105) сводится к использованию разностного метода с центральными разностями (а также метода Галеркина) для исходного уравнения, содержащего только диффузионный член (т. к. конвективный член равен нулю), и к тому, что соотношение (7.105) имеет форму соотношения (7.100) при замене Pe^e на c . Конечно, эта схема, основанная на аналитическом решении задачи, показанной на рис. 7.10, дает точное решение, даже если при дискретизации используется лишь небольшое число элементов (см. рис. 7.11). Кроме того, схема приводит к получению очень точных решений, когда скорость v изменяется по длине рассматриваемой среды и когда в анализ включаются члены с источниками. Вычислительное неудобство сводится к тому, что требуется вычислять экспоненциальные функции, и на практике оказывается, что достаточная точность и несколько большая эффективность достигаются за счет использования полиномиальной аппроксимации вместо (точного) аналитического решения; такой подход называется методом степенного закона (см. книгу [Patankar, 1980] и упражнение 7.23).

Метод Петрова–Галеркина

Принцип виртуальных температур, представленный и использованный в разделе 7.2, сводится к применению классического метода Галеркина, когда одни и те же пробные функции используются и как весовые, и для формулировки решения (см. раздел 3.3.3). Однако в принципе для этих целей могут применяться разные функции, причем для некоторых типов задач такой подход может приводить к повышению точности решения.

В методе Петрова–Галеркина в качестве весовых функций и в качестве параметров решения применяются отличные друг от друга функции. Предположим, что для дискретизации области применительно к задаче, показанной на рис. 7.10, мы, как и прежде, используем элементы с двумя узлами. Тогда i -е уравнение имеет вид

$$\int_{-h}^{+h} \tilde{h}_i v \frac{dh_j}{dx} \theta_j dx + \int_{-h}^{+h} \frac{d\tilde{h}_i}{dx} \alpha \frac{dh_j}{dx} \theta_j dx = 0; \quad j = i - 1, i, i + 1, \quad (7.107)$$

где символом \tilde{h}_i обозначается весовая функция, а символом h_j — обычные функции линейного распределения температуры между узлами $i - 1$, i и $i + 1$ (см. рис. 7.12).

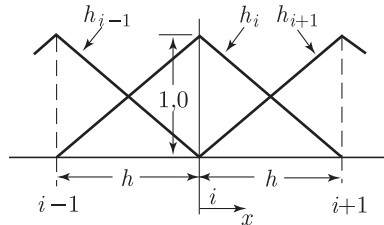


Рис. 7.12. Конечно-элементные функции, используемые в (7.107)

Теперь основная идея сводится к тому, как выбрать \tilde{h}_i , чтобы получить оптимальную точность. Эффективная схема основывается на использовании формул

$$\begin{aligned}\tilde{h}_i &= h_i + \gamma \frac{h}{2} \frac{dh_i}{dx} \quad \text{при } v > 0, \\ \tilde{h}_i &= h_i - \gamma \frac{h}{2} \frac{dh_i}{dx} \quad \text{при } v < 0.\end{aligned}\tag{7.108}$$

Если в уравнении (7.107) использовать эту весовую функцию, то для случая $v > 0$ мы получим

$$\left(-1 - \frac{\text{Pe}^e}{2}(\gamma + 1)\right)\theta_{i-1} + (2 + \gamma \text{Pe}^e)\theta_i + \left(-\frac{\text{Pe}^e}{2}(\gamma - 1) - 1\right)\theta_{i+1} = 0.\tag{7.109}$$

Заметим, что при $\gamma = 0$ восстанавливается стандартное галеркинское конечно-элементное уравнение (7.97), а при $\gamma = 1$ получается конечно-разностная схема (7.100) с полным сдвигом вверх по потоку.

Переменная величина γ может быть рассчитана так, чтобы точные узловые значения получались при всех значениях Pe^e (см. работу [Christie et al, 1976], а также упражнение 7.19),

$$\gamma = \coth\left(\frac{\text{Pe}^e}{2}\right) - \frac{2}{\text{Pe}^e}.\tag{7.110}$$

Аналогично этому исследуется случай $v < 0$. Разумеется, результаты решения нашей тестовой задачи, показанной на рис. 7.11, с помощью метода Петрова–Галеркина при значении γ , соответствующем приведенной выше формуле, будут теми же, что и при экспоненциальной схеме со сдвигом вверх по потоку.

Галеркинский метод наименьших квадратов

В галеркинском методе наименьших квадратов основное уравнение Галеркина дополняется таким выражением по схеме наименьших квадратов, чтобы можно было получить решение хорошей точности (см. работу [Hughes, Franca, Hulbert, 1989]).

Метод наименьших квадратов был представлен нами в разделе 3.3.3. Для задачи, определяемой уравнением (7.94), в соответствии с формулой (3.13) мы имеем

$$L_{2m}[h_i] = v \frac{dh_i}{dx} - \alpha \frac{d^2 h_i}{dx^2}\tag{7.111}$$

и

$$R_h = v \frac{d\theta_h}{dx} - \alpha \frac{d^2 \theta_h}{dx^2},\tag{7.112}$$

где индекс h обозначает конечно-элементное решение, соответствующее сетке с элементами размера h .

В галеркинском методе наименьших квадратов уравнение для узловой переменной θ_i формируется путем использования классического галеркинского выражения и добавления коэффициента τ , умноженного на выражение (3.16), соответствующее наименьшим квадратам. Коэффициент τ определяется так, чтобы получить решение с хорошей точностью.

Если использовать для решения нашей задачи конечно-элементную дискретизацию с двумя узлами и вычислять невязку в одном элементе за другим (следовательно, члены со вторыми производными в уравнениях (7.111) и (7.112) оказываются равными нулю), то i -е уравнение принимает вид

$$\begin{aligned}\int_{-h}^{+h} h_i v \frac{dh_j}{dx} \theta_j dx + \int_{-h}^{+h} \frac{dh_i}{dx} \alpha \frac{dh_j}{dx} \theta_j dx + \int_{-h}^{+h} \left(v \frac{dh_i}{dx}\right) \tau \left(v \frac{dh_j}{dx} \theta_j\right) dx = 0;\end{aligned}\tag{7.113}$$

$$j = i - 1, i, i + 1,$$

где последний из интегралов в левой части соответствует выражению (3.16), а коэффициент τ является пока что неопределенным параметром. Чтобы оценить значения τ , мы можем добиться соответствия соотношения (7.113) с точным аналитическим решением (как мы уже делали это для экспоненциальной схемы и метода Петрова–Галеркина) и,

таким образом, получить

$$\tau = \frac{h}{2v} \coth \frac{\text{Pe}^e}{2} - \frac{\alpha}{v^2}. \quad (7.114)$$

Результаты решения тестовой задачи, показанной на рис. 7.11, являются по своей конструкции теми же самыми (точными в узлах), что и результаты, полученные с использованием экспоненциальной схемы и метода Петрова–Галеркина.

Сравнение методов

На этом этапе изложения интересно сравнить экспоненциальный метод, метод Петрова–Галеркина и галеркинский метод наименьших квадратов. Такое сравнение показывает, что уравнения (7.105), (7.109) и (7.113) с оптимальными значениями s , γ и τ , соответственно, оказываются идентичными с точностью до множителя (который не играет роли, так как правые части всех уравнений равны нулю (см. упражнение 7.21)). По этой причине, конечно же, идентичными являются и решения (следует заметить, однако, что в общем случае, когда в уравнение (7.94) включается член с источником, то нужно ожидать, что при использовании экспоненциальной схемы и метода Петрова–Галеркина должны получаться различные решения, которые и трактоваться должны по-разному, тогда как при используемых здесь линейных интерполяциях галеркинский метод наименьших квадратов всегда дает то же самое решение, что и схема Петрова–Галеркина).

Второе интересное наблюдение и соответствующая ему ценная интерпретация состоит в том, что все эти методы являются, по существу, эквивалентными аппроксимации Галеркина с дополнительным диффузионным членом. А именно, если мы запишем галеркинское решение уравнения (7.94) с дополнительным диффузионным членом $\alpha\beta$, то мы получим

$$\int_{-h}^{+h} \left(h_i v \frac{dh_j}{dx} \theta_j + \frac{dh_i}{dx} (1 + \beta) \alpha \frac{dh_j}{dx} \theta_j \right) dx = 0; \quad j = i - 1, i, i + 1, \quad (7.115)$$

где β — безразмерная постоянная, причем теперь мы можем считать скорость v положительной или отрицательной.

Решение уравнения (7.115) имеет вид

$$-(1 + q)\theta_{i-1} + 2\theta_i - (1 - q)\theta_{i+1} = 0, \quad (7.116)$$

где

$$q = \frac{\text{Pe}^e}{2} \frac{1}{1 + \beta}. \quad (7.117)$$

Значение β зависит от того, какой именно метод используется. Разумеется, значение $\beta = 0$ соответствует стандартному методу Галеркина, и если сравнить между собой, например, уравнения (7.115) и (7.113), то при применении галеркинського метода наименьших квадратов мы найдем

$$\beta = \frac{v\tau}{h} \text{Pe}^e. \quad (7.118)$$

Таблица 7.6 дает сводку значений β для рассмотренных выше различных процедур со сдвигом вперед. Таблица включает также значение для степенного закона, отлично аппроксимирующего экспоненциальную схему, будучи при этом менее дорогостоящим в вычислительном плане (см. рис. 7.13). Отметим, что табл. 7.6 не предполагает, что мы решаем уравнение (7.94) с диффузионным членом $(1 + \beta)\alpha$. Вместо этого дискретизированные уравнения, полученные с помощью метода Галеркина, строятся с диффузионным членом $(1 + \beta)\alpha$ для того, чтобы получить точное решение уравнения (7.94).

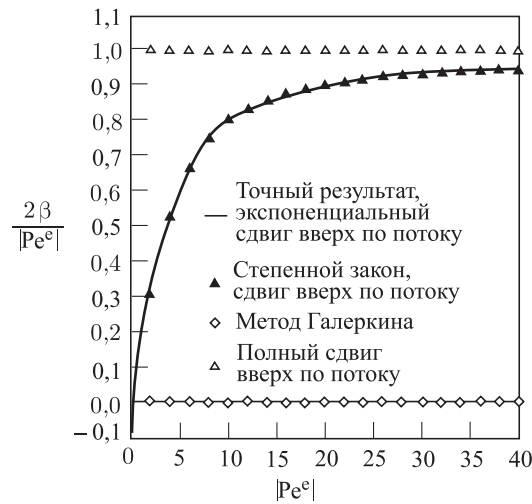
Формулы, приводимые в табл. 7.6, имеют вполне общую форму и применимы к элементам различного размера и к различным скоростям v , однако предполагают, разумеется, что течение является одномерным и что член с источником отсутствует.

Разумеется, в табл. 7.6 перечисляются лишь некоторые методы, тогда как были предложены и дополнительные схемы; см., например, работу [Kondo, Tosaka, Nishimura, 1992].

Наконец, мы должны упомянуть также и о том, что использование в элементах внутренних пузырьковых функций эквивалентно введению сдвига вверх по потоку. Эти функции имеют связь только со степенями свободы конкретно рассматриваемого элемента.

Таблица 7.6. Добавочный диффузионный член $\beta\alpha$, используемый при применении метода Галеркина с различными процедурами сдвига

Процедура	Множитель β
Стандартный метод Галеркина	0,0
Полный сдвиг вверх по потоку	$\frac{ Pe^e }{2}$
Экспоненциальная схема, Петров–Галеркин и Галеркин с наименьшими квадратами	$\frac{Pe^e}{2} \coth \frac{Pe^e}{2} - 1$
Степенной закон	$\frac{ Pe^e }{2} - 1 + \max\{1 - 0,1 Pe^e , 0,0\}^5$

Рис. 7.13. Значение β из (7.115) при применении различных методов

Такой подход применяется для того, чтобы рассчитать реакцию системы с учетом наличия пузырьковых функций и, по существу, впоследствии проигнорировать реакцию в пузырьках. В качестве примера отметим, что при одномерном анализе реакции вместо линейных элементов можно использовать параболические. Тогда параболическая вариация (в отличие от линейной) соответствует пузырьковой реакции (см. работу [Brezzi, Russo], а также упражнение 7.25).

Обобщение применяемых методов

Как мы уже указывали ранее, несмотря на то, что мы рассматривали задачу о теплопередаче, те же самые численные процедуры применяются и к решению уравнений Навье–Стокса. При этом, конечно, для определения параметров сдвига вверх по потоку вместо числа Пекле используется число Рейнольдса.

Три вычислительных схемы — экспоненциальная схема, метод Петрова–Галеркина и галеркинский метод наименьших квадратов — тесно связаны между собой (так как все они основываются на установлении связи с аналитическим решением нашей простой модельной задачи) и дают точные решения весьма общих задач об одномерном течении. При наличии такого замечательного опыта в анализе одномерных задач указанные

подходы кажутся привлекательными и для развития схем решения применительно к условиям двумерных и трехмерных течений общего характера. Однако оказалось, что схемы эффективного и точного решения для сложных двумерных и трехмерных течений весьма трудны для воплощения.

При применении конечно-разностных методов с контрольным объемом как экспоненциальная схема, так и схема со степенным законом (см. упражнение 7.18) были попросту применены к рассмотрению различных координатных направлений путем использования соответствующих скоростей течения, причем были реализованы и некоторые обобщения; см., например, работу [Minkowycz et al., 1988].

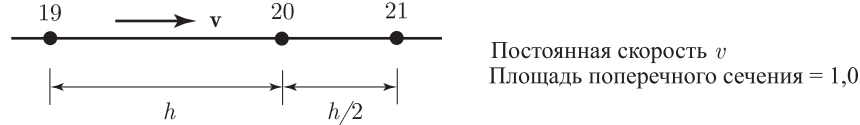
При применении конечно-элементного анализа метод Петрова–Галеркина и галеркинский метод наименьших квадратов были переработаны для общего случая построения двумерных и трехмерных решений; по существу, это реализовывалось за счет применения внутри каждого элемента одномерных схем вдоль линий тока. В методе Петрова–Галеркина составляющая скорости, направленная вдоль линии тока, используется для определения элементного числа Пекле и, следовательно, той функции \tilde{h}_i , которая получается при сдвиге вверх по потоку вдоль линии тока, т.е. для метода SuPG (см. работы [Brooks, Hughes, 1982], а также [Johnson, Navert, Pitkaranta, 1984]). В галеркинском методе наименьших квадратов используется тензор τ , элементы которого являются функциями числа Пекле (см. работу [Franca, Frey, Hughes, 1992]). Разумеется, возможна также и комбинация двух указанных методов.

Другой подход, близкий к перечисленным, состоит в том, чтобы воспользоваться техникой конечно-разностного метода с контрольным объемом (в первую очередь — экспоненциального или метода со степенным законом) и внедрить эту технику в конечные элементы низкого порядка. Затем диффузионная часть определяющих уравнений может дискретизироваться с использованием стандартного метода Галеркина, тогда как их конвективная часть может быть обработана с помощью степенного закона и сдвига вверх по потоку, как это представлено в табл. 7.6. Используемые конечные элементы должны, конечно же, удовлетворять также и условию inf-sup так, чтобы устойчивая и сходящаяся схема решения могла применяться к течениям как с малыми, так и с большими числами Рейнольдса и Пекле. Практические варианты воплощения такой схемы с использованием 4/3-с треугольных и 5/4-с тетраэдральных элементов для двумерных и трехмерных течений (см. таблицу 4.7), для которых сдвиг вверх по потоку реализовался, будучи замеры по отношению к потоку через граничные поверхности элемента, были представлены в работе [Bathe, Zhang, Wang, 1995].

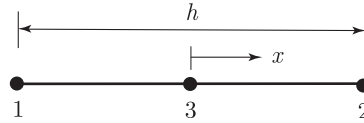
7.4.4. Упражнения

- 7.15. Исходя из основных уравнений (7.57)–(7.60), выведите уравнение (7.65), а затем выведите также (7.67) и (7.68).
- 7.16. Покажите подробно, что матричные выражения для условий плоского, двумерного течения, приводимые в соотношениях (7.77)–(7.89), являются правильными.
- 7.17. Предположите, что матричные уравнения в (7.77) должны быть решены для стационарного случая с использованием полной итерации Ньютона–Рафсона. Постройте матрицу коэффициентов и приведите все подробности тех расчетов, которые следует провести (но не проводите каких-либо итераций). Предположите, что материальные свойства постоянны и действуйте так, как это указано в разделах 6.3.1 и 8.4.1.
- 7.18. Выведите выражения для схемы со сдвигом вверх по потоку, данные в соотношениях (7.105) и (7.106).
- 7.19. Выведите выражения для схемы со сдвигом вверх по потоку, данные в соотношениях (7.109) и (7.110).
- 7.20. Выведите выражения для схемы со сдвигом вверх по потоку, данные в соотношениях (7.113) и (7.114).
- 7.21. Покажите аналитически, что уравнения (7.105), (7.109) и (7.113) дают идентичные между собой решения.
- 7.22. Покажите, что решение уравнения (7.115) дается выражениями (7.116) и (7.117).

- 7.23. Докажите, что значения β , приводимые в табл. 7.6, верны и покажите, что значение β , данное для степенного закона, близко к значению для экспоненциальной схемы.
- 7.24. Выведите определяющее конечно-элементное уравнение для решения уравнения (7.94) применительно к 20-му узлу показанной здесь комбинации из элементов с двумя узлами.
- (а) Используйте метод Петрова–Галеркина.
- (б) Используйте схему с полным сдвигом вверх по потоку.



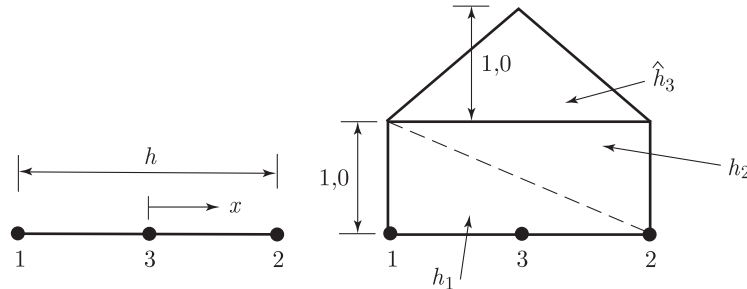
- 7.25. Рассмотрите одномерный элемент с тремя узлами, показанный для решения уравнения (7.94). Покажите, что пузырьковая функция \tilde{h}_3 вводит, по существу, сдвиг вверх по потоку для элемента (*подсказка*: примените к элементу процедуру Галеркина и рассчитайте значение β при сравнении выведенных вами уравнений с уравнением (7.115)).



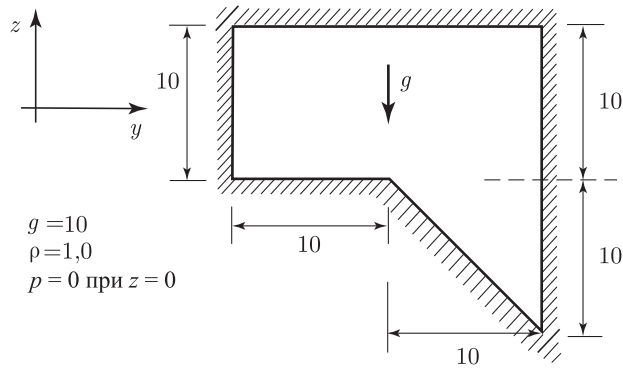
$$h_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2x}{h} \right); \quad h_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2x}{h} \right);$$

$$\tilde{h}_3 = 1 - \left(\frac{2x}{h} \right)^2.$$

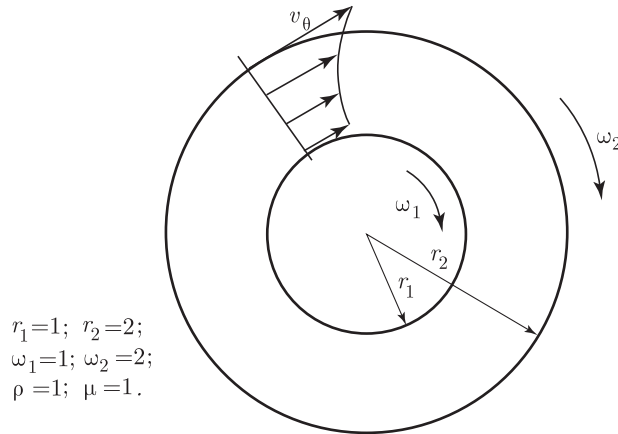
- 7.26. Рассмотрите элемент с тремя узлами, обладающий «шапочной функцией» взамен параболы, соответствующей среднему узлу, применительно к решению уравнения (7.94). Покажите, что эта шапочная функция вводит, по существу, сдвиг вверх по потоку для элемента (см. упражнение 7.25).



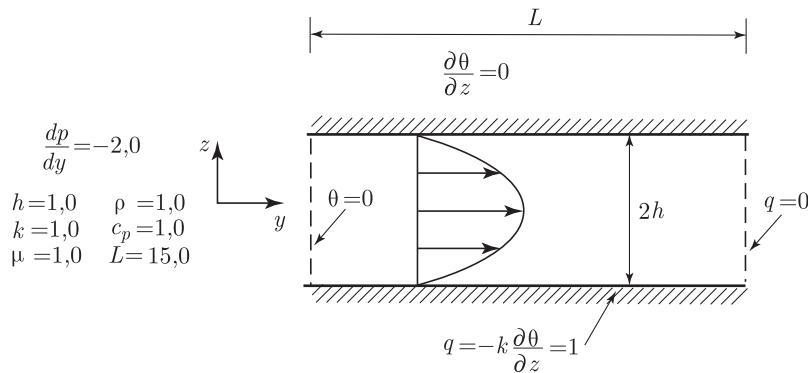
- 7.27. Рассмотрите полость, наполненную водой и находящуюся под воздействием гравитации, как это показано на иллюстрации. Воспользуйтесь компьютерной программой, чтобы рассчитать (при очень грубой сетке) скорости (разумеется, расчет должен дать нулевые значения) и распределение давления в воде. Задайте нулевые значения скорости на границе (но рассчитайте «неизвестные» значения скорости внутри области).



- 7.28. Воспользуйтесь компьютерной программой, чтобы исследовать полностью развитое течение между двумя соосными цилиндрами, вращающимися с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 , как это показано на иллюстрации. Проверьте, получается ли точное решение.



- 7.29. Воспользуйтесь компьютерной программой, чтобы исследовать установившееся течение с принудительной конвекцией между двумя параллельными пластинами, как это показано на иллюстрации. Проверьте, получается ли точное решение.



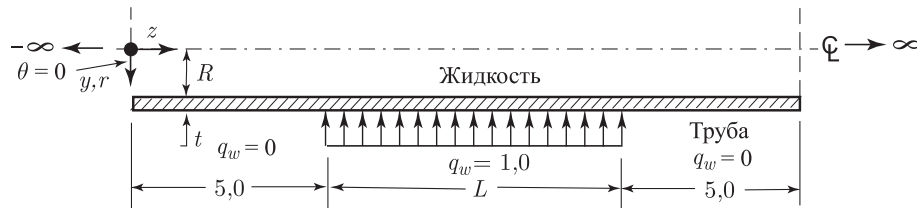
- q_w — приток тепла на внешней поверхности трубы;

$L = 10, 0$

 $t = 0, 1$

$$R = 1, 0$$

$$c_p = 5, 0.$$



Глава 8

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ В СТАТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ

8.1. Введение

До сих пор мы занимались выводом и расчетом уравнений равновесия системы конечных элементов. Это занятие включало в себя выбор и расчет эффективных элементов, а также эффективное объединение элементных матриц в глобальную систему конечно-элементных матриц. Однако общая эффективность проводимого анализа в значительной степени зависит от формы численных процедур, используемых при построении решения для системы уравнений равновесия. Как уже говорилось ранее, точность анализа может, вообще говоря, быть повышена за счет использования более измельченной конечно-элементной сетки. Поэтому на практике исследователь испытывает тенденцию к применению конечно-элементных систем все большего и большего размера для аппроксимации истинной конструкции. Это означает, однако, что стоимость анализа и, фактически, возможность его практического осуществления, в значительной степени зависят от вида тех алгоритмов, с помощью которых строится решение результирующей системы уравнений. В связи с требованием о том, чтобы решались большие системы, много усилий было потрачено на оптимизацию алгоритмов решения определяющих уравнений. На ранней стадии применения метода конечных элементов система уравнений порядка 10 000 во многих случаях рассматривалась как система большого порядка. В настоящее время без особых затруднений разрешаются системы уравнений порядка 100 000.

В зависимости от вида и количества элементов в данном объединении, а также от топологии конечно-элементной сетки, при линейном статическом анализе время, требуемое для решения уравнений равновесия, может составлять значительную долю от общего времени решения, тогда как при динамическом или при нелинейном анализе эта доля может оказаться еще выше. Поэтому, если выбрана неподходящая методика решения уравнений равновесия, то это может оказать значительное влияние на общую стоимость анализа и, действительно, эта стоимость может оказаться во много раз — скажем в 100 раз, выше, чем это необходимо.

В дополнение к рассмотрению фактических компьютерных усилий, затрачиваемых на решение уравнений равновесия, важно отдавать себе отчет в том, что анализ может оказаться фактически невозможным при использовании неподходящих численных процедур. Такая ситуация вполне возможна, ибо при использовании медленно работающих методов решения анализ может оказаться попросту слишком дорогостоящим. Но, если говорить более серьезно, анализ может оказаться невозможным вследствие неустойчивости процедур решения. Заметим, что устойчивость процедур решения играет особенно важную роль при динамическом анализе.

В данной главе мы будем заниматься решением систем уравнений, получающихся при статическом анализе конструкций и твердых тел, причем в первую очередь мы подробно обсудим (см. разделы 8.2 и 8.3) решение тех уравнений, которые получаются при линейном анализе,

$$\mathbf{KU} = \mathbf{R}, \quad (8.1)$$

где \mathbf{K} — матрица жесткости, \mathbf{U} — вектор смещений, а \mathbf{R} — вектор нагрузки конечно-элементной системы. Если учесть, что \mathbf{R} и \mathbf{U} могут быть функциями времени t , мы можем

также рассматривать уравнения (8.1), как динамические уравнения равновесия конечно-элементной системы, в которых были отброшены, как пренебрежимые, силы инерции и зависящие от скорости демпфирующие силы. Следует отдать себе отчет в том, что постольку, поскольку скорости и ускорения не входят в уравнения (8.1) мы можем рассчитать смещения в любой момент времени t независимо от истории этих смещений, тогда как при динамическом анализе (см. главу 9) это неосуществимо. Однако, как подсказывают эти соображения, алгоритмы, используемые при расчете вектора \mathbf{U} в (8.1), могут быть применены также и как часть алгоритмов решения, используемых при динамическом анализе. Это имеет место в действительности, и в последующих главах мы увидим, что обсуждаемые здесь процедуры составят основу алгоритмов, применяемых для построения собственных решений и прямых способов пошагового интегрирования. Кроме того, как уже отмечалось в главе 6 и более подробно будет обсуждаться в разделе 8.4, решение уравнений (8.1) представляет собой также и очень важный основной этап построения решения при нелинейном анализе. На этом основании подробное изучение процедур, используемых для решения уравнений (8.1), является очень важным.

Несмотря на то, что в данной главе мы рассматриваем в явной форме решение тех уравнений равновесия, которые соответствуют анализу твердых тел и конструкций, технические приемы этого решения являются вполне общими и оказываются полностью и напрямую применимыми ко всем тем вариантам анализа, которые приводят к появлению симметричных (положительно определенных) матриц коэффициентов (см. главы 3 и 7). Единственные варианты представленных ранее систем уравнений, решение которых мы не подвергаем подробному рассмотрению, — это те, которые появляются при анализе течения несжимаемой вязкой жидкости (см. раздел 7.4), так как именно при таком анализе получается несимметричная матрица коэффициентов, однако к этому случаю применима, все же, большая часть основных идей и процедур, описываемых ниже; эти идеи и процедуры могут быть подвергнуты непосредственному обобщению (см. упражнение 8.11).

По существу, имеются два различных класса методов решения уравнений (8.1): методы прямого решения и итерационные методы решения. При прямом решении уравнения (8.1) решаются путем использования некоторого числа шагов и операций, предопределенных заранее в точной форме, тогда как итерации используются при применении итерационного метода решения. Как мы увидим, каждая из этих схем решения обладает определенными преимуществами, и в данной главе мы обсудим оба указанных подхода. В настоящее время в большинстве случаев применяются прямые методы, однако для больших систем гораздо более эффективными могут оказаться итерационные методы.

8.2. Прямые решения с использованием алгоритмов, основанных на исключении по Гауссу

Наиболее эффективная методика прямого решения из числа используемых в настоящее время связана, в основном, с применением исключения по Гауссу, предложенного Гауссом более ста лет назад (см. [Gauss, 1873]). Однако несмотря на то, что основная схема решения по Гауссу может быть применена почти к любой системе линейных уравнений (см., например, работы [Wilkinson, 1965-1], [Noble 1969], а также [Martin, Peters, Wilkinson, 1965]), эффективность конечно-элементного анализа зависит, все же, от конкретных свойств конечно-элементной матрицы жесткости: симметрия, положительная определенность и возможность выделения ленточных элементов.

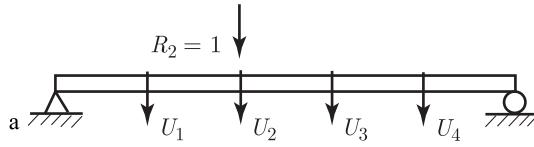
В дальнейшем мы рассмотрим вначале процедуру исключения по Гауссу так, как она используется при решениях положительно определенных, симметричных систем, а также систем с выделением ленточных элементов. Мы рассмотрим вкратце решение симметричных неопределенных систем в разделе 8.2.5.

8.2.1. Введение в метод исключения по Гауссу

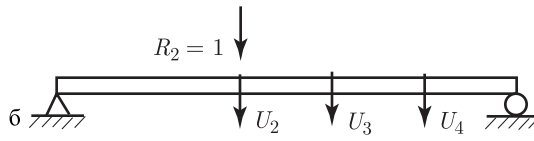
Мы предполагаем дать введение в процедуру решения по Гауссу путем исследования решения уравнений $\mathbf{KU} = \mathbf{R}$, выведенных в примере 3.27, с параметрами $L = 5$, $EI = 1$;

иначе говоря, имеем уравнения

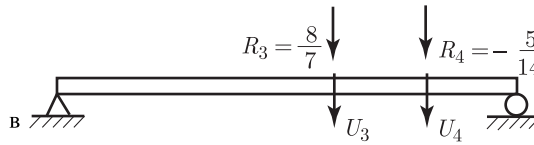
$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.2)$$



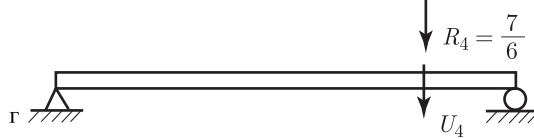
$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \frac{14}{5} & -\frac{16}{5} & 1 \\ -\frac{16}{5} & \frac{29}{5} & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \frac{15}{7} & -\frac{20}{7} \\ \frac{20}{7} & \frac{65}{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{7} \\ -\frac{5}{14} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \frac{5}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{6} \end{bmatrix}$$

Рис. 8.1. Матрицы жесткости и векторы нагрузки, рассматриваемые в методе исключения по Гауссу применительно к просто опертой балке. Матрицы жесткости для схем (б), (в) и (г) соответствуют тому, что расположено ниже штриховых линий в уравнениях (8.3), (8.4) и (8.5)

В данном случае матрица жесткости **K** соответствует просто опертой балке с четырьмя поступательными степенями свободы, как показано на рис. 8.1 (следует напомнить, что уравнения равновесия были выведены с помощью конечных разностей; однако в данном случае они обладают теми же свойствами, что и при конечно-элементном анализе).

Математические операции

Прежде всего рассмотрим основные математические операции при исключении по Гауссу. Наши действия соответствуют следующим систематическим этапам:

Этап 1: Вычтем первое из уравнений (8.2), после его умножения на некий множитель, из второго и третьего уравнений так, чтобы получить нулевые элементы в первом столбце матрицы **K**. Это означает, что первая строка после ее умножения на $-4/5$ вычитается из второй строки, а первая строка, умноженная на $1/5$, вычитается из третьей строки. Получаемые в результате уравнения имеют вид

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 14/5 & -16/5 & 1 \\ 0 & -16/5 & 29/5 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.3)$$

Этап 2: Теперь, рассматривая уравнения (8.3), вычтем второе уравнение после его умножения на $-16/14$ из третьего уравнения, а второе уравнение, умноженное на $5/14$, — из четвертого уравнения. Получаемые в результате уравнения имеют вид

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 14/5 & -16/5 & 1 \\ 0 & 0 & 15/7 & -20/7 \\ 0 & 0 & -20/7 & 65/14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 8/7 \\ -5/14 \end{bmatrix}. \quad (8.4)$$

Этап 3: Вычтем третье уравнение после его умножения на $-20/15$ из четвертого уравнения системы (8.4). Это дает

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 14/5 & -16/5 & 1 \\ 0 & 0 & 15/7 & -20/7 \\ 0 & 0 & 0 & 5/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 8/7 \\ 7/6 \end{bmatrix}. \quad (8.5)$$

Используя уравнения (8.5), мы можем теперь просто разрешить их относительно неизвестных U_4 , U_3 , U_2 и U_1 :

$$\begin{aligned} U_4 &= \frac{7/6}{5/6} = \frac{7}{5}; \quad U_3 = \frac{8/7 - (-20/7)U_4}{15/7} = \frac{12}{5}; \\ U_2 &= \frac{1 - (-16/5)U_3 - (1)U_4}{14/5} = \frac{13}{5}; \\ U_1 &= \frac{0 - (-4)(13/5) - (1)(12/5) - (0)(7/5)}{5} = \frac{8}{5}. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Таким образом, процедура построения решения состоит в том, чтобы на этапе номер i вычитать последовательно уравнение i с неким множителем из уравнений $i+1$, $i+2$, ..., n , где $i = 1, 2, \dots, n-1$. При таких действиях матрица коэффициентов \mathbf{K} для рассматриваемых уравнений приводится к верхней треугольной форме, т.е. к форме, в которой все элементы, расположенные ниже диагональных элементов, равны нулю. Тогда, начиная решение с последнего уравнения, оказывается возможным получить выражения для всех неизвестных в порядке U_n, U_{n-1}, \dots, U_1 .

Важно отметить, что в конце этапа i нижняя правая подматрица, имеющая порядок $n-i$ (отмеченная пунктирными линиями в уравнениях (8.3)–(8.5)), является симметричной. Поэтому элементы, расположенные выше диагонали и включающие эту диагональ, могут представлять все элементы матрицы коэффициентов в любые моменты времени, соответствующие данному решению. Как мы увидим в разделе 8.2.3, при компьютерном воплощении мы работаем только с верхней треугольной частью матрицы.

Другое важное наблюдение состоит в том, что рассматриваемое решение предполагает на этапе i наличие отличного от нуля i -го диагонального элемента матрицы коэффициентов, а это приводит к возможности сделать элементы, расположенные ниже этой диагонали, равными нулю. Кроме того, при обратной подстановке применительно к решению для смещений мы вновь осуществляем деление на диагональные элементы матрицы коэффициентов. К счастью, при анализе конечно-элементных систем, строящихся на основе смещений, все диагональные элементы матрицы коэффициентов оказываются положительными в любой момент времени, соответствующий решению, а это представляет собой еще одно свойство, делающее весьма эффективным применение процедуры исключения

по Гауссу (это свойство не обязательно сохраняется, если матрицы жесткости формируются с использованием смешанной модели или с помощью конечных разностей; см. разделы 3.3.4 и 4.4.2). В разделе 8.2.5 мы покажем, что диагональные элементы должны оставаться большими нуля, однако это свойство наблюдается также и при рассмотрении физического процесса исключения по Гауссу.

Физический процесс

Чтобы идентифицировать физический процесс, соответствующий математическим операциям при исключении по Гауссу, заметим прежде всего, что операции с матрицей коэффициентов \mathbf{K} не зависят от элементов, входящих в вектор нагрузки \mathbf{R} . На этом основании мы рассмотрим теперь только операции с матрицей коэффициентов \mathbf{K} , а для упрощения объяснений вновь воспользуемся данным выше примером и схемой на рис. 8.1. Будем считать, что никаких нагрузок не прилагается и что мы, следовательно, имеем

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.7)$$

Если воспользоваться условием, задаваемым посредством первого уравнения, т. е.

$$5U_1 - 4U_2 + U_3 = 0,$$

то мы можем написать

$$U_1 = \frac{4}{5}U_2 - \frac{1}{5}U_3 \quad (8.8)$$

и исключить U_1 из трех уравнений, остающихся в (8.7). Таким образом мы получим

$$\begin{aligned} -4\left(\frac{4}{5}U_2 - \frac{1}{5}U_3\right) + 6U_2 - 4U_3 + U_4 &= 0, \\ \left(\frac{4}{5}U_2 - \frac{1}{5}U_3\right) - 4U_2 + 6U_3 - 4U_4 &= 0, \\ U_2 - 4U_3 + 5U_4 &= 0, \end{aligned}$$

или, в матричной форме,

$$\begin{bmatrix} 14/5 & -16/5 & 1 \\ -16/5 & 29/5 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.9)$$

Сравнивая уравнения (8.9) и (8.3), мы видим, что матрица коэффициентов в (8.9) представляет собой, фактически, нижнюю правую подматрицу размером 3×3 по отношению к матрице коэффициентов в (8.3). Однако мы получили матрицу коэффициентов в (8.9) путем использования (8.7) и условия, определяемого (8.8) и выражающего тот факт, что никакая сила не прилагается к балке при степени свободы, равной 1. Отсюда следует, что матрица коэффициентов в (8.9) является, фактически, матрицей жесткости балки, соответствующей степеням свободы 2, 3 и 4, когда нет силы, прилагаемой при степени свободы, равной 1, т. е. когда единичная степень свободы была «отсоединена» (реализацию этого мы будем называть также «статическим выдавливанием»). Действуя таким же образом, мы получим в (8.4) матрицу жесткости балки в условиях, когда были отсоединены две первых степени свободы; далее, в (8.5) элемент матрицы коэффициентов (4, 4) представляет собой матрицу жесткости балки, соответствующую степени свободы 4 при условии, что степени свободы 1, 2 и 3 отключены. Эти матрицы жесткости приводятся на рисунках 8.1 (б)–(г).

Давайте попытаемся получить более полное представление о процессе исключения по Гауссу путем рассмотрения (гипотетического) лабораторного эксперимента, иначе говоря, мысленного эксперимента. Предположим, что в лаборатории мы создали физическую балку, соответствующую показанной на рис. 8.1 модели. В тех местах, где на рис. 8.1 (а) замеры степени свободы, мы прикрепляем к балке зажимы с приборами для измерения

силы, как это показано на рис. 8.2. После этого придадим точкам балки смещения, показанные на рисунках рис. 8.3(а)–(г), и измерим требуемые для этого силы. Эти силы соответствуют столбцам матрицы жесткости из (8.2) (разумеется, в зависимости от того, насколько подходящей является наша математическая модель, а также от точности нашего численного представления и точности лабораторных измерений, замерыемые силы будут несколько отличающимися, но при нашем мысленном эксперименте мы пренебрегаем этими различиями).

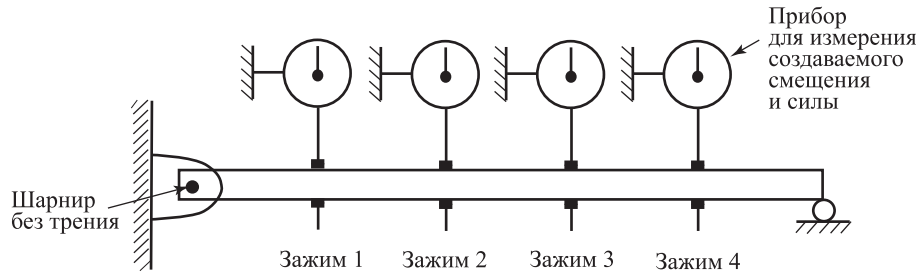


Рис. 8.2. Экспериментальная установка для измерений на балке

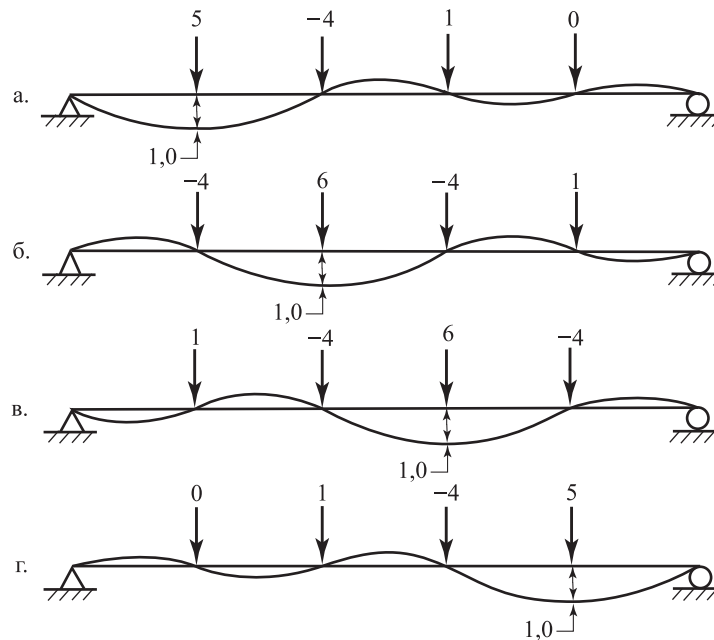


Рис. 8.3. Экспериментальные данные о силах (с точностью до одной цифры) в зажимах, обусловленных единичными смещениями (отметим, что нулевая сила на верхнем и нижнем вариантах нереалистична при заданной кривизне балки, однако реальное значение силы столь мало, что пренебрегаем им)

Теперь удалим зажим 1 и повторим эксперимент в лаборатории с *той же самой* физической балкой. Результаты показаны на рис. 8.4. Теперь замерыемые силы соответствуют столбцам матрицы жесткости из (8.9) (показанным также на рис. 8.16). После этого мы удаляем также зажим 2 и продолжаем эксперимент, чтобы получить замеры силы, показанные на рис. 8.5. Эти результаты соответствуют матрице жесткости, показанной на

рис. 8.1 в. Наконец, мы удаляем также зажим 3 и замер силы дает результат, показанный на рис. 8.6, а это соответствует матрице жесткости, представленной на рис. 8.1 г.

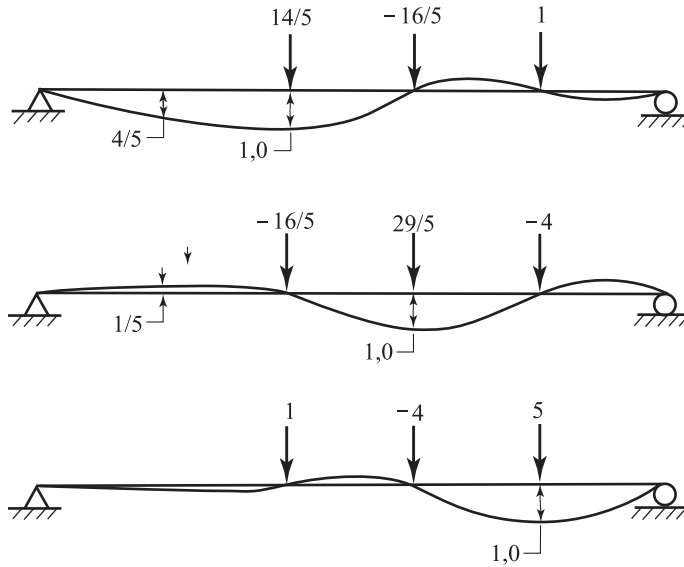


Рис. 8.4. Экспериментальные данные о силах в зажимах при единичных смещениях, при отсутствии зажима 1

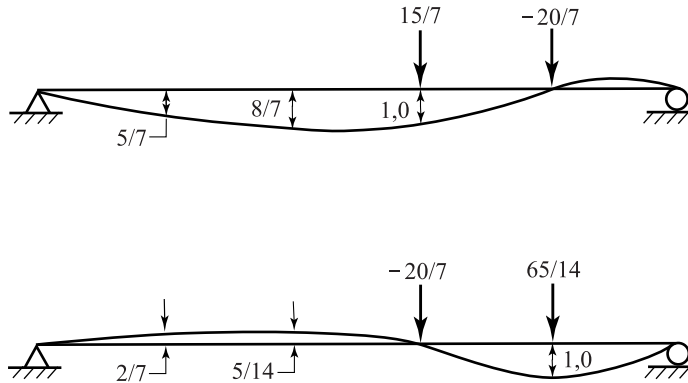


Рис. 8.5. Экспериментальные данные о силах в зажимах при единичных смещениях, при отсутствии зажимов 1 и 2



Рис. 8.6. Экспериментальные данные о силах в зажимах при единичных смещениях, при отсутствии зажимов 1, 2 и 3

Важная особенность нашего мысленного эксперимента состоит в том, что математические операции при исключении по Гауссу соответствуют отключению степеней свободы по одной степени в заданный момент времени, до тех пор, пока не останется только

одна степень свободы (в нашем примере U_4). Процесс исключения степени свободы соответствует, физически, удалению соответствующего зажима. Следовательно, на каждой стадии исключения по Гауссу формируется новая матрица жесткости одной и той же физической структуры, но эта матрица соответствует числу степеней свободы, меньшему, чем на предыдущей стадии.

Разумеется, при лабораторном эксперименте мы можем вводить матрицы жесткости данной конструкции в соответствии с любым, произвольно заданным набором избранных степеней свободы. Действительно, если рассматривать балку на рис. 8.2, то мы могли бы с помощью замеров определить вначале жесткость, даваемую на рис. 8.1 г, затем — матрицу жесткости, представленную на рис. 8.1 в, затем — матрицу жесткости, данную на рис. 8.1 б, и, наконец, матрицу жесткости, приводимую на рис. 8.1 а; можно использовать и любой другой порядок замеров. Кроме того, мы можем перемещать зажимы в любые другие точки и предусматривать большее число зажимов, а затем определять матрицы жесткости для соответствующих степеней свободы по смещениям. Однако при конечно-элементном анализе нам нужно иметь некоторое определенное число степеней свободы, чтобы точно описать поведение конструкции (см. раздел 4.3), а это имеет своим результатом выбор конкретной конечно-элементной модели; после этого мы получаем возможность определения матриц жесткости лишь для этой конечно-элементной модели, когда некоторые степени свободы отключены. Процесс исключения по Гауссу — это процесс отключения степеней свободы.

Пример 8.1: Предположим, что вы знаете некоего лаборанта, ничего не знающего ни о конечных элементах, ни о решении уравнений. Он/она провел эксперимент, используя зажимы, которые замеряют силы, действующие в лаборатории на конструкцию в форме балки; см. рис. 8.7. За счет смещения зажимов в «единичное» и «нулевое» положения были замерены следующие силы.

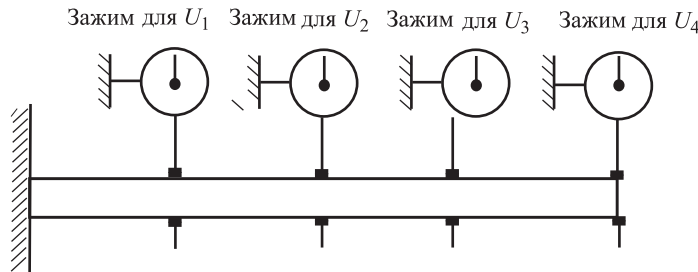


Рис. 8.7. Балка с зажимами

Результат первого эксперимента таков:

$$\begin{array}{l} \text{Силы в зажимах} \\ \text{при } U_1 = 1 \text{ и} \\ U_2 = U_3 = U_4 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad U_4 \\ F_1 \begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{array} \quad (a)$$

При втором эксперименте лаборант удалил зажим для U_2 и повторил замеры, получив следующие силы.

Результат второго эксперимента таков:

$$\begin{array}{l} \text{Силы в зажимах} \\ \text{при } U_1 = 1 \text{ и} \\ U_3 = U_4 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} U_1 \quad U_3 \quad U_4 \\ F_1 \left[\begin{array}{ccc} 13/3 & -5/3 & 2/3 \\ -5/3 & 10/3 & -4/3 \\ 2/3 & -4/3 & 5/6 \end{array} \right] \end{array} \quad (b)$$

Вы не уверены, что лаборант правильно замерил силы при этом втором эксперименте. Предположим, что первый эксперимент дал правильные результаты. Проверьте, был ли также правильно проведен второй эксперимент.

Матрица жесткости (b) является правильной, если она получена из (a) после отключения степени свободы U_2 . Выполняя исключение по Гауссу в отношении U_2 , мы получаем из матрицы в (a):

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 13/3 & -5/3 & 2/3 \\ -5/3 & 7/3 & -4/3 \\ 2/3 & -4/3 & 5/6 \end{bmatrix}.$$

Мы видим, следовательно, что замер не был правильно проведен при определении силы в зажиме 3, когда $U_3 = 1$ и $U_1 = U_4 = 0$.

До сих пор мы предполагали, что к конструкции не приложены никакие нагрузки, так как операции с матрицей жесткости не зависят от операций с вектором нагрузки. Если вектор нагрузки отличен от нулевого вектора, то исключение степеней свободы выполняется так же, как это описано выше, однако в этом случае уравнение, используемое для исключения переменной смещения из остальных уравнений, содержит член с нагрузкой. В ходе исключения эффект этой нагрузки переносится на оставшиеся степени свободы. Поэтому, если подводить итог, то физический процесс при процедуре исключения по Гауссу состоит в том, что применительно к той же физической системе определяются n матриц жесткости, имеющих порядок $n, n-1, \dots, 1$ и соответствующих последним $n-i$ степеням свободы, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$. В дополнение к этому вычисляются надлежащие векторы нагрузки, соответствующие n матрицам жесткости. Эти векторы нагрузки таковы, что соответствующие смещения при неотключенных степенях свободы — это смещения, рассчитанные для системы, описываемой всеми степенями свободы в количестве n . После этого неизвестные смещения определяются путем рассмотрения последовательности систем, обладающих лишь одной, двумя, ..., степенями свободы (они соответствуют последней, двум последним, ..., из числа первоначальных степеней свободы).

Теперь мы можем объяснить, каковы физические причины того, что все диагональные элементы при применении процедуры исключения по Гауссу должны оставаться положительными. Это следует из того, что последний i -й диагональный элемент представляет собой жесткость для степени свободы i , когда первые $i-1$ степени свободы были отключены, и эта жесткость должна быть положительной. Если при исключении по Гауссу появляется нулевой (или отрицательный) диагональный элемент, то *данная структура является неустойчивой*. Пример такой ситуации показан на рис. 8.8, где после отключения степеней свободы U_1, U_2 и U_3 последний диагональный элемент оказывается равным нулю.

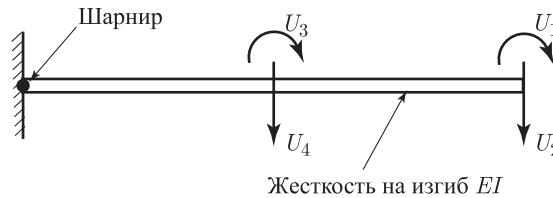


Рис. 8.8. Пример неустойчивой конструкции

До сих пор мы считали, что исключение по Гауссу осуществляется в последовательности от первой до $(n - 1)$ -й степени свободы. Однако мы можем совершенно аналогичным образом осуществлять исключение и в обратном направлении (т. е. начиная от последней и кончая второй степенью свободы), или же можем выбрать любой желаемый порядок, как мы уже и указывали при обсуждении физического лабораторного эксперимента, показанного на рис. 8.2.

Пример 8.2: Требуется получить решение уравнений равновесия балки, показанной на рис. 8.1, путем исключения переменных смещения в порядке U_3, U_2, U_4 .

Мы можем либо записать отдельные уравнения в ходе процесса исключения, либо непосредственно осуществлять исключение по Гауссу в заданном порядке. В последнем случае, после исключения U_3 мы получаем

$$\begin{bmatrix} 29/6 & -10/3 & 0 & 2/3 \\ -10/3 & 10/3 & 0 & -5/3 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 2/3 & -5/3 & 0 & 7/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Затем мы исключаем U_2 и получаем

$$\begin{bmatrix} 3/2 & 0 & 0 & -1 \\ -10/3 & 10/3 & 0 & -5/3 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

и, наконец, исключаем U_4 , получая

$$\begin{bmatrix} 5/6 & 0 & 0 & 0 \\ -10/3 & 10/3 & 0 & -5/3 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

Теперь решение для смещений получается в следующем виде:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{8}{5}, \\ U_4 &= \frac{1/2 - (-1)(8/5)}{3/2} = \frac{7}{5}, \\ U_2 &= \frac{1 - (-10/3)(8/5) - (-5/3)(7/5)}{10/3} = \frac{13}{5}, \\ U_3 &= \frac{0 - (1)(8/5) - (-4)(7/5) - (-4)(13/5)}{6} = \frac{12}{5}. \end{aligned}$$

Это совпадает с решением, полученным нами ранее.

8.2.2. Решение LDL^T

В предыдущем разделе мы увидели, что основная процедура решения с исключением по Гауссу состоит в том, чтобы привести уравнения к такому виду, чтобы они соответствовали верхней треугольной матрице коэффициентов, после чего неизвестные смещения \mathbf{U} могут быть рассчитаны путем обратной подстановки. Теперь мы хотели бы формализовать процедуру решения с использованием надлежащих матричных операций. Дополнительная важная цель предлагаемого обсуждения состоит в том, чтобы ввести такие обозначения,

которые могут использоваться на протяжении последующих представлений. Реальное компьютерное воплощение дается в следующем разделе.

Если рассматривать операции, выполняемые при решении с исключением по Гауссу, представленном в предыдущем разделе, то мы можем записать процесс приведения матрицы жесткости \mathbf{K} к верхней треугольной форме в виде

$$\mathbf{L}_{n-1}^{-1} \dots \mathbf{L}_2^{-1} \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{K} = \mathbf{S}, \quad (8.10)$$

где символ \mathbf{S} обозначает верхнюю треугольную матрицу в ее окончательной форме и

$$\mathbf{L}_i^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \text{см. приме-} \\ & \cdot & & & & & & \text{чание } ^1) \\ & & \cdot & & & & & \\ & & & \cdot & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & -l_{i+1,i} & \cdot & & \\ & & & & -l_{i+2,i} & & & \\ & & & & \cdot & & \cdot & \\ & & & & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & & & \\ & & & & -l_{ni} & & & 1 \end{bmatrix}; \quad l_{i+j,i} = \frac{k_{i+j,i}^{(i)}}{k_{ii}^{(i)}}. \quad (8.11)$$

Элементы $l_{i+j,i}$ представляют собой множители Гаусса, а правый верхний индекс (i) означает, что используется элемент матрицы $\mathbf{L}_{i-1}^{-1} \dots \mathbf{L}_2^{-1} \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{K}$.

Теперь заметим, что \mathbf{L}_i получается просто путем обращения знака в элементах матрицы \mathbf{L}_i^{-1} , находящихся вне диагонали. На этом основании получаем

$$\mathbf{K} = \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 \dots \mathbf{L}_{n-1} \mathbf{S}, \quad (8.12)$$

где

$$\mathbf{L}_i = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \cdot & & & & & & \\ & & \cdot & & & & & \\ & & & \cdot & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & l_{i+1,i} & \cdot & & \\ & & & & l_{i+2,i} & & \cdot & \\ & & & & \cdot & & & \cdot \\ & & & & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & & & \\ & & & & l_{ni} & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (8.13)$$

Следовательно, мы можем написать

$$\mathbf{K} = \mathbf{L} \mathbf{S}, \quad (8.14)$$

¹⁾ Здесь и на протяжении всей книги элементы, не показанные в матрицах, равны нулю.

где $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 \dots \mathbf{L}_{n-1}$; т. е. матрица \mathbf{L} представляет собой нижнюю единичную треугольную матрицу,

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ l_{21} & 1 & & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & & \\ l_{41} & l_{42} & & 1 & & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ & & & & & 1 \\ l_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}. \quad (8.15)$$

Учитывая, что матрица \mathbf{S} является верхней треугольной и что диагональные элементы являются основными пунктами исключения по Гауссу, мы можем написать $\mathbf{S} = \mathbf{D}\tilde{\mathbf{S}}$, где \mathbf{D} — диагональная матрица, содержащая диагональные элементы матрицы \mathbf{S} ; иначе говоря, $d_{ii} = s_{ii}$. Подставляя выражение для \mathbf{S} в соотношение (8.14) и замечая, что матрица \mathbf{K} симметрична и ее разложение является единственным, мы получаем $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{L}^T$ и, следовательно,

$$\mathbf{K} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T. \quad (8.16)$$

Именно это $\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T$ разложение матрицы \mathbf{K} может быть эффективно использовано для получения решения уравнений (8.1) в два нижеследующих этапа:

$$\mathbf{L}\mathbf{V} = \mathbf{R}, \quad (8.17)$$

$$\mathbf{D}\mathbf{L}^T\mathbf{U} = \mathbf{V}, \quad (8.18)$$

где вектор нагрузки \mathbf{R} из (8.17) приводится к форме, позволяющей получить \mathbf{V} ,

$$\mathbf{V} = \mathbf{L}_{n-1}^{-1} \dots \mathbf{L}_2^{-1} \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{R}, \quad (8.19)$$

а решение \mathbf{U} в (8.18) получается путем обратной подстановки,

$$\mathbf{L}^T\mathbf{U} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{V}. \quad (8.20)$$

При компьютерном воплощении вектор \mathbf{V} зачастую вычисляется в то же самое время, когда формируются матрицы \mathbf{L}_i^{-1} . Это было сделано в решении для примера с просто опертой балкой в разделе 8.2.1.

Следует отметить, что на практике матричные умножения с целью получения \mathbf{L} в (8.15) и \mathbf{V} в (8.19) формально не выполняются, но что \mathbf{L} и \mathbf{V} определяются путем прямой модификации \mathbf{K} и \mathbf{R} . Это подвергается дальнейшему обсуждению в следующем разделе, где представлено компьютерное воплощение процедуры решения. Однако прежде, чем продвигаться дальше, рассмотрим пример из раздела 8.2.1, чтобы конкретизировать вывод матриц, определение которых дано выше.

Пример 8.3: Определите матрицы \mathbf{L}_i^{-1} , $i = 1, 2, 3$, \mathbf{S} , \mathbf{L} и \mathbf{D} , а также вектор \mathbf{V} , соответствующий матрице жесткости, и вектор нагрузки для просто опертой балки, рассмотренной в разделе 8.2.1.

Пользуясь информацией, данной в разделе 8.2.1, мы можем непосредственно выписать требуемые матрицы:

$$\mathbf{L}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 4/5 & 1 & & & \\ -1/5 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 8/7 & 1 & & \\ 0 & -5/14 & 0 & 1 & \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{L}_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 4/3 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ & 14/5 & -16/5 & 1 \\ & & 15/7 & -20/7 \\ & & & 5/6 \end{bmatrix},$$

где матрица \mathbf{L}_i^{-1} содержит в своем i -м столбце те множители, которые использовались при исключении i -го уравнения, а матрица \mathbf{S} — это верхняя треугольная матрица, полученная в (8.5), матрица \mathbf{D} — это диагональная матрица, диагональные элементы которой являются основными пунктами исключения. В данном случае

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 5 & & & \\ & 14/5 & & \\ & & 15/7 & \\ & & & 5/6 \end{bmatrix}.$$

Для получения \mathbf{L} мы используем формулу (8.15); следовательно,

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -4/5 & 1 & & \\ 1/5 & -8/7 & 1 & \\ 0 & 5/14 & -4/3 & 1 \end{bmatrix},$$

и с помощью проверки мы можем убедиться, что $\mathbf{S} = \mathbf{DL}^T$.

Вектор \mathbf{V} был получен в (8.5):

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 8/7 \\ 7/6 \end{bmatrix}.$$

8.2.3. Компьютерная реализация исключения по Гауссу — решение с активным столбцом

Целью компьютерной реализации процедуры решения по Гауссу является решение с малой затратой времени. Кроме того, требования к объему быстрой памяти должны обеспечивать ее достаточно малый объем с тем, чтобы избежать использования дополнительной памяти. Однако для больших систем использование дополнительной памяти будет, тем не менее, неизбежно, а по этой причине нужно иметь возможность так модифицировать алгоритм решения, чтобы добиться его эффективности с дополнительной памятью.

Преимущество конечно-элементного анализа связано с тем, что матрица жесткости совокупности элементов не только симметрична и положительно определена, но и является также ленточной; это означает, что $k_{ij} = 0$ при $j > i + m_K$, где m_K — это половина ширины ленты для данной системы (см. рис. 2.1). Тот факт, что при конечно-элементном анализе все элементы, отличные от нуля, группируются около диагоналей системных матриц, значительно уменьшает общее число операций и объем быстрой памяти, требуемой для решения уравнений. Однако это свойство зависит от того, как нумеруются узловые точки в конечно-элементной сетке, и исследователь должен позаботиться о том, чтобы получить эффективную нумерацию узловых точек (см. главу 12).

Предположим, что для заданного конечно-элементного комплекса определена конкретная нумерация узловых точек и рассчитаны соответствующие высоты столбцов, а также матрица жесткости \mathbf{K} (подробности см. в разделе 12.2.3). Разложение \mathbf{K} в форме \mathbf{LDL}^T может быть эффективно осуществлено путем рассмотрения каждого из столбцов по очереди; иначе говоря, хотя исключение по Гауссу выполняется по строкам, окончательные элементы матриц \mathbf{D} и \mathbf{L} рассчитываются по столбцам. Если использовать равенство $d_{11} = k_{11}$, то алгоритм для расчета элементов l_{ij} и d_{ij} в j -м столбце при $j = 2, \dots, n$ имеет

вид

$$\left. \begin{aligned} g_{m_j, j} &= k_{m_j, j}; \\ g_{ij} &= k_{ij} - \sum_{r=m_m}^{i-1} l_{ri} g_{rj}; \quad i = m_j + 1, \dots, j-1 \end{aligned} \right\}, \quad (8.21)$$

где m_j — это номер строки для первого, отличного от нуля, элемента в столбце j , а $m_m = \max\{m_i, m_j\}$ (см. рис. 12.3). Переменные $m_i, i = 1, \dots, n$ определяют предельную линию данной матрицы; кроме того, значения $i - m_i$ — это высоты столбцов, и максимальная высота столбца — это половина ширины ленты m_K . Элементы g_{ij} в (8.21) определяются только как промежуточные величины, и расчет завершается использованием формул

$$l_{ij} = \frac{g_{ij}}{d_{ii}}, \quad i = m_j, \dots, j-1, \quad (8.22)$$

$$d_{jj} = k_{jj} - \sum_{r=m_j}^{j-1} l_{rj} g_{rj}. \quad (8.23)$$

Следует отметить, что операции суммирования в формулах (8.21) и (8.23) не охватывают умножений на нулевые элементы за границами предельной линии матрицы и что l_{ij} являются скорее элементами матрицы \mathbf{L}^T , а не матрицы \mathbf{L} . Алгоритм решения, заданный формулами (8.21)–(8.23) (фактически в сочетании с (8.24) и (8.25)), мы назовем *решением с активным столбцом* или *методом приведения к предельной линии (или к столбцу)*.

Рассматривая приемы распределения памяти при приведении, видим, что элемент l_{ij} , будучи рассчитан для использования в (8.23), немедленно заменяет g_{ij} , а d_{jj} заменяет k_{jj} . Поэтому в конце процесса приведения мы имеем элементы d_{jj} в ячейках памяти, перед этим занятых элементами k_{jj} , а элементы l_{rj} вводятся в ячейки памяти, где были k_{rj} , $j > r$.

Чтобы ознакомиться ближе с алгоритмом решения, рассмотрим приводимые ниже примеры.

Пример 8.4: Воспользуйтесь алгоритмом решения, заданным формулами (8.21)–(8.23), чтобы рассчитать треугольные множители \mathbf{D} и \mathbf{L}^T матрицы жесткости для балки, рассмотренной в примере 8.3.

Первоначально рассматриваемые элементы, будучи записаны в соответствующих им точках матрицы, имеют вид

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & \\ & 6 & -4 & 1 \\ & & 6 & -4 \\ & & & 5 \end{bmatrix}$$

при $m_1 = 1, m_2 = 1, m_3 = 1$ и $m_4 = 2$. Используя формулы (8.21)–(8.23), мы получаем для $j = 2$

$$d_{11} = k_{11} = 5,$$

$$g_{12} = k_{12} = -4,$$

$$l_{12} = \frac{g_{12}}{d_{11}} = -\frac{4}{5},$$

$$d_{22} = k_{22} - l_{12} g_{12} = 6 - (-4) \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{14}{5},$$

и, таким образом, результирующие элементы матрицы имеют теперь следующий вид, при использовании пунктирной линии для отделения приведенных столбцов от неприведенных,

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 5 & -4/5 & 1 & \\ & 14/5 & -4 & 1 \\ & & 6 & -4 \\ & & & 5 \end{array} \right].$$

Далее, для случая $j = 3$ мы получаем

$$\begin{aligned} g_{13} &= k_{13} = 1, \\ g_{23} &= k_{23} - l_{12}g_{13} = -4 - \left(-\frac{4}{5}\right)(1) = -\frac{16}{5}, \\ l_{13} &= \frac{g_{13}}{d_{11}} = \frac{1}{5}, \\ l_{23} &= \frac{g_{23}}{d_{22}} = \frac{-16/5}{14/5} = -\frac{8}{7}, \\ d_{33} &= k_{33} - l_{13}g_{13} - l_{23}g_{23} = 6 - \left(\frac{1}{5}\right)(1) - \left(-\frac{8}{7}\right)\left(-\frac{16}{5}\right) = \frac{15}{7}, \end{aligned}$$

а результирующие элементы матрицы имеют вид

$$\begin{bmatrix} 5 & -4/5 & 1/5 & \vdots & \\ & 14/5 & -8/7 & \vdots & 1 \\ & & 15/7 & \vdots & -4 \\ & & & \vdots & 5 \end{bmatrix}.$$

Наконец, для случая $j = 4$ мы имеем

$$\begin{aligned} g_{24} &= k_{24} = 1, \\ g_{34} &= k_{34} - l_{23}g_{24} = -4 - \left(-\frac{8}{7}\right)(1) = -\frac{20}{7}, \\ l_{24} &= \frac{g_{24}}{d_{22}} = \frac{1}{14/5} = \frac{5}{14}, \\ l_{34} &= \frac{g_{34}}{d_{33}} = \frac{-20/7}{15/7} = -\frac{4}{3}, \\ d_{44} &= k_{44} - l_{24}g_{24} - l_{34}g_{34} = 5 - \left(\frac{5}{14}\right)(1) - \left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{20}{7}\right) = \frac{5}{6}, \end{aligned}$$

и, окончательно, вводимые в память элементы имеют вид

$$\begin{bmatrix} 5 & -4/5 & 1/5 & \\ & 14/5 & -8/7 & 5/14 \\ & & 15/7 & -4/3 \\ & & & 5/6 \end{bmatrix}.$$

Следует отметить, что элементы матрицы \mathbf{D} водятся в память на ее диагонали и что элементы l_{ij} заменили элементы k_{ij} , $j > i$.

Несмотря на то, что подробности процедуры решения уже были продемонстрированы в примере 8.4, важность применения метода приведения по столбцам не могла быть показана по той причине, что предельная линия совпадает с лентой. Эффективность схемы приведения с помощью предельной линии оказывается более очевидной при факторизации следующей матрицы.

Пример 8.5: Воспользуйтесь алгоритмом решения, заданным формулами (8.21)–(8.23), чтобы рассчитать треугольные множители \mathbf{D} и \mathbf{L}^T для матрицы \mathbf{K} , где

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & & -1 \\ & 3 & -2 & 0 \\ & & 5 & -3 & 0 \\ \text{симметрично} & 10 & 4 & \\ & & & 10 \end{bmatrix}.$$

Для этой матрицы мы имеем $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $m_3 = 2$, $m_4 = 3$ и $m_5 = 1$.

В данном случае при $d_{11} = 2$ и $j = 2$ алгоритм дает

$$\begin{aligned} g_{12} &= k_{12} = -2, \\ l_{12} &= \frac{g_{12}}{d_{11}} = \frac{-2}{2} = -1, \\ d_{22} &= k_{22} - l_{12}g_{12} = 3 - (-1)(-2) = 1, \end{aligned}$$

и, таким образом, результирующие элементы матрицы имеют вид

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & & & -1 \\ & & 1 & -2 & 0 \\ & & & 5 & -3 & 0 \\ & & & & 10 & 4 \\ & & & & & 10 \end{array} \right].$$

При $j = 3$ имеем

$$\begin{aligned} g_{23} &= k_{23} = -2, \\ l_{23} &= \frac{g_{23}}{d_{22}} = \frac{-2}{1} = -2, \\ d_{33} &= k_{33} - l_{23}g_{23} = 5 - (-2)(-2) = 1, \end{aligned}$$

и массив коэффициентов имеет теперь форму

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & & & -1 \\ & & 1 & -2 & 0 \\ & & & 1 & -3 & 0 \\ & & & & 10 & 4 \\ & & & & & 10 \end{array} \right].$$

При $j = 4$ получаем

$$\begin{aligned} g_{34} &= k_{34} = -3, \\ l_{34} &= \frac{g_{34}}{d_{33}} = \frac{-3}{1} = -3, \\ d_{44} &= k_{44} - l_{34}g_{34} = 10 - (-3)(-3) = 1, \end{aligned}$$

и результирующие элементы матрицы имеют вид

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & & & -1 \\ & & 1 & -2 & 0 \\ & & & 1 & -3 & 0 \\ & & & & 1 & 4 \\ & & & & & 10 \end{array} \right].$$

Наконец, при $j = 5$ мы имеем

$$\begin{aligned} g_{15} &= k_{15} = -1, \\ g_{25} &= k_{25} - l_{12}g_{15} = 9 - (-1)(-1) = -1, \\ g_{35} &= k_{35} - l_{23}g_{25} = 0 - (-2)(-1) = -2, \\ g_{45} &= k_{45} - l_{34}g_{35} = +4 - (-3)(-2) = -2, \\ l_{15} &= \frac{g_{15}}{d_{11}} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}, \\ l_{25} &= \frac{g_{25}}{d_{22}} = \frac{-1}{1} = -1, \\ l_{35} &= \frac{g_{35}}{d_{33}} = \frac{-2}{1} = -2, \end{aligned}$$

$$l_{45} = \frac{g_{45}}{d_{44}} = \frac{-2}{1} = -2,$$

$$\begin{aligned} d_{55} &= k_{55} - l_{15}g_{15} - l_{25}g_{25} - l_{35}g_{35} - l_{45}g_{45} = \\ &= 10 - (-1/2)(-1) - (-1)(-1) - (-2)(-2) - (-2)(-2) = 1/2, \end{aligned}$$

и окончательный вид элементов матрицы оказывается таким:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & -1/2 \\ & 1 & -2 & -1 \\ & & 1 & -3 & -2 \\ & & & 1 & -2 \\ & & & & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Как и в примере 8.4, мы имеем ситуацию, когда элементы \mathbf{D} и \mathbf{L}^T заменяют элементы первоначальной матрицы \mathbf{K} , k_{ii} и k_{ij} , $j > i$, соответственно.

В процессе предшествовавшего обсуждения мы рассматривали только разложение матрицы жесткости \mathbf{K} , составляющее главную часть решения всей системы уравнений. Когда множители \mathbf{L} и \mathbf{D} для матрицы \mathbf{K} были определены, решение для \mathbf{U} рассчитывается с помощью соотношений (8.19) и (8.20), причем можно заметить, что приведение \mathbf{R} согласно (8.19) может быть выполнено в то же самое время, как разлагается матрица \mathbf{K} , или же оно может быть сделано отдельно впоследствии. Уравнение, которое должно быть использовано, подобно уравнению (8.23); иначе говоря, мы имеем $V_1 = R_1$ и для $i = 2, \dots, n$ вычисляем

$$v_i = R_i - \sum_{r=m_i}^{i-1} l_{ri}V_r, \quad (8.24)$$

где R_i и V_i представляют собой i -е элементы векторов \mathbf{R} и \mathbf{V} . Если учесть возможности распоряжения памятью, элемент V_i вводится вместо R_i .

Обратная подстановка в (8.20) реализуется путем последовательного расчета U_n, U_{n-1}, \dots, U_1 . Это осуществляется за счет того, что вначале вычисляется $\bar{\mathbf{V}}$, где $\bar{\mathbf{V}} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{V}$. Затем, используя равенство $\bar{\mathbf{V}}^{(n)} = \bar{\mathbf{V}}$, мы имеем $U_n = \bar{V}_n^{(n)}$ и для $i = n, \dots, 2$ вычисляем

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_r^{(i-1)} &= \bar{V}_r^{(i)} - l_{ri}U_i; & r = m_i, \dots, i-1 \\ U_{i-1} &= \bar{V}_{i-1}^{(i-1)} \end{aligned} \right\}, \quad (8.25)$$

где верхний индекс $(i-1)$ означает, что элемент рассчитывается в ходе вычисления U_{i-1} . Следует заметить, что при всех j переменная $\bar{V}_k^{(j)}$ вводится в ячейку памяти на место V_k , т.е. в ячейку, где первоначально хранилась переменная R_k .

Пример 8.6: Используйте алгоритм, данный в (8.24) и (8.25), чтобы рассчитать решение задачи $\mathbf{KU} = \mathbf{R}$, когда \mathbf{K} представляет собой матрицу жесткости, рассмотренную в примере 8.5 и когда

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В процессе решения мы используем множители \mathbf{D} и \mathbf{L}^T для матрицы \mathbf{K} , рассчитанные в примере 8.5. Если использовать (8.24) для приведения с продвижением вперед, то получим

$$\begin{aligned} V_1 &= R_1 = 0, \\ V_2 &= R_2 - l_{12}V_1 = 1 - 0 = 1, \\ V_3 &= R_3 - l_{23}V_2 = 0 - (-2)(1) = 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_4 &= R_4 - l_{34}V_3 = 0 - (-3)(2) = 6, \\
V_5 &= R_5 - l_{15}V_1 - l_{25}V_2 - l_{35}V_3 - l_{45}V_4 = \\
&= 0 - 0 - (-1)(1) - (-2)(2) - (-2)(6) = 17.
\end{aligned}$$

Сразу же после расчета величины V_i этот элемент заменяет R_i . Таким образом, теперь мы имеем вектор \mathbf{V} там, где первоначально хранились компоненты нагрузки,

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

Первый этап обратной подстановки состоит в том, чтобы вычислить $\bar{\mathbf{V}}$, где $\bar{\mathbf{V}} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{V}$. Здесь мы получаем

$$\bar{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \\ 34 \end{bmatrix}, \quad (\text{a})$$

и, таким образом, $U_5 = \bar{V}_5 = 34$.

Теперь мы используем (8.25) при $\bar{\mathbf{V}}^{(5)} = \bar{\mathbf{V}}$ из формулы (a). Следовательно, для случая $i = 5$ получим

$$\begin{aligned}
\bar{V}_1^{(4)} &= \bar{V}_1^{(5)} - l_{15}U_5 = 0 - (-1/2)(34) = 17, \\
\bar{V}_2^{(4)} &= \bar{V}_2^{(5)} - l_{25}U_5 = 1 - (-1)(34) = 35, \\
\bar{V}_3^{(4)} &= \bar{V}_3^{(5)} - l_{35}U_5 = 2 - (-2)(34) = 70, \\
\bar{V}_4^{(4)} &= \bar{V}_4^{(5)} - l_{45}U_5 = 6 - (-2)(34) = 74,
\end{aligned}$$

и

$$U_4 = \bar{V}_4^{(4)} = 74.$$

Для $i = 4$:

$$\bar{V}_3^{(3)} = \bar{V}_3^{(4)} - l_{34}U_4 = 70 - (-3)(74) = 292$$

и

$$U_3 = \bar{V}_3^{(3)} = 292.$$

Для $i = 3$:

$$\bar{V}_2^{(2)} = \bar{V}_2^{(3)} - l_{23}U_3 = 35 - (-2)(292) = 619$$

и

$$U_2 = \bar{V}_2^{(2)} = 619.$$

Для $i = 2$:

$$\bar{V}_1^{(1)} = \bar{V}_1^{(2)} - l_{12}U_2 = 17 - (-1)(619) = 636$$

и

$$U_1 = \bar{V}_1^{(1)} = 636.$$

Элементы вектора в тех ячейках, где первоначально хранились компоненты нагрузки, имеют вид, после этапов $i = 5, 4, 3, 2$, соответственно:

$$\begin{bmatrix} 17 \\ 35 \\ 70 \\ 74 \\ 34 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 17 \\ 35 \\ 292 \\ 74 \\ 34 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 17 \\ 619 \\ 292 \\ 74 \\ 34 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 636 \\ 619 \\ 292 \\ 74 \\ 34 \end{bmatrix},$$

где последний вектор дает решение \mathbf{U} .

Рассматривая эффективность алгоритма решения с активным столбцом, следует отметить, что при конкретном виде матрицы \mathbf{K} этот алгоритм зачастую дает эффективное решение, так как для нулевых элементов, расположенных за предельной линией, не производится никаких операций, а это подсказывает нам, что в память следует вводить только элементы, располагающиеся ниже предельной линии. Однако общее число выполняемых операций не является абсолютным минимумом, так как, в дополнение, в формулах (8.21)–(8.25) можно перепрыгнуть через те умножения, для которых l_{ri} или g_{rj} равно нулю. Конечно же, это перепрыгивание требует добавочной логики, однако оно оказывается эффективным, если таких случаев много, ибо тогда создается главная предпосылка для построения разреженных решений. Эти средства решения, которые могут быть весьма эффективными при построении больших трехмерных решений, позволяют избежать введения в память элементов, остающихся равными нулю, и перепрыгнуть через соответствующие операции — см., например, книгу [George, Gilbert, Liu, 1993].

Чтобы оценить эффективность решения с активным столбцом, рассмотрим систему с постоянными высотами столбцов, т.е. с половиной ширины ленты m_K такой, что $m_K = i - m_i$ при всех i , $i > m_K$, и произведем подсчет числа операций на основе соотношений (8.16)–(8.25). Согласно принятому нами определению, мы считаем, что одна операция состоит из одного умножения (или деления), за которым почти всегда следует сложение. В данном случае число операций, требуемых для разложения \mathbf{LDL}^T матрицы \mathbf{K} приближенно равно $n[m_K + (m_K - 1) + \dots + 1] \doteq \frac{1}{2}nm_K^2$, а для приведения и обратной подстановки вектора нагрузки требуется дополнительное число операций, приближенно равное $2nm_K$. На практике системы, имеющие в точности постоянные высоты столбцов, встречаются довольно редко и, поэтому, вышеуказанные подсчеты числа операций должны быть видоизменены, давая $\frac{1}{2}\sum_i (i - m_i)^2$ и $2\sum_i (i - m_i)$ соответственно. Однако зачастую мы все же используем формулы для постоянного значения полуширины ленты, но со средней или эффективной полушириной, просто чтобы получить представление об усилиях, требуемых для построения решения.

Учитывая тот факт, что число операций определяется способом расположения в матрице отличных от нуля элементов, были разработаны алгоритмы, изменяющие порядок уравнений таким образом, чтобы повысить эффективность решения этих уравнений. Когда используется схема решения с активным столбцом, то изменение порядка осуществляется с целью уменьшения высоты столбцов и получения эффективного решения (см. работы [Cuthill, McKee, 1969], а также [Gibbs, Poole, Stockmeyer, 1976]), тогда как если используется разреженный алгоритм, то изменение порядка делается для уменьшения общего числа операций с учетом того, чтобы не производить операций над элементами, остающимися равными нулю в процессе построения решения. Это требование, касающееся разреженного характера алгоритма решения, означает, что число элементов, обеспечивающих временную замену (т.е. элементов, первоначально равных нулю, но впоследствии становящихся отличными от нуля), должно быть мало (см. книгу [George, Gilbert, Liu, 1993]). Использование таких процедур изменения порядка в общем случае не дает истинного оптимального порядка расположения уравнений, однако оно является очень важным, потому что на практике первоначальный порядок этого расположения устанавливается без учета эффективности решения уравнений, а лишь с учетом эффективности самой модели.

Алгоритм решения (8.21)–(8.25) был представлен в обозначениях для двумерных матриц; например, элемент (r, j) матрицы \mathbf{K} обозначался символом k_{rj} . Кроме того, имея в виду демонстрацию работы этого алгоритма, в примерах 8.4 и 8.5 элементы, рассматриваемые в процессе приведения, были представлены в местах их соответствующего матричного расположения. Однако при фактическом решении на компьютере активные столбцы матрицы \mathbf{K} эффективно вводятся в память в виде одномерного массива. Предположим, что используется схема введения в память, рассмотренная в главе 12; иначе говоря, соответствующие элементы матрицы \mathbf{K} вводятся в память в виде одномерного массива \mathbf{A} , имеющего длину NWK , а адреса диагональных элементов этой матрицы вводятся

в МАХА. Ниже приводится эффективная подпрограмма, использующая представленный выше алгоритм (т.е. соотношения (8.21)–(8.25)), но действующая с матрицей жесткости и использующая данную здесь схему распределения памяти.

Подпрограмма COLSOL. Программа COLSOL представляет собой алгоритм решения с активным столбцом, предназначенный для факторизации матрицы жесткости по схеме \mathbf{LDL}^T или для приведения и обратной подстановки вектора нагрузки. Процесс в целом дает решение конечно-элементных уравнений равновесия. Независимые переменные и методика использования подпрограммы определяются с помощью содержащихся в программе комментариев.

```

SUBROUTINE COLSOL (A,V,MAXA,NN,NWK,NNM,KKK,IOUT)
C . . . . .
C .
C .   P R O G R A M
C .   TO SOLVE FINITE ELEMENT STATIC EQUILIBRIUM EQUATION IN
C .   CORE, USING COMRACTED STORAGE AND COLUMN REDUCTION SCHEME
C .
C .   - - INPUT VARIABLES - -
C .   A(NWK)      = STIFFNESS MATRIX STORED IN COMPACTED FORM
C .   V(NN)       = RIGHT-HAND-SIDE LOAD VECTOR
C .   MAXA(NNM)   = VECTOR CONTAINING ADDRESSES OF DIAGONAL
C .               ELEMENTS OF STIFFNESS MATRIX IN A
C .   NN          = NUMBER OF EQUATIONS
C .   NWK         = NUMBER OF ELEMENTS BELOW SKYLINE OF MATRIX
C .   NNM         = NN + 1
C .   KKK         = INPUT FLAG
C .   EQ. 1       = TRIANGULATIZATION OF STIFFNESS MATRIX
C .   EQ. 2       = REDUCTION AND BACK-SUBSTITUTION OF LOAD VECTOR
C .   IOUT        = UNIT NUMBER USED FOR OUTPOT
C .
C .   - - OUTPUT - -
C .   A(NWK)      = D AND L - FACTORS OF STIFFNESS MATRIX
C .   V(NN)       = DISPLACEMENT VECTOR
C .
C . . . . .
C .   IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
C . . . . .
C .   THIS PROGRAM IS USED IN SINGLE PRECISION ARITHMETIC ON GRAY
C .   EQUIPMENT AND SOURCE PRECISION ARITHMETIC ON IBM MACHINES.
C .   ENGINEERING WORKSTATIONS AND PCS. DEACTIVATE ABOVE LINE FOR
C .   SINGLE PRECISION ARITHMETIC.
C . . . . .
C .   DIMENSION A(NWK),V(NN), MAXA(NNM)
C .
C .   PERFORM L*D*L(T) FACTORIZATION OF STIFFNESS MATRIX
C .
C .   IF (KKK-2) 40,150,150
C .   40 DO 140 N=1,NN
C .      KU=MAXA(N)
C .      KL=KN + 1
C .      KU=MAXA(N+1) - 1
C .      KH=KU - KL
C .      IF (KH) 110,90,50
C .   50 K=N - KH
C .      IC=0
C .      KLT=KU
C .      DO 80 J=1,KH
C .      IC=IC + 1
C .      KLT=KLT - 1
C .      KI=MAXA(K)
C .      ND=MAXA(K+1) - KI - 1
C .      IF (ND) 80,80,60
C .   60 KK=MINO(IC,ND)
C .      C=0.
C .      DO 70 L=1,KK
C .      C=C + A(KI+L)*A(KLT+L)
C .      A(KLT)=A(KLT) - C
C .   70 K=K + 1
C .   90 K=N
C .      B=0.
C .      DO 100 KK=KL,KU
C .      K=K - 1
C .      KI=MAXA(K)
C .      C=A(KK)/A(KI)
C .      B=B + C*A(KK)
C .   100 A(KK)=C
C .      A(KN)=A(KN) - B
C .   110 IF (A(KN)) 120,120,140
C .   120 WRITE (IOUT,2000) N,A(KN)
C .      GO TO 800
C .   140 CONTINUE
C .      GO TO 900
C .
C .   REDUCE RIGHT-HAND-SIDE LOAD VECTOR
C .
C .   150 DO 180 N=1,NN
C .      KL=MAXA(N) + 1
C .      KU=MAXA(N+1) - 1
C .      IF (KU-KL) 180,160,160
C .   160 K=N
C .      C=0.
C .      DO 170 KK=KL,KU
C .      K=K - 1

```

```

170 C=C + A(KK)*V(K) COL00084
V(N)=V(N) - C COL00085
180 CONTINUE COL00086
C COL00087
C BACK-SUBSTITUTE COL00088
C COL00089
DO 200 N=1,NN COL00090
K=MAXA(N) COL00091
V(N)=V(N)/A(K) COL00092
IF (NN.EQ.1) GO TO 900 COL00093
N=NN COL00094
DO 230 L=2,NN COL00095
KL=MAXA(N) + 1 COL00096
KU=MAXA(N+1) - 1 COL00097
IF (KU-KL) 230,210,210 COL00098
210 K=N COL00099
DO 220 KK=KL,KU COL00100
K=K - 1 COL00101
220 V(K)=V(K) - A(KK)*V(N) COL00102
230 N=N - 1 COL00103
GO TO 900 COL00104
C COL00105
800 STOP COL00106
900 RETURN COL00107
C COL00108
2000 FORMAT (/// STOP - STIFFNESS MATRIX NOT POSITIVE DEFINITE',/,/, COL00109
1 ' NONPOSITIVE PIVOT FOR EQUATION ',I8,/,/, COL00110
2 ' PIVOT = ',E20.12 ) COL00111
END COL00112

```

8.2.4. Факторизация по Холески, статическое сгущение, субструктуры, фронтальное решение

Помимо разложения \mathbf{LDL}^T , описанного в предшествующих разделах, применяются и многочисленные другие схемы, весьма близкие по своим свойствам. Все эти методы представляют собой приложения основной процедуры исключения по Гауссу.

При факторизации по Холески матрица жесткости разлагается следующим образом:

$$\mathbf{K} = \tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{L}}^T, \quad (8.26)$$

где

$$\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{LD}^{1/2}. \quad (8.27)$$

Это значит, что множители Холески могут быть рассчитаны по данным о множителях \mathbf{D} и \mathbf{L} , однако в более общем варианте элементы \mathbf{L} рассчитываются непосредственно. Как показывает подсчет числа операций, при решении уравнения с применением факторизации по Холески требуется несколько большее число операций, чем при разложении \mathbf{LDL}^T . Кроме того, факторизация по Холески пригодна только для решения положительно определенных систем, для которых все диагональные элементы d_{ii} оказываются положительными, так как в противном случае потребовались бы очень сложные арифметические действия. С другой стороны, разложение \mathbf{LDL}^T может эффективно применяться также и к неопределенным системам (см. раздел 8.2.5).

Если говорить об основных вариантах применения факторизации по Холески, то это разложение является эффективным при преобразовании обобщенной задачи о собственных значениях к ее стандартной форме (см. раздел 10.2.5).

Пример 8.7: Рассчитайте множитель Холески \mathbf{L} для матрицы жесткости \mathbf{K} применительно к просто опертой балке, рассматривавшейся в разделе 8.2.1 и в примерах 8.2–8.4.

Множители \mathbf{L} и \mathbf{B} матрицы жесткости балки были даны в примере 8.3. Если округлять данные до трех значащих цифр после точки, то мы имеем

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1,000 & & & \\ -0,800 & 1,000 & & \\ 0,200 & -1,143 & 1,000 & \\ 0,000 & 0,357 & -1,333 & 1,000 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 5,000 & & & \\ & 2,800 & & \\ & & 2,143 & \\ & & & 0,833 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\tilde{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} 1,000 & & & \\ -0,800 & 1,000 & & \\ 0,200 & -1,143 & 1,000 & \\ 0,000 & 0,357 & -1,333 & 1,000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,236 & & & \\ & 1,673 & & \\ & & 1,464 & \\ & & & 0,913 \end{bmatrix}$$

или

$$\tilde{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} 2,236 & & & & \\ -1,789 & 1,673 & & & \\ 0,447 & -1,912 & 1,464 & & \\ & 0 & 0,597 & -1,952 & 0,913 \end{bmatrix}.$$

В некоторых случаях при решении уравнений равновесия может эффективно применяться алгоритм, называемый *статическим сгущением* (см. работу [Wilson, 1974]). Название «статическое сгущение» относится к динамическому анализу, методика решения при котором демонстрируется в разделе 10.3.1. *Статическое сгущение применяется с целью уменьшения числа степеней свободы элемента и таким образом, фактически, с целью реализации части решения для всей системы конечно-элементных уравнений равновесия до того, как будут скомпонованы структурные матрицы \mathbf{K} и \mathbf{R} .* Рассмотрим приводимый в примере 8.8 элемент фермы с тремя узлами. Учитывая, что степень свободы в среднем узле не соответствует степени свободы любого другого элемента, мы можем исключить ее так, чтобы получить матрицу жесткости элемента, соответствующую только степеням свободы 1 и 3. Исключение степени свободы 2 осуществляется, по существу, путем применения исключения по Гауссу, как это описано в разделе 8.2.1 (см. пример 8.1).

Чтобы сформулировать уравнения, используемые при статическом сгущении, мы предполагаем, что матрица жесткости и соответствующие ей векторы смещения и силы рассматриваемого элемента разбиты с приведением к форме

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ac} \\ \mathbf{K}_{ca} & \mathbf{K}_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_a \\ \mathbf{U}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_a \\ \mathbf{R}_c \end{bmatrix}, \quad (8.28)$$

где \mathbf{U}_a и \mathbf{U}_c представляют собой векторы смещения, которые должны быть сохранены и удалены путем сгущения соответственно. Матрицы \mathbf{K}_{aa} , \mathbf{K}_{ac} и \mathbf{K}_{cc} , а также векторы \mathbf{R}_a и \mathbf{R}_c , соответствуют векторам \mathbf{U}_a и \mathbf{U}_c .

Используя второе матричное уравнение из (8.28), мы получаем

$$\mathbf{U}_c = \mathbf{K}_{cc}^{-1}(\mathbf{R}_c - \mathbf{K}_{ca}\mathbf{U}_a). \quad (8.29)$$

Соотношение (8.29) используется для того, чтобы подставить выражение для \mathbf{U}_c в первое из матричных уравнений (8.28) и, тем самым, получить сгущенные уравнения

$$(\mathbf{K}_{aa} - \mathbf{K}_{ac}\mathbf{K}_{cc}^{-1}\mathbf{K}_{ca})\mathbf{U}_a = \mathbf{R}_a - \mathbf{K}_{ac}\mathbf{K}_{cc}^{-1}\mathbf{R}_c. \quad (8.30)$$

Если сравнить (8.30) со схемой решения по Гауссу, введенной в разделе 8.2.1, то мы видим, что статическое сгущение представляет собой, фактически, исключение по Гауссу на степенях свободы \mathbf{U}_c (см. пример 8.8). Поэтому на практике статическое сгущение эффективно реализуется путем последовательного применения исключения по Гауссу на каждой из степеней свободы, удаляемых путем сгущения, вместо того, чтобы следовать формальной матричной процедуре, заданной соотношениями (8.28)–(8.30); при этом важно не забывать о физическом смысле исключения по Гауссу (см. раздел 8.2.1). Учитывая, что матрица жесткости системы получается путем прямого сложения матриц жесткости элементов, мы обнаруживаем, что при удалении внутренних степеней свободы путем сгущения часть полного решения по Гауссу уже оказывается, фактически, выполненной на элементном уровне.

Преимущество использования статического сгущения на элементном уровне состоит в том, что уменьшается порядок системных матриц, а это может означать, что предотвращается использование дополнительной памяти. Кроме того, если последовательно обрабатываемые элементы тождественны между собой, то нужно определять матрицу жесткости только для первого из этих элементов, а реализация статического сгущения на внутренних степенях свободы элементов уменьшает также и объем компьютерных усилий, требуемых для построения решения. Правда, следует отметить, что если статическое сгущение выполняется фактически для каждого элемента (причем не используется преимущество возможной идентичности конечных элементов), то суммарный объем усилий, затрачиваемых на статическое сгущение всех матриц жесткости элементов и на решение с исключением по Гауссу сформулированных в результате уравнений равновесия оказывается, фактически,

тем же самым, что и при применении исключения по Гауссу к системе уравнений, полученных из матриц жесткости элементов, не подвергнутых сгущению.

Пример 8.8: Ниже приводится матрица жесткости элемента фермы, показанного на рис. 8.9. Воспользуйтесь статическим сгущением в соответствии с соотношениями (8.28)–(8.30) для того, чтобы удалить путем сгущения внутреннюю степень свободы элемента. После этого используйте прямое исключение по Гауссу на внутренней степени свободы.

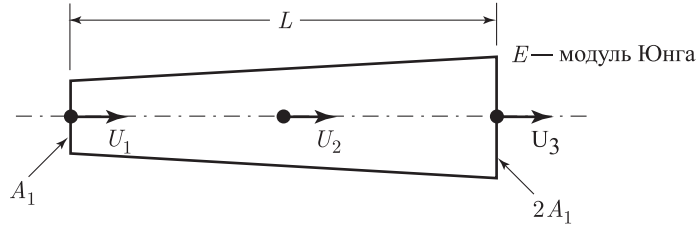


Рис. 8.9. Элемент типа фермы с линейно изменяющейся площадью

Для показанного элемента мы имеем

$$\frac{EA_1}{6L} \begin{bmatrix} 17 & -20 & 3 \\ -20 & 48 & -28 \\ 3 & -28 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix}. \quad (a)$$

Для того, чтобы применить уравнения (8.28)–(8.30), подвергнем перестановке уравнения системы (a), стремясь получить

$$\frac{EA_1}{6L} \begin{bmatrix} 17 & 3 & -20 \\ 3 & 25 & -28 \\ -20 & -28 & 48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_3 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_3 \\ R_2 \end{bmatrix}.$$

Теперь соотношение (8.30) дает

$$\frac{EA_1}{6L} \left\{ \begin{bmatrix} 17 & 3 \\ 3 & 25 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -20 \\ -28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -20 & -28 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + \frac{20}{48} R_2 \\ R_3 + \frac{28}{48} R_2 \end{bmatrix},$$

или

$$\frac{13}{9} \frac{EA_1}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + \frac{5}{12} R_2 \\ R_3 + \frac{7}{12} R_2 \end{bmatrix}.$$

Кроме того, соотношение (8.29) дает

$$U_2 = \frac{1}{24} \left(\frac{3L}{EA_1} R_2 + 10U_1 + 14U_3 \right). \quad (b)$$

Если применить исключение по Гауссу непосредственно к (a) для U_2 , то мы получаем

$$\frac{EA_1}{6L} \begin{bmatrix} 17 - \frac{(20)(20)}{48} & 0 & 3 - \frac{(20)(8)}{48} \\ -20 & 48 & -28 \\ 3 - \frac{(20)(28)}{48} & 0 & 25 - \frac{(28)(28)}{48} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + \frac{20}{48} R_2 \\ R_2 \\ R_3 + \frac{28}{48} R_2 \end{bmatrix}. \quad (c)$$

Однако, отделяя уравнения для U_1 и U_3 от уравнения для U_2 , мы можем переписать соотношение (c) в виде

$$\frac{13}{9} \frac{EA_1}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + \frac{5}{12} R_2 \\ R_3 + \frac{7}{12} R_2 \end{bmatrix}$$

и

$$U_2 = \frac{1}{24} \left[\frac{3L}{EA_1} R_2 + 10U_1 + 14U_3 \right],$$

а это те же соотношения, которые были получены при применении формальной процедуры статического сгущения.

Пример 8.9: Используйте матрицу жесткости элемента фермы с тремя степенями свободы из примера 8.8, чтобы получить уравнения равновесия конструкции, показанной на рис. 8.10. Используйте прямое исключение по Гауссу на степенях свободы U_2 и U_4 . Покажите, что получаемые уравнения равновесия идентичны тем, которые получаются, если построенная в примере 8.8 матрица жесткости для элемента фермы с двумя степенями свободы (внутренняя степень свободы была удалена путем сгущения) используется для построения матрицы жесткости, соответствующей U_1 , U_3 и U_5 .

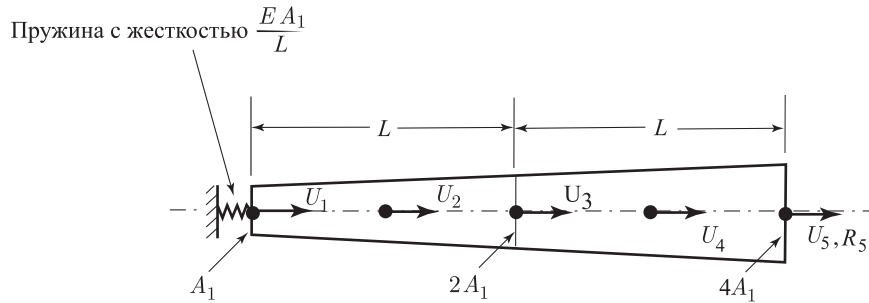


Рис. 8.10. Конструкция, составленная из двух ферменных элементов, показанных на рис. 8.9, и имеющая пружинное крепление

Матрица жесткости трехэлементного комплекса, показанного на рис. 8.10, получена путем применения прямого метода жесткости; это означает, что мы вычисляем

$$\mathbf{K} = \sum_{m=1}^3 \mathbf{K}^{(m)}, \quad (\text{a})$$

где

$$\mathbf{K}^{(1)} = \frac{EA_1}{6L} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}^{(2)} = \frac{EA_1}{6L} \begin{bmatrix} 17 & -20 & 3 & 0 & 0 \\ -20 & 48 & -28 & 0 & 0 \\ 3 & -28 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}^{(3)} = \frac{EA_1}{6L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 34 & -40 & 6 \\ 0 & 0 & -40 & 96 & -56 \\ 0 & 0 & 6 & -56 & 50 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, уравнения равновесия данной конструкции имеют вид

$$\frac{EA_1}{6L} \begin{bmatrix} 23 & -20 & 3 & 0 & 0 \\ -20 & 48 & -28 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -40 & 96 & -56 \\ 0 & 0 & 6 & -56 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_5 \end{bmatrix}.$$

Используя исключение по Гауссу на степенях свободы U_2 и U_4 , мы получаем

$$\frac{EA_1}{6L} \begin{bmatrix} 23 - \frac{(20)(20)}{48} & 0 & 3 - \frac{(20)(28)}{48} & 0 & 0 \\ -20 & 48 & -28 & 0 & 0 \\ 3 - \frac{(20)(28)}{48} & 0 & 59 - \frac{(28)(28)}{48} - \frac{(40)(40)}{96} & 0 & 6 - \frac{(40)(56)}{96} \\ 0 & 0 & -40 & 96 & -56 \\ 0 & 0 & 6 - \frac{(40)(56)}{96} & 0 & 50 - \frac{(56)(56)}{96} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_5 \end{bmatrix}. \quad (b)$$

Далее, исключая уравнения равновесия, соответствующие степеням свободы 1, 3 и 5, а также степеням свободы 2 и 4, по отдельности, мы имеем

$$\frac{13}{9} \frac{EA_1}{L} \begin{bmatrix} 22/13 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_3 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R_5 \end{bmatrix} \quad (c)$$

и

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{1}{12} [5U_1 + 7U_3], \\ U_4 &= \frac{1}{12} [5U_3 + 7U_5]. \end{aligned} \quad (d)$$

Однако, используя матрицу жесткости для элемента фермы с двумя степенями свободы, выведенную в примере 8.8, чтобы напрямую собрать матрицу жесткости конструкции, соответствующую степеням свободы 1, 3 и 5, в качестве элементных матриц жесткости в (a) используем

$$\mathbf{K}^{(1)} = \frac{13}{9} \frac{EA_1}{L} \begin{bmatrix} 9/13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}^{(2)} = \frac{13}{9} \frac{EA_1}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (e)$$

$$\mathbf{K}^{(3)} = \frac{13}{9} \frac{EA_1}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad (f)$$

и получим матрицу жесткости, показанную в (c). Кроме того, соотношение (b) в примере 8.8 соответствует соотношениям (d) в данном примере. Следует отметить, что суммарный размер усилий, требуемых для решения уравнений равновесия с использованием сгущенной матрицы жесткости для элемента фермы, оказывается меньше, чем при

использовании матрицы жесткости оригинального элемента с тремя степенями свободы, так как в первом случае внутренняя степень свободы была лишь один раз удалена путем сгущения, тогда как в соотношении (b) внутренняя степень свободы элемента фактически дважды удаляется путем сгущения. Прямое решение с использованием сгущенных матриц жесткости элемента из выражений (e) и (f) оказывается, однако, возможным только потому, что эти матрицы жесткости получаются путем умножения друг на друга.

Как указывается в примере 8.9, применение статического сгущения оказывается особенно эффективным, если один и тот же элемент используется много раз. Эта идея применяется в *анализе субструктур* (см., например, работы [Przemieniecki, 1963] и [Rubinstein, 1967]). В свою очередь, каждая из субструктур идеализируется в форме комплекса конечных элементов, и все внутренние степени свободы удаляются путем сгущения. Жесткость конструкции в целом формируется путем сложения матриц жесткости сгущенных субструктур. Поэтому, *фактически, субструктура используется так же, как отдельный конечный элемент со внутренними степенями свободы, удаляемыми путем статического сгущения до начала процесса объединения элементов*. Если многие субструктуры идентичны между собой, то эффективность работы с ними достигается путем формирования библиотеки тех субструктур, из которых формируется сгущенная матрица жесткости конструкции в целом.

Следует заметить, что при анализе субструктур никогда не рассчитывается матрица жесткости всей конструкции в ее неприведенном виде, и *вводимые данные нужны только для каждой из структур в библиотеке вместе с информацией относительно комплекса субструктур*, чтобы создать конструкцию в целом. Характерные формы применения конечно-элементного анализа с использованием субструктур можно найти при анализе строящихся зданий и корабельных корпусов, когда техника использования субструктур позволяет проводить экономичный анализ очень больших систем конечных элементов. Использование разбиения на субструктуры может оказаться эффективным также и при анализе конструкций с местными нелинейностями, обнаруживаемыми при расчетах статических и динамических реакций (см. работу [Bathe, Gracewski, 1981]).

В качестве простого примера применения субструктур следует обратиться к примеру 8.9, в котором каждая субструктура состоит просто-напросто из одного элемента, а матрица жесткости типовой конструкции в сгущенной и в несгущенной форме была приведена в примере 8.8.

Эффективность анализа с использованием описанной выше основной концепции субструктур во многих случаях может быть еще повышена с помощью определения различных уровней этих субструктур; иначе говоря, если учесть, что каждую субструктуру можно рассматривать как некий «супер-конечный элемент», то мы можем определить второй, третий, и т. д., уровень разбиения на субструктуры. Действуя аналогичным образом, две субструктуры всегда могут быть объединены так, чтобы определить субструктуру более высокого уровня, и этот процесс можно продолжать до тех пор, пока окончательная субструктура не окажется, фактически, той реальной конструкцией, которую мы рассматриваем. Такая процедура может применяться при одномерном, двух- или трехмерном анализе и, как уже отмечалось ранее, является в действительности лишь некоторым эффективным вариантом применения такого исключения по Гауссу, при котором используется преимущество повторения блоков, являющихся матрицами жесткости идентичных между собой субструктур. Поэтому возможность эффективного использования процедуры решения зависит от того, состоит ли рассматриваемая конструкция из повторяющихся субструктур, и именно в этом заключается причина того, что данная процедура может оказаться весьма эффективной в программах специального назначения.

Пример 8.10: Используйте разбиение на субструктуры для вычисления матрицы жесткости и вектора нагрузки, соответствующих степеням свободы на концевых узловых точках, U_1 и U_9 , стержня, показанного на рис. 8.11.

Основной элемент из числа тех, из которых состоит стержень, — это элемент фермы с тремя степенями свободы, рассмотренной в примере 8.8. Уравнения равновесия этого элемента, соответствующие двум степеням свободы, U_1 и U_3 , как показано на рис. 8.11, имеют вид

$$\frac{13}{9} \frac{A_1 E}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + \frac{5}{12} R_2 \\ R_3 + \frac{7}{12} R_2 \end{bmatrix}. \quad (a)$$

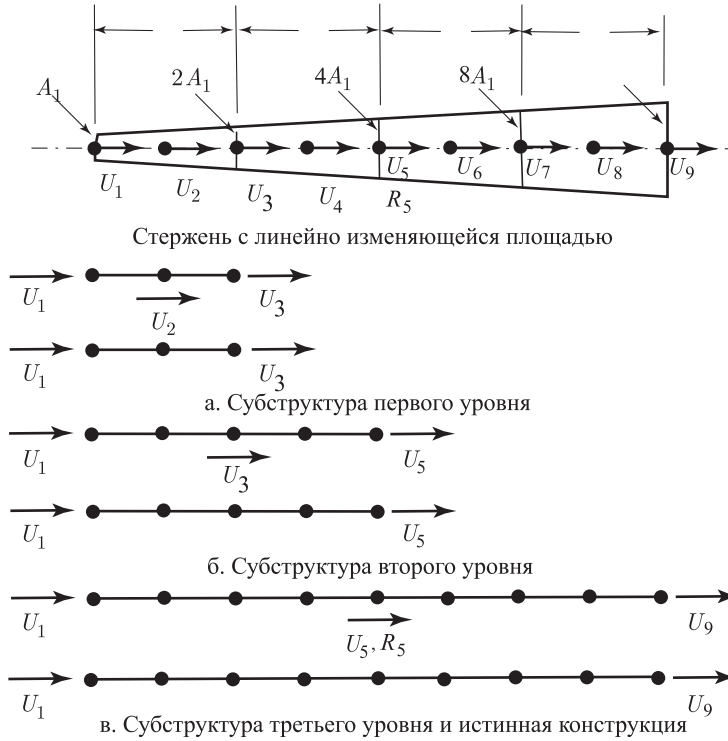


Рис. 8.11. Анализ стержня с использованием расчленения на субструктуры

Если учесть, что внутренняя степень свободы U_2 была удалена путем статического сгущения с целью получения уравнений равновесия (а), мы можем рассматривать элемент с двумя степенями свободы как субструктуру первого уровня. Следует напомнить, что когда U_1 и U_3 рассчитаны, мы можем вычислить U_2 , используя соотношение (b) в примере 8.8:

$$U_2 = \frac{1}{24} \left(\frac{3L}{EA_1} R_2 + 10U_1 + 14U_3 \right). \quad (b)$$

Теперь оказывается эффективным рассчитать субструктуру второго уровня, соответствующую степеням свободы стержня U_1 и U_5 . Для достижения этой цели мы используем матрицу жесткости и вектор нагрузки в уравнениях (а), чтобы составить уравнения равновесия, соответствующие U_1 , U_3 и U_5 :

$$\frac{13}{9} \frac{A_1 E}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_3 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + \frac{5}{12} R_2 \\ R_3 + \frac{7}{12} R_2 + \frac{5}{12} R_4 \\ R_5 + \frac{7}{12} R_4 \end{bmatrix}. \quad (c)$$

Соотношение для вычисления U_4 сходно с соотношением (b):

$$U_4 = \frac{1}{24} \left(\frac{3L}{2EA_1} R_4 + 10U_3 + 14U_5 \right).$$

Если воспользоваться исключением по Гауссу по отношению к уравнениям (c) для удаления U_3 путем сгущения, то получим

$$\frac{13}{9} \frac{A_1 E}{L} \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & -2/3 \\ -1 & 3 & -2 \\ -2/3 & 0 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_3 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + \frac{22}{36} R_2 + \frac{1}{3} R_3 + \frac{5}{36} R_4 \\ R_3 + \frac{7}{12} R_2 + \frac{5}{12} R_4 \\ \frac{14}{36} R_2 + \frac{2}{3} R_3 + \frac{31}{36} R_4 + R_5 \end{bmatrix},$$

или

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \end{pmatrix} \frac{A_1 E}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + \frac{22}{36} R_2 + \frac{1}{3} R_3 + \frac{5}{36} R_4 \\ \frac{14}{36} R_2 + \frac{2}{3} R_3 + \frac{31}{36} R_4 + R_5 \end{bmatrix} \quad (d)$$

и

$$U_3 = \frac{1}{3} \left[\frac{9}{13} \frac{L}{A_1 E} \left(R_3 + \frac{7}{12} R_2 + \frac{5}{12} R_4 \right) + U_1 + 2U_5 \right].$$

Следует заметить, что матрица жесткости субструктуры второго уровня в (d) равна просто матрице жесткости субструктуры первого уровня в (a), умноженной на $2/3$. Поэтому мы могли бы продолжить построение субструктур еще более высокого уровня, делая это аналогичным образом; иначе говоря, матрица жесткости субструктуры n -го уровня была бы просто равна матрице жесткости, заданной в (a), с некоторым множителем.

В большинстве случаев нагрузки оказываются приложенными только к граничным степеням свободы между субструктурами, так, как в этом примере. Используя матрицу жесткости субструктуры второго уровня, чтобы построить матрицу жесткости стержня в целом, и составляя истинный вектор нагрузки для этого примера, мы получаем

$$\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \end{pmatrix} \frac{A_1 E}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_5 \\ U_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ R_5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

После исключения U_5 получим

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \end{pmatrix} \frac{A_1 E}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} R_5 \\ \frac{4}{5} R_5 \end{bmatrix},$$

где матрица жесткости — это просто матрица жесткости субструктуры третьего уровня, соответствующая приведенному выше алгоритму. Кроме того, мы имеем

$$U_5 = \frac{1}{5} \left(\frac{27}{36} \frac{L}{A_1 E} R_5 + U_1 + 4U_9 \right).$$

Чтобы построить решение для конкретных значений смещения, необходимо наложить на стержень граничные условия и, следовательно, найти U_1 и U_9 , а затем найти внутренние смещения в стержне с помощью выведенных ранее соотношений. Следует заметить, что соответствующие соотношения должны быть применены также и для получения U_6 – U_8 .

До сих пор мы не говорили о том, как продолжать построение решения, если матрица всей системы не может быть сохранена в быстрой памяти. Если используется разбиение на субструктуры, то оказывается эффективным сохранять достаточно малый размер матрицы жесткости каждой субструктуры до ее сгущения с тем, чтобы статическое сгущение внутренних степеней свободы могло осуществляться с привлечением быстрой памяти. При этом дискретная память требовалась бы главным образом для того, чтобы хранить необходимую информацию для расчета смещений во внутренних узлах субструктуры, как это выражено в (8.29).

Возможно, однако, что окажется необходимым воспользоваться многоуровневым разделением на субструктуры (т.е. определять субструктуры самих субструктур), стремясь к тому, чтобы те окончательные уравнения, которые нужно решать, могли быть введены в быструю память.

Вообще говоря, весьма важно эффективно использовать дисковую память, так как большой объем действий по записи на диск и чтению с него может оказаться весьма дорогим стоящим и будет действительно ограничивать размеры той системы, для которой строится решение, вследствие недостаточного объема доступной дисковой памяти. При построении решений без привлечения быстрой памяти специальная схема для решения системы уравнений равновесия неразрывно сочетается с конкретной процедурой объединения матриц жесткости элементов в матрицу жесткости конструкции в целом. Во многих программах матрица жесткости конструкции комплектуется до того, как осуществляется решение Гаусса. В программе ADINA уравнения собираются в блоки, которые могут быть введены в быструю память. Размеры этих блоков (число столбцов в каждом блоке) автоматически определяются в самой программе и зависят от доступного объема быстрой памяти. Затем решение системы уравнений строится эффективным образом за счет того, что вначале осуществляется последовательное приведение блоков матриц жесткости и векторов нагрузки, после чего производится обратная подстановка. Процедуры подобного типа используются сейчас во многих программах для анализа.

Вместо того, чтобы вначале собрать матрицу жесткости конструкции в целом, мы можем одновременно провести комплектацию и приведение уравнений. Специальная схема решения, предложенная в работе [Irons 1970], называется *методом фронтального решения* и была эффективно применена на практике. Процедура решения составлена так, что объединяются только те уравнения, которые фактически требуются для исключения конкретной степени свободы, а рассматриваемая степень свободы исключается путем статического сгущения, и так далее.

В качестве примера рассмотрим анализ конечно-элементной идеализации с плоскими напряжениями для листа, показанного на рис. 8.12. Имеются два уравнения, связанных с каждым узлом конечно-элементной сетки, а именно, уравнения, соответствующие смещениям U и V . В схеме фронтального решения уравнения исключаются путем статического сгущения в порядке нумерации элементов; иначе говоря, первыми из рассматриваемых уравнений будут те, которые соответствуют узлам 1, 2, Чтобы иметь возможность исключить степени свободы узла 1, необходимо лишь объединить окончательные уравнения, соответствующие этому узлу. Это означает, что нужно рассчитать только матрицу жесткости элемента 1, после чего степени свободы, соответствующие этому узлу, исключаются путем статического сгущения. Вслед за этим (для исключения уравнений, соответствующих узлу 2) требуется построить окончательные уравнения, соответствующие степеням свободы в узле 2, а это значит, что матрица жесткости элемента 2 должна быть рассчитана и добавлена к матрице, приведенной ранее. После этого путем статического сгущения удаляются степени свободы, соответствующие узлу 2; и так далее.

Теперь можно отдать себе отчет в том, что *вся процедура, фактически, состоит из того, что одна степень свободы за другой подвергаются исключению путем статического сгущения, а также из того, что всегда объединяются лишь те уравнения (или, скорее, матрицы жесткости элементов), которые практически требуются при сгущении, подлежащем осуществлению*. Те конечные элементы, которые должны рассматриваться при статическом сгущении уравнений, соответствующих одному конкретному узлу, определяют волновой фронт в этот момент времени, как показано на рис. 8.12.

В принципе, фронтальное решение представляет собой исключение по Гауссу, причем важным аспектом является конкретная компьютерная реализация. Если учесть, что уравнения объединяются в порядке нумерации элементов, то длина волнового фронта, а поэтому и та полуширина ленты, с которой мы имеем дело, определяется именно этой нумерацией. Поэтому необходимо осуществлять эффективную нумерацию элементов, и мы замечаем, что *если нумерация элементов при фронтальном решении соответствует нумерации узловых точек при решении с активным столбцом* (см. раздел 8.2.3), *то при обоих видах решения выполняется одно и то же число основных* (т.е. за исключением

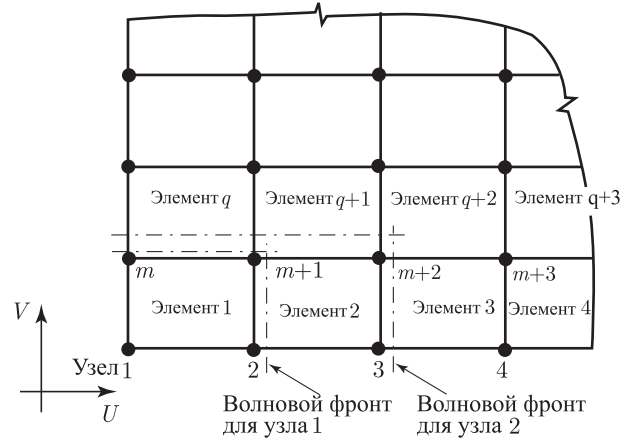


Рис. 8.12. Фронтальное решение для конечно-элементной идеализации с плоскими напряжениями

индексации) численных операций. Преимущество решения с волновым фронтом состоит в том, что элементы могут складываться относительно просто, так как для сохранения относительно небольшой ширины ленты нет необходимости изменять нумерацию узловых точек. Однако отрицательная особенность этого решения состоит в том, что если волновой фронт большой, то полный объем требуемой быстрой памяти может существенно превышать ее доступный объем, а в этом случае требуются дополнительные действия с дисковой памятью, которые внезапно и весьма существенно снижают эффективность метода. Кроме того, решение с активным столбцом реализуется в компактном и самостоятельном алгоритме, не зависящем от привлекаемых конечных элементов, тогда как алгоритм фронтального решения тесно связан с конечными элементами и может потребовать введения в решение дополнительной индексации.

8.2.5. Положительная определенность, положительная полуопределенность и свойство последовательности Штурма

Пока что при обсуждении методики исключения по Гауссу мы в неявной форме предполагали, что матрица жесткости \mathbf{K} является положительно определенной, то есть, что рассматриваемая конструкция надлежащим образом удерживается и является устойчивой. Как это следует из обсуждений в разделах 2.5 и 2.6, положительная определенность матрицы жесткости означает, что при любом векторе смещения \mathbf{U} мы имеем

$$\mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} > 0. \quad (8.31)$$

Если учесть, что $\frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U}$ есть энергия деформаций при векторе смещения \mathbf{U} , введенная в память системы, то неравенство (8.31) выражает тот факт, что при любом векторе смещений \mathbf{U} энергия деформаций системы с положительно определенной матрицей жесткости является положительной.

Заметим, что матрица жесткости конечного элемента является положительно определенной только тогда, когда этот элемент надлежащим образом удерживается, т. е. когда подавлены формы движения системы как твердого тела. В противном случае матрица жесткости не удерживаемого конечного элемента является положительно полуопределенной,

$$\mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \geq 0, \quad (8.32)$$

где $\mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = 0$ тогда, когда \mathbf{U} соответствует форме поведения твердого тела. Если рассматривать процесс объединения конечных элементов, то следует отдать себе отчет в том, что положительно полуопределенные матрицы элементов складываются, чтобы получилась положительно полуопределенная матрица жесткости, соответствующая конструкции в целом. После этого матрица жесткости конструкции делается положительно определенной путем исключения тех строк и столбцов, которые соответствуют удерживаемым

степеням свободы, т. е. путем исключения для этой конструкции возможности испытывать движения как твердое тело.

Было бы поучительным рассмотреть более подробно, что означает положительная определенность матрицы жесткости конструкции. В разделе 2.5 мы обсуждали вопрос о представлении матрицы с помощью ее собственных значений и собственных векторов. Если следовать разработкам, приведенным в разделе 2.5, задача о собственных значениях для матрицы жесткости \mathbf{K} может быть записана в форме

$$\mathbf{K}\phi = \lambda\phi. \quad (8.33)$$

Решения уравнения (8.33) представляют собой пары собственных значений и собственных векторов (λ_i, ϕ_i) , $i = 1, \dots, n$, а полное решение может быть записано в виде

$$\mathbf{K}\Phi = \Phi\Lambda,$$

где Φ — матрица ортонормализованных собственных векторов $\Phi = [\phi_1, \dots, \phi_n]$, а Λ — диагональная матрица соответствующих собственных значений, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$. Учитывая, что $\Phi^T \Phi = \Phi \Phi^T = \mathbf{I}$, мы имеем также

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Lambda \quad (8.34)$$

и

$$\mathbf{K} = \Lambda \Phi^T. \quad (8.35)$$

Обращаясь к разделу 2.6, напомним, что λ_i по отношению к \mathbf{K} представляет собой минимум, которого может достигать отношение Рэлея, когда принудительное ограничение относительно ортонормальности соблюдается на собственных векторах $\phi_1, \dots, \phi_{i-1}$:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_i = \min \left\{ \frac{\phi^T \mathbf{K} \phi}{\phi^T \phi} \right\} \\ \phi^T \phi_r = 0; \text{ для } r = 1, 2, \dots, i-1 \end{aligned} \right\}. \quad (8.36)$$

Отсюда следует, что $(1/2)\lambda_1$ представляет собой минимум той энергии деформаций, которая может быть сохранена в памяти комплекса элементов, а соответствующий вектор смещений равен ϕ_1 . При положительно определенной матрице жесткости системы мы имеем, следовательно, $\lambda_1 > 0$. С другой стороны, для матрицы жесткости неудерживаемой системы мы имеем $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$, где m — число представленных форм движения твердого тела, $m < n$. Если система удерживается, то число собственных значений \mathbf{K} уменьшается на 1 для каждой из исключаемых степеней свободы, а нулевое собственное значение теряется, если удержание приводит в результате к исключению твердотельной формы движения.

Пример 8.11: Определите, приведет ли удаление четырех степеней свободы элемента с плоскими напряжениями, показанного на рис. 8.13, к исключению форм движения твердого тела.

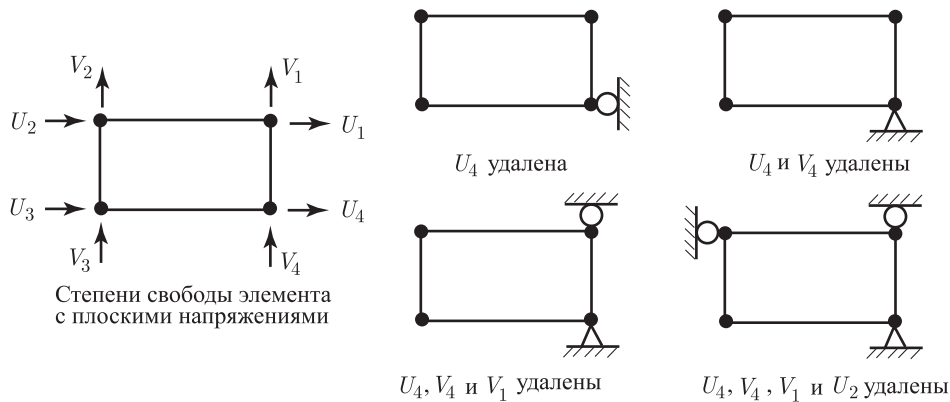


Рис. 8.13. Удаление степеней свободы элемента с плоскими напряжениями

Элемент с плоскими напряжениями обладает тремя формами движения твердого тела: (1) однородное горизонтальное перемещение, (2) однородное вертикальное перемещение и (3) поворот в плоскости системы. Рассмотрим последовательное исключение степеней свободы, как это показано на рис. 8.13. Исключение U_4 приводит к исключению формы движения твердого тела в виде горизонтального перемещения. Аналогично этому исключение V_4 приводит к исключению формы движения твердого тела в виде вертикального перемещения. Однако если дополнительно исключить V_1 , то это не приводит к исключению последней формы движения как твердого тела; иначе говоря, поворот в плоскости системы исключается как форма движения твердого тела только при добавочном исключении U_2 . Поэтому исключение U_4 , V_4 , V_1 и U_2 исключает все формы движения элемента как твердого тела, хотя следует заметить, что, фактически, путем исключения только U_4 , V_4 и U_2 мы достигли бы того же самого результата.

Преобразование по формуле (8.34) имеет важный смысл. Рассматривая это соотношение и обращаясь к разделу 2.5, мы обнаруживаем, что с его помощью осуществляется перемена базиса. Новые базовые векторы представляют собой конечно-элементные интерполяции, соответствующие собственным векторам матрицы \mathbf{K} , и оператор в этом базисе представлен диагональной матрицей с собственными значениями матрицы \mathbf{K} на диагонали. Поэтому мы можем рассматривать матрицу $\mathbf{\Lambda}$ в качестве матрицы жесткости системы, когда конечно-элементные функции смещения, используемые в принципе виртуальной работы согласно (4.7), это — те, которые соответствуют смещениям в узловых точках ϕ_i , $i = 1, \dots, n$, а не единичные смещения в узловых точках, U_i , $i = 1, \dots, n$ (см. раздел 4.2.1). Поэтому соотношение (8.34) представляет собой выражение виртуальной работы в соответствии с диагональной матрицей жесткости. Если рассматриваемая система надлежащим образом удерживается, то все коэффициенты жесткости, входящие в $\mathbf{\Lambda}$, положительны; иначе говоря, матрица жесткости $\mathbf{\Lambda}$ (а следовательно, и \mathbf{K}) является положительно определенной, тогда как для неустойчивой системы некоторые диагональные элементы в матрице $\mathbf{\Lambda}$ равны нулю.

Прежде чем исследовать решение неположительно определенных систем уравнений, нужно обсудить еще одно важное наблюдение. В разделе 2.6 нами было введено свойство последовательности Штурма для главных миноров некой матрицы. Здесь нам следует указать на физический смысл последовательности Штурма. Пусть $\mathbf{K}^{(r)}$ будет матрицей порядка $n - r$, полученной путем исключения из \mathbf{K} последних строк и столбцов числом r , и рассмотрим задачу на собственные значения

$$\mathbf{K}^{(r)} \phi^{(r)} = \lambda^{(r)} \phi^{(r)}, \quad (8.37)$$

где $\phi^{(r)}$ — векторы порядка $n - r$. Мы говорим, что (8.37) представляет собой задачу на собственные значения для r -й ассоциированной задачи с принудительными ограничениями применительно к задаче $\mathbf{K}\phi = \lambda\phi$. После этого в разделе 2.6 мы показали, что собственные значения для $(r + 1)$ -й задачи с принудительными ограничениями разделяют собственные значения для r -й задачи, так что

$$\lambda_1^{(r)} \leq \lambda_1^{(r+1)} \leq \lambda_2^{(r)} \leq \lambda_2^{(r+1)} \leq \dots \leq \lambda_{n-r-1}^{(r)} \leq \lambda_{n-r-1}^{(r+1)} \leq \lambda_{n-r}^{(r)}. \quad (8.38)$$

В качестве примера могут быть рассмотрены задача на собственные значения для просто опертой балки и ассоциированная с ней задача с принудительными ограничениями. На рис. 8.14 показаны рассчитанные собственные значения и, в частности, демонстрируется свойство разделения. Следует заметить, что если мы переходим от $(r + 1)$ -й задачи с принудительными ограничениями к r -й аналогичной задаче путем включения $(n - r)$ -й степени свободы, то новая система имеет собственное значение, меньшее (или равное) наименьшего собственного значения $(r + 1)$ -й задачи с принудительными связями, а также собственное значение, большее (или равное) наибольшего собственного значения для $(r + 1)$ -й задачи с принудительными связями.

Если воспользоваться свойством разделения собственных значений и учесть, что любые строки и столбцы могут удобным образом меняться между собой так, чтобы сделаться последними строками и столбцами в матрице \mathbf{K} , то мы убедимся, что если матрица

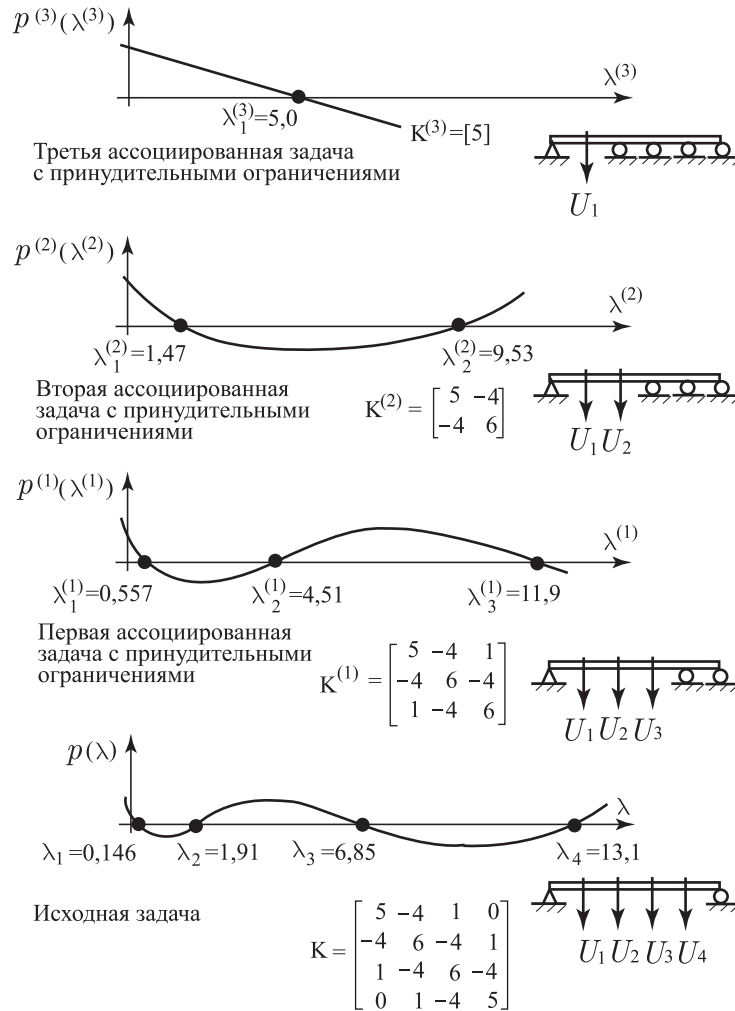


Рис. 8.14. Решения задачи на собственные значения для просто опертой балки и ассоциированных с ней задач с принудительными ограничениями

жесткости, соответствующая наличию n степеней свободы, является положительно определенной (т.е. $\lambda_1 > 0$), то любая из матриц жесткости, полученных путем исключения любых строк и соответствующих столбцов, также является положительно определенной. Кроме того, наименьшее собственное значение новой матрицы может только возрастать, а наибольшее собственное значение может только уменьшаться. Этот вывод остается в силе и тогда, когда матрица \mathbf{K} является положительной полуопределенной, и сохранил бы свою пригодность, если бы эта матрица была неопределенной, так как мы показали ранее, что теорема о разделении собственных значений остается применимой ко всем симметричным матрицам.

Мы будем рассматривать более подробно использование свойства последовательности Штурма, касающегося главных миноров, при разработке алгоритмов решения с помощью собственных значений (см. главу 11). Однако в последующей части данного раздела мы используем указанное свойство, чтобы получить больше информации о решении некой системы уравнений с симметричной, положительно определенной, положительно полуопределенной или неопределенной матрицей коэффициентов. Симметричная,

неопределенная матрица коэффициентов встретится нам при решении задач на собственные значения.

В разделах 8.2.1 и 8.2.2 мы показали, что если \mathbf{K} есть матрица жесткости надлежащим образом удерживаемой конструкции, то мы можем подвергнуть матрицу \mathbf{K} факторизации, приводя ее к форме

$$\mathbf{K} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T, \quad (8.39)$$

где \mathbf{L} — нижняя треугольная единичная матрица, а \mathbf{D} — диагональная матрица с элементами $d_{ii} > 0$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \det \mathbf{K} &= \det \mathbf{L} \det \mathbf{D} \det \mathbf{L}^T = \\ &= \prod_{i=1}^n d_{ii} > 0. \end{aligned} \quad (8.40)$$

Этот результат может быть получен также путем рассмотрения характеристического полинома матрицы \mathbf{K} , определяемого по формуле

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{I}). \quad (8.41)$$

Если учесть, что λ_1 представляет собой наименьший корень полинома $p(\lambda)$ и что условие $\lambda_1 > 0$ соответствует положительно определенной матрице \mathbf{K} , то отсюда следует, что $\det \mathbf{K} > 0$. Однако нигде не следует, что $d_{ii} > 0$ при всех значениях i .

Чтобы формально доказать, что $d_{ii} > 0$, $i = 1, \dots, n$ при положительно определенной матрице \mathbf{K} , а также уяснить, что именно происходит в процессе факторизации \mathbf{K} , целесообразно сравнить треугольные множители для \mathbf{K} с аналогичными множителями для $\mathbf{K}^{(i)}$, то есть для матрицы жесткости i -й ассоциированной задачи с принудительными связями. Если предположить, что множители \mathbf{L} и \mathbf{D} для матрицы \mathbf{K} уже вычислены, то для ассоциированной задачи с принудительными связями мы имеем

$$\mathbf{K}^{(i)} = \mathbf{L}^{(i)}\mathbf{D}^{(i)}\mathbf{L}^{(i)T}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (8.42)$$

где $\mathbf{L}^{(i)}$ и $\mathbf{D}^{(i)}$ представляют собой аналогичные множители для $\mathbf{K}^{(i)}$. Учитывая тот факт, что \mathbf{L} — нижняя единичная треугольная матрица, а \mathbf{D} — диагональная матрица, найдем, что множители $\mathbf{L}^{(i)}$ и $\mathbf{D}^{(i)}$ получаются из \mathbf{L} и \mathbf{D} , соответственно, путем вычеркивания последних строк и столбцов числом i . Поэтому $\mathbf{L}^{(i)}$ и $\mathbf{D}^{(i)}$ представляют собой главные подматрицы по отношению к \mathbf{L} и \mathbf{D} , соответственно, и они фактически вычисляются при факторизации матрицы \mathbf{K} . Однако при учете того, что $\lambda_1^{(i)} > 0$, теперь получается, что мы можем использовать аргумент из (8.39) и (8.40), начиная с $i = n-1$, с целью показать, что $d_{ii} > 0$ при всех i . Отсюда следует, что факторизация матрицы \mathbf{K} с преобразованием в форму $\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T$ действительно возможно, если матрица \mathbf{K} является положительно определенной.

Мы демонстрируем этот результат на приводимом ниже примере.

Пример 8.12: Рассмотрите просто опертую балку, показанную на рис. 8.14, а также ассоциированные задачи с принудительными связями. Та же балка рассматривалась в разделе 8.2.1. Определите множители $\mathbf{L}^{(i)}$ и $\mathbf{D}^{(i)}$ для матриц $\mathbf{K}^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, и покажите, что элемент d_{ii} должен быть больше нуля, так как $\lambda_1 > 0$.

Искомые треугольные факторизации имеют вид

$$[5] = [1][5][1], \quad (a)$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 14/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4/5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (b)$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4/5 & 1 & 0 \\ 1/5 & -8/7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 14/5 & 0 \\ 0 & 0 & 15/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & -8/7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (c)$$

где матрицы $\mathbf{L}^{(i)}$ и $\mathbf{D}^{(i)}$ получаются из множителей \mathbf{L} и \mathbf{D} , данных в примере 8.3, путем вычеркивания последних строк и столбцов числом i (в качестве проверки можно

вычислить произведение матриц в правых частях (а)–(с), и получить матрицы в левых частях).

Рассматривая элементы d_{ii} , мы имеем $\lambda_1^{(3)} \geq \lambda_1^{(2)} \geq \lambda_1^{(1)} \geq \lambda_1 > 0$. Однако, используя соотношение (а), имеем $\lambda_1^{(3)} = d_{11}$; следовательно, $d_{11} > 0$. Далее, рассмотрим $\mathbf{K}^{(2)}$. Если учесть, что $\lambda_1^{(2)} > 0$, имеем, используя (8.39) и (8.40), $d_{11}d_{22} > 0$, что значит, что $d_{22} > 0$. Подобно этому, рассматривая $\mathbf{K}^{(1)}$, имеем $\lambda_1^{(1)} > 0$, и, следовательно, $d_{11}d_{22}d_{33} > 0$, откуда следует, что $d_{33} > 0$. Наконец, рассматривая \mathbf{K} , мы имеем $\lambda_1 > 0$ и, следовательно, $d_{11}d_{22}d_{33} > 0$, откуда следует, что $d_{11} > 0$. Наконец, рассматривая \mathbf{K} , имеем $\lambda_1 > 0$ и поэтому $d_{11}d_{22}d_{33}d_{44} > 0$. Поэтому также $d_{44} > 0$.

Предположим, далее, что матрица \mathbf{K} представляет собой матрицу жесткости такого комплекса конечных элементов, который не удерживается. В этом случае матрица \mathbf{K} является положительной полуопределенной, $\lambda = 0$. Ноль является корнем, а $\det \mathbf{K}$ равен нулю, если использовать (8.40), то последнее означает, что для некоторого значения i элемент d_{ii} должен быть равен нулю. Поэтому факторизация такого типа, как показанная в предыдущих разделах, в общем случае уже не будет возможна, так как центральный элемент будет равен нулю. И вновь оказывается поучительным рассмотреть ассоциированные задачи с принудительными связями. Когда матрица \mathbf{K} является положительной, полуопределенной, то мы замечаем, что характеристический полином, соответствующий $\mathbf{K}^{(i)}$, будет иметь нулевое собственное значение, причем это нулевое значение будет сохранено во всех матрицах $\mathbf{K}^{(i-1)}, \dots, \mathbf{K}$. Этот факт следует из того, что, во-первых, свойство последовательности Штурма гарантирует, что наименьшее собственное значение матрицы $\mathbf{K}^{(i-1)}$ меньше или равно наименьшему собственному значению матрицы $\mathbf{K}^{(i)}$, и что, во-вторых, матрица \mathbf{K} не имеет отрицательных собственных значений. Для i -й ассоциированной задачи с принудительными связями мы будем, на основании вышесказанного, иметь

$$\det(\mathbf{L}^{(i)} \mathbf{D}^{(i)} \mathbf{L}^{(i)T}) = 0, \quad (8.43)$$

откуда следует, что некий элемент матрицы $\mathbf{D}^{(i)}$ равен нулю. Однако, если предположить, что нулевой корень возникает только для i -й ассоциированной задачи с принудительными связями (т.е. при $\det(\mathbf{L}^{(r)} \mathbf{D}^{(r)} \mathbf{L}^{(r)T}) > 0$ при $r > i$), то отсюда следует, что элемент $d_{n-i, n-i}$ равен нулю. Поэтому, если сделать сводку вышеизложенного, то при положительной полуопределенной матрице \mathbf{K} факторизация этой матрицы с приведением к форме \mathbf{LDL}^T (т.е. процесс исключения по Гауссу) будет разваливаться в тот момент времени, когда встретится нулевой диагональный элемент d_{kk} , а это будет означать, что $(n-k)$ -я ассоциированная задача с принудительными связями, имеющая нулевое собственное значение, препятствует продолжению процесса факторизации.

В случае положительной полуопределенной матрицы нулевой диагональный элемент должен встретиться на некоторой стадии факторизации. Однако если рассматривать разложение неопределенной матрицы (т.е. когда некоторые из собственных значений матрицы являются отрицательными, а некоторые — положительными), то нулевой диагональный элемент встретится только в том случае, когда одна из ассоциированных задач с принудительными связями имеет нулевое собственное значение. Однако если нулевого собственного значения не имеет ни одна из ассоциированных задач с принудительными связями, то все элементы d_{ii} отличны от нуля и, при точном выполнении всех арифметических действий, факторизация не вызывает никаких трудностей. Мы обсудим вопрос о разложении неопределенных матриц из коэффициентов несколько позднее, при решении задач на собственные значения (см. раздел 11.4.2). На рис. 8.15 демонстрируются типичные случаи, когда используется показанная на рис. 8.14 просто опертая балка на пружинных опорах и когда при проведении разложений мы встретили бы или не встретили бы нулевой диагональный элемент.

Предположим, что при исключении по Гауссу нам встретился нулевой диагональный элемент d_{ii} . Чтобы иметь возможность продолжать решение, необходимо поменять местами i -ю строку с другой, j -й строкой, где $j > i$. Новый диагональный элемент не должен равняться нулю и, для повышения точности решения, он должен быть большим

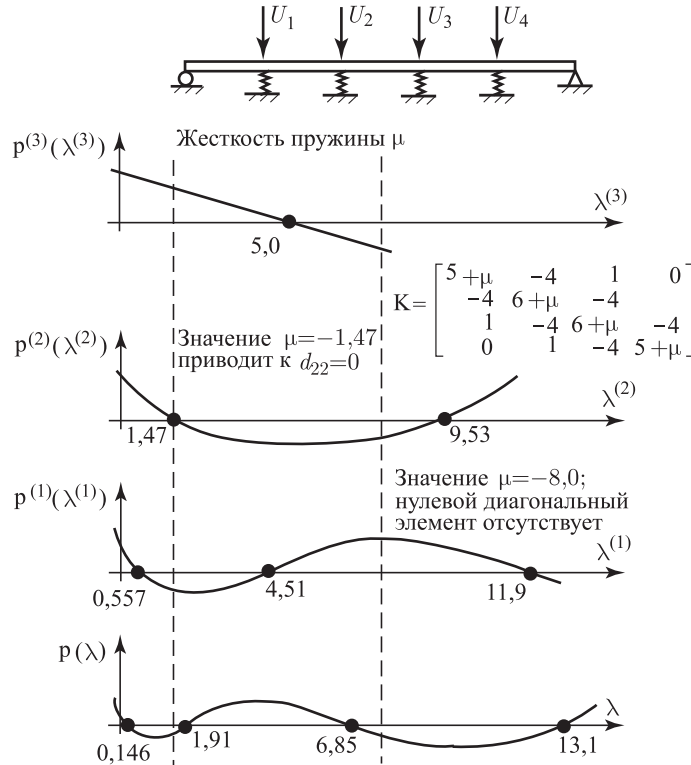


Рис. 8.15. Просто опертая балка на пружинных опорах; отрицательная жесткость пружины может привести к трудностям при решении

(см. раздел 8.2.6). Эта взаимная перестановка строк соответствует изменению порядка записи уравнений, причем следует отметить, что в результате такой перестановки матрица коэффициентов уже не будет симметричной. С другой стороны, симметрия сохранилась бы, если бы мы меняли местами не только i -ю и j -ю строки, но также и соответствующие столбцы, так, чтобы получить отличный от нуля диагональный элемент в i -й строке, что не всегда оказывается возможным (см. пример 10.4). По существу, взаимная перестановка столбцов и строк соответствует такому изменению порядка ассоциированных задач с принудительными связями, при котором эти задачи приобретают отличные от нуля собственные значения.

Мера воздействия, связанная с перестановкой строк, предполагает, что матрица может быть приведена к такой форме, при которой новый диагональный элемент отличен от нуля. Фактически это всегда будет иметь место, если только матрица не имеет нулевого значения кратности m , причем $i = n - m + 1$. В этом случае матрица является особенной и элемент d_{ii} равен нулю, однако все остальные элементы из последних m строк верхнего треугольного множителя матрицы коэффициентов также равны нулю, и факторизация этой матрицы уже была завершена. Другими словами, учитывая, что то число строк, которое составлено только из нулевых элементов, равно кратности m нулевого собственного значения, то последние $m - 1$ матриц, \mathbf{L}_{n-1}^{-1} , \mathbf{L}_{n-2}^{-1} , ..., \mathbf{L}_{n-m+1}^{-1} , из соотношения (8.10) не могут и не должны быть рассчитаны. Поэтому мы будем иметь возможность построить m линейно независимых решений путем придания надлежащих значений для m последних составляющих вектора решения.

Рассмотрим нижеследующий пример.

Пример 8.13: Рассмотрим элемент в форме балки, показанный на рис. 8.16 а. Матрица жесткости этого элемента имеет вид

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 \\ -6 & 4 & 6 & 2 \\ -12 & 6 & 12 & 6 \\ -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Покажите, что в результате применения исключения по Гауссу получаются третья и четвертая строки, состоящие только из нулевых элементов, и дайте формальную оценку перемещениям в форме движений твердого тела.

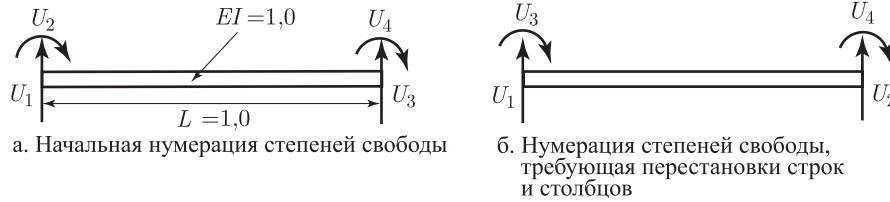


Рис. 8.16. Элемент типа балки с двумя твердотельными модами

Используя процедуру, описанную соотношением (8.10), мы, как это ожидается, получим матрицу \mathbf{S} , две последние строки которой состоят только из нулевых элементов, так как элемент в форме балки имеет две формы движений как твердого тела, соответствующие вертикальному перемещению и повороту. Мы имеем

$$\mathbf{L}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1/2 & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & \\ 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Затем

$$\mathbf{L}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

и

$$\mathbf{S} = \mathbf{L}_2^{-1} \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{a})$$

В результате, как это и ожидалось, две последние строки матрицы \mathbf{S} составлены из нулевых элементов, и матрица \mathbf{L}_3^{-1} не может и не должна быть рассчитана. Следует также отметить, что если бы порядок нумерации степеней свободы элемента в форме балки был первоначально таким, как показано на рис. 8.16 б, то нам понадобилось бы поменять местами строки и столбцы за номером 2 со строками и столбцами за номером 3, чтобы иметь возможность продолжать приведение к треугольной форме. Однако это эквивалентно использованию такой нумерации степеней свободы, которую мы применили в первую очередь, т. е. порядка нумерации, показанного на рис. 8.16 а.

Используя матрицу \mathbf{S} , соответствующую выражению (а), мы можем теперь оценить смещения балки в форме движений твердого тела, т.е. решить уравнения $\mathbf{KU} = 0$, чтобы получить два линейно независимых решения для \mathbf{U} .

Предположим для начала, что $U_4 = 1$ и $U_3 = 0$; тогда, используя формулу для \mathbf{S} , получим

$$\begin{aligned} 12U_1 - 6U_2 &= 6, \\ U_2 &= 1. \end{aligned}$$

Следовательно, $U_1 = 1$, $U_2 = 0$, $U_3 = 1$, $U_4 = 0$.

После этого предположим, что $U_4 = 0$, $U_3 = 1$, и получим

$$\begin{aligned} 12U_1 - 6U_2 &= 12, \\ U_2 &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $U_1 = 1$, $U_2 = 0$, $U_3 = 1$, $U_4 = 0$.

Следует заметить, что векторы смещения в формах движения твердого тела не являются единственными, однако двумерное подпространство, перекрываемое любыми двумя линейно независимыми векторами смещений в форме движений твердого тела может быть записан в форме

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \gamma_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{b})$$

где γ_1 и γ_2 — постоянные. Отметим, что ранг матрицы \mathbf{K} равен 2, а ядро матрицы \mathbf{K} задается с помощью двух базисных векторов из уравнения (b) (см. раздел 2.3).

8.2.6. Ошибки решения

В предыдущих разделах мы предложили различные алгоритмы для решения уравнения $\mathbf{KU} = \mathbf{R}$. Мы применили соответствующие процедуры к решению некоторых простых задач, преследуя цели обучения, но при практическом анализе выбранные методы применялись к большим системам уравнений с использованием цифровой вычислительной техники. Важно заметить, что при этом элементы матриц и вычислительные результаты могут быть представлены лишь с помощью фиксированного числа цифр, а это вносит ошибки в решение. В данном разделе мы ставим своей целью обсудить те ошибки решения, которые могут возникнуть при исключении по Гауссу, и предложить методику, препятствующую внесению больших ошибок.

Желая определить источник ошибок, предположим, что мы используем такой компьютер, в котором некоторое число представляется с помощью t цифр с ординарной точностью. Затем, чтобы повысить точность, можно использовать арифметику с двойной точностью, а в этом случае каждое число приближенно представляется с использованием $2t$ (или более) цифр. В качестве примера, в компьютерах компании IBM числа с ординарной точностью представляются с помощью 6 цифр, тогда как числа с двойной точностью представляются с помощью 16 цифр.

Если говорить об арифметических операциях с конечным числом цифр, то числа из t цифр могут использоваться совершенно по-разному в разных машинах. Однако большинство компьютеров, фактически, выполняет арифметические операции и после этого «отрезает» все цифры сверх их основного числа. Поэтому для демонстрационных целей мы предполагаем в этом разделе, что имеющийся у нас компьютер сначала складывает, вычитает, умножает и делит два числа точно, а затем, чтобы получить результаты с конечной точностью, отрезает все цифры сверх тех t , которые используются.

Чтобы продемонстрировать арифметику с конечной точностью, предположим, что мы хотим построить решение системы уравнений

$$\begin{bmatrix} 3,42521 & -3,42521 \\ -3,42521 & 101,2431 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,3021 \\ 0,0 \end{bmatrix}, \quad (8.44)$$

где \mathbf{K} и \mathbf{R} задаются «точно». Точное решение (до 10 цифр) имеет вид

$$U_1 = 0,3934633449; \quad U_2 = 0,0133114709. \quad (8.45)$$

Теперь предположим, что при имеющемся у нас (гипотетическом) компьютере $t = 3$; иначе говоря, каждое число представляется в форме только до трех цифр. В этом случае решение уравнений (8.44) будет получено путем начального представления \mathbf{K} и \mathbf{R} с использованием только трех первых цифр в каждом числе, и с последующим расчетом решения с неизменным использованием только трехцифровых представлений и с отрезанием всех «дополнительных» цифр. Если воспользоваться основным алгоритмом исключения по Гауссу (см. раздел 8.2.1), то решение будет иметь следующий вид:

$$\begin{bmatrix} 3,42 & -3,42 \\ -3,42 & 101 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,30 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8.46)$$

где «шапочки» над U_1 и U_2 означают, что решение уравнений (8.46) отлично от решения уравнений (8.44). Используя решение с отрезанием всех цифр сверх трех,

$$101 - \left(\frac{-3,42}{3,42} \right) (-3,42) = 101 - (-1)(-3,42) = 97,5,$$

мы получим

$$\begin{bmatrix} 3,42 & -3,42 \\ 0,0 & 97,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,30 \\ 1,30 \end{bmatrix}, \quad (8.47)$$

где черта над символами U_1 и U_2 означает, что мы решаем уравнения (8.46) приближенно. Продолжая использовать арифметику с отрезанием до трех цифр, мы получаем

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} \bar{U}_2 &= \frac{1,30}{97,5} = 0,0133 \\ \bar{U}_1 &= \frac{1}{3,42} [1,30 - (-3,42)(-0,0133)] = \frac{1}{3,42} (1,34) = \\ &= 0,391. \end{aligned} \right\} \quad (8.48)$$

Обращаясь к приведенному выше примеру, мы можем идентифицировать два вида ошибок: *ошибка урезания* и *ошибка округления*. Ошибка урезания — это та ошибка, которая возникает вследствие того, что точная матрица \mathbf{K} и точный вектор нагрузки \mathbf{R} в уравнении (8.44) представлены только с точностью до трех цифр, как это дано в уравнениях (8.46). Ошибка округления — это та ошибка, которая появляется при решении уравнений (8.46) из-за того, что используется только арифметика с тремя цифрами. Если рассматривать такие ситуации, при которых ошибки каждого типа были бы большими, то мы замечаем, что ошибка урезания будет велика тогда, когда абсолютная величина элементов матрицы \mathbf{K} , включая ее диагональные элементы, претерпевает большие изменения. Ошибка округления может быть велика тогда, когда используется такой малый диагональный элемент d_{ii} , который порождает большой множитель l_{ij} . Причиной того, что ошибки урезания и округления оказываются большими при указанных выше условиях состоит в том, что основной операцией в процессе факторизации является вычитание взятой с некоторым множителем центральной строки из строк, расположенных ниже нее. Если при этой операции вычитаются числа, сильно отличающиеся по своей величине и которые, однако, были представлены только посредством фиксированного количества цифр, то ошибки при этой основной операции могут быть сравнительно большими.

Чтобы в данном примере идентифицировать по отдельности ошибки округления и урезания, мы должны получить точное решение уравнений (8.46), а в этом случае получаем

$$\begin{bmatrix} 3,42 & -3,42 \\ 0 & 97,58 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,30 \\ 1,30 \end{bmatrix} \quad (8.49)$$

и

$$\begin{aligned} \hat{U}_1 &= 0,3934393613, \\ \hat{U}_2 &= 0,0133224020. \end{aligned} \quad (8.50)$$

Это означает, что ошибка решения, возникающая за счет начального урезания, выражается как

$$\hat{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0000239836 \\ -0,0000109311 \end{bmatrix}, \quad (8.51)$$

а ошибка округления соответствует выражению

$$\bar{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0024393613 \\ 0,0000224020 \end{bmatrix}. \quad (8.52)$$

Полная ошибка \mathbf{r} представляет собой сумму $\bar{\mathbf{r}}$ и $\hat{\mathbf{r}}$, или

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0024633449 \\ 0,0000114709 \end{bmatrix}. \quad (8.53)$$

При данной здесь оценке ошибок решения мы использовали точные решения уравнений (8.44) и (8.49). При анализе практических задач такие точные решения не могут быть получены; вместо этого могла бы быть применена арифметика с двойной точностью, позволяющая рассчитать приближения, очень близкие к точным решениям.

Рассмотрим теперь тот случай, когда при конкретном варианте анализа решение, полученное для уравнений $\mathbf{KU} = \mathbf{R}$, равно $\bar{\mathbf{U}}$; иначе говоря, вследствие ошибок урезания и округления вместо \mathbf{U} вычисляется $\bar{\mathbf{U}}$. Создается впечатление, что ошибка решения может быть получена путем вычисления невязки $\Delta\mathbf{R}$, где

$$\Delta\mathbf{R} = \mathbf{R} - \mathbf{K}\bar{\mathbf{U}}. \quad (8.54)$$

На практике величина $\Delta\mathbf{R}$ могла бы быть рассчитана путем использования арифметики с двойной точностью. Если в (8.54) заменить \mathbf{KU} на \mathbf{R} , то для ошибки решения $\mathbf{r} = \mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}}$ мы имеем выражение

$$\mathbf{r} = \mathbf{K}^{-1} \Delta\mathbf{R}, \quad (8.55)$$

а это означает, что *хотя величина $\Delta\mathbf{R}$ может быть мала, ошибка решения может все же оказаться велика*. С другой стороны, для получения достаточно точного решения величина $\Delta\mathbf{R}$ должна быть мала. Поэтому малая невязка $\Delta\mathbf{R}$ является необходимым, но не достаточным условием получения точного решения.

Пример 8.14: Рассчитайте $\Delta\mathbf{R}$ и \mathbf{r} применительно к рассмотренному выше вводимому примеру.

Используя те значения для \mathbf{R} , \mathbf{K} и \mathbf{U} , которые были заданы, соответственно, уравнениями (8.44) и формулами (8.48), мы при использовании выражения (8.54) получаем

$$\Delta\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1,3021 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3,42521 & -3,42521 \\ -3,42521 & 101,2431 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,391 \\ 0,0133 \end{bmatrix},$$

или

$$\Delta\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0,00839818 \\ -0,00042520 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, используя (8.55), мы имеем

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0,00253338 \\ 0,00008151 \end{bmatrix}.$$

В данном случае и $\Delta\mathbf{R}$, и \mathbf{r} , оказались сравнительно малыми, так как матрица \mathbf{K} является хорошо обусловленной.

Пример 8.15: Рассмотрите систему уравнений

$$\begin{bmatrix} 4,855 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 5,855 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 5,855 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 4,855 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,59 \\ 1 \\ 1 \\ -1,64 \end{bmatrix}.$$

Для расчета решения воспользуйтесь арифметикой с шестью цифрами и с отрезанием.

Следуя основному принципу исключения по Гауссу, мы получаем

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4,85500 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2,55944 & -3,17610 & 1 \\ 0 & -3,17610 & 5,64902 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 4,85500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \\ \bar{U}_3 \\ \bar{U}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1,59000 \\ -0,309980 \\ 1,32719 \\ -1,64000 \end{bmatrix} ; \\ \begin{bmatrix} 4,85500 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2,55944 & -3,17610 & 1 \\ 0 & 0 & 1,70771 & -2,75907 \\ 0 & 0 & -2,75907 & 4,46429 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \\ \bar{U}_3 \\ \bar{U}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1,59000 \\ -0,309980 \\ 0,942827 \\ -1,51888 \end{bmatrix} ; \\ \begin{bmatrix} 4,85500 & -4 & 1 & 0 \\ & 2,55944 & -3,17610 & 1 \\ & & 1,70771 & -2,75907 \\ & & & 0,006600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \\ \bar{U}_3 \\ \bar{U}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1,59000 \\ -0,309980 \\ 0,942827 \\ 0,004390 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Обратная подстановка дает

$$\bar{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 0,686706 \\ 1,63768 \\ 1,62674 \\ 0,665151 \end{bmatrix} .$$

Точный ответ (с точностью до семи цифр) имеет вид

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0,7037247 \\ 1,6652256 \\ 1,6542831 \\ 0,6821567 \end{bmatrix} .$$

Вычисляя $\Delta \mathbf{R}$ в соответствии с формулой (8.54), мы получаем

$$\Delta \mathbf{R} = \begin{bmatrix} -1,59 \\ 1 \\ 1 \\ -1,64 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1,59002237 \\ 0,99998340 \\ 0,99994470 \\ -1,639971895 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00002237 \\ 0,00001660 \\ 0,00005530 \\ -0,000028105 \end{bmatrix} .$$

Кроме того, вычисление \mathbf{r} дает

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0,01702 \\ 0,02756 \\ 0,02754 \\ 0,01701 \end{bmatrix} .$$

Как мы видим, величина $\Delta \mathbf{R}$ сравнительно мала, она намного меньше, чем \mathbf{r} . Действительно, ошибки в смещениях имеют порядок от 1 до 2 процента, тогда как ошибки в нагрузках указывают, по-видимому, на точное решение уравнений.

Рассматривая выражение (8.55), мы должны ожидать, что будет трудно достигнуть точности решения, когда наименьшее собственное значение матрицы \mathbf{K} очень мало или близко к нулю; иначе говоря, система находится при этом почти в том состоянии, когда она испытывает движения как твердое тело. А именно, в этом случае элементы матрицы \mathbf{K}^{-1} велики и ошибки решения могут оказаться большими, хотя величина $\Delta \mathbf{R}$ мала. Кроме того, в качестве подтверждения этого вывода мы можем обнаружить, что если λ_1 или

\mathbf{K} остаются малыми, то решение уравнения $\mathbf{KU} = \mathbf{R}$ можно рассматривать в качестве одного этапа обратной итерации со сдвигом, близким к λ_1 . Однако, как показывает анализ, проведенный в разделе 11.2.1, в этом случае решение близко к тому, чтобы иметь компоненты соответствующего собственного вектора. Эти компоненты представляются теперь как ошибки решения.

Чтобы получить дополнительную информацию об ошибках решения, можно провести анализ, свидетельствующий о том, что эти ошибки определяются не только малым (близким к нулю) собственным значением λ_1 , но еще и большим отношением наибольшего собственного значения \mathbf{K} к наименьшему. А именно, при решении уравнения $\mathbf{KU} = \mathbf{R}$ с учетом наличия ошибок урезания и округления мы можем предположить, что фактически мы решаем уравнение

$$(\mathbf{K} + \delta\mathbf{K})(\mathbf{U} + \delta\mathbf{U}) = \mathbf{R}. \quad (8.56)$$

Если допустить, что величина $\delta\mathbf{K} \delta\mathbf{U}$ мала в сравнении с другими членами, то приближенно будем иметь

$$\delta\mathbf{U} = -\mathbf{K}^{-1} \delta\mathbf{K} \mathbf{U}, \quad (8.57)$$

или, вводя соответствующие нормы,

$$\frac{\|\delta\mathbf{U}\|}{\|\mathbf{U}\|} \leq \text{cond}(\mathbf{K}) \frac{\|\delta\mathbf{K}\|}{\|\mathbf{K}\|}, \quad (8.58)$$

где $\text{cond}(\mathbf{K})$ представляет собой *кондиционное число* матрицы \mathbf{K} ,

$$\text{cond}(\mathbf{K}) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}. \quad (8.59)$$

Следовательно, *большое кондиционное число означает, что ошибки решения являются более вероятными*. Желая дать оценку ошибок решения, предположим, что для компьютера, обеспечивающего точность в t цифр, имеем

$$\frac{\|\delta\mathbf{K}\|}{\|\mathbf{K}\|} = 10^{-t}. \quad (8.60)$$

Кроме того, предполагая, что решение построено с точностью до s цифр, мы имеем

$$\frac{\|\delta\mathbf{U}\|}{\|\mathbf{U}\|} = 10^{-s}. \quad (8.61)$$

Подставляя выражения (8.60) и (8.61) в формулу (8.58), в качестве оценки числа точных цифр, получаемого при решении, будем иметь

$$s \geq t - \log_{10}[\text{cond}(\mathbf{K})]. \quad (8.62)$$

Пример 8.16: Вычислите кондиционное число матрицы \mathbf{K} , использованной в примере 8.15. После этого дайте оценку той точности, которую можно ожидать при решении уравнения.

В данном случае мы имеем

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0,000898, \\ \lambda_4 &= 12,9452. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\text{cond}(\mathbf{K}) = 14415,6,$$

и

$$\log_{10}[\text{cond}(\mathbf{K})] = 4,15883.$$

Таким образом, число точных цифр при использовании арифметики с шестью цифрами в соответствии с (8.62) предсказывается как

$$s \geq 6 - 4,16,$$

то есть, мы можем ожидать точности в одну или две цифры.

На практике кондиционное число матрицы \mathbf{K} можно приближенно оценить путем вычисления верхнего предела для λ_n , скажем λ_n^u ,

$$\lambda_n^u = \|\mathbf{K}\|, \quad (8.63)$$

где можно использовать любой вариант матричной нормы (см. пример 8.17) и оценить нижний предел для λ_1 , скажем, λ_1^l , используя обратную итерацию (см. раздел 11.2.1). Таким образом получаем

$$\text{cond}(\mathbf{K}) \doteq \frac{\lambda_n^u}{\lambda_1^l}. \quad (8.64)$$

Пример 8.17: Рассчитайте приближенное значение кондиционного числа матрицы \mathbf{K} , использовавшейся в примере 8.15.

Здесь мы имеем, используя ∞ -норму (см. раздел 2.7),

$$\|\mathbf{K}\|_\infty = 14,855,$$

и, используя обратную матрицу, получаем $\lambda_1 = 0,0009 \log_{10}(\text{cond}(\mathbf{K})) = 4,2176$. Тогда выводы, сделанные в примере 8.16, остаются справедливыми.

Высказанные выше соображения относительно ошибок округления и урезания приводят к двум, приводимым ниже, важным результатам:

1. Можно ожидать, что ошибки обоих типов будут большими, если анализируются конструкции с большим диапазоном изменения жесткости. Большие различия в значениях жесткости могут быть обусловлены различиями в материальных свойствах, или же могут оказаться результатом используемого конечно-элементного моделирования, а в этом случае зачастую может быть выбрана более эффективная модель. Это может быть достигнуто путем использования таких конечных элементов, которые почти равны между собой по размеру и имеют почти одинаковую длину в каждом направлении, путем использования степеней свободы типа «хозяин–работник», т. е. уравнений с принудительными связями (см. раздел 4.2.2 и пример 8.19), а также относительных степеней свободы (см. пример 8.20).
2. Учитывая тот факт, что ошибки урезания оказываются более значительными, для повышения точности решения оказывается необходимым вычислять как саму матрицу жесткости \mathbf{K} , так и решение уравнения $\mathbf{KU} = \mathbf{R}$ с двойной точностью. Оказывается недостаточным (а) вычислять \mathbf{K} с ординарной точностью, а затем решать уравнения с двойной точностью (см. пример 8.18), или (б) вычислять \mathbf{K} с ординарной точностью, решать уравнения с ординарной точностью согласно процедуре исключения по Гауссу, а затем с целью улучшения решения проводить итерации, например, по методу Гаусса–Зайделя.

Справедливость двух сделанных выше выводов демонстрируется с помощью некоторых простых примеров.

Пример 8.18: Рассмотрите простую систему с пружинами, изображенную на рис. 8.17. Рассчитайте смещения при $k = 1$, $K = 10\,000$, используя арифметику с четырьмя цифрами. Уравнения равновесия системы имеют вид

$$\begin{bmatrix} K & -K & 0 \\ -K & 2K & -K \\ 0 & -K & K+k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

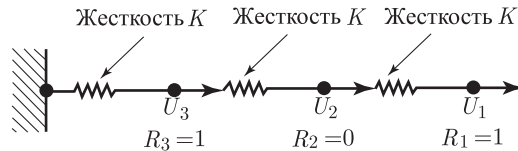


Рис. 8.17. Простая система пружин

Подставляя вышеуказанные значения K и k и используя арифметику с четырьмя цифрами, мы имеем

$$\begin{bmatrix} 10\,000 & -10\,000 & 0 \\ -10\,000 & 20\,000 & -10\,000 \\ 0 & -10\,000 & 10\,000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Приведение матрицы коэффициентов к треугольной форме дает

$$\begin{bmatrix} 10\,000 & -10\,000 & 0 \\ 0 & 10\,000 & -10\,000 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 1,0 \\ 2,0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, что решение невозможно, так как $d_{nn} = 0,0$.

Для получения решения мы можем применить арифметику с повышенным числом цифр. На практике это означало бы использование арифметики с двойной точностью, т.е. в данном случае арифметики с восемью цифрами вместо четырех.

Если использовать арифметику с восемью цифрами (на самом деле было бы достаточно пяти цифр), то мы получаем точное решение в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} 10\,000 & -10\,000 & 0 \\ -10\,000 & 20\,000 & -10\,000 \\ 0 & -10\,000 & 10\,001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 10\,000 & -10\,000 & 0 \\ 0 & 10\,000 & -10\,000 \\ 10 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 1,0 \\ 2,0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, получаем

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2,0002 \\ 2,0001 \\ 2,0 \end{bmatrix}.$$

Данный пример свидетельствует о том, что применение арифметики с достаточным числом цифр может иметь первостепенное значение для того, чтобы решение не развалилось.

Пример 8.19: Воспользуйтесь процедурой решения «хозяин–работник» с целью исследования системы, рассмотренной на рис. 8.17.

Основное допущение при анализе типа «хозяин–работник» связано с использованием уравнений с принудительными связями, $U_1 = U_2 = U_3$. Таким образом, уравнение равновесия, определяющее состояние системы, имеет вид $KU_1 = 2$. Подставляя значение k , получим $U_1 = 2$, и полное решение приобретает форму

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2,0 \\ 2,0 \\ 2,0 \end{bmatrix}.$$

Это решение является приближенным. Однако, сравнивая данное решение с точным результатом (см. пример 8.18), мы находим, что основная реакция прогнозируется надлежащим образом.

Пример 8.20: Воспользуйтесь относительными степенями свободы, чтобы исследовать систему, показанную на рис. 8.17.

Если использовать относительные степени свободы, то определяемые степени свободы смещения — это U_3 , Δ_1 и Δ_2 , где

$$\begin{aligned} U_2 &= U_3 + \Delta_2, \\ U_1 &= U_2 + \Delta_1, \end{aligned}$$

или мы имеем

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ U_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{a})$$

Матрица, устанавливающая связь степеней свободы Δ_1 , Δ_2 и U_3 со степенями свободы U_1 , U_2 и U_3 , — это матрица \mathbf{T} . Уравнения равновесия системы, составленные с использованием относительных степеней свободы, имеют вид $(\mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T}) \mathbf{U}_{\text{rel}} = \mathbf{T}^T \mathbf{R}$; иначе говоря, уравнения равновесия теперь имеют вид

$$\begin{bmatrix} 10\,000 & 0 & 0 \\ 0 & 10\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 1,0 \\ 2,0 \end{bmatrix}, \quad (\text{b})$$

а их решение —

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 0,001, \\ \Delta_2 &= 0,0001, \\ U_3 &= 2,0. \end{aligned}$$

Следовательно, мы получаем $U_1 = 2,0002$, $U_2 = 2,0001$, $U_3 = 2,0000$. Таким образом, используя арифметику с четырьмя цифрами, мы получаем точное решение системы, если используются относительные степени свободы (см. пример 8.18). Следует, однако, отметить, что уравнения равновесия, соответствующие относительным степеням свободы, должны были бы формироваться напрямую, т. е. без преобразования, используемого в этом примере.

8.2.7. Упражнения

- 8.1. Рассмотрите консольную балку из примера 8.1, имеющую заданную матрицу жесткости. Рассчитайте те экспериментальные результаты, которые вы ожидаете получить в лабораторном эксперименте для значений жесткости балки, приводимых на рисунках 8.3–8.6 в применении к просто опертой балке, обсуждаемой в тексте. Иначе говоря, будем задавать силы в зажимах и формы отклонения консольной балки, соответствующие измерениям жесткости для четырех случаев: все четыре зажима на месте, удален зажим 1, удалены зажимы 1 и 2 и, наконец, удалены зажимы 1, 2 и 3.
- 8.2. При заданной матрице жесткости консольной балки из примера 8.1 рассчитайте матрицу жесткости, соответствующую только U_2 и U_4 , то есть с удаленными степенями свободы U_1 и U_3 . После этого рассчитайте и покажите на графике отклоненные формы балки, описываемые только посредством U_2 и U_4 , когда $U_2 = 1$, $U_4 = 0$ и когда $U_2 = 0$, $U_4 = 1$.
- 8.3. Для определения матрицы жесткости некой конструкции поставлен лабораторный эксперимент. Используются показанные на схеме зажимы, и измеряется следующая

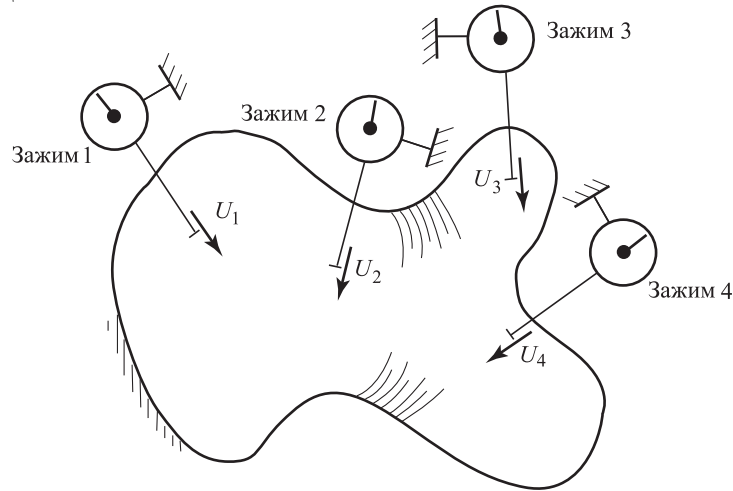
матрица жесткости 4×4 :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 14 & -6 & 1 & 0 \\ -6 & 14 & -7 & 1 \\ 1 & -7 & 16 & -8 \\ 0 & 1 & -8 & 18 \end{bmatrix}.$$

После этого удаляется зажим 2 и измеряется следующая матрица жесткости 3×3 :

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 80/7 & -2 & 3/7 \\ -2 & 25/2 & -15/2 \\ 3/7 & -15/2 & 17 \end{bmatrix}.$$

Хотя вы и уверены, что матрица \mathbf{K} была определена правильно, однако имеется некоторое сомнение в том, была ли правильно определена матрица $\tilde{\mathbf{K}}$, потому что имеется вероятность неправильной работы зажима 3. Проверьте, правильно ли определены элементы жесткости матрицы $\tilde{\mathbf{K}}$, и если имеет место ошибка, то дайте подробную информацию об этой ошибке.

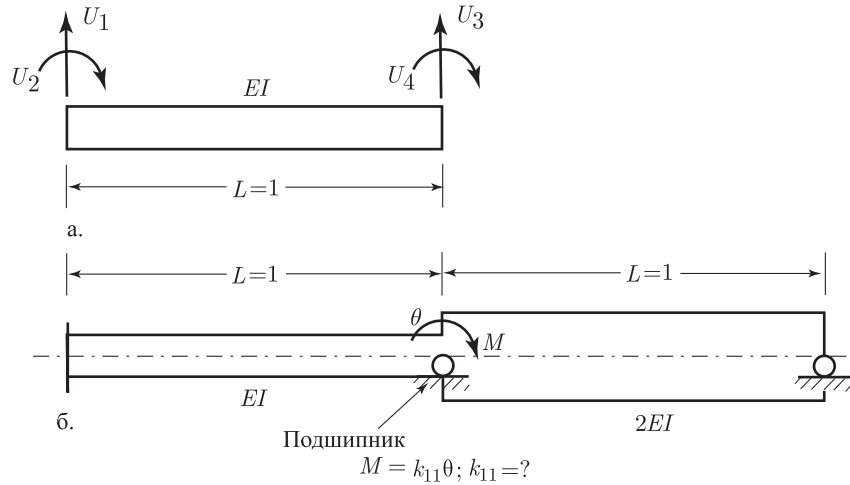


Все зажимы наглухо закреплены на конструкции

8.4. Матрица жесткости элемента в форме балки, показанная в соотношении (а), задается в форме

$$\mathbf{K} = EI \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\ 12 & -6 & -12 & -6 \\ -6 & 4 & 6 & 2 \\ -12 & 6 & 12 & 6 \\ -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Рассчитайте жесткость элемента комплекса, показанного в соотношении (b), соответствующую только степени свободы θ .

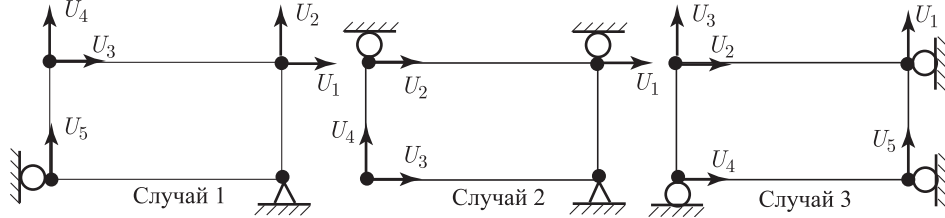


- 8.5. Консольная балка из примера 8.1 нагружена сосредоточенной силой, соответствующей U_2 ; следовательно, определяющие уравнения имеют вид

$$\begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Рассчитайте решение для смещений путем выполнения исключения по Гауссу на переменных смещения в порядке U_4 , U_3 и U_1 .

- 8.6. Рассмотрите показанный на рисунке конечный элемент с четырьмя узлами, вместе с соответствующими граничными условиями. Предположите, что исключение по Гауссу осуществляется в обычном порядке для U_1 , U_2 , ..., и так далее, т. е. начиная с наименьшего номера степени свободы и вплоть до наивысшего. Для случаев от 1 до 3 определите, будет ли встречаться в процессе исключения какой-либо нулевой диагональный элемент, и если будет, то на какой стадии процесса решения это произойдет.



- 8.7. Осуществите факторизацию в форме \mathbf{LDL}^T для матрицы жесткости \mathbf{K} консольной балки из примера 8.1 (\mathbf{K} представляет собой результат первого эксперимента; см. упражнение 8.5), Воспользуйтесь этой факторизацией, чтобы вычислить $\det \mathbf{K}$, а также рассчитать множитель Холецки $\tilde{\mathbf{L}}$ для матрицы \mathbf{K} .
- 8.8. Докажите, что в соответствии с выражениями (8.10) и (8.14) мы действительно имеем $\mathbf{S} = \mathbf{D}\tilde{\mathbf{S}}$ и $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{L}^T$.
- 8.9. Рассмотрите уравнения

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Постройте факторизацию матрицы коэффициентов к форме \mathbf{LDL}^T , а после этого решите уравнения, как они представлены в (8.19) и (8.20). Наконец, рассчитайте также множитель Холецки $\tilde{\mathbf{L}}$ для матрицы коэффициентов.

- 8.10. Рассмотрите уравнения

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2+k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Определите, для какого значения (или значений) k (**a**) матрица коэффициентов является неопределенной и когда (**b**) уравнения не могут быть решены.

- 8.11. Воспользуйтесь основными этапами исключения по Гауссу, как они даны в разделе 8.2.1, чтобы решить приводимую ниже несимметричную систему уравнений. После этого покажите, что указанные этапы решения уравнений могут быть записаны в форме (8.10)–(8.20), если не считать того, что нам необходимо заменить \mathbf{L}^T в этих уравнениях на верхнюю треугольную единичную матрицу \mathbf{L}_u . Определите матрицу \mathbf{L}_u .

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- 8.12. Выполните упражнение 8.11, но воспользуйтесь следующей системой уравнений:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- 8.13. Осуществите факторизацию \mathbf{LDL}^T для следующей системы уравнений:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь U_1 , U_2 и U_3 — это смещения, а λ — множитель Лагранжа (сила) (см. раздел 3.4.1).

Предложите также простую конечно-элементную модель, реакция которой определяется этими уравнениями.

- 8.14. Рассмотрите следующую систему уравнений:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}_\lambda^T \\ \mathbf{K}_\lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{R}_\lambda \end{bmatrix},$$

где \mathbf{K} — симметричная, положительно определенная матрица порядка n (\mathbf{K} соответствует конечно-элементной модели, надлежащим образом удерживаемой для того, чтобы она не содержала форм движения твердого тела), а матрица \mathbf{K}_λ и вектор \mathbf{R}_λ соответствуют уравнениям с принудительными связями в количестве p (таким, какие, например, встречаются при анализе конкретных задач; см. раздел 6.7). Вектор λ содержит множители Лагранжа.

Покажите, что в тех случаях, когда уравнения с принудительными связями являются линейно независимыми и $p < n$, мы можем использовать процедуру решения (8.10)–(8.20), чтобы определить неизвестные смещения и множители Лагранжа.

- 8.15. Рассмотрите модель конструкции из примера 8.9 и предположите, что жесткость $k_i = (EA_1/L) \times i$ добавляется к степени свободы u_i , $i = 1, 2, \dots, 5$. Следовательно, эти значения жесткости представляют собой всего лишь добавки к диагональным элементам первоначальной матрицы жесткости, заданной в примере 8.9. Воспользуйтесь разделением на субструктуры, чтобы построить решение для матрицы жесткости получаемой в результате конструкции, определяемой только степенями свободы U_1 , U_3 и U_5 .

- 8.16. Воспользуйтесь разделением на субструктуры, чтобы построить решение для матрицы жесткости 3×3 и соответствующего вектора силы для стержневой конструкции, показанной на рис. 8.11 и соответствующей степеням свободы U_1 , U_7 и U_9 .
- 8.17. Рассмотрите консольную балку из примера 8.1 и ее матрицу жесткости (заданную в результате первого эксперимента; см. упражнение 8.5). Рассчитайте собственные значения для первоначальной задачи и для ассоциированных задач с принудительными связями, показав тем самым, что свойство последовательности Штурма в данном случае имеет место (*подсказка*: см. рис. 8.14).
- 8.18. Рассмотрите матрицу жесткости из упражнения 8.4. Рассчитайте собственные значения для первоначальной задачи и для ассоциированных задач с принудительными связями, показав тем самым, что свойство последовательности Штурма в данном случае имеет место (*подсказка*: см. рис. 8.14).
- 8.19. Рассмотрите следующую матрицу:

$$\begin{bmatrix} 10 & -10 & 0 \\ -10 & 10 + k & -k \\ 0 & -k & 10 + k \end{bmatrix}.$$

Вычислите такое значение k , чтобы кондиционное число матрицы было порядка 10^8 .

- 8.20. Рассчитайте точное значение кондиционного числа для матрицы жесткости просто опертой балки, показанной на рис. 8.1 а, а также приближенное значение этого числа, определяемое с помощью нормы (*подсказка*: см. рис. 8.14 и соотношение (8.63)).

8.3. Итеративные методы решения

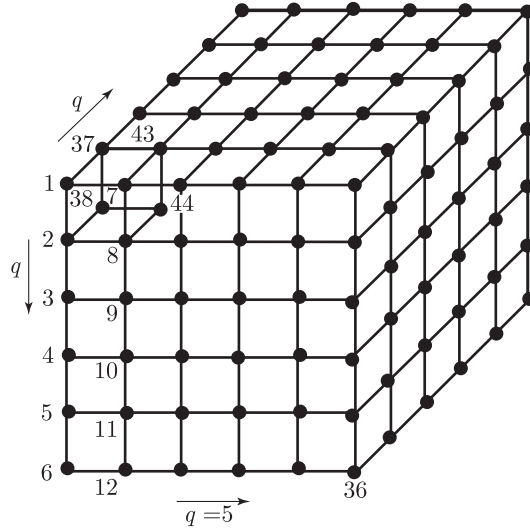
Для многих вариантов анализа оказывается очень эффективной некоторая форма прямого решения, основанная на применении процедуры исключения по Гауссу к решению уравнений равновесия $\mathbf{KU} = \mathbf{R}$ (см. раздел 8.2). Интересно отметить, однако, что на начальных стадиях развития метода конечных элементов применялись алгоритмы, связанные с итеративными методами решения (см. работу [Clough, Wilson, 1962]).

Основной недостаток итеративного подхода к решению состоит в том, что время решения может быть оценено только весьма приближенно, так как число итераций, необходимых для достижения сходимости, зависит от кондиционного числа матрицы \mathbf{K} и от того, будут ли применяемые схемы ускорения эффективными в применении к рассматриваемому частному случаю. В первую очередь именно по этой причине использование итеративных методов в конечно-элементном анализе было практически приостановлено в 1960-х и 1970-х годах, тогда как прямые методы решения были усовершенствованы и стали чрезвычайно эффективными (см. раздел 8.2).

Если рассматривать, однако, очень большие конечно-элементные системы, то применение к ним прямого метода решения может потребовать большого объема памяти и компьютерного времени. Основная причина этого состоит в том, что потребная память пропорциональна nm_K , где n — число уравнений, m_K — полуширина ленты, а число операций приближенно равно $(1/2)nm_K^2$. Если учесть, что полуширина ленты (грубо говоря) пропорциональна \sqrt{n} , то мы должны признать, что при увеличении n требования к памяти и к компьютерному времени могут стать очень велики. На практике память, обеспечиваемая компьютером, зачастую ограничивает размер той конечно-элементной системы, для которой нужно построить решение.

С другой стороны, при построении итеративного решения потребная память оказывается значительно меньше, так как нам нужно вводить в память лишь элементы матрицы, отличные от нуля на данной стадии и расположенные внутри границ этой матрицы, массив указателей, определяющих положение каждого из ненулевых элементов, а также некоторые массивы, размер которых также мал в сравнении с nm_K , например, массивы для векторов предварительного обуславливания и самой итерации. Элементы матрицы, отличные от нуля и расположенные внутри границ этой матрицы, составляют лишь небольшую долю от общего числа элементов внутри этих границ, и мы продемонстрируем это на приводимом ниже примере.

Пример 8.21: Рассмотрите конечно-элементную модель, состоящую из показанных на рис. 8.18 трехмерных элементов. Дайте оценку числа матричных элементов внутри границ интересующей нас области (подлежащих введению в память при прямом решении), а также числа элементов матрицы, отличных от нуля на данной стадии (подлежащих введению в память при итеративном решении).



q — число элементных слоев в каждом направлении

Рис. 8.18. Соединение трехмерных элементов с восемью узлами, при трех степенях свободы на каждый узел

Половина ширины ленты задается как максимальная разница между числами узловых точек в элементе. В данном случае, когда в каждом направлении имеется q элементных слоев, мы имеем

$$m_K = [(q + 1)^2 + q + 3] \times 3 - 1,$$

или, если число q велико, то

$$m_K \doteq 3q^2. \quad (a)$$

В рассматриваемой здесь задаче высоты столбцов практически постоянны и, следовательно, число элементов внутри границ области приближенно равно

$$nm_K \doteq (3q^3)(3q^2) = 9q^5.$$

С другой стороны, число отличных от нуля элементов на данной стадии, расположенных внутри границ области, определяется тем фактом, что каждая из узловых точек i на данной стадии построения решения взаимодействует только с узловыми точками, непосредственно ее окружающими. Для некоторой внутренней узловой точки и для элементов с восемью узлами взаимодействие затрагивает 27 узловых точек и, следовательно, «сжатая» полуширина ленты равна

$$m_K|_{\text{сжатая}} = \frac{27}{2} \times 3 \sim 40, \quad (b)$$

и мы замечаем, что этот результат не зависит от числа элементов и от числа узловых точек в данной модели. Действительно, результат, представленный в формуле (b), зависит только от того, сколько элементов способствует взаимодействию характерной узловой точки. Сравнивая (a) и (b), мы видим, что число отличных от нуля элементов внутри границ области возрастает вместе с n только по линейному закону и процентная доля того, что замеряется на всех элементах внутри области, оказывается очень малой, когда величина q велика.

Тот факт, что при итеративном решении можно сэкономить значительный объем памяти, стимулировал и многочисленные исследовательские усилия, направленные на разработку итеративных схем повышенной эффективности. Разумеется, смысл этой эффективности состоит в том, чтобы достичь сходимости при умеренном числе итераций.

Как мы увидим, наиболее важное качество итеративной схемы связано поэтому с разработкой такой процедуры, которая ускоряла бы сходимость, если эта сходимость представляется медленной. Тот факт, что для многих приложений стали доступны эффективные процедуры ускорения, сделал итеративные методы чрезвычайно привлекательными.

В последующих разделах мы прежде всего рассмотрим классическую итеративную процедуру Гаусса–Зайделя, а затем — метод сопряженного градиента. Метод Гаусса–Зайделя использовался в ранних приложениях метода конечных элементов (см. работу [Clough, Wilson, 1962]) и продолжает использоваться ныне. Однако особенно привлекательным является представленный здесь метод сопряженного градиента.

8.3.1. Метод Гаусса–Зайделя

Наша цель состоит в том, чтобы с помощью итераций построить решение уравнений $\mathbf{KU} = \mathbf{R}$. Пусть $\mathbf{U}^{(1)}$ определяет собой начальное приближение для смещений \mathbf{U} . Если нет сведений о лучшем значении \mathbf{U} , то значение $\mathbf{U}^{(1)}$ может быть нулевым вектором.

При итерации Гаусса–Зайделя (см. [Seidel, 1874] и [Varga, 1962]) мы для последующих приближений, для $s = 1, 2, \dots$ имеем

$$U_i^{(s+1)} = k_{ii}^{-1} \left(R_i - \sum_{j=1}^{i-1} k_{ij} U_j^{(s+1)} - \sum_{j=i+1}^n k_{ij} U_j^{(s)} \right), \quad (8.65)$$

где $U_i^{(s)}$ и R_i представляют собой i -е компоненты \mathbf{U} и \mathbf{R} , а параметр s обозначает итерационный цикл. Поступая иначе, мы можем записать в матричной форме

$$\mathbf{U}^{(s+1)} = \mathbf{K}_D^{-1} (\mathbf{R} - \mathbf{K}_L \mathbf{U}^{(s+1)} - \mathbf{K}_L^T \mathbf{U}^{(s)}), \quad (8.66)$$

где \mathbf{K}_D — это диагональная матрица, $\mathbf{K}_D = \text{diag}(k_{ii})$, а \mathbf{K}_L — это нижняя треугольная матрица с такими элементами k_{ii} , что

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_D + \mathbf{K}_L^T. \quad (8.67)$$

Процесс итераций продолжается до тех пор, пока изменение текущей оценки вектора смещений остается достаточно малым, т. е. до тех пор, пока

$$\frac{\|\mathbf{U}^{(s+1)} - \mathbf{U}^{(s)}\|_2}{\|\mathbf{U}^{(s+1)}\|_2} < \epsilon, \quad (8.68)$$

где ϵ — это допустимое отклонение сходимости. Число итераций зависит от «качества» начального вектора $\mathbf{U}^{(1)}$ и от обусловленности матрицы \mathbf{K} . Однако важно отметить, что итерация будет всегда сходиться при условии, что матрица \mathbf{K} является положительно определенной. Кроме того, скорость сходимости может быть повышена путем сверхрелаксации, а в этом случае итерация имеет следующую форму:

$$\mathbf{U}^{(s+1)} = \mathbf{U}^{(s)} + \beta \mathbf{K}_D^{-1} (\mathbf{R} - \mathbf{K}_L \mathbf{U}^{(s+1)} - \mathbf{K}_D \mathbf{U}^{(s)} - \mathbf{K}_L^T \mathbf{U}^{(s)}), \quad (8.69)$$

где β — коэффициент сверхрелаксации. Оптимальное значение β зависит от вида матрицы \mathbf{K} , но обычно оказывается между 1.3 и 1.9.

Пример 8.22: Используйте итерацию Гаусса–Зайделя для того, чтобы решить систему уравнений, рассмотренных в разделе 8.2.1.

Уравнения, которые необходимо решить, имеют вид

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В процессе решения мы используем соотношение (8.69), которое в данном случае принимает форму

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}^{(s+1)} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}^{(s)} + \beta \begin{bmatrix} 1/5 & & & \\ & 1/6 & & \\ & & 1/6 & \\ & & & 1/5 \end{bmatrix} \times \\ \times \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & & & \\ -4 & 0 & & \\ 1 & -4 & 0 & \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}^{(s+1)} - \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ & 6 & -4 & 1 \\ & & 6 & -4 \\ & & & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}^{(s)} \right\}.$$

В качестве начального предположения мы используем

$$\mathbf{U}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим вначале решение без сверхрелаксации, т. е. при $\beta = 1$. Получаем

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,167 \\ 0,111 \\ 0,0556 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0,111 \\ 0,305 \\ 0,222 \\ 0,116 \end{bmatrix}.$$

Используя предел сходимости по (8.68) со значениями $\epsilon = 0,001$, мы получаем сходимость после 104-х итераций и

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}^{(104)} = \begin{bmatrix} 1,59 \\ 2,59 \\ 2,39 \\ 1,39 \end{bmatrix}$$

при точном решении, имеющем вид

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,60 \\ 2,60 \\ 2,40 \\ 1,40 \end{bmatrix}.$$

Теперь изменим β и проведем расчет решения заново. Приводимая ниже таблица показывает число итераций, требуемое для сходимости со значением $\epsilon = 0,001$, в зависимости от значения β :

β	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
Число итераций	104	88	74	61	49	37	23	30	43	82

Как видим, для данного примера выясняется, что минимальное число итераций требуется при $\beta = 1,6$.

Оказывается поучительным идентифицировать тот физический процесс, который соответствует процедуре решения. С этой целью заметим, что в правой части (8.69) мы даем

оценку неуравновешенной силы, соответствующей степени свободы i ,

$$Q_i^{(s)} = R_i - \sum_{j=1}^{i-1} k_{ij} U_j^{(s+1)} - \sum_{j=1}^n k_{ij} U_j^{(s)}, \quad (8.70)$$

а затем вычисляем улучшенное значение соответствующей компоненты смещения $U_i^{(s+1)}$, пользуясь формулой

$$U_i^{(s+1)} = U_i^{(s)} + \beta k_{ii}^{-1} Q_i^{(s)}, \quad (8.71)$$

где $i = 1, \dots, n$. Если положить, что $\beta = 1$, то поправка для $U_i^{(s)}$ в (8.71) вычисляется путем приложения неуравновешенной силы $Q_i^{(s)}$ к i -й узловой степени свободы при фиксации всех остальных узловых смещений. Отсюда видно, что данный процесс идентичен той процедуре с распределением моментов, которая активно использовалась при анализе конструкций типа рамы (см. работу [Lightfoot, 1961]). Однако ускоренная сходимость достигается тогда, когда используется коэффициент ускорения β .

В приведенных выше выражениях суммирование проводилось по всем элементам, не находящимся на диагонали [см. (8.65) и (8.70)]. Однако на практике мы хотели бы, конечно, включать в суммирование только те степени свободы, которые соответствуют элементам матрицы жесткости, отличным от нуля. Как мы уже указывали ранее, только отличные от нуля элементы матриц должны вводиться в память и участвовать в выкладках.

8.3.2. Метод сопряженного градиента с постановкой предварительных условий

Один из наиболее эффективных и простых итеративных методов (при использовании с выдвиганием предварительных условий) при решении уравнения $\mathbf{KU} = \mathbf{R}$ является алгоритм сопряженного градиента, предложенный в работе [Hestenes, Stiefel, 1952] (см. также [Reid, 1970] и [Golub, Van Loan, 1984]).

Упомянутый алгоритм основывается на той идее, что решение уравнения $\mathbf{KU} = \mathbf{R}$ минимизирует полный потенциал $\Pi = (1/2)\mathbf{U}^T \mathbf{KU} - \mathbf{U}^T \mathbf{R}$ (см. уравнения (4.96)–(4.98)). Следовательно, задача, которая решается в процессе итерирования, состоит в том, чтобы при заданном приближенном представлении \mathbf{U} в форме $\mathbf{U}^{(s)}$, для которого полный потенциал равен $\Pi^{(s)}$, найти улучшенное приближение $\mathbf{U}^{(s+1)}$, для которого $\Pi^{(s+1)} < \Pi^{(s)}$. Однако, мы хотим не только того, чтобы полный потенциал уменьшался с каждой итерацией, но также и того, чтобы величина $\mathbf{U}^{(s+1)}$ вычислялась эффективно и чтобы уменьшение полного потенциала происходило быстро. Тогда быстро будет сходиться и итерация.

При применении метода сопряженного градиента мы используем в s -й итерации линейно независимые векторы $\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)}, \dots, \mathbf{p}^{(s)}$ и вычисляем минимум полного потенциала в пространстве, охватываемом этими векторами. Это дает нам величину $\mathbf{U}^{(s+1)}$ (см. упражнение 8.23). Кроме того, мы определяем и дополнительный базовый вектор, используемый в следующей итерации.

Интересующий нас алгоритм можно вкратце описать следующим образом.

Выберите вектор начальной итерации $\mathbf{U}^{(1)}$ (зачастую он является вектором нулевого порядка).

Рассчитайте невязку $\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{R} - \mathbf{KU}^{(1)}$. Если $\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{0}$, то заканчивайте расчет. Иначе: Положите $\mathbf{p}^{(1)} = \mathbf{r}^{(1)}$.

Рассчитайте для $s = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \alpha_s &= \frac{\mathbf{r}^{(s)T} \mathbf{r}^{(s)}}{\mathbf{p}^{(s)T} \mathbf{Kp}^{(s)}}, \\ mbu^{(s+1)} &= \mathbf{U}^{(s)} + \alpha_s \mathbf{p}^{(s)}, \\ \mathbf{r}^{(s+1)} &= \mathbf{r}^{(s)} - \alpha_s \mathbf{Kp}^{(s)}, \\ \beta_s &= \frac{\mathbf{r}^{(s+1)T} \mathbf{r}^{(s+1)}}{\mathbf{r}^{(s)T} \mathbf{r}^{(s)}}, \\ \mathbf{p}^{(s+1)} &= \mathbf{r}^{(s+1)} + \beta_s \mathbf{p}^{(s)}. \end{aligned} \quad (8.72)$$

Мы продолжаем итерации, пока не получим $\|\mathbf{r}^{(s)}\| \leq \epsilon$, где ϵ — допустимое отклонение сходимости. Можно использовать также и критерий сходимости для $\|\mathbf{U}^{(s)}\|$.

Алгоритм сопряженного градиента удовлетворяет двум важным свойствам ортогональности, касающимся векторов направления $\mathbf{p}^{(i)}$ и невязки $\mathbf{r}^{(i)}$. А именно, мы имеем (см. упражнение 8.22)

$$\mathbf{p}^{(i)T} \mathbf{K} \mathbf{p}^{(j)} = 0 \quad \text{при всех } i, j, \text{ но } i \neq j \quad (8.73)$$

и

$$\mathbf{p}^{(j)T} \mathbf{r}^{(j+1)} = 0, \quad (8.74)$$

где

$$\mathbf{p}^{(j)} = [\mathbf{p}^{(1)}, \dots, \mathbf{p}^{(j)}]. \quad (8.75)$$

Свойство ортогональности из (8.73) означает, что минимум полного потенциала в пространстве, охватываемом векторами $\mathbf{p}^{(1)}, \dots, \mathbf{p}^{(s)}$, достигается через использование минимума в пространстве, охватываемом векторами $\mathbf{p}^{(1)}, \dots, \mathbf{p}^{(s-1)}$ (т. е. решения в предыдущей итерации) и минимизации полного потенциала только по отношению к $\mathbf{p}^{(s)}$ с некоторым множителем. Этот процесс позволяет получить α_s и улучшенное итеративное решение $\mathbf{U}^{(s+1)}$.

Ортогональность, соответствующая (8.74), означает, что $(j+1)$ -я невязка ортогональна ко всем используемым векторам направления. Как показывает это уравнение, сходимость к решению \mathbf{U} будет достигаться, и в случае использования точной арифметики, достигается, самое большее, за n итераций. Разумеется, на практике мы желаем, чтобы сходимость достигалась (в пределах разумного допустимого отклонения сходимости) за число итераций, значительно меньшее, чем n .

Скорость сходимости алгоритма сопряженного градиента зависит от кондиционного числа матрицы \mathbf{K} , определяемого, как $\text{cond}(\mathbf{K}) = \lambda_n / \lambda_1$, где λ_1 — наименьшее собственное число, а λ_n — наибольшее собственное число матрицы \mathbf{K} (см. раздел 8.2.6). Чем больше кондиционное число, тем медленнее реализуется сходимость и, на практике, если матрица плохо обусловлена, то сходимость может оказаться очень медленной. По этой причине алгоритм сопряженного градиента, заданный соотношениями (8.72), едва ли является эффективным.

На этом этапе следует заметить также, что перечисленные выше свойства проявляются только при точной арифметике. На практике арифметика реализуется с конечной степенью точности, и свойства ортогональности, соответствующие (8.73) и (8.74), не являются точно, однако эта потеря ортогональности не приносит серьезного ущерба.

Для повышения скорости сходимости алгоритма решения используется выдвижение предварительных условий. При этом основная идея состоит в том, что вместо решения уравнения $\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{R}$ мы решаем уравнение

$$\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{R}}, \quad (8.76)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}} &= \mathbf{C}_L^{-1} \mathbf{K} \mathbf{C}_R^{-1}, \\ \tilde{\mathbf{U}} &= \mathbf{C}_R \mathbf{U}, \\ \tilde{\mathbf{R}} &= \mathbf{C}_L^{-1} \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (8.77)$$

Не имеющая особенностей матрица $\mathbf{K}_p = \mathbf{C}_L \mathbf{C}_R$ называется прекодиционером. Цель проводимого преобразования состоит в том, чтобы получить матрицу $\tilde{\mathbf{K}}$ с существенно улучшенным кондиционным числом. Были предложены различные версии прекодиционера (см. работы [Golub, Van Loan, 1984], [Manteuffel, 1980], а также [Meijerink, Van Der Vorst, 1981]), однако один из подходов является особенно ценным, — он связан с использованием некоторых неполных множителей Холески для матрицы \mathbf{K} .

При этом подходе некоторая разумная версия матрицы \mathbf{K}_p получается из матрицы \mathbf{K} с неточным множителем так, чтобы любое решение уравнения с \mathbf{K}_p в качестве матрицы коэффициентов могло быть рассчитано совершенно эффективно. В принципе можно вычислить много различных неполных множителей Холески. Согласно одной из схем неполные множители Холески для \mathbf{K} получаются путем выполнения обычной факторизации,

как она описана в разделе 8.2, но при учете только тех участков (и при действиях с ними), где матрица \mathbf{K} имеет элементы, отличные от нуля. Следовательно, все элементы матрицы внутри границ интересующей нас области, которые первоначально были равны нулю, остаются равными нулю и в процессе факторизации и, в силу этого, не должны вводиться в память.

Вместо рассмотрения всех, первоначально отличных от нуля, элементов матрицы \mathbf{K} мы можем решить также включать в процесс факторизации только те элементы, которые по своей величине превышают некоторое предельное значение, и полагать все остальные элементы равными нулю. Такой подход приводит к дополнительной экономии памяти. Кроме того, может оказаться эффективным промасштабировать все диагональные элементы по отношению ко внедиагональным, сделав это прежде, чем осуществлять неполную факторизацию. Наконец, с целью определения неполных множителей (см. упражнения 8.27 и 8.28) мы можем проводить точную факторизацию некоторых подматриц матрицы \mathbf{K} . Очевидно, что существует много различных возможностей и что можно предложить различные интересные соотношения между разными подходами (см., например, работу [Golub, Van Loan, 1984]).

Пусть $\bar{\mathbf{L}}$ и $\bar{\mathbf{L}}^T$ представляют собой выбранные неполные множители Холецки для матрицы \mathbf{K} ; тогда, чтобы с этими множителями построить прекоэффициционер, мы используем матрицу $\mathbf{K}_p = \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{L}}^T$, при $\mathbf{C} = \bar{\mathbf{L}}$ и $\mathbf{C}_R = \bar{\mathbf{L}}^T$.

Какой бы прекоэффициционер \mathbf{K}_p ни был использован, применение алгоритма сопряженного градиента (8.72) к решению задачи для уравнения (8.76) приводит нас к построению следующего алгоритма.

Выберите вектор начальной итерации $\mathbf{U}^{(1)}$.

Рассчитайте невязку $\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{R} - \mathbf{K}\mathbf{U}^{(1)}$. Если $\mathbf{r}^{(1)} = 0$, то заканчивайте.

Иначе:

Вычислите $\mathbf{z}^{(1)} = \mathbf{K}_p^{-1}\mathbf{r}^{(1)}$.

Положите $\mathbf{p}^{(1)} = \mathbf{z}^{(1)}$. Проводите вычисления для $s = 1, 2, \dots$ до тех пор, пока не будет достигнут предел сходимости,

$$\begin{aligned}\alpha_s &= \frac{\mathbf{z}^{(s)T} \mathbf{r}^{(s)}}{\mathbf{p}^{(s)T} \mathbf{K} \mathbf{p}^{(s)}}, \\ \mathbf{U}^{(s+1)} &= \mathbf{U}^{(s)} + \alpha_s \mathbf{p}^{(s)}, \\ \mathbf{r}^{(s+1)} &= \mathbf{r}^{(s)} - \alpha_s \mathbf{K} \mathbf{p}^{(s)}, \\ \mathbf{z}^{(s+1)} &= \mathbf{K}_p^{-1} \mathbf{r}^{(s+1)}, \\ \beta_s &= \frac{\mathbf{z}^{(s+1)T} \mathbf{r}^{(s+1)}}{\mathbf{z}^{(s)T} \mathbf{r}^{(s)}}, \\ \mathbf{p}^{(s+1)} &= \mathbf{z}^{(s+1)} + \beta_s \mathbf{p}^{(s)}.\end{aligned}\tag{8.78}$$

В рамках этой итерации мы определяем промежуточный вектор $\mathbf{z}^{(s)}$, который равен $\mathbf{r}^{(s)}$, если не выдвигается никаких предварительных условий (т.е. когда $\mathbf{K}_p = \mathbf{I}$). Разумеется, матрицу \mathbf{K}_p рассчитывать нет надобности, но вектор $\mathbf{z}^{(s+1)}$ вычисляется непосредственно, используя $\mathbf{r}^{(s+1)}$. Кроме того, все операции умножения с участием матрицы \mathbf{K} выполняются с учетом только ненулевых элементов этой матрицы. Отметим, что итерация, соответствующая (8.78), сводится к итерации согласно (8.72), когда не выдвигается никаких предварительных условий, и что сходимость будет реализовываться немедленно, если матрица \mathbf{K}_p равна матрице \mathbf{K} .

Мы предполагаем, что матрица \mathbf{K}_p не является особой. Это условие обычно соблюдается на практике, однако если оно не соблюдается, то мы можем дать такое небольшое возмущение матрице коэффициентов (или, скорее, соответствующим множителям), чтобы иметь возможность получить решение для $\mathbf{z}^{(s)}$.

Хотя мы пока что и не можем предсказать, насколько быстро будет достигаться сходимость итераций, однако практический опыт применения итеративной схемы (8.78) показал, что часто реализуется весьма значительная экономия потребной памяти и компьютерного

времени (см. работу [Bathe, Walczak, Zhang, 1993]). Разумеется, потребное число итераций зависит от структуры матрицы \mathbf{K} , от ее кондиционного числа, от подробностей выдвижения предварительных условий и от того, какую степень точности требуется достичь.

В этом разделе мы рассмотрели только случай симметричной матрицы коэффициентов, а необходимо заметить, что большой интерес представляет также и итеративное решение уравнений с несимметричными матрицами коэффициентов (таких, как встречаемые при анализе течений жидкости). Здесь те преимущества, которые дает экономия памяти и компьютерного времени, могут оказаться еще более существенными. Применительно к несимметричным матрицам коэффициентов метод сопряженного градиента был подвергнут обобщению, а также были разработаны и исследованы другие итеративные схемы, среди которых следует отметить обобщенный метод минимальной невязки (GMRes) (см., например, работы [Fletcher, 1976], [Saad, Schultz, 1986], а также [Tan, Bathe, 1991]).

Наконец, мы должны признать также, что существует возможность сочетания рассмотренных нами выше прямых и итеративных схем решения. В качестве примера отметим, что описанные в разделе 8.2.4 процедуры субструктуризации могли бы быть использованы для объединения тех определяющих уравнений (после статического сгущения внутренних степеней свободы субструктур), которые решаются с помощью итераций, методом сопряженного градиента. Такие сочетания могут приводить ко множеству различных процедур, которые могут дать значительные преимущества при их использовании в специальных приложениях.

8.3.3. Упражнения

- 8.21. Решите систему уравнений, заданных при использовании итеративного метода Гаусса–Зайделя. Используйте коэффициент оверрелаксации β и исследуйте свойства сходимости при изменении β от 1,0 до 2,0.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- 8.22. Покажите, что свойства ортогональности (8.73) и (8.74) имеют место при использовании метода сопряженного градиента (с применением точной арифметики).
- 8.23. Покажите, что при использовании алгоритма сопряженного градиента по схеме (8.72) минимум Π в пространстве, охватываемом векторами $\mathbf{p}^{(1)}, \dots, \mathbf{p}^{(s)}$, достигается путем использования минимума Π в пространстве, охватываемом $\mathbf{p}^{(1)}, \dots, \mathbf{p}^{(s-1)}$ и решения для α_s , обеспечиваемого алгоритмом.
- 8.24. Дайте вывод приводимого по схеме (8.78) алгоритма с выдвижением предварительных условий, основанного на неполном методе сопряженного градиента по Холески, исходя из стандартного алгоритма по схеме (8.72).
- 8.25. Решите систему уравнений из упражнения 8.21, используя метод сопряженного градиента (без выдвижения предварительных условий).
- 8.26. Решите систему уравнений из упражнения 8.21, используя метод сопряженного градиента с выдвижением предварительных условий. Воспользуйтесь приводимым ниже прекондиционером:

$$\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

- 8.27. Рассмотрите следующую систему уравнений:

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Решите уравнения, используя алгоритм сопряженного градиента с выдвигением предварительных условий, при \mathbf{K}_p , соответствующем неполным множителям Холески, полученным путем выполнения факторизации для \mathbf{K} по обычной методике, но игнорируя все нулевые элементы.
- (b) Решите уравнения, используя алгоритм сопряженного градиента с выдвигением предварительных условий, при задании прекоэффициента

$$\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} 5 & -1 & & \\ -1 & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}.$$

- 8.28. Рассмотрите задачу о просто опертой балке, показанную на рис. 8.1 и определяемую уравнениями

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Решите эту систему уравнений методом сопряженного градиента, используя те два различных прекоэффициента, которые вы предложите.

- 8.29. Рассмотрите консольную балку из примера 8.1 при сосредоточенной нагрузке, соответствующей степени свободы U_4 . Определяющие уравнения имеют вид

$$\begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Решите эту систему уравнений методом сопряженного градиента, используя те два различных прекоэффициента, которые вы предложите.

- 8.30. Предположите, что каждый из показанных на рис. 8.18 элементов с восемью узлами заменен на трехмерный элемент с 20-ю узлами. Дайте оценку числа элементов матрицы внутри границ рассматриваемой области (тех, которые нужно ввести в память при прямом решении), а также числа фактически отличных от нуля элементов матрицы (тех, которые нужно ввести в память при итеративном решении).

8.4. Решение нелинейных уравнений

В разделах 6.1 и 6.2 мы в результате обсуждения установили, что основные уравнения, подлежащие решению при нелинейном анализе, в момент времени $t + \Delta t$ имеют вид

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = 0, \quad (8.79)$$

где вектор ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}$ позволяет ввести в память приложенные извне узловые нагрузки, а ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}$ — это вектор сил в узловых точках, эквивалентных напряжениям в элементах. Оба вектора из соотношения (8.79) вычисляются с использованием принципа виртуальных перемещений. Учитывая, что силы ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}$ в узловых точках находятся в нелинейной зависимости от смещений в узловых точках, решение уравнения (8.79) необходимо итерировать.

В разделе 6.1 мы представили итерацию Ньютона–Рафсона, при которой в предположении о том, что нагрузки не зависят от деформаций, для $i = 1, 2, 3, \dots$ решаются уравнения

$$\Delta \mathbf{R}^{(i-1)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i-1)}, \quad (8.80)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(i-1)} \Delta \mathbf{U}^{(i)} = \Delta \mathbf{R}^{(i-1)}, \quad (8.81)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)} + \Delta \mathbf{U}^{(i)} \quad (8.82)$$

при

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(0)} = {}^t \mathbf{U}; \quad {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(0)} = {}^t \mathbf{F}. \quad (8.83)$$

Эти уравнения были получены путем линеаризации реакции конечно-элементной системы относительно условий в момент времени $t + \Delta t$, итерация $(i - 1)$. На каждой итерации мы вычисляем согласно (8.80) неуравновешенный вектор нагрузки, который дает приращение смещений, определяемых согласно (8.81), и мы продолжаем начатую итерацию, пока неуравновешенный вектор нагрузки $\Delta \mathbf{R}^{(i-1)}$ или приращения смещений $\Delta \mathbf{U}^{(i)}$ не станут достаточно малыми.

В этом разделе ставится цель — провести более подробное обсуждение вышеизложенной итеративной схемы и некоторых других схем. Важными составными частями всех схем решения, которые предполагается изложить, является расчет вектора ${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i)}$ и касательной матрицы жесткости ${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(i-1)}$, а также решение уравнений в форме (8.81). Надлежащая оценка векторов силы в узловых точках и касательной матрицы жесткости обсуждалась в главе 6, а решение линеаризованных уравнений согласно (8.81) было дано в разделах 8.2 и 8.3; следовательно, теперь нашей единственной, но очень важной заботой является построение таких итеративных схем вида (8.80)–(8.82), которые давали бы хорошие характеристики по сходимости и могли бы эффективно применяться.

Те методы, о которых мы говорим здесь, являются основными и на практике могли бы включаться в некую самоприспосабливающуюся процедуру, которая автоматически выбирает шаги изменения нагрузки, итеративный метод и критерии сходимости в зависимости от вида рассматриваемой задачи и от желательной точности решения.

8.4.1. Схемы Ньютона–Рафсона

Наиболее часто используемыми итеративными схемами для решения нелинейных конечно-элементных уравнений являются итерации Ньютона–Рафсона согласно (8.80)–(8.83) и некоторые методы, тесно связанные с этими итерациями. Принимая во внимание важность метода Ньютона–Рафсона, дадим более формальный вывод соответствующей процедуры.

Требования, касающиеся равновесия конечных элементов, сводятся к нахождению решения уравнений

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}^*) = 0, \quad (8.84)$$

где

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}^*) = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}(\mathbf{U}^*) - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}(\mathbf{U}^*). \quad (8.85)$$

Здесь и в дальнейшем мы обозначаем символом \mathbf{U}^* полный массив, определяющий решение, но отдаем себе отчет в том, что этот вектор может содержать также переменные, отличные от смещений, например, переменные давления и углы поворота (см. разделы 6.4 и 6.5).

Предположим, что в процессе итеративного решения мы определили ${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)}$; тогда разложение в ряд Тейлора дает

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}^*) = \mathbf{f}({}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)}) + \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}} \right] \bigg|_{{}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)}} (\mathbf{U}^* - {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)}) + \text{+ члены высшего порядка.} \quad (8.86)$$

Делая подстановку из (8.85) в (8.86) и используя (8.84), мы получим

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \right] \bigg|_{{}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)}} (\mathbf{U}^* - {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)}) + \text{+ члены высшего порядка} = \\ = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i-1)}, \end{aligned} \quad (8.87)$$

где мы предположили, что нагрузки, приложенные извне, не зависят от деформаций (см. (6.83) и (6.84) относительно нагрузок, зависящих от деформаций).

Пренебрегая членами высшего порядка в уравнении (8.87), мы можем рассчитать приращения смещений

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)} \Delta \mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)}, \quad (8.88)$$

где ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)}$ — это текущая форма касательной матрицы жесткости,

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)} = \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \right] \bigg|_{t+\Delta t \mathbf{U}^{(i-1)}}, \quad (8.89)$$

и улучшенное решение для смещения имеет вид

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)} + \Delta \mathbf{U}^{(i)}. \quad (8.90)$$

Соотношения (8.88) и (8.90) представляют собой решение уравнений (8.79) по Ньютону–Рафсону. Учитывая тот факт, что анализ приращений осуществляется с шагами по времени (или по нагрузке) размера Δt (см. главу 6), то начальные условия в этой итерации имеют вид ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(0)} = {}^t\mathbf{K}$, ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(0)} = {}^t\mathbf{F}$ и ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(0)} = {}^t\mathbf{U}$. Итерация продолжается до тех пор, пока не будут выполнены надлежащие условия сходимости, о которых говорится в разделе 8.4.4.

Характерной особенностью этой итерации является то, что новая касательная матрица жесткости вычисляется на *каждой* итерации, и именно поэтому предлагаемый метод называется также *полным* методом Ньютона–Рафсона. Ниже будут упомянуты методы, в которых текущее значение касательной матрицы жесткости не используется, в силу чего эти методы не являются полными методами Ньютона–Рафсона (а лишь родственными методами).

Рисунок 8.19 иллюстрирует процесс решения, когда он применяется к системе с одной степенью свободы. Характеристики нелинейной реакции таковы, что сходимость достигается быстро. Однако мы можем представить себе более сложную характеристику реакции с такой начальной точкой итерации, при которой исследуемая процедура не сходится (см. упражнение 8.31). Следовательно, представление, данное на рис. 8.19, является несколько упрощенным, так как рассматривается весьма специальный случай — случай хорошо ведущей себя системы с одной *единственной* степенью свободы. В процессе решения для систем со многими степенями кривые реакции будут в общем случае далеко не гладкими, а усложненными.

Итерация по Ньютону–Рафсону демонстрируется на примере решения некоторой простой задачи, о которой говорится ниже.

Пример 8.23: Для системы с одной степенью свободы мы имеем ${}^tU = 1$. Используйте итерацию Ньютона–Рафсона для того, чтобы рассчитать ${}^{t+\Delta t}U$.

$${}^{t+\Delta t}R = 10; \quad {}^{t+\Delta t}F = 4 + 2|({}^{t+\Delta t}U)^{1/2}|.$$

В данном случае, в соответствии с уравнением (8.88), как с определяющим, мы имеем

$$\left(\frac{1}{|({}^{t+\Delta t}U^{(i-1)})^{1/2}|} \right) \Delta U^{(i)} = 6 - 2|\sqrt{{}^{t+\Delta t}U^{(i-1)}}|. \quad (a)$$

Используя соотношение (a) при ${}^{t+\Delta t}U^{(0)} = 1$, мы получаем

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}U^{(1)} &= 5,0000; & {}^{t+\Delta t}U^{(2)} &= 8,4164; \\ {}^{t+\Delta t}U^{(3)} &= 8,9902; & {}^{t+\Delta t}U^{(4)} &= 9,0000, \end{aligned}$$

и сходимость достигается за четыре итерации.

Учитывая тот факт, что итерация Ньютона–Рафсона столь широко применяется в конечно-элементном анализе и на самом деле представляет собой главную схему решения для

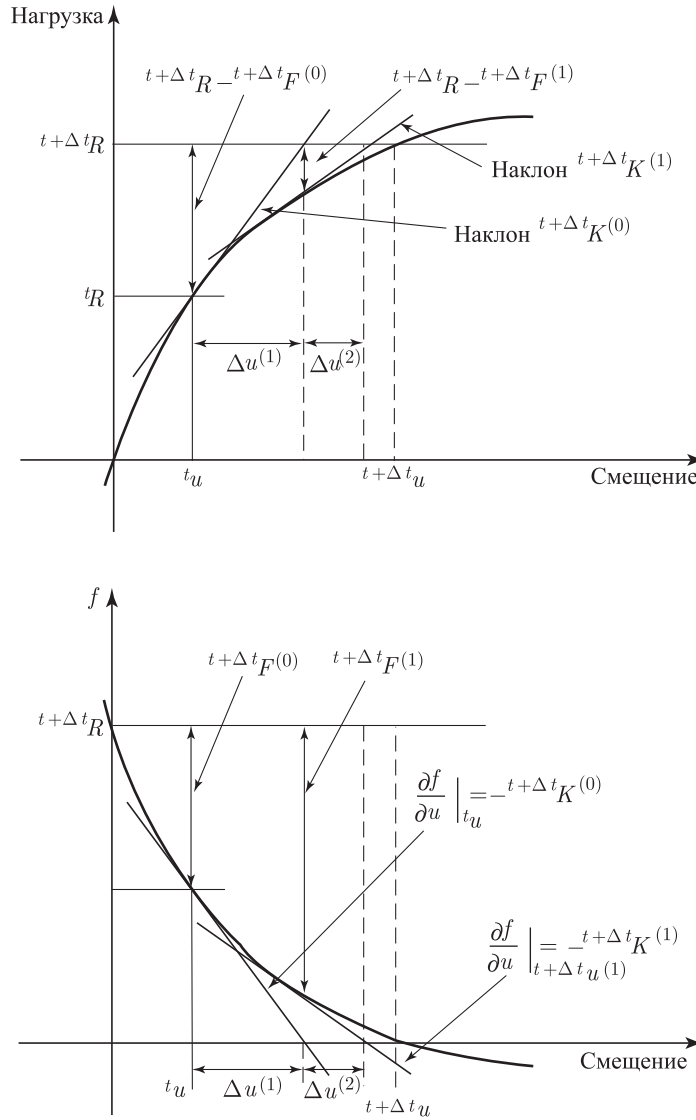


Рис. 8.19. Иллюстрация применения итерации по Ньютону-Рафсону при решении для системы общего вида с одной степенью свободы. Верхняя часть фигуры показывает связь нагрузки со смещением, нижняя часть показывает итерацию для нулевого значения функции \mathbf{f} в (8.84); здесь $\mathbf{f} = t + \Delta t R - t + \Delta t F(u)$

нелинейных конечно-элементных уравнений, то оказывается вполне уместным дать сводку некоторых важнейших свойств этого метода (см., например, работу [Bertsekas 1982]).

Первое свойство

Если касательная матрица жесткости $t + \Delta t \mathbf{K}^{(i-1)}$ не является особенной и если функция \mathbf{f} и ее первые производные по отношению к переменным решения (т.е. элементы касательной матрицы жесткости) остаются непрерывными в окрестности \mathbf{U}^* , а также если $t + \Delta t \mathbf{U}^{(i-1)}$ лежит в той же окрестности, то $t + \Delta t \mathbf{U}^{(i)}$ будет ближе к \mathbf{U}^* , чем $t + \Delta t \mathbf{U}^{(i-1)}$

и последовательность итеративных решений, порождаемых алгоритмом (8.88)–(8.90), сходится к \mathbf{U}^* .

Второе свойство

Если касательная матрица жесткости удовлетворяет также неравенству

$$\|{}^{t+\Delta t}\mathbf{K}|_{\mathbf{U}_1} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}|_{\mathbf{U}_2}\| \leq L\|\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2\| \quad (8.91)$$

для всех \mathbf{U}_1 и \mathbf{U}_2 в окрестности \mathbf{U}^* и если $L > 0$, то сходимость является квадратичной. Это означает, что если ошибка после i -й итерации имеет порядок ϵ , то ошибка после итерации $i + 1$ будет иметь порядок ϵ^2 . Условие, соответствующее неравенству (8.91), называется *непрерывностью по Липшицу*; это более сильное условие, чем простая непрерывность матрицы жесткости, но более слабое, чем условие дифференцируемости матрицы.

Практическое следствие этих свойств состоит в том, что если текущая итерация в процессе решения оказывается достаточно близкой к решению \mathbf{U}^* и если касательная матрица жесткости не испытывает резкого изменения, то мы можем ожидать быстрой (т. е. квадратичной) сходимости. Разумеется, здесь имеет место предположение о том, что при итерации используется точное представление касательной матрицы жесткости; иначе говоря, должно выполняться соотношение (8.89), а это означает, что матрица ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)}$ должна вычисляться в согласовании с вычислением ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)}$ (см. главу 6 и, в особенности, разделы 6.3.1 и 6.6.3). С другой стороны, если текущая итерация решения не оказывается достаточно близкой к \mathbf{U}^* и/или если используемая матрица жесткости не является точным представлением касательной матрицы и/или если она испытывает резкое изменение, то процесс итераций может расходиться.

В некоторой эффективной конечно-элементной программе будет, если это возможно, использоваться точное представление касательной матрицы жесткости и, следовательно, наиболее важная процедура, нужная для достижения сходимости (если встречаются трудности, касающиеся сходимости), состоит в уменьшении величины шага изменения нагрузок.

Если рассматривать итерацию Ньютона–Рафсона, то следует признать, что в общем случае основная доля стоимости вычислений в расчете на одну итерацию приходится на вычисление касательной матрицы жесткости и ее факторизацию. Учитывая, что при рассмотрении систем большого порядка эти вычисления могут оказаться весьма дорогостоящими, то эффективность может повыситься, если применить некую модификацию полного алгоритма Ньютона–Рафсона.

Одна из таких модификаций состоит в том, чтобы в соотношении (8.88) использовать начальную матрицу жесткости ${}^0\mathbf{K}$ и, таким образом, действовать с уравнениями:

$${}^0\mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)} \quad (8.92)$$

при начальных условиях ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(0)} = {}^t\mathbf{F}$, ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(0)} = {}^t\mathbf{U}$. В этом случае в факторизации нуждается только матрица ${}^0\mathbf{K}$ и, таким образом, мы избегаем необходимости повторного вычисления и многократной факторизации матрицы коэффициентов в соотношении (8.88). Этот «метод начального напряжения» соответствует линеаризации реакции относительно начальной конфигурации конечно-элементной системы и может сходиться очень медленно или даже расходиться.

При *модифицированной итерации Ньютона–Рафсона* применяемый подход оказывается чем-то средним между полной итерацией Ньютона–Рафсона и методом начального напряжения. В этом методе мы используем

$$\tau\mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)} \quad (8.93)$$

с начальными условиями ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(0)} = {}^t\mathbf{F}$, ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(0)} = {}^t\mathbf{U}$, а τ соответствует одной из принятых равновесных конфигураций в моменты времени 0, Δt , $2\Delta t$, ..., или t (см. пример 6.4). Модифицированная итерация Ньютона–Рафсона связана с меньшим числом поправок жесткости, чем полная итерация Ньютона–Рафсона, и основывает видоизменение матрицы жесткости на принятой равновесной конфигурации. Выбор шагов по времени в условиях, когда матрица жесткости должна быть видоизменена, зависит от степени нелинейности, отражаемой в реакции системы; иначе говоря, чем более нелинейной является реакция, тем чаще должно проводиться видоизменение.

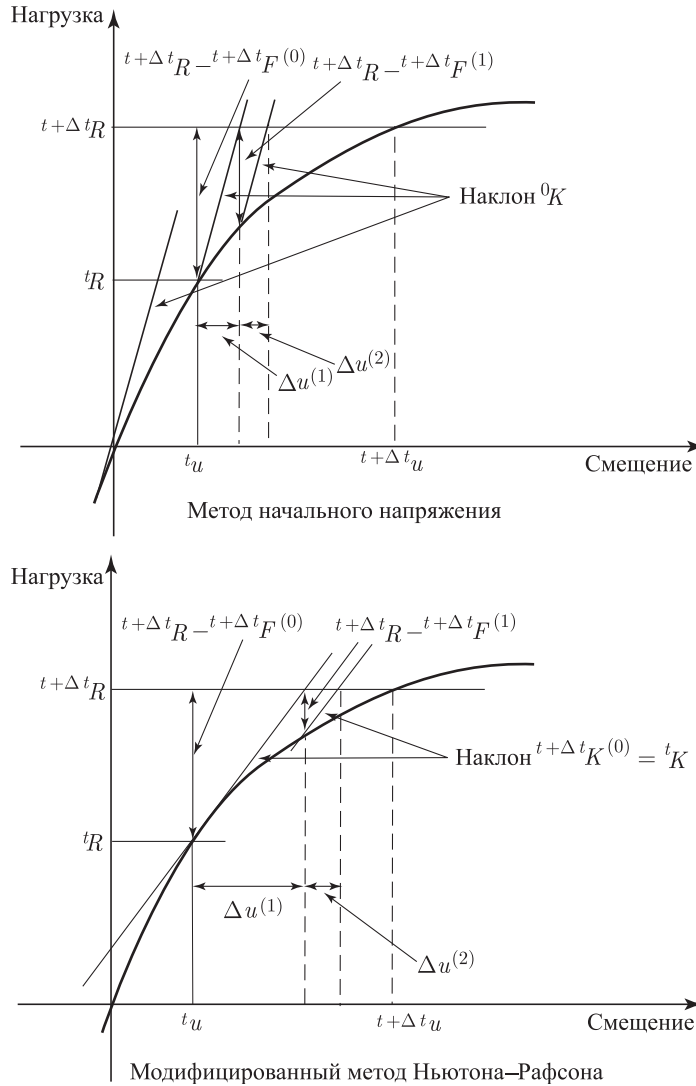


Рис. 8.20. Иллюстрация применения методов Ньютона-Рафсона — с начальным напряжением и модифицированного. Рассматривается задача из рис. 8.19

Рисунок 8.20 иллюстрирует характерные результаты применения метода начального напряжения и модифицированного метода Ньютона-Рафсона для системы с одной степенью свободы, уже рассмотренной на рис. 8.19.

При очень большом диапазоне изменения свойств системы и тех нелинейностей, которые могут встретиться при инженерном анализе, мы находим, что эффективность вышеуказанных подходов к решению зависит от того, какая именно конкретная задача рассматривается. Наиболее мощная процедура, позволяющая достичь сходимости, — это полная итерация Ньютона-Рафсона согласно соотношениям (8.88)–(8.90), однако если может быть применен метод начального напряжения или модифицированный метод Ньютона-Рафсона, то стоимость получения решения может быть существенно уменьшена. Следовательно, на практике эти варианты построения решения могут также оказаться

очень ценными, и введение автоматической процедуры, которая самоприспосабливающимся образом выбирает некую эффективную технику решения, является чрезвычайно привлекательным.

8.4.2. Метод БФГШ

В качестве альтернативы методу итерации Ньютона–Рафсона для проведения итераций на нелинейных системах уравнений был разработан класс методов, известный как методы матричной модернизации или квази-ньютоновские методы (см. работу [Dennis, 1976]). Эти методы включают в себя модернизацию матрицы коэффициентов (или, скорее, обратной ей матрицы) с целью обеспечения текущей аппроксимации этой матрицы при итерации от $(i-1)$ до (i) . Иначе говоря, если определить приращение смещения

$$\delta^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i)} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)} \quad (8.94)$$

и приращения неуравновешенных нагрузок, то согласно (8.80)

$$\gamma^{(i)} = \Delta \mathbf{R}^{(i-1)} - \Delta \mathbf{R}^{(i)} \quad (8.95)$$

модернизированная матрица ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i)}$ должна удовлетворять квази-ньютоновскому уравнению

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i)} \delta^{(i)} = \gamma^{(i)}. \quad (8.96)$$

Эти квази-ньютоновские методы обеспечивают компромисс между полным преобразованием матрицы жесткости, осуществляемым при применении полного метода Ньютона–Рафсона, и использованием матрицы жесткости из предыдущей конфигурации, как это делается при применении модифицированного метода Ньютона–Рафсона. Из числа существующих квази-ньютоновских методов наиболее эффективным представляется метод БФГШ (авторы Бройден–Флетчер–Гольдфарб–Шенно).

При применении метода БФГШ для вычисления ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i)}$ и ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i)}$, где ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(0)} = {}^t\mathbf{K}$, в рамках итерации (i) используется следующая процедура (см. работы [Matthies, Strang, 1979], а также [Bathe, Cimento, 1980]).

Этап 1: Рассчитать приращение вектора смещения:

$$\Delta \bar{\mathbf{U}} = ({}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{-1})^{(i-1)} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)}). \quad (8.97)$$

Этот вектор смещения определяет «направление» для фактического приращения смещения.

Этап 2: Провести линейный поиск в направлении $\Delta \bar{\mathbf{U}}$, чтобы удовлетворить условию «равновесия» в этом направлении. При этом линейном поиске мы вычисляем вектор смещения

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)} + \beta \Delta \bar{\mathbf{U}}, \quad (8.98)$$

где β — скалярный множитель, и рассчитываем неуравновешенные нагрузки, соответствующие этим смещениями $({}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i)})$. Параметр β варьируется до тех пор, пока составляющая неуравновешенных нагрузок в направлении $\Delta \bar{\mathbf{U}}$, как она определена посредством внутреннего произведения $\Delta \bar{\mathbf{U}}^T ({}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i)})$, не станет малой. Это условие оказывается выполненным тогда, когда при пределе сходимости STOL удовлетворяется следующее условие:

$$\Delta \bar{\mathbf{U}}^T ({}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i)}) \leq \text{STOL} \Delta \bar{\mathbf{U}}^T ({}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)}). \quad (8.99)$$

Окончательное значение β , при котором удовлетворяется условие (8.99), определяет ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i)}$ в (8.98). Теперь мы можем вычислить $\delta^{(i)}$ и $\gamma^{(i)}$, используя формулы (8.94) и (8.95), и перейти к расчету модификации матрицы, удовлетворяющей (8.96).

Этап 3: Рассчитать поправку для матрицы коэффициентов. В методе БФГШ модернизированная матрица может быть представлена в форме произведения

$$({}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{-1})^{(i)} = \mathbf{A}^{(i)T} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{-1})^{(i-1)} \mathbf{A}^{(i)}, \quad (8.100)$$

где матрица $\mathbf{A}^{(i)}$ — это матрица $n \times n$, имеющая простую форму

$$\mathbf{A}^{(i)} = \mathbf{I} + \mathbf{v}^{(i)} \mathbf{w}^{(i)T}. \quad (8.101)$$

Векторы $\mathbf{v}^{(i)}$ и $\mathbf{w}^{(i)}$ вычисляются по данным об известных силах в узловых точках и о смещениях с помощью соотношений

$$\mathbf{v}^{(i)} = - \left(\frac{\boldsymbol{\delta}^{(i)T} \boldsymbol{\gamma}^{(i)}}{\boldsymbol{\delta}^{(i)T} {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)} \boldsymbol{\delta}^{(i)}} \right)^{1/2} {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)} \boldsymbol{\delta}^{(i)} - \boldsymbol{\gamma}^{(i)} \quad (8.102)$$

и

$$\mathbf{w}^{(i)} = \frac{\boldsymbol{\delta}^{(i)}}{\boldsymbol{\delta}^{(i)T} \boldsymbol{\gamma}^{(i)}}. \quad (8.103)$$

Вектор ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)} \boldsymbol{\delta}^{(i)}$ из соотношения (8.102) равен $\beta({}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)})$ и уже был рассчитан.

С учетом того, что произведение, определенное согласно (8.100), является положительно определенным и симметричным, то во избежание численно опасных шагов по модернизации вычисляется кондиционное число $c^{(i)}$ модернизирующей матрицы $\mathbf{A}^{(i)}$:

$$c^{(i)} = \left(\frac{\boldsymbol{\delta}^{(i)T} \boldsymbol{\gamma}^{(i)}}{\boldsymbol{\delta}^{(i)T} {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)} \boldsymbol{\delta}^{(i)}} \right)^{1/2}. \quad (8.104)$$

Затем это кондиционное число сравнивается с некоторым, предварительно заданным пределом в форме большого числа и модернизация не осуществляется, если кондиционное число оказывается больше этого предела.

Если говорить о фактически проводимых расчетах, то следует принять во внимание, что при использовании указанных выше модификаций матрицы схему расчета направления поиска согласно (8.97) можно переписать в виде

$$\Delta \bar{\mathbf{U}} = (\mathbf{I} + \mathbf{w}^{(i-1)} \mathbf{v}^{(i-1)T}) \dots (\mathbf{I} + \mathbf{w}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)T})^T \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{I} + \mathbf{v}^{(1)} \mathbf{w}^{(1)T}) \dots \dots (\mathbf{I} + \mathbf{v}^{(i-1)} \mathbf{w}^{(i-1)T}) ({}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)}). \quad (8.105)$$

Следовательно, поиск направления может быть рассчитан без вычисления модернизированных матриц в явной форме или без выполнения дополнительных и дорогостоящих матричных факторизаций, которые нужно осуществлять при применении полного метода Ньютона–Рафсона.

Как уже указывалось ранее, линейный поиск является неотъемлемой частью метода решения. Разумеется, такие разновидности линейного поиска, какие реализуются согласно (8.98) и (8.99), могут быть использованы также и в методах Ньютона–Рафсона, представленных в разделе 8.4.1. Если линейный поиск осуществлен в рамках итерации (i) , то стоимость выполнения этой итерации возрастает, однако для достижения сходимости может понадобиться меньшее число итераций. Кроме того, линейный поиск может предотвратить расхождение итераций, и на практике эта повышенная мощь является той главной причиной, в силу которой линейный поиск может, в общем случае, оказаться эффективным.

Покажем проведение итерации БФГШ на следующем простом примере.

Пример 8.24: Используйте итеративный метод БФГШ, чтобы получить решение для ${}^{t+\Delta t}U$ применительно к системе, рассмотренной в примере 8.23. Не включайте в решение линейные поиски.

При учете того, что данная система имеет одну степень свободы, решение для ${}^{t+\Delta t}U$ могло бы быть получено с использованием только линейных поисков, т. е. с помощью соотношения (8.99), при условии того, что STOL представляет собой достаточно плотный предел сходимости. Однако, желая в данном примере дать более четкое представление об основных этапах метода БФГШ [т. е. о применении соотношений (8.94)–(8.96)], мы не включаем в схему итеративного решения линейные поиски.

При анализе этого рода соотношение (8.97) приводится к виду

$$\Delta \bar{\mathbf{U}} = ({}^{t+\Delta t}K^{-1})^{(i-1)} (6 - 2|\sqrt{{}^{t+\Delta t}U^{(i-1)}}|),$$

причем $({}^{t+\Delta t}K^{-1})^{(0)} = 1$, ${}^{t+\Delta t}U^{(0)} = 1$. Полагая также $\beta = 1,0$, мы получаем следующие значения:

i	$t+\Delta t U^{(i-1)}$	$\Delta \bar{U} = \delta^{(i)}$	$t+\Delta t U^{(i)}$	$\gamma^{(i)}$	$(t+\Delta t K^{-1})^{(i)}$
1	1,000	4,000	5,000	2,472	1,618
2	5,000	2,472	7,472	0,995	2,485
3	7,472	1,324	8,796	0,465	2,850
4	8,796	0,194	8,991	0,065	2,982
5	8,991	0,009	9,000	0,003	2,999

и сходимость достигается после пяти итераций.

8.4.3. Методы нагрузка–смещение–принуждение

Зачастую важным требованием нелинейного анализа является расчет нагрузки разрушения для конструкции. Рисунок 8.21 дает схематическое представление о той реакции конструкционной модели, которую мы хотели бы установить. При очень малых нагрузках реакция в координатах нагрузка–смещение является линейной. Затем, по мере увеличения нагрузки реакция конструкции становится все более нелинейной, и в точке A достигается нагрузка разрушения. Реакция конструкции за точкой A называется реакцией постразрушения или постпрогибной реакцией. Как мы отмечаем на рис. 8.21, в этом режиме при увеличении смещения нагрузка вначале уменьшается, а затем снова увеличивается. Конечно же, реакция, описанная на рис. 8.21, представляет собой упрощенное и весьма общее представление истинного процесса, так как при анализе системы со многими степенями свободы необходимо представлять себе многомерную «поверхность реакции», однако рис. 8.21 демонстрирует сущность наших требований.



Рис. 8.21. Реакция с разрушением для конструкционной модели

Чтобы рассчитать реакцию, показанную на рис. 8.21, вначале можно применить сравнительно большие приращения нагрузки, однако по мере приближения к точке разрушения модельной конструкции приращения нагрузки должны становиться все меньше и, кроме того, возникает трудность в связи с прохождением точки разрушения. В этой точке матрица жесткости имеет особенность (угол наклона кривой реакции нагрузка–смещение равен нулю), а за этой точкой для расчета последующей реакции должна быть применена специальная процедура решения, допускающая уменьшение нагрузки и увеличение смещения.

Чтобы построить решение для реакции, схематически показанной на рис. 8.21, можно использовать метод нагрузка–смещение–принуждение, как в своей сущности предложен в работе [Riks, 1979]. Основная идея методов такого рода состоит в том, чтобы ввести некий множитель нагрузки, который увеличивает или уменьшает интенсивность прилагаемых нагрузок так, чтобы получить быструю сходимость на каждом шагу по нагрузке и чтобы иметь возможность пойти точку разрушения и рассчитать реакцию постразрушения.

Были предложены различные эффективные схемы, некоторые численные подробности которых могут оказаться важными (см. работы [Crisfield, 1981], [Ramm, 1981], а также [Bathe, Dvorkin 1983]). Однако, в последующем тексте мы представим лишь общий подход,

соответствующий этим методам и опустим некоторые подробности, которые можно найти в цитируемых работах.

Основное допущение анализа состоит в том, что вектор нагрузки изменяется пропорционально в процессе расчета реакции. Определяющие конечно-элементные уравнения в момент времени $t + \Delta t$ имеют вид

$${}^{t+\Delta t}\lambda \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = 0, \quad (8.106)$$

где ${}^{t+\Delta t}\lambda$ представляет собой (скалярный) множитель нагрузки, неизвестный и подлежащий определению, а \mathbf{R} — это вектор нагрузки для n степеней свободы конечно-элементной модели. Этот вектор может содержать любую нагрузку на данную конструкцию, но остается постоянным в процессе расчета реакции. Вектор ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}$ — это наш обычный вектор для n сил в узловых точках, соответствующих напряжениям в элементе в момент времени $t + \Delta t$ (см. (8.79)). Значение множителя нагрузки может возрастать или уменьшаться, и приращение в расчете на один шаг должно, вообще говоря, также изменяться в зависимости от характеристик реакции конструкции.

Если учесть, что (8.106) представляет n уравнений с $n + 1$ неизвестными, то нам необходимо иметь дополнительное уравнение для определения множителя нагрузки. Если для решения уравнений (8.106) применить один из ранее описанных методов, то мы получим

$${}^T\mathbf{K} \Delta \mathbf{U}^{(i)} = ({}^{t+\Delta t}\lambda^{(i-1)} + \Delta \lambda^{(i)})\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)}, \quad (8.107)$$

где матрица коэффициентов ${}^T\mathbf{K}$ соответствует схемам решения, обсуждавшимся в предыдущих разделах.

Неизвестные в n уравнениях (8.107) — это приращения вектора смещения ¹⁾ $\Delta \mathbf{U}^{(i)}$ и приращение множителя нагрузки $\Delta \lambda^{(i)}$. Дополнительное уравнение, требуемое для построения решения, — это уравнение принуждения, связывающее $\Delta \lambda^{(i)}$ и $\Delta \mathbf{U}^{(i)}$ и имеющее форму

$$f(\Delta \lambda^{(i)}, \Delta \mathbf{U}^{(i)}) = 0. \quad (8.108)$$

В рамках одного шага по нагрузке дадим определения

$$\mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i)} - {}^t\mathbf{U} \quad (8.109)$$

и

$$\lambda^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\lambda^{(i)} - {}^t\lambda. \quad (8.110)$$

Следовательно, величина $\mathbf{U}^{(i)}$ представляет собой *полное* приращение смещения в пределах одного шага по нагрузке (для итерации (i)), а $\lambda^{(i)}$ представляет собой соответствующее полное приращение множителя нагрузки. Эффективное уравнение принуждения формулируется с помощью постоянного сферического критерия длины дуги (см. работы [Crisfield, 1981] и [Ramm, 1981]),

$$(\lambda^{(i)})^2 + \frac{\mathbf{U}^{(i)T} \mathbf{U}^{(i)}}{\beta} = (\Delta l)^2, \quad (8.111)$$

где Δl — это длина дуги в расчете на один шаг, а β — нормализующий множитель (чтобы сделать члены уравнения безразмерными). Рисунок 8.22 а иллюстрирует смысл этого критерия. На практике величина Δl выбирается на основе истории итераций на предшествующих шагах и уменьшается на текущем шаге, если встречаются трудности, касающиеся сходимости. В типичных условиях Δl должна быть велика тогда, когда реакция существенно нелинейна.

Другое эффективное уравнение принуждения (см. работу [Bathe, Dvorkin 1983]) связано со схемой постоянного приращения внешней работы, задаваемого соотношениями

$$\left({}^t\lambda + \frac{1}{2} \Delta \lambda^{(i)} \right) \mathbf{R}^T \Delta \mathbf{U}^{(1)} = W \quad (8.112)$$

и

¹⁾ В общем случае этот вектор содержит также, конечно, и другие переменные, — такие, как углы поворота и давления, а \mathbf{R} и ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)}$ содержат соответствующие элементы.

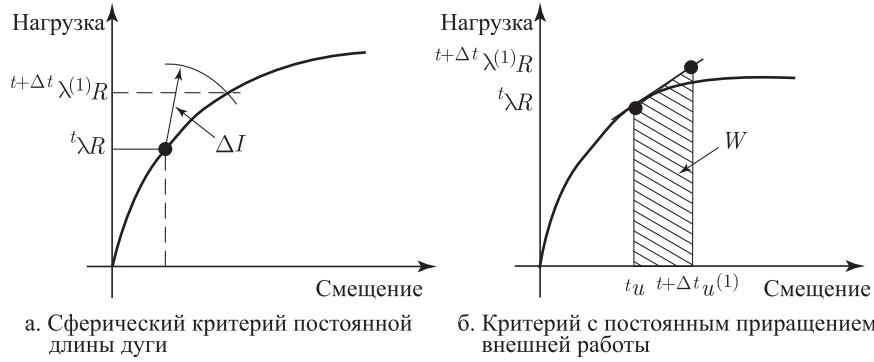


Рис. 8.22. Критерий связи нагрузка–смещение–принуждение (упрощение для случая одной степени свободы)

$$\left(t+\Delta t \lambda^{(i-1)} + \frac{1}{2} \Delta \lambda^{(i)} \right) \mathbf{R}^T \Delta \mathbf{U}^{(i)} = 0, \quad i = 2, 3, \dots,$$

где W выбирается, исходя из истории итераций на предыдущих шагах по приращениям. Рисунок 8.22 б иллюстрирует это уравнение принуждения. Применение этой схемы может оказаться особенно эффективным вблизи точек разрушения.

Чтобы решить определяющие уравнения, мы можем переписать соотношение (8.107), получая

$$\tau \mathbf{K} \Delta \bar{\mathbf{U}}^{(i)} = t+\Delta t \lambda^{(i-1)} \mathbf{R} - t+\Delta t \mathbf{F}^{(i-1)}, \quad (8.113)$$

$$\tau \mathbf{K} \Delta \bar{\mathbf{U}} = \mathbf{R}, \quad (8.114)$$

и, следовательно,

$$\Delta \mathbf{U}^{(i)} = \Delta \bar{\mathbf{U}}^{(i)} + \Delta \lambda^{(i)} \Delta \bar{\bar{\mathbf{U}}}. \quad (8.115)$$

После этого, применяя постоянный сферический критерий длины дуги (8.111), используем выражение

$$\lambda^{(i)} = \lambda^{(i-1)} + \Delta \lambda^{(i)} \quad (8.116)$$

и

$$\mathbf{U}^{(i)} = \mathbf{U}^{(i-1)} + \Delta \bar{\mathbf{U}}^{(i)} + \Delta \lambda^{(i)} \Delta \bar{\bar{\mathbf{U}}}. \quad (8.117)$$

Подстановка выражений из (8.116) и (8.117) в уравнение (8.111) дает квадратное уравнение для $\Delta \lambda^{(i)}$. Мы выбираем надлежащее значение, чтобы продолжить построение решения (см. упражнение 8.35).

Если использовать постоянное приращение для критерия внешней работы, то $\Delta \lambda^{(1)}$ вычисляется напрямую с помощью (8.112), а затем значения $\Delta \lambda^{(i)}$ для $i = 2, 3, \dots$ получаются из (8.112) в виде

$$\Delta \lambda^{(i)} = - \frac{\mathbf{R}^T \Delta \bar{\mathbf{U}}^{(i)}}{\mathbf{R}^T \Delta \bar{\bar{\mathbf{U}}}}. \quad (8.118)$$

Соотношение (8.112) позволяет также получить решение $t+\Delta t \lambda^{(i)} = -t+\Delta t \lambda^{(i-1)}$, однако это решение соответствует обращению нагрузки, которое мы не рассматриваем.

Полный алгоритм построения решения, основанный на вышеописанной процедуре нагрузка–смещение–принуждение, должен, разумеется, содержать также и специальную схему для запуска решения с приращениями и иметь процедуры для самоприспосабливающегося выбора ΔI и/или W . Этот алгоритм должен также прекращать итерирование, когда возникает угроза расходимости, и затем запускаться вновь с новыми итеративными параметрами. Полная совокупность методов решения с этими составными частями представляет большую ценность, и такие методы широко применяются при анализе реакции конструкций, сопровождаемой разрушением.

8.4.4. Критерии сходимости

Если мы стремимся к тому, чтобы стратегия решения с использованием приращений, основанного на методах итераций, оказалась эффективной, то необходимо воспользоваться реалистичными критериями для завершения итерации. В конце каждой итерации полученное решение должно быть проверено, чтобы видеть, сошлось ли оно в пределах заданного допуска, или же итерации расходятся. Если допуски на сходимость являются слишком свободными, то результаты получаются неточными, если же они будут слишком плотными, то большой объем вычислительной работы будет растрочен на достижение ненужной точности. Подобным же образом, неэффективная проверка расходимости может остановить итерацию в условиях, когда решение в действительности не расходится, или же будет принуждать итерацию к поиску недостижимого решения. В данном разделе мы ставим своей целью обсудить вкратце некоторые критерии сходимости.

Принимая во внимание, что мы стремимся определить конфигурацию смещений, соответствующую моменту времени $t + \Delta t$, является вполне естественным потребовать, чтобы в конце каждой итерации смещения не выходили за пределы некоторого допуска по отношению к истинному решению для смещений. Следовательно, реалистичный критерий сходимости имеет вид

$$\frac{\|\Delta \mathbf{U}^{(i)}\|_2}{\|{}^{t+\Delta t}\mathbf{U}\|_2} \leq \epsilon_D, \quad (8.119)$$

где ϵ_D — это допуск на сходимость смещений. Вектор ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$ не известен заранее и его следует аппроксимировать. Зачастую оказывается уместным ввести в соотношение (8.119) последнее из рассчитанных значений ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i)}$ в качестве аппроксимации для ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$ и задавать достаточно малое значение ϵ_D . Однако в некоторых случаях анализа истинное решение может все же быть далеким от полученного значения, когда сходимость измеряется с помощью (8.119) при ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i)}$. Это имеет место, когда вычисляемые смещения в пределах каждой итерации изменяются лишь незначительно, но продолжают изменяться на протяжении многих итераций. Такая ситуация может возникнуть, например, в упругопластическом анализе при таких условиях нагрузки, когда используется модифицированная итерация Ньютона–Рафсона.

Второй критерий сходимости получается путем измерения вектора неуравновешенной нагрузки. Мы можем, например, потребовать, чтобы норма вектора неуравновешенной нагрузки оказалась в пределах заданного допуска ϵ_F для первоначального приращения нагрузки, то есть

$$\|{}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i)}\|_2 \leq \epsilon_F \|{}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F}\|_2. \quad (8.120)$$

Трудность, связанная с этим критерием, состоит в том, что решение для смещения не входит в критерий завершения. В качестве иллюстрации этой трудности рассмотрим упругопластическую ферму с очень малым модулем затвердевания деформаций, входящим в формулы для пластической области. В этом случае неуравновешенные нагрузки могут оказаться очень малыми, тогда как значения смещений могут быть еще весьма неточными. Следовательно, может оказаться, что критерии сходимости (8.119) и (8.120) должны использоваться с очень малыми значениями ϵ_D и ϵ_F . Кроме того, эти выражения должны быть надлежащим образом видоизменены, если измеряются величины, выражаемые в различных единицах (такие, как смещения, углы поворота, давления, и так далее).

Чтобы обеспечить некоторое указание на ту ситуацию, когда и смещения, и силы оказываются близкими к своим равновесным значениям, может оказаться полезным воспользоваться третьим критерием сходимости, в котором приращение внутренней энергии на протяжении каждой итерации (т.е. объем работы, производимой неуравновешенными нагрузками на приращениях смещений) сравнивается с начальным приращением внутренней энергии. Предполагается, что сходимость достигается тогда, когда при заданном допуске ϵ_E для энергии мы имеем

$$\Delta \mathbf{U}^{(i)T} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)}) \leq \epsilon_E (\Delta \mathbf{U}^{(i)T} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F})). \quad (8.121)$$

Учитывая, что этот критерий сходимости содержит как смещения, так и силы, является на практике привлекательным масштабом измерения. Некоторые практические

сведения об этих масштабах оценки сходимости даются в работе [Bathe, Cimento, 1980]. Важно отметить, что при некоторых видах решения допуски на сходимость ϵ_D , ϵ_F и ϵ_E придется, возможно, сделать очень малыми для того, чтобы добиться хорошей точности решения. В общем случае применение полного метода Ньютона–Рафсона для построения решения с приращениями приводит к точности решения, более высокой, чем с применением модифицированного метода Ньютона–Рафсона. Это объясняется тем, что если сходимость имеет место, то ошибка решения при последних итерациях полного метода Ньютона–Рафсона очень быстро уменьшается (рассмотрите, например, упражнения 8.40 и 9.31).

8.4.5. Упражнения

8.31. Рассмотрите показанную на схеме систему с одной степенью свободы.

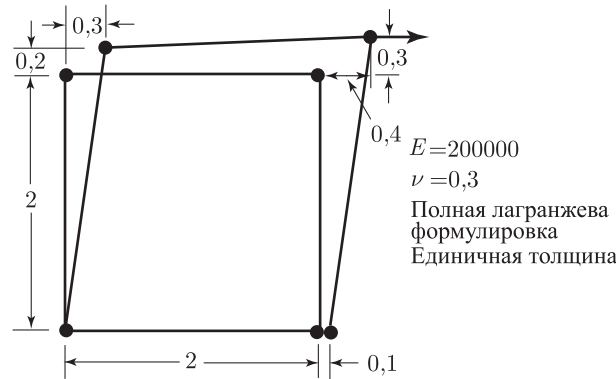
- Используйте полный метод итераций по Ньютону–Рафсону, метод начального напряжения и метод БФГШ для расчета реакции системы.
- Определите то значение постоянной c , при котором полный метод Ньютона–Рафсона не будет сходиться.



$$F = u + cu^3, \quad = 0,1 \text{ — сила в пружине.}$$

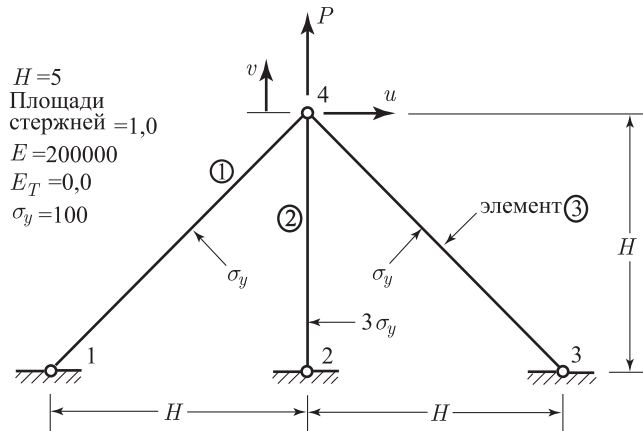
- Рассмотрите систему с одной степенью свободы из упражнения 8.31, но при $F = \sin(u/L)$, $L = 1,0$ и $R = 0,5$. Постройте решение, как в упражнении 8.31 (а).
- Рассмотрите систему из упражнения 8.31 и постройте решение для реакции, пользуясь *только* линейным поиском (следовательно, не осуществляйте никаких итераций ньютоновского типа).
- Рассмотрите показанный здесь элемент с плоскими напряжениями, имеющий четыре узла.

- Используйте компьютерную программу для вычисления коэффициента жесткости, соответствующего смещению u_1 (*подсказка*: используйте соотношение (8.89) в конечно-разностной форме).
- Вычислите также этот коэффициент, используя формулировку, данную в главе 6.

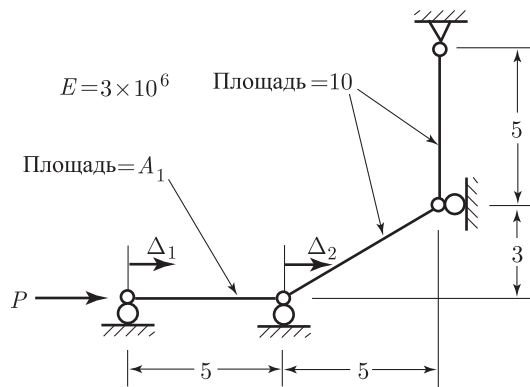


- Выведите квадратное уравнение для $\Delta\lambda^{(i)}$, используемое в постоянном сферическом критерии с длиной дуги, и рассчитайте корни этого уравнения. Обсудите полученные решения и определите, какое из решений вы использовали бы для практического воплощения.

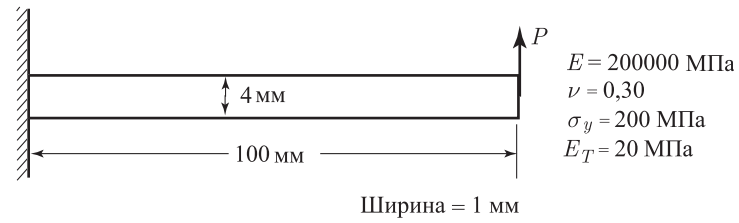
- 8.36. Используйте компьютерную программу, чтобы получить решение для реакции разрушения и пост-прогибной реакции простой арочной конструкции, рассмотренной в примере 6.3.
- 8.37. Используйте компьютерную программу, чтобы получить решение для реакции разрушения показанной здесь фермы с тремя элементами. Сравните ваши результаты с аналитическим решением (*подсказка*: Используйте модель для больших смещений и метод нагрузка–смещение–принуждение. Вы можете также обратиться к статье [Hodge, Bathe, Dvorkin, 1986]).



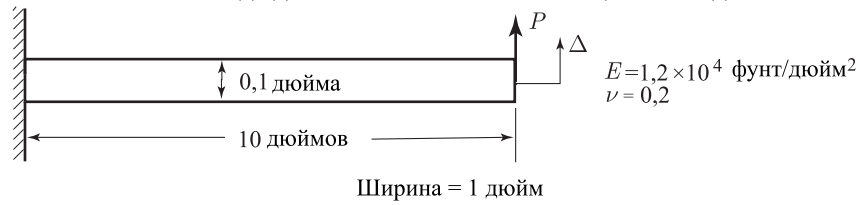
- 8.38. Используйте компьютерную программу, чтобы рассчитать реакцию разрушения и реакцию пост-разрушения для показанной здесь конструкции. В соответствии с вашим выбором рассмотрите различные площади A_1 .



- 8.39. Используйте компьютерную программу, чтобы рассчитать реакцию показанной здесь консоли с плоскими напряжениями. Воспользуйтесь условием уступки Мизеса с изотропным затвердеванием и увеличивайте нагрузку P до тех пор, пока не наступит полное разрушение конструкции. Сравните коэффициенты эффективности решения при использовании полного метода Ньютона–Рафсона, модифицированного метода Ньютона–Рафсона и метода БФГШ, а также используйте процедуру нагрузка–смещение–принуждение.



- 8.40. Используйте компьютерную программу, чтобы получить решение для реакции с большими смещениями применительно к консольной балке, показанной ниже. Увеличивайте P вплоть до достижения отклонения конца $\Delta \doteq 10$ дюймов.



Сравните коэффициенты эффективности решения при использовании полного и модифицированного методов Ньютона–Рафсона, с применением линейных поисков и без этого, а также метода БФГШ.

Глава 9

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ В ДИНАМИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ

9.1. Введение

В разделе 4.2.1 мы вывели уравнения равновесия, определяющие линейную динамическую реакцию системы конечных элементов

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{R}, \quad (9.1)$$

где \mathbf{M} , \mathbf{C} и \mathbf{K} — матрицы массы, демпфирования и жесткости; \mathbf{R} — вектор нагрузок, приложенных извне; а \mathbf{U} , $\dot{\mathbf{U}}$ и $\ddot{\mathbf{U}}$ — это векторы смещения, скорости и ускорения для комплекса конечных элементов. Следует напомнить, что уравнение (9.1) было выведено, исходя из соображений статики в момент времени t ; иначе говоря, уравнение (9.1) может быть записано в виде

$$\mathbf{F}_I(t) + \mathbf{F}_D(t) + \mathbf{F}_E(t) = \mathbf{R}(t), \quad (9.2)$$

где $\mathbf{F}_I(t)$ — это силы инерции, $\mathbf{F}_I(t) = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}$, $\mathbf{F}_D(t)$ — демпфирующие силы, $\mathbf{F}_D(t) = \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}$, а $\mathbf{F}_E(t)$ — упругие силы, $\mathbf{F}_E(t) = \mathbf{K}\mathbf{U}$; все эти силы зависят от времени. Поэтому при динамическом анализе рассматривается, в принципе, статическое равновесие в момент времени t , включающее в себя эффект зависящих от ускорения сил инерции и зависящих от скорости демпфирующих сил. И наоборот, при статическом анализе рассматриваются уравнения движения (9.1) при пренебрежении эффектами инерции и демпфирования.

Выбор формы анализа — статический или динамический (т. е. со включением в анализ сил, зависящих от скорости и от ускорения, или при пренебрежении ими), — обычно определяется инженерными соображениями, а целью является уменьшение усилий, затрачиваемых на анализ. Однако следует отдавать себе отчет в том, что допущения статического анализа должны оправдываться, так как в противном случае результаты этого анализа станут бессмысленными. Так, при нелинейном анализе допущение о возможности пренебрежения инерционными и демпфирующими силами может оказаться столь суровым, что построить решение будет трудно или невозможно.

Математически, соотношение (9.1) представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка и, в принципе, решение этих уравнений может быть получено с помощью стандартных процедур для решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (см., например, книгу [Collatz 1966]). Однако процедуры, предлагаемые для решения систем дифференциальных уравнений общего вида, могут стать весьма дорогостоящими, если порядок соответствующих матриц велик. Этот недостаток может быть смягчен, если воспользоваться преимуществом, связанным со специальными характеристиками матриц коэффициентов \mathbf{K} , \mathbf{C} и \mathbf{M} . Поэтому в рамках практического конечно-элементного анализа мы интересуемся главным образом немногими эффективными методами, и в последующих разделах мы сосредоточим свое внимание на представлении именно таких методов. Те процедуры, которые мы будем рассматривать, разделяются на две группы методов решения: методы прямого интегрирования и методы суперпозиции. Несмотря на то, что эти две разновидности методов могут казаться на первый взгляд совершенно различными, они, фактически, тесно связаны между собой, и выбор того или иного метода определяется только их вычислительной эффективностью.

В дальнейшем мы начнем с рассмотрения (см. разделы 9.2–9.4) решения линейных уравнений равновесия (9.1), а затем обсудим решение нелинейных уравнений для систем

конечных элементов, идеализирующих поведение конструкций и твердых тел (см. раздел 9.5). Наконец, в разделе 9.6 мы показываем, каким образом основные предложенные концепции оказываются непосредственно применимыми к анализу теплопередачи и течения жидкости.

9.2. Методы прямого интегрирования

При прямом интегрировании уравнения (9.1) интегрируются с использованием численной пошаговой процедуры, причем термин «прямое» означает, что до численного интегрирования не проводятся никакие преобразования уравнений к другому виду. По существу, прямое численное интегрирование основывается на двух идеях. Во-первых, вместо того, чтобы пытаться удовлетворить уравнениям (9.1) в любой момент времени t , ставится цель удовлетворять им только на дискретных интервалах времени величиной Δt . Это означает, что равновесие (статическое), включающее эффекты инерции и демпфирующих сил, определяется, по существу, в дискретных временных точках внутри интервала решения. Поэтому оказывается, что все приемы решения, применяемые в статическом анализе, могут, по-видимому, быть эффективно применены при прямом интегрировании динамических задач. Вторая идея, на которой основывается метод прямого интегрирования, сводится к тому, что внутри каждого интервала времени Δt допускается вариация смещений, скоростей и ускорений. Как мы это подробно обсудим позднее, именно форма допущения относительно изменения смещений, скоростей и ускорений внутри каждого временного интервала определяет собой точность, устойчивость и стоимость процедуры решения.

В дальнейшем мы предполагаем, что векторы смещения, скорости и ускорения в момент времени $t = 0$, обозначаемые как ${}^0\mathbf{U}$, ${}^0\dot{\mathbf{U}}$ и ${}^0\ddot{\mathbf{U}}$ соответственно, известны, и считаем, что решение уравнений (9.1) требуется получить для интервала от времени 0 до времени T . В процессе решения рассматриваемый интервал времени T подразделяется на n одинаковых интервалов времени Δt (т. е. $\Delta t = T/n$), и применяемая схема интегрирования позволяет определить приближенное решение в моменты времени $0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots, t, t + \Delta t, \dots, T$. Учитывая, что алгоритм позволяет рассчитать решение в следующий из требуемых моментов времени по решениям в предшествующие рассмотренные моменты, мы строим эти алгоритмы с помощью предположения о том, что решения в моменты времени $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, t$ известны и что вслед за этим требуется найти решение в момент времени $t + \Delta t$. Вычисления, выполняемые для построения решения в момент $t + \Delta t$, типичны для расчетов решения в момент, который на Δt позднее рассмотренного до сих пор, и, таким образом, позволяют определить общий алгоритм, годящийся для использования при расчете решений во всех дискретных точках на оси времени.

В последующих разделах представлено несколько обычно применяемых, эффективных методов прямого интегрирования. Выкладки приводятся для случая постоянного шага по времени Δt (как это обычно делается при линейном анализе), однако они без труда распространяются на случай переменных шагов по времени (как это делается при нелинейном анализе, см. раздел 9.5). Что касается соображений относительно точности, выбора величины шага по времени, а также о преимуществах одного метода перед другими, то все они откладываются до обращения к разделу 9.4. Много дополняющих результатов представлено в книге [Belytschko, Hughes, 1983].

9.2.1. Метод центральных разностей

Если соотношение равновесия (9.1) рассматривается как система обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, то для аппроксимации ускорений и скоростей в терминах смещений можно использовать любые, удобные для нас, конечно-разностные выражения. Поэтому теоретически можно применить большое число различных выражений этого рода. Однако схема построения решения должна быть эффективной и, следовательно, нужно рассмотреть только некоторые из общей совокупности методов. Одной из процедур, могущих оказаться весьма эффективными при решении

определенного вида задач, является метод центральных разностей, в котором предполагается, что

$${}^t\ddot{\mathbf{U}} = \frac{1}{\Delta t^2} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - 2{}^t\mathbf{U} + {}^{t-\Delta t}\mathbf{U}). \quad (9.3)$$

Ошибка в разложении (9.3) имеет порядок $(\Delta t)^2$ и, чтобы получить ошибку того же порядка в разложении скорости, мы можем воспользоваться формулой

$${}^t\dot{\mathbf{U}} = \frac{1}{2\Delta t} (-{}^{t+\Delta t}\mathbf{U} + {}^{t-\Delta t}\mathbf{U}). \quad (9.4)$$

Решение для смещения в момент времени $t + \Delta t$ получается, если рассмотреть уравнение (9.1) в момент t , т. е.

$$\mathbf{M} {}^t\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} {}^t\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} {}^t\mathbf{U} = {}^t\mathbf{R}. \quad (9.5)$$

Если выражения для ${}^t\ddot{\mathbf{U}}$ и для ${}^t\dot{\mathbf{U}}$ из формул (9.3) и (9.4), соответственно, подставить в уравнение (9.5), то мы получим соотношение

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{R} - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) {}^t\mathbf{U} - \left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) {}^{t-\Delta t}\mathbf{U}, \quad (9.6)$$

которое можно разрешить относительно ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$. Следует отметить, что решение для ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$ основывается, таким образом, на использовании условий равновесия в момент времени t ; иначе говоря, ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$ рассчитывается путем использования уравнения (9.5). По этой причине данная процедура интегрирования называется *явным методом интегрирования*, и заметим, что схемы интегрирования такого рода не требуют факторизации (эффективной) матрицы жесткости при построении решения шаг за шагом. С другой стороны, методы Хуболта, Уилсона и Ньюмарка, рассматриваемые в последующих разделах, используют условия равновесия в момент времени $t + \Delta t$ и называются *неявными методами интегрирования*.

Второе наблюдение состоит в том, что при использовании центральных разностей расчет ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$ связан с величинами ${}^t\mathbf{U}$ и ${}^{t-\Delta t}\mathbf{U}$. Поэтому для расчета решения в момент времени Δt должна быть использована специальная стартовая процедура. Если учесть, что ${}^0\mathbf{U}$, ${}^0\dot{\mathbf{U}}$ и ${}^0\ddot{\mathbf{U}}$ известны (отметим, что при известных ${}^0\mathbf{U}$ и ${}^0\dot{\mathbf{U}}$ величина ${}^0\ddot{\mathbf{U}}$ может быть рассчитана путем использования (9.1) в момент времени 0; см. пример 9.1), то соотношения (9.3) и (9.4) могут быть использованы для получения ${}^{-\Delta t}\mathbf{U}$; иначе говоря, имеем

$${}^{-\Delta t}U_i = {}^0U_i - \Delta t {}^0\dot{U}_i + \frac{\Delta t^2}{2} {}^0\ddot{U}_i, \quad (9.7)$$

где индекс i обозначает i -й элемент рассматриваемого вектора. Таблица 9.1 дает общую схему интегрирования во времени так, как она может быть введена в компьютер.

Ниже мы обсудим тот факт, что описанный метод эффективен только тогда, когда решение на каждом шаге по времени может быть проведено с большой степенью эффективности (потому что здесь в общем случае необходимо использовать малый шаг по времени и, следовательно, много временных шагов). По этой причине метод применяется, как правило, только тогда, когда можно допустить укрупненную матрицу масс и когда можно пренебречь зависящим от скорости демпфированием. Тогда соотношение (9.6) приводится к виду

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\hat{\mathbf{R}}, \quad (9.8)$$

где

$${}^t\hat{\mathbf{R}} = {}^t\mathbf{R} - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) {}^t\mathbf{U} - \left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) {}^{t-\Delta t}\mathbf{U}. \quad (9.9)$$

Если матрица масс — диагональная, то на основании сказанного выше система уравнений (9.1) может быть разрешена без факторизации матрицы; иначе говоря, для получения в правой части эффективного вектора нагрузки ${}^t\hat{\mathbf{R}}$ требуется выполнить только матричные умножения, после чего компоненты смещения определяются по формуле

$${}^{t+\Delta t}U_i = {}^t\hat{R}_i \left(\frac{\Delta t^2}{m_{ii}} \right), \quad (9.10)$$

Таблица 9.1. Метод решения шаг за шагом с использованием метода центральных разностей (матрицы масс и демпфирования в общем случае)

А. Начальные вычисления

1. Составьте матрицу жесткости \mathbf{K} , матрицу масс \mathbf{M} и матрицу демпфирования \mathbf{C} .
2. Задайте начальные значения ${}^0\mathbf{U}$, ${}^0\dot{\mathbf{U}}$ и ${}^0\ddot{\mathbf{U}}$.
3. Выберите шаг по времени Δt , $\Delta t \leq \Delta t_{\text{крит}}$ и вычислите постоянные интегрирования:

$$a_0 = \frac{1}{\Delta t^2}; \quad a_1 = \frac{1}{2\Delta t}; \quad a_2 = 2a_0; \quad a_3 = \frac{1}{a_2}.$$

4. Вычислите ${}^{-\Delta t}\mathbf{U} = {}^0\mathbf{U} - \Delta t {}^0\dot{\mathbf{U}} + a_3 {}^0\ddot{\mathbf{U}}$.
5. Составьте эффективную матрицу масс $\widehat{\mathbf{M}} = a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C}$.
6. Приведите $\widehat{\mathbf{M}}$ к треугольной форме: $\widehat{\mathbf{M}} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T$.

В. На каждом шаге по времени

1. Рассчитайте эффективные нагрузки в момент времени t :

$${}^t\widehat{\mathbf{R}} = {}^t\mathbf{R} - (\mathbf{K} - a_2\mathbf{M}) {}^t\mathbf{U} - (a_0\mathbf{M} - a_1\mathbf{C}) {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}.$$

2. Постройте решение для смещений в момент времени $t + \Delta t$:

$$\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\widehat{\mathbf{R}}.$$

3. Если это требуется, дайте оценку ускорений и скоростей в момент времени t :

$$\begin{aligned} {}^t\ddot{\mathbf{U}} &= a_0({}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - 2{}^t\mathbf{U} + {}^{t-\Delta t}\mathbf{U}), \\ {}^t\dot{\mathbf{U}} &= a_1(-{}^{t+\Delta t}\mathbf{U} + {}^{t-\Delta t}\mathbf{U}). \end{aligned}$$

где символами ${}^{t+\Delta t}U_i$ и ${}^t\widehat{R}_i$ обозначаются i -е компоненты векторов ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$ и ${}^t\widehat{\mathbf{R}}$ соответственно, а m_{ii} — это i -й диагональный элемент матрицы масс, причем предполагается, что $m_{ii} > 0$.

Если матрицу жесткости комплекса элементов не предполагается приводить к треугольной форме, то нет необходимости также и собирать эту матрицу. В разделе 4.2.1 (см. (4.30)) мы показали, что

$$\mathbf{K}^t\mathbf{U} = \sum_i \mathbf{K}^{(i)} {}^t\mathbf{U} = \sum_i {}^t\mathbf{F}^{(i)}. \quad (9.11)$$

Это означает, что величина $\mathbf{K}^t\mathbf{U}$, требуемая для подстановки в (9.9), может быть вычислена на элементном уровне путем суммирования вкладов от каждого элемента в эффективный вектор нагрузки. Следовательно, величина ${}^t\widehat{\mathbf{R}}$ может быть эффективно вычислена путем использования формулы

$${}^t\widehat{\mathbf{R}} = {}^t\mathbf{R} - \sum_i {}^t\mathbf{F}^{(i)} - \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M}({}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - 2{}^t\mathbf{U}), \quad (9.12)$$

где ${}^t\mathbf{F}^{(i)}$ вычисляется, после чего сложение по i дает компактную форму (см. раздел 12.2.3).

Теперь становится очевидным еще одно преимущество использования метода центральных разностей в форме, заданной выражением (9.10). Учитывая тот факт, что нет необходимости рассчитывать матрицу жесткости для всего комплекса элементов, решение, по существу, может выполняться на элементном уровне и, значит, потребуются сравнительно небольшой объем быстрой памяти. При использовании вышеописанного подхода были построены эффективные решения для систем очень большого порядка.

Однако мы уже упоминали о том, что в общем случае для построения решения необходимо использовать шаг по времени, имеющий сравнительно малую величину. Фактически, важное соображение, касающееся использования схемы с центральными разностями, состоит в том, что данный метод интегрирования требует, чтобы шаг по времени Δt был меньше некоторого критического значения Δt_{cr} , которое может быть вычислено по данным о массе и жесткости комплекса элементов в целом. Более конкретно, в разделе 9.4.2 мы покажем, что для получения обоснованного решения требуется удовлетворить условию

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{T_n}{\pi}, \quad (9.13)$$

где T_n — это наименьший период комплекса конечных элементов, имеющего n степеней свободы. Период T_n мог бы быть рассчитан с помощью одной из процедур, рассматриваемых в главе 11, или же нижний предел значения T_n может быть оценен с использованием норм (см. раздел 2.7). На практике мы нередко оцениваем надлежащую величину шага по времени Δt , пользуясь соображениями, представляемыми в разделе 9.4.4.

При построении решения с использованием (9.10) предполагалось, что $m_{ii} > 0$ при всех значениях i . Соотношение (9.13) еще раз подтверждает это требование, так как нулевой диагональный элемент в диагональной матрице масс означает, что комплекс элементов имеет нулевой период (см. раздел 10.2.4). В общем случае можно предполагать, что все диагональные элементы матрицы масс больше нуля, а в этом случае соотношение (9.13) задает тот предел величины шага по времени, который может быть использован при интегрировании. При анализе некоторых задач (а именно, задач о распространении волн) соотношение (9.13) не выдвигает требования о чрезмерно малом шаге по времени; однако в других случаях (а именно, для задач динамики конструкций) шаг по времени, достаточно малый для достижения точности интегрирования, может оказаться во много раз больше величины Δt_{cr} , получаемой из (9.13).

Все высказанные соображения указывают на важность установления эффективной конечно-элементной дискретизации и выбора шага по времени для построения динамического решения. Эти вопросы обсуждаются в разделе 9.4, однако некоторые положения будут изложены уже сейчас.

Предположим, что, пользуясь методом центральных разностей, мы решаем большую систему уравнений равновесия. Шаг по времени при интегрировании желательно выбирать, пользуясь условием (9.13). Теперь предположим, что мы изменяем наименьший диагональный элемент матрицы масс так, что он стал очень малым и, фактически, почти равным нулю. Как упоминалось выше, диагональный элемент матрицы масс не может быть точно равен нулю, потому что тогда и величина T_n была бы равна нулю, и интегрирование оказалось бы невозможным. Однако если величина диагонального элемента матрицы масс приближается к нулю, то и наименьший период системы и, следовательно, величина Δt_{cr} также приближается к нулю. Отсюда следует, что уменьшение одного элемента m_{ii} приводит к необходимости резкого уменьшения величины того шага по времени, который может быть выбран при интегрировании. С другой стороны, ввиду того, что система имеет большой порядок, мы можем предвидеть возникновение некоторой динамической нагрузки, которая вряд ли вызовет очень большое изменение реакции комплекса элементов при уменьшении наименьшего элемента m_{ii} , даже вплоть до обращения в нуль. Следовательно, стоимость анализа в этом случае могла бы стать излишне большой только из-за одного очень малого диагонального элемента матрицы масс. Такая же ситуация возникает и тогда, когда элемент матрицы жесткости изменяется в сторону увеличения.

Схемы интегрирования, подобные методу центральных разностей, которые требуют использования шага по времени Δt , меньшего, чем критическое значение этого шага, Δt_{cr} , называются условно устойчивыми. Если используется шаг по времени, превышающий Δt_{cr} , то интегрирование оказывается неустойчивым, а это значит, что, например, какие-то ошибки, возникающие в результате округления в компьютере, возрастают и, в большинстве случаев, делают расчеты реакции бесполезными. Понятие об устойчивости интегрирования является очень важным, и мы будем обсуждать его подробнее в разделе 9.4. Однако на этой стадии анализа полезно рассмотреть следующий далее пример.

Пример 9.1: Рассмотрите простую систему, для которой определяющие уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U}_1 \\ \ddot{U}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}. \quad (a)$$

Периоды свободных колебаний системы приводятся в примере 9.6, где мы находим, что $T_1 = 4,45$, $T_2 = 2,8$. Используйте метод центральных разностей при прямом интегрировании с шагами по времени (1) $\Delta t = T_2/10$ и (2) $\Delta t = 10T_2$, ставя своей целью рассчитать реакцию системы на протяжении 12 шагов. Предположите, что ${}^0\mathbf{U} = 0$ и ${}^0\dot{\mathbf{U}} = 0$.

Первый шаг сводится к расчету ${}^0\ddot{\mathbf{U}}$ путем использования уравнений (a) в момент времени 0; это значит, что мы используем

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} {}^0\ddot{\mathbf{U}} + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$${}^0\ddot{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Далее мы проводим расчеты в соответствии с таблицей 9.1.

Рассмотрим случай (1), для которого $\Delta t = 0,28$. Тогда мы имеем (ограничиваясь тремя значащими цифрами)

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{(0,28)^2} = 12,8; & a_1 &= \frac{1}{(2)(0,28)} = 1,79; \\ a_2 &= 2a_0 = 25,5; & a_3 &= \frac{1}{a_2} = 0,0392. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} -\Delta t \mathbf{U} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0,28 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0,0392 \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,392 \end{bmatrix}, \\ \widehat{\mathbf{M}} &= 12,8 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 1,79 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 25,5 & 0 \\ 0 & 12,8 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Эффективные нагрузки в момент времени t равны

$${}^t\widehat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 45,0 & 2 \\ 2 & 21,5 \end{bmatrix} {}^t\mathbf{U} - \begin{bmatrix} 25,5 & 0 \\ 0 & 12,8 \end{bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}.$$

Следовательно, на каждом шаге по времени нам нужно решить следующие уравнения:

$$\begin{bmatrix} 25,5 & 0 \\ 0 & 12,8 \end{bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\widehat{\mathbf{R}}. \quad (b)$$

Решение уравнений (b) тривиально, так как матрица коэффициентов является диагональной.

Рассчитывая решение уравнений (b) на каждом шаге по времени, получаем

Время	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
${}^t\mathbf{U}$	0	0,0307	0,168	0,487	1,02	1,70	2,40	2,91	3,07	2,77	2,04	1,02
	0,392	1,45	2,83	4,14	5,02	5,26	4,90	4,17	3,37	2,78	2,54	2,60

В примере 9.7 это решение сравнивается с точными результатами.

Теперь рассмотрим случай (2), для которого $\Delta t = 28$. Прodelывая аналогичные вычисления, мы находим, что

$$\Delta^t \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3,83 \times 10^3 \end{bmatrix}; \quad {}^{2\Delta t} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3,03 \times 10^6 \\ -1,21 \times 10^7 \end{bmatrix},$$

и рассчитанные значения смещений продолжают возрастать. Если учесть, что шаг по времени Δt здесь примерно в 6 раз больше, чем T_1 , и в 10 раз больше, чем T_2 , то мы, конечно, не можем ожидать точности при численном интегрировании. Однако особенно интересно выяснить, уменьшаются ли рассчитанные значения или возрастают. Наблюдаемое в этом примере возрастание значений является следствием того, что схема интегрирования по времени не является устойчивой. Как указывалось выше, для устойчивости интегрирования с использованием метода центральных разностей шаг по времени Δt не должен быть больше, чем Δt_{cr} , где $\Delta t_{cr} = (1/\pi)T_2$. В этом случае шаг по времени Δt оказывается значительно больше, и рассчитанная реакция неограниченно возрастает. Это — явление, типичное для неустойчивости. В примерах 9.2–9.4 мы увидим, что реакция, предсказываемая с использованием $\Delta t = 28$ и с помощью безусловно устойчивых методов Хуболта, Уилсона θ и Ньюмарка, также является очень неточной, однако не возрастает.

Выше мы обсудили основной недостаток метода центральных разностей: данная схема является лишь условно устойчивой. Условно устойчивыми являются также и различные другие методы интегрирования (см., например, книгу [Collatz 1966]). При учете того, что эффективное использование условно устойчивых методов ограничивается задачами определенного типа, в последующих разделах мы рассматриваем широко распространенные схемы интегрирования, являющиеся безусловно устойчивыми. Эффективность безусловно устойчивых схем интегрирования является следствием того факта, что для достижения точности интегрирования шаг по времени Δt может выбираться без соблюдения требования наподобие (9.13), и во многих случаях Δt может оказаться на несколько порядков величины больше, чем это диктует условие (9.13). Однако обсуждаемые в дальнейшем методы интегрирования являются неявными; это означает, что для построения решения требуется приведение к треугольной форме матрицы жесткости \mathbf{K} или, скорее, эффективной матрицы жесткости.

9.2.2. Метод Хуболта

Схема интегрирования Хуболта в известной степени близка к обсужденному нами выше методу центральных разностей, и это выражается в том, что стандартные конечно-разностные выражения используются для приближенного представления составляющих ускорения и скорости в терминах составляющих смещения. В методе интегрирования Хуболта применяются следующие конечно-разностные разложения (см. [Houbolt, 1950]):

$${}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} = \frac{1}{\Delta t^2} (2 {}^{t+\Delta t} \mathbf{U} - 5 {}^t \mathbf{U} + 4 {}^{t-\Delta t} \mathbf{U} - {}^{t-2\Delta t} \mathbf{U}) \quad (9.14)$$

и

$${}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}} = \frac{1}{6\Delta t} (11 {}^{t+\Delta t} \mathbf{U} - 18 {}^t \mathbf{U} + 9 {}^{t-\Delta t} \mathbf{U} - 2 {}^{t-2\Delta t} \mathbf{U}), \quad (9.15)$$

которые представляют собой две формулы с разностями назад, дающие ошибки порядка $(\Delta t)^2$.

Чтобы получить решение в момент времени $t + \Delta t$, мы рассмотрим теперь уравнение (9.1) в момент времени $t + \Delta t$ (но не в момент времени t , как в случае метода с центральными разностями), что дает нам

$$\mathbf{M} {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} {}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} {}^{t+\Delta t} \mathbf{U} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}. \quad (9.16)$$

Подставляя формулы (9.14) и (9.15) в уравнение (9.16) и собирая все известные векторы в правой части, для решения в форме ${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}$ получаем

$$\left(\frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{11}{6\Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K}\right)^{t+\Delta t} \mathbf{U} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} + \left(\frac{5}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{3}{\Delta t} \mathbf{C}\right)^t \mathbf{U} - \\ - \left(\frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{3}{2\Delta t} \mathbf{C}\right)^{t-\Delta t} \mathbf{U} + \left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{3\Delta t} \mathbf{C}\right)^{t-2\Delta t} \mathbf{U}. \quad (9.17)$$

Таблица 9.2. Пошаговое решение с использованием метода интегрирования по Хуболту

А. Начальные расчеты:

1. Сформировать матрицу жесткости \mathbf{K} , матрицу масс \mathbf{M} и матрицу демпфирования \mathbf{C} .
2. Задать начальные величины ${}^0\mathbf{U}$, ${}^0\dot{\mathbf{U}}$ и ${}^0\ddot{\mathbf{U}}$.
3. Выбрать шаг по времени Δt и рассчитать постоянные интегрирования:

$$a_0 = \frac{2}{\Delta t^2}; \quad a_1 = \frac{11}{6\Delta t}; \quad a_2 = \frac{5}{\Delta t^2}; \quad a_3 = \frac{3}{\Delta t}; \quad a_4 = -2a_0; \\ a_5 = \frac{-a_3}{2}; \quad a_6 = \frac{a_0}{2}; \quad a_7 = \frac{a_3}{9}.$$

4. Использовать специальную процедуру для запуска, чтобы с ее помощью рассчитать ${}^{\Delta t}\mathbf{U}$ и ${}^{2\Delta t}\mathbf{U}$.
5. Рассчитать эффективную матрицу жесткости $\hat{\mathbf{K}}$: $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C}$.
6. Приведите \mathbf{M} к треугольной форме: $\hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{K}} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T$.

В. На каждом шаге по времени:

1. Рассчитать эффективную нагрузку в момент времени $t + \Delta t$:

$${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{R}} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} + \mathbf{M}(a_0 {}^t \mathbf{U} + a_4 {}^{t-\Delta t} \mathbf{U} + a_6 {}^{t-2\Delta t} \mathbf{U} + \\ + \mathbf{C}(a_3 {}^t \mathbf{U} + a_5 {}^{t-\Delta t} \mathbf{U} + a_7 {}^{t-2\Delta t} \mathbf{U}).$$

2. Найти решение для смещений в момент времени $t + \Delta t$:

$$\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{U} = {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{R}}.$$

3. Если нужно, рассчитайте ускорения и скорости в момент времени $t + \Delta t$:

$${}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} = a_0 {}^{t+\Delta t} \mathbf{U} - a_2 {}^t \mathbf{U} - a_4 {}^{t-\Delta t} \mathbf{U} - a_6 {}^{t-2\Delta t} \mathbf{U},$$

$${}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}} = a_1 {}^{t+\Delta t} \mathbf{U} - a_3 {}^t \mathbf{U} - a_5 {}^{t-\Delta t} \mathbf{U} - a_7 {}^{t-2\Delta t} \mathbf{U}.$$

Как это видно из (9.17), решение в форме ${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}$ требует знания величин ${}^t \mathbf{U}$, ${}^{t-\Delta t} \mathbf{U}$ и ${}^{t-2\Delta t} \mathbf{U}$. Информация о ${}^0 \mathbf{U}$, ${}^0 \dot{\mathbf{U}}$ и ${}^0 \ddot{\mathbf{U}}$ полезна для запуска схемы интегрирования Хуболта, однако точность будет выше, если рассчитать ${}^{\Delta t} \mathbf{U}$ и ${}^{2\Delta t} \mathbf{U}$ каким-то иным способом; иначе говоря, мы применяем специальные процедуры для запуска. Один из путей продвижения вперед состоит в том, чтобы проинтегрировать уравнение (9.1), разрешая относительно ${}^{\Delta t} \mathbf{U}$ и ${}^{2\Delta t} \mathbf{U}$ и используя для этого другую схему интегрирования, возможно — некий условно устойчивый метод, наподобие схемы с центральными разностями, при Δt в каче-

стве шага по времени (см. пример 9.2). Таблица 9.2 дает схему процедуры интегрирования Хуболта, предназначенную для использования в компьютерной программе.

Основное различие между методом Хуболта, соответствующим табл. 9.2, и схемой центральных разностей, соответствующей табл. 9.1, состоит в том, что матрица жесткости \mathbf{K} появляется в качестве множителя у искомых смещений ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$. Член $\mathbf{K}{}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$ появляется по той причине, что равновесие, соответствующее уравнению (9.16), рассматривается в момент времени $t + \Delta t$, а не в момент t , как в методе центральных разностей. В силу этой причины метод Хуболта представляет собой неявную схему интегрирования, тогда как метод центральных разностей был явной процедурой. Что касается того шага по времени Δt , который может использоваться при интегрировании, то здесь нет никакого критического предела для этого шага, и в общем случае величина Δt может быть выбрана значительно большей, чем это задается согласно (9.13) для метода центральных разностей.

Заслуживающая внимания особенность состоит в том, что схема пошагового решения, основанная на методе Хуболта, непосредственно сводится к статическому анализу, если пренебречь эффектами инерции и демпфирования, тогда как решение согласно методу центральных разностей в соответствии с табл. 9.1 в этих условиях использоваться не может. Другими словами, если $\mathbf{C} = 0$ и $\mathbf{M} = 0$, то метод решения, соответствующий таблице 9.2, дает статическое решение для нагрузок, зависящих от времени.

Пример 9.2: Используйте схему прямого интегрирования по Хуболту для расчета реакции системы, рассмотренной в примере 9.1.

Сначала мы рассматриваем случай $\Delta t = 0,28$. Тогда, следуя таблице 9.2 и ограничиваясь тремя значащими цифрами, мы получаем

$$\begin{aligned} a_0 &= 25,5; & a_1 &= 6,55; & a_2 &= 63,8; & a_3 &= 10,7; \\ a_4 &= -51,0; & a_5 &= -5,36; & a_6 &= 12,8; & a_7 &= 1,19. \end{aligned}$$

Для запуска процедуры интегрирования нам нужны ${}^{\Delta t}\mathbf{U}$ и ${}^{2\Delta t}\mathbf{U}$. Давайте используем здесь просто-напросто те значения, которые были рассчитаны методом центральных разностей в примере 9.1, т. е.

$${}^{\Delta t}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0,0 \\ 0,392 \end{bmatrix}; \quad {}^{2\Delta t}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0,0307 \\ 1,45 \end{bmatrix}.$$

После этого мы вычисляем $\hat{\mathbf{K}}$ и получаем

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + 25,5 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 & -2 \\ -2 & 29,5 \end{bmatrix}.$$

На каждом шаге по времени мы должны иметь величину ${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}}$, которая в данном случае такова:

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (63,8 {}^t\mathbf{U} - 51,0 {}^{t-\Delta t}\mathbf{U} + 12,8 {}^{t-2\Delta t}\mathbf{U}).$$

Решая уравнение $\hat{\mathbf{K}} {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}}$ для 12 шагов по времени, мы получаем

Время	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
${}^t\mathbf{U}$	0	0,0307	0,167	0,461	0,923	1,50	2,11	2,60	2,86	2,80	2,40	1,72
	0,392	1,45	2,80	4,08	5,02	5,43	5,31	4,77	4,01	3,24	2,63	2,28

В примере 9.7 полученное решение сравнивается с точным результатом.

После этого мы рассматриваем случай $\Delta t = 28$, чтобы наблюдать безусловную устойчивость оператора Хуболта. Для запуска процедуры интегрирования мы используем точную реакцию в моменты времени Δt и $2\Delta t$ (см. пример 9.7)

$${}^{\Delta t}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2,19 \\ 2,24 \end{bmatrix}; \quad {}^{2\Delta t}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2,92 \\ 3,12 \end{bmatrix}.$$

Интересно сравнить матрицу $\hat{\mathbf{K}}$ с матрицей \mathbf{K} ,

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + 0,00255 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,0051 & -2,0000 \\ -2,0000 & 4,00255 \end{bmatrix},$$

причем можно отметить, что $\hat{\mathbf{K}}$ почти равна \mathbf{K} . Реакция в форме смещений на 12 шагах по времени дается в виде следующей таблицы:

Время	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
${}^t\mathbf{U}$	2,19	2,92	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	2,24	3,12	3,00	3,00	3,00	3,00	3,00	3,00	3,00	3,00	3,00	3,00

Статическое решение имеет вид

$${}^t\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 3,0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда видно, что реакция по смещениям очень быстро приближается к статическому решению.

9.2.3. Метод Уилсона θ

Метод Уилсона θ является, по существу, обобщением метода линейного ускорения, в котором предполагается линейное изменение ускорения от момента времени t до момента $t + \Delta t$. Если обратиться к рис. 9.1, то видно, что в методе Уилсона θ ускорение предполагается линейно изменяющимся от момента времени t до момента $t + \theta \Delta t$, где $\theta \geq 1,0$ (см. работу [Wilson, Farhoomand, Bathe, 1973]). При $\theta = 1,0$ этот метод сводится к линейной схеме для ускорения, однако в разделе 9.4 мы покажем, что для обеспечения безусловной устойчивости нужно использовать $\theta \geq 1,37$, и обычно мы полагаем $\theta = 1,40$.

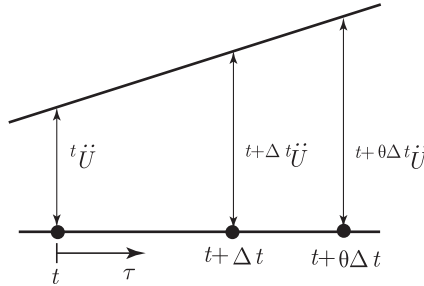


Рис. 9.1. Предположение о линейно изменяющемся ускорении, соответствующее методу θ Уилсона

Пусть τ обозначает приращение времени, где $0 \leq \tau \leq \theta \Delta t$; тогда предполагается, что на интервале времени от t до $t + \theta \Delta t$ мы имеем

$${}^{t+\tau}\ddot{\mathbf{U}} = {}^t\ddot{\mathbf{U}} + \frac{\tau}{\theta \Delta t} ({}^{t+\theta \Delta t}\ddot{\mathbf{U}} - {}^t\ddot{\mathbf{U}}). \quad (9.18)$$

Интегрируя соотношение (9.18), мы получим

$${}^{t+\tau}\dot{\mathbf{U}} = {}^t\dot{\mathbf{U}} + {}^t\ddot{\mathbf{U}}\tau + f\tau^2 2\theta \Delta t ({}^{t+\theta \Delta t}\ddot{\mathbf{U}} - {}^t\ddot{\mathbf{U}}) \quad (9.19)$$

и

$${}^{t+\tau}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + {}^t\dot{\mathbf{U}}\tau + \frac{1}{2} {}^t\ddot{\mathbf{U}}\tau^2 + \frac{1}{6\theta \Delta t} \tau^3 ({}^{t+\theta \Delta t}\ddot{\mathbf{U}} - {}^t\ddot{\mathbf{U}}). \quad (9.20)$$

Используя (9.19) и (9.20), в момент времени $t + \theta \Delta t$, будем иметь

$${}^{t+\theta \Delta t}\dot{\mathbf{U}} = {}^t\dot{\mathbf{U}} + \frac{\theta \Delta t}{2} ({}^{t+\theta \Delta t}\ddot{\mathbf{U}} + {}^t\ddot{\mathbf{U}}), \quad (9.21)$$

$${}^{t+\theta \Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \theta \Delta t {}^t\dot{\mathbf{U}} + \frac{\theta^2 \Delta t^2}{6} ({}^{t+\theta \Delta t}\ddot{\mathbf{U}} + 2 {}^t\ddot{\mathbf{U}}), \quad (9.22)$$

откуда теперь можно получить решение для ${}^{t+\theta\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}$ и ${}^{t+\theta\Delta t}\dot{\mathbf{U}}$ в терминах ${}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{U}$:

$${}^{t+\theta\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} = \frac{6}{\theta^2\Delta t^2}({}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{U} - {}^t\mathbf{U}) - \frac{6}{\theta\Delta t}{}^t\dot{\mathbf{U}} - 2{}^t\ddot{\mathbf{U}} \quad (9.23)$$

и

$${}^{t+\theta\Delta t}\dot{\mathbf{U}} = \frac{3}{\theta\Delta t}({}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{U} - {}^t\mathbf{U}) - 2{}^t\dot{\mathbf{U}} - \frac{\theta\Delta t}{2}{}^t\ddot{\mathbf{U}}. \quad (9.24)$$

Чтобы получить решение для смещений, скоростей и ускорений в момент времени $t + \Delta t$, следует рассмотреть уравнения равновесия (9.1) в момент времени $t + \theta\Delta t$. Однако ввиду того, что ускорения предполагаются изменяющимися линейно, то используется и линейно экстраполируемый вектор нагрузки; это означает, что применяется уравнение

$$\mathbf{M}{}^{t+\theta\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}{}^{t+\theta\Delta t}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}{}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{U} = {}^{t+\theta\Delta t}\bar{\mathbf{R}}, \quad (9.25)$$

где

$${}^{t+\theta\Delta t}\bar{\mathbf{R}} = {}^t\mathbf{R} + \theta({}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t\mathbf{R}). \quad (9.26)$$

В результате подстановки выражений (9.23) и (9.24) в уравнение (9.25) получается уравнение, которое можно разрешить относительно ${}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{U}$. Затем, подставляя ${}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{U}$ в (9.23), получим выражение для ${}^{t+\theta\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}$, которое используется в соотношениях (9.18)–(9.20), полагая везде $\tau = \Delta t$, и это позволяет рассчитать ${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}$, ${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}}$ и ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$. Полный алгоритм, используемый при интегрировании, приводится в табл. 9.3.

Таблица 9.3. Метод решения шаг за шагом с использованием метода Уилсона θ

А. Начальные вычисления

1. Составьте матрицу жесткости \mathbf{K} , матрицу масс \mathbf{M} и матрицу демпфирования \mathbf{C} .
2. Задайте начальные значения ${}^0\mathbf{U}$, ${}^0\dot{\mathbf{U}}$ и ${}^0\ddot{\mathbf{U}}$.
3. Выберите шаг по времени Δt , $\Delta t \leq \Delta t_{\text{крит}}$ и вычислите постоянные интегрирования: $\theta = 1, 4$ (стандартное значение)

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{6}{(\theta\Delta t)^2}; & a_1 &= \frac{3}{\theta\Delta t}; & a_2 &= 2a_1; & a_3 &= \frac{\theta\Delta t}{2}; & a_4 &= \frac{a_0}{\theta}; \\ a_5 &= \frac{-a_2}{\theta}; & a_6 &= 1 - \frac{3}{\theta}; & a_7 &= \frac{\Delta t}{2}; & a_8 &= \frac{\Delta t^2}{6}. \end{aligned}$$

4. Составьте эффективную матрицу масс $\hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C}$.
5. Приведите $\hat{\mathbf{K}}$ к треугольной форме: $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{LDL}^T$.

В. На каждом шаге по времени

1. Рассчитайте эффективные нагрузки в момент времени $t + \theta\Delta t$:

$$\begin{aligned} {}^{t+\theta\Delta t}\hat{\mathbf{R}} &= {}^t\mathbf{R} + \theta({}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t\mathbf{R}) + \mathbf{M}(a_0{}^t\ddot{\mathbf{U}} + a_2{}^t\dot{\mathbf{U}} + 2{}^t\ddot{\mathbf{U}}) + \\ &+ \mathbf{C}(a_1{}^t\mathbf{U} + 2{}^t\dot{\mathbf{U}} + a_3{}^t\ddot{\mathbf{U}}). \end{aligned}$$

2. Постройте решение для смещений в момент времени $t + \theta\Delta t$:

$$\mathbf{LDL}^T {}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{U} = {}^{t+\theta\Delta t}\hat{\mathbf{R}}.$$

3. Дайте оценку положений, ускорений и скоростей в момент времени $t + \Delta t$:

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} &= a_4({}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{U} - {}^t\mathbf{U}) + a_5{}^t\dot{\mathbf{U}} + a_6{}^t\ddot{\mathbf{U}}, \\ {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} &= {}^t\dot{\mathbf{U}} + a_7({}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} + {}^t\ddot{\mathbf{U}}), \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} &= {}^t\mathbf{U} + \Delta t{}^t\dot{\mathbf{U}} + a_8({}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} + 2{}^t\ddot{\mathbf{U}}). \end{aligned}$$

Как на это уже указывалось ранее, метод Уилсона θ также представляет собой неявный метод интегрирования, так как матрица жесткости \mathbf{K} является матрицей коэффициентов по отношению к неизвестному вектору смещений. Можно также отметить, что никаких специальных процедур для запуска не требуется, так как смещения, скорости и ускорения в момент времени $t + \Delta t$ выражаются в терминах тех же самых величин, но только для момента времени t .

Пример 9.3: Рассчитайте смещения, соответствующие реакции системы, рассмотренной в примерах 9.1 и 9.2, используя метод Уилсона θ . Положите $\theta = 1,4$.

Вначале мы рассматриваем случай $\Delta t = 0,28$. Согласно последовательности шагов расчета, данной в таблице 9.3, мы имеем

$${}^0\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^0\dot{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^0\ddot{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix},$$

где ${}^0\ddot{\mathbf{U}}$ соответствует значению, рассчитанному в примере 9.1. Затем (с учетом трех значащих цифр)

$$\begin{aligned} a_0 &= 39,0; & a_1 &= 7,65; & a_2 &= 15,3; & a_3 &= 0,196; & a_4 &= 27,9; \\ a_5 &= -10,9; & a_6 &= -1,14; & a_7 &= 0,14; & a_8 &= 0,0131 \end{aligned}$$

и

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + 39,0 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 84,1 & -2 \\ -2 & 43,0 \end{bmatrix}.$$

На каждом шаге по времени нам необходимо вычислить

$$\begin{aligned} {}^{t+\theta\Delta t}\hat{\mathbf{R}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (39,0 {}^t\mathbf{U} + 15,3 {}^t\dot{\mathbf{U}} + 2 {}^t\ddot{\mathbf{U}}), \\ \hat{\mathbf{K}} {}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{U} &= {}^{t+\theta\Delta t}\hat{\mathbf{R}}, \end{aligned}$$

после чего рассчитать

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} &= 27,9({}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{U} - {}^t\mathbf{U}) - 10,9 {}^t\dot{\mathbf{U}} - 1,14 {}^t\ddot{\mathbf{U}}, \\ {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} &= {}^t\dot{\mathbf{U}} + 0,14({}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} + {}^t\ddot{\mathbf{U}}), \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} &= {}^t\mathbf{U} + 0,28 {}^t\dot{\mathbf{U}} + 0,0131({}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} + 2 {}^t\ddot{\mathbf{U}}). \end{aligned}$$

Время	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
${}^t\mathbf{U}$	0,00605	0,0525	0,196	0,490	0,952	1,54	2,16	2,67	2,92	2,82	2,33	1,54
	0,366	1,34	2,64	3,92	4,88	5,31	5,18	4,61	3,82	3,06	2,52	2,29

В примере 9.7 полученное решение сравнивается с точным.

Рассмотрим теперь случай прямого интегрирования с шагом по времени $\Delta t = 28$. В этом случае мы имеем

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + 0,0039 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,0078 & -2 \\ -2 & 4,0039 \end{bmatrix},$$

где, как мы замечаем, матрица $\hat{\mathbf{K}}$ почти равна \mathbf{K} , как и при интегрировании с использованием метода Хуболта.

Реакция в форме смещений, полученная на 12 шагах по времени, равна

Время	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
${}^t\mathbf{U}$	1.09	2,82	-2,61	5,86	-4,47	6,59	-4,38	5,97	-3,46	4,42	-2,39	3,89
	1123	-834	674	-519	406	-308	242	-181	144	-105	86,1	-60,9

Здесь следует заметить, что начальные условия для ускорений, т. е. ${}^0\ddot{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$, вызывают начальную реакцию в форме большого смещения. Эта реакция демпфируется с ростом времени. Если использовать ${}^0\ddot{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, то рассчитанная реакция в форме смещения выражается как

Время	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
${}^t\mathbf{U}$	0,363	1,44	0,632	1,29	0,782	1,17	0,875	1,09	0,929	1,05	0,960	1,03
	1,09	4,33	1,89	3,87	2,32	3,52	2,60	3,31	2,47	3,18	3,11	

Как видно отсюда, результаты приближаются к данным статического решения (см. пример 9.2).

9.2.4. Метод Ньюмарка Схема интегрирования по Ньюмарку также может рассматриваться как обобщение метода линейного ускорения. При этом используются следующие допущения (см. работу [Newmark, 1959]):

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} = {}^t\dot{\mathbf{U}} + [(1-\delta){}^t\ddot{\mathbf{U}} + \delta{}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}] \Delta t, \quad (9.27)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + {}^t\dot{\mathbf{U}} \Delta t + [(1/2 - \alpha){}^t\ddot{\mathbf{U}} + \alpha{}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}] \Delta t^2, \quad (9.28)$$

где α и δ — это параметры, которые могут быть определены для того, чтобы добиться точности и устойчивости. При $\delta = 1/2$ и $\alpha = 1/6$ соотношения (9.27) и (9.28) соответствуют методу линейного ускорения (к которому приходим также и при принятии $\theta = 1$ в методе Уилсона θ). Первоначально Ньюмарк предложил в качестве безусловно устойчивой схемы метод постоянного среднего ускорения (называемый также правилом трапеций), когда $\delta = 1/2$ и $\alpha = 1/4$ (см. рисунок 9.2).

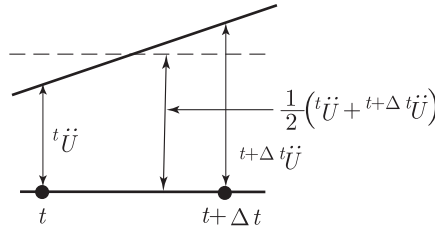


Рис. 9.2. Схема Ньюмарка с постоянным средним ускорением

В дополнение к соотношениям (9.27) и (9.28) для построения решения в форме смещений, скоростей и ускорений в момент времени $t + \Delta t$ рассматриваются также уравнения равновесия (9.1), соответствующие моменту времени $t + \Delta t$:

$$\mathbf{M} {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}. \quad (9.29)$$

Разрешая соотношение (9.28) относительно ${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}$ в терминах ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$, а затем подставляя результат в соотношение (9.27), мы получаем уравнения для ${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}$ и ${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}}$, т. е. для величин, выражаемых только в терминах неизвестных смещений ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$. Эти два соотношения для ${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}$ и ${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}}$ подставляются в уравнение (9.29), которое следует разрешить относительно ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$, после чего при использовании (9.27) и (9.28) можно вычислить также ${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}$ и ${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}}$.

Полный алгоритм с использованием схемы интегрирования по Ньюмарку дается в таблице 9.4. Следует отметить тесную взаимосвязь компьютерных реализаций метода Ньюмарка и метода Уилсона θ (см. также упражнение 9.3).

Таблица 9.4. Пошаговое решение с использованием метода интеграции Ньюмарка

А. Начальные вычисления

1. Составьте матрицу жесткости \mathbf{K} , матрицу масс \mathbf{M} и матрицу демпфирования \mathbf{C} .
2. Задайте начальные значения ${}^0\mathbf{U}$, ${}^0\dot{\mathbf{U}}$ и ${}^0\ddot{\mathbf{U}}$.
3. Выберите шаг по времени Δt , α и δ и вычислите постоянные интегрирования:

$$\delta \geq 0,50; \quad \alpha \geq 0,25(0,5 + \delta)^2$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\alpha \Delta t^2}; & \alpha_1 &= \frac{\delta}{\alpha \Delta t}; & a_2 &= \frac{1}{\alpha \Delta t}; & a_3 &= \frac{1}{2\alpha} - 1; \\ a_4 &= \frac{\delta}{\alpha} - 1; & a_5 &= \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right); & a_6 &= \Delta t(1 - \delta); & a_7 &= \delta \Delta t. \end{aligned}$$

4. Составьте эффективную матрицу жесткости $\hat{\mathbf{K}}$: $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C}$.
5. Приведите $\hat{\mathbf{K}}$ к треугольной форме: $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{LDL}^T$.

В. На каждом шаге по времени

1. Рассчитайте эффективные нагрузки в момент времени $t + \Delta t$:

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} + \mathbf{M}(a_0 {}^t\mathbf{U} + a_2 {}^t\dot{\mathbf{U}} + a_3 {}^t\ddot{\mathbf{U}}) + \mathbf{C}(a_1 {}^t\mathbf{U} + a_4 {}^t\dot{\mathbf{U}} + a_5 {}^t\ddot{\mathbf{U}}).$$

2. Постройте решение для смещений в момент времени $t + \Delta t$:

$$\mathbf{LDL}^T {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}}.$$

3. Вычислите ускорения и скорости в момент времени $t + \Delta t$:

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} &= a_0({}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - {}^t\mathbf{U}) - a_2 {}^t\dot{\mathbf{U}} - a_3 {}^t\ddot{\mathbf{U}} \\ {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} &= {}^t\dot{\mathbf{U}} + a_6 {}^t\ddot{\mathbf{U}} + a_7 {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}. \end{aligned}$$

Пример 9.4: Рассчитайте реакцию в форме смещений для системы, рассматривавшейся в примерах 9.1–9.3, используя метод Ньюмарка. Используйте значения $\alpha = 0,25$, $\delta = 0,5$.

Рассмотрите вначале случай $\Delta t = 0,28$. Согласно последовательности шагов при расчетах, предложенной в таблице 9.4, мы имеем

$${}^0\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^0\dot{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^0\ddot{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Постоянные интегрирования имеют значения (с точностью до трех значащих цифр)

$$\begin{aligned} a_0 &= 51,0; & a_1 &= 7,14; & a_2 &= 14,3; & a_3 &= 1,00; \\ a_4 &= 1,00; & a_5 &= 0,00; & a_6 &= 0,14; & a_7 &= 0,14. \end{aligned}$$

Таким образом, эффективная матрица жесткости имеет вид

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + 51,0 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 108 & -2 \\ -2 & 55 \end{bmatrix}.$$

На каждом шаге по времени нам необходимо вычислить

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (51 {}^t\mathbf{U} + 14,3 {}^t\dot{\mathbf{U}} + 1,0 {}^t\ddot{\mathbf{U}}).$$

Затем находим

$$\hat{\mathbf{K}}^{t+\Delta t} \mathbf{U} = {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{R}}$$

и

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} &= 51,0({}^{t+\Delta t} \mathbf{U} - {}^t \mathbf{U}) - 14,3 {}^t \dot{\mathbf{U}} - 1,0 {}^t \ddot{\mathbf{U}}, \\ {}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}} &= {}^t \dot{\mathbf{U}} + 0,14 {}^t \ddot{\mathbf{U}} + 0,14 {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}}. \end{aligned}$$

Выполняя эти расчеты, мы получаем

Время	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
${}^t \mathbf{U}$	0,00673	0,0505	0,189	0,485	0,961	1,58	2,23	2,76	3,00	2,85	2,28	1,40
	0,364	1,35	2,68	4,00	4,95	5,34	5,13	4,48	3,64	2,90	2,44	2,31

Полученное решение сравнивается с точными результатами в примере 9.7.

Далее применим шаг по времени $\Delta t = 28,0$. В этом случае имеем

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + 0,0051 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,0102 & -2,0000 \\ -2,0000 & 4,0051 \end{bmatrix}.$$

Выясняется, что матрица $\hat{\mathbf{K}}$, как и при версиях интегрирования с использованием методов Хуболта и Уилсона θ , оказывается почти равной матрице \mathbf{K} .

Используя начальные условия ${}^0 \ddot{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$, мы получаем отклик по смещению

Время	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
${}^t \mathbf{U}$	1,99	0,028	1,94	0,112	1,83	0,248	1,67	0,429	1,47	0,648	1,23	0,894
	5,99	0,045	5,90	0,177	5,72	0,393	5,47	0,685	5,14	1,04	4,76	1,45

Однако, используя начальные условия ${}^0 \ddot{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, получаем

Время	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
${}^t \mathbf{U}$	0,996	1,01	0,982	1,02	0,969	1,04	0,957	1,05	0,947	1,06	0,940	1,06
	2,99	3,02	2,97	3,04	2,95	3,06	2,93	3,08	2,91	3,09	2,90	3,11

и мы видим, что решение испытывает небольшие колебания по отношению к статической реакции.

9.2.5. Объединение различных операторов интегрирования

До сих пор мы предполагали, что все уравнения динамического равновесия решаются при помощи одной и той же схемы интегрирования по времени. Как это обсуждалось в разделе 9.4, выбор метода, пригодного для получения эффективного решения, зависит от той задачи, которую нам нужно решить. Однако в применении к задачам определенного типа может оказаться предпочтительным использовать различные операторы, стремясь путем интегрирования определить реакцию в различных областях комплекса элементов в целом (см., например, работу [Belytschko, Yen, Mullen, 1979], а также книгу [Belytschko, Hughes, 1983]). Такая ситуация особенно часто реализуется тогда, когда характеристики массы и жесткости (т.е. характерные константы, зависящие от времени) комплекса элементов в целом оказываются совершенно различными в разных частях этого комплекса. В качестве примера укажем на анализ систем жидкость–конструкция, в которых жидкость оказывается очень податливой, если сравнивать ее жесткость с жесткостью конструкции. Здесь естественным выбором может оказаться определение реакции

жидкости путем явного интегрирования по времени с использованием условно устойчивого метода центральных разностей, сочетаемого с определением реакции конструкции с помощью неявного, безусловно устойчивого способа интегрирования по времени (используя, например, метод Ньюмарка, см. раздел 9.4). Причины необходимости такого сочетания состоят в том, что, во-первых, физическим явлением, подлежащим исследованию, может оказаться распространение волн в жидкости и структурная вибрация конструкции, а во-вторых — в том, что критическая величина шага по времени при явном интегрировании с целью определения реакции жидкости обычно оказывается значительно больше, чем шаг по времени, требуемый для определения реакции конструкции с помощью явного интегрирования по времени. В результате может оказаться, что при надлежащем выборе конечно-элементных идеализаций исследуемых жидкости и конструкции, явный метод определения реакции жидкости и неявный метод определения реакции конструкции могут быть реализованы с шагом по времени, относительно большим, но достаточно малым для того, чтобы обеспечить устойчивое и точное решение. Разумеется, может оказаться эффективным также использовать шаги по времени различного размера для явных и неявных расчетов, причем один размер шага по времени будет отличаться от другого целочисленным множителем. Использование комбинации операторов при интегрировании и определении динамической реакции заставляет задавать вопросы о том, какие именно методы выбрать и как сочетать их. Существует очень много вариантов ответов на эти вопросы, однако в общем случае выбор схем зависит от присущих им характеристик устойчивости и точности, включая эффекты, связанные с сочетанием операторов, а также с общей эффективностью получающегося в результате вида интегрирования по времени.

Использование явно-неявного интегрирования по времени мы демонстрируем в процессе анализа простой задачи, рассматриваемой в примерах 9.1–9.4.

Пример 9.5: Требуется построить решение в форме U_1 и U_2 для простой системы, рассмотренной в примере 9.1, используя явный метод с центральными разностями для определения U_1 и неявный метод с трапецидальным правилом (метод Ньюмарка при $\alpha = 1/4$, $\delta = 1/2$) для определения U_2 .

В процессе явного интегрирования мы рассматриваем равновесие в момент времени t с целью расчета смещений для момента времени $t + \Delta t$. Для степени свободы с номером 1 мы имеем

$$2 {}^t\ddot{U}_1 + 6 {}^tU_1 - 2 {}^tU = 0. \quad (a)$$

В процессе неявного интегрирования мы рассматриваем равновесие в момент времени $t + \Delta t$ с целью расчета смещений для того же момента времени. Таким образом, для степени свободы за номером 2 мы имеем

$${}^{t+\Delta t}\ddot{U}_2 - 2 {}^{t+\Delta t}U_1 + 4 {}^{t+\Delta t}U_2 = 10. \quad (b)$$

Далее, для решения уравнения (a) используем метод центральных разностей

$${}^t\ddot{U}_1 = \frac{{}^{t+\Delta t}U_1 - 2 {}^tU_1 + {}^{t-\Delta t}U_1}{(\Delta t)^2}, \quad (c)$$

а для решения уравнения (b) — правило трапеций,

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\dot{U}_2 &= {}^t\dot{U}_2 + \frac{\Delta t}{2} ({}^t\ddot{U}_2 + {}^{t+\Delta t}\ddot{U}_2), \\ {}^{t+\Delta t}U_2 &= {}^tU_2 + {}^t\dot{U}_2 \Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{4} ({}^t\ddot{U}_2 + {}^{t+\Delta t}\ddot{U}_2). \end{aligned} \quad (d)$$

Начальные условия имеют вид

$${}^0U_1 = {}^0\dot{U}_1 = {}^0\ddot{U}_1 = {}^0U_2 = {}^0\dot{U}_2 = 0; \quad {}^0\ddot{U}_2 = 10.$$

Следовательно, если использовать (9.7) с целью получения значения ${}^{-\Delta t}U_1$, нужного для запуска алгоритма, мы получаем ${}^{-\Delta t}U_1 = 0$.

Теперь на каждом шагу по времени мы можем использовать соотношения (a) и (c), чтобы получить решение для ${}^{t+\Delta t}U_1$, а затем — соотношения (b) и (d), чтобы получить решение для ${}^{t+\Delta t}U_2$. Следует отметить, что при реализации того решения мы вычисляем ${}^{t+\Delta t}U$ с помощью получения проекции вперед от равновесной конфигурации в момент времени t для степени свободы 1, а затем принимаем это значение ${}^{t+\Delta t}U_1$, чтобы

провести неявное вычисление ${}^{t+\Delta t}U_2$. Пользуясь этой процедурой, при $\Delta t = 0,28$ мы получаем следующие данные:

Время	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
${}^t\mathbf{U}$	0,0	0,0285	0,156	0,457	0,962	1,63	2,33	2,88	3,11	2,90	2,24	1,25
	0,364	1,35	2,68	3,98	4,93	5,32	5,12	4,50	3,70	2,99	2,54	2,39

Результаты этого решения сравнимы с данными о реакции, рассчитанными в примере 9.1. Если теперь, однако, мы попытаемся получить решение для случая $\Delta t = 28$, то мы выясним, что это решение неустойчиво; это значит, что предсказываемые значения смещений растут очень быстро и неограниченно.

Как это демонстрируется в приведенном выше примере, использование явно-неявной схемы интегрирования по времени требует, чтобы шаг по времени был достаточно малым для обеспечения устойчивости в области явного интегрирования, хотя необходимо выдвинуть специальные соображения, касающиеся условий на поверхности раздела. При альтернативном подходе к решению единая неявная схема интегрирования используется для всей рассматриваемой области, однако жесткость очень податливой части системы не добавляется к матрице коэффициентов, а для обеспечения динамического равновесия используются итерации (см., например, работу [Bathe, Sonnad, 1980], а также раздел 8.3.2).

9.2.6. Упражнения

9.1. Рассмотрите систему с двумя степенями свободы

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U}_1 \\ \ddot{U}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

при начальных условиях ${}^0\mathbf{U} = {}^0\dot{\mathbf{U}} = 0$. Воспользуйтесь методом центральных разностей для расчета с умеренной степенью точности реакции системы в интервале времени от 0 до 4.

9.2. Рассмотрите ту же самую систему уравнений, что и в упражнении 9.1, однако для расчета реакции системы воспользуйтесь правилом трапеций.

9.3. Постройте вычислительную схему, для которой метод Уилсона θ и правило трапеций будут специальными случаями. Сформулируйте эту вычислительную схему в табличной форме (так, как сформулирована табл. 9.3 для метода Уилсона θ).

9.4. Рассмотрите систему с одной степенью свободы. Покажите, что если применить метод Ньюмарка со специальными значениями $\alpha = 0$ и $\delta = 1/2$, то получатся уравнения метода с центральными разностями.

9.5. Рассмотрите уравнение для системы с одной степенью свободы

$$2\ddot{U} + 4U = 0; \quad {}^0U = 10^{-12}; \quad {}^0\dot{U} = 0$$

(которая получается, если положить $U_1 = 0$ для системы, приведенной в упражнении 9.1).

Предположите, что шаг по времени, используемый при временном интегрировании, равен $1,01 \times \Delta t_{cr}$. Дайте оценку, после скольких шагов по времени решение достигнет переполнения (которое для используемого типа компьютера задается как 10^{30}).

9.6. Постройте решение уравнений, приведенных в упражнении 9.1, используя для интегрирования по времени по отношению к U_1 метод центральных разностей, и правило трапеций — для интегрирования по времени по отношению к U_2 .

9.3. Суперпозиция форм представления

Как показывают таблицы 9.2–9.4, представляющие схемы неявного прямого интегрирования, если предположить существование диагональной матрицы масс и отсутствие

демпфирования, то число операций в расчете на один шаг по времени будет — в качестве грубой оценки — несколько больше, чем $2nm_K$, где n и m_K , соответственно, — это порядок и половина ширины ленты рассматриваемой матрицы (в предположении постоянной высоты столбцов или осреднения половины ширины ленты, см. раздел 8.2.3). Для решения системы уравнений на каждом шаге по времени требуется выполнить $2nm_K$ операций. Начальная факторизация эффективной матрицы жесткости с приведением к треугольной форме требует дополнительного числа операций. Кроме того, если используется совместимая матрица масс или если в анализ включается матрица демпфирования, то на каждый шаг по времени требуется дополнительное число операций, пропорциональное nm_K . Таким образом, если пренебречь числом операций, требующихся для начальных расчетов, то процесс интегрирования в целом требует проведения примерно $\alpha nm_K s$ операций, где α зависит от характеристик используемых матриц, а s — это число шагов по времени.

При использовании метода центральных разностей число операций в расчете на один шаг оказывается обычно намного меньше (в силу причин, приводимых в разделе 9.2.1).

Как показывают приведенные соображения, число операций, требуемое при решении с помощью прямого интегрирования, прямо пропорционально числу шагов по времени. При этом можно ожидать, что использование неявного прямого интегрирования будет эффективным, только если требуется определить реакцию на сравнительно коротком интервале времени (т.е. при не слишком большом числе шагов по времени). Если же интегрирование должно выполняться на многих шагах по времени, то может оказаться более эффективным вначале преобразовать уравнения равновесия (9.1) к такой форме, пошаговое решение для которой будет не столь дорогостоящим. В частности, учитывая, что потребное число операций прямо пропорционально половине ширины ленты m_K матрицы жесткости, то уменьшение m_K снизило бы пропорционально стоимость пошагового решения.

На этой стадии важно полностью осознать, что именно мы предполагаем сделать. Напомним, что уравнения (9.1) — это уравнения равновесия, полученные тогда, когда при оценке уравнения виртуальной работы (4.7) (см. раздел 4.2.1) используются конечно-элементные интерполяционные функции. Получаемые в результате матрицы \mathbf{K} , \mathbf{M} и \mathbf{C} имеют ширину ленты, определяемую нумерацией узловых точек конечного элемента. Отсюда следует, что топология конечно-элементной сетки определяет собой порядок и ширину ленты матриц данной системы. Чтобы уменьшить ширину ленты системной матрицы, мы можем изменить порядок нумерации узловых точек; однако если идти по этому пути, то существует некий предел той минимальной ширины ленты, которую при этом можно получить, и поэтому мы предлагаем следовать другой процедуре.

9.3.1. Изменение базиса для модальных обобщенных смещений

Мы предлагаем преобразовать уравнения равновесия в более эффективную форму для прямого интегрирования; с этой целью используется следующее преобразование для n смещений \mathbf{U} в узловых точках конечного элемента,

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{P}\mathbf{X}(t), \quad (9.30)$$

где \mathbf{P} — квадратная матрица размером $n \times n$, а $\mathbf{X}(t)$ — зависящий от времени вектор порядка n . Матрица преобразования \mathbf{P} является неизвестной, и ее нужно будет определить. Компоненты вектора \mathbf{X} называются *обобщенными смещениями*. Подставляя выражение (9.30) в уравнения (9.1), предварительно умножив все члены на \mathbf{P}^T , мы получаем

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{X}}(t) + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{X}}(t) + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{X}(t) = \tilde{\mathbf{R}}(t), \quad (9.31)$$

где

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{P}^T \mathbf{M} \mathbf{P}; \quad \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P}; \quad \tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P}; \quad \tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{P}^T \mathbf{R}. \quad (9.32)$$

Следует отметить, что данная трансформация получается путем подстановки выражения (9.30) в соотношение (4.8), с целью выразить смещения в элементе в терминах обобщенных смещений,

$$\mathbf{u}^{(m)}(x, y, z, t) = \mathbf{H}^{(m)} \mathbf{P} \mathbf{X}(t), \quad (9.33)$$

а затем использовать (9.33) в уравнении (4.7) для виртуальной работы. Поэтому, по существу, для получения уравнения (9.31) из уравнения (9.1) была произведена замена конечно-элементного базиса на базис обобщенного смещения (см. раздел 2.5).

Целью данной трансформации является получение для системы новых матриц жесткости, массы и демпфирования, \mathbf{K} , \mathbf{M} и \mathbf{C} , имеющих меньшую ширину ленты, чем матрицы исходной системы, и соответственно этому должна быть выбрана матрица трансформации. Кроме того, нужно заметить, что матрица \mathbf{P} не должна быть особой (т. е. ранг матрицы \mathbf{P} должен быть равен n), чтобы иметь возможность получить однозначную взаимосвязь между любыми векторами \mathbf{U} и \mathbf{X} , как это выражено формулой (9.30).

Теоретически может существовать много различных матриц преобразования \mathbf{P} , которые могли бы уменьшить ширину ленты системных матриц. Однако на практике эффективная матрица преобразования определяется путем представляемых в форме смещений решений уравнений равновесия со свободными колебаниями и с пренебрежимо малым демпфированием,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = 0. \quad (9.34)$$

Решение уравнений (9.34) можно постулировать имеющим форму

$$\mathbf{U} = \phi \sin \omega(t - t_0), \quad (9.35)$$

где ϕ — это вектор порядка n , t — переменная, символизирующая время, t_0 — постоянная времени, а ω — постоянная, характеризующая частоту колебаний (радиан/с) вектора ϕ .

Подставляя (9.35) в (9.34), мы получаем обобщенную задачу о собственных значениях, из решения которой должны определяться ϕ и ω ,

$$\mathbf{K}\phi = \omega^2 \mathbf{M}\phi. \quad (9.36)$$

Задача о собственных значениях, соответствующая (9.36), дает n собственных решений (ω_1^2, ϕ_1) , (ω_2^2, ϕ_2) , ..., (ω_n^2, ϕ_n) , где собственные векторы ортонормированы с весом \mathbf{M} (см. раздел 10.2.1); т. е.

$$\phi_i^T \mathbf{M} \phi_j \begin{cases} = 1; & i = j \\ = 0; & i \neq j \end{cases} \quad (9.37)$$

и

$$0 \leq \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \omega_3^2 \leq \dots \leq \omega_n^2. \quad (9.38)$$

Вектор ϕ_i называется вектором формы i -й моды, а ω_i представляет собой соответствующую частоту колебаний (радиан/с). Следует подчеркнуть, что уравнение (9.34) удовлетворяется, пользуясь любым из n решений для смещения, $\phi_i \sin \omega_i(t - t_0)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Что касается физической интерпретации ω_i и ϕ_i , об этом см. пример 9.6 и упражнение 9.8.

Дадим определение матрицы Φ , столбцы которой являются собственными векторами ϕ_i , а также диагональной матрицы Ω^2 , на диагонали которой хранятся собственные значения ω_i^2 ; то есть

$$\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]; \quad \Omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_n^2 \end{bmatrix}. \quad (9.39)$$

Мы можем записать n решений уравнения (9.36) в виде

$$\mathbf{K}\Phi = \mathbf{M}\Phi\Omega^2. \quad (9.40)$$

Если учесть, что собственные векторы являются ортонормированными с весом \mathbf{M} , то мы имеем

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Omega^2; \quad \Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I}. \quad (9.41)$$

Теперь очевидно, что матрица Φ может быть подходящей матрицей преобразования \mathbf{P} в соотношении (9.30). Используя формулу

$$\mathbf{U}(t) = \Phi \mathbf{X}(t), \quad (9.42)$$

мы получаем уравнения равновесия, которые соответствуют модальным обобщенным смещениям:

$$\ddot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{\Phi}^T \mathbf{C} \mathbf{\Phi} \dot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{\Omega}^2 \mathbf{X}(t) = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{R}(t). \quad (9.43)$$

Начальные условия для $\mathbf{X}(t)$ получаются, если использовать соотношения (9.42) и ортонормальность $\mathbf{\Phi}$ с весом \mathbf{M} ; это значит, что в нулевой момент времени мы имеем

$${}^0\mathbf{X} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} {}^0\mathbf{U}; \quad {}^0\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} {}^0\dot{\mathbf{U}}. \quad (9.44)$$

Уравнения (9.43) показывают, что если матрица демпфирования не включается в анализ, то конечно-элементные уравнения равновесия разъединяются, если только в матрице преобразования \mathbf{R} используются моды свободных колебаний конечно-элементной системы. Если учесть, что вывод матрицы демпфирования во многих случаях не может выполняться в явной форме и что эффекты демпфирования могут быть введены в анализ только в приближенной форме, то разумный подход связан с использованием такой матрицы демпфирования, которая включала бы в себя все необходимые эффекты, но в то же время позволяла бы строить эффективное решение уравнений равновесия. Во многих случаях анализа эффектами демпфирования полностью пренебрегается, и именно такой случай мы и обсудим в первую очередь.

Пример 9.6: Рассчитайте матрицу преобразования $\mathbf{\Phi}$ для задачи, рассмотренной в примерах 9.1–9.4, получая с ее помощью расцепленные уравнения равновесия на базе модальных векторов формы.

Для рассматриваемой системы имеем

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Обобщенная задача на собственные значения, которую нам нужно решить, принимает в результате вид

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \phi = \omega^2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \phi.$$

Решение строится с помощью одного из методов, представленных в главах 10 и 11. Здесь мы приводим без вывода два решения:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= 2; & \phi_1 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}; \\ \omega_2^2 &= 5; & \phi_2 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

На этом основании, если рассмотреть уравнения свободных колебаний системы

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}(t) + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{U}(t) = 0, \quad (a)$$

то оказываются возможными два следующих решения:

$$\mathbf{U}_1(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \sin \sqrt{2} (t - t_0^1) \quad \text{и} \quad \mathbf{U}_2(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix} \sin \sqrt{5} (t - t_0^2).$$

Тот факт, что векторы $\mathbf{U}_1(t)$ и $\mathbf{U}_2(t)$ действительно удовлетворяют соотношению (a), может быть легко проверен просто путем подстановки \mathbf{U}_1 и \mathbf{U}_2 в уравнения равновесия.

Фактическое решение уравнений (а) имеет форму

$$\mathbf{U}(t) = \alpha \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \sin \sqrt{2} (t - t_0^1) + \beta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix} \sin \sqrt{5} (t - t_0^2),$$

где α , β , t_0^1 и t_0^2 определяются начальными условиями для \mathbf{U} и $\dot{\mathbf{U}}$. В частности, если мы воспользуемся начальными условиями, соответствующими только α (или β), то мы найдем, что система колеблется по закону соответствующего собственного вектора с частотой $\sqrt{2}$ радиан/с (или $\sqrt{5}$ радиан/с). Общая процедура решения для α , β , t_0^1 и t_0^2 обсуждается в разделе 9.3.2.

После того, как мы дали оценку (ω_1^2, ϕ_1) и (ω_2^2, ϕ_2) для задачи из примеров 9.1–9.4, приходим к следующим уравнениям равновесия на базисе собственных векторов:

$$\ddot{\mathbf{X}}(t) + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix},$$

или

$$\ddot{\mathbf{X}}(t) + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \frac{10}{\sqrt{3}} \\ -10\sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix}.$$

9.3.2. Анализ, проводимый в пренебрежении демпфированием

Если зависящие от скорости эффекты демпфирования не включаются в анализ, то уравнение (9.43) приводится к виду

$$\ddot{\mathbf{X}}(t) + \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{X}(t) = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{R}(t), \quad (9.45)$$

иначе говоря, к n отдельным уравнениям, представляемым в форме

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_i(t) + \omega_i^2 x_i(t) &= r_i(t) \\ r_i(t) &= \phi_i^T \mathbf{R}(t) \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9.46)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} x_i|_{t=0} &= \phi_i^T \mathbf{M}^0 \mathbf{U}, \\ \dot{x}_i|_{t=0} &= \phi_i^T \mathbf{M}^0 \dot{\mathbf{U}}. \end{aligned}$$

Мы замечаем, что типичное уравнение из числа (9.46) за номером i представляет собой уравнение равновесия для системы с одной степенью свободы, имеющей единичную массу и жесткость ω_i^2 , с начальными условиями, получаемыми из (9.44). Решение каждого из уравнений (9.46) может быть получено путем использования алгоритмов интегрирования, приводимых в таблицах 9.1–9.4, или же его можно рассчитать с помощью интеграла Дюамеля:

$$x_i(t) = \frac{1}{\omega_i} \int_0^t r_i(\tau) \sin \omega_i(t - \tau) d\tau + \alpha_i \sin \omega_i t + \beta_i \cos \omega_i t, \quad (9.47)$$

где α_i и β_i определяются из начальных условий в (9.46). Интеграл Дюамеля в (9.47) может понадобиться определять численно. Кроме того, следует отметить, что для построения решения уравнений (9.46) могут быть использованы также и различные другие методы интегрирования.

Для определения полной реакции нужно рассчитать решение всех n уравнений из (9.46), $i = 1, 2, \dots, n$, а после этого смещения в узловых точках конечного элемента определяются путем суперпозиции реакций для каждой моды; иначе говоря, используя (9.42), мы получим

$$\mathbf{U}(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i x_i(t). \quad (9.48)$$

Таким образом, подводя итог сказанному, отметим, что анализ реакции путем суперпозиции выражений с различными модами требует, во-первых, решения задачи из уравнений (9.36) относительно собственных значений и собственных векторов, после чего — решения расщепленных уравнений равновесия из (9.46) и, наконец, суперпозиции реакций в форме каждого собственного вектора, как это выражено в (9.48). В процессе анализа собственные векторы представляют собой формы мод со свободными колебаниями для комплекса конечных элементов. Как уже упоминалось выше, выбор между анализом, основанным на суперпозиции мод, и схемой прямого интегрирования, описанной в разделе 9.2, — это выбор между схемами различной численной эффективности. Решения, получаемые при использовании любой из указанных процедур, являются идентичными с точностью до численных ошибок используемых схем интегрирования по времени (если одни и те же методы интегрирования по времени используются при прямом интегрировании и при решении уравнений (9.46), то и получаемые численные ошибки будут одинаковыми), а также ошибок округления в используемом компьютере.

Пример 9.7: Используйте суперпозицию мод, чтобы рассчитать представляемую в форме смещений реакцию системы, рассмотренной в примерах 9.1–9.4 и 9.6.

(1) Рассчитайте точную реакцию путем точного интегрирования каждого из двух, отделенных одно от другого, уравнений равновесия.

(2) Используйте для интегрирования по времени метод Ньюмарка с шагом по времени $\Delta t = 0,28$.

Мы установили форму отделенных друг от друга уравнений равновесия рассматриваемой системы в примере 9.6; это значит, что два уравнения равновесия, подлежащих решению, имеют вид

$$\ddot{x}_1 + 2x_1 = \frac{10}{\sqrt{3}}; \ddot{x}_2 + 5x_2 = -10\sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (a)$$

Начальные условия для этой системы имеют вид $\mathbf{U}|_{t=0} = 0$, $\dot{\mathbf{U}}|_{t=0} = 0$; следовательно, используя (9.46), мы имеем

$$\begin{aligned} x_1|_{t=0} = 0 \quad \dot{x}_1|_{t=0} = 0, \\ x_2|_{t=0} = 0 \quad \dot{x}_2|_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (b)$$

Кроме того, для определения \mathbf{U} нам нужно использовать соотношение (9.42), которое при использовании собственных векторов, рассчитанных в примере 9.6, дает

$$\mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix} \mathbf{X}(t). \quad (c)$$

Точные решения уравнений (a) с условиями (b) имеют форму

$$x_1 = \frac{5}{\sqrt{3}} (1 - \cos \sqrt{2} t); x_2 = 2\sqrt{\frac{2}{3}} (-1 + \cos \sqrt{5} t). \quad (d)$$

Следовательно, используя соотношение (c), мы имеем

$$\mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{3}} (1 - \cos \sqrt{2} t) \\ 2\sqrt{\frac{2}{3}} (-1 + \cos \sqrt{5} t) \end{bmatrix}. \quad (e)$$

Вычисляя смещения из соотношений (е) для моментов времени $\Delta t, 2\Delta t, \dots, 12\Delta t$, где $\Delta t = 0,28$, мы получаем

Время	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
$t\mathbf{U}$	0,003	0,038	0,176	0,486	0,996	1,66	2,338	2,861	3,052	2,806	2,131	1,157
	0,382	1,41	2,78	4,09	5,00	5,29	4,986	4,277	3,457	2,806	2,484	2,489

На рис. 9.3 полученные результаты сравниваются с реакцией, прогнозируемой с использованием центральных разностей, а также методами Хуболта, Уилсона θ и Ньюмарка в примерах 9.1–9.4 соответственно. Обсуждение, проводимое в разделе 9.4, покажет, что шаг по времени Δt , выбранный для вариантов прямого интегрирования, является сравнительно большим и, имея это в виду, можно отметить, что схемы прямого интегрирования предсказывают неплохую аппроксимацию точной реакции системы.

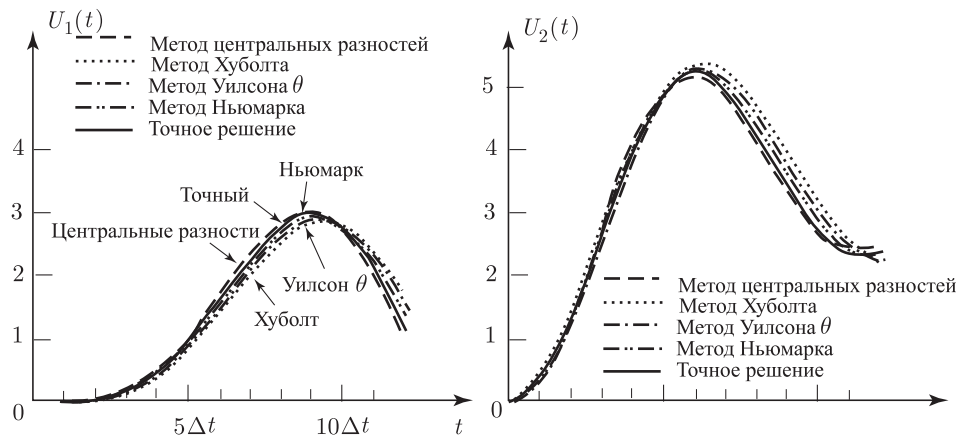


Рис. 9.3. Реакция по смещению для системы, рассмотренной в примерах 9.1, 9.2, 9.3, 9.4 и 9.7

Вместо того, чтобы вычислять точную реакцию, данную формулами (d), мы могли бы воспользоваться некой схемой численного интегрирования для решения уравнений (а). Здесь с этой целью мы применяем метод Ньюмарка и получаем:

Время	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$
$x_1(t)$	0,2258	0,8199	1,807	2,379	4,123	5,064
$x_2(t)$	-0,3046	-0,7920	-2,1239	-2,939	-3,258	-2,632
Время	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
$x_1(t)$	5,579	5,774	5,521	4,855	3,866	2,773
$x_2(t)$	-2,161	-1,156	-0,3307	-0,004083	-0,2482	-1,088

После того, как будет определен вектор $\mathbf{X}(t)$, мы подставляем результат в соотношение (с) и вычисляем решение для $U_1(t)$ и $U_2(t)$. Как и ожидалось, выясняется,

что прогнозируемая таким образом реакция в форме смещений оказывается той же самой, что и реакция, получаемая прямым интегрированием с использованием метода Ньюмарка.

Как это следует из проведенного выше обсуждения, единственная разница между суперпозицией мод и анализом на основе прямого интегрирования состоит в том, что интегрирование по времени предваряется изменением базиса, а именно, — переходом от конечно-элементного координатного базиса к базису собственных векторов обобщенной задачи о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \omega^2 \mathbf{M}\phi$. Если учесть, что одно и то же пространство охватывается как собственными векторами в количестве n , так и конечно-элементными смещениями в узловых точках, в том же количестве, то оба варианта анализа должны привести к одному и тому же решению. В силу этого выбор между тем, использовать ли прямое интегрирование или суперпозицию мод, будет определяться исключительно соображениями эффективности. Однако этот выбор может быть сделан только тогда, когда будет принята во внимание одна важная дополнительная особенность суперпозиции мод. Эта особенность связана с распределением и частотным содержанием нагрузки, и для некоторых разновидностей конструкции она делает решение с суперпозицией мод намного более эффективным, чем решение с применением прямого интегрирования.

Рассмотрим расцепленные уравнения равновесия в форме (9.46). Мы замечаем, что если $r_i(t) = 0$, $i = 1, \dots, n$, и если либо начальные смещения ${}^0\mathbf{U}$, либо начальные скорости ${}^0\dot{\mathbf{U}}$ являются кратными вектора ϕ_j , и только этого вектора, то отличной от нуля будет только функция $x_j(t)$, и конструкция будет колебаться только в соответствии с модой этой формы. На практике нестационарная реакция такого рода будет уменьшаться по своей величине вследствие демпфирования (см. раздел 9.3.3), и нередко эффект внешней нагрузки оказывается более важным.

В соответствии с вышеизложенным рассмотрим теперь случай, когда ${}^0\mathbf{U} = {}^0\dot{\mathbf{U}} = 0$ и когда нагрузка задается в форме $\mathbf{R}(t) = \mathbf{M}\phi_j f(t)$, где $f(t)$ представляет собой произвольную функцию t . В таком случае, если учесть, что $\phi_i^T \mathbf{M}\phi_j = \delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера), то мы приходим к выводу о том, что только функция $x_j(t)$ отлична от нуля. Эти условия являются довольно суровыми, и в общем случае анализа едва ли можно ожидать, что они будут соблюдаться применительно ко многим из n уравнений (9.46), так как в общем случае нагрузка является произвольной. Однако в дополнение к тому факту, что нагрузка может быть почти ортогональной к ϕ_i , именно частотное содержание нагрузки определяет, будет ли i -е уравнение из числа (9.46) вносить существенный вклад в общую реакцию. А именно, реакция $x_i(t)$ оказывается сравнительно большой, если частота возбуждения, содержащаяся в r_i , оказывается близкой к ω_i .

Чтобы продемонстрировать справедливость этих важных соображений, мы приводим даваемый ниже пример.

Пример 9.8: Рассмотрим систему, обладающую одной степенью свободы и описываемую уравнением равновесия

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = R \sin \hat{\omega} t$$

с начальными условиями

$$x|_{t=0} = 0, \quad \dot{x}|_{t=0} = 1. \quad (\text{a})$$

Для расчета реакции в форме смещения воспользуйтесь интегралом Дюамеля.

Мы видим, что система подвергается воздействию периодической внешней силы и имеет отличную от нуля начальную скорость. Используя выражение (9.47), мы получаем

$$x(t) = \frac{R}{\omega} \int_0^t \sin \hat{\omega} \tau \sin \omega(t - \tau) d\tau + \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t.$$

После взятия интеграла получаем

$$x(t) = \frac{R/\omega^2}{1 - \hat{\omega}^2/\omega^2} \sin \hat{\omega} t + \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t. \quad (\text{b})$$

Теперь нам нужно использовать начальные условия, чтобы определить α и β . В момент $t = 0$ решение имеет вид

$$\begin{aligned} x|_{t=0} &= \beta, \\ \dot{x}|_{t=0} &= \frac{R\hat{\omega}/\omega^2}{1 - \hat{\omega}^2/\omega^2} + \alpha\omega. \end{aligned}$$

Пользуясь условиями (а), получим

$$\beta = 0; \quad \alpha = \frac{1}{\omega} - \frac{R\hat{\omega}/\omega^3}{1 - \hat{\omega}^2/\omega^2}.$$

Подставляя выражения для α и β в соотношение (b), мы в результате получаем

$$x(t) = \frac{R/\omega^2}{1 - \hat{\omega}^2/\omega^2} \sin \hat{\omega}t + \left(\frac{1}{\omega} - \frac{R\hat{\omega}/\omega^3}{1 - \hat{\omega}^2/\omega^2} \right) \sin \omega t,$$

а эта формула может быть переписана в виде

$$x(t) = Dx_{\text{stat}} + x_{\text{trans}}, \quad (\text{c})$$

где x_{stat} — это статическая реакция системы,

$$x_{\text{stat}} = \frac{R}{\omega^2} \sin \hat{\omega}t,$$

тогда как x_{trans} — это нестационарная реакция,

$$x_{\text{trans}} = \left(\frac{1}{\omega} - \frac{R\hat{\omega}/\omega^3}{1 - \hat{\omega}^2/\omega^2} \right) \sin \omega t,$$

а D — это коэффициент динамической нагрузки, представление которого указывает на резонанс при $\hat{\omega} = \omega$,

$$D = \frac{1}{1 - \hat{\omega}^2/\omega^2}.$$

Анализ реакции системы с одной степенью свободы, проведенный на этом примере, показал, что полная реакция представляет собой сумму двух вкладов:

1. Динамическая реакция, полученная из статической путем умножения на коэффициент динамической нагрузки (это — частное решение определяющего дифференциального уравнения), и
2. Дополнительная динамическая реакция, которую мы назвали нестационарной реакцией.

Приведенные наблюдения относятся также и к реальному практическому анализу системы со многими степенями свободы, так как, во-первых, полная реакция получается как суперпозиция реакций, измеряемых для каждой модальной степени свободы, и, во-вторых, фактическая нагрузка может быть представлена посредством разложения Фурье, как суперпозиция гармонических вкладов с синусами и косинусами. Поэтому два вышеуказанных наблюдения могут быть применены к каждой модальной реакции, соответствующей каждой из компонент Фурье для нагрузки.

Однако важная разница между анализом реальной практической реакции и решением, данным в примере 9.8, состоит в том, что на практике эффект демпфирования должен быть включен в анализ, как это обсуждалось в разделе 9.3.3. Наличие демпфирования уменьшает коэффициент динамической нагрузки (который тогда не может стать бесконечно большим) и смягчает нестационарную реакцию.

На рис. 9.4 показан коэффициент динамической нагрузки как функция отношения $\hat{\omega}/\omega$ (и также коэффициента демпфирования ξ , обсуждаемого в разделе 9.3.3). Информация, приводимая на рис. 9.4, получается путем решения уравнения (9.54), как это сделано в примере 9.8. Если мы применим информацию, приводимую на этом рисунке, к анализу реальной практической системы, то обнаружим, что реакция в отношении мод колебаний при большом значении $\hat{\omega}/\omega$ оказывается пренебрежимо малой (нагрузки изменяются так быстро, что система не движется), и что статическая реакция измеряется, когда отношение $\hat{\omega}/\omega$ близко к нулю (нагрузки изменяются так медленно, что система просто статически следует за нагрузкой). Отсюда следует, что при анализе системы со многими степенями свободы реакция, реализуемая на высоких частотах системы (т. е. на частотах, значительно

превышающих самые высокие частоты, содержащиеся в нагрузках), представляет собой просто статическую реакцию.

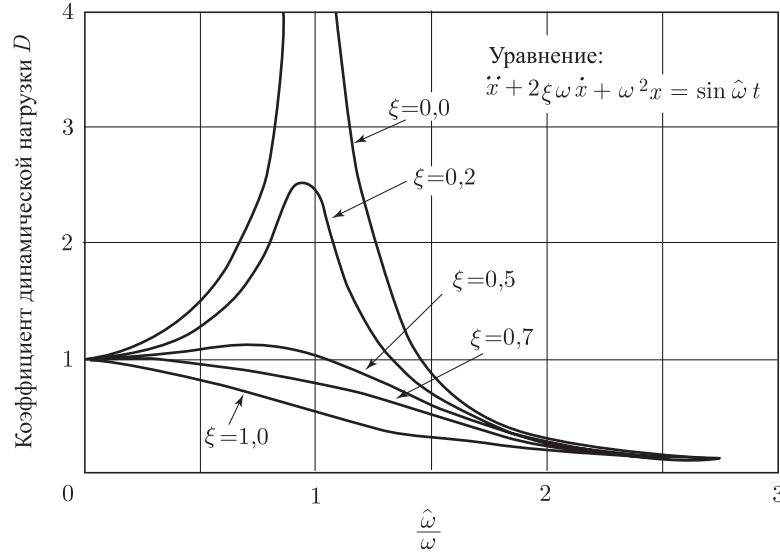


Рис. 9.4. Коэффициент динамической нагрузки

Существенная особенность решения для динамической реакции, основанного на суперпозиции мод, состоит в том, что зачастую только небольшая доля от общего числа расщепленных уравнений должна быть рассмотрена для того, чтобы получить хорошее приближение к точному решению уравнений (9.1). Чаще всего, только p первых уравнений из общего числа уравнений (9.46) должны быть использованы; иначе говоря, мы должны включить в анализ уравнения (9.46) только для $i = 1, 2, \dots, p$, где $p \ll n$, желая получить хорошее приближенное решение. Это означает, что мы должны строить решение только для p наименьших по номеру собственных значений и соответствующих им собственных векторов для задачи, сформулированной в (9.36), и, используя формулу (9.48), мы суммируем только реакцию для p первых мод; иначе говоря, мы используем формулу

$$\mathbf{U}^p = \sum_{i=1}^p \phi_i x_i(t), \quad (9.49)$$

где функция \mathbf{U}^p аппроксимирует точное решение \mathbf{U} уравнений (9.1).

Причина того, почему при практическом конечно-элементном анализе рассматриваются только моды с наименьшими номерами, лежит в полном процессе моделирования при динамическом анализе. А именно, до сих пор мы имели дело только с точным решением конечно-элементной системы уравнений равновесия (9.1). Однако в действительности мы хотели бы лишь получить хорошую аппроксимацию фактической точной реакции рассматриваемой нами математической модели. В разделе 4.3.3 мы показали, что при определенных условиях конечно-элементный анализ может интерпретироваться как анализ Ритца. В таком случае мы получаем только верхние границы точных значений частот для данной математической модели. Более того, в общем случае, даже если не удовлетворяются условия монотонной сходимости, все же конечно-элементный анализ наилучшим образом аппроксимирует наименьшие точные частоты, тогда как при аппроксимации более высоких частот и разновидностей мод можно ожидать лишь небольшую точность или вообще никакой. На этом основании обычно имеется мало оправдания для включения в анализ динамической реакции в модальных формах с высокими частотами. В реальных условиях конечно-элементная сетка должна выбираться так, чтобы все важные частоты и колебательные моды математической модели были хорошо аппроксимированы, и тогда

решение должно рассчитываться со включением в представление реакции только этих мод. Однако этого можно достичь точно, при использовании анализа с суперпозицией, за счет рассмотрения только важных мод конечно-элементной системы.

И в первую очередь именно в силу того, что при анализе с суперпозицией мод следует учитывать лишь небольшое количество мод, соответствующая процедура может оказаться гораздо более эффективной, чем процедура прямого интегрирования. Однако из сказанного следует также, что эффективность метода суперпозиции мод зависит от числа тех мод, которые должны быть включены в анализ. *В общем случае сама рассматриваемая конструкция, а также пространственное распределение и частотное содержание нагрузки определяют собой то число мод, которое нужно использовать.* Для случая нагрузки, создаваемой землетрясением, в некоторых случаях достаточно учесть только 10 наименьших мод, хотя порядок системы n может быть весьма большим. С другой стороны, в случае нагрузки от взрыва или от удара нужно, вообще говоря, включать в анализ гораздо большее число мод, и значение p может достигать величины $2n/3$. Наконец, при анализе возбуждения колебаний могут оказаться возбужденными лишь несколько промежуточных частот, как например, все частоты в интервале между нижним и верхним пределами частот, ω_l и ω_u соответственно.

При рассмотрении проблемы выбора числа тех мод, которые должны быть включены в анализ с суперпозицией мод, следует помнить о том, что отыскивается некое приближенное решение уравнений динамического равновесия (9.1). Поэтому, если учтено недостаточное число мод, то уравнения (9.1) не будут решены с достаточной точностью. Но это означает, по существу, что равновесие, включающее учет сил инерции, не будет удовлетворяться при той приближенной форме реакции, которая рассчитана. Если обозначить символом \mathbf{U}^p ту реакцию, которая прогнозируется посредством суперпозиции мод при принятии во внимание p мод, то показатель точности анализа в произвольный момент времени t получается путем расчета некоторого критерия ошибки ϵ^p , такого, как

$$\epsilon^p(t) = \frac{\|\mathbf{R}(t) - [\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^p(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}^p(t)]\|_2}{\|\mathbf{R}(t)\|_2}, \quad (9.50)$$

где мы предполагаем, что $\|\mathbf{R}(t)\|_2 \neq 0$. Если получено хорошее приближенное решение системы уравнений равновесия (9.1), то $\epsilon^p(t)$ будет малым в любой момент времени t . Однако реакция $\mathbf{U}^p(t)$ должна была быть получена путем точного вычисления реакции в каждой из p рассматриваемых мод, потому что единственный вид ошибки на этом пути сводится к тому, что в анализ может быть включено недостаточное число мод.

Критерий ошибки ϵ^p , рассчитываемый согласно (9.50), определяет, насколько хорошо соблюдается равновесие с учетом инерционных сил, и служит мерой наличия нагрузок в узловых точках, не уравновешенных ни силами инерции, ни упругими силами в тех же точках (см. (9.2)). Выражаясь по-иному, мы можем сказать, что ϵ^p является мерой той части вектора внешних нагрузок, которая не была включена в анализ с суперпозицией мод. Если учесть, что $\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n r_i \mathbf{M}\phi_i$, то мы можем вычислить

$$\Delta \mathbf{R} = \mathbf{R} - \sum_{i=1}^p r_i (\mathbf{M}\phi_i). \quad (9.51)$$

При рассмотрении надлежащим образом промоделированной задачи реакция по отношению к $\Delta \mathbf{R}$ должна быть, самое большее, статической реакцией. Поэтому качественная поправка $\Delta \mathbf{U}$ к решению \mathbf{U}^p , построенному с помощью суперпозиции мод, может быть определена из соотношения

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{U}(t) = \Delta \mathbf{R}(t), \quad (9.52)$$

решение которого может потребоваться только для определенных моментов времени, при которых замеряется максимальная реакция. Поправку $\Delta \mathbf{U}$, рассчитанную с помощью (9.52), мы называем *статической поправкой*.

Поэтому, если резюмировать сказанное выше, то в предположении о том, что рассчитанные уравнения (9.46) были решены точно, ошибки при анализе с суперпозицией мод, при $p < n$, обусловлены тем, что было использовано недостаточное число мод, тогда

как при анализе с прямым интегрированием ошибки возникают вследствие применения слишком большого шага по времени.

Проведенное выше обсуждение может создать впечатление о том, что процедура суперпозиции мод обладает неотъемлемым преимуществом перед прямым интегрированием, выражаемым в том, что высокие и, возможно, неточно вычисляемые частоты конечно-элементной системы не включаются в анализ. Однако, если предположить, что при конечно-элементном анализе все важные частоты представлены правильно, и подразумевать при этом, что пренебрегаемая нами динамическая реакция рассчитывается по тем модам, которые представлены неточно, то включение в динамическую реакцию конечно-элементной системы именно этих мод не окажет серьезного влияния на точность решения. Кроме того, в разделе 9.4 мы будем обсуждать вопрос о том, что при прямом интегрировании в неявной форме можно воспользоваться также тем преимуществом, что точно интегрироваться должны только первые p уравнений (9.46). Это достигается за счет применения безусловно устойчивого метода прямого интегрирования и надлежащего выбора шага по времени при интегрировании Δt , который, в общем случае, оказывается намного больше шага, используемого при применении условно устойчивой схемы интегрирования.

9.3.3. Анализ, проводимый с учетом демпфирования

Общая форма уравнений равновесия конечно-элементной системы в базисе собственных векторов ϕ_i , $i = 1, \dots, n$ была дана в уравнениях (9.43), которые показывают, что при условии пренебрежения эффектами демпфирования уравнения равновесия расщепляются, и интегрирование по времени может проводиться для каждого уравнения по отдельности. Если рассматривать анализ систем, для которых нельзя пренебречь эффектами демпфирования, мы все-таки хотели бы иметь дело с расщепленными уравнениями равновесия (9.43) и использовать, в основном, одну и ту же вычислительную процедуру независимо от того, включаются ли эффекты демпфирования, или ими пренебрегается. В общем случае матрица демпфирования \mathbf{C} не может быть скомпонована из матриц демпфирования элементов так, как это делалось по отношению к матрицам масс и жесткости комплекса элементов, и вводится для того, чтобы аппроксимировать суммарную энергию диссипации во время реакции системы (см., например, работу [Clough, Penzien 1975]). Анализ с суперпозицией мод является особенно эффективным, если можно предположить, что демпфирование является пропорциональным, а в этом случае

$$\phi_i^T \mathbf{C} \phi_j = 2\omega_i \xi_i \delta_{ij}, \quad (9.53)$$

где ξ_i — это параметр модального демпфирования, а δ_{ij} — дельта Кронекера ($\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$). Поэтому, если используется (9.53), то предполагается, что собственные векторы ϕ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, являются также ортогональными относительно матрицы \mathbf{C} , а уравнения (9.43) приводятся к n уравнениям вида

$$\ddot{x}_i(t) + 2\omega_i \xi_i \dot{x}_i(t) + \omega_i^2 x_i(t) = r_i(t), \quad (9.54)$$

где $r_i(t)$ и начальные условия для $x_i(t)$ уже были заданы в (9.46). Мы замечаем, что уравнение (9.54) представляет собой уравнение равновесия, определяющее движение системы с одной степенью свободы, рассмотренной в (9.46), когда ξ_i есть параметр демпфирования.

Если уравнение (9.53) используется для того, чтобы учесть воздействие эффектов демпфирования, то процедура решения конечно-элементных уравнений равновесия (9.43) остается той же самой, что и в случае, когда демпфированием пренебрегают (см. раздел 9.3.2), за исключением того, что реакция для каждой моды определяется путем решения уравнения (9.54). Эта реакция может быть рассчитана с использованием такой схемы интегрирования, как приведенные в таблицах 9.1–9.4 или путем вычисления интеграла Дюамеля, чтобы получить

$$x_i(t) = \frac{1}{\bar{\omega}_i} \int_0^t r_i(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \sin \bar{\omega}_i (t-\tau) d\tau + e^{-\xi_i \omega_i t} (\alpha_i \sin \bar{\omega}_i t + \beta_i \cos \bar{\omega}_i t), \quad (9.55)$$

где

$$\bar{\omega}_i = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2},$$

тогда как α_i и β_i вычисляются с помощью начальных условий из (9.46).

Если вдуматься в смысл применения соотношения (9.53) для того, чтобы учесть влияние эффектов демпфирования, то можно высказать следующее. Во-первых, соотношение (9.53) предполагает, что полное демпфирование применительно к данной конструкции представляет собой сумму отдельных значений демпфирования для каждой моды. Демпфирование для одной моды могло бы наблюдаться, например, путем наложения начальных условий, соответствующих только этой моде (например, ${}^0\mathbf{U} = \phi_i$ для моды i), и измерения амплитуды затухания в процессе свободно демпфируемых колебаний. Фактически весьма важной чертой является способность измерять значения параметров демпфирования ξ_i , и тем самым во многих случаях аппроксимировать в реалистической форме демпфирующие свойства конструктивной системы в целом. Второе соображение, касающееся анализа с суперпозицией мод, состоит в том, что для построения численного решения конечно-элементных уравнений равновесия (9.1) с использованием расщепленных уравнений (9.54) мы не вычисляем матрицу демпфирования \mathbf{C} , ограничиваясь лишь расчетом матриц жесткости и массы, \mathbf{K} и \mathbf{M} .

Таким образом, мы можем без труда учесть эффекты демпфирования при анализе с суперпозицией мод, если только удовлетворяется соотношение (9.53). Предположим, однако, что с точки зрения численного расчета было бы более эффективным использовать прямое пошаговое интегрирование при известных реалистических значениях параметра демпфирования ξ_i , $i = 1, \dots, r$. В этом случае матрицу \mathbf{C} необходимо вычислять в явной форме, и после подстановки этой матрицы в соотношение (9.53) получить установившиеся значения параметров демпфирования ξ_i . В случае $r = 2$ можно предположить появление матрицы демпфирования Рэлея, имеющей форму

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}, \quad (9.56)$$

где α и β — постоянные, которые следует определять по данным о двух заданных параметрах демпфирования, соответствующих двум, не равным между собой, частотам колебаний.

Пример 9.9: Предположим, что для системы со многими степенями свободы $\omega_1 = 2$ и $\omega_2 = 3$, и что для этих двух мод мы требуем, соответственно, критических значений демпфирования в 2 процента и 10 процентов; иначе говоря, требуются значения параметров $\xi_1 = 0,02$ и $\xi_2 = 0,10$. Необходимо определить постоянные α и β для матрицы демпфирования Рэлея, что можно было выполнить прямое пошаговое интегрирование.

При наличии матрицы демпфирования Рэлея мы имеем

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}. \quad (a)$$

Однако, пользуясь соотношением (9.53) и формулой (a), получим

$$\phi_i^T (\alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}) \phi_i = 2\omega_i \xi_i,$$

или

$$\alpha + \beta\omega_i^2 = 2\omega_i \xi_i. \quad (b)$$

Подставляя в это соотношение ω_1 , ξ_1 и ω_2 , ξ_2 , получим два уравнения для α и β ,

$$\begin{aligned} \alpha + 4\beta &= 0,08, \\ \alpha + 9\beta &= 0,60. \end{aligned} \quad (c)$$

Уравнения (c) дают решение $\alpha = -0,336$ и $\beta = 0,104$. Следовательно, та матрица демпфирования, которую следует использовать, имеет вид

$$\mathbf{C} = -0,336\mathbf{M} + 0,104\mathbf{K}. \quad (d)$$

При известной матрице демпфирования мы можем определить параметр демпфирования, фиксируемый при любом значении ω_i , когда используется матрица демпфирования Рэлея, соответствующая формуле (d). А именно, соотношение (b) дает

$$\xi_i = \frac{-0,336 + 0,104\omega_i^2}{2\omega_i}$$

при всех значениях ω_i .

При проведении фактического анализа вполне возможно, что параметры демпфирования известны для числа частот, значительно большего, чем два. В этом случае для

вычисления α и β используются два приближенных значения, например, $\bar{\xi}_1$ и $\bar{\xi}_2$. Рассмотрим приводимый ниже пример.

Пример 9.10: Предположим, что для системы со многими степенями свободы приближенные значения параметра демпфирования задаются в виде:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= 0,002; & \omega_1 &= 2; & \xi_2 &= 0,03; & \omega_2 &= 3; \\ \xi_3 &= 0,04; & \omega_3 &= 7; & \xi_4 &= 0,10; & \omega_4 &= 15; \\ \xi_5 &= 0,14; & \omega_5 &= 19.\end{aligned}$$

Выберите надлежащие значения α и β для матрицы демпфирования Рэлея.

Как и в примере 9.9, мы определяем α и β из соотношения

$$\alpha + \beta\omega_i^2 = 2\omega_i\xi_i. \quad (a)$$

Однако α и β определяются только по двум парам значений, ξ_1, ω_1 и ξ_2, ω_2 . Учитывая распределение частот, мы используем

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_1 &= 0,03; & \bar{\omega}_1 &= 4; \\ \bar{\xi}_2 &= 0,12; & \bar{\omega}_2 &= 17.\end{aligned} \quad (b)$$

Подставляя значения (b) в формулу (a), получим

$$\alpha + 16\beta = 0,24,$$

$$\alpha + 289\beta = 4,08.$$

Следовательно, $\alpha = 0,01498$, $\beta = 0,01405$, и мы получаем

$$\mathbf{C} = 0,01498\mathbf{M} + 0,01405\mathbf{K}. \quad (c)$$

Теперь мы можем рассчитать, какие именно параметры демпфирования применяются при использовании матрицы демпфирования \mathbf{C} , выражаемой согласно формуле (c). По формуле (a) мы получаем

$$\xi_i = \frac{0,01498 + 0,01405\omega_i^2}{2\omega_i}.$$

На рис. 9.5 демонстрируется поведение параметра ξ_i , как функции ω_i ; здесь же, основываясь на использовании ξ_i в уравнении (9.54), мы указываем на области демпфирования, «пропорциональные массе» и «пропорциональные жесткости».

Как можно сделать вывод на основании процедуры расчета α и β в примерах 9.9 и 9.10, если для определения \mathbf{C} нужно использовать более двух параметров демпфирования, то следует применить и более общую форму матрицы демпфирования. Предположим, что для определения \mathbf{C} задаются r параметров демпфирования ξ_i , $i = 1, 2, \dots, r$. Тогда матрица демпфирования, удовлетворяющая соотношению (9.53), определяется с помощью использования ряда Коши,

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} \sum_{k=0}^{r-1} a_k [\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}]^k, \quad (9.57)$$

где коэффициенты a_k , $k = 0, \dots, r-1$, вычисляются путем решения системы из r уравнений

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left(\frac{a_0}{\omega_i} + a_1\omega_i + a_2\omega_i^3 + \dots + a_{r-1}\omega_i^{2r-3} \right).$$

Следует отметить, что при $r = 2$ формула (9.57) превращается в формулу для матрицы демпфирования Рэлея, представленную в (9.56). Важное наблюдение состоит в том, что если $r > 2$, то матрица демпфирования, соответствующая (9.57), оказывается, вообще говоря, полной матрицей. С учетом того, что стоимость анализа очень существенно возрастает, если матрица демпфирования не является ленточной, то в большинстве случаев практического анализа с применением прямого интегрирования предполагается, что эта матрица является матрицей Рэлея. Недостаток демпфирования по Рэлею состоит в том, что более высокие моды демпфируются значительно сильнее, чем более низкие, именно для которых выбирались постоянные Рэлея (см. пример 9.10).

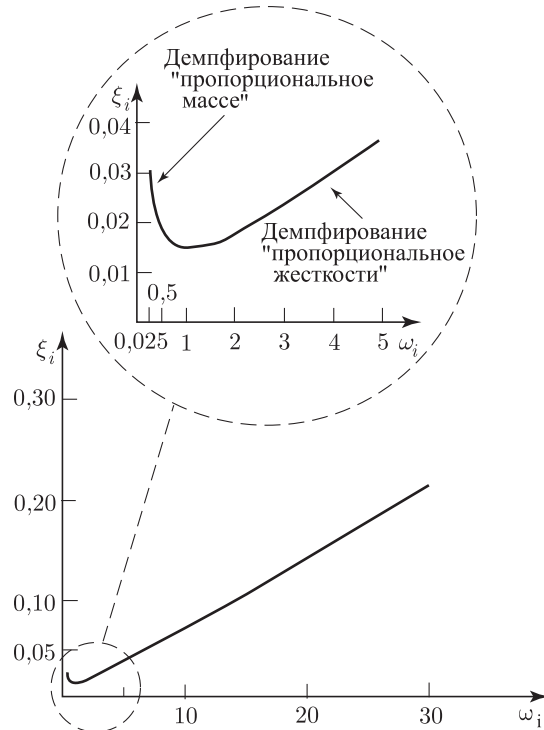


Рис. 9.5. Демпфирование как функция частоты

На практике при анализе конкретной конструкции часто могут быть выбраны различные значения коэффициентов Рэлея посредством использования имеющейся информации о характеристиках демпфирования в применении к типичной конструкции подобного рода; это означает, что примерно одни и те же значения α и β используются при анализе аналогичных конструкций. Величины коэффициентов Рэлея в значительной степени определяются характеристиками конструкции и ее материалов, касающимися диссипации энергии.

При проведенном выше обсуждении мы предполагали, что характеристики демпфирования для данной конструкции могут быть надлежащим образом представлены путем использования пропорционального демпфирования либо при анализе с суперпозицией мод, либо при применении процедуры прямого интегрирования. При многих разновидностях анализа предположение о пропорциональном демпфировании (т. е. об удовлетворении соотношения (9.53)) является адекватным. Однако при анализе конструкций с существенно меняющимися свойствами материалов может понадобиться использовать непропорциональное демпфирование. Например, при анализе задач о взаимодействии конструкции с фундаментом значительно большая доля демпфирования может наблюдаться не в поверхностной конструкции, а в фундаменте. В этом случае может оказаться разумным при построении матрицы демпфирования приписать различные коэффициенты Рэлея α и β различным частям конструкции, а это приведет к тому, что матрица демпфирования не будет удовлетворять соотношению (9.53). Другой вариант непропорционального демпфирования встречается тогда, когда имеются в наличии сконцентрированные амортизаторы, соответствующие конкретным степеням свободы (например, в точках опоры конструкции).

Решение конечно-элементной системы уравнений равновесия с непропорциональным демпфированием может быть построено при использовании алгоритмов прямого интегрирования, приведенных в таблицах 9.1–9.4. Эти алгоритмы не нуждаются в модификации, так как свойства матрицы демпфирования не фигурировали при выводе процедур

решения. С другой стороны, если рассматривать анализ с суперпозицией мод и использовать при этом в качестве базовых векторов свободно-колебательные моды без учета демпфирования, то мы обнаружим, что матрица $\Phi^T \mathbf{C} \Phi$ в уравнении (9.43) в случае непропорционального демпфирования является полной матрицей. Другими словами, уравнения равновесия в базисе векторов формы моды уже не будут расщепленными. Однако если можно предположить, что первичная реакция системы все еще содержится в подпространстве, охватываемом векторами ϕ_1, \dots, ϕ_p , то в уравнении (9.43) необходимо рассматривать только первые p уравнений. Если предположить, что связь, имеющаяся в демпфирующей матрице $\Phi^T \mathbf{C} \Phi$ между x_i , $i = p + 1, \dots, n$, может быть пренебрежимо малой, то первые p уравнений из (9.43) отделяются от уравнений с номерами от $p + 1$ до n и могут быть решены с помощью прямого интегрирования при использовании алгоритмов в таблицах 9.1–9.4 (см. пример 9.11). При альтернативной процедуре анализа расщепление конечно-элементных уравнений равновесия достигается с помощью решения задачи на собственные значения в квадратичной форме, а в этом случае вычисляются комплексные значения частот и колебательных мод (см. работу [Wilkinson, 1965-1]).

Пример 9.11: Рассмотрите решение уравнений равновесия

$$\begin{bmatrix} 1/2 & & \\ & 1 & \\ & & 1/2 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} + \begin{bmatrix} 0,1 & & \\ & 0 & \\ & & 0,5 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{U}} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{U} = \mathbf{R}(t). \quad (\text{a})$$

Моды свободных колебаний с пренебрежимо малым демпфированием и соответствующие частоты колебаний вычисляются в примере 10.4 и имеют вид

$$\Phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}; \quad \Omega^2 = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 4 & \\ & & 6 \end{bmatrix}.$$

Преобразуем уравнения равновесия (а) в соотношения равновесия, представленные в базисе колебательных мод.

Используя формулу преобразования $\mathbf{U} = \Phi \mathbf{X}$, мы получаем соотношения равновесия, соответствующие уравнениям (9.43),

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{X}}(t) + \begin{bmatrix} 0,3 & -0,2\sqrt{2} & -0,3 \\ -0,2\sqrt{2} & 0,6 & 0,2\sqrt{2} \\ -0,3 & 0,2\sqrt{2} & 0,3 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{X}}(t) + \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 4 & \\ & & 6 \end{bmatrix} \mathbf{X}(t) = \\ = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \mathbf{R}(t). \quad (\text{b}) \end{aligned}$$

Теперь, если бы было известно, что вследствие специфического характера приложенной нагрузки главная реакция лежит только в первой колебательной моде, то мы могли бы получить приближенную форму реакции, решая только уравнение

$$\ddot{x}_1(t) + 0,3\dot{x}_1(t) + 2x_1(t) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \mathbf{R}(t) \quad (\text{c})$$

и после этого вычисляя

$$\mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} x_1(t).$$

Однако, следует заметить, что так как матрица ${}^T\mathbf{C}\Phi$ в уравнении (b) является полной, то решение уравнения (c) в форме $x_1(t)$ не дает истинной реакции в первой моде ввиду того, что было пренебрежено объединением форм демпфирования.

9.3.4. Упражнения

- 9.7. Постройте решение конечно-элементных уравнений из упражнения 9.1 с помощью суперпозиции мод, используя при этом все моды рассматриваемой системы (см. пример 9.6).
- 9.8. Рассмотрите конечно-элементную систему из упражнения 9.1.
- Определите вектор нагрузки, который будет возбуждать только вторую моду данной системы.
 - Предположите, что $\mathbf{R} = 0$ и ${}^0\mathbf{U} = 0$, но ${}^0\dot{\mathbf{U}} \neq 0$. Определите то значение ${}^0\dot{\mathbf{U}}$, которое заставит систему колебаться только в ее первой моде.
- 9.9. Рассчитайте кривую, соответствующую $\xi = 0,2$ и данную на рис. 9.4.
- 9.10. Выполните решение уравнений, приведенных в упражнении 9.1, с помощью суперпозиции мод, но используя при этом только наинизшую моду. Рассчитайте также статическую поправку (т. е. когда в (9.51) мы имеем $p = 1$).
- 9.11. Определите такую матрицу демпфирования \mathbf{C} для системы, рассмотренной в упражнении 9.1, при которой модальные параметры демпфирования равны $\xi_1 = 0,02$ и $\xi_2 = 0,08$.
- 9.12. Конечно-элементная система имеет следующие частоты: $\omega_1 = 1,2$, $\omega_2 = 2,3$, $\omega_3 = 2$, $\omega_4 = 3,1$, $\omega_5 = 4,9$, $\omega_6 = 10,1$. Модальные параметры демпфирования при ω_1 и ω_4 будут равны $\xi_1 = 0,04$ и $\xi_4 = 0,10$ соответственно. Рассчитайте матрицу демпфирования Рэлея и вычислите параметры демпфирования, используемые при других частотах.

9.4. Анализ методов прямого интегрирования

В предшествующих разделах мы представили две основные процедуры, используемые для решения уравнений динамического равновесия

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) = \mathbf{R}(t), \quad (9.58)$$

где матрицы и векторы были определены в разделе 9.1. Двумя упомянутыми процедурами были суперпозиция мод и прямое интегрирование. Рассмотренными схемами интегрирования были метод центральных разностей, метод Хуболта, метод Уилсона θ и процедура интегрирования Ньюмарка (см. таблицы 9.1–9.4). Мы установили, что при использовании схемы с центральными разностями должен использоваться шаг по времени Δt меньше критического шага Δt_{cr} ; однако при применении трех других схем интегрирования подобное ограничение шага по времени не требуется.

Важное наблюдение состояло в том, что стоимость анализа с прямым интегрированием (т. е. число требуемых операций) прямо пропорционально числу шагов по времени, требуемому для решения. Следовательно, выбор надлежащего шага по времени при прямом интегрировании является очень важным. С одной стороны, этот шаг по времени должен быть достаточно малым для обеспечения точности решения; однако, с другой стороны, шаг по времени не должен быть меньше, чем это необходимо, потому что решение, построенное с таким шагом по времени, стоит дороже, чем это практически нужно. В этом разделе

наша цель состоит в подробном обсуждении проблемы выбора надлежащего шага по времени Δt при прямом интегрировании. Два основных понятия, которые при этом следует учитывать, — это понятия об устойчивости и о точности схем интегрирования. Анализ характеристик устойчивости и точности методов интегрирования позволяет определить важнейшие направления для выбора надлежащего шага по времени.

Первое важное наблюдение, связанное с анализом метода прямого интегрирования, — это взаимозависимость между суперпозицией мод и прямым интегрированием. В разделе 9.3 мы указали на то, что, по существу, при использовании любой процедуры решение строится с помощью численного интегрирования. Однако при анализе с суперпозицией мод замена базиса из узловых смещений для конечных элементов на базис из собственных векторов обобщенной задачи на собственные значения, т. е. применение соотношения

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\phi} = \omega^2 \mathbf{M}\boldsymbol{\phi} \quad (9.59)$$

осуществляется до проведения интегрирования по времени. Если записать

$$\mathbf{U}(t) = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{X}(t), \quad (9.60)$$

где столбцы матрицы $\boldsymbol{\Phi}$ представляют собой собственные векторы $\boldsymbol{\phi}_1, \dots, \boldsymbol{\phi}_n$ (моды свободных колебаний), ортонормированные по отношению к \mathbf{M} и, подставляя выражение $\mathbf{U}(t)$ в уравнение (9.58), мы получаем

$$\ddot{\mathbf{X}}(t) + \boldsymbol{\Delta} \dot{\mathbf{X}}(t) + \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{X}(t) = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{R}(t), \quad (9.61)$$

где $\boldsymbol{\Omega}^2$ — это диагональная матрица, содержащая собственные значения для (9.59) (квадраты частот свободных колебаний) $\omega_1^2, \dots, \omega_n^2$. Если предположить, что демпфирование является пропорциональным, то $\boldsymbol{\Delta}$ представляет собой диагональную матрицу, $\boldsymbol{\Delta} = \text{diag}(2\omega_i \xi_i)$, где ξ_i является параметром демпфирования для i -й моды.

Уравнение (9.61) состоит из n нерасцепленных уравнений, которые могут быть решены, например, с помощью интеграла Дюамеля. В качестве альтернативы может быть применена одна из схем численного интегрирования, рассмотренных в качестве процедур прямого интегрирования. Если учесть, что периоды колебаний T_i , $i = 1, \dots, n$, известны, где $T_i = 2\pi/\omega_i$, то мы можем выбрать при численном интегрировании каждого из уравнений (9.61) надлежащий шаг по времени, обеспечивающий требуемый уровень точности. С другой стороны, если все n уравнений (9.61) интегрируются с использованием одного и того же шага по времени Δt , то анализ с суперпозицией мод является абсолютно эквивалентным анализу с прямым интегрированием, в котором применяется тот же шаг по времени Δt и та же схема интегрирования. Другими словами, решение конечно-элементной системы уравнений равновесия было бы вполне идентичным при использовании как одной, так и другой процедуры. Поэтому для исследования точности прямого интегрирования мы можем сосредоточить свое внимание на интегрировании уравнений (9.61) с обычным шагом по времени Δt вместо рассмотрения уравнений (9.58). Если следовать этим путем, то переменными, которые должны рассматриваться при анализе устойчивости и точности метода прямого интегрирования, являются только Δt , ω_i и ξ_i , $i = 1, \dots, n$, а не все элементы матриц жесткости, масс и демпфирования. Более того, постольку, поскольку все n уравнений (9.61) подобны друг другу, мы должны изучить только интегрирование одной типичной строки из (9.61), которую можно записать в виде

$$\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2 x = r \quad (9.62)$$

и которая является уравнением равновесия, определяющим движение системы с одной степенью свободы, имеющей период свободных колебаний T , параметр демпфирования ξ и приложенную извне нагрузку r .

Здесь можно упомянуть о том, что процедура изменения базиса, т. е. использование преобразования (9.60), применяется также при анализе сходимости методов решения с собственными значениями и собственными векторами (см. раздел 11.2). Причина проведения преобразований в разделе 11.2 та же самая, что и прежде, — а именно, та, что при анализе должно рассматриваться гораздо меньшее число переменных.

Что касается характеристик решения при методе прямого интегрирования, то, в силу вышесказанного, проблема сводится к оценке ошибок интегрирования при решении уравнения (9.62) в зависимости от $\Delta t/T$, ξ и r . Такого рода исследования можно

найти, например, в книгах [Collatz 1966] и [Richtmyer, Morton, 1967]. При проведении последующего обсуждения мы применяем сравнительно простую процедуру, первым этапом которой является расчет операторов аппроксимации и нагрузки, которые связывали бы в явной форме неизвестные искомые переменные в момент времени $t + \Delta t$ с величинами, рассчитанными ранее (см. работу [Bathe, Wilson, 1973-1]).

9.4.1. Операторы аппроксимации и нагрузки при прямом интегрировании

Как это делалось при обосновании методов прямого интегрирования (см. раздел 9.2), предположим, что мы получили искомое решение для дискретных значений времени $0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots, t - \Delta t, t$, и что следующим требуется определить решение для момента времени $t + \Delta t$. Тогда при использовании конкретного метода из числа рассмотренных, мы ставим своей целью установить следующее рекуррентное соотношение:

$${}^{t+\Delta t}\widehat{\mathbf{X}} = \mathbf{A} {}^t\widehat{\mathbf{X}} + \mathbf{L}({}^{t+\nu}r), \quad (9.63)$$

где ${}^{t+\Delta t}\widehat{\mathbf{X}}$ и ${}^t\widehat{\mathbf{X}}$ — это векторы, хранящие в своих ячейках памяти величины, связанные с решением (например, смещения или скорости), а ${}^{t+\nu}r$ — это нагрузка в момент времени $t + \nu$. Как мы увидим, величина ν может быть равна $0, \Delta t$ или $\theta \Delta t$ в зависимости от рассматриваемого метода интегрирования. Матрица \mathbf{A} и вектор \mathbf{L} представляют собой операторы аппроксимации интегрирования и нагрузки соответственно. Каждая из величин, фигурирующих в (9.63), зависит от конкретной схемы интегрирования, применяемой при анализе. Однако прежде чем определить форму матриц и векторов, соответствующих различным процедурам интегрирования, отметим, что соотношение (9.63) может быть использовано для расчета решения в любой момент времени $t + \Delta t$. А именно, если применять (9.63) рекуррентно, то мы получим

$$\begin{aligned} {}^{t+n\Delta t}\widehat{\mathbf{X}} &= \mathbf{A}^n {}^t\widehat{\mathbf{X}} + \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{L}({}^{t+\nu}r) + \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{L}({}^{t+\Delta t+\nu}r) + \dots \\ &+ \mathbf{A}\mathbf{L}({}^{t+(n-2)\Delta t+\nu}r) + \mathbf{L}({}^{t+(n-1)\Delta t+\nu}r). \end{aligned} \quad (9.64)$$

Именно это соотношение мы будем использовать для исследования устойчивости и точности методов интегрирования. В последующих разделах мы определяем форму операторов \mathbf{A} и \mathbf{L} для различных методов интегрирования из числа рассматриваемых, где мы ссылаемся на материал, представленный в разделах 9.2.1–9.2.4.

Метод центральных разностей. При использовании схемы интегрирования с центральными разностями мы применяем формулы (9.3) и (9.4) для аппроксимации ускорения и скорости в момент времени t , соответственно. Уравнение равновесия (9.62) рассматривается в момент времени t ; это значит, что мы используем выражения

$${}^t\ddot{x} + 2\xi\omega {}^t\dot{x} + \omega^2 {}^tx = {}^tr, \quad (9.65)$$

$${}^t\ddot{x} = \frac{1}{\Delta t^2} ({}^{t-\Delta t}x - 2{}^tx + {}^{t+\Delta t}x), \quad (9.66)$$

$${}^t\dot{x} = \frac{1}{2\Delta t} (-{}^{t-\Delta t}x + {}^{t+\Delta t}x). \quad (9.67)$$

Подставляя выражения (9.66) и (9.67) в уравнение (9.65) и разрешая относительно ${}^{t+\Delta t}x$, мы получаем

$${}^{t+\Delta t}x = \frac{2 - \omega^2 \Delta t^2}{1 + \xi\omega \Delta t} {}^tx + \frac{1 - \xi\omega \Delta t}{1 + \xi\omega \Delta t} {}^{t-\Delta t}x + \frac{\Delta t^2}{1 + \xi\omega \Delta t} {}^tr. \quad (9.68)$$

Решение (9.68) может быть записано в форме (9.63); это значит, что

$$\begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}x \\ {}^tx \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} {}^tx \\ {}^{t-\Delta t}x \end{bmatrix} + \mathbf{L} {}^tr, \quad (9.69)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{2 - \omega^2 \Delta t^2}{1 + \xi \omega \Delta t} & -\frac{1 - \xi \omega \Delta t}{1 + \xi \omega \Delta t} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.70)$$

и

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{1 + \xi \omega \Delta t} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (9.71)$$

Как мы указывали в разделе 9.2.1, этот метод обычно применяется при $\xi = 0$.

Метод Хуболта. При использовании схемы интегрирования по Хуболту уравнение равновесия (9.62) рассматривается в момент времени $t + \Delta t$ и две формулы с разностями назад применяются для представления ускорения и скорости в указанный момент времени; иначе говоря, мы применяем формулы

$${}^{t+\Delta t}\ddot{x} + 2\xi\omega {}^{t+\Delta t}\dot{x} + \omega^2 {}^{t+\Delta t}x = {}^{t+\Delta t}r, \quad (9.72)$$

$${}^{t+\Delta t}\ddot{x} = \frac{1}{\Delta t^2} (2 {}^{t+\Delta t}x - 5 {}^tx + 4 {}^{t-\Delta t}x - {}^{t-2\Delta t}x), \quad (9.73)$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{x} = \frac{1}{6\Delta t} (11 {}^{t+\Delta t}x - 18 {}^tx + 9 {}^{t-\Delta t}x - 2 {}^{t-2\Delta t}x). \quad (9.74)$$

Подставляя выражения (9.73) и (9.74) в уравнение (9.72), мы можем сформулировать соотношение

$$\begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}x \\ {}^tx \\ {}^{t-\Delta t}x \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} {}^tx \\ {}^{t-\Delta t}x \\ {}^{t-2\Delta t}x \end{bmatrix} + \mathbf{L} {}^{t+\Delta t}r, \quad (9.75)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{5\beta}{\omega^2 \Delta t^2} + 6\kappa & -\left(\frac{4\beta}{\omega^2 \Delta t^2} + 3\kappa\right) & \frac{\beta}{\omega^2 \Delta t^2} + \frac{2\kappa}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad (9.76)$$

$$\beta = \left(\frac{2}{\omega^2 \Delta t^2} + \frac{11\xi}{3\omega \Delta t} + 1\right)^{-1}; \quad \kappa = \frac{\xi\beta}{\omega \Delta t} \quad (9.77)$$

и

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{\omega^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (9.78)$$

Метод Уилсона θ . Основное допущение метода Уилсона θ состоит в том, что ускорение изменяется линейно на интервале времени от t до $t + \theta \Delta t$, где $\theta \geq 1$ и определяется для получения оптимальных характеристик по устойчивости и точности. Пусть символ τ обозначает увеличение времени от момента t , где $0 \leq \tau \leq \theta \Delta t$; тогда на интервале времени от t до $t + \theta \Delta t$ мы имеем

$${}^{t+\tau}\ddot{x} = {}^t\ddot{x} + ({}^{t+\Delta t}\ddot{x} - {}^t\ddot{x}) \frac{\tau}{\Delta t}, \quad (9.79)$$

$${}^{t+\tau}\dot{x} = {}^t\dot{x} + {}^t\ddot{x}\tau + ({}^{t+\Delta t}\ddot{x} - {}^t\ddot{x}) \frac{\tau^2}{2\Delta t}, \quad (9.80)$$

$${}^{t+\tau}x = {}^tx + {}^t\dot{x}\tau + \frac{1}{2} {}^t\ddot{x}\tau^2 + ({}^{t+\Delta t}\ddot{x} - {}^t\ddot{x}) \frac{\tau^3}{6\Delta t}. \quad (9.81)$$

В момент времени $t + \Delta t$ мы имеем

$${}^{t+\Delta t}\dot{x} = {}^t\dot{x} + ({}^{t+\Delta t}\ddot{x} + {}^t\ddot{x}) \frac{\Delta t}{2}, \quad (9.82)$$

$${}^{t+\Delta t}x = {}^tx + {}^t\dot{x}\Delta t + (2{}^t\ddot{x} + {}^{t+\Delta t}\ddot{x})\frac{\Delta t^2}{6}. \quad (9.83)$$

Далее, при использовании метода Уилсона θ уравнение равновесия (9.62) рассматривается в момент времени $t + \theta \Delta t$ (при экстраполированной нагрузке; см. (9.25)), и это дает

$${}^{t+\theta\Delta t}\ddot{x} + 2\xi\omega {}^{t+\theta\Delta t}\dot{x} + \omega^2 {}^{t+\theta\Delta t}x = {}^{t+\theta\Delta t}r. \quad (9.84)$$

Используя выражения (9.79)–(9.81) в момент времени $\tau = \theta \Delta t$ для подстановки в уравнение (9.84), мы получим уравнение, где единственной неизвестной величиной является ${}^{t+\Delta t}\ddot{x}$. Разрешая уравнение относительно этой величины и подставляя в формулы (9.82) и (9.83), мы получим следующее соотношение в форме (9.63):

$$\begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}\ddot{x} \\ {}^{t+\Delta t}\dot{x} \\ {}^{t+\Delta t}x \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} {}^t\ddot{x} \\ {}^t\dot{x} \\ {}^tx \end{bmatrix} + \mathbf{L} {}^{t+\theta\Delta t}r, \quad (9.85)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\beta\theta^2}{3} - \frac{1}{\theta} - \kappa\theta & \frac{1}{\Delta t}(-\beta\theta - 2\kappa) & \frac{1}{\Delta t^2}(-\beta) \\ \Delta t\left(1 - \frac{1}{2\theta} - \frac{\beta\theta^2}{6} - \frac{\kappa\theta}{2}\right) & 1 - \frac{\beta\theta}{2} - \kappa & \frac{1}{\Delta t}\left(-\frac{\beta}{2}\right) \\ \Delta t^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6\theta} - \frac{\beta\theta^2}{18} - \frac{\kappa\theta}{6}\right) & \Delta t\left(1 - \frac{\beta\theta}{6} - \frac{\kappa}{3}\right) & 1 - \frac{\beta}{6} \end{bmatrix}; \quad (9.86)$$

$$\beta = \left(\frac{\theta}{\omega^2\Delta t^2} + \frac{\xi\theta^2}{\omega\Delta t} + \frac{\theta^3}{6}\right)^{-1}; \quad \kappa = \frac{\xi\beta}{\omega\Delta t} \quad (9.87)$$

и

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{\omega^2\Delta t^2} \\ \frac{\beta}{2\omega^2\Delta t} \\ \frac{\beta}{6\omega^2} \end{bmatrix}. \quad (9.88)$$

Метод Ньюмарка. При использовании схемы интегрирования Ньюмарка уравнения равновесия (9.62) рассматриваются в момент времени $t + \Delta t$; это означает, что мы применяем уравнение

$${}^{t+\Delta t}\ddot{x} + 2\xi\omega {}^{t+\Delta t}\dot{x} + \omega^2 {}^{t+\Delta t}x = {}^{t+\Delta t}r, \quad (9.89)$$

а для скорости и смещения в момент времени $t + \Delta t$ используются следующие разложения:

$${}^{t+\Delta t}\dot{x} = {}^t\dot{x} + [(1-\delta){}^t\ddot{x} + \delta {}^{t+\Delta t}\ddot{x}]\Delta t, \quad (9.90)$$

$${}^{t+\Delta t}x = {}^tx + {}^t\dot{x}\Delta t + [(1/2 - \alpha){}^t\ddot{x} + \alpha {}^{t+\Delta t}\ddot{x}]\Delta t^2, \quad (9.91)$$

где δ и α — это параметры, выбираемые для получения оптимальной устойчивости и точности. В качестве безусловно устойчивой схемы Ньюмарк предложил метод постоянного в среднем ускорения, когда $\delta = 1/2$ и $\alpha = 1/4$.

Подставляя выражения для ${}^{t+\Delta t}\dot{x}$ и ${}^{t+\Delta t}x$ в уравнение (9.89), мы можем разрешить последнее относительно ${}^{t+\Delta t}\ddot{x}$, а затем воспользоваться формулами (9.90) и (9.91), чтобы рассчитать ${}^{t+\Delta t}\dot{x}$ и ${}^{t+\Delta t}x$. Таким образом мы можем получить соотношение

$$\begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}\ddot{x} \\ {}^{t+\Delta t}\dot{x} \\ {}^{t+\Delta t}x \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} {}^t\ddot{x} \\ {}^t\dot{x} \\ {}^tx \end{bmatrix} + \mathbf{L} {}^{t+\Delta t}r, \quad (9.92)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -(1/2 - \alpha)\beta - 2(1 - \delta)\kappa & \frac{1}{\Delta t}(-\beta - 2\kappa) & \frac{1}{\Delta t^2}(-\beta) \\ \Delta t[1 - \delta - (1/2 - \alpha)\delta\beta - 2(1 - \delta)\delta\kappa] & 1 - \beta\delta - 2\delta\kappa & \frac{1}{\Delta t}(-\beta\delta) \\ \Delta t^2[1/2 - \alpha - (1/2 - \alpha)\alpha\beta - 2(1 - \delta)\alpha\kappa] & \Delta t(1 - \alpha\beta - 2\alpha\kappa) & (1 - \alpha\beta) \end{bmatrix}; \quad (9.93)$$

$$\beta = \left(\frac{1}{\omega^2 \Delta t^2} + \frac{2\xi\delta}{\omega \Delta t} + \alpha \right)^{-1}; \quad \kappa = \frac{\xi\beta}{\omega \Delta t} \quad (9.94)$$

и

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{\omega^2 \Delta t^2} \\ \frac{\beta\delta}{\omega^2 \Delta t} \\ \frac{\alpha\beta}{\omega^2} \end{bmatrix}. \quad (9.95)$$

Следует отметить, что существует тесная взаимосвязь между операторами Ньюмарка из формул (9.93) и (9.95) и операторами метода Уилсона θ из формул (9.86) и (9.88). Это означает, что если положить $\delta = 1/2$, $\alpha = 1/6$ и $\theta = 1,0$, то оба метода дают одни и те же операторы аппроксимации и нагрузки. Этого следовало ожидать, так как при этих параметрах оба метода предполагают линейное изменение ускорения на интервале между t и $t + \Delta t$.

9.4.2. Анализ устойчивости

При численном интегрировании системы конечно-элементных уравнений равновесия ставится цель — рассчитать хорошую аппроксимацию фактической динамической реакции для рассматриваемой конструкции. Могло бы показаться, что для точного прогнозирования динамической реакции исследуемой конструкции все уравнения равновесия системы, т.е. уравнения (9.58), должны быть проинтегрированы с высокой точностью, а это означает, что все n уравнений в форме (9.62) необходимо интегрировать точно. Учитывая, что при прямом интегрировании один и тот же шаг по времени используется для каждого из уравнений в форме (9.62), шаг Δt следовало бы выбирать в соответствии с наименьшим периодом системы, а это может означать, что шаг по времени будет очень малым на самом деле. При проведении оценки определяемого таким образом значения Δt выясняется, что если наименьший период равен T_n , то шаг Δt был бы равен примерно $T_n/10$ (или меньше, см. раздел 9.4.3). Однако, как показало обсуждение в разделе 9.3.2, во многих случаях практически весь объем динамической реакции соответствует лишь немногим модам колебаний, а по этой причине при проведении анализа с суперпозицией мод рассматриваются лишь некоторые разновидности этих мод. Указывалось также и на то, что при многих вариантах анализа весьма мало оправданным оказывается включение в результат реакции, прогнозируемой для более высоких мод, так как и частоты, и формы мод для конечно-элементной сетки могут оказаться лишь грубыми приближениями по отношению к «точным» величинам. Поэтому конечно-элементная идеализация должна строиться таким образом, чтобы p наименьших частот и форм мод данной конструкции прогнозировались точно, причем значение p определяется распределением нагрузки и ее частотным содержанием.

На этом основании можно сделать вывод о том, что при многих вариантах анализа мы заинтересованы в том, чтобы проинтегрировать точно только p первых уравнений из общего числа n уравнений системы (9.61). Это означает, что мы могли бы изменить значение Δt , сделав его равным примерно $T_p/10$, т.е. в T_p/T_n раз больше нашей первоначальной оценки. При проведении анализа на практике отношение T_p/T_n может оказаться очень большим, скажем — порядка 1000, и это значит, что анализ был бы намного более эффективным при использовании $\Delta t = T_p/10$. Однако, предполагая, что мы выбираем шаг по времени имеющим величину $T_p/10$, мы обнаруживаем, что при прямом интегрировании реакция, соответствующая более высоким модам, автоматически интегрируется с тем же самым шагом по времени. Если учесть, что мы, вероятно, не можем рассчитать точно реакцию, соответствующую тем модам, для которых величина Δt оказывается больше половины естественного периода T , то возникает важный вопрос: какая «реакция» прогнозируется при численном интегрировании уравнения (9.62) тогда, когда отношение $\Delta t/T$ велико? По существу, это вопрос является вопросом об устойчивости схемы интегрирования. Устойчивость метода интегрирования означает, что физические начальные условия для уравнений с большим значением $\Delta t/T$ не должны подвергаться искусственному увеличению и, тем самым, сводить на нет точность интегрирования применительно к реакции для низших

мод. Устойчивость означает также, что любые «начальные» условия в момент времени t , создаваемые ошибками в значениях смещений, скоростей и ускорений, обусловленных округлением в компьютере, не возрастают в процессе интегрирования. Устойчивость обеспечивается, если шаг по времени является достаточно малым для точного определения реакции по отношению к высокочастотной компоненте. Однако это может потребовать применения очень малого шага и, как уже указывалось ранее, точное определение высокочастотной реакции, прогнозируемой для конечно-элементного комплекса, во многих случаях не является оправданным, а поэтому не является и необходимым.

В силу изложенного устойчивость метода интегрирования определяется путем изучения поведения численного решения при произвольных начальных условиях. На этом основании мы рассматриваем интегрирование уравнения (9.62), когда нагрузка отсутствует, т. е. когда $r = 0$. Следовательно, решение для заданных начальных условий, как оно получается из (9.64), имеет вид

$${}^{t+n\Delta t}\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^n {}^t\hat{\mathbf{X}}. \quad (9.96)$$

Рассматривая устойчивость методов интегрирования, мы имеем в своем распоряжении процедуры, являющиеся безусловно устойчивыми, и такие, которые оказываются лишь условно устойчивыми. *Метод интегрирования является безусловно устойчивым, если решение при любых начальных условиях не возрастает неограниченно при любом шаге по времени Δt , в частности, когда отношение $\Delta t/T$ велико. Метод является лишь условно устойчивым, если высказанное выше утверждение оправдывается лишь тогда, когда отношение $\Delta t/T$ меньше или равно некоторому значению, обычно называемому пределом устойчивости.*

Для проведения анализа устойчивости мы используем спектральное разложение матрицы \mathbf{A} , заданное формулой $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1}$, где \mathbf{P} — матрица собственных векторов \mathbf{A} , а \mathbf{J} — жорданова каноническая форма матрицы \mathbf{A} с собственными значениями λ_i этой матрицы на ее диагонали. В разделе 2.5 мы рассмотрели тот случай, когда матрица \mathbf{A} симметрична, а в этом случае $\mathbf{J} = \mathbf{\Lambda}$ (см. (2.108)), $\mathbf{P} = \mathbf{V}$ и $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{V}^T$. Однако в общем случае оператор \mathbf{A} является несимметричной матрицей, и поэтому мы должны пользоваться более общей формой разложения, $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1}$, в которой \mathbf{J} не обязательно является диагональной матрицей, хотя и может содержать единичные элементы на супердиагональной линии (соответствующей кратным собственным значениям) (см., например, книгу [Wilkinson, 1965-1]).

Разумеется, при использовании вышеуказанного спектрального разложения мы имеем

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{P}\mathbf{J}^n\mathbf{P}^{-1}, \quad (9.97)$$

и при наличии этого выражения мы можем определить устойчивость схемы интегрирования по времени.

Пусть $\rho(\mathbf{A})$ будет спектральным радиусом матрицы \mathbf{A} , определяемым как

$$\rho(\mathbf{A}) = \max_{i=1,2,\dots} |\lambda_i|, \quad (9.98)$$

где символ абсолютного значения требует вычисления абсолютного значения λ_i в комплексной плоскости. Тогда наш критерий устойчивости имеет вид

1. Если все собственные значения различны, то мы должны иметь $\rho(\mathbf{A}) \leq 1$, тогда как
2. Если матрица \mathbf{A} содержит кратные собственные значения, то мы требуем, чтобы все такие собственные значения были (по модулю) меньше единицы¹⁾.

¹⁾ Жорданова форма несимметричной матрицы 2×2 при собственном значении λ кратности 2 имела бы вид $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, при $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$. Следовательно, $\mathbf{J}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & \alpha n \lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$, и матрица \mathbf{J} не ограничена, если $\alpha = 1$ и $|\lambda| = 1$. В случае $\alpha = 0$ мы могли бы допустить, фактически, $|\lambda| = 1$.

Если этот критерий устойчивости соблюдается, то мы имеем ограниченность \mathbf{J}^n и, следовательно, $\mathbf{A}^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Более того, если $\rho(\mathbf{A}) < 1$, то мы имеем $\mathbf{J}^n \rightarrow 0$ и, следовательно, $\mathbf{A}^n \rightarrow 0$, причем уменьшение \mathbf{A}^n идет быстрее, если радиус $\rho(\mathbf{A})$ мал.

При учете того, что устойчивость того или иного метода интегрирования зависит только от собственных значений оператора аппроксимации, может оказаться удобным применить к \mathbf{A} преобразование подобия прежде, чем вычислять его собственные значения. В случаях метода Ньюмарка и метода Уилсона θ мы применяем преобразование подобия $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{D}$, где \mathbf{D} — диагональная матрица, имеющая $d_{ii} = (\Delta t)^i$. Тогда, как и можно было ожидать, мы найдем, что спектральные радиусы и, следовательно, устойчивость методов интегрирования, зависят только от отношения времен $\Delta t/T$, параметра демпфирования ξ и от используемых параметров интегрирования. Поэтому при заданных значениях $\Delta t/T$ и ξ метод Уилсона θ и метод Ньюмарка позволяют варьировать параметры θ и α , δ , ρ соответственно для получения оптимальных характеристик устойчивости и точности.

В качестве простого примера рассмотрим анализ устойчивости метода центральных разностей.

Пример 9.12: Исследуйте метод центральных разностей на устойчивость при интегрировании. Рассмотрите случай $\xi = 0$, использованный в соотношениях (9.8)–(9.12).

Нам нужно рассчитать спектральный радиус оператора аппроксимации, задаваемого формулой (9.70), для случая $\xi = 0$. Задача на собственные значения $\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$, которую нужно решить, имеет вид

$$\begin{bmatrix} 2 - \omega^2 \Delta t^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}. \quad (\text{a})$$

Собственными значениями являются корни характеристического полинома $p(\lambda)$ (см. раздел 2.5), определяемого в форме

$$p(\lambda) = (2 - \omega^2 \Delta t^2 - \lambda)(-\lambda) + 1.$$

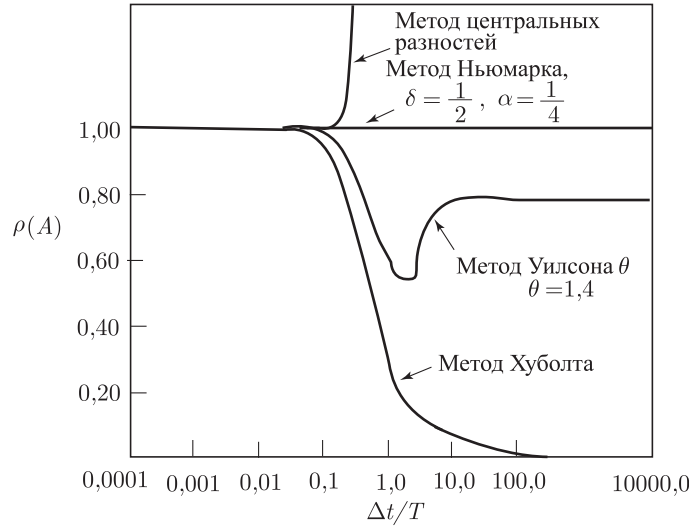
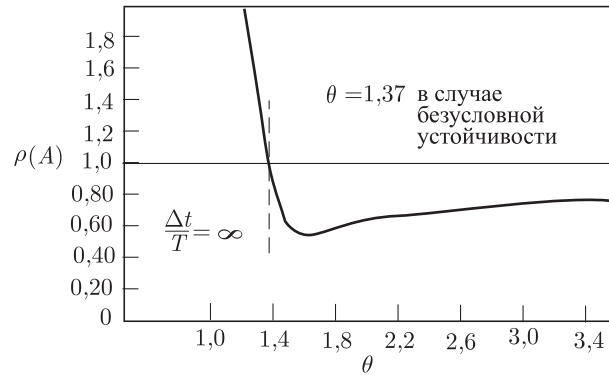
Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{2 - \omega^2 \Delta t^2}{2} + \sqrt{\frac{(2 - \omega^2 \Delta t^2)^2}{4} - 1}, \\ \lambda_2 &= \frac{2 - \omega^2 \Delta t^2}{2} - \sqrt{\frac{(2 - \omega^2 \Delta t^2)^2}{4} - 1}. \end{aligned}$$

Для устойчивости нужно, чтобы абсолютные значения λ_1 и λ_2 были меньше или равны 1; это означает, что спектральный радиус $\rho(\mathbf{A})$ матрицы \mathbf{A} в уравнении (a) должен удовлетворять условию $\rho(\mathbf{A}) \leq 1$, а это дает условие $\Delta t/T \leq 1/\pi$. Следовательно, метод центральных разностей является устойчивым, если $\Delta t \leq \Delta t_{cr}$, где $\Delta t_{cr} = T_n/\pi$. Интересно отметить, что этот предел устойчивости, связанный с шагом по времени, оказывается применимым также и при $\xi > 0$ (см. упражнение 9.14).

При использовании той же процедуры, что и примененная в примере 9.12, могут быть проанализированы на устойчивость методы Уилсона θ , Ньюмарка и Хуболта, если только при этом использовать соответствующие операторы аппроксимации; характеристики устойчивости демонстрируются на рис. 9.6. Следует отметить, что, как это рассчитано в примере 9.12, метод центральных разностей является лишь условно устойчивым, и что методы Ньюмарка, Уилсона θ и Хуболта являются безусловно устойчивыми.

При применении метода Уилсона θ , желая вычислить оптимальное значение параметра θ , нужно рассчитать вариацию спектрального радиуса оператора аппроксимации, как это показано на рис. 9.7. Как видно из рисунка, безусловная устойчивость достигается при $\theta \geq 1,37$ (см. работу [Bathe, Wilson, 1973-1]). Чтобы прийти к оптимальному значению θ , эта информация должна быть дополнена данными о точности метода (см. раздел 9.4.3).

Рис. 9.6. Спектральные радиусы операторов аппроксимации, случай $\xi = 0$ Рис. 9.7. Спектральный радиус $\rho(\mathbf{A})$ как функция θ в методе Уилсона θ

При рассмотрении метода Ньюмарка два параметра, α и δ , могут варьироваться для достижения оптимальной устойчивости и точности. Схема интегрирования является безусловно устойчивой при $\delta \geq 0,5$ и $\alpha \geq 0,25(\delta + 0,5)^2$. Как мы увидим в следующем разделе, метод, соответствующий $\delta = 0,5$ и $\alpha = 0,25$, обладает наиболее желательными характеристиками точности.

Мы обсудили здесь только наиболее широко используемые схемы интегрирования, но, несмотря на это, представленные выше соображения уже свидетельствуют о том, что исследователь должен сделать выбор, какой именно метод следует использовать. На этот выбор влияют характеристики точности метода, т. е. та точность, которой можно достичь при интегрировании с заданным шагом по времени Δt .

9.4.3. Анализ точности

Решение по поводу того, какой оператор интегрирования следует использовать при практическом анализе, определяется стоимостью решения, которая, в свою очередь, определяется числом шагов по времени, требующимся в процессе интегрирования. Если применяется некий условно устойчивый алгоритм, наподобие метода центральных разностей, то величина шага по времени, а следовательно, и число шагов по времени для заданного временного интервала, определяется критическим шагом по времени Δt_{cr} , и исследователь

имеет в своем распоряжении не такой уж широкий выбор. Однако при использовании безусловного устойчивого оператора шаг по времени должен выбираться так, чтобы обеспечить точное и эффективное решение. Вследствие того, что прямое интегрирование уравнений равновесия (9.58) эквивалентно одновременному интегрированию всех n расщепленных уравнений в форме (9.62), мы можем исследовать точность интегрирования, достигаемую при решении уравнений (9.58), путем оценки точности, достигаемой при интегрировании (9.62) в зависимости от $\Delta t/T$, ξ и r . Решение уравнений (9.62) было дано в (9.64), и именно это соотношение мы используем для оценки ошибок интегрирования.

Для проведения простого анализа точности рассмотрим решение задачи с начальными данными, определяемой в форме

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= 0 \\ {}^0x &= 1, 0; \quad {}^0\dot{x} = 0, 0; \quad {}^0\ddot{x} = -\omega^2 \end{aligned} \right\}, \quad (9.99)$$

точное решение которой имеет вид $x = \cos \omega t$. Для полноты анализа нам следовало бы рассмотреть также задачу с начальными данными, соответствующую ${}^0x = 0$, ${}^0\dot{x} = \omega$, ${}^0\ddot{x} = 0$, и с точным решением $x = \sin \omega t$, а также решение для условия нагрузки общего вида. Кроме того, нужно было бы исследовать влияние параметра демпфирования ξ . Однако, важные характеристики решения могут быть продемонстрированы при рассмотрении численного решения только задачи (9.99).

Методы Ньюмарка и Уилсона θ могут быть применены непосредственно с начальными условиями, данными в (9.99). Однако в методе Хуболта начальные условия определяются только начальными смещениями, и при проводимом ниже исследовании были применены точные значения смещений $\Delta^t x$ и ${}^2\Delta^t x$, полученные путем использования решения $x = \cos \omega t$.

Численное решение задачи (9.99) с использованием различных методов интегрирования показывает, что ошибки при интегрировании могут измеряться в терминах продолжительности периода и затухания амплитуды. Рисунок 9.8 показывает измеряемые в процентах продолжительность периода и затухание амплитуды для неявных схем интегрирования, в зависимости от отношения $\Delta t/T$. Эти соотношения были получены путем оценок согласно (9.64) и сравнения точного решения $x = \cos \omega t$ с численными решениями. Следует заметить, что соотношение (9.64) дает решение только в дискретных точках оси времени, разделяемых расстоянием Δt . Чтобы получить максимальные значения смещений, как это требуется на рис. 9.8, были применены соотношения (9.80), (9.81) и (9.90), (9.91) соответственно для метода Уилсона θ и метода Ньюмарка, а для метода Хуболта использовался интерполяционный полином третьего порядка, связывающий значения смещений в дискретных точках оси времени, разделяемых расстоянием Δt (см. работу [Bathe, Wilson, 1973-1] и [Wilson 1965]).

Кривые, представленные на рис. 9.8, показывают, что в общем случае варианты численного интегрирования с использованием любого из упомянутых методов дают точные результаты, если отношение $\Delta t/T$ меньше чем, примерно, 0,01. Однако в тех случаях, когда отношение шаг по времени/период оказывается больше, различные методы интегрирования обнаруживают совершенно различные характеристики. Весьма заметно, что при заданном отношении $\Delta t/T$ метод Уилсона θ при $\theta = 1,4$ дает меньшее затухание амплитуды и меньшую продолжительность периода, чем метод Хуболта, а метод Ньюмарка с постоянным средним ускорением дает только продолжительность периода и не обнаруживает затухания амплитуды.

Характеристики ошибок интегрирования, представленные на рис. 9.8, используются при обсуждении одновременного всех n уравнений в форме (9.62), как это требуется при решении уравнения (9.61) и, следовательно, уравнений (9.58). Мы наблюдаем, что те уравнения, для которых отношение шаг по времени/период мало, интегрируются точно, но что реакция для тех уравнений, для которых указанное отношение велико, не может быть определена ни с какой точностью.

Представленные соображения приводят к выбору надлежащего шага по времени Δt . При использовании метода центральных разностей шаг по времени должен выбираться

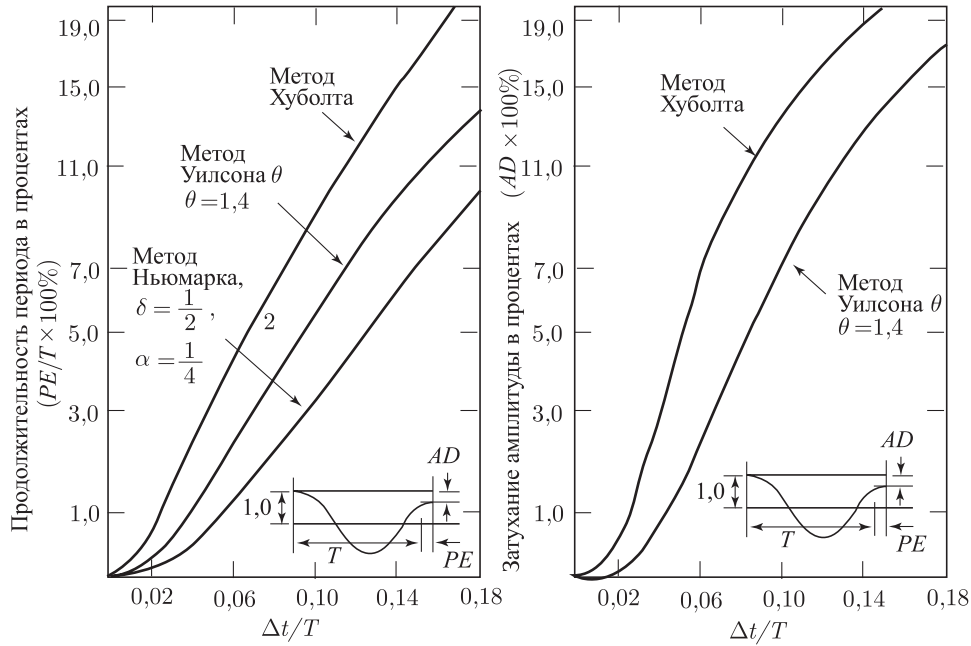


Рис. 9.8. Измеряемые в процентах продолжительности периода и затухания амплитуды

так, чтобы величина Δt была меньше или равна величине Δt_{cr} , оцененной в примере 9.12. Только в том исключительном случае, когда вид нагрузки или форма начальных условий приводят к значительному возбуждению самых высоких частот, у нас возникает необходимость использовать шаг по времени, значительно меньший, чем Δt_{cr} . Однако при использовании одной из безусловно устойчивых схем мы обнаруживаем, что шаг по времени Δt может быть значительно больше и должен быть достаточно малым лишь для того, чтобы для всех мод, дающих значительный вклад в реакцию конструкции в целом, реакция была рассчитана точно. Другие компоненты модальной реакции не будут рассчитаны точно, но соответствующие ошибки не окажутся важными, так как реакция, измеренная для этих компонентов, пренебрежимо мала и не возрастает за счет каких-либо искусственных приемов.

Если использовать один из безусловно устойчивых алгоритмов, то шаг Δt может быть выбран, исходя из ошибок интегрирования, показанных на рис. 9.8. Учитывая тот факт, что важным свойством решения является затухание амплитуды, наблюдаемое при численном интегрировании применительно к тем модам, для которых отношение $\Delta t/T$ велико, рассмотрим следующий показательный случай. Предположим, что при применении метода Уилсона θ при $\theta = 1,4$ выбран шаг по времени, дающий $\Delta t/T_1 = 0,01$, где T_1 — это фундаментальный период системы с шестью степенями свободы и $T_{i+1} = T_i/10$, $i = 1, \dots, 5$. Пусть начальные условия для каждой моды соответствуют заданным в (9.99) и пусть интегрирование выполняется до совершения 100 шагов по времени. Рисунок 9.9 показывает реакцию, рассчитанную для фундаментальных и для более высоких мод. На рисунке наблюдается, что затухание амплитуды, вызываемое ошибками численного интегрирования, эффективно «отфильтровывает» и отключает от решения реакцию, связанную с высокими модами. Тот же самый эффект достигается при применении метода Хуболта, тогда как при применении схемы Ньюмарка с постоянным средним ускорением, не дающей затухания амплитуды, высокочастотная реакция сохраняется в решении. Чтобы получить затухание амплитуды при использовании метода Ньюмарка, необходимо принять $\delta > 0,5$ и, соответственно, $\alpha = \frac{1}{4}(\delta + 0,5)^2$.

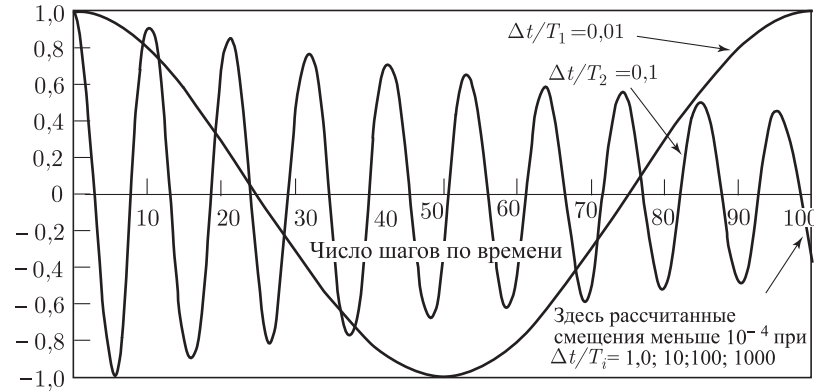


Рис. 9.9. Реакция по смещению, прогнозируемая при возрастании отношения $\Delta t/T$; метод Уилсона θ , $\theta = 1.4$

Разумеется, все эти соображения могут рассматриваться, как до некоторой степени теоретические, так как при практическом анализе начальные условия для мод, начиная со второй и кончая шестой, должны быть пренебрежимо малыми для того, чтобы вышеупомянутый шаг по времени при интегрировании оказался реалистичным. По этой причине фактически не следует требовать проведения отфильтровывания, и вследствие присущих ему наименьших численных ошибок метод Ньюмарка представляется наиболее эффективным.

В большинстве вариантов практического анализа наблюдается лишь небольшая разница в вычислительных усилиях, связанных с применением метода Ньюмарка и метода Уилсона θ , так как ошибки, обусловленные продолжительностью периодов, требуют примерно одинакового шага по времени при использовании любой из этих процедур. С другой стороны, метод Хуболта обладает тем недостатком, что он требует применения специальных процедур для запуска алгоритма.

Необходимо отдавать себе отчет в том, что анализы устойчивости и точности, приводимые в данном разделе, предполагают выполнение конечно-элементного анализа в линейной форме. При анализе нелинейной реакции требуется учитывать некоторые важные дополнительные соображения (см. раздел 9.5).

9.4.4. Некоторые практические соображения

Чтобы определить динамическую реакцию с помощью некоторого эффективного решения, весьма важно выбрать надлежащую схему интегрирования по времени. Этот выбор зависит от вида конечно-элементной идеализации, которая, в свою очередь, зависит от той реальной физической задачи, которую требуется проанализировать. Отсюда следует, что выбор надлежащей формы конечно-элементной идеализации некоторой задачи и выбор эффективной схемы интегрирования для получения решения, определяющего реакцию, тесно связаны между собой и должны рассматриваться совместно. Конечно-элементная модель и схема интегрирования по времени выбираются по-разному в зависимости от того, решается ли какая-то проблема динамики конструкций или же задача о распространении волн.

Динамика конструкций

Основное соображение при выборе надлежащей конечно-элементной модели для некоторой задачи динамики конструкций связано с тем, что только наинизшие моды (или только несколько промежуточных мод) физической системы возбуждаются вектором нагрузки. В разделе 9.3.2 мы уже обсуждали это соображение и ставили вопрос о том, сколько именно мод следует учитывать при анализе с суперпозицией мод. Ссылаясь на раздел 9.3.2, мы можем прийти к выводу о том, что если анализ Фурье для вводимой динамической нагрузки показывает, что эта нагрузка содержит только частоты ниже ω_u , то конечно-элементная сетка должна точно представлять частоты реальной системы вплоть до, приблизительно, $\omega_{co} = 4\omega_u$. Нет никакой необходимости в том, чтобы в конечно-

элементной системе точно представлялись высшие частоты реальной физической системы, так как вклад этих частот в динамическую реакцию пренебрежимо мал; а именно, для значений $\hat{\omega}/\omega$ на рис. 9.4, меньших 0,25, замеряется почти статическая реакция, которая непосредственно включается в пошаговые расчеты динамической реакции, осуществляемые путем прямого интегрирования. Мы должны также заметить, что статическая реакция, выражаемая в смещениях на высоких модах, остается малой, если эти моды почти ортогональны к вектору нагрузки и/или если частоты высоки, см. уравнение (9.46) (т.е. когда конструкция обладает большой жесткостью на этих модах). Когда статическая реакция мала, то может оказаться целесообразным использовать значения ω_{co} , более близкие к ω_u , чем заданные с помощью фигурирующего выше множителя 4. Такое уменьшение ω_{co} может оказаться значительным, например, при анализе реакции некоторых конструкций на толчки от землетрясений.

Из вышеизложенного следует, что полная процедура моделирования задачи о колебаниях конструкции состоит в следующем:

1. Идентифицировать те частоты, наличие которых существенно в представлении нагрузки, применяя в случае необходимости анализ Фурье. Эти частоты могут изменяться в зависимости от времени. Пусть наивысшая частота, существенно входящая в представление нагрузки, будет равна ω_u .
2. Выбрать конечно-элементную сетку, способную точно представлять статическую реакцию и точно представляющую все частоты, вплоть до, приблизительно, $\omega_{co} = 4\omega_u$.
3. Осуществить анализ с прямым интегрированием. Шаг по времени Δt при этом должен был бы быть равным примерно $(1/20)T_{co}$, где $T_{co} = 2\pi/\omega_{co}$ (или может быть меньше этого значения, исходя из соображений устойчивости, если используется метод центральных разностей).

Заметим, что если бы с этим шагом использовалось решение с суперпозицией мод (как это описано в разделе 9.3), то частота ω_{co} была бы самой высокой из тех частот, которые должны быть включены в решение. Следовательно, величина p из (9.49) равна числу мод с частотами, которые меньше или равны ω_{co} . В большинстве случаев анализа, которому подвергается проблема динамики конструкций, наиболее эффективной оказывается неявная, безусловно устойчивая схема интегрирования по времени. Тогда шаг по времени Δt должен, вообще говоря, быть равным только $(1/20)T_{co}$ (и не меньше, если только мы не встретимся с трудностями по сходимости в процессе итераций при расчете нелинейной реакции; см. раздел 9.5.2). Если применяется неявная схема интегрирования по времени, то часто оказывается эффективным использовать конечные элементы высших порядков, например, элементы с 9-ю и с 27-ю узлами (см. раздел 5.3) при двумерном и трехмерном анализе, соответственно, при совместимой с этим идеализацией массы. Элементы высших порядков являются эффективными при представлении изгибного поведения, однако в общем случае они должны применяться вместе с совместимым вектором нагрузки, имея в виду, что узлы, расположенные в углах и в серединах сторон, должны подвергаться при анализе надлежащим долям нагрузки.

То наблюдение, что использование элементов высшего порядка может оказаться эффективным при неявном интегрировании по времени в процессе анализа проблем динамики конструкций, совместимо с тем фактом, что в общем случае элементы высшего порядка оказываются эффективными при статическом анализе, а проблемы динамики конструкций могут рассматриваться как «статические проблемы, включающие эффекты инерции». С другой стороны, если конечно-элементная идеализация состоит из многих элементов, то может оказаться более эффективным использовать явное интегрирование по времени с неравномерно распределенной матрицей масс. В этом случае эффективная матрица жесткости не формируется и не приводится к треугольной форме, но в общем случае при решении следует использовать шаг по времени Δt гораздо меньше обычного.

Распространение волн

Можно считать, что важнейшее отличие проблемы динамики конструкций от проблемы распространения волн состоит в том, что при распространении волн в системе возбуждается большое количество частот. Отсюда следует, что один из путей анализа

проблемы о распространении волн заключается в том, чтобы принять достаточно высокую предельную частоту ω_{co} с целью достижения приемлемой точности решения. Трудности состоят в том, чтобы идентифицировать ту предельную частоту, которая будет использоваться и оформить соответствующую конечно-элементную модель.

Вместо того, чтобы воспользоваться этими соображениями для построения надлежащей конечно-элементной сетки, пригодной для анализа проблемы распространения волн, в общем случае оказывается более эффективным применить идеи, используемые при построении конечно-разностных решений.

Если предположить, что та критическая длина волны, которую нам нужно моделировать, равна L_w , то общее время, нужное, чтобы эта волна прошла мимо некоторой точки, равно

$$t_w = \frac{L_w}{c}, \quad (9.100)$$

где c — скорость движения волны. Предполагая, что для моделирования прохождения волны требуется сделать n шагов по времени, мы имеем

$$\Delta t = \frac{t_w}{n}, \quad (9.101)$$

а «эффективная длина» конечного элемента должна быть равна

$$L_e = c \Delta t. \quad (9.102)$$

Эффективная длина и соответствующий ей шаг по времени должны быть способны точно моделировать весь путь продвижения волны, и они выбираются по-разному, в зависимости от типа элементной идеализации и от используемой схемы интегрирования по времени.

Хотя формула (9.102) соответствует не общему, а специальному случаю, все же эффективность ее использования становится очевидной, когда выполняется одномерный анализ бруса с идеализацией в форме неравномерного распределения массы и с использованием метода центральных разностей. Если однородный брус, не закрепленный на обоих концах и подвергающийся внезапно возникающей нагрузке в форме постоянной ступеньки, идеализируется, как комплекс ферменных элементов, каждый из которых имеет два узла и длину $c\Delta t$, то точная реакция в виде распространения волн определяется из решения для этой модели. Интересно отметить также, что при этом шаг по времени Δt , заданный формулой (9.102), соответствует пределу устойчивости T_n/π , выведенному в примере 9.12, т.е. $\omega_n = 2c/L_e$, и отличная от нуля (наивысшая) частота одиночного ненапряженного элемента равна ω_n . Следовательно, *наиболее точное решение получается в результате интегрирования с шагом по времени, равным пределу устойчивости, и если принимается шаг по времени меньшей величины, то решение оказывается менее точным!* Это ухудшение точности прогнозируемого решения при Δt , меньшем Δt_{cr} , оказывается наиболее ярко выраженным, когда используется сравнительно грубая пространственная идеализация.

В более сложных случаях, при проведении двумерного или трехмерного анализа, точное решение, вообще говоря, не получается, и величина L_e выбирается в зависимости от того, применяется ли для построения решения метод центральных разностей или неявный метод.

Если используется явный метод с центральными разностями, то должна применяться матрица масс с неравномерным распределением, и в этом случае, вероятно, наиболее эффективными окажутся конечные элементы низкого порядка в однородных сетках; это значит, что при двумерном и трехмерном анализе часто используются показанные, соответственно, на рисунках 5.5 и 5.6 элементы с четырьмя и с восемью узлами. Используя эти элементы, мы строим сетку настолько однородной, насколько это возможно, а величина L_e оказывается равной *наименьшему расстоянию между двумя любыми узлами, принадлежащими используемой сетке*. В соответствии с формулой (9.102) эта длина определяет и шаг Δt . Если используются континуальные элементы высокого порядка (параболические или кубические), то должна быть, опять-таки, построена сетка, настолько однородная, насколько это возможно, с тем же самым масштабом длины L_e , однако шаг по времени должен быть сделан еще меньше, так как внутренние узлы являются «более жесткими», чем угловые узлы. Кроме того, если конструктивные элементы (балка, пластина или оболочка) включаются в сетку, то величина шага по времени Δt может определяться

изгибными модами для этих элементов, так что величина шага определяется не только лишь расстояниями между узлами (см. таблицу 9.5). Если учесть, что всегда выполняется условие $\Delta t \leq T_n/\pi$, где T_n — это наименьший период данной сетки, то для построения эффективного решения мы будем стремиться к использованию сравнительно дешево рассчитываемого нижнего предела для T_n . Этот предел соответствует наименьшему периоду $T_n^{(m)}$ для любого элемента, рассматриваемого индивидуально, и масштабируемого по всем элементам сетки, как мы это и покажем на следующем примере.

Таблица 9.5. Критические значения шага по времени при применении к некоторым элементам метода центральных разностей: $\Delta t_{cr}^{(m)} = T_n^{(m)}/\pi = 2/\omega_n^{(m)}$

Ферменный элемент с двумя узлами	
$\mathbf{K}^{(m)} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M}^{(m)} = \frac{\rho L}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \Delta t_{cr}^{(m)} = \frac{L}{c}.$	(9.1)
Элемент типа балки с двумя узлами (см. пример 4.1)	
$\mathbf{K}^{(m)} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ & 4 & \frac{6}{L} & 2 \\ \text{симм.} & & \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ & & & 4 \end{bmatrix}$	$\mathbf{M}^{(m)} = \frac{\rho AL}{24} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ & L^2 & 0 & 0 \\ \text{симм.} & & 12 & 0 \\ & & & L^2 \end{bmatrix}$
$\Delta t_{cr}^{(m)} = \sqrt{\frac{A}{48I}} \frac{L^2}{c}.$	

Квадратный элемент с 4-мя узлами, при плоских напряжениях (см. пример 4.6)

$\mathbf{K}^{(m)} = \frac{Et}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \frac{3-\nu}{6} & \text{Элементы являются} & & \\ & \cdot & \text{функциями} & \nu \\ \text{симм.} & & \cdot & \\ & & & \frac{3-\nu}{6} \end{bmatrix}$	$\mathbf{M}^{(m)} = \frac{\rho L^2 t}{4} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & \text{нули} & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$
$\Delta t_{cr}^{(m)} = \frac{L}{c} \sqrt{1-\nu},$	

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, L — длина (длина стороны) элемента, A — площадь поперечного сечения элемента, ρ — массовая плотность, I — момент инерции на изгиб, t — толщина элемента с плоскими напряжениями, c — одномерная волновая скорость $\sqrt{E/\rho}$

Пример 9.13: Пусть ω_n будет наибольшей частотой скомплектованной конечно-элементной сетки и пусть $\omega_n^{(m)}$ будет наибольшей частотой элемента m . Покажите, что

$$\omega_n \leq \max_{(m)} \omega_n^{(m)}, \quad (\text{a})$$

где $\max_{(m)} \omega_n^{(m)}$ — это наибольшая из максимальных частот для всех элементов сетки.

Следовательно, при применении метода центральных разностей мы можем тогда использовать шаг по времени

$$\Delta t = \frac{2}{\max_{(m)} \omega_n^{(m)}} \leq \Delta t_{cr}.$$

Используя отношение Рэлея (см. раздел 2.6), при $\mathbf{K}^{(m)}$ и $\mathbf{M}^{(m)}$, определяемых согласно (4.19) и (4.25), имеем

$$(\omega_n)^2 = \frac{\phi_n^T \left(\sum_m \mathbf{K}^{(m)} \right) \phi_n}{\phi_n^T \left(\sum_m \mathbf{M}^{(m)} \right) \phi_n}. \quad (b)$$

Положим $\mathcal{U}^{(m)} = \phi_n^T \mathbf{K}^{(m)} \phi_n$ и $\mathcal{S}^{(m)} = \phi_n^T \mathbf{M}^{(m)} \phi_n$; и тогда

$$(\omega_n)^2 = \frac{\sum_m \mathcal{U}^{(m)}}{\sum_m \mathcal{S}^{(m)}}. \quad (c)$$

Теперь рассмотрим отношение Рэлея для одиночного элемента,

$$\rho^{(m)} = \frac{\phi_n^T \mathbf{K}^{(m)} \phi_n}{\phi_n^T \mathbf{M}^{(m)} \phi_n} = \frac{\mathcal{U}^{(m)}}{\mathcal{S}^{(m)}}. \quad (d)$$

Учитывая, что $\mathbf{M}^{(m)}$ и $\mathbf{K}^{(m)}$ имеют ту же величину, что и \mathbf{K} , мы могли бы теоретически представить себе, что $\mathcal{U}^{(m)}$ и $\mathcal{S}^{(m)}$ равны нулю (но не для всех m). Однако в любом случае для каждого элемента мы имеем (см. раздел 2.6)

$$\mathcal{U}^{(m)} \leq (\omega_n^{(m)})^2 \mathcal{S}^{(m)},$$

и поэтому из формулы (c) следует, что

$$(\omega_n)^2 \leq \frac{\sum_m (\omega_n^{(m)})^2 \mathcal{S}^{(m)}}{\sum_m \mathcal{S}^{(m)}} \leq \left[\max_m (\omega_n^{(m)})^2 \right] \frac{\sum_m \mathcal{S}^{(m)}}{\sum_m \mathcal{S}^{(m)}},$$

что и доказывает справедливость формулы (a). Отметим, что в формуле (b) мы использовали выражения для матриц $\mathbf{K}^{(m)}$ и $\mathbf{M}^{(m)}$ элемента m , определяемые согласно (4.19) и (4.25), то есть при снятии всех граничных условий (а также воздействий со стороны других элементов). Разумеется, то же самое доказательство остается применимым, если некоторые элементы стеснены в отношении определенных степеней свободы (в применении к комплексу элементов).

Для некоторых элементов наименьший период может быть определен в замкнутой форме, тогда как для более сложных элементов (имеющих неправильную и искривленную форму) может оказаться нужным установить нижний предел для $T_n^{(m)}$. Сводка некоторых результатов дается в табл. 9.5.

Условие $\Delta t \leq (\text{«длина элемента»} / \text{скорость движения волны})$ называется условием КФЛ (Курант, Фридрихс, Леви) в соответствии с работой [Courant, Friedrichs, Lewy, 1928]. Мы пользуемся также числом Куранта (или КФЛ) $\Delta t / \Delta t_{cr}$, чтобы показать величину шага по времени, фактически применяемого в динамическом решении.

Выбор эффективной длины L_e и, следовательно, шага по времени Δt , оказывается значительно проще, если используется неявный, безусловно устойчивый метод интегрирования по времени. В этом случае величина L_e может выбираться в соответствии с формулами (9.100)–(9.112) в виде $L_e = L_w / n$, в направлении движения волны, а тогда выражение для Δt следует из формулы (9.102). Можно использовать неоднородные сетки, а также элементы низкого или высокого порядка, причем, если используются элементы высокого порядка, то обычно уместно применить совместимую матрицу масс.

Все эти соображения были выдвинуты для проведения линейного динамического анализа, но в большинстве случаев оказываются применимыми также и при нелинейном анализе. Важная особенность нелинейного анализа состоит в том, что периоды и скорости движения волн для конечно-элементной системы изменяются в процессе реализации

реакции этой системы. Поэтому выбор величины шага по времени должен быть сделан с учетом того, что в задачах динамики конструкций существенно возбужденные частоты изменяют свои величины и что в задаче о распространении волн значение c из формулы (9.102) не является постоянным.

В разделе 9.5 мы обсудим дополнительные соображения, относящиеся к нелинейному анализу. Теперь мы представим пример, демонстрирующий вышеуказанные особенности моделирования.

Пример 9.14: Требуется рассмотреть брус, показанный на рис. 9.10; в начальный момент брус покоится и подвергается действию сосредоточенной нагрузки на своем конце. Нужно определить реакцию бруса в момент времени 0,01 с.

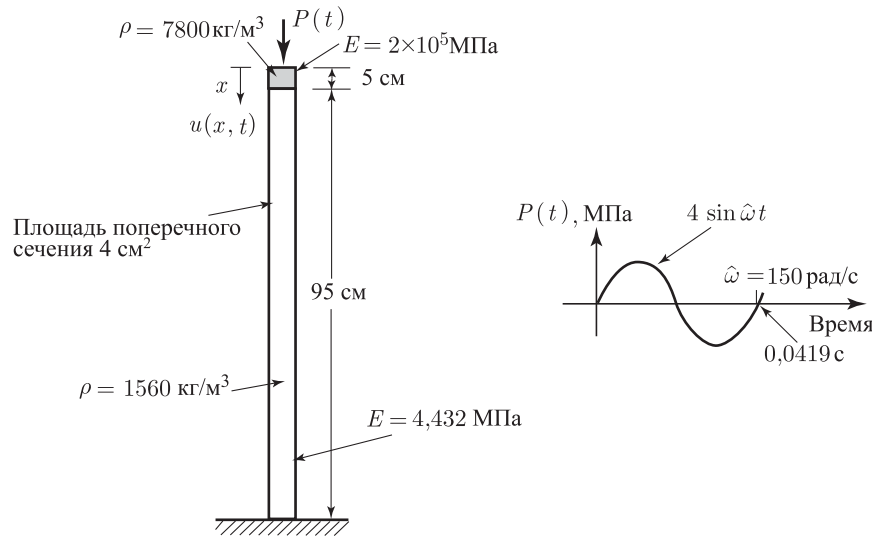


Рис. 9.10. Описание задачи

Решите эту задачу, используя ферменные элементы с двумя узлами.

- (i) Постройте решение методом суперпозиции мод,
- (ii) Постройте решение с помощью прямого моделирования, пользуясь правилом трапеций и методом центральных разностей.

Мы замечаем, что брус изготовлен из двух видов материала (он имеет жесткую и гибкую части), и что выбор ферменных элементов для моделирования бруса подразумевает использование одномерной математической модели (см. пример 3.17). Разумеется, на практике реальная проблема и ее решение могут иметь гораздо более сложную природу, и мы используем эту упрощенную формулировку задачи и математическую модель просто для того, чтобы продемонстрировать обсужденные нами выше процедуры моделирования и решения.

Для решения этой задачи нам нужно прежде всего выбрать такую форму дискретизации, которая правильно представляла бы достаточное число точных значений частоты и соответствующих им мод. Если использовать совместимое представление массы с неравномерным распределением, то частоты, перечисляемые в табл. 9.6, рассчитываются на основе вариантов дискретизации, использующих 20 и 40 элементов равной длины. При проведении этого анализа мы замечаем, что частоты для моделей с неравномерным распределением масс всегда оказываются ниже частот для совместимых моделей массы. Вследствие наличия сравнительно жесткого короткого участка бруса у его верхнего конца двадцатая частота при применении модели с двадцатью элементами оказывается значительно выше, чем девятнадцатая частота (для 40-элементной модели

тридцать девятая и сороковая частоты оказываются значительно выше, чем тридцать восьмая частота).

Т а б л и ц а 9.6. Прогнозируемые частоты (радиан/с)

Номер частоты	Предположение об общей матрице масс		Предположение о совместимой матрице масс	
	Модель с 20-ю элементами	Модель с 40 элементами	Модель с 20-ю элементами	Модель с 40 элементами
1	7,02516E+01	7,02648E+01	7,02770E+01	7,02712E+01
2	2,19037E+02	2,19393E+02	2,19812E+02	2,19587E+02
3	3,78880E+02	3,80576E+02	3,82932E+02	3,81591E+02
4	5,43097E+02	5,47936E+02	5,55239E+02	5,50977E+02
5	7,06967E+02	7,17610E+02	7,34395E+02	7,24482E+02
6	8,67764E+02	8,87724E+02	9,20054E+02	9,00834E+02
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
19	2,12481E+03	2,89023E+03	3,65556E+03	3,47009E+03
20	1,93925E+05	3,01715E+03	3,25207E+05	3,69646E+03
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
38		4,26046E+03		7,36679E+03
39		2,73219E+05		3,36596E+05
40		3,97280E+05		6,76577E+05

Частота прилагаемой нагрузки лежит между первой и второй частотами модели. Принимая в качестве предельной частоты величину $4 \times \hat{\omega}$, мы замечаем, что в решение с суперпозицией мод должно быть достаточно включить реакцию четырех мод, т.е. в (9.49) использовать $p = 4$. Однако, преследуя цели обучения, мы рассмотрим реакцию, соответствующую $p = 1, 2, \dots, 5$. Кроме того, мы замечаем, что модели с 20-ю элементами предсказывают сильно возбужденные частоты с достаточно высокой точностью (мы сравниваем частоты моделей с 20-ю элементами с частотами 40-элементных моделей), и мы используем эти модели для построения решения.

Для получения решения с суперпозицией мод мы используем модель с совместимой массой и получаем для момента времени 0,01 с результаты, показанные на рисунках 9.11 и 9.12.

Рисунки 9.11 и 9.12 иллюстрируют, каким образом при увеличении числа мод, включаемых в прогноз реакции, эта реакция сходится. Прогнозируемая реакция с использо-

ванием четырех мод почти совпадает с той, которая использует пять мод. Однако мы замечаем также, что статическая поправка (т. е. применение соотношения (9.52)) очень значительно улучшает прогноз реакции и тогда, когда при решении с суперпозицией используются только одна, две или три моды. Модальные решения были получены путем численного интегрирования расцепленного уравнения (9.46) с шагом по времени $\Delta t = 0,0004$ (что приблизительно равно $T_5/20$).

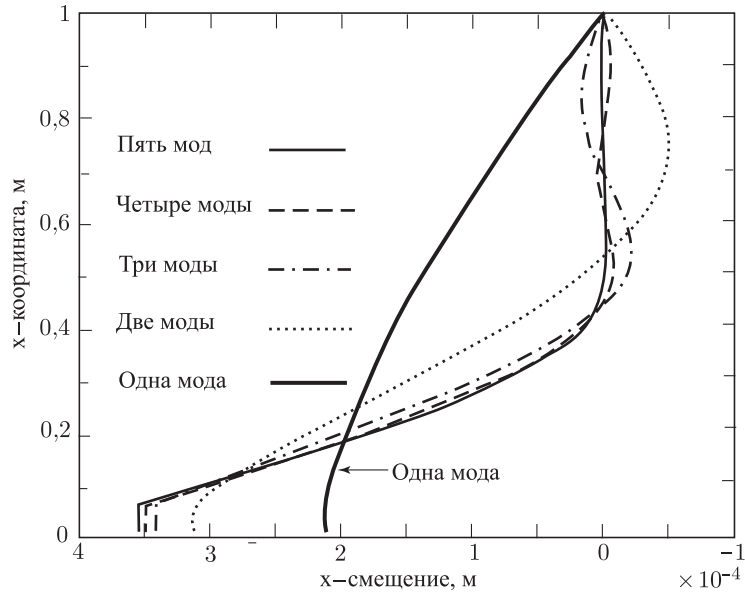


Рис. 9.11. Решение с суперпозицией мод без статической поправки

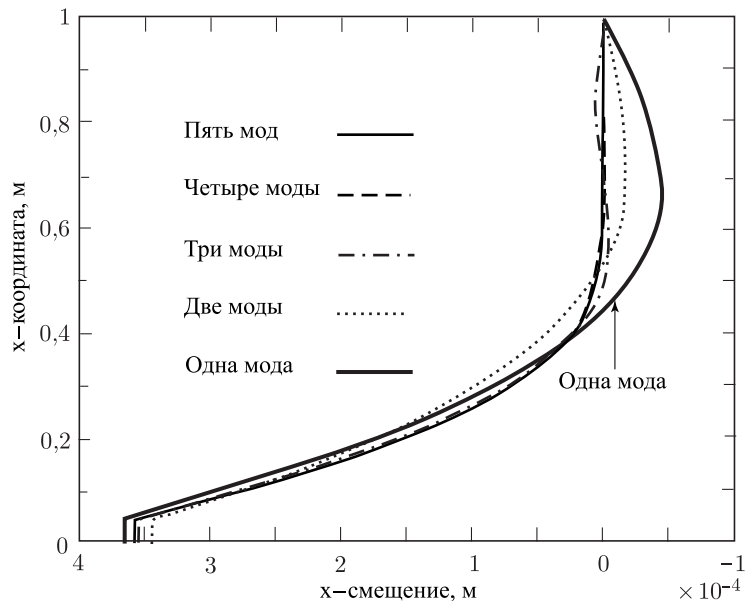


Рис. 9.12. Решение с суперпозицией мод при статической поправке

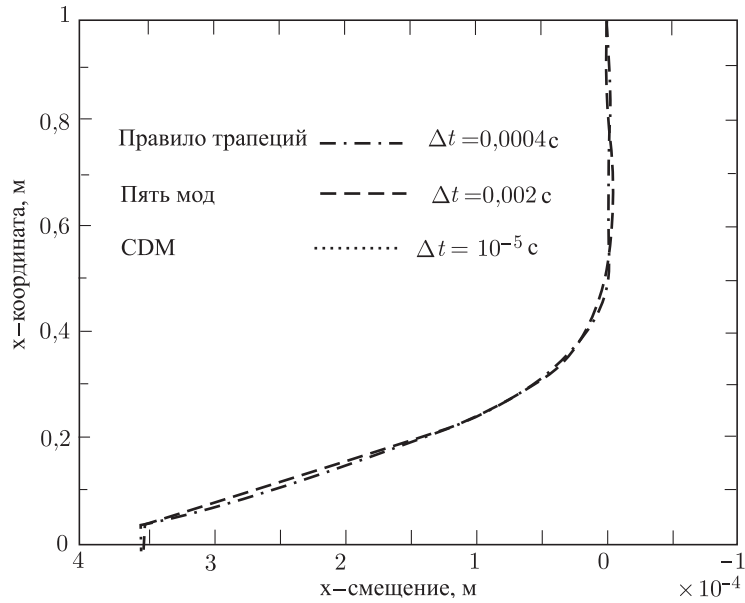


Рис. 9.13. Сравнение решений, полученных путем суперпозиции мод и с помощью прямого интегрирования

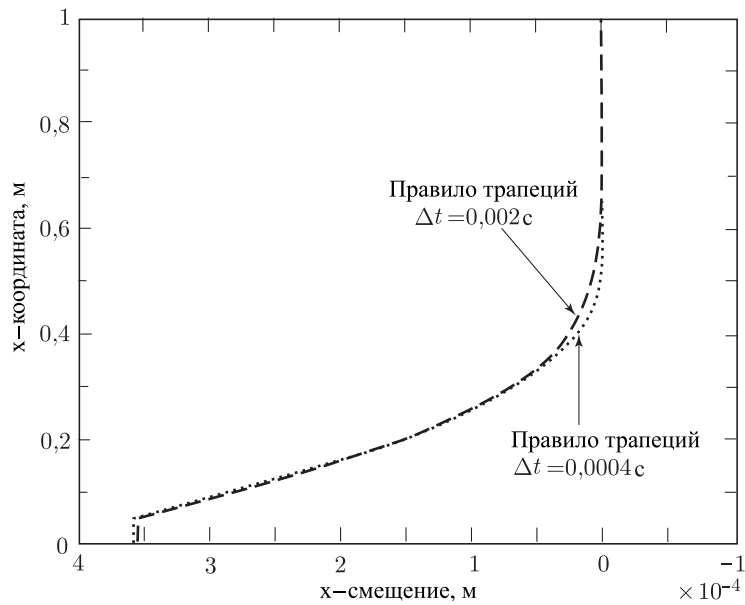


Рис. 9.14. Сравнение решений, полученных с помощью прямого интегрирования с использованием правила трапеций

Для проведения прямого интегрирования с использованием правила трапеций мы также принимаем модель с совместимой массой и с 20-ю элементами, а также с тем же шагом по времени, что и при решении с суперпозицией мод. Этот шаг по времени обеспечивает возможность точного интегрирования для мод от ϕ_1 до ϕ_5 . Рисунок 9.13

показывает рассчитанную реакцию и отличное качество сравнения с решением при суперпозиции мод.

Для построения решения методом центральных разностей мы используем модель с неравномерным распределением масс и с 20-ю элементами. Шаг по времени должен быть достаточно малым для устойчивости. Если использовать наивысшую частоту модели, то мы получим $\Delta t_{cr} = 2/\omega_{20} = 1,03 \times 10^{-5}$, а если воспользоваться формулой, данной в таблице 9.5, то мы получим $\Delta t_{cr} \geq \min_{m=1, \dots, 20} \Delta t_{cr}^{(m)} = 0,98 \times 10^{-5}$ с. Поэтому на практике мы применили бы $\Delta t = 0,98 \times 10^{-5}$ с, но здесь мы можем принять $\Delta t = 1,0 \times 10^{-5}$ с. Заметим, что если при применении правила трапеций нам требуется только 25 шагов по времени (следовательно, число КФЛ $\doteq 40$), то при использовании метода центральных разностей нам требуется 1000 шагов по времени. Разумеется, это получается из-за относительно жесткой верхней части бруса. Результаты решения с использованием метода центральных разностей показывают очень хорошее сравнение с данными применения суперпозиции мод и неявного метода прямого интегрирования (правило трапеций) (см. рис. 9.13).

Наконец, давайте исследуем точность решения при необходимости увеличить размер шага по времени, если используется интегрирование по времени с применением правила трапеций. Если мы рассмотрим третью частоту $\omega_3 = 382,93$ радиан/с, то получим $\hat{\omega}/\omega_3 \doteq 0,39$. Как показывает рис. 9.4, при этой частоте и при более высоких частотах увеличение реакции по отношению к статической реакции составляет менее 50 процентов. Однако, статическая реакция для моды ϕ_i уменьшается пропорционально множителю $1/\omega_i^2$ и в любом случае включается в процесс прямого моделирования по времени. Если мы используем $\Delta t = 0,002$ с, то мы все же определяем путем интегрирования динамическую реакцию для третьей моды с точностью порядка 5 процентов (см. рис. 9.8) (и, конечно же, реакции для первой и второй мод — более точно). Следовательно, выбор шага по времени $\Delta t = 0,002$ с представляется разумным (число КФЛ тогда равно приблизительно 200).

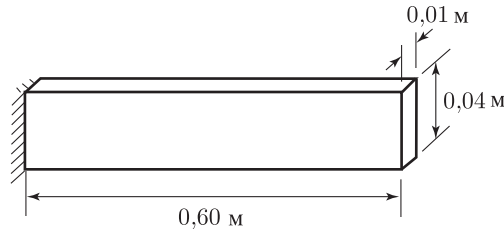
Действительно, как показывает рис. 9.14, результаты решения с шагом по времени $\Delta t = 0,002$ с недалеко от результатов решения с меньшим шагом по времени. Этот вывод соответствует также и результатам, приводимым на рис. 9.12, из которой видно, что решение с суперпозицией мод, использующее три моды, уже является достаточно точным при условии включения статической поправки. Следовательно, выбор и использование более мелкого шага $\Delta t = 0,0004$ с при интегрировании по правилу трапеций было чересчур осторожным.

9.4.5. Упражнения

- 9.13. Для случая прямого интегрирования вычислите операторы аппроксимации и нагрузки применительно к методу интегрирования, предложенному в работе [Hilber, Hughes, Taylor 1977], где применяются допущения Ньюмарка (см. (9.27) и (9.28)) и следующее уравнение:

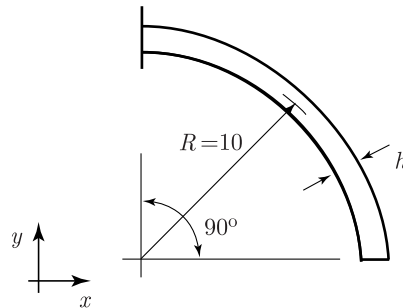
$$\mathbf{M}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} + (1+\gamma) \mathbf{C}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}} - \gamma \mathbf{C}^t \dot{\mathbf{U}} + (1+\gamma) \mathbf{K}^{t+\Delta t} \mathbf{U} - \gamma \mathbf{K}^t \mathbf{U} = (1+\gamma)^{t+\Delta t} \mathbf{R} - \gamma^t \mathbf{R},$$
 где γ — параметр, который нужно выбрать. Рассмотрите случай $\delta = 1/2$, $\alpha = 1/4$ в предположении Ньюмарка.
- 9.14. Предположите, что для решения уравнений динамического равновесия с пропорциональным демпфированием (т.е. в (9.62) мы имеем $\xi > 0$) используется метод центральных разностей. Покажите, что критический шаг по времени все еще выражается как $2/\omega_n$.
- 9.15. Рассмотрите спектральные радиусы, соответствующие методам Хуболта, Уилсона θ ($\theta = 1,4$) и Ньюмарка ($\delta = 1/2$, $\alpha = 1/4$). Покажите, что значения, приведенные на рис. 9.6 для $\Delta t/T = 10\,000$, правильны.
- 9.16. Рассчитайте в процентах значения продолжительности периода и затухания амплитуды для методов Хуболта, Уилсона θ ($\theta = 1,4$) и Ньюмарка ($\delta = 1/2$,

- $\alpha = 1/4$), применяемых к задаче с начальными условиями согласно (9.99), для случая $\Delta t/T = 0, 10$. Покажите, что значения, приведенные на рис. 9.8, правильны.
- 9.17. Воспользуйтесь компьютерной программой, чтобы получить решение для шести самых низких частот, соответствующих показанной здесь консоли. Рассмотрите три различных математических модели: модель балки Эрмита, модель с плоскими напряжениями и полностью трехмерная модель. Для каждого случая выберите надлежащую конечно-элементную дискретизацию и рассмотрите допущения о совместимости матрицы масс и о матрице с неравномерным распределением масс. С помощью проверки убедитесь в точности полученных результатов.



Модуль Юнга $E = 200000$ МПа;
Коэффициент Пуассона 0,3;
Массовая плотность $\rho = 7800$ кг/м³.

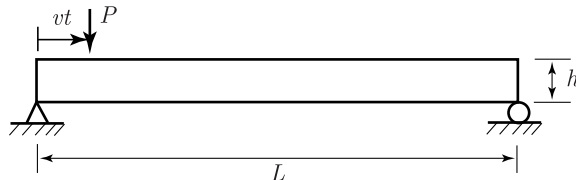
- 9.18. Воспользуйтесь компьютерной программой, чтобы получить решение для шести самых низких частот, соответствующих показанной здесь криволинейной консоли. Используйте изопараметрический балочный элемент со смешанной интерполяцией, с двумя, тремя или четырьмя узлами и примените матрицу масс с неравномерным распределением или совместимую матрицу. Путем проверки убедитесь в точности полученных результатов.



$E = 200000$;
 $\nu = 0, 3$;
 $\rho = 7800$;
 $h = 0, 1$;
Глубина 0,1.

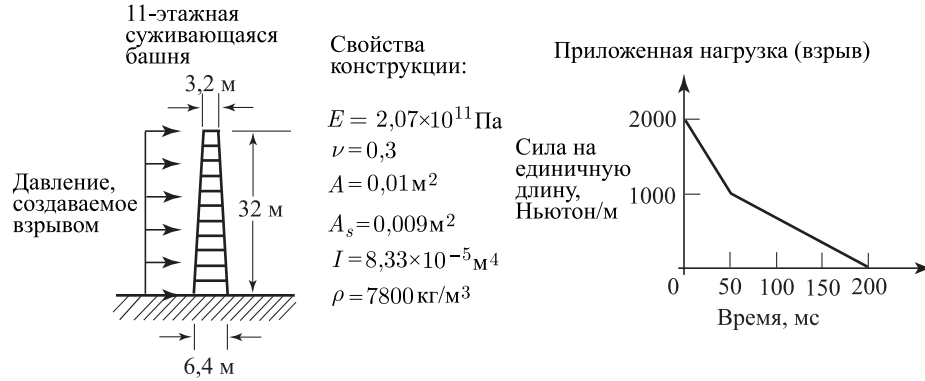
Рассматриваются только вибрации в плоскости x, y .

- 9.19. Рассмотрите задачу о сосредоточенной нагрузке P , движущейся по балке с простыми опорами. Используйте компьютерную программу, чтобы получить решение этой задачи для различных значений скорости v .



$E = 200000$ МПа;
 $\nu = 0, 3$;
 $\rho = 7800$ кг/м³;
 $L = 10$ м;
 $h = 0, 2$ м;
Глубина 0,02 м.

- 9.20. Одиннадцатизэтажная башня, суживающаяся к вершине, подвергается порыву ветра так, как это показано. Используйте компьютерную программу, чтобы построить решение для реакции башни.



9.5. Решение нелинейных уравнений при динамическом анализе

Построение решения для нелинейной динамической реакции конечно-элементной системы осуществляется, по сути дела, путем использования уже обсужденных нами процедур: формулировки с приращениями, представленные в главе 6, итеративные процедуры решения, обсуждавшиеся в разделе 8.4, и алгоритмы интегрирования по времени, представленные в этой главе. Следовательно, важнейшие фундаментальные процедуры, используемые при построении решений задач о нелинейных динамических реакциях, уже были представлены здесь, и в дальнейшем нам нужно только вкратце подытожить, как все эти процедуры применяются при нелинейном динамическом анализе.

9.5.1. Явное интегрирование

Наиболее распространенным, явным по времени оператором интегрирования, применяемым при нелинейном динамическом анализе, является, вероятно, оператор с центральными разностями. Как и при линейном анализе (см. раздел 9.2), рассматривается равновесие конечно-элементной системы в момент времени t и ставится цель — рассчитать смещения в момент времени $t + \Delta t$. Если пренебречь эффектом демпфирующей матрицы, то на каждом дискретном шаге по времени мы оперируем уравнениями

$$\mathbf{M}^t \ddot{\mathbf{U}} = {}^t\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F}, \quad (9.103)$$

где вектор силы в узловой точке ${}^t\mathbf{F}$ оценивается так, как это обсуждалось в разделе 6.3. Решение для смещений в узловых точках строится с помощью аппроксимации ускорения с центральными разностями (задаваемой формулой (9.3)), подставляемой взамен ${}^t\ddot{\mathbf{U}}$ в уравнение (9.103). Таким образом, если, как и при линейном анализе, мы знаем ${}^{t-\Delta t}\mathbf{U}$ и ${}^t\mathbf{U}$, то соотношения из (9.3) и (9.103) применяются для расчета ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$. Поэтому решение попросту соответствует продвижению вперед во времени; главное преимущество этого метода состоит в том, что при матрице \mathbf{M} , имеющей диагональную структуру, получение решения для ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$ не связано с факторизацией матрицы коэффициентов и ее приведением к треугольной форме.

Недостаток, присущий использованию метода центральных разностей, состоит в суровом ограничении шага по времени: для обеспечения устойчивости величина шага по времени Δt должна быть меньше критического шага по времени Δt_{cr} , равного T_n/π , где T_n — это наименьший период в конечно-элементной системе. Это ограничение на шаг по времени было выведено при рассмотрении линейной системы (см. пример 9.12), однако результат является применимым также и к случаю нелинейного анализа, так как при осуществлении каждого шага по времени вычисление нелинейной реакции может, в некотором приближении, представляться таким же, как и при линейном анализе. Однако если при линейном анализе свойства, характеризующие жесткость, остаются постоянными, то при нелинейном анализе эти свойства изменяются в процессе расчетов реакции. Эти изменения материальных и/или геометрических условий учитываются при оценке вектора

силы ${}^t\mathbf{F}$ в соответствии с обсуждением, проводившимся в главе 6. Поэтому, с учетом того, что значение T_n не остается постоянным в процессе расчета реакции, необходимо уменьшать шаг по времени Δt при возрастании жесткости системы, и эта подгонка шага по времени должна выполняться достаточно осторожно, так, чтобы условие $\Delta t \leq T_n/\pi$ гарантированно соблюдалось во все моменты времени.

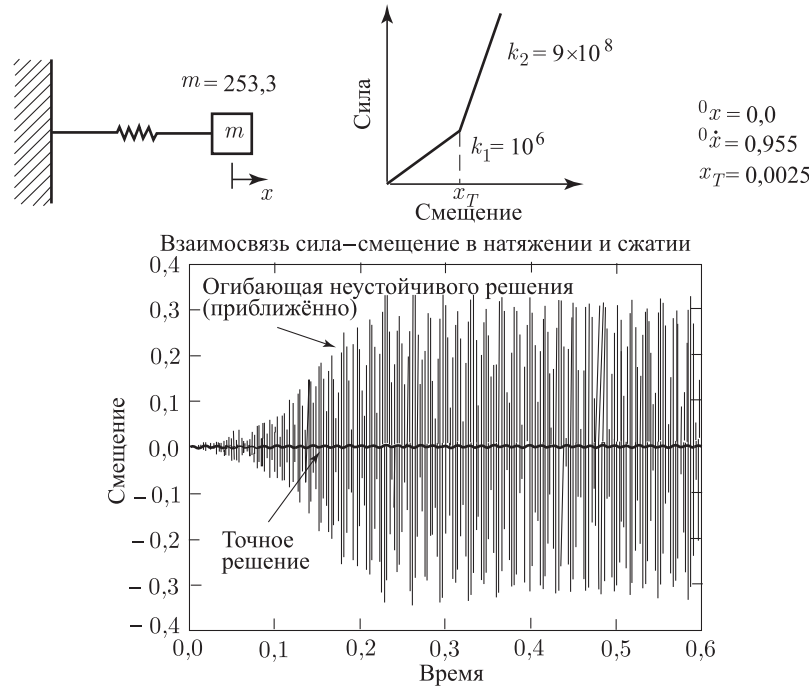


Рис. 9.15. Реакция билинейной упругой системы, определяемая методом центральных разностей; $\Delta t_{\text{крит}} = 0,001061027$; точное значение реакции при смещении $\ll 0.1$ вычислялось при $\Delta t = 0,000106103$; «неустойчивая» вычислялась при $\Delta t = 0,00106103$

Чтобы подчеркнуть эту особенность, рассмотрим такой анализ, при котором шаг по времени остается меньше критического шага всегда, за исключением нескольких последовательных этапов решения, для которых шаг по времени Δt оказывается несколько больше критического шага. В таком случае результаты анализа могут не выявить «очевидной» неустойчивости решения, но вместо этого накапливается заметная ошибка решения, возникающая по мере прохождения тех этапов решения, на которых величина шага по времени была больше значения, критического для устойчивости. Возникающая ситуация в корне отличается от того, что наблюдается при линейном анализе, когда решение быстро «взрывается», если шаг по времени превышает по размеру шаг, критический для устойчивости. Это явление в определенной степени демонстрируется в той реакции, которая предсказывается для простой системы с одной степенью свободы, имеющей вид пружины с грузом и показанной на рис. 9.15. При построении решения шаг по времени Δt оказывается несколько больше, чем критический шаг по времени, требуемый для устойчивости в жесткой области пружины. С учетом того, что шаг по времени соответствует устойчивому шагу для малых смещений пружины, расчеты реакции оказываются частично устойчивыми, а частично — неустойчивыми. Рассчитанная реакция показана на рис. 9.15, причем наблюдается, что, несмотря на то, что предсказываемые смещения являются существенно ошибочными, решение все же не взрывается. Следовательно, если бы эта система с одной степенью свободы соответствовала более высокой частоте в большой

конечно-элементной модели, то заметное накопление ошибок могло бы иметь место без очевидного взрыва решения.

В силу изложенного надлежащий выбор шага по времени Δt является чрезвычайно важным фактором. Общие указания, касающиеся выбора Δt , были даны в разделе 9.4.4.

9.5.2. Неявное интегрирование

Все схемы неявного интегрирования по времени, обсужденные нами ранее применительно к линейному динамическому анализу, могут быть применены также и к расчетам линейных динамических реакций. Весьма распространенной техникой, применяемой при этом, является правило трапеций, которое представляет собой метод Ньюмарка при $\delta = 1/2$ и $\alpha = 1/4$, и мы используем этот метод, чтобы продемонстрировать важнейшие дополнительные соображения, связанные с нелинейным анализом.

Как и при линейном анализе, используя неявное интегрирование по времени, мы рассматриваем равновесие системы в момент времени $t + \Delta t$. При нелинейном анализе это влечет за собой необходимость выполнения итераций. Например, если использовать модифицированную итерацию Ньютона–Рафсона, то в качестве определяющих уравнений равновесия мы получим (см. раздел 6.3.2 в пренебрежении эффектами демпфирующей матрицы)

$$\mathbf{M}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}}^{(k)} + {}^t\mathbf{K} \Delta \mathbf{U}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(k-1)}, \quad (9.104)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(k-1)} + \Delta \mathbf{U}^{(k)}. \quad (9.105)$$

Используя правило трапеций для интегрирования по времени, будем применять следующие допущения:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \frac{\Delta t}{2} ({}^t\dot{\mathbf{U}} + {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}}), \quad (9.106)$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} = {}^t\dot{\mathbf{U}} + \frac{\Delta t}{2} ({}^t\ddot{\mathbf{U}} + {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}); \quad (9.107)$$

таким образом, если использовать соотношения (9.105)–(9.107), мы получим

$${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}^{(k)} = \frac{4}{\Delta t^2} \left({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(k-1)} - {}^t\mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}^{(k)} \right) - \frac{4}{\Delta t} {}^t\dot{\mathbf{U}} - {}^t\ddot{\mathbf{U}}, \quad (9.108)$$

и, подставляя соответствующее выражение в уравнение (9.104), мы имеем

$${}^t\hat{\mathbf{K}} \Delta \mathbf{U}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(k-1)} - \mathbf{M} \left(\frac{4}{\Delta t^2} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(k-1)} - {}^t\mathbf{U}) - \frac{4}{\Delta t} {}^t\dot{\mathbf{U}} - {}^t\ddot{\mathbf{U}} \right), \quad (9.109)$$

где

$${}^t\hat{\mathbf{K}} = {}^t\mathbf{K} + \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M}. \quad (9.110)$$

Теперь мы замечаем, что итеративные уравнения при нелинейном динамическом анализе с использованием неявного интегрирования по времени имеют ту же самую форму, что и уравнения, рассмотренные нами при статическом нелинейном анализе, если не считать того, что и матрица коэффициентов, и вектор сил в узловых точках содержат вклады, создаваемые инерцией данной системы. На этом основании мы можем прямо сделать вывод о том, что все итеративные стратегические приемы решения, обсужденные нами в разделе 8.4 в применении к статическому анализу, являются также непосредственно применимыми и к решению уравнения (9.109). Однако с учетом того, что инерция системы делает ее динамическую реакцию в общем случае «более гладкой», чем то, что дает ее статическая реакция, сходимость итераций можно ожидать, вообще говоря, реализующейся быстрее, чем при статическом анализе, причем эта сходимость может быть улучшена путем уменьшения Δt . С точки зрения вычислений, причина улучшения характеристик сходимости при динамическом анализе, связанного с уменьшением Δt , объясняется вкладом матрицы масс в матрицу коэффициентов. По мере уменьшения шага по времени этот вклад возрастает и в конечном итоге становится преобладающим (см. раздел 8.4.1).

Интересно отметить, что при построении первых решений для нелинейной динамической конечно-элементной реакции равновесные итерации не выполнялись в рамках пошагового анализа с приращениями; иначе говоря, соотношение (9.109) было просто решено для случая $k = 1$, а приращение смещения $\Delta \mathbf{U}^{(1)}$ было принято в качестве точного приближения к фактическому приращению смещения за время от t до $t + \Delta t$. После этого

мы убедились, однако, что итерации действительно могут играть очень важную роль (см. работу [Bathe, Wilson, 1973-2]), так как любая ошибка, допущенная в определенный момент времени в решении для приращений, оказывает прямое влияние, связанное с формой траектории, на структуру решения в любой последующий момент времени. Действительно, вследствие того, что любая нелинейная динамическая реакция очень сильно зависит от формы траектории, анализ нелинейной динамической задачи более настоятельно требует проведения итераций на каждом шаге по времени, чем это делает статический анализ.

Простая демонстрация справедливости сделанного наблюдения дается на рис. 9.16. Этот рисунок показывает результаты, полученные при анализе поведения простого маятника, который идеализировался в виде ферменного элемента с сосредоточенной массой на его свободном конце. Маятник был отпущен из горизонтального положения и реакция рассчитывалась приблизительно на один период колебания. При анализе были использованы допуски в отношении сходимости, уже обсужденные нами в разделе 8.4.4, но включающие учет эффекта инерции, т. е. предполагалось, что сходимость достигается при выполнении следующих условий:

$$\frac{\|{}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)} - \mathbf{M} {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}^{(i-1)}\|_2}{\text{RNORM}} \leq \text{RTOL} \quad (9.111)$$

и

$$\frac{\Delta \mathbf{U}^{(i)T} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)} - \mathbf{M} {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}^{(i-1)})}{\Delta \mathbf{U}^{(i)T} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F} - \mathbf{M} {}^t\ddot{\mathbf{U}})} \leq \text{ETOL}, \quad (9.112)$$

где RTOL — это допуск для силы, а ETOL — допуск для энергии. Рисунок 9.16 демонстрирует важность проведения итераций, осуществляемых при достаточно сжатом допуске на сходимость. При этом анализе энергия теряется, если допуск на сходимость не является достаточно сжатым, но в зависимости от того, какая именно задача рассматривается, прогнозируемая реакция может также и взорваться, если не используются итерации. На практике часто возникает такая ситуация, когда для получения устойчивого решения требуется провести на каждом шаге по времени лишь несколько итераций.

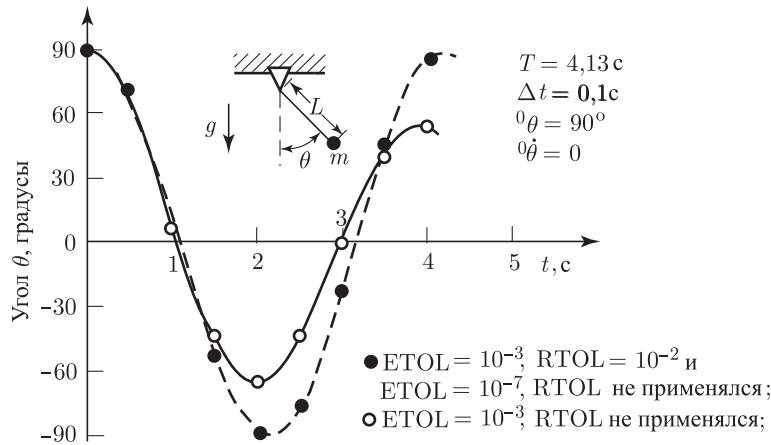


Рис. 9.16. Анализ простого маятника с помощью правила трапеций; RNORM = миллиграмм

Таким образом, если подвести итог, то для проведения нелинейного динамического анализа с использованием неявного интегрирования по времени аналитик должен был бы применить некий оператор, безусловно устойчивый при линейном анализе (хорошим выбором было бы применение правила трапеций), использовать равновесные итерации с достаточно сжатыми допусками для сходимости и выбрать величину шага по времени на основе общих соображений, выдвинутых в разделе 9.4.4, а также на основе того факта, что должна быть достигнута сходимость равновесных итераций.

9.5.3. Решение с использованием суперпозиции мод

При обсуждении вопросов линейного анализа в разделе 9.3 мы пришли к заключению о том, что существо метода суперпозиции мод состоит в преобразовании с переходом от степеней свободы в узловых точках элемента к обобщенным степеням свободы, соответствующим колебательным модам. Если учесть, что уравнения динамического равновесия, сформулированные на базисе векторов, соответствующих модам, расщепляются (в предположении о пропорциональном демпфировании), то анализ с суперпозицией мод может оказаться весьма эффективным в линейной модели, если только некоторые колебательные моды возбуждаются нагрузкой. Те же самые основные принципы остаются применимыми и к случаю нелинейного анализа; однако в этом случае вибрационные моды и частоты изменяются, и для того, чтобы преобразовать матрицу коэффициентов из (9.109) к диагональной форме, в процессе этого преобразования необходимо использовать моды свободных колебаний системы в момент времени t . Расчет колебательных мод и частот в момент времени t , если эти же величины уже были рассчитаны в предыдущий момент времени, мог бы быть осуществлен экономичным способом, если воспользоваться методом подпространственных итераций (см. раздел 11.6). Однако полный анализ нелинейной динамической реакции с суперпозицией мод в общем случае является эффективным только тогда, когда решение может быть получено без слишком частого видоизменения матрицы жесткости. В этом случае определяющие конечно-элементные уравнения равновесия, нужные для получения решения, описывающего реакцию в момент времени $t + \Delta t$, имеют вид

$$\mathbf{M}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}}^{(k)} + {}^\tau \mathbf{K} \Delta \mathbf{U}^{(k)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (9.113)$$

где ${}^\tau \mathbf{K}$ — матрица жесткости, соответствующая конфигурации в некоторый предшествующий момент времени τ . Теперь, при анализе с суперпозицией мод мы используем выражение

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{U} = \sum_{i=r}^s \phi_i {}^{t+\Delta t} x_i, \quad (9.114)$$

где ${}^{t+\Delta t} x_i$ — это обобщенное модальное смещение за номером i , в момент времени $t + \Delta t$, а также

$${}^\tau \mathbf{K} \phi_i = \omega_i^2 \mathbf{M} \phi_i; \quad i = r, \dots, s, \quad (9.115)$$

то есть ω_i и ϕ_i — это частоты свободных колебаний (радиан/с) и векторы соответствующих мод рассматриваемой системы в момент времени τ . Если выражения (9.114) использовать обычным образом, то уравнения (9.113) преобразуются к виду

$${}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{X}}^{(k)} + \mathbf{\Omega}^2 \Delta \mathbf{X}^{(k)} = \mathbf{\Phi}^T ({}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(k-1)}); \quad k = 1, 2, \dots, \quad (9.116)$$

где

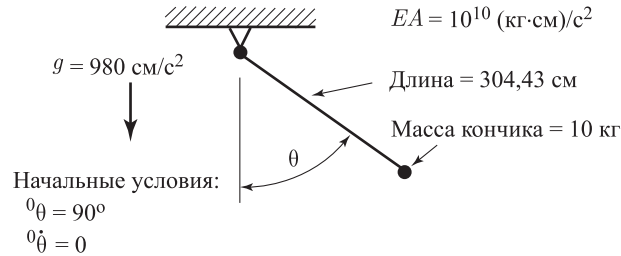
$$\mathbf{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} \omega_r^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_s^2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{\Phi} = [\phi_r, \dots, \phi_s]; \quad {}^{t+\Delta t} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t} x_r \\ \vdots \\ {}^{t+\Delta t} x_s \end{bmatrix}. \quad (9.117)$$

Соотношения (9.116) представляют собой уравнения равновесия в момент времени $t + \Delta t$, записанные для обобщенных модальных смещений в момент времени τ ; соответствующая матрица масс есть матрица тождественности, матрица жесткости есть величина $\mathbf{\Omega}^2$, вектор внешней нагрузки есть $\mathbf{\Phi}^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}$, а вектор сил, соответствующих напряжениям в элементе в конце итерации ($k - 1$), есть $\mathbf{\Phi}^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(k-1)}$. Решение уравнений (9.116) может быть получено, если использовать, например, правило трапеций для интегрирования по времени (см. раздел 9.5.2).

В общем случае использование суперпозиции мод в нелинейном динамическом анализе может оказаться эффективным только тогда, когда при анализе нужно рассматривать сравнительно немного мод. Такие условия могут встретиться, например, при анализе реакции от землетрясения и при анализе возбуждения вибраций, и именно в этих областях и использовалась рассматриваемая нами техника исследования.

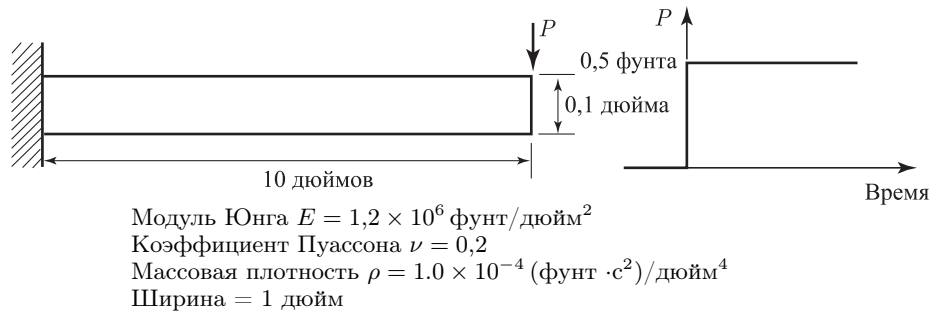
9.5.4. Упражнения

- 9.21. Рассмотрите идеализированную форму простого маятника. Используйте программу с конечными элементами для построения решения, описывающего реакцию системы (см. рис. 9.16).

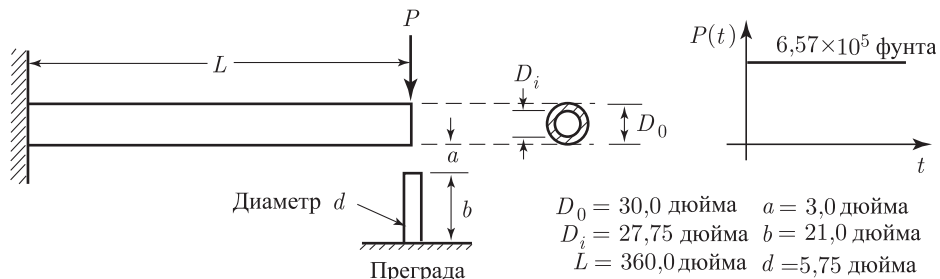


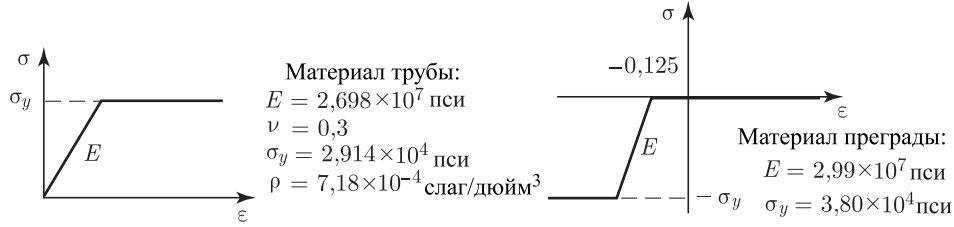
Применяется один ферменный элемент с массой, сконцентрированной на кончике

- 9.22. Рассмотрите показанную здесь консольную балку. В начальный момент балка находится в покое, когда внезапно к ее концу прилагается нагрузка P . Используйте программу с конечными элементами для построения решения, описывающего динамическую реакцию балки при допущении возможности больших смещений. Воспользуйтесь правилом трапеций, методом центральных разностей и, если это возможно, то методом суперпозиции мод, чтобы получить решение, описывающее реакцию.



- 9.23. Воспользуйтесь компьютерной программой, чтобы построить решение для описания динамического прогиба арки, рассмотренной на рис. 6.39.
- 9.24. Воспользуйтесь компьютерной программой, чтобы дать анализ задачи о трубе с ограничителем, показанной на рисунке. Вы можете осуществить решение с прямым интегрированием или решение с суперпозицией мод (задачи такого типа важны при анализе постулируемых условий при несчастном случае; см., например, работу [Ma, Bathe, 1976]).





9.6. Решение задач, не связанных с конструкциями; теплопередача и течения жидкости

Несмотря на то, что в предыдущих разделах мы рассмотрели решение проблем о динамической реакции конструкций и твердых тел, следовало бы признать, что многие из основных, обсужденных там идей и понятий являются также непосредственно применимыми и к анализу задач другого типа. А именно, при решении некой задачи, не связанной с конструкциями, нужно, опять-таки, произвести выбор между явным и неявным интегрированием по времени, рассмотреть анализ с суперпозицией мод и, кроме того, может оказаться полезным использовать для различных областей комплекса элементов в целом различные схемы интегрирования по времени (см. раздел 9.2.5). Свойства схем интегрирования по времени, касающиеся устойчивости и точности, исследуются, в принципе, таким же образом, как и при анализе конструкций, и важные фундаментальные наблюдения, связанные с нелинейным анализом конструкций, применимы также и к анализу нелинейных задач, не связанных с конструкциями.

9.6.1. Интегрирование по времени: α -метод

Те задачи, не связанные с конструкциями, которые мы имеем в виду, это задачи о теплопередаче, задачи о полях и задачи о течении жидкости (см. главу 7). При интегрировании по времени определяющих уравнений для этих задач главное отличие в сравнении с анализом конструкций состоит в том, что теперь мы имеем дело только с первыми производными по времени. Поэтому здесь применяются операторы интегрирования по времени, отличные от тех, которые обсуждались в предшествующих разделах.

Основываясь на обсуждении, проведенном в разделе 9.4, мы можем предложить схему интегрирования по времени, используемую при анализе теплопередачи и течений жидкости путем рассмотрения типичного уравнения равновесия с одной степенью свободы,

$$\dot{\eta} + \lambda \eta = r; \quad \eta|_{t=0} = {}^0\eta, \quad (9.118)$$

где, если, например, рассматривается задача о теплопередаче, то η — это неизвестная температура, λ — коэффициент диффузии, а r — это величина тепла, подводимого к системе. α -метод интегрирования по времени может быть эффективно применен для решения уравнения (9.118) и дается с помощью следующих предположений:

$$\begin{aligned} {}^{t+\alpha\Delta t}\dot{\eta} &= ({}^{t+\Delta t}\eta - {}^t\eta)/\Delta t, \\ {}^{t+\alpha\Delta t}\eta &= (1 - \alpha){}^t\eta + \alpha{}^{t+\Delta t}\eta, \end{aligned} \quad (9.119)$$

где α — постоянная, выбираемая так, чтобы обеспечить оптимальные свойства устойчивости и точности. Чтобы получить решение для ${}^{t+\Delta t}\eta$, мы действуем так, как это описано в разделе 9.2. А именно, если величина ${}^t\eta$ известна, то мы можем воспользоваться уравнением (9.118) для момента времени $t + \alpha\Delta t$, а также выражением (9.119), получаем выражение для ${}^{t+\Delta t}\eta$, и так далее. Этот α -метод уже использовался в разделе 6.6.3 при построении решения для неупругой реакции конечно-элементной системы.

Свойства процедуры интегрирования зависят от применяемого при этом значения α . Часто используются процедуры, описываемые ниже (см., например, книгу [Collatz 1966]).

- $\alpha = 0$: явный метод Эйлера с правыми разностями, устойчивый при условии $\Delta t \leq 2/\lambda$, с точностью первого порядка относительно Δt .
- $\alpha = 1/2$: неявный метод с применением правила трапеций, безусловно устойчивый, с точностью первого порядка относительно Δt .
- $\alpha = 1$: неявный метод Эйлера с левыми разностями, безусловно устойчивый, с точностью первого порядка относительно Δt .

Чтобы оценить вышеуказанные свойства устойчивости, мы действуем так, как это описано в разделе 9.4.2. Теперь мы используем соотношения (9.118) при $r = 0$ и $\lambda = \text{const}$, в момент времени $t + \alpha \Delta t$, делаем подстановку из (9.119) и строим решение для переменной η в момент времени $t + \Delta t$, в терминах всех известных величин.

$${}_{t+\Delta t}\eta = \frac{1 - (1 - \alpha)\lambda \Delta t}{1 + \alpha\lambda \Delta t} {}_t\eta. \quad (9.120)$$

На этом основании для устойчивости нам требуется, чтобы

$$\left| \frac{1 - (1 - \alpha)\lambda \Delta t}{1 + \alpha\lambda \Delta t} \right| \leq 1, \quad (9.121)$$

а это условие показывает, что α -метод является безусловно устойчивым, только если

$$\Delta t \leq \frac{2}{(1 - 2\alpha)\lambda}. \quad (9.122)$$

Эти результаты были использованы в сводке, приведенной выше для случаев $\alpha = 0, 1/2$ и 1.

Чтобы оценить свойства точности, мы действуем аналогично тому, что описано в разделе 9.4.3, однако теперь мы рассматриваем задачу с начальными значениями

$$\dot{\eta} + \lambda\eta = 0; \quad {}^0\eta = 1. \quad (9.123)$$

Предположим, что мы выполняем численное решение задачи (9.123) для периода времени $1/\lambda$, с шагом по времени величиной $1/n\lambda$, где n — это число шагов по времени, совершаемых за период времени $1/\lambda$. Тогда в качестве нашего критерия ошибки мы принимаем измеряемую в процентах абсолютную величину разности между численным и точным решениями в момент времени $1/\lambda$. Рисунок 9.17 показывает этот критерий ошибки для методов Эйлера с правыми и с левыми разностями, а также для правила трапеций.

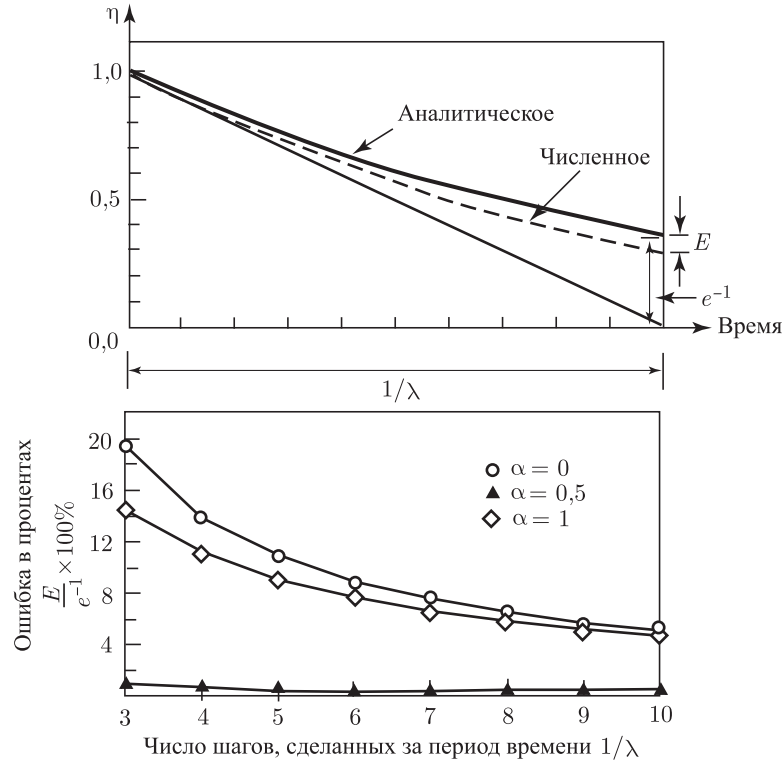
Информация, приводимая на рис. 9.17, полезна для осуществления решения с помощью прямого интегрирования, если известно наибольшее значение λ для той конечно-элементной сетки, для которой требуется точно рассчитать реакцию путем интегрирования. А именно, соотношение (9.118) может рассматриваться, как определяющее дифференциальное уравнение по времени, для колебательной моды, соответствующей принятому значению λ (см. обсуждение в разделах 9.3.2 и 9.4.4).

Однако при проведении фактического анализа нам нужно выбрать форму конечно-элементной дискретизации, схему интегрирования по времени и шаг по времени Δt . При этом оказываются полезными следующие соображения.

Рассмотрим одномерную теплопередачу, происходящую в сплошной среде, как это показано на рис. 9.18. Однородная начальная температура имеет величину θ_i , когда внезапно свободная поверхность, расположенная при $x = 0$, подвергается воздействию температуры θ_0 . Определяющее дифференциальное уравнение равновесия для этой задачи было выведено в примере 3.16.

Точное решение математической модели дает распределения температуры, схематически показанные на рис. 9.18б. Этот рисунок показывает также глубину проникновения γ , определяемую как

$$\gamma = 4\sqrt{at}, \quad (9.124)$$

Рис. 9.17. Ошибка в численном решении уравнения (9.123) с помощью α -метода

где a — коэффициент тепловой диффузии¹⁾, $a = k/\rho c$. На этом расстоянии

$$\frac{\theta(\gamma) - \theta_i}{\theta_0 - \theta_i} < 0,01 \quad (9.125)$$

(см. рис. 9.18).

Эта глубина проникновения используется также и для такой задачи, когда вместо приложенной температуры внезапно прилагается тепловой поток. В этом случае мы имеем

$$\frac{\theta(\gamma) - \theta_i}{\theta^S - \theta_i} < 0,01, \quad (9.126)$$

где θ^S — это температура поверхности в момент времени t .

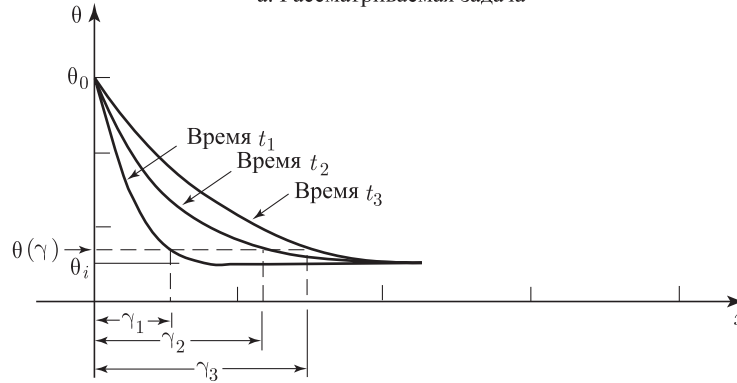
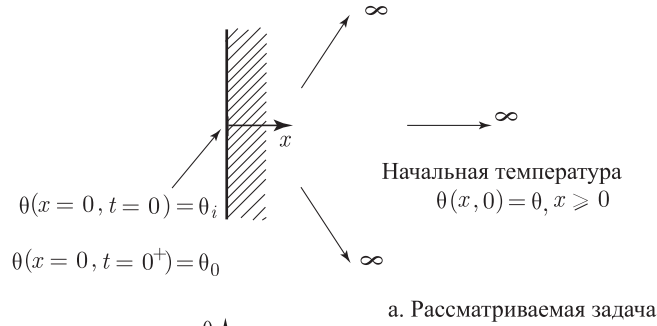
Конечно-элементная дискретизация выбирается здесь с помощью использования γ . Предположим, что t_{\min} — это минимальное время, по прошествии которого желательно иметь результаты, касающиеся температуры. Тогда, если N — это число элементов, нужных для дискретизации глубины проникновения, то мы используем

$$\Delta x = \frac{4}{N} \sqrt{at_{\min}}. \quad (9.127)$$

В типичном случае, для элементов с двумя узлами, мы используем значения N от 6 до 10, и этот размер элемента желательно было бы использовать во всей сетке.

Далее, необходимо выбрать шаг по времени Δt для принятой схемы интегрирования. Предположим, что мы используем элементы с двумя узлами и матрицу теплоемкости с неравномерным распределением. Если применяется метод Эйлера с правыми разностями,

¹⁾ Здесь мы используем для обозначения коэффициента диффузии символ a (вместо символа α в разделе 7.4), так как символ α используется здесь для обозначения параметра при интегрировании по времени.



б. Глубины проникновения для трех различных моментов времени (схематическое представление)

Рис. 9.18. Анализ для сплошной среды

то предел устойчивости диктует выбор шага по времени в форме (см. упражнение 9.27)

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2a}. \quad (9.128)$$

В то же время, если используется правило трапеций или метод Эйлера с левыми разностями, то мы можем применить

$$\Delta t = \frac{(\Delta x)^2}{a}, \quad (9.129)$$

или даже некоторое большее значение шага по времени.

При использовании неявных методов и принятии $\alpha = 1$ или $1/2$, оказывается зачастую эффективным использовать элементы высшего порядка (параболические) и совместимую матрицу теплоемкости, так как при этом можно достичь значительно большей точности. В этом случае величина Δx представляет собой расстояние между соседними узлами.

Вышеуказанные соображения оказываются полезными также и при двумерном и трехмерном анализе. В этих случаях мы используем метод Эйлера с правыми разностями и с элементами низкого порядка (четыреугольные элементы с четырьмя узлами при двумерном анализе и элементы в форме кирпичиков с восемью узлами при трехмерном анализе), а также матрицу с неравномерным распределением теплоемкости, причем сетка должна быть по возможности ближе к однородной сетке. Шаг по времени задается согласно (9.128), где теперь Δx представляет собой наименьшее расстояние между любыми узлами. С другой стороны, если используется правило трапеций или метод Эйлера с левыми разностями, то мы обычно используем параболические элементы (элементы с девятью узлами при двумерном анализе и элементы с 27-ю узлами при трехмерном анализе), совместимую матрицу теплоемкости и шаг по времени величиной, соответствующей формуле (9.129), где Δx , опять-таки, соответствует наименьшему расстоянию между любыми узлами.

В заключение давайте продемонстрируем применение α -метода интегрирования по времени с помощью двух примеров.

Пример 9.15: Выведите те уравнения, которые необходимо решать при нелинейном, нестационарном анализе теплопередачи, используя метод Эйлера с левыми разностями, а также полную версию метода Ньютона–Рафсона.

При нелинейном анализе теплопередачи определяющие уравнения при применении неявной процедуры интегрирования по времени имеют вид (см. раздел 7.2.3)

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{C}^{(i)} {}^{t+\Delta t}\dot{\boldsymbol{\theta}}^{(i)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)} \Delta\boldsymbol{\theta}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{Q}}^{(i-1)}, \quad (\text{a})$$

где ${}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{Q}}^{(i-1)}$ — это вектор тепловых потоков в узловой точке, соответствующий моменту времени $t + \Delta t$ и итерации за номером $(i - 1)$. Используя метод Эйлера с левыми разностями, мы имеем

$${}^{t+\Delta t}\dot{\boldsymbol{\theta}}^{(i)} = \frac{{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\theta}^{(i-1)} + \Delta\boldsymbol{\theta}^{(i)} - {}^t\boldsymbol{\theta}}{\Delta t}$$

и, следовательно, соотношение (a) приводится к виду

$$\left({}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)} + \frac{1}{\Delta t} {}^{t+\Delta t}\mathbf{C}^{(i)} \right) \Delta\boldsymbol{\theta}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{Q}}^{(i-1)} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{C}^{(i)} {}^{t+\Delta t}\dot{\boldsymbol{\theta}}^{(i-1)}, \quad (\text{b})$$

где

$${}^{t+\Delta t}\dot{\boldsymbol{\theta}}^{(i-1)} = \frac{{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\theta}^{(i-1)} - {}^t\boldsymbol{\theta}}{\Delta t}.$$

Для получения решения соотношение (b) подвергается дальнейшей линеаризации (соответствующей полной версии итерации Ньютона–Рафсона), принимая вид

$$\left({}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)} + \frac{1}{\Delta t} {}^{t+\Delta t}\mathbf{C}^{(i-1)} \right) \Delta\boldsymbol{\theta}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{Q}}^{(i-1)} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{C}^{(i-1)} {}^{t+\Delta t}\dot{\boldsymbol{\theta}}^{(i-1)}.$$

Пример 9.16: Обращаясь к примеру 9.15, дайте вывод тех уравнений, которые необходимо решать при анализе течения несжимаемой жидкости без теплопередачи, используя метод Эйлера с левыми разностями.

Определяющие конечно-элементные уравнения, описывающие течение жидкости, приводятся в форме (7.74) и (7.75); они могут быть переформулированы в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{V}} \\ \dot{\mathbf{P}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}_p \\ \mathbf{K}_p^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{a})$$

где вектор \mathbf{V} служит обозначением всех скоростных степеней свободы, а \mathbf{P} перечисляет все степени свободы, связанные с давлением.

Отметим, что условия абсолютно несжимаемого течения приводят в результате к появлению нулевых диагональных элементов, соответствующих степеням свободы, обусловленным давлением. Следовательно, необходимо применять неявное интегрирование по времени. При применении схемы Эйлера с левыми разностями мы используем (теперь уже со введением верхних индексов, обозначающих момент времени и номер итерации)

$$\begin{aligned} & \left(\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}_p \\ \mathbf{K}_p^T & 0 \end{bmatrix} \right) \Big|_{\text{вычисляется при } {}^{t+\Delta t}\mathbf{V}^{(i-1)}, {}^{t+\Delta t}\mathbf{P}^{(i-1)}} + \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Big) \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{V}^{(i)} \\ \Delta\mathbf{P}^{(i)} \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} \\ 0 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{V}}^{(i-1)} \\ {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{P}}^{(i-1)} \end{bmatrix} + \right. \\ & \quad \left. + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}_p \\ \mathbf{K}_p^T & 0 \end{bmatrix} \Big|_{\text{вычисляется при } {}^{t+\Delta t}\mathbf{V}^{(i-1)}, {}^{t+\Delta t}\mathbf{P}^{(i-1)}} \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{V}^{(i-1)} \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{P}^{(i-1)} \end{bmatrix} \right). \quad (\text{b}) \end{aligned}$$

Уравнения, записанные в форме (b), соответствуют просто построению решения путем последовательных подстановок, так как матрицы коэффициентов не являются

касательными матрицами. Цикл итераций типа Ньютона–Рафсона мог бы быть введен так, как это описано в разделах 6.3.1 и 8.4.1.

На практике простые итерации в соответствии с соотношением (b) зачастую дают очень хорошие результаты, особенно если шаг по времени Δt достаточно мал. Однако при этом вектор, находящийся в правой части, должен рассчитываться очень эффективно за счет минимизации того количества операций умножения, которое требуется фактически.

В приведенных выше примерах и соответствующих им решениях мы рассматривали нелинейные системы с неявными схемами интегрирования по времени. Следовательно, как указывалось в разделе 9.5.2, для получения решения нужно и важно проводить итерации. При анализе теплопередачи мы можем использовать также и явный метод Эйлера с правыми разностями, а в этом случае итерации не проводятся, но шаг по времени Δt должен быть меньше, чем $2/\lambda_n$, где λ_n — это наибольшее собственное значение задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{C}\phi$, с матрицами \mathbf{K} и \mathbf{C} , меняющимися в процессе нелинейного анализа (см. упражнение 9.25). Указанный шаг по времени может вычисляться по формуле (9.128) или по данным о матрицах отдельных конечных элементов (см. пример 9.13 и упражнение 9.27). С другой стороны, при построении решений для течений несжимаемой жидкости для уравнений давления нужно использовать безусловно устойчивый неявный метод интегрирования по времени, тогда как для уравнений, содержащих скорость и температуру, можно проводить неявное или явное интегрирование (см. раздел 9.2.5, где дается пример сочетающихся схем интегрирования, а также упражнение 9.28).

9.6.2. Упражнения

9.25. Определяющие уравнения теплопередачи для линейной конечно-элементной системы общего вида имеют форму

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\theta} &= \mathbf{Q}, \\ \boldsymbol{\theta}|_{\text{время } 0} &= {}^0\boldsymbol{\theta}. \end{aligned} \quad (\text{a})$$

(i) Рассмотрите систему без принуждения, при $\mathbf{Q} = 0$, предположите, что $\boldsymbol{\theta} = \phi e^{-\lambda t}$, и сформулируйте задачу на собственные значения

$$\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{C}\phi. \quad (\text{b})$$

(ii) Используйте решения задачи на собственные значения из (b) и покажите, как решать уравнения (a) с помощью суперпозиции мод.

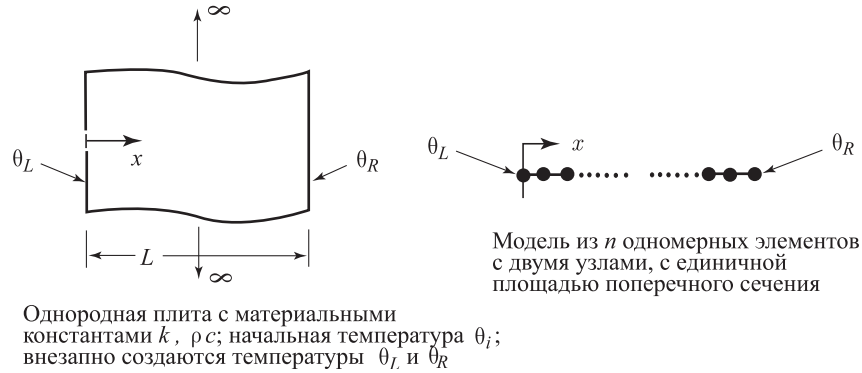
(iii) Предположите теперь, что имеет место специальный случай

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

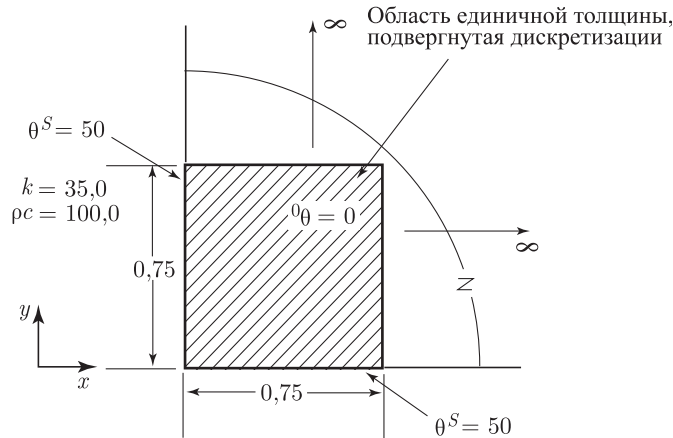
и постройте решение, пользуясь суперпозицией мод согласно (ii).

9.26. Предположите, что для системы общего вида из упражнения 9.25 решение с суперпозицией мод проведено с использованием только мод, соответствующих p наименьшим собственным значениям (т. е. с использованием только уравнений, соответствующих $\lambda_1, \dots, \lambda_p$). Покажите, как можно было бы оценить ошибку при решении определяющих конечно-элементных уравнений, а также разработайте схему внесения поправки, подобной той статической поправке, которая используется при динамическом анализе систем типа конструкций (см. (9.52)).

9.27. Предположите, что метод Эйлера с правыми разностями используется при решении определяющего уравнения теплопередачи $\mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{Q}$. Покажите, как можно рассчитать критический шаг по времени по данным о матрицах отдельных элементов (*подсказка*: см. пример 9.13). Примените полученный результат для расчета критического шага по времени для показанной здесь конечно-элементной модели задачи о e и сравните ваш результат со значением, даваемым формулой (9.128).

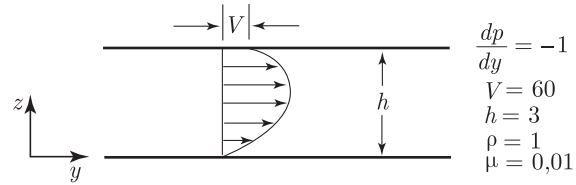


- 9.28. Рассмотрите определяющие конечно-элементные уравнения нестационарного течения несжимаемой жидкости (7.74)–(7.76). Предложите такую схему интегрирования по времени, при которой уравнения для давления интегрируются неявно, а уравнения для скорости и для температуры — явно (см. раздел 9.2.5).
- 9.29. Воспользуйтесь программой реализации метода конечных элементов для построения решения о нестационарной реакции математической модели, показанной на иллюстрации к упражнению 9.27. Выберите разумную конечно-элементную дискретизацию, а также схему интегрирования по времени и надлежащий шаг по времени Δt . Покажите, что ваши результаты обнаруживают приемлемую точность. При анализе $k = 0,10$, $\rho c = 0,01$, $\theta_i = 70$, $\theta_R = 70$, $\theta_L = 400$, $L = 10$.
- 9.30. Действуйте так же, как и в упражнении 9.29, но применительно к двумерной математической модели угла, в которой температура θ^S внезапно прилагается на поверхности в момент времени 0^+ .



- 9.31. Воспользуйтесь компьютерной программой, чтобы получить решение, касающееся нестационарной реакции жидкости, находящейся между двумя вращающимися цилиндрами. Используйте ту же геометрию и те же материальные свойства, что и в упражнении 7.28. Предположите, что в начальный момент цилиндры покоятся и что окончательные значения скоростей вращения достигаются в промежуток времени от 0 до 1. Сравните ваши результаты со стационарным решением, рассчитанным аналитически (см., например, книгу [White, 1986]).
- 9.32. Воспользуйтесь компьютерной программой, чтобы получить решение для описания нестационарной реакции жидкости между двумя пластинами; см. рисунок, где указаны данные, которые следует использовать. Нижняя пластина находится в покое,

а верхняя начинает свое движение из состояния покоя и при линейном законе возрастания скорость достигает своего стационарного значения V . Жидкость находится под воздействием градиента давления.



Сравните ваши результаты со стационарным решением, рассчитанным аналитически (см., например, книгу [Schlichting, 1986]).

Глава 10

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ, НУЖНЫЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ

10.1. Введение

В различных разделах предшествующих глав мы встречались с задачами о собственных значениях и со схемами их решения. В этих разделах мы не обсуждали вопросов о том, как получить требуемые собственные значения и собственные векторы. Целью этой главы и следующей за ней является описание фактических процедур решения, предназначенных для разрешения интересующих нас задач о собственных значениях. Прежде чем представить соответствующие алгоритмы, в данной главе мы обсуждаем некоторые важные фундаментальные соображения, касающиеся решения задач о собственных значениях.

Прежде всего мы дадим краткую сводку тех задач о собственных значениях, которые мы хотели бы решать. Самая простая из встречающихся на этом пути задач — это стандартная задача о собственных значениях,

$$\mathbf{K}\phi = \lambda\phi, \quad (10.1)$$

где \mathbf{K} — это матрица жесткости одиночного конечного элемента, принадлежащего комплексу таких элементов. Мы вспоминаем, что матрица \mathbf{K} имеет порядок n , а для комплекса элементов — полуширину ленты m_K (т.е. полную ширину ленты $2m_K + 1$), и что эта матрица является положительно полуопределенной или положительно определенной. Имеется n собственных значений и соответствующих собственных векторов, удовлетворяющих уравнению (10.1). Собственная пара за номером i обозначается, как (λ, ϕ_i) , где собственные значения упорядочиваются в соответствии с их величинами:

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda_n. \quad (10.2)$$

Решение для p собственных пар может быть записано в виде

$$\mathbf{K}\Phi = \Phi\Lambda, \quad (10.3)$$

где Φ — это матрица $n \times p$ с числом столбцов, равным числу p собственных векторов, а Λ — это диагональная матрица $p \times p$, перечисляющая соответствующие собственные значения. В качестве примера, соотношение (10.3) может представлять решение для p наименьших собственных значений и для соответствующих собственных векторов матрицы \mathbf{K} , а в этом случае $\Phi = [\phi_1, \dots, \phi_p]$ и $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, p$. Вспомним, что если матрица \mathbf{K} является положительно и определенной, то $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, число нулевых собственных значений равно числу твердотельных мод рассматриваемой системы.

Решение задачи о собственных значениях согласно уравнению (10.1) ищется, например, путем расчета матрицы жесткости элемента или путем вычисления условного числа для матрицы жесткости конструкции. Как мы уже обсуждали это в разделе 4.3.2, представление матрицы жесткости элемента в ее канонической форме (т.е. на базе собственных векторов) используется для оценки эффективности рассматриваемого элемента. В этом случае должны быть рассчитаны все собственные значения и собственные векторы матрицы \mathbf{K} . С другой стороны, для того, чтобы вычислить условное число матрицы жесткости, требуется знать только наименьшее и наибольшее собственные значения (см. раздел 8.2.6).

Прежде чем переходить к обобщенным задачам о собственных значениях, необходимо упомянуть о том, что нам может понадобиться решать и другие стандартные задачи о собственных значениях. Например, нам может понадобиться знать собственные значения матрицы масс \mathbf{M} , а в этом случае в уравнении (10.1) матрица \mathbf{M} заменяет матрицу \mathbf{K} .

Аналогично этому, мы можем пожелать найти собственные значения матрицы теплопроводности, или матрицы теплоемкости, при анализе поведения тепловых потоков (см. раздел 7.2).

Очень часто рассматриваемая задача о собственных значениях — это задача, которую следует решать путем анализа суперпозиции колебательных мод (см. раздел 9.3). В этом случае мы рассматриваем обобщенную задачу о собственных значениях

$$\mathbf{K}\phi = \lambda \mathbf{M}\phi, \quad (10.4)$$

где \mathbf{K} и \mathbf{M} представляют собой, соответственно, матрицу жесткости и матрицу масс конечно-элементного комплекса. Собственные значения λ_i и собственные векторы ϕ_i представляют собой квадраты частот свободных колебаний (радианы/сек), ω_i^2 , и, соответственно, векторов колебательных мод. Свойства матрицы \mathbf{K} таковы, как это обсуждалось ранее. Матрица масс может иметь ленточную форму, а в этом случае полуширина ее ленты m_M равна m_K , или же матрица \mathbf{M} может оказаться диагональной при $m_{ii} \geq 0$; иначе говоря, некоторые диагональные элементы могут оказаться равными нулю. Ленточная матрица масс, получаемая при совместимом анализе масс, всегда является положительно определенной, тогда как матрица с неравномерным распределением масс является положительно определенной только тогда, когда все ее диагональные элементы больше нуля. В общем случае диагональная матрица масс является положительно полуопределенной.

По аналогии с (10.3) решение для p собственных значений и соответствующих им собственных векторов уравнения (10.4) может быть записано в виде

$$\mathbf{K}\Phi = \mathbf{M}\Phi\Lambda, \quad (10.5)$$

где столбцы матрицы Φ представляют собой собственные векторы, а Λ — это диагональная матрица, перечисляющая соответствующие собственные значения.

Разумеется, обобщенная задача о собственных значениях приводится к стандартной задаче о собственных значениях (10.1), если \mathbf{M} является матрицей тождества. Другими словами, собственные значения и собственные векторы уравнения (10.3) могут также рассматриваться в качестве квадратов частот и видов колебательных мод данной системы, если каждой степени свободы соответствует единичная масса. В соответствии с возможными собственными значениями для решения уравнения (10.1) обобщенная задача о собственных значениях для уравнения (10.4) имеет собственные значения $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, где число нулевых собственных значений оказывается, опять-таки, равным числу твердотельных мод рассматриваемой системы.

Следует коротко упомянуть о двух дополнительных обобщенных задачах о собственных значениях. Вторая из задач решается при линеаризованном анализе процесса выпучивания, а в этом случае мы рассматриваем уравнение (см. раздел 6.8.2)

$${}^t\mathbf{K}\phi = \lambda^{t-\Delta t}\mathbf{K}\phi, \quad (10.6)$$

где ${}^{t-\Delta t}\mathbf{K}$ и ${}^t\mathbf{K}$ — это матрицы жесткости, соответствующие моментам времени (т.е. уровням нагрузки) $t - \Delta t$ и t , соответственно.

Третья обобщенная задача о собственных значениях встречается при решении задач о теплопередаче, когда мы рассматриваем уравнение

$$\mathbf{K}\phi = \lambda \mathbf{C}\phi, \quad (10.7)$$

где \mathbf{K} — это матрица теплопроводности, а \mathbf{C} — матрица теплоемкости. Собственные значения и собственные векторы — это, соответственно, термические собственные значения и разновидности мод. Решение уравнения (10.7) требуется получить при анализе теплопередачи с использованием суперпозиции мод (см. упражнение 9.25). Матрицы \mathbf{K} и \mathbf{C} , фигурирующие в уравнении (10.7), являются положительно определенными или положительно полуопределенными, так что собственные значения для (10.7) будут $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$.

В данной и в следующей главах мы обсуждаем решение задач о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda\phi$ и $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, содержащихся в уравнениях (10.1) и (10.4). Эти задачи о собственных значениях часто встречаются на практике. Однако следует признать, что все алгоритмы, которые будут представлены, оказываются применимыми также и к решению других задач о собственных значениях, если только эти задачи имеют ту же форму,

а матрицы удовлетворяют надлежащим условиям о положительной определенности, полуопределенности, и так далее. Например, для решения задачи, сформулированной в (10.7), матрица масс \mathbf{M} просто должна быть заменена на матрицу теплоемкости \mathbf{C} , а матрица \mathbf{K} представляет собой матрицу теплопроводности.

Если рассматривать фактическое компьютерное решение интересующих нас задач о собственных значениях, то следует вспомнить, что при представлении процедур решения в статическом анализе (см. раздел 8.1) мы указывали на важность использования эффективных процедур расчета. Это еще более важно при расчетах задач о собственных значениях для систем, так как решение с определением собственных значений и соответствующих им собственных векторов требует, в общем случае, затраты гораздо больших компьютерных усилий, чем решение уравнений статического равновесия. Особенно важное соображение сводится к тому, что решение соответствующих алгоритмов должно быть устойчивым, а этого намного труднее достичь при решении задач о собственных значениях.

В литературе разработаны и описаны разнообразные методы решения задач о системах собственных значений (см., например, книгу [Wilkinson, 1965-1]). Большинство технических приемов было разработано для матриц весьма общего вида. Однако при проведении конечно-элементного анализа мы имеем дело с решением специфических задач о собственных значениях, перечень которых был дан выше, и в этих задачах каждая из матриц обладает такими специфическими свойствами, как наличие ленточной структуры, положительная определенность, и так далее. Алгоритмы решения для задач о системах собственных значений должны использовать преимущество наличия таких свойств, чтобы сделать возможным построение более экономичного решения.

В этой главе мы ставим своей целью заложить основы для всестороннего понимания эффективных методов решения задач о собственных значениях. Выполнение этой цели осуществляется за счет того, что вначале мы обсуждаем свойства матриц, собственных значений и собственных векторов применительно к интересующим нас задачам, а затем представляем некоторые приемы приближенного решения. Реальные методы решения, рекомендуемые для использования, представляются в главе 11.

10.2. Фундаментальные факты, используемые при решении задач о системах собственных значений

Прежде чем надлежащим образом заниматься изучением процедур решения задач о системах собственных значений, необходимо вначале добиться полного понимания различных свойств рассматриваемых матриц, собственных значений и собственных векторов. Мы найдем, в частности, что все методы решения оказываются, по существу, базирующимися на этих фундаментальных свойствах. Поэтому в данном разделе мы хотим дать перечень важнейших свойств самих матриц и систем их собственных значений, хотя некоторая часть этого материала уже была изложена в других разделах настоящей книги. Как указано в разделе 10.1, мы рассматриваем задачу о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, приводящуюся к задаче $\mathbf{K}\phi = \lambda\phi$, когда $\mathbf{M} = \mathbf{I}$, однако проводимые нами наблюдения в равной степени применимы и к другим, интересующим нас, задачам о собственных значениях.

10.2.1. Свойства собственных векторов

Как мы утверждали, решение обобщенной задачи о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ дает n собственных значений, выстроенных в том порядке, как это показано в (10.2), а также соответствующих собственных векторов ϕ_1, \dots, ϕ_n . Каждая собственная пара (λ_i, ϕ_i) удовлетворяет уравнению (10.4); иначе говоря, мы имеем

$$\mathbf{K}\phi_i = \lambda_i\mathbf{M}\phi_i; \quad i = 1, \dots, n. \quad (10.8)$$

Следует полностью осознать смысл уравнения (10.8). Это уравнение гласит, что если мы определим вектор $\lambda_i\mathbf{M}\phi_i$ и используем его как вектор нагрузки \mathbf{R} в уравнении $\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{R}$, то $\mathbf{U} = \phi_i$. Эта мысль может сразу же подсказать нам возможность использования алгоритмов статического решения для расчета собственного вектора. Позднее мы увидим, что алгоритм разложения \mathbf{LDL}^T является, действительно, важной частью процедуры решения для собственных значений.

Уравнение (10.8) показывает также, что собственный вектор определяется только с точностью до постоянного множителя; это значит, что мы имеем также

$$\mathbf{K}(\alpha\phi_i) = \lambda_i \mathbf{M}(\alpha\phi_i), \quad (10.9)$$

где α — постоянная, отличная от нуля. Поэтому если ϕ_i является собственным вектором, то $\alpha\phi_i$ также является собственным вектором, и мы говорим, что собственный вектор определяется только своим направлением в рассматриваемом нами n -мерном пространстве. Однако при нашем обсуждении мы говорим о тех конкретных собственных векторах ϕ_i , которые удовлетворяют уравнению (10.8), а также соотношению $\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i = 1$, фиксирующему длину собственных векторов, т. е. абсолютную величину каждого собственного вектора. Мы можем отметить, однако, что собственные векторы по-прежнему определяются с точностью до множителя -1 .

Важное соотношение, которому удовлетворяют собственные векторы, это — соотношение ортонормированности, включающее матрицу \mathbf{M} ; иначе говоря, мы имеем

$$\phi_i^T \mathbf{M} \phi_j = \delta_{ij}, \quad (10.10)$$

где δ_{ij} — это дельта Кронекера. Данное соотношение является следствием ортонормированности собственных векторов для стандартных задач о собственных значениях (см. раздел 2.5) и подвергается дальнейшему обсуждению в разделе 10.2.5. Если умножить обе части уравнения (10.8) на ϕ_i и воспользоваться условием (10.10), то мы получим

$$\phi_i^T \mathbf{K} \phi_j = \lambda_i \delta_{ij}, \quad (10.11)$$

а это означает, что собственные векторы ортонормированы также и со включением матрицы \mathbf{K} . При использовании соотношений (10.10) и (10.11) следует иметь в виду, что ортонормированность со включением матриц \mathbf{M} и \mathbf{K} следует из уравнения (10.8), представляющего собой основное уравнение, которое должно удовлетворяться. Другими словами, если мы считаем, что имеем собственный вектор и собственное значение, то в качестве проверки этого предположения мы должны подставить их в уравнение (10.8) (см. пример 10.3).

Пока что мы не делали никаких упоминаний относительно кратных собственных значений и соответствующих им собственных векторов. Важно осознать, что в данном случае собственные векторы не являются единственными, но что мы всегда можем выбрать некий набор собственных векторов, ортонормированных со включением \mathbf{M} и перекрывающих подпространство, соответствующее кратному собственному значению (см. раздел 2.5). Другими словами, предположим, что λ_i имеет кратность m (т. е. $\lambda_i = \lambda_{i+1} = \dots = \lambda_{i+m-1}$); тогда мы можем выбрать m собственных векторов $\phi_i, \dots, \phi_{i+m-1}$, перекрывающих m -мерное подпространство, соответствующее собственным значениям величиной λ_i и удовлетворяющее соотношениям ортонормированности (10.10) и (10.11). Однако собственные векторы не являются единственными; вместо этого единственным является пространство собственных значений, соответствующее λ_i . Мы демонстрируем результаты с помощью некоторых примеров.

Пример 10.1: Матрица жесткости и матрица масс системы с двумя степенями свободы имеют вид

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 5/4 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}.$$

Мы считаем, что две собственные пары задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\phi$ представляются в виде

$$(d_1, \mathbf{v}_1) = \left(1, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\right); \quad (d_2, \mathbf{v}_2) = \left(6, \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\right), \quad (a)$$

а две собственные пары задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ имеют вид

$$(g_1, \mathbf{w}_1) = \left(2, \begin{bmatrix} 4/5 \\ 1 \end{bmatrix}\right); \quad (g_2, \mathbf{w}_2) = \left(12, \begin{bmatrix} 2/5 \\ -2 \end{bmatrix}\right). \quad (b)$$

Проверьте, действительно ли мы имеем в выражениях (a) и (b) решения задач о собственных значениях для уравнений $\mathbf{K}\phi = \lambda\phi$ и $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ соответственно.

Рассмотрим вначале задачу $\mathbf{K}\phi = \lambda\phi$. Значения, данные в (а), действительно дают решение задачи о собственных значениях, если они удовлетворяют уравнению (10.8) при $\mathbf{M} = \mathbf{I}$ и, чтобы зафиксировать длины векторов, соотношениям ортонормированности в (10.10) при $\mathbf{M} = \mathbf{I}$. Подстановка указанных значений в соотношение (10.3), соответствующее уравнению (10.8) для всех собственных пар, позволяет получить

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix},$$

или

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{12}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{6}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{12}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{6}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Проводя вычисления согласно (10.10), мы получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = 1, \\ \mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = 0, \\ \mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_2 &= \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = 1, \\ \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_1 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, соотношения (10.3) и (10.10) удовлетворяются, и мы имеем $\lambda_1 = d_1$, $\lambda_2 = d_2$, $\phi_1 = \mathbf{v}_1$, $\phi_2 = \mathbf{v}_2$.

Для проверки того, имеем ли мы в (б) собственное решение задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, мы действуем аналогичным образом. Подставляя в (10.5), имеем

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/4 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix},$$

или

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ \frac{2}{5} & -\frac{24}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ \frac{2}{5} & -\frac{24}{5} \end{bmatrix}$$

и, проводя вычисления согласно (10.10), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1^T \mathbf{M} \mathbf{w}_1 &= \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/4 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/5 \\ 1 \end{bmatrix} = 1, \\ \mathbf{w}_2^T \mathbf{M} \mathbf{w}_1 &= \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/4 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/5 \\ 1 \end{bmatrix} = 0, \\ \mathbf{w}_2^T \mathbf{M} \mathbf{w}_2 &= \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/4 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/5 \\ -2 \end{bmatrix} = 1, \\ \mathbf{w}_1^T \mathbf{M} \mathbf{w}_2 &= \mathbf{w}_2^T \mathbf{M} \mathbf{w}_1 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, соотношения в (10.5) удовлетворяются, и мы имеем

$$\lambda_1 = g_1; \quad \lambda_2 = g_2; \quad \phi_1 = \mathbf{w}_1; \quad \phi_2 = \mathbf{w}_2.$$

Пример 10.2: Рассмотрите задачу о собственных значениях

$$\mathbf{K}\phi = \lambda\phi \quad \text{при} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$$

и покажите, что собственные векторы, соответствующие кратному собственному значению, не являются единственными.

Собственные значения матрицы \mathbf{K} — это $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$ и $\lambda_3 = 3$, а комплект собственных векторов имеет вид

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \phi_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{a})$$

где вектор ϕ_3 является единственным. Эти значения могут быть проверены так, как в примере 10.1. Однако любая линейная комбинация ϕ_1 и ϕ_2 , заданных в (а), которая удовлетворяет условиям ортонормированности согласно (10.10) при $\mathbf{M} = \mathbf{I}$, также будет собственным вектором. Например, мы могли бы использовать

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Тот факт, что эти выражения действительно определяют собой собственные векторы, соответствующие $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, может быть снова проверен так как в примере 10.1. Следует отметить, что любые собственные векторы ϕ_1 и ϕ_2 создают базис для единственного двумерного собственного пространства, соответствующего λ_1 и λ_2 .

Решение уравнения (10.4) для всех p требуемых собственных значений и соответствующих собственных векторов было зафиксировано в соотношении (10.5). Используя соотношения (10.10) и (10.11), мы можем теперь написать

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Lambda \quad (10.12)$$

и

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I}, \quad (10.13)$$

где p столбцов матрицы Φ представляют собой собственные векторы. *Очень важно отметить, что соотношения (10.12) и (10.13) представляют собой те условия, которым должны удовлетворять собственные векторы, однако если удовлетворяются условия ортонормированности, включающие \mathbf{M} и \mathbf{K} , то p векторов не обязательно должны быть собственными векторами, если только мы не имеем $p = n$. Другими словами, если предположить, что матрица \mathbf{X} содержит p векторов, $p < n$, и что $\mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X} = \mathbf{D}$ и $\mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X} = \mathbf{I}$, то векторы в матрице \mathbf{X} и диагональные элементы в \mathbf{D} могут быть, а могут и не быть, собственными векторами и собственными значениями задачи (10.4). Однако если $p = n$, то $\mathbf{X} = \Phi$ и $\mathbf{D} = \Lambda$, так как только собственные векторы перекрывают целиком n -мерное пространство и приводят к диагональной форме матрицы \mathbf{K} и \mathbf{M} . Чтобы подчеркнуть смысл этого наблюдения, мы представляем следующий пример.*

Пример 10.3: Рассмотрите задачу о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, где

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix},$$

и два вектора

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Покажите, что векторы \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 удовлетворяют соотношениям ортонормированности (10.12) и (10.13) (т.е. соотношениям (10.10) и (10.11)), но что они не являются собственными векторами.

Для проверки будем считать, что \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 представляют собой столбцы матрицы Φ , и проведем вычисления согласно (10.12) и (10.13). Таким образом мы получаем

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (4 - \sqrt{2}) & 0 \\ 0 & (4 + \sqrt{2}) \end{bmatrix} \quad (a)$$

и

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & & \\ & 1 & \\ & & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, соотношения ортонормированности удовлетворяются. Чтобы показать, что \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 не являются собственными векторами, мы обращаемся к уравнению (10.8). Например,

$$\mathbf{K}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 + \frac{4}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

однако вектор $\mathbf{K}\mathbf{v}_1$ не может быть равен вектору $\alpha\mathbf{M}\mathbf{v}_1$, где α есть скаляр; это значит, что $\mathbf{K}\mathbf{v}_1$ не параллелен $\mathbf{M}\mathbf{v}_1$ и, следовательно, \mathbf{v}_1 не является собственным вектором. Аналогично этому, \mathbf{v}_2 не является собственным вектором, а значения $(4 - \sqrt{2})$ и $(4 + \sqrt{2})$, рассчитанные согласно (a), не являются собственными значениями. Фактические собственные значения и соответствующие им собственные векторы даются в примере 10.4.

В предшествующем изложении мы рассмотрели свойства собственных векторов задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, а теперь мы должны дать краткий комментарий относительно свойств собственных векторов, рассчитываемых при решении других, интересных для нас, задач о собственных значениях. Этот комментарий прост: обсужденные здесь соотношения, касающиеся ортонормирования, справедливы также и для собственных векторов, встречающихся при анализе прогиба и при анализе теплопередачи. Иначе говоря, при анализе прогиба мы имеем также, если пользоваться обозначениями из (10.6),

$$\left. \begin{aligned} \phi_i^{T \ t - \Delta t} \mathbf{K} \phi_j &= \delta_{ij}; & \phi_i^{T \ t} \mathbf{K} \phi_j &= \lambda_i \delta_{ij} \\ \Phi^{T \ t - \Delta t} \mathbf{K} \Phi &= \mathbf{I}; & \Phi^{T \ t} \mathbf{K} \Phi &= \Lambda \end{aligned} \right\}, \quad (10.14)$$

а при анализе теплопередачи, пользуясь обозначениями из (10.7), мы имеем

$$\left. \begin{aligned} \phi_i^T \mathbf{C} \phi_j &= \delta_{ij}; & \phi_i^T \mathbf{K} \phi_j &= \lambda_i \delta_{ij} \\ \Phi^T \mathbf{C} \Phi &= \mathbf{I}; & \Phi^T \mathbf{K} \Phi &= \Lambda \end{aligned} \right\}. \quad (10.15)$$

Как и в применении к задаче о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, доказательство справедливости соотношений (10.14) и (10.15) зависит от того, могут ли обобщенные задачи о собственных значениях быть преобразованы к стандартной форме. Дальнейшее обсуждение этого вопроса будет проводиться в разделе 10.2.5.

10.2.2. Характеристические полиномы задачи о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ и ассоциированных с ней задач о принудительных ограничениях

Важное свойство собственных значений задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ состоит в том, что они являются корнями характеристического полинома

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}). \quad (10.16)$$

Мы можем показать, что это свойство является следствием фундаментального соотношения (10.8). Переписывая (10.8) в форме

$$(\mathbf{K} - \lambda_i\mathbf{M})\phi_i = 0, \quad (10.17)$$

мы наблюдаем, что соотношение (10.8) может удовлетворяться только для нетривиального ϕ_i (т.е. когда ϕ_i не представляет собой нулевого вектора) при условии, что матрица $\mathbf{K} - \lambda_i\mathbf{M}$ является особенной. Это означает, что если с помощью факторизации мы приводим $\mathbf{K} - \lambda_i\mathbf{M}$ к виду единичной, нижней треугольной матрицы \mathbf{L} и к виду верхней треугольной матрицы \mathbf{S} , используя при этом исключение по Гауссу, то мы имеем $s_{nn} = 0$. Однако, учитывая, что

$$p(\lambda_i) = \det \mathbf{L}\mathbf{S} = \prod_{i=1}^n s_{ii}, \quad (10.18)$$

мы получаем, как следствие, что $p(\lambda_i) = 0$. Кроме того, если число величин λ_i равно m , то мы имеем также $s_{n-1, n-1} = \dots = s_{n-m+1, n-m+1} = 0$. Следует отметить, что при факторизации комплекса $\mathbf{K} - \lambda_i\mathbf{M}$ могут понадобиться взаимные обмены, а в этом случае факторизация указанного комплекса осуществляется при взаимных обменах его строк и, возможно, столбцов (каждый обмен строки или столбца приводит к перемене знака определителя, и это должно быть принято во внимание; см. раздел 2.2). Если взаимные обмены не выполняются, или если выполняются взаимные обмены строк и соответствующих столбцов, что почти всегда возможно на практике (см., однако, пример 10.4, где описан случай, когда это невозможно), то матрица коэффициентов остается симметричной. В этом случае вместо (10.18) мы можем написать

$$p(\lambda_i) = \det \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T = \prod_{i=1}^n d_{ii}, \quad (10.19)$$

где $\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T$ представляет собой факторизацию матрицы $\mathbf{K} - \lambda_i\mathbf{M}$, или матрицы, полученной из нее путем взаимного обмена строк и соответствующих столбцов, т.е. в результате изменения порядка перечисления степеней свободы данной системы (см. раздел 8.2.5). Условие $s_{nn} = 0$ превращается теперь в условие $d_{nn} = 0$, а когда λ_i имеет кратность m , то последние m элементов матрицы \mathbf{D} являются нулями.

В разделе 8.2.5 мы обсуждали свойство последовательности Штурма для характеристических полиномов, относящихся к задачам с принудительным ограничением, ассоциированным с задачей $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$. Те самые свойства, которые мы наблюдали в процессе этого обсуждения, применимы также и к характеристическим полиномам для задач с принудительным ограничением, ассоциированным с задачей $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$. Доказательство этого следует из того факта, что обобщенная задача о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ может быть преобразована в стандартную задачу о собственных значениях, для которой справедливо свойство последовательности Штурма, примененное к характеристическим полиномам. Отложив доказательство этого до раздела 10.2.5, пример 10.11, дадим сейчас сводку важных результатов.

Задача о собственных значениях в применении к r -й ассоциированной задаче с принудительными ограничениями, соответствующей $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, задается соотношением

$$\mathbf{K}^{(r)}\phi^{(r)} = \lambda^{(r)}\mathbf{M}^{(r)}\phi^{(r)}, \quad (10.20)$$

где все матрицы имеют порядок $n - r$, а матрицы $\mathbf{K}^{(r)}$ и $\mathbf{M}^{(r)}$ получаются из матриц \mathbf{K} и \mathbf{M} путем вычеркивания из них r последних строк и столбцов. Характеристический полином для r -й ассоциированной задачи с принудительным ограничением имеет форму

$$p^{(r)}(\lambda^{(r)}) = \det(\mathbf{K}^{(r)} - \lambda^{(r)}\mathbf{M}^{(r)}), \quad (10.21)$$

и, так же, как и для специального случая $\mathbf{M} = \mathbf{I}$, собственные значения $(r + 1)$ -й задачи с принудительными ограничениями разделяют такие же значения r -й задачи с ограничениями; иначе говоря, как утверждалось в (8.38), мы имеем, опять-таки,

$$\lambda_1^{(r)} \leq \lambda_1^{(r+1)} \leq \lambda_2^{(r)} \leq \lambda_2^{(r+1)} \leq \dots \leq \lambda_{n-r-1}^{(r)} \leq \lambda_{n-r+1}^{(r+1)} \leq \lambda_{n-r}^{(r)}. \quad (10.22)$$

Рассмотрим следующий пример.

Пример 10.4: Рассмотрите задачу о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, где

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1/2 & & \\ & 1 & \\ & & 1/2 \end{bmatrix}.$$

- Рассчитайте собственные значения, используя характеристический полином, определяемый согласно (10.16).
- Постройте решение для собственных векторов ϕ_i , $i = 1, 2, 3$, с помощью использования соотношений (10.17) и условия ортонормированности собственных векторов со включением матрицы \mathbf{M} .
- Рассчитайте собственные значения ассоциированных задач с принудительными ограничениями и продемонстрируйте наличие свойства разделения собственных значений, данного в (10.22).

Пользуясь (10.16), получим характеристический полином

$$p(\lambda) = \left(2 - \frac{1}{2}\lambda\right)(4 - \lambda)\left(2 - \frac{1}{2}\lambda\right) - (-1)(-1)\left(2 - \frac{1}{2}\lambda\right) - (-1)(-1)\left(2 - \frac{1}{2}\lambda\right).$$

Следовательно, $p(\lambda) = -(1/4)\lambda^3 + 3\lambda^2 - 11\lambda + 12$, и мы имеем $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 4$; $\lambda_3 = 6$.

Чтобы получить соответствующие собственные векторы, воспользуемся соотношением (10.17). Для значения λ_1 мы имеем

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \phi_1 = 0. \quad (a)$$

Матрица коэффициентов $\mathbf{K} - \lambda_1\mathbf{M}$ из (a) может быть факторизована с приведением к виду \mathbf{LDL}^T без взаимных перестановок. Используя процедуру, описанную в разделе 8.2.2, мы получаем

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{bmatrix} \phi_1 = 0. \quad (b)$$

Мы замечаем, что $d_{33} = 0$. Чтобы вычислить ϕ_1 , мы получаем из (b)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ & 1 & -1 \\ & & 0 \end{bmatrix} \phi_1 = 0.$$

Используя также соотношение $\phi_1^T \mathbf{M} \phi_1 = 1$, мы имеем

$$\phi_i^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Чтобы получить ϕ_2 и ϕ_3 , мы действуем аналогичным образом. Вычисляя $\mathbf{K} - \lambda_2 \mathbf{M}$, из (10.17) получим

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \phi_2 = 0.$$

В этом случае мы не можем факторизовать матрицу коэффициентов с сохранением симметрии; это означает, что нам нужно поменять местами только первую и вторую строки (но не соответствующие столбцы). Эта перестановка строк приводит к соотношению

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \phi_2 = 0.$$

Проводя факторизацию матрицы коэффициентов с превращением ее в единичную нижнюю треугольную матрицу \mathbf{L} и верхнюю треугольную матрицу \mathbf{S} , мы получаем

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ & -1 & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix} \phi_2 = 0,$$

и, следовательно, $s_{33} = 0$. Чтобы построить решение для ϕ_2 , мы используем

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ & -1 & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix} \phi_2 = 0$$

и соотношение $\phi_2^T \mathbf{M} \phi_2 = 1$. Таким образом мы получаем

$$\phi_2^T = [-1 \quad 0 \quad 1].$$

Желая рассчитать ϕ_3 , мы вычисляем $\mathbf{K} - \lambda_3 \mathbf{M}$ и имеем

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \phi_3 = 0.$$

Матрица коэффициентов может быть факторизована с превращением в \mathbf{LDL}^T без взаимных перестановок, т. е. будем иметь

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix} \phi_3 = 0.$$

Мы замечаем, что $d_{33} = 0$. Чтобы рассчитать ϕ_3 , используем соотношение

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ & -1 & -1 \\ & & 0 \end{bmatrix} \phi_3 = 0$$

и соотношение $\phi_3^T \mathbf{M} \phi_3 = 1$. Следовательно,

$$\phi_3^T = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \right].$$

Собственные значения первой ассоциированной задачи с принудительными ограничениями получаются в результате решения задачи

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \phi^{(1)} = \lambda^{(1)} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \phi^{(1)}.$$

Следовательно, $p^{(1)}(\lambda^{(1)}) = (1/2)\lambda^{(1)2} - 4\lambda^{(1)} + 7$ и $\lambda_1^{(1)} = 4 - \sqrt{2}$; $\lambda_2^{(1)} = 4 + \sqrt{2}$. Кроме того, $\lambda_1^{(2)} = 4$ и, следовательно, свойство разделения собственных значений, зафиксированное в (10.22), в данном случае реализуется так:

1. Для собственных значений первой и второй ассоциированных задач с принудительными ограничениями

$$4 - \sqrt{2} < 2 < 4 + \sqrt{2}.$$

2. Для собственных значений задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ и для первой ассоциированной задачи с принудительными ограничениями

$$2 < (4 - \sqrt{2}) < 4 < (4 + \sqrt{2}) < 6.$$

Свойство разделения собственных значений, выраженное в неравенствах (10.22), влечет за собой следующий важный факт. Предположим, что мы можем факторизовать матрицу $\mathbf{K} - \mu\mathbf{M}$, преобразуя ее к виду \mathbf{LDL}^T ; это значит, что ни одна из ассоциированных задач с принудительными ограничениями не имеет нулевого собственного значения. Для упрощения обсуждения допустим вначале, что все собственные значения различны; иначе говоря, кратных собственных значений нет. *Важный факт состоит в том, что при разложении матрицы $\mathbf{K} - \mu\mathbf{M}$ число отрицательных элементов в \mathbf{D} равно числу собственных значений, меньших чем μ .* И наоборот, если $\lambda_i < \mu < \lambda_{i+1}$, то матрица \mathbf{D} содержит в точности i отрицательных диагональных элементов. Доказательство этого положения осуществляется путем использования свойства разделения, соответствующего (10.22), и сравнительно легко описывается с помощью следующих соображений.

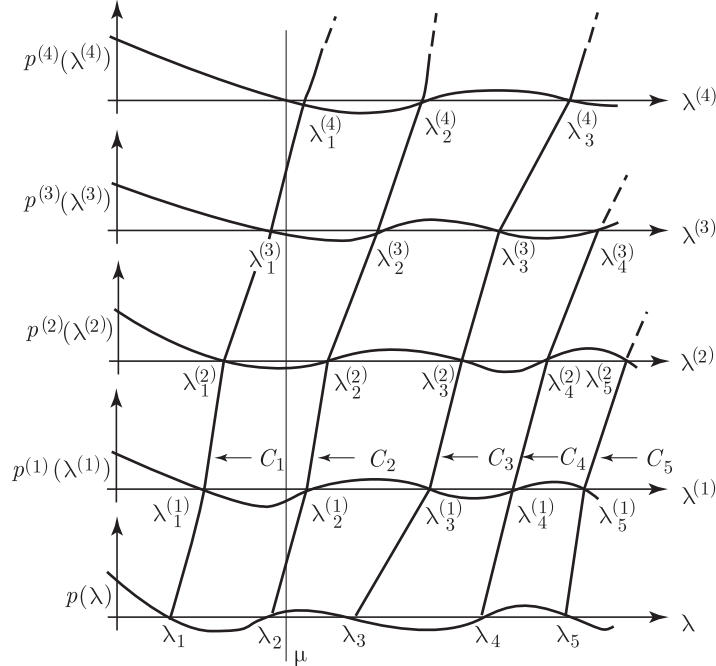


Рис. 10.1. Построение кривых C_I для характеристических полиномов задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ и кривых для ассоциированных задач с принудительными ограничениями

Если обратиться к рис. 10.1, то предположим, что на схематическом изображении характеристических полиномов мы соединяем прямыми линиями все собственные значения $\lambda_1^{(r)}$, $r = 0, 1, \dots$ с $\lambda_1^{(0)} = \lambda_1$ и называем получаемую в результате кривую символом C_1 . Аналогично этому мы формируем кривые C_2, C_3, \dots , показанные на рис. 10.1. Рассмотрим теперь ситуацию, когда $\lambda_i < \mu < \lambda_{i+1}$ и проведем вертикальную линию, соответствующую значению μ , на графике характеристических полиномов; иначе говоря, эта линия демонстрирует, как располагается значение μ по отношению к собственным значениям

ассоциированных задач с принудительными ограничениями. Мы замечаем, что указанная линия, соответствующая μ , должна пересекать кривые C_1, \dots, C_i и, в силу наличия свойства разделения, она не может пересекать кривые C_{i+1}, \dots, C_n . Однако с учетом того, что

$$p^{(r)}(\mu) = \prod_{i=1}^{n-r} d_{ii}, \quad (10.23)$$

а также того, что каждое пересечение линии μ с огибающей C_k соответствует отрицательному элементу, появляющемуся в \mathbf{D} , мы будем иметь в точности i отрицательных элементов в матрице \mathbf{D} .

Эти соображения справедливы также и в случае кратных собственных; это означает, что на рис. 10.1 мы попросту найдем, что некоторые собственные значения равны между собой, но сама вышеприведенная аргументация не изменится.

Свойство, заключающееся в том, что число отрицательных элементов в матрице \mathbf{D} равно числу собственных значений, меньших, чем μ , может быть непосредственно использовано при решении с определением собственных значений (см. раздел 11.4.3). А именно, делая предположение о сдвиге μ и проводя проверку, является ли значение μ меньше или больше, чем интересующее нас собственное значение, мы можем последовательно уменьшать тот интервал, в котором это значение должно находиться. Процедура соответствующего решения демонстрируется на следующем примере.

Пример 10.5: Используйте тот факт, что число отрицательных элементов в матрице \mathbf{D} , где $\mathbf{LDL}^T = \mathbf{K} - \mu\mathbf{M}$, равно числу собственных значений, меньших, чем μ , чтобы вычислить значение λ_2 для задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, где

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1/2 & & \\ & 1 & \\ & & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Три собственных значения этой задачи уже были рассчитаны в примере 10.4. Теперь мы будем продвигаться, проходя следующие систематические этапы.

1. Предположим, что $\mu = 1$ и вычислим \mathbf{LDL}^T для матрицы $\mathbf{K} - \mu\mathbf{M}$.

$$\mathbf{K} - \mu\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3/2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{LDL}^T = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -2/3 & 1 & \\ 0 & -3/7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 & & \\ & 7/3 & \\ & & 15/14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ & 1 & -3/7 \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

Учитывая, что все элементы матрицы \mathbf{D} больше нуля, мы имеем $\lambda_1 > 1$.

2. Теперь попытаемся принять $\mu = 8$, получая

$$\mathbf{K} - \mu\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

и

$$\mathbf{LDL}^T = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 1/2 & 1 & \\ 0 & 2/7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & & \\ & -7/2 & \\ & & -12/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ & 1 & 2/7 \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

С учетом того, что все три диагональных элемента меньше нуля, мы получаем $\lambda_3 < 8$.

3. Следующее пробное значение μ можно считать располагающимся между 1 и 8; мы выбираем значение $\mu = 5$, для которого

$$\mathbf{K} - \mu\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

и

$$\mathbf{LDL}^T = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & & \\ & 1 & \\ & & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

Поскольку в D имеются два отрицательных элемента, имеем $\mathbf{D}\lambda_2 < 5$.

4. Следующее пробное значение должно лежать между 1 и 5. Используем $\mu = 3$ и в этом случае

$$\mathbf{K} - \mu\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

и

$$\mathbf{LDL}^T = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & & \\ & -1 & \\ & & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $\lambda_2 > 3$, так как матрица \mathbf{D} содержит только один отрицательный элемент.

Теперь общий характер процедуры решения определен нами. К настоящему моменту мы знаем, что $3 < \lambda_2 < 5$. Чтобы получить более точную оценку λ_2 , нам следовало бы продолжать выбор сдвига для μ в интервале между 3 и 5 и исследовать, будет ли новый сдвиг меньше или больше, чем λ_2 . За счет того, что всегда выбирается надлежащее значение нового сдвига, искомое собственное значение может быть определено очень точно (см. раздел 11.4.3). Следует заметить, что нам не понадобилось использовать взаимные перестановки при тех факторизациях $\mathbf{K} - \mu\mathbf{M}$, которые были сделаны выше.

10.2.3. Сдвиг

Важной процедурой, широко используемой при построении решений с нахождением собственных значений и собственных векторов, является процедура сдвига. Цель сдвига состоит в том, чтобы ускорить расчеты интересующих нас систем собственных значений. При решении задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ мы проводим сдвиг ρ для матрицы \mathbf{K} путем вычисления новой матрицы

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \rho\mathbf{M}, \quad (10.24)$$

после чего мы рассматриваем задачу о собственных значениях

$$\hat{\mathbf{K}}\psi = \mu\mathbf{M}\psi. \quad (10.25)$$

Чтобы определить, как связаны собственные значения и собственные векторы задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ с теми же величинами для задачи (10.25), мы переписываем последнее соотношение в форме

$$\mathbf{K}\psi = \gamma\mathbf{M}\psi, \quad (10.26)$$

где $\gamma = \rho + \mu$. Однако задача (10.26) практически совпадает с задачей о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ и, учитывая, что решение этой задачи является единственным, мы имеем

$$\lambda_i = \rho + \mu; \quad \phi_i = \psi_i. \quad (10.27)$$

Другими словами, собственные векторы задачи $\hat{\mathbf{K}}\psi = \mu\mathbf{M}\psi$ являются теми же, что и собственные векторы задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, однако собственные значения были

уменьшены на величину ρ . Частое применение сдвига производится при расчете твердотельных мод, когда используется алгоритм, который не предназначен явно для вычисления нулевых собственных значений. Мы иллюстрируем такое приложение на приводимом ниже примере.

Пример 10.6: Рассмотрим задачу о собственных значениях

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \phi = \lambda \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \phi. \quad (\text{a})$$

Рассчитайте собственные значения и собственные векторы. После этого проведите сдвиг $\rho = -2$ и вновь постройте решение для собственных значений и собственных векторов.

Для расчета собственных значений мы используем характеристический полином

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) = 3\lambda^2 - 18\lambda,$$

и в результате получаем $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 6$. Чтобы рассчитать ϕ_1 и ϕ_2 , мы используем соотношение (10.17) и условие ортонормированности с массой, $\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i = 1$. Мы имеем

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \phi_1 = 0; \quad \text{следовательно, } \phi_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \quad (\text{b})$$

и

$$\begin{bmatrix} -9 & -9 \\ -9 & -9 \end{bmatrix} \phi_2 = 0; \quad \text{следовательно, } \phi_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \quad (\text{c})$$

Проводя сдвиг величиной $\rho = -2$, мы получаем задачу

$$\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \phi = \lambda \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \phi. \quad (\text{d})$$

Действуя так же, как и ранее, мы имеем

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda + 16,$$

и в качестве корней получаем значения $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 8$. Следовательно, собственные значения увеличились на 2; это значит, что они уменьшились на величину ρ .

Собственные векторы будут рассчитываться с использованием соотношения (10.17). Мы замечаем, однако, что это соотношение вновь позволяет получить уравнения (b) и (c) и, следовательно, собственные векторы задачи (d) те же самые, что и для задачи (a).

Важное наблюдение, явившееся результатом проведенного выше обсуждения, состоит в том, что, в принципе, нам нужны только алгоритмы решения, позволяющие рассчитать собственные значения и соответствующие собственные векторы задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda \mathbf{M}\phi$, когда все собственные значения больше нуля. Это следует из того факта, что если присутствуют твердотельные моды, то мы всегда можем действовать со сдвинутой матрицей жесткости, делающей все собственные значения положительными.

Разнообразные приложения процедуры сдвига приводятся в главе 11, где обсуждаются различные алгоритмы решения задач о собственных значениях.

10.2.4. Эффект нулевой массы

При использовании матрицы масс с неравномерным распределением матрица \mathbf{M} является диагональной, с положительными и, возможно, с несколькими нулевыми диагональными элементами. Если все элементы m_{ii} больше нуля, то собственные значения λ_i обычно не могут быть определены без использования алгоритма решения для собственных значений, описываемого в главе 11. Если, однако, матрица \mathbf{M} имеет несколько нулевых диагональных элементов, — например, r диагональных элементов этой матрицы равны нулю, — то мы можем сразу же сказать, что задача $\mathbf{K}\phi = \lambda \mathbf{M}\phi$ имеет собственные

значения $\lambda_n = \lambda_{n-1} = \dots = \lambda_{n-r+1} = \infty$, и мы можем также построить соответствующие собственные векторы путем контроля.

Чтобы получить вышеуказанный результат, давайте вспомним основную цель решения с собственными значениями. Важно вспомнить о том, что все, что нам требуется, — это найти такие вектор ϕ и скаляр λ , которые удовлетворяли бы уравнению

$$\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi, \quad (10.4)$$

где величина ϕ является нетривиальной; иначе говоря, ϕ — это вектор, по меньшей мере один компонент которого отличен от нуля. Следовательно, если мы имеем вектор ϕ и скаляр λ , удовлетворяющие уравнению (10.4), то λ и ϕ представляют собой собственное значение λ_i и собственный вектор ϕ_i , соответственно, причем следует заметить, что совершенно неважно, как именно были получены эти λ и ϕ . Если, например, мы можем дать предположительную информацию о ϕ и λ , то нам наверняка следует воспользоваться этим. Такая ситуация может возникнуть, когда в конструктивном комплексе элементов присутствуют твердотельные моды. Таким образом, если нам известно, что комплекс элементов может претерпевать некую твердотельную моду, то мы имеем $\lambda_1 = 0$ и нам нужно отыскать такой вектор ϕ_1 , чтобы удовлетворялось уравнение $\mathbf{K}\phi_1 = 0$. В общем случае решение для ϕ_1 должно быть построено с помощью алгоритма решения уравнения, однако в случае простого конечно-элементного комплекса мы можем оказаться в состоянии определить ϕ_1 с помощью контроля.

В том случае, когда в диагональной матрице \mathbf{M} имеется r нулевых диагональных элементов, мы всегда получаем немедленную возможность определить r собственных значений и соответствующие собственные векторы. Переписывая задачу (10.4) о собственных значениях в форме

$$\mathbf{M}\phi = \mu\mathbf{K}\phi, \quad (10.28)$$

где $\mu = \lambda^{-1}$, мы обнаруживаем, что если $m_{kk} = 0$, то мы имеем собственную пару $(\mu_i, \phi_i) = (0, \mathbf{e}_k)$; то есть

$$\phi_i^T = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad \underset{\substack{\uparrow \\ k\text{-й элемент}}}{1} \quad 0 \quad \dots \quad 0]; \quad \mu_i = 0. \quad (10.29)$$

Тот факт, что ϕ_i и μ_i в (10.29) действительно представляют собой собственный вектор и собственное значение задачи (10.28), подтверждается проверкой путем простой подстановки в (10.28) с констатацией того, что решение (μ_i, ϕ_i) является нетривиальным. Если учесть, что $\mu = \lambda^{-1}$, то мы находим, что собственная пара задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ выражается как $(\lambda_i, \phi_i) = (\infty, \mathbf{e}_k)$. При рассмотрении случая наличия в \mathbf{M} нулевых диагональных элементов в количестве r получается, что имеется r бесконечных собственных значений, а соответствующие собственные векторы могут быть приняты в качестве единичных векторов, каждый из которых занимает положение, соответствующее нулевому элементу массы в матрице \mathbf{M} . Так как величина λ_n является при этом собственным значением кратности r , то соответствующие собственные векторы не являются единственными (см. раздел 10.2.1). Мы замечаем, кроме того, что длина собственного вектора не может фиксироваться путем использования условия ортонормированности со включением \mathbf{M} . Мы демонстрируем, как определяются собственные значения и собственные векторы, с помощью краткого примера.

Пример 10.7: Рассмотрите задачу о собственных значениях

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \phi = \lambda \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \phi.$$

Определите λ_3 , λ_4 и ϕ_3 , ϕ_4 .

Матрица \mathbf{M} содержит два нулевых диагональных элемента; следовательно, $\lambda_3 = \infty$, $\lambda_4 = \infty$. В качестве соответствующих собственных векторов мы можем использовать

$$\phi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \phi_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{a})$$

В альтернативном варианте любая линейная комбинация векторов ϕ_3 и ϕ_4 , заданных выражениями (a), будет представлять собой собственный вектор. Следует отметить, что $\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i = 0$ для $i = 3, 4$ и, поэтому, величина элементов в векторах ϕ_i не может фиксироваться путем использования условия ортонормированности со включением \mathbf{M} .

10.2.5. Преобразование обобщенной задачи о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda \mathbf{M}\phi$ к стандартной форме

Наиболее распространенные задачи о собственных значениях, встречающиеся в научных исследованиях общего характера, — это стандартные задачи о собственных значениях, а большинство других задач этого рода может быть приведено к стандартной форме. По этой причине решение стандартных задач о собственных значениях привлекло много внимания в численном анализе, и существует немало алгоритмов решения таких задач. В настоящем разделе мы ставим своей целью показать, каким образом задача о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda \mathbf{M}\phi$ может быть приведена к стандартной форме. Смысл такого преобразования является двояким. Во-первых, благодаря тому, что это преобразование возможно, можно воспользоваться различными алгоритмами решения, предназначенными для стандартных задач о собственных значениях. Мы сможем увидеть, что эффективность принимаемой процедуры решения задачи о собственных значениях существенно зависит от решения вопроса о том, проводить ли или нет преобразование к стандартной форме. Во-вторых, *если обобщенная задача о собственных значениях может быть представлена в стандартной форме, то свойства собственных значений, собственных векторов и характеристических полиномов обобщенной задачи могут быть определены по информации о свойствах соответствующих величин, относящихся к стандартной задаче о собственных значениях*. Отдавая себе отчет в том, что свойства стандартных задач о собственных значениях установить гораздо легче, мы понимаем, что важность изучения преобразований к стандартной задаче в значительной степени объясняется именно вторым фактором. Действительно, после представления процедур преобразования мы покажем, каким образом свойства собственных векторов (см. раздел 10.2.1) и характеристических полиномов (см. раздел 10.2.2), относящихся к задаче $\mathbf{K}\phi = \lambda \mathbf{M}\phi$, выводятся из данных о соответствующих свойствах для стандартной задачи о собственных значениях.

В дальнейшем мы будем предполагать, что матрица \mathbf{M} является положительно определенной. Это имеет место, когда матрица \mathbf{M} оказывается диагональной, при $m_{ii} > 0$, $i = 1, \dots, n$, или же эта матрица — ленточная, как это получается при анализе с совместимой массой. Если матрица \mathbf{M} является диагональной и имеет несколько нулевых диагональных элементов, то нам прежде всего необходимо осуществить статическое сгущение степеней свободы, не имеющих массы, как это описано в разделе 10.3.1. Предполагая, что матрица \mathbf{M} — положительно определенная, мы можем преобразовать обобщенную задачу о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda \mathbf{M}\phi$, заданную посредством (10.4), путем использования разложения матрицы \mathbf{M} в форме

$$\mathbf{M} = \mathbf{S}\mathbf{S}^T, \quad (10.30)$$

где \mathbf{S} — любая неособенная матрица. Подставляя вместо \mathbf{M} в (10.4), мы имеем

$$\mathbf{K}\phi = \lambda \mathbf{S}\mathbf{S}^T \phi. \quad (10.31)$$

Умножая обе части (10.31) на \mathbf{S}^{-1} и определяя вектор

$$\tilde{\phi} = \mathbf{S}^T \phi, \quad (10.32)$$

мы получаем стандартную задачу о собственных значениях

$$\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\phi} = \lambda \tilde{\phi}, \quad (10.33)$$

где

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{S}^T. \quad (10.34)$$

В общем случае используется одно из двух разложений матрицы \mathbf{M} : факторизация по Холески или спектральное разложение этой матрицы. Факторизация \mathbf{M} по Холески осуществляется так, как это описано в разделе 8.2.4, и дает $\mathbf{M} = \tilde{\mathbf{L}}_M \tilde{\mathbf{L}}_M^T$. В результате в формулах (10.30)–(10.34) мы имеем

$$\mathbf{S} = \tilde{\mathbf{L}}_M. \quad (10.35)$$

Для спектрального разложения матрицы \mathbf{M} требуется построить решение полной системы собственных значений \mathbf{M} . Обозначая через \mathbf{R} матрицу ортонормированных собственных векторов, а через \mathbf{D}^2 — диагональную матрицу собственных значений, мы имеем

$$\mathbf{M} = \mathbf{R} \mathbf{D}^2 \mathbf{R}^T, \quad (10.36)$$

и в формулах (10.30)–(10.34) мы используем

$$\mathbf{S} = \mathbf{R} \mathbf{D}. \quad (10.37)$$

Следует заметить, что если матрица \mathbf{M} — диагональная, то матрицы \mathbf{S} в формулах (10.35) и (10.37) будут такими же, но если \mathbf{M} — ленточная матрица, то матрицы \mathbf{S} не таковы.

Если рассматривается эффективность решения с определением собственных значений и собственных векторов задачи (10.33), то оказывается чрезвычайно важным, что матрица $\tilde{\mathbf{K}}$ имеет ту же ширину ленты, что и \mathbf{K} , если при этом матрица \mathbf{M} является диагональной. Однако если матрица \mathbf{M} — ленточная, то матрица $\tilde{\mathbf{K}}$ в (10.33) является, вообще говоря, полной матрицей, а это делает проводимое преобразование неэффективным почти во всех видах конечно-элементного анализа с большим порядком. Это будет еще более очевидным в главе 11, когда будут обсуждаться различные алгоритмы решения задач о собственных значениях.

Если сравнивать факторизацию по Холески со спектральным разложением матрицы \mathbf{M} , то можно отметить, что применение множителей Холески оказывается, вообще говоря, более эффективным в вычислительном плане, чем использование спектрального разложения, так как вычисление $\tilde{\mathbf{L}}_M$ требует меньшего числа операций, чем это нужно для вычисления \mathbf{R} и \mathbf{D} . Однако спектральное разложение матрицы \mathbf{M} может привести к более точному решению задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda \mathbf{M}\phi$. Предположим, что матрица \mathbf{M} плохо обусловлена по отношению к инверсии; тогда и процесс преобразования к стандартной задаче о собственных значениях также окажется плохо обусловленным. В этом случае важно применять более устойчивую процедуру преобразования. Если факторизация \mathbf{M} по Холески используется без приведения к центру, то мы найдем, что $\tilde{\mathbf{L}}_M^{-1}$ содержит большие элементы во многих геометрических точках вследствие спаривания в матрицах \mathbf{M} и $\tilde{\mathbf{L}}_M^{-1}$. В результате этого матрица $\tilde{\mathbf{K}}$ вычисляется с малой степенью точности, и наименьшие собственные значения и соответствующие собственные векторы определяются неточно.

С другой стороны, при использовании спектрального разложения матрицы \mathbf{M} хорошая степень точности может быть получена по отношению к элементам матриц \mathbf{R} и \mathbf{D}^2 , хотя некоторые элементы \mathbf{D}^2 оказываются малыми по отношению к другим элементам. Тогда плохая обусловленность матрицы \mathbf{M} будет сосредотачиваться только в малых элементах матрицы \mathbf{D}^2 и, если рассматривать матрицу \mathbf{K} , то большие элементы будут находиться только в тех строках и столбцах, которые соответствуют малым элементам матрицы \mathbf{D} , а собственные значения нормальной величины будут, вероятно, сохраняться правильно.

Рассмотрим приводимые ниже примеры преобразования обобщенной задачи о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda \mathbf{M}\phi$ к стандартной форме.

Пример 10.8: Рассмотрите задачу $\mathbf{K}\phi = \lambda \mathbf{M}\phi$, где

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Используйте факторизацию матрицы \mathbf{M} по Холески для того, чтобы вычислить матрицу $\tilde{\mathbf{K}}$ соответствующей стандартной задачи о собственных значениях.

Вначале мы рассчитаем разложение \mathbf{LDL}^T для матрицы \mathbf{M} ,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 1/2 & 1 & \\ 0 & 2/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 5/2 & \\ & & 8/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ & 1 & 2/5 \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, множитель Холецки для матрицы \mathbf{M} имеет вид (см. раздел 8.2.4)

$$\tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & & \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{5}{2}} & \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{5}} & \sqrt{\frac{8}{5}} \end{bmatrix}$$

и

$$\tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{M}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & & \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & \sqrt{\frac{2}{5}} & \\ \frac{1}{\sqrt{40}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & \sqrt{\frac{5}{8}} \end{bmatrix}.$$

В этом случае матрица стандартной задачи о собственных значениях $\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{K} \tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{M}}^{-T}$ имеет вид

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{5}}{2} & \frac{\sqrt{5}}{4} \\ -\frac{\sqrt{5}}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{4} \\ \frac{\sqrt{5}}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Пример 10.9: Рассмотрите обобщенную задачу о собственных значениях из примера 10.8. Используйте спектральное разложение матрицы \mathbf{M} , чтобы вычислить матрицу $\tilde{\mathbf{K}}$ соответствующей стандартной задачи о собственных значениях.

Собственные значения и соответствующие собственные векторы задачи $\mathbf{M}\phi = \lambda\phi$ могут вычисляться так, как это показано в примере 10.4. Мы получаем $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$ и

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}; \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}; \quad \phi_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Следовательно, разложение $\mathbf{M} = \mathbf{R}\mathbf{D}^2\mathbf{R}^T$ имеет вид

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Замечая, что $\mathbf{S} = \mathbf{R}\mathbf{D}$ и $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{R}^T$, так как $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$, мы получаем

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Матрица стандартной задачи о собственных значениях — это $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{S}^{-T}$; т. е.

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & \frac{1}{2\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{6}} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

Следует отметить, что полученная здесь матрица $\tilde{\mathbf{K}}$ отличается от матрицы $\tilde{\mathbf{K}}$, выведенной в примере 10.8.

При проведенном выше обсуждении мы рассмотрели только факторизацию матрицы \mathbf{M} с разложением $\mathbf{M} = \mathbf{S}\mathbf{S}^T$ и с последующим преобразованием задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ к форме, представленной в (10.33). Мы указали на то, что это преобразование может дать неточные результаты, если матрица \mathbf{M} плохо обусловлена. В таком случае представляется естественным избежать разложения \mathbf{M} и вместо этого использовать факторизацию матрицы \mathbf{K} . Перепишывая соотношение $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ в форме $\mathbf{M}\phi = (1/\lambda)\mathbf{K}\phi$, мы можем использовать аналогичную процедуру, чтобы получить задачу о собственных значениях

$$\tilde{\mathbf{M}}\tilde{\phi} = \frac{1}{\lambda}\tilde{\phi}, \quad (10.38)$$

где

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{S}^{-T}, \quad (10.39)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{S}\mathbf{S}^T, \quad (10.40)$$

$$\tilde{\phi} = \mathbf{S}^T\phi, \quad (10.41)$$

а матрица \mathbf{S} получается путем использования множителя Холецки или путем спектрального разложения матрицы \mathbf{K} . Если матрица \mathbf{K} хорошо обусловлена, то преобразование также является хорошо обусловленным. Учитывая, однако, что матрица \mathbf{K} всегда является ленточной, то матрица $\tilde{\mathbf{M}}$ всегда является полной, и указанное преобразование обычно оказывается неэффективным при решении задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$.

Как мы уже указывали ранее, возможность получения фактического решения обобщенной задачи о собственных значениях путем предварительного преобразования ее к стандартной форме является лишь одной из побудительных причин для рассмотрения вышеуказанных преобразований. Вторая побудительная причина состоит в том, что свойства собственного решения обобщенной задачи могут быть определены исходя из свойств решения соответствующей стандартной задачи о собственных значениях. В частности, мы можем вывести свойства ортонормированности собственных векторов, как они определены в (10.10) и (10.11), а также свойство последовательности Штурма для характеристических полиномов задачи о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ и ассоциированных с ней задач с принудительными ограничениями, соответствующих (10.22). В обоих случаях не возникает необходимости доказательства каких-то фундаментально новых идей; вместо этого используются соответствующие свойства стандартной задачи, полученной из обобщенной задачи о собственных значениях. Мы приводим доказательства в следующих далее примерах, как приложения преобразования обобщенной задачи о собственных значениях к стандартной форме.

Пример 10.10: Покажите, что собственные векторы задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ обладают свойством ортонормированности с привлечением матриц \mathbf{M} и \mathbf{K} и обсудите ортонормированность собственных векторов для задачи ${}^t\mathbf{K}\phi = \lambda^{t-\Delta t}\mathbf{K}\phi$, поставленной в (10.6), и задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{C}\phi$, данной в (10.7).

Ортонормированность собственных векторов доказывается путем преобразования обобщенной задачи о собственных значениях к стандартной форме и использования того факта, что собственные векторы стандартной задачи о собственных значениях с симметричной матрицей являются ортонормированными. Рассмотрим вначале задачу $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ и предположим, что матрица \mathbf{M} является положительно определенной. После этого мы можем воспользоваться преобразованием согласно формул (10.30)–(10.34), чтобы получить в качестве эквивалентной задачи о собственных значениях задачу

$$\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\phi} = \lambda\tilde{\phi},$$

где

$$\mathbf{M} = \mathbf{S}\mathbf{S}^T; \quad \tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{S}^{-T}; \quad \tilde{\phi} = \mathbf{S}^T\phi.$$

Однако, с учетом того, что собственные векторы $\tilde{\phi}_i$ задачи $\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\phi} = \lambda\tilde{\phi}$ обладают свойствами (см. раздел 2.7)

$$\tilde{\phi}_i^T \tilde{\phi}_j = \delta_{ij}; \quad \tilde{\phi}_i^T \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\phi}_j = \lambda \delta_{ij},$$

мы имеем, после подстановок $\tilde{\phi}_i = \mathbf{S}^T \phi_i$, $\tilde{\phi}_j = \mathbf{S}^T \phi_j$,

$$\phi_i^T \mathbf{M} \phi_j = \delta_{ij}; \quad \phi_i^T \mathbf{K} \phi_j = \lambda_i \delta_{ij}. \quad (\text{a})$$

Если матрица \mathbf{M} не является положительно определенной, то мы рассматриваем задачу о собственных значениях $\mathbf{M}\phi = (1/\lambda)\mathbf{K}\phi$ (при положительно определенной \mathbf{K} или при наложенном сдвиге; см. раздел 10.2.3). Теперь мы используем преобразование

$$\tilde{\mathbf{M}}\tilde{\phi} = \left(\frac{1}{\lambda}\right)\tilde{\phi},$$

где

$$\mathbf{K} = \mathbf{S}\mathbf{S}^T; \quad \tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{S}^{-T}; \quad \tilde{\phi} = \mathbf{S}^T\phi,$$

и получаем свойства

$$\tilde{\phi}_i^T \tilde{\phi}_j = \delta_{ij}; \quad \tilde{\phi}_i^T \tilde{\mathbf{M}} \tilde{\phi}_j = (1/\lambda_i)\delta_{ij}.$$

Подставляя выражения для $\tilde{\phi}_i$ и $\tilde{\phi}_j$, мы получаем

$$\phi_i^T \mathbf{K} \phi_j = \delta_{ij}; \quad \phi_i^T \mathbf{M} \phi_j = \left(\frac{1}{\lambda_i}\right)\delta_{ij},$$

причем собственные векторы теперь уже ортонормированы с привлечением матрицы \mathbf{K} , так как была рассмотрена задача $\mathbf{M}\phi = (1/\lambda)\mathbf{K}\phi$. Чтобы получить те же самые векторы, что и для задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, нам нужно умножить собственные векторы ϕ_i задачи $\mathbf{M}\phi = (1/\lambda)\mathbf{K}\phi$ на коэффициенты $\sqrt{\lambda_i}$, $i = 1, \dots, n$.

Рассматривая данные выше доказательства, мы замечаем, что мы расположили задачи о собственных значениях таким образом, что матрица, ассоциируемая с определенным собственным значением, т. е. матрица, находящаяся в правой части задачи о собственных значениях, является положительно определенной. Это необходимо для того, чтобы осуществить преобразование обобщенной задачи о собственных значениях к стандартной форме и, тем самым, вывести свойства ортонормированности собственных векторов, соответствующие (a) и (b). Однако, рассматривая задачи ${}^t\mathbf{K}\phi = \lambda^{t-\Delta t}\mathbf{K}\phi$ и $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{C}\phi$, поставленные в (10.6) и (10.7), мы можем действовать подобным же образом. Результатами этих действий будут свойства ортонормированности, данные в (10.14) и (10.15).

Пример 10.11: Докажите наличие свойства последовательности Штурма для характеристических полиномов задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ и ассоциированных задач с принудительными ограничениями. Продемонстрируйте доказательство применительно к следующим

матрицам:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & \\ 4 & 8 & 4 \\ & 4 & 8 \end{bmatrix}. \quad (\text{a})$$

Тот вид доказательства, который мы рассматриваем здесь, основан на преобразовании задач о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ и $\mathbf{K}^{(r)}\phi^{(r)} = \lambda^{(r)}\mathbf{M}^{(r)}\phi^{(r)}$ к стандартным задачам того же типа, о характеристических полиномах которых известно, что они образуют последовательность Штурма (см. разделы 2.6 и 8.2.5).

Как и в примере 10.10, мы предполагаем вначале, что матрица \mathbf{M} является положительно определенной. В этом случае мы можем преобразовать задачу $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ к форме

$$\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\phi} = \lambda\tilde{\phi},$$

где

$$\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{M}}^{-T}; \quad \mathbf{M} = \tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{M}}\tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{M}}^T; \quad \tilde{\phi} = \tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{M}}^T\phi$$

и где $\tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{M}}$ представляет собой множитель Холецки для \mathbf{M} .

Рассматривая задачи о собственных значениях $\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\phi} = \lambda\tilde{\phi}$ и $\tilde{\mathbf{K}}^{(r)}\tilde{\phi}^{(r)} = \lambda^{(r)}\tilde{\phi}^{(r)}$, $r = 1, \dots, n-1$ (см. (8.37)), мы знаем, что их характеристические полиномы образуют последовательность Штурма. С другой стороны, если мы рассмотрим задачу о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ и ассоциированные с ней задачи о собственных значениях с принудительными ограничениями, т. е. $\mathbf{K}^{(r)}\phi^{(r)} = \lambda^{(r)}\mathbf{M}^{(r)}\phi^{(r)}$ (см. (10.20)), то мы замечаем, что задачи $\tilde{\mathbf{K}}^{(r)}\tilde{\phi}^{(r)} = \lambda^{(r)}\tilde{\phi}^{(r)}$ и $\mathbf{K}^{(r)}\phi^{(r)} = \lambda^{(r)}\mathbf{M}^{(r)}\phi^{(r)}$ имеют одни и те же собственные значения. А именно, $\mathbf{K}^{(r)}\phi^{(r)} = \lambda^{(r)}\phi^{(r)}$ — это стандартная задача о собственных значениях, соответствующая задаче $\mathbf{K}^{(r)}\phi^{(r)} = \lambda^{(r)}\mathbf{M}^{(r)}\phi^{(r)}$; то есть вместо вычеркивания r строк и столбцов из матрицы $\tilde{\mathbf{K}}$ (чтобы получить $\tilde{\mathbf{K}}^{(r)}$) мы можем также рассчитать $\tilde{\mathbf{K}}^{(r)}$ следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{K}}^{(r)} = \tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{M}}^{(r)-1}\mathbf{K}^{(r)}\tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{M}}^{(r)-T}; \quad \mathbf{M}^{(r)} = \tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{M}}^{(r)}\tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{M}}^{(r)T}; \quad \tilde{\phi}^{(r)} = \tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{M}}^{(r)T}\phi^{(r)}. \quad (\text{b})$$

Отметим, что матрицы $\tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{M}}^{(r)}$ и $\tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{M}}^{(r)-1}$ могут быть получены путем простого вычеркивания r последних строк и столбцов матриц $\tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{M}}$ и $\tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{M}}^{-1}$ соответственно.

Следовательно, свойство последовательности Штурма справедливо также и для характеристических полиномов задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ и ассоциированных задач с принудительными ограничениями.

Чтобы рассмотреть какой-то пример, мы принимаем

$$\tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}. \quad (\text{c})$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}} &= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 3/4 & -1 & 1 \\ -1 & 7/4 & -2 \\ 1 & -2 & 5/2 \end{bmatrix}. \quad (\text{d}) \end{aligned}$$

Используя представление $\tilde{\mathbf{K}}$ согласно (d), чтобы получить $\tilde{\mathbf{K}}^{(1)}$ и $\tilde{\mathbf{K}}^{(2)}$, мы имеем

$$\tilde{\mathbf{K}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 3/4 & -1 \\ -1 & 7/4 \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{K}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

С другой стороны, мы можем определить те же матрицы, $\tilde{\mathbf{K}}^{(1)}$ и $\tilde{\mathbf{K}}^{(2)}$, используя соотношения из (b),

$$\tilde{\mathbf{K}}^{(1)} = \tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{M}}^{(1)-1}\mathbf{K}^{(1)}\tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{M}}^{(1)-T}; \quad \tilde{\mathbf{K}}^{(2)} = \tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{M}}^{(2)-1}\mathbf{K}^{(2)}\tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{M}}^{(2)-T},$$

где матрицы $\mathbf{K}^{(r)}$ и $\mathbf{M}^{(r)}$ (для расчета $\tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{M}}^{(r)}$) определяются по данным из (а) для \mathbf{K} и \mathbf{M} .

При проведении данного обсуждения мы предполагали, что матрица \mathbf{M} является положительно определенной. Если она является положительной, полуопределенной, то мы можем вместо исходной рассмотреть задачу $\mathbf{M}\phi = (1/\lambda)\mathbf{K}\phi$, в которой матрица \mathbf{K} является положительно определенной (это может означать, что необходимо совершить сдвиг; см. раздел 10.2.3), и таким образом показать, что свойство последовательности Штурма все еще имеет место.

Можно отметить, что из проведенного обсуждения следует, что характеристические полиномы задач о собственных значениях ${}^t\mathbf{K}\phi = \lambda^{t-\Delta t}\mathbf{K}\phi$ и $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{C}\phi$, введенные в соотношениях (10.6) и (10.7), а также полиномы ассоциированных задач с принудительными ограничениями также образуют последовательности Штурма.

10.2.6. Упражнения

10.1. Рассмотрите обобщенную задачу о собственных значениях

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \phi = \lambda \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \phi.$$

- (а) Проведите расчет собственных значений и собственных векторов и покажите в явной форме, что собственные векторы являются ортонормированными с привлечением \mathbf{M} .
- (б) Найдите два вектора, обладающие вышеуказанной ортонормированностью, но не являющиеся собственными векторами.

10.2. Рассчитайте собственные значения задачи о собственных значениях из упражнения 10.1, а также ее ассоциированных задач с принудительными ограничениями. Покажите, что собственные значения обладают свойством разделения (10.22).

10.3. Рассмотрите задачу о собственных значениях

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \phi = \lambda \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3/2 \end{bmatrix} \phi.$$

- (а) Рассчитайте собственные значения и собственные векторы данной задачи. Кроме того, рассчитайте собственные значения ассоциированных задач с принудительными ограничениями [см. (10.20)].
- (б) Определите два вектора, обладающих ортонормированностью с привлечением матрицы \mathbf{M} , но не являющихся собственными векторами.

10.4. Рассчитайте собственные значения и собственные векторы задачи

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \phi = \lambda \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \phi.$$

После этого проведите сдвиг $\rho = 3$ для матрицы \mathbf{K} и рассчитайте собственные значения и собственные векторы новой задачи (см. (10.25)).

10.5. Преобразуйте обобщенную задачу о собственных значениях из упражнения 10.1 к стандартной форме.

10.6. (а) Собственные значения и собственные векторы задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\phi$ имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1; & \phi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ \lambda_2 &= 4; & \phi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Рассчитайте матрицу \mathbf{K} .

(b) Собственные значения и собственные векторы задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ имеют вид

$$\lambda_1 = 1; \quad \phi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\lambda_2 = 4; \quad \phi_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Рассчитайте матрицы \mathbf{K} и \mathbf{M} . Являются ли эти матрицы единственными?

10.3. Приемы построения приближенного решения

Исходя из природы динамической задачи становится очевидно, что расчет динамической реакции должен быть намного более дорогостоящим, чем статический анализ. Если при статическом анализе решение строится за один прием, то в динамике это решение отыскивается на некотором множестве дискретных точек оси времени, размещаемых на рассматриваемом временном интервале. Действительно, мы установили, что при построении решения путем прямого пошагового интегрирования уравнение статики, включающее в себя эффекты инерции и демпфирующих сил, рассматривается в конце каждого из дискретных шагов по времени (см. раздел 9.2). При проведении анализа с суперпозицией мод основная доля вычислительных усилий затрачивается на расчет искомых частот и разновидностей мод, а это требует также затраты значительно больших усилий, чем статический анализ. Естественно поэтому, что много внимания уделяется построению эффективных алгоритмов, нужных для расчета искомой собственной системы применительно к задаче $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$. Фактически, вследствие того, что нахождение «точных» величин нужных нам собственных значений и соответствующих собственных векторов может оказаться непомерно дорого стоящим в случае большого порядка интересующей нас системы и при применении «обычных» приемов решения, как раз и были разработаны приближенные приемы построения решений. В данном разделе мы ставим своей целью представить те важнейшие приближенные методы, которые были разработаны и по-прежнему используются в настоящее время.

Приемы построения приближенных решений первоначально были разработаны для того, чтобы рассчитать наиболее низкие собственные значения и соответствующие им собственные векторы применительно к задаче $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, когда рассматриваемая система имеет большой порядок. При анализе систем малого порядка большинство программ использует методику построения точных решений. Однако проблема расчета нескольких наиболее низкочастотных собственных пар применительно к системам относительно большого порядка является очень важной и встречается во всех разделах инженерного анализа конструкций и, в частности, при анализе реакций на землетрясения. В последующих разделах этой книги мы представляем три версии соответствующих приемов. *Цель данного представления состоит не в том, чтобы пропагандировать внедрение какого-либо одного из этих методов, но скорее в том, чтобы описать их практическое применение, их ограниченные возможности и использование определенных допущений. Кроме того, описываются взаимосвязи между приемами приближенного решения, а в разделе 11.6 мы установим, фактически, что рассмотренный здесь прием приближенного решения можно рассматривать, как первую итерацию (и можно использовать в этом качестве) в подпространстве итерационного алгоритма.*

10.3.1. Статическое сгущение

Мы уже встречались с процедурой статического сгущения при решении уравнений статического равновесия и показали при этом, что статическое сгущения является, фактически, приложением исключения по Гауссу (см. раздел 8.2.4). При статическом сгущении мы исключали те степени свободы, которые не должны появляться в глобальном комплексе конечных элементов. Например, степени свободы в форме смещений во внутренних узлах конечного элемента могут быть удалены в процессе сгущения, потому что они не принимают участия во введении межэлементной непрерывности. В разделе 8.2.4 мы

упомянули о том, что термин «статическое сгущение» был, фактически, создан в динамическом анализе.

Основное допущение статического сгущения при расчете частот и разновидностей мод состоит в том, что масса конструкции может быть подвергнута неравномерному распределению только в соответствии с некоторыми конкретными степенями свободы, что не оказывает серьезного влияния на точность в значениях частот и интересующих нас разновидностей мод. В случае матрицы с неравномерным распределением масс, имеющей некоторые диагональные элементы, равные нулю, некоторая доля такого неравномерного распределения уже была осуществлена. Однако в общем случае требуется осуществить такое распределение еще и дополнительно. В типичных случаях отношение массовых степеней свободы к общему числу степеней свободы может иметь значение где-то между 1/2 и 1/10. Чем большая степень неравномерности распределения масс реализуется, тем меньше компьютерных усилий будет требоваться для построения решения; однако при этом возрастает также и вероятность того, что искомые частоты и разновидности мод будут прогнозироваться неточно. Позднее нам придется сказать об этом несколько больше.

Предположим, что приведение распределения масс к неравномерной форме уже было выполнено. Если разбить матрицы на блоки, то задачу о собственных значениях можно записать в форме

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ac} \\ \mathbf{K}_{ca} & \mathbf{K}_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_a \\ \phi_c \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{M}_a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_a \\ \phi_c \end{bmatrix}, \quad (10.42)$$

где ϕ_a и ϕ_c — это смещения, соответствующие степеням свободы с массой и без массы, а \mathbf{M}_a — это диагональная матрица масс. Соотношение (10.42) влечет за собой условие

$$\mathbf{K}_{ca}\phi_a + \mathbf{K}_{cc}\phi_c = 0, \quad (10.43)$$

которое может быть использовано для исключения ϕ_c . Из (10.43) мы получаем

$$\phi_c = -\mathbf{K}_{cc}^{-1}\mathbf{K}_{ca}\phi_a, \quad (10.44)$$

и, подставляя в (10.42), мы получаем приведенную задачу о собственных значениях

$$\mathbf{K}_a\phi_a = \lambda\mathbf{M}_a\phi_a, \quad (10.45)$$

где

$$\mathbf{K}_a = \mathbf{K}_{aa} - \mathbf{K}_{ac}\mathbf{K}_{cc}^{-1}\mathbf{K}_{ca}. \quad (10.46)$$

Решение обобщенной задачи о собственных значениях согласно (10.45) в большинстве случаев реализуется путем первоначального преобразования этой задачи к стандартной форме, как это описано в разделе 10.2.5. Учитывая, что \mathbf{M}_a представляет собой диагональную матрицу масс, все диагональные элементы которой положительны и, возможно, не являются малыми, то данное преобразование является, в общем случае, хорошо обусловленным.

Следует отметить аналогию с использованием статического сгущения в статическом анализе. Если осознать, что правую часть соотношения (10.42) можно представить себе, как вектор нагрузки \mathbf{R} , где

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \lambda\mathbf{M}_a\phi_a \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (10.47)$$

то мы можем использовать исключение по Гауссу для степеней свободы без массы, действуя таким же образом, как мы действовали по отношению к степеням свободы, связанным со внутренними узлами элемента или части конструкции (см. раздел 8.2.4).

Сравнивая процедуру статического сгущения применительно к степеням свободы без массы, в соответствии с (10.42)–(10.46), с одной стороны, с исключением по Гауссу или со статическим сгущением в статическом анализе, с другой стороны, необходимо отметить один важный аспект. Рассматривая выражение (10.47), мы обнаруживаем, что нагрузки, соответствующие степеням свободы в количестве ϕ_a , зависят от собственного значения (частота свободных колебаний в квадрате) и собственного вектора (разновидность моды в форме смещений). Это означает, что для задачи (10.45) дальнейшее уменьшение того числа степеней свободы, которое следует рассматривать, уже невозможно. В этом и состоит основное отличие от статического сгущения, применяемого в статическом анализе, где

нагрузки задаются в явной форме, а их воздействие может быть перенесено на остающиеся степени свободы.

Пример 10.12: Используйте статическое сгущение для расчета собственных значений и собственных векторов задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, где

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Вначале мы переставляем столбцы и строки таким образом, чтобы получить форму, заданную в (10.42) и выглядящую как

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_a \\ \phi_c \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_a \\ \phi_c \end{bmatrix}.$$

Следовательно, матрица \mathbf{K}_a , определяемая согласно (10.46), в этом случае имеет вид

$$\mathbf{K}_a = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

В результате задача о собственных значениях $\mathbf{K}_a\phi_a = \lambda\mathbf{M}_a\phi_a$ принимает форму

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \phi_a = \lambda \begin{bmatrix} 2 & \\ & 1 \end{bmatrix} \phi_a,$$

и мы имеем $\det(\mathbf{K}_a - \lambda\mathbf{M}_a) = 2\lambda^2 - 2\lambda + 1/4$. Следовательно,

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}; \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Соответствующие собственные векторы рассчитываются путем использования соотношений

$$(\mathbf{K}_a - \lambda_i\mathbf{M}_a)\phi_{a_i} = 0; \quad \phi_{a_i}^T \mathbf{M}_a \phi_{a_i} = 1.$$

Следовательно,

$$\phi_{a_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}; \quad \phi_{a_2} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Используя (10.44), мы получаем

$$\begin{aligned} \phi_{c_1} &= - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1+\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}, \\ \phi_{c_2} &= - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{-1+\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

На основании изложенного решение задачи о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}; \quad \phi_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1+\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}; \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}; \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{-1+\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}; \\ \lambda_3 &= \infty; \quad \phi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ \lambda_4 &= \infty; \quad \phi_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

В процессе проведенного выше обсуждения мы привели формальные матричные уравнения, предназначенные для выполнения статического сгущения. Основная доля вычислительных усилий состоит в вычислении матрицы \mathbf{K}_a , заданной согласно (10.46), причем следует отметить, что на практике формальное обращение матрицы \mathbf{K}_{cc} не производится. Вместо этого \mathbf{K}_a может без труда быть получена путем использования множителя Холецки $\tilde{\mathbf{L}}_{cc}$ для \mathbf{K}_{cc} . Если провести факторизацию \mathbf{K}_{cc} ,

$$\mathbf{K}_{cc} = \tilde{\mathbf{L}}_c \tilde{\mathbf{L}}_c^T, \quad (10.48)$$

то мы можем рассчитать \mathbf{K}_a по следующей схеме:

$$\mathbf{K}_a = \mathbf{K}_{aa} - \mathbf{Y}^T \mathbf{Y}, \quad (10.49)$$

где матрица \mathbf{Y} находится путем решения уравнения

$$\tilde{\mathbf{L}}_c \mathbf{Y} = \mathbf{K}_{ca}. \quad (10.50)$$

Как уже указывалось ранее, эта процедура представляет собой, фактически, исключение по Гауссу для степеней свободы, не имеющих массы, т. е. исключение тех степеней свободы, при наличии которых не действуют внешние силы (массовые эффекты). Поэтому процедура, альтернативная той, которая задана посредством (10.42)–(10.50), состоит в непосредственном использовании исключения по Гауссу для ϕ_c степеней свободы без разбиения \mathbf{K} на подматрицы \mathbf{K}_{aa} , \mathbf{K}_{cc} , \mathbf{K}_{ac} и \mathbf{K}_{ca} , так как исключение по Гауссу может осуществляться в любом порядке (см. пример 8.1, раздел 8.2.1). Однако ширина ленты матрицы жесткости будет, вообще говоря, возрастать в процессе приведения, и нужно принимать во внимание проблемы с памятью.

Применительно к решению задачи о собственных значениях $\mathbf{K}_a \phi_a = \lambda \mathbf{M}_a \phi_a$ важно отметить, что матрица \mathbf{K}_a в общем случае является полной, и решение оказывается сравнительно дорогостоящим, если только порядок матрицы не является малым.

Вместо расчета матрицы \mathbf{K}_a может оказаться предпочтительным вычислять матрицу эластичности $\mathbf{F}_a = \mathbf{K}_a^{-1}$, которая определяется с помощью соотношения

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ac} \\ \mathbf{K}_{ca} & \mathbf{K}_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_a \\ \mathbf{F}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (10.51)$$

где \mathbf{I} — это единичная матрица того же порядка, что и \mathbf{K}_{aa} . Поэтому, обращаясь к (10.51), мы строим решение для смещений в конструкции при условии поочередного приложения единичных нагрузок к степеням свободы, обладающим массой. Хотя согласно (10.51) степени свободы расчленены, но при проводимом анализе в этом нет необходимости (см. пример 10.13). После получения решения для \mathbf{F}_a мы рассматриваем вместо (10.45) задачу о собственных значениях

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right) \phi_a = \mathbf{F}_a \mathbf{M}_a \phi_a. \quad (10.52)$$

Несмотря на то, что эта задача о собственных значениях имеет форму, несколько отличную от формы обобщенной задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda \mathbf{M}\phi$, преобразование к стандартной задаче осуществляется очень похожим образом (см. раздел 10.2.5). Для осуществления этого преобразования введем определение

$$\tilde{\phi}_a = \mathbf{M}_a^{1/2} \phi_a, \quad (10.53)$$

где $\mathbf{M}_a^{1/2}$ — диагональная матрица, имеющая i -й диагональный элемент, равный корню из i -го диагонального элемента \mathbf{M}_a . Умножая обе части уравнения (10.52) на $\mathbf{M}_a^{1/2}$ и подставляя это соотношение в (10.53), мы получим

$$\tilde{\mathbf{F}}_a \tilde{\phi}_a = \left(\frac{1}{\lambda}\right) \tilde{\phi}_a, \quad (10.54)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_a = \mathbf{M}_a^{1/2} \mathbf{F}_a \mathbf{M}_a^{1/2}. \quad (10.55)$$

После того, как смещения ϕ_a были рассчитаны, мы получаем полный вектор смещения, пользуясь соотношением

$$\begin{bmatrix} \phi_a \\ \phi_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{F}_c \mathbf{K}_a \end{bmatrix} \phi_a, \quad (10.56)$$

где матрица \mathbf{F}_c была рассчитана согласно (10.51). Мы приходим к соотношению (10.56) путем установления того факта, что силы, прилагаемые к массовым степеням свободы, чтобы инициировать ϕ_a , равны $\mathbf{K}_a \phi_a$. Если использовать (10.51), то соответствующие смещения для всех степеней свободы задаются с помощью (10.56).

Пример 10.13: Используйте процедуру, заданную с помощью (10.51)–(10.56), чтобы рассчитать собственные значения и собственные векторы задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda \mathbf{M}\phi$, рассмотренной в примере 10.12.

Первый шаг состоит в решении уравнений

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (a)$$

где мы не провели взаимную перестановку строк и столбцов матрицы \mathbf{K} с целью получения формы, заданной в (10.51).

Для решения уравнений (a) мы используем разложение матрицы \mathbf{K} в форму \mathbf{LDL}^T , где

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1/2 & 1 & & \\ 0 & -2/3 & 1 & \\ 0 & 0 & -3/4 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 3/2 & & \\ & & 4/3 & \\ & & & 1/4 \end{bmatrix}.$$

В результате мы получаем

$$\mathbf{v}_1^T = [1 \quad 2 \quad 2 \quad 2]; \quad \mathbf{v}_2^T = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4]$$

и, следовательно,

$$\mathbf{F}_a = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_a = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 4 \end{bmatrix}.$$

Решение задачи о собственных значениях

$$\tilde{\mathbf{F}}_a \tilde{\phi}_a = \mu \tilde{\phi}_a$$

дает

$$\mu_1 = 4 - 2\sqrt{2}; \quad \tilde{\phi}_{a_1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix};$$

$$\mu_2 = 4 + 2\sqrt{2}; \quad \tilde{\phi}_{a_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \quad (b)$$

Учитывая, что $\phi_a = \mathbf{M}_a^{-1/2} \tilde{\phi}_a$, мы имеем

$$\phi_{a_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}; \quad \phi_{a_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \quad (c)$$

Векторы ϕ_{c_1} и ϕ_{c_2} вычисляются с помощью (10.56); следовательно,

$$\phi_{c_1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{-1 + \sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}; \quad \phi_{c_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1 + \sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}. \quad (d)$$

С учетом того, что $\mu = 1/\lambda$, мы устанавливаем, что выражения (b), (c) и (d) дают то же самое решение, что и полученное в примере 10.12.

Если рассматриваются различные процедуры исключения степеней свободы без массы, то результаты анализа системы собственных значений будут одними и теми же независимо от того, какая именно процедура применяется, т.е. определяется ли матрица \mathbf{K}_a или матрица \mathbf{F}_a и решается ли задача о собственных значениях в соответствии с (10.45) или с (10.52). Основное допущение анализа при этом — то, которое следует из введения неравномерного распределения масс. Как мы уже обсуждали в разделе 10.2.4, каждая нулевая масса соответствует бесконечному значению частоты в системе. Поэтому, осуществляя аппроксимацию исходного уравнения системы $\mathbf{K}\phi = \lambda \mathbf{M}\phi$ с помощью уравнения (10.42), мы, фактически, заменяем некоторые частоты исходного уравнения на бесконечные частоты и предполагаем, что наименьшие частоты, получаемые решением любого из указанных уравнений, не слишком отличаются друг от друга. Та степень точности, с которой аппроксимируются наименьшие частоты уравнения $\mathbf{K}\phi = \lambda \mathbf{M}\phi$ при решении уравнения $\mathbf{K}_a \phi_a = \lambda \mathbf{M}_a \phi_a$, зависит от выбора конкретной формы неравномерного распределения масс и может оказаться либо адекватной, либо в самом деле недостаточной. В общем случае можно ожидать достижения более высокой степени точности, если в анализ включается большее число массовых степеней свободы. Однако если осознать тот факт, что статическое сгущение приводит к тому, что матрица \mathbf{K}_a имеет большую ширину ленты, чем матрица \mathbf{K} (а матрица \mathbf{F}_a наверняка является полной), то ясно, что объем вычислительных усилий, требуемых при построении решения приведенной задачи о собственных значениях, очень быстро возрастает по мере увеличения порядка матрицы \mathbf{K}_a (см. раздел 11.3). С другой стороны, если выбирается число массовых степеней свободы,

достаточное для достижения требуемой точности решения, то может оказаться, что нам уже не нужно рассчитывать полную систему собственных значений для $\mathbf{K}_a \phi_a = \lambda \mathbf{M}_a \phi_a$, а ограничиться лишь наименьшими собственными значениями и соответствующими им векторами. Однако в этом случае мы можем с тем же успехом рассматривать задачу $\mathbf{K}\phi = \lambda \mathbf{M}\phi$ без введения неравномерного распределения масс и строить прямое решение лишь для интересующих нас собственных значений и векторов, используя один из алгоритмов, описанных в главе 11.

Если подводить итог, то главный недостаток процедуры введения неравномерного распределения масс, используемой при статическом сгущении, состоит в том, что степень точности решения в значительной мере зависит от умения исследователя надлежащим образом распределять массы и что высокая степень точности фактически не достигается. Приводимый ниже пример рассматривается, чтобы показать тот вид аппроксимации, который может получиться в типичных условиях.

Пример 10.14: В примере 10.4 мы рассчитали систему собственных значений задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda \mathbf{M}\phi$, где \mathbf{K} и \mathbf{M} были заданы численно. Чтобы оценить аппроксимацию для наименьшего собственного значения и соответствующего собственного вектора, рассмотрим вместо исходной задачи приводимую ниже задачу о собственных значениях, в которой масса подвергнута неравномерному распределению,

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \phi = \lambda \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \phi. \quad (\text{a})$$

Используя процедуру, описанную соотношениями (10.51)–(10.56), мы получим

$$\mathbf{F}_a = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}_c = \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/6 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $\lambda_1 = 3/2$, $\phi_{a_1} = [1/\sqrt{2}]$ и

$$\phi_{c_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, решение задачи о собственных значениях, заданной в (a), построенное для наименьшего собственного значения и соответствующего собственного вектора, имеет вид

$$\lambda_1 = \frac{3}{2}; \quad \phi_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

тогда как решение исходной задачи (см. пример 10.4) представляется в виде

$$\lambda_1 = 2; \quad \phi_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Следует отметить, что использование процедуры неравномерного распределения масс может сделать собственное значение меньше — как это имеет место в данном примере — или больше, чем собственные значения исходной системы.

10.3.2. Анализ Рэлея–Ритца

Наиболее общая методика нахождения приближенных выражений для наименьших собственных значений и соответствующих собственных векторов задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ — это анализ Рэлея–Ритца. *Совокупность процедуры статического сгущения, данной в разделе 10.3.1, синтеза компонентов мод, описанного в следующем разделе, а также различных других методов, может рассматриваться как анализ Ритца.* Как мы увидим в дальнейшем, используемые приемы различаются между собой только выбором базовых векторов Ритца, предполагаемым при проведении этого анализа. В дальнейшем мы вначале представим процедуру анализа по Рэлею–Ритцу в общем виде, а затем покажем, как связаны с ней другие приемы анализа.

Задача о собственных значениях, рассматриваемая нами, имеет вид

$$\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi, \quad (10.4)$$

где мы теперь для большей ясности изложения предположим вначале, что обе матрицы, \mathbf{K} и \mathbf{M} , являются положительно определенными, а тем самым обеспечивается, что и все собственные значения являются положительными; иначе говоря, $\lambda_1 > 0$. Как мы указывали в разделе 10.2.3, матрица \mathbf{K} может предполагаться положительно определенной, так как всегда можно ввести некий сдвиг, чтобы с его помощью получить сдвинутую матрицу жесткости, удовлетворяющую этому условию. Что же касается матрицы масс, то мы предполагаем теперь, что \mathbf{M} является совместимой матрицей масс или матрицей с неравномерным распределением масс, не имеющей нулевых диагональных элементов; позднее это требование будет ослаблено.

Рассмотрим вначале принцип минимума Рэлея, гласящий, что

$$\lambda_1 = \min \rho(\phi), \quad (10.57)$$

где минимум определяется по всем возможным векторам ϕ , а $\rho(\phi)$ — это коэффициент Рэлея

$$\rho(\phi) = \frac{\phi^T \mathbf{K} \phi}{\phi^T \mathbf{M} \phi}. \quad (10.58)$$

Этот коэффициент Рэлея получается из коэффициента Рэлея для стандартной задачи о собственных значениях $\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\phi} = \lambda\tilde{\phi}$ (см. разделы 2.6 и 10.2.5). Если учесть, что обе матрицы, \mathbf{K} и \mathbf{M} , являются положительно определенными, то $\rho(\phi)$ имеет конечные значения при всех ϕ . Обращаясь к разделу 2.6, напомним, что коэффициент Рэлея имеет пределы изменения

$$0 < \lambda_1 \leq \rho(\phi) \leq \lambda_n < \infty. \quad (10.59)$$

При проведении анализа Ритца мы рассматриваем комплект векторов $\bar{\phi}$, являющихся линейными комбинациями базовых векторов Ритца ψ_i , $i = 1, \dots, q$; это означает, что типичный вектор задается в виде

$$\bar{\phi} = \sum_{i=1}^q x_i \psi_i, \quad (10.60)$$

где x_i — это координаты Ритца. Учитывая, что $\bar{\phi}$ представляет собой линейную комбинацию базовых векторов Ритца, вектор $\bar{\phi}$ не может быть любым произвольным вектором, а вместо этого располагается в подпространстве, охватываемом базовыми векторами Ритца, которое мы называем V_q (см. разделы 2.3 и 11.6). Следует отметить, что векторы ψ_i , $i = 1, \dots, q$, должны быть линейно независимыми; поэтому подпространство V_q имеет размерность q . Кроме того, обозначая символом V_n n -мерное пространство, в котором определяются матрицы \mathbf{K} и \mathbf{M} , мы получаем, что V_q содержится в пространстве V_n .

При проведении анализа Рэлея–Ритца мы ставим своей целью определить векторы специального вида, $\bar{\phi}_i$, $i = 1, \dots, q$, которые, будучи связаны ограничением о том, что они располагаются в подпространстве, охватываемом базовыми векторами Ритца, «наилучшим образом» аппроксимируют искомые собственные векторы. Именно с этой целью мы привлекаем принцип минимума Рэлея. Использование этого принципа определяет, в каком именно смысле решение «наилучшим образом» аппроксимирует искомые собственные векторы; на этот аспект мы укажем при представлении процедуры решения.

Чтобы привлечь принцип минимума Рэлея для $\bar{\phi}$, мы вначале вычисляем коэффициент Рэлея

$$\rho(\bar{\phi}) = \frac{\sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^q x_i x_j \tilde{k}_{ij}}{\sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^q x_i x_j \tilde{m}_{ij}} = \frac{\tilde{k}}{\tilde{m}}, \quad (10.61)$$

где

$$\tilde{k}_{ij} = \psi_i^T \mathbf{K} \psi_j, \quad (10.62)$$

$$\tilde{m}_{ij} = \psi_i^T \mathbf{M} \psi_j. \quad (10.63)$$

Необходимое условие минимума функции $\rho(\bar{\phi})$, заданной посредством (10.61), выражается как $\partial \rho(\bar{\phi}) / \partial x_i = 0$, $i = 1, \dots, q$, так как величины x_i являются единственными переменными. Однако

$$\frac{\partial \rho(\bar{\phi})}{\partial x_i} = \frac{2\tilde{m} \sum_{j=1}^q x_j \tilde{k}_{ij} - 2\tilde{k} \sum_{j=1}^q x_j \tilde{m}_{ij}}{\tilde{m}^2} \quad (10.64)$$

и, используя выражение $\rho = \tilde{k}/\tilde{m}$, условие минимума $\rho(\bar{\phi})$ имеет вид

$$\sum_{j=1}^q (\tilde{k}_{ij} - \rho \tilde{m}_{ij}) x_j = 0 \quad \text{при } i = 1, \dots, q. \quad (10.65)$$

При фактическом анализе мы записываем q уравнений (10.65) в матричной форме, получая таким образом задачу о собственных значениях

$$\tilde{\mathbf{K}} \mathbf{x} = \rho \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{x}, \quad (10.66)$$

где $\tilde{\mathbf{K}}$ и $\tilde{\mathbf{M}}$ — это матрицы $q \times q$ с типичными элементами, определяемыми согласно (10.62) и (10.63), соответственно, а \mathbf{x} — это вектор искомых координат Ритца:

$$\mathbf{x}^T = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_q]. \quad (10.67)$$

Решение уравнения (10.66) дает q собственных значений ρ_1, \dots, ρ_q , представляющих собой приближенные выражения для $\lambda_1, \dots, \lambda_q$, и q собственных векторов,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1^T &= [x_1^1 \quad x_2^1 \quad \dots \quad x_q^1] \\ \mathbf{x}_2^T &= [x_1^2 \quad x_2^2 \quad \dots \quad x_q^2] \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_q^T &= [x_1^q \quad x_2^q \quad \dots \quad x_q^q]. \end{aligned} \quad (10.68)$$

Собственные векторы \mathbf{x}_i используются для вычисления векторов $\bar{\phi}_1, \dots, \bar{\phi}_q$, являющихся аппроксимациями собственных векторов ϕ_1, \dots, ϕ_q . Используя (10.68) и (10.60), мы получаем

$$\bar{\phi}_i = \sum_{j=1}^q x_j^i \psi_j; \quad i = 1, \dots, q. \quad (10.69)$$

Приближенные представления собственных значений, вычисляемые в процессе анализа, обладают одной важной особенностью — они являются верхними предельными приближениями для интересующих нас собственных значений; то есть,

$$\lambda_1 \leq \rho_1; \quad \lambda_2 \leq \rho_2; \quad \lambda_3 \leq \rho_3; \quad \dots; \quad \lambda_q \leq \rho_q \leq \lambda_n, \quad (10.70)$$

а это значит, что постольку, поскольку \mathbf{K} и \mathbf{M} предполагаются положительно определенными, то матрицы $\tilde{\mathbf{K}}$ и $\tilde{\mathbf{M}}$ также являются положительно определенными.

Доказательство неравенств (10.70) показывает истинный механизм, используемый для получения приближенных представлений собственных значений ρ_i . Чтобы вычислить ρ_1 , мы ищем тот минимум $\rho(\phi)$, которого можно достичь с помощью линейной комбинации всех имеющихся в нашем распоряжении базовых векторов Ритца. Неравенство $\lambda_1 \leq \rho_1$ следует из принципа минимума Рэлея, соответствующего (10.57), и из того, что V_q содержится в n -мерном пространстве V_n , в котором определены матрицы \mathbf{K} и \mathbf{M} .

Условие, применяемое для получения ρ_2 , является типичным для механизма, используемого с целью расчета приближенных представлений для более высоких собственных значений. Во-первых, мы видим, что для задачи о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ мы имеем

$$\lambda_2 = \min \rho(\phi), \quad (10.71)$$

где минимум берется теперь по всем возможным векторам ϕ в пространстве V_n , удовлетворяющим условию ортонормированности (см. раздел 2.6)

$$\phi^T \mathbf{M} \phi_1 = 0. \quad (10.72)$$

Рассматривая приближенные представления собственных векторов $\bar{\phi}_i$, полученные в процессе анализа Рэлея–Ритца, мы обнаруживаем, что

$$\bar{\phi}_i^T \mathbf{M} \bar{\phi}_j = \delta_{ij}, \quad (10.73)$$

где δ_{ij} — это символ Кронекера, и что в силу этого в процессе того же анализа мы получим ρ_2 путем вычисления

$$\rho_2 = \min \rho(\bar{\phi}), \quad (10.74)$$

где минимум был взят по всем возможным векторам $\bar{\phi}$ в подпространстве V_q , удовлетворяющем условию ортонормированности (10.75)

Желая показать, что $\lambda_2 \leq \rho_2$, рассмотрим вспомогательную задачу; а именно, предположим, что мы вычисляем (10.76), где минимум берется по всем векторам $\bar{\phi}$, удовлетворяющим условию

$$\bar{\phi}^T \mathbf{M} \phi_1 = 0. \quad (10.77)$$

Задача, определенная в (10.76) и (10.77), — это та же задача, что и задача, соответствующая (10.71) и (10.72), за исключением того, что в последнем случае минимум берется по всем ϕ , тогда как для задачи в (10.76) и (10.77) мы рассматриваем все векторы $\bar{\phi}$ в подпространстве V_q . Тогда, если учесть, что V_q содержится в V_n , мы имеем $\lambda_2 \leq \tilde{\rho}_2$. С другой стороны, $\tilde{\rho}_2 \leq \rho_2$, так как наиболее суровое ограничение для $\bar{\phi}$ в соотношении (10.77) задается посредством $\bar{\phi}_1$. На этом основании мы имеем

$$\lambda_2 \leq \tilde{\rho}_2 \leq \rho_2. \quad (10.78)$$

Основой для расчета $\bar{\phi}_2$ и, следовательно, ρ_2 , является тот факт, что минимум $\rho(\bar{\phi})$ ищется при выполнении условия ортонормированности, соответствующего (10.75), наложенного на вектор $\bar{\phi}_1$. Аналогично этому, чтобы получить ρ_i и $\bar{\phi}_i$, мы, фактически, минимизируем $\rho(\bar{\phi})$ при выполнении условий ортонормированности $\bar{\phi}^T \mathbf{M} \phi_j = 0$ при $j = 1, \dots, i-1$. В соответствии с этим, справедливость неравенства для ρ_i из числа (10.70) может быть доказана по аналогии с той процедурой, которая была использована выше для ρ_2 , но все уравнения, касающиеся $i-1$ вынужденных ограничений, должны удовлетворяться.

Замечание относительно того, что при вычислении ρ_i необходимо выполнить $i-1$ уравнений, связанных вынужденными ограничениями, указывает также и на то обстоятельство, что при приближенном представлении более высоких собственных значений мы можем ожидать достижения меньшей точности, чем при аппроксимации низших собственных значений, подвергающихся воздействию меньшего числа принудительных ограничений. Этот факт обычно наблюдается и при проведении анализа в реальных условиях.

Если рассматривать процедуру динамического анализа на практике, то базовые функции Ритца могут быть вычислены из статического решения, в котором принимается q различных конкретных вариантов нагрузки \mathbf{R} ; это значит, что мы рассматриваем

$$\mathbf{K}\Psi = \mathbf{R}, \quad (10.79)$$

где Ψ — это матрица $n \times q$, содержащая базовые векторы Ритца; т.е. $\Psi = [\psi_1, \dots, \psi_q]$. Начатый анализ продолжается путем вычисления проекций \mathbf{K} и \mathbf{M} на подпространство V_q , охватываемое векторами ψ_i , $i = 1, \dots, q$; это означает, что мы вычисляем

$$\tilde{\mathbf{K}} = \Psi^T \mathbf{K} \Psi \quad (10.80)$$

и

$$\tilde{\mathbf{M}} = \Psi^T \mathbf{M} \Psi, \quad (10.81)$$

где в силу (10.79) имеем

$$\tilde{\mathbf{K}} = \Psi^T \mathbf{R}. \quad (10.82)$$

После этого мы решаем задачу о собственных значениях $\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{x} = \rho\tilde{\mathbf{M}}\mathbf{x}$, решение которой может быть записано в виде

$$\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{M}}\mathbf{X}\rho, \quad (10.83)$$

где ρ — это диагональная матрица, содержащая приближенные представления собственных значений ρ_i , $\rho = \text{diag}(\rho_i)$, а \mathbf{X} — это матрица, содержащая собственные векторы $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_q$, удовлетворяющие условию ортонормальности с привлечением матрицы \mathbf{M} . Тогда приближенные представления собственных векторов задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ имеют вид

$$\bar{\Phi} = \Psi\mathbf{X}. \quad (10.84)$$

До сих пор мы предполагали, что матрица масс конечно-элементной системы является положительно определенной, т.е. что \mathbf{M} не представляет собой диагональной матрицы масс с некоторыми диагональными элементами, равными нулю. Причина такого допущения была связана с необходимостью избежать случая, когда $\bar{\Phi}^T \mathbf{M} \bar{\Phi}$ равно нулю при расчете коэффициента Рэлея, т.е. случая, когда $\rho(\bar{\Phi})$ дает бесконечное собственное значение. Однако анализ Рэлея–Ритца может быть проведен так, как это описано выше, когда матрица \mathbf{M} оказывается диагональной с некоторыми нулевыми диагональными элементами, если только базовые векторы Ритца выбраны так, что они лежат в подпространстве, соответствующем конечным собственным значениям. Кроме того, чтобы получить положительно определенную матрицу $\tilde{\mathbf{M}}$, базовые векторы Ритца должны быть линейно независимыми при рассмотрении только массовых степеней свободы. Один из способов достижения такой ситуации на практике состоит в том, чтобы возбудить различные массовые степени свободы в каждом из векторов нагрузки \mathbf{R} , входящих в соотношение (10.79) (см. раздел 11.6.3 и пример 10.16).

Особый интерес представляют собой те ошибки, появления которых мы можем ожидать в решении. Хотя мы и показали, что собственное значение, вычисленное с применением анализа Ритца является верхним пределом соответствующего точного собственного значения для данной системы, мы все же не установили ничего, касающегося фактической ошибки при определении этого собственного значения. Эта ошибка зависит от используемых нами базовых векторов Ритца, так как векторы $\bar{\Phi}$ представляют собой линейные комбинации базовых векторов Ритца ψ_i , $i = 1, \dots, q$. Мы можем получить хорошие результаты только тогда, когда векторы ψ_i охватывают подпространство V_q , которое весьма близко к подпространству, охватываемому ϕ_1, \dots, ϕ_q и наименее подверженному влиянию \mathbf{K} и \mathbf{M} . Следует отметить, что сказанное выше не означает того, что каждый базовый вектор Ритца должен быть близок к искомому собственному вектору, но скорее то, что линейные комбинации базовых векторов Ритца могут привести к хорошим аппроксимациям интересующих нас собственных векторов задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$. Мы проведем дальнейшее обсуждение отбора хороших базовых векторов Ритца и связанных с анализом приближенных представлений в разделе 11.6, когда будет представлен метод итераций в подпространстве, так как этот метод использует приемы анализа Ритца.

Чтобы продемонстрировать процедуру анализа Рэлея–Ритца, рассмотрим следующие примеры.

Пример 10.15: Постройте приближенные решения задачи о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, рассмотренной в примере 10.4, где

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1/2 & & \\ & 1 & \\ & & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Точные собственные значения таковы: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 6$.

1. Используйте следующие векторы нагрузки, чтобы произвести базовые векторы Ритца:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. После этого используйте другой комплект векторов нагрузки, чтобы произвести базовые векторы Ритца:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

При проведении анализа Ритца мы пользуемся соотношениями (10.79)–(10.84), и в случае 1 получаем

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} 7/12 & 1/12 \\ 1/6 & 1/6 \\ 1/12 & 7/12 \end{bmatrix}$$

и

$$\tilde{\mathbf{K}} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{M}} = \frac{1}{144} \begin{bmatrix} 29 & 11 \\ 11 & 29 \end{bmatrix}.$$

Решение задачи о собственных значениях $\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{x} = \rho\tilde{\mathbf{M}}\mathbf{x}$ имеет вид

$$(\rho_1, \mathbf{x}_1) = \left(2,4004, \begin{bmatrix} 1,3418 \\ 1,3418 \end{bmatrix} \right); \quad (\rho_2, \mathbf{x}_2) = \left(4,0032, \begin{bmatrix} 2,0008 \\ -2,0008 \end{bmatrix} \right).$$

Следовательно, в качестве приближенного представления собственных значений мы имеем $\rho_1 = 2,40$, $\rho_2 = 4,00$ и, вычисляя

$$\overline{\mathbf{\Phi}} = \begin{bmatrix} 7/12 & 1/12 \\ 1/6 & 1/6 \\ 1/12 & 7/12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,3418 & 2,0008 \\ 1,3418 & -2,0008 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,895 & 1,00 \\ 0,447 & 0 \\ 0,895 & -1,00 \end{bmatrix},$$

мы имеем

$$\overline{\boldsymbol{\phi}}_1 = \begin{bmatrix} 0,895 \\ 0,447 \\ 0,895 \end{bmatrix}; \quad \overline{\boldsymbol{\phi}}_2 = \begin{bmatrix} 1,00 \\ 0,00 \\ -1,00 \end{bmatrix}.$$

На следующем этапе мы предполагаем векторы нагрузки соответствующими случаю 2 и решаем соотношения

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда получаем

$$\mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 \\ 2/3 & 1/3 \\ 5/6 & 1/6 \end{bmatrix}$$

и

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 7/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{M}} = \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 41 & 13 \\ 13 & 5 \end{bmatrix}.$$

Решение задачи о собственных значениях $\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{x} = \rho\tilde{\mathbf{M}}\mathbf{x}$ дает

$$(\rho_1, \mathbf{x}_1) = (2,000, \begin{bmatrix} 0,70711 \\ 0,70711 \end{bmatrix}); \quad (\rho_2, \mathbf{x}_2) = (6,0000, \begin{bmatrix} -2,1213 \\ 6,3640 \end{bmatrix}).$$

Следовательно, в качестве приближенного представления собственных значений мы имеем $\rho_1 = 2,00$, $\rho_2 = 6,00$ и, вычисляя

$$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 \\ 2/3 & 1/3 \\ 5/6 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,70711 & -2,1213 \\ 0,70711 & 6,3640 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,70711 & -0,70708 \\ 0,70711 & 0,70713 \\ 0,70711 & -0,70708 \end{bmatrix},$$

мы имеем

$$\bar{\phi}_1 = \begin{bmatrix} 0,70711 \\ 0,70711 \\ 0,70711 \end{bmatrix}; \quad \bar{\phi}_2 = \begin{bmatrix} -0,70708 \\ 0,70713 \\ -0,70708 \end{bmatrix}.$$

Если сравнивать эти результаты с данными точного решения, то интересно отметить, что в случае 1 $\rho_1 > \lambda_1$ и $\rho_2 = \lambda_2$, тогда как в случае 2 $\rho_1 = \lambda_1$ и $\rho_2 = \lambda_3$. В обоих случаях мы не получили хороших приближений для двух наименьших собственных значений и очень отчетливо продемонстрировали, что результаты целиком зависят от начального выбора базовых векторов Ритца.

Пример 10.16: Используйте метод Рэлея–Ритца, чтобы рассчитать приближенные представления λ_1 и ϕ_1 применительно к задаче о собственных значениях, рассмотренной в примере 10.12.

Мы замечаем, что в этом случае матрица \mathbf{M} является положительной, полуопределенной. Поэтому, чтобы осуществить анализ Ритца, нам нужно выбрать такой вектор нагрузки \mathbf{R} , который возбудил бы по меньшей мере одну массу. Предположим, что мы используем

$$\mathbf{R}^T = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0],$$

тогда решение соотношения (10.79) дает (см. пример 10.13)

$$\Phi^T = [1 \quad 2 \quad 2 \quad 2].$$

Следовательно, получим

$$\tilde{\mathbf{K}} = [2]; \quad \tilde{\mathbf{M}} = [12],$$

$$\rho_1 = \frac{1}{6}; \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2\sqrt{3} \end{bmatrix},$$

и

$$\bar{\phi}_1^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Следовательно, как и ожидалось, мы имеем $\rho_1 > \lambda_1$.

Представленная выше процедура анализа Ритца является весьма общим инструментом и, как уже указывалось ранее, различные методы анализа, известные под различными именами, представляют собой, как это можно фактически показать, версии анализа Ритца. В разделе 10.3.3 мы представляем синтез компонентов моды как анализ Ритца. В дальнейшем мы хотим дать краткое свидетельство того, что техника статического сгущения, как она описана в разделе 10.3.1, также является, фактически, анализом Ритца.

При описании метода статического сгущения мы предполагаем, что вся масса может быть распределена по q степеням свободы. Поэтому в качестве приближенного описания задачи о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ мы получили следующую задачу:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ac} \\ \mathbf{K}_{ca} & \mathbf{K}_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_a \\ \phi_c \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{M}_a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_a \\ \phi_c \end{bmatrix}. \quad (10.42)$$

Эта задача имеет q конечных и $n - q$ бесконечно больших собственных значений, соответствующих безмассовым степеням свободы (см. раздел 10.2.4). Чтобы рассчитать конечные

собственные значения, мы использовали статическое сгущение для безмассовых степеней свободы и пришли к задаче о собственных значениях

$$\mathbf{K}_a \phi_a = \lambda \mathbf{M}_a \phi_a, \quad (10.45)$$

где \mathbf{K}_a определяется согласно (10.46), однако это решение представляет собой, фактически, анализ Ритца для модели с неравномерным распределением масс, рассмотренной в (10.42). Базовые векторы Ритца — это разновидности смещений, связанные с ϕ_a степенями свободы, когда степени свободы в количестве ϕ_c сняты. Решая уравнения

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ac} \\ \mathbf{K}_{ca} & \mathbf{K}_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_a \\ \mathbf{F}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (10.51)$$

где $\mathbf{F}_a = \mathbf{K}_a^{-1}$, мы находим, что базовые векторы Ритца, которые следует применить в соотношениях (10.80), (10.81) и (10.84), имеют вид

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{F}_c \mathbf{K}_a \end{bmatrix}. \quad (10.85)$$

Желая проверить, действительно ли анализ Ритца с базовыми векторами, соответствующими (10.85), дает соотношение (10.45), мы вычисляем по формулам (10.80) и (10.81). Подставляя в (10.80) выражения для Ψ и \mathbf{K} , мы получаем

$$\tilde{\mathbf{K}} = [\mathbf{I} \quad (\mathbf{F}_c \mathbf{K}_a)^T] \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ac} \\ \mathbf{K}_{ca} & \mathbf{K}_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{F}_c \mathbf{K}_a \end{bmatrix}. \quad (10.86)$$

При использовании (10.51) приводим это соотношение к виду

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_a. \quad (10.87)$$

Аналогично этому, после подстановки в (10.81) выражений для Ψ и \mathbf{M} , мы получаем

$$\tilde{\mathbf{M}} = [\mathbf{I} \quad (\mathbf{F}_c \mathbf{K}_a)^T] \begin{bmatrix} \mathbf{M}_a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{F}_c \mathbf{K}_a \end{bmatrix}, \quad (10.88)$$

или

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M}_a. \quad (10.89)$$

Следовательно, производя статическое сгущение, мы фактически осуществляем анализ Ритца для модели с неравномерным распределением масс. Следует отметить, что при проведении этого анализа мы вычисляем точно q конечных собственных значений (т. е. $\rho_i = \lambda_i$ при $i = 1, \dots, q$), так как базовые векторы Ритца охватывают q -мерное подпространство, соответствующее конечным собственным значениям. На практике вычисление векторов Ψ согласно (10.85) выполнять необязательно (притом оно будет дорогостоящим), и вместо этого анализ Ритца лучше проводить, используя

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_a \\ \mathbf{F}_c \end{bmatrix}. \quad (10.90)$$

Если учесть, что векторы из (10.90) охватывают то же самое подпространство, что и векторы из (10.85), то очевидно, что одни и те же собственные значения и собственные векторы рассчитываются с применением любого из этих комплектов базовых векторов. В частности, используя (10.90), при проведении анализа Ритца мы получаем приведенную задачу о собственных значениях

$$\mathbf{F}_a \mathbf{x} = \lambda \mathbf{F}_a \mathbf{M}_a \mathbf{F}_a \mathbf{x}. \quad (10.91)$$

Желая показать, что эта задача о собственных значениях действительно эквивалентна задаче (10.45), мы умножаем обе части соотношения (10.91) на \mathbf{K}_a и пользуемся преобразованием $\mathbf{x} = \mathbf{K}_a \tilde{\mathbf{x}}$, дающим $\mathbf{K}_a \tilde{\mathbf{x}} = \lambda \mathbf{M}_a \tilde{\mathbf{x}}$, т. е. задачу (10.45).

Пример 10.17: Воспользуйтесь процедурой анализа Ритца для проведения статического сгущения безмассовых степеней свободы применительно к задаче $\mathbf{K}\phi = \lambda \mathbf{M}\phi$, рассмотренной в примере 10.12.

Вначале нам нужно рассчитать базовые векторы Ритца, задаваемые с помощью соотношения (10.90). Это было сделано в примере 10.13, где мы установили, что

$$\mathbf{F}_a = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

В результате приведения по Ритцу, данного в (10.91), получается задача о собственных значениях

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \lambda \begin{bmatrix} 12 & 16 \\ 16 & 24 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

В заключение следует отметить, что использование базовых векторов Ритца согласно (10.85) (или (10.90)) известно также под названием *приведения Гюйана* (см. работу [Guyan, 1965]). Согласно схеме Гюйана векторы Ритца используются, чтобы действовать с матрицей масс, имеющей неравномерное распределение при нулевых элементах на ее диагонали, как в (10.88), или на матрицах масс общего вида, либо с полностью неравномерным распределением, либо совместимых. При этом приведении степени свободы ϕ_a часто называются динамическими степенями свободы.

10.3.3. Синтез мод компонентов

Как и процедура статического сгущения, синтез мод компонентов представляет собой, фактически, вариант анализа Ритца, и этот метод мог бы быть представлен в предыдущем разделе в качестве приложения особого вида. Однако, как это уже неоднократно отмечалось, наиболее важный аспект анализа Ритца состоит в выборе надлежащих базовых векторов Ритца, так как результаты могут быть хорошими лишь в той степени, в которой им это позволяют базовые векторы Ритца. Особый интерес представляет собой характерная схема, используемая при синтезе мод компонентов, и именно этим и объясняется наше желание посвятить отдельный раздел обсуждению данного метода.

Синтез мод компонентов был в значительной мере разработан в качестве естественного продолжения той процедуры анализа, которая использовалась на практике в тех случаях, когда анализировались большие и сложные конструкции. Общий вариант практической процедуры состоит в том, что различные группы осуществляют анализ различных компонентов рассматриваемой конструкции. Например, при анализе работы предприятия одна группа может исследовать главный трубопровод, а другая группа — связанную с ним систему труб. На первой стадии предварительного анализа обе группы работают по отдельности и в приближенной форме моделируют воздействие других компонентов на тот конкретный компонент, который они рассматривают. Например, при анализе тех двух систем труб, о которых говорилось выше, группа, анализирующая боковую ветвь, может допустить полную неподвижность в точке пересечения с главным трубопроводом, а группа, анализирующая главный трубопровод, может ввести сосредоточенную пружинную связь и массу для присоединения боковой ветви. Преимущество раздельного рассмотрения компонентов конструкции прежде всего связано с составлением временного графика работы; это значит, что разные группы могут одновременно работать над анализом и проектированием компонентов. В первую очередь именно по этой причине синтез мод компонентов оказывается весьма привлекательным при анализе и проектировании больших конструктивных систем.

Предположим, что предварительные версии анализа компонентов уже были проведены, и что теперь будет анализироваться конструкция в целом. Именно на этой стадии естественно воспользоваться синтезом мод компонентов. Действительно, если характерные параметры мод для каждого из компонентов известны, то представляется естественным использовать эту информацию при оценке частот и разновидностей мод конструкции в целом. Конкретная процедура может варьироваться (см. работу [Craig, 1981]), однако, по существу, разновидности мод компонентов при анализе Рэлея–Ритца используются для расчета приближенных видов мод и частот конструкции в целом.

Для иллюстрации рассмотрим такой случай, когда каждый компонент конструкции был получен путем фиксации всех ее граничных степеней свободы и обозначим матрицы жесткости компонентов конструкции символами \mathbf{K}_I , \mathbf{K}_{II} , ..., \mathbf{K}_M (см. пример 10.18).

Предположим, что соединяются между собой только компоненты конструкции с индексами $L-1$ и L , $L = 2, \dots, M$; тогда мы можем написать выражение для матрицы жесткости конструкции в целом:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_I & \cdot & & & \\ & \dots & & & \\ & & \mathbf{K}_{II} & \cdot & \\ & & \dots & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & & \mathbf{K}_M \end{bmatrix}. \quad (10.92)$$

Применяя аналогичные обозначения для матриц массы, мы имеем также

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_I & \cdot & & & \\ & \dots & & & \\ & & \mathbf{M}_{II} & \cdot & \\ & & \dots & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & & \mathbf{M}_M \end{bmatrix}. \quad (10.93)$$

Предположим, что наименьшие собственные значения и соответствующие собственные векторы каждого компонента конструкции уже были рассчитаны; т. е. для каждого компонента конструкции мы имеем

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}_I \Phi_I &= \mathbf{M}_I \Phi_I \Lambda_I \\ \mathbf{K}_{II} \Phi_{II} &= \mathbf{M}_{II} \Phi_{II} \Lambda_{II} \\ \vdots & \\ \mathbf{K}_M \Phi_M &= \mathbf{M}_M \Phi_M \Lambda_M \end{aligned} \right\}, \quad (10.94)$$

где Φ_L и Λ_L представляют собой матрицы рассчитанных собственных векторов и собственных значений L -го компонента конструкции.

При синтезе мод компонентов приближенные виды мод и значения частот могут быть получены путем проведения анализа Рэлея–Ритца со следующими предполагаемыми нагрузками в правой части (10.79):

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \Phi_I & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mathbf{I}_{I, II} & 0 & \\ \Phi_{II} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_{II, III} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \Phi_M & 0 & & \end{bmatrix}, \quad (10.95)$$

где $\mathbf{I}_{L-1, L}$ — это единичная матрица, порядок которой равен соединительным степеням свободы для компонентов конструкции за номерами $L-1$ и L . Единичные матрицы соответствуют нагрузкам, приложенным к соединительным степеням свободы компонентов конструкции. С учетом того, что при выводе матриц для видов моды, фигурирующих в (10.95), компоненты конструкции были зафиксированы на их границах, единичные

нагрузки дают эффект освобождения этих соединительных степеней свободы. С другой стороны, если эти соединительные степени свободы были включены в анализ компонентов конструкции, то мы можем обойтись без единичных матриц в \mathbf{R} .

Важное соображение касается той степени точности, которую можно ожидать при проведении вышеуказанного синтеза мод компонентов. Когда проведен анализ Ритца, то все соображения, связанные с точностью и обсужденные в разделе 10.3.2, непосредственно применимы и здесь; это означает, что проведенный анализ дает верхние пределы к точным собственным значениям задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$. Однако фактическая точность, достигнутая при решении, неизвестна, хотя ее и можно оценить, например, так, как это описано в разделе 10.4. Тот факт, что точность решения сильно зависит от типа векторов, применяемых в \mathbf{R} (т. е. от базовых векторов Ритца), является, как и при всех вариантах анализа Ритца, основным недостатком метода. Однако на практике приемлемая точность может быть достигнута, так как \mathbf{R} включает в себя собственные векторы, соответствующие наименьшим собственным значениям компонентов конструкции. Процедуру анализа мы демонстрируем на следующем примере.

Пример 10.18: Рассмотрите задачу о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, где

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & & & \\ \hline & & -1 & & \\ & & & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ \hline & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ & & & & & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Используйте субструктурные задачи о собственных значениях, обозначенные пунктирными линиями в выражениях для \mathbf{K} и \mathbf{M} , чтобы определить матрицу нагрузки, заданную в (10.95) для анализа, связанного с синтезом мод компонентов.

Здесь мы имеем для субструктуры I:

$$\mathbf{K}_I = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M}_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

при решении задачи о собственных значениях в виде

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3; \quad \phi_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}; \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix},$$

а для субструктуры II:

$$\mathbf{K}_{II} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M}_{II} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

при решении задачи о собственных значениях в виде

$$\lambda_1 = 2 - \sqrt{2}, \quad \lambda_2 = 2 + \sqrt{2}, \quad \phi_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, для матрицы \mathbf{R} из (10.95) мы имеем выражение

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

После этого, проводя анализ Ритца в соответствии с (10.79)–(10.84), мы получаем

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 22,40 & 5,328 & 7,243 \\ 5,328 & 2,257 & 1,586 \\ 7,243 & 1,586 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 222,4 & 50,69 & 77,69 \\ 50,69 & 11,94 & 17,59 \\ 77,69 & 17,59 & 27,5 \end{bmatrix},$$

и, следовательно,

$$\rho = \begin{bmatrix} 0,098 & & \\ & 2,83 & \\ & & 1,82 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} 0,207 & -0,773 & 0,00690 \\ 0,181 & 0,0984 & -0,0655 \\ 0,509 & 1,47 & 0,443 \\ 0,594 & -0,385 & -0,166 \\ 0,655 & 0,574 & -0,978 \end{bmatrix}.$$

Точные собственные значения имеют вид

$$\lambda_1 = 0,09789; \quad \lambda_2 = 0,824; \quad \lambda_3 = 2,00; \quad \lambda_4 = 3,18; \quad \lambda_5 = 3,90,$$

и мы, следовательно, замечаем, что ρ_1 дает хорошее приближение для λ_1 , но ρ_2 и ρ_3 вообще не дают приближений для собственных значений.

10.3.4. Упражнения

10.7. Рассмотрите задачу о собственных значениях

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \phi = \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \phi.$$

Проведите статическое сгущение обычным способом (см. (10.46)), а затем — с помощью процедуры анализа по Рэлею–Ритцу (см. (10.51)).

10.8. Рассмотрите задачу о собственных значениях из упражнения 10.1. Проведите анализ Рэлея–Ритца с двумя векторами

$$\psi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \psi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

чтобы рассчитать приближение для наименьшего собственного значения и соответствующего собственного вектора.

10.9. Утверждается, что если при решении обобщенной задачи о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ векторы Ритца имеют вид

$$\psi_1 = \phi_1 + 2\phi_2,$$

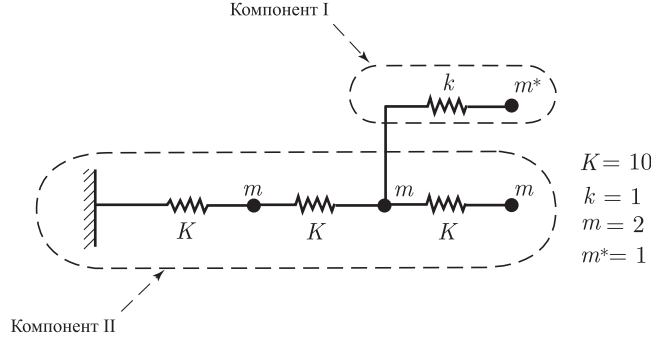
$$\psi_2 = 3\phi_1 - \phi_2,$$

где ϕ_1 и ϕ_2 — собственные векторы, соответствующие λ_1 и λ_2 , то анализ Рэлея–Ритца дает точные собственные значения λ_1 и λ_2 и соответствующие собственные векторы ϕ_1 и ϕ_2 . Покажите в явной форме, что этот результат действительно получен.

10.10. Рассмотрите показанную ниже систему пружин.

(а) Рассчитайте точное значение наименьшей частоты системы.

- (b) Рассчитайте приближенное значение наименьшей частоты путем использования методики синтеза мод компонентов, данной в разделе 10.3.3. Для каждого из компонентов системы используйте только собственный вектор наименьшей частоты.



10.4. Ошибки решения

Важной частью решения, связанного с собственными значениями и векторами, является оценка той точности, с которой была рассчитана интересующая нас система собственных значений. Учитывая, что решение для системы собственных значений обязательно имеет итеративный характер, это решение должно быть завершено, как только будет достигнута сходимость в пределах заданного допуска, обеспечивающего реальную точность. Разумеется, оценка точности фактического решения, полученного с использованием одного из методов приближенного решения, описанных в разделе 10.3, также является важной.

10.4.1. Предельные значения ошибок

Желая оценить степень точности, полученной при решении задачи о собственных значениях, напомним, что уравнение, подлежащее решению, имеет вид

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\phi} = \lambda\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}. \quad (10.96)$$

Допустим вначале, что с помощью некоей процедуры решения мы получили приближенные выражения $\bar{\lambda}$ и $\bar{\boldsymbol{\phi}}$ для собственной пары. После этого, безотносительно к тому, как были получены эти выражения, мы можем вычислить вектор невязки, дающий важную информацию относительно той степени точности, с которой $\bar{\lambda}$ и $\bar{\boldsymbol{\phi}}$ аппроксимируют собственную пару. Соответствующие результаты приводятся в соотношениях (10.101)–(10.104). Мы приводим также расчеты предельных значений ошибок, полезные при построении решений на основе обратных итераций и простого критерия ошибки.

Стандартная задача о собственных значениях

Будем считать вначале, что $\mathbf{M} = \mathbf{I}$. В этом случае мы можем написать

$$\mathbf{r} = \mathbf{K}\bar{\boldsymbol{\phi}} - \bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{\phi}} \quad (10.97)$$

и, используя соотношения (10.12) и (10.13), будем иметь

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\Lambda} - \bar{\lambda}\mathbf{I})\boldsymbol{\Phi}^T\bar{\boldsymbol{\phi}}, \quad (10.98)$$

или, с учетом того, что значение $\bar{\lambda}$ не равно собственному, а лишь близко к нему, получим

$$\bar{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\Lambda} - \bar{\lambda}\mathbf{I})^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{r}. \quad (10.99)$$

Следовательно, учитывая, что $\|\bar{\boldsymbol{\phi}}\|_2 = 1$ и определяя нормы, мы получаем

$$1 \leq \|(\boldsymbol{\Lambda} - \bar{\lambda}\mathbf{I})^{-1}\|_2 \|\mathbf{r}\|_2. \quad (10.100)$$

Однако в силу того, что

$$\|(\boldsymbol{\Lambda} - \bar{\lambda}\mathbf{I})^{-1}\|_2 = \max_i \frac{1}{|\lambda_i - \bar{\lambda}|},$$

мы имеем

$$\min_i |\lambda_i - \bar{\lambda}| \leq \|\mathbf{r}\|_2. \quad (10.101)$$

На основании изложенного может быть сделано решающее утверждение относительно той степени точности, с которой величина $\bar{\lambda}$ аппроксимирует собственное значение λ_i путем вычисления $\|\mathbf{r}\|_2$, как это выражается соотношением (10.101). Это в корне отличается от той информации, которая могла бы быть получена в результате вычисления вектора невязки \mathbf{r} при решении уравнений статического равновесия.

Несмотря на то, что соотношение (10.101) констатирует, что выражение $\bar{\lambda}$ близко к собственному значению при условии, что $\|\mathbf{r}\|_2$ мало, необходимо признать, что это соотношение не фиксирует, какое именно собственное значение аппроксимируется. Фактически, чтобы установить ту конкретную версию собственного значения, которая была аппроксимирована, необходимо воспользоваться свойством последовательности Штурма (см. раздел 10.2.2 и приводимый вслед за этим пример).

Пример 10.19: Рассмотрим задачу о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda\phi$, где

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Собственное решение имеет вид $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 4$ и

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad \phi_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Предположим, что мы вычислили

$$\bar{\lambda} = 3,1 \quad \text{и} \quad \bar{\phi} = \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,1414 \\ -0,7 \end{bmatrix}$$

в качестве аппроксимаций для λ_2 и ϕ_2 . Примените соотношение (10.101), определяющее предельное значение ошибки.

В данном случае мы имеем

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,1414 \\ -0,7 \end{bmatrix} - 3,1 \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,1414 \\ -0,7 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} -0,2114 \\ -0,1555 \\ -0,2114 \end{bmatrix}; \quad \|\mathbf{r}\|_2 = 0,3370.$$

Тогда соотношение (10.101) дает

$$|\lambda_2 - \bar{\lambda}| \leq 0,3370,$$

что справедливо в действительности, так как $\bar{\lambda} - \lambda_2 = 0,1$.

Теперь мы предполагаем, что мы вычислили только $\bar{\lambda}$ и $\bar{\phi}$, но не знаем, какое именно собственное значение и какой собственный вектор они аппроксимируют. В этом случае мы можем использовать соотношение (10.101), чтобы найти пределы для неизвестного нам точного собственного значения и применить проверки с помощью последовательности Штурма (см. раздел 10.2.2).

Для рассмотренного здесь примера мы имеем

$$2,7630 \leq \lambda_i \leq 3,4370.$$

Давайте примем в качестве нижнего предела 2,7 и в качестве верхнего предела 3,5. Трехмерная факторизация $\mathbf{K} - \mu\mathbf{I}$ с помощью \mathbf{LDL}^T при $\mu = 2,7$ дает

$$\begin{bmatrix} 0,3 & -1 & 0 \\ -1 & -0,7 & -1 \\ 0 & -1 & 0,3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -3,333 & 1 & & \\ 0 & 0,2479 & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3 & & & \\ & -4,033 & & \\ & & 0,3248 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3,333 & 0 \\ & 1 & 0,2479 \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad (a)$$

и при $\mu = 3,5$ —

$$\begin{bmatrix} -0,5 & -1 & 0 \\ -1 & -1,5 & -1 \\ 0 & -1 & -0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,5 & & \\ & 0,5 & \\ & & -2,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ & 1 & -2 \\ & & 1 \end{bmatrix}. \quad (b)$$

Однако в случае (а) матрица \mathbf{D} имеет один отрицательный элемент, в случае (b) — два отрицательных элемента; следовательно, мы можем прийти к выводу том, что $2, 7 < \lambda_2 < 3, 5$. Более того, из наших выкладок следует, что $\bar{\lambda}$ и $\bar{\phi}$ представляют собой аппроксимации для λ_2 и ϕ_2 .

Далее, если речь идет о той степени точности, с которой величина $\bar{\phi}$ аппроксимирует собственный вектор, то анализ, эквивалентный вышеизложенному, потребует не только вычисления $\|\mathbf{r}\|_2$, но понадобится также и величина интервала между отдельными собственными значениями. При практическом анализе величина этого интервала известна только приближенно, так как собственные значения были вычислены лишь с некоторой определенной степенью точности.

Предположим, что величины $\bar{\lambda}$ и $\bar{\phi}$ уже были вычислены, причем $\|\bar{\phi}\|_2 = 1$, и что величина $\bar{\lambda}$ аппроксимирует собственные значения λ_i , $i = p, \dots, q$. Для анализа ошибки будем предполагать также, что собственные значения λ_i известны для всех i , кроме $i = p, \dots, q$ (хотя здесь нам понадобится использовать вычисленные собственные значения). Окончательный результат анализа точности сводится к тому, что если $|\lambda_i - \bar{\lambda}| \leq \|\mathbf{r}\|_2$ для $i = p, \dots, q$ и $|\lambda_i - \bar{\lambda}| \geq s$ для $i \neq p, \dots, q$, то существует такой вектор $\tilde{\phi} = \alpha_p \phi_p + \dots + \alpha_q \phi_q$, для которого $\|\bar{\phi} - \tilde{\phi}\|_2 \leq \|\mathbf{r}\|_2 / s$ (см. пример 10.20). Поэтому, если $\bar{\lambda}$ представляет собой аппроксимацию для единичного собственного значения λ_i , то соответствующий вектор $\bar{\phi}$ является аппроксимацией для ϕ_i , причем

$$\|\bar{\phi} - \alpha_i \phi_i\|_2 \leq \frac{\|\mathbf{r}\|_2}{s}; \quad s = \min_{\substack{\text{все } j \\ j \neq i}} |\lambda_j - \bar{\lambda}|. \quad (10.102)$$

Однако если величина $\bar{\lambda}$ близка к некоторому числу собственных значений $\lambda_p, \dots, \lambda_q$, то проведенный анализ свидетельствует только о том, что соответствующий вектор $\bar{\phi}$ близок к вектору, располагающемуся в подпространстве, соответствующем ϕ_p, \dots, ϕ_q . В ходе практического анализа (т. е. с применением метода суперпозиции мод при расчетах динамической реакции) наиболее вероятно, что это как раз и есть то, что требуется, так как иметь дело с близкими собственными значениями, — это почти то же самое, что и с равными собственными значениями, когда вычисляемые собственные векторы также не будут единственными, но будут располагаться в подпространстве, соответствующем равным собственным значениям. В дальнейшем мы прежде всего дадим доказательство, касающееся той степени точности, с которой $\bar{\phi}$ аппроксимирует собственный вектор, а затем продемонстрируем результаты на примерах.

Пример 10.20: Предположим, что мы уже рассчитали $\bar{\lambda}$ и $\bar{\phi}$, при $\|\bar{\phi}\|_2 = 1$, считая эти величины аппроксимациями собственных значений и собственных векторов, а также что $\mathbf{K}\bar{\phi} - \bar{\lambda}\bar{\phi} = \mathbf{r}$. Рассмотрим тот случай, когда $|\lambda_i - \bar{\lambda}| \leq \|\mathbf{r}\|_2$ при $i = 1, \dots, q$, и когда $|\lambda_i - \bar{\lambda}| \geq s$ при $i = q + 1, \dots, n$. Покажите, что $\|\bar{\phi} - \tilde{\phi}\|_2 \leq \|\mathbf{r}\|_2 / s$, где $\tilde{\phi}$ — вектор в подпространстве, соответствующем ϕ_1, \dots, ϕ_q .

Рассчитанная аппроксимация собственного вектора $\bar{\phi}$ может быть записана как

$$\bar{\phi} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i.$$

Полагая $\phi = \sum_{i=1}^q \alpha_i \phi_i$, мы получаем

$$\|\bar{\phi} - \tilde{\phi}\|_2 = \left\| \sum_{i=q+1}^n \alpha_i \phi_i \right\|_2,$$

или, вследствие того, что $\phi_i^T \phi_j = \delta_{ij}$,

$$\|\bar{\phi} - \tilde{\phi}\|_2 = \left(\sum_{i=q+1}^n \alpha_i^2 \right)^{1/2}. \quad (a)$$

Однако

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}\|_2 &= \|\mathbf{K}\bar{\phi} - \bar{\lambda}\bar{\phi}\|_2 = \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i (\lambda_i - \bar{\lambda}) \phi_i \right\|_2, \end{aligned}$$

или

$$\|\mathbf{r}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 (\lambda_i - \bar{\lambda})^2 \right)^{1/2},$$

что дает

$$\|\mathbf{r}\|_2 \geq s \left(\sum_{i=q+1}^n \alpha_i^2 \right)^{1/2}. \quad (b)$$

Следовательно, комбинируя (a) и (b), мы получим

$$\|\bar{\phi} - \tilde{\phi}\|_2 \leq \frac{\|\mathbf{r}\|_2}{s}.$$

Пример 10.21: Рассмотрите задачу о собственных значениях из примера 10.19. Предположите, что λ_1 и λ_3 известны (а именно, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_3 = 4$) и что были вычислены $\bar{\lambda}$ и $\bar{\phi}$, данные в примере 10.19 (при реальном анализе мы имели бы только приближенные значения λ_1 и λ_3 и все расчеты предельных значений были бы приближенными). Вычислите ту степень точности, с которой $\bar{\phi}$ аппроксимирует ϕ_2 .

Для проведения вычислений мы используем соотношение (10.102). В данном случае имеем

$$\|\bar{\phi} - \alpha_2 \phi_2\|_2 \leq \frac{0,3370}{s}$$

при

$$s = \min_{i=1,3} |\lambda_i - \bar{\lambda}|.$$

Следовательно, с учетом того, что $\bar{\lambda} = 3,1$, мы имеем $s = 0,9$ и

$$\|\bar{\phi} - \alpha_2 \phi_2\|_2 \leq 0,3744.$$

Если вычислять $\|\bar{\phi} - \phi_2\|_2$ точно, то мы получим

$$\|\bar{\phi} - \phi_2\|_2 = \left(\left(0,7 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + (0,1414 - 0)^2 + \left(-0,7 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \right)^{1/2} = 0,1418.$$

Пример 10.22: Рассмотрите задачу о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda\phi$, где

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 100 & -1 \\ -1 & 100 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения и собственные векторы этой задачи имеют вид

$$\lambda_1 = 99, \quad \phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \lambda_2 = 101, \quad \phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Предположите, что мы уже рассчитали приближенные выражения для собственного значения и собственного вектора $\bar{\lambda} = 100$, $\bar{\phi} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Вычислите \mathbf{r} и тем самым конкретизируйте соотношения (10.101) и (10.102).

Прежде всего мы вычисляем \mathbf{r} в соответствии с (10.97),

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 100 & -1 \\ -1 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 100 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $\|\mathbf{r}\|_2 = 1$ и соотношение (10.101) дает

$$\min_i |\lambda_i - \bar{\lambda}| \leq 1. \quad (\text{a})$$

На этом основании можно сделать вывод о том, что собственное значение было аппроксимировано с ошибкой в 1 процент или менее. Постольку, поскольку мы знаем λ_1 и λ_2 , то мы можем сравнить $\bar{\lambda}$ с λ_1 или λ_2 и найти, что соотношение (a) действительно справедливо.

Что касается аппроксимации собственного вектора $\bar{\phi}$, то мы замечаем, что $\bar{\phi}$ не аппроксимирует ни ϕ_1 , ни ϕ_2 . Этот факт отражается также посредством вычисления соотношения (10.102). Если предположить, что $\bar{\phi}$ служит аппроксимацией для ϕ_1 , то это даст $s = 1$, и мы получаем

$$\|\bar{\phi} - \alpha_1 \phi_1\|_2 \leq 1.$$

Аналогично этому, если предположить, что $\bar{\phi}$ является аппроксимацией для ϕ_2 , то мы получим

$$\|\bar{\phi} - \alpha_2 \phi_2\|_2 \leq 1,$$

и в обоих случаях предельное значение ошибки оказывается очень большим (отметим, что $\|\phi_1\|_2 = 1$ и $\|\phi_2\|_2 = 1$), а это свидетельствует о том, что величина $\bar{\phi}$ не является аппроксимацией собственного вектора.

Обобщенная задача о собственных значениях

Теперь мы хотели бы оценить степень точности, достигаемую при решении обобщенной задачи о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$. Предположим, что в качестве приближения к λ_i и ϕ_i мы рассчитали величины $\bar{\lambda}$ и $\bar{\phi}$. Тогда, по аналогии с расчетами, выполненными нами выше, мы можем вычислить вектор ошибки \mathbf{r}_M , где

$$\mathbf{r}_M = \mathbf{K}\bar{\phi} - \bar{\lambda}\mathbf{M}\bar{\phi}. \quad (10.103)$$

Чтобы установить связь между вектором ошибки из формулы (10.103) с вектором ошибки, соответствующим стандартной задаче о собственных значениях, мы используем замену $\mathbf{M} = \mathbf{S}\mathbf{S}^T$, и тогда

$$\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\phi} - \bar{\lambda}\tilde{\phi}, \quad (10.104)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{r}_M$, $\tilde{\phi} = \mathbf{S}^T\bar{\phi}$ и $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{S}^{-T}$ (см. раздел 10.2.5). Поэтому именно вектор $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{r}_M$ нам нужно было бы использовать для вычисления предельного значения ошибки, соответствующего (10.101). Эти вычисления потребовали бы провести факторизацию матрицы \mathbf{M} с преобразованием в $\mathbf{S}\mathbf{S}^T$, при котором предполагается, что \mathbf{M} является положительно определенной¹⁾.

В процессе расчетов

При проведении реальных расчетов мы часто используем метод обратных итераций (см. разделы 11.2 и 11.6), и при этом можно эффективно определить предельные значения

¹⁾ Чтобы избежать проведения факторизации матрицы \mathbf{M} , мы можем вместо исходной задачи рассмотреть задачу $\mathbf{M}\phi = \lambda^{-1}\mathbf{K}\phi$, полагая, что результат факторизации \mathbf{K} уже известен, а затем определить предельные значения для λ^{-1} .

ошибки на основе следующих оценок (см. работу [Matthies, 1985-1], а также упражнение 10.11). Положим

$$\mathbf{K}\bar{\phi} = \mathbf{M}\hat{\phi}. \quad (10.105)$$

Тогда мы имеем

$$\min_i |\lambda_i - \rho(\bar{\phi})| \leq \left\{ \left(\frac{\hat{\phi}^T \mathbf{M} \hat{\phi}}{\bar{\phi}^T \mathbf{M} \bar{\phi}} \right) - [\rho(\bar{\phi})]^2 \right\}^{1/2} \quad (10.106)$$

и

$$\min_{\substack{i \\ \lambda_i \neq 0}} \left| \frac{\lambda_i - \rho(\bar{\phi})}{\lambda_i} \right| \leq \left\{ 1 - \frac{(\rho(\bar{\phi}))^2}{\hat{\phi}^T \mathbf{M} \hat{\phi} / \bar{\phi}^T \mathbf{M} \bar{\phi}} \right\}^{1/2}, \quad (10.107)$$

где $\rho(\bar{\phi})$ — коэффициент Рэлея,

$$\rho(\bar{\phi}) = \frac{\bar{\phi}^T \mathbf{K} \bar{\phi}}{\bar{\phi}^T \mathbf{M} \bar{\phi}}.$$

Как мы увидим, соотношение (10.105) представляет собой типичный шаг, осуществляемый при обратной итерации, итерации Ланцоша и подпространственной итерации, а $\rho(\bar{\phi})$ также почти всегда вычисляется на практике, так как коэффициент Рэлея обладает хорошим аппроксимационным качеством по отношению к собственному значению. Отметим также, что член $\hat{\phi}^T \mathbf{M} \hat{\phi} / \bar{\phi}^T \mathbf{M} \bar{\phi}$ состоит из двух чисел, легко вычисляемых в процессе итерации.

Указанные выше предельные значения ошибок являются весьма эффективными, однако в конечном счете представляет интерес рассмотреть также и следующий простой критерий ошибки:

$$\epsilon = \frac{\|\mathbf{K}\bar{\phi} - \bar{\lambda}\mathbf{M}\bar{\phi}\|_2}{\|\mathbf{K}\bar{\phi}\|_2}. \quad (10.108)$$

Если учесть, что с точки зрения физики член $\mathbf{K}\bar{\phi}$ отражает упругие силы в узловых точках, а член $\bar{\lambda}\mathbf{M}\bar{\phi}$ отражает силы инерции, то, когда комплекс конечных элементов вибрирует в моде $\bar{\phi}$, то в правой части формулы (10.108) мы видим норму неуравновешенных сил в узловых точках, деленную на норму упругих сил в узловых точках. Если $\bar{\lambda}$ и $\bar{\phi}$ представляют собой точное приближение для собственной пары, то вышеуказанное отношение должно быть мало.

Если $\mathbf{M} = \mathbf{I}$, то следует заметить, что мы можем написать

$$\bar{\lambda}\epsilon = \|\mathbf{r}\|_2, \quad (10.109)$$

и, следовательно,

$$\epsilon \geq \min_i \frac{|\lambda_i - \bar{\lambda}|}{\bar{\lambda}}. \quad (10.110)$$

Пример 10.23: Рассмотрите задачу о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, где

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 10 & -10 \\ -10 & 100 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Точное представление собственных значений и собственных векторов записываются, с точностью до 12 знаков, как

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 3,863385512876; & \phi_1 &= \begin{bmatrix} 0,640776011246 \\ 0,105070337503 \end{bmatrix}; \\ \lambda_2 &= 33,279471629982; & \phi_2 &= \begin{bmatrix} -0,401041986380 \\ 0,524093989558 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Предположим, что $\bar{\phi} = (\phi_1 + \delta\phi_2)c$, где значение c таково, что $\bar{\phi}^T \mathbf{M} \bar{\phi} = 1$ и $\delta = 10^{-1}$, $\delta = 10^{-3}$ и $\delta = 10^{-6}$. Для каждого значения δ вычислите λ как коэффициент Рэлея по отношению к $\bar{\phi}$ и рассчитайте предельные значения ошибки на основе (10.104), (10.106), а также критерий ошибки ϵ , заданный формулой (10.108).

Приводимая ниже таблица дает сводку полученных результатов. Уравнения, используемые для расчета соответствующих величин, приводятся в соотношениях (10.103)–(10.108). Результаты, показанные в таблице, свидетельствуют о том, что для каждого

значения δ соблюдают пределы изменения ошибки, и что величина ϵ в случае точного решения также мала.

δ	10^{-1}	10^{-3}	10^{-6}
$\bar{\phi}$	0,597690792656	0,640374649073	0,640775610204
	0,156698194481	0,105594378695	0,105070861597
$\bar{\phi}^T \mathbf{K} \bar{\phi}$	4,154633890275	3,863414928932	3,863385512905
$\bar{\lambda}$	4,154633890275	3,863414928932	3,863385512905
\mathbf{r}_M	-1,207470493734	-0,008218153965	-0,000008177422
	4,605630581124	0,049838803226	0,000049870085
\mathbf{r}	1,634419466242	0,021106743617	0,000021152364
	1,411679295681	0,015042545327	0,000015049775
$ \lambda_1 - \bar{\lambda} $	0,291248377379	0,000029416056	0,000000000029
пред. зн. (10,101)/(10,104)	2,159667897036	0,025918580132	0,000025959936
пред. зн. (10,106)	2,912483773983	0,029416056744	0,000029433139
критерий (10,108)	0,447113235813	0,007458208660	0,000007491764

10.4.2. Упражнения

- 10.11. Приводимое ниже предельное значение ошибки обсуждалось в работе [Stoer, Bulirsch 1993]. Пусть \mathbf{A} будет симметричной матрицей, а λ_i — собственным значением \mathbf{A} . Тогда

$$\min_i \left| \lambda_i - \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} \right| \leq \sqrt{\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} - \left(\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} \right)^2}$$

для любого вектора $\mathbf{x} \neq 0$.

Покажите, что соотношения (10.105)–(10.107) являются следствием этой формулы.

- 10.12. Рассмотрите задачу о собственных значениях из упражнения 10.1. Положим

$$\hat{\phi} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Рассчитайте $\bar{\phi}$, используя (10.105) и $\rho(\bar{\phi})$. Эти величины, $\rho(\bar{\phi})$ и $\bar{\phi}$, теперь представляют собой наилучшие приближения для собственного значения и собственного вектора.

Найдите предельные значения ошибки (10.101) (совместно с (10.103)) и (10.106). Вычислите также критерий ошибки (10.108).

Глава 11

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ

11.1. Введение

В главе 10 мы обсудили основные факты, используемые при построении решений с помощью собственных значений и векторов, а также некоторые приемы расчета приближенных выражений для исследуемых собственных систем. Целью данной главы является представление эффективных методов решения задач о собственных значениях. Рассматриваемые здесь методы базируются на фундаментальных аспектах, обсужденных в главе 10. Поэтому для полного понимания представленных в этой главе методов решения необходимо быть очень хорошо знакомым с материалом, обсужденным в главе 10. Кроме того, здесь мы применяем также и обозначения, введенные в указанной главе.

Как и прежде, мы сосредоточимся на решении задачи о собственных значениях

$$\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi \quad (11.1)$$

и, в частности, на вычислении наименьших собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ и соответствующих им собственных векторов ϕ_1, \dots, ϕ_p . *Те методы решения, которые рассматриваются здесь вначале (см. разделы 11.2–11.4), могут быть подразделены на четыре группы, основное свойство каждой из которых используется в качестве базы для построения алгоритма решения (см., например, книгу [Wilkinson, 1965-1]).*

Первую группу составляют методы векторной итерации, основное свойство которых имеет вид

$$\mathbf{K}\phi_i = \lambda_i\mathbf{M}\phi_i. \quad (11.2)$$

Методы преобразования образуют вторую группу, использующую свойство

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Lambda \quad (11.3)$$

и

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I}, \quad (11.4)$$

где $\Phi = [\phi_1, \dots, \phi_n]$ и $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, n$. Методы решения, входящие в третью группу, — это методы полиномиальной итерации, которые оперируют с тем фактом, что

$$p(\lambda_i) = 0, \quad (11.5)$$

где

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}). \quad (11.6)$$

Методы решения, принадлежащие к четвертой группе, используют свойство последовательности Штурма для характеристических полиномов,

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}) \quad (11.7)$$

и

$$p^{(r)}(\lambda^{(r)}) = \det(\mathbf{K}^{(r)} - \lambda^{(r)}\mathbf{M}^{(r)}); \quad r = 1, \dots, n-1, \quad (11.8)$$

где $p^{(r)}(\lambda^{(r)})$ представляет собой характеристический полином r -й ассоциированной задачи с принудительными ограничениями, соответствующей $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$.

Применительно к каждой из этих четырех групп методов решения было разработано значительное число алгоритмов такого решения. Однако для эффективного расчета исследуемой нами задачи о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ нужно рассмотреть всего лишь несколько технических приемов и в последующих разделах мы представляем важные методы конечно-элементного анализа. Методы векторных итераций и методы преобразования представлены по отдельности в разделах 11.2 и 11.3 соответственно. Однако полиномиальные методы и итеративные методы с последовательностью Штурма представлены совместно, в одном разделе за номером 11.4, так как обе эти группы методов используют характеристические полиномы и могут быть непосредственно применены в рамках одной схемы решения. В дополнение к тем методам, которые могут классифицироваться как принадлежащие к одной из четырех указанных групп, в разделах 11.5 и 11.6 мы обсуждаем метод Ланцоша и метод подпространственных итераций, т. е. методы, использующие сочетание тех фундаментальных свойств, которые приводятся в соотношениях (11.2)–(11.8).

Прежде чем представить интересующие нас технические приемы построения решения, следует отметить несколько важнейших добавочных особенностей. Важно уяснить себе, что *все методы решения по своей сути должны быть итеративными, так как в своей основе построение решения задачи о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ является эквивалентным вычислению корней полинома $p(\lambda)$, имеющего порядок, равный порядку матриц \mathbf{K} и \mathbf{M}* . С учетом того, что в общем случае мы не имеем в своем распоряжении явных формул для расчета корней $p(\lambda)$, если порядок p выше 4, то необходимо использовать метод итеративного решения. Однако прежде чем начать итерацию, мы можем предпочесть преобразовать матрицы \mathbf{K} и \mathbf{M} к такой форме, которая позволяет осуществить более экономичное решение интересующей нас задачи (см. раздел 11.3.3).

Несмотря на то, что для получения решения в форме собственной пары (λ_i, ϕ_i) необходимо проводить итерации, следует отметить, что как только один член собственной пары будет уже рассчитан, мы можем получить второй член без проведения дальнейшей итерации. Предположим, что значение λ_i было вычислено с помощью итерации; тогда мы можем получить ϕ_i , используя соотношение (11.2); иначе говоря, ϕ_i вычисляется путем решения уравнения

$$(\mathbf{K} - \lambda_i\mathbf{M})\phi_i = 0. \quad (11.9)$$

С другой стороны, если мы вычислили ϕ_i с помощью итерации, то мы можем получить искомое собственное значение, обратясь к коэффициенту Рэлея; иначе говоря, используя соотношения (11.3) и (11.4), мы получаем

$$\lambda_i = \phi_i^T \mathbf{K} \phi_i; \quad \phi_i^T \mathbf{M} \phi_i = 1. \quad (11.10)$$

Поэтому, когда рассматривается построение метода эффективного решения, основной вопрос сводится к тому, должны ли мы вначале строить решение для собственного значения λ_i , и затем рассчитывать собственный вектор ϕ_i , или же действовать в обратном порядке, или, что может оказаться наиболее экономичным, построить решение для λ_i и ϕ_i одновременно. Ответ на этот вопрос зависит от требований, предъявляемых к решению, а также от свойств матриц \mathbf{K} и \mathbf{M} , от ширины ленты матрицы \mathbf{K} и от того, является ли матрица \mathbf{M} ленточной.

Эффективность метода построения решения в значительной степени зависит от двух факторов: во-первых, от возможности надежного использования данной процедуры и, во-вторых, от стоимости получения решения. Стоимость построения решения существенно зависит от числа операций, требующих быстрой памяти, и от эффективного использования устройств, обеспечивающих вторичную память. Однако важнее всего, чтобы метод решения мог применяться надежным образом. Это означает, что для хорошо обусловленных матриц жесткости и массы решение всегда будет получено с желаемой степенью точности без распада этого решения. На практике решение прерывается только тогда, когда задача плохо обусловлена; например, если вследствие ошибок при вводе данных матрицы жесткости и масс не определены надлежащим образом. Тогда этот перерыв в решении реализуется, в лучшем случае, на наиболее ранней стадии расчетов, т. е. до того, как будут осуществлены серьезные расходы на построение решения. Представленные в дальнейшем алгоритмы должны изучаться с учетом этих соображений.

11.2. Методы векторных итераций

Как уже указывалось ранее, при решении с определением собственных векторов или собственных значений мы должны использовать итерации. В разделе 11.1 мы дали классификацию методов решения в зависимости от основного соотношения, с которым они работают. Основное соотношение, рассматриваемое в методах векторных итераций, имеет вид

$$\mathbf{K}\phi = \lambda \mathbf{M}\phi. \quad (11.1)$$

Поставленная цель состоит в том, чтобы добиться удовлетворения уравнению (11.1) путем непосредственного воздействия на него. Будем считать, что мы предположительно задали некий вектор, скажем, \mathbf{x}_1 , в качестве ϕ , и предположили некоторое значение для λ , скажем, $\lambda = 1$. Тогда мы можем вычислить правую часть уравнения (11.1); т. е. мы можем рассчитать

$$\mathbf{R}_1 = (1)\mathbf{M}\mathbf{x}_1. \quad (11.11)$$

Учитывая, что вектор \mathbf{x}_1 выбран произвольно, ясно, что, вообще говоря, мы не имеем $\mathbf{K}\mathbf{x}_1 = \mathbf{R}_1$. Если бы величина $\mathbf{K}\mathbf{x}_1$ была равна \mathbf{R}_1 , то \mathbf{x}_1 был бы собственным вектором и, если исключить тривиальные случаи, то наши предположения были бы чрезвычайно удачными. Вместо этого мы имеем уравнение равновесия, подобное тому, что встречалось при статическом анализе (см. раздел 8.2), которое мы можем записать в виде

$$\mathbf{K}\mathbf{x}_2 = \mathbf{R}_1; \quad \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{x}_1, \quad (11.12)$$

где \mathbf{x}_2 — это решение в форме смещения, соответствующего приложенным силам \mathbf{R}_1 . Так как мы знаем, что для получения решения в форме собственного вектора нам нужно использовать итерации, то теперь мы интуитивно чувствуем, что \mathbf{x}_2 может оказаться лучшим приближением для собственного вектора, чем был \mathbf{x}_1 . Так оно и есть на самом деле и, путем повторения данного цикла мы получаем непрерывно улучшающуюся аппроксимацию собственного вектора.

Описанная процедура представляет собой базис обратной итерации. Мы увидим, что и другие приемы векторной итерации работают аналогичным образом. Конкретно, при итерации вперед итеративный цикл является обращенным; иначе говоря, на первой стадии мы вычисляем $\mathbf{R}_1 = \mathbf{K}\mathbf{x}_1$, а после этого получаем улучшенную аппроксимацию собственного вектора \mathbf{x}_2 путем решения уравнения $\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{R}_1$.

Основные этапы схем векторной итерации и других методов решения, рассматриваемых нами ниже, могут быть введены чисто интуитивно. А именно, мы должны удовлетворить одному из основных соотношений, сводка которых дается в разделе 11.1, и пытаемся сделать это с помощью некоторого цикла итераций. Однако реальное оправдание использованию любого из методов следует из того факта, что эти методы работают и что они могут использоваться экономично.

11.2.1. Обратная итерация

Методика обратной итерации очень эффективно используется при расчете собственного вектора, а в то же время может быть вычислено и соответствующее собственное значение. Обратная итерация применяется в различных важных итеративных процедурах, включая метод подпространственной итерации, описанный в разделе 11.6. Поэтому важно иметь возможность подробно обсудить этот метод.

В данном разделе мы предполагаем, что матрица \mathbf{K} является положительно определенной, тогда как \mathbf{M} может быть диагональной матрицей масс с нулевыми диагональными элементами или без них, или же может быть ленточной матрицей масс. Если матрица \mathbf{K} является всего лишь положительной и полуопределенной, то до выполнения итерации должен быть произведен сдвиг (см. раздел 11.2.3).

В дальнейшем мы вначале рассматриваем основные уравнения, используемые при обратной итерации, а затем представляем более эффективный вариант методики расчета. При построении решения мы предполагаем, что вводится некий вектор начальной итерации \mathbf{x}_1 , а затем на каждом шаге итерации, при $k = 1, 2, \dots$, вычисляем

$$\mathbf{K}\bar{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{M}\mathbf{x}_k \quad (11.13)$$

и

$$\mathbf{x}_{k+1} = \frac{\bar{\mathbf{x}}_{k+1}}{(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{x}}_{k+1})^{1/2}}, \quad (11.14)$$

где, при том условии, что \mathbf{x}_1 не является ортонормированным по отношению к ϕ_1 со включением \mathbf{M} , или что $\mathbf{x}_1^T \mathbf{M} \phi_1 \neq 0$, мы имеем $\mathbf{x}_{k+1} \rightarrow \phi_1$ при $k \rightarrow \infty$.

Основным этапом итерации является решение уравнений (11.13), при котором мы вычисляем вектор \mathbf{x}_{k+1} , направление которого ближе к направлению собственного вектора, чем это было с вектором \mathbf{x}_k , полученным на предыдущей итерации. Расчет, проводимый по формуле (11.14), попросту обеспечивает, что длина вектора новой итерации \mathbf{x}_{k+1} с весом \mathbf{M} равна единице; иначе говоря, мы хотели бы, чтобы вектор \mathbf{x}_{k+1} удовлетворял условию ортонормированности с массой, а именно

$$\mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{M} \mathbf{x}_{k+1} = 1. \quad (11.15)$$

Подставляя выражение для \mathbf{x}_{k+1} из формулы (11.14) в формулу (11.15), мы находим, что соотношение (11.15) действительно удовлетворяется. Если масштабирование согласно (11.14) не включается в итерацию, то составляющие итеративного вектора возрастают (или уменьшаются) на каждом этапе, и эти итеративные векторы сходятся не к ϕ_1 , а к некоторой величине, кратной ему. Описанную процедуру мы иллюстрируем с помощью следующего примера.

Пример 11.1: Рассмотрим задачу о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda \mathbf{M}\phi$, где

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения и соответствующие им векторы задачи были вычислены в примерах 10.12 и 10.13. Используйте два этапа обратной итерации для вычисления аппроксимации ϕ_1 .

Первый этап состоит в том, чтобы разложить \mathbf{K} с преобразованием в \mathbf{LDL}^T , получая тем самым возможность решить уравнения (11.13). В примере 10.13 мы получили треугольные матрицы, соответствующие \mathbf{K} .

В качестве вектора начальной итерации нам нужен вектор, не ортонормированный по отношению к ϕ_1 . В силу того, что мы не знаем ϕ_1 , мы не можем быть уверены в выполнении условия $\phi_1^T \mathbf{M} \mathbf{x}_1 \neq 0$, но мы хотим выбрать вектор, вероятность ортонормированности которого по отношению к ϕ_1 мала. Как показал опыт, во многих случаях хорошим начальным вектором оказывается полный единичный вектор (однако в примере 11.6 приводится случай, когда выбор полного единичного вектора является плохим выбором). В рассматриваемом примере мы используем

$$\mathbf{x}_1^T = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1],$$

а затем получаем при $k = 1$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\bar{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{x}}_2^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{x}}_2 = 136$$

и

$$\mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{136}} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что наличие нулевых диагональных элементов в матрице \mathbf{M} не приводит к возникновению трудностей при решении. Переходя к следующей итерации, $k = 2$, мы используем

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{x}}_3 = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{136}} \\ \frac{6}{\sqrt{136}} \\ \frac{7}{\sqrt{136}} \\ \frac{8}{\sqrt{136}} \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\bar{\mathbf{x}}_3 = \frac{1}{\sqrt{136}} \begin{bmatrix} 200 \\ 40 \\ 48 \\ 56 \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{x}}_3^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{x}}_3 = \frac{6336}{136}$$

и

$$\mathbf{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{6336}} \begin{bmatrix} 20 \\ 40 \\ 48 \\ 56 \end{bmatrix}.$$

Сравнивая \mathbf{x}_3 с точным решением (см. пример 10.12), мы имеем

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0,251 \\ 0,503 \\ 0,603 \\ 0,704 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \phi_1 = \begin{bmatrix} 0,250 \\ 0,500 \\ 0,602 \\ 0,707 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, проведя только две итерации, мы уже получили удовлетворительную аппроксимацию ϕ_1 .

Соотношения (11.13) и (11.14) дают формулировку основного алгоритма обратной итерации. Однако при фактической реализации алгоритма на компьютере оказывается более эффективным проводить итерации следующим образом. Предполагая, что $\mathbf{y}_1 = \mathbf{M}\mathbf{x}_1$, для $k = 1, 2, \dots$ мы вычисляем

$$\mathbf{K}\bar{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{y}_k, \quad (11.16)$$

$$\bar{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{M}\bar{\mathbf{x}}_{k+1}, \quad (11.17)$$

$$\rho(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}) = \frac{\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^T \mathbf{y}_k}{\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^T \bar{\mathbf{y}}_{k+1}}, \quad (11.18)$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = \frac{\bar{\mathbf{y}}_{k+1}}{(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^T \bar{\mathbf{y}}_{k+1})^{1/2}}, \quad (11.19)$$

где, при условии, что $\mathbf{y}_1^T \phi_1 \neq 0$, имеем $\mathbf{y}_{k+1} \rightarrow \mathbf{M}\phi_1$ и $\rho(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}) \rightarrow \lambda_1$ при $k \rightarrow \infty$. Следует отметить, что в (11.16)–(11.19) мы, по существу, избавляемся от вычисления матричного произведения $\mathbf{M}\mathbf{x}_k$ из (11.13) путем проведения итераций не по \mathbf{x}_k , а по \mathbf{y}_k . Однако значение \mathbf{y}_{k+1} вычисляется при любой из процедур; это значит, что $\bar{\mathbf{y}}_{k+1}$ должно

вычисляться в соответствии с (11.14) и оценивается согласно (11.17). Используя процедуру второй итерации, мы получаем согласно (11.18) аппроксимацию собственного значения λ_1 , заданного с помощью коэффициента Рэлея $\rho(\bar{\mathbf{x}}_{k+1})$. Именно эту аппроксимацию λ_1 удобно использовать для оценки сходимости итераций. Если текущую аппроксимацию λ_1 обозначить через $\lambda_1^{(k+1)}$ (т. е. $\lambda_1^{(k+1)} = \rho(\bar{\mathbf{x}}_{k+1})$), то мы будем оценивать сходимость, используя формулу

$$\frac{|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}|}{\lambda_1^{(k+1)}} \leq \text{допуск}, \quad (11.20)$$

хотя для левой части соотношения (11.20) может быть использовано выражение (10.107); здесь значение *допуска* должно быть равно 10^{-2s} или меньше, если собственное значение λ_1 требуется определить с двузначной точностью. Использование правой части выражения (10.107) предпочтительно, но требует большего объема вычислений, и в общем случае достаточно определить предел ошибки в (10.107) только после того, как выполнено условие (11.20), и вновь начать итерацию, если ошибка представляется слишком большой.

После этого собственный вектор будет иметь значение, точное приблизительно до s знаков или больше (см. текст после выражения (11.33)). Пусть l будет номером последней итерации; тогда мы имеем

$$\lambda_1 \doteq \rho(\bar{\mathbf{x}}_{l+1}) \quad (11.21)$$

и

$$\phi_1 \doteq \frac{\bar{\mathbf{x}}_{l+1}}{(\bar{\mathbf{x}}_{l+1}^T \bar{\mathbf{y}}_{l+1})^{1/2}}. \quad (11.22)$$

Пример 11.2: Воспользуйтесь процедурой обратной итерации, заданной выражениями (11.16)–(11.19) для вычисления приближенных выражений для λ_1 и ϕ_1 , соответствующих задаче о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda \mathbf{M}\phi$, рассмотренной в примере 11.1. Используя значение *допуска* = 10^{-6} (т. е. $s = 3$) в формуле (11.20) для измерения сходимости.

Как и в примере 11.1, мы начинаем итерацию с вектора

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Продолжая так, как это задается соотношениями (11.16)–(11.19), для $k = 1$ мы получаем

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{y}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}; \quad \rho(\bar{\mathbf{x}}_2) = \frac{\bar{\mathbf{x}}_2^T \mathbf{y}_1}{\bar{\mathbf{x}}_2^T \bar{\mathbf{y}}_2} = 0,1470588$$

и

$$\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 0,0 \\ 1,02899 \\ 0,0 \\ 0,68599 \end{bmatrix}.$$

Последующие итерации выполняются таким же образом. Сводка результатов дается в таблице 11.1. Из таблицы видно, что сходимость была достигнута после пяти итераций. Следует отметить, что коэффициент Рэлея $\rho(\bar{\mathbf{x}}_{k+1})$ сходится значительно быстрее, чем вектор $\bar{\mathbf{x}}_{k+1}$ (см. пример 11.3), и сходится сверху к λ_1 . Используя формулы (11.21) и (11.22), мы получаем

$$\lambda_1 \doteq 0,146447; \quad \phi_1 \doteq \begin{bmatrix} 0,25001 \\ 0,50001 \\ 0,60355 \\ 0,70709 \end{bmatrix}.$$

Кроме того, в конце 5-й итерации мы имеем $|\lambda_1^{\text{точн}} - \rho(\bar{\mathbf{x}}_6)|/\lambda_1^{\text{точн}} = 3.14 \times 10^{-9}$, а правая часть в (10.107) равна $1,23 \times 10^{-4}$. Заметим, что в этом случае (10.107) дает существенно завышенную оценку ошибки.

В процессе проведенного выше обсуждения мы просто сформулировали итеративную схему и ее сходимость. После этого мы применили определенный метод на двух примерах, но не дали формального доказательства сходимости. В дальнейшем мы дадим обоснование свойств сходимости, так как верим, что такое доказательство весьма поучительно.

Таблица 11.1.

k	$\bar{\mathbf{x}}_{k+1}$	$\bar{\mathbf{y}}_{k+1}$	$\rho(\bar{\mathbf{x}}_{k+1})$	$\frac{ \lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)} }{\lambda_1^{(k+1)}}$	\mathbf{y}_k
1	3	0	0,1470588	—	0
	6	12			1,02899
	7	0			0
	8	8			0,68599
2	1,71499	0	0,1464646	0,004056795132	0
	3,42997	6,85994			1,00504
	4,11597	0			0
	4,80196	4,80196			0,70353
3	1,70856	0	0,1464471	0,00011953858	0
	3,41713	6,83426			1,00087
	4,12066	0			0
	4,82418	4,82418			0,70649
4	1,70736	0	0,1464466	0,000003518989	0
	3,41472	6,82944			1,00015
	4,12121	0			0
	4,82771	4,82771			0,70700

k	$\bar{\mathbf{x}}_{k+1}$	$\bar{\mathbf{y}}_{k+1}$	$\rho(\bar{\mathbf{x}}_{k+1})$	$\frac{ \lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)} }{\lambda_1^{(k+1)}}$	\mathbf{y}_k
5	1,70715	0	0,1464466	0,000000103589	0
	3,41430	6,82860			1,00003
	4,12130	0			0
	4,82830	4,82830			0,70709

Первый этап доказательства самой сходимости и ее скорости в той форме, как оно дано здесь, оказывается подобным той процедуре, которая использовалась при анализе методов прямого интегрирования (см. раздел 9.4). Фундаментальное уравнение, которое применяется при обратной итерации, — это соотношение (11.13). Пренебрегая масштабированием составляющих вектора итерации, мы в основном используем для $k = 1, 2, \dots$

$$\mathbf{K}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{M}\mathbf{x}_k, \quad (11.23)$$

где утверждали, что \mathbf{x}_{k+1} будет теперь сходиться к величине, пропорциональной ϕ_1 . Чтобы продемонстрировать сходимость, оказывается удобным (как и при анализе процедур с прямым интегрированием) заменить конечно-элементный координатный базис на базис из собственных векторов; а именно, для любого вектора, связанного с процедурой итерации, \mathbf{x}_k , мы можем написать

$$\mathbf{x}_k = \Phi \mathbf{z}_k, \quad (11.24)$$

где Φ — это матрица собственных векторов, $\Phi = [\phi_1, \dots, \phi_n]$. Следует иметь в виду, что, в силу отсутствия особенности у матрицы Φ , каждому вектору \mathbf{x}_k соответствует единственный вектор \mathbf{z}_k . Подставляя выражения для \mathbf{x}_k и \mathbf{x}_{k+1} из (11.24) в (11.23), умножая на Φ^T и используя соотношения ортогональности $\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Lambda$ и $\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I}$, мы получаем

$$\Lambda \mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k, \quad (11.25)$$

где $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$. Сравнивая (11.25) и (11.23), мы обнаруживаем, что итерации имеют одну и ту же форму при $\mathbf{K} = \Lambda$ и $\mathbf{M} = \mathbf{I}$. Можно выразить недоумение по поводу возможности использования преобразования (11.24) несмотря на то, что матрица Φ неизвестна. Однако следует отдавать себе отчет в том, что указанное преобразование применяется только для того, чтобы исследовать сходимость обратной итерации. А именно, в силу того, что *теоретически* соотношение (11.25) эквивалентно соотношению (11.23), свойства сходимости (11.25) являются такими же свойствами для (11.23). Однако характеристики сходимости, соответствующие (11.25), исследовать сравнительно просто, так как собственные значения являются диагональными элементами матрицы Λ , а сами собственные векторы представляют собой единичные векторы \mathbf{e}_i , где

$$\mathbf{e}_i^T = [0 \quad \dots \quad 0 \quad \overset{\substack{\text{---} \\ \downarrow \\ i\text{-е положение}}}{1} \quad 0 \quad \dots \quad 0]. \quad (11.26)$$

При представлении алгоритмов обратной итерации, задаваемых посредством (11.13) и (11.14), а также (11.16)–(11.22), мы утверждали, что вектор начальной итерации \mathbf{x}_1 не должен быть ортонормирован по отношению к ϕ_1 со включением \mathbf{M} . Совершенно так же, в (11.25) вектор итерации \mathbf{z}_1 не должен быть ортогонален по отношению к \mathbf{e}_1 . Предположим, что мы применяем

$$\mathbf{z}_1^T = [1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]. \quad (11.27)$$

Эффект этого допущения обсуждается в разделе 11.2.6. После этого, используя (11.25) при $k = 1, \dots, l$, мы получим

$$\mathbf{z}_{l+1}^T = \left[\left(\frac{1}{\lambda_1} \right)^l \left(\frac{1}{\lambda_2} \right)^l \dots \left(\frac{1}{\lambda_n} \right)^l \right]. \quad (11.28)$$

Предположим вначале, что $\lambda_1 < \lambda_2$. Желая показать, что \mathbf{z}_{l+1} сходится к величине, пропорциональной \mathbf{e}_1 , при $l \rightarrow \infty$, мы умножаем \mathbf{z}_{l+1} в (11.28) на $(\lambda_1)^l$, чтобы получить

$$\bar{\mathbf{z}}_{l+1} = \begin{bmatrix} 1 \\ (\lambda_1/\lambda_2)^l \\ \vdots \\ (\lambda_1/\lambda_n)^l \end{bmatrix} \quad (11.29)$$

и установить, что $\bar{\mathbf{z}}_{l+1}$ сходится к \mathbf{e}_1 , когда $l \rightarrow \infty$. Следовательно, \mathbf{z}_{l+1} сходится к величине, пропорциональной \mathbf{e}_1 , когда $l \rightarrow \infty$.

Чтобы оценить порядок и скорость сходимости, используем ее определение, данное в разделе 2.7. Для итерации рассматриваемого здесь вида мы получаем

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\|\bar{\mathbf{z}}_{l+1} - \mathbf{e}_1\|_2}{\|\bar{\mathbf{z}}_l - \mathbf{e}_1\|_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \quad (11.30)$$

Отсюда следует, что *сходимость является линейной, а скорость сходимости равна λ_1/λ_2* . Эта скорость сходимости просматривается также и для вектора итерации $\bar{\mathbf{z}}_{l+1}$ в (11.29); значит, те составляющие вектора итерации, которые должны устремляться к нулю, осуществляют это со скоростью не меньше, чем λ_1/λ_2 , в каждой дополнительной итерации. Таким образом, если $\lambda_2 > \lambda_1$, то именно величина отношения λ_1 к λ_2 определяет собой, насколько быстро вектор итерации сходится к собственному вектору ϕ_1 .

В процессе этого обсуждения мы предположили, что $\lambda_1 < \lambda_2$. Рассмотрим теперь случай кратного собственного значения, а именно, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m$. Тогда по формуле (11.29) мы получаем

$$\bar{\mathbf{z}}_{l+1}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{m+1}} \right)^l & \dots & \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n} \right)^l \end{bmatrix}, \quad (11.31)$$

и скорость сходимости вектора итераций — это λ_1/λ_{m+1} . Поэтому, в общем, скорость сходимости вектора итераций при осуществлении обратной итерации выражается через отношение λ_1 к следующему отличному от него собственному значению.

В итерации, заданной соотношениями (11.16)–(11.22), мы получаем аппроксимацию собственного значения λ_1 путем вычисления коэффициента Рэлея. В соответствии с (11.18) коэффициент Рэлея, вычисляемый при итерациях (11.25), был бы равен

$$\rho(\mathbf{z}_{k+1}) = \frac{\mathbf{z}_{k+1}^T \mathbf{z}_k}{\mathbf{z}_{k+1}^T \mathbf{z}_{k+1}}. \quad (11.32)$$

Предположим, что рассматриваем последнюю итерацию, когда $k = l$. В этом случае, подставляя выражения для \mathbf{z}_l и \mathbf{z}_{l+1} из (11.28) в формулу (11.32), мы получаем

$$\rho(\mathbf{z}_{l+1}) = \frac{\lambda_1 \sum_{i=1}^n (\lambda_1/\lambda_i)^{2l-1}}{\sum_{i=1}^n (\lambda_1/\lambda_i)^{2l}}. \quad (11.33)$$

Следовательно, для λ_1 , являющегося простым или кратным собственным значением, мы имеем $\rho(\mathbf{z}_{l+1}) \rightarrow \lambda_1$ при $l \rightarrow \infty$. Кроме того, сходимость оказывается линейной, со скоростью $(\lambda_1/\lambda_{m+1})^2$, где λ_{m+1} определяется так же, как и в (11.31). Это выражение для скорости сходимости подтверждает наблюдение о том, что если собственный вектор известен с ошибкой ϵ , то коэффициент Рэлея дает аппроксимацию соответствующего собственного значения с ошибкой ϵ^2 (см. раздел 2.6).

Прежде чем продемонстрировать результаты с помощью краткого примера, необходимо напомнить, что при описанном выше анализе мы предполагали начальный вектор имеющим форму полного единичного вектора, не ортогонального по отношению

к интересующему нас собственному вектору, однако при многих вариантах практического анализа скорости сходимости могут быть выявлены только при большом числе проведенных итераций. То же самое наблюдение относится и к любому из других вариантов анализа сходимости, представленных в последующих разделах. В разделе 11.2.6 мы обсудим это наблюдение вместе с другими важными практическими аспектами.

Пример 11.3: Применительно к задаче, рассмотренной в примере 11.2, рассчитайте окончательные значения скоростей сходимости вектора итераций и коэффициента Рэлея. Сравните окончательные значения скоростей сходимости с теми значениями, которые фактически были зафиксированы при обратной итерации, проведенной в примере 11.2.

Для оценки теоретических значений скорости сходимости нам нужно знать λ_1 и λ_2 . Мы рассчитали эти значения в примере 10.12 и нашли

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Следовательно, окончательное значение скорости сходимости вектора итераций равно

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 0,17,$$

а окончательное значение скорости сходимости коэффициента Рэлея равно

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2 = 0,029.$$

Сходимость вектора итераций, наблюдаемая в реальности, получается путем вычисления отношения r_{k+1} , $k = 1, 2, \dots$, где

$$r_{k+1} = \frac{\|\mathbf{x}_{k+1} - \phi_1\|_2}{\|\mathbf{x}_k - \phi_1\|_2},$$

причем мы предполагаем, что ϕ_1 определен в последней итерации (см. (11.22)).

Таким образом, для итерации из примера 11.2 мы получаем $r_2 = 0,028768$; $r_3 = 0,170559$; $r_4 = 0,167134$; $r_5 = 0,144251$. Если проигнорировать значение r_2 , соответствующее только что начавшемуся процессу итерации, то мы видим, что теоретические и практические значения скорости сходимости хорошо согласуются между собой.

Аналогично этому, фактическая сходимость коэффициента Рэлея, рассчитанного в примере 11.2, определяется путем вычисления

$$\epsilon_{k+1} = \frac{|\rho(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}) - \lambda_1|}{|\rho(\bar{\mathbf{x}}_k) - \lambda_1|},$$

где в качестве λ_1 используется сошедшееся значение коэффициента Рэлея. При итерации, выполненной в примере 11.2, мы получаем $\epsilon_3 = 0,28768$; $\epsilon_4 = 0,027778$; $\epsilon_5 = 0$.

Следовательно, мы видим, что, опять-таки, теоретические и наблюдаемые значения скорости сходимости для этого решения хорошо согласуются.

11.2.2. Итерация вперед

Метод итерации вперед дополняет метод обратной итерации в том, что он позволяет определить собственный вектор, соответствующий наибольшему собственному значению. Если при описании метода обратной итерации мы предполагали, что \mathbf{K} является положительно определенной матрицей, то в данном разделе мы предполагаем, что матрица \mathbf{M} — положительно определенная; если это не так, то необходимо использовать сдвиг (см. раздел 11.2.3). Сделав выбор начального вектора итерации \mathbf{x}_1 , при применении итерации вперед мы вычисляем для $k = 1, 2, \dots$

$$\mathbf{M}\bar{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{K}\mathbf{x}_k \quad (11.34)$$

и

$$\mathbf{x}_{k+1} = \frac{\bar{\mathbf{x}}_{k+1}}{(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{x}}_{k+1})^{1/2}}. \quad (11.35)$$

При выполнении того условия, что вектор \mathbf{x}_1 не является ортонормированным по отношению к ϕ_n со включением \mathbf{M} , мы имеем $\mathbf{x}_{k+1} \rightarrow \phi_n$ при $k \rightarrow \infty$.

Следует отметить аналогию рассматриваемого метода с методом обратной итерации; единственная разница между этими двумя методами состоит в том, что для получения улучшенного собственного вектора мы решаем не соотношения (11.13), а соотношения (11.34). На практике это означает, что, используя метод обратной итерации, мы приводим матрицу \mathbf{K} к треугольной форме, а при применении итерации вперед мы подвергаем матрицу \mathbf{M} разложению.

Более эффективная процедура итерации вперед, чем та, которая основывается на соотношениях (11.34) и (11.35), могла бы быть построена при использовании уравнений, аналогичных (11.16)–(11.22). Полагая, что $\mathbf{y}_1 = \mathbf{K}\mathbf{x}_1$, для $k = 1, 2, \dots$ запишем соотношения

$$\mathbf{M}\bar{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{y}_k, \quad (11.36)$$

$$\bar{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{K}\bar{\mathbf{x}}_{k+1}, \quad (11.37)$$

$$\rho(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}) = \frac{\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^T \bar{\mathbf{y}}_{k+1}}{\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^T \mathbf{y}_k}, \quad (11.38)$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = \frac{\bar{\mathbf{y}}_{k+1}}{(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^T \mathbf{y}_k)^{1/2}}, \quad (11.39)$$

где, при условии, что $\phi_n^T \mathbf{y}_1 \neq 0$, имеем $\mathbf{y}_{k+1} \rightarrow \mathbf{K}\phi_n$ и $\rho(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}) \rightarrow \lambda_n$ при $k \rightarrow \infty$.

Сходимость итераций могла бы вновь измениться так, как это показано в (11.20), и, обозначая символом l последнюю итерацию, мы получаем

$$\lambda_n \doteq \rho(\bar{\mathbf{x}}_{l+1}) \quad (11.40)$$

и

$$\phi_n \doteq \frac{\bar{\mathbf{x}}_{l+1}}{(\bar{\mathbf{x}}_{l+1}^T \mathbf{y}_l)^{1/2}}. \quad (11.41)$$

Если говорить об анализе сходимости вектора итераций к ϕ_n , то этот анализ может быть выполнен с помощью той же процедуры, которая использовалась при оценке характеристик сходимости обратной итерации. В качестве альтернативы мы можем использовать результаты, полученные нами при анализе обратной итерации. А именно, предположим, что мы записываем задачу о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ в форме $\mathbf{M}\phi = \lambda^{-1}\mathbf{K}\phi$; тогда использование обратной итерации с целью построения решения для собственного вектора и соответствующего собственного значения оказывается эквивалентным выполнению итерации вперед для задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$. Однако с учетом того, что при обратной итерации согласно (11.16)–(11.22) мы добиваемся сходимости к наименьшему собственному значению и соответствующему собственному вектору, а также учитывая, что для задачи $\mathbf{M}\phi = \lambda^{-1}\mathbf{K}\phi$ это собственное значение равно λ_n^{-1} , где λ_n — это наибольшее собственное значение для $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, то при итерации вперед согласно (11.36)–(11.41) достигается сходимость к λ_n и ϕ_n , а скорость сходимости вектора итераций равна λ_{n-1}/λ_n . Мы должны отметить, что коэффициент Рэля, вычисляемый согласно (11.38), равен $\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^T \mathbf{K}\bar{\mathbf{x}}_{k+1} / \bar{\mathbf{x}}_{k+1}^T \mathbf{M}\bar{\mathbf{x}}_{k+1}$, то есть как раз величине, обратной коэффициенту Рэля для расчета приближенного значения λ_n^{-1} применительно к задаче $\mathbf{M}\phi = \lambda^{-1}\mathbf{K}\phi$.

Сам процесс осуществления итерации и оценка ее сходимости демонстрируются на следующем примере.

Пример 11.4: Используйте итерацию вперед на основе соотношений (11.36)–(11.41) со значением *допуск* = 10^{-6} в формуле (11.20), чтобы вычислить λ_4 и ϕ_4 для задачи о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, где

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Рассматриваемая в этом примере физическая задача сводится к определению реакции в форме свободных колебаний просто опертой балки, показанной на рис. 8.1 с представленной выше матрицей масс.

Начиная итерацию с вектора

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

мы вычисляем с помощью обратной итерации значения, сводка которых дается в табл. 11.2.

Как следует из таблицы, нам нужно провести 10 итераций при допуске для сходимости, определяемом согласно (11.20) и равном 10^{-6} , и тогда мы используем, в соответствии с (11.40) и (11.41),

$$\lambda_4 \doteq 10,63845; \quad \phi_4 \doteq \begin{bmatrix} -0,10731 \\ 0,25539 \\ -0,72827 \\ 0,56227 \end{bmatrix}.$$

После 10-й итерации, сравнивая прогнозируемое значение λ_4 с точным значением, мы имеем

$$\frac{|\lambda_4^{\text{точн}} - \rho(\bar{\mathbf{x}}_{11})|}{\lambda_4^{\text{точн}}} = 1,92 \times 10^{-7}.$$

Кроме того, правая часть соотношения (10.107) дает $5,24 \times 10^{-4}$.

Таблица 11.2.

k	$\bar{\mathbf{x}}_{k+1}$	$\bar{\mathbf{y}}_{k+1}$	$\rho(\bar{\mathbf{x}}_{k+1})$	\mathbf{y}_{k+1}	$\frac{ \lambda_4^{(k+1)} - \lambda_4^{(k)} }{\lambda_4^{(k+1)}}$
1	1	6	5,93333	2,1909	—
	−0,5	−1		−0,3651	
	−1	−11		−4,0166	
	2	13,5		4,9295	
2	1,0954	2,1909	8,57887	0,3345	0,3084
	−0,1826	15,5188		2,3694	
	−4,0166	−41,9921		−6,4112	
	4,9295	40,5315		6,1882	

Продолжение таблицы 11.2

k	$\bar{\mathbf{x}}_{k+1}$	$\bar{\mathbf{y}}_{k+1}$	$\rho(\bar{\mathbf{x}}_{k+1})$	\mathbf{y}_{k+1}	$\frac{ \lambda_4^{(k+1)} - \lambda_4^{(k)} }{\lambda_4^{(k+1)}}$
3	0,1672	-10,3137	10,15966	-1,1372	0,1556
	1,1847	38,2720		4,2198	
	-6,4112	-67,7914		-7,4745	
	6,1882	57,7704		6,3696	
8	-1,1285	-24,2083	10,63838	-2,2756	0,00003304
	2,7044	57,7298		5,4267	
	-7,7481	-82,4222		-7,7478	
	5,9969	63,6811		5,9861	
9	-1,1378	-24,2902	10,63844	-2,2833	0,000005584
	2,7133	57,8086		5,4340	
	-7,7478	-82,4224		-7,7476	
	5,9861	63,6351		5,9816	
10	-1,1416	-24,3237	10,63845	-2,2864	0,0000009437
	2,7170	57,8405		5,4369	
	-7,7476	-82,4219		-7,7476	
	5,9816	63,6157		5,9798	

11.2.3. Проведение сдвига при векторной итерации

Представленный в разделе 11.2.1 анализ сходимости при обратной итерации показал, что в предположении $\lambda_1 < \lambda_2$ вектор итераций сходится к собственному вектору ϕ_1 со скоростью λ_1/λ_2 . Поэтому, в зависимости от величины λ_1 и λ_2 , скорость сходимости может оказаться сколь угодно низкой, например, $\lambda_1/\lambda_2 = 0,01$, или очень высокой, например, $\lambda_1/\lambda_2 = 0,99999$. Аналогично этому, при итерации вперед скорость сходимости может быть как низкой, так и высокой. В связи с этим должен возникнуть естественный вопрос о том, как улучшить скорость сходимости при векторных итерациях. В этом разделе мы показываем, что скорость сходимости может быть значительно улучшена путем проведения сдвига. Кроме того, сдвиг можно использовать для достижения сходимости применительно к собственным парам, отличным от (λ_1, ϕ_1) и (λ_n, ϕ_n) , при обратных итерациях и итерациях вперед соответственно; сдвиг эффективно применяется при обратной итерации, когда

матрица \mathbf{K} — положительно полуопределена, и при итерации вперед, когда матрица \mathbf{M} — диагональная, с несколькими нулевыми диагональными элементами (см. пример 11.6).

Предположим, что сдвиг μ применяется так, как это описано в разделе 10.2.3; тогда мы рассматриваем задачу о собственных значениях

$$(\mathbf{K} - \mu\mathbf{M})\phi = \eta\mathbf{M}\phi, \quad (11.42)$$

где собственные значения исходной задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ и задачи (11.42) связаны между собой соотношениями $\eta_i = \lambda_i - \mu$, $i = 1, \dots, n$. Чтобы проанализировать свойства сходимости обратной итерации и итерации вперед применительно к задаче (11.42), мы во всех деталях следуем процедуре, использованной в разделе 11.2.1. Первый этап состоит в том, чтобы рассмотреть задачу в базисе собственных векторов Φ . Пользуясь преобразованием

$$\phi = \Phi\psi, \quad (11.43)$$

мы получаем для анализа сходимости эквивалентную задачу о собственных значениях

$$(\mathbf{A} - \mu\mathbf{I})\psi = \eta\psi. \quad (11.44)$$

Рассмотрим вначале обратную итерацию и предположим, что все собственные значения различны. В этом случае мы получим, используя обозначения, введенные в разделе 11.2.1,

$$\mathbf{z}_{l+1}^T = \left[\frac{1}{(\lambda_1 - \mu)^l} \frac{1}{(\lambda_2 - \mu)^l} \cdots \frac{1}{(\lambda_n - \mu)^l} \right], \quad (11.45)$$

где предполагается, что все $\lambda_i - \mu$ отличны от нуля, хотя они могут быть как положительными, так и отрицательными. Предположим, что значение $\lambda_i - \mu$ является наименьшим по абсолютной величине, когда $i = j$; тогда, умножая \mathbf{z}_{l+1} на $(\lambda_j - \mu)^l$, мы получим

$$\bar{\mathbf{z}}_{l+1} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\lambda_j - \mu}{\lambda_1 - \mu} \right)^l \\ \vdots \\ \left(\frac{\lambda_j - \mu}{\lambda_{j-1} - \mu} \right)^l \\ 1 \\ \left(\frac{\lambda_j - \mu}{\lambda_{j+1} - \mu} \right)^l \\ \vdots \\ \left(\frac{\lambda_j - \mu}{\lambda_n - \mu} \right)^l \end{bmatrix}, \quad (11.46)$$

где $|(\lambda_j - \mu)/(\lambda_p - \mu)| < 1$ для всех $p \neq j$. Следовательно, при этой итерации мы имеем $\bar{\mathbf{z}}_{l+1} \rightarrow \mathbf{e}_j$, а это означает, что при применении обратной итерации для решения (11.42) вектор итерации сходится к ϕ_j . Более того, мы получаем $\lambda_j = \eta_j + \mu$. Скорость сходимости определяется той составляющей вектора (11.46), т.е. $(\lambda_j - \mu)/(\lambda_p - \mu)$, которая является наибольшей по абсолютной величине, $p \neq j$; т.е. скорость сходимости r равна

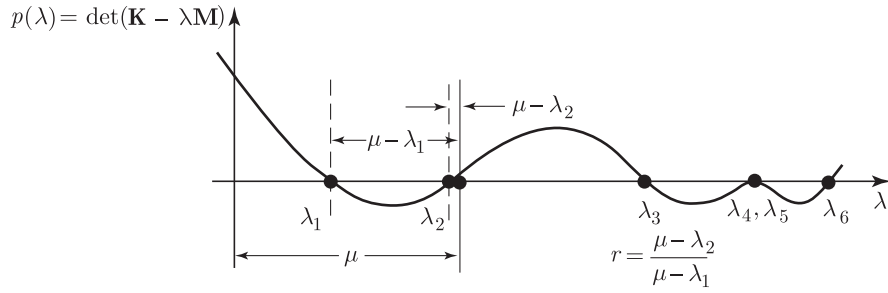
$$r = \max_{p \neq j} \left| \frac{\lambda_j - \mu}{\lambda_p - \mu} \right|. \quad (11.47)$$

Учитывая, что значение λ_j ближе других к μ , скорость сходимости вектора итераций для (11.42) к собственному значению ϕ_j равна одной из двух величин,

$$\left| \frac{\lambda_j - \mu}{\lambda_{j-1} - \mu} \right| \quad \text{или} \quad \left| \frac{\lambda_j - \mu}{\lambda_{j+1} - \mu} \right|$$

в зависимости от того, которое из значений больше. Скорость сходимости для типичного случая показана на рис. 11.1.

При использовании результатов описанного выше анализа сходимости и анализа результатов обратной итерации без сдвига (см. раздел 11.2.1) мы приходим к двум

Рис. 11.1. Пример изменения скорости векторной сходимости r при обратной итерации

дополнительным выводам. Во-первых, мы видим, что скорость сходимости коэффициента Рэлея, который при μ , ближайшем к λ_j , сходится к $\lambda_j - \mu$, равна

$$\left| \frac{\lambda_j - \mu}{\lambda_{j-1} - \mu} \right|^2 \quad \text{или} \quad \left| \frac{\lambda_j - \mu}{\lambda_{j+1} - \mu} \right|^2,$$

в зависимости от того, которое из значений больше.

Второе наблюдение относится к тому случаю, когда λ_j является кратным собственным значением. Анализ, проведенный в разделе 11.2.1, и выводы, сделанные выше, свидетельствуют о том, что если $\lambda_j = \lambda_{j+1} = \dots = \lambda_{j+m-1}$, то скорость сходимости вектора итераций равна

$$\max_{p \neq j, j+1, \dots, j+m-1} \left| \frac{\lambda_j - \mu}{\lambda_p - \mu} \right|,$$

и сходимость реализуется по отношению к вектору в подпространстве, соответствующем λ_j .

При проведении обратной итерации со сдвигом важная особенность состоит в том, что за счет вектора сдвига, достаточно близкого к интересующему нас конкретному собственному значению, мы можем, теоретически, получить такую высокую скорость сходимости, как это потребуется; это значит, что нам следует лишь сделать величину $|\lambda_j - \mu|$ достаточно малой в сравнении с определенной выше величиной $|\lambda_p - \mu|$. Однако трудность, возникающая при построении реальной схемы решения, состоит в том, как найти надлежащее значение μ , и в следующих разделах мы рассмотрим различные методы преодоления этой трудности.

Пример 11.5: Используйте метод обратной итерации, заданный соотношениями (11.16)–(11.22), чтобы вычислить пару (λ_1, ϕ_1) для задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, где матрицы \mathbf{K} и \mathbf{M} заданы в примере 11.4. Затем введите сдвиг $\mu = 10$ и покажите, что в процессе обратной итерации сходимость осуществляется в направлении λ_4 и ϕ_4 .

Использование обратной итерации для задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, как это сделано в примере 11.2, дает сходимость после трех итераций с допуском, равным 10^{-6} :

$$\lambda_1 \doteq 0,09654; \quad \phi_1 \doteq \begin{bmatrix} 0,3126 \\ 0,4955 \\ 0,4791 \\ 0,2898 \end{bmatrix}.$$

Вводя после этого сдвиг $\mu = 10$, мы получаем

$$\mathbf{K} - \mu\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -15 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & -14 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \end{bmatrix}.$$

Использование обратной итерации применительно к задаче $(\mathbf{K} - \mu\mathbf{M})\phi = \eta\mathbf{M}\phi$ приводит к сходимости после шести итераций, со значениями

$$\rho(\bar{\mathbf{x}}_7) = 0,6385; \quad \mathbf{x}_7 = \begin{bmatrix} -0,1076 \\ 0,2556 \\ -0,7283 \\ 0,5620 \end{bmatrix}.$$

При учете того, что мы ввели сдвиг, нам известно, что $\mu + \rho(\bar{\mathbf{x}}_7)$ представляет собой аппроксимацию собственного значения, а \mathbf{x}_7 является аппроксимацией соответствующего собственного вектора. Мы не знаем, однако, какая именно собственная пара была аппроксимирована. Сравнивая \mathbf{x}_7 с результатами, полученными в примере 11.4, мы находим, что

$$\lambda_4 \doteq \mu + \rho(\mathbf{x}_7) \doteq 10,6385; \quad \phi_4 \doteq \mathbf{x}_7.$$

Пример 11.6: Рассмотрите элемент в форме безопорной балки, изображенный на рис. 8.16. Покажите, что обычный алгоритм обратной итерации, предназначенный для расчета λ_1 и ϕ_1 , здесь не работает, но что после введения сдвига стандартный алгоритм может быть вновь применен.

При обратной итерации ее первый этап, определяемый согласно (9.16), в данном случае, при $\mathbf{M} = \mathbf{I}$ и при \mathbf{x}_1 в форме полного единичного вектора, можно записать как

$$\begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 \\ -6 & 4 & 6 & 2 \\ -12 & 6 & 12 & 6 \\ -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{a})$$

Используя исключение по Гауссу для решения уравнений, мы приходим к соотношению

$$\begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 \\ & 1 & 0 & -1 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 2 \\ 7/2 \end{bmatrix}$$

и, следовательно, уравнения (a) решения не имеют. Они имеют решение только в том случае, когда правая часть (т. е. \mathbf{x}_1 согласно (11.16)) является нулевым вектором. Модификация процедуры решения не вызывала бы затруднений, если бы мы имели дело с особой матрицей коэффициентов, причем выявилось бы то преимущество, что собственный вектор вычислялся бы за одну итерацию. С другой стороны, если мы вводим сдвиг, то мы можем использовать стандартную процедуру итераций и избежать проблем устойчивости при вычислении других собственных значений и собственных векторов. Предположим, что мы принимаем $\mu = -6$, так что все λ_i оказываются положительными. Тогда имеем

$$\mathbf{K} - \mu\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 18 & -6 & -12 & -6 \\ -6 & 10 & 6 & 2 \\ -12 & 6 & 18 & 6 \\ -6 & 2 & 6 & 10 \end{bmatrix}.$$

Теперь может быть стандартным образом осуществлена обратная итерация с использованием полного единичного вектора начальной итерации. Сходимость достигается после пяти итераций при допуске, равном 10^{-6} , и мы получаем

$$\rho(\bar{\mathbf{x}}_6) = 6,000000; \quad \mathbf{x}_6 = \begin{bmatrix} 0,73784 \\ 0,42165 \\ 0,31625 \\ 0,42165 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, принимая во внимание сдвиг, мы имеем

$$\lambda_1 \doteq 0,0; \quad \phi_1 \doteq \mathbf{x}_6.$$

Ранее мы уже показали, что скорость сходимости при применении метода обратной итерации может быть намного увеличена с помощью сдвига. Теперь мы можем задать себе вопрос, может ли скорость сходимости увеличена подобным же образом и при применении метода итерации вперед? По аналогии с доказательством сходимости обратной итерации со сдвигом мы можем обобщить анализ сходимости итерации вперед на тот случай, когда вводится сдвиг μ . Конечным результатом этого анализа будет то, что вектор итераций сходится к собственному вектору ϕ_j , соответствующему наибольшему собственному значению $|\lambda_j - \mu|$ задачи (11.42), где

$$|\lambda_j - \mu| = \max_{\text{все } i} |\lambda_i - \mu|. \quad (11.48)$$

Скорость сходимости вектора итераций выражается по формуле

$$r = \max_{p \neq j} \left| \frac{\lambda_p - \mu}{\lambda_j - \mu} \right|, \quad (11.49)$$

которая, фактически, выражает собой отношение второго наибольшего собственного значения к наибольшему собственному значению (при этом оба значения измеряются в абсолютных величинах) задачи $(\mathbf{K} - \mu)\phi = \eta \mathbf{M}\phi$. В том случае, когда λ_j является кратным собственным значением, скажем, $\lambda_j = \lambda_{j+1} = \dots = \lambda_{j+m-1}$, вектор итераций сходится к вектору в подпространстве, соответствующем λ_j , а скорость сходимости равна

$$\max_{p \neq j, j+1, \dots, j+m-1} \left| \frac{\lambda_p - \mu}{\lambda_j - \mu} \right|.$$

Главное различие между скоростями сходимости, определяемыми по формулам (11.47) и (11.49), состоит в том, что в (11.47) λ_p стоит в знаменателе, тогда как в (11.49) λ_p находится в числителе. Этим ограничивается скорость сходимости при итерации вперед и за счет применения сдвига сходимость может быть достигнута только применительно к собственной паре (λ_n, ϕ_n) или к собственной паре (λ_1, ϕ_1) . Для того, чтобы достичь наивысших скоростей сходимости для ϕ_n и ϕ_1 , необходимо выбирать $\mu = (\lambda_1 + \lambda_{n-1})/2$ и $\mu = (\lambda_2 + \lambda_n)/2$, соответственно, и получить соответствующие скорости сходимости,

$$\left| \frac{\lambda_{n-1} - \frac{\lambda_1 + \lambda_{n-1}}{2}}{\lambda_n - \frac{\lambda_1 + \lambda_{n-1}}{2}} \right| \quad \text{и} \quad \left| \frac{\lambda_2 - \frac{\lambda_2 + \lambda_n}{2}}{\lambda_1 - \frac{\lambda_2 + \lambda_n}{2}} \right|$$

(см. рис. 11.2). Поэтому при использовании обратной итерации может быть получена значительно более высокая скорость сходимости, чем при использовании итерации вперед. По этой причине, а также потому, что сдвиг можно выбирать для обеспечения сходимости к любой собственной паре, обратная итерация при практическом анализе оказывается значительно более важной, и в представляемых в дальнейшем алгоритмах для всех тех случаев, когда требуется применить векторную итерацию, мы всякий раз используем обратную итерацию.

11.2.4. Итерация для коэффициента Рэлея

Как показало обсуждение в разделе 11.2.3, скорость сходимости при использовании обратной итерации может быть значительно улучшена за счет введения сдвига. На практике имеют место затруднения, связанные с выбором надлежащего значения сдвига. Одна из возможностей преодолеть такие затруднения состоит в том, чтобы в качестве значения сдвига использовать коэффициент Рэлея, вычисляемый согласно (11.18) и являющийся аппроксимацией искомого собственного значения. Если на каждой итерации по формуле (11.18) вычисляется новое значение сдвига, то мы имеем итерацию для коэффициента Рэлея (см. работу [Ostrowski, 1958]). При проведении этой процедуры мы предполагаем заданным некое начальное значение вектора итераций \mathbf{x}_1 и, следовательно, $\mathbf{y}_1 = \mathbf{M}\mathbf{x}_1$, начальный сдвиг $\rho(\bar{\mathbf{x}}_1)$, который обычно равен нулю, а затем для $k = 1, 2, \dots$ вычислить:

$$[\mathbf{K} - \rho(\bar{\mathbf{x}}_k)\mathbf{M}]\bar{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{y}_k, \quad (11.50)$$

$$\bar{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{M}\bar{\mathbf{x}}_{k+1}, \quad (11.51)$$

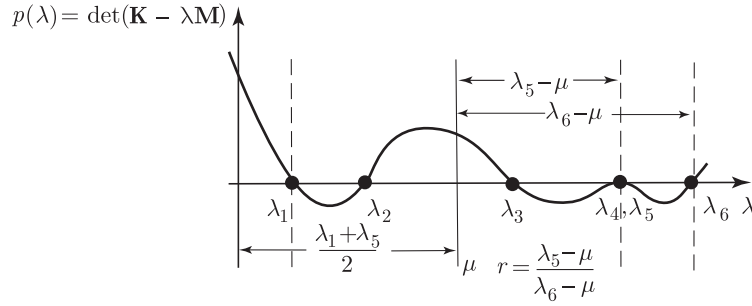


Рис. 11.2. Сдвиг для получения наилучшей скорости сходимости r при итерации вперед для λ_0 (λ_0 — наибольшее собственное значение)

$$\rho(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}) = \frac{\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^T \mathbf{y}_k}{\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^T \bar{\mathbf{y}}_{k+1}} + \rho(\bar{\mathbf{x}}_k), \quad (11.52)$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = \frac{\bar{\mathbf{y}}_{k+1}}{(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^T \bar{\mathbf{y}}_{k+1})^{1/2}}, \quad (11.53)$$

где теперь $\mathbf{y}_{k+1} \rightarrow \mathbf{M}\phi_i$ и $\rho(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}) \rightarrow \lambda_i$ при $k \rightarrow \infty$.

То собственное значение λ_i и тот соответствующий собственный вектор ϕ_i , к которым сходятся итерации, зависят от начального вектора итераций \mathbf{x}_1 и начального сдвига $\rho(\bar{\mathbf{x}}_1)$. Если вектор \mathbf{x}_1 имеет сильные компоненты некоторого собственного вектора, например, ϕ_k , а $\rho(\bar{\mathbf{x}}_2)$ обеспечивает достаточно близкий сдвиг к соответствующему собственному значению λ_k , то данная итерация сходится к собственной паре (λ_k, ϕ_k) , и окончательный порядок сходимости как для λ_k , так и для ϕ_k , оказывается кубическим. Следовательно, на практике нам требуется обеспечить, чтобы вектор \mathbf{x}_1 оказался приемлемо близок к интересующему нас собственному вектору, и в этих условиях *сходимость всегда будет кубической*. Этот отличный характер поведения в связи со сходимостью является результатом чрезвычайно важного наблюдения. Мы можем интуитивно объяснить такой характер тем фактом, что при обратной итерации вектор сходится по линейному закону, и при ошибке в определении вектора, имеющей порядок ϵ , коэффициент Рэля предсказывает собственное значение с ошибкой порядка ϵ^2 . Принимая во внимание, что приближенное собственное значение, используемое в качестве сдвига, оказывает прямое влияние на то, как будет аппроксимирован собственный вектор, а также и наличие обратного влияния, представляется вполне вероятным, что при итерации коэффициента Рэля порядок сходимости будет кубическим как для собственного значения, так и для собственного вектора.

Желая проанализировать характеристики сходимости итераций для коэффициента Рэля, мы можем действовать таким же образом, как и при анализе обратной итерации; иначе говоря, мы рассматриваем итерацию в базисе собственных векторов. В этом случае мы используем преобразование, соответствующее (11.24), и записываем два основных уравнения итерации для коэффициента Рэля (т. е. уравнения (11.50) и (11.52)) в следующей форме:

$$[\Lambda - \rho(\mathbf{z}_k)\mathbf{I}]\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k, \quad (11.54)$$

$$\rho(\mathbf{z}_{k+1}) = \frac{\mathbf{z}_{k+1}^T \mathbf{z}_k}{\mathbf{z}_{k+1}^T \mathbf{z}_{k+1}} + \rho(\mathbf{z}_k), \quad (11.55)$$

где нормализация длины вектора итераций не была учтена.

Чтобы рассмотреть характеристики сходимости вектора итераций, проведем приближенный анализ сходимости, дающий возможность понять работу соответствующего алгоритма. Будем предполагать, что текущий вектор итераций \mathbf{z}_l уже близок к собственному вектору \mathbf{e}_1 ; другими словами, что мы имеем

$$\mathbf{z}_l^T = [1 \quad o(\epsilon) \quad o(\epsilon) \quad \dots \quad o(\epsilon)], \quad (11.56)$$

где символ $o(\epsilon)$ означает «имеет порядок ϵ », причем $\epsilon \ll 1$. Тогда мы получаем

$$\rho(\mathbf{z}_l) = \lambda_1 + o(\epsilon^2). \quad (11.57)$$

Разрешая (11.54) относительно \mathbf{z}_{l+1} , мы имеем, таким образом,

$$\mathbf{z}_{l+1}^T = \left[\frac{1}{o(\epsilon^2)} \frac{o(\epsilon)}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdots \frac{o(\epsilon)}{\lambda_n - \lambda_1} \right]. \quad (11.58)$$

Чтобы выявить сходимость вектора итераций, мы нормализуем с приведением к 1 первую составляющую вектора \mathbf{z}_{l+1} , получая в результате

$$\bar{\mathbf{z}}_{l+1}^T = [1 \quad o(\epsilon^3) \quad o(\epsilon^3) \quad \dots \quad o(\epsilon^3)]. \quad (11.59)$$

Следовательно, те компоненты, которые у $\bar{\mathbf{z}}_l$ имели порядок ϵ , имеют теперь порядок ϵ^3 , а это указывает на сходимость по кубическому закону.

Рассмотрим следующий пример, чтобы продемонстрировать характеристики итерации для коэффициента Рэля.

Пример 11.7: Выполните итерацию коэффициента Рэля для задачи $\mathbf{A}\phi = \lambda\phi$, где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

В качестве векторов начальной итерации используйте векторы

$$(1) \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad (2) \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,1 \end{bmatrix}.$$

Используя соотношения (11.50)–(11.53) [при $\rho(\bar{\mathbf{x}}_1) = 0,0$], мы получаем, для случая 1,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_2 &= \begin{bmatrix} 0,500 \\ 0,166667 \end{bmatrix}; \quad \rho(\bar{\mathbf{x}}_2) = 2,40 \\ \mathbf{y}_2 &= \begin{bmatrix} 0,94868 \\ 0,31623 \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{x}}_3 &= \begin{bmatrix} -2,37171 \\ 0,08784 \end{bmatrix}; \quad \rho(\bar{\mathbf{x}}_3) = 2,00548 \\ \mathbf{y}_3 &= \begin{bmatrix} -0,99931 \\ 0,03701 \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{x}}_4 &= \begin{bmatrix} 182,37496 \\ 0,00927 \end{bmatrix}; \quad \rho(\bar{\mathbf{x}}_4) = 2,000000 \end{aligned}$$

и

$$\mathbf{y}_4 = \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 0,00005 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, мы видим, что после трех итераций мы получаем хорошую аппроксимацию искомого собственного значения и собственного вектора.

В случае 2 мы имеем

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_2 &= \begin{bmatrix} 0,50000 \\ 0,016667 \end{bmatrix}; \quad \rho(\bar{\mathbf{x}}_2) = 2,00444 \\ \mathbf{y}_2 &= \begin{bmatrix} 0,99944 \\ 0,033315 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

и, наконец,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_3 &= \begin{bmatrix} -225,125 \\ 0,00834 \end{bmatrix}; \quad \rho(\bar{\mathbf{x}}_3) = 2,000001 \\ \mathbf{y}_3 &= \begin{bmatrix} -1,00000 \\ 0,000037 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Как мы видим, в этом случае двух итераций достаточно для того, чтобы получить хорошую аппроксимацию искомого собственного значения и собственного вектора, так как начальный вектор итераций был уже несколько ближе к искомому собственному вектору.

Как указывалось в процессе проведенного выше обсуждения, итерация для коэффициента Рэлея может, в принципе, сходиться к любой собственной паре. Поэтому, если мы заинтересованы в определении p наименьших собственных значений и соответствующих собственных векторов, то нам нужно дополнить итерации для коэффициента Рэлея некоторой другой методикой, позволяющей обеспечить сходимость к одной из искоемых собственных пар. Например, чтобы вычислить наименьшее собственное значение и соответствующий собственный вектор, мы можем вначале использовать обратную итерацию в соответствии с (11.16) до (11.19), без сдвига, получить вектор итераций, хорошо аппроксимирующий ϕ_1 , и только после этого начать итерацию для коэффициента Рэлея. Однако затруднение состоит в том, как определить, сколько именно обратных итераций должно быть проведено, прежде чем будет осуществлено введение сдвига с коэффициентом Рэлея и, все же, будет достигнута сходимость к ϕ_1 и λ_1 . К сожалению, в общем случае ответить на этот вопрос невозможно, и для того, чтобы получить уверенность в том, что интересующие нас собственное значение и соответствующий собственный вектор действительно были вычислены, необходимо использовать свойство последовательности Штурма (см. раздел 11.4).

11.2.5. Матричная дефляция и метод ортогонализации Грама–Шмидта

В разделах 11.2.1–11.2.4 мы обсуждали, каким образом с помощью векторной итерации могут рассчитываться собственные значения и соответствующие собственные векторы. Основная методика обратной итерации дает возможность обеспечить сходимость к λ_1 и ϕ_1 (см. раздел 11.2.1), а аналогичная методика итерации вперед может быть использована для вычисления λ_n и ϕ_n (см. раздел 11.2.2), но при применении сдвига эти методы могут быть использованы также и для расчета других собственных значений и соответствующих собственных векторов (см. раздел 11.2.3). Предположим теперь, что мы рассчитали некую конкретную собственную пару, скажем, (λ_k, ϕ_k) , используя один из упомянутых методов, и что нам требуется построить решение с другой собственной парой. Желая обеспечить то, что сходимость не будет вновь осуществляться к λ_k и ϕ_k , нам нужно подвергнуть дефляции либо матрицы, либо векторы итераций.

Матричная дефляция была активно применена при решении стандартных задач о собственных значениях. Задача может иметь форму $\mathbf{K}\phi = \lambda\phi$, иначе говоря, форму $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ для случая, когда \mathbf{M} является единичной матрицей, или, может быть, форму $\mathbf{K}\phi = \lambda\phi$, полученную путем преобразования обобщенной задачи о собственных значениях к стандартной форме (см. раздел 10.2.5). Мы вспоминаем, что это преобразование оказывается эффективным, когда матрица \mathbf{M} является диагональной и все ее диагональные элементы больше нуля; это объясняется тем, что в таком случае матрица $\tilde{\mathbf{K}}$ имеет ленту той же ширины, что и матрица \mathbf{K} .

Рассмотрим дефляцию в применении к задаче $\mathbf{K}\phi = \lambda\phi$, потому что дефляция для $\tilde{\mathbf{K}}\phi = \lambda\phi$ реализовывалась бы таким же образом. Устойчивая матричная дефляция может быть выполнена путем нахождения ортогональной матрицы \mathbf{P} , первый столбец которой представляет собой вычисленный собственный вектор ϕ_k .

Записывая \mathbf{P} как

$$\mathbf{P} = [\phi_k, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n], \quad (11.60)$$

мы должны иметь $\phi_k^T \mathbf{p}_i = 0$ при $i = 2, \dots, n$. Отсюда следует, что

$$\mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \lambda_k & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_1 \end{bmatrix}, \quad (11.61)$$

так как $\phi_k^T \phi_k = 1$. Важно, что $\mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P}$ имеет те же самые собственные значения, что и \mathbf{K} , а поэтому \mathbf{K}_1 должна иметь все собственные значения матрицы \mathbf{K} , кроме λ_k . В дополнение

к этому, обозначая собственные векторы $\mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P}$ символом $\bar{\phi}_i$, мы имеем

$$\phi_i = \mathbf{P} \bar{\phi}_i. \quad (11.62)$$

Важно отметить, что матрица \mathbf{P} не является единственной, и что можно воспользоваться различными приемами, чтобы построить надлежащую матрицу преобразования. При учете того, что матрица \mathbf{K} — ленточная, мы хотели бы иметь такое преобразование, которое не нарушило бы ленточную форму (см., например, работу [Rutishauser, 1959]).

Из проведенного только что обсуждения следует, что, как только была вычислена вторая искомая собственная пара, использующая \mathbf{K}_1 , процесс дефляции может быть повторен путем работы не с матрицей \mathbf{K} , а с матрицей \mathbf{K}_1 . Поэтому мы можем продолжать проведение дефляции до тех пор, пока не будут вычислены все требуемые собственные значения и собственные векторы. Недостатком матричной дефляции является то, что собственные векторы должны быть вычислены с очень высокой степенью точности во избежание накопления ошибок, вносимых при проведении процесса дефляции.

Вместо матричной дефляции мы можем проводить дефляцию вектора итераций, чтобы добиться сходимости к некоторой собственной паре, отличной от пары (λ_k, ϕ_k) . Основа векторной дефляции состоит в том, что, желая добиться сходимости вектора итераций к требуемому собственному вектору с применением итерации вперед или обратной итерации, нужно сделать так, чтобы вектор итераций не был ортогонален собственному вектору. Следовательно, если, наоборот, вектор итераций оказывается ортогональным по отношению к уже рассчитанным собственным векторам, то мы исключаем возможность того, что итерация сходится к любому из них и, как мы увидим, сходимость вместо этого осуществляется к какому-то другому собственному вектору.

Частным и активно применяемым видом процедуры векторной ортогонализации является метод Грама–Шмидта. Эта процедура может быть использована при решении обобщенной задачи о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda \mathbf{M}\phi$, где матрица \mathbf{M} может принимать различные формы, встречающиеся при конечно-элементном анализе.

Чтобы рассмотреть общий случай, предположим, что мы уже рассчитали с помощью обратных итераций собственные векторы $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$, и что мы хотим ортонормировать вектор \mathbf{x}_1 по отношению к этим собственным векторам, с весом \mathbf{M} . При ортогонализации Грама–Шмидта вектор $\tilde{\mathbf{x}}_1$, являющийся \mathbf{M} -ортонормированным по отношению к собственным векторам ϕ_i , $i = 1, \dots, m$, рассчитывается с помощью формулы

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_1 - \sum_{i=1}^m \alpha_i \phi_i, \quad (11.63)$$

где коэффициенты α_i определяются при использовании условий о том, что $\phi_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{x}}_1 = 0$, $i = 1, \dots, m$, и что $\phi_i^T \mathbf{M} \phi_j = \delta_{ij}$. Поэтому после умножения обеих частей (11.63) на $\phi_i^T \mathbf{M}$ мы получим

$$\alpha_i = \phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{x}_1; \quad i = 1, \dots, m. \quad (11.64)$$

После этого, применяя метод обратной итерации, мы использовали бы $\tilde{\mathbf{x}}_1$ в качестве вектора начальной итерации вместо \mathbf{x}_1 и, при условии, что $\mathbf{x}_1^T \mathbf{M} \phi_{m+1} \neq 0$, реализуется сходимость (по меньшей мере, теоретически; см. раздел 11.2.6) к ϕ_{m+1} и λ_{m+1} .

Чтобы доказать указанную выше сходимость, мы рассматриваем, как и прежде, процесс итераций в базисе собственных векторов, т.е. анализируем итерацию, заданную в (11.25), когда включена ортогонализация Грама–Шмидта. В этом случае собственные векторы, соответствующие наименьшим собственным значениям, суть \mathbf{e}_i , $i = 1, \dots, m$. После проведения дефляции начального вектора итераций \mathbf{z}_1 , соответствующего (11.27), мы получаем

$$\tilde{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{z}_1 - \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{e}_i \quad (11.65)$$

при

$$\alpha_i = \mathbf{e}_1^T \mathbf{z}_1 = 1; \quad i = 1, \dots, m. \quad (11.66)$$

Следовательно,

$$\tilde{\mathbf{z}}_1^T = [0 \quad \dots \quad 0 \quad \overset{\text{элемент } m+1}{1} \quad \dots \quad 1]. \quad (11.67)$$

Далее, используя $\tilde{\mathbf{z}}_1$ в качестве начального вектора итераций и проведя анализ сходимости так, как это обсуждалось в разделе 11.2.1, мы находим, что если $\lambda_{m+2} > \lambda_{m+1}$, то мы имеем $\tilde{\mathbf{z}}_{l+1} \rightarrow \mathbf{e}_{m+1}$, что и требовалось доказать. Более того, мы находим, что скорость сходимости собственного вектора равна $\lambda_{m+1}/\lambda_{m+2}$ и, когда λ_{m+1} представляет собой кратное собственное значение, то скорость сходимости равна отношению λ_{m+1} к следующему собственному значению, отличному от кратного.

Несмотря на то, что пока что мы обсуждали ортогонализацию Грама–Шмидта в связи с обратной итерацией вектора, нужно отдать себе отчет в том, что процедура ортогонализации может быть с тем же успехом использована и с применением других методов векторной итерации. Все соображения относительно сходимости, обсужденные при представлении методов обратной итерации, итерации вперед и итерации для коэффициента Рэлея, остаются справедливыми и тогда, когда включается ортогонализация Грама–Шмидта, если только принять во внимание тот факт, что сходимость к уже рассчитанным собственным векторам невозможна.

Пример 11.8: С использованием ортогонализации Грама–Шмидта рассчитайте надлежащий начальный вектор итераций для решения задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, где \mathbf{K} и \mathbf{M} задаются в примере 11.4. Предположите, что собственные пары (λ_1, ϕ_1) и (λ_4, ϕ_4) известны в том виде, как они были получены в примере 11.5, и что отыскивается сходимость к другой собственной паре.

Чтобы определить начальный вектор итераций, мы хотим из ϕ_1 и ϕ_4 получить после дефляции полный единичный вектор; это значит, что (11.63) имеет вид

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \alpha_1 \phi_1 - \alpha_4 \phi_4,$$

где α_1 и α_4 получаются с использованием (11.64):

$$\alpha_1 = \phi_1^T \mathbf{M} \mathbf{x}_1; \quad \alpha_4 = \phi_4^T \mathbf{M} \mathbf{x}_1.$$

Подставляя выражения для \mathbf{M} , ϕ_1 и ϕ_4 , мы получаем $\alpha_1 = 2,385$; $\alpha_4 = 0,1299$. После этого с точностью до нескольких значащих цифр имеем

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} 0,2683 \\ -0,2149 \\ -0,04812 \\ 0,2358 \end{bmatrix}.$$

11.2.6. Некоторые практические соображения, касающиеся векторных итераций

До сих пор мы обсуждали теорию, используемую в методах векторной итерации. Однако для надлежащего компьютерного воплощения этих методов важно дать интерпретацию теоретических результатов и связать их с практикой. Особую важность имеют соображения, касающиеся практической сходимости и устойчивости, и возникающие при использовании любого из указанных методов.

Первая важная особенность состоит в том, что скорости сходимости итераций могут оказаться при измерении их на практике сугубо теоретическими. А именно, мы предполагали, что вектор начальной итерации, соответствующий формуле (11.27), является полным единичным вектором, что равносильно вектору $\mathbf{x}_1 = \sum_{i=1}^n \phi_i$. Это означает, что вектор начальной итерации одинаково сильно проявляется в каждом из собственных векторов ϕ_i . Мы выбираем именно такой вектор начальной итерации, чтобы без труда выявить ту

теоретическую скорость сходимости, с которой вектор итераций сближается с требуемым собственным вектором. Однако на практике едва ли возможно выбрать вышеуказанную форму \mathbf{x}_1 в качестве вектора начальной итерации, и вместо этого мы выбираем

$$\mathbf{x}_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i, \quad (11.68)$$

где α_i — это произвольные постоянные величины. Этот вектор \mathbf{x}_1 соответствует в базисе собственных векторов следующему вектору

$$\mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}. \quad (11.69)$$

Чтобы выявить влияние постоянных α_i , рассмотрим в качестве примера анализ сходимости обратной итерации без сдвига, когда используется начальный вектор (11.68) и $\lambda_2 > \lambda_1$. Касающиеся этого выводы будут в той же степени применимы и к другим методам векторной итерации. Как и прежде, мы рассматриваем итерацию в базисе собственных векторов Φ и требуем выполнения условия $\alpha_1 \neq 0$, чтобы иметь $\mathbf{x}_1^T \mathbf{M} \phi_1 \neq 0$. После выполнения l обратных итераций мы имеем теперь вместо (11.29)

$$\tilde{\mathbf{z}}_{l+1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^l \\ \vdots \\ \beta_n \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n} \right)^l \end{bmatrix}, \quad (11.70)$$

$$\beta_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_1}; \quad i = 2, \dots, n. \quad (11.71)$$

Таким образом, полученный теперь вектор итераций содержит множители β_i в своих последних $n - 1$ компонентах. Отметим, что i -й компонент с каждой итерацией уменьшается, как и по формуле (11.29), в силу множителя λ_1/λ_i , $i = 2, \dots, n$, и скорость сходимости равна λ_1/λ_2 , как это уже было установлено в разделе 11.2.1. Однако при практическом анализе неизвестные коэффициенты β_i могут дать такой результат, что теоретическая скорость сходимости не будет выявляться на протяжении многих итераций. Поэтому на практике не только порядок сходимости и ее скорость могут определять число итераций, необходимое для сходимости, но столь же важную роль играет и «качество» вектора начальной итерации. Кроме того, весьма важно использовать достаточно высокий допуск сходимости, чтобы предотвратить преждевременное принятие вектора итераций в качестве аппроксимации требуемого собственного вектора.

Вместе с проведением векторных итераций мы можем использовать процедуру матричной дефляции или методику векторной ортогонализации Грама–Шмидта, чтобы добиться сходимости к такой собственной паре, которая еще не была рассчитана (см. раздел 11.2.5). Мы уже упоминали о том, что при применении матричной дефляции собственные векторы должны быть вычислены со сравнительно высокой степенью точности, чтобы обеспечить устойчивость. Что касается ортогонализации по Граму–Шмидту, то этот метод чувствителен к ошибкам округления и также должен использоваться с осторожностью. Если применяется методика обратной итерации или итерации вперед без сдвига, то необходимо вычислять собственные векторы с высокой степенью точности, чтобы ортогонализация Грама–Шмидта работала. Кроме того, вектор итераций должен в процессе каждой из итераций подвергаться ортогонализации по отношению к уже рассчитанным собственным векторам.

Давайте теперь сделаем важный вывод. Ранее, при представлении методики векторной итерации, мы указывали на то, что оказывается трудным (а фактически, как показывает теория, невозможным) *гарантировать* сходимость к некоторому конкретному (но произвольно выбранному) собственному значению и к соответствующему собственному

вектору. Обсуждение, проводимое в данном разделе и касающееся практических аспектов, подтверждает эти наблюдения, и делается вывод о том, что процедуры векторной итерации и процесс ортогонализации Грама–Шмидта должны применяться с осторожностью, если требуется получить конкретное собственное значение и соответствующий собственный вектор. Как мы увидим в разделах 11.5 и 11.6, обе указанные методики оказываются, фактически, наилучшим образом применяемыми и очень эффективно используются совместно с другими стратегиями, касающимися построения решения.

11.2.7. Упражнения

11.1. Рассмотрите обобщенную задачу о собственных значениях

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \phi = \lambda \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \phi$$

с начальным вектором для итерации

$$\mathbf{x}_1^T = [1 \quad 1 \quad 1].$$

- (a) Проведите две обратные итерации, а затем используйте коэффициент Рэля, чтобы рассчитать приближенное значение λ_1 .
- (b) Проведите две итерации вперед, а затем используйте коэффициент Рэля, чтобы рассчитать приближенное значение λ_3 .

11.2. Действуйте так, как в упражнении 11.1, но для следующей задачи о собственных значениях:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 8 \end{bmatrix} \phi = \lambda \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1/2 & \\ & & 2 \end{bmatrix} \phi.$$

11.3. Собственные векторы, соответствующие двум наименьшим собственным значениям $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$ для задачи

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \phi = \lambda \phi,$$

имеют вид:

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Пусть

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Используйте процедуру ортогонализации, чтобы извлечь из \mathbf{x}_1 вектор, ортогональный по отношению к ϕ_1 и ϕ_2 . Покажите в явной форме, что этот вектор является третьим собственным вектором ϕ_3 и вычислите λ_3 .

11.4. Рассмотрите задачу о собственных значениях

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \phi = \lambda \begin{bmatrix} 1/2 & & \\ & 1 & \\ & & 1/2 \end{bmatrix} \phi.$$

Для этой задачи

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \phi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Используйте ортогонализацию Грама–Шмидта для вычисления ϕ_2 и рассчитайте все собственные значения.

11.3. Методы преобразования

В разделе 11.1 мы указывали на то, что методы преобразований охватывают группу процедур, предназначенных для решения задач о собственных значениях и использующих основные свойства собственных векторов в матрице Φ ,

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Lambda \quad (11.3)$$

и

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I}. \quad (11.4)$$

Учитывая, что матрица Φ , имеющая порядок $n \times n$ и приводящая матрицы \mathbf{K} и \mathbf{M} к диагональной форме согласно формулам (11.3) и (11.4), является единственной, мы можем попытаться построить ее с помощью итераций. Основная схема действий при этом состоит в том, чтобы привести \mathbf{K} и \mathbf{M} к диагональной форме, используя последовательно их предумножение и постумножение на матрицы \mathbf{P}_k^T и \mathbf{P}_k , соответственно, где $k = 1, 2, \dots$. Конкретно, если мы задаем $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}$ и $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}$, то мы образуем

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}_2 &= \mathbf{P}_1^T \mathbf{K}_1 \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{K}_3 &= \mathbf{P}_2^T \mathbf{K}_2 \mathbf{P}_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{K}_{k+1} &= \mathbf{P}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{P}_k \\ &\vdots \end{aligned} \right\}. \quad (11.72)$$

Аналогично этому

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}_2 &= \mathbf{P}_1^T \mathbf{M}_1 \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{M}_3 &= \mathbf{P}_2^T \mathbf{M}_2 \mathbf{P}_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{M}_{k+1} &= \mathbf{P}_k^T \mathbf{M}_k \mathbf{P}_k \\ &\vdots \end{aligned} \right\}, \quad (11.73)$$

где матрицы \mathbf{P}_k выбираются так, чтобы форма матриц \mathbf{K}_k и \mathbf{M}_k оказалась как можно ближе к диагональной. После этого для построения надлежащей процедуры нам, по-видимому, нужно иметь $\mathbf{K}_{k+1} \rightarrow \Lambda$ и $\mathbf{M}_{k+1} \rightarrow \mathbf{I}$ при $k \rightarrow \infty$, и в этом случае, обозначая через l последнюю итерацию, получим

$$\Phi = \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \dots \mathbf{P}_l. \quad (11.74)$$

На практике необязательно требовать, чтобы \mathbf{M}_{k+1} сходилась к \mathbf{I} , а \mathbf{K}_{k+1} к Λ , для этих матриц нужна только сходимость к диагональной форме. А именно, если $\mathbf{K}_{k+1} \rightarrow \text{diag}(K_r)$ и $\mathbf{M}_{k+1} \rightarrow \text{diag}(M_r)$ при $k \rightarrow \infty$, то, не обращая внимания на возможность необычного порядка расположения собственных значений и собственных векторов, получаем

$$\Lambda = \text{diag} \left(\frac{K_r^{(l+1)}}{M_r^{(l+1)}} \right) \quad (11.75)$$

и

$$\Phi = \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \dots \mathbf{P}_l \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{M_r^{(l+1)}}} \right). \quad (11.76)$$

Был разработан целый ряд различных методов итераций, использующих вышеописанную основную идею. В последующих разделах мы обсудим только методы Якоби

и Хаусхолдера-QR, считающиеся наиболее эффективными в конечно-элементном анализе. Однако прежде, чем представить эти методы в их подробностях, мы должны указать на один важный аспект. В представленном выше введении предполагалось, что итерация начинается с предумножения и постумножения на \mathbf{P}_1^T и \mathbf{P}_1 , соответственно, что и имеет место в действительности применительно к методам решения Якоби. Однако в альтернативном варианте мы можем вначале попытаться преобразовать задачу о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ к форме, использование которой в итерациях было бы более экономичным. В частности, если $\mathbf{M} = \mathbf{I}$, то первые m преобразований в (11.72) могут быть использованы для приведения \mathbf{K} к тридиагональной форме без итераций, после чего матрицы \mathbf{P}_i , $i = m+1, \dots, l$ применяются итеративным способом с целью приведения \mathbf{K}_{m+1} к диагональной форме. В таком случае первые матрицы, $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_m$, могут иметь форму, отличную от форм позднее вводимых матриц, $\mathbf{P}_{m+1}, \dots, \mathbf{P}_l$. Применение этой процедуры соответствует методу Хаусхолдера-QR, при применении которого матрица Хаусхолдера используется для того, чтобы вначале преобразовать \mathbf{K} к тридиагональной форме, а затем матрицы вращения применяются для преобразований QR. Та же стратегия построения решения может использоваться и для решения обобщенной задачи о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, $\mathbf{M} \neq \mathbf{I}$, при условии, что вначале эта задача преобразуется к стандартной форме.

11.3.1. Метод Якоби

Основной метод Якоби был разработан для решения стандартных задач о собственных значениях (при единичной матрице \mathbf{M}), и мы рассмотрим этот метод в данном разделе. Метод был предложен более ста лет назад (см. работу [Jacobi, 1846]), и использовался весьма активно. Главное преимущество соответствующей процедуры состоит в ее простоте и устойчивости. При учете того, что свойства собственного вектора в соотношениях (11.3) и (11.4) (при $\mathbf{M} = \mathbf{I}$) соответствуют всем симметричным матрицам \mathbf{K} без ограничения на собственные значения, мы видим, что метод Якоби может использоваться для вычисления отрицательных, нулевых или положительных собственных значений.

Если рассматривается стандартная задача о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda\phi$, то k -я итерация, определяемая согласно (11.72), приводится к соотношению

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{P}_k, \quad (11.77)$$

где \mathbf{P}_k — ортогональная матрица; это означает, что (11.73) дает

$$\mathbf{P}_k^T \mathbf{P}_k = \mathbf{I}. \quad (11.78)$$

При решении по методу Якоби матрица \mathbf{P}_k представляет собой ротационную матрицу, выбираемую таким образом, чтобы внедиагональный элемент в \mathbf{K}_k обращался в нуль. Если элемент (i, j) должен быть обращен в нуль, то соответствующая ортогональная матрица \mathbf{P}_k имеет вид

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \cos \theta & -\sin \theta & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & \sin \theta & & \cos \theta & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad (11.79)$$

i -й
 j -й столбец
 i -й
 j -я строка

где θ выбрано из условия о том, чтобы элемент (i, j) матрицы \mathbf{K}_{k+1} был равен нулю. Обозначая элемент (i, j) в \mathbf{K}_k символом $k_{ij}^{(k)}$, мы используем

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2k_{ij}^{(k)}}{k_{ii}^{(k)} - k_{jj}^{(k)}} \quad \text{при} \quad k_{ii}^{(k)} \neq k_{jj}^{(k)} \quad (11.80)$$

и

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{при} \quad k_{ii}^{(k)} = k_{jj}^{(k)}. \quad (11.81)$$

Следует заметить, что численное определение \mathbf{K}_{k+1} согласно (11.77) требует только линейной комбинации двух строк и двух столбцов. Кроме того, следует также воспользоваться преимуществом того факта, что \mathbf{K}_k симметрична при всех k ; это означает, что мы должны работать только с верхней (или нижней) треугольной частью матрицы, включая ее диагональные элементы.

Важно подчеркнуть, что, хотя преобразование (11.77) обращает в нуль внедиагональный элемент матрицы \mathbf{K}_k , этот элемент вновь становится отличным от нуля в процессе последующих преобразований. Поэтому при построении реального алгоритма нам нужно решить, какой именно элемент следует обратить в нуль. Один из возможных вариантов состоит в том, чтобы всегда обращать в нуль наибольший из внедиагональных элементов в матрице \mathbf{K}_k . Однако поиск наибольшего элемента отнимает много времени, и может оказаться предпочтительным попросту систематически проводить преобразования Якоби, строка за строкой или столбец за столбцом, — операция, которая известна под названием *циклической процедуры Якоби*. Однократное прохождение по всем внедиагональным элементам — это один *прогон*. Недостаток этой процедуры состоит в том, что некий внедиагональный элемент всегда обращается в нуль, независимо от его величины; иначе говоря, элемент может уже оказаться близким к нулю, а процедура все-таки применяется.

Другая процедура, использовавшаяся весьма эффективно, — это *пороговый метод Якоби*, при применении которого внедиагональные элементы проверяются последовательно, а именно, строка за строкой (или столбец за столбцом), и ротация вводится только тогда, когда элемент оказывается больше порогового значения для данного прогона. Чтобы определить надлежащее пороговое значение мы отмечаем, что, физически, при диагонализации матрицы \mathbf{K} мы стремимся уменьшить взаимосвязь между степенями свободы i и j . Критерием степени этой взаимосвязи является величина $(k_{ij}^2/k_{ii}k_{jj})^{1/2}$, и именно этот фактор может эффективно использоваться для решения о том, применять ли ротацию. В дополнение к обладанию реалистическим пороговым допуском необходимо также измерить сходимость. Как описывалось выше, $\mathbf{K}_{k+1} \rightarrow \mathbf{\Lambda}$ при $k \rightarrow \infty$, однако при численных расчетах мы стремимся получить лишь близкую аппроксимацию собственных значений и соответствующих собственных векторов. Пусть индекс l обозначает последнюю итерацию; это означает, что в пределах требуемой степени точности мы имеем

$$\mathbf{K}_{l+1} \doteq \mathbf{\Lambda}. \quad (11.82)$$

Тогда мы говорим, что сходимость с допуском s была достигнута, если

$$\frac{|k_{ii}^{(l+1)} - k_{ii}^l|}{k_{ii}^{(l+1)}} \leq 10^{-s}; \quad i = 1, \dots, n \quad (11.83)$$

и

$$\left[\frac{(k_{ij}^{(l+1)})^2}{k_{ii}^{(l+1)} k_{jj}^{(l+1)}} \right]^{1/2} \leq 10^{-s}; \quad \text{все } i, j; i < j. \quad (11.84)$$

Соотношение (11.83) должно удовлетворяться, потому что элемент $k_{ii}^{(l+1)}$ является текущим приближением к собственному значению, и данное соотношение констатирует, что ни текущее, ни последнее приближение к собственному значению не изменяется в своих первых s цифрах. Этот критерий сходимости является в своей основе тем же самым, что и критерий, использовавшийся при векторной итерации согласно (11.20). Соотношение (11.84) гарантирует, что внедиагональные элементы действительно малы.

Обсудив главные аспекты процедуры, мы можем теперь подытожить свойства реальной процедуры построения решения. При пороговой итерации Якоби были использованы следующие этапы действий.

1. Необходимо задать пороговое значение для прогона. Типичный вариант — когда пороговое значение, используемое при прогоне, может быть равно 10^{-2m} .
2. Для всех i и j , при $i < j$ необходимо вычислить фактор взаимосвязи $\left((k_{ij}^{(k)})^2 / k_{ii}^{(k)} k_{jj}^{(k)}\right)^{1/2}$ и провести преобразование, если этот фактор больше текущего порогового значения.
3. Необходимо использовать соотношение (11.83) для проверки сходимости. Если соотношение (11.83) не удовлетворяется, то нужно продолжить расчет, выполнив следующий прогон, т. е. вернуться к этапу 1. Если соотношение (11.83) удовлетворяется, то проверьте, удовлетворяется ли также и соотношение (11.84); если «да», то итерации сошлись; если «нет», то надо выполнить следующий прогон.

Пока что мы сформулировали алгоритм, но не показали, что сходимость будет иметь место фактически. Доказательство сходимости было дано в другом издании (см. книгу [Wilkinson, 1965-1]) и не будет повторяться здесь, так как это принесет очень мало дополнительной информации о работе процедуры решения. Однако нужно отметить одно важное обстоятельство, — то, что сходимость реализуется по квадратичному закону, если только внедиагональные элементы малы. В силу того, что при малости внедиагональных элементов достигается быстрая сходимость, построение решения для собственной системы с высокой степенью точности приводит к небольшим дополнительным затратам, если приближенное решение уже было получено. При практических расчетах мы используем $m = 2$ и $s = 12$, причем для получения решения задачи о собственных значениях с высокой степенью точности требуется выполнить примерно шесть прогонов. Применяемая при этом программа приводится в следующем разделе, при обсуждении решения обобщенной задачи о собственных значениях, $\mathbf{K}\phi = \lambda \mathbf{M}\phi$.

Пример 11.9: Рассчитайте задачу о собственных значениях с матрицей \mathbf{K} , имеющей вид

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Используйте итерации, соответствующие описанному выше пороговому методу Якоби.

Чтобы продемонстрировать алгоритм построения решения, мы описываем подробно один прогон, после чего приводим результаты, полученные при следующих прогонах.

Для первого прогона мы принимаем пороговое значение 10^{-2} . С этим значением мы получаем приводимые ниже результаты. Для $i = 1$, $j = 2$ мы получаем

$$\cos \theta = 0,7497; \quad \sin \theta = 0,6618$$

и, таким образом,

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0,7497 & -0,6618 & 0 & 0 \\ 0,6618 & 0,7497 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_1^T \mathbf{K} \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1,469 & 0 & -1,898 & 0,6618 \\ 0 & 9,531 & 1 & -3,661 \\ -1,898 & -3,661 & 6 & -4 \\ 0,6618 & 0,7497 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Для $i = 1$, $j = 3$:

$$\cos \theta = 0,9398; \quad \sin \theta = 0,3416;$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_2 &= \begin{bmatrix} 0,9398 & 0 & -0,3416 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,3416 & 0 & 0,9398 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\
\mathbf{P}_2^T \mathbf{P}_1^T \mathbf{K} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 &= \begin{bmatrix} 0,7792 & -1,250 & 0 & -0,7444 \\ -1,250 & 9,531 & -3,440 & 0,7497 \\ 0 & -3,440 & 6,690 & -3,986 \\ -0,7444 & 0,7497 & -3,986 & 5 \end{bmatrix}; \\
\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 &= \begin{bmatrix} 0,7046 & -0,6618 & -0,2561 & 0 \\ 0,6220 & 0,7497 & -0,2261 & 0 \\ 0,3416 & 0 & 0,9398 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Для $i = 1, j = 4$:

$$\begin{aligned}
\cos \theta &= 0,9857; \quad \sin \theta = 0,1687; \\
\mathbf{P}_3 &= \begin{bmatrix} 0,9857 & 0 & 0 & -0,1687 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,1687 & 0 & 0 & 0,9857 \end{bmatrix}; \\
\mathbf{P}_3^T \mathbf{P}_2^T \mathbf{P}_1^T \mathbf{K} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 &= \begin{bmatrix} 0,6518 & -1,106 & -0,6725 & 0 \\ -1,106 & 9,531 & -3,440 & 0,9499 \\ -0,6725 & -3,440 & 6,690 & -3,928 \\ 0 & 0,9499 & -3,928 & 5,127 \end{bmatrix}; \\
\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 &= \begin{bmatrix} 0,6945 & -0,6618 & -0,2561 & -0,1189 \\ 0,6131 & 0,7497 & -0,2261 & -0,1050 \\ 0,3367 & 0 & 0,9398 & -0,0576 \\ 0,1687 & 0 & 0 & 0,9857 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Для $i = 2, j = 3$:

$$\begin{aligned}
\cos \theta &= 0,8312; \quad \sin \theta = -0,5560; \\
\mathbf{P}_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8312 & 0,5560 & 0 \\ 0 & -0,5560 & 0,8312 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\
\mathbf{P}_4^T \mathbf{P}_3^T \mathbf{P}_2^T \mathbf{P}_1^T \mathbf{K} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 &= \begin{bmatrix} 0,6518 & 0,5453 & -1,174 & 0 \\ -0,5453 & 11,83 & 11 & 0 \\ -1,174 & 0 & 4,388 & -2,737 \\ 0 & 2,974 & -2,737 & 5,127 \end{bmatrix}; \\
\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 &= \begin{bmatrix} 0,6945 & -0,4077 & -0,5808 & -0,1189 \\ 0,6131 & 0,7488 & 0,2289 & -0,1050 \\ 0,3367 & -0,5226 & 0,7812 & -0,0576 \\ 0,1682 & 0 & 0 & 0,9857 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Для $i = 2, j = 4$:

$$\cos \theta = 0,9349; \quad \sin \theta = 0,3549;$$

$$\mathbf{P}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9349 & 0 & -0,3549 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,3549 & 0 & 0,9349 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{P}_5^T \mathbf{P}_4^T \mathbf{P}_3^T \mathbf{P}_2^T \mathbf{P}_1^T \mathbf{K} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \mathbf{P}_5 = \begin{bmatrix} 0,6518 & 0,5098 & -1,174 & 0,1935 \\ -0,5098 & 12,96 & 0,9713 & 0 \\ -1,174 & -0,9713 & 4,388 & -2,559 \\ 0,1935 & 0 & -2,559 & 3,999 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 \mathbf{P}_5 = \begin{bmatrix} 0,6945 & -0,4233 & -0,5808 & 0,0335 \\ 0,6131 & 0,6628 & 0,2289 & -0,3639 \\ 0,3367 & 0,5090 & 0,7812 & 0,1316 \\ 0,1687 & 0,3498 & 0 & 0,9213 \end{bmatrix}.$$

Чтобы завершить прогон, мы обращаем в нуль элемент (3, 4), используя

$$\cos \theta = 0,7335; \quad \sin \theta = -0,6797;$$

$$\mathbf{P}_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7335 & 0,6797 \\ 0 & 0 & -0,6797 & 0,7335 \end{bmatrix}$$

и, следовательно, приближенные выражения для $\mathbf{\Lambda}$ и $\mathbf{\Phi}$ имеют вид

$$\mathbf{\Lambda} \doteq \mathbf{P}_6^T \dots \mathbf{P}_1^T \mathbf{K} \mathbf{P}_1 \dots \mathbf{P}_6,$$

т. е.

$$\mathbf{\Lambda} \doteq \begin{bmatrix} 0,6518 & -0,5098 & -0,9926 & -0,6560 \\ -0,5098 & 12,96 & -0,7124 & -0,6602 \\ -0,9926 & -0,7124 & 6,7596 & 0 \\ -0,6560 & -0,6602 & 0 & 1,6272 \end{bmatrix}$$

и

$$\mathbf{\Phi} \doteq \mathbf{P}_1 \dots \mathbf{P}_6,$$

т. е.

$$\mathbf{\Phi} \doteq \begin{bmatrix} 0,6945 & -0,4233 & -0,4488 & -0,3702 \\ 0,6131 & 0,6628 & 0,4152 & -0,1113 \\ 0,3367 & -0,5090 & 0,4835 & 0,6275 \\ 0,1687 & 0,3498 & -0,6264 & 0,6759 \end{bmatrix}.$$

После второго прогона мы получаем

$$\mathbf{\Lambda} \doteq \begin{bmatrix} 0,1563 & -0,3635 & 0,0063 & -0,0176 \\ -0,3635 & 13,08 & -0,0020 & 0 \\ 0,0063 & -0,0020 & 6,845 & 0 \\ -0,0176 & 0 & 0 & 1,910 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{\Phi} \doteq \begin{bmatrix} 0,3875 & -0,3612 & -0,6017 & -0,5978 \\ 0,5884 & 0,6184 & 0,3710 & -0,3657 \\ 0,6148 & -0,5843 & 0,3714 & 0,3777 \\ 0,3546 & 0,3816 & -0,6020 & 0,6052 \end{bmatrix},$$

и после третьего прогона мы имеем

$$\Lambda \doteq \begin{bmatrix} 0,1459 & & & \\ & 13,09 & & \\ & & 6,854 & \\ & & & 1,910 \end{bmatrix};$$

$$\Phi \doteq \begin{bmatrix} 0,3717 & -0,3717 & -0,6015 & -0,6015 \\ 0,6015 & 0,6015 & 0,3717 & -0,3717 \\ 0,6015 & -0,6015 & 0,3717 & 0,3717 \\ 0,3717 & 0,3717 & -0,6015 & 0,6015 \end{bmatrix}.$$

Приближенное выражение для Λ с заданной точностью является диагональным, и мы можем использовать

$$\lambda_1 \doteq 0,1459; \quad \phi_1 \doteq \begin{bmatrix} 0,3717 \\ 0,6015 \\ 0,6015 \\ 0,3717 \end{bmatrix};$$

$$\lambda_2 \doteq 1,910; \quad \phi_2 \doteq \begin{bmatrix} -0,6015 \\ -0,3717 \\ 0,3717 \\ 0,6015 \end{bmatrix};$$

$$\lambda_3 \doteq 6,854; \quad \phi_3 \doteq \begin{bmatrix} -0,6015 \\ 0,3717 \\ 0,3717 \\ -0,6015 \end{bmatrix};$$

$$\lambda_4 \doteq 13,09; \quad \phi_4 \doteq \begin{bmatrix} -0,3717 \\ 0,6015 \\ -0,6015 \\ 0,3717 \end{bmatrix}.$$

Следует отметить, что собственные значения и собственные векторы в приближенных выражениях для Λ и Φ не появились в обычном порядке.

В приводимом ниже примере мы демонстрируем случай сходимости по квадратичному закону, когда внедиагональные элементы уже малы (см. работу [Wilkinson, 1965-2]).

Пример 11.10: Рассмотрите решение по методу Якоби для задачи о собственных значениях $K\phi = \lambda\phi$, где

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & o(\epsilon) & o(\epsilon) \\ o(\epsilon) & k_{22} & o(\epsilon) \\ o(\epsilon) & o(\epsilon) & k_{33} \end{bmatrix}.$$

Символ $o(\epsilon)$ означает «порядка ϵ », где $\epsilon \ll k_{ii}$, $i = 1, 2, 3$. Покажите, что после одного полного прогона все внедиагональные элементы приобретают порядок ϵ^2 , а это значит, что сходимость осуществляется по квадратичному закону.

Если учесть, что те ротации, которые нужно применить, малы, то мы делаем предположение, что $\sin \theta = \theta$ и $\cos \theta = 1$. Следовательно, соотношение (11.80) дает

$$\theta = \frac{k_{ij}^{(k)}}{k_{ii}^{(k)} - k_{jj}^{(k)}}.$$

За один прогон мы должны сделать равными нулю, последовательно, все внедиагональные элементы. Используя $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}$, мы получаем \mathbf{K}_2 путем обращения в нуль элемента (1, 2) матрицы \mathbf{K}_1 ,

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{P}_1^T \mathbf{K}_1 \mathbf{P}_1,$$

где

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-o(\epsilon)}{k_{11} - k_{22}} & 0 \\ \frac{o(\epsilon)}{k_{11} - k_{22}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} k_{11} + o(\epsilon^2) & 0 & o(\epsilon) \\ 0 & k_{22} + o(\epsilon^2) & o(\epsilon) \\ o(\epsilon) & o(\epsilon) & k_{33} \end{bmatrix}.$$

Аналогично этому мы обращаем в нуль элемент (1, 3) матрицы \mathbf{K}_2 и получаем \mathbf{K}_3 ,

$$\mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} k_{11} + o(\epsilon^2) & o(\epsilon^2)^0 & 0 \\ o(\epsilon^2) & k_{22} + o(\epsilon^2) & o(\epsilon) \\ 0 & o(\epsilon) & k_{33} + o(\epsilon^2) \end{bmatrix}.$$

Наконец, мы обращаем в нуль элемент (2, 3) матрицы \mathbf{K}_3 и получаем

$$\mathbf{K}_4 = \begin{bmatrix} k_{11} + o(\epsilon^2) & o(\epsilon^2) & o(\epsilon^2) \\ o(\epsilon^2) & k_{22} + o(\epsilon^2) & 0 \\ o(\epsilon^2) & 0 & k_{33} + o(\epsilon^2) \end{bmatrix}$$

со всеми внедиагональными элементами порядка не более $o(\epsilon^2)$.

11.3.2. Обобщенный метод Якоби

В предыдущем разделе мы обсудили решение стандартной задачи о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda\phi$ с использованием обычных ротационных матриц Якоби, предназначенных для приведения матрицы \mathbf{K} к диагональной форме. Для того, чтобы с помощью стандартного метода Якоби решить обобщенную задачу $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, $\mathbf{M} \neq \mathbf{I}$, следовало бы вначале преобразовать задачу к стандартной форме. Однако можно обойтись и без такого преобразования, если использовать обобщенный метод решения Якоби, оперирующий непосредственно с матрицами \mathbf{K} и \mathbf{M} (см. работы [Falk, Langemeyer, 1960], а также [Bathe 1971]). Алгоритм работает в соответствии со схемой (11.72)–(11.76) и является естественным развитием стандартной схемы решения Якоби; иначе говоря, обобщенный метод приводится к схеме, данной для задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\phi$, когда матрица \mathbf{M} является единичной.

Если сослаться на обсуждение, проведенное в предыдущем разделе, то при применении обобщенного метода итераций Якоби мы используем матрицу \mathbf{P}_k следующего вида:

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \alpha \\ & & & \gamma & 1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad (11.85)$$

i -й j -й столбец
 i -я j -я строка

где постоянные α и γ выбираются таким образом, чтобы обратить в нуль одновременно элементы (i, j) матриц \mathbf{K}_k и \mathbf{M}_k . Следовательно, значения α и γ являются функциями элементов $k_{ij}^{(k)}$, $k_{ii}^{(k)}$, $k_{jj}^{(k)}$, $m_{ij}^{(k)}$, $m_{ii}^{(k)}$ и $m_{jj}^{(k)}$, где верхний индекс (k) указывает на то, что рассматривается k -я итерация. Выполняя умножения $\mathbf{P}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{P}_k$ и $\mathbf{P}_k^T \mathbf{M}_k \mathbf{P}_k$, а также условие о том, что $k_{ij}^{(k+1)}$ и $m_{ij}^{(k+1)}$ будут равны нулю, мы получим два следующих уравнения для определения α и γ :

$$\alpha k_{ii}^{(k)} + (1 + \alpha\gamma)k_{ij}^{(k)} + \gamma k_{jj}^{(k)} = 0, \quad (11.86)$$

$$\alpha m_{ii}^{(k)} + (1 + \alpha\gamma)m_{ij}^{(k)} + \gamma m_{jj}^{(k)} = 0. \quad (11.87)$$

Если

$$\frac{k_{ii}^{(k)}}{m_{ii}^{(k)}} = \frac{k_{jj}^{(k)}}{m_{jj}^{(k)}} = \frac{k_{ij}^{(k)}}{m_{ij}^{(k)}}$$

(т. е. если рассматриваемые подматрицы различаются скалярным множителем, что может рассматриваться как тривиальный случай), то мы принимаем $\alpha = 0$ и $\gamma = -k_{ij}^{(k)}/k_{jj}^{(k)}$. В общем случае, чтобы разрешить уравнения (11.86) и (11.87) относительно α и γ , мы даем определения

$$\left. \begin{aligned} \bar{k}_{ii}^{(k)} &= k_{ii}^{(k)} m_{ij}^{(k)} - m_{ii}^{(k)} k_{ij}^{(k)} \\ \bar{k}_{jj}^{(k)} &= k_{jj}^{(k)} m_{ij}^{(k)} - m_{jj}^{(k)} k_{ij}^{(k)} \\ \bar{k}^{(k)} &= k_{ii}^{(k)} m_{jj}^{(k)} - k_{jj}^{(k)} m_{ii}^{(k)} \end{aligned} \right\} \quad (11.88)$$

и

$$\gamma = -\frac{\bar{k}_{ii}^{(k)}}{x}; \quad \alpha = \frac{\bar{k}_{jj}^{(k)}}{x}. \quad (11.89)$$

Значение x , требуемое для конкретного выражения α и γ , должно после этого определяться по формуле

$$x = \frac{\bar{k}^{(k)}}{2} + \text{sign}(\bar{k}^{(k)}) \sqrt{\left(\frac{\bar{k}^{(k)}}{2}\right)^2 + \bar{k}_{ii}^{(k)} \bar{k}_{jj}^{(k)}}. \quad (11.90)$$

Выражения для α и γ используются (и были первоначально разработаны для этого) в случае, когда матрица \mathbf{M} является положительно определенной, полной или ленточной матрицей масс. В этом случае (а фактически также и при менее ограничительных условиях) мы имеем

$$\left(\frac{\bar{k}^{(k)}}{2}\right)^2 + \bar{k}_{ii}^{(k)} \bar{k}_{jj}^{(k)} > 0$$

и, следовательно, x всегда отличен от нуля. Кроме того, $\det \mathbf{P}_k \neq 0$, что на самом деле является необходимым условием работы алгоритма.

Обобщенная процедура решения по Якоби широко использовалась при применении метода подпространственных итераций (см. раздел 11.6) и тогда, когда применяется сов-

местимая идеализация масс. Однако могут возникнуть и другие ситуации. Предположим, что \mathbf{M} — это диагональная матрица масс, $\mathbf{M} \neq \mathbf{I}$ и $m_{ii} > 0$; в этом случае из (11.88) следует

$$\bar{k}_{ii}^{(k)} = -m_{ii}^{(k)} k_{ij}^{(k)}; \quad \bar{k}_{jj}^{(k)} = -m_{jj}^{(k)} k_{ij}^{(k)}, \quad (11.91)$$

а в противном случае используются, как и прежде, соотношения (11.85)–(11.90). Однако если $\mathbf{M} = \mathbf{I}$, то соотношение (11.87) дает $\alpha = -\gamma$, и мы обнаруживаем, что матрица \mathbf{P}_k , выражаемая согласно (11.85), отличается лишь постоянным множителем от ротационной матрицы, выражаемой согласно (11.79) (см. пример 11.11). Кроме того, следует упомянуть о том, что процедура решения может быть приспособлена для решения задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, когда матрица \mathbf{M} является диагональной и имеющей несколько нулевых диагональных элементов.

Процесс решения в целом аналогичен процессу итерации Якоби при решении задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\phi$, представленному нами в в предыдущем разделе. Различия состоят в том, что теперь, если матрица \mathbf{M} не является диагональной, то нам нужно вычислять также и коэффициент взаимосвязи масс $[(m_{ij}^{(k)})^2 / m_{ii}^{(k)} m_{jj}^{(k)}]^{1/2}$, а само преобразование применяется по отношению к \mathbf{K}_k и \mathbf{M}_k . Сходимость оценивается путем сравнения последовательных аппроксимаций собственных значений, а также путем проверки того факта, что все внедиагональные элементы малы; это означает, что при обозначении l для последней итерации сходимость была достигнута, если

$$\frac{|\lambda_i^{(l+1)} - \lambda_i^{(l)}|}{\lambda_i^{(l+1)}} \leq 10^{-s}; \quad i = 1, \dots, n, \quad (11.92)$$

где

$$\lambda_i^{(l)} = \frac{k_{ii}^{(l)}}{m_{ii}^{(l)}}; \quad l_i^{(l+1)} = \frac{k_{ii}^{(l+1)}}{m_{ii}^{(l+1)}}, \quad (11.93)$$

а также

$$\left[\frac{(k_{ij}^{(l+1)})^2}{k_{ii}^{(l+1)} k_{jj}^{(l+1)}} \right]^{1/2} \leq 10^{-s}; \quad \left[\frac{(m_{ij}^{(l+1)})^2}{m_{ii}^{(l+1)} m_{jj}^{(l+1)}} \right]^{1/2} \leq 10^{-s}; \quad \text{все } i, j; i < j, \quad (11.94)$$

где 10^{-s} — это допуск сходимости.

В таблице 11.3 подытоживаются действия при процедуре решения в том случае, когда матрица \mathbf{M} является полной (или ленточной) и положительно определенной. Соотношения, приводимые в этой таблице, применяются непосредственно в подпрограмме JASOVI, представленной в конце этого раздела. Таблица 11.3 представляет также данные о числе операций в процессе решения и требования, относящиеся к требуемому объему памяти. Общее число операций за один прогон, как оно приводится в таблице, представляет собой верхний предел, так как предполагается, что обе матрицы — полные и что все внедиагональные элементы сделаны равными нулю; это значит, что пороговый допуск никогда не превышает. Что касается числа прогонов, требуемых для построения решения, то здесь пригодны те же опытные данные, что и при решении стандартной задачи о собственных значениях; это означает, что при $m = 2$ и $s = 12$ для одной итерации (см. раздел 11.3.1), для построения решения задачи о собственных значениях с высокой степенью точности требуется выполнить примерно шесть прогонов.

Приводимые ниже примеры демонстрируют некоторые характеристики алгоритма решения Якоби.

Пример 11.11: Докажите, что обобщенный метод Якоби сводится к стандартной процедуре при $\mathbf{M} = \mathbf{I}$.

Для доказательства нужно лишь рассмотреть процесс расчета тех матриц преобразования, которые могли бы быть применены для обращения в нуль типичных внедиагональных элементов. Мы хотим показать, что матрицы преобразования, получаемые в стандартном и в обобщенном методах Якоби, отличаются друг от друга лишь скалярным множителем; а именно, в этом случае мы могли бы за счет надлежащего масштабирования получить из обобщенной схемы стандартный метод. Учитывая, что на каждом этапе итерации проводится ротация в плоскости (i, j) , мы можем без ущерба

Т а б л и ц а 11.3. Сводка действий при обобщенном решении Якоби

Операция	Расчет	Число операций	Потребная память
Вычисление факторов взаимосвязи	$\frac{(k_{ij}^{(k)})^2}{k_{ii}^{(k)} k_{jj}^{(k)}}; \quad \frac{(m_{ij}^{(k)})^2}{m_{ii}^{(k)} m_{jj}^{(k)}}$	6	
Преобразование для обращения в нуль элементов (i, j)	$\bar{k}_{ii}^{(k)} = k_{ii}^{(k)} m_{ij}^{(k)} - m_{ii}^{(k)} k_{ij}^{(k)}$ $\bar{k}_{jj}^{(k)} = k_{jj}^{(k)} m_{ij}^{(k)} - m_{jj}^{(k)} k_{ij}^{(k)}$ $\bar{k}^{(k)} = k_{ii}^{(k)} m_{jj}^{(k)} - k_{jj}^{(k)} m_{ii}^{(k)}$ $x = \frac{\bar{k}^{(k)}}{2} + (\text{sign } \bar{k}^{(k)}) \sqrt{\left(\frac{\bar{k}^{(k)}}{2}\right)^2 + \bar{k}_{ii}^{(k)} \bar{k}_{jj}^{(k)}}$ $\gamma = -\frac{\bar{k}_{ii}^{(k)}}{x}, \quad \alpha = \frac{\bar{k}_{jj}^{(k)}}{x}$ $\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{P}_k, \quad \mathbf{M}_{k+1} = \mathbf{P}_k^T \mathbf{M}_k \mathbf{P}_k$	$4n + 12$	С учетом симметрии матриц $n(n+2)$
Вычисление собственных векторов	$(\mathbf{P}_1 \dots \mathbf{P}_{k-1}) \mathbf{P}_k$	$2n$	n^2
Итог для одного прогона		$3n^3 + 6n^2$	$2n^2 + 2n$

для общности рассмотреть решение задачи

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \phi = \lambda \phi.$$

Следовательно, используя соотношения (11.88)–(11.90), мы получим

$$\alpha = -\gamma; \quad \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma \\ \gamma & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{a})$$

и

$$\gamma = \frac{-k_{11} + k_{22} \pm \sqrt{(k_{11} - k_{22})^2 + 4k_{12}^2}}{2k_{12}}.$$

С другой стороны, при построении стандартного решения Якоби мы используем матрицу

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

которая может быть записана в виде

$$\mathbf{P}_1 = \cos \theta \begin{bmatrix} 1 & 0 \operatorname{tg} \theta \\ \operatorname{tg} \theta & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{b})$$

Следовательно, матрица \mathbf{P}_1 согласно (b) отличалась бы от матрицы \mathbf{P}_1 согласно (a) лишь множителем, если только положить $\operatorname{tg} \theta = \gamma$. В стандартном методе Якоби, используя формулу (11.80), мы находим $\operatorname{tg} 2\theta$. В этом случае имеем

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2k_{12}}{k_{11} - k_{22}}. \quad (c)$$

Применяя простые тригонометрические выкладки, мы имеем также

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2 \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg}^2 \theta}. \quad (d)$$

С помощью формул (c) и (d) получаем решение для того $\operatorname{tg} \theta$, который следует подставить в формулу (b); мы имеем

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-k_{11} + k_{22} \pm \sqrt{(k_{11} - k_{22})^2 + 4k_{12}^2}}{2k_{12}}.$$

Следовательно, $\gamma = \operatorname{tg} \theta$, и обобщенный метод итераций Якоби оказывается эквивалентным стандартному методу, когда $\mathbf{M} = \mathbf{I}$.

Пример 11.12: Используйте обобщенный метод Якоби для вычисления собственной системы применительно к задаче $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$.

(1) В первом случае будем полагать

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что матрица \mathbf{K} — особая и, следовательно, мы ожидаем наличия нулевого собственного значения.

(2) Затем положим

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

причем в этом случае мы имеем бесконечно большое собственное значение.

Для построения решения будем использовать соотношения (11.85)–(11.90). Рассматривая задачу в случае (1), мы получаем

$$\begin{aligned} \bar{k}_{11}^{(1)} &= 3; & \bar{k}_{22}^{(1)} &= 3; & \bar{k}^{(1)} &= 0; \\ x &= 3; & \gamma &= -1; & \alpha &= 1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}_1^T \mathbf{K} \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P}_1^T \mathbf{M} \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Для получения $\mathbf{\Lambda}$ и $\mathbf{\Phi}$ применяем соотношения (11.75) и (11.76) и переставим столбцы матриц, чтобы добиться надлежащего порядка их размещения. Следовательно,

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & \\ & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Теперь рассмотрим задачу в случае (2). Здесь мы имеем

$$\begin{aligned} \bar{k}_{11}^{(1)} &= -2; & \bar{k}_{22}^{(1)} &= 0; & \bar{k}^{(1)} &= -4; \\ x &= -4; & \alpha &= 0; & \gamma &= -1/2; \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}_1^T \mathbf{K} \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P}_1^T \mathbf{M} \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 3/4 & \\ & \infty \end{bmatrix}; \quad \phi_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Проведенное выше обсуждение обобщенного метода решения Якоби уже дало некоторые указания на преимущества этого способа решения. Во-первых, не нужно проводить преобразование обобщенной задачи о собственных значениях к стандартной форме. Это преимущество особенно четко выявляется, когда (1) матрицы являются плохо обусловленными, и (2) когда внедиагональные элементы матриц **K** и **M** уже малы или, эквивалентно этому, когда у этих матриц имеется лишь небольшое число внедиагональных элементов. В первом варианте прямое решение задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ позволяет избежать решения стандартной задачи с матрицей, имеющей как очень большие, так и очень малые элементы (см. раздел 10.2.5). Во втором варианте задача о собственных значениях оказывается уже почти решенной, так как обращение в нуль малых или имеющих в небольшом числе внедиагональных элементов матриц **K** и **M** не приведет к большим изменениям тех диагональных элементов этих матриц, отношения которых дают собственные значения. Кроме того, если внедиагональные элементы малы, то можно ожидать быстрой сходимости итераций (см. раздел 11.3.1). Мы увидим, что именно этот случай имеет место при применении метода подпространственных итераций, описываемого в разделе 11.6, и этот факт является одной из причин того, что обобщенный метод Якоби эффективно используется в этом варианте.

Следует отметить, что применение методов решения Якоби позволяет получить одновременное решение для всех собственных значений и соответствующих собственных векторов. Однако при проведении конечно-элементного анализа нам требуется определить, в большинстве случаев, лишь несколько собственных пар, и использование процедуры Якоби может оказаться весьма неэффективным, в особенности если матрицы **K** и **M** имеют большой порядок. В подобных случаях в нашем распоряжении имеются гораздо более эффективные методы решения, позволяющие найти только те конкретные собственные значения и собственные векторы, которые требуются фактически. Тем не менее, обобщенный метод решения Якоби, представленный в этом разделе, может очень эффективно использоваться как часть вышеуказанных стратегий решения (см. раздел 11.6). Когда порядок матриц **K** и **M** сравнительно невысок, то решение задачи о собственных значениях является не слишком дорогостоящим и, кроме того, итерация Якоби может оказаться привлекательной благодаря своей простоте и элегантности построения решения.

Подпрограмма JACOBI. Программа JACOBI используется для расчета всех собственных значений и соответствующих собственных векторов обобщенной задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$. Указания, касающиеся введения независимых переменных и использования подпрограммы даются в строках для комментариев к программе.

```

SUBROUTINE JACOBI (A,B,X,EIGV,D,N,RTOL,NSMAX,IFPR,IOUT)      JAC00001
C . . . . . JAC00002
C . . . . . JAC00003
C .   P R O G R A M . JAC00004
C .   TO SOLVE THE GENERALIZED EIGENPROBLEM USING THE . JAC00005
C .   GENERALIZED JACOBI ITERATION . JAC00006
C . . . . . JAC00007
C .   - - INPUT VARIABLES - - . JAC00008
C .   A(N,N) = STIFFNESS MATRIX (ASSUMED POSITIVE DEFINITE). JAC00009
C .   B(N,N) = MASS-MATRIX (ASSUMED POSITIVE DEFINITE) . JAC00010
C .   X(N,N) = STORAGE FOR EIGENVECTORS . JAC00011
C .   EIGV(N) = STORAGE FOR EIGENVALUES . JAC00012
C .   NN = NUMBER OF EQUATIONS . JAC00013
C .   D(N) = ORDER OF MATRICES A AND B . JAC00014
C .   RTOL = CONVERGENCE TOLERANCE (US. SET TO 10.**-12) . JAC00015
C .   NSMAX = MAXIMUM NUMBER OF SWEEOS ALLOWED . JAC00016

```

```

C . (USUALLY SET TO 15) . JAC00017
C . IFPR = FLAG FOR PRINTING DURING ITERATION . JAC00018
C . EQ.0 NO PRINTING . JAC00019
C . EQ.1 INTERMEDIATE RESULTS ARE PRINTED . JAC00020
C . IOUT = UNIT NUMBER USED FOR OUTPUT . JAC00021
C . . JAC00022
C . - - OUTPUT - - . JAC00023
C . A(N,N) = DIAGONALIZED STIFFNESS MATRIX . JAC00024
C . B(N,N) = DIAGONALIZED MASS MATRIX . JAC00025
C . X(N,N) = EIGENVECTORS STORED COLUMNWISE . JAC00026
C . EIGV=N EIGENVALUES . JAC00027
C . . JAC00028
C . . JAC00029
C . . . . . IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z) . JAC00030
C . . . . . JAC00031
C . THIS PROGRAM IS USED IN SINGLE PRECISION ARITHMETIC ON CRAY . JAC00032
C . EQUIPMENT AND DOUBLE PRECISION ARITHMETIC ON IBM MACHINES, . JAC00033
C . ENGINEERING WORKSTATIONS AND PCS. DEACTIVATE ABOVE LINE FOR . JAC00034
C . SINGLE PRECISION ARITHMETIC. . JAC00035
C . . . . . JAC00036
C . . . . . DIMENSION A(N,N),B(N,N),X(N,N),EIGV(N),D(N) . JAC00037
C . . JAC00038
C . INITIALIZE EIGENVALUE AND EIGENVECTOR MATRICES . JAC00039
C . . JAC00040
C . DO 10 I=1,N . JAC00041
C . IF (A(I,I).GT.O. .AND. B(I,I).GT.O.) GO TO 4 . JAC00042
C . WRITE (IOUT,2020) . JAC00043
C . GO TO 800 . JAC00044
C . 4 D(I)=A(I,I)/B(I,I) . JAC00045
C . 10 EIGV(I)=D(I) . JAC00046
C . DO 30 I=1,N . JAC00047
C . DO 20 J=1,N . JAC00048
C . 20 X(I,J)=0. . JAC00049
C . 30 X(I,I)=1. . JAC00050
C . IF (N.EQ.1) GO TO 900 . JAC00051
C . . JAC00052
C . INITIALIZE SWEEP COUNTER AND BEGIN ITERATION . JAC00053
C . . JAC00054
C . NSWEEP=0 . JAC00055
C . NR=N - 1 . JAC00056
C . 40 NSWEEP=MSWEEP + 1 . JAC00057
C . IF (IFPR.EQ.1) WRITE (IOUT,2000) NSWEEP . JAC00058
C . . JAC00059
C . CHECK IF PRESENT OFF-DIAGONAL ELEMENT IS LARGE ENOUGH TO . JAC00060
C . REQUIRE ZEROING . JAC00061
C . . JAC00062
C . EPS=(.01)**(NSWEEP*2) . JAC00063
C . DO 210 J=1,NR . JAC00064
C . JJ=J + 1 . JAC00065
C . DO 210 K=JJ,N . JAC00066
C . EPTOLA=(A(J,K)/A(J,J))*(A(J,K)/A(K,K)) . JAC00067
C . EPTOLB=(B(J,K)/B(J,J))*(B(J,K)/B(K,K)) . JAC00068
C . IF (EPTOLA.LT.EPS .AND. EPTOLB.LT.EPS) GO TO 210 . JAC00069
C . . JAC00070
C . IF ZEROING IS REQUIRED, CALCULATE THE ROTATION MATRIX . JAC00071

```

C	ELEMENTS CA AND CG	JAC00072
C		JAC00073
	AKK=A(K,K)*B(J,K) - B(K,K)*A(J,K)	JAC00074
	AJJ=A(J,J)*B(J,K) - B(J,J)*A(J,K)	JAC00075
	AB=A(J,J)*B(K,K) - A(K,K)*B(J,J)	JAC00076
	SCALE=A(K,K)*B(K,K)	JAC00077
	ABCH=AB/SCALE	JAC00078
	AKKCH=AKK/SCALE	JAC00079
	AJJCH=AJJ/SCALE	JAC00080
	CHECK=(ABCH*ABCH + 4.*AKKCH*AJJCH)/4.	JAC00081
	IF (CHECK) 50,60,60	JAC00082
50	WRITE (IOUT,2020)	JAC00083
	GO TO 800	JAC00084
60	SQCH=SCALE*SQRT(CHECK)	JAC00085
	D1=AB/2. + SQCH	JAC00086
	D2=AB/2. - SQCH	JAC00087
	DEN=D1	JAC00088
	IF (ABS(D2).GT.ABS(D1)) DEN=D2	JAC00089
	IF (DEN) 80,70,80	JAC00090
70	CA=0.	JAC00091
	CG=-A(J,K)/A(K,K)	JAC00092
	GO TO 90	JAC00093
80	CA=AKK/DEN	JAC00094
	CG=-AJJ/DEN	JAC00095
C		JAC00096
C	PERFORM THE GENERALIZED ROTATION TO ZERO ELEMENTS	JAC00097
C		JAC00098
	90 IF (N-2) 100,190,100	JAC00099
100	JP1=J + 1	JAC00100
	JM1=J - 1	JAC00101
	KP1=K + 1	JAC00102
	KM1=K- 1	JAC00103
	IF (JM1-1) 130,110,110	JAC00104
110	DO 120 I=1,JM1	JAC00105
	AJ=A(I,J)	JAC00106
	BJ=B(I,J)	JAC00107
	AK=A(I,K)	JAC00108
	BK=B(I,K)	JAC00109
	A(I,J)=AJ + CG*AK	JAC00110
	B(I,J)=BJ + CG*BK	JAC00111
	A(I,K)=AK + CA*AJ	JAC00112
120	B(I,K)=BK + CA*BJ	JAC00113
130	IF (KP1-N) 140,140,160	JAC00114
140	DO 150 I=KP1,N	JAC00115
	AJ=A(J,I)	JAC00116
	BJ=B(J,I)	JAC00117
	AK=A(K,I)	JAC00118
	BK=B(K,I)	JAC00119
	A(J,I)=AJ + CG*AK	JAC00120
	B(J,I)=BJ + CG*BK	JAC00121
	A(K,I)=AK + CA*AJ	JAC00122
150	B(K,I)=BK + CA*BJ	JAC00123
160	IF (JP1-KM1) 170,170,190	JAC00124
170	DO 180 I=JP1,KM1	JAC00125
	AJ=A(J,I)	JAC00126

	BJ=B(J,I)	JAC00127
	AK=A(I,K)	JAC00128
	BK=B(I,K)	JAC00129
	A(J,I)=AJ + CG*AK	JAC00130
	B(J,I)=BJ + CG*BK	JAC00131
	A(I,K)=AK + CA*AJ	JAC00132
180	B(I,K)=BK + CA*BJ	JAC00133
190	AK=A(K,K)	JAC00134
	BK=B(K,K)	JAC00135
	A(K,K)=AK + 2.*CA*A(J,K) + CA*CA*A(J,J)	JAC00136
	B(K,K)=BK + 2.*CA*B(J,K) + CA*CA*B(J,J)	JAC00137
	A(J,J)=A(J,J) + 2.*CG*A(J,K) + CG*CG*AK	JAC00138
	B(J,J)=B(J,J) + 2.*CG*B(J,K) + CG*CG*BK	JAC00139
	A(J,K)=0.	JAC00140
	B(J,K)=0.	JAC00141
C		JAC00142
C	UPDATE THE EIGENVECTOR MATRIX AFTER EACH ROTATION	JAC00143
C		JAC00144
	DO 200 I=1,N	JAC00145
	XJ=X(I,J)	JAC00146
	XK=X(I,K)	JAC00147
	X(I,J)=XJ + CG*XK	JAC00148
200	X(I,K)=XK + CA*XJ	JAC00149
210	CONTINUE	JAC00150
C		JAC00151
C	UPDATE THE EIGENVALUES AFTER EACH SWEEP	JAC00152
C		JAC00153
	DO 220 I=1,N	JAC00154
	IF (A(I,I).GT.0. .AND. B(I,I).GT.0.) GO TO 220	JAC00155
	WRITE (IOUT,2020)	JAC00156
	GO TO 800	JAC00157
220	EIGV(I)=A(I,I)/B(I,I)	JAC00158
	IF (IFPR.EQ.0) GO TO 230	JAC00159
	WRITE (IOUT,2030)	JAC00160
	WRITE (IOUT,2010) (EIGV(I),I=1,N)	JAC00161
C		JAC00162
C	CHECK FOR CONVERGENCE	JAC00163
C		JAC00164
230	DO 240 I=1,N	JAC00165
	TOL=RTOL*D(I)	JAC00166
	DIF=ABS(EIGV(I)-D(I))	JAC00167
	IF (DIF.GT.TOL) GO TO 280	JAC00168
240	CONTINUE	JAC00169
C		JAC00170
C	CHECK OFF-DIAGONAL ELEMENTS TO SEE IF ANOTHER SWEEP IS NEEDED	JAC00171
C		JAC00172
	EPS=RTOL**2	JAC00173
	DO 250 J=1,NR	JAC00174
	JJ=J + 1	JAC00175
	DO 250 K=JJ,N	JAC00176
	EPSA=(A(J,K)/A(J,J))*(A(J,K)/A(K,K))	JAC00177
	EPSB=(B(J,K)/B(J,J))*(B(J,K)/B(K,K))	JAC00178
	IF (EPSA.LT.EPS .AND. EPSB.LT.EPS) GO TO 250	JAC00179
	GO TO 280	JAC00180
250	CONTINUE	JAC00181

C		JAC00182
C	FILL OUT BOTTOM TRIANGLE OF RESULTANT MATRICES, SCALE EIGENVECTORS	JAC00183
C		JAC00184
255	DO 260 I=1,N	JAC00185
	DO 260 J=1,N	JAC00186
	A(J,I)=A(I,J)	JAC00187
260	B(J,I)=B(I,J)	JAC00188
	DO 270 J=1,N	JAC00189
	BB=SQRT(B(J,J))	JAC00190
	DO 270 K=1,N	JAC00191
270	X(K,J)=X(K,J)/BB	JAC00192
	GO TO 900	JAC00193
C		JAC00194
C	UPDATE D MATRIX AND START NEW SWEEP, IF ALLOWED	JAC00195
C		JAC00196
280	DO 290 I=1,N	JAC00197
290	D(I)=EIGV(I)	JAC00198
	IF (NSWEEP.LT.NSMAX) GO TO 40	JAC00199
	GO TO 255	JAC00200
C		JAC00201
800	STOP	JAC00202
900	RETURN	JAC00203
C		JAC00204
2000	FORMAT (//,' SWEEP NUMBER IN *JACOBI* = ',18)	JAC00205
2010	FORMAT (' ',6E20.12)	JAC00206
2020	FORMAT (//,' *** ERROR *** SOLUTION STOP',/,	JAC00207
1	' MATRICES NOT POSITIVE DEFINITE')	JAC00208
2030	FORMAT (//,' CURRENT EIGENVALUES IN *JACOBI* ARE ',/)	JAC00209
	END	JAC00210

11.3.3. Метод обратной итерации Хаусхолдера-QR

Еще одна чрезвычайно важная процедура решения с помощью преобразования — это метод обратной итерации Хаусхолдера-QR (IHQR), хотя применение этой процедуры ограничено решением стандартной задачи о собственных значениях (см. работы [Francis, 1961], [Wilkinson, 1965-2], [Parlett, 1968], [Parlett, 1965], [Martin, Reinsch, Wilkinson, 1968]). Поэтому, если рассматривается обобщенная задача о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, то она должна быть вначале преобразована к стандартной форме, и уже после этого может использоваться процедура решения IHQR. Как указывается в разделе 10.2.5, это преобразование эффективно лишь в некоторых случаях.

При последующем обсуждении мы рассматриваем задачу $\mathbf{K}\phi = \lambda\phi$, в которой матрица \mathbf{K} может иметь нулевые (и могла бы иметь также и отрицательные) собственные значения. Поэтому перед применением алгоритма IHQR нет необходимости вводить сдвиг, чтобы строить решение только для положительных собственных значений (см. раздел 10.2.3). Название «IHQR-метод решения» символизирует следующие три этапа построения решения:

1. Преобразования Хаусхолдера применяются для приведения матрицы \mathbf{K} к трехдиагональной форме.
2. Итерация QR позволяет получить все собственные значения.
3. Требуемые собственные векторы трехдиагональной матрицы вычисляются с помощью применения обратной итерации. Эти векторы преобразуются, чтобы получить собственные векторы матрицы \mathbf{K} .

Основное отличие метода IHQR от метода решения Якоби состоит в том, что вначале матрица преобразуется к трехдиагональной форме без итерации. После этого преобразования матрица может быть эффективно использована при итеративном решении QR, в процессе которого вычисляются все собственные значения. Наконец, вычисляются

и собственные векторы, но только те, которые требуются фактически. Заметим, что если не требуется вычислять много собственных векторов, то наибольшая доля численных операций уходит на преобразование матрицы \mathbf{K} к трехдиагональной форме. В дальнейшем мы подробно рассматриваем три различающихся между собой этапа, проходимые при INQR-решении.

Приведение по Хаусхолдеру. Приведение матрицы к трехдиагональной форме по Хаусхолдеру охватывает $n - 2$ преобразования формы типа (11.72); иначе говоря, используя подстановку $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}$, мы вычисляем

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{P}_k; \quad k = 1, \dots, n - 2, \quad (11.95)$$

где \mathbf{P}_k — это матрицы преобразования по Хаусхолдеру (матрицы отражения, см. упражнение 2.6):

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{I} - \theta \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T, \quad (11.96)$$

$$\theta = \frac{2}{\mathbf{w}_k^T \mathbf{w}_k}. \quad (11.97)$$

Чтобы показать, как вычисляется вектор \mathbf{w}_k , определяющий матрицу \mathbf{P}_k , мы рассмотрим случай $k = 1$, который является типичным. Во-первых, мы подразделяем \mathbf{K}_1 , \mathbf{P}_1 и \mathbf{w}_1 на подматрицы следующим образом:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{\mathbf{P}}_1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{w}}_1 \end{bmatrix}; \quad (11.98)$$

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} k_{11} & \mathbf{k}_1^T \\ \mathbf{k}_1 & \mathbf{K}_{11} \end{bmatrix},$$

где \mathbf{K}_{11} , $\bar{\mathbf{P}}_1$ и $\bar{\mathbf{w}}_1$ имеют порядок $n - 1$. В общем случае, рассматривая этап за номером k , мы имеем соответствующие матрицы порядка $n - k$. Выполняя операции умножения в (11.95) и используя обозначения из (11.98), мы получаем

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} k_{11} & \mathbf{k}_1^T \bar{\mathbf{P}}_1 \\ \bar{\mathbf{P}}_1^T \mathbf{k}_1 & \mathbf{P}_1^k \mathbf{K}_{11} \bar{\mathbf{P}}_1 \end{bmatrix}. \quad (11.99)$$

Теперь ставится условие о том, чтобы первый столбец и первая строка матрицы \mathbf{K}_2 были в трехдиагональной форме; т.е. мы хотим, чтобы матрица \mathbf{K}_2 имела форму

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} k_{11} & \times & 0 & \dots & 0 \\ \times & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & \bar{\mathbf{K}}_2 & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}, \quad (11.100)$$

где знак \times обозначает величину, отличную от нуля, и

$$\bar{\mathbf{K}}_2 = \bar{\mathbf{P}}_1^T \mathbf{K}_{11} \bar{\mathbf{P}}_1. \quad (11.101)$$

Форма матрицы \mathbf{K}_2 в (11.100) получается при осознании того, что матрица $\bar{\mathbf{P}}_1$ является матрицей отражения. Поэтому мы можем использовать $\bar{\mathbf{P}}_1$ для того, чтобы отразить вектор \mathbf{k}_1 из выражения \mathbf{K}_1 согласно (11.98) на вектор, имеющий только свой первый компонент в качестве отличного от нуля. Так как длина нового вектора должна быть равна длине \mathbf{k}_1 , то мы определяем $\bar{\mathbf{w}}_1$ из условия

$$(\mathbf{I} - \theta \bar{\mathbf{w}}_1 \bar{\mathbf{w}}_1^T) \mathbf{k}_1 = \pm \|\mathbf{k}_1\|_2 \mathbf{e}_1, \quad (11.102)$$

где \mathbf{e}_1 — это единичный вектор размерности $n - 1$; т.е. $\mathbf{e}_1^T = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$ и знак плюс или минус может быть выбран, исходя из возможности достижения наилучшей численной устойчивости. Замечая, что нам нужно получить решение для величины $\bar{\mathbf{w}}_1$ только с точностью до постоянного множителя (т.е. что только направление вектора, нормального к плоскости отражения, имеет значение, см. упражнение 2.6), мы получаем

из (11.102) в качестве подходящего значения для $\bar{\mathbf{w}}_1$

$$\bar{\mathbf{w}}_1 = \mathbf{k}_1 + \text{sign}(k_{21}) \|\mathbf{k}_1\|_2 \mathbf{e}_1, \quad (11.103)$$

где k_{21} — это элемент (2, 1) матрицы \mathbf{K}_1 .

При величине $\bar{\mathbf{w}}_1$, определенной согласно (11.103), может быть выполнено первое преобразование Хаусхолдера со значением $k = 1$ в (11.95). На следующем этапе, когда $k = 2$, мы можем рассмотреть матрицу $\bar{\mathbf{K}}_2$ из (11.100) таким же образом, как мы рассматривали \mathbf{K}_1 из (11.98), потому что приведение первого столбца и первой строки $\bar{\mathbf{K}}_2$ не оказывает воздействия на первый столбец и первую строку матрицы \mathbf{K}_2 . Таким образом, общий алгоритм преобразования матрицы \mathbf{K} к трехдиагональной форме сформулирован. Мы демонстрируем ход процедуры на следующем примере.

Пример 11.13: Используйте матрицы преобразования Хаусхолдера, чтобы привести матрицу \mathbf{K} к трехдиагональной форме, где

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Используя соотношения (11.95)–(11.103), чтобы привести столбец 1, мы получаем

$$\bar{\mathbf{w}}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 4,1231 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8,1231 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -8,1231 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \theta_1 = 0,0298575;$$

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,9701 & 0,2425 & 0 \\ 0 & 0,2425 & 0,9701 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 5 & 4,1231 & 0 & 0 \\ 4,1231 & 7,8823 & 3,5294 & -1,9403 \\ 0 & 3,5294 & 4,1177 & -3,6380 \\ 0 & -1,9403 & -3,6380 & 5 \end{bmatrix}.$$

После этого мы приводим столбец 2,

$$\bar{\mathbf{w}}_2 = \begin{bmatrix} 3,5294 \\ -1,9403 \end{bmatrix} + 4,0276 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,5570 \\ -1,9403 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7,5570 \\ -1,9403 \end{bmatrix}; \quad \theta_2 = 0,0328553;$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,8763 & 0,4817 \\ 0 & 0 & 0,4817 & 0,8763 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} 5 & 4,1231 & 0 & 0 \\ 4,1231 & 7,8823 & -4,0276 & 0 \\ 0 & -4,0276 & 7,3941 & 2,3219 \\ 0 & 0 & 2,3219 & 1,7236 \end{bmatrix}.$$

Необходимо указать на некоторые важные численные аспекты. Во-первых, приведенные матрицы $\mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3, \dots, \mathbf{K}_{n-1}$ являются симметричными. Это означает, что в процессе приведения мы должны вводить в память только нижнюю симметричную часть матрицы \mathbf{K} . Кроме того, чтобы ввести в память $\bar{\mathbf{w}}_k, k = 1, 2, \dots, n-2$, мы можем использовать ячейки памяти, расположенные ниже поддиагональных элементов той матрицы, которая подвергается приведению.

Недостатком преобразований Хаусхолдера является то, что в части матрицы \mathbf{K}_{k+1} , не подвергавшейся приведению, ширина ленты возрастает. Следовательно, в процессе приведения мы, по существу, не сможем извлечь преимущества из ленточного характера матрицы \mathbf{K} .

Важным аспектом проводимого преобразования является численная оценка матричного произведения $\bar{\mathbf{P}}_1^T \mathbf{K}_{11} \bar{\mathbf{P}}_1$ и аналогичных произведений, встречающихся на последующих этапах. В наиболее общем случае тройное матричное произведение матриц порядка n требует проведения $2n^3$ операций, и если бы такое число операций требовалось провести в действительности, то приведение по Хаусхолдеру было бы совершенно неэкономичным. Однако если воспользоваться преимуществом специального характера матрицы $\bar{\mathbf{P}}_1$, то мы сможем дать численную оценку произведения $\bar{\mathbf{P}}_1^T \mathbf{K}_{11} \bar{\mathbf{P}}_1$ с помощью такого расчета:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{K}_{11} \bar{\mathbf{w}}_1 \\ \mathbf{p}_1^T &= \theta_1 \mathbf{v}_1^T \\ \beta_1 &= \mathbf{p}_1^T \bar{\mathbf{w}}_1 \\ \mathbf{q}_1 &= \mathbf{p}_1 - \theta_1 \beta_1 \bar{\mathbf{w}}_1 \end{aligned} \right\} \quad (11.104)$$

и тогда

$$\bar{\mathbf{P}}_1^T \mathbf{K}_{11} \bar{\mathbf{P}}_1 = \mathbf{K}_{11} - \bar{\mathbf{w}}_1 \mathbf{p}_1^T - \mathbf{q}_1 \bar{\mathbf{w}}_1^T, \quad (11.105)$$

а проведение этих выкладок требует лишь, примерно, $3m^2 + 3m$ операций, где m — это порядок матриц $\bar{\mathbf{P}}_1$ и \mathbf{K}_{11} (т.е. в данном случае $m = n-1$). Следовательно, выполнение умножения $\bar{\mathbf{P}}_1^T \mathbf{K}_{11} \bar{\mathbf{P}}_1$ требует числа операций порядка m в квадрате, а не в кубе, что является весьма значительным уменьшением. Мы демонстрируем процедуру, задаваемую соотношениями (11.104) и (11.105), путем переработки примера 11.13.

Пример 11.14: Используйте соотношения (11.104) и (11.105), чтобы привести матрицу \mathbf{K} из примера 11.13 к трехдиагональной форме.

Здесь мы получаем для приведения столбца 1 с использованием $\bar{\mathbf{w}}_1$ и θ_1 , вычисленных в примере 11.13,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{w}}_1 = \begin{bmatrix} -52,738 \\ 38,4924 \\ -12,1231 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{p}_1^T = [-1,5746 \quad 1,1493 \quad -0,36197]; \quad \beta_1 = 13,9403; \quad \mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 1,8064 \\ 0,7331 \\ -0,3620 \end{bmatrix};$$

$$\bar{\mathbf{P}}_1^T \mathbf{K}_{11} \bar{\mathbf{P}}_1 = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12,7910 & -9,335 & 2,9403 \\ -1,5746 & 1,1493 & -0,3620 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -14,6734 & 1,8064 & 0 \\ -5,9548 & 0,73307 & 0 \\ 2,9403 & -0,3620 & 0 \end{bmatrix}$$

или

$$\bar{\mathbf{P}}_1^T \mathbf{K}_{11} \bar{\mathbf{P}}_1 = \begin{bmatrix} 7,8823 & 3,5294 & -1,9403 \\ 3,5294 & 4,1177 & -3,6380 \\ -1,9403 & -3,6380 & 5 \end{bmatrix}$$

и, следовательно,

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 5 & 4,1231 & 0 & 0 \\ 4,1231 & 7,8823 & 3,5294 & -1,9403 \\ 0 & 3,5294 & 4,1177 & -3,6380 \\ 0 & -1,9403 & -3,6380 & 5 \end{bmatrix}.$$

После этого мы подвергаем приведению второй столбец

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4,1177 & -3,6380 \\ -3,6380 & 5 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{w}}_2 = \begin{bmatrix} 38,1759 \\ -37,1941 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{p}_2^T = [1,2543 \quad -1,2220]; \quad \beta_2 = 11,8497; \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} -1,6878 \\ -0,4666 \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}_2^T \mathbf{K}_{22} \bar{\mathbf{P}}_2 &= \begin{bmatrix} 4,1177 & -3,6380 \\ -3,6380 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9,4786 & -9,2348 \\ -2,4337 & 2,3711 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -12,7550 & 3,2749 \\ -3,5263 & 0,90538 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 7,3941 & 2,3219 \\ 2,3219 & 1,7236 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} 5 & 4,1231 & 0 & 0 \\ 4,1231 & 7,9823 & -4,0276 & 0 \\ 0 & -4,0276 & 7,3941 & 2,3219 \\ 0 & 0 & 2,3219 & 1,7236 \end{bmatrix}.$$

Итерация QR. При проведении процедуры решения INQR итерация QR применяется к трехдиагональной матрице, полученной путем применения к матрице \mathbf{K} преобразования Хаусхолдера. Однако следует иметь в виду, что итерация QR могла бы быть с тем же успехом применена и к исходной матрице \mathbf{K} и что преобразование этой матрицы к трехдиагональной форме до итерации проводится лишь для того, чтобы повысить эффективность решения. Поэтому ниже мы рассматриваем прежде всего вопрос о том, как этот итеративный процесс применяется к симметричной матрице \mathbf{K} общего вида.

Название «итерация QR» обязано своим происхождением обозначениям, используемым в алгоритме. А именно, основной этап итерации связан с представлением матрицы \mathbf{K} в форме

$$\mathbf{K} = \mathbf{Q}\mathbf{R}, \quad (11.106)$$

где \mathbf{Q} — ортогональная матрица, а \mathbf{R} — верхняя треугольная матрица. После этого мы формируем

$$\mathbf{R}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \mathbf{K} \mathbf{Q}. \quad (11.107)$$

Это означает, что, по сути дела, путем расчета $\mathbf{R}\mathbf{Q}$ мы осуществляем преобразование вида (11.72).

Факторизация, соответствующая (11.106), могла бы быть проведена путем применения к столбцам матрицы \mathbf{K} процесса Грама–Шмидта. На практике оказывается более

эффективным привести эту матрицу к верхней треугольной форме, используя при этом ротационные матрицы Якоби; иначе говоря, мы вычисляем

$$\mathbf{P}_{n,n-1}^T \dots \mathbf{P}_{3,1}^T \mathbf{P}_{2,1}^T \mathbf{K} = \mathbf{R}, \quad (11.108)$$

где ротационная матрица $\mathbf{P}_{j,i}^T$ выбирается так, чтобы привести к нулевому значению элемент (j, i) . Используя (11.08), мы в соответствии с (11.106) получаем

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}_{2,1} \mathbf{P}_{3,1} \dots \mathbf{P}_{n,n-1}. \quad (11.109)$$

Алгоритм итерации QR получается путем повторения процесса, заданного соотношениями (11.106) и (11.107). Используя обозначение $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}$, мы формируем

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{Q}_k \mathbf{R}_k, \quad (11.110)$$

а затем

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{R}_k \mathbf{Q}_k, \quad (11.111)$$

где после этого, если не принимать во внимание того, что собственные значения и собственные векторы могут появляться не в обычном порядке, то $\mathbf{K}_{k+1} \rightarrow \mathbf{\Lambda}$ и $\mathbf{Q}_1 \dots \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{Q}_k \rightarrow \mathbf{\Phi}$ при $k \rightarrow \infty$.

Мы демонстрируем процесс итерации на следующем примере.

Пример 11.15: Примените итерацию QR при \mathbf{Q} , полученном в форме ротационных матриц Якоби, для расчета собственной системы матрицы \mathbf{K} , где

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ротационная матрица Якоби $\mathbf{P}_{j,i}^T$, применяемая для приведения к нулю элемента текущей матрицы (j, i) , задается в виде

$$\mathbf{P}_{j,i}^T = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \cos \theta & \sin \theta & \text{--- } i\text{-я строка} & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ & & -\sin \theta & \cos \theta & \text{--- } j\text{-я строка} & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

где

$$\sin \theta = \frac{\bar{k}_{ji}}{(\bar{k}_{ii}^2 + \bar{k}_{ji}^2)^{1/2}}; \quad \cos \theta = \frac{\bar{k}_{ii}}{(\bar{k}_{ii}^2 + \bar{k}_{ji}^2)^{1/2}},$$

а черта сверху означает, что используются элементы текущей матрицы.

Действуя так же, как и с (11.108), мы получаем для элемента $(2, 1)$:

$$\sin \theta = -0,6247; \quad \cos \theta = 0,7809;$$

$$\mathbf{P}_{2,1} = \begin{bmatrix} 0,7809 & 0,6247 & 0 & 0 \\ -0,6247 & 0,7809 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и

$$\mathbf{P}_{2,1}^T \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 6,403 & -6,872 & 3,280 & -0,6247 \\ 0 & 2,186 & -2,499 & 0,7809 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Далее мы приводим к нулю элемент (3, 1),

$$\mathbf{P}_{3,1}^T \mathbf{P}_{2,1}^T \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 6,481 & -7,407 & 4,166 & -1,234 \\ 0 & 2,186 & -2,499 & 0,7809 \\ 0 & -2,892 & 5,422 & -3,856 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Замечая, что элемент (4, 1) уже равен нулю, мы продолжаем факторизацию путем приведения к нулю элемента (3, 2),

$$\mathbf{P}_{3,2}^T \mathbf{P}_{3,1}^T \mathbf{P}_{2,1}^T \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 6,481 & -7,407 & 4,166 & -1,234 \\ 0 & 3,625 & -5,832 & 3,546 \\ 0 & 0 & 1,277 & -1,703 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Продолжая действовать таким же образом, мы получаем

$$\mathbf{P}_{4,2}^T \mathbf{P}_{3,2}^T \mathbf{P}_{3,1}^T \mathbf{P}_{2,1}^T \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 6,481 & -7,407 & 4,166 & -1,234 \\ 0 & 3,761 & -6,686 & 4,748 \\ 0 & 0 & 1,277 & -1,703 \\ 0 & 0 & -2,305 & 3,877 \end{bmatrix}$$

и, наконец,

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{P}_{4,3}^T \mathbf{P}_{4,2}^T \mathbf{P}_{3,2}^T \mathbf{P}_{3,1}^T \mathbf{P}_{2,1}^T \mathbf{K},$$

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 6,481 & -7,407 & 4,166 & -1,234 \\ 0 & 3,761 & -6,686 & 4,748 \\ 0 & 0 & 2,635 & -4,216 \\ 0 & 0 & 0 & 0,3892 \end{bmatrix}.$$

Кроме того, мы имеем

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{P}_{2,1} \mathbf{P}_{3,1} \mathbf{P}_{3,2} \mathbf{P}_{4,2} \mathbf{P}_{4,3},$$

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 0,7715 & 0,4558 & 0,3162 & 0,3114 \\ -0,6172 & 0,3799 & 0,4216 & 0,5449 \\ 0,1543 & -0,7597 & 0,1054 & 0,6228 \\ 0 & 0,2659 & -0,8433 & 0,4671 \end{bmatrix}.$$

Первый этап итерации QR завершается вычислением

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{R}_1 \mathbf{Q}_1,$$

чтобы получить

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 10,21 & -3,353 & 0,4066 & 0 \\ -3,353 & 7,771 & -3,123 & 0,1035 \\ 0,4066 & -3,123 & 3,833 & -0,3282 \\ 0 & 0,1035 & -0,3282 & 0,1818 \end{bmatrix}.$$

Приводимые ниже результаты получены на следующих этапах QR. Для $k = 2$:

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 10,76 & -5,723 & 1,504 & -0,0446 \\ 0 & 6,974 & -4,163 & 0,2284 \\ 0 & 0 & 2,265 & -0,2752 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1471 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 0,6024 & 0,4943 & 0,5084 & 0,3665 \\ -0,6885 & -0,0257 & 0,4099 & 0,5978 \\ 0,3873 & -0,6409 & -0,2715 & 0,6046 \\ -0,1147 & 0,5867 & 0,7070 & 0,3779 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{K}_3 = \mathbf{R}_2 \mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 12,05 & -2,331 & 0,0856 & 0 \\ -2,331 & 7,726 & -0,9483 & 0,0022 \\ 0,0856 & -0,9483 & 2,0740 & -0,0173 \\ 0 & 0,0022 & -0,0173 & 0,1461 \end{bmatrix}.$$

Для $k = 3$:

$$\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 12,28 & -3,761 & 0,2785 & -0,0005 \\ 0 & 7,202 & -1,173 & 0,0044 \\ 0 & 0 & 1,938 & -0,0182 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1459 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 0,5011 & 0,5302 & 0,5743 & 0,3713 \\ -0,6682 & -0,2076 & 0,3860 & 0,6012 \\ 0,5000 & -0,5157 & -0,3492 & 0,6018 \\ -0,2290 & 0,6401 & -0,6319 & 0,3722 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{K}_4 = \mathbf{R}_3 \mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 12,77 & -1,375 & 0,0135 & 0 \\ -1,375 & 7,162 & -0,2481 & 0 \\ 0,0135 & -0,2481 & 1,922 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0013 & 0,1459 \end{bmatrix}.$$

После девяти итераций мы имеем

$$\mathbf{R}_9 = \begin{bmatrix} 13,09 & -0,0869 & 0 & 0 \\ 0 & 6,854 & -0,0005 & 0 \\ 0 & 0 & 1,910 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1459 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_3 \mathbf{Q}_4 \mathbf{Q}_5 \mathbf{Q}_6 \mathbf{Q}_7 \mathbf{Q}_8 \mathbf{Q}_9 = \begin{bmatrix} 0,3746 & 0,5997 & 0,6015 & 0,3717 \\ -0,6033 & -0,3689 & 0,3718 & 0,6015 \\ 0,5997 & -0,3746 & -0,3717 & 0,6015 \\ -0,3689 & 0,6033 & -0,6015 & 0,3718 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{K}_{10} = \begin{bmatrix} 13,09 & -0,0298 & 0 & 0 \\ -0,0298 & 6,8542 & -0,0001 & 0 \\ 0 & -0,0001 & 1,910 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1459 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, после девяти этапов итерации QR получим

$$\lambda_1 \doteq 0,1459; \quad \phi_1 \doteq \begin{bmatrix} 0,3717 \\ 0,6015 \\ 0,6015 \\ 0,3718 \end{bmatrix};$$

$$\lambda_2 \doteq 1,910; \quad \phi_2 \doteq \begin{bmatrix} 0,6015 \\ 0,3718 \\ -0,3717 \\ -0,6015 \end{bmatrix};$$

$$\lambda_3 \doteq 6,854; \quad \phi_3 \doteq \begin{bmatrix} 0,5997 \\ -0,3689 \\ -0,3746 \\ 0,6033 \end{bmatrix};$$

$$\lambda_4 \doteq 13,09; \quad \phi_4 \doteq \begin{bmatrix} 0,3746 \\ -0,6033 \\ 0,5997 \\ -0,3689 \end{bmatrix}.$$

Эти результаты можно сравнить с результатами, полученными при использовании метода Якоби в примере 11.9. Интересно отметить, что в приведенном выше решении выражения для λ_1 и ϕ_1 сошлись первыми и, на самом деле, были достаточно хорошо предсказаны после всего лишь трех итераций QR. Это является следствием того факта, что итерация QR имеет очень много общего с обратной итерацией (см. пример 11.16), при которой низшие собственные значения и соответствующие векторы сходятся первыми.

Несмотря на то, что итерация QR может представляться весьма похожей на процедуру решения Якоби, этот метод, фактически, коренным образом отличается от метода Якоби. Это можно увидеть, изучая характеристики сходимости процедуры решения QR, потому что тогда выясняется, что *метод QR тесно связан с методом обратной итерации*. В примере 11.16 мы сравниваем итерацию QR с обратной итерацией, в которой предполагается, что матрица \mathbf{K} не является особенной. Как мы можем вспомнить, это предположение необходимо для выполнения обратной итерации и всегда может реализоваться путем использования сдвига (см. раздел 10.2.3).

Пример 11.16: Покажите наличие теоретической взаимосвязи между итерацией QR и обратной итерацией.

При применении метода QR после l этапов итерации получаем

$$\mathbf{K}_{l+1} = \mathbf{Q}_l^T \mathbf{Q}_{l-1}^T \dots \mathbf{Q}_1^T \mathbf{K}_1 \mathbf{Q}_1 \dots \mathbf{Q}_{l-1} \mathbf{Q}_l,$$

или

$$\mathbf{K}_{l+1} = \mathbf{P}_1^T \mathbf{K}_1 \mathbf{P}_l; \quad \mathbf{P}_l = \mathbf{Q}_1 \dots \mathbf{Q}_l.$$

Дадим определение

$$\mathbf{S}_l = \mathbf{R}_l \dots \mathbf{R}_1.$$

Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_l \mathbf{S}_l &= \mathbf{P}_{l-1} \mathbf{Q}_l \mathbf{R}_l \mathbf{S}_{l-1} = \\ &= \mathbf{P}_{l-1} \mathbf{K}_l \mathbf{S}_{l-1}. \end{aligned}$$

Если заметим, что

$$\mathbf{K}_1 \mathbf{P}_{l-1} = \mathbf{P}_{l-1} \mathbf{K}_l,$$

то получим

$$\mathbf{P}_l \mathbf{S}_l = \mathbf{K}_1 \mathbf{P}_{l-1} \mathbf{S}_{l-1}.$$

Аналогичным образом получим $\mathbf{P}_{l-1} \mathbf{S}_{l-1} = \mathbf{K}_1 \mathbf{P}_{l-2} \mathbf{S}_{l-2}$, и так далее, таким образом приходя к выводу о том, что

$$\mathbf{P}_l \mathbf{S}_l = \mathbf{K}^l. \quad (\text{a})$$

Предполагая, что матрица \mathbf{K} — неособенная, из соотношения (a) получим

$$\mathbf{P}_l = \mathbf{K}^{-l} \mathbf{S}_l^T,$$

или, приравнявая столбцы в обеих частях соотношения,

$$\mathbf{P}_l \mathbf{E} = \mathbf{K}^{-l} \mathbf{S}_l^T \mathbf{E}, \quad (\text{b})$$

где матрица \mathbf{E} состоит из p последних столбцов матрицы \mathbf{I} .

Рассмотрим теперь обратную итерацию в применении к p векторам. Этот итеративный процесс может быть записан как

$$\mathbf{K}\mathbf{X}_k = \mathbf{X}_{k-1}\mathbf{L}_k; \quad k = 1, 2, \dots,$$

где \mathbf{L}_k — нижняя треугольная матрица, выбранная так, что $\mathbf{X}_k^T \mathbf{X}_k = \mathbf{I}$. Матрица \mathbf{L}_k может быть определена путем использования процесса Грама–Шмидта на векторах итерации. Следовательно, после l этапов мы имеем

$$\mathbf{X}_l = \mathbf{K}^{-l} \mathbf{X}_0 \bar{\mathbf{L}}_l; \quad \bar{\mathbf{L}}_l = \mathbf{L}_1 \dots \mathbf{L}_l. \quad (c)$$

С другой стороны, соотношение (b) может быть записано в виде

$$\mathbf{P}_l \mathbf{E} = \mathbf{K}^{-l} \mathbf{E} \bar{\mathbf{S}}_l, \quad (d)$$

где $\bar{\mathbf{S}}_l$ состоит из p последних столбцов и строк матрицы \mathbf{S}_l^T . Используя соотношения $\mathbf{X}_l^T \mathbf{X}_l = \mathbf{I}$ и $(\mathbf{P}_l \mathbf{E})^T (\mathbf{P}_l \mathbf{E}) = \mathbf{I}$, мы получаем из (c) и (d), соответственно,

$$\bar{\mathbf{L}}_l^{-T} \bar{\mathbf{L}}_l^{-1} = \mathbf{X}_0^T \mathbf{K}^{-2l} \mathbf{X}_0 \quad (e)$$

и

$$\bar{\mathbf{S}}_l^{-T} \bar{\mathbf{S}}_l^{-1} = \mathbf{E}^T \mathbf{K}^{-2l} \mathbf{E}. \quad (f)$$

Теперь уравнения (e) и (f) могут быть использованы для того, чтобы указать на взаимосвязь между обратной итерацией и процедурой решения QR. А именно, если мы выбираем $\mathbf{X}_0 = \mathbf{E}$, то мы найдем из соотношений (e) и (f), что $\bar{\mathbf{L}}_l = \bar{\mathbf{S}}_l$, так как эти матрицы представляют собой множители Холецки для одной и той же положительно определенной матрицы. Однако если после этого обратиться к формулам (e) и (d), то мы можем прийти к выводу о том, что обратная итерация позволяет получить векторы \mathbf{X}_l , представляющие собой последние p столбцов матрицы \mathbf{P}_l , принадлежащей решению QR.

Взаимосвязь между методом решения QR и простой обратной итерацией указывает на то, что должно быть возможным ускорение сходимости QR-итерации, описываемой формулами (11.110) и (11.111). Это действительно имеет место, и на практике итерация QR используется со сдвигом; это значит, что вместо формул (11.110) и (11.111) применяются следующие разложения:

$$\mathbf{K}_k - \mu_k \mathbf{I} = \mathbf{Q}_k \mathbf{R}_k, \quad (11.112)$$

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{R}_k \mathbf{Q}_k + \mu \mathbf{I}, \quad (11.113)$$

где теперь, как и прежде, $\mathbf{K}_{k+1} \rightarrow \mathbf{A}$ и $\mathbf{Q}_1 \dots \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{Q}_k \rightarrow \mathbf{\Phi}$ при $k \rightarrow \infty$. Однако если μ_k представляет собой элемент (n, n) матрицы \mathbf{K}_k , то итерация QR соответствует итерации с коэффициентом Рэлея, которая в конечном итоге дает сходимость по кубическому закону.

Как уже указывалось ранее, на практике итерация QR должна применяться после приведения матрицы \mathbf{K} к трехдиагональной форме с помощью использования матриц преобразования Хаусхолдера; это означает, что решение QR должно быть применено к матрице \mathbf{K}_{n-1} в соответствии с соотношением (11.95), и эту матрицу мы теперь назовем матрицей \mathbf{T}_1 . Когда эта матрица является трехдиагональной, то процесс QR оказывается очень эффективным; то есть, как показывает опыт, для построения решения, содержащего все собственные значения, требуется примерно $9n^2$ операций. Кроме того, нет необходимости формально выполнять всю вышеописанную процедуру, продемонстрированную в примере 11.15; вместо этого мы можем использовать явные формулы, связывающие элементы матрицы \mathbf{T}_{k+1} с элементами матрицы \mathbf{T}_k , $k = 1, 2, \dots$ (см. книгу [Wilkinson, 1965-1]).

Вычисление собственных векторов. Собственные значения обычно рассчитываются с полной машинной точностью, так как при применении итерации QR со сдвигом сходимость реализуется очень быстро. Когда собственные значения вычислены с большой точностью, то рассчитываем лишь требуемые собственные векторы трехдиагональной матрицы \mathbf{T}_1 с помощью простой обратной итерации со сдвигами, равными соответствующим собственным значениям. Два этапа обратной итерации, начинающейся с полного единичного вектора, оказываются обычно достаточными. После этого собственные векторы матрицы \mathbf{T}_1 должны быть подвергнуты преобразованию Хаусхолдера так, чтобы

получить собственные векторы матрицы \mathbf{K} ; то есть, если обозначить i -й собственный вектор матрицы \mathbf{T}_1 символом ψ_i , то мы получим, при использовании матриц преобразования \mathbf{P}_k из (11.95),

$$\phi_i = \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \dots \mathbf{P}_{n-2} \psi_i. \quad (11.114)$$

Принимая во внимание три основных этапа описанного выше метода расчета INQR, таблица 11.4 дает краткую сводку процедуры в целом и указывает объем потребной быстрой памяти, а также требуемое число операций. Можно отметить, что наибольшая часть общего числа операций используется для выполнения преобразования Хаусхолдера согласно (11.95) и, если нужно вычислить много собственных векторов, то и для проведения преобразований собственных векторов по формуле (11.114). Очевидно поэтому, что вычисление собственных значений матрицы \mathbf{T}_1 не является слишком дорогостоящим, но преобразование матрицы \mathbf{K} к такой форме, которая может эффективно использоваться при проведении итераций, требует затраты большей части вычислительных усилий.

Таблица 11.4. Краткая сводка решения методом обратной итерации Хаусхолдера-QR

Операция	Вычисление	Число операций	Потребная память
Преобразование Хаусхолдера	$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{P}_k;$ $k = 1, 2, \dots, n-2; \mathbf{K}_1 = \mathbf{K}$	$\frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2$	
Итерации QR	$\mathbf{T}_{k+1} = \mathbf{Q}_k^T \mathbf{T}_k \mathbf{Q}_k; k = 1, 2, \dots;$ $\mathbf{T}_1 = \mathbf{K}_{n-1}$	$9n^2$	Используя симметрию матрицы
Вычисление p собственных векторов	$(\mathbf{K}_{n-1} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{x}_i^{(k+1)} = \mathbf{x}_i^{(k)};$ $k = 1, 2; i = 1, 2, \dots, p$	$10pn$	$\frac{n}{2}(n+1) + 6n$
Преобразование собственных векторов	$\phi_i = \mathbf{P}_1 \dots \mathbf{P}_{n-2} \mathbf{x}_i^{(3)};$ $i = 1, 2, \dots, p$	$pn(n-1)$	
Общее для всех собственных значений и p собств. векторов		$\frac{2}{3}n^3 + \frac{21}{2}n^2 + pn^2 + 9pn$	

Следует отметить, что табл. 11.4 не включает операций, требуемых для преобразования обобщенной задачи о собственных значениях к стандартной форме. Если это преобразование выполняется, то собственные векторы, вычисляемые согласно табл. 11.4, также должны быть преобразованы в собственные векторы обобщенной задачи, как это обсуждается в разделе 10.2.5.

11.3.4. Упражнения

- 11.5. Используйте метод Якоби для вычисления собственных значений и собственных векторов задач

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \phi = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \phi$$

и

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \phi = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \phi.$$

- 11.6. Используйте метод Якоби для вычисления собственных значений и собственных векторов задачи из упражнения 10.3.
 11.7. Проведите подробное определение значений α и γ , заданных формулой (11.89).
 11.8. Выполните итерацию QR для задачи о собственных значениях

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \phi = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \phi.$$

Примечание. Здесь необходимо вначале преобразовать задачу к стандартной форме.

11.4. Полиномиальные итерации и методы последовательностей Штурма

Тесная взаимосвязь между вычислением нулей полиномов и вычислением собственных значений была обсуждена в разделе 10.2.2. А именно, если задать характеристический полином $p(\lambda)$, где

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}), \quad (11.6)$$

то нули полинома будут собственными значениями для задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda \mathbf{M}\phi$. Поэтому, чтобы вычислить собственные значения, мы можем действовать с полиномом $p(\lambda)$ так, чтобы найти нули этого полинома, причем имеются, по существу, две стратегии — с явной и с неявной процедурой расчета — и при этом обе они могут использовать одни и те же схемы основных итераций.

При обсуждении схем полиномиальных итераций мы предполагаем, что решение выполняется непосредственно, с использованием \mathbf{K} и \mathbf{M} из конечно-элементного комплекса, т.е. без преобразования задачи к иной форме. Например, если матрица \mathbf{M} — единичная, то мы могли бы вначале преобразовать матрицу \mathbf{K} к трехдиагональной форме, как это делается при построении решения ИНР (см. раздел 11.3.3). В случае, если $\mathbf{M} \neq \mathbf{I}$, то нам следовало бы преобразовать обобщенную задачу о собственных значениях к стандартной форме (см. раздел 10.2.5), прежде чем мы сможем осуществить приведение к трехдиагональной матрице согласно Хаусхолдеру. Какую бы задачу мы в конечном итоге ни рассматривали при итеративном решении для определения требуемых собственных значений, стратегия построения этого решения не изменилась бы. Однако если требуется рассчитать лишь несколько собственных значений, то прямое решение с использованием \mathbf{K} и \mathbf{M} почти всегда оказывается наиболее эффективным.

В сочетании с методом полиномиальных итераций оказывается естественным и может оказаться эффективным использование свойства последовательности Штурма, обсуждавшегося в разделе 10.2.2. В данном разделе мы показываем, как это свойство может быть использовано.

Следует заметить, что при использовании полиномиальной итерации или метода последовательности Штурма вычисляются только собственные значения. После этого соответствующие собственные векторы могут быть эффективно получены путем использования обратной итерации со сдвигом; иначе говоря, каждый требуемый собственный вектор определяется путем обратной итерации со сдвигом, равным соответствующему собственному значению.

Все эти методики — неявные полиномиальные итерации, проверки с помощью последовательностей Штурма и векторные итерации — были скомбинированы в алгоритм поиска определителя, эффективный для небольших систем с ленточными матрицами (см. работы [Bathe 1971], а также [Bathe, Wilson, 1973-3]).

11.4.1. Явная полиномиальная итерация

При применении методов явной полиномиальной итерации первый этап сводится к тому, чтобы записать $p(\lambda)$ в форме

$$p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n \quad (11.115)$$

и вычислить полиномиальные коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_n . Второй этап состоит в вычислении корней этого полинома. Мы демонстрируем представляемую процедуру с помощью примера.

Пример 11.17: Определите коэффициенты характеристического полинома для задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, где \mathbf{K} и \mathbf{M} — матрицы, использовавшиеся в примере 11.4.

Задача состоит в том, чтобы рассчитать выражение

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 5-2\lambda & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6-2\lambda & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6-\lambda & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5-\lambda \end{bmatrix}.$$

Следуя правилам, данным в разделе 2.2 для расчета определителя, мы получаем

$$\begin{aligned} p(\lambda) = (5-2\lambda) \det \begin{bmatrix} 6-2\lambda & -4 & 1 \\ -4 & 6-\lambda & -4 \\ 1 & -4 & 5-\lambda \end{bmatrix} + \\ + (4) \det \begin{bmatrix} -4 & -4 & 1 \\ 1 & 6-\lambda & -4 \\ 0 & -4 & 5-\lambda \end{bmatrix} + (1) \det \begin{bmatrix} -4 & 6-2\lambda & 1 \\ 1 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 5-\lambda \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} p(\lambda) = (5-2\lambda)\{(6-2\lambda)[(6-\lambda)(5-\lambda)-16] + \\ + 4[-4(5-\lambda)+4] + 16 - (6-\lambda)\} + \\ + 4\{-4[(6-\lambda)(5-\lambda)-16] + 4(5-\lambda) - 4\} + \\ + \{-4[(-4)(5-\lambda)+4] - (6-2\lambda)(5-\lambda) + 1\}, \end{aligned}$$

и в конечном итоге выражение приводится к виду

$$p(\lambda) = 4\lambda^4 - 66\lambda^3 + 276\lambda^2 - 285\lambda + 25.$$

В общем случае, когда значение n велико, мы не можем вычислить полиномиальные коэффициенты с той же легкостью, как в этом примере. Разложение определителя потребовало бы числа операций порядка факториал n , а это число слишком велико для того, чтобы считать данный метод практичным. Однако были разработаны и другие процедуры; например, могут быть использованы тождества Ньютона (см., например, работу [Fröberg 1969]). Как только коэффициенты будут вычислены, возникнет необходимость в применении стандартного искателя корней полинома с использованием, например, итерации Ньютона или итерации секущих для вычисления требуемых собственных значений.

Несмотря на то, что описанная процедура представляется наиболее естественной для использования, одно затруднение явилось причиной того, что при решении задач о собственных значениях этот метод почти совершенно не применялся. Основной недостаток этого метода состоит в том, что малые ошибки в определении коэффициентов a_0, \dots, a_n провоцируют появление больших ошибок в значениях корней данного полинома. Однако допущение малых ошибок почти неизбежно вследствие обязательного округления значений в компьютере. Поэтому явное вычисление коэффициентов a_0, \dots, a_n по данным в матрицах \mathbf{K} и \mathbf{M} и последующее решение с определением требуемых собственных значений оказывается неэффективным при общем анализе.

11.4.2. Неявная полиномиальная итерация

При решении с помощью неявной полиномиальной итерации мы вычисляем значение $p(\lambda)$ напрямую, без предварительного расчета коэффициентов a_0, \dots, a_n в выражении (11.115). Значение $p(\lambda)$ может быть эффективно определено путем разложения $\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}$ на сочетание нижней единичной треугольной матрицы \mathbf{L} и верхней треугольной матрицы \mathbf{S} ; иначе говоря, мы имеем

$$\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M} = \mathbf{L}\mathbf{S}, \quad (11.116)$$

где теперь будет

$$\det(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) = \prod_{i=1}^n s_{ii}. \quad (11.117)$$

Разложение комплекса $\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}$ осуществляется так, как это обсуждалось в разделе 8.2, однако, как указывалось в разделе 8.2.5, при $\lambda > \lambda_1$ оно может потребовать перестановок. Когда перестановки строк и соответствующих столбцов выполнены, то матрица коэффициентов остается симметричной и, фактически, при этом просто изменяется нумерация степеней свободы. Другими словами, фактически используемые матрицы жесткости и масс для конечно-элементной системы соответствуют нумерации степеней свободы, отличной от первоначально введенной. С другой стороны, если применяются только перестановки строк, то получается несимметричная матрица коэффициентов. Однако в любом случае важно отметить, что требуемые перестановки строк и столбцов могли бы быть выполнены до начала процесса исключения по Гауссу. Целью этих действий является получение «эффективной» матрицы коэффициентов $\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}$, рассматриваемой в (11.116), при появлении которой перестановки уже не будут нужны. Каждая перестановка строк или столбцов вызывает просто изменение знака определителя. На практике мы не знаем таких фактических перестановок строк или столбцов, которые требовались бы, однако осознание того факта, что все перестановки уже могли быть совершены до начала факторизации, показывает, что мы всегда можем использовать гауссову процедуру исключения, заданную соотношениями (8.10)–(8.14), при условии допущения того обстоятельства, что «эффективная» начальная матрица коэффициентов может оказаться несимметричной. Рассмотрим следующий пример.

Пример 11.18: Используйте процедуру исключения по Гауссу, чтобы вычислить $p(\lambda) = \det(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})$, где

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1/2 \end{bmatrix}; \quad \lambda = 2.$$

В данном случае мы имеем

$$\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Учитывая, что первый функциональный элемент равен нулю, нам необходимо использовать перестановки. Предположим, что мы подвергаем взаимной перестановке первую и вторую строки (но не соответствующие столбцы); после этого мы эффективно факторизуем $\bar{\mathbf{K}} - \lambda \bar{\mathbf{M}}$, где

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Теперь факторизация комплекса $\bar{\mathbf{K}} - \lambda \bar{\mathbf{M}}$ выполняется обычным образом (см. примеры 10.4 и 10.5),

$$\bar{\mathbf{K}} - \lambda \bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $\det(\bar{\mathbf{K}} - \lambda \bar{\mathbf{M}}) = (-1)(-1)(1) = 1$, и, принимая во внимание тот факт, что перестановка строк привела к смене знака определителя (см. раздел 2.2), мы имеем $\det(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) = -1$.

Как указывалось выше, если при исключении по Гауссу не было произведено никаких перестановок или если каждая перестановка строк сопровождалась соответствующей

перестановкой столбцов, то матрица коэффициентов $\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}$ в (11.116) является симметричной. В этом случае мы имеем $\mathbf{S} = \mathbf{D}\mathbf{L}^T$, как было в разделе 8.2.2 и, следовательно,

$$\det(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) = \prod_{i=1}^n d_{ii}. \quad (11.118)$$

При использовании метода решения с поиском определителя (см. работы [Bathe 1971], а также [Bathe, Wilson, 1973-3]) мы применяем факторизацию только тогда, когда она может быть завершена без перестановок, и поэтому всегда используем (11.118). В этом случае один расчет полинома требует выполнения примерно $(1/2)nm_K^2$ операций, где n — это порядок матриц \mathbf{K} и \mathbf{M} , а m_K — это половина ширины ленты матрицы \mathbf{K} .

Имея в нашем распоряжении метод для вычисления $p(\lambda)$, мы можем теперь воспользоваться рядом итеративных схем, чтобы рассчитать корни этого полинома. Одна из обычно применяемых простых методик — это метод секущих, в котором используется линейная интерполяция; это значит, что если допустить $\mu_{k-1} < \mu_k$, то мы проводим итерации, используя формулу

$$\mu_{k+1} = \mu_k - \frac{p(\mu_k)}{p(\mu_k) - p(\mu_{k-1})} (\mu_k - \mu_{k-1}), \quad (11.119)$$

где символ μ_k соответствует k -й итерации (см. рис. 11.3). Мы можем отметить, что метод секущих, соответствующий (11.119), является аппроксимацией итераций по Ньютону, когда

$$\mu_{k+1} = \mu_k - \frac{p(\mu_k)}{p'(\mu_k)}, \quad (11.120)$$

где $p'(\mu_k)$ аппроксимируется, используя выражение

$$p'(\mu_k) \doteq \frac{p(\mu_k) - p(\mu_{k-1})}{\mu_k - \mu_{k-1}}. \quad (11.121)$$

Реальная схема для достаточно точного вычисления $p'(\mu_k)$ была протестирована, но, как было установлено, оказалась неэффективной (см. [Bathe 1971]).

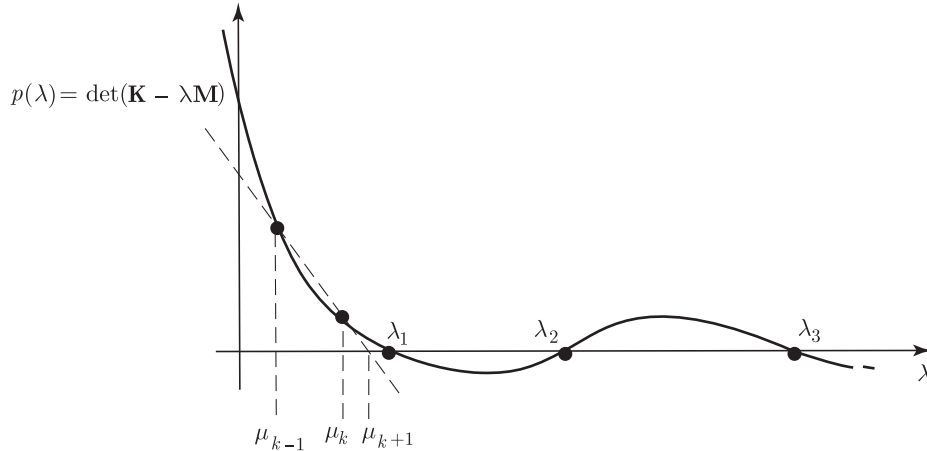


Рис. 11.3. Итерация по методу секущих для вычисления λ_1

Другая методика, обычно используемая при решении сложных задач о собственных значениях, это — метод Мюллера, связанный с применением квадратичной интерполяции. При решении задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda \mathbf{M}\phi$ методом Мюллера выявляется недостаток, состоящий в том, что хотя стартовые значения μ_k , μ_{k-1} и μ_{k-2} являются действительными, вычисляемое значение μ_{k+1} может оказаться комплексным.

Необходимо отметить, что до сих пор мы не обсуждали, к какому именно собственному значению обеспечивает сходимость та или иная из итеративных стратегий. Это зависит от стартовых значений проводимой итерации. Если использовать величины μ_{k-1} и μ_k ,

меньшие, чем λ_1 , то итерации по Ньютону и метод секущих дают монотонную сходимость к значению λ_1 , как показано на рис. 11.3, а окончательный порядок сходимости, обеспечиваемый этими методами, оказывается, соответственно, квадратичным и линейным. Фактически сходимость итераций достигается вследствие того, что $p''(\lambda) > 0$ при $\lambda < \lambda_1$, а это всегда имеет место при любом порядке и любой ширине ленты для **К** и **М**. Однако сходимость не может быть гарантирована при любых стартовых значениях μ_{k-1} и μ_k .

При использовании реальной схемы решения оказывается эффективным вначале вычислить λ_1 , а затем повторить алгоритм с характеристическим полиномом, сжатым за счет λ_1 . Этот подход может быть использован для расчета наименьших собственных значений в последовательности от λ_1 до требуемого значения λ_p (см. работы [Bathe 1971], [Bathe, Wilson, 1973-3], а также упражнение 11.9).

Рассмотрим следующий пример применения итераций по методу секущих.

Пример 11.19: Используйте метод итераций с секущими, чтобы вычислить λ_1 в задаче о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, где

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1/2 & & \\ & 1 & \\ & & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Для проведения итерации с секущими нам нужно иметь два стартовых значения μ_1 и μ_2 , являющиеся нижними пределами для λ_1 . Положим $\mu_1 = -1$ и $\mu_2 = 0$. Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} p(-1) &= \det \begin{bmatrix} 5/2 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5/2 \end{bmatrix} = \\ &= \det \begin{bmatrix} 1 & & \\ -2/5 & 1 & \\ 0 & -5/23 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/2 & & \\ & 23/5 & \\ & & 105/46 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ & 1 & -5/23 \\ & & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$p(-1) = \left(\frac{5}{2}\right) \left(\frac{23}{5}\right) \left(\frac{105}{46}\right) = 26,25.$$

Аналогично этому

$$p(0) = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 12.$$

Теперь, используя (11.119), мы получаем в качестве следующего сдвига

$$\mu_3 = 0 - \frac{12}{12 - 26,25} (0 - (-1)).$$

Следовательно, $\mu_3 = 0,8421$.

Продолжая действовать таким же образом, получим

$$p(0,8421) = 4,7150,$$

$$\mu_4 = 1,3871;$$

$$p(1,3871) = 1,8467,$$

$$\mu_5 = 1,7380;$$

$$p(1,7380) = 0,63136,$$

$$\mu_6 = 1,9203;$$

$$p(1,9203) = 0,16899,$$

$$\mu_7 = 1,9870;$$

$$p(1,9870) = 0,026347,$$

$$\mu_8 = 1,9993.$$

Следовательно, после шести итераций мы в качестве аппроксимации значения λ_1 имеем $\lambda_1 \doteq 1,9993$.

11.4.3. Итерация на основе свойства последовательности Штурма

В разделе 10.2.2 мы обсуждали свойство последовательности Штурма, которым обладают характеристические полиномы задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, а также связанные с этим свойством проблемы принуждения. Главным результатом этого обсуждения было следующее. Предположим, что при сдвиге μ_k может быть осуществлена гауссовская факторизация матрицы $\mathbf{K} - \mu_k\mathbf{M}$ с превращением ее в \mathbf{LDL}^T . Тогда число отрицательных элементов матрицы \mathbf{D} будет равно числу тех собственных значений, которые меньше μ_k . Этот результат может быть непосредственно использован для построения алгоритма вычисления собственных значений и соответствующих собственных векторов. Как и при обсуждении методов полиномиальной итерации, мы предполагаем в дальнейшем, что решение осуществляется непосредственно, с использованием матриц \mathbf{K} и \mathbf{M} , хотя та же самая стратегия могла бы быть использована и после того, как обобщенная задача о собственных значениях окажется преобразованной в другую форму. Кроме того, как и в разделе 11.4.2, тот метод решения, который будет представлен, позволяет определить только собственные значения, а соответствующие собственные векторы были бы рассчитаны путем использования обратной итерации со сдвигом (см. раздел 11.2.3).

Будем считать, что мы желаем получить решение для всех собственных значений между λ_l и λ_u , где λ_l и λ_u — это, соответственно, нижний и верхний пределы. Например, мы можем иметь такой случай, как показанный на рис. 11.4, или же значение λ_l может быть равным нулю, а в этом случае нам нужно было бы строить решение для всех собственных значений вплоть до значения λ_u . В основе процедуры решения лежит треугольная факторизация матрицы $\mathbf{K} - \mu_k\mathbf{M}$, где μ_k выбирается таким образом, чтобы из положительных или отрицательных знаков диагональных элементов при факторизации получить осмысленную информацию относительно неизвестных и требуемых собственных значений. При этом можно использовать следующую процедуру решения, известную под названием *метода бисекции* (обратитесь к рис. 11.4 для ознакомления с типичным примером):

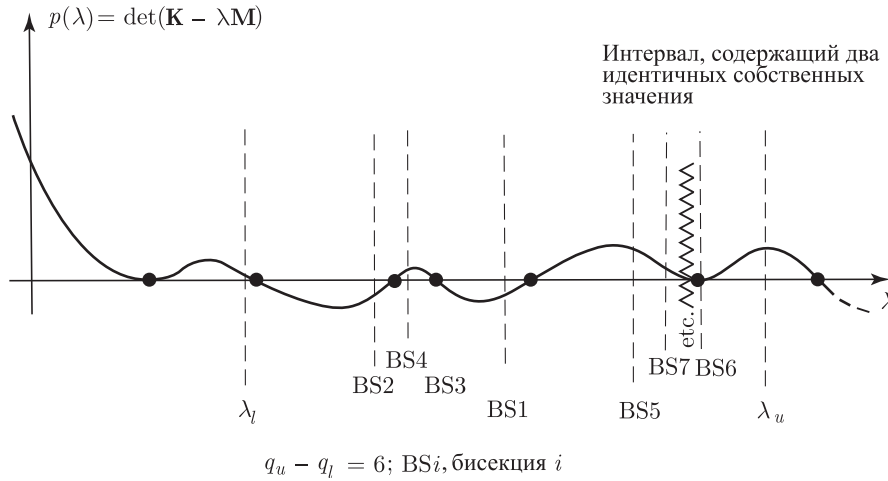


Рис. 11.4. Использование свойства последовательности Штурма для изоляции собственных значений

1. Факторизуйте матрицу $\mathbf{K} - \lambda_l\mathbf{M}$ и в результате найдите, сколько собственных значений, скажем q_l , оказываются меньшими λ_l .

2. Примените к $\mathbf{K} - \lambda_u \mathbf{M}$ проверку с последовательностью Штурма и в результате найдите, сколько собственных значений, скажем q_u , оказываются меньшими λ_u . Таким образом, между λ_u и λ_l имеется $q_u - q_l$ собственных значений.
3. Используйте простую схему бисекции для нахождения тех интервалов, внутри которых располагаются отдельные собственные значения. При проведении этого процесса те интервалы, относительно которых известно, что внутри них лежит более одного собственного значения, последовательно делятся пополам (подвергаются бисекции), и проверка с последовательностью Штурма выполняется до тех пор, пока не будут отделены друг от друга все собственные значения.
4. Рассчитайте с требуемой степенью точности собственные значения, а затем с помощью обратной итерации найдите соответствующие собственные векторы.

Для того, чтобы с достаточной точностью на этапе 4 определить собственные значения, обычно отказываются от применения метода бисекции и используют вместо него более эффективную процедуру. Например, итерация с секущими, представленная в разделе 11.4.2, может быть применена после того, как собственные значения уже были изолированы (см. пример 11.20).

Вышеописанная методика вычисления требуемых собственных значений является прямой. Однако этот метод может оказаться совершенно неэффективным, потому что каждая итерация на этапе 3 требует проведения треугольной факторизации, а также и потому, что может потребоваться выполнить много итераций. Число итераций может оказаться особенно большим тогда, когда требуется вычислять кратные собственные значения (см. рис. 11.4), или когда мы должны рассчитывать скопления собственных значений, а в этом случае для ускорения процесса нужно подключить добавочные стратегические средства. В общем случае этот метод оказывается эффективным только тогда, когда лишь несколько факторизаций нужно выполнить, чтобы выделить интервалы размещения отдельных собственных значений, и когда наименьшее требуемое собственное значение намного больше значения λ_1 .

Пример 11.20: Используйте метод бисекции с последующей итерацией по методу секущих для того, чтобы вычислить λ_2 в применении к задаче $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, где

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1/2 & & \\ & 1 & \\ & & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Мы рассматривали эту задачу в примере 10.5, где мы выделили собственные значения, используя метод бисекции. Конкретно, мы установили, что

$$\lambda_1 < 3 < \lambda_2 < 5 < \lambda_3.$$

Следовательно, мы можем начать итерацию по методу секущих со значениями $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 5$ и, используя результаты примера 10.5,

$$p(\mu_1) = -\frac{3}{4}; \quad p(\mu_2) = \frac{3}{4}.$$

Используя (11.119), мы получаем

$$\mu_3 = 5 - \frac{3/4}{(3/4) - (-3/4)} (5 - 3),$$

или $\mu_3 = 4$. После этого мы должны вычислить значение $p(\mu_3) = \det(\mathbf{K} - \mu_3 \mathbf{M})$, и мы находим, что $p(\mu_3) = 0$. Следовательно, $\lambda_2 = \mu_3 = 4$. Отсюда следует, что в данном случае одного этапа итерации по методу секущих оказалось достаточно для вычисления λ_2 . Однако можно отметить тот факт, что для вычисления $p(\mu_3)$ с помощью факторизации по Гауссу матрицы $\mathbf{K} - \mu_3 \mathbf{M}$ необходимо провести перестановку строк (см. пример 10.4).

Важно отметить, что сделанном выше представлении материала мы предположили, что факторизация матрицы $\mathbf{K} - \mu_k \mathbf{M}$ с превращением ее в \mathbf{LDL}^T может быть

осуществлена. Однако, как показало обсуждение в разделах 8.2.5 и 11.4.2, если $\mu_k > \lambda_1$, то могут потребоваться перестановки. А если перестановки требуются, то здесь являются применимыми те же самые соображения, которые были высказаны в указанных разделах; при этом следует обратить должное внимание на то воздействие, которое оказывает каждая перестановка строк на свойство последовательности Штурма.

Метод бисекции имеет два следующих главных недостатка: (1) необходимо завершать факторизацию матрицы $\mathbf{K} - \mu_k \mathbf{M}$ с наиболее высокой возможной точностью, хотя матрица коэффициентов может оказаться плохо обусловленной (действительно, это может иметь место, даже если производится перестановка строк), и (2) сходимость может оказаться очень медленной, если необходимо дать решение для скопления собственных значений. Однако свойство последовательности Штурма может быть использовано в сочетании с другими стратегиями решения, и именно в таких случаях это свойство может оказаться чрезвычайно полезным.

В частности, свойство последовательности Штурма применяется в алгоритме поиска определителя (см. работу [Bathe, Wilson, 1973-3]), где факторизация матрицы $\mathbf{K} - \mu_k \mathbf{M}$ проводится без перестановок, но доводится до конца только при том условии, что не возникает неустойчивость. Если выясняется, что факторизация неустойчива, то выбирается другое значение μ_k . Это оказывается возможным потому, что окончательная степень точности, с которой вычисляются собственные значения и собственные векторы, не зависит от того конкретного значения сдвига μ_k , которое используется при построении решения.

11.4.4. Упражнения

- 11.9. Выполните неявную полиномиальную итерацию по методу секущих применительно к задаче о собственных значениях из упражнения 11.1, чтобы вычислить λ_1 . После этого используйте вместо $p(\lambda)$ характеристический полином, сжатый за счет λ_1 и представленный в форме

$$p^{(1)}(\lambda) = \frac{p(\lambda)}{\lambda - \lambda_1},$$

где $p(\lambda) = \det(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})$; сжатый полином используйте для расчета λ_2 .

Постройте графики $p(\lambda)$ и $p^{(1)}(\lambda)$ и покажите на этих графиках те итеративные этапы, которые вы выполнили.

- 11.10. Рассмотрите задачу о собственных значениях из упражнения 11.1 и разработайте итеративную схему с квадратичной интерполяцией, чтобы получить решение для λ_1 .
- 11.11. Используйте свойство последовательности Штурма для того, чтобы вычислить λ_1 и λ_2 применительно к задаче о собственных значениях из упражнения 11.8.
- 11.12. Используйте свойство последовательности Штурма для того, чтобы вычислить λ_1 применительно к задаче о собственных значениях из упражнения 11.1 (если встречается нулевая опорная точка, то используйте перестановки строк и столбцов).

11.5. Метод итераций Ланцоша

На основе итераций с преобразованием Ланцоша были разработаны очень эффективные процедуры для решения конечно-элементных уравнений с определением p собственных значений и собственных векторов.

В своей знаменитой работе Ланцош ([Lanczos, 1950]) предложил преобразование для приведения матриц к трехдиагональной форме. Однако, как это уже признавал сам Ланцош, процедура приведения к трехдиагональной форме имеет серьезный недостаток, связанный с тем, что те строящиеся векторы, которые теоретически должны быть ортогональными, на практике таковыми не являются вследствие ошибок округления. Это можно исправить с помощью ортогонализации Грама–Шмидта, но и такой подход также проявляет чувствительность к ошибкам округления и делает весь процесс неэффективным, когда к трехдиагональной форме должна приводиться *полная* матрица. Некоторые другие приемы, как например, метод Хаусхолдера (см. раздел 11.3.3) оказываются значительно более эффективными.

С другой стороны, если цель сводится к вычислению лишь нескольких собственных значений и соответствующих собственных векторов задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, то итерация, основывающаяся на применении преобразования, может оказаться весьма эффективной (см. работы [Paige. 1972], [Paige. 1980], а также [Ericsson, Ruhe, 1980]).

В последующих разделах мы вначале представляем преобразование Ланцоша вместе с его важными свойствами, а после этого обсуждаем использование этого преобразования в итеративной форме для построения решения, состоящего из p собственных значений и векторов задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, где $p \ll n$, а n — порядок матриц.

11.5.1. Преобразование Ланцоша

Основные этапы метода Ланцоша сводятся, теоретически, к преобразованию нашей обобщенной задачи о собственных значениях, $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, к стандартной форме, содержащей трехдиагональную матрицу коэффициентов. Давайте изложим сводку этапов этого преобразования.

Выберите стартовый вектор \mathbf{x} и вычислите

$$\mathbf{x}_1 = \frac{\mathbf{x}}{\gamma}; \quad \gamma = (\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x})^{1/2}. \quad (11.122)$$

Положите $\beta_0 = 0$; затем вычислите для $i = 1, \dots, n$

$$\mathbf{K}\bar{\mathbf{x}}_i = \mathbf{M}\mathbf{x}_i, \quad (11.123)$$

$$\alpha_i = \bar{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{M} \mathbf{x}_i \quad (11.124)$$

и, если $i \neq n$,

$$\tilde{\mathbf{x}}_i = \bar{\mathbf{x}}_i - \alpha_i \mathbf{x}_i - \beta_{i-1} \mathbf{x}_{i-1}, \quad (11.125)$$

$$\beta_i = (\tilde{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{x}}_i)^{1/2} \quad (11.126)$$

и

$$\mathbf{x}_{i+1} = \frac{\tilde{\mathbf{x}}_i}{\beta_i}. \quad (11.127)$$

Теоретически векторы \mathbf{x}_i , $i = 1, \dots, n$, созданные по формулам (11.122)–(11.127), являются ортонормированными со включением \mathbf{M} , т. е.

$$\mathbf{x}_i^T \mathbf{M} \mathbf{x}_j = \delta_{ij}, \quad (11.128)$$

а матрица

$$\mathbf{X}_n = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n] \quad (11.129)$$

удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{X}_n^T (\mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M}) \mathbf{X}_n = \mathbf{T}_n, \quad (11.130)$$

где

$$\mathbf{T}_n = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ & & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}. \quad (11.131)$$

Теперь мы можем связать собственные значения и векторы матрицы \mathbf{T}_n с аналогичными характеристиками задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, которая может быть записана в форме

$$\mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \phi = \frac{1}{\lambda} \mathbf{M} \phi. \quad (11.132)$$

Пользуясь преобразованием

$$\phi = \mathbf{X}_n \tilde{\phi}, \quad (11.133)$$

а также используя (11.128) и (11.130), мы получаем из (11.132)

$$\mathbf{T}_n \tilde{\phi} = \frac{1}{\lambda} \tilde{\phi}. \quad (11.134)$$

Следовательно, собственные значения матрицы \mathbf{T}_n представляют собой величины, обратные собственным значениям задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, а собственные значения двух задач связаны между собой так, как в (11.133).

Как это более подробно обсуждается позднее, в процессе вышеперечисленных этапов преобразования предполагается, что эти этапы могут быть завершены. Доказательство того, что векторы \mathbf{x}_i ортонормированы со включением \mathbf{M} , мы переносим в упражнение 11.13, однако в приводимом ниже примере показывается, что соотношение (11.130) справедливо.

Пример 11.21: Покажите, что структура матрицы \mathbf{T}_n из (11.131) получается с помощью преобразования (11.130).

Пользуясь (11.123), мы получаем

$$\bar{\mathbf{x}}_i = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{x}_i.$$

Делая подстановки из (11.124) и (11.127), получаем

$$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{x}_i = \beta_{i-1}\mathbf{x}_{i-1} + \alpha_i\mathbf{x}_i + \beta_i\mathbf{x}_{i+1}.$$

Используя это соотношение при $i = 1, \dots, j$, мы получаем

$$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_j] = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_j] \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \alpha_{j-1} & \beta_{j-1} \\ & & & \beta_{j-1} & \alpha_j \end{bmatrix} + [0, \dots, 0, \beta_j\mathbf{x}_{j+1}].$$

Следовательно,

$$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{X}_j = \mathbf{X}_j\mathbf{T}_j + \beta_j\mathbf{x}_{j+1}\mathbf{e}_j^T, \quad (\text{a})$$

где \mathbf{e}_i — это вектор длиной j ,

$$\mathbf{e}_j^T = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1].$$

Предумножая (a) на $\mathbf{X}_j^T\mathbf{M}$, и используя свойство ортонормальности векторов \mathbf{x}_i с участием \mathbf{M} , мы получаем

$$\mathbf{T}_j = \mathbf{X}_j^T\mathbf{M}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{X}_j, \quad (\text{b})$$

что при $j = n$ как раз и доказывает выполнение желаемого соотношения.

Отметим, что в случае $j = n$ мы имеем также $\tilde{\mathbf{x}}_n = 0$ в (11.125), потому что полное пространство охватывается матрицей \mathbf{X}_n и не существует ни одного вектора, ортонормированного со включением \mathbf{M} по отношению ко всем векторам, включаемым в \mathbf{X}_n .

Мы используем соотношение (b) при итерации Ланцоша тогда, когда требуется вычислить лишь несколько собственных значений и соответствующих векторов. Кроме того, соотношение (a) позволяет в данном случае определить пределы ошибки в вычисляемых приближенных выражениях для собственных значений.

Как мы уже упоминали, процедура приведения к трехдиагональной форме согласно (11.122)–(11.127) на практике не создает желаемых, ортонормированных с участием \mathbf{M} , векторов вследствие наличия ошибок округления, а если дополнительно используются еще и ортогонализации по Граму–Шмидту, то метод приведения к трехдиагональной форме оказывается неэффективным применительно к *полной* матрице.

Однако преобразование согласно (11.122)–(11.127) обладает некоторыми важными свойствами, проявляющимися при $i = 1, \dots, q$, когда $q \ll n$, которые могут обеспечить основу для эффективной схемы итеративного решения. Если мы проводим преобразование Ланцоша в укороченной форме, то при $i = 1, \dots, q$ мы вычисляем

$$\mathbf{X}_q = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_q], \quad (11.135)$$

и элементами матрицы \mathbf{T}_q будут

$$\mathbf{T}_q = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \alpha_{q-1} & \beta_{q-1} \\ & & & \beta_{q-1} & \alpha_q \end{bmatrix}. \quad (11.136)$$

Эта матрица \mathbf{T}_q представляет собой, фактически, результат преобразования Рэлея–Ритца для задачи о собственных значениях, соответствующей (11.132). А именно, используя подстановку

$$\bar{\phi} = \mathbf{X}_q \mathbf{s} \quad (11.137)$$

в преобразовании Рэлея–Ритца (см. раздел 10.3.2) для задачи (11.132), эквивалентной задаче $\mathbf{K}\phi = \lambda \mathbf{M}\phi$, мы получаем задачу о собственных значениях

$$\mathbf{T}_q \mathbf{s} = \nu \mathbf{s}. \quad (11.138)$$

Следовательно, если использовать преобразование (11.132)–(11.134), то все точные собственные значения λ_i и собственные векторы ϕ_i задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda \mathbf{M}\phi$ вычисляются путем решения задачи (11.134), тогда как при использовании (11.137) и (11.138) вычисляются только приближенные выражения для собственных значений и собственных векторов.

Однако мы убеждаемся также и в том, что в (11.123) проводится этап обратной итерации и, поэтому, векторы Ритца в \mathbf{X}_q должны преимущественно соответствовать пространству, близкому к наименьшему доминантному подпространству для $\mathbf{K}\phi = \lambda \mathbf{M}\phi$ (т. е. подпространству, соответствующему наименьшим собственным значениям). По этой причине решение задачи (11.138) может дать хорошие аппроксимации наименьших собственных значений и соответствующих собственных векторов задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda \mathbf{M}\phi$.

Разумеется, при проведении вычислений мы никогда не рассчитываем матрицу $\mathbf{M}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}$, но непосредственно используем значения α_i , β_i , получаемые по формулам (11.124) и (11.126), для формирования матрицы \mathbf{T}_q . Мы замечаем также, что если проводить точные арифметические действия, то величины, обратные точным собственным значениям, вычисляются при $q = n$, и в общем случае по мере увеличения q мы можем ожидать получения улучшающихся аппроксимаций для величин, обратных наименьшим собственным значениям.

В процессе расчета собственных значений ν_i согласно (11.138) мы также непосредственно определяем пределы ошибки, соответствующие точности этих величин. Эти пределы ошибки определяются следующим образом.

Используя разложение $\mathbf{M} = \mathbf{S}\mathbf{S}^T$ (см. раздел 10.2.5), мы можем преобразовать задачу (11.132) в задачу

$$\mathbf{S}^T = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{S}\psi = \frac{1}{\lambda} \psi, \quad (11.139)$$

где

$$\psi = \mathbf{S}^T \phi. \quad (11.140)$$

Теперь мы можем непосредственно использовать формулу (10.101) для определения предела ошибки. Предположим, что (ν_i, \mathbf{s}_i) представляет собой собственную пару уравнения (11.138), а $\bar{\phi}_i$ — это соответствующий вектор, полученный с помощью (11.137). Тогда из (11.140) получим

$$\bar{\psi}_i = \mathbf{S}^T \bar{\phi}_i, \quad (11.141)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_i\| &= \|\mathbf{S}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{S} \bar{\psi}_i - \nu_i \bar{\phi}_i\| = \\ &= \|\mathbf{S}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{S}^T \mathbf{X}_q \mathbf{s}_i - \nu_i \mathbf{S}^T \mathbf{X}_q \mathbf{s}_i\| = \\ &= \|\mathbf{S}^T (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{X}_q - \mathbf{X}_q \mathbf{T}_q) \mathbf{s}_i\| = \\ &= \|\mathbf{S}^T (\beta_q \mathbf{x}_{q+1} \mathbf{e}_q^T) \mathbf{s}_i\|, \end{aligned} \quad (11.142)$$

где мы использовали результат (а) из примера 11.21. Если учесть, что $\|\mathbf{S}^T \mathbf{x}_{q+1}\| = 1$, то мы получим

$$\|\mathbf{r}_i\| \leq |\beta_q s_{qi}|, \quad (11.143)$$

где s_{qi} — это q -й элемент, т. е. последний элемент собственного вектора \mathbf{s}_i для (11.138).

Используя (10.101), мы имеем, таким образом,

$$|\lambda_k^{-1} - \nu_i| \leq |\beta_q s_{qi}| \quad (11.144)$$

для некоторого значения k . Следовательно, определение этого предела требует только вычисления величины β_q , используемой для всех значений ν_i . При фактическом построении решения нам нужно определить k с помощью проверки с последовательностью Штурма или каким-то другим способом, так, чтобы узнать, какое именно собственное значение было аппроксимировано.

Мы демонстрируем на следующем примере, как действует укороченное преобразование Ланцоша и как строится решение для получения приближенных собственных значений.

Пример 11.22: Используйте преобразование Ланцоша, чтобы рассчитать аппроксимации для двух наименьших собственных значений применительно к задаче $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, рассмотренной в примере 10.18.

Используя алгоритм (11.122)–(11.127) с полным единичным вектором \mathbf{x} , мы получаем

$$\gamma = 2,121; \quad \mathbf{x}_1 = 0,4714 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

для $i = 1$:

$$\bar{\mathbf{X}}_1 = \begin{bmatrix} 2,121 \\ 3,771 \\ 4,950 \\ 5,657 \\ 5,893 \end{bmatrix}; \quad \alpha_1 = 9,167; \quad \tilde{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} -2,200 - 0,5500 \\ 0,6285 \\ 1,336 \\ 1,571 \end{bmatrix};$$

$$\beta_1 = 2,925; \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -0,7521 \\ -1,1880 \\ 0,2149 \\ 0,4566 \\ 0,5372 \end{bmatrix};$$

для $i = 2$:

$$\bar{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,7521 \\ 1,692 \\ 2,417 \\ 2,686 \end{bmatrix}; \quad \alpha_2 = 2,048.$$

Следовательно, мы получаем

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 9,167 & 2,925 \\ 2,925 & 2,048 \end{bmatrix}.$$

Приближенные собственные значения для задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ определяются путем решения

$$\mathbf{T}_2 \mathbf{s} = \frac{1}{\rho} \mathbf{s}; \quad \nu_1 = \frac{1}{\rho_2}, \quad \nu_2 = \frac{1}{\rho_1},$$

что дает $\rho_1 = 0,09790$; $\rho_2 = 1,000$. Сравнивая эти значения с точными собственными значениями для той же задачи (см. пример 10.18), мы находим, что ρ_1 обеспечивает хорошее приближение к λ_1 , но значение ρ_2 не очень близко к λ_2 . Разумеется, $\rho_i \geq \lambda_i$, $i = 1, 2$. Наименьшее собственное значение хорошо предсказывается этим решением, так как стартовый вектор \mathbf{x} сравнительно близок к ϕ_1 . Расчеты пределов ошибки согласно (11.144) дают здесь

$$\begin{aligned} |\lambda_1^{-1} - \nu_2| &= 0,0016 \leq 0,123, \\ |\lambda_2^{-1} - \nu_1| &= 0,213 \leq 0,343. \end{aligned}$$

11.5.2. Итерации с преобразованиями Ланцоша

Как об этом уже говорилось в предыдущем разделе, укороченное преобразование Ланцоша представляет собой версию анализа Рэлея–Ритца, и в силу этого предсказанные собственные значения и собственные векторы могут быть или не быть точными приближениями к искомым значениям. Следующим этапом построения решения на основе преобразований Ланцоша является создание такого алгоритма, который позволял бы с помощью итераций вычислять собственные значения и векторы с требуемой степенью точности.

В качестве примера рассмотрим следующий план построения простого итеративного алгоритма. Предположим, что нам требуется определить p наименьших собственных значений и соответствующих собственных векторов для задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ с числом уравнений n , при $n \gg p$.

Выполните преобразование Ланцоша при $q = 2p$ и получите решение для p наибольших собственных значений матрицы \mathbf{T}_{2p} (отметим, что мы хотим найти наименьшие значения λ в (11.134)).

Продолжайте этот процесс до $q = rp$, при $r = 4, 5, \dots$, до тех пор, пока p наибольших собственных значений не будут удовлетворять критерию точности $|\beta_q s_{qi}| < tol$ для $i = 1, \dots, p$ (см. (11.144), где tol — это выбранный нами допуск). Разумеется, нет необходимости на каждом этапе увеличивать на p число векторов, однако в зависимости от типа рассматриваемой задачи можно использовать несколько меньшее увеличение.

Этот простой процесс представляется очень привлекательным; к сожалению, однако, он неустойчив, так как при использовании арифметики с конечным числом цифр происходит потеря \mathbf{M} -ортогональности фактически рассчитанных векторов \mathbf{x}_i . Если имеет место эта потеря ортогональности, то некоторые значения, полученные из решения, оказываются аппроксимациями ложных копий реальных собственных значений; другими словами, например, единственное собственное значение может аппроксимироваться несколько раз. Конечно, результат такого рода для нас неприемлем, и нам следовало бы провести сортировку, чтобы выяснить, какие именно вычисленные значения являются аппроксимациями истинных собственных значений, и не будет ли пропущено какое-либо из этих истинных собственных значений. С этой целью могли бы быть проведены проверки с помощью последовательности Штурма, однако если таких проверок будет слишком много, то все решение целиком окажется неэффективным.

Средством для предотвращения появления лишних копий собственных значений является использование ортогонализации векторов Ланцоша по Граму–Шмидту. В некоторых случаях может оказаться достаточным провести выборочно повторную ортогонализацию (см. работу [Parlett, Scott, 1979]). Однако процесс Грама–Шмидта также чувствителен к ошибкам округления (см. раздел 11.2.6), и фактически может оказаться необходимым провести полную ортогонализацию на всех, ранее определенных векторах не один, а два раза, как это отмечает в своей работе Н. Matthies [Matthies, 1985-2].

Если рассматривать метод итераций Ланцоша в рамках точной арифметики, то мы замечаем также, что $\tilde{\mathbf{x}}_i$ может оказаться нулевым вектором после того, как несколько векторов будут уже определены при начальном векторе \mathbf{x}_1 . Это явление имеет место тогда, когда вектор \mathbf{x}_1 содержит только компоненты q собственных векторов, то есть когда \mathbf{x}_1 располагается в q -мерном подпространстве всего n -мерного пространства, соответствующего матрицам \mathbf{K} и \mathbf{M} (тогда $\tilde{\mathbf{x}}_q = 0$). Продемонстрируем смысл этого высказывания,

а также того, что может произойти при наличии кратного собственного значения, на следующем простом примере.

Пример 11.23: Используйте метод Ланцоша для решения задачи о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, где

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \lambda_4 & \\ & & & & \lambda_5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{a})$$

и $\lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 < \lambda_5$.

(i) Положите $\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ и рассчитайте векторы Ланцоша.

(ii) Положите $\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ и рассчитайте векторы Ланцоша.

Несмотря на то, что используемые здесь матрицы имеют специальную диагональную форму, сделанные при разборе этого примера высказывания имеют общий характер. А именно, мы можем представить себе, что матрицы в (а) были получены путем преобразования матриц более общего вида к базису из их собственных векторов, однако это преобразование проводится здесь просто для того, чтобы с большей готовностью выявить детали алгоритма решения (таким же образом, как мы действовали при анализе методов векторной итерации; см. раздел 11.2.1).

В случае (i), используя соотношения (11.123)–(11.125), мы получаем

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = 0. \quad (\text{b})$$

В случае (ii) получаем

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{c})$$

и $\mathbf{x}_2 = 0$. Соотношение (b) показывает, что в силу того, что \mathbf{x}_1 представляет собой собственный вектор, мы не можем продолжить рассматриваемый процесс, а соотношение (c) показывает, что постольку, поскольку вектор \mathbf{x}_1 располагается в подпространстве, соответствующем λ_3 и λ_4 , мы не можем найти более двух векторов Ланцоша, включающих \mathbf{x}_1 .

На практике процесс решения обычно не разрушается, как это упоминалось выше, вследствие ошибок округления. Однако проведенное выше обсуждение показывает, что метод итераций Ланцоша обладает двумя важными особенностями, а именно, — возможностью проведения ортогонализации по Граму–Шмидту и, если это необходимо, повторного выполнения алгоритма с новым вектором Ланцоша \mathbf{x} .

Чтобы продемонстрировать общий подход к построению решения, дадим определения этапа Ланцоша, стадии Ланцоша и повторного выполнения алгоритма.

Этап Ланцоша — это использование соотношений (11.123)–(11.127), куда мы включаем теперь и повторную ортогонализацию.

Стадия Ланцоша состоит из q этапов Ланцоша и из расчета собственных значений и собственных векторов уравнения $\mathbf{T}_q \mathbf{s} = \nu \mathbf{s}$. Если выполняется одно из приводимых ниже условий, то собственные значения и собственные векторы указанного уравнения будут вычислены и, следовательно, стадия будет завершена.

1. Достигнуто предварительно заданное максимальное число этапов Ланцоша q_{\max} .
2. Обнаружена утрата ортогональности векторов Ланцоша, или между векторами Ланцоша и уже сошедшимися собственными векторами.

В случае (1) $q = q_{\max}$, а в случае (2) q — это число этапов Ланцоша, завершенных прежде, чем была утрачена ортогональность.

В конце каждой из стадий Ланцоша мы проверяем, были ли вычислены все требуемые собственные значения и собственные векторы. Если требуемые собственные пары еще не были получены, то мы *стартуем заново* к проведению новой стадии Ланцоша с новым вектором \mathbf{x} в (11.122). Прежде чем мы будем стартовать заново, может оказаться эффективным ввести сдвиг μ так, чтобы этап обратной итерации согласно (11.123) был выполнен с $\mathbf{K} - \mu \mathbf{M}$ (см. раздел 11.2.3).

Если опустить некоторые детали, то полный алгоритм решения может быть, в силу изложенного, схематизирован в следующем виде.

Стартуйте, начав новую стадию Ланцоша: выберите стартовый вектор \mathbf{x} , ортогональный ко всем ранее рассчитанным приближенным представлениям собственных векторов, и вычислите

$$\mathbf{x}_1 = \frac{\mathbf{x}}{\gamma}; \quad \gamma = (\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x})^{1/2}. \quad (11.122)$$

Выберите сдвиг μ (обычно $\mu = 0$ для первой стадии Ланцоша).

Выполните этапы Ланцоша, используя $i = 1, 2, \dots; \beta_0 = 0$,

$$\begin{aligned} (\mathbf{K} - \mu \mathbf{M}) \tilde{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{M} \mathbf{x}_i, \\ \alpha_i &= \tilde{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{M} \mathbf{x}_i, \\ \tilde{\mathbf{x}}'_i &= \tilde{\mathbf{x}}_i - \alpha_i \mathbf{x}_i - \beta_{i-1} \mathbf{x}_{i-1}, \\ \tilde{\mathbf{x}}_i &= \tilde{\mathbf{x}}'_i - \sum_{k=1}^i (\tilde{\mathbf{x}}_i'^T \mathbf{M} \mathbf{x}_k) \mathbf{x}_k - \sum_{j=1}^{n_c} (\tilde{\mathbf{x}}_i'^T \mathbf{M} \phi_j) \phi_j, \\ \beta_i &= (\tilde{\mathbf{x}}_i'^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{x}}_i)^{1/2}, \\ \mathbf{x}_{i+1} &= \frac{\tilde{\mathbf{x}}_i}{\beta_i}, \end{aligned} \quad (11.145)$$

где n_c — это число собственных значений, сошедшихся на предшествующих стадиях. Несмотря на то, что ортогонализация Грама–Шмидта была проведена, вектор \mathbf{x}_{i+1} проверяется на утрату ортогональности и, если эта утрата произошла, то стадия Ланцоша завершается при $q = i$; в противном случае выполните максимальное число этапов, q_{\max} , и положите $q = q_{\max}$.

Рассчитайте r добавочных сошедшихся собственных значений $\lambda_{nc+1}, \dots, \lambda_{nc+r}$ и соответствующие собственные векторы $\phi_{nc+1}, \dots, \phi_{nc+r}$ путем решения уравнения (используя, например, обратную итерацию QR, см. раздел 11.3.3)

$$\mathbf{T}_q \mathbf{s} = \nu \mathbf{s}. \quad (11.138)$$

Сходимость определяется выполнением критерия (11.144). Придайте новое значение индексу nc .

Если требуемые собственные значения и собственные векторы еще не были получены, то стартуйте заново, начав дополнительную стадию Ланцоша.

Продолжайте, пока не будут рассчитаны все требуемые собственные значения и собственные векторы, или пока не будет выполнено максимальное число предварительно указанных этапов Ланцоша.

Эти этапы решения дают в совокупности общие этапы (включая простую и одиночную полную реортогонализацию) итеративной схемы Ланцоша. Как уже упоминалось выше, подробности реального воплощения этой схемы, не приводящиеся здесь, чрезвычайно важны для того, чтобы сделать метод эффективным и надежным. Некоторые важные и трудноуловимые аспекты реальной итеративной схемы Ланцоша относятся к тому, чтобы выбрать ту реальную форму реортогонализации, которая должна быть выполнена, эффективно и надежно констатировать потерю ортогональности, а затем стартовать заново с новым эффективным вектором \mathbf{x} так, чтобы можно было гарантировать, что в качестве собственных значений принимаются только сошедшиеся данные об истинных собственных значениях, а не ложные дубликаты этих значений. После этого следует стартовать заново, чтобы начать новую стадию, когда такие действия более эффективны, чем продолжение имеющейся стадии, затем выбрать надлежащее значение q_{\max} и использовать эффективную стратегию сдвига. Кроме того, необходимо проводить проверки с помощью последовательности Штурма, ставя своей целью обеспечить проведение расчета всех требуемых собственных значений (см. раздел 11.6.4, где дается более обширная информация о подобных стратегиях проверки). Скорость сходимости собственных значений зависит, конечно, от вида фактически используемого алгоритма.

Наконец, мы должны упомянуть о том, что была разработана также версия алгоритма Ланцоша, предназначенная для работы с блоками векторов (а не только с отдельными векторами) (см., например, работы [Golub, Underwood, 1977], а также [Matthies, 1985-2]).

11.5.3. Упражнения

- 11.13. Покажите, что векторы \mathbf{x}_i , создаваемые при преобразовании Ланцоша, являются (в точной арифметике) ортонормированными со включением \mathbf{M} (Подсказка: Покажите, что векторы \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 и \mathbf{x}_3 являются ортонормированными с учетом \mathbf{M} , а после этого воспользуйтесь методом индукции).
- 11.14. Предположите, что потеря векторной ортогональности при преобразовании Ланцоша является лишь результатом этапа вычитания векторов (11.125). После этого покажите, что потеря ортогональности может быть предсказана путем использования соотношения

$$|\mathbf{x}_i^T \mathbf{M} \mathbf{x}_{j+1}| \leq \frac{f_{ij}}{\beta_j} \epsilon,$$

где символ \leq означает «приближенно меньше, чем», и где

j = номер этапа Ланцоша;

$1 \leq i \leq j$,

$$|\mathbf{x}_i^T \mathbf{M} \mathbf{x}_k| \leq \epsilon \quad (1 \leq i, k \leq j; k \neq i),$$

$$f_{ij} = \begin{cases} |\alpha_i - \alpha_j| + \beta_{j-1} + \beta_{i-1} + \beta_i & (i \leq j-2) \\ |\alpha_i - \alpha_j| + \beta_{j-2} & (i = j-1) \\ \beta_{j-1} & (i = j). \end{cases}$$

- 11.15. Используйте версию метода итераций Ланцоша, разработанную вами для вычисления наименьшего собственного значения и соответствующего собственного вектора задачи

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \phi = \lambda \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \phi.$$

- 11.16. Используйте версию метода итераций Ланцоша, разработанную вами для вычисления двух наименьших собственных значений и соответствующих собственных

векторов задачи

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 1 & -1/4 & \\ & -1/4 & 1 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix} \phi = \lambda \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1/2 & & \\ & & 1/2 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \phi.$$

- 11.17. Составьте компьютерную программу для использования метода итераций Ланцоша. Используйте эту программу для вычисления p наименьших собственных значений и соответствующих собственных векторов задачи

$$\begin{bmatrix} 101 & -10 & & & \\ -10 & 102 & -10 & & \\ & -10 & 103 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -10 \\ -10 & & & & 100+n \end{bmatrix} \phi = \lambda \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & n \end{bmatrix} \phi.$$

Используйте значения

$$p = 4; \quad n = 40;$$

$$p = 8; \quad n = 0;$$

$$p = 16; \quad n = 80.$$

Используйте пределы ошибки, соответствующие (10.106), чтобы оценить точность рассчитанных собственных значений, и обеспечьте такую ситуацию, когда ни одно собственное значение не было утеряно, или не было выдано в качестве ложного в числе кратных значений.

11.6. Метод итераций в подпространстве

Эффективный метод, широко применяемый в инженерной практике для решения конечно-элементных уравнений с нахождением собственных значений и собственных векторов, — это метод итераций в подпространстве. Эта методика особенно хорошо подходит для расчета нескольких собственных значений и собственных векторов, относящихся к большим конечно-элементным системам.

Метод итераций в подпространстве, разработанный и получивший свое название в работе [Bathe 1971], состоит из следующих трех этапов.

1. Выберите q стартовых векторов итераций, $q > p$, где p — число собственных значений и векторов, подлежащих расчету.
2. Используйте обратную итерацию для q векторов одновременно, а также анализ Ритца для нахождения «лучших» приближенных собственных значений и собственных векторов из числа q векторов итерации.
3. После достижения сходимости итераций воспользуйтесь проверкой с последовательностью Штурма с целью убедиться в том, что были вычислены требуемые собственные значения и соответствующие собственные векторы.

Процедура решения была названа методом итераций в подпространстве, потому что исследуемая итерация эквивалентна итерированию в q -мерном подпространстве и не должна рассматриваться как одновременная итерация по отношению к q отдельным векторам итераций. В частности, следует отметить, что выбор стартовых векторов итераций на этапе 1 и проверка с последовательностью Штурма на этапе 3 являются очень важными частями итеративной процедуры. В общем, метод итераций в подпространстве в значительной степени основывается на различных методиках из числа использованных прежде, а именно, на одновременной векторной итерации (см. работы [Bauer, 1957] и [Jennings, 1967]), на информации о последовательностях Штурма (см. раздел 10.2.2)

и на анализе Рэлея–Ритца (см. раздел 10.3.2), однако наиболее поучительной была работа [Rutishauser, 1969].

Некоторые преимущества метода итераций в подпространстве состоят в том, что соответствующую ему теорию сравнительно легко понять и что этот метод является мощным и поддается программированию с небольшими усилиями (см. работы [Bathe 1971], а также [Bathe, Wilson, 1972]).

В последующих разделах дается описание теоретических основ и итеративных этапов метода итераций в подпространстве, а затем мы представляем полную программу основного алгоритма. Здесь наша основная цель сводится к тому, чтобы обсудить основы метода итераций в подпространстве и усилить достигнутое понимание путем представления компьютерной программы. В реальной инженерной практике хорошо спроектированная подпрограмма метода Ланцоша (см. раздел 11.5) или ускоренного метода итераций в подпространстве, включающего в себя сдвиг, могут оказаться существенно более эффективными.

11.6.1. Предварительные соображения

Основная цель метода итераций в подпространстве состоит в построении решения с определением p наименьших собственных значений и соответствующих собственных векторов, удовлетворяющих уравнению

$$\mathbf{K}\Phi = \mathbf{M}\Phi\Lambda, \quad (11.146)$$

где $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$, а $\Phi = [\phi_1, \dots, \phi_p]$.

В дополнение к уравнению (11.146) собственные векторы удовлетворяют также условиям ортогональности

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Lambda; \quad \Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I}, \quad (11.147)$$

где \mathbf{I} — единичная матрица порядка p , потому что Φ хранит в своей памяти только p собственных векторов. Важно отметить, что соотношение (11.146) является необходимым и достаточным условием того, чтобы векторы, входящие в матрицу Φ , были собственными векторами, однако условия ортогональности собственных векторов в (11.147) являются необходимыми, но не достаточными. Другими словами, если мы имеем p векторов, удовлетворяющих условиям (11.147), $p < n$, то эти векторы не обязательно являются собственными векторами. Однако если p векторов удовлетворяют уравнению (11.146), то они определенно являются собственными векторами, хотя мы все еще должны убедиться в том, что это — действительно p конкретных собственных векторов, которые мы ищем (см. раздел 10.2.1).

Основная идея метода итераций в подпространстве использует тот факт, что собственные векторы уравнения (11.146) образуют \mathbf{M} -ортонормированный базис p -мерного, наименее влиятельного подпространства матриц \mathbf{K} и \mathbf{M} , которое мы будем теперь называть E_∞ (см. раздел 2.3). Поэтому при решении итерация с p линейно независимыми векторами может рассматриваться как итерация с неким подпространством. Стартовые векторы итераций перекрывают подпространство E_1 , и итерация продолжается до тех пор, пока с достаточной точностью не будет перекрыто подпространство E_∞ . Тот факт, что итерация выполняется в некотором подпространстве, имеет важные последствия. Общее число требуемых итераций зависит от того, насколько «близко» подпространство E_1 к подпространству E_∞ , а не от того, насколько близок каждый вектор итерации к собственному вектору. Следовательно, эффективность алгоритма связана с тем, что значительно легче найти такое p -мерное стартовое подпространство, которое было бы близко к E_∞ , чем найти p векторов, каждый из которых был бы близок к требуемому собственному вектору. Специальный алгоритм, используемый для нахождения стартовых векторов итераций, описывается позднее. Кроме того, вследствие того, что итерация выполняется в подпространстве, сходимость подпространства — это все, что нам требуется, а никак не сходимость отдельных векторов итераций к собственным векторам. Иными словами, если векторы итераций представляют собой линейные комбинации требуемых собственных векторов, то алгоритм решения сходится в течение одного этапа.

Чтобы продемонстрировать основную идею, мы вначале рассматриваем одновременную векторную обратную итерацию для p векторов. Пусть \mathbf{X}_1 хранит в своей памяти p стартовых векторов итераций, перекрывающих стартовое подпространство E_1 . Одновременная обратная итерация для p векторов может быть записана в форме

$$\mathbf{K}\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{M}\mathbf{X}_k; \quad k = 1, 2, \dots, \quad (11.148)$$

где мы теперь констатируем, что p векторов итерации, хранящихся в \mathbf{X}_{k+1} , перекрывают p -мерное подпространство E_{k+1} , и последовательность порождаемых подпространств сходится к E_∞ при условии, что стартовые векторы не ортогональны к E_∞ . Кажется, что это противоречит тому факту, что в рамках данной итерации каждый столбец матрицы \mathbf{X}_{k+1} сходится, как известно, к наименее влиятельному собственному вектору, если только этот столбец не отсутствует в ϕ_1 (см. раздел 11.2.1). Фактически, никакого противоречия нет. Хотя в рамках точной арифметики векторы, входящие в \mathbf{X}_{k+1} , перекрывают E_{k+1} , но они становятся все более и более параллельными и, поэтому, составляют все более и более плохой базис для подпространства E_{k+1} . Один из путей сохранения численной устойчивости сводится к тому, чтобы генерировать ортогональные базисы в подпространствах E_{k+1} посредством использования процесса Грама–Шмидта (см. раздел 11.2.5). В этом случае мы итерируем для $k = 1, 2, \dots$, согласно следующим соотношениям:

$$\mathbf{K}\bar{\mathbf{X}}_{k+1} = \mathbf{M}\mathbf{X}_k, \quad (11.149)$$

$$\mathbf{X}_{k+1} = \bar{\mathbf{X}}_{k+1}\mathbf{R}_{k+1}, \quad (11.150)$$

где \mathbf{R}_{k+1} — верхняя треугольная матрица, выбираемая таким образом, чтобы иметь $\mathbf{X}_{k+1}^T \mathbf{M} \mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{I}$. Тогда, при соблюдении условия, что стартовые векторы, входящие в \mathbf{X}_1 , не отсутствуют в собственных векторах $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$, мы имеем

$$\mathbf{X}_{k+1} \rightarrow \Phi; \quad \mathbf{R}_{k+1} \rightarrow \Lambda.$$

Важно отметить, что итерация по схеме (11.148) порождает ту же самую последовательность подпространств, как и итерации, соответствующие (11.149) и (11.150). Однако i -й столбец матрицы \mathbf{X}_{k+1} из (11.150) обнаруживает линейную сходимость к ϕ_i со скоростью, равной $\max\{\lambda_{i-1}/\lambda_i, \lambda_i/\lambda_{i+1}\}$. Чтобы продемонстрировать процедуру решения, рассмотрим следующий пример.

Пример 11.24: Рассмотрите задачу о собственных значениях $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, где

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1/2 & & \\ & 1 & \\ & & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Два наименьших собственных значения и соответствующие собственные векторы имеют вид (см. пример 10.4)

$$\lambda_1 = 2, \quad \phi_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}; \quad \lambda_2 = 4, \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Используйте одновременную векторную итерацию с ортогонализацией Грама–Шмидта согласно (11.149) и (11.150), с начальными векторами

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

чтобы рассчитать приближенные выражения для λ_1, ϕ_1 и λ_2, ϕ_2 .

Соотношение $\mathbf{K}\bar{\mathbf{X}}_2 = \mathbf{M}\mathbf{X}_1$ дает

$$\bar{\mathbf{X}}_2 = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,75 \\ 0,50 & 0,50 \\ 0,75 & 0,25 \end{bmatrix}.$$

Ортогонализация $\bar{\mathbf{X}}_2$ со включением \mathbf{M} дает

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 0,3333 & 1,179 \\ 0,6667 & 0,2357 \\ 1,000 & -0,7071 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1,333 & -1,650 \\ 0 & 2,121 \end{bmatrix}.$$

Продолжая выкладки аналогичным образом, получаем следующие результаты:

$$\mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} 0,5222 & 1,108 \\ 0,6963 & 0,1231 \\ 0,8704 & -0,8614 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 2,089 & -0,9847 \\ 0 & 3,830 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{X}_4 = \begin{bmatrix} 0,6163 & 1,058 \\ 0,7044 & 0,0622 \\ 0,7924 & -0,9339 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_4 = \begin{bmatrix} 2,023 & -0,5202 \\ 0 & 3,954 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{X}_5 = \begin{bmatrix} 0,6623 & 1,030 \\ 0,7064 & 0,0312 \\ 0,7506 & -0,9678 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_5 = \begin{bmatrix} 2,006 & -0,2639 \\ 0 & 3,988 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{X}_6 = \begin{bmatrix} 0,6848 & 1,015 \\ 0,7069 & 0,0156 \\ 0,7290 & -0,9841 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_6 = \begin{bmatrix} 2,001 & -0,1324 \\ 0 & 3,997 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{X}_7 = \begin{bmatrix} 0,6960 & 1,008 \\ 0,7071 & 0,0078 \\ 0,7181 & -0,9921 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_7 = \begin{bmatrix} 2,000 & -0,0663 \\ 0 & 3,999 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{X}_8 = \begin{bmatrix} 0,7016 & 1,004 \\ 0,7071 & 0,0039 \\ 0,7126 & -0,9961 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_8 = \begin{bmatrix} 2,000 & -0,0331 \\ 0 & 4,000 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{X}_9 = \begin{bmatrix} 0,7043 & 1,002 \\ 0,7071 & 0,0020 \\ 0,7099 & -0,9980 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_9 = \begin{bmatrix} 2,000 & -0,0166 \\ 0 & 4,000 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{X}_{10} = \begin{bmatrix} 0,7057 & 1,001 \\ 0,7071 & 0,0010 \\ 0,7085 & -0,9990 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_{10} = \begin{bmatrix} 2,000 & -0,0083 \\ 0 & 4,000 \end{bmatrix},$$

и после девяти итераций мы имеем

$$\phi_1 \doteq \begin{bmatrix} 0,7057 \\ 0,7071 \\ 0,7085 \end{bmatrix}; \quad \lambda_1 \doteq 2,000;$$

$$\phi_2 \doteq \begin{bmatrix} 1,001 \\ 0,0010 \\ -0,9990 \end{bmatrix}; \quad \lambda_2 \doteq 4,000.$$

Следует заметить, что несмотря на то, что векторы, входящие в \mathbf{X}_1 , уже перекрывают пространство векторов ϕ_1 и ϕ_2 , для сходимости нам требуется относительно большое число итераций.

Решение, приводимое в данном выше примере, демонстрирует процедуру итерации, заданную посредством (11.149) и (11.150), а также показывает и основной недостаток этого метода. А именно, каждый вектор итераций принуждается к сходимости к отличному от других собственному вектору посредством ортогонализации i -го вектора итераций по отношению к $(i - 1)$ векторам итераций, которые уже были ортогонализированы, без допущения того, чтобы имела место более эффективная линейная комбинация векторов. В приведенном нами примере итерация стартовала с двумя векторами итераций, являвшихся линейными комбинациями требуемых собственных векторов, причем это не дало никакого преимущества. В общем случае, если входящие в \mathbf{X}_{k+1} векторы итераций перекрывают подпространство E_∞ , но не являются собственными векторами (т.е. векторы, входящие в \mathbf{X}_{k+1} , представляют собой линейные комбинации собственных векторов ϕ_1, \dots, ϕ_p), то несмотря на тот факт, что подпространство E_{k+1} уже является сошедшимся, все же еще может понадобиться провести много дальнейших итераций для того, чтобы сделать ортогональный базис векторов итераций базисом собственных векторов.

11.6.2. Подпространственная итерация

Описываемый ниже алгоритм, который мы называем *подпространственной итерацией*, находит ортогональный базис векторов в подпространстве E_{k+1} , тем самым сохраняя численную устойчивость при итерации в соответствии с (11.148), а также вычисляет за один этап требуемые собственные векторы, когда E_{k+1} сходится к E_∞ . Этот алгоритм представляет собой итерацию, используемую в методе подпространственных итераций, т.е. второй этап стадии полного решения.

Для $k = 1, 2, \dots$ выполнить итерацию переходом от E_k до E_{k+1} :

$$\mathbf{K}\bar{\mathbf{X}}_{k+1} = \mathbf{M}\mathbf{X}_k. \quad (11.151)$$

Найти проекции матриц \mathbf{K} и \mathbf{M} на подпространство E_{k+1} :

$$\mathbf{K}_{k+1} = \bar{\mathbf{X}}_{k+1}^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{X}}_{k+1}, \quad (11.152)$$

$$\mathbf{M}_{k+1} = \bar{\mathbf{X}}_{k+1}^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{X}}_{k+1}. \quad (11.153)$$

Построить решение с определением собственной системы проецированных матриц:

$$\mathbf{K}_{k+1} \mathbf{Q}_{k+1} = \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{Q}_{k+1} \mathbf{\Lambda}_{k+1}. \quad (11.154)$$

Найти улучшенную аппроксимацию собственных векторов:

$$\mathbf{X}_{k+1} = \bar{\mathbf{X}}_{k+1} \mathbf{Q}_{k+1}. \quad (11.155)$$

Если векторы в \mathbf{X}_1 не ортогональны ни к одному из требуемых собственных векторов, то мы после этого имеем $\mathbf{\Lambda}_{k+1} \rightarrow \mathbf{\Lambda}$ и $\mathbf{X}_{k+1} \rightarrow \mathbf{\Phi}$ при $k \rightarrow \infty$.

При проведении подпространственной итерации подразумевается, что векторы итераций имеют надлежащие порядковые номера; иначе говоря, векторы итераций, сошедшиеся к ϕ_1, ϕ_2, \dots , вводятся в память как первый, второй, ..., столбцы матрицы \mathbf{X}_{k+1} . Мы демонстрируем процедуру итерации с помощью расчета решения задачи, рассмотренной в примере 11.24.

Пример 11.25: Пользуясь соотношениями (11.151)–(11.155) при выражениях для \mathbf{K} , \mathbf{M} и \mathbf{X}_1 , приведенных в примере 11.24, мы получаем

$$\bar{\mathbf{X}}_2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{K}_2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M}_2 = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -2 \end{bmatrix}$$

и

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{bmatrix}.$$

Сравнивая эти результаты с решением, полученным в примере 11.24, мы замечаем, что в первой подпространственной итерации мы рассчитали точные собственные значения и точную форму собственных векторов. Это так и должно было быть, потому что стартовые векторы итераций \mathbf{X}_1 перекрывают подпространство, определяемое векторами ϕ_1 и ϕ_2 .

Первое наблюдение, возникающее при проведении подпространственной итерации, состоит в том, что выражения для \mathbf{K}_{k+1} и \mathbf{M}_{k+1} , данные, соответственно, формулами (11.152) и (11.153), обнаруживают тенденцию к диагональной форме по мере возрастания номера итерации; иначе говоря, матрицы \mathbf{K}_{k+1} и \mathbf{M}_{k+1} оказываются диагональными, когда столбцы матрицы \mathbf{X}_{k+1} содержат в себе собственные векторы со скалярным множителем. Это означает, что, как это следует из обсуждения в разделе 11.3.2, для решения задачи о собственных значениях из (11.154) может быть эффективно использован обобщенный метод Якоби.

Важным аспектом построения решения является сходимость метода. Если предположить, что при выполнении итерации векторы из \mathbf{X}_{k+1} упорядочиваются таким образом, чтобы i -й диагональный элемент матрицы Λ_{k+1} был больше $(i-1)$ -го элемента, $i = 2, \dots, p$, то i -й столбец матрицы \mathbf{X}_{k+1} будет линейно сходиться к ϕ_i , причем скорость сходимости будет равна λ_i/λ_{p+1} (см. работу [Bathe 1977]). Несмотря на то, что эта скорость сходимости имеет асимптотический характер, она свидетельствует о том, что наименьшие собственные значения сходятся всего быстрее. Кроме того, более высокая скорость сходимости может быть достигнута за счет использования q векторов итераций, при $q > p$. Однако использование большего числа векторов итераций приводит также и к возрастанию вычислительных усилий в расчете на одну итерацию. На практике мы обнаружили, что значение $q = \min\{2p, p+8\}$ в общем случае оказывается эффективным, и мы используем именно это значение. Что касается скорости сходимости, то следует заметить, что собственные значения с постоянными множителями не уменьшают скорости сходимости, если только $\lambda_{q+1} > \lambda_p$.

Если говорить об итеративных схемах, представленных ранее, то теоретическое поведение, связанное со сходимостью, может наблюдаться на практике только тогда, когда векторы итераций оказываются относительно близкими к собственным векторам. Однако на практике мы в высшей степени заинтересованы в том, чтобы узнать, что именно происходит в ходе нескольких первых итераций, когда подпространство E_{k+1} еще не является «близким» к E_∞ . Действительно, эффективность алгоритма в значительной степени основывается на том, что несколько итераций уже могут дать хорошие приближенные представления для требуемых собственных пар, и причина этого сводится к тому, что одна подпространственная итерация, заданная соотношениями (11.151)–(11.155), представляет собой, фактически, анализ Ритца, описываемый в разделе 10.3.2. На этом основании *все характерные особенности анализа Ритца свойственны также и подпространственной итерации; это означает, что наименьшие собственные значения лучше всего аппрок-*

симируются посредством итерации и что все приближенные собственные значения представляют собой верхние пределы реальных искомым собственным значениям. Отсюда следует, что мы можем представлять себе подпространственную итерацию как повторяемое применение метода анализа Ритца, описанного в разделе 10.3.2, при котором приближенные собственные значения, рассчитанные в предыдущей итерации, используются для формирования векторов нагрузки, вводимых в текущей итерации в правые части уравнений.

Важно отдавать себе отчет в том, что при использовании одной из итеративных процедур, заданных соотношениями (11.148)–(11.150) или (11.151)–(11.155), одно и то же подпространство E_{k+1} перекрывается векторами итераций. Поэтому нет необходимости всегда итерировать в соответствии с соотношениями (11.151)–(11.155), а вместо этого можно сначала воспользоваться простой обратной итерацией согласно (11.148), или обратной итерацией с ортогонализацией по Граму–Шмидту в соответствии с (11.149) и (11.150), и в заключение воспользоваться схемой подпространственной итерации, заданной соотношениями (11.151)–(11.155). Результаты, рассчитанные теоретически, были бы теми же самыми, что и полученные путем выполнения только подпространственных итераций. Однако трудность при этом сводится к вопросу о том, как решить, на какой именно стадии следует ортогонализировать векторы итераций, пользуясь соотношениями (11.152)–(11.155), потому что итерация согласно (11.151) дает все более и более параллельные векторы. Кроме того, ортогонализация по Граму–Шмидту не слишком устойчива численно. Если векторы итераций сделались «слишком близкими друг к другу» либо вследствие того, что начальные допущения привели к получению почти параллельных векторов итераций, либо вследствие итерирования без ортогонализации, то может оказаться невозможным ортогонализировать их вследствие арифметики с конечной точностью, заложенной в компьютер. К сожалению, при рассмотрении больших конечно-элементных систем стартовые векторы итераций в некоторых случаях могут оказаться почти параллельными несмотря на то, что они перекрывают подпространство, близкое к E_∞ , и лучше всего провести немедленную ортогонализацию векторов итераций, используя проекции матриц \mathbf{K} и \mathbf{M} на E_2 . Кроме того, если используется подпространственная итерация, то на каждой итерации мы получаем «наилучшие» аппроксимации требуемых собственных значений и собственных векторов и можем на каждой итерации измерять степень сходимости.

11.6.3. Стартовые векторы итераций

Первым этапом при применении метода подпространственной итерации является выбор стартовых векторов итераций, входящих в \mathbf{X}_1 (см. (11.151)). Как уже отмечалось ранее, если используются такие стартовые векторы, которые перекрывают наименее подверженное влияниям подпространство, то итерация сходится за один этап. Такая ситуация имеет место, например, если в диагональной матрице масс имеются отличные от нуля массы только в количестве p , а стартовые векторы представляют собой единичные векторы \mathbf{e}_i с составляющими $+1$, соответствующими массовым степеням свободы. В этом случае одна подпространственная итерация есть, фактически, то же, что и статический анализ со сгущением или приведение по Гюйану. Это следует из обсуждения в разделе 10.3.2 и из того, что подпространственная итерация включает в себя анализ Ритца. Рассмотрим приводимый ниже пример.

Пример 11.26: Воспользуйтесь подпространственной итерацией, чтобы рассчитать собственные пары (λ_1, ϕ_1) и (λ_2, ϕ_2) для задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, где

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Как рекомендовалось выше, в качестве стартовых векторов мы используем единичные векторы \mathbf{e}_2 и \mathbf{e}_4 . После этого, следуя соотношениям (11.151)–(11.155), мы получаем

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\bar{\mathbf{X}}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 4 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

и

$$\mathbf{K}_2 = 4 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M}_2 = 8 \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8 + 4\sqrt{2}} & \frac{1}{4\sqrt{2} - 8} \\ \frac{1}{4 + 4\sqrt{2}} & \frac{1}{4\sqrt{2} - 4} \end{bmatrix}$$

и

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 \\ 1/2 & -1/2 \\ \frac{1 + \sqrt{2}}{4} & \frac{-1 + \sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Сравнивая эти результаты с решением, рассчитанным в примере 10.12, мы убеждаемся, что мы получили точные результаты за одну подпространственную итерацию.

Второй случай, для которого подпространственная итерация может сойтись за один этап, возникает, когда обе матрицы, \mathbf{K} и \mathbf{M} , являются диагональными. Этот случай является до некоторой степени тривиальным, однако он рассмотрен с целью разработки эффективной процедуры выбора стартовых векторов итераций в условиях, когда анализ охватывает матрицы общего вида. Когда матрицы \mathbf{K} и \mathbf{M} являются диагональными, то векторами итераций должны быть единичные векторы с компонентами $+1$, соответствующими тем степеням свободы, которые имеют наименьшие отношения k_{ii}/m_{ii} . Эти векторы являются собственными векторами, соответствующими наименьшим собственным значениям, и именно по этой причине сходимость достигается за один этап. Эту процедуру мы демонстрируем на следующем примере.

Пример 11.27: Постройте стартовые векторы итераций для решения с определением двух наименьших собственных значений методом подпространственной итерации для исходной задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$, где

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3 & & & \\ & 2 & & \\ & & 4 & \\ & & & 8 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 0 & & \\ & & 4 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Здесь отношения k_{ii}/m_{ii} равны $3/2$, ∞ , 1 и 8 для $i = 1, \dots, 4$ и эти отношения представляют собой собственные значения задачи. Поэтому стартовые векторы, которые следует использовать, равны

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 1 \\ 0 & & 0 \\ 1 & & 0 \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Векторы в \mathbf{X}_1 отличаются лишь множителями от требуемых собственных векторов и, следовательно, сходимость достигается уже на первом этапе итерации.

Те два случая, с которыми мы имели дело выше, связаны с матрицами довольно специального вида; это значит, что в первом случае могло бы быть выполнено статическое сгущение, а во втором случае матрицы \mathbf{K} и \mathbf{M} были диагональными. В обоих случаях применялись единичные векторы \mathbf{e}_i , где $i = r_1, r_2, \dots, r_p$, а $r_j, j = 1, 2, \dots, p$ соответствовали p наименьшим значениям отношения k_{ii}/m_{ii} для всех i . При использовании этих обозначений мы имеем применительно к примеру 11.26 $r_1 = 2$ и $r_2 = 4$, а для примера 11.27 — $r_1 = 3$ и $r_2 = 1$.

Несмотря на то, что такие, специального вида, матрицы едва ли будут встречаться при практическом анализе общего типа, все же результаты, касающиеся построения стартовых векторов итераций, показывают, как при анализе общего типа могут эффективно выбираться эти стартовые векторы. Общее наблюдение сводится к тому, что в вышеописанных случаях могли быть выбраны стартовые векторы итераций, перекрывающие наименее подверженное влияниям подпространство E_∞ , так как свойства, относящиеся к массе и к жесткости, были в значительной мере сгруппированы в отдельные комплексы. В общем случае такая группировка невозможна или привела бы к неточным представлениям распределения массы и жесткости в реальной конструкции. Однако, хотя матрицы \mathbf{K} и \mathbf{M} не имеют точно такой же формы, как ранее, все же обсуждение показывает, что стартовые векторы итераций должны быть построены так, чтобы возбудить те степени свободы, с которыми ассоциируется большая масса и малая жесткость. Основываясь, по существу, на этом наблюдении, приводимый ниже алгоритм был эффективно использован для выбора стартовых векторов итераций. Первый столбец матрицы \mathbf{MX}_1 попросту совпадает с диагональю матрицы \mathbf{M} . Тем самым обеспечивается возбуждение всех массовых степеней свободы. Другие столбцы матрицы \mathbf{MX}_1 , за исключением последнего, представляют собой единичные векторы с компонентами $+1$ у степеней свободы с наименьшими отношениями k_{ii}/m_{ii} , тогда как последний столбец этой матрицы является случайным вектором (при анализе больших систем важно также правильно выбрать и принять во внимание промежутики между единичными компонентами стартовых векторов; см. программу SSPACE).

Описанное выше стартовое подпространство является, вообще говоря, лишь некоторой аппроксимацией того истинного требуемого подпространства, которое мы обозначаем символом E_∞ ; однако, чем ближе оказываются \mathbf{K} и \mathbf{M} к матричным формам, использованным в примерах 11.26 и 11.27, тем «лучше» оказывается стартовое подпространство, т. е. тем меньше итераций предполагается провести до достижения сходимости. На практике число итераций, требуемых до достижения сходимости, зависит от матриц \mathbf{K} и \mathbf{M} , от числа искоемых собственных значений, от числа используемых векторов итераций и от той степени точности, с которой требуется представить собственные значения и собственные векторы.

Как показал опыт, когда значение p мало, то при использовании описанного выше стартового подпространства и при $q = \min(2p, p + 8)$ требуется, приблизительно, от 10 до 20 итераций для расчета наибольшего собственного значения с точностью в шесть значащих цифр, при наименьших собственных значениях, прогнозируемых с большей точностью.

В качестве альтернативы использованию вышеописанного стартового подпространства может оказаться эффективным применять процедуру Ланцоша для генерации стартовых

векторов итераций. Имея такие стартовые векторы, может оказаться выгодным использовать значение q , значительно превышающее p , скажем $q = 2p$, после чего обычно для достижения сходимости требуется провести всего лишь несколько итераций.

Как показал опыт, вышеописанные стартовые подпространства оказались весьма подходящими. Однако для конкретных приложений могут, все же, понадобиться «лучшие» стартовые векторы. Например, при динамической оптимизации, когда структура системы модифицируется с помощью малых шагов, предыдущая структура может оказаться хорошей аппроксимацией для собственной системы новой структуры. Аналогично этому, если некоторые из собственных векторов уже были рассчитаны и теперь мы хотим построить решение для других собственных векторов, то прежде рассчитанные собственные векторы могли бы быть эффективно использованы в представлении матрицы \mathbf{X}_1 . Если уже были получены собственные векторы субструктур, то они также могут быть использованы для построения стартовых векторов итераций, входящих в \mathbf{X}_1 (см. раздел 10.3.3).

11.6.4. Сходимость

При изменении подпространственной итерации необходимо оценивать сходимость. Предположим, что в $(k-1)$ -й итерации были рассчитаны приближенные собственные значения $\lambda_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, p$. После этого мы используем соотношение (10.107) для оценки сходимости в форме

$$\left[1 - \frac{(\lambda_i^{(k)})^2}{(\mathbf{q}_i^{(k)})^T \mathbf{Q}_i^{(k)}} \right]^{1/2} \leq tol; \quad i = 1, \dots, p, \quad (11.156)$$

где $\mathbf{q}_i^{(k)}$ — это вектор, входящий в матрицу \mathbf{Q}_k и соответствующий $\lambda_i^{(k)}$ (см. упражнение 11.20), а также $tol = 10^{-2s}$, когда собственные значения определены с точностью примерно до $2s$ значащих цифр. Например, если мы итерируем до тех пор, пока все p пределов в (11.156) не станут меньше, чем 10^{-6} , то мы найдем, что значение λ_p было аппроксимировано, как минимум, с точностью до шести цифр, тогда как меньшие собственные значения были, как правило, рассчитаны более точно. Если учесть, что приближенные собственные значения вычисляются с использованием коэффициента Рэлея, то приближенные выражения собственных векторов оказываются имеющими точность лишь порядка s (или более) значащих цифр. Следует отметить, что итерация выполняется с q векторами, $q > p$, однако сходимость измеряется только для аппроксимаций, полученных для p наименьших собственных значений.

Еще один важный аспект, связанный с применением метода подпространственной итерации, относится к проверке того обстоятельства, что, когда найдены собственные пары, удовлетворяющие соотношениям (11.146) и (11.147), нужно проверить, оказались ли рассчитанными именно требуемые собственные значения и векторы. Эта проверка представляет собой третью важную фазу метода подпространственной итерации. Как уже указывалось, итерация, соответствующая соотношениям (11.151)–(11.155), дает в пределе сходимость к собственным векторам ϕ_1, \dots, ϕ_p , если только стартовые векторы итераций не являются ортогональными к какому-либо из требуемых собственных векторов. Как показывает опыт, описанные выше стартовые подпространства оказываются весьма удовлетворительными в этом отношении, хотя и невозможно дать формальное математическое доказательство того, что сходимость будет всегда иметь место в действительности. Однако если удовлетворяется условие с допуском для сходимости, соответствующее (11.156), при показателе s равном, как минимум, трем, то мы можем быть уверены в том, что наименьшие собственные значения и соответствующие собственные векторы действительно были рассчитаны. Для проверки этого обстоятельства мы используем свойство последовательности Штурма для характеристических полиномов задач $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$ и $\mathbf{K}^{(r)}\phi^{(r)} = \lambda^{(r)}\mathbf{M}^{(r)}\phi^{(r)}$ при сдвиге, равном μ , где точка, соответствующая μ , располагается несколько правее рассчитанного значения λ_p (см. рис. 11.5). Свойство последовательности Штурма свидетельствует о том, что при факторизации матрицы $\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}$ с превращением в \mathbf{LDL}^T число отрицательных элементов матрицы \mathbf{D} оказывается равным числу собственных значений, меньших, чем μ .

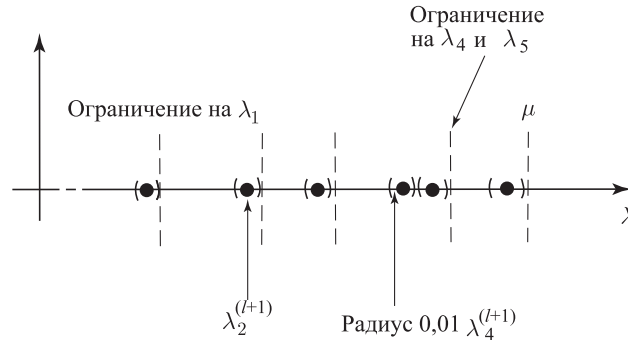


Рис. 11.5. Ограничения на собственные значения, соблюдаемые при проверке с помощью последовательности Штурма

Следовательно, в рассматриваемом здесь случае мы должны были бы иметь в матрице \mathbf{D} p отрицательных элементов. Однако для того, чтобы применить проверку с последовательностью Штурма, нужно использовать осмысленное значение μ , полученное с учетом того факта, что нами найдены лишь приближения к точным собственным значениям задачи $\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi$. Пусть l будет номером последней итерации, так что рассчитанными собственными значениями будут $\lambda_1^{(l+1)}$, $\lambda_2^{(l+1)}$, ..., $\lambda_p^{(l+1)}$. Если выполняется условие (11.156), то мы можем использовать

$$0,99\lambda_i^{(l+1)} \leq \lambda_i \leq 1,01\lambda_i^{(l+1)} \quad (11.157)$$

или принять более тесные граничные значения, основываясь на той фактической точности, которая достигнута согласно (11.156). Соотношение, сформулированное в (11.157), может быть после этого использовано для установления пределов для всех точных собственных значений и, следовательно, может быть применена реалистическая проверка с последовательностью Штурма.

11.6.5. Компьютерное воплощение метода подпространственной итерации

Уравнения, определяющие проведение подпространственной итерации, были представлены соотношениями (11.151)–(11.155). Однако при своем реальном воплощении решение может быть построено более эффективно в соответствии со схемой, представленной в табл. 11.5, где приводится также информация о соответствующем числе операций, используемых для того или иного действия.

Таблица 11.5. Сводка данных по решению с подпространственными итерациями

Операция	Формула для вычисления	Число элементарных операций		Потребная память
		$m = m_K = m_M$	$m = m_K, m_M = 0$	
Факторизация $\mathbf{K} = \mathbf{LDL}^T$ величины \mathbf{K}		$\frac{1}{2}nm^2 + \frac{3}{2}nt$	$\frac{1}{2}nm^2 + \frac{3}{2}nt$	


```

C .      TT(NN)      = WORKING VECTOR      . SSP00018
C .      W(NN)       = WORKING VECTOR      . SSP00019
C .      AR(NNC)     = WORKING MATRIX STORING PROJECTION OF K . SSP00020
C .      BR(NNC)     = WORKING MATRIX STORING PROJECTION OF M . SSP00021
C .      VEC(NC,NC)  = WORKING MATRIX      . SSP00022
C .      D(NC)       = WORKING VECTOR      . SSP00023
C .      RTOLV(NC)   = WORKING VECTOR      . SSP00024
C .      BUP(NC)     = WORKING VECTOR      . SSP00025
C .      BLO(NC)     = WORKING VECTOR      . SSP00026
C .      BUPC(NC)    = WORKING VECTOR      . SSP00027
C .      NN          = ORDER OF STIFFNESS AND MASS MATRICES . SSP00028
C .      NNM         = NN + 1              . SSP00029
C .      NWK         = NUMBER OF ELEMENTS BELOW SKYLINE OF   . SSP00030
C .                  STIFFNESS MATRIX                . SSP00031
C .      NWM         = NUMBER OF ELEMENTS BELOW SKYLINE OF   . SSP00032
C .                  MASS MATRIX                    . SSP00033
C .                  I. E. NWM=NWK FOR CONSISTENT MASS MATRIX . SSP00034
C .                  NWM=NN FOR LUMPED MASS MATRIX         . SSP00035
C .      NROOT        = NUMBER OF REQUIRED EIGENVALUES AND EIGENVECTORS . SSP00036
C .      RTOL         = CONVERGENCE TOLERANCE ON EIGENVALUES . SSP00037
C .                  ( 1.E-06 OR SMALLER )              . SSP00038
C .      NC           = NUMBER OF ITERATION VECTORS USED     . SSP00039
C .      (USUALLY SET TO MIN(2*NROOT, NROOT+8), BUT NC      . SSP00040
C .                  CANNOT BE LARGER THAN THE NUMBER OF MASS . SSP00041
C .                  DEGREES OF FREEDOM)                 . SSP00042
C .      NNC          = NC*(NC+1)/2 DIMENSION OF STORAGE VECTORS AR,BR . SSP00043
C .      NITEM        = MAXIMUM NUMBER OF SUBSPACE ITERATIONS PERMITTED . SSP00044
C .                  (USUALLY SET TO 16)                 . SSP00045
C .                  THE PARAMETERS NC AND/OR NITEM MUST BE . SSP00046
C .                  INCREASED IF A SOLUTION HAS NOT CONVERGED . SSP00047
C .      IFSS         = FLAG FOR STURM SEQUENCE CHECK        . SSP00048
C .                  EQ.0 NO CHECK                        . SSP00049
C .                  EQ.1 CHECK                          . SSP00050
C .      IFPR         = FLAG FOR PRINTING DURING ITERATION    . SSP00051
C .                  EQ.0 NO PRINTING                    . SSP00052
C .                  EQ.1 PRINT                          . SSP00053
C .      NSTIF        = SCRATCH FILE                        . SSP00054
C .      IOUT         = UNIT USED FOR OUTPUT                 . SSP00055
C .                  . SSP00056
C .      - - OUTPUT - - . SSP00057
C .      EIGV(NROOT) = EIGENVALUES                          . SSP00058
C .      R(NN,NROOT) = EIGENVECTORS                        . SSP00059
C .                  . SSP00060
C .                  . SSP00061
C .      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)                . SSP00062
C .                  . SSP00063
C .      THIS PROGRAM IS USED IN SINGLE PRECISION ARITHMETIC ON CRAY . SSP00064
C .      EQUIPMENT AND DOUBLE PRECISION ARITHMETIC ON IBM MACHINES, . SSP00065
C .      ENGINEERING WORKSTATIONS AND PCS. DEACTIVATE ABOVE LINE FOR . SSP00066
C .      SINGLE PRECISION ARITHMETIC.                      . SSP00067
C .                  . SSP00068
C .      INTEGER MAXA(NNM) . SSP00069
C .      DIMENSION A(NWK),B(NWM),R(NN,NC),TT(NN),W(NN),EIGV(NC), . SSP00070
C .      1D(NC),VEC(NC,NC),AR(NNC),BR(NNC),RTOLV(NC),BUP(NC) . SSP00071
C .      2          BLO(NC),BUPC(NC) . SSP00072

```

C		SSP00073
C	SET TOLERANCE FOR JACOBI ITERATION	SSP00074
	TOLJ=1.0D-12	SSP00075
C		SSP00076
C	INITIALIZATION	SSP00077
C		SSP00078
	ICONV=0	SSP00079
	NSCH=0	SSP00080
	NSMAX=12	SSP00081
	N1=NC + 1	SSP00082
	NC1=NC - 1	SSP00083
	REWIND NSTIF	SSP00084
	WRITE (NSTIF) A	SSP00085
	DO 2 I=1,NC	SSP00086
	2 D(I)=0.	SSP00087
C		SSP00088
C	ESTABLISH STARTING ITERATION VECTORS	SSP00089
C		SSP00090
	ND=NN/NC	SSP00091
	IF (NWM.GT.NN) GO TO 4	SSP00092
	J=0	SSP00093
	DO 6 I=1,NN	SSP00094
	II=MAXA(I)	SSP00095
	R(I,1)=B(I)	SSP00096
	IF (B(I).GT.0) J=J + 1	SSP00097
	6 W(I)=B(I)/A(II)	SSP00098
	IF (NC.LE.J) GO TO 16	SSP00099
	WRITE (IOUT,1007)	SSP00100
	GO TO 800	SSP00101
	4 DO 10 I=1,NN	SSP00102
	II=MAXA(I)	SSP00103
	R(I,1)=B(II)	SSP00104
	10 W(I)=B(II)/A(II)	SSP00105
	16 DO 20 J=2,NC	SSP00106
	DO 20 I=1,NN	SSP00107
	20 R(I,J)=0.	SSP00108
C		SSP00109
	L=NN - ND	SSP00110
	DO 30 J=2,NC	SSP00111
	RT=0.	SSP00112
	DO 40 I=1,L	SSP00113
	IF (W(I).LT.RT) GO TO 40	SSP00114
	RT=W(I)	SSP00115
	IJ=I	SSP00116
	40 CONTINUE	SSP00117
	DO 50 I=L,NN	SSP00118
	IF (W(I).LE.RT) GO TO 50	SSP00119
	RT=W(I)	SSP00120
	IJ=I	SSP00121
	50 CONTINUE	SSP00122
	TT(J)=FLOAT(IJ)	SSP00123
	W(IJ)=0.	SSP00124
	L=L - ND	SSP00125
	30 R(IJ,J)=1.	SSP00126
C		SSP00127

	WRITE (IOUT,1008)	SSP00128
	WRITE (IOUT,1002) (TT(J),J=2,NC)	SSP00129
C		SSP00130
C	A RANDOM VECTOR IS ADDED TO THE LAST VECTOR	SSP00131
C		SSP00132
	PI=3.141592654D0	SSP00133
	XX=0.5D0	SSP00134
	DO 60 K=1,NN	SSP00135
	XX=(PI + XX)**5	SSP00136
	IX=INT(XX)	SSP00137
	XX=XX - FLOAT(IX)	SSP00138
	60 R(K,NC)=R(K,NC) + XX	SSP00139
C		SSP00140
C	FACTORIZE MATRIX A INTO (L)*(D)*(L(T))	SSP00141
C		SSP00142
	ISH=0	SSP00143
	CALL DECOMP (A,MAXA,NN,ISH,IOUT)	SSP00144
C		SSP00145
C	- - - S T A R T O F I T E R A T I O N L O O P	SSP00146
C		SSP00147
	NITE=0	SSP00148
	TOLJ2=1.0D-24	SSP00149
	100 NITE=NITE + 1	SSP00150
	IF (IFPR.EQ.0) GO TO 90	SSP00151
	WRITE (IOUT,1010) NITE	SSP00152
C		SSP00153
C	CALCULATE THE PROJECTIONS OF A AND B	SSP00154
C		SSP00155
	90 IJ=0	SSP00156
	DO 110 J=1,NC	SSP00157
	DO 120 K=1,NN	SSP00158
	120 TT(K)=R(K,J)	SSP00159
	CALL REDBAK (A,TT,MAXA,NN)	SSP00160
	DO 130 I=J,NC	SSP00161
	ART=0.	SSP00162
	DO 140 K=1,NN	SSP00163
	140 ART=ART + R(K,I)*TT(K)	SSP00164
	IJ=IJ + 1	SSP00165
	130 AR(IJ)=ART	SSP00166
	DO 150 K=1,NN	SSP00167
	150 R(K,J)=TT(K)	SSP00168
	110 CONTINUE	SSP00169
	IJ = 0	SSP00170
	DO 160 J=1,NC	SSP00171
	CALL MULT (TT,B,R(1,J),MAXA,NN,NWM)	SSP00172
	DO 180 I=J,NC	SSP00173
	BRT=0.	SSP00174
	DO 190 K=1,NN	SSP00175
	190 BRT=BRT + R(K,I)*TT(K)	SSP00176
	IJ=IJ + 1	SSP00177
	180 BR(IJ)=BRT	SSP00178
	IF (ICONV.GT.0) GO TO 160	SSP00179
	DO 200 K=1,NN	SSP00180
	200 R(K,J)=TT(K)	SSP00181
	160 CONTINUE	SSP00182

C		SSP00183
C	SOLVE FOR EIGENSYSTEM OF SUBSPACE OPERATORS	SSP00184
C		SSP00185
	IF (IFPR.EQ.0) GO TO 320	SSP00186
	IND=1	SSP00187
210	WRITE (IOUT,1020)	SSP00188
	II=1	SSP00189
	DO 300 I=1,NC	SSP00190
	ITEMP=II + NC - I	SSP00191
	WRITE (IOUT,1005) (AR(J),J=II,ITEMP)	SSP00192
300	II=II + 1 - I	SSP00193
	WRITE (IOUT,1030)	SSP00194
	II=1	SSP00195
	DO 310 I=1,NC	SSP00196
	ITEMP=II + NC - I	SSP00197
	WRITE (IOUT,1005) (BR(J),J=II,ITEMP)	SSP00198
310	II=II + N1 - I	SSP00199
	IF (IND.EQ.2) GO TO 350	SSP00200
C		SSP00201
320	CALL JACOBI (AR,BR,VEC,EIGV,W,NC,NNC,TOLJ,NSMAX,IFPR,IOUT)	SSP00202
C		SSP00203
	IF (IFPR.EQ.0) GO TO 350	SSP00204
	WRITE (IOUT,1040)	SSP00205
	IND=2	SSP00206
	GO TO 210	SSP00207
C		SSP00208
C	ARRANGE EIGENVALUES IN ASCENDING ORDER	SSP00209
C		SSP00210
350	IS=0	SSP00211
	II=1	SSP00212
	DO 360 I=1,NC1	SSP00213
	ITEMP=II + N1 - I	SSP00214
	IF (EIGV(I+1).GE.EIGV(I)) GO TO 360	SSP00215
	IS=IS + 1	SSP00216
	EIGVT=EIGV(I+1)	SSP00217
	EIGV(I+1)=EIGV(I)	SSP00218
	EIGV(I)=EIGVT	SSP00219
	BT=BR(ITEMP)	SSP00220
	BR(ITEMP)=BR(II)	SSP00221
	BR(II)=BT	SSP00222
	DO 370 K=1,NC	SSP00223
	RT=VEC(K,I+1)	SSP00224
	VEC(K,I+1)=VEC(K,I)	SSP00225
370	VEC(K,I)=RT	SSP00226
360	II=ITEMP	SSP00227
	IF (IS.GT.0) GO TO 350	SSP00228
	IF (IFPR.EQ.0) GO TO 375	SSP00229
	WRITE (IOUT,1035)	SSP00230
	WRITE (IOUT,1006) (EIGV(I),I=1,NC)	SSP00231
C		SSP00232
C	CALCULATE B TIMES APPROXIMATE EIGENVECTORS (ICONV.EQ.0)	SSP00233
C	OR FINAL EIGENVECTOR APPROXIMATIONS (ICONV.GT.0)	SSP00234
C		SSP00235
375	DO 420 I=1,NN	SSP00236
	DO 422 J=1,NC	SSP00237

```

422  TT(J)=R(I,J)                      SSP00238
      DO 424 K=1,NC                    SSP00239
      RT=0.                            SSP00240
      DO 430 L=1,NC                    SSP00241
430  RT=RT + TT(L)*VEC(L,K)            SSP00242
424  R(I,K)=RT                         SSP00243
420  CONTINUE                          SSP00244
C                                     SSP00245
C      CALCULATE ERROR BOUNDS AND CHECK FOR CONVERGENCE OF EIGENVALUES SSP00246
C                                     SSP00247
      DO 380 I=1,NC                    SSP00248
      VDOT=0.                          SSP00249
      DO 382 J=1,NC                    SSP00250
382  VDOT=VDOT + VEC(I,J)*VEC(I,J)    SSP00251
      EIGV2=EIGV(I)*EIGV(I)            SSP00252
      DIF=VDOT - EIGV2                 SSP00253
      RDIF=MAX(DIF,TOLJ2*EIGV2)/EIGV2  SSP00254
      RDIF=SQRT(RDIF)                  SSP00255
      RTOLV(I)=RDIF                    SSP00256
380  CONTINUE                          SSP00257
      IF (IFPR.EQ.0 .AND. ICONV.EQ.0) GO TO 385 SSP00258
      WRITE (IOUT,1050)                 SSP00259
      WRITE (IOUT,1005) (RTOLV(I),I=1,NC) SSP00260
385  IF (ICONV.GT.0) GO TO 500          SSP00261
C                                     SSP00262
      DO 390 I=1,NROOT                 SSP00263
      IF (RTOLV(I).GT.RTOL) GO TO 400   SSP00264
390  CONTINUE                          SSP00265
      WRITE (IOUT,1060) RTOL            SSP00266
      ICONV=1                          SSP00267
      GO TO 100                         SSP00268
400  IF (NITE.LT.NITEM) GO TO 100       SSP00269
      WRITE (IOUT,1070)                 SSP00270
      ICONV=2                          SSP00271
      IFSS=0                           SSP00272
      GO TO 100                         SSP00273
C                                     SSP00274
C - - - E N D   O F   I T E R A T I O N   L O O P SSP00275
C                                     SSP00276
500  WRITE (IOUT.1100)                 SSP00277
      WRITE (IOUT.1006) (EIGV(I),I=1,NROOT) SSP00278
      WRITE (IOUT.1110)                 SSP00279
      DO 530 J=1,NROOT                 SSP00280
530  WRITE (IOUT,1005) (R(K,J),K=1,NN)  SSP00281
C                                     SSP00282
C      CALCULATE AND PRINT ERROR MEASURES SSP00283
C                                     SSP00284
      REWIND NSTIF                     SSP00285
      READ (NSTIF) A                    SSP00286
C                                     SSP00287
      DO 580 L=1,NROOT                 SSP00288
      RT=EIGV(L)                       SSP00289
      CALL MULT(TT,A,R(1,L),MAXA,NN,NWK) SSP00290
      VNORM=0.                         SSP00291
      DO 590 I=1,NN                    SSP00292

```

590	VNORM=VNORM + TT(I)*TT(I)	SSP00293
	CALL MULT(W,B,R(1,L),MAXA,NN,NWM)	SSP00294
	WNORM=0.	SSP00295
	DO 600 I=1,NN	SSP00296
	TT(I)=TT(I) - RT*W(I)	SSP00297
600	WNORM=WNORM + TT(I)*TT(I)	SSP00298
	VNORM=SQRT(VNORM)	SSP00299
	WNORM=SQRT(WNORM)	SSP00300
	D(L)=WNORM/VNORM	SSP00301
580	CONTINUE	SSP00302
	WRITE (IOUT,1115)	SSP00303
	WRITE (IOUT,1005) (D(I),I=1,NROOT)	SSP00304
C		SSP00305
C	APPLY STURM SEQUENCE CHECK	SSP00306
C		SSP00307
	IF (IFSS.EQ.0) GO TO 900	SSP00308
	CALL SCHECK (EIGV,RTOLV,BUP,BLO,BUPC,D,NC,NEI,RTOL,SHI FT,IOUT)	SSP00309
C		SSP00310
	WRITE (IOUT,1120) SHIFT	SSP00311
C		SSP00312
C	SHIFT MATRIX A	SSP00313
C		SSP00314
	REWIND NSTIF	SSP00315
	READ (NSTIF) A	SSP00316
	IF (NWM.GT.NN) GO TO 645	SSP00317
	DO 640 I=1,NN	SSP00318
	II=MAXA(I)	SSP00319
640	A(II)=A(II) - B(I)*SHIFT	SSP00320
	GO TO 660	SSP00321
645	DO 650 I=1,NWK	SSP00322
650	A(I)=A(I) - B(I)*SHIFT	SSP00323
C		SSP00324
C	FACTORIZE SHIFTED MATRIX	SSP00325
C		SSP00326
660	ISH=1	SSP00327
	CALL DECOMP (A,MAXA,NN,ISH,IOUT)	SSP00328
C		SSP00329
C	COUNT NUMBER OF NEGATIVE DIAGONAL ELEMENTS	SSP00330
C		SSP00331
	NSCH=0	SSP00332
	DO 664 I=1,NN	SSP00333
	II=MAXA(I)	SSP00334
	IF (A(II).LT.0.) NSCH=NSCH + 1	SSP00335
664	CONTINUE	SSP00336
	IF (NSCH.EQ.NEI) GO TO 670	SSP00337
	NMIS=NSCH - NEI	SSP00338
	WRITE (IOUT,1130) NMIS	SSP00339
	GO TO 900	SSP00340
670	WRITE (IOUT,1140) NSCH	SSP00341
	GO TO 900	SSP00342
C		SSP00343
800	STOP	SSP00344
900	RETURN	SSP00345
C		SSP00346
1002	FORMAT (' ',10F10.0)	SSP00347

```

1005 FORMAT (' ',12E11.4) SSP00348
1006 FORMAT (' ',6E22.14) SSP00349
1007 FORMAT (///,' STOP, NC IS LARGER THAN THE NUMBER OF MASS ', SSP00350
1 'DEGREES OF FREEDOM') SSP00351
1008 FORMAT (///,' DEGREES OF FREEDOM EXCITED BY UNIT STARTING ', SSP00352
1 'ITERATION VECTORS') SSP00353
1010 FORMAT (//,' I T E R A T I O N N U M B E R ',18) SSP00354
1020 FORMAT (//,' PROJECTION OF A (MATRIX AR)') SSP00355
1030 FORMAT (//,' PROJECTION OF B (MATRIX BR)') SSP00356
1035 FORMAT (//,' EIGENVALUES OF AR-LAMBDA*BR') SSP00357
1040 FORMAT (//,' AR AND BR AFTER JACOBI DIAGONALIZATION') SSP00358
1050 FORMAT (//,' ERROR BOUNDS REACHED ON EIGENVALUES') SSP00359
1060 FORMAT (///,' CONVERGENCE REACHED FOR RTOL ',E10.4) SSP00360
1070 FORMAT (' *** NO CONVERGENCE IN MAXIMUM NUMBER OF ITERATIONS', SSP00361
1 ' PERMITTED',/, SSP00362
2 ' WE ACCEPT CURRENT ITERATION VALUES',/, SSP00363
3 ' THE STURM SEQUENCE CHECK IS NOT PERFORMED') SSP00364
1100 FORMAT (///,' THE CALCULATED EIGENVALUES ARE') SSP00365
1115 FORMAT (///,' ERROR MEASURES ON THE EIGENVALUES') SSP00366
1110 FORMAT (//,' THE CALCULATED EIGENVECTORS ARE',/) SSP00367
1120 FORMAT (///,' CHECK APPLIED AT SHIFT ',E22.14) SSP00368
1130 FORMAT (///,' THERE ARE ',18,' EIGENVALUES MISSING') SSP00369
1140 FORMAT (//,' WE FOUND THE LOWEST ',18,' EIGENVALUES') SSP00370
C SSP00371
END SSP00372
SUBROUTINE DECOMP (A,MAXA,NN,ISH,IOUT) SSP00373
C . . . . . SSP00374
C . SSP00375
C . P R O G R A M SSP00376
C . TO CALCULATE (L)*(D)*(L)(T) FACTORIZATION OF SSP00377
C . STIFFNESS MATRIX SSP00378
C . SSP00379
C . . . . . SSP00380
C SSP00381
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z) SSP00382
DIMENSION A(1),MAXA(1) SSP00383
IF (NN.EQ.1) GO TO 900 SSP00384
C SSP00385
DO 200 N=1,NN SSP00386
KN=MAXA(N) SSP00387
KL=KN + 1 SSP00388
KU=MAXA(N+1) - 1 SSP00389
KH=KU - KL SSP00390
IF (KH) 304,240,210 SSP00391
210 K=N - KH SSP00392
IC=0 SSP00393
KLT=KU SSP00394
DO 260 J=1,KH SSP00395
IC=IC + 1 SSP00396
KLT=KLT - 1 SSP00397
KI=MAXA(K) SSP00398
ND=MAXA(K+1) - KI - 1 SSP00399
IF (ND) 260,260,270 SSP00400
270 KK=MIN0(IC,ND) SSP00401
C=0. SSP00402

```


400	CONTINUE	SSP00459
C		SSP00460
	DO 480 N=1,NN	SSP00461
	K=MAXA(N)	SSP00462
480	V(N)=V(N)/A(K)	SSP00463
	IF (NN.EQ.1) GO TO 900	SSP00464
	N=NN	SSP00465
	DO 500 L=2,NN	SSP00466
	KL=MAXA(N) + 1	SSP00467
	KU=MAXA(N+1) - 1	SSP00468
	IF (KU-KL) 500,510,510	SSP00469
510	K=N	SSP00470
	DO 520 KK=KL,KU	SSP00471
	K=K - 1	SSP00472
520	V(K)=V(K) - A(KK)*V(N)	SSP00473
500	N=N - 1	SSP00474
C		SSP00475
900	RETURN	SSP00476
	END	SSP00477
	SUBROUTINE MULT (TT,B,RR,MAXA.NN,NWM)	SSP00478
C		SSP00479
C		SSP00480
C	P R O G R A M	SSP00481
C	TO EVALUATE PRODUCT OF B TIMES RR AND STORE RESULT IN TT	SSP00482
C		SSP00483
C		SSP00484
C		SSP00485
	IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)	SSP00486
	DIMENSION TT(1),B(1),RR(1),MAXA(1)	SSP00487
C		SSP00488
	IF (NWM.GT.NN) GO TO 20	SSP00489
	DO 10 I=1,NN	SSP00490
10	TT(I)=B(I)*RR(I)	SSP00491
	GO TO 900	SSP00492
C		SSP00493
20	DO 40 I=1,NN	SSP00494
40	TT(I)=0.	SSP00495
	DO 100 I=1,NN	SSP00496
	KL=MAXA(I)	SSP00497
	KU=MAXA(I+1) - 1	SSP00498
	II=I + 1	SSP00499
	CC=RR(I)	SSP00500
	DO 100 KK=KL,KU	SSP00501
	II=II - 1	SSP00502
100	TT(II)=TT(II) + B(KK)*CC	SSP00503
	IF (NN.EQ.1) GO TO 900	SSP00504
	DO 200 I=2,NN	SSP00505
	KL=MAXA(I) + 1	SSP00506
	KU=MAXA(I+1) - 1	SSP00507
	IF (KU-KL) 200,210,210	SSP00508
	210 II=I	SSP00509
	AA=0.	SSP00510
	DO 220 KK=KL,KU	SSP00511
	II=II - 1	SSP00512
220	AA=AA + B(KK)*RR(II)	SSP00513

	TT(I)=TT(I) + AA	SSP00514
200	CONTINUE	SSP00515
C		SSP00516
900	RETURN	SSP00517
	END	SSP00518
	SUBROUTINE SCHECK (EIGV,RTOLV,BUP,BLO,BUPC,NEIV,NC,NEI,RTOL,	SSP00519
	1 SHIFT,IOUT)	SSP00520
C	SSP00521
C	SSP00522
C	P R O G R A M	SSP00523
C	TO EVALUATE SHIFT FOR STURM SEQUENCE CHECK	SSP00524
C	SSP00525
C	SSP00526
C		SSP00527
	IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)	SSP00528
	DIMENSION EIGV(NC),RTOLV(NC),BUP(NC),BLO(NC),BUPC(NC),NEIV(NC)	SSP00529
C		SSP00530
	FTOL=0.01	SSP00531
C		SSP00532
	DO 100 I=1,NC	SSP00533
	BUP(I)=EIGV(I)*(1.+FTOL)	SSP00534
100	BLO(I)=EIGV(I)*(1.-FTOL)	SSP00535
	NROOT=0	SSP00536
	DO 120 I=1,NC	SSP00537
120	IF (RTOLV(I).LT.RTOL) NROOT=NROOT + 1	SSP00538
	IF (NROOT.GE.1) GO TO 200	SSP00539
	WRITE (IOUT,1010)	SSP00540
	GO TO 800	SSP00541
C		SSP00542
C	FIND UPPER BOUNDS ON EIGENVALUE CLUSTERS	SSP00543
C		SSP00544
200	DO 240 I=1,NROOT	SSP00545
240	NEIV(I)=1	SSP00546
	IF (NROOT.NE.1) GO TO 260	SSP00547
	BUPC(1)=BUP(1)	SSP00548
	LM=1	SSP00549
	L=1	SSP00550
	I=2	SSP00551
	GO TO 295	SSP00552
260	L=1	SSP00553
	I=2	SSP00554
270	IF (BUP(I-1).LE.BLO(I)) GO TO 280	SSP00555
	NEIV(L)=NEIV(L) + 1	SSP00556
	I=I + 1	SSP00557
	IF (I.LE.NROOT) GO TO 270	SSP00558
280	BUPC(L)=BUP(I-1)	SSP00559
	IF (I.GT.NROOT) GO TO 290	SSP00560
	L=L + 1	SSP00561
	I=I + 1	SSP00562
	IF (I.LE.NROOT) GO TO 270	SSP00563
	BUPC(L)=BUP(I-1)	SSP00564
290	LM=L	SSP00565
	IF (NROOT.EQ.NC) GO TO 300	SSP00566
295	IF (BUP(I-1).LE.BLO(I)) GO TO 300	SSP00567
	IF (RTOLV(I).GT.RTOL) GO TO 300	SSP00568


```

      BUPC(L)=BUP(I)                      SSP00569
      NEIV(L)=NEIV(L) + 1                 SSP00570
      NROOT=NROOT + 1                     SSP00571
      IF (NROOT.EQ.NC) GO TO 300           SSP00572
      I=I + 1                             SSP00573
      GO TO 295                            SSP00574
C
C      FIND SHIFT                          SSP00575
C
C
300  WRITE (IOUT,1020)                     SSP00578
      WRITE (IOUT,1005) (BUPC(I),I=1,LM)   SSP00579
      WRITE (IOUT,1030)                     SSP00580
      WRITE (IOUT,1006) (NEIV(I),I=1,LM)   SSP00581
      LL=LM - 1                             SSP00582
      IF (LM.EQ.1) GO TO 310               SSP00583
330  DO 320 I=1,LL                         SSP00584
320  NEIV(L)=NEIV(L) + NEIV(I)             SSP00585
      L=L - 1                               SSP00586
      LL=LL - 1                             SSP00587
      IF (L.NE.1) GO TO 330                SSP00588
310  WRITE (IOUT,1040)                     SSP00589
      WRITE (IOUT,1006) (NEIV(I),I=1,LM)   SSP00590
      L=0                                    SSP00591
      DO 340 I=1,LM                         SSP00592
      L=L + 1                               SSP00593
      IF (NEIV(I).GE.NROOT) GO TO 350       SSP00594
340  CONTINUE                             SSP00595
350  SHIFT=BUPC(L)                         SSP00596
      NEI=NEIV(L)                           SSP00597
      GO TO 900                             SSP00598
C
C      800 STOP                            SSP00599
C      900 RETURN                          SSP00600
C
C
1005  FORMAT (' ',6E22.14)                 SSP00603
1006  FORMAT (' ',6I22)                    SSP00604
1010  FORMAT (' *** ERROR *** SOLUTION STOP IN *SCHECK*',/,
1      ' NO EIGENVALUES FOUND',/)          SSP00606
1020  FORMAT (///,' UPPER BOUNDS ON EIGENVALUE CLUSTERS') SSP00607
1030  FORMAT (///,' NO. OF EIGENVALUES IN EACH CLUSTER')  SSP00608
1040  FORMAT (' NO. OF EIGENVALUES LESS THAN UPPER BOUNDS') SSP00609
      END                                  SSP00610
      SUBROUTINE JACOBI (A,B,X,EIGV,D,N,NWA,RTOL,NSMAX,IFPR,IOUT) SSP00611
C . . . . . SSP00612
C . . . . . SSP00613
C . . . . . SSP00614
C . . . . . SSP00615
C . . . . . SSP00616
C . . . . . SSP00617
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)  SSP00618
      DIMENSION A(NWA),B(NWA),X(N,N),EIGV(N),D(N) SSP00619
C
C      INITIALIZE EIGENVALUE AND EIGENVECTOR MATRICES SSP00620
C
C
      N1=N + 1                             SSP00621
      N1=N + 1                             SSP00622
      N1=N + 1                             SSP00623

```

```

      II=1                                SSP00624
      DO 10 I=1,N                          SSP00625
      IF (A(II).GT.0. .AND. B(II).GT.0.) GO TO 4  SSP00626
      WRITE (IOUT,2020) II,A(II),B(II)          SSP00627
      GO TO 800                                SSP00628
4     D(I)=A(II)/B(II)                      SSP00629
      EIGV(I)=D(I)                            SSP00630
10    II=II + N1 - I                        SSP00631
      DO 30 I=1,N                          SSP00632
      DO 20 J=1,N                          SSP00633
20    X(I,J)=0.                            SSP00634
30    X(I,I)=1.                            SSP00635
      IF (N.EQ.1) GO TO 900                  SSP00636
C                                           SSP00637
C     INITIALIZE SWEEP COUNTER AND BEGIN ITERATION  SSP00638
C                                           SSP00639
      NSWEEP=0                              SSP00640
      NR=N - 1                              SSP00641
40    NSWEEP=NSWEEP + 1                    SSP00642
      IF (IFPR.EQ.1) WRITE (IOUT,2000) NSWEEP  SSP00643
C                                           SSP00644
C     CHECK IF PRESENT OFF-DIAGONAL ELEMENT IS LARGE ENOUGH TO REQUIRE  SSP00645
C     ZEROING                                SSP00646
C                                           SSP00647
      EPS=(.01)**(NSWEEP*2)                 SSP00648
      DO 210 J=1,NR                        SSP00649
      JP1=J + 1                            SSP00650
      JM1=J - 1                            SSP00651
      LJK=JM1*N - JM1*J/2                  SSP00652
      JJ=LJK + J                            SSP00653
      DO 210 K=JP1,N                      SSP00654
      KP1=K + 1                            SSP00655
      KM1 = K - 1                          SSP00656
      JK=LJK + K                            SSP00657
      KK=KM1*N - KM1*K/2 + K                SSP00658
      EPTOLA=(A(JK)/A(JJ))*(A(JK)/A(KK))    SSP00659
      EPTOLB=(B(JK)/B(JJ))*(B(JK)/B(KK))    SSP00660
      IF (EPTOLA.LT.EPS .AND. EPTOLB.LT.EPS) GO TO 210  SSP00661
C                                           SSP00662
C     IF ZEROING IS REQUIRED, CALCULATE THE ROTATION MATRIX ELEMENTS CA  SSP00663
C     AND CG                                SSP00664
C                                           SSP00665
      AKK=A(KK)*B(JK) - B(KK)*A(JK)        SSP00666
      AJJ=A(JJ)*B(JK) - B(JJ)*A(JK)        SSP00667
      AB=A(JJ)*B(KK) - A(KK)*B(JJ)         SSP00668
      SCALE=A(KK)*B(KK)                    SSP00669
      ABCH=AB/SCALE                        SSP00670
      AKKCH=AKK/SCALE                      SSP00671
      AJJCH=AJJ/SCALE                      SSP00672
      CHECK=(ABCH*ABCH+4.0*AKKCH*AJJCH)/4.0  SSP00673
      IF (CHECK) 50,60,60                  SSP00674
50    WRITE (IOUT,2020) JJ,A(JJ),B(JJ)      SSP00675
      GO TO 800                                SSP00676
60    SQCH=SCALE*SQRT(CHECK)                SSP00677
      D1=AB/2. + SQCH                      SSP00678

```

	D2=AB/2. - SQCH	SSP00679
	DEN=D1	SSP00680
	IF (ABS(D2).GT.ABS(D1)) DEN=D2	SSP00681
	IF (DEN) 80,70,80	SSP00682
70	CA=0.	SP00683
	CG=-A(JK)/A(KK)	SSP00684
	GO TO 90	SSP00685
80	CA=AKK/DEN	SSP00686
	CG=-AJJ/DEN	SSP00687
C		SSP00688
C	PERFORM THE GENERALIZED ROTATION TO ZERO THE PRESENT OFF-DIAGONAL	SSP00689
C	ELEMENT	SSP00690
C		SSP00691
90	IF (N-2) 100,190,100	SSP00692
100	IF (JM1-1) 130,110,110	SSP00693
110	DO 120 I=1,JM1	SSP00694
	IM1=I - 1	SSP00695
	IJ=IM1*N - IM1*I/2 + J	SSP00696
	IK=IM1*N - IM1*I/2 + K	SSP00697
	AJ=A(IJ)	SSP00698
	BJ=B(IJ)	SSP00699
	AK=A(IK)	SSP00700
	BK=B(IK)	SSP00701
	A(IJ)=AJ + CG*AK	SSP00702
	B(IJ)=BJ + CG*BK	SSP00703
	A(IK)=AK + CA*AJ	SSP00704
120	B(IK)=EK + CA*BJ	SSP00705
130	IF (KP1-N) 140,140,160	SSP00706
140	LJI=JM1*N - JM1*J/2	SSP00707
	LKI=KM1*N - KM1*K/2	SSP00708
	DO 150 I=KP1,N	SSP00709
	JI=LJI + I	SSP00710
	KI=LKI + I	SSP00711
	AJ=A(JI)	SSP00712
	BJ=B(JI)	SSP00713
	AK=A(KI)	SSP00714
	BK=B(KI)	SSP00715
	A(JI)=AJ + CG*AK	SSP00716
	B(JI)=BJ + CG*BK	SSP00717
	A(KI)=AK + CA*AJ	SSP00718
150	B(KI)=BK + CA*BJ	SSP00719
160	IF (JP1-KM1) 170,170,190	SSP00720
170	LJI=JM1*N - JM1*J/2	SSP00721
	DO 180 I=JP1,KM1	SSP00722
	JI=LJI + I	SSP00723
	IM1=I - 1	SSP00724
	IK=IM1*N - IM1*I/2 + K	SSP00725
	AJ=A(JI)	SSP00726
	BJ=B(JI)	SSP00727
	AK=A(IK)	SSP00728
	BK=B(IK)	SSP00729
	A(JI)=AJ + CG*AK	SSP00730
	B(JI)=BJ + CG*BK	SSP00731
	A(IK)=AK + CA*AJ	SSP00732
180	B(IK)=BK + CA*BJ	SSP00733

```

190  AK=A(KK)                                SSP00734
    BK=B(KK)                                SSP00735
    A(KK)=AK + 2.*CA*A(JK) + CA*CA*A(JJ)    SSP00736
    B(KK)=BK + 2.*CA*B(JK) + CA*CA*B(JJ)    SSP00737
    A(JJ)=A(JJ) + 2.*CG*A(JK) + CG*CG*AK    SSP00738
    B(JJ)=B(JJ) + 2.*CG*B(JK) + CG*CG*BK    SSP00739
    A(JK)=0.                                SSP00740
    B(JK)=0.                                SSP00741
C                                          SSP00742
C      UPDATE THE EIGENVECTOR MATRIX AFTER EACH ROTATION    SSP00743
C                                          SSP00744
    DO 200 I=1,N                            SSP00745
    XJ=X(I,J)                              SSP00746
    XK=X(I,K)                              SSP00747
    X(I,J)=XJ + CG*XK                      SSP00748
200  X(I,K)=XK + CA*XJ                      SSP00749
210  CONTINUE                              SSP00750
C                                          SSP00751
C      UPDATE THE EIGENVALUES AFTER EACH SWEEP              SSP00752
C                                          SSP00753
    II = 1                                  SSP00754
    DO 220 I=1,N                            SSP00755
    IF (A(II).GT.0. .AND. B(II).GT.0.) GO TO 215    SSP00756
    WRITE (IOUT,2020) II,A(II),B(II)              SSP00757
    GO TO 800                                     SSP00758
215  EIGV(I)=A(II)/B(II)                    SSP00759
220  II=II + N1 - I                          SSP00760
    IF (IFPR.EQ.0) GO TO 230                  SSP00761
    WRITE (IOUT,2030)                          SSP00762
    WRITE (IOUT,2010) (EIGV(I),I=1,N)            SSP00763
C                                          SSP00764
C      CHECK FOR CONVERGENCE                                SSP00765
C                                          SSP00766
C                                          SSP00767
230  DO 240 I=1,N                            SSP00768
    TOL=RTOL*D(I)                            SSP00769
    DIF=ABS(EIGV(I)-D(I))                     SSP00770
    IF (DIF.GT.TOL) GO TO 280                  SSP00771
240  CONTINUE                              SSP00772
C                                          SSP00773
C      CHECK ALL OFF-DIAGONAL ELEMENTS TO SEE IF ANOTHER SWEEP IS    SSP00774
C      REQUIRED                                              SSP00775
C                                          SSP00776
    EPS=RTOL**2                              SSP00777
    DO 250 J=1,NR                            SSP00778
    JM1=J - 1                                SSP00779
    JP1=J + 1                                SSP00780
    LJK=JM1*N - JM1*J/2                      SSP00781
    JJ=LJK + J                               SSP00782
    DO 250 K=JP1,N                           SSP00783
    KM1=K - 1                                SSP00784
    JK=LJK + K                               SSP00785
    KK=KM1*N - KM1*K/2 + K                   SSP00786
    EPSA=(A(JK)/A(JJ))*(A(JK)/A(KK))          SSP00787
    EPSB=(B(JK)/B(JJ))*(B(JK)/B(KK))          SSP00788
    IF (EPSA.LT.EPS .AND. EPSB.LT.EPS) GO TO 250

```

	GO TO 280	SSP00789
250	CONTINUE	SSP00790
C		SSP00791
C	SCALE EIGENVECTORS	SSP00792
C		SSP00793
255	II=1	SSP00794
	DO 275 I=1,N	SSP00795
	BB=SQRT(B(II))	SSP00796
	DO 270 K=1,N	SSP00797
270	X(K,I)=X(K,I)/BB	SSP00798
275	II=II + N1 - I	SSP00799
	GO TO 900	SSP00800
C		SSP00801
C	UPDATE D MATRIX AND START NEW SWEEP, IF ALLOWED	SSP00802
C		SSP00803
280	DO 290 I=1,N	SSP00804
290	D(I)-EIGV(I)	SSP00805
	IF (NSWEEP.LT.NSMAX) GO TO 40	SSP00806
	GO TO 255	SSP00807
C		SSP00808
800	STOP	SSP00809
900	RETURN	SSP00810
C		SSP00811
2000	FORMAT (//,' SWEEP NUMBER IN *JACOBI* = ',I8)	SSP00812
2010	FORMAT (' ',6E20.12)	SSP00813
2020	FORMAT (' *** ERROR *** SOLUTION STOP',/,	SSP00814
1	' MATRICES NOT POSITIVE DEFINITE',/,	SSP00815
2	' II = ',I8,' A(II) = ',E20.12,' B(II) = ',E20.12)	SSP00816
2030	FORMAT (/, ' CURRENT EIGENVALUES IN *JACOBI* ARE',/)	SSP00817
	END	SSP00818

Представленный здесь метод подпространственной итерации предназначен для построения решения в терминах наименьших собственных значений и соответствующих собственных векторов, где предполагается, что параметр p мал (скажем, $p < 20$). При рассмотрении решения задач с большим числом собственных пар, скажем, $p > 40$, опыт показывает, что вместе с увеличением числа рассматриваемых собственных пар быстро возрастает и стоимость решения с применением метода подпространственной итерации. Этот быстрый рост стоимости обусловлен рядом факторов, которыми можно пренебречь в условиях, когда решение требуется построить только для нескольких собственных пар. Важно отметить, что сравнительно большое число подпространственных итераций может потребоваться, если $q = p + 8$. А именно, в этом случае, при большом значении p скорость сходимости к ϕ_p , равная λ_p/λ_{q+1} , может оказаться близкой к единице. С другой стороны, при возрастании q количество вычислительных операций, приходящихся на одну подпространственную итерацию, существенно возрастает. Другой недостаток решения с применением компьютерной программы SSPACE при большом значении q состоит в том, что при выполнении *всех* подпространственных итераций используется сравнительно большое число векторов итераций, хотя сходимость к наименьшим собственным значениям из числа требуемых достигается, как правило, уже за несколько первых итераций. Наконец, следует отметить, что число вычислительных операций, требуемых при решении приведенной задачи о собственных значениях в соответствии с (11.154), при большом значении q становится значительным.

Приведенные выше соображения показывают, что весьма желательно иметь в своем распоряжении процедуры, ускоряющие процесс основного решения, строящегося с использованием подпространственных итераций и заданного компьютерной программой SSPACE; в частности, это важно тогда, когда необходимо рассчитать большое число собственных пар. Действительно, применительно к основному методу подпространственных

итераций были разработаны различные процедуры ускорения (см., например, работы [Yamamoto, Ohtsubo, 1976] и [Akl, Dilger, Irons, 1982]), а также предложен всеобъемлющий алгоритм решения, который может оказаться значительно более эффективным, чем основной метод; этот алгоритм представлен в работе [Bathe, Ramaswamy, 1980]. В представленной здесь программе этапы решения в соответствии с основным методом подпространственной итерации подвергнуты ускорению с помощью применения перерелаксации, приемов сдвига и метода Ланцоша для генерации стартового подпространства. Кроме того, при применении этого метода может оказаться особенно эффективным применить число векторов итераций, меньшее, нежели число собственных пар, подлежащих расчету (иначе говоря, q может быть меньше, чем p), а процедура построения решения может быть сведена к расчету собственных значений и соответствующих собственных векторов в заранее выбранном интервале. Дальнейшие исследования, направленные на повышение эффективности решения по методу подпространственных итераций, были опубликованы в работе [Dul, Arczewski, 1994].

11.6.6. Упражнения

- 11.18. Покажите в явной форме, что векторы итераций \mathbf{X}_{k+1} при использовании метода подпространственной итерации являются ортонормированными со включением \mathbf{K} и \mathbf{M} .
- 11.19. Применяя метод подпространственной итерации, используйте два вектора итераций с целью построения решения с определением двух наименьших собственных значений и соответствующих собственных векторов для задачи, рассмотренной в упражнении 11.1.
- 11.20. Покажите, что при применении метода подпространственной итерации использование условия (10.107) приводит после $(k - 1)$ итераций к соотношению

$$\left[1 - \frac{(\lambda_i^{(k)})^2}{(\mathbf{q}_i^{(k)})^T (\mathbf{q}_i^{(k)})} \right]^{1/2} \leq tol,$$

где $\lambda_i^{(k)}$ — это вычисленное приближенное собственное значение, а $\mathbf{q}_i^{(k)}$ — соответствующий собственный вектор, входящий в матрицу \mathbf{Q}_k .

- 11.21. Число вычислительных операций, используемых в программе SSPACE, может быть уменьшено за счет использования большего объема памяти. В этом случае после достижения сходимости не проводятся дополнительные итерации. Переделайте программу SSPACE с целью достижения такого уменьшения числа используемых вычислительных операций.
- 11.22. Разработайте программу, подобную программе SSPACE, с использованием языка программирования Си (вместо Фортрана), и сравните эффективность этих двух компьютерных реализаций метода.

Глава 12

КОМПЬЮТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

12.1. Введение

В этой книге мы представили читателю модели, элементы общей теории и численные методы, относящиеся к конечно-элементному анализу. Цель, поставленная нами в этой, заключительной главе, состоит в том, чтобы обсудить некоторые важные вычислительные аспекты, связанные с компьютерной реализацией конечно-элементных процедур. Несмотря на то, что здесь обсуждается реализация конечно-элементного анализа на основе исследования смещений, следует все же отметить, что большинство представленных концепций может применяться также и при конечно-элементном анализе с использованием смешанных формулировок. Отметим, в частности, что смешанные варианты интерполяции, относящиеся к u/p -моделям для двумерных и трехмерных элементов при исследовании сплошной среды (см. разделы 4.4.3, 5.3.5 и 6.4), а также смешанные интерполяции для элементов типа балки, пластины и оболочки (см. разделы 5.4 и 6.5) связаны только с узловыми смещениями и поворотами как с окончательными элементными степенями свободы и, следовательно, процесс объединения элементов в комплекс и решение уравнений осуществляют так же, как и для модели, связанной только со смещениями.

Главное преимущество, которым обладает метод конечных элементов в сравнении с другими методами исследования, состоит в большей степени его общности. Как мы указывали, в нормальных условиях представляется возможным, посредством использования многих элементов, виртуально аппроксимировать любой вид сплошной среды со сложной границей и сложными условиями нагрузки, доведя эту аппроксимацию до такой степени, чтобы можно было провести достаточно точный анализ. Однако на практике возникают очевидные инженерные ограничения, наиболее важное из которых — стоимость анализа. Эта стоимость складывается из затрат на покупку и/или аренду технического оборудования и математического обеспечения, усилий самого исследователя, времени, требуемого на подготовку вводимых при анализе данных, времени, требуемого на выполнение компьютерной программы, и времени, затрачиваемого исследователем на интерпретацию результатов. Разумеется, как об этом уже говорилось в разделе 1.2, может потребоваться несколько запусков одной и той же программы. Кроме того, ограничения, обусловленные возможностями компьютера и качеством применяемой программы, могут препятствовать использованию дискретизации, достаточно совершенной для получения точных результатов. Отсюда следует, что весьма желательно использовать некую эффективную конечно-элементную программу.

Эффективность любой программы существенно зависит от следующих факторов.

Во-первых, важно использовать конечные элементы эффективного типа.

Во-вторых, весьма важно применять эффективные методы программирования и уметь использовать имеющуюся технику и средства математического обеспечения. Несмотря на то, что этот аспект разработки программ зависит от качества имеющегося компьютера, все же при использовании стандартного алгоритмического языка ФОРТРАН-77 или С, а также быстрой или медленной памяти в форме, независимой от системы, могут быть созданы весьма эффективные компьютерные программы. Если такая программа постоянно реализуется на конкретном компьютере, то, вообще говоря, степень ее эффективности может быть увеличена за счет затраты сравнительно небольших усилий, а также использования

тех или иных специальных технических устройств и дополнительного математического обеспечения. Поэтому в дальнейшем мы обсуждаем разработку таких конечно-элементных программ, которые используют, преимущественно, процедуры, не зависящие от типа компьютера.

Третий, очень важный аспект разработки конечно-элементной программы состоит в использовании надлежащих численных методов. Если, например, при динамическом анализе используется неподходящая методика для определения частот системы, то стоимость реализации программы может оказаться во много раз выше, чем с эффективной методикой, и, что даже хуже, при применении неустойчивого алгоритма построение решения может стать вообще невозможным. Чтобы реализовать метод конечных элементов на практике, мы должны использовать цифровой компьютер. Однако даже если мы располагаем компьютером сравнительно высокой производительности, то возможность осуществления решения задачи и эффективность соответствующего анализа непосредственно зависят от того, какие именно численные процедуры мы применяем.

Предположим, что реальная конструкция была идеализирована в форме комплекса конечных элементов. Можно считать, что процесс анализа напряжений состоит, по существу, из трех стадий:

1. Расчет тех матриц системы **K**, **M**, **C** и **R**, которые применимы в данном случае.
2. Решение уравнений равновесия.
3. Вычисление напряжений в элементах.

При анализе задач, относящихся к теплопередаче, теории поля или к механике жидкости, стадии анализа аналогичны, но требуется использовать подходящие матрицы и переменные величины.

Целью данной главы является описание программной реализации первой и третьей стадий, а также представление небольшой компьютерной программы, обладающей всеми теми важными особенностями, которые имеются у программы общего типа. Хотя построение решения в целом может быть подразделено на вышеуказанные три стадии, следует иметь в виду, что конкретная реализация одной из этих стадий может оказать ощутимое воздействие на эффективность другой стадии и, в действительности, в некоторых программах две первые стадии выполняются одновременно (например, при использовании метода фронтального решения; см. раздел 8.2.4).

Как и можно было бы себе представить, не существует единого способа построения оптимальной программы для вычисления системных матриц; однако, несмотря на то, что детали построения программ могут казаться совершенно различными, все же, фактически, они проводятся, следуя некоторым основным этапам. По этой причине оказывается чрезвычайно поучительным подробно обсудить все важные особенности одного варианта реализации, основанного на использовании классических методов. Сначала мы обсудим используемые алгоритмы, а затем, в качестве примера, представим небольшую программу. Этот вариант реализации предназначен для однопроцессорного компьютера, однако он может быть приспособлен для использования с многопроцессорными комплексами, а также для работы с параллельными вычислениями.

12.2. Построение компьютерной программы для вычисления системных матриц

Конечные результаты рассматриваемого здесь этапа сводятся к вычислению структурных матриц, требуемых для решения уравнений равновесия системы. При статическом анализе компьютерная программа требуется для вычисления матрицы жесткости конструкции и векторов нагрузки.

При динамическом анализе программа должна определить также матрицу массы системы и матрицу демпфирования. В том варианте реализации, который будет описан здесь, вычисление системных матриц выполняется по следующей схеме.

1. Считывается или формируется информация об узловых точках и об элементах.

2. Вычисляются матрицы жесткости, массы и демпфирования для элементов, а также эквивалентные нагрузки в узлах.
3. Комплекуются те системные матрицы **K**, **M**, **C** и **R**, которые требуются в данном случае.

12.2.1. Считываемая информация об узловых точках и об элементах

Рассмотрим вначале данные, относящиеся к узловым точкам. Предположим, что программа составлена так, чтобы допускалось наличие, как максимум, шести степеней свободы у каждого узла, — трех поступательных и трех вращательных степеней свободы, как это показано на рис. 12.1.

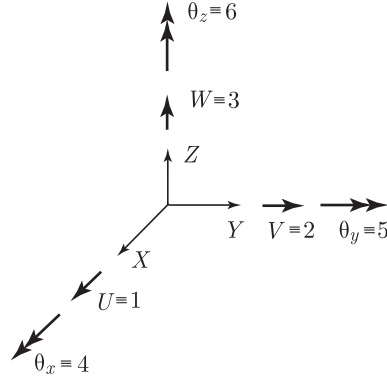


Рис. 12.1. Возможные степени свободы в узловой точке

После этого применительно к каждой узловой точке необходимо установить, какие именно из этих степеней свободы будут фактически использованы при анализе, т. е. какие из шести возможных узловых степеней свободы соответствуют степеням свободы комплекса конечных элементов. Это осуществляется путем введения массива идентификации, массива ID, имеющего размерность NUMNP, умноженного на шесть, где NUMNP — это число узловых точек системы. Элемент (i, j) массива ID соответствует i -й степени свободы в узловой точке j . Если $ID(I, J) = 0$, то соответствующая степень свободы определена в глобальной системе, если $ID(I, J) = 1$, то степень свободы не определена. Следует заметить, что посредством использования той же процедуры мог бы быть задан массив ID для числа степеней свободы большего (или меньшего), чем шесть в расчете на узловую точку и, фактически, число степеней свободы, приходящихся на одну узловую точку, могло бы быть переменной величиной. Рассмотрим следующий простой пример.

Пример 12.1: Определите массив ID для элементной идеализации с плоскими напряжениями в применении к консоли, показанной на рис. 12.2, чтобы установить активные и неактивные степени свободы.

Активные степени свободы определяются условием $ID(I, J) = 0$, а неактивные степени свободы — условием $ID(I, J) = 1$. Учитывая, что консоль располагается в плоскости X, Y , а при идеализации используются плоские элементы и элементы с плоскими напряжениями, активными являются только поступательные степени свободы в направлениях X и Y . Как видно из осмотра системы, массив ID задается в форме

$$ID = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

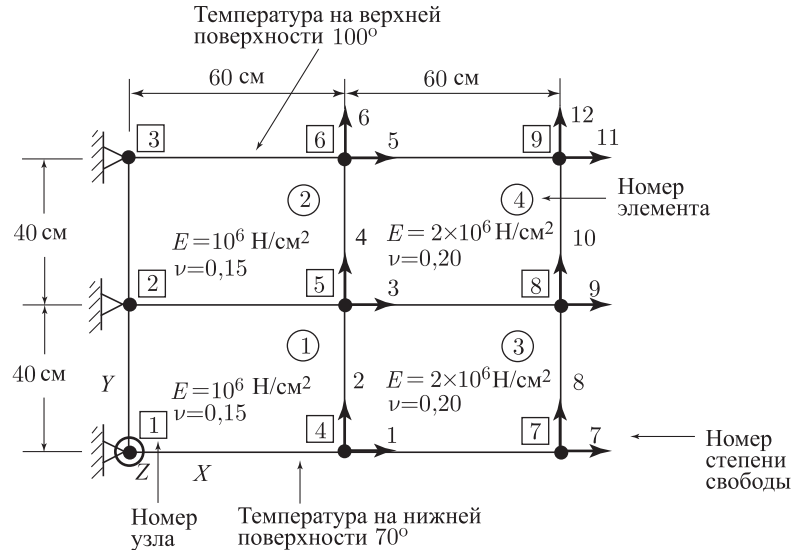


Рис. 12.2. Конечно-элементная идеализация консоли

Коль скоро все активные степени свободы были определены заданием нулей в массиве ID, вводятся номера уравнений, соответствующие этим степеням свободы. Процедура состоит в том, чтобы просто просканировать, столбец за столбцом, весь массив ID, и заменить каждый нуль на номер уравнения, возрастающий последовательно от 1 до цифры, соответствующей общему числу уравнений. Одновременно элементам массива, соответствующим неактивным степеням свободы, придаются нулевые значения.

Пример 12.2: Модифицируйте массив ID, полученный в примере 12.1, применительно к анализу консольной пластины, показанной на рис. 12.2, чтобы получить массив ID, определяющий номера уравнений, соответствующие активным степеням свободы.

Как было разъяснено выше, мы попросту заменяем последовательно, столбец за столбцом, нули массива ID на номера уравнений, получая таким образом

$$ID = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Помимо определения всех активных степеней свободы, мы должны также считать глобальные координаты X, Y, Z и, если это потребует, значения температуры, соответствующие каждой узловой точке. Для показанной на рис. 12.2 консольной балки координатные массивы X, Y, Z и массив значений температуры в узловых точках выглядели бы следующим образом:

$$\begin{aligned} X &= [0,0 & 0,0 & 0,0 & 60,0 & 60,0 & 60,0 & 120,0 & 120,0 & 120,0] \\ Y &= [0,0 & 40,0 & 80,0 & 0,0 & 40,0 & 80,0 & 0,0 & 40,0 & 80,0] \\ Z &= [0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0] \\ T &= [70,0 & 85,0 & 100,0 & 70,0 & 85,0 & 100,0 & 70,0 & 85,0 & 100,0]. \end{aligned} \quad (12.1)$$

На этой стадии, при известных данных для всех узловых точек, программа может считывать и формировать информацию, касающуюся элементов. При этом целесообразно рассматривать каждый из элементов по очереди. Например, при анализе конструкции типа контейнера информация, касающаяся всех элементов типа балки, всех элементов с плоскими напряжениями и всех элементов типа оболочки, считывается и формируется совместно. Это оказывается эффективным, так как для каждого элемента, относящегося к определенному типу, должна быть предоставлена конкретная информация, которая, вследствие своего повторяющегося характера, может быть в некоторой степени сформирована, если все элементы одного и того же типа рассматриваются совместно. Более того, программный механизм, предназначенный для некоторого типа элементов, считывающий информационные данные об этих элементах и вычисляющий элементные матрицы, должен вызываться только один раз.

Необходимые данные, соответствующие некоторому элементу, зависят от конкретного типа рассматриваемого элемента. В общем случае информация, требуемая для каждого элемента, сводится к номерам узлов элемента, соответствующим номерам узловых точек всего комплекса элементов, а также к сведениям о материальных свойствах элемента и о поверхностных массовых силах, приложенных к этому элементу. При учете того обстоятельства, что материальные свойства элемента и элементные нагрузки являются одними и теми же для многих элементов, было бы эффективным определить комплекты материальных свойств и комплекты нагрузок, соответствующие типу элемента. Эти комплекты указываются в начальном разделе каждой группы элементных данных. Поэтому любой комплект материальных свойств и комплект нагрузок элемента может быть приписан элементу в тот самый момент, когда считываются номера исследуемых элементов.

Пример 12.3: Проведите анализ консольной пластины, показанной на рис. 12.2, и рассмотрите местную нумерацию узлов элемента в соответствии со схемой на рис. 5.5. Для каждого элемента дайте номера узлов, соответствующие номерам узловых точек комплекса элементов в целом. Укажите также номера используемых комплектов материальных свойств.

При этом анализе мы определяем два комплекта материальных свойств: комплект материальных свойств номер 1 для $E = 10^6$ Ньютон/см² и $\nu = 0,15$, а также комплект материальных свойств номер 2 для $E = 2 \times 10^6$ Ньютон/см² и $\nu = 0,20$. При этом мы имеем следующие номера узлов и следующие комплекты материальных свойств для каждого элемента:

Элемент 1: номера узлов: 5, 2, 1, 4; комплект материальных свойств: 1

Элемент 2: номера узлов: 6, 3, 2, 5; комплект материальных свойств: 1

Элемент 3: номера узлов: 8, 5, 4, 7; комплект материальных свойств: 2

Элемент 4: номера узлов: 9, 6, 5, 8; комплект материальных свойств: 2

12.2.2. Расчет матриц жесткости и масс элементов, а также эквивалентных нагрузок в узлах

Общая процедура расчета элементных матриц была обсуждена в главах 4 и 5, а соответствующая компьютерная реализация была представлена в разделе 5.6. На этой стадии организация программы сводится к вызову соответствующих подпрограмм для каждого элемента. В процессе расчета элементных матриц нам нужно иметь координаты элементов, комплекты свойств и нагрузок, которые уже были считаны и введены в память на предыдущей стадии (раздел 12.2.1). После завершения расчета можно действовать в соответствии с одним из двух вариантов. первый вариант состоит в том, что элементная матрица может быть введена в дублирующую память, так как объединение матриц в комплекс для всей конструкции выполняется позднее. Второй вариант сводится к тому, что элементная матрица может быть сразу добавлена к матрице конструкции в целом.

12.2.3. Объединение матриц в комплекс

Процесс объединения матриц для получения матрицы жесткости \mathbf{K} конструкции в целом символически описывается формулой

$$\mathbf{K} = \sum_i \mathbf{K}^{(i)}, \quad (12.2)$$

где $\mathbf{K}^{(i)}$ — это матрица жесткости i -го элемента, а суммирование производится по всем элементам комплекса. Аналогично этому, матрица масс конструкции и векторы нагрузки получаются путем объединения матриц масс отдельных элементов и векторов нагрузки на эти элементы, соответственно. В дополнение к матрицам жесткости, масс и нагрузок могут быть включены также и концентрированные жесткости, массы и нагрузки, соответствующие определенным степеням свободы.

Следует отметить, что матрицы жесткости элементов $\mathbf{K}^{(i)}$ из формулы (12.2) имеют тот же порядок, что и матрица жесткости конструкции \mathbf{K} . Однако что касается внутренней структуры матриц $\mathbf{K}^{(i)}$, то их отличные от нуля элементы располагаются только в тех строках и столбцах, которые соответствуют степеням свободы рассматриваемого элемента (см. раздел 4.2). Поэтому на практике мы должны вводить в память только уплотненную матрицу жесткости элемента, порядок которой равен числу степеней свободы элемента, а также некий массив, реализующий связь каждой степени свободы элемента с соответствующей степенью свободы комплекса в целом. Этот массив удобно рассматривать как некий связующий массив, элемент которого за номером i указывает на номер уравнения, соответствующего i -й степени свободы данного элемента.

Пример 12.4: Используя правило нумерации степеней свободы элемента, приведенное на рис. 5.5, определите связующие массивы, определяющие собой степени свободы для комплекса элементов, показанного на рис. 12.2.

Рассмотрите элемент номер 1 на рис. 12.2. В применении к этому элементу узлы комплекса за номерами 5, 2, 1 и 4 соответствуют, в том же порядке, узлам элемента за номерами 1, 2, 3 и 4 (см. рис. 5.5). Если использовать массив ID, то мы получим номера уравнений, соответствующих узлам 5, 2, 1 и 4 комплекса, а отсюда следует, что взаимосвязь между номерами столбцов (и строк) уплотненной, или локальной матрицы жесткости имеет следующую форму:

Соответствующие номера столбцов и строк								
Для уплотненной матрицы	1	2	3	4	5	6	7	8
Для $\mathbf{K}^{(1)}$	3	4	0	0	0	0	1	2

Таким образом, массив LM, в котором хранятся степени свободы комплекса, относящиеся к данному элементу, имеет вид

$$\text{LM} = [3 \quad 4 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2],$$

где нуль означает, что соответствующие столбец и строка уплотненной матрицы жесткости элемента игнорируются и не входят в матрицу жесткости конструкции в целом.

Аналогично этому мы можем получить массивы LM, соответствующие элементам 2, 3 и 4. Мы имеем

$$\begin{aligned} \text{для элемента номер 2:} \quad & \text{LM} = [5 \quad 6 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 3 \quad 4], \\ \text{для элемента номер 3:} \quad & \text{LM} = [9 \quad 10 \quad 3 \quad 4 \quad 1 \quad 2 \quad 7 \quad 8], \\ \text{и для элемента номер 4:} \quad & \text{LM} = [11 \quad 12 \quad 5 \quad 6 \quad 3 \quad 4 \quad 9 \quad 10]. \end{aligned}$$

Как показано в этом примере, связующий массив некоторого элемента определяется по тем узловым точкам, которыми соединен данный элемент, и по тем номерам уравнений, которые были приписаны указанным узловым точкам. Как только массив LM сформирован, матрица жесткости соответствующего элемента может быть в своей уплотненной форме

добавлена к матрице жесткости конструкции **K**, однако этот процесс должен надлежащим образом принять во внимание конкретную схему введения в память, используемую для матрицы **K**. Как уже указывалось в разделе 2.2, эффективная схема введения в память матрицы жесткости конструкции основана на том, чтобы вводить только элементы, вписанные ниже «линии горизонта» матрицы **K** (т.е. активные столбцы этой матрицы), в форме одномерного массива **A**. Однако наряду со схемой введения в память активных столбцов мы должны иметь и специальную процедуру для адресации элементов матрицы **K** в массиве **A**, когда они введены в память так, как указано в разделе 2.2. Таким образом, прежде чем мы сможем начать объединение матриц жесткости элементов, необходимо сформировать в одномерный массив **A** адреса элементов самих матриц жесткости.

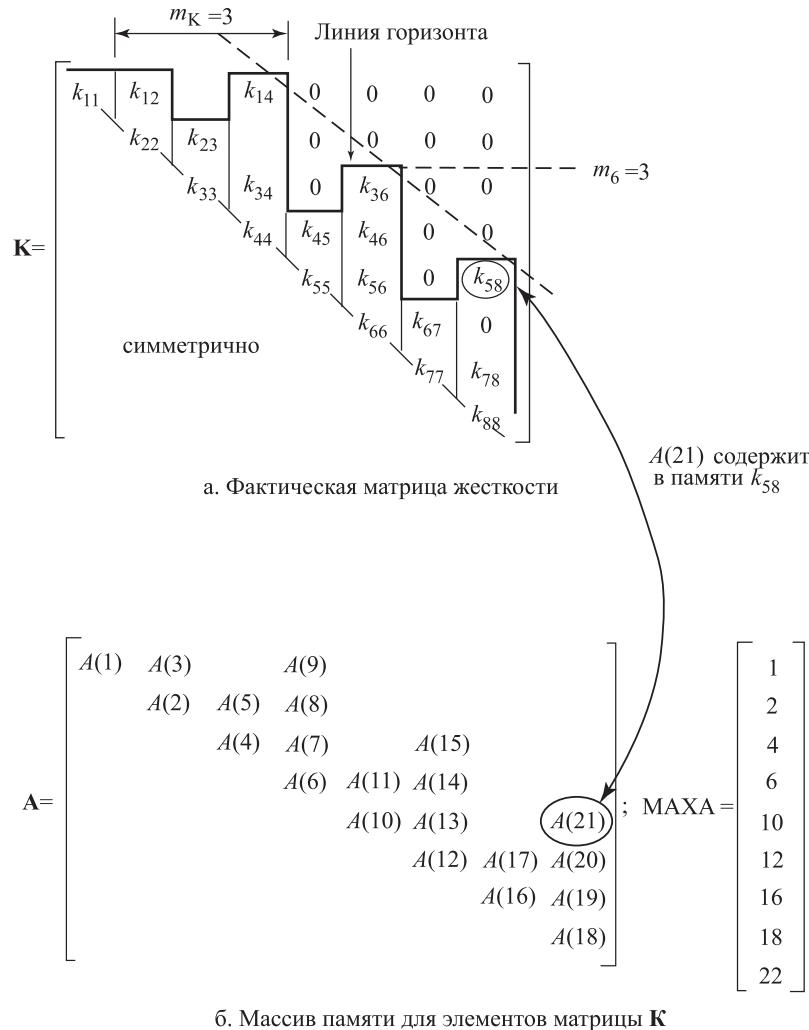


Рис. 12.3. Схема введения в память применительно к типичной матрице жесткости

Рисунок 12.3 показывает расположение элементов типичной матрицы жесткости. Нам предлагается разработать такую схему введения в память и такую адресацию, которые мы собираемся использовать и которые будут применяться с алгоритмом решения с активным столбцом, рассмотренным в разделе 8.2.3. Учитывая, что матрица симметрична,

мы считаем возможным вводить в память и обрабатывать только часть этой матрицы, расположенную выше диагонали и на ней. Кроме того, однако, мы фиксируем тот факт, что элементы (i, j) матрицы \mathbf{K} (т. е. k_{ij}) равны нулю при $j > i + m_K$. Значение m_K известно под названием *половины ширины ленты* рассматриваемой матрицы. Если обозначить символом m_i номер строки, содержащей первый отличный от нуля элемент столбца i (рис. 12.3), то переменные m_i , $i = 1, \dots, n$, определяют собой *линию горизонта* матрицы, а переменные $i - m_i$ определяют *высоты столбцов*. Кроме того, половина ширины ленты m_K равна $\max\{i - m_i\}$, $i = 1, \dots, n$; иначе говоря, величина m_K равна *максимальному значению разности глобальных степеней свободы, свойственных любому из конечных элементов в рамках определенной сетки*. Во многих вариантах конечно-элементного анализа высоты столбцов изменяются в зависимости от номера i , и очень важно, чтобы ни один из нулевых элементов, расположенных за пределами линии горизонта, не включался в процесс построения решения уравнения (см. раздел 8.2.3).

Высоты столбцов определяются по данным, содержащимся в связующих массивах элементов LM; это значит, что посредством вычисления m_i мы определяем также и высоту столбца $i - m_i$. Будем считать, например, что нам требуется найти величину m_{10} , соответствующую матрице жесткости для комплекса элементов, представленного на рис. 12.2. Мы замечаем, что только элементы 3 и 4 дают сочетание для степени свободы 10, и что наименьшее число степеней свободы в массивах LM для этих элементов равно единице; отсюда следует, что $m_{10} = 1$ и что высота столбца номер 10 равна 9.

После того, как высоты столбцов матрицы жесткости определены, мы можем ввести в память все элементы, расположенные ниже линии горизонта матрицы \mathbf{K} , включая их в одномерный массив A; это значит, что все активные столбцы матрицы \mathbf{K} , включая диагональные элементы, последовательно вводятся в массив A. Рисунок 12.3 показывает, какие именно участки памяти в массиве A займут приведенные на рисунке элементы матрицы \mathbf{K} . Кроме массива A, мы определяем также массив MAHA, который хранит в своей памяти адреса диагональных элементов матрицы \mathbf{K} , попадающих в A; это значит, что в массиве A адрес i -го диагонального элемента матрицы \mathbf{K} , т. е. k_{ii} , будет MAHA(I). Обращаясь к рис. 12.3, мы замечаем, что величина MAHA(I) равна сумме высот всех столбцов, вплоть до $(i - 1)$ -го, плюс 1. Следовательно, номер ненулевого в i -м столбце матрицы \mathbf{K} равен MAHA(I+1) - MAHA(I), а адреса элементов будут MAHA(I), MAHA(I) + 1, MAHA(I) + 2, ..., MAHA(I+1) - 1. Отсюда следует, что при использовании этой схемы хранения матрицы \mathbf{K} в памяти массива A и при наличии массива адресов MAHA каждый элемент матрицы \mathbf{K} , включенный в A, может с легкостью быть заадресован.

Эта схема введения в память используется в компьютерной программе STAP, представленной в разделе 12.4, а также в подпрограммах для решения уравнений и нахождения собственных значений, представленных в разделах 8.2.3 и 11.6.5. Схема является высокоэффективной, так как ни один элемент, расположенный за линией горизонта, не вводится в память и не обрабатывается при расчетах.

При обсуждении алгоритмов решения уравнений $\mathbf{KU} = \mathbf{R}$, где \mathbf{K} , \mathbf{U} и \mathbf{R} — это матрица жесткости, вектор смещений и вектор нагрузки для комплекса элементов, соответственно, мы указывали на то, что процедуры с активным столбцом и другие процедуры решения требуют приблизительно $(1/2)nm_K^2$ операций, где n — порядок матрицы жесткости, m_K — половина ширины ленты этой матрицы, причем мы предполагаем, что высоты столбцов постоянны; иначе говоря, $i - m_i = m_K$ почти для всех значений i . Поэтому может оказаться важным минимизировать значение m_K , как из соображений, связанных с требованиями к объему памяти, так и в связи с числом операций. Если высоты столбцов меняются, то для m_K нужно использовать среднее или «эффективное» значение (см. раздел 8.2.3). На практике мы можем нередко использовать поверхностную экспертизу для разумного определения нумерации узловых точек. Однако может оказаться, что сформировать такую нумерацию узловых точек не так уж легко, и для уменьшения ширины ленты обычно используются различные, автоматически действующие схемы; см. раздел 8.2.3. На рис. 12.4 демонстрируются различные варианты нумерации узловых точек — один неудачный, а другой — удачный.



Рис. 12.4. Удачная и неудачная нумерация узловых точек для группы конечных элементов

Необходимо указать, что при обсуждении вышеописанной схемы распределения памяти мы в неявной форме предполагали, что весь массив A (т.е. сумма всех активных столбцов матрицы K) может поместиться в доступной нам быстрой памяти компьютера. С чисто инструктивными целями было бы весьма уместно сконцентрироваться на решении с использованием основного процессора, хотя на практике при построении решений для больших систем соответствующие матрицы вводятся в память блоками. Что касается реализации решения, то, в принципе, одна и та же схема распределения памяти годится как для блочного варианта, так и при использовании основного процессора. Основная добавочная проблема связана с логическим характером программы; а именно, отдельные блоки матриц должны вводиться в дополнительную память и эффективным образом вызываться для введения в быструю память. При этом особое внимание должно уделяться тому, чтобы минимизировать объем записи и чтения информации на диске, требуемый для комплекса в целом. Однако, коль скоро было исследовано эффективное конечно-элементное решение с использованием основного процессора, то не должно вызывать больших затруднений и ознакомление с реализацией этого решения при привлечении дополнительных устройств.

12.3. Расчет напряжений в элементах

В предыдущем разделе мы дали описание процесса объединения отдельных матриц конечных элементов в матрицы для конструкции в целом. Следующий этап состоит в расчете смещений в узловых точках при использовании процедур, рассмотренных в главах 8 и 9. Когда смещения в узловых точках определены, то на заключительной стадии анализа рассчитываются напряжения в элементах.

Уравнения (4.11) и (4.12) — это те уравнения, которые используются для расчета напряжений в элементах. Однако, как и при формировании матриц для конструкции в целом, оказывается эффективным действовать с уплотненными матрицами конечных элементов, т.е. иметь дело только с отличными от нуля столбцами матрицы $B^{(m)}$ из уравнения (4.11). Используя вариант реализации, описанный в предыдущем разделе, мы рассчитываем уплотненную матрицу преобразования деформация–смещение для данного элемента, а затем извлекаем из вектора полного смещения значения смещений в узловых точках элемента, используя при этом массив LM рассматриваемого элемента. Эта процедура реализуется в программе STAP, описываемой в следующем разделе. Разумеется, при проведении линейного анализа конечно-элементные напряжения могут быть вычислены в любой интересующей нас точке просто путем формирования матрицы преобразования деформация–смещение для рассматриваемой нами точки данного элемента. При проведении изопараметрического конечно-элементного анализа мы используем процедуры, представленные в главе 5.

12.4. Программа STAP в качестве примера

Вероятно, наилучший способ детального ознакомления с компьютерной реализацией конечно-элементного анализа состоит в изучении такой компьютерной программы, которая, несмотря на различные упрощения, демонстрировала бы все важные особенности программ более общего характера. Приводимая ниже программа STAP (Static Analysis Program, или программа статического анализа) является простой компьютерной программой для проведения статического, линейного, упругого конечно-элементного анализа.

Главная цель представления данной программы состоит в том, чтобы показать общий характер работы типичной программы для проведения конечно-элементного анализа, и по этой причине в программе STAP были задействованы только элементы типа фермы. Однако в общем случае программа может использоваться для проведения одномерного, двумерного или трехмерного анализа, причем дополнительные элементы могут быть добавлены без особых затруднений ¹⁾.

Рисунок 12.5 демонстрирует принципиальную схему работы программы, а рис. 12.6 дает схему распределения памяти, используемой на различных стадиях работы программы. Следует отметить, что работа с элементами реализуется через посредство действий с группами элементов. Эта концепция оказывается ценной при реализации программы на машинах с параллельными процессорами. Ниже мы приводим команды, описывающие ввод данных в программу.

12.4.1. Ввод данных в компьютерную программу STAP

I. СТРОКА ЗАГОЛОВКА (20A4)

Примечание	Столбцы	Переменная	Запись
(1)	1–80	HED (20)	Ввод информации об общем заголовке для использования в маркировке вывода

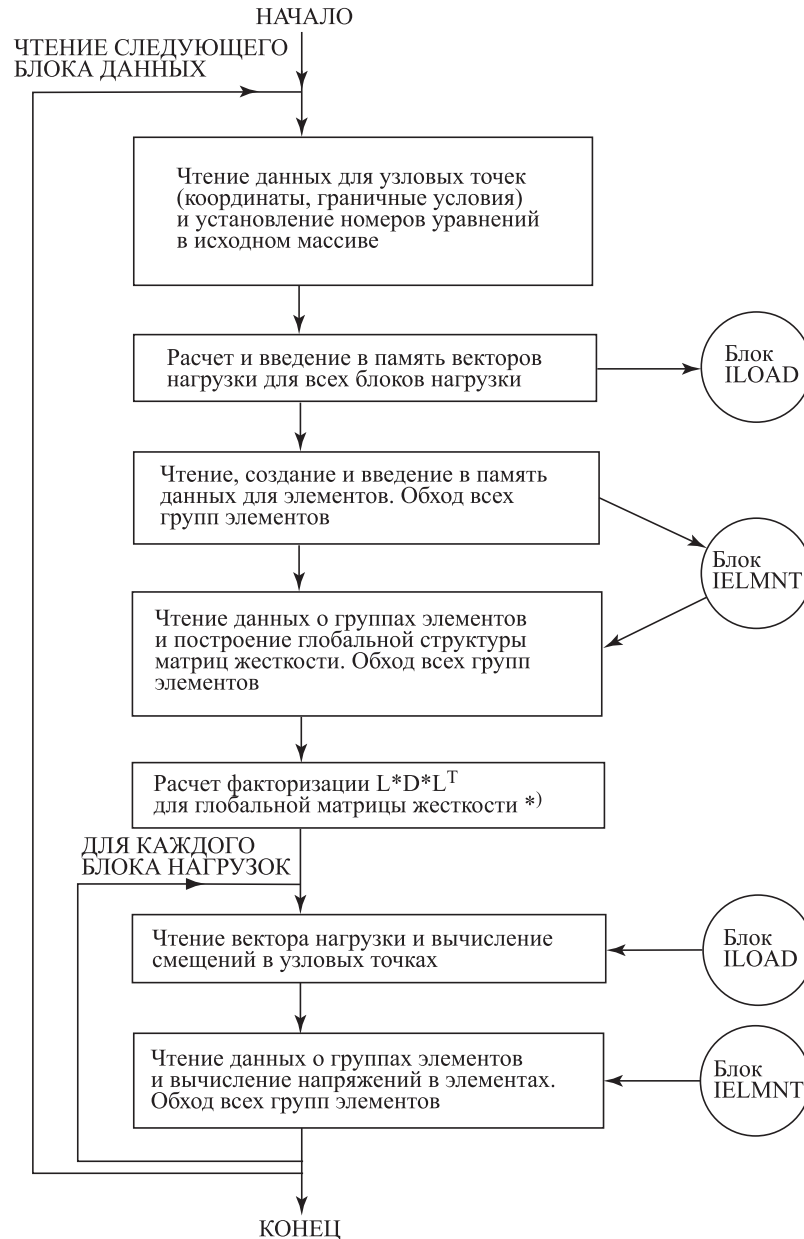
ПРИМЕЧАНИЯ/

1. Начинать каждый новый вариант данных с нового заголовка. После последнего варианта данных следует ввести две пустые строки.

II. УПРАВЛЯЮЩАЯ СТРОКА (415)

Примечание	Столбцы	Переменная	Запись
(1)	1–5	NUMNP	Общее число узловых точек; EQ.0, остановка программы
(2)	6–10	NUMEG	Общее число элементов, GT.0
(3)	11–15	NLCASE	Номер варианта нагрузки, GT.0
(4)	16–20	MODEX	Метка, указывающая на форму решения; EQ.0, только проверка данных; EQ.1, исполнение

¹⁾ Действие этой программы было опробовано на компьютере Cray, на различных инженерных рабочих устройствах, а также на персональных компьютерах.

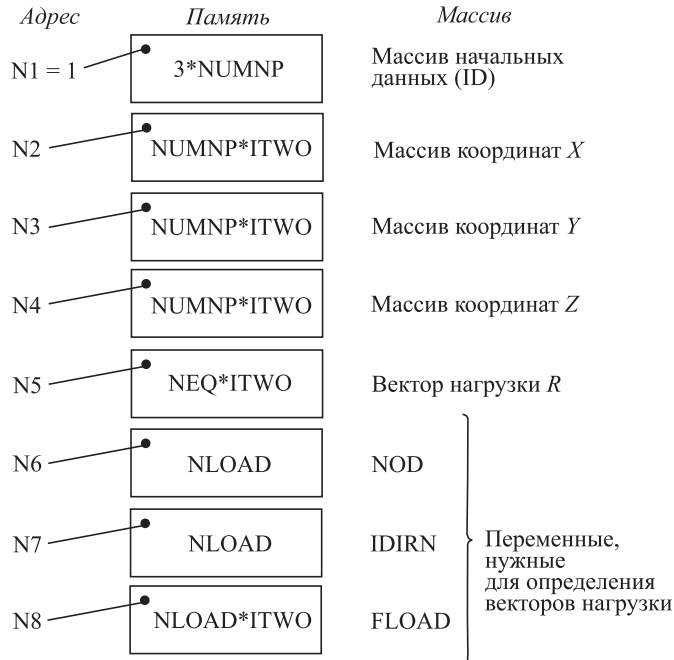


*) Применяется процедура решения уравнения COLSOL, описанная в подразделе 8.2.3

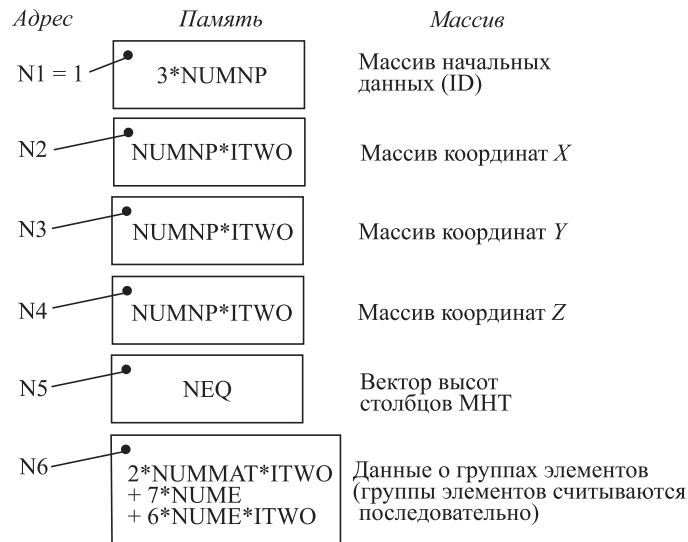
Рис. 12.5. Принципиальная схема работы программы STAP

ПРИМЕЧАНИЯ/

1. Общее число узлов (NUMP) управляет объемом тех данных, которые требуется считывать в разделе III. Если NUMP.EQ.0, то программа останавливается.
2. Общее число элементов, объединяемых в группы. Группа элементов представляет собой удобное объединение элементов. Каждая группа элементов вводится так, как



а. Введение массивов начальных данных, координат узловых точек и векторов нагрузки

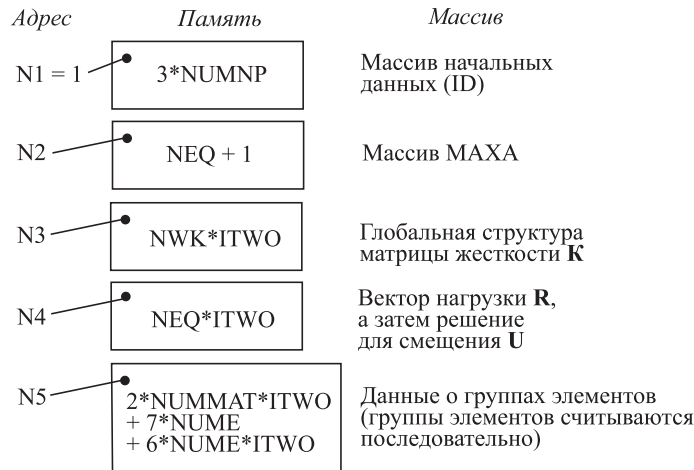


б. Введение данных об элементах

Рис. 12.6. Высокоскоростное распределение памяти в программе STAP. ITWO = 1 в арифметике с ординарной точностью. ITWO = 2 в арифметике с двойной точностью

это представлено в разделе V. Каждая группа должна включать в себя, как минимум, один элемент, и должна существовать, как минимум, одна группа элементов.

3. Число вариантов нагрузки (NLCASE) задает число тех векторов нагрузки, для которых отыскивается решение в форме смещения и напряжения.



в. Комплектация глобальной структуры матрицы жёсткости; этап построения решения для смещений и напряжений

Рис. 12.6. Продолжение

4. Параметр MODEX определяет, должна ли программа проверять данные без проведения анализа (т. е. MODEX. EQ. 0), или же программа должна исполнять решение задачи (т. е. MODEX. EQ. 1). В форме «только проверка данных» программа только считывает и печатает все данные.

III. СТРОКИ ДАННЫХ ДЛЯ УЗЛОВЫХ ТОЧЕК (4I5, 3F10.0, 15)

Примечание	Столбцы	Переменная	Запись
(1)	1–5	N	Номер узла (соединения); GE.1 и LE.NUMP
(2)	6–10	ID (1, N)	X — поступательный граничный код
	11–15	ID (2, N)	Y — поступательный граничный код
	16–20	ID (3, N)	Z — поступательный граничный код
(3)	21–30	X (N)	X — координата
	31–40	Y (N)	Y — координата
	41–50	Z (N)	Z — координата
(4)	51–55	KN	Приращение значения номера узла для формирования узловых данных; EQ. 0, нет формирования

ПРИМЕЧАНИЯ/

1. Узловые данные должны быть определены для всех (NUMNP) узлов. Узловые данные могут вводиться непосредственно (т.е. каждый узел на своей отдельной строке), или, если это применимо, может быть использована опция формирования (см. нижнюю часть примечания 4). Допустимые номера узлов варьируются от 1 до общего числа узлов (NUMNP). Последний из вводимых узлов должен иметь номер NUMNP.
2. Кодам граничного условия могут быть приписаны только следующие значения ($M = 1, 2, 3$):

$ID(M, N) = 0$; неутонченное (свободное) смещение

$ID(M, N) = 1$; зачеркнутое (фиксированное) смещение

Неутонченная [$ID(M, N) = 0$] степень свободы может давать такие перемещения, которые диктуются решением. К этой степени свободы могут быть приложены сосредоточенные силы.

Для каждой неутонченной степени свободы рассматриваемой модели записывается одно уравнение равновесия системы. Общее число уравнений равновесия определяется как NEQ и остается всегда меньше, чем умноженное на три общее число узлов системы.

Зачеркнутые [$ID(M, N) = 1$] степени свободы удаляются из окончательного набора уравнений равновесия. Эти степени свободы используются, чтобы определить точки неподвижности (точки реакций извне), и любые нагрузки, прилагаемые к этим степеням свободы, игнорируются программой.

3. Геометрическое положение каждого узла определяется его координатами X , Y , и Z .
4. Строки с данными об узлах не должны оказаться в последовательности, соответствующей нумерации узлов; однако в конечном итоге должны быть определены все узлы, относящиеся к комплексу $[1, NUMNP]$. Узловые данные для ряда узлов

$$[N_1, N_1 + 1 * KN_1, N_1 + 2 * KN_1, \dots, N_2]$$

могут быть сформулированы на основании информации, представленной на двух строках в последовательности —

строка 1 — $N_1, ID(1, N_1), \dots, X(N_1), \dots, KN_1$

строка 2 — $N_2, ID(1, N_2), \dots, X(N_2), \dots, KN_2$.

KN_1 представляет собой параметр формирования узлов, представленный в первой строке последовательности. Первый узел из числа формируемых — это $N_1 + 1 * KN_1$; второй формируемый узел — это $N_1 + 2 * KN_1$; и так далее. Формирование продолжается до тех пор, пока не будет определен узел за номером $N_2 - KN_1$. Отметим, что разность номеров узлов $N_2 - N_1$ должна без остатка делиться на KN_1 .

При формировании коды граничного условия [значения $ID(L, J)$] для формируемых узлов полагаются равными аналогичным кодам для узла N_1 . Значения координат формируемых узлов подвергаются линейной интерполяции.

IV. СТРОКИ ДЛЯ ДАННЫХ О НАГРУЗКАХ

Каждый вариант нагрузки требует некоторого комплекта строк. Общее число вариантов нагрузки было определено в управляющей строке (Раздел II).

СТРОКА 1 (2I5)

Примечание	Столбцы	Переменная	Запись
(1)	1–5	LL	Ввести номер варианта нагрузки
(2)	6–10	NLOAD	Ввести номера сосредоточенных нагрузок, приложенных в этом варианте

ПРИМЕЧАНИЯ/

1. Варианты нагрузок должны вводиться в возрастающей последовательности номеров, начиная с 1.
2. Переменная NLOAD определяет собой число тех строк, которые нужно прочесть в дальнейшем для этого варианта нагрузки.

СЛЕДУЮЩИЕ СТРОКИ (2I5, F10.0)

Примечание	Столбцы	Переменная	Запись
(1)	1–5	NOD	Номер узла, к которому приложена данная нагрузка; GE.1 и LE.NUMNP
(2)	6–10	IDIRN	Номер степени свободы для данной составляющей нагрузки; EQ.1, направление X EQ.2, направление Y EQ.3, направление Z
	11–20	FLOAD	Величина нагрузки

ПРИМЕЧАНИЯ/

1. Для каждой сосредоточенной нагрузки, прилагаемой в данном варианте нагрузок, должна быть предусмотрена одна строка.
2. Все нагрузки должны действовать в глобальном поле, в направлениях X-, Y- или Z-.

V. ЭЛЕМЕНТЫ ТИПА ФЕРМЫ

Элементы типа фермы, т.е. элементы TRUSS, имеют по два узла и позволяют придать им произвольную ориентацию в системе координат X, Y, Z . Ферма передает только осевую силу и в общем случае представляет собой элемент с шестью степенями свободы (т.е. три глобальных составляющих переноса на каждом из концов данного элемента). Приводимая ниже последовательность строк соответствует вводу значений для каждой группы элементов. Общее число групп элементов (NUMEG) было определено в разделе УПРАВЛЯЮЩАЯ СТРОКА (раздел II).

V.1. УПРАВЛЯЮЩАЯ СТРОКА ГРУППЫ ЭЛЕМЕНТОВ (3I5)

Примечание	Столбцы	Переменная	Запись
(1)	1–5	NPAP(1)	Ввести номер 1
	6–10	NPAP(2)	Номера элементов типа TRUSS в данной группе; NPAP(2) = NUNE GE.1
(2)	11–15	NPAP(3)	Номера различных комплексов по свойствам материал/секция; NPAP(3) = NUMMA GE.1 EQ.0, невыполнение приравнивается 1

ПРИМЕЧАНИЯ/

1. Номера элементов TRUSS начинаются с 1 и заканчивается цифрой общего числа элементов в данной группе, NPAP(2). Данные об элементах вводятся в разделе V.3.
2. Переменная NPAP(3) определяет собой число комплексов по свойствам материал/секция, которое будет считываться в разделе V.2.

V.2. Строки, относящиеся к свойствам материал/секция (I5, 2F10.0)

В этом разделе считываются строки NUMMAT.

Примечание	Столбцы	Переменная	Запись
(1)	1–5	N	Число комплексов по свойствам
	6–15	E(N)	Модули Юнга
	16–25	AREA(N)	Площадь секции

ПРИМЕЧАНИЯ/

1. Комплексы, объединяемые по свойствам, вводятся в возрастающей последовательности, начиная с номера 1 и кончая номером NUMMAT. Модуль Юнга и площадь секции для каждого из вводимых ниже элементов TRUSS определяются путем использования одного из вводимых здесь комплексов по свойствам.

V.3. Строки, относящиеся к данным для элементов (5I5)

В этом разделе должны быть введены и/или созданы элементы типа NUNE, причем в возрастающей последовательности, начиная с номера 1.

Примечание	Столбцы	Переменная	Запись
	1–5	M	Номер элемента TRUSS; GE.1 и LE.NUNE
	6–10	II	Номер узла на одном конце, номер узла на другом конце; GE.1 и LE.NUMNP

Примечание	Столбцы	Переменная	Запись
(1)	16–20	МТУР	Комплекс по материальным свойствам; GE.1 и LE.NUMMAT
(2)	21–25	KG	Приращение номера создаваемого узла, используемого для подсчета номеров узлов, относящихся к недостающим элементам; EQ.0, невыполнение приравняется 1

ПРИМЕЧАНИЯ/

1. Комплексы, относящиеся к свойствам материал/секция, были определены в разделе V.2.
2. Элементы должны вводиться в порядке возрастания их номеров. Если строки для элементов $[M + 1, M + 2, \dots, M + J]$ оказались пропущены, то эти недостающие элементы создаются с использованием МТУР элемента М и придания приращений номерам узлов последовательно вводимых элементов, имеющих значение KG; значение KG берется из первой строки последовательности создаваемых элементов (т.е. из М-й строки элементов в целом). Последний элемент (NUME) всегда должен вводиться.

12.4.2. Распечатка программы STAP

```

C . . . . . STA00001
C . . . . . STA00002
C . . . . . STA00003
C . . . . . STA00004
C . . . . . STA00005
C . . . . . STA00006
C . . . . . STA00007
C . . . . . STA00008
C . . . . . STA00009
C . . . . . STA00010
C . . . . . STA00011
C . . . . . STA00012
C . . . . . STA00013
C . . . . . STA00014
C . . . . . STA00015
C . . . . . STA00016
C . . . . . STA00017
C . . . . . STA00018
C . . . . . STA00019
C . . . . . STA00020
C . . . . . STA00021
C . . . . . STA00022
C . . . . . STA00023
C . . . . . STA00024
C . . . . . STA00025
C . . . . . STA00026
C . . . . . STA00027
C . . . . . STA00028
C . . . . . STA00029
C . . . . . STA00030
C . . . . . STA00031

```

C	THE FOLLOWING SCRATCH FILES ARE USED	STA00032
C	IELMNT = UNIT STORING ELEMENT DATA	STA00033
C	ILOAD = UNIT STORING LOAD VECTORS	STA00034
C	IIN = UNIT USED FOR INPUT	STA00035
C	IOUT = UNIT USED FOR OUTPUT	STA00036
C		STA00037
C	ON SOME MACHINES THESE FILES MUST BE EXPLICITLY OPENED	STA00038
C		STA00039
	IELMNT = 1	STA00040
	ILOAD = 2	STA00041
	IIN = 5	STA00042
	IOUT = 6	STA00043
C		STA00044
200	NUMEST=0	STA00045
	MAXEST=0	STA00046
C	*****	STA00047
C		STA00048
C	*** INPUT PHASE ***	STA00049
C		STA00050
C	*****	STA00051
	CALL SECOND (TIM(1))	STA00052
C		STA00053
C		STA00054
C	READ CONTROL INFORMATION	STA00055
C		STA00056
		STA00057
	READ (IIN,1000) HED,NUMNP,NUMEG,NLCASE,MODEX	STA00058
	IF (NUMNP.EQ.0) GO TO 800	STA00059
	WRITE (IOUT,2000) HED,NUMNP,NUMEG,NLCASE,MODEX	STA00060
C		STA00061
C		STA00062
C	READ NODAL POINT DATA	STA00063
C		STA00064
C		STA00065
	N1= 1	STA00066
	N2=N1 + 3*NUMNP	STA00067
	N2=(N2/2)*2 + 1	STA00068
	N3=N2 + NUMNP*ITWO	STA00069
	N4=N3 + NUMNP*ITWO	STA00070
	N5=N4 + NUMNP*ITWO	STA00071
	IF (N5.GT.MTOT) CALL ERROR (N5-MTOT,1)	STA00072
C		STA00073
	CALL INPUT (A(N1),A(N2),A(N3),A(N4),NUMNP,NEQ)	STA00074
C		STA00075
	NEQ1=NEQ + 1	STA00076
C		STA00077
C		STA00078
C	CALCULATE AND STORE LOAD VECTORS	STA00079
C		STA00080
C		STA00081
	N6=N5 + NEQ*ITWO	STA00082
	WRITE (IOUT,2005)	STA00083
C		STA00084
	REWIND ILOAD	STA00085
C		STA00086

	DO 300 L=1,NLCASE	STA00087
C		STA00088
	READ (IIN,1010) LL,NLOAD	STA00089
C		STA00090
	WRITE (IOUT,2010) LL,NLOAD	STA00091
	IF (LL.EQ.L) GO TO 310	STA00092
	WRITE (IOUT,2020)	STA00093
	GO TO 800	STA00094
310	CONTINUE	STA00095
C		STA00096
	N7=N6 + NLOAD	STA00097
	N8=N7 + NLOAD	STA00098
	N9=N8 + NLOAD*ITWO	STA00099
C		STA00100
	IF (N9.GT.MTOT) CALL ERROR (N9-MTOT,2)	STA00101
C		STA00102
	CALL LOADS (A(N5),A(N6),A(N7),A(N8),A(N1),NLOAD,NEQ)	STA00103
C		STA00104
300	CONTINUE	STA00105
C		STA00106
C		STA00107
C	R E A D , G E N E R A T E A N D S T O R E	STA00108
C	E L E M E N T D A T A	STA00109
C		STA00110
C	CLEAR STORAGE	STA00111
C		STA00112
	N6=N5 + NEQ	STA00113
	N6=(N6/2)*2 + 1	STA00114
	DO 10 I=N5,N6	STA00115
10	IA(I)=0	STA00116
	IND=1	STA00117
C		STA00118
	CALL ELCAL	STA00119
C		STA00120
	CALL SECOND (TIM(2))	STA00121
C	* * * * *	STA00122
C		STA00123
C	* * * S O L U T I O N P H A S E * * *	STA00124
C		STA00125
C	* * * * *	STA00126
C		STA00127
C	A S S E M B L E S T I F F N E S S M A T R I X	STA00128
C		STA00129
C		STA00130
	CALL ADORIS (A(N2),A(N5))	STA00131
C		STA00132
	MM=NWK/NEQ	STA00133
	N3=N2 + NEQ + 1	STA00134
	N3=(N3/2)*2 + 1	STA00135
	N4=N3 + NWK*ITWO	STA00136
	N5=N4 + NEQ*ITWO	STA00137
	N6=N5 + MAXEST	STA00138
	IF (N6.GT.MTOT) CALL ERROR (N6-MTOT,4)	STA00139
C		STA00140
C	WRITE TOTAL SYSTEM DATA	STA00141

C		STA00142
	WRITE (IOUT,2025) NEQ,NWK,MK,MM	STA00143
C		STA00144
C	IN DATA CHECK ONLY MODE WE SKIP ALL FURTHER CALCULATIONS	STA00145
C		STA00146
	IF (MODEX.GT.0) GO TO 100	STA00147
	CALL SECOND (TIM(3))	STA00148
	CALL SECOND (TIM(4))	STA00149
	CALL SECOND (TIM(5))	STA00150
	GO TO 120	STA00151
C		STA00152
C	CLEAR STORAGE	STA00153
C		STA00154
100	NNL=NWK + NEQ	STA00155
	CALL CLEAR (A(N3),NNL)	STA00156
C		STA00157
	IND=2	STA00158
C		STA00159
	CALL ASSEM (A(N5))	STA00160
C		STA00161
	CALL SECOND (TIM(3))	STA00162
C		STA00163
C		STA00164
C	TRIANGULARIZE STIFFNESS MATRIX	STA00165
C		STA00166
C		STA00167
	KTR=1	STA00168
	CALL COLSOL (A(N3),A(N4),A(N2),NEQ,NWK,NEQ1,KTR)	STA00169
C		STA00170
35	CALL SECOND (TIM(4))	STA00171
C		STA00172
	KTR=2	STA00173
	IND=3	STA00174
C		STA00175
	REWIND ILOAD	STA00176
	DO 400 L=1,NLCASE	STA00177
C		STA00178
	CALL LOADV (A(N4),NEQ)	STA00179
C		STA00180
C		STA00181
C	CALCULATION OF DISPLACEMENTS	STA00182
C		STA00183
C		STA00184
	CALL COLSOL (A(N3),A(N4),A(N2),NEQ,NWK,NEQ1,KTR)	STA00185
C		STA00186
	WRITE (IOUT,2015) L	STA00187
	CALL WRITED (A(N4),A(N1),NEQ,NUMNP)	STA00188
C		STA00189
C		STA00190
C	CALCULATION OF STRESSES	STA00191
C		STA00192
C		STA00193
	CALL STRESS (A(N5))	STA00194
C		STA00195
400	CONTINUE	STA00196

C		STA00197
	CALL SECOND (TIM(5))	STA00198
C		STA00199
C	PRINT SOLUTION TIMES	STA00200
C		STA00201
120	TT=0.	STA00202
	DO 500 I=1,4	STA00203
	TIM(I)-TIM(I+1) - TIM(I)	STA00204
500	TT=TT + TIM(I)	STA00205
	WRITE (IOUT,2030) HED,(TIM(I),I=1,4),TT	STA00206
C		STA00207
C	READ NEXT ANALYSIS CASE	STA00208
C		STA00209
	GO TO 200	STA00210
C		STA00211
800	STOP	STA00212
C		STA00213
1000	FORMAT (20A4,/,4I5)	STA00214
1010	FORMAT (2I5)	STA00215
C		STA00216
2000	FORMAT (///,' ',20A4,///,	STA00217
	1 ' C O N T R O L I N F O R M A T I O N',//,	STA00218
	2 NUMBER OF NODAL POINTS',10(' '),'(NUMNP) = ',I5,//,	STA00219
	3 NUMBER OF ELEMENT GROUPS',9(' '),'(NUMEG) = ',I5,//,	STA00220
	4 NUMBER OF LOAD CASES',11(' '),'(NLCASE) = ',I5,//,	STA00221
	5 SOLUTION MODE ',14(' '),'(MODEX) = ',I5,/,	STA00222
	6 EQ.0, DATA CHECK',/,	STA00223
	7 EQ.1, EXECUTION')	STA00224
2005	FORMAT (//,' L O A D C A S E D A T A')	STA00225
2010	FORMAT (////,' LOAD CASE NUMBER',7(' '),' = ',I5,//,	STA00226
	1 ' NUMBER OF CONCENTRATED LOADS . = ',I5)	STA00227
2015	FORMAT (//,' LOAD CASE ',I3)	STA00228
2020	FORMAT (' *** ERROR *** LOAD CASES ARE NOT IN ORDER')	STA00229
2025	FORMAT (//,' TOTAL SYSTEM DATA',///,	STA00230
	1 ' NUMBER OF EQUATIONS',14(' '),'(NEQ) = ',I5,//,	STA00231
	2 ' NUMBER OF MATRIX ELEMENTS',11(' '),'(NWK) = ',I5,//,	STA00232
	3 ' MAXIMUM HALF BANDWIDTH ',12(' '),'(MK) = ',I5,//,	STA00233
	4 ' MEAN HALF BANDWIDTH',14(' '),'(MM) = ',I5)	STA00234
2030	FORMAT (//,' S O L U T I O N T I M E L O G I N S E C',//,	STA00235
	1 ' FOR PROBLEM',//,' ',20A4,///,	STA00236
	2 ' TIME FOR INPUT PHASE ',14(' '),' =',F12.2,//,	STA00237
	3 ' TIME FOR CALCULATION OF STIFFNESS MATRIX . =',F12.2,	STA00238
	4 //,	STA00239
	5 ' TIME FOR FACTORIZATION OF STIFFNESS MATRIX . =',F12.2,	STA00240
	6 //,	STA00241
	7 ' TIME FOR LOAD CASE SOLUTIONS ',10(' '),' =',F12.2,///,	STA00242
	8 ' T O T A L S O L U T I O N T I M E =',F12.2)	STA00243
C		STA00244
	END	STA00245
	SUBROUTINE ERROR (N,I)	STA00246
C		STA00247
C		STA00248
C	P R O G R A M	STA00249
C	TO PRINT MESSAGES WHEN HIGH-SPEED STORAGE IS EXCEEDED	STA00250
C		STA00251

```

C . . . . . STA00252
COMMON /TAPES/ IELMNT,ILOAD,IIN,IOUT STA00253
C STA00254
GO TO (1,2,3,4),I STA00255
C STA00256
1 WRITE (IOUT,2000) STA00257
GO TO 6 STA00258
2 WRITE (IOUT,2010) STA00259
GO TO 6 STA00260
3 WRITE (IOUT,2020) STA00261
GO TO 6 STA00262
4 WRITE (IOUT,2030) STA00263
C STA00264
6 WRITE (IOUT,2050) N STA00265
STOP STA00266
C STA00267
2000 FORMAT (//,' NOT ENOUGH STORAGE FOR ID ARRAY AND NODAL POINT ', STA00268
1 'COORDINATES') STA00269
2010 FORMAT (//,' NOT ENOUGH STORAGE FOR DEFINITION OF LOAD VECTORS') STA00270
2020 FORMAT (//,' NOT ENOUGH STORAGE FOR ELEMENT DATA INPUT') STA00271
2030 FORMAT (//,' NOT ENOUGH STORAGE FOR ASSEMBLAGE OF GLOBAL ', STA00272
1 'STRUCTURE STIFFNESS, AND DISPLACEMENT AND STRESS SOLUTION PHASE') STA00273
2050 FORMAT (//,' *** ERROR *** STORAGE EXCEEDED BY ', I9) STA00274
C STA00275
END STA00276
SUBROUTINE INPUT (ID,X,Y,Z,NUMNP,NEQ) STA00277
C . . . . . STA00278
C . STA00279
C . P R O G R A M STA00280
C . .TO READ, GENERATE, AND PRINT NODAL POINT INPUT DATA STA00281
C . TO CALCULATE EQUATION NUMBERS AND STORE THEM IN IDARRAY STA00282
C . STA00283
C . N=ELEMENT NUMBER STA00284
C . ID=BOUNDARY CONDITION CODES (0=FREE,1=DELETED) STA00285
C . X,Y,Z= COORDINATES STA00286
C . KN= GENERATION CODE STA00287
C . I. E. INCREMENT ON NODAL POINT NUMBER STA00288
C . STA00289
C . STA00290
C . IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z) STA00291
C . STA00292
C . THE PROGRAM STAP IS USED IN SINGLE PRECISION ARITHMETIC ON CRAY STA00293
C . EQUIPMENT AND DOUBLE PRECISION ARITHMETIC ON IBM MACHINES, STA00294
C . ENGINEERING WORKSTATIONS AND PCS. DEACTIVATE ABOVE LINE (ALSO STA00295
C . OCCURRING IN OTHER SUBROUTINES) FOR SINGLE PRECISION ARITHMETIC. STA00296
C . . . . . STA00297
COMMON /TAPES/ IELMNT,ILOAD,IIN,IOUT STA00298
DIMENSION X(1),Y(1),Z(1),ID(3,NUMNP) STA00299
C STA00300
C READ AND GENERATE NODAL POINT DATA STA00301
C STA00302
WRITE (IOUT,2000) STA00303
WRITE (IOUT,2010) STA00304
WRITE (IOUT,2020) STA00305
KNOLD=0 STA00306

```

	NOLD=0	STA00307
C		STA00308
10	READ (IIN,1000) N,(ID(I,N),I=1,3),X(N),Y(N),Z(N),KN	STA00309
	WRITE (IOUT,2030) N,(ID(I,N),I=1,3),X(N),Y(N),Z(N),KN	STA00310
	IF (KNOLD.EQ.0) GO TO 50	STA00311
	NUM=(N-NOLD)/KNOLD	STA00312
	NUMN=NUM - 1	STA00313
	IF (NUMN.LT.1) GO TO 50	STA00314
	XNUM=NUM	STA00315
	DX=(X(N)-X(NOLD))/XNUM	STA00316
	DY=(Y(N)-Y(NOLD))/XNUM	STA00317
	DZ=(Z(N)-Z(NOLD))/XNUM	STA00318
	K=NOLD	STA00319
	DO 30 J=1,NUMN	STA00320
	KK=K	STA00321
	K=K + KNOLD	STA00322
	X(K)=X(KK) + DX	STA00323
	Y(K)=Y(KK) + DY	STA00324
	Z(K)=Z(KK) + DZ	STA00325
	DO 30 I=1,3	STA00326
	ID(I,K)=ID(I,KK)	STA00327
30	CONTINUE	STA00328
C		STA00329
50	NOLD=N	STA00330
	KNOLD=KN	STA00331
	IF (N.NE.NUMNP) GO TO 10	STA00332
C		STA00333
C	WRITE COMPLETE NODAL DATA	STA00334
C		STA00335
	WRITE (IOUT,2015)	STA00336
	WRITE (IOUT,2020)	STA00337
	DO 200 N=1,NUMNP	STA00338
200	WRITE (IOUT,2030) N,(ID(I,N),I=1,3),X(N),Y(N),Z(N),KN	STA00339
C		STA00340
C	NUMBER UNKNOWNNS	STA00341
C		STA00342
	NEQ=0	STA00343
	DO 100 N=1,NUMNP	STA00344
	DO 100 I=1,3	STA00345
	IF (ID(I,N)) 110,120,110	STA00346
120	NEQ=NEQ + 1	STA00347
	ID(I,N)=NEQ	STA00348
	GO TO 100	STA00349
110	ID(I,N)=0	STA00350
100	CONTINUE	STA00351
C		STA00352
C	WRITE EQUATION NUMBERS	STA00353
C		STA00354
	WRITE (IOUT,2040) (N,(ID(I,N),I=1,3),N=1,NUMNP)	STA00355
C		STA00356
	RETURN	STA00357
C		STA00358
1000	FORMAT (4I5,3F10.0,I5)	STA00359
2000	FORMAT(//,' NODAL POINT DATA',/)	STA00360
2010	FORMAT(' INPUT NODAL DATA',/)	STA00361

```

2015  FORMAT(//,' GENERATED NODAL DATA',//)          STA00362
2020  FORMAT(' NODE',10X,'BOUNDARY',25X,'NODAL POINT',17X,'MESH',/, STA00363
      1' NUMBER CONDITION CODES',21X,'COORDINATES',14X,'GENERATING', STA00364
      2/,77X,'CODE',/, STA00365
      315X,'X Y Z',15X,'X',12X,'Y',12X,'Z',10X,'KN') STA00366
2030  FORMAT(15,6X,3I5,6X,3F13.3,3X,16) STA00367
2040  FORMAT(//,' EQUATION NUMBERS',//,' NODE',9X, STA00368
      1 'DEGREES OF FREEDOM',/,' NUMBER',//, STA00369
      2 '      N',13X,'X      Y      Z',/,(IX,15,9X,315)) STA00370
C                                          STA00371
      END                                          STA00372
      SUBROUTINE LOADS (R,NOD,IDIRN,FLOAD,ID,NLOAD,NEQ) STA00373
C . . . . . STA00374
C . STA00375
C . P R O G R A M STA00376
C . . TO READ NODAL LOAD DATA STA00377
C . . TO CALCULATE THE LOAD VECTOR R FOR EACH LOAD CASE AND STA00378
C . . WRITE ONTO UNIT ILOAD STA00379
C . STA00380
C . . STA00381
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z) STA00382
      COMMON /VAR/ NG,MODEX STA00383
      COMMON /TAPES/ IELMNT,ILOAD,IIN,IOUT STA00384
      DIMENSION R(NEQ),IDIRN(1),FLOAD(1) STA00386
C                                          STA00387
      WRITE (IOUT,2000) STA00388
      READ (IIN,1000) (NOD(I),IDIRN(I),FLOAD(I),I=1,NLOAD) STA00389
      WRITE (IOUT,2010) (NOD(I),IDIRN(I),FLOAD(I),I=1,NLOAD) STA00390
      IF (MODEX.EQ.0) GO TO 900 STA00391
C                                          STA00392
      DO 210 I=1,NEQ STA00393
210  R(I)=0. STA00394
C                                          STA00395
      DO 220 L=1,NLOAD STA00396
      LN=NOD(L) STA00397
      LI=IDIRN(L) STA00398
      II=ID(LI,LN) STA00399
      IF (II) 220,220,240 STA00400
240  R(II)=R(II) + FLOAD(L) STA00401
C                                          STA00402
220  CONTINUE STA00403
C                                          STA00404
      WRITE (ILOAD) R STA00405
C                                          STA00406
200  CONTINUE STA00407
C                                          STA00408
900  RETURN STA00409
C                                          STA00410
1000  FORMAT (2I5,F10.0) STA00411
2000  FORMAT (//,'      NODE      DIRECTION      LOAD',/, STA00412
      1 '      NUMBER',19X,'MAGNITUDE') STA00413
2010  FORMAT (' ',I6,9X,I4,7X,E12.5) STA00414
C                                          STA00415
      END STA00416
      SUBROUTINE ELCAL STA00417

```

```

C . . . . . STA00418
C . . . . . STA00419
C .   P R O G R A M . STA00420
C .       TO LOOP OVER ALL ELEMENT GROUPS FOR READING, STA00421
C .       GENERATING AND STORING THE ELEMENT DATA STA00422
C . . . . . STA00423
C . . . . . STA00424
C .       COMMON /SOL/ NUMNP,NEQ,NWK,NUMEST,MIDEST,MAXEST,MK STA00425
C .       COMMON /EL/ IND,NPAR(10),NUMEG,MTOT,NFIRST,NLAST,ITWO STA00426
C .       COMMON /TAPES/ IELMNT,ILOAD,IIN,IOUT STA00427
C .       COMMON A(1) STA00428
C . . . . . STA00429
C .       REWIND IELMNT STA00430
C .       WRITE (IOUT,2000) STA00431
C . . . . . STA00432
C .       LOOP OVER ALL ELEMENT GROUPS STA00433
C . . . . . STA00434
C .       DO 100 N=1,NUMEG STA00435
C .       IF (N.NE.1) WRITE (IOUT,2010) STA00436
C . . . . . STA00437
C .       READ (IIN,1000) NPAR STA00438
C . . . . . STA00439
C .       CALL ELEMNT STA00440
C . . . . . STA00441
C .       IF (MIDEST.GT.MAXEST) MAXEST=MIDEST STA00442
C . . . . . STA00443
C .       WRITE (IELMNT) MIDEST,NPAR,(A(I),I=NFIRST,NLAST) STA00444
C . . . . . STA00445
C .   100 CONTINUE STA00446
C . . . . . STA00447
C .       RETURN STA00448
C . . . . . STA00449
C .   1000 FORMAT (10I5) STA00450
C .   2000 FORMAT (//,' E L E M E N T   G R O U P   D A T A ',//) STA00451
C .   2010 FORMAT(' ') STA00452
C . . . . . STA00453
C .       END STA00454
C .       SUBROUTINE ELEMNT STA00455
C . . . . . STA00456
C . . . . . STA00457
C .   P R O G R A M . STA00458
C .       TO CALL THE APPROPRIATE ELEMENT SUBROUTINE . STA00459
C . . . . . STA00460
C . . . . . STA00461
C .       COMMON /EL/ IND,NPAR(10),NUMEG,MTOT,NFIRST,NLAST,ITWO STA00462
C . . . . . STA00463
C .       NPAR1=NPAR(1) STA00464
C . . . . . STA00465
C .       GO TO (1,2,3),NPAR1 STA00466
C . . . . . STA00467
C .   1 CALL TRUSS STA00468
C .       GO TO 900 STA00469
C . . . . . STA00470
C .       OTHER ELEMENT TYPES WOULD BE CALLED HERE, IDENTIFYING EACH STA00471
C .       ELEMENT TYPE BY A DIFFERENT NPAR(1) PARAMETER STA00472

```

C		STA00473
	2 GO TO 900	STA00474
C		STA00475
	3 GO TO 900	STA00476
C		STA00477
	900 RETURN	STA00478
	END	STA00479
	SUBROUTINE COLHT (MHT,ND,LM)	STA00480
C	STA00481
C	.	STA00482
C	P R O G R A M	STA00483
C	TO CALCULATE COLUMN HEIGHTS	STA00484
C	.	STA00485
C	STA00486
	COMMON /SOL/ NUMNP,NEQ,NWK,NUMEST,MIDEST,MAXEST,MK	STA00487
	DIMENSION LM(1),MHT(1)	STA00488
C		STA00489
	LS=100000	STA00490
	DO 100 I=1,ND	STA00491
	IF (LM(I)) 110,100,110	STA00492
110	IF (LM(I)-LS) 120,100,100	STA00493
120	LS=LM(I)	STA00494
100	CONTINUE	STA00495
C		STA00496
	DO 200 I=1,ND	STA00497
	II=LM(I)	STA00498
	IF (II.EQ.0) GO TO 200	STA00499
	ME=II - LS	STA00500
	IF (ME.GT.MHT(II)) MHT(II)=ME	STA00501
200	CONTINUE	STA00502
C		STA00503
	RETURN	STA00504
	END	STA00505
	SUBROUTINE ADDRES (MAXA,MHT)	STA00506
C	STA00507
C	.	STA00508
C	P R O G R A M	STA00509
C	TO CALCULATE ADDRESSES OF DIAGONAL ELEMENTS IN BANDED	STA00510
C	MATRIX WHOSE COLUMN HEIGHTS ARE KNOWN	STA00511
C	.	STA00512
C	MHT = ACTIVE COLUMN HEIGHTS	STA00513
C	MAXA = ADDRESSES OF DIAGONAL ELEMENTS	STA00514
C	.	STA00515
C	STA00516
	COMMON /SOL/ NUMNP,NEQ,NWK,NUMEST,MIDEST,MAXEST,MK	STA00517
	DIMENSION MAXA(*),MHT(*)	STA00518
C		STA00519
C	CLEAR ARRAY MAXA	STA00520
C		STA00521
	NN=NEQ + 1	STA00522
	DO 20 I=1,NN	STA00523
20	MAXA(I)=0.0	STA00524
C		STA00525
	MAXA(1)=1	STA00526
	MAXA(2)=2	STA00527

	MK=0	STA00528
	IF (NEQ.EQ.1) GO TO 100	STA00529
	DO 10 I=2,NEQ	STA00530
	IF (MHT(I).GT.MK) MK=MHT(I)	STA00531
10	MAXA(I+1)=MAXA(I) + MHT(I) + 1	STA00532
100	MK=MK + 1	STA00533
	NWK=MAXA(NEQ+1) - MAXA(1)	STA00534
C		STA00535
	RETURN	STA00536
	END	STA00537
	SUBROUTINE CLEAR (A,N)	STA00538
C		STA00539
C .		STA00540
C .	P R O G R A M	STA00541
C .	TO CLEAR ARRAY A	STA00542
C .		STA00543
C		STA00544
	IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)	STA00545
	DIMENSION A(1)	STA00546
	DO 10 I=1,N	STA00547
10	A(I)=0.	STA00548
	RETURN	STA00549
	END	STA00550
	SUBROUTINE ASSEM (AA)	STA00551
C		STA00552
C .		STA00553
C .	P R O G R A M	STA00554
C .	TO CALL ELEMENT SUBROUTINES FOR ASSEMBLAGE OF THE	STA00555
C .	STRUCTURE STIFFNESS MATRIX	STA00556
C .		STA00557
C		STA00558
	COMMON /EL/ IND,NPAR(10),NUMEG,MTOT,NFIRST,NLAST,ITWO	STA00559
	COMMON /TAPES/ IELMNT,ILOAD,IIN,IOUT	STA00560
	DIMENSION AA(1)	STA00561
C		STA00562
	REWIND IELMNT	STA00563
C		STA00564
	DO 200 N=1,NUMEG	STA00565
	READ (IELMNT) NUMEST,NPAR,(AA(I),I=1,NUMEST)	STA00566
C		STA00567
	CALL ELEMNT	STA00568
C		STA00569
200	CONTINUE	STA00570
C		STA00571
	RETURN	STA00572
	END	STA00573
	SUBROUTINE ADDBAN (A,MAXA,S,LM,ND)	STA00574
C		STA00575
C .		STA00576
C .	P R O G R A M	STA00577
C .	TO ASSEMBLE UPPER TRIANGULAR ELEMENT STIFFNESS INTO	STA00578
C .	COMPACTED GLOBAL STIFFNESS	STA00579
C .		STA00580
C .	A = GLOBAL STIFFNESS	STA00581
C .	S = ELEMENT STIFFNESS	STA00582

```

C .      ND = DEGREES OF FREEDOM IN ELEMENT STIFFNESS . STA00583
C .
C .      S(1)      S(2)      S(3)      . . . . STA00584
C .      S =      S(ND+1)    S(ND+2)    . . . . STA00585
C .      S(2*ND)    . . . . STA00586
C .      . . . . STA00587
C .      . . . . STA00588
C .      . . . . STA00589
C .      . . . . STA00590
C .      A(1)      A(3)      A(6)      . . . . STA00591
C .      A =      A(2)      A(5)      . . . . STA00592
C .      A(4)      . . . . STA00593
C .      . . . . STA00594
C .      . . . . STA00595
C .      . . . . STA00596
C .      . . . . STA00597
C .      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z) STA00598
C .      DIMENSION A(1),MAXA(1),S(1),LM(1) STA00599
C .
C .      NDI=0 STA00600
C .      DO 200 I=1,ND STA00601
C .      II=LM(I) STA00602
C .      IF (II) 200,200,100 STA00603
C .      100 MI=MAXA(II) STA00604
C .      KS=I STA00605
C .      DO 220 J=1,ND STA00606
C .      JJ=LM(J) STA00607
C .      IF (JJ) 220,220,110 STA00608
C .      110 IJ=II - JJ STA00609
C .      IF (IJ) 220,210,210 STA00610
C .      210 KK=MI + IJ STA00611
C .      KSS=KS STA00612
C .      IF (J.GE.I) KSS=J + NDI STA00613
C .      A(KK)=A(KK) + S(KSS) STA00614
C .      220 KS=KS + ND - J STA00615
C .      200 NDI=NDI + ND - I STA00616
C .
C .      RETURN STA00617
C .      END STA00618
C .      SUBROUTINE COLSOL (A,V, MAXA,NN,NWK,NNM,KKK) STA00619
C .      . . . . . STA00620
C .      . . . . . STA00621
C .      . . . . . STA00622
C .      . . . . . STA00623
C .      P R O G R A M STA00624
C .      TO SOLVE FINITE ELEMENT STATIC EQUILIBRIUM EQUATIONS IN STA00625
C .      CORE, USING COMPACTED STORAGE AND COLUMN REDUCTION SCHEME STA00626
C .      . . . . . STA00627
C .      - - INPUT VARIABLES - - STA00628
C .      A(NWK) = STIFFNESS MATRIX STORED IN COMPACTED FORM STA00629
C .      V(NN) = RIGHT-HAND-SIDE LOAD VECTOR STA00630
C .      MAXA(NNM) = VECTOR CONTAINING ADDRESSES OF DIAGONAL STA00631
C .      ELEMENTS OF STIFFNESS MATRIX IN A STA00632
C .      NN = NUMBER OF EQUATIONS STA00633
C .      NWK = NUMBER OF ELEMENTS BELOW SKYLINE OF MATRIX STA00634
C .      NNM = NN + 1 STA00635
C .      KKK = INPUT FLAG STA00636
C .      EQ. 1 TRIANGULARIZATION OF STIFFNESS MATRIX STA00637

```

C .	EQ. REDUCTION AND BACK-SUBSTITUTION OF LOAD VECTOR	.STA00638
C .	IOUT = UNIT USED FOR OUTPUT	.STA00639
C .		.STA00640
C .	- - OUTPUT - -	.STA00641
C .	A(NWK) = D AND L - FACTORS OF STIFFNESS MATRIX	.STA00642
C .	V(NN) = DISPLACEMENT VECTOR	.STA00643
C .		.STA00644
C .	IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)	.STA00645
COMMON /TAPES/	IELMNT,ILOAD,IIN,IOUT	.STA00646
	DIMENSION A(NWK),V(1),MAXA(1)	.STA00647
C		.STA00648
C	PERFORM L*D*L(T) FACTORIZATION OF STIFFNESS MATRIX	.STA00649
C		.STA00650
	IF (KKK-2) 40,150,150	.STA00651
40	DO 140 N=1,NN	.STA00652
	KN=MAXA(N)	.STA00653
	KL=KN + 1	.STA00654
	KU=MAXA(N+1) - 1	.STA00655
	KH=KU - KL	.STA00656
	IF (KH) 110,90,50	.STA00657
50	K=N - KH	.STA00658
	IC=0	.STA00659
	KLT=KU	.STA00660
	DO 80 J=1,KH	.STA00661
	IC=IC + 1	.STA00662
	KLT=KLT - 1	.STA00663
	KI=MAXA(K)	.STA00664
	ND=MAXA(K+1) - KI - 1	.STA00665
	IF (ND) 80,80,60	.STA00666
60	KK=MINO(IC,ND)	.STA00667
	C=0.	.STA00668
	DO 70 L=1,KK	.STA00669
70	C=C + A(KI+L)*A(KLT+L)	.STA00670
	A(KLT)=A(KLT) - C	.STA00671
80	K=K + 1	.STA00672
90	K=N	.STA00673
	B=0.	.STA00674
	DO 100 KK=KL,KU	.STA00675
	K=K - 1	.STA00676
	KI=MAXA(K)	.STA00677
	C=A(KK)/A(KI)	.STA00678
	B=B + C*A(KK)	.STA00679
100	A(KK)=C	.STA00680
	A(KN)=A(KN) - B	.STA00681
110	IF (A(KN)) 120,120,140	.STA00682
120	WRITE (IOUT,2000) N,A(KN)	.STA00683
	GO TO 800	.STA00684
140	CONTINUE	.STA00685
	GO TO 900	.STA00686
C		.STA00687
C	REDUCE RIGHT-HAND-SIDE LOAD VECTOR	.STA00688
C		.STA00689
	150 DO 180 N=1,NN	.STA00690
	KL=MAXA(N) + 1	.STA00691

```

      KU=MAXA(N+1) - 1                                STA00693
      IF (KU-KL) 180,160,160                          STA00694
160   K=N                                              STA00695
      C=0.                                             STA00696
      DO 170 KK=KL,KU                                STA00697
      K=K - 1                                         STA00698
170   C=C + A(KK)*V(K)                               STA00699
      V(N)=V(N) - C                                  STA00700
180   CONTINUE                                       STA00701
C                                           STA00702
C   BACK-SUBSTITUTE                                STA00703
C                                           STA00704
      DO 200 N=1,NN                                  STA00705
      K=MAXA(N)                                       STA00706
200   V(N)=V(N)/A(K)                                 STA00707
      IF (NN.EQ.1) GO TO 900                         STA00708
      N=NN                                            STA00709
      DO 230 L=2,NN                                  STA00710
      KL=MAXA(N) + 1                                 STA00711
      KU=MAXA(N+1) - 1                               STA00712
      IF (KU-KL) 230,210,210                         STA00713
210   K=N                                              STA00714
      DO 220 KK=KL,KU                                STA00715
      K=K - 1                                         STA00716
220   V(K)=V(K) - A(KK)*V(N)                       STA00717
230   N=N - 1                                         STA00718
      GO TO 900                                       STA00719
C                                           STA00720
800   STOP                                           STA00721
900   RETURN                                          STA00722
C                                           STA00723
2000  FORMAT (//, ' STOP - STIFFNESS MATRIX NOT POSITIVE DEFINITE', //, STA00724
1      ' NONPOSITIVE PIVOT FOR EQUATION ', I8, //, STA00725
2      ' PIVOT = ', E20.12 ) STA00726 C             STA00727
      END                                             STA00728
      SUBROUTINE LOADV (R,NEQ)                       STA00729
C . . . . . STA00730
C . . . . . STA00731
C .   P R O G R A M                                STA00732
C .   TO OBTAIN THE LOAD VECTOR                    STA00733
C . . . . . STA00734
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)           STA00735
      COMMON /TAPES/ IELMNT,ILOAD,IIN,IOUT          STA00736
      DIMENSION R(NEQ)                             STA00737
C                                           STA00738
      READ (ILOAD) R                                 STA00739
C                                           STA00740
      RETURN                                          STA00741
      END                                             STA00742
      SUBROUTINE WRITED (DISP,ID,NEQ,NUMNP)          STA00743
C . . . . . STA00744
C . . . . . STA00745
C .   P R O G R A M                                STA00746
C .   TO PRINT DISPLACEMENTS                      STA00747
C . . . . . STA00748

```

```

      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)          STA00749
      COMMON /TAPES/ IELMNT,ILOAD,IIN,IOUT         STA00750
      DIMENSION DISP(NEQ),ID(3,NUMNP)              STA00751
      DIMENSION D(3)                                STA00752
C      PRINT DISPLACEMENTS                          STA00753
C      WRITE (IOUT,2000)                             STA00754
C      IC=4                                           STA00755
C      DO 100 II=1,NUMNP                             STA00756
C      IC=IC + 1                                     STA00757
C      IF (IC.LT.56) GO TO 105                         STA00758
C      WRITE (IOUT,2000)                             STA00759
C      IC=4                                           STA00760
105  DO 110 I=1,3                                     STA00761
110  D(I)=0.                                          STA00762
C      DO 120 I=1,3                                     STA00763
C      KK=ID(I,II)                                     STA00764
C      IL=I                                           STA00765
120  IF (KK.NE.0) D( IL)=DISP(KK)                   STA00766
C      100 WRITE (IOUT,2010) II,D                     STA00767
C      RETURN                                          STA00768
C      SUBROUTINE STRESS (AA)                          STA00769
2000  FORMAT (///,' DISPLACEMENT S',//,' NODE ',10X, STA00770
1      'X-DISPLACEMENT Y-DISPLACEMENT Z-DISPLACEMENT') STA00771
2010  FORMAT (IX,I3,8X,3E18.6)                       STA00772
C      END                                           STA00773
C      SUBROUTINE STRESS (AA)                          STA00774
C      . . . . . STA00775
C      . . . . . STA00776
C      . . . . . STA00777
C      . . . . . STA00778
C      . . . . . STA00779
C      . . . . . STA00780
C      . . . . . STA00781
C      . . . . . STA00782
C      . . . . . STA00783
C      . . . . . STA00784
C      . . . . . STA00785
C      . . . . . STA00786
C      . . . . . STA00787
C      . . . . . STA00788
C      . . . . . STA00789
C      . . . . . STA00790
C      . . . . . STA00791
C      . . . . . STA00792
C      . . . . . STA00793
C      . . . . . STA00794
C      . . . . . STA00795
C      . . . . . STA00796
C      . . . . . STA00797
C      . . . . . STA00798
C      . . . . . STA00799
C      . . . . . STA00800
C      . . . . . STA00801
C      . . . . . STA00802
C      . . . . . STA00803

```

```

C                                     STA00804
100  CONTINUE                         STA00805
C                                     STA00806
      RETURN                         STA00807
      END                           STA00808
      SUBROUTINE TRUSS                STA00809
C . . . . . STA00810
C . . . . . STA00811
C . . . . . STA00812
C . . . . . P R O G R A M             STA00813
C . . . . . TO SET UP STORAGE AND CALL THE TRUSS ELEMENT SUBROUTINE . STA00814
C . . . . . STA00815
C . . . . . COMMON /SOL/ NUMNP,NEQ,NWK,NUMEST,MIDEST,MAXEST,MK STA00816
C . . . . . COMMON /DIM/ N1,N2,N3,N4,N5,N6,N7,N8,N9,N10,N11,N12,N13,N14,N15 STA00817
C . . . . . COMMON /EL/ IND,NPAR(10),NUMEG,MTOT,NFIRST,NLAST,ITWO STA00818
C . . . . . COMMON /TAPES/ IELMNT,ILOAD,IIN,IOUT STA00819
C . . . . . COMMON A(1) STA00820
C                                     STA00821
      EQUIVALENCE (NPAR(2),NUME),(NPAR(3),NUMMAT) STA00822
C                                     STA00823
      NFIRST=N6                       STA00824
      IF (IND.GT.1) NFIRST=N5         STA00825
      N101=NFIRST                     STA00826
      N102=N101 + NUMMAT*ITWO         STA00827
      N103=N102 + NUMMAT*ITWO         STA00828
      N104=N103+6*NUME                STA00829
      N105=N104 + 6*NUME*ITWO         STA00830
      N106=N105 + NUME                STA00831
      NLAST=N106                      STA00832
C                                     STA00833
      IF (IND.GT.1) GO TO 100          STA00834
      IF (NLAST.GT.MTOT) CALL ERROR (NLAST-MTOT,3) STA00835
      GO TO 200                       STA00836
100  IF (NLAST.GT.MTOT) CALL ERROR (NLAST-MTOT,4) STA00837
C                                     STA00838
200  MIDEST=NLAST - NFIRST            STA00839
C                                     STA00840
      CALL RUSS (A(N1),A(N2))A(N3),A(N4),A(N4),A(N5),A(N101),A(N102), STA00841
1  A(N103),A(N104),A(N105))          STA00842
C                                     STA00843
      RETURN                         STA00844
C                                     STA00845
      END                           STA00846
      SUBROUTINE RUSS (ID,X,Y,Z,U,MHT,E,AREA,LM,XYZ,MATP) STA00847
C . . . . . STA00848
C . . . . . STA00849
C . . . . . TRUSS ELEMENT SUBROUTINE . STA00850
C . . . . . STA00851
C . . . . . STA00852
C . . . . . IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z) STA00853
C . . . . . REAL A STA00854
C . . . . . COMMON /SOL/ NUMNP,NEQ,NWK,NUMEST,MIDEST,MAXEST,MK STA00855
C . . . . . COMMON /DIM/ N1,N2,N3,N4,N5,N6,N7,N8,N9,N10,N11,N12,N13,N14,N15 STA00856
C . . . . . COMMON /EL/ IND,NPAR(10),NUMEG,MTOT,NFIRST,NLAST,ITWO STA00857
C . . . . . COMMON /VAR/ NG,MODEX STA00858

```

	COMMON /TAPES/ IELMNT,ILOAD,IIN,IOUT	STA00859
	COMMON A(1)	STA00860
C		STA00861
	DIMENSION X(1),Y(1),Z(1),ID(3,1),E(1),AREA(1),LM(6,1),	STA00862
	1 XYZ(6,1),MATP(1),U(1),MHT(1)	STA00863
	DIMENSION S(21),ST(6),D(3)	STA00864
C		STA00865
	EQUIVALENCE (NPAR(1),NPAR1),(NPAR(2),NUME),(NPAR(3),NUMMAT)	STA00866
	ND=6	STA00867
C		STA00868
	GO TO (300,610,800),IND	STA00869
C		STA00870
C		STA00871
C	R E A D A N D G E N E R A T E E L E M E N T	STA00872
C	I N F O R M A T I O N	STA00873
C		STA00874
C	READ MATERIAL INFORMATION	STA00875
C		STA00876
	300 WRITE (IOUT,2000) NPAR1,NUME	STA00877
	IF (NUMMAT.EQ.0) NUMMAT=1	STA00878
	WRITE (IOUT,2010) NUMMAT	STA00879
C		STA00880
	WRITE (IOUT,2020)	STA00881
	DO 10 I=1,NUMMAT	STA00882
	READ (IIN,1000) N,E(N),AREA(N)	STA00883
	10 WRITE (IOUT,2030) N,E(N),AREA(N)	STA00884
C		STA00885
C	READ ELEMENT INFORMATION	STA00886
C		STA00887
	WRITE (IOUT,2040)	STA00888
	N=1	STA00889
	100 READ (IIN,1020) M, II, JJ, MTYP, KG	STA00890
	IF (KG.EQ.0) KG=1	STA00891
	120 IF (M.NE.N) GO TO 200	STA00892
	I=II	STA00893
	J=JJ	STA00894
	MTYPE=MTYP	STA00895
	KKK=KG	STA00896
C		STA00897
C	SAVE ELEMENT INFORMATION	STA00898
C		STA00899
	200 XYZ(1,N)=X(I)	STA00900
	XYZ(2,N)=Y(I)	STA00901
	XYZ(3,N)=Z(I)	STA00902
C		STA00903
	XYZ(4,N)=X(J)	STA00904
	XYZ(5,N)=Y(J)	STA00905
	XYZ(6,N)=Z(J)	STA00906
C		STA00907
	MATP(N)=MTYPE	STA00908
C		STA00909
	DO 390 L=1,6	STA00910
	390 LM(L,N)=0	STA00911
	DO 400 L=1,3	STA00912
	LM(L,N)=ID(L,I)	STA00913

	400	LM(L+3,N)=ID(L,J)	STA00914
C			STA00915
C		UPDATE COLUMN HEIGHTS AND BANDWIDTH	STA00916
C			STA00917
		CALL COLHT (MHT,ND,LM(1,N))	STA00918
C			STA00919
		WRITE (IOUT,2050) N,I,J,MTYPE	STA00920
		IF (N.EQ.NUME) GO TO 900	STA00921
		N=N + 1	STA00922
		I=I + KKK	STA00923
		J=J + KKK	STA00924
		IF (N.GT.M) GO TO 100	STA00925
		GO TO 120	STA00926
C			STA00927
C			STA00928
C		ASSEMBLE STUCTIONE STIFFNESS MATRIX	STA00929
C			STA00930
C			STA00931
	610	DO 500 N=1,NUME	STA00932
		MTYPE=MATP(N)	STA00933
		XL2=0.	STA00934
		DO 505 L=1,3	STA00935
		D(L)=XYZ(L,N) - XYZ(L+3,N)	STA00936
	505	XL2=XL2 + D(L)*D(L)	STA00937
		XL=SQRT(XL2)	STA00938
		XX=E(MTYPE)*AREA(MTYPE)*XL	STA00939
		DO 510 L=1,3	STA00940
		ST(L)=D(L)/XL2	STA00941
	510	ST(L+3)=-ST(L)	STA00942
C			STA00943
		KL=0	STA00944
		DO 600 L=1,6	STA00945
		YY=ST(L)*XX	STA00946
		DO 600 K=L,6	STA00947
		KL=KL + 1	STA00948
	600	S(KL)=ST(K)*YY	STA00949
		CALL ADDBAN (A(N3),A(N2),S,LH(1,N),ND)	STA00950
	500	CONTINUE	STA00951
		GO TO 900	STA00952
C			STA00953
C			STA00954
C		STRESS CALCULATIONS	STA00955
C			STA00956
C			STA00957
	800	IPRINT=0	STA00958
		DO 830 N=1,NUME	STA00959
		IPRINT=IPRINT + 1	STA00960
		IF (IPRINT.GT.50) IPRINT=1	STA00961
		IF (IPRINT.EQ.1) WRITE (IOUT,2060) NG	STA00962
		MTYPE=MATP(N)	STA00963
		XL2=0.	STA00964
		DO 820 L=1,3	STA00965
		D(L) = XYZ(L,N) - XYZ(L+3,N)	STA00966
	820	XL2=XL2 + D(L)*D(L)	STA00967
		DO 814 L=1,3	STA00968


```

      ST(L)=(D(L)/XL2)*E(MTYPE)
814  ST(L+3)=-ST(L)
      STR=0.0
      DO 806 L=1,3
      I=LM(L,N)
      IF (I.LE.0) GO TO 807
      STR=STR + ST(L)*U(I)
807  J=LM(L+3,N)
      IF (J.LE.0) GO TO 806
      STR=STR + ST(L+3)*U(J)
806  CONTINUE
      P=STR*AREA(MTYPE)
      WRITE (IOUT,2070) N,P,STR
830  CONTINUE
C
900  RETURN
C
1000 FORMAT (I5,2F10.0)
1010 FORMAT (2F10.0)
1020 FORMAT (5I5)
2000 FORMAT (' E L E M E N T   D E F I N I T I O N',///,
1      ' ELEMENT TYPE ',13(' '),'( NPAR(1) ) . . . =',I5,/,
2      ' EQ.1, TRUSS ELEMENTS',/,
3      ' EQ.2, ELEMENTS CURRENTLY',/,
4      ' EQ.3, NOT AVAILABLE',//,
5NUMBER OF ELEMENTS.',10(' '),'( NPAR(2) ) =',I5,/)
2010 FORMAT (' M A T E R I A L   D E F I N I T I O N',///,
1      ' NUMBER OF DIFFERENT SETS OF MATERIAL',/,
2      ' AND CROSS-SECTIONAL CONSTANTS ',
3      4(' '),'( NPAR(3) ) . . . =',I5,/)
2020 FORMAT (' SET          YOUNG'S      CROSS-SECTIONAL',/,
1      ' NUMBER          MODULUS',10X,'AREA',/,
2      15X,'E',14X,'A')
2030 FORMAT (/ ,I5,4X,E12.5,2X,E14.6)
2040 FORMAT (//,' E L E M E N T   I N F O R M A T I O N',///,
1      ' ELEMENT      NODE      NODE      MATERIAL',/,
2      ' NUMBER-N      I      J      SET NUMBER',/)
2050 FORMAT (15,6X,I5,4X,I5,7X,I5)
2060 FORMAT (///,' S T R E S S   C A L C U L A T I O N S   F O R ',
1      'E L E M E N T   G R O U P',I4,/,
2      ' ELEMENT',13X,'FORCE',12X,'STRESS',/,
3      ' NUMBER',/)
2070 FORMAT (IX,I5,11X,E13.6,4X,E13.6)
C
      END
      SUBROUTINE SECOND (TIM)
C
C      SUBROUTINE TO OBTAIN TIME
C      THIS SUBROUTINE HAS BEEN USED ON AN IBM RS/6000 WORKSTATION
C
      TIM=0.01*MCLOCK()
      RETURN
      END

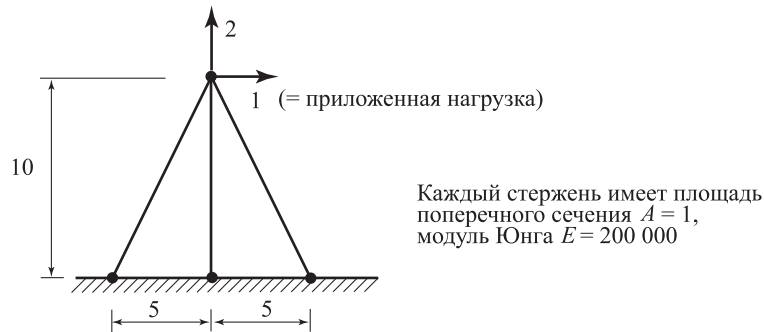
```

STA00969
 STA00970
 STA00971
 STA00972
 STA00973
 STA00974
 STA00975
 STA00976
 STA00977
 STA00978
 STA00979
 STA00980
 STA00981
 STA00982
 STA00983
 STA00984
 STA00985
 STA00986
 STA00987
 STA00988
 STA00989
 STA00990
 STA00991
 STA00992
 STA00993
 STA00994
 STA00995
 STA00996
 STA00997
 STA00998
 STA00999
 STA01000
 STA01001
 STA01002
 STA01003
 STA01004
 STA01005
 STA01006
 STA01007
 STA01008
 STA01009
 STA01010
 STA01011
 STA01012
 STA01013
 STA01014
 STA01015
 STA01016
 STA01017
 STA01018
 STA01019
 STA01021
 STA01022

12.5. Упражнения и варианты программ

Упражнения

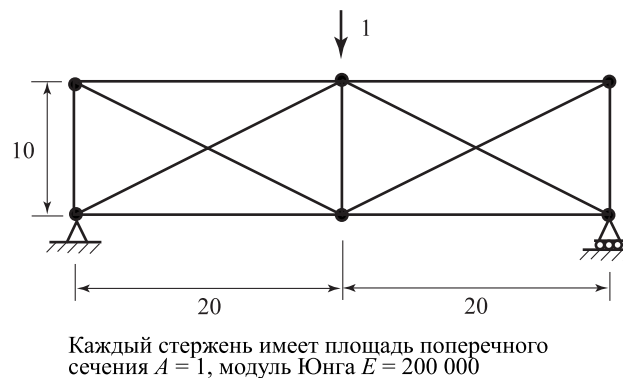
- 12.1. Рассмотрите показанную здесь ферменную конструкцию. Используйте программу STAP, чтобы получить решение для реакций конструкции. Проверьте ваш ответ.



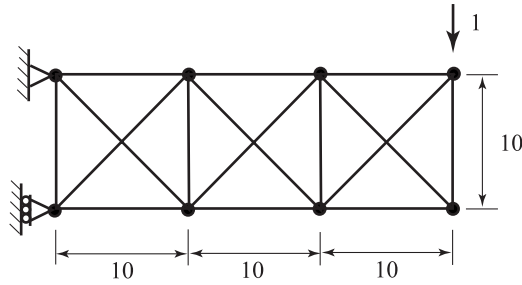
- 12.2. Рассмотрите показанную здесь ферменную конструкцию. Используйте программу STAP, чтобы получить решение для реакций конструкции. Проверьте ваш ответ.



- 12.3. Рассмотрите показанную здесь ферменную конструкцию. Используйте программу STAP, чтобы получить решение для реакций конструкции. Проверьте ваш ответ.



- 12.4. Рассмотрите показанную здесь ферменную конструкцию. Используйте программу STAP, чтобы получить решение для реакций конструкции. Проверьте ваш ответ.



Каждый стержень имеет площадь поперечного сечения $A = 1$, модуль Юнга $E = 200\,000$

Варианты программ

Ниже приводятся описания некоторых вариантов программ на основе STAP. Разумеется, коль скоро будет выполнена та или иная реализация данной программы, то смогут быть решены различные задачи, и здесь мы указываем лишь на некоторые возможности. Мы призываем учащегося решить и какие-то добавочные задачи.

Вариант 12.1. Модифицируйте программу STAP так, чтобы она была применима также и к статическому анализу двумерных задач с плоскими напряжениями, с плоскими деформациями, а также к осесимметричным задачам. Для достижения этой цели введите в STAP подпрограмму QUADS из раздела 5.6. Проверьте реализацию программы. Качество реализации программы проверьте путем решения задач с групповыми тестами на рис. 4.39, а также задачи с консольной пластиной, рассмотренной в примере 4.6.

Вариант 12.2. Действуйте так же, как и в варианте 12.1, однако введите подпрограмму QUADS, модифицированную применительно к модели u/p и к элементу $4/1$ (см. раздел 4.4.3)

Вариант 12.3. Модифицируйте программу STAP так, чтобы она стала применимой также и к динамическому анализу с непосредственным пошаговым интегрированием. Дайте возможность выбора плотной матрицы, или же матрицы, разделенной на подматрицы, а также выбора метода центральных разностей или метода Ньюмарка.

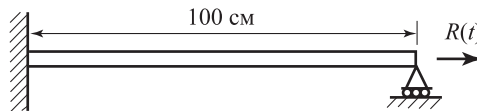
Используйте модифицированную программу STAP для решения задачи, рассмотренной в примере 9.14.

Вариант 12.4. Модифицируйте программу STAP так, чтобы она стала применимой также и к динамическому анализу с суперпозицией мод. Дайте возможность выбора плотной матрицы или матрицы, разделенной на подматрицы.

Введите подпрограмму JACOBI из раздела 11.3.2 для того, чтобы вычислить частоты и формы мод, причем дайте возможность выбора номеров мод, предназначенных для включения в план суперпозиции мод от 1 до p , где $p \leq n$ и где n — число степеней свободы.

Воспользуйтесь модифицированной программой STAP для решения задачи, рассмотренной в примере 9.14.

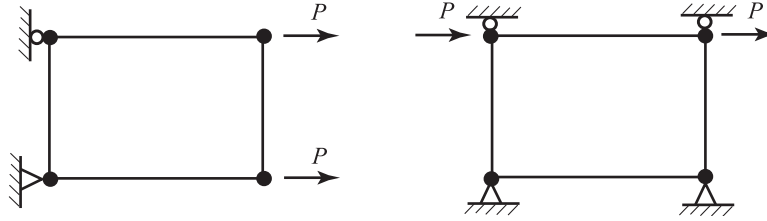
Вариант 12.5. Модифицируйте программу STAP так же, как и в варианте 12.4, однако дайте возможность выбрать и использовать все моды с частотами между ω_l и ω_u . Затем постройте решение нижеследующей задачи. Пусть $R(t) = \sin \omega_R t$, $\omega_R = 2000$. Стержень в начальный момент находится в покое (т. е. с нулевым смещением и при нулевой скорости). Выполните анализ, используя при конечно-элементной дискретизации 4, 8, 40, 60, ... одинаковых ферменных элементов с двумя узлами. Сравните результаты вашего прогноза, касающегося реакции.



Стержень имеет площадь поперечного сечения $A = 4 \text{ см}^2$;
модуль Юнга $E = 4,4 \text{ МПа}$;
 ρ = массовая плотность = 1560 кг/м^3 .

Вариант 12.6. Модифицируйте программу STAP так, чтобы при анализе ферменных конструкций иметь возможность исследования больших смещений. Используйте информацию, приведенную в примере 6.16. После этого постройте решение задачи из примера 6.3.

Вариант 12.7. Модифицируйте программу STAP так, чтобы при двумерном анализе с плоскими напряжениями, с плоскими деформациями и при осесимметричном анализе иметь возможность рассмотреть большие смещения. Воспользуйтесь подпрограммой QUADS из раздела 5.6, положив ее в основу элементной подпрограммы и модифицируйте эту программу так, чтобы применить полную лагранжеву формулировку, описанную в разделе 6.3.4. Предположите наличие упругого материала, имеющего модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν . Испытайте работу программы при решении показанных здесь простых задач и сравните ваши результаты с данными аналитических расчетов.



Вариант 12.8. Действуйте так же, как и в варианте 12.7, но используйте модель u/p и введите в рассмотрение элемент 4/1.

Вариант 12.9. Модифицируйте программу STAP так, чтобы провести одномерный, нестационарный анализ теплопередачи, включающий граничные условия с линейной конвекцией. После этого решите задачу, представленную на рис. 7.2, при $h = 2$, $L = 20$, $q^S = 2$, $k = 1,0$, $\rho c = 1,0$, и пренебрегая теплопередачей за счет излучения. Предположите наличие различных начальных условий для температуры, а также возможность изменения значений k и ρc .

Вариант 12.10. Модифицируйте программу STAP так, чтобы провести анализ стационарных задач о линейной теплопередаче за счет теплопроводности в двумерных, плоских и осесимметричных условиях. Используйте подпрограмму QUADS из раздела 5.6 в качестве основы для построения элементной подпрограммы. После этого постройте решение задачи, представленной в упражнении 7.7.

Вариант 12.11. Модифицируйте программу STAP так, чтобы провести анализ задач, связанных с исследованием полей: фильтрация (см. раздел 7.3.1), течение несжимаемой, невязкой жидкости (см. раздел 7.3.2), задачи о жесткости при кручении (см. раздел 7.3.3), а также анализ акустических жидкостей (см. раздел 7.3.4). В каждом случае рассмотрите только плоскостные изменения и решайте задачу по своему выбору.

Вариант 12.12. Модифицируйте программу STAP так, чтобы провести анализ течения вязкой несжимаемой жидкости при очень малом числе Рейнольдса (течение Стокса). Используйте модель u/p и элемент 4/1. Решайте задачу по своему выбору (например, задачу из упражнения 7.28).

Список литературы

- Ahmad et al. 1970. *Ahmad, S., Irons, B. M., Zienkiewicz, O. C.* Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Elements. // International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 2, pp. 419–451, 1970.
- Akl, Dilger, Irons, 1982. *Akl F. A., Dilger W. H., Irons B. M.* Acceleration of Subspace Iteration. // International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 18, pp. 583–589. 1982.
- Anand, 1979. *Anand L.* On H. Hencky's Approximate Strain Energy Function for Moderate Deformations. // Journal of Applied Mechanics. Vol. 46, pp. 78–82. 1979.
- Argyris 1965. *Argyris, J. H.* Continua and Discontinua. / Proceedings, Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, – Ohio: Wright-Patterson A.F.B., pp. 11–189, Oct. 1965.
- Argyris 1982. *Argyris, J. H.* An Excursion into Large Rotations, // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 32, pp. 85–155, 1982.
- Argyris, Kelsey 1954. *Argyris, J. H., Kelsey, S.* Energy Theorems and Structural Analysis. // Aircraft Engineering, Vols. 26, 27, Oct. 1954, May 1955. Part I is by *J. H. Argyris*, Part II is by *J. H. Argyris and S. Kelsey*.
- Arnold, Brezzi 1993. *Arnold D. N., Brezzi F.* "Some New Elements for the Reissner–Mindlin Plate Model" and "Locking Free Finite Elements for Shells", Pubblicazioni № 898, Istituto di Analisi Numerica del Consiglio Nazionale delle Ricerche, – Pavia. Nov. 1993.
- Arnold, Brezzi, Fortin 1984. *Arnold D. N., Brezzi F., Fortin M.* A Stable Finite Element for the Stokes Equations, // Calcolo, Vol. 21, pp. 337–344. 1984.
- Arnold, Falk 1990. *Arnold D. N., Falk R. S.* The Boundary Layer for the Reissner–Mindlin Plate Model. // SIAM Journal on Mathematical Analysis. Vol. 21, pp. 281–312. 1990.
- Asaro, 1983. *Asaro R. J.* Micromechanics of Crystals and Polycrystals. // Advances in Applied Mechanics. Vol. 23, pp. 1–115. 1983.
- Atluri, 1984. *Atluri S. N.* Alternate Stress and Conjugate Strain Measures, and Mixed Variational Formulations Involving Rigid Rotations, for Computational Analysis of Finitely Deformed Solids, with Application to Plates and Shells: I. Theory. // Computers & Structures. Vol. 18, pp. 93–116. 1984.
- Babuska 1973. *Babuska I.* The Finite Element Method with Lagrangian Multipliers, // Numerische Mathematik. Vol. 20, pp. 179–192, 1973.
- Barsoum 1976. *Barsoum R. S.* On the Use of Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics, // International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 10, pp. 25–37, 1976.
- Barsoum 1977. *Barsoum R. S.* Triangular Quarter-Point Elements as Elastic and Perfectly-Plastic Crack Tip Elements. // International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 11, pp. 85–98, 1977.
- Bathe 1971. *Bathe, K. J.* Solution Methods of Large Generalized Eigenvalue Problems in Structural Engineering. / Report UC SESM 71–20, Civil Engineering Department, University of California, Berkeley, 1971.
- Bathe 1977. *Bathe, K. J.* Convergence of Subspace Iteration. / Formulations and Numerical Algorithms in Finite Element Analysis (eds. *K. J. Bathe, J. T. Oden, W. Wunderlich*). – Cambridge, MA: M.I.T. Press, pp. 575–598, 1977.
- Bathe, Almeida 1982. *Bathe K. J., Almeida C. A.* A Simple and Effective Pipe Elbow Element — Linear Analysis. // Journal of Applied Mechanics. Vol. 47, pp. 93–100, 1980, and A

- Simple and Effective Pipe Elbow Element — Interaction Effects. // Journal of Applied Mechanics. Vol. 49, pp. 165–171, 1982.
- Bathe, Bolourchi 1979. *Bathe K. J., Bolourchi S.* Large Displacement Analysis of Three-Dimensional Beam Structures, // International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 14, pp. 961–986, 1979.
- Bathe, Bolourchi, 1980. *Bathe K. J., Bolourchi S.* A Geometric and Material Nonlinear Plate and Shell Element. // Computers & Structures, Vol. 11, pp. 23–48, 1980.
- Bathe, Brezzi 1985. *Bathe K. J., Brezzi, F.* On the Convergence of a Four-Node Plate Bending Element Based on Mindlin/Reissner Plate Theory and a Mixed Interpolation. / The Mathematics of Finite Elements and Applications V (ed. J. R. Whiteman). — New York: Academic Press, pp. 491–503, 1985.
- Bathe, Brezzi 1987. *Bathe K. J., Brezzi, F.* A Simplified Analysis of Two Plate Bending Elements — The MITC4 and MITC9 Elements. / Proceedings, Numerical Methods in Engineering: Theory and Applications, — Swansea, U.K.: University College. 1987.
- Bathe, Bucalem, Brezzi 1990. *Bathe K. J., Bucalem M. L., Brezzi F.* Displacement and Stress Convergence of Our MITC Plate Bending Elements. // Engineering Computations. Vol. 7, pp. 291–302, 1990.
- Bathe, Chaudhary 1982. *Bathe K. J., Chaudhary, A. B.* On the Displacement Formulation of Torsion of Shafts with Rectangular Cross-sections. // International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 18, pp. 1565–1580, 1982.
- Bathe, Chaudhary 1985. *Bathe K. J., Chaudhary, A. B.* A Solution Method for Planar and Axisymmetric Contact Problems. // International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 21, pp. 65–88, 1985.
- Bathe, Chaudhary, Dvorkin and Kojić, 1984. *Bathe K. J., Chaudhary A. B., Dvorkin E. N. and Kojić M.* On the Solution of Nonlinear Finite Element Equations, // Proceedings, International Conference on Computer-Aided Analysis and Design of Concrete Structures I (eds. F. Damjanic et al.), pp. 289–299, Pineridge Press, Swansea, U.K., 1984.
- Bathe, Cimento, 1980. *Bathe K. J., Cimento A. P.* Some Practical Procedures for the Solution of Nonlinear Finite Element Equations. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 22, pp. 59–85, 1980.
- Bathe, Dvorkin 1985. *Bathe K. J., Dvorkin, E. N.* A Four-Node Plate Bending Element Based on Mindlin/Reissner Plate Theory and a Mixed Interpolation. // International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 21, pp. 367–383, 1985.
- Bathe, Dvorkin 1986. *Bathe K. J., Dvorkin, E. N.* A Formulation of General Shell Elements — The Use of Mixed Interpolation of Tensorial Components. // International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 22, pp. 697–722, 1986.
- Bathe, Dvorkin 1983. *Bathe K. J., Dvorkin, E. N.* On the Automatic Solution of Nonlinear Finite Element Equations. // Computers & Structures. Vol. 17, pp. 871–879, 1983.
- Bathe, Gracewski, 1981. *Bathe K. J., Gracewski S.* On Nonlinear Dynamic Analysis Using Substructuring and Mode Superposition. // Computers & Structures. Vol. 13, pp. 699–707, 1981.
- Bathe, Khoshgoftaar, 1979-A. *Bathe K. J., Khoshgoftaar M. R.* Finite Element Formulation and Solution of Nonlinear Heat Transfer. // Nuclear Engineering and Design. Vol. 51, pp. 389–401, 1979.
- Bathe, Khoshgoftaar, 1979-B. *Bathe K. J., Khoshgoftaar M. R.* Finite Element Free Surface Seepage Analysis Without Mesh Iteration. // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. Vol. 3, pp. 13–22, 1979.
- Bathe, Lee, Bucalem 1990. *Bathe K. J., Lee N. S., Bucalem M. L.* On the Use of Hierarchical Models in Engineering Analysis. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 82, pp. 5–26, 1990.
- Bathe, Ramaswamy, 1980. *Bathe K. J., Ramaswamy S.* An Accelerated Subspace Iteration Method. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 23, pp. 313–331, 1980.

- Bathe, Ramm and Wilson, 1975. *Bathe K. J., Ramm, E. and Wilson E. L.* Finite Element Formulations for Large Deformation Dynamic Analysis, // International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 9, pp. 353–386, 1975.
- Bathe, Sonnad, 1980. *Bathe K. J., Sonnad V.* On Effective Implicit Time Integration of Fluid-Structure Problems, //International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 15, pp. 943–948. 1980.
- Bathe, Walczak, Welch and Mistry, 1989. *Bathe K. J., Walczak J., Welch A. and Mistry, N.* Nonlinear Analysis of Concrete Structures. //Computers & Structures, Vol. 32, pp. 563–590, 1989.
- Bathe, Walczak, Zhang, 1993. *Bathe K. J., Walczak J., Zhang H.* Some Recent Advances for Practical Finite Element Analysis. //Computers & Structures. Vol. 47, pp. 511–521. 1993.
- Bathe, Wilson, 1973-1. *Bathe K. J., Wilson E. L.* Stability and Accuracy Analysis of Direct Integration Methods. //International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics. Vol. 1, pp. 283–291. 1973.
- Bathe, Wilson, 1973-2. *Bathe K. J., Wilson E. L.* NONSAP — A General Finite Element Program for Nonlinear Dynamic Analysis of Complex Structures. /Paper № M3-1, Proceedings, Second Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology. Berlin, Sept. 1973.
- Bathe, Wilson, 1973-3. *Bathe K. J., Wilson E. L.* Eigensolution of Large Structural Systems with Small Bandwidth. //ASCE Journal of Engineering Mechanics Division. Vol. 99, pp. 467–479. 1973.
- Bathe, Wilson, 1972. *Bathe K. J., Wilson E. L.* Large Eigenvalue Problems in Dynamic Analysis. //ASCE Journal of Engineering Mechanics Division. Vol. 98, pp. 1471–1485. 1972.
- Bathe, Zhang, Wang, 1995. *Bathe K. J., Zhang H., Wang M. H.* Finite Element Analysis of Incompressible and Compressible Fluid Flows with Free Surfaces and Structural Interactions. //Computers & Structures. Vol. 56, pp. 193–214, 1995.
- Batoz et al. 1980. *Batoz J.-L., Bathe K. J., Ho L. W.* A Study of Three-Node Triangular Plate Bending Elements. // International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 15, pp. 1771–1812, 1980.
- Bauer, 1957. *Bauer F. L.* Das Verfahren der Treppen-Iteration und Verwandte Verfahren zur Lösung Algebraischer Eigenwertprobleme. //Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik. Vol. 8, pp. 214–235. 1957.
- Belytschko, Hughes, 1983. *Belytschko T., Hughes T. J. R. (eds.)* Computational Methods for Transient Analysis. –North-Holland, New York. 1983.
- Belytschko et al. 1985. *Belytschko, T., Liu, W. K., Ong, J. S.-J., Lam, D.* Implementation and Application of a 9-Node Lagrange Shell Element with Spurious Mode Control. // Computers & Structures. Vol. 20, pp. 121–128, 1985.
- Belytschko, Yen, Mullen, 1979. *Belytschko T., Yen H. J., Mullen R.* Mixed Methods for Time Integration. //Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 17/18, pp. 259–275. 1979.
- Bertsekas 1982. *Bertsekas D. P.* Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods, – New York: Academic Press, 1982.
- Bićanić, Johnson 1978. *Bićanić N., Johnson K. H.* Who Was “-Raphson”? //International Journal for Numerical Methods in Engineering. V 14, pp. 148–152, 1978.
- Brezzi 1974. *Brezzi F.* On the Existence, Uniqueness and Approximation of Saddle-Point Problems Arising from Lagrangian Multipliers, // Revue Française d'Automatique Informatique Recherche Opérationnelle, Analyse Numérique. Vol. 8, pp. 129–151, 1974.
- Brezzi, Bathe 1986. *Brezzi F., Bathe K. J.* Studies of Finite Element Procedures — The inf-sup Condition, Equivalent Forms and Applications. / Reliability of Methods for Engineering Analysis (eds. *K. J. Bathe and D. R. J. Owen*), pp. 197–219, – Swansea, U.K.: Pineridge Press, 1986.
- Brezzi, Bathe 1990. *Brezzi F., Bathe K. J.* A Discourse on the Stability Conditions for Mixed Finite Element Formulations, // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 82, pp. 27–57, 1990.

- Brezzi, Bathe, Fortin 1989. *Brezzi F., Bathe K. J., Fortin M.* Mixed-Interpolated Elements for Reissner/Mindlin Plates. // International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 28, pp. 1787–1801, 1989.
- Brezzi, Fortin 1991. *Brezzi F., Fortin M.* Mixed and Hybrid Finite Element Methods, – New York: Springer-Verlag, 1991.
- Brezzi et al. 1991. *Brezzi F., Fortin M., Stenberg R.* Error Analysis of Mixed-Interpolated Elements for Reissner-Mindlin Plates. // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. Vol. 1, pp. 125–151, 1991.
- Brezzi, Russo. *Brezzi F., Russo A.* Choosing Bubbles for Advection-Diffusion Problems. // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences (in press).
- Brooks, Hughes, 1982. *Brooks A. N., Hughes T. J. R.* Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 32, pp. 199–259, 1982.
- Bucalem, Bathe 1993. *Bucalem M. L., Bathe K. J.* Higher-Order MITC General Shell Elements. // International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 36, pp. 3729–3754, 1993.
- Bushnell et al. 1971. *Bushnell D., Almroth B. O., Brogan F.* Finite-Difference Energy Method for Nonlinear Shell Analysis. // Computers & Structures. Vol. 1, pp. 361–387, 1971.
- Chapelle, Bathe 1993. *Chapelle D., Bathe K. J.* The inf-sup Test. // Computers & Structures. Vol. 47, pp. 537–545, 1993.
- Cheung 1968. *Cheung Y. K.* Finite Strip Method of Analysis of Elastic Slabs, // Proceedings of the American Society of Civil Engineers. Vol. 94, EM6, pp. 1365–1378, 1968.
- Christie et al, 1976. *Christie I., Griffiths D. F., Mitchell A. R. and Zienkiewicz O. C.* [A] “Finite Element Methods for Second Order Differential Equations with Significant First Derivatives”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 10, pp. 1389–1396 1976.
- Ciarlet 1978. *Ciarlet P. G.* The Finite Element Method for Elliptic Problems. – New York: North Holland, 1978.
- Ciarlet, Raviart 1972. *Ciarlet P. G., Raviart P.-A.* Interpolation Theory over Curved Elements with Applications to Finite Element Methods, // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 1, pp. 217–249, 1972.
- Clough 1960. *Clough R. W.* The Finite Element Method in Plane Stress Analysis, / Proceedings, Second ASCE Conference on Electronic Computation. – Pittsburgh, PA, pp. 345–378, Sept. 1960.
- Clough, Penzien 1975. *Clough R. W., Penzien, J.* Dynamics of Structures, – New York: McGraw-Hill, 1975.
- Clough, Wilson, 1962. *Clough R. W., Wilson E. L.* Stress Analysis of a Gravity Dam by the Finite Element Method. // Proceedings, Symposium on the Use of Computers in Civil Engineering, pp. 29.1–29.22, – Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisbon, Portugal, Oct. 1962.
- Collatz 1966. *Collatz L.* The Numerical Treatment of Differential Equations, 3rd ed., – New York: Springer-Verlag, 1966.
- Courant 1943. *Courant, R.* Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations. // Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 49, pp. 1–23, 1943.
- Courant, Friedrichs, Lewy, 1928. *Courant R., Friedrichs K., Lewy H.* Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik. // Mathematische Annalen. Vol. 100, pp. 32–74. 1928.
- Courant, Hilbert 1953. *Courant R., Hilbert D.* Methods of Mathematical Physics, – New York: John Wiley, 1953.
- Courant, Isaacson, Rees, 1952. *Courant R., Isaacson E., Rees M.* On the Solution of Non-Linear Hyperbolic Differential Equations by Finite Differences. // Communications on Pure and Applied Mathematics. Vol. 5, pp. 243–255. 1952.

- Cowper 1973. *Cowper G. R.* Gaussian Quadrature Formulas for Triangles. // International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 7, pp. 405–408, 1973.
- Craig, 1981. *Craig R. R., Jr.* Structural Dynamics. – New York: John Wiley, 1981.
- Crandall 1956. *Crandall S. H.* Engineering Analysis, – New York: McGraw-Hill, 1956.
- Crandall et al. 1978. *Crandall S. H., Dahl N. C., Lardner, T. J.* An Introduction to the Mechanics of Solids, 2nd ed., – New York: McGraw-Hill, 1978.
- Crisfield, 1981. *Crisfield M. A.* A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure That Handles Snap-Through. // Computers & Structures. Vol. 13, pp. 55–62, 1981.
- Crouzeix M., Raviart P.-A. 1973. *CRouzeix M., RAViart P.-A.* Conforming and Non-conforming Finite Element Methods for Solving the Stationary Stokes Equations, // Revue Française d'Automatique Informatique Recherche Operationnelle, Analyse Numérique, Vol. 7, pp. 33–76, 1973.
- Cuthill, McKee, 1969. *Cuthill E., McKee J.* Reducing the Bandwidth of Sparse Symmetric Matrices. // Proceedings of 24th National Conference, Association for Computing Machinery. pp. 157–172. 1969.
- Dennis, 1976. *Dennis J. E., JR.* A Brief Survey of Convergence Results for Quasi-Newton Methods. // SIAM-AMS Proceedings. Vol. 9, pp. 185–200. 1976.
- Desai, 1976. *Desai C. S.* [A] “Finite Element Residual Schemes for Unconfined Flow”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 10, pp. 1415–1418, 1976.
- Desai, Siriwardane, 1984. *Desai C. S., Siriwardane H. J.* Constitutive Laws for Engineering Materials, – Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.
- Drucker, Prager, 1952. *Drucker D. C., Prager W.* Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design. // Quarterly of Applied Mathematics. Vol. 10, №. 2, pp. 157–165. 1952.
- Dul, Arczewski, 1994. *Dul F. A., Arczewski K.* The Two-Phase Method for Finding a Great Number of Eigenpairs of the Symmetric or Weakly Non-symmetric Large Eigenvalue Problems. // Journal of Computational Physics. Vol. 111, pp. 89–109. 1994.
- Dvorkin, Bathe 1984. *Dvorkin E. N., Bathe K. J.* A Continuum Mechanics Based Four-Node Shell Element for General Nonlinear Analysis. // Engineering Computations. Vol. 1, pp. 77–88, 1984.
- Ericsson, Ruhe, 1980. *Ericsson T., Ruhe A.* The Spectral Transformation Lanczos Method for the Numerical Solution of Large Sparse Generalized Symmetric Eigenvalue Problems, // Mathematics of Computation. Vol. 35, pp. 1251–1268. 1980.
- Eterovic, Bathe, 1990-A. *Eterovic A. L., Bathe K. J.* [A] A Hyperelastic-Based Large Strain Elasto-Plastic Constitutive Formulation with Combined Isotropic-Kinematic Hardening Using the Logarithmic Stress and Strain Measures. // International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 30, pp. 1099–1114. 1990.
- Eterovic, Bathe, 1990-B. *Eterovic A. L., Bathe K. J.* On Large Strain Elasto-Plastic Analysis with Frictional Contact Conditions. // Proceedings, Conference on Numerical Methods in Applied Science and Industry. Politecnica di Torino, Torino, pp. 81–93. 1990.
- Eterovic, Bathe, 1991. *Eterovic A. L., Bathe K. J.* On the Treatment of Inequality Constraints Arising from Contact Conditions in Finite Element Analysis. // Computers & Structures. Vol. 40, pp. 203–209. 1991.
- Everstine, 1981. *Everstine G. C.* A Symmetric Potential Formulation for Fluid-Structure Interaction. // Journal of Sound and Vibration. Vol. 79, pp. 157–160. 1981.
- Falk, Langemeyer, 1960. *Falk S., Langemeyer P.* Das Jacobische Rotationsverfahren für reell-symmetrische Matrizenpaare. // Elektronische Datenverarbeitung, pp. 30–34. 1960.
- Handbook 1987. Finite Element Handbook. eds.: *H. Kardestuncer and D. H. Norrie.* – N. Y.: McGraw-Hill. 1987.
- Fletcher, 1976. *Fletcher R.* Conjugate Gradient Methods for Indefinite Systems. // Lecture Notes in Mathematics. Vol. 506, pp. 73–89. – Springer-Verlag, New York. 1976.
- Fortin, Glowinski 1983. *Fortin M., Glowinski R.* Augmented Lagrangian Methods: Applications to the Numerical Solution of Boundary-Value Problems, – Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1983.

- Franca, Frey, Hughes, 1992. *Franca L. P., Frey S. L., Hughes T. J. R.* Stabilized Finite Element Methods: I. Application to the Advective-Diffusive Model. //Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 95, pp. 221–242. 1992.
- Francis, 1961. *Francis J. G. F.* The QR Transformation, Parts 1 and 2. //The Computer Journal. Vol. 4, pp. 265–271, 332–345. 1961.
- Friedrichs, Dressler 1961. *Friedrichs, K. O., Dressler R. F.* A Boundary-Layer Theory for Elastic Plates. // Communications on Pure and Applied Mathematics. Vol. 14, pp. 1–33, 1961.
- Fröberg 1969. *Fröberg C. E.* Introduction to Numerical Analysis. – Reading, MA: Addison-Wesley, 1969.
- Fung, 1965. *Fung Y. C.* Foundations of Solid Mechanics. –Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. 1965.
- Gallagher 1969. *Gallagher R. H.* Analysis of Plate and Shell Structures, Proceedings, Symposium on the Application of Finite Element Methods in Civil Engineering, – Nashville, TN: Vanderbilt University, pp. 155–205, 1969.
- Gauss, 1873. *Gauss C. F.* Carl Friedrich Gauss Werke, von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Vol. 4. 1873.
- George, Gilbert, Liu, 1993. Graph Theory and Sparse Matrix Computation, eds. *George A., Gilbert J. R., Liu, J. W. H.* //Institute for Mathematics and Its Applications. Vol. 56. Springer-Verlag. 1993.
- Ghali, Bathe 1970. *Ghali A., Bathe K. J.* Analysis of Plates Subjected to In-Plane Forces Using Large Finite Elements, //International Association for Bridge and Structural Engineering Bulletin. Vol. 30–1, pp. 69–72;
Analysis of Plates in Bending Using Large Finite Elements, //International Association for Bridge and Structural Engineering Bulletin. Vol. 30–11, pp. 29–40, 1970.
- Gibbs, Poole, Stockmeyer, 1976. *Gibbs N. E., Poole W. G., JR., Stockmeyer P. K.* An Algorithm for Reducing the Bandwidth and Profile of a Sparse Matrix. //SIAM Journal on Numerical Analysis. Vol. 13, pp. 236–250. 1976.
- Golub, Underwood, 1977. *Golub G. H., Underwood R.* The Block Lanczos Method for Computing Eigenvalues. In Mathematical Software III (*J. R. Rice*, ed.), pp. 361–377. –New York: Academic Press. 1977.
- Golub, Van Loan, 1984. *Golub G. H., Van Loan C. F.* Matrix Computations. –Johns Hopkins University Press, Baltimore. 1984.
- Green, Naghdi, 1965. *Green A. E., Naghdi P. M.* A General Theory of an Elastic-Plastic Continuum. //Archive for Rational Mechanics and Analysis. Vol. 18, pp. 251–281. 1965.
- Green, Zerna, 1954. *Green A. E., Zerna W.* Theoretical Elasticity. –Oxford: Clarendon Press. 1954.
- Gresho et al. 1980. *Gresho P. M., Lee R. L., Chan S. T., Leone J. M. Jr.* A New Finite Element for Incompressible or Boussinesq Fluids. / Third International Conference on Finite Elements in Flow Problems (ed. *D. H. Norrie*), – Banff, Alberta, Canada, pp. 204–215, 1980.
- Guyan, 1965. *Guyan R. J.* Reduction of Stiffness and Mass Matrices. //AIAA Journal. Vol. 3, № 2, p. 380. 1965.
- Häggblad, Bathe 1990. *Häggblad B., Bathe K. J.* Specifications of Boundary Conditions for Reissner/Mindlin Plate Bending Finite Elements. // International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 30, pp. 981–1011, 1990.
- Hammer et al. 1956. *Hammer P. C., Marlowe O. J., Stroud A. H.* Numerical Integration over Simplexes and Cones. // Mathematical Tables and other Aids to Computation. Vol. 10, pp. 130–137, – Washington, DC: The National Research Council, 1956.
- Hellinger 1914. *Hellinger E.* Die allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua. / Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, (eds. *F. Klein and C. Müller*), Vol. 4, Part. 4, pp. 601–694, – Leipzig: Teubner Verlag, 1914.
- Henshell, Shaw 1975. *Henshell R. D., Shaw K. G.* Crack Tip Finite Elements Are Unnecessary, // International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 9, pp. 495–507, 1975.

- Herrmann 1965. *Herrmann L. R.* Elasticity Equations for Incompressible and Nearly Incompressible Materials by a Variational Theorem, // AIAA Journal. Vol. 3, pp. 1896–1900, 1965.
- Hestenes, Stiefel, 1952. *Hestenes M. R., Stiefel E.* Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems. // Journal of Research of the National Bureau of Standards. Vol. 49, pp. 409–436. 1952.
- Hilber, Hughes, Taylor 1977. *Hilber H. M., Hughes T. J. R., and Taylor R. L.* Improved Numerical Dissipation for Time Integration Algorithms in Structural Mechanics. // International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics. Vol. 5, pp. 283–292. 1977.
- Hill, 1983. *Hill R.* Aspects of Invariance in Solid Mechanics. In: Advances in Applied Mechanics (C.-S. Yih, ed.), Vol. 18, pp. 1–75, –New York: Academic Press 1978.
- Hill, 1983. *Hill R.* [B] The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford University Press, Oxford, 1983.
- Hinton, Campbell 1979. *Hinton E., Campbell J. S.* Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using Least Squares Method, // International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 8, pp. 461–480, 1979.
- Hodge, Bathe, Dvorkin, 1986. *Hodge P. G., Bathe K. J., Dvorkin E. N.* Causes and Consequences of Nonuniqueness in an Elastic-Perfectly-Plastic Truss. // Journal of Applied Mechanics. Vol. 53, pp. 235–241. 1986.
- Holden, 1972. *Holden J. T.* On the Finite Deflections of Thin Beams. // International Journal of Solids and Structures. Vol. 8, pp. 1051–1055. 1972.
- Hood, Taylor 1974. *Hood P., Taylor C.* Navier-Stokes Equations Using Mixed Interpolation. / Finite Element Methods in Flow Problems (eds. J. T. Oden, O. C. Zienkiewicz, R. H. Gallagher and C. Taylor). – Huntsville, AL: UAH Press, The University of Alabama, pp. 121–132, 1974.
- Houbolt, 1950. *Houbolt J. C.* A Recurrence Matrix Solution for the Dynamic Response of Elastic Aircraft. // Journal of the Aeronautical Sciences. Vol. 17, pp. 540–550. 1950.
- Hu 1955. *Hu, H. C.* On Some Variational Principles in the Theory of Elasticity and the Theory of Plasticity. // Scientia Sinica. Vol. 4, pp. 33–54, 1955.
- Huang, Hinton 1986. *Huang H. C., Hinton E.* A New Nine Node Degenerated Shell Element with Enhanced Membrane and Shear Interpolation. // International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 22, pp. 73–92, 1986.
- Huerta, Liu, 1988. *Huerta A., Liu W. K.* Viscous Flow with Large Free Surface Motion. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 69, pp. 277–324. 1988.
- Hughes 1987. *Hughes T. J. R.* The Finite Element Method, – Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1987.
- Hughes, Franca, Hulbert, 1989. *Hughes T. J. R., Franca L. P., Hulbert G. M.* A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics: VIII. The Galerkin/Least Squares Method for Advective-Diffusive Equations. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 73, pp. 173–189. 1989.
- Hughes et al., 1976. *Hughes T. J. R., Taylor R. L., Sackman, J. L., Curnier, A. and Kanoknukulchai W.* [A] “A Finite Element Method for a Class of Contact-Impact Problems”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 8, pp. 249–276, 1976.
- Hughes, Tezduyar 1981. *Hughes T. J. R., Tezduyar T. E.* Finite Elements Based upon Mindlin Plate Theory with Particular Reference to the Four-Node Bilinear Isoparametric Element. // Journal of Applied Mechanics. Vol. 48, pp. 587–596, 1981.
- Irons 1966-A. *Irons B. M.* Engineering Application of Numerical Integration in Stiffness Method, // AIAA Journal. Vol. 4, pp. 2035–2037, 1966.
- Irons 1966-B. *Irons B. M.* Numerical Integration Applied to Finite Element Methods, / Conference on the Use of Digital Computers in Structural Engineering. University of Newcastle, England, 1966.

- Irons 1971. *Irons B. M.* Quadrature Rules for Brick-Based Finite Elements, // International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 3, pp. 293–294, 1971.
- Irons 1970. *Irons B. M.* A Frontal Solution Program for Finite Element Analysis, // International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 2, pp. 5–32, 1970.
- Irons, Razzaque 1972. *Irons B. M., Razzaque A.* Experience with the Patch Test for Convergence of Finite Elements, // The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations (ed. A. K. Aziz,), – New York: Academic Press, pp. 557–587, 1972.
- Jacobi, 1846. *Jacobi C. G. J.* Über ein leichtes Verfahren die in der Theorie der Säcularstörungen vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen. // Crelle's Journal. Vol. 30, pp. 51–94. 1846.
- Jang, Pinsky 1987. *Jang J., Pinsky P. M.* An Assumed Covariant Strain Based 9-Node Shell Element. // International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 24, pp. 2389–2411, 1987.
- Jennings, 1967. *Jennings A.* A Direct Iteration Method of Obtaining Latent Roots and Vectors of a Symmetric Matrix. // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 63, pp. 755–765. 1967.
- Johnson, Navert, Pitkaranta, 1984. *Johnson C., Navert U., Pitkaranta J.* Finite Element Methods for the Linear Hyperbolic Problem. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 45, pp. 285–312. 1984.
- Kato et al. 1993. *Kato K. Lee, N. S., Bathe K. J.* Adaptive Finite Element Analysis of Large Strain Elastic Response, // Computers & Structures. Vol. 47, pp. 829–855, 1993.
- Key 1969. *Key S. W.* A Variational Principle for Incompressible and Nearly Incompressible Anisotropic Elasticity. // International Journal of Solids and Structures. Vol. 5, pp. 951–964, 1969.
- Kojić, Bathe, 1987-A. *Kojić M., Bathe K. J.* Studies of Finite Element Procedures — Stress Solution of a Closed Elastic Strain Path with Stretching and Shearing Using the Updated Lagrangian Jaumann Formulation. // Computers & Structures, Vol. 26, pp. 175–179, 1987.
- Kojić, Bathe, 1987-B. *Kojić M. and Bathe K. J.* The 'Effective-Stress-Function' Algorithm for Thermo-Elasto-Plasticity and Creep. // International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 24, pp. 1509–1532. 1987.
- Kondo, Tosaka, Nishimura, 1992. *Kondo N., Tosaka N., Nishimura T.* Computation of Incompressible Viscous Flows by the Third-Order Upwind Finite Element Method. // International Journal for Numerical Methods in Fluids. Vol. 15, pp. 1013–1024. 1992.
- Kraus, 1983. *Kraus H.* Creep Analysis. – John Wiley: New York, 1980.
- Kreyszig 1977. *Kreyszig E.* Advanced Engineering Mathematics, 5th ed. – New York: John Wiley, 1983.
- R. D. Krieg and D. B. Krieg 1977. *Krieg R. D., and Krieg D. B.* Accuracies of Numerical Solution Methods for the Elastic-Perfectly Plastic Model. // Journal of Pressure Vessel Technology. Vol. 99, № 4, pp. 510–515, Nov. 1977.
- Lanczos, 1950. *Lanczos C.* An Iteration Method for the Solution of the Eigenvalue Problem of Linear Differential and Integral Operators. // Journal of Research of the National Bureau of Standards. Vol. 45, pp. 255–282. 1950.
- Lee, 1969. *Lee E. H.* Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains. // Journal of Applied Mechanics. Vol. 36, pp. 1–6. 1969.
- Lee, Bathe 1993. *Lee N. S., Bathe K. J.* Effects of Element Distortions on the Performance of Isoparametric Elements. // International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 36, pp. 3553–3576, 1993.
- Lee, Bathe 1994. *Lee N. S., Bathe K. J.* Error Indicators and Adaptive Remeshing in Large Deformation Finite Element Analysis. // Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 16, pp. 99–139, 1994.

- Le Tallec, Ruas 1986. *Le Tallec P., and Ruas V.* On the Convergence of the Bilinear Velocity–Constant Pressure Finite Element Method in Viscous Flow, //Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 54, pp. 235–243. 1986.
- Lienhard, 1987. *Lienhard J. H.* A Heat Transfer Textbook. Prentice–Hall, Englewood Cliffs, NJ. 1987.
- Lightfoot, 1961. *Lightfoot E.* Moment Distribution. –E.&F. N. Spon, London. 1961.
- Lowan et al. 1942. *Lowan A. N., Davids N., Levenson A.* Table of the Zeros of the Legendre Polynomials of Order 1-16 and the Weight Coefficients for Gauss' Mechanical Quadrature Formula. // Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. 48, pp. 739–743, 1942.
- Lubliner, 1986. *Lubliner J.* [A] "Normality Rules in Large-Deformation Plasticity", Mechanics of Materials, Vol. 5, pp. 29–34, 1986.
- Ma, Bathe, 1976. *Ma S. N., Bathe K. J.* On Finite Element Analysis of Pipe Whip Problems. //Nuclear Engineering and Design. Vol. 37, pp. 413–430. 1976.
- MacNeal 1982. *MacNeal R. H.* Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Strain Distributions. // Nuclear Engineering and Design. Vol. 70, pp. 3–12, 1982.
- Malkus, Hughes 1978. *Malkus, D. S., Hughes T. J. R.* Mixed Finite Element Methods — Reduced and Selective Integration Techniques: A Unification of Concepts. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 15, pp. 63–81, 1978.
- Malvern, 1969. *Malvern L. E.* Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium, – Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1969.
- Manteuffel, 1980. *Manteuffel T. A.* An Incomplete Factorization Technique for Positive Definite Linear Systems. //Mathematics of Computation. Vol. 34, pp. 473–497. 1980.
- Martin, Peters, Wilkinson, 1965. *Martin R. S., Peters G., Wilkinson J. H.* Symmetric Decomposition of a Positive Definite Matrix. //Numerische Mathematik. Vol. 7, pp. 362–383. 1965.
- Martin, Reinsch, Wilkinson, 1968. *Martin R. S., Reinsch C., Wilkinson J. H.* Householder's Tridiagonalization of a Symmetric Matrix. //Numerische Mathematik. Vol. 11, pp. 181–195. 1968.
- Matthies, 1985-1. *Matthies H.* Computable Error Bounds for the Generalized Symmetric Eigenproblem. //Communications in Applied Numerical Methods. Vol. 1, pp. 33–38. 1985.
- Matthies, 1985-2. *Matthies H.* A Subspace Lanczos Method for the Generalized Symmetric Eigenproblem. //Computers & Structures. Vol. 21, pp. 319–325. 1985.
- Matthies, Strang, 1979. *Matthies H., Strang G.* The Solution of Nonlinear Finite Element Equations. //International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 14, pp. 1613–1626. 1979.
- Meijerink, Van Der Vorst, 1981. *Meijerink J. A., Van Der Vorst H. A.* Guidelines for the Usage of Incomplete Decompositions in Solving Sets of Linear Equations as They Occur in Practical Problems. //Journal of Computational Physics. Vol. 44, pp. 134–155. 1981.
- Mendelson 1983. *Mendelson A.* Plasticity: Theory and Application. – Robert E. Krieger, Malabar, FL. 1983.
- Mikhlin 1964. *Mikhlin, S. G.* Variational Methods in Mathematical Physics, – NY: Pergamon Press, Elmsford, 1964.
- Mindlin 1951. *Mindlin R. D.* Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motion of Isotropic Elastic Plates. // Journal of Applied Mechanics. Vol. 18, pp. 31–38, 1951.
- Minkowycz et al., 1988. *Minkowycz W. J., Sparrow E. M., Schneider, G. E. and Pletcher R. H.* Handbook of Numerical Heat Transfer. John Wiley & Sons, Inc. 1988.
- Newmark, 1959. *Newmark N. M.* A Method of Computation for Structural Dynamics. //ASCE Journal of Engineering Mechanics Division. Vol. 85, pp. 67–94. 1959.
- Nitikitpaiboon, Bathe, 1992. *Nitikitpaiboon C., Bathe K. J.* Fluid-Structure Interaction Analysis with a Mixed Displacement–Pressure Formulation. Finite Element Research Group, Mechanical Engineering Department, Report 92-1, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, June 1992.

- Nitikitpaiboon, Bathe, 1993. *Nitikitpaiboon C., Bathe K. J.* An Arbitrary Lagrangian–Eulerian Velocity Potential Formulation for Fluid–Structure Interaction. // *Computers & Structures*. Vol. 47, pp. 871–891. 1993.
- Noble 1969. *Noble B.* Applied Linear Algebra. –Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. 1969.
- Noor 1991. *Noor A. K.* Bibliography of Books and Monographs on Finite Element Technology. // *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 44, № 6, pp. 307–317. June 1991.
- Oden, Bathe 1978. *Oden J. T., Bathe K. J.* A Commentary on Computational Mechanics. // *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 31, № 8, pp. 1053–1058, August 1978.
- Oden, Martins 1985. *Oden J. T., Martins J. A. C.* [A] “Models and Computational Methods for Dynamic Friction Phenomena”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 52, pp. 527–634, 1985.
- Oden, Pires, 1983. *Oden J. T., Pires E. B.* Nonlocal and Nonlinear Friction Laws and Variational Principles for Contact Problems in Elasticity. // *Journal of Applied Mechanics*. Vol. 50, pp. 67–76. 1983.
- Oden, Reddy 1983. *Oden J. T., and Reddy J. N.* Variational Methods in Theoretical Mechanics, 2nd ed., – New York: Springer-Verlag, 1983.
- Ogden, 1984. *Ogden R. W.* Nonlinear Elastic Deformations. –Ellis Horwood, Chichester, U.K. 1984.
- Olson, Bathe, 1985. *Olson L. G., Bathe K. J.* Analysis of Fluid-Structure Interactions. A Direct Symmetric Coupled Formulation Based on the Fluid Velocity Potential. // *Computers & Structures*. Vol. 21, pp. 21–32, 1985.
- Ortiz, Popov, 1985. *Ortiz M., Popov E. P.* Accuracy and Stability of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Relations. // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. Vol. 21, 1561–1576. 1985.
- Ostrowski, 1958. *Ostrowski A. M.* On the Convergence of the Rayleigh Quotient Iteration for the Computation of the Characteristic Roots and Vectors, Parts I–VI. // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. Vols. 1–3. 1958–1959.
- Paige. 1972. *Paige C. C.* Computational Variants of the Lanczos Method for the Eigenproblem. // *Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications*. Vol. 10, pp. 373–381. 1972.
- Paige. 1980. *Paige C. C.* Accuracy and Effectiveness of the Lanczos Algorithm for the Symmetric Eigenproblem. // *Linear Algebra and Its Applications*. Vol. 34, pp. 235–258. 1980.
- Park, Stanley 1986. *Park K. C., Stanley G. M.* A Curved C^0 Shell Element Based on Assumed Natural-Coordinate Strains. // *Journal of Applied Mechanics*. Vol. 53, pp. 278–290, 1986.
- Parlett, 1968. *Parlett B. N.* Global Convergence of the Basic QR Algorithm on Hessenberg Matrices. // *Mathematics of Computation*. Vol. 22, pp. 803–817. 1968.
- Parlett, 1965. *Parlett B. N.* Convergence of the QR Algorithm. // *Numerische Mathematik*. Vol. 7, pp. 187–193/ 1965; Vol. 10, pp. 163–164. 1967.
- Parlett, Scott, 1979. *Parlett B. N., Scott D. S.* The Lanczos Algorithm with Selective Orthogonalization. // *Mathematics of Computation*, Vol. 33, № 145, pp. 217–238. 1979.
- Patankar, 1980. *Patankar S. V.* Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. – Hemisphere Publishing. 1980.
- Patera 1984. *Patera A. T.* A Spectral Element Method for Fluid Dynamics: Laminar Flow in a Channel Expansion, // *Journal of Computational Physics*. Vol. 54, pp. 468–488, 1984.
- Perzyna 1966. *Perzyna P.* Fundamental Problems in Viscoplasticity, // *Advances in Applied Mechanics*. Vol. 9, pp. 243–377. 1966.
- Pian, Tong 1969. *Pian T. H. H., Tong P.* Basis of Finite Element Methods for Solid Continua, // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. Vol. 1, pp. 3–28, 1969.
- Pitkäranta 1991. *Pitkäranta J.* The Problem of Membrane Locking in Finite Element Analysis of Cylindrical Shells. / Report, Helsinki University of Technology, Otakaari 1 SF-02159 Espoo, Finland, 1991.
- Przemieniecki, 1963. *Przemieniecki J. S.* Matrix Structural Analysis of Substructures. // *AIAA Journal*. Vol. 1, pp. 138–147. 1963.
- Rabinowicz, 1965. *Rabinowicz E.* Friction and Wear of Materials. John Wiley. 1965.

- Ramm, 1981. *Ramm E.* Strategies for Tracing Nonlinear Responses Near Limit Points. //Non-linear Finite Element Analysis in Structural Mechanics (eds. *W. Wunderlich, E. Stein, and K. J. Bathe*), pp. 63–89, –Springer-Verlag, New York, 1981.
- Reid, 1970. *Reid J. K.* On the Method of Conjugate Gradients for the Solution of Large Sparse Systems of Linear Equations. //Conference on Large Sparse Sets of Linear Equations. –St. Catherine's College, Oxford, pp. 231–254. April 1970.
- Reissner 1950. *Reissner E.* On a Variational Theorem in Elasticity, // Journal of Mathematics and Physics, Vol. 29, pp. 90–95, 1950.
- Reissner 1945. *Reissner E.* The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates. // Journal of Applied Mechanics, Vol. 67, pp. A69–A77, 1945.
- Reissner 1976. *Reissner E.* On the Theory of Transverse Bending of Elastic Plates, // International Journal of Solids and Structures. Vol. 12, pp. 545–554, 1976.
- Rice, 1975. *Rice J. R.* Continuum Mechanics and Thermodynamics of Plasticity in Relation to Microscale Deformation Mechanisms, in: Constitutive Equations in Plasticity (*A. S. Argon*, ed.), pp. 23–79, M.I.T. Press, Cambridge, MA, 1975.
- Richtmyer, Morton, 1967. *Richtmyer R. D., Morton K. W.* Difference Methods for Initial Value Problems, 2nd ed. John Wiley. 1967.
- Riks, 1979. *Riks E.* An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems. //International Journal of Solids and Structures. Vol. 15, pp. 529–551. 1979.
- Ritchie, Bathe, 1979. *Ritchie R. O., Bathe K. J.* On the Calibration of the Electrical Potential Technique for Monitoring Crack Growth Using Finite Element Methods. //International Journal of Fracture. Vol. 15, № 1, pp. 47–55, 1979.
- Ritz 1908. *Ritz W.* Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Vol. 135, Heft 1, pp. 1–61, 1908.
- Rivlin, 1948. *Rivlin R. S.* Large Elastic Deformations of Isotropic Materials IV. Further Developments of the General Theory. //Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Vol. A241, pp. 379–397. 1948.
- Rodi, 1984. *Rodi W.* Turbulence Models and their Application in Hydraulics—A State of the Art Review. International Association for Hydraulic Research. Delft. 1984.
- Rolph, Bathe, 1982. *Rolph W. D. III, Bathe K. J.* An Efficient Algorithm for Analysis of Non-linear Heat Transfer with Phase Changes. //International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 18, pp. 119–134. 1982.
- Rubinstein, 1967. *Rubinstein M. F.* Combined Analysis by Substructures and Recursion. //ASCE Journal of the Structural Division. Vol. 93, № ST2, pp. 231–235. 1967.
- Rutishauser, 1959. *Rutishauser H.* [A] “Deflation bei Bandmatrizen”, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, Vol. 10, pp. 314–319, 1959.
- Rutishauser, 1969. *Rutishauser H.* Computational Aspects of F. L. Bauer's Simultaneous Iteration Method. //Numerische Mathematik. Vol. 13, pp. 4–13. 1969.
- Saad, Schultz, 1986. *Saad Y., Schultz M. H.* GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems. //SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing. Vol. 7, pp. 856–869. 1986.
- Schlichting, 1986. *Schlichting H.* Boundary-Layer Theory, 7th ed. McGraw-Hill, New York. 1979.
- Schreyer, Kulak and Kramer, 1979. *Schreyer H. L., Kulak R. F. and Kramer J. M.* Accurate Numerical Solutions for Elastic–Plastic Models. //Journal of Pressure Vessel Technology. Vol. 101, pp. 226–234, 1979.
- Schweizerhof, Ramm 1984. *Schweizerhof K. Ramm E.* Displacement Dependent Pressure Loads in Nonlinear Finite Element Analysis. //Computers & Structures, Vol. 18, pp. 1099–1114, 1984.
- Seidel, 1874. *Seidel L.* Über ein Verfahren die Gleichungen auf welche die Methode der kleinsten Quadrate führt, sowie lineare Gleichungen überhaupt durch successive Annäherung

- aufzulösen. // Abhandlungen Bayerische Akademie der Wissenschaften. Vol. 11, pp. 81–108. 1874.
- Silvester 1969. *Silvester P.* Newton-Cotes Quadrature Formulae for N -dimensional Simplexes. / Proceedings, 2nd Canadian Congress on Applied Mechanics. Waterloo, Canada, pp. 361–362, 1969.
- Simo, 1988. *Simo J. C.* A Framework for Finite Strain Elastoplasticity Based on Maximum Plastic Dissipation and the Multiplicative Decomposition: Part I: Continuum Formulation. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 66, pp. 199–219, 1988; Part II: Computational Aspects. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 68, pp. 1–31. 1988.
- Simo, Wriggers and Taylor, 1985. *Simo J. C., Wriggers P. and Taylor, R. L.* [A] “A Perturbed Lagrangian Formulation for the Finite Element Solution of Contact Problems”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 50, pp. 163–180, 1985.
- Snyder, Bathe, 1981. *Snyder M. D., Bathe K. J.* A Solution Procedure for Thermo-Elastic-Plastic and Creep Problems. // Nuclear Engineering and Design. Vol. 64, pp. 49–80, 1981.
- Spalding, 1972. *Spalding D. B.* A Novel Finite-Difference Formulation for Differential Expressions Involving Both First and Second Derivatives. // International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 4, pp. 551–559. 1972.
- Sparrow, Cess, 1978. *Sparrow E. M., Cess R. D.* Radiation Heat Transfer (augmented edition), Hemisphere Publishing, 1978.
- Stoer, Bulirsch 1993. *Stoer J., Bulirsch R.* Introduction to Numerical Analysis – Springer-Verlag. 1993.
- Stolarski, Belytschko 1983. *Stolarski H., Belytschko T.* Shear and Membrane Locking in Curved C^0 Elements, // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 41, pp. 279–296, 1983.
- Strang, Fix 1973. *Strang G., Fix G. F.* An Analysis of the Finite Element Method, – Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1973.
- Stroud, Secrest 1966. *Stroud A. H., Secrest D.* Gaussian Quadrature Formulas. – Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1966.
- Sussman, Bathe 1986. *Sussman T., Bathe K. J.* Studies of Finite Element Procedures – Stress Band Plots and the Evaluation of Finite Element Meshes, // Engineering Computations. Vol. 3, pp. 178–191, 1986.
- Sussman, Bathe 1987. *Sussman T., Bathe K. J.* A Finite Element Formulation for Nonlinear Incompressible Elastic and Inelastic Analysis. // Computers & Structures, Vol. 26, pp. 357–409, 1987.
- Synge 1957. *Synge, J. L.* The Hypercircle in Mathematical Physics. – London: Cambridge University Press. 1957.
- Szabó, Babuška 1991. *Szabó B., Babuška I.* Introduction to Finite Element Analysis, – New York: John Wiley, 1991.
- Taig 1961. *Taig I. C.* Structural Analysis by the Matrix Displacement Method. / English Electric Aviation Report S017, 1961.
- Tan, Bathe, 1991. *Tan L. H., Bathe K. J.* Studies of Finite Element Procedures – The Conjugate Gradient and GMRES Methods in ADINA and ADINA-F. Computers & Structures. Vol. 40, pp. 441–449. 1991.
- Thomas, Finney 1992. *Thomas, G. B., Finney, R. L.* Calculus and Analytical Geometry, 8th ed., – Reading, MA: Addison-Wesley, 1992.
- Timoshenko, Goodier 1970. *Timoshenko S., Goodier J. N.* Theory of Elasticity, 3rd ed., – New York: McGraw-Hill, 1970.
- Timoshenko, Woinowsky-Krieger 1959. *Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S.* Theory of Plates and Shells, 2nd ed., – New York: McGraw-Hill, 1959.
- Turner et al. 1956. *Turner M. J., Clough R. W., Martin H. C., Topp L. J.* Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. // Journal of the Aeronautical Sciences. Vol. 23, pp. 805–823. 1956.

- Varga, 1962. *Varga R. S.* Matrix Iterative Analysis –Prentice–Hall, Englewood Cliffs, NJ. 1962.
- Verruijt, 1970. *Verruijt A.* Theory of Groundwater Flow. –Gordon and Breach, New York, 1970.
- Washizu 1955. *Washizu, K.* On the Variational Principles of Elasticity and Plasticity, /Aeroelastic and Structures Research Laboratory Technical Report No. 25–18, Massachusetts Institute of Technology, – Cambridge, MA, March 1955.
- Washizu 1975. *Washizu K.* Variational Methods in Elasticity and Plasticity, – NY: Pergamon Press, Elmsford, 1975.
- White, 1986. *White F. M.* Fluid Mechanics. McGraw-Hill. 1986.
- Wilkins, 1964. *Wilkins M. L.* Calculation of Elastic-Plastic Flow, in B. Alder, S. Fernbach, and M. Rotenberg (eds.), Methods in Computational Physics, Vol. 3, pp. 211–263, Academic Press, New York, 1964.
- Wilkinson, 1965-1. *Wilkinson J. H.* The Algebraic Eigenvalue Problem. –Oxford University Press, New York, 1965.
- Wilkinson, 1965-2. *Wilkinson J. H.* [B] “The QR Algorithm for Real Symmetric Matrices with Multiple Eigenvalues”, The Computer Journal, Vol. 8, pp. 85–87, 1965.
- Wilson 1965. *Wilson E. L.* [A] “Structural Analysis of Axisymmetric Solids”, AIAA Journal, Vol. 3, pp. 2269–2274, 1965.
- Wilson, 1974. *Wilson E. L.* The Static Condensation Algorithm. //International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 8, pp. 199–203. 1974.
- Wilson, Farhoomand, Bathe, 1973. *Wilson E. L., Farhoomand I., Bathe K. J.* Nonlinear Dynamic Analysis of Complex Structures. //International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics. Vol. 1, pp. 241–252. 1973.
- Wilson, Ibrahimbegovic 1990. *Wilson E. L., Ibrahimbegovic A.* Use of Incompatible Displacement Modes for the Calculation of Element Stiffness and Stresses, // Finite Elements in Analysis and Design. Vol. 7, pp. 229–241, 1990.
- Wilson et al. 1973. *Wilson E. L., Taylor R. L., Doherty W. P., Ghaboussi J.* Incompatible Displacement Models, /Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics (eds. S. J. Fenves, N. Perrone, A. R. Robinson, and W. C. Schnobrich), – New York: Academic Press, pp. 43–57, 1973.
- Wunderlich 1970. *Wunderlich W.* Ein verallgemeinertes Variationsverfahren zur vollen oder teilweisen Diskretisierung mehrdimensionaler Elastizitätsprobleme. // Ingenieur-Archiv. Vol. 39, pp. 230–247, 1970.
- Yamamoto, Ohtsubo, 1976. *Yamamoto Y, Ohtsubo H.* Subspace Iteration Accelerated by Using Chebyshev Polynomials for Eigenvalue Problems with Symmetric Matrices. //International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 10, pp. 935–944. 1976.
- Zhong, Qiu 1983. *Zhong W., Qiu C.* [A] “Analysis of Symmetric or Partially Symmetric Structures”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 38, pp. 1–18, 1983.
- Zienkiewicz, Cheung 1990. *Zienkiewicz O. C., Cheung Y. K.* The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics. McGraw-Hill, 1967; 4th ed. editors: O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. Vols. 1,2, 1989/1990.
- Zyczkowski 1981. *Zyczkowski M.* Combined Loadings in the Theory of Plasticity. – Polish Scientific. 1981.

Предметный указатель

- Автоматическое проектирование с помощью компьютера 9, 19, 264
Акустическая жидкость 655
Алгоритм вычисления определителя 40, 62
Альманзи тензор напряжений 577
Альфа (α) метод интегрирования 598
— при анализе неупругих объектов 598
— при анализе теплопередачи 814
Амплитуды затухания 659, 781
Аналогии 78, 92, 120, 151, 852
Аппроксимации оператор 787
Арифметика числового компьютера 217, 259, 720, 736
— двойной точности 720, 972
- Базис** 45
базисный вектор 45
— ковариантный 55
— контравариантный 55
Балочный элемент 158, 207
Бесконечное собственное значение 853, 835, 902
Билинейная форма 137, 235
Бисекции метод 924
БФГШ (Бройдена–Флетчера–Гольдфарба–Шанно) метод 745
- Вандермонда матрица** 450
Вариационные модели (введение) 118
Вариационный индикатор 112, 417, 472
— для потенциала пошагового прираще-
ния 521
— Хеллингера–Рейсснера 278
— Ху–Вашизу 275
Вектор:
— произведение
— — векторное (крестовое) 50
— — скалярное (точечное) 50
— — тензорное (открытое) 54
— векторное пространство
— дефляция (см. Грама–Шмидта ортого-
нализация) 889
— векторное подпространство 46
— вектор нагрузки 98, 141, 196, 373, 694,
757, 824, 970
норма 70
Взвешенные невязки:
— метод коллокаций 127
— метод Галеркина 127 (см. также Prin-
цип виртуальных перемещений; Prin-
цип виртуальных температур; Prin-
цип виртуальных скоростей)
Виртуальной работы принцип (см. Prin-
цип виртуальных перемещений)
Виртуальных температур принцип (см.
Принцип виртуальных температур)
Волновое уравнение 117
Волновой фронт, метод решения с ним
(см. Фронтального решения метод) 711
Вращения матрица (см. Плоского враще-
ния матрица) 893
Выборочное интегрирование 470
Высоты столбцов 696, 732, 770, 970
Вязкопластичность 586, 601
- Галеркина метод** 127, 162, 648
наименьших квадратов 676 (см. также
Принцип виртуальных перемещений;
Принцип виртуальных температур;
Принцип виртуальных скоростей)
Гаусса–Зайделя итерация 725
Гаусса квадратура 455
Гаусс, исключение по его схеме:
— введение в метод 684, 704
— вычислительные ошибки 720
— программа для компьютера 685, 695,
702
— физическая интерпретация 687
— число операций 701
Генцки тензор деформаций 503, 524
Гидравлическая сеть 89, 92
Гиперболическое уравнение 114
Гиперупругая модель материала 573
Гипоупругая модель материала 573
Грама–Шмидта ортогонализация 887, 912
Граничные условия
— при анализе:

- акустическом 655
- смещений и напряжений 166, 195
- теплопередачи 117, 633
- течения вязкой жидкости 660
- течения невязкой, несжимаемой жидкости 652
- фильтрации 115, 651
- геометрические 119, 133
- естественные 119
- радиационные 99, 633
- силовые 119
- скошенных направлений 198
- существенные 119
- фазовых изменений 646
- Грина–Лагранжа тензор деформации 59, 84, 439, 503, 552
- Групповой тест 268, 299
- Гюйана, приведение по 857, 941
- Давления моды:**
 - лишние 317, 466
 - физические 316
 - шахматный порядок их реализации 320
- Даламбера принцип 98, 174, 398
- Дельта Кронекера 54, 64
- Демпфирование
 - Демпфирование по Рэлею, 783
 - Демпфирование, пропорциональное жесткости 756
 - Демпфирование, пропорциональное массе 756
 - Демпфирования коэффициент 797
- Дефляция
 - векторная 888
 - матричная 889
- Деформации градиент 497
- Деформация, критерии ее измерения :
 - логарифмические 506
 - по Альманзи 579
 - по Генцки 503, 524
 - по Грину–Лагранжу 505
- Деформация–смещение, матрица 146, 171, 207, 339, 482
- Диада 54
- Диадик 54
- Динамической нагрузки коэффициент 780
- Динамической реакции расчет в применении к
 - решению с суперпозицией мод 780
 - пошаговому интегрированию 799
- Длина вектора (см. Норма вектора по Эвклиду) 76
- Друккера–Прагера условие податливости 598
- Дюамеля интеграл 775
- Единичная матрица** (см. Матрица тождественности) 28
- Единичный вектор (см. Вектор тождественности) 28
- Единственность решения для случая линейной упругости 135
- Естественная система координат 271, 339
- Жесткости матрица** 61, 90, 141, 160
 - элементарный пример 160
- Жесткости прямой метод 90
- Жорданова классическая форма 793
- Завихренности тензор** 505
- Задачи с начальными значениями 69, 114, 357, 506
- Замена базиса 788
- Запирающие элементы
 - при анализе (почти) несжимаемой среды 296
 - при конструкционном анализе 287
- Затвердевание при
 - вязкопластичности
 - пластичности 763
 - ползучести 601
- Иерархические функции 258
- Иерархия математических моделей 11
- Излучение, граничные условия для него 640, 670
- Изопараметрические модели 59, 308, 338, 532
 - введение 59
 - определение 204
 - при интерполяции (см. Интерполяционные функции) 339
 - при реализации компьютерных программ 347
- Изотропия пространственная 368
- Индексные обозначения
 - использование 166, 303
 - определение 50
- Интегрирование
 - конечно-элементных матриц (см. Численное интегрирование конечно-элементных матриц) 565
 - по Эйлеру со сдвигом вперед 565, 647
 - по Эйлеру со сдвигом назад 596

- уравнений динамического равновесия (см. Прямое интегрирование) 778
- Интерполяционные функции 221, 256, 293, 339, 536, 646, 772
- Интерполяция по Лагранжу 451
- Искажение
 - по удлинению 384
 - Искажение по углу 384
 - Искажение элементов (влияние на сходимость) 378
- Итерация (см. Гаусса–Зайделя итерация; Сопряженных градиентов метод; Квази–Ньютоновский метод; Собственные значения и собственные векторы) 234, 734
 - вперед 878
 - обратная 724, 862, 871
 - подпространственная 936
 - по коэффициенту Рэлея 885
 - Итерация QR 909, 913
- Касательная матрица**
 - жесткости 95, 487, 537
 - напряжение–деформация 575, 595
- Квазиньютоновские методы 234, 488
- Квазигомогенная последовательность секторов 380
- Кинематические допущения 207, 588
- Кирхгофа гипотеза 209, 241
- Кирхгофа тензор напряжений 507
- Интерполяционная функция решения 296, 338
- Интерполяция смещений 291, 338, 430
- Ковариантный
 - базис, базисный вектор 55, 421
- Колебаний анализ (см. Динамической реакции расчт в применении к) 781, 799
- Компьютерные программы для
 - изопараметрического элемента 346, 448
 - конечно–элементного анализа 473, 701
 - обобщенного собственного решения по Якоби 904
 - решения с исключением по Гауссу 454, 684
 - собственного решения с подпространственной итерацией 943
- Конвекции граничные условия 632
- Кондиционное число 723
- Конечных полос метод 218
- Конечных разностей метод 139
 - аппроксимации 144
 - дифференциальная модель 139
 - энергетическая модель 145
- Конструкция в форме складываемой пластины 216
- Контакта анализ 613
- Контравариантный 55, 421
- Конформирование (см. Совместимость) 259
- Координатная интерполяция 350, 413
- Коробление 404, 408, 561
- Коши ряд 782
- Коши–Грина тензор деформаций (левый и правый тензоры) 497
- Коши тензор напряжений 479, 491
- Коши формула 506
- Критический шаг по времени применительно к
 - методу интегрирования 307
 - методу центральных разностей 757
- Кулона закон для трения 615
- КФЛ число (число Куранта–Фридрихса–Леви) 800
- Лагранжа множители 152
- Лагранжа формулировка 490, 512
 - полная лагранжева (TL) 513
 - предварительно заданная лагранжева (UL) 513
- Ланцоша метод** 866, 926
- Лапласа уравнение 115
- Лежандра полиномы 257, 455
- Линейная зависимость 44
- Линейная форма 137, 235
- Линейного ускорения метод 762
- Логарифмический тензор деформаций 502, 602
- Ляме постоянные 300, 555
- Массовых сил нагрузка** 122, 163, 346, 493
- Математическая модель :**
 - надежность модели 11, 20
 - всеобъемлющая модель 11, 14
 - точность модели 11, 17
 - эффективность модели 11, 17
- Матрицы**
 - введение в память 28
 - масс 174
 - нормы 76
 - обратная матрица 36
 - определение 27
 - определитель 40
 - произведения 31
 - разбиение 38
 - симметрия 28

- след 40
- сложение и вычитание 29
- тождественности матрица 28
- умножение на скаляр 29
- ширина ленты 29
- Мембранное запыление 430, 439
- Механика разломов, элементы в ней 367
- Мизеса условие податливости 595, 604
- Миндлина (Рейсснера/Миндлина) теория для пластин 208, 423, 440
- Минимаксная характеристика собственных значений 70
- Минимизация ширины ленты 771
- Множителей Лагранжа метод 152, 275
- Монотонная сходимость 216, 233
- Муни–Ривлина модель материала 555, 583

- Навье–Стокса уравнения** 664
- Нагрузка–смещение–принуждение, методы 746
- Нагрузки при анализе
 - конструкций 396, 481
 - теплопередачи 631
 - течений жидкости 659
- Надежность
 - конечно-элементных методов 20, 464
 - математической модели 11
- Наименьших квадратов метод осреднения (сглаживания) 127, 262
- Напряжение, критерии его измерения
 - по Кирхгофу 505
 - по Коши 479
 - по Пиола–Кирхгофу, второй метод 507, 545
 - по Пиола–Кирхгофу, первый метод 505
- Напряжение–деформация, взаимосвязь (основополагающая) 407
- Натяжения матрица, левая, правая 499, 501
- Начальной итерации вектор 734
- Начальные расчѣты в применении к
 - методу Ньюмарка 765
 - методу Уилсона θ 762
 - методу Хуболта 759
 - методу центральных разностей 139, 671, 754
- Начальных напряжений метод 357
- Невязкая (акустическая) жидкость 231, 654
- Невязкое течение 651
- Нелинейный анализ
 - введение в анализ 478
 - классификация 479
 - простые примеры 480
- Неопределенная матрица 70
- Неосесимметричная нагрузка 218
- Непрерывность
 - билинейной формы 248
 - по Липшицу 742
- Непропорциональное демпфирование 783
- Неравенство треугольника 77
- Несжимаемость 304, 667
- Несимметричная матрица коэффициентов 69, 128, 618
- Несовместимые модели конечных элементов 266
- Несовместимые моды 268, 440
- Несогласованные элементы (см. Совместимость элементов/сеток; Несовместимые моды) 216, 236
- Неустойчивости анализ в применении к
 - конструкционным схемам 103, 620
 - методам интегрирования 682, 759
- Неявно-явная схема интегрирования 520, 532, 640, 756
- Нормы
 - векторов 76
 - матриц 76, 79
- Нулевой массы эффекты 834
- Нансона формула 506
- Ньюмарка метод 765
- Ньютона–Рафсона итерации
 - Ньютона–Рафсона итерация, модифицированная 539, 636
 - Ньютона–Рафсона итерация, полная 485, 637

- Обобщенные задачи о собственных значениях** (см. также Задачи о собственных значениях) 61, 823, 868
- Обобщенные координаты 179, 201, 338
- Обобщенные смещения 219
- Обобщенный метод Якоби 899
- Оболочка, соответствующие ей элементы 170, 201
- Обращение матрицы 36
- Объединение различных интегральных операторов 767
- Объект с осевым напряжением (см. Брус, Ферма) 117, 158, 167
- Объемный модуль 248, 282, 555
- Огдена модель материала 555, 572, 583
- Округления ошибка 235, 720, 758, 890
- Оператор Якобиан 345
- Определитель
 - вычисление 40, 62

- для ассоциированных задач с принудительными ограничениями 152, 713 для градиента деформации 84, 494
- для оператора Якоби 345, 353
- Ортогонализация
 - в применении к методу Ланцоша 927, 934
 - по Граму–Шмидту 887, 912
 - при подпространственной итерации 939, 941
- Ортогональное преобразование подобия 63
- Ортогональность
 - собственных векторов 64, 936
 - собственных пространств 65
- Ортогональные матрицы
 - использование 62
 - определение 52
- Ортонормальность 64, 238, 712, 853, 928
- Осесимметричный элемент 202, 208, 339
- Осесимметричный элемент типа оболочки 394
- Основополагающие уравнения (см. Соотношение связи напряжение–деформация) 114, 571, 513
- Относительные степени свободы 724
- Отражения матрица (см. Плоская матрица отражения) 83, 202, 909
- Охват вектора 45, 319, 734
- Ошибка, ее границы при решении задач о собственных значениях 861, 928
- Ошибка, ее измерение при
 - конечно-элементном анализе 162, 226, 234, 654
 - решении задач о собственных значениях 853
 - решении с суперпозицией мод 234
- Ошибка, её оценка для
 - элементов на основе смещений 210
 - элементов типа смещение/давление 248
- Паскаля треугольник 251, 265, 376
- Пекле число 664, 669
- Переходные элементы 409, 411
- Петрова–Галеркина метод 674
 - со сдвигом вверх по потоку (метод SuPG) 6716 678
- Пиолы–Кирхгофа первый тензор напряжений 505
- Пиолы–Кирхгофа второй тензор напряжений 479, 505
- Пластина/оболочка, граничные условия 428, 439
- Пластины изгиб 209, 259, 401
- Пластичность 588
- Плоского вращения матрица 893
- Плоского напряжения элемент 54, 208
- Плоского отражения матрица 202
- Плоской деформации элемент 202, 208
- Поверхностной нагрузки вектор 213
- Пограничный слой
 - в гидромеханике 671
 - в пластинах Рейсснер–Миндлина 440
- Подобия преобразование 63
- Подобластей метод 128
- Подпространственных итераций метод 810, 938
- Ползучесть 585
- Полиномиальная итерация
 - неявная итерация 917
 - явная итерация 918
- Полиномиальных смещений поля 202, 381
- Полноты условие
 - для массива элементов 267
 - для элемента 236
- Полный потенциал (или полная потенциальная энергия) 96, 113
- Положительная определенность 70, 95, 126, 249, 711
- Положительная полуопределенность 70, 323, 711
- Полуширина полосы (см. Ширина полосы матрицы) 29 700, 821
- Полярное разложение 499
- Поперечные сдвиговые деформации 339, 401, 427
- Порядок сходимости 253
 - векторной итерации 749
 - итерации для коэффициента Рэлея 873
 - итерации Ньютона–Рафсона 740
 - конечно-элементных дискретизаций 234, 279
 - полиномиальной итерации 919
- Послепрогибное поведение (после разрушения) 621
- Постоянного среднего ускорения метод 765, 789
- Постоянный сферический критерий длины дуги 747
- Потенциал
 - полный 96, 113
 - пошагового приращения 552
- Потеря ортогональности 735, 930

- Пошагового интегрирования методы (см. Прямое интегрирование при) 683, 842
 Прандтля число 664
 Превращение круга в овал 407
 Предварительно заданная лагранжева формулировка 512, 555
 Предварительных условий постановка 734
 Предельная линия матрицы 695
 Приведение матриц к
 — верхней треугольной форме 692, 759
 — диагональной форме (см. также Собственные значения и собственные векторы) 892
 Призрачные частоты/моды 466
 Принуждения уравнения 198, 747
 Принцип виртуальных скоростей 138
 Принцип виртуальных перемещений (или принцип виртуальной работы) 132, 165
 — линеаризация по конечно-элементным переменным 529
 — линеаризация уравнений механики сплошной среды 660
 — связь со стационарностью полного потенциала 657
 Принцип виртуальных температур 137, 633
 Проверка условия inf-sup 298, 323, 470
 Проводимости матрица 640
 Прогиба анализ 123, 619, 827
 Программа STAP (программа статического анализа) 971
 Проекционный оператор 309
 Произведения матриц (см. Матрицы, произведения) 31
 Пропорциональное демпфирование 780
 Пространство столбцов матрицы 46
 Пространства
 — L^2 136, 243
 — V 243
 — V_h 242, 246
 Пуанкаре–Фридрихса неравенство 244
 Прямое интегрирование при
 — анализе теплопередачи 632, 814
 — анализе течения жидкости 660, 814
 — динамическом анализе напряжений 808
 Пузырьковая функция 372
- Равновесие**
 — на дифференциальном уровне 98
 — на элементарном уровне 88
 Радиального возврата метод 589
 Разбиение (см. Матрицы, разбиение) 38
 Размерность
 — подпространства 48
 — пространства 47
 Разреженные решения, средства их построения 701
 Разрешимость уравнений 313
 Разрушения анализ 576, 620
 Разукрупнение векторов сил 221
 Разукрупнение матрицы масс 222
 Ранг матрицы 48
 Расходимость итераций 746
 Реакция (см. Динамической реакции расчт в применении к) 100, 235, 659, 769
 Регулярная сетка 379
 Резина, её упругость 281, 553, 584
 Резонанс 105, 778
 Рейнольдса число 665, 670
 Рейснера теория пластин 415
 Решение уравнений при
 — динамическом анализе 754
 — статическом анализе 683
 Ритца анализ 125, 240
 Рэлея коэффициент 784
 Рэлея принцип минимума 70
 Рэлея-Ритца анализ 850
- Сверхрелаксация** 733
 Свободных колебаний условия 105, 659, 759
 Свойство разделения собственных значений (см. также Штурма последовательности свойство) 74, 714, 823
 Сдвиг вверх по потоку 562
 Сдвиг матричный 823
 Сдвиговое записывание 400
 Секущих метод для итераций 920
 Сетки (последовательность сеток)
 — квазиоднородные 380
 — однородные 249
 — регулярные 380
 — совместимые
 Сеть постоянного тока 89
 Сжатие матриц при введении в память 279
 Си лемма 248
 Сильная форма 134
 Симметрия
 — матрицы 28, 95, 207
 — оператора 126
 Симпсона правило 451
 Синтез мод компонентов 858
 Системы координат
 — глобальные 338, 384

- декартовы 49
- естественные 268, 338
- локальные 170
- на базе площадей 369
- объемные 373
- Скачки напряжения 260
- Сконцентрированная нагрузка, еџ моделирование 17, 611
- Скоростей деформации тензор 502
- Скорости изменения напряжений тензор, по Яуману 583
- Скорости градиент 502
- Скорость сходимости конечно-элементной дискретизации 76, 249, 378
- Скошенные направления граничных смещений, условия для них 198
- Скрытая теплота 633
- Слабая форма 134
- След матрицы 40
- Смешанная интерполяция 298
 - для конструкционных элементов
 - — балка 330, 408
 - — оболочка 439
 - — пластина 424
 - для элементов сплошной среды (см. Смещение/давление модель) 280
- Смешанные модели для конечных элементов 157
- Смещение/давление модели:
 - основные положения 287, 386, 553
 - модель u/p 287
 - модель u/p -с 293
 - элементы 323, 386
- Смещений метод исследования 132, 158
- Соболева нормы 244, 303
- Собственная пара 822, 884
- Собственная система 844
- Собственные значения и собственные векторы :
 - вычисление их 238
 - для ассоциированных задач с принуждением 714
 - основные определения 61, 100
- Совместимая матрица касательных напряжений-деформаций 594
- Совместимая матрица масс 771
- Совместимая тангенциальная матрица жесткости 391
- Совместимой нагрузки вектор 374, 420
- Совместимость
 - норм 80
 - элементов/сеток 216, 236
- Совокупность элементов и элементных матриц 88, 95, 407
- Соединение несхожих элементов 107, 158
- Сопряженные по энергии (по работе) напряжения и деформации 507
- Спектральная норма 79
- Спектральное разложение 67, 502, 792, 838
- Спектральный радиус 68, 80, 792
- Спина тензор 502, 523, 607
- Статическая поправка 745
- Статическое сгущение 291, 386, 668, 845, 943
- Строчно-ступенчатая форма матрицы 48
- Субпараметрический элемент 3436 362
- Субструктурный анализ 860
- Суперпозиция мод
 - без включения демпфирования 773
 - с включением демпфирования 780
- Существование обратной матрицы 42
- Сходимости критерии 236, 750
- Сходимость
 - векторных итераций вперед 890
 - векторных итераций обратных 882
 - Гаусса-Зайделя итераций 725, 733
 - итераций по коэффициенту Рэлея 885
 - итераций с сопряженными градиентами 735
 - итераций QR 909, 913
 - конечно-элементной дискретизации 298
 - Ланцоша метода 932
 - Ньютона-Рафсона итераций 740
 - подпространственных итераций 938
 - решения с суперпозицией мод 235, 780, 804
 - Якоби итераций 894, 900
- Твердотельные моды 237, 462, 719
- Температурного градиента интерполяционная матрица 641
- Температуры интерполяционная матрица 641
- Тензор метрический 56
- Тензоры 49
- Теорема о дивергенции 121, 167, 493, 635
- Теплоемкости матрица 61, 645, 817
- Теплопередачи анализ 88, 116, 632
- Теплопроводности уравнение 90, 115, 640
- Термическое напряжение 611
- Термоупругопластичность и ползучесть 592
- Течения жидкости анализ
 - безвихревое (потенциальное) течение 652

- течение несжимаемой вязкой жидкости 231, 315, 660
- Тождественности вектор 28
- Тождественности матрица 28
- Транспонирование матрицы 28
- Трапеций правило
 - для формулы Ньютона–Котеса 451
 - при пошаговом решении задач о смещениях и напряжениях 766, 802
 - при пошаговом решении нестационарных задач о теплопередаче 817
- Трение (закон Кулона о трении) 615
- Труба, элементы ее типа 92, 158, 409
- Турбулентность 665, 670

- Узловая точка**
 - информация о ней 141, 170, 186
 - нумерация точек 179
- Уилсона θ метод 762
- Улучшение конечного элемента, p -метод 256
- Управляющие векторы 404
- Уравнения для конечных элементов
 - для объединения элементов 88
 - при анализе теплопередачи 632
 - при анализе течения несжимаемой жидкости 315, 652
 - при линейном динамическом анализе 755
 - при линейном статическом анализе 684
 - при нелинейном динамическом анализе 808
 - при нелинейном статическом анализе 739
- Урезания ошибка 720
- Ускоренный анализ (см. Динамической реакции расчты при) 100, 235, 659, 769
- Условие inf-sup для анализа несжимаемой среды 248, 294, 302
 - для конструкционных элементов типа балки 330
- Условия межэлементной непрерывности (см. Совместимость элементов/сеток) 95, 240, 395
- Условная устойчивость 763
- Усовершенствование конечных элементов, h -метод 256
- Усовершенствование конечных элементов, h/p -метод 258
- Устойчивости матрицы постоянная 81, 314
- Устойчивости условие, формулировка 82, 314
- Устойчивость пошагового анализа
 - для смещений и напряжений 313, 760, 791
 - для теплопередачи 632, 814
 - для течения жидкости 660, 814

- Фазы изменение** 633, 645
- Факторизация по Холески 737, 838
- Факторизация с представлением в треугольной форме 716, 771, 829
- Факторизация **LDL** ^{T} (см. также Исключение по Гауссу) 716
- Ферменный элемент 158, 207, 277, 340
- Фильтрация 115, 650
- Формулировка произвольная, лагранжево–эйлеровская 661
- Формы
 - билинейные 137, 235, 248
 - линейные 137, 235
- Фронтального решения метод 703, 711, 964
- Функции формы (см. Интерполяционные функции) 339
- Функционалы (см. также Вариационные показатели) 96, 119, 275, 472, 576, 636
- Функция формы кшляпань 141

- Характеристические корни** (см. Собственные значения) 61 623
- Характеристический полином 62, 717, 829, 870, 920
- Хеллингера–Рейсснера функционал 275, 472
- кХозяин-работник, процедура решения 725
- Хуболта метод 759
- Ху–Вашизу функционал 275

- Центральных разностей метод** 139, 671, 754
- Циклическая симметрия 200

- Численное интегрирование с понижением порядка** 470
- Численное интегрирование конечно-элементных матриц
 - влияние порядка сходимости 298

- Шварца неравенство** 245, 325
- Ширина ленты матрицы 29
- Штрафного параметра метод :
 - связь с методом множителей Лагранжа 152, 155

- связь с теорией Тимошенко для балок и с теорией Рейсснера/Миндлина для пластин 335, 423
- элементарные представления 152
- Штурма последовательности свойство
- как проверка при решении обобщенной задачи о собственных значениях 829, 920
- как проверка при решении стандартной задачи о собственных значениях 841
- применение при расчете собственных значений 712, 935, 946
- применение при решении уравнений 869
- Штурма последовательность, е \check{c} проверка 75

- Эвклида норма, векторная 77
- Эйлера формулировка 491, 662
- Эквивалентность норм 77
- Экспоненциальная схема сдвига вверх по потоку 672
- Электрические цепи, анализ 92, 105
- Электростатическое поле, анализ 651
- Элемент, моделирующий канат 148, 484
- Элементные матрицы, их определение при
 - анализе теплопередачи 632, 814
 - анализе течения несжимаемой жидкости 660, 814
 - общих формулировках смешанного типа 287, 403
 - решении задач о поле
 - — модель на основе смещений 650
 - — модель типа смещение/давление 386
- Элементы МИТС
 - элементы для оболочек 439, 567
 - элементы для пластин 422, 427
- Эллиптического типа уравнение 114
- Эллиптичности условие 244, 298, 314, 471
- Эллиптичность для билинейной формы 245
- Энергетическая норма 243, 254
- Эффективная матрица жесткости 160
- Эффективная функция напряжения, алгоритм е \check{c} определения 592, 600
- Эффективное выражение для
 - деформации ползучести 599
 - напряжения 84, 261
 - пластической деформации 590

- Явно-неявное интегрирование 472, 520, 532, 640, 756
- Ядро
 - определение 48
 - применение при анализе устойчивости 318, 720
- Якоби метод собственного решения 894, 900