
**Prentice-Hall Civil Engineering
And Engineering Mechanics Series**

N. M. Newmark and W. J. Hall, editors

FINITE ELEMENT ANALYSIS

Fundamentals

Richard H. Gallagher

**Department of Structural Engineering
Cornell University**

**PRENTICE-HALL, INC., Englewood Cliffs, New Jersey
1975**

Р. Галлагер

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

ОСНОВЫ

Перевод с английского
В. М. Картвелишвили
под редакцией
Н. В. Баничука

МОСКВА «МИР» 1984

ББК 22.23

Г 15

УДК 518.5 + 531 + 532

Галлагер Р.

Г 15 Метод конечных элементов. Основы. Пер. с англ. — М.:
Мир, 1984. — 428 с., ил.

Книга написана крупным американским ученым, одним из разработчиков известного метода конечных элементов. В ней глубоко и всесторонне рассмотрены вопросы применения метода конечных элементов и вариационного подхода к задачам теории упругости. Изложение начинается с простейших понятий, поэтому книга может использоваться как учебное пособие.

Для научных работников, инженеров, аспирантов и студентов, специализирующихся по прикладной и вычислительной математике, механике деформируемого твердого тела.

Г $\frac{1702070000-383}{041 (01)-84}$ 34-84, ч. 1

ББК 22.23
531

Редакция литературы по математическим наукам

© Prentice-Hall, 1975

© Перевод на русский язык с дополнениями, «Мир», 1984

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Автор этой книги проф. Ричард Галлагер — известный американский специалист в области оптимального проектирования конструкций и применения численных методов в механике деформируемого твердого тела. Над вопросами теории и приложений метода конечных элементов, составившими предмет книги, автор работал длительное время в Корнеллском университете и Университете шт. Аризона. В книге освещаются практически все основные аспекты этого метода. Изложение ведется на современном научном уровне и основано на вариационных принципах, теории упругости и на матричном анализе конструкций. Каждой из перечисленных тем посвящена отдельная глава.

Метод конечных элементов применяется в настоящее время к различным физическим задачам. Однако книга Галлагера концентрирует внимание читателя исключительно на приложениях к теории упругости и анализу конструкций. Это позволяет автору кроме теоретических основ метода последовательно и полно изложить материал, относящийся к решению осесимметричных и плоских задач теории упругости (случай плоской деформации и плоского напряженного состояния), задач теории оболочек и изгиба пластин, а также задач анализа упругой устойчивости.

Усвоению материала способствуют приводимые в конце глав задачи, их в книге более ста. Чтение книги облегчит предварительное знакомство читателя с матричными методами расчета конструкций и основами теории упругости.

По нашему мнению, книга отличается от многих известных монографий и учебников по методу конечных элементов изысканным способом изложения материала, отражающим накопленный автором опыт преподавания в университетах США. Она наиболее просто вводит читателя в круг основных вопросов теории и практики этого метода. Этим, по-видимому, объясняется широкая популярность книги Р. Галлагера — заметим, что она переведена на шесть языков. При переводе книги редактор и переводчик с согласия автора внесли дополнения и изменения, а также исправили замеченные опечатки.

Таким образом, в книге приводится изложение основ метода конечных элементов и анализ важных для приложений задач, а также даются рекомендации по практической реализации соответствующих алгоритмов. Книга рассчитана на научных работников, студентов и аспирантов, специализирующихся в области механики, прикладной и вычислительной математики. Она будет полезна также инженерам, работающим в конструкторских бюро, научно-исследовательских и проектных институтах и связанным с созданием программ для расчета конструкций.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Как правило, развитие новых областей знания проходит через три стадии. В течение первой стадии достижения в новой области отражаются на страницах периодических изданий и координируются время от времени редкими обзорными статьями. Практические приложения весьма редки. На второй стадии появляются монографии, в которых активно работающие в данной области специалисты обстоятельно излагают состояние и перспективы дальнейшего развития области. Прикладные исследования становятся достоянием коллективов исследователей, располагающих передовой технологией и работающих в организациях, которые имеют значительные производственные возможности. Наконец, область приложения распространяется практически на все сферы деятельности, а в учебных заведениях предмет преподается как обычный академический курс.

Конечно-элементный анализ лишь недавно вышел из второй стадии развития. Появился ряд прекрасных монографий, однако существует необходимость в книге, приближающейся к традиционному учебному курсу и ориентированной на читателя, не знакомого с этой областью знания. Предлагаемая книга предназначается служить этой цели. Автор стремился написать усовершенствованный курс для студентов, специализирующихся по механике деформируемого твердого тела. В их число могли бы входить студенты, изучающие такие области, как проектирование аэрокосмической техники, судостроение, техническая механика, гражданское строительство. В той степени, в которой можно отдать предпочтение одной из перечисленных областей, данная книга ориентирована на инженеров, занимающихся прикладными задачами проектирования конструкций.

Кроме того, можно надеяться, что книга вызовет интерес инженеров-практиков, желающих ознакомиться с введением в методологию исследования, не вошедшую в курсы, которые читались в период их обучения в учебном заведении, а также тех, кто использует ко-

нечно-элементный анализ и хочет узнать доказательства основных положений и способы построения элементов. Большая часть содержащегося здесь материала на самом деле нашла отражение в многочисленных коротких курсах, прочитанных автором инженерам-практикам.

Излагаемый в книге предмет требует некоторого знакомства с теорией упругости и матричным анализом конструкций, а следовательно, с основами теории дифференциальных уравнений в частных производных, методами решения больших алгебраических систем и теорией анализа конструкций. Автор надеется, что каждая из этих тем нашла отражение в начальных главах книги — из опыта он знает, что обычно в курсах по конечно-элементному анализу предварительному знакомству с указанными разделами уделяется мало места. Спешим, однако, добавить, что достаточно полное изложение основ теории упругости, как правило, можно найти в современных учебниках по механике *сплошных сред*, предназначенных для студентов младших курсов.

Термин *матричный анализ конструкций* требует разъяснения, так как им принято объединять почти все аспекты, связанные с применением вычислительной техники при проектировании конструкций. Однако существует тенденция к выделению процедур, которые связаны с построением и решением уравнений, описывающих задачу для всей конструкции, включая объединение простых конструктивных элементов исходя из формулировок отдельных элементов. Эти уравнения можно выписать в значительной степени при помощи таких элементов, как рамные и фермовые, а теорию последних можно построить, ограничиваясь очень скромным экскурсом в рассматриваемую область. Именно поэтому и используется термин «матричный анализ конструкций».

Теоретические основы конечно-элементного анализа во многом опираются на вариационное исчисление. Мы выделили этот раздел, так как нереально ожидать, что студенты, начинающие изучать конечно-элементный анализ, прослушали курс вариационного исчисления.

Книга в основном посвящена изложению основных теоретических принципов и, за исключением гл. 1, бегло освещает прикладные аспекты конечно-элементного анализа. В доступной литературе имеется изобилие информации подобного рода, с частью ее можно ознакомиться по публикациям, списки которых приводятся в конце каждой главы. В гл. 1 помимо изложения некоторых примеров приложения метода дается краткий обзор истории его развития, приводится краткое описание набора встречающихся в последующих главах элементов, излагаются побудительные мотивы развития метода и концепция *программ общего назначения*.

В гл. 2 вводятся основные определения, терминология, координатные системы и излагаются свойства, которыми обладают все

конечно-элементные соотношения независимо от способа их построения. В гл. 3 подробно излагается один из методов построения уравнений для всей конструкции исходя из знания уравнений для отдельных элементов — прямой метод жесткости. В последующих главах дается краткое изложение или упоминание о других способах достижения этой цели, однако, как указывалось, целью книги является изложение вопросов, связанных с построением элементов.

Хотя в книге и не исключается рассмотрение одномерных элементов (например, стержней, балок), которые, вообще говоря, часто используются в качестве примеров, подтверждающих теоретические положения, главным мотивом развития конечно-элементного анализа является необходимость изучения двух- и трехмерных задач механики сплошной среды. Поэтому для изучения метода существенно понимание основных соотношений теории упругости, изложение которых на базе общих положений приводится в гл. 4.

В книге представлены два общих подхода к процедуре формулировки уравнений для элемента. Описываемые в гл. 5 *прямые методы* привлекают своей простотой и рациональностью. Процесс построения элементов на базе прямых методов позволяет в значительной степени выяснить суть условий, которые удовлетворяются при формулировке элементов и которые при этом не удовлетворяются. *Вариационные методы* (гл. 6) — наиболее популярный в настоящее время способ построения элементов. Эти методы при определенных условиях обуславливают сходимость численного решения, причем некоторые формулировки обеспечивают при заданной точности достижение верхней и нижней границ решения. В гл. 6 для построения элементов используются вариационные методы, а в гл. 7 те же идеи используются при построении уравнений для всей конструкции. Таким образом, здесь излагается иной, более широкий взгляд на анализ конструкции по сравнению с приведенным в гл. 3.

Уместно отметить, в чем, по мнению автора, заключается главная особенность книги. В момент ее написания во всех приложениях и в теории метода конечных элементов имели дело с конечно-элементными формулировками, *основанными на перемещениях* (т. е. на жесткости или на принципе минимума потенциальной энергии). Альтернативные формулировки, *основанные на полях напряжений* и даже на совокупности полей перемещений и полей напряжений, однако, весьма перспективны, поэтому автор предвидит возможность, что в конце концов эти формулировки также займут равное положение при решении прикладных задач. В связи с этим в гл. 5—7 указанным альтернативным формулировкам уделяется значительное внимание.

Раздел книги, касающийся основных теоретических рассмотрений, завершается гл. 8. В ней изучается методика представления поведения элемента посредством функционала, и эти идеи распространяются на представления геометрических характеристик элемен-

та. Изложенные в этой главе концепции и формулировки, по-видимому, более полезны по сравнению с рассмотренными в предыдущих главах, так как они в равной степени применимы при конечно-элементном анализе задач механики сплошных сред.

В гл. 9—12 детально изучаются специальные формы элементов. В их число входят *плоско-напряженные элементы* (гл. 9), *сплошные элементы* общей и специальной формы (соответственно гл. 10 и 11) и *изгибные пластинчатые элементы* (гл. 12). Кроме того, здесь уделяется большее по сравнению с предыдущими главами внимание ссылкам на опубликованные работы.

В гл. 13 рассматривается особый вид поведения — *упругая неустойчивость*. Развиваемая в этой главе теория одинаково хорошо применима ко всем типам элементов, и по этой причине здесь выгодно снова использовать простейшие типы элементов — рамные и фермовые.

В книге даны три группы задач, которые можно предложить для решения. Первая группа включает задачи для закрепления теоретических концепций и задачи, свойственные традиционным курсам строительной механики. Вторая группа относится, по существу, к конечно-элементному анализу, который можно осуществить вручную, например при формулировке новых конечно-элементных соотношений либо анализе конструкции, поведение которой описывается не более чем тремя алгебраическими уравнениями. И наконец, приводятся данные для задач, имеющих известные классические или альтернативные решения, которые с помощью метода конечных элементов сводятся к решению относительно большого числа уравнений. Такие задачи можно распределить среди студентов многими способами, однако, как убедился автор, существует наиболее эффективная схема: каждому студенту в группе предлагается задача с отличной от других сеткой разбиения. Сравнение полученных студентами группы результатов дает ценную информацию о скорости сходимости и точности конечно-элементного решения.

Метод конечных элементов представляет методику, предназначенную для проведения расчетов на вычислительных машинах, и может показаться удивительным, что в книге нет вычислительных программ. Автор считает, что мало кто из преподавателей или отдельных читателей книги столкнется с трудностями при желании воспользоваться широко распространенными конечно-элементными программами общего назначения (например, STRUDL-II), которые приспособлены для решения проблем указанного типа. С другой стороны, более простые программы, основанные на методе конечных элементов, можно найти в многочисленных отчетах и книгах.

Предположительно предмет этой книги можно изложить в обычном пятнадцатинедельном курсе по три часа в неделю. По опыту автора, это требует более глубокой подготовки по смежным вопросам (теории упругости, матричному анализу конструкций) и ва-

риационному исчислению, чем та, которую обычно имеют большинство студентов. Поэтому преподаватель может по выбору исключить из курса одну или несколько последних глав. С другой стороны, для программы, рассчитанной на три семестра, можно построить курс следующим образом: начать с десятидневного курса матричного анализа конструкций, а затем прочитать два десятидневных курса по методу конечных элементов. Во втором из этих курсов можно изложить более сложные разделы, такие, как теоретические основы и приложения метода для решения задач механики грунтов, теплопроводности, течения жидкости и других задач механики сплошных сред, нелинейных задач и анализа переходных процессов.

Автор выражает благодарность многим студентам и коллегам, которые прочитали различные отрывки рукописи и высказали критические и полезные замечания. Долг благодарности следует отдать проф. Техасского университета Дж. Т. Одену и проф. университета Ватерлоо Г. Мак-Найсу за вклад в гл. 9, а также проф. Токийского университета К. Вашицу за изучение и комментарии к гл. 6 и 7. Особую благодарность автор выражает проф. Нотр-Дамского университета Сиднею Келси за тщательное знакомство почти со всеми главами книги и многочисленные и всегда плодотворные замечания, а также редактору издательства «Прентис-Холл» Джеймсу Бэсси и другим членам издательства, включая Барбару Кэссел, безграничное терпение которой побивает все рекорды, и Хелен Вилер за ее несравненное умение печатать и повседневную готовность исправлять грамматические неточности.

Ричард Галлагер

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

Ниже приводится список обозначений, используемых в тексте. Большое число других обозначений вводится по мере появления; чаще это происходит в том случае, когда требуется обозначить матрицу (особенно в гл. 6) или пометить величину в таблицах и на рисунках. Символы, которые обозначают две явно отличающиеся по смыслу величины, различаются с помощью нижнего индекса (например, L означает длину, а L_i — объемную или треугольную координату). Нижние и верхние индексы у символов, обозначающих однозначно трактуемые величины, ниже не приводятся, а определяются в тексте по мере появления.

Матрицы обозначаются жирными буквами, заключенными в скобки $[\]$ (для прямоугольных матриц), $\{ \}$ (для вектор-столбца) и $\lfloor \rfloor$ (для вектор-строки). Введенные определения для матриц (обозначенных жирными буквами) переносятся и на напечатанные светлым шрифтом символы с нижними индексами. Этими символами обозначаются элементы матрицы. Например, если определен $(n \times 1)$ -вектор $\{ \mathbf{a} \}$, то тем самым определены и отдельные компоненты вектора $a_1, \dots, a_i, \dots, a_n$. Если жирная буква, обозначающая матрицу, напечатана обычным шрифтом без нижнего индекса, то она может обозначать скалярную величину, имеющую совершенно другой смысл, хотя в некоторых случаях смысл величины сохраняется.

Черточкой сверху помечаются заданные величины. Штрихами помечено дифференцирование.

- A Площадь
- $[A]$ Матрица связи напряжений с узловыми усилиями
- $[A]$ Кинематическая матрица. Коэффициенты, связывающие узловые перемещения в элементе с глобальными перемещениями в узлах
- a Размер
- $\{ \mathbf{a} \}$ Вектор параметров в предполагаемом поле перемещений

[B]	Матрица связи параметров предполагаемого поля перемещений с узловыми перемещениями
[B]	Статическая матрица. Коэффициенты связи между узловыми силами в элементе и глобальными силами в узлах
b_{0i}, b_{1i}, b_{2i}	($i=1, 2, 3$). Коэффициенты в уравнении для треугольных координат
C	Константа в уравнении Пуассона
[C]	Матрица, связывающая параметры предполагаемого поля перемещений с полем деформаций
c_{0i}, \dots, c_{3i}	($i=1, 2, 3, 4$). Коэффициенты в уравнении для объемных координат
D	Изгибная жесткость пластины
[D]	Матрица, связывающая узловые смещения с полем деформаций
{d}	Собственный вектор
E	Модуль упругости
[E]	Матрица упругих констант
e	Множитель при варьировании
{F}	Вектор узловых сил в элементе
[F]	Глобальная матрица податливости
{f}	Матрица податливости элемента
G	Модуль сдвига
[G]	Матрица ограничений
I	Момент инерции
[I]	Единичная матрица
J	Значение интеграла
i, j, k	Немые нижние и верхние индексы
J	Жесткость кручения по Сен-Венану
[J]	Матрица Якоби
[K]	Глобальная матрица жесткости
[k]	Матрица жесткости элемента
L	Длина
L_i	Треугольная ($i=1, 2, 3$) или объемная ($i=1, 2, 3, 4$) координата
l_x, l_y, l_z	Направляющие косинусы
{M}	Вектор узловых изгибающих моментов
\mathfrak{M}, M_x	Вектор обобщенных внутренних моментов при изгибе пластин (на единицу длины) и его компоненты
M_y, M_{xy}	Порядок полиномиального разложения
m	Матрица массы элемента
[m]	Число сторон многоугольника
\mathfrak{N}	Число сторон многоугольника
[N], [N]	Матрица функций формы
n	Число степеней свободы
[O], {O}	Нулевая матрица и вектор

$\{P\}$	Вектор глобальных узловых усилий
p	Число элементов
$[p]$	Матрица коэффициентов полиномиального разложения
Q_x, Q_y	Поперечные силы (на единицу длины) при изгибе пластин
q	Интенсивность поперечной нагрузки
R	Остаток
$[R]$	Статическая матрица равновесия, связывающая силы в элементе друг с другом
$[R]$	Основная матрица, используемая при обобщении одномерной интерполяционной функции на двумерный случай
r	Радиальная координата; число уравнений-ограничений
S, S_u, S_v	Обобщенная поверхность и поверхности, где заданы соответственно перемещения и напряжения
$[S]$	Матрица напряжений, связывающая узловые перемещения с компонентами поля перемещений
$[S]$	Матрица напряжений, связывающая в заданных узлах узловые перемещения и напряжения
s	Координата
$\{s\}$	Вектор констант в уравнениях, задающих ограничения
T, T_x, T_y, T_z	Вектор поверхностных (граничных) усилий и его компоненты
t	Толщина
U, U^*	Энергия деформации и дополнительная работа
u	Вектор поверхностных (граничных) смещений
u, v, w	Компоненты перемещений (во внутренних и граничных точках)
V, V^*	Потенциал и дополнительная работа приложенных нагрузок
vol	Объем
W	Работа
w	Обозначение для вариации поля перемещений
X, X, Y, Z	Вектор объемных сил и его компоненты
x, y, z	Декартовы координаты

Греческие буквы

α	Коэффициент температурного расширения
β	Бета-функция (п. 8.3.1)
$\{\beta\}$	Вектор параметров предполагаемого поля напряжений
Γ	Гамма-функция (п. 8.3.1); константа деформации (п. 13.3.2)

Γ_i	Смешанные производные степеней свободы (соотношение (12.31))
$[\Gamma]$	Матрица преобразований
$\{\Delta\}$	Вектор узловых смещений
δ	Оператор варьирования; бесконечно малое приращение
ε	Вектор обобщенных деформаций (включает нормальные и сдвиговые деформации)
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Нормальные деформации
ξ, η, ζ	Безразмерные пространственные переменные
θ	Угловое смещение (угол измерения в гл. 12)
$\kappa, \kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$	Вектор кривизн при изгибе пластин и его компоненты
$[\kappa]$	Матрица Гессе
$\{\lambda\}$	Вектор множителей Лагранжа
μ	Коэффициент Пуассона
$[X_i]$	Вектор функции формы поля напряжений
Π	Обобщенный функционал
$\Pi_p, \Pi_p^{m_1}, \Pi_c$	Функционал энергии (нижние и верхние индексы обозначают специальный вид функционала)
π	3.1416...
$[\rho]$	Матрица плотности масс материала
σ	Вектор обобщенного поля напряжений (включает нормальные и касательные напряжения)
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Нормальные напряжения
$\{\sigma\}$	Вектор значений напряжений в узлах
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$	Касательные напряжения
\tilde{T}	Приращение температуры по сравнению с температурой для свободного от усилий тела
ν	Коэффициент теплопроводности
Φ	Функция напряжений
$\{\Phi\}$	Вектор значений функции напряжений в узлах
φ	Угол измерения круговых угловых координат; весовой коэффициент для интеграла взвешенных невязок
Ω	Функция нагружения для изгиба пластин
$[\Omega]$	Матрица смешанного типа для сил и перемещений
$\{\omega\}$	Вектор собственных значений

1

ВВЕДЕНИЕ

При проектировании конструкций перед инженером-проектировщиком стоит задача нахождения распределения напряжений, или *поля* напряжений. Иногда, чтобы узнать, нарушаются ли заданные зазоры между деталями конструкции, инженеру требуется вычислить перемещение лишь в определенных точках системы. В отдельных же случаях, особенно если нагрузки и поведение конструкции зависят от времени, проектировщику необходимо подсчитать полное распределение перемещений, или поле перемещений. Для рассчитанного поля напряжений должны выполняться в каждой точке условия *равновесия*, а перемещения при этом должны быть непрерывны (т. е. должны выполняться условия *совместности*).

Приступая в некоторой задаче проектирования к отысканию напряжений и перемещений, проектировщик должен сначала задать определяющие уравнения, которые в той или иной форме обеспечивают выполнение условий равновесия и совместности. Возникающая в связи с этим основная трудность, не говоря уже об аспектах разрешимости выбранных уравнений, состоит в решении вопроса: могут ли данные уравнения адекватно отражать выставляемые при проектировании требования к конструкции. Причем сложность геометрии конструкции, а также характера нагрузок и свойств материала должна быть учтена в этих рассуждениях.

Принимая во внимание возникающие из-за описанных выше обстоятельств различия в поведении конструкции и ее модели, инженер приступает далее к решению выбранных уравнений. Если изучаемый объект является двумерным или трехмерным, то его поведение описывается уравнениями с частными производными. Весьма редко существуют точные решения подобных уравнений, и ненамного чаще оказывается возможным строить адекватные приближенные решения с небольшим количеством членов аппроксимации. Для получения достаточно точного решения требуется большое число этих членов.

Появление электронных вычислительных машин коренным образом изменило ситуацию в области решения дифференциальных уравнений с частными производными. Большинству инженеров-практиков в настоящее время стало доступным численно исследовать поставленные перед ними задачи. При этом число учитываемых членов ряда, представляющего поле напряжений или перемещений, может быть велико. Используются также конечно-разностные методы, в которых дифференциальные уравнения аппроксимируются с помощью дискретных значений величин, заданных в выбранных точках. Преимущество этих методов вытекает из длительной истории их развития, результатом которого стало появление теорем сходимости. Кроме того, возникающие в этих методах алгебраические уравнения, которые необходимо численно решить, часто имеют особенно простой вид.

Метод конечных элементов является аналитической процедурой, интенсивная разработка которой велась в течение сравнительно короткого промежутка времени. Ключевая идея метода при анализе поведения конструкций заключается в следующем: сплошная среда (конструкция в целом) моделируется путем разбиения ее на области (конечные элементы), в каждой из которых поведение среды описывается с помощью отдельного набора выбранных функций, представляющих напряжения и перемещения в указанной области. Эти наборы функций часто задаются в такой форме, чтобы удовлетворять условиям непрерывности описываемых ими характеристик во всей среде. В других случаях выбранные представления полей не обеспечивают непрерывности и, тем не менее, дают возможность получить удовлетворительное решение. При этом в отличие от полностью непрерывных моделей, нет полной уверенности в сходимости решения. Если поведение конструкции описывается единственным дифференциальным уравнением, то получить приближенное решение этого уравнения можно как методом конечных элементов, так и с помощью техники разложения в ряды или конечно-разностных схем. Если же конструкция в целом неоднородна и состоит из большого количества отдельных конструктивных элементов, поведение каждого из которых описывается своим дифференциальным уравнением, то в этом случае, как правило, можно непосредственно применить лишь метод конечных элементов.

Наряду с указанными альтернативными методиками численного решения прикладных задач механики конструкций в методе конечных элементов требуется строить и решать систему алгебраических уравнений. Особые преимущества метода заключаются в удобстве формирования уравнений и возможности представления совершенно нерегулярных и сложных конструкций и условий нагружения.

Как отмечалось выше, метод конечных элементов стремительно развивается. Начиная с 1955 г. метод распространился с второстепенных областей на наиболее перспективные направления числен-

ного исследования задач математической физики. Термин «математическая физика» используется здесь для обозначения широкого круга аналитических задач — расчет конструкций, теплопередача, течение жидкости, распространение электромагнитных волн — и при этом не имеется в виду, что указанные задачи стоят далеко от проблем, возникающих на практике и при проектировании конструкций. Популярность метода и интерес к нему как раз и объясняются указанной выше возможностью отражать реальные аспекты, возникающие в прикладных задачах проектирования.

Распространение практических применений метода конечных элементов является следствием развития технологии в середине пятидесятих годов. Основной указанной выше предпосылкой развития метода является возможность автоматически эффективно построить и решить систему алгебраических уравнений высокого порядка. Распространение электронных вычислительных машин в середине пятидесятих годов позволило удовлетворить этим требованиям. В течение этого же периода выкристаллизовались теоретические концепции метода конечных элементов. Представляется интересным проследить далее историю развития этих концепций.

1.1. Краткая история развития метода конечных элементов *)

Несмотря на то что периоду с 1850 по 1875 г. непосредственно предшествовал период выдающихся достижений таких представителей французской школы теории упругости, как Навье и Сен-Венан, все же по логике вещей именно этот период можно считать отправной точкой нашего обзора. В это время благодаря усилиям Максвелла [1.1], Кастильяно [1.2] и Мора [1.3] были выработаны основные концепции теории анализа стержневых конструкций. Эти концепции являются краеугольным камнем матричных методов строительной механики, которые окончательно оформились лишь спустя 80 лет и в свою очередь явились основой метода конечных элементов.

Развитие теории и вспомогательных дисциплин, относящихся к методу конечных элементов, было особенно слабым в период с 1875 по 1920 г. Это происходило в основном из-за наличия реальных трудностей при решении алгебраических уравнений, как только число неизвестных становилось большим. Необходимо, кроме того, заметить, что для конструкций, представляющих наибольший интерес в то время, — рам и ферм — почти всегда применялся под-

*) В используемой нумерации разделов, ссылок, рисунков и перекрестных ссылок для уравнений первая цифра соответствует главе, а последующие цифры — очередности внутри главы.

ход, основанный на задании распределения напряжений с параметрами нагрузки в качестве неизвестных.

Приблизительно к 1920 г. благодаря усилиям Мэйни [1.4] в США и Остенфельда [1.5] в Нидерландах были сформулированы основные идеи численного исследования рамных и фермовых конструкций, основанного на задании перемещений в качестве неизвестных параметров. Эти идеи предшествовали современным матричным методам исследования конструкций. До тех пор пока в 1932 г. Харди Кросс не предложил метод моментных распределений [1.6], важнейшим сдерживающим фактором при анализе являлась размерность задач, определяемая числом неизвестных параметров перемещений или нагрузок. Метод моментных распределений позволил численно исследовать поведение конструкций в задачах, на порядок более сложных, чем самые трудные из задач, которые решались с помощью ранее существовавших методов. Этот метод стал основой численного исследования поведения конструкций на следующие 25 лет.

Вычислительные машины появились в начале пятидесятих годов, однако их действительная значимость как в теоретических, так и в прикладных аспектах не была столь очевидной в то время. Все же некоторые ученые, предвидевшие влияние, которое окажут вычислительные машины, предприняли попытки сформулировать в удобной для компьютеров матричной форме хорошо разработанные к тому времени алгоритмы расчета фермовых конструкций.

Публикации, которые в виду их числа не могут быть подробно перечислены здесь, указаны в обзоре Аргириса и Пэттона [1.7]. Две заслуживающие упоминания работы выполнены Аргирисом и Келси [1.8], а также Тернером и др. [1.9]. В этих исследованиях были объединены подходы, используемые при расчете фермовых конструкций, с подходами, применяемыми при расчете сплошных сред; при этом была использована матричная форма записи. Эти работы оказали решающее влияние на развитие метода конечных элементов в последующие годы. Было бы неточным приписывать появление всех основных аспектов метода конечных элементов именно этим работам, потому что ключевые моменты метода имелись даже раньше 1950 г. в работах Куранта [1.10], Мак-Генри [1.11] и Хреникоффа [1.12]. Особенно важна работа Куранта, так как в ней рассмотрены задачи, описываемые уравнениями, относящимися не только к механике конструкций. Однако, отмечая указанию особенность метода конечных элементов, останавливаться на ней подробно не будем, руководствуясь тем, что наше внимание в основном будет сосредоточено на численном расчете конструкций.

Начиная с середины пятидесятих годов метод конечных элементов в своем развитии прошел через ряд непрерывных модификаций. Подробный обзор, касающийся истории развития метода, опубликован Зенкевичем [1.13]. Так же как и при формулировке

специальных элементов для плоского напряженного состояния, исследователи выписали конечно-элементные соотношения для твердого деформируемого тела, изгибаемых пластин, тонких оболочек и других конструктивных форм. Как только были получены соотношения для исследования статического поведения линейно упругого материала, внимание специалистов было переключено на такие аспекты, как динамическое поведение, выпучивание, а также геометрическая и физическая нелинейности. Вслед за этими исследованиями наступил период довольно интенсивного развития вычислительных программ «общего назначения», обусловленный желанием обеспечить практиков возможностью применять указанный метод.

В настоящее время программы общего назначения неплохо распространены в прикладных областях. Доступность таких программ при относительно средних затратах в процессе их использования объясняется широкими прикладными возможностями метода конечных элементов. Что касается развития метода, то многие исследователи и в настоящее время заняты построением новых конечно-элементных моделей и дальнейшим улучшением схем и алгоритмов для описания конкретных явлений, а также составлением новых программ. Наиболее интересными вопросами являются конечно-элементное представление и численный анализ физических процессов при взаимодействии конструкций с внешними полями. Известным примером последнего могут служить расчет термоупругих конструкций, где вычисление температурных напряжений тесно связано с определением меняющегося распределения температур, а также анализ взаимодействия жидкости и упругой конструкции в задачах гидроупругости.

Несмотря на то что здесь подчеркивались определенные отличительные особенности и характерные преимущества метода конечных элементов при численном анализе механических систем, этот метод вряд ли может быть последним словом в численном анализе в том виде, в котором он существует в настоящее время. Его следует рассматривать как одну из многочисленных ступеней развития средств численного исследования при проектировании. Такие книги, как «История сопротивления материалов» [1.14], интересно написанная Тимошенко, могут служить неоценимым подспорьем в процессе обучения инженера-проектировщика, а новые книги в этом духе либо книги по технике, подробно освещающие историю вопроса (см., например, [1.15]), снабдят информацией о публикациях и поэтому заслуживают внимания.

1.2. Типы элементов

Элементы, которые обычно используются на практике и о которых пойдет речь ниже, изображены на рис. 1.1.

Простой фермовый элемент, изображенный на рис. 1.1(а),

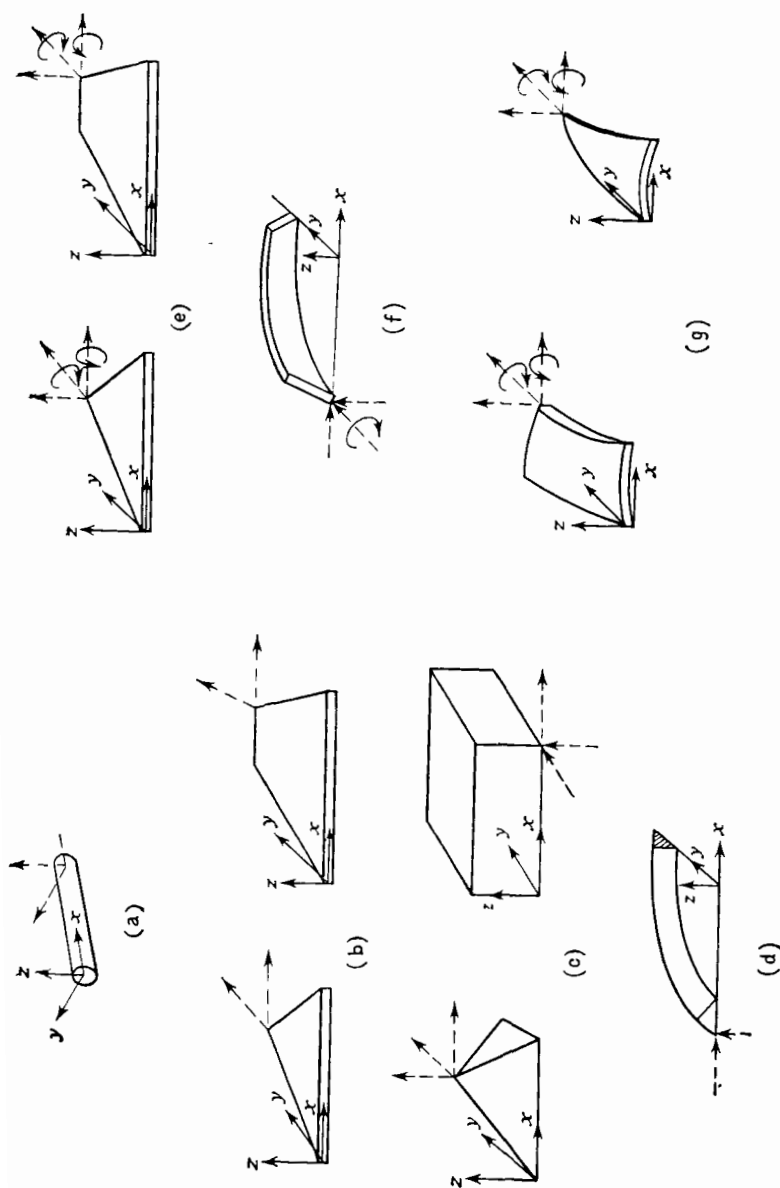


Рис. 1.1. Типы конечных элементов: (а) стержневой (простой фермовый); (б) плоско-напряженный; (с) сплошные (трехмерные); (д) осесимметричный сплошной; (е) изгибаемый пластинчатый; (ф) осесимметричный тонкостенный оболочечный; (г) искривленный тонкостенный оболочечный.

является представителем целого семейства конечных элементов. Используемый в совокупности с элементами того же типа, он описывает фермовые и пространственные рамные конструкции. В совокупности с элементами других типов, и особенно с пластинчатыми элементами, с его помощью обычно описывают подкрепленные элементы конструкции. Так как теоретические соотношения, связанные с указанным элементом, хорошо известны, в книге не отводится места для описания характеристик этого элемента. Более того, мы используем его в начальных главах книги для иллюстрации многих ключевых положений конечно-элементного анализа.

Основным элементом при конечно-элементном анализе является пластина, нагруженная в своей плоскости (условие *плоского напряженного состояния*). На рис. 1.1 (b) изображены треугольный и четырехсторонний плоско-напряженные элементы. К этому классу элементов можно отнести еще много элементов, имеющих различную форму в плане, однако они используются в весьма специальных случаях. Эти элементы называются *основными* не только благодаря их полезности при численном исследовании целого ряда прикладных задач проектирования, но также ввиду их приоритетной роли в истории развития метода конечных элементов. Теоретические работы на протяжении первых лет развития метода конечных элементов были целиком посвящены этому типу элементов.

Изображенный на рис. 1.1 (c) *сплошной (трехмерный) элемент* представляет обобщение на трехмерный случай плоско-напряженного элемента. Тетраэдр и параллелепипед являются наиболее распространенными формами трехмерных элементов и играют важную роль при моделировании задач механики грунтов и скальных пород, а также конструкций, используемых в ядерной физике. Уместно напомнить, что фактически не существует других подходов при численном анализе поведения конструкции, с помощью которых решались бы реальные прикладные трехмерные задачи.

Одной из самых важных областей применения метода конечных элементов является расчет *осесимметричных тел*, изображенных на рис. 1.1 (d). К этой области относится большое количество прикладных задач, включая расчет бетонных и стальных резервуаров, сосудов, содержащих ядерное горючее, роторов, поршней валов и двигателей ракет. Нагрузки, так же как и геометрические очертания, бывают обычно осесимметричными. Здесь изображен только треугольный элемент, хотя полезен также и четырехсторонний элемент, аналогичный изображенному на рис. 1.1 (b).

Элементы типа *изгибаемых тонких пластин* используются не только для описания поведения плоских пластин, но также для представления оболочек и тонкостенных элементов. Конфигурация элементов схожа с геометрией плоско-напряженных элементов, причем наибольшее распространение имеют треугольные и четырехсторонние элементы рис. 1.1 (e).

Осесимметричные оболочечные конструкции, изображенные на рис. 1.1(f), важны на практике так же, как и осесимметричные сплошные конструкции, однако здесь определяющие соотношения выводятся с использованием упрощающих предположений теории тонких оболочек. Теория осесимметричных тонких оболочек заполняет пробел между теорией изгиба и растяжения плоских пластин и теорией тонкостенных оболочечных элементов общего вида; эта теория позволяет выявить ключевые аспекты, возникающие при исследовании оболочек общего вида.

Если тонкостенная оболочечная конструкция искривлена, то для ее аналитического описания предпочтительно использовать *криволинейные тонкостенные оболочечные элементы*. К преимуществам указанных элементов относятся возможность более точного описания геометрии поверхности исследуемой оболочки и правильный учет взаимосвязи растягивающих и изгибающих усилий в оболочке. Типичные элементы, соответствующие закрученной в двух направлениях оболочке, представлены на рис. 1.1(g). Существует большое количество разнообразных элементов подобного типа.

1.3. Некоторые приложения метода конечных элементов

Чтобы проиллюстрировать, каким образом используются описанные выше элементы в вычислительных задачах, возникающих при проектировании конструкций, а также объем и сложность указанных проблем, приведем ряд примеров численного анализа прикладных задач проектирования.

Развитие метода конечных элементов многим обязано работам исследователей, занятых проектированием аэрокосмической техники, поэтому не удивительно, что именно эта область исследований остается ведущей по количеству приложений метода конечных элементов. Рисунок 1.2 отражает много аспектов использования метода конечных элементов при расчете конструкции самолета «Боинг-747» [1.16]. Фюзеляж самолета состоит из тонких листов металла (*обшивка*), охватывающих несущую конструкцию, набранную из элементов, называемых *шпангоутами* и *стрингерами*. Силовые элементы крыла называются *лонжеронами* и *нервюрами*.

Опыт показал, что при расчете полей напряжений во всей конструкции можно не учитывать локальное выпучивание обшивки летательного аппарата. Поэтому обшивку можно представить состоящей из плоско-напряженных элементов, таких, как изображенные на рис. 1.1(b) и (c) треугольные и четырехсторонние элементы, а несущую конструкцию можно смоделировать набором элементов типа изображенных на рис. 1.1(a). Расчет методом конечных элементов участка соединения крыла с фюзеляжем самолета «Боинг-747», изображенного на рис. 1.2(b), потребовал около 7000 неиз-

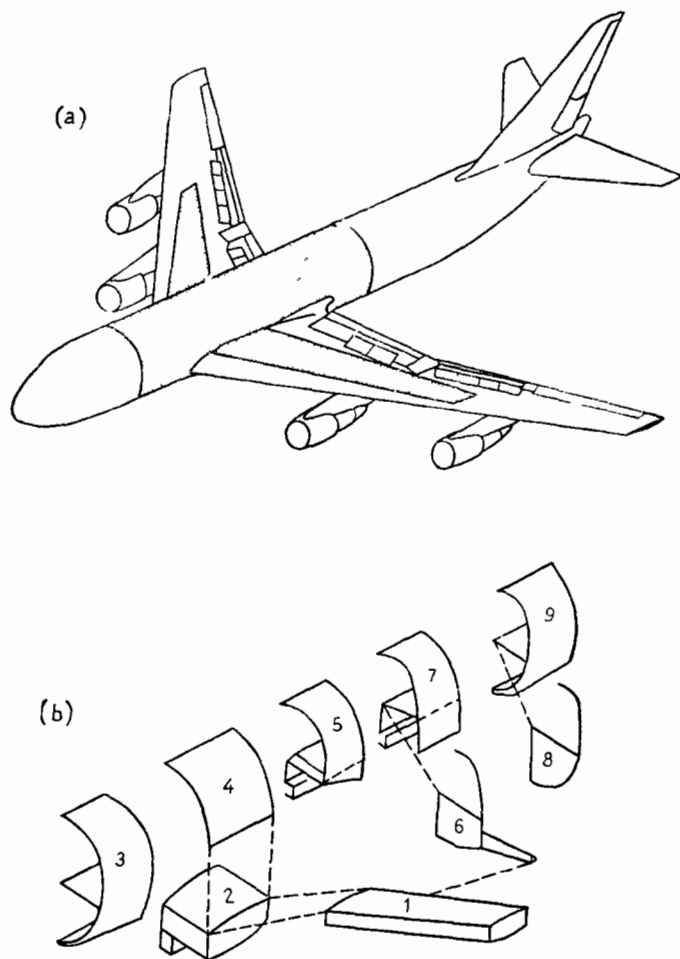


Рис. 1.2. Конечно-элементный анализ самолета «Боинг-747» (из [1.16]) (а) Самолет «Боинг-747» (заштрихованные области отвечают исследованным с помощью метода конечных элементов участкам конструкции самолета). (б) Подконструкции, используемые в конечно-элементном анализе заштрихованных областей.

вестных переменных. Наличие столь большого количества неизвестных неудобно с точки зрения обработки начальных данных и выявления возникающих при счете ошибок. Поэтому на практике конструкцию обычно разбивают на части или, иными словами, на *подконструкции* (*суперэлементы*) и каждая из подконструкций рассчитывается методом конечных элементов. На конечном этапе расчетов суперэлементы объединяются с помощью обычной конечно-элементной схемы. Вид разбиения на подконструкции при расчете

Таблица 1.1. Параметры конечно-элементного представления центральной части самолета «Боинг-747» (из [1.16])

Подконструкция	Описание	Узлы	Число *) нагруженных секций	Балки	Пластины	Связанные степени свободы †)	Общее число степеней свободы
1	Крыло	262	14	355	363	104	796
2	Корневой отсек крыла	267	8	414	295	198	880
3	Фюзеляж	291	7	502	223	91	1026
4	»	213	5	377	185	145	820
5	»	292	7	415	241	200	936
6	Стенка	170	10	221	103	126	686
7	Фюзеляж	285	6	392	249	233	909
8	Стенка	129	10	201	93	148	503
9	Фюзеляж	286	7	497	227	92	1038
Всего		2195	63	3374	1979	555	7594

*) Некоторые нагруженные секции включают более чем одну подконструкцию.

†) Некоторые степени свободы при взаимодействии подконструкций образуют одну связанную степень свободы.

методом конечных элементов «Боинга-747» изображен на рис. 1.1 (b), а подробности счета приведены в табл. 1.1.

Как обычно, при проектировании самолета проводятся натурные испытания «Боинга-747». На рис. 1.3 приведено сравнение экспериментальных данных с результатами расчета методом конечных элементов. Следует отметить, что ни одно из численных решений, полученных другими методами на основе упрощающих предположений, при проектировании конструкций не привело бы к столь точному совпадению, чем это было достигнуто с помощью метода конечных элементов.

Следует также добавить, что анализ динамического поведения летательного аппарата важен как для осуществления компоновки аппарата, так и для оценки несущей способности и упругой неустойчивости, являющейся существенной формой разрушения самолета. Ни одно из перечисленных явлений нельзя адекватно исследовать численно на базе упрощающих предположений, кроме как методом конечных элементов.

Прикладные задачи подобного вида возникают и в судостроении. На рис. 1.4 изображена центральная часть конструкции корабля [1.17]. Стремление увеличить размеры танкеров привело к возникновению многочисленных проблем, связанных с компоновкой судна и эффективностью его проектирования. Вообще говоря, супертанкеры при эксплуатации подвержены многочисленным повреждениям.

Представление конструкции судна конечно-элементной моделью имеет много общего с моделированием аэрокосмических конструкций. Плоские элементы конструкции заменяются пластинчатыми конечными элементами. Фермовые конечные элементы используются при моделировании внутреннего силового набора судна. Общее число неизвестных, возникающих при моделировании наиболее ответственных участков конструкции судна, может достигать 50 000,

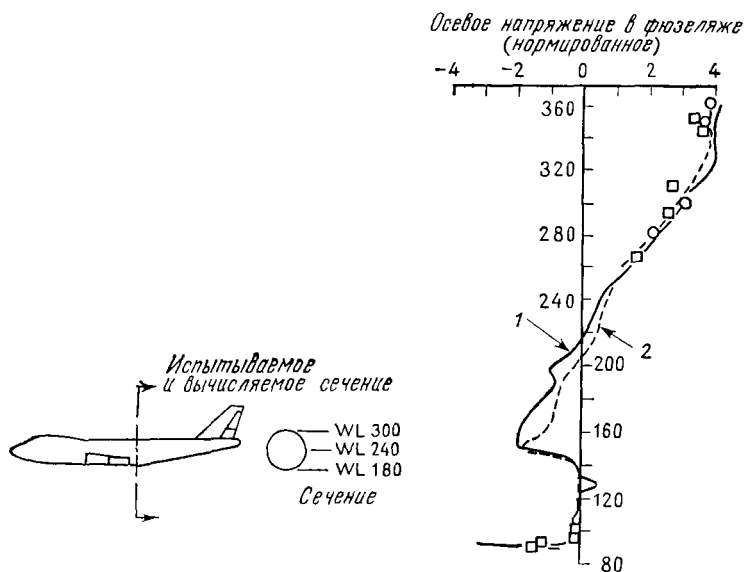


Рис. 1.3. Сравнение результатов натурных испытаний с результатами расчетов методом конечных элементов (из [1.16]). ○ значения осевых напряжений, полученные при испытаниях; □ значения напряжений в обшивке, полученные при испытаниях. 1 — вычисленные напряжения с помощью четырех конечных элементов для «Боинга-747»; 2 — вычисленные напряжения с помощью пяти конечных элементов для «Боинга-747».

поэтому обычно разбивают исследуемую конструкцию на части с меньшим числом неизвестных, т. е. на подконструкции.

Требования надежности, предъявляемые при проектировании к конструкции ядерных реакторов, привели к повсеместному использованию при расчетах указанных конструкций метода конечных элементов. На рис. 1.5(а) изображен бетонный предварительно напряженный корпус реактора [1.18]. Благодаря симметрии корпуса можно рассчитывать только восьмую его часть (см. рис. 1.5(б)). Этот объем представляется как объединение изображенных на рис. 1.5(с) четырехгранных и шестигранных конечных элементов. В задачах подобного типа число неизвестных достигает

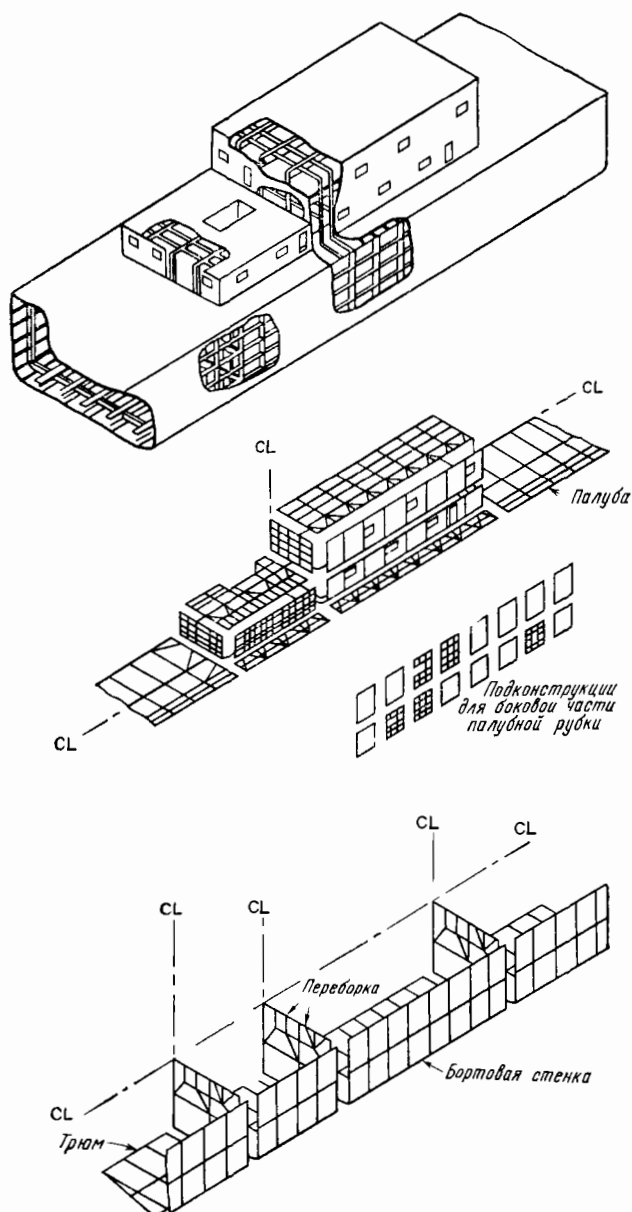


Рис 1 4 Конечно элементный анализ конструкции судна (из [1 17]).

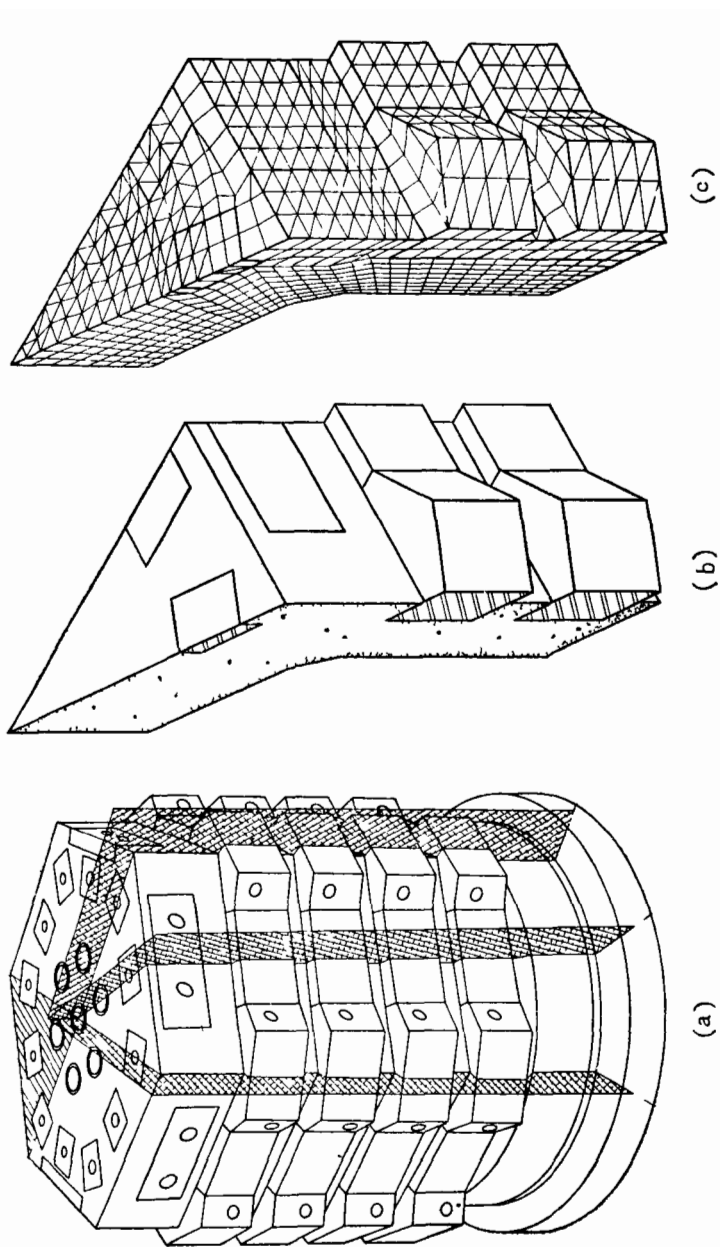


Рис. 1.5 Конечн-элементный анализ предварительно напряженного бетонного корпуса реактора (а) Реальная конструкция; (б) восьмая часть реальной конструкции; (с) конечно-элементное представление (тетраэдральные элементы)

20 000 и обычно при расчетах учитывают неупругое деформирование материала.

Не все задачи, для получения численного решения которых используется метод конечных элементов, столь громоздки. Рисунки 1.6 и 1.7 иллюстрируют использование метода конечных элементов для двух основных задач механики конструкций. Одной

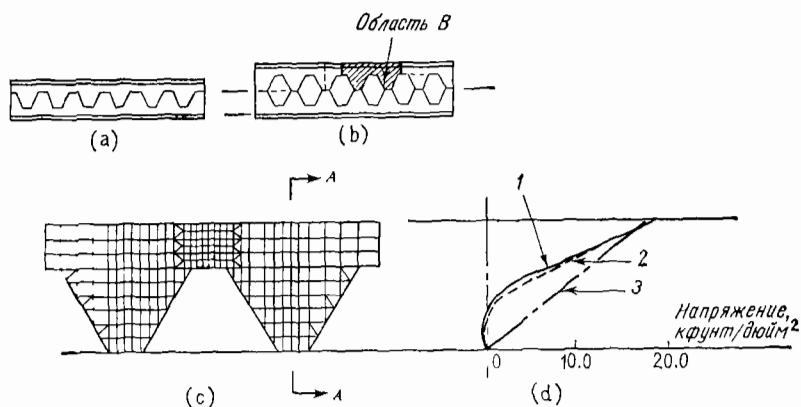


Рис. 1.6. Конечно-элементный анализ перфорированной балки (из [1.19]). (а) Исходная балка; (б) перфорированная балка зубчатой формы; (с) конечно-элементное представление области В; (д) напряжения в сечении А—А, вызванные прикладываемым моментом. 1 — решение, полученное с помощью двумерной теории упругости; 2 — решение, полученное методом конечных элементов; 3 — решение на основе балочной теории.

из возможностей увеличения эффективности проектов прокатанных стальных профилей является прием, когда полка профиля пилообразно разрезается, как указано на рис. 1.6(а), а затем верхняя половина приваривается к нижней согласно рис. 1.6(б). В результате получается балка зубчатой формы, поведение которой можно исследовать с помощью приближенных методов. Для проверки результатов, полученных с помощью приближенной теории [1.19], применяется изображенная на рис. 1.6(с) конечно-элементная модель указанной конструкции, использующая треугольные и прямоугольные элементы. Графики, приведенные на рис. 1.6(д), показывают, что для определения максимального напряжения в конструкции вполне достаточно использовать балочную теорию, а требующий больших вычислительных затрат метод конечных элементов или более сложные методы численного анализа не нужны при стандартных проектировочных разработках данного конструктивного элемента.

Еще чаще встречающаяся на практике задача состоит в расчете армированной железобетонной балки, изображенной на рис. 1.7. Здесь мало известно относительно характера связей между бетоном

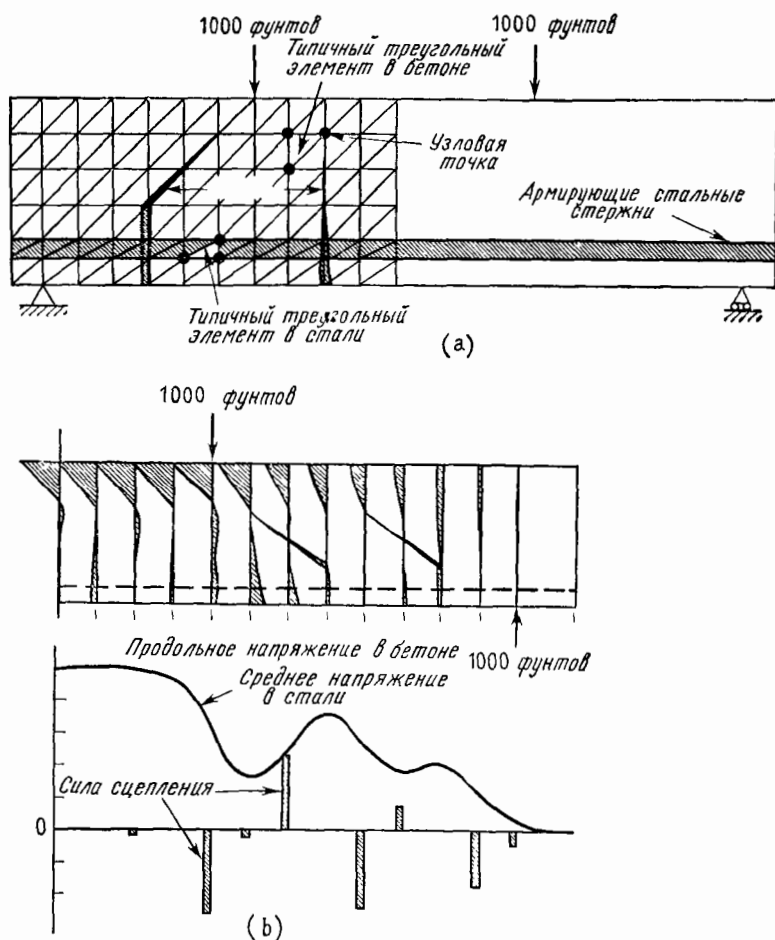


Рис. 1.7. Конечно-элементный анализ армированной железобетонной балки (из [1.20]). (а) Конечно-элементное представление железобетонной балки; (б) вычисленные распределения напряжений.

и армирующими стержнями, а также относительно характера развития и вида трещин в бетоне при нагружении. Эта проблема является одной из самых важных в строительной механике. На рис. 1.7 (а) изображены конечно-элементная модель и аналитически описываемые траектории трещин в конструкции, приведенные в работе Нго и Скорделиса [1.20]. Распределение напряжений изображено на рис. 1.7 (б).

Представленные выше немногочисленные примеры в совокупности подчеркивают то обстоятельство, что метод конечных элемен-

тов можно с успехом использовать в задачах, требующих определения внутренних деформаций и напряжений, перемещений, мод колебаний и потери устойчивости и целого ряда других параметров. Это положение имеет место для многих областей, которые обычно считаются не связанными друг с другом техническими дисциплинами, например в строительной механике, машиностроении, судостроении и аэрокосмической технике. Метод конечных элементов обеспечивает получение решений в этих и других областях на основе единой методики.

Задачей книги является изложение фундаментальных теоретических положений метода, поэтому далее в ней не будут затрагиваться специфические аспекты использования метода в прикладных задачах. Перечисление таких проблем потребовало бы многих томов. Читателю предлагается обратиться к трудам конференций по методу конечных элементов, в которых излагается большое количество решений разнообразных прикладных задач.

1.4. Программы общего назначения

Как уже отмечалось, соотношения метода конечных элементов носят настолько общий характер, что теоретически возможно составить единую вычислительную программу, способную решить все вышеназванные задачи и практически неограниченное число разнообразных задач механики конструкций. Вычислительные программы, отвечающие этой цели даже в ограниченном масштабе, называются *программами общего назначения*. Преимущество таких программ состоит не только в указанной возможности, но и в единообразии, достигаемом в инструкциях для будущих пользователей и при обработке входных и выходных данных, а также в документации.

Стоимость затрат на создание программы общего назначения обычно очень велика, поэтому здесь важны пути восполнения этих затрат. Некоторые программы общего назначения пишутся на машинном языке, который является достаточно общим, чтобы обеспечить доступ к программам большому числу различных организаций, расположенных территориально в разных местах. Другие программы специально составляются таким образом, чтобы ими могли пользоваться заинтересованные лица только одной организации, а экономическая эффективность достигается путем ограничения программных возможностей. Заметим поэтому, что не все указанные программы обладают достаточной степенью общности. Был опубликован ряд обзоров, касающихся программ общего назначения [1.21, 1.22], однако читатель должен помнить, что данная область является одной из наиболее быстро меняющихся во всех своих аспектах.

Представленные на схеме, изображенной на рис. 1.8, четыре части являются общими практически для всех программ метода конечных элементов общего назначения. Как минимум на стадии ввод от пользователя не требуется никакой другой информации, кроме данных о материале конструкции, описания геометрии конечно-элементной модели (включая условия закрепления) и условий нагружения. Для более сложных программ общего назначения ввод осуществляется с использованием хранимых в памяти машины данных о характеристиках материала, методиках автоматического

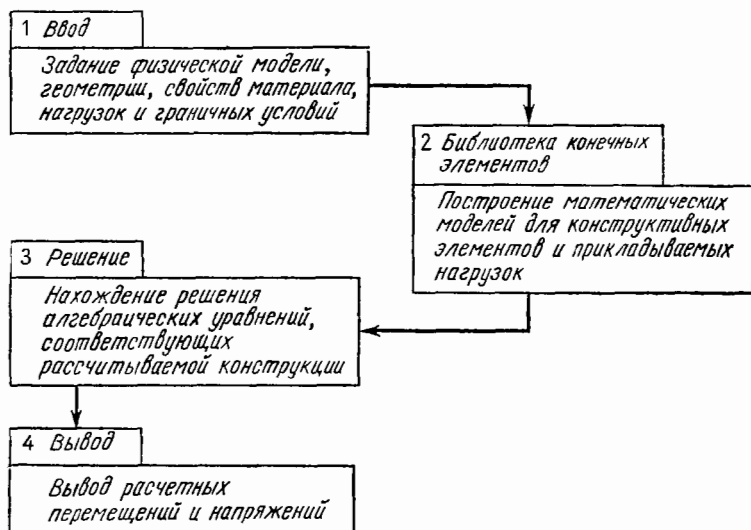


Рис. 1.8. Блок-схема вычислительных программ при анализе конструкций.

построения сетки конечных элементов, стереографического изображения конечно-элементной модели, так что до начала вычисления представляется возможность выявить ошибки.

Для настоящей программы этап реализации, озаглавленный *библиотека конечных элементов*, имеет принципиальное значение. Здесь хранится закодированная процедура построения конкретных элементов. Во многих программах общего назначения хранятся все изображенные на рис. 1.1 элементы, а также целый ряд других элементов и альтернативные модели для элементов указанных типов. Например, может храниться треугольный элемент при изгибе. В идеале библиотека элементов должна иметь возможность непрерывно пополняться моделями конечных элементов любой степени сложности.

На этапе реализации программы, озаглавленной *библиотека конечных элементов*, осуществляется выборка из памяти начальных

данных и построение для каждого конечного элемента алгебраических соотношений с помощью соответствующих закодированных процедур. На этой же стадии в программе общего вида предусмотрены операции, необходимые для установления алгебраических соотношений, описывающих связи элемента с соседними элементами и всей системы в целом. Последние операции поэтому формируют общую систему алгебраических уравнений для конечно-элементной модели конструкции в целом.

На этапе программы общего назначения, названном *решение*, осуществляются операции с построенными на предыдущем этапе алгебраическими уравнениями. Для статических задач это означает не что иное, как решение системы линейных алгебраических уравнений с известной правой частью. При расчете динамических задач потребуется значительный объем вычислений, отслеживающий характер изменения прикладываемых нагрузок в зависимости от времени. В некоторых случаях требуется оперировать величинами, которые относятся к подконструкциям целой конструкции, как указывалось в разд. 1.3 на примере самолета «Боинг-747», либо осуществлять специальные операции на построенных начальных уравнениях. Этот этап также включает промежуточные операции, необходимые для получения всех интересующих аспектов решения.

На этапе *вывод* исследователю выдается решение, знание которого поможет ему определить пропорции конструкции и разрешить другие вопросы проектирования. Обычно это решение представляет собой выведенный на печать массив напряжений, вычисленных в заданных точках или отнесенных к соответствующим конечным элементам. Это могут быть также выведенные на печать массивы перемещений или другая информация. Как и на этапе *ввод*, здесь имеются сильные тенденции к графическому выводу информации, например в виде графического изображения линий главных напряжений или мод потери устойчивости и колебаний.

В связи с этим следует отметить, что в книге излагаются вопросы, касающиеся только расчета конструкции. Иными словами, предполагается, что данные относительно свойств материала, геометрии и размеров элементов конструкции определены на этапе ввода. Современное состояние в области математического программирования и аналогичных дисциплин [1.23] позволяет осуществить с помощью компьютера выбор таких параметров проектирования, которые минимизируют вес или стоимость конструкции. Эти вопросы не будут рассматриваться в книге.

Перечисленные выше части программ общего назначения имеют одну общую черту — блочность, или *модульность* основных операций. Хорошо составленная программа должна позволить пользователю вставлять новые блоки операций по мере надобности или в том случае, когда определены более эффективные способы реализации указанных операций. К этим операциям относятся, напри-

мер, построение новых конечных элементов, улучшенные методы решения алгебраических уравнений или различные способы графического вывода результатов. Некоторые программы позволяют пользователю осуществлять это, следуя приложенным инструкциям без непосредственного обращения к составителю программы.

Изложение вопросов в книге по возможности дается в той форме, которая находится в соответствии с формой записи процедур в широко распространенных программах общего назначения.

Литература

- 1.1. Maxwell J. C. On the Calculations of the Equilibrium and Stiffness of Frames — Philos. Mag., 1864, (4), 27, p. 294
- 1.2. Castigliano A. Théorie de l'Equilibre des Systèmes Elastiques — Turin, 1879, (English Translation by Dover Publications)
- 1.3. Mohr O. Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisen Konstruktionen. — Z. des Architekten und Ingenieur Vereines zu Hannover, 1868.
- 1.4. Maney G. B. Studies in Engineering — No. 1, Univ. of Minnesota, Minneapolis, Minn., 1915
- 1.5. Ostenfeld A. Die Deformationsmethode — Berlin: Springer-Verlag OHG, 1926
- 1.6. Cross H. Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed-End Moments — Trans. ASCE, 1932, 96, p. 1—10
- 1.7. Argyris J. H., Patton P. C. Computer Oriented Research in a University Milieu. — Appl. Mech. Rev., Dec. 1966, 19, No. 12, p. 1029—1039.
- 1.8. Argyris J., Kelsey S. Energy Theorem and Structural Analysis. — Butterworth Scientific Publications, London, 1960
- 1.9. Turner M., Clough R., Martin H., Topp L. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures — J. Aeronaut. Sci., Sept. 1956, 23, No. 9, p. 805—823
- 1.10. Courant R. Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibration — Bull. Amer. Math. Soc., 1943, 49, p. 1—43
- 1.11. McHenry D. A. Lattice Analogy for the Solution of Plane Stress Problems. — J. Inst. Civil Eng., 1943, 21, p. 59—82.
- 1.12. Hrenikoff A. Solution of Problems in Elasticity by the Framework Method. — J. Appl. Mech., 1941, 8, p. 169—175.
- 1.13. Zienkiewicz O. C. The Finite Element Method. From Intuition to Generality. — Appl. Mech. Rev., Mar. 1970, 23, No. 23, p. 249—256
- 1.14. Timoshenko S. History of Strength of Materials — New York, N. Y.: McGraw-Hill Book Co., 1953 [Имеется перевод: Тимошенко С. П. История науки о сопротивлении материалов с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений. — М.: Гостехиздат, 1957]
- 1.15. Volterra E., Gaines J. E. Advanced Strength of Materials — Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc., 1971
- 1.16. Miller R. E., Hansen S. D. Large Scale Analysis of Current Aircraft. — On General Purpose Finite Element Computer Programs, P. V. Marcal (ed.) — New York, N. Y.: ASME Special Publication, 1970
- 1.17. Smith C. S., Mitchell G. Practical Considerations in the Application of Finite Element Techniques to Ship Structures — Proc. of Symposium on Finite Element Techniques, Univ. of Stuttgart, Stuttgart Germany, June, 1969.
- 1.18. Corum J. M., Krishnamurthy N. A Three-Dimensional Finite element Analysis of Prestressed-Concrete Reactor Model. — Proc. of Symposium on Application of Finite Element Methods in Civil Engineering, Vanderbilt Univ., Nashville Tennessee, Nov. 1969.
- 1.19. Cheng W. K., Hosain M. U., Neis V. V. Analysis of Castellated Beams by the

- Finite Element Method.—Proc. of Conf. on Finite Element Method in Civil Eng., McGill Univ., Montreal, Canada 1972, p. 1105—1140
- 1.20 Ngo D., Scordelis A. C. Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams.—J. Amer. Concrete Inst., Mar 1967, **64**, No. 3, p. 152—163.
- 1.21 Gallagher R. H. Large-Scale Computer Programs for Structural Analysis.—In: On General Purpose Finite Element Computer Programs, P. V. Marcal (ed.), ASME Special Publication, 1970, p. 3—34
- 1.22 Marcal P. V. Survey of General Purpose Programs for Finite Element Analysis.—In: Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, J. T. Oden, et al. (ed.), Univ. of Alabama Press, University, Ala., 1972.
- 1.23 Gallagher R. H., Zienkiewicz O. C. Optimum Structural Design —New York, N. Y.: John Wiley & Sons, Inc., 1973.

2

ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ С ЭЛЕМЕНТАМИ

Наряду с гл. 3 и 4 настоящая глава является во всех отношениях вводной при изложении основ метода конечных элементов. Здесь и в гл. 3 встречаются определения, обозначения и операции, которые более детально обсуждаются в курсе матричного анализа фермовых конструкций. Предполагается, что читатель знаком с этим предметом. (Имеется в виду, что читатель знаком с обозначениями и основными операциями матричной алгебры.) Тем не менее в этой и следующей главах излагаются все основополагающие аспекты анализа поведения конструкций с помощью матричных методов, имеющих отношение к развиваемому здесь методу конечных элементов. Изложение этих же вопросов читатель найдет в [2.1—2.4], однако в этих работах он встретит мало численных примеров. Символы и операции матричной алгебры будут определяться там, где они встречаются впервые.

В начале главы определим применяемые в книге основную координатную систему и правило знаков. Далее изучим взаимосвязь между аналитическим конечно-элементным представлением и поведением соответствующего объема реальной конструкции. Вслед за этим определим коэффициенты влияния для элементов конструкции в случае, когда перемещения в зависимости от прикладываемых нагрузок подсчитываются в отдельных точках элемента. Это, естественно, приводит к определению понятий работы и энергии в терминах коэффициентов влияния, а также к доказательству свойства симметрии, которым обладают указанные коэффициенты при рассмотрении линейно-упругого поведения материала.

Довольно большой по объему раздел этой главы посвящен изложению вопросов, связанных с переходом от одного типа коэффициентов влияния, например от коэффициентов влияния, отвечающих методу перемещений, к другому типу, который в указанном случае соответствует методу сил. Данный переход, который не играет существенной роли при расчете стержневых систем, является основным в методе конечных элементов. В двух последующих разделах

изучаются матрицы преобразования, при этом рассмотрение несколько выходит за рамки обычного применения преобразований при замене систем координат. Это позволит определить операции по уменьшению числа параметров в получаемых решениях. В заключение описываются операции, выполняемые с матрицей жесткости элемента для выделения форм движения как твердого целого.

2.1. Система координат

Ниже наиболее часто будет использоваться ортогональная система координат, оси которой, изображенные на рис. 2.1, обозначены символами x , y и z .

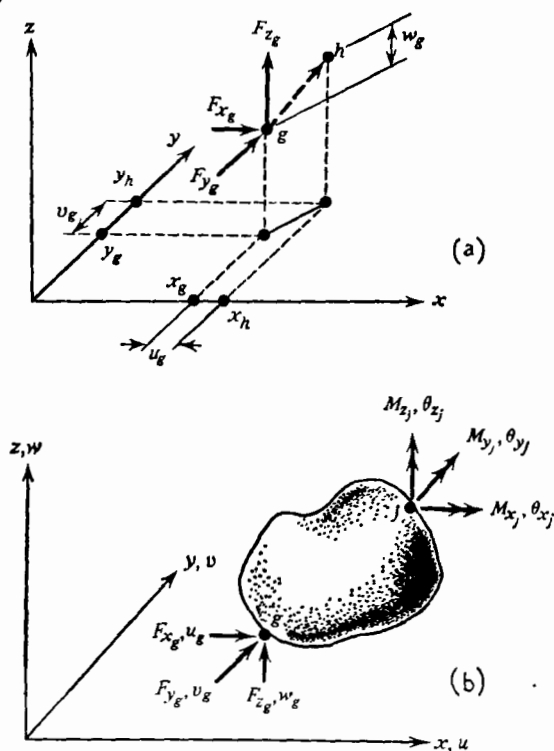


Рис. 2.1. Обозначения для сил и перемещений (а) Перемещение из точки g в точку h ; (б) силы, моменты и соответствующие им перемещения.

Действие нагрузок на упругую конструкцию вызывает перемещение точек тела, включая смещение точек относительно друг друга. В настоящей главе рассматривается поведение элементов конструкций в целом, определяемое смещением точек тела под

действием приложенных к этим точкам систем нагрузок. Детальное изучение относительных смещений точек внутри тела (деформаций) и распределения усилий, отнесенных к единице площади, для внутренних точек (напряжений) будет проведено в последующих главах, особенно в гл. 4—6, где рассматриваются такие факторы, как распределенные нагрузки и начальные деформации, обусловленные тепловым расширением.

Совокупность осей координат для конструкции в недеформированном состоянии вводится согласно рис. 2.1. Эти оси остаются неподвижными в процессе деформации конструкции, и смещения точек тела определяются относительно указанных осей. Рассмотрим для свободного от нагрузок недеформированного тела малый элемент объема с центром в точке g (см. рис. 2.1 (а)). На этот элемент действует вектор усилий с компонентами F_{xg} , F_{yg} , F_{zg} . Под действием этой силы малый элемент объема сместится в точку, обозначенную на рис. 2.1 символом h . *Трансляционное смещение* элемента задается в виде $u_g = x_h - x_g$, $v_g = y_h - y_g$, $w_g = z_h - z_g$. Согласно обозначениям для компонент вектора сил, указанные величины изображаются так же, как компоненты вектора, отнесенного к соответствующей точке недеформированного тела. Положительные значения сил и компонент смещений отвечают положительному направлению осей координат.

В книге, за исключением последней главы, описание поведения тела ограничено линейным случаем. Применительно к рассмотренным выше силам и трансляционным смещениям это означает, что компоненты вектора силы остаются неизменными при перемещении элементарного объема из g в h . Кроме того, такая механическая характеристика, как работа, производимая силами F_{xg} , F_{yg} , F_{zg} на перемещениях u_g , v_g , w_g , не зависит от вида пути в точку h .

Задание трансляционных смещений само по себе недостаточно для полного описания смещений конструкции. В задачах, где рассматриваются балки и конструкции рам, тонкие пластины и оболочки, исследователь, как правило, делает упрощающее предположение, согласно которому отрезок, проведенный перпендикулярно нейтральной линии (для балок и рам) или срединной поверхности (для пластин и оболочек) в недеформированном состоянии, остается нормальным к нейтральной линии или срединной поверхности и после деформации. Мерой смещения точек указанных конструкций служит угол θ поворота нормали, отмеряемый от недеформированного состояния. Часто предполагается, что значение этого угла равно тангенсу угла наклона нейтральной линии или срединной поверхности. Если ввести систему координат, изображенную на рис. 2.1 (b), то *угловые смещения* точки k призматического элемента, расположенного вдоль оси x , определяются величинами

$$\theta_{x_k} = \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_k - \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_k; \quad \theta_{y_k} = \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_k - \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_k; \quad \theta_{z_k} = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_k - \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_k.$$

(Здесь для простоты исключены из рассмотрения силы, задающие трансляционное смещение в точке j .) Заметим, что положительные углы определяются согласно правилу правой руки: если расположить правую руку так, чтобы большой палец указывал на положительное направление оси, то остальные пальцы охватывают ось в положительном направлении вращения. В соответствии с этим правилом θ_y имеет отрицательный знак, так как вращение в положительном направлении приводит к отрицательным смещениям w . Силовыми величинами, соответствующими угловым смещениям, являются векторы моментов с компонентами M_{xj} , M_{yj} и M_{zj} .

Следует отметить, что производные от перемещений можно рассматривать как характеристики поведения конструкции в заданных точках, не приписывая физический смысл этим производным. Действительно, при расчетах методом конечных элементов могут быть использованы и используются производные от перемещений второго и более высокого порядков (например, $\partial^2 w / \partial x^2$, $\partial^3 w / \partial x^3$). Физическая интерпретация этих величин часто не очень наглядна. Это же относится и к отвечающим им силовым величинам. Однако указанные трудности окупаются повышением эффективности при расчетах.

Как уже указывалось, описание поведения детали конструкции в целом — в нашем случае описание поведения отдельного конечного элемента — осуществляется с помощью компонент сил и смещений, заданных в определенных точках тела. Такие точки обычно называются *узловыми точками*. Они также называются *точками соединения*, потому что в большинстве случаев применения метода конечных элементов они соответствуют действительным точкам соединения элементов, образующих полную, или глобальную, аналитическую модель конструкции в целом. Существует много случаев, когда эти точки не имеют столь очевидного физического смысла. Тем не менее в книге понятия *узловая точка* и *точка соединения* не будут различаться.

Рассмотрения этой главы требуют краткой и четкой формы записи сил и перемещений в узловых точках заданного элемента конструкции. Силам и перемещениям соответствуют вектор-столбцы $\{F\}$ и $\{\Delta\}$. (Скобки $\{ \}$ означают вектор-столбец.) Для изображенного на рис. 2.1 (b) элемента, на который действуют силы в точке g и моменты в точке j , имеем

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_{xg} \\ F_{yg} \\ F_{zg} \\ M_{xj} \\ M_{yj} \\ M_{zj} \end{Bmatrix}, \quad \{\Delta\} = \begin{Bmatrix} u_g \\ v_g \\ w_g \\ \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix}.$$

Очевидно, что перечисление компонент вектора в виде столбца невыгодно с типографской точки зрения, поэтому мы будем записывать эти компоненты в виде вектор-строки, обозначаемой символом $\lfloor \rfloor$. Транспонированную матрицу определим как матрицу, получаемую заменой ее строк на столбцы. Согласно этому определению, при транспонировании вектор-столбца получается вектор-строка и наоборот. Так, обозначая транспонирование латинским верхним индексом T , можем записать рассматриваемые векторы в следующем виде:

$$\begin{aligned}\{F\} &= \lfloor F_{x_g} F_{y_g} F_{z_g} M_{x_j} M_{y_j} M_{z_j} \rfloor^T, \\ \{\Delta\} &= \lfloor u_g v_g w_g \theta_{x_j} \theta_{y_j} \theta_{z_j} \rfloor^T.\end{aligned}$$

Отдельная компонента произвольного вектора, задающего n перемещений в узле $\{\Delta\} = \lfloor \Delta_1 \dots \Delta_i \dots \Delta_n \rfloor^T$, например Δ_i , называется i -й степенью свободы.

Первым шагом на пути определения векторов сил и перемещений является задание узловых точек и их расположения относительно координатных осей. В методе конечных элементов следует различать глобальные и локальные системы координат, а также системы координат с началом в узловых точках. *Глобальные* оси координат задаются для всей конструкции, описываемой многими конечными элементами. *Локальные* (или *элементные*) оси координат связаны с отдельными элементами. Так как элементы, вообще говоря, различным образом ориентированы друг относительно друга (ситуация наглядно отражена в гл. 1 при изложении примеров численного анализа авиационных конструкций, судов и реакторов), то локальные оси координат также в общем случае различно ориентированы. На рис. 2.2(а) локальная система координат обозначена штрихами. И наконец, ориентации систем координат, определенных в точках соединения элементов, различны, вообще говоря, для некоторых или для всех элементов, соединенных этой точкой. Эти оси координат отмечаются двумя штрихами. В книге координаты помечаются одним и двумя штрихами только в том случае, если различные координатные системы сравниваются или появляются в одном и том же месте текста. Если же рассматривается одна из координатных систем, то штрихи не пишутся.

Локальные координаты используются в большинстве случаев при формулировке уравнений для отдельных элементов, и ниже описываются способы введения локальных координат для элементов и нумерации узлов элемента. Глобальные координаты фигурируют в основном в гл. 3 при выводе в разд. 3.1 и 3.2 уравнений для всей конструкции (глобальные уравнения). Значение и характер применения координат с началом в узловых точках становятся ясными в п. 3.5.3.

На рис. 2.2(b) изображен принятый в книге способ введения систем координат и нумерации узлов для плоских конечных элементов. Ближайший к началу координат или совпадающий с ним узел принимается за узел 1. Далее следующему в положительном направлении оси x узлу на плоскости $x - y$ присваивается номер 2.

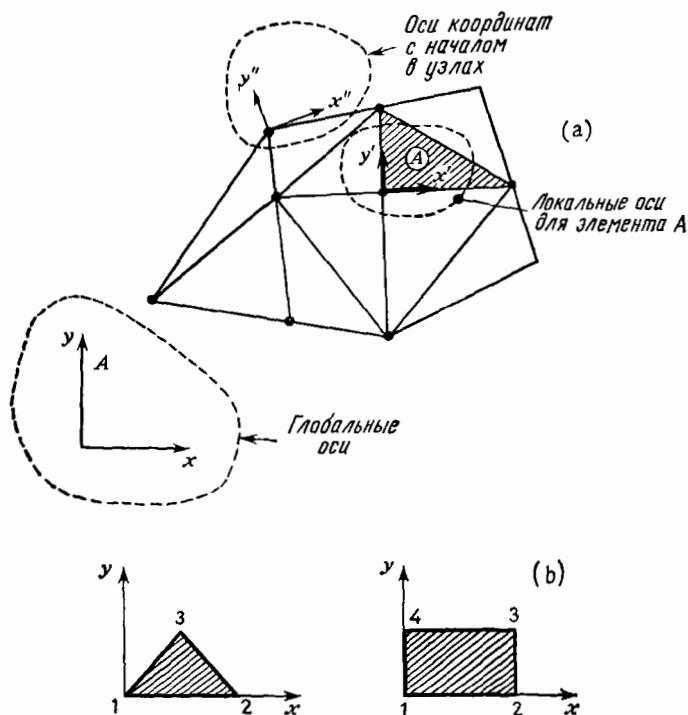


Рис. 2.2. Оси координат и правило нумерации узлов. (а) Типы координатных осей, (б) оси координат и правило нумерации узлов.

Способ нумерации соответствует движению против часовой стрелки. Так определяются плоские элементы (пластинчатые в плоском напряженном состоянии или при изгибе, а также элементы в случае плоской деформации), лежащие в плоскости $x - y$. Иначе нумеруются элементы поперечных сечений осесимметричных тел. Правила для нумерации узлов в трехмерных элементах аналогичны вышеприведенным.

Зная основные свойства упругого поведения конечного элемента или конструкции в локальной системе координат, можно легко осуществить преобразование сил и перемещений к глобальной системе координат.

2.2. Идеализация с помощью основных конечных элементов

Для того чтобы оценить значение различных альтернативных подходов при формулировке конечно-элементных соотношений, полезно изучить взаимосвязь между простой моделью поведения конечного элемента и поведением реальной конструкции. Эта модель наглядно характеризует поведение элемента, хотя существуют и другие равноценные способы рассмотрения основополагающих концепций метода конечных элементов. Действительно, подход, основанный на энергетических или вариационных принципах (гл. 6), — это, по-видимому, наиболее широко используемая схема реализации метода конечных элементов. Однако в этом подходе основополагающие концепции метода конечных элементов рассматриваются с других позиций, нежели в настоящей главе.

Для рассматриваемой здесь простой модели каждому конечному элементу в реальной конструкции отвечает распределенное поле напряжений. Однако для построения *математической модели* напряженное состояние представляется силами — *обобщенными силами* — в *точках соединения*, или *узлах элементов*. Соответственно смещения этих точек — *степени свободы* — используются для описания перемещений элемента.

Реальное и идеализированное поведения типичного элемента сравниваются на рис. 2.3. Действительное распределение напряжений на границе элемента изображено на рис. 2.3 (а); действительные

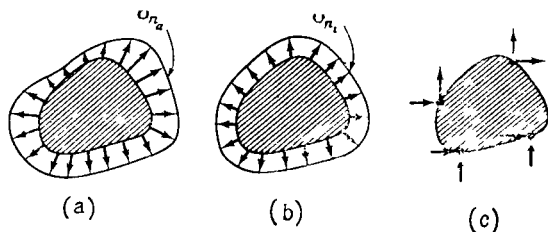


Рис. 2.3 Конечно-элементное представление поведения тела. (а) Реальное поведение (σ_n — реальное нормальное напряжение), (б) основной этап идеализации (σ_{n_i} — идеализированное нормальное напряжение); (с) идеализация, необходимая на этапе расчетов

смещения имеют такой же нерегулярный характер. На рис. 2.3 (б) показан основной этап идеализации, а именно непосредственное представление предполагаемого поведения элемента. Считается, что поля напряжений, деформаций и перемещений имеют упрощенный вид. И наконец, на рис. 2.3 (с) показана идеализация, необходимая на этапе проведения расчетов. Здесь распределенные вдоль края напряжения заменены обобщенными силами в узлах. Таким образом, процесс построения соотношений в методе конечных элементов

начинается с определения напряженно-деформированного состояния, показанного на рис. 2.3 (b). Затем выполняются алгебраические преобразования, приводящие к математической модели, показанной на рис. 2.3 (c). Основная идеализация должна осуществляться таким образом, чтобы модель аппроксимировала реальную конструкцию при уменьшении размеров элементов.

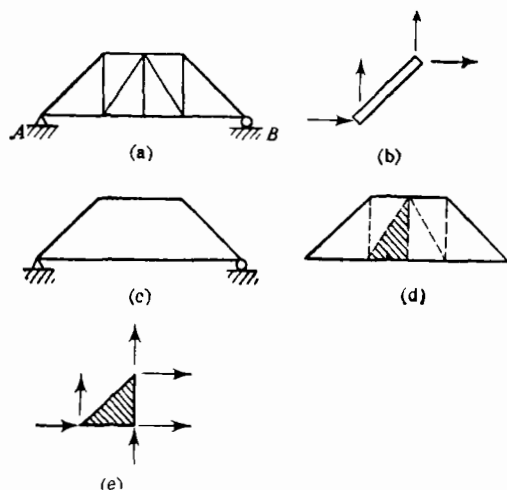


Рис. 2.4. Сравнение особенностей расчета фермовых конструкций матричными методами строительной механики и методом конечных элементов. (a) Ферма; (b) типичный фермовый элемент; (c) тонкая пластина; (d) конечно-элементное представление; (e) типичный конечный элемент

Для пояснения причин, обуславливающих применение идеализации, показанной на рис. 2.3 (c), можно воспользоваться задачей проектирования, представленной на рис. 2.4. Если требуется перекрыть пролет между точками A и B фермовой конструкции, изображенной на рис. 2.4 (a), то для расчета удобно применить матричные методы механики конструкций, которые, как уже отмечалось, предполагаются известными читателю. Из фермы выделяются отдельные элементы, и для типичного осевого элемента, изображенного на рис. 2.4 (b), выписываются соотношения, связывающие силы и перемещения в узлах. Реальную ферму можно заменить теперь математической моделью, рассматривая равновесие сил в каждом узле.

Предположим теперь, что пролет необходимо перекрыть тонкой пластинчатой конструкцией, изображенной на рис. 2.4 (c). Описанная выше процедура применима и для данной задачи, если, согласно рис. 2.4 (d), конструкция моделируется в виде совокупности треугольных элементов, изображенных на рис. 2.4 (e), для которых определены соотношения, связывающие силы и перемещения в узлах

элемента. Затем аналогично численному исследованию фермовых конструкций следует математическое моделирование пластинчатой конструкции. Гл. 3 посвящена описанию этой процедуры.

Существуют важные различия между представлениями фермой и пластиной. Суммируя покоординатно силы в каждом узле элемента фермы и приравнивая результирующие к соответствующим прикладываемым нагрузкам, мы полностью удовлетворим условиям равновесия внутри фермы. Соединение элементов фермы полностью обеспечивает перемещение фермы как конструктивного целого без каких-либо разрывов, смещений. Решение задачи для фермы является точным в рамках предположений о том, что соединения осуществлены при помощи шарниров и отсутствуют деформации изгиба. Если каждый из элементов фермы разбить на более мелкие элементы и рассчитать конструкцию с учетом этого более точного представления, то решение не изменится.

Однако решения методом конечных элементов для сплошных конструкций, таких, как тонкая пластина, изображенная на рис. 2.4(е), пространственное деформируемое тело, изгибаемая пластина и оболочка, не являются точными. Для иллюстрации этого утверждения предположим, что треугольные элементы, изображенные на рис. 2.4(д), построены в предположении, что для поля перемещений вдоль сторон элемента имеет место квадратичный закон распределения. На рис. 2.5(а) изображено деформированное состояние двух выбранных элементов. Если соединить элементы, как указано выше, то, вообще говоря, будет нарушена непрерывность перемещений вдоль линии, соединяющей два элемента (см. рис. 2.5(б)). Соединения в вершинах элементов обеспечивают непрерывность только в этих точках. Квадратичная функция однозначно определяется по трем точкам, а так как только две концевые точки соприкасающихся сторон участвуют в определении формы смещений вдоль ребра, перемещения краев элементов будут различаться, за исключением некоторых частных случаев. Если использовать большее количество элементов, как указано на рис. 2.5(с), то различие в смещениях на сторонах соседних элементов станет меньше и вызванная указанным обстоятельством погрешность решения также уменьшится. Эта ошибка конечна для любого конечного числа элементов, поэтому решение является приближенным.

Аналогичные доводы остаются в силе и для условий равновесия. Силы в узлах статически эквивалентны *поверхностным силам или распределенным нагрузкам*. В плоском случае, как показано на рис. 2.5(д), имеются две компоненты поверхностных усилий: T_n — нормальная компонента и T_s — касательная компонента. Представим себе (см. рис. 2.5(д)), что нормальные усилия T_n^A и T_n^B прилежащих элементов A и B постоянны вдоль соприкасающихся сторон и каждое распределение усилий определяется параметрами, заданными в вершинах соответствующих элементов. Следовательно, поверх-

ностные усилия прилежащих элементов будут, вообще говоря, различны и условия равновесия в общем случае не выполняются вдоль соприкасающихся сторон. Аналогичная ситуация может существовать и для тангенциальных усилий T_s . Итак, узловые силы только

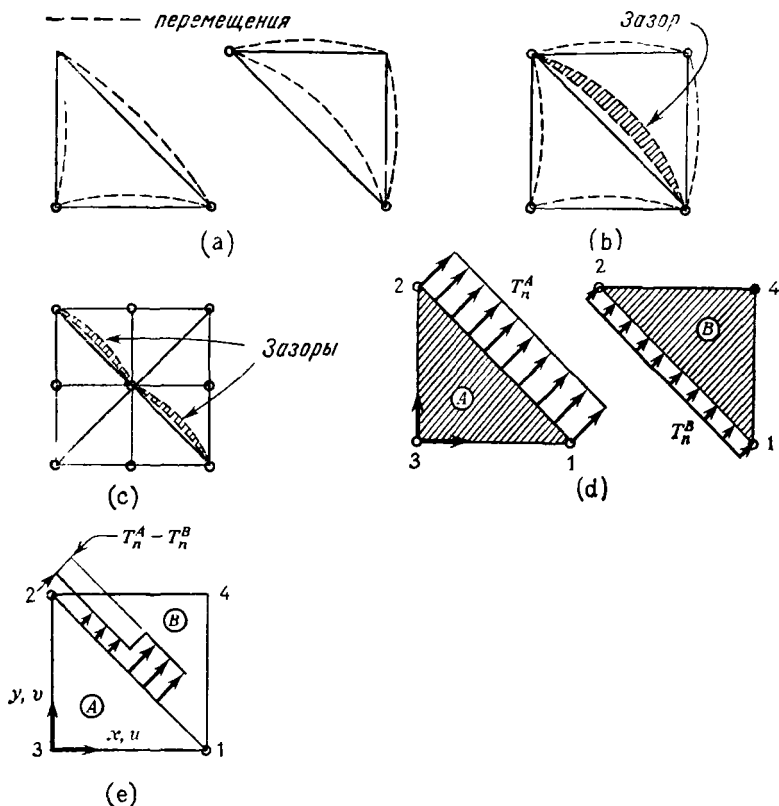


Рис. 2.5. Источники ошибок в конечно-элементном анализе. (а) Деформированные очертания отдельных элементов; (б) разрыв перемещений вдоль общей границы соседних элементов; (с) уменьшение различия в перемещениях в результате измельчения сетки; (д) нормальные компоненты поверхностных усилий для отдельных элементов; (е) разрыв значений нормальных компонент поверхностных усилий на общей границе двух соседних элементов.

приближенно удовлетворяют условиям равновесия в дискретных точках и опять существует аналитически предсказуемая ошибка, которую можно уменьшить путем улучшения конечно-элементного разбиения.

Следует отметить, что последовательное улучшение (измельчение) сетки элементов, каждый из которых строится на основе одних и тех же предположений относительно напряжений или перемеще-

ний, не является единственным способом достижения сходимости. Можно также сохранить размеры элементов и последовательно улучшать представления для полей в элементе. Элементы, которые отвечают более сложным представлениям полей по сравнению с простейшим для данного элемента полем, известны как элементы *более высокого порядка*.

При расчетах по методу конечных элементов источниками ошибок могут служить два условия: условие равновесия и условие непрерывности перемещений. В большинстве существующих моделей конечных элементов стараются удовлетворить условиям непрерывности перемещений, поэтому можно считать, что погрешности при численном анализе возникают из-за неточного удовлетворения условий равновесия. Полная процедура численного исследования методом конечных элементов позволяет, однако, считать, что возникающие погрешности обусловлены нарушением обоих условий. Как будет показано, теоретическое исследование метода конечных элементов тесно связано с выяснением, какое из условий выполняется, а какое нарушено.

2.3. Свойства соотношений между силами и перемещениями для элемента

Определим вид соотношений, связывающих узловые силы и узловые перемещения конечного элемента, т. е. так называемые *соотношения между силами и перемещениями*. Соотношения между силами и перемещениями для элемента записываются в одном из трех основных видов: (1) уравнения жесткости, (2) уравнения податливости, (3) смешанные соотношения между силами и перемещениями.

Уравнения жесткости для элемента являются линейными алгебраическими уравнениями, которые записываются в виде

$$\{F\} = [k]\{\Delta\}. \quad (2.1)$$

Матрица $[k]$ — *матрица жесткости элемента*, а $\{F\}$ и $\{\Delta\}$ — соответственно векторы сил и смещений для элемента. Заметим, что прямоугольная матрица обозначается символом $[]$. Отдельный элемент матрицы $[k]$ назовем *коэффициентом жесткости элемента*. Если перемещение Δ_j полагается равным единице, а перемещения, отвечающие остальным степеням свободы, полагаются равными нулю ($\Delta_h = 0, h \neq j$), значение силы F_i равно k_{ij} .

На рис. 2.6 для треугольного элемента изображен случай, когда перемещение, отвечающее степени свободы 1, полагается равным единице (т. е. $\Delta_1 = 1$), а перемещения, соответствующие остальным степеням свободы, полагаются равными нулю ($\Delta_2 = \Delta_3 = \dots = \Delta_6 = 0$). Следовательно, столбец узловых усилий равен столб-

ду коэффициентов матрицы жесткости, отвечающему Δ_1 , откуда

$$\{F\} = \{k_{i1}\} \quad (i=1, \dots, 6),$$

где

$$\{F\} = [F_1 \dots F_6]^T, \quad \{k_{i1}\} = [k_{11} \dots k_{61}]^T.$$

Очевидно, что $F_1 = k_{11}$ — сила, обеспечивающая единичное смещение Δ_1 , а $F_2 = k_{21}$ и т. д. — реакции. Поэтому столбец коэффициен-

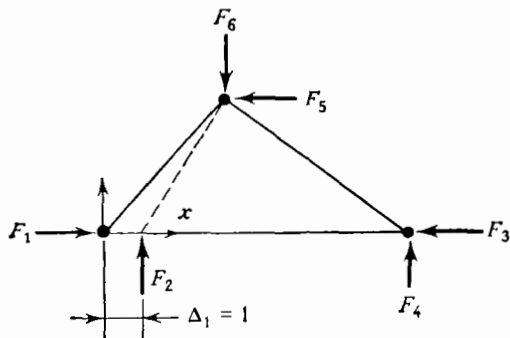


Рис. 2.6. Треугольный пластинчатый элемент.

тов матрицы жесткости $\{k_{i1}\}$ представляет систему уравновешенных сил, действующих на элемент. Аналогичная интерпретация справедлива и для других столбцов матрицы жесткости элемента.

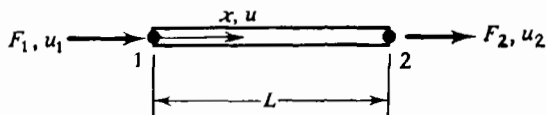


Рис. 2.7. Осевой стержневой элемент.

Рассматривая известные соотношения для стержневого элемента, изображенного на рис. 2.7, получим пример матрицы жесткости элемента

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}.$$

Соответствующее уравнение равновесия есть $\Sigma F_x = 0$, что приводит к равенству нулю суммы элементов в каждом столбце.

Другим примером может служить простейший изгибаемый элемент, изображенный на рис. 2.8 (а), для которого матрица жесткости может быть записана в виде (детали построения указанной матрицы

содержатся в разд. 5.2):

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{2E}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & -3L & -6 & -3L \\ -3L & 2L^2 & 3L & L^2 \\ -6 & 3L & 6 & 3L \\ -3L & L^2 & 3L & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix},$$

где угловые перемещения $\theta_1 = -dw/dx|_1$, $\theta_2 = -dw/dx|_2$. Как отмечалось в разд. 2.1, знак минус возникает потому, что вращениям в положительном направлении (по часовой стрелке) концевых точек элемента (θ_1 , θ_2) отвечает отрицательное смещение w .

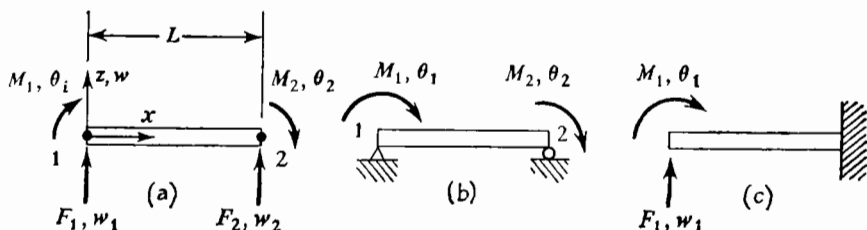


Рис. 2.8. Балочный элемент. (а) Элемент общего вида; (б) свободное опирание; (с) консольное закрепление.

При рассмотрении указанного алгебраического представления заслуживают внимания несколько аспектов. Во-первых, усилия, приложенные к элементу, суть непосредственно силы (F_1 , F_2) и моменты (M_1 , M_2), а перемещения отвечают поступательным (w_1 , w_2) и вращательным (θ_1 , θ_2) степеням свободы. Поэтому, если используются обобщенные понятия *силы* и *перемещения*, то эти понятия можно отнести не только непосредственно к силам и прямолинейным перемещениям, но также к моментам и угловым перемещениям, высшим производным от перемещений (например, d^2w/dx^2) и связанными с ними силовыми параметрами и даже к *обобщенным* перемещениям и силам, не имеющим физического смысла.

Во-вторых, следует отметить, что условия равновесия сил, отвечающих каждому столбцу матрицы жесткости, определяются не только приравниванием нулю суммы элементов в указанном столбце. Сумма коэффициентов жесткости, соответствующих силам F_1 , F_2 , действующим в направлении z , согласно условиям равновесия $\sum F_z = 0$ действительно равна нулю. Однако для оставшихся коэффициентов необходимо учесть уравнение равновесия для моментов. Для столбца 1, например, рассмотрев моменты относительно точки 2, получим $\sum M_2 = (6L - 3L - 3L) = 0$.

В-третьих, порядок задания компонент векторов сил и перемещений приводит к тому, что за всеми величинами, относящимися

к узлу 1, следуют все величины, соответствующие узлу 2. Существует также возможность построить указанные векторы так, чтобы в столбце за всеми силами, действующими в направлении оси 2, следовали моменты, т. е. $[F_1 F_2 M_1 M_2]$, и соответственным образом построить вектор перемещений. Выгода от выбора той или иной формы записи зависит во многом от особенностей вычислительного процесса и простоты представления векторов. В книге используются обе формы записи.

Кроме того, если сравнить эту матрицу жесткости с матрицей растягиваемого стержневого элемента, то выясняется, что коэффициенты последней матрицы суть константы, а среди компонент первой матрицы имеются как константы, так и величины, зависящие от длины, например $6, 3L, 2L^2$. Отношение этих величин может быть достаточно большим, что существенно влияет на точность численного решения системы линейных алгебраических уравнений, образованной при помощи матрицы жесткости. Помимо аспектов, касающихся точности численного процесса, очевидно, что можно добиться больших удобств и значительной эффективности вычислительного процесса, если коэффициенты жесткости элемента не зависят от характерных размеров элемента, т. е. записаны в *безразмерном виде*.

Матрице жесткости изгибаемого элемента можно легко придать безразмерную форму, если иначе определить величины узловых усилий и перемещений. Так, угловые смещения необходимо заменить линейными смещениями $\theta_1 L$ и $\theta_2 L$, а моменты — силами M_1/L и M_2/L . Таким образом, величина L исключается из вторых и четвертых столбцов и строк и происходит обезразмеривание коэффициентов жесткости. Однако скалярный множитель, стоящий перед матрицей, зависит от характерных размеров и механических свойств элемента. Большая часть матриц жесткости в данной книге имеет размерные коэффициенты, однако в принципе их можно записать в безразмерном виде, переходя к новым переменным для перемещений или используя процедуру факторизации. Последняя процедура будет описана на примере треугольного элемента в разд. 5.2.

Наконец, *полная* система уравнений жесткости для элемента связывает все узловые силы элемента с его степенями свободы. Когда это требуется, в число степеней свободы включается и *движение тела как твердого целого*. Так, для балочного элемента исключенные перемещения, отвечающие любому из изображенных на рис. 2.8(b) и (c) условию закрепления, суть совокупность перемещений, связанных с движением тела как твердого целого. Если выделить такого рода степени свободы и силы, то можно более кратко описать жесткостные свойства элемента. Однако это потребует, как показано в гл. 7, применения специальным образом определенной методики построения полной аналитической модели.

Уравнения податливости для закрепленного элемента выражают

узловые перемещения $\{\Delta_f\}$ через узловые силы $\{F_f\}$, т. е.

$$\{\Delta_f\} = [f] \{F_f\}, \quad (2.2)$$

где $[f]$ — матрица податливости элемента. Отдельный коэффициент податливости f_{ij} есть перемещение Δ_i , вызванное единичной силой F_j . Нижние индексы f у векторов перемещений и сил означают, что у векторов перемещений и сил исключены компоненты, связанные с условиями закрепления. Для простоты нижний индекс ff у матрицы $[f]$ опущен.

Соотношения податливости можно записать только для закрепленных неподвижно элементов, иначе при приложении сил будут возникать неопределенные (бесконечные) перемещения тела как твердого целого. Поэтому из уравнения (2.2) исключены степени свободы для некоторых узлов элементов. Очевидно, что соотношения податливости можно вывести для элементов, закрепленных статически неопределимым способом, однако за некоторым исключением эти соотношения трудно согласовать с аналогичными соотношениями для других элементов конечно-элементной модели сложной конструкции.

Уравнения податливости для элемента можно определить стольким количеством способов, сколько имеется статически определимых условий неподвижного закрепления. Для балочного элемента существуют следующие два возможных вида закрепления. *Свободное опирание* (см. рис. 2.8(b))

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}.$$

Консольное закрепление (рис. 2.8(c))

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 2L^2 & 3L \\ 3L & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \end{Bmatrix}.$$

Коэффициенты матриц податливости различны. Тем не менее, как будет показано в следующем разделе, основная характеристика каждого типа закрепления — дополнительная энергия деформации — у обеих матриц одинакова.

Смешанные соотношения между силами и перемещениями определяют соотношения между векторами, имеющими в качестве компонент как силы, так и перемещения. Если силы и соответствующие степени свободы разбиты на две группы, обозначенные нижними индексами s и f , то общее представление смешанных соотношений можно записать в виде

$$\begin{Bmatrix} F_f \\ F_s \end{Bmatrix} = [\Omega] \begin{Bmatrix} \Delta_s \\ \Delta_f \end{Bmatrix}. \quad (2.3)$$

Одной из форм смешанных соотношений между силами и перемещениями является форма, использующая *передаточную матрицу*. Силы и перемещения на одном конце элемента $\{F_f, \Delta_f\}$ переносятся на противоположный конец $\{F_s, \Delta_s\}$ с помощью матрицы $[\Omega]$. Например, для консольной балки, изображенной на рис. 2.8(с), $\{F_f, \Delta_f\} = \{F_1, M_1, w_1, \theta_1\}$ и $\{F_s, \Delta_s\} = \{F_2, M_2, w_2, \theta_2\}$. В этом случае коэффициенты матрицы $[\Omega]$ можно определить, используя уравнения статического равновесия элемента и матрицу податливости элемента $[f]$. В разд. 2.6 будет описана эта методика. Другие виды смешанных соотношений можно получить, опираясь непосредственно на основные понятия конечно-элементной модели. Это описано в гл. 6.

2.4. Работа и энергия

Работа W силы равна произведению величины силы на величину перемещения точки приложения в направлении действия силы. Так, для вектора сил $\{F\}$ и соответствующего вектора перемещений $\{\Delta\}$ имеем

$$W = 1/2 \{ \Delta \}^T \{ F \} = 1/2 \{ F \}^T \{ \Delta \}, \quad (2.4)$$

где множитель $1/2$ отвечает процессу нагружения, при котором нагрузка увеличивается *постепенно* от нуля до своего конечного значения (т. е. силы инерции, обусловленные динамическим пове-

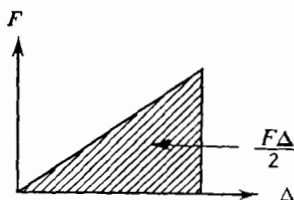


Рис. 2.9.

дением, пренебрежимо малы). Из рис. 2.9 видно, что для представленной зависимости, связывающей отдельно взятую силу F_i и соответствующее ему перемещение Δ_i (рис. 2.9), работа равна площади заштрихованной области.

Соотношение (2.4) можно преобразовать в выражения, содержащие только силы или только перемещения, используя для этого соответственно уравнения жесткости (2.1) или податливости (2.2). Так,

$$W = 1/2 \{ \Delta \}^T [k] \{ \Delta \} = U, \quad (2.4a)$$

или

$$W = 1/2 \{ F_f \}^T [f] \{ F_f \} = U^*. \quad (2.4b)$$

Как показано в следующих главах, указанные величины определяют *энергию деформации* U элемента и *дополнительную энергию*

деформации U^* . Видно, что обе величины U и U^* суть квадратичные функции параметров $\{\Delta\}$ и $\{F_f\}$ соответственно.

Как указывалось в разд. 2.3, всем возможным формам матрицы податливости для данного элемента отвечает одна и та же дополнительная энергия деформации. К примеру, рассмотрим вновь балочный элемент. Если балка свободно опирается (см. рис. 2.8(b)), то

$$U^* = \frac{\{M_1 \ M_2\}}{2} \left(\frac{L}{6EI} \right) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{6EI} (M_1^2 + M_2^2 - M_1 M_2).$$

Чтобы сравнить с консольной балкой, вначале необходимо выразить силу F_1 через моменты M_1 и M_2 . Из условия равенства моментов относительно правой точки опоры (точки 2) получим $F_1 = -(M_1 + M_2)/L$. Дополнительная энергия деформации для консольной балки имеет вид

$$U^* = \frac{\{F_1 \ M_1\}}{2} \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 2L^2 & 3L \\ 3L & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \end{Bmatrix}.$$

После подстановки полученного выше выражения для F_1 в формулу для U^* и проведения выкладок приходим к выражению для U^* в зависимости от M_1 и M_2 , полностью совпадающему с приведенным выше.

2.5. Свойства взаимности

Коэффициенты податливости и жесткости для линейно-упругого тела обладают свойством *взаимности* ($f_{ij} = f_{ji}$ и $k_{ij} = k_{ji}$). Этот факт имеет важное значение с точки зрения эффективности вычислительного процесса и может быть также полезен при проверке правиль-

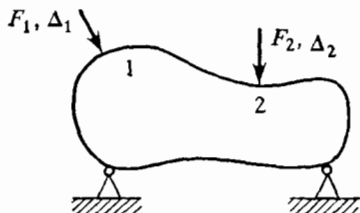


Рис. 2.10.

ности коэффициентов, получаемых численно или аналитически. Чтобы доказать теорему взаимности и тем самым определить пределы ее применимости и налагаемые при этом ограничения, рассмотрим выражения для работы, производимой над закрепленной конструкцией, изображенной на рис. 2.10, последовательно прикладываемыми нагрузками F_1 и F_2 . Обозначим указанную работу через

W_I . При постепенном приложении нагрузки F_1

$$W_{I_1} = {}^{1/2}(\Delta_1)_1 F_1 = {}^{1/2}(f_{11} F_1) F_1, \quad (2.5)$$

где нижний индекс у W_I и справа от круглых скобок, содержащих Δ_1 , означает соответствие *силе* 1. Прикладывая теперь F_2 и оставляя неизменной F_1 , с использованием аналогичных обозначений получим

$$W_{I_2} = {}^{1/2}(\Delta_2)_2 F_2 + (\Delta_1)_2 F_1 = {}^{1/2}(f_{22} F_2) F_2 + (f_{12} F_2) F_1, \quad (2.6)$$

поэтому полная работа W_I равна

$$W_I = W_{I_1} + W_{I_2} = {}^{1/2}f_{11}(F_1)^2 + {}^{1/2}f_{22}(F_2)^2 + f_{12} F_1 F_2. \quad (2.7)$$

Меняя теперь порядок приложения сил и вновь подсчитывая вклад каждого слагаемого в работу, получим для нагружения силой F_2 (работу для указанной последовательности нагружений обозначим через W_{II})

$$W_{II_1} = {}^{1/2}(\Delta_2)_2 F_2 = {}^{1/2}f_{22}(F_2)^2 \quad (2.5a)$$

и для прикладываемой вслед за этим силы F_1

$$W_{II_2} = {}^{1/2}(\Delta_1)_1 F_1 + (\Delta_2)_1 F_2 = {}^{1/2}f_{11}(F_1)^2 + f_{21} F_1 F_2, \quad (2.6a)$$

так что

$$W_{II} = W_{II_1} + W_{II_2} = {}^{1/2}f_{22}(F_2)^2 + {}^{1/2}f_{11}(F_1)^2 + f_{21} F_1 F_2. \quad (2.7a)$$

Так как для линейного упругого тела последовательность приложения нагрузок не влияет на величину производимой работы, можно приравнять полученные выражения для W и, сократив подобные члены, получим

$$f_{21} = f_{12}. \quad (2.8)$$

В общем случае будем иметь

$$f_{ij} = f_{ji}. \quad (2.9)$$

Это утверждение известно как *теорема взаимности Максвелла*.

Так как матрица, обратная симметричной матрице, также симметрична, а матрица жесткости является обратной к матрице податливости, то имеем

$$k_{ij} = k_{ji}. \quad (2.10)$$

Теорема взаимности Максвелла обычно устанавливается как специальный случай *закона Бетти*, который гласит, что работа, производимая системой нагрузок $\{P_1\}$ на перемещениях $\{\Delta_2\}$, вызванных системой нагрузок $\{P_2\}$, равна работе, производимой системой сил $\{P_2\}$ на перемещениях $\{\Delta_1\}$, вызванных силами $\{P_1\}$.

2.6. Преобразование соотношений жесткости и податливости

Имея для элемента один тип соотношений между силами и перемещениями, можно получить другие типы соотношений с помощью простых операций. Рассмотрим сначала преобразование соотношений жесткости в соотношения податливости. Проиллюстрируем этот случай на примере плоского элемента, изображенного на

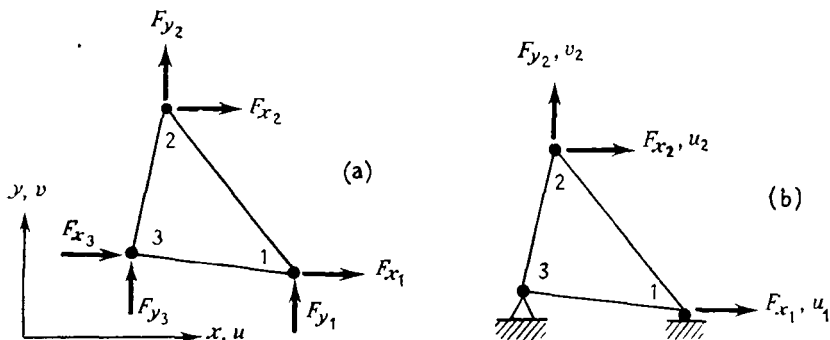


Рис. 2.11. Плоский элемент. (а) Незакрепленный; (б) закрепленный.

рис. 2.11(а). Как указано в разд. 2.3, при построении соотношений податливости элемент должен быть закреплен таким образом, чтобы исключить движение его как твердого целого, и система должна быть статически определима. Указанный способ закрепления элемента изображен на рис. 2.11(б).

Величины, отвечающие закреплению, обозначаются нижним индексом s , а величины, соответствующие оставшимся степеням свободы, — нижним индексом f .

Итак, разбиваем матрицу жесткости следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_f \\ \mathbf{F}_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ff} & \mathbf{k}_{fs} \\ \mathbf{k}_{sf} & \mathbf{k}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_f \\ \Delta_s \end{Bmatrix}, \quad (2.11)$$

где для случая, изображенного на рис. 2.11(б), каждая из подматриц (\mathbf{k}_{ff}) и т. д.) является (3×3) -матрицей и

$$\begin{aligned} \{\mathbf{F}_f\} &= [F_x, F_y, F_z]^T, & \{\mathbf{F}_s\} &= [F_x, F_y, F_z]^T, \\ \{\Delta_f\} &= [u_1, u_2, u_3]^T, & \{\Delta_s\} &= [u_3, v_1, v_3]^T. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Так как из-за условий закрепления $\{\Delta_s\} = 0$, то

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_f \\ \mathbf{F}_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ff} \\ \mathbf{k}_{sf} \end{bmatrix} \{\Delta_f\}. \quad (2.13)$$

Уравнения, записанные выше линии, разделяющей матрицу, представляют собой независимую систему уравнений, связывающую внешние силы $\{F_f\}$ с соответствующими допустимыми узловыми смещениями. Решая указанные уравнения путем обращения матрицы $[k_{ff}]$, получим

$$\{\Delta_f\} = [f] \{F_f\}, \quad (2.14)$$

где

$$[f] = [k_{ff}]^{-1}. \quad (2.15)$$

(Заметим, что операция обращения матрицы обозначается степенью -1 .) Матрица $[f]$, по определению, состоит из искомой совокупности коэффициентов податливости элемента. Поэтому соотношения податливости выводятся из соотношений жесткости путем статически определимого закрепления тела с последующим исключением столбцов и строк матрицы жесткости, отвечающих компонентам закрепления, и обращением матрицы из оставшихся элементов.

Чтобы осуществить обратный процесс построения полной матрицы жесткости по известной матрице податливости, необходимо начать с обращения матрицы податливости. Итак,

$$\{F_f\} = [f]^{-1} \{\Delta_f\} = [k_{ff}] \{\Delta_f\}. \quad (2.16)$$

Так как матрица податливости отвечает статически определимому неподвижному закреплению, то соотношения, связывающие внешние силы и реакции опоры, легко устанавливаются путем выписывания уравнений статического равновесия. Эти соотношения могут быть записаны в виде

$$\{F_s\} = [R] \{F_f\} \quad (2.17)$$

и при помощи подстановки уравнений (2.16) получим

$$\{F_s\} = [R][f]^{-1} \{\Delta_f\} = [k_{sf}] \{\Delta_f\}, \quad (2.18)$$

так что

$$[k_{sf}] = [R][f]^{-1}. \quad (2.19)$$

Для получения остальных составляющих полной системы уравнений жесткости исследуем предполагаемую конечную форму этих соотношений, т. е. уравнений (2.11). Работа, выполненная внешними нагрузками $\{F_f\}$ на соответствующих им перемещениях $\{\Delta_f\}$, должна равняться работе, производимой оставшимися силами $\{F_s\}$ на соответствующих им перемещениях $\{\Delta_s\}$, если считать, что $\{F_f\}$ становятся реакциями опоры. Это можно записать в матричном виде следующим образом:

$$^{1/2} [F_s] \{\Delta_s\} = ^{1/2} [\Delta_f] \{F_f\}. \quad (2.20)$$

Так как в результате транспонирования соотношений (2.18) $[F_s] = [\Delta_f] [k_{sf}]^T$, то (2.20) можно записать в виде

$$^{1/2} [\Delta_f] [k_{sf}]^T \{\Delta_s\} = ^{1/2} [\Delta_f] \{F_f\}. \quad (2.20a)$$

Поэтому

$$\{F_f\} = [k_{sf}]^T \{\Delta_s\} = [k_{fs}] \{\Delta_s\}. \quad (2.21)$$

Следовательно, с учетом (2.19) получим

$$[k_{fs}] = [f]^{-1} [R]^T. \quad (2.22)$$

Принимая во внимание окончательный вид матрицы жесткости (см. (2.11)), можно вывести из условий равновесия те же соотношения, что и в (2.17). Подставляя (2.21) в (2.17) и учитывая (2.22), приходим к равенству

$$\{F_s\} = [R][f]^{-1}[R]^T \{\Delta_s\} = [k_{ss}] \{\Delta_s\}. \quad (2.23)$$

Поэтому конструируемая матрица жесткости принимает вид

$$[k] = \left[\begin{array}{c|c} [f]^{-1} & [f]^{-1}[R]^T \\ \hline [R][f]^{-1} & [R][f]^{-1}[R]^T \end{array} \right]. \quad (2.24)$$

В итоге оказывается, что матрица жесткости строится путем обращения матрицы податливости и матрицы $[R]$, которая получается из условий статического равновесия элемента. Исходная матрица $[f]$ является симметричной. Так как $[k_{fs}]$ получается в результате транспонирования $[k_{sf}]$, то указанные блоки результирующей матрицы жесткости симметричны. Также видно, что блок $[k_{ss}]$ представляется в виде произведения трех матриц, причем первый сомножитель получается транспонированием последней матрицы. Указанное тройное произведение, называемое *конгруэнтным преобразованием*, дает симметричную матрицу, если центральная матрица в произведении симметрична. Следовательно, так как $[f]$ симметрична, то и $[k_{ss}]$ симметрична. Соотношения (2.24) представляют общую формулу преобразования матрицы податливости в матрицу жесткости с учетом степеней свободы, отвечающих движению тела как твердого целого. Число s усилий в опорах предопределено требованиями неподвижности и статической определимости системы, а на число внешних сил f нет ограничений (т. е. отсутствуют ограничения на размерность матрицы податливости).

Чтобы проиллюстрировать эту процедуру, рассмотрим консольный балочный элемент, изображенный на рис. 2.8(с). Матрица податливости $[f]$ была выписана ранее, а уравнения для реакций имеют вид

$$\begin{Bmatrix} F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -L & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \end{Bmatrix}.$$

Поэтому стоящая в правой части равенства матрица 2×2 есть матрица $[R]$. Читатель может проверить, что использование матриц $[f]$ и $[R]$ в (2.24) приводит к указанной ранее матрице жесткости для балочного элемента.

Теперь в нашем распоряжении имеются все соотношения, позволяющие построить определенные в разд. 2.3 соотношения между усилиями и перемещениями смешанного вида. В этом представлении величины $\{F_f, \Delta_f\}$ выражаются через $\{F_s, \Delta_s\}$. Решая сначала (2.17), имеем

$$\{F_f\} = [R]^{-1} \{F_s\}. \quad (2.17a)$$

Используя далее (2.24) (верхний блок), записываем верхнюю часть соотношения (2.11) в виде уравнения

$$\{F_f\} = [f]^{-1} \{\Delta_f\} + [f]^{-1} [R]^{-1} \{\Delta_s\}. \quad (2.24a)$$

Разрешая относительно $\{\Delta_f\}$, получим

$$\{\Delta_f\} = [f] \{F_f\} - [R]^T \{\Delta_s\}. \quad (2.24b)$$

После подстановки (2.17a) для $\{F_f\}$ имеем

$$\{\Delta_f\} = [f] [R]^{-1} \{F_s\} - [R]^T \{\Delta_s\}. \quad (2.24c)$$

Тогда, используя (2.17a) и (2.24c), приходим к соотношению

$$\begin{Bmatrix} F_f \\ \Delta_f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R^{-1} & 0 \\ [f][R]^{-1} & -R^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_s \\ \Delta_s \end{Bmatrix}. \quad (2.3a)$$

Квадратная матрица, стоящая в правой части данного уравнения, играет роль матрицы $[\Omega]$ из (2.3). Символом нуль в правом верхнем углу матрицы (2.3a) обозначена *нулевая* матрица, т. е. матрица, состоящая полностью из нулевых элементов.

2.7. Преобразование степеней свободы

Часто уравнения, записанные для некоторых степеней свободы $\{\Delta'\}$, необходимо записать относительно других степеней свободы $\{\Delta\}$. Наиболее распространен случай, когда исходные степени свободы отвечают одной системе координат и требуется, чтобы уравнения задачи были записаны для степеней свободы, отвечающих другой системе координат. Иными словами, разыскивается преобразование координат. В общем случае преобразованные степени свободы могут не иметь определенного физического смысла, а их число не обязательно должно совпадать с числом исходных степеней свободы. Соотношение, связывающее указанные две системы степеней свободы, можно записать в виде

$$\{\Delta'\} = [\Gamma] \{\Delta\}. \quad (2.25)$$

Предположим, что уравнения, которые требуется преобразовать, имеют вид

$$[k'] \{\Delta'\} = \{F'\}. \quad (2.26)$$

Предположим также, что каждая компонента F'_i вектора усилий $\{F'\}$ производит работу $1/2 F'_i \Delta'_i$ на перемещении Δ'_i , а ее работа вдоль любой другой компоненты перемещения $\{\Delta'\}$ равна нулю. Если выполняются указанные условия, т. е. условия справедливы при действии сил в ортогональных направлениях, то такие векторы сил и перемещений называются *сопряженными векторами*. Обе системы векторов $\{\Delta'\}$, $\{F'\}$ и $\{\Delta\}$, $\{F\}$ выбираются сопряженными. Чтобы величина работы оставалась инвариантной при заданном преобразовании, необходимо выполнение равенства $\lfloor F' \rfloor \{\Delta'\} = \lfloor F \rfloor \{\Delta\}$, откуда с учетом (2.25) имеем $\lfloor F' \rfloor [\Gamma] \{\Delta\} = \lfloor F \rfloor \{\Delta\}$, следовательно, $\lfloor F' \rfloor [\Gamma] = \lfloor F \rfloor$, или после транспонирования

$$[\Gamma]^T \{F'\} = \{\hat{F}\}, \quad (2.27)$$

где символом $(\hat{})$ обозначена совокупность сил, полученная в результате преобразования $\{F'\}$.

Откуда вытекает, что преобразование перемещений (2.25) подразумевает преобразование сил согласно (2.27). Преобразования сил и перемещений называются *контраградиентными*, если оговорены условия сопряженности. Если преобразование сил задано, то матрица преобразования перемещений получается в результате транспонирования сил. Принцип контраградиентности очень важен в том случае, когда преобразования перемещений (или сил) легко находятся, исходя из физического смысла, а преобразование сопряженного вектора осуществить нелегко. Это имеет место, например, если уменьшение числа степеней свободы осуществляют путем процедуры преобразования, описанной в разд. 2.8.

Для уяснения следствий проведенных выше рассмотрений, касающихся соотношений жесткости элемента, удобно иметь дело с введенными в разд. 2.4 величинами энергии деформации и внешней работы. Потребуем снова, чтобы величина работы оставалась инвариантной при заданном преобразовании. Выполняя непосредственную подстановку (2.25) в (2.4а) и (2.4), получим

$$U = \frac{\lfloor \Delta' \rfloor}{2} [k'] \{\Delta'\} = \frac{\lfloor \Delta \rfloor}{2} [\Gamma]^T [k'] [\Gamma] \{\Delta\} = \frac{\lfloor \Delta \rfloor}{2} [\hat{k}] \{\Delta\}, \quad (2.4c)$$

$$W = \frac{\lfloor \Delta' \rfloor}{2} \{F'\} = \frac{\lfloor \Delta \rfloor}{2} [\Gamma]^T \{F'\} = \frac{\lfloor \Delta \rfloor}{2} \{F\}. \quad (2.4d)$$

Следовательно, преобразованная матрица жесткости, отмеченная знаком $(\hat{})$, дается выражением

$$[\hat{k}] = [\Gamma]^T [k'] [\Gamma]. \quad (2.28)$$

Вектор сил, естественно, преобразуется согласно (2.27). Задаваемое соотношением (2.27) преобразование $[k']$ в $[\hat{k}]$ имеет вид конгруэнтного преобразования. Таким образом, если $[k']$ — симметричная матрица, то и преобразованная матрица $[\hat{k}]$ должна быть симметричной.

Если осуществляется преобразование для ортогональных осей координат, то указанные формулы можно получить более непосредственно, проведя, однако, несколько больше выкладок. Предположим, что преобразование компонент перемещения задается в результате непосредственного рассмотрения соотношений, связывающих

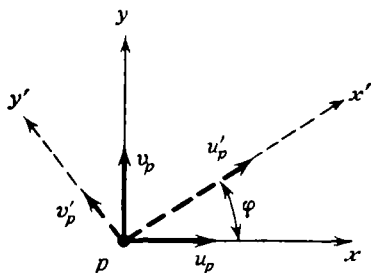


Рис. 2.12.

щих векторы смещений $\{\Delta'\}$ и $\{\Delta\}$. Вместо того чтобы принять соотношение (2.27) в качестве преобразования векторов сил, предположим, что это преобразование задается независимо, в результате непосредственного рассмотрения соотношения, связывающего векторы сил $\{F'\}$ и $\{F\}$. Запишем указанное преобразование в виде

$$\{F'\} = [\Gamma]\{F\}. \quad (2.29)$$

Поэтому, подставляя (2.25) и (2.29) в (2.26), получим

$$[k'][\Gamma]\{\Delta\} = [\Gamma]\{F\}$$

или

$$[\Gamma]^{-1}[k'][\Gamma]\{\Delta\} = \{F\}. \quad (2.30)$$

Преобразование координат в случае ортогональных координатных осей обладает свойством $[\Gamma][\Gamma]^T = [I]$, где $[I]$ — *единичная матрица*, т. е. диагональная матрица, все элементы которой равны единице. Так как, по определению обратной матрицы, $[\Gamma][\Gamma]^{-1} = [I]$, то

$$[\Gamma]^T = [\Gamma]^{-1}. \quad (2.31)$$

Если матрица обладает свойством (2.31), т. е. ее транспонированная матрица равна ее обратной матрице, то такая матрица называется *ортогональной*. Подставив (2.31) в (2.30), приходим к определению $[k]$, данному в (2.28).

Предположим, к примеру, что матрицу жесткости для плоского элемента, заданную в системе координат x' и y' , показанной на рис. 2.12, требуется задать в системе координат x и y . Для векторов, отнесенных к произвольной точке p элемента, имеем преобразование

$$\begin{Bmatrix} u'_p \\ v'_p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_p \\ v_p \end{Bmatrix} = [\Gamma_p] \begin{Bmatrix} u_p \\ v_p \end{Bmatrix}$$

и

$$[\Gamma_p]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} = [\Gamma_p]^T.$$

Поэтому, если весь элемент содержит $n/2$ узлов (т. е. в рассматриваемом плоском случае n степеней свободы), искомая матрица преобразования всего элемента имеет вид

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} [\Gamma_1] & & \\ & \ddots & \\ & & [\Gamma_2] \\ & & & \ddots \\ & & & & [\Gamma_{n/2}] \end{bmatrix}$$

(символом $\begin{bmatrix} \Gamma & \end{bmatrix}$ обозначается диагональная матрица).

Так как не требуется обращать матрицу преобразований, а нужно лишь транспонировать ее, то можно определить неквадратные матрицы преобразования координатных осей. Матрица жест-

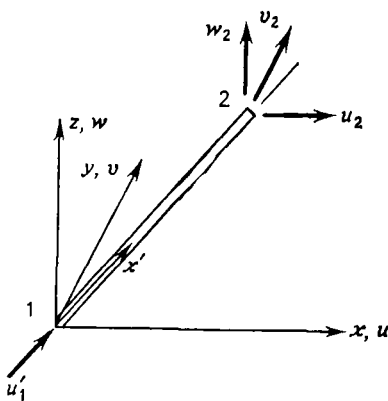


Рис. 2.13.

кости стержневого элемента (разд. 2.3) характеризует два осевых смещения. Этот элемент в глобальной системе координат (рис. 2.13) описывается шестью компонентами смещений. Обозначая направляющие косинусы осей элемента в системе координат x, y и z через $l_{x'x}$, $l_{x'y}$ и т. д., представим преобразование координатных осей

в виде

$$\begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{x'x} & l_{x'y} & l_{x'z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{x'x} & l_{x'y} & l_{x'z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{Bmatrix}.$$

(Для удобства в точке 2 показаны только глобальные (без штриха) компоненты, а в точке 1 — только осевая компонента u'_1 .)

2.8. Конденсация

Термин *конденсация* означает снижение размерности системы уравнений при помощи исключения некоторых степеней свободы. Чтобы сократить общее число исходных степеней свободы, редуцированная система уравнений (конденсированные уравнения) должна быть выражена в терминах заранее выбранных степеней свободы $\{\Delta_c\}$, которые хотят оставить, а также через дополнительные степени свободы $\{\Delta_b\}$, т. е. $[\Delta] = [\begin{smallmatrix} \Delta_b \\ \Delta_c \end{smallmatrix}]$. Исходные уравнения представляются следующим образом

$$\begin{bmatrix} k_{bb} & k_{bc} \\ k_{cb} & k_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_b \\ \Delta_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_b \\ F_c \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

и редуцируются (конденсируются) к виду

$$[\hat{k}_{cc}]\{\Delta_c\} = \{\hat{F}_c\}. \quad (2.33)$$

Рассмотрим подход, в котором конденсирование основано на преобразовании координат. Итак, задача состоит в построении соотношений

$$\begin{Bmatrix} \Delta_b \\ \Delta_c \end{Bmatrix} = [\Gamma_0] \{\Delta_c\}, \quad (2.34)$$

где $[\Gamma_0]$ — искомая матрица преобразований. Для этого решим сначала верхнюю часть уравнения (2.32)

$$\{\Delta_b\} = -[k_{bb}]^{-1}[k_{bc}]\{\Delta_c\} + [k_{bb}]^{-1}\{F_b\}. \quad (2.35)$$

Так как второй член в правой части соотношения есть константа для заданных нагрузок, соотношения жесткости между степенями свободы $\{\Delta_c\}$ и $\{\Delta_b\}$ задаются с помощью матрицы $-[k_{bb}]^{-1}[k_{bc}]$. Замечая также, что $\{\Delta_c\} = [I]\{\Delta_c\}$, можно записать следующее

преобразование координат *)

$$\begin{Bmatrix} \Delta_b \\ \Delta_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -[k_{bb}]^{-1}[k_{bc}] \\ I \end{bmatrix} \{\Delta_c\} = [\Gamma_0] \{\Delta_c\}. \quad (2.36)$$

Применяя указанное преобразование к уравнению (2.32) как обычное преобразование координат, получим соотношения (2.33), где

$$[\hat{k}_{cc}] = [[k_{cc}] - [k_{cb}][k_{bb}]^{-1}[k_{bc}]], \quad (2.37)$$

$$\{\hat{F}_c\} = [\Gamma_0]^T \begin{Bmatrix} F_b \\ F_c \end{Bmatrix} = \{F_c\} - [k_{cb}][k_{bb}]^{-1}\{F_b\}. \quad (2.38)$$

Заметим, что данное преобразование, полученное на основе соотношений, связывающих лишь степени свободы, можно применять также для преобразования векторов в правосторонней системе координат.

Эти результаты можно непосредственно получить, если подставить (2.35) в нижнюю часть уравнения (2.32), однако конденсация на основе преобразования степеней свободы $[\Gamma_0]$ оказывается полезной при анализе динамической и упругой устойчивостей и может оказаться удобной с точки зрения программирования даже для линейных задач статики

Для иллюстрации рассмотрим вновь консольную балку, изображенную на рис. 2.8(с), и исключим с помощью конденсации степень свободы θ_1 . Опорная матрица жесткости получается из представ-

*) Может вначале показаться, что преобразование, задаваемое с помощью (2.36), должно содержать постоянный вектор $\{\Delta_b'\} = [k_{lb}]^{-1}\{F_b\}$, входящий в (2.35), и записываться в виде

$$\begin{Bmatrix} \Delta_b \\ \Delta_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -[k_{bb}]^{-1}[k_{bc}] \\ I \end{bmatrix} \{\Delta_c\} + \begin{Bmatrix} \Delta_b \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad (2.36a)$$

Однако можно доказать, что наличие вектора $\begin{bmatrix} \Delta_b' \\ 0 \end{bmatrix}$ не оказывает влияния на преобразование. Вектор $\begin{bmatrix} \Delta_b' \\ 0 \end{bmatrix}$ отвечает движению тела как твердого целого. Хотя преобразование, включающее движение тела как твердого целого, изменяет полную энергию системы, алгебраические уравнения, которые задают поведение конструкции (например, уравнения жесткости (2.1)), выводятся из условия стационарности энергии, а на это условие движение тела как твердого целого не влияет. Можно убедиться в этом, подставляя (2.36a) в выражение для потенциальной энергии

$$P_p = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta_b & \Delta_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{lb} & k_{bc} \\ k_{cb} & k_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_b \\ \Delta_c \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta_b & \Delta_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_b \\ F_c \end{Bmatrix}.$$

После подстановки в указанное выражение соотношений (2.36a) и последующего дифференцирования по $\{\Delta_b\}$ приходим к результату, совпадающему с результатом, получаемым, если применить преобразование $[\Gamma_0]$. Представления, поясняющие эту последовательность операций, содержатся в гл. 6 и 7.

ленной в разд. 2.3 матрицы с помощью вычеркивания третьих и четвертых столбцов и строк. В результате имеем

$$\frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 2L^2 & -3L \\ -3L & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ w_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ F_1 \end{Bmatrix}.$$

Так как исключению подлежит верхняя строка, то $k_{bb}=4EI/L$, $k_{bc}=-6EI/L^2$. Поэтому матрица преобразования, используемая для конденсации, имеет вид

$$[\Gamma_0] = \begin{bmatrix} -\frac{L}{4EI} & \frac{-6EI}{L^2} \\ \hline & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2L} \\ \hline 1 \end{bmatrix}.$$

Применяя это преобразование к матрице жесткости следующим образом: $[\Gamma_0]^T = [k][\Gamma_0]$ и к правой части в виде $[\Gamma_0]^T \{F\}$, получим

$$\frac{3EI}{L^3} w_1 = F_1 + \frac{3}{2L} M_1.$$

Откуда, выражая w_1 , получим

$$w_1 = \frac{F_1 L^3}{3EI} + \frac{M_1 L^2}{2EI},$$

т. е. точное уравнение податливости для этой конструкции.

Интересно отметить, что конденсация матрицы жесткости означает удовлетворение условиям равновесия, которые соответствуют исключаемым элементам.

Возможность использовать данный подход для конденсации представится в разд. 3.5. Он будет также применяться в книге и для ряда других целей.

2.9. Выделение мод движения тела как твердого целого

Обычный подход к построению определенных типов элементов, особенно искривленных, делает затруднительным выявление числа и типов мод движения тела как твердого целого, содержащихся в получаемой матрице жесткости. В настоящем разделе определяют алгебраические операции, которые необходимо проделать с матрицей жесткости элемента, чтобы получить эту информацию.

Включение степеней свободы, отвечающих движению тела как твердого целого, в совокупность уравнений жесткости элемента приводит к линейной зависимости некоторых уравнений от других. Линейная зависимость существует в системе уравнений, если одно из них можно записать как линейную комбинацию других уравнений системы. Можно также интерпретировать линейную зависимость и с геометрической точки зрения: систему уравнений n -го

порядка можно представить как систему из n векторов с проекциями (компонентами) на n осей. Если два вектора — в нашем случае наборы коэффициентов двух уравнений — коллинеарны, то имеет место линейная зависимость.

Коэффициенты системы уравнений жесткости элемента, вообще говоря, связаны, т. е. внедиагональные коэффициенты отличны от нуля. Поэтому каждая строка есть вектор с отличными от нуля проекциями на более чем одно из n главных направлений. Указанные строки можно преобразовать в векторы, соответствующие n главным направлениям. Эти векторы имеют одну ненулевую компоненту, лежащую на главной диагонали матрицы, и образуют в совокупности диагональную матрицу. Если пара исходных векторов коллинеарна, то один из диагональных элементов окажется равным нулю (число главных направлений меньше, чем размерность исходных векторов на единицу). Если существует s наборов коллинеарных векторов, то на диагонали матрицы, задающей главные направления, будет s нулевых элементов.

Исходя из вышеизложенного, число мод движения тела как твердого целого, содержащихся в матрице жесткости элемента, можно определить, преобразуя матрицу жесткости к диагональному виду (к главным направлениям); число диагональных нулевых элементов равно числу указанных мод. Чтобы выполнить требуемое преобразование, найдем *собственные векторы* и соответствующие им *собственные значения* матрицы жесткости. С этой целью определим вначале *характеристическое уравнение* для матрицы $[k]$. Характеристическое уравнение для матрицы $[k]$ есть алгебраическое уравнение, получающееся в результате раскрытия детерминанта $[k - \omega I] = 0$. Если $[k]$ — матрица порядка $n \times n$, то для ω получается алгебраическое уравнение n -й степени, а корни уравнения $\omega_1, \dots, \omega_i, \dots, \omega_n$ являются *собственными значениями* матрицы $[k]$. *Собственный вектор*, отвечающий собственному значению ω_i , есть ненулевой вектор $\{d_i\}$, удовлетворяющий уравнению $[k]\{d_i\} = \{\omega_i\}$.

При условиях, широко распространенных в анализе линейных систем, собственные векторы *ортogonalны* по отношению к матрице $[k]$. Согласно этому свойству, для двух произвольных собственных векторов $\{d_i\}$, $\{d_j\}$ ($i \neq j$) справедливо

$$[d_i] [k] \{d_j\} = 0. \quad (2.39a)$$

Кроме того, если $\{d_i\}$ нормировать таким образом, чтобы $[d_i] \{d_i\} = 1$, то

$$[d_i] [k] \{d_i\} = \omega_i. \quad (2.39b)$$

Рассмотрим теперь $(n \times n)$ -матрицу $[\Gamma_d]$, столбцы которой суть собственные векторы матрицы $[k]$, т. е.

$$[\Gamma_d] = [\{d_1\} \dots \{d_i\} \dots \{d_n\}]. \quad (2.40)$$

Если построить конгруэнтное преобразование матрицы $[k]$, используя $[\Gamma_d]$ в качестве матрицы преобразования, то свойства (2.39) гарантируют получение диагональной матрицы жесткости, называемой *модальной матрицей жесткости* $[\Gamma k_m]$. Поэтому

$$[\Gamma k_m] = [\Gamma_d]^T [k] [\Gamma_d]. \quad (2.41)$$

Очевидно, число независимых уравнений в $[k]$ определяется ненулевыми членами в модальной матрице жесткости $[\Gamma k_m]$. Число нулевых главных диагональных элементов дает число мод движений тела как твердого целого. Собственные векторы, отвечающие указанным строкам матрицы, описывают вид соответствующих смещений тела как твердого целого. Так как главные диагональные члены являются также собственными значениями, поиск мод движений тела как твердого целого сводится к нахождению нулевых собственных значений.

Чтобы проверить высказанные соображения, рассмотрим матрицу жесткости для изображенного на рис. 2.7 стержневого элемента. В этом случае соответствующая задача на собственные значения может быть записана в виде

$$\begin{vmatrix} \frac{AE}{L} - \omega & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} - \omega \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая детерминант, получим $\omega^2 - (2AE/L)\omega = 0$, так что $\omega = 0, 2AE/L$, а нормализованные собственные векторы имеют вид

$$[\hat{\Gamma}_d] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Наконец, применяя преобразование (2.41), приходим к соотношению

$$[\Gamma k_m] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Здесь стержневой элемент обладает одной степенью свободы движения тела как твердого целого. Существует поэтому одно собственное значение, равное нулю, и соответствующий собственный вектор, отвечающий движению элемента как твердого целого (осевому смещению элемента).

Можно дать другую интерпретацию вышеизложенной процедуры. Движение тела как твердого целого приводит к нулевому значению потенциальной энергии деформации, так как деформации при таком движении отсутствуют. В терминах главных направлений вклады в энергию деформации даются выражениями $1/2 [d_i]^T [\Gamma k_m] \{d_i\}$. Вклады в энергию, обусловленные собствен-

ными векторами, отвечающими движению тела как твердого целого, должны быть равны нулю. Чтобы это имело место, соответствующие собственные значения должны быть равны нулю.

Литература

- 2.1. Beaufait F., Rowan W. H., Hoadley P. G., Hackett R. M. *Computer Methods of Structural Analysis*.—Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc., 1970.
- 2.2. Meek J. L. *Matrix Structural Analysis*.—New York, N. Y.: McGraw-Hill Book Co., 1971.
- 2.3. Wang C.K. *Matrix Methods of Structural Analysis*, 2nd ed.—Scranton, Pa.: International Textbook Co., 1970.
- 2.4. Willems N., Lucas W. *Matrix Analysis for Structural Engineers*.—Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc., 1970.

Задачи

- 2.1. Получите смешанную форму зависимостей между силами и перемещениями для балочного элемента (см. (2.3)).
- 2.2. Для заданной матрицы податливости балочного элемента проверьте, что величина дополнительной энергии деформации равна аналогичной энергии для свободно опертого элемента.

$$\begin{Bmatrix} F_2 \\ M_1 \end{Bmatrix} = \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 2L^2 & -3L \\ -3L & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_1 \end{Bmatrix}.$$

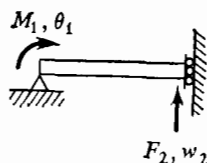


Рис. P2.2.

- 2.3. Ниже вписана матрица податливости для треугольного пластинчатого элемента, находящегося в плоском напряженном состоянии (рис. P2.3). Вычислите

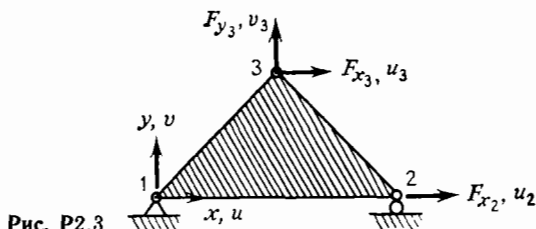


Рис. P2.3.

матрицу жесткости элемента и проверьте правильность полученного результата, сравнивая ее с матрицей жесткости, показанной на рис. 5.4.

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \frac{2}{Et x_2 y_3} \begin{bmatrix} x_2^2 & x_2 x_3 & -\mu x_2 y_3 \\ x_2 x_3 & 2(1+\mu)y_3^2 + x_3^2 & -\mu x_2 y_3 \\ -\mu x_2 y_3 & -\mu x_2 y_3 & y_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \\ F_{y1} \end{Bmatrix}$$

2.4. Ниже приводится матрица податливости для треугольного элемента при $u_3=v_3=w_3=0$. Докажите, что величина дополнительной энергии деформации совпадает с аналогичной энергией, отвечающей матрице податливости в задаче 2.3.

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{2}{E t x_2 y_3} \begin{bmatrix} (x_2)^2 & \frac{\mu x_2^2 y_3}{x_{3-2}} & \frac{y_3^2 x_2^2}{(x_{3-2})^2} \\ \frac{\mu x_2 y_3^2}{x_{3-2}} - x_2 x_{3-2} & -\mu x_2 y_3 + \frac{y_3^3 x_2}{(x_{3-2})^2} & 2y_3^2 + \frac{x_3^4 - 2 + y_3^4}{(x_{3-2})^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{x_1} \\ F_{y_1} \\ F_{x_3} \end{Bmatrix}$$

(Симметрично)

(x₃₋₂) = (x₃ - x₂)

2.5. Матрицу податливости консольной балки, изображенной на рис. 2.8(с), можно модифицировать так, чтобы учесть эффект влияния поперечных сдвиговых деформаций. Это можно осуществить путем прибавления $L/A_s G$ к коэффициентам податливости, связывающим w_1 и F_z , т. е. $[f_{11} = (L^3/3EI + L/A_s G)]$, где A_s — эффективная площадь сдвига (эквивалентная площадь постоянного по величине сдвигового напряжения, которая приводит к той же суммарной величине сдвигового усилия, что и получаемое по балочной теории распределение сдвиговых напряжений в реальном поперечном сечении), а G — модуль сдвига. Вычислите соответствующую матрицу жесткости элемента.

2.6. Матрица податливости искривленной балки, нагруженной в ее плоскости, приведена на рис. P2.6. Постройте матрицу жесткости элемента.

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 R \end{Bmatrix} = \frac{R^2}{EI} \begin{bmatrix} \frac{3\beta}{2} - 2 \sin \beta + \frac{\sin 2\beta}{4} & \frac{\beta}{2} - \frac{\sin 2\beta}{4} \\ \cos \beta + \frac{\sin^2 \beta}{2} - 1 & \cos \beta - 1 \\ \beta - \sin \beta & \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 R \\ Q_1 R \\ M_1 \end{Bmatrix}$$

(Симметрично)

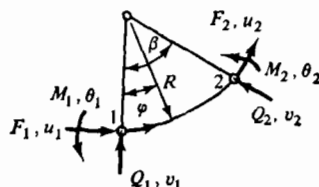


Рис. P2.6.

2.7. Постройте матрицу $[R]$, отвечающую равновесию изогнутого балочного элемента, лежащего в плоскости $x - y$, как показано на рис. P2.7.

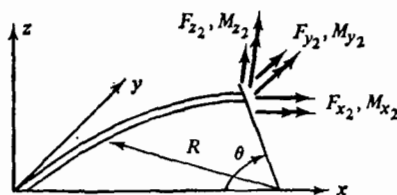


Рис. P2.7.

2.8. Проверьте выполнение условий равновесия для третьего и четвертого столбцов матрицы жесткости треугольного элемента, находящегося в плоском напряженном состоянии (см. рис. 5.4).

2.9. Проверьте выполнение условий равновесия для первого и шестого столбцов матрицы жесткости прямоугольного элемента, находящегося в плоском напряженном состоянии (см. рис. 9.13).

2.10. Проверьте выполнение условий равновесия для первых двух столбцов матрицы жесткости прямоугольного пластинчатого элемента при изгибе, представленной в табл. 12.1.

2.11. На рис. P2.11 приведена матрица жесткости трехузлового стержневого элемента. Осуществите конденсацию этого представления и получите систему уравнений жесткости для u_1 и u_3 .

$$\begin{Bmatrix} F_{x_1} \\ F_{x_2} \\ F_{x_3} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{6L} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

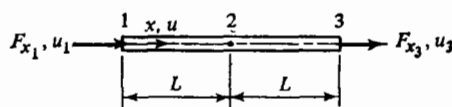


Рис. P2.11.

2.12. Матрица жесткости треугольного пластинчатого элемента, находящегося в плоском напряженном состоянии, задана в координатных осях (x', y') , причем $\{F\} = [k]\{\Delta\}$, где

$$[\Delta] = [u'_1 \ u'_2 \ u'_3 \ v'_1 \ v'_2 \ v'_3].$$

Для изображенного на рис. P2.12 элемента постройте матрицу преобразования к осям (x', y', z') глобальной системы координат.

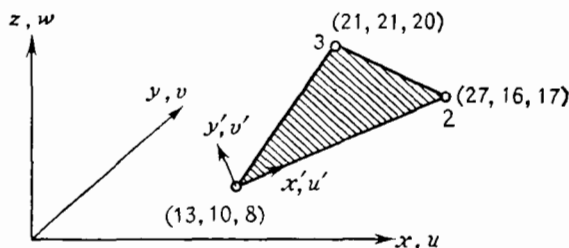


Рис. P2.12.

2.13. Вычислите собственные значения и собственные векторы матрицы жесткости для простого изгибаемого элемента и интерпретируйте результат с точки зрения движения тела как твердого целого.

2.14. Докажите закон Бетти, разбивая матрицу податливости конструкции и используя теорему взаимности.

2.15. В разд. 2.8 было отмечено, что конденсация матрицы жесткости означает удовлетворение условиям равновесия, отвечающим исключенным перемещениям. Обсудите смысл конденсации матрицы податливости.

2.16. Матрица жесткости стержневого элемента $[k]$ построена в ортогональных осях x и y и должна быть преобразована к косоугольной системе координат x' , y' . Постройте преобразованную матрицу жесткости.

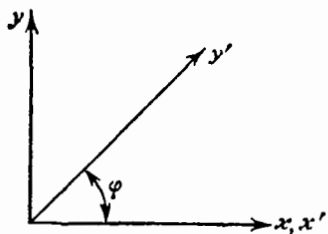


Рис. P2.16.

СПОСОБЫ ГЛОБАЛЬНОГО АНАЛИЗА КОНСТРУКЦИЙ

Существуют три основные группы методов построения алгебраических уравнений, отвечающих полному (глобальному) конечно-элементному представлению конструкций: методы перемещений (жесткости), методы сил (податливости) и смешанные методы. Вид этих уравнений аналогичен виду уравнений для элемента, определенных в разд. 2.3. Данные группы методов соответствуют различным формам энергетических принципов, и в дальнейшем будет удобно разрабатывать эти методы, опираясь на энергетические подходы. В данной главе изучаются два различных подхода к построению одного и того же типа глобальных уравнений, а именно *уравнений жесткости*, в которых роль неизвестных величин играют перемещения в узлах. Чтобы реализовать эти подходы, требуется лишь знание алгебраической формы записи матрицы жесткости конечного элемента и обозначений, введенных в разд. 2.3. Сами же подходы заключаются попросту в учете условий равновесия и непрерывности перемещений в узлах для полной аналитической конечно-элементной модели.

Цель указанных рассматриваний состоит в обеспечении читателя достаточными средствами для построения глобальных уравнений на основе соотношений для элементов, устанавливаемых в последующих главах, а не в тщательном обзоре возможных средств построения уравнений в методе конечных элементов. Жесткостные представления выбраны для описания потому, что, с точки зрения автора, это наиболее простые и эффективные из известных представлений. Кроме того, необходимо добавить, что использование жесткостных представлений налагает мало ограничений (или вообще не вносит ограничений) на характер задания конкретных уравнений для конечного элемента. Это объясняется тем, что, как показано в разд. 2.6, если уравнения выведены в одной форме (например, в форме уравнений податливости), то их можно преобразовать к другому виду (в данном примере возможно преобразование в уравнения жесткости).

Существует много различающихся деталями вариантов построения глобальной системы уравнений жесткости. Рассматриваемые в данной главе подходы — это *прямые методы жесткости* и *методы конгруэнтных преобразований*. Изложив эти методы, в разд. 3.4 задержимся для того, чтобы сделать обзор преимуществ (и некоторых ограничений) метода конечных элементов как общей процедуры расчета конструкций. В разд. 3.5 перейдем к изучению специальных операций над глобальными уравнениями, при этом часть операций необходима, а часть полезна. Сюда входят разбиение на подконструкции, наложение ограничений и использование координат узлов.

В гл. 7 мы вернемся к вопросам расчета конструкции в целом, где уравнения жесткости будут изучены с других позиций. Кроме того, здесь же будут объяснены некоторые свойства решений, которые не могли быть объяснены прежде, а также изучены альтернативные формы глобальных уравнений (например, глобальные уравнения податливости). Так как в данном тексте основное внимание уделяется вопросам, связанным с построением элементов, то детальному описанию примеров глобальных уравнений отводится мало места. Читателю, интересующемуся подобными вопросами, следует обратиться к многочисленным книгам по матричным методам расчета конструкций (см., например, [3.1—3.4]).

3.1. Прямой метод жесткости. Основные понятия

Полный набор соотношений между силами и перемещениями для элемента с n степенями свободы, согласно (2.1), имеет вид

$$\begin{aligned}
 F_1 &= k_{11}\Delta_1 + k_{12}\Delta_2 + \dots + k_{1j}\Delta_j + \dots + k_{1n}\Delta_n, \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 F_i &= k_{i1}\Delta_1 + k_{i2}\Delta_2 + \dots + k_{ij}\Delta_j + \dots + k_{in}\Delta_n, \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 F_n &= k_{n1}\Delta_1 + k_{n2}\Delta_2 + \dots + k_{nj}\Delta_j + \dots + k_{nn}\Delta_n.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Предполагается, что преобразование координат уже проведено, поэтому степени свободы отвечают глобальной системе координат конструкции. Числами $1 \dots i \dots n$ обозначены степени свободы в узлах элемента, и для рассматриваемого случая они соответствуют глобальной системе нумерации тех же узлов. В каждой строке уравнений (3.1) имеются все степени свободы. Способ крепления элемента не задан.

Как только соотношения между силами и перемещениями в элементе определены численно для каждого элемента конструкции,

применение прямого метода жесткости заключается в объединении указанных соотношений в алгебраическом виде, как того требуют условия равновесия и совместности в узлах соединения элементов. Эти операции приводят к системе уравнений, связывающих силы

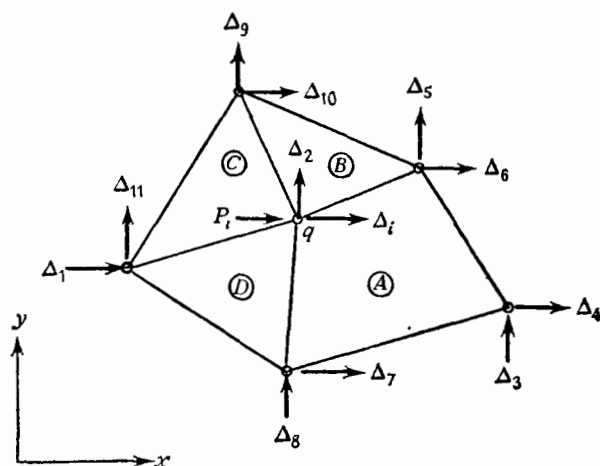


Рис. 3.1. Типичный узел внутри плоской конструкции.

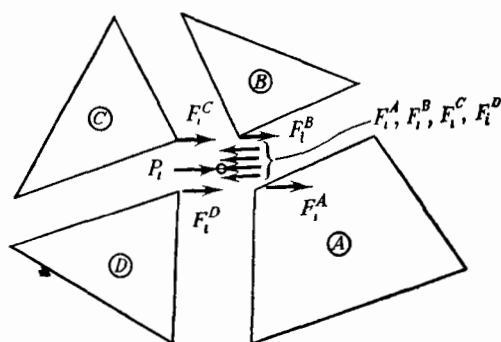


Рис. 3.2 Анализ равновесия в направлении $P_i - \Delta_i$.

и перемещения в узловых точках элементов для конечно-элементной модели всей конструкции.

Чтобы проиллюстрировать эту методику, рассмотрим вывод уравнения связи между силами и перемещениями в точке q в направлении x для изображенной на рис. 3.1 аналитической конечно-элементной модели. Обозначим величины, отвечающие направлению x в точке q , нижним индексом i . Все изображенные элементы — три

треугольника и четырехугольник — лежат в плоскости $x-y$. Для удобства на рис. 3.1 показаны степени свободы для всех узловых соединений, но только одна сила, представляющая внешнюю нагрузку P_i , которая действует в направлении x в точке q .

Согласно условиям равновесия в узле соединения, приложенная нагрузка P_i равна сумме внутренних сил, действующих в соответствующих элементах, прилежащих к узлу *). Чтобы пояснить это, покажем на рис. 3.2 элементы, прилежащие к рассматриваемому узлу. Из условия равновесия в направлении x имеем

$$P_i = F_i^A + F_i^B + F_i^C + F_i^D, \quad (3.2)$$

где F_i^A — сила (внутренняя), действующая в направлении x в элементе A . Соотношения между напряжениями и смещениями для элементов, имеющие вид (3.1), приводят к выражениям для F_i^A, \dots, F_i^D , записанным в терминах соответствующих степеней свободы элемента $\Delta_i^A, \dots, \Delta_{11}^D$. После подстановки указанных выражений в (3.2) приходим к соотношению

$$P_i = (k_{ii}^A \Delta_i^A + k_{i2}^A \Delta_2^A + \dots + k_{i8}^A \Delta_8^A) + (k_{ii}^B \Delta_i^B + k_{i2}^B \Delta_2^B + \dots + k_{i10}^B \Delta_{10}^B) + (k_{ii}^C \Delta_i^C + k_{i1}^C \Delta_1^C + \dots + k_{i11}^C \Delta_{11}^C) + (k_{ii}^D \Delta_i^D + k_{i1}^D \Delta_1^D + \dots + k_{i11}^D \Delta_{11}^D), \quad (3.3)$$

а так как для A, B, C и D в силу условия совместности смещения Δ_i одни и те же для каждой степени свободы ($\Delta_i^A = \Delta_i^B = \Delta_i^C = \Delta_i^D = \Delta_i$), то

$$P_i = (k_{ii}^A + k_{ii}^B + k_{ii}^C + k_{ii}^D) \Delta_i + (k_{i1}^A + k_{i1}^D) \Delta_1 + (k_{i2}^A + k_{i2}^B + k_{i2}^C + k_{i2}^D) \Delta_2 + \dots + (k_{i11}^C + k_{i11}^D) \Delta_{11}, \quad (3.4)$$

или $P_i = K_{i1} \Delta_1 + K_{i2} \Delta_2 + \dots + K_{i11} \Delta_{11}$. Это окончательная форма записи искомого уравнений. Обозначенные прописными буквами $K_{i1}, K_{i2}, \dots, K_{i11}$ величины суть *глобальные коэффициенты жесткости*, а уравнение (3.4) есть *глобальное уравнение жесткости*.

Важно отметить, что каждому из четырех элементов, которые соприкасаются в указанном узле соединения, отвечают коэффициенты жесткости с одинаковыми нижними индексами (например, $k_{ii}^A, k_{ii}^B, k_{ii}^C, k_{ii}^D$). Если нижние индексы для двух или нескольких различных элементов совпадают, то элементы имеют общую степень свободы, которая обозначается вторым нижним индексом. Тогда

*) Для этого соединения следует обратить внимание на важную деталь обозначений. Внутренние силы в узле (или силы в элементе) обозначаются символом F , а внешние силы в узле — через P с соответствующими верхними и нижними индексами в каждом случае. Здесь не вводятся отдельные символы для моментов в элементе и внешних моментов в угле, так как нигде в одной и той же задаче не будут фигурировать все величины сразу.

указанные коэффициенты складываются и получается один коэффициент в уравнении жесткости, которое отвечает силе, представленной первым нижним индексом.

3.2. Прямой метод жесткости. Общая методика

Для дальнейших построений предлагается следующий алгоритм получения уравнений, связывающих прикладываемые нагрузки и перемещения для всей конструкции

1. Перед вычислением каждому коэффициенту жесткости для элемента приписывается два нижних индекса (k_{ij}). Первый индекс i определяет силу, для которой записывается уравнение, а второй индекс j — соответствующую степень свободы.

2. Вводится массив (квадратная матрица), размерность которого равна числу степеней свободы всей системы с учетом того обстоятельства, что каждая сила связана соотношением с каждым перемещением системы. Каждый элемент массива обозначается двумя нижними индексами. Первый нижний индекс (строка) отвечает соответствующему уравнению для силы, второй индекс (столбец) — рассматриваемой степени свободы. В качестве иллюстрации на рис. 3.3 представлен массив, отвечающий двумерной конструкции с общим числом степеней свободы, равным n . Если встречается элемент, в обозначении которого имеется индекс 1, то он располагается в первой строке, в столбце с номером, равным второму нижнему индексу. Например, k_{12} располагается, как указано на рис. 3.3(а).

3. Операции на шаге 2 выполняются для степени свободы с номером 1 до тех пор, пока все элементы не будут найдены. Каждый раз, когда коэффициент засылается в позицию с отличным от нуля значением, его значение прибавляется к последнему. После завершения операции на указанном шаге все элементы в первой строке достигают своего окончательного значения. Следовательно, для i -й степени свободы $K_{i1} = \sum k_{i1}$, где суммирование распространяется на все элементы, имеющие степень свободы i .

4. Операции, проведенные на шагах 2 и 3, повторяются для всех остальных степеней свободы. В результате получают полный набор коэффициентов уравнений жесткости всей конструкции (*глобальных уравнений жесткости*), однако без учета условий закрепления.

5. Граничные условия учитываются, во-первых, выделением перемещений, равных нулю, с последующим устранением из уравнений коэффициентов жесткости, которые стоят сомножителями при указанных степенях свободы *¹). В результате получается больше

*¹) Распространенная альтернатива этой процедуры заключается в выделении с самого начала условий закрепления и построений матриц жесткости элементов только для незакрепленных степеней свободы. Тогда операции на шаге 2—4 приводят непосредственно к редуцированной матрице жесткости и шаг 5 исключается.

уравнений, чем неизвестных. Дополнительные уравнения отвечают внешним нагрузкам в точках закрепления, т. е. реакциям опоры. Эти уравнения выделяются и хранятся для последующих преобразований.

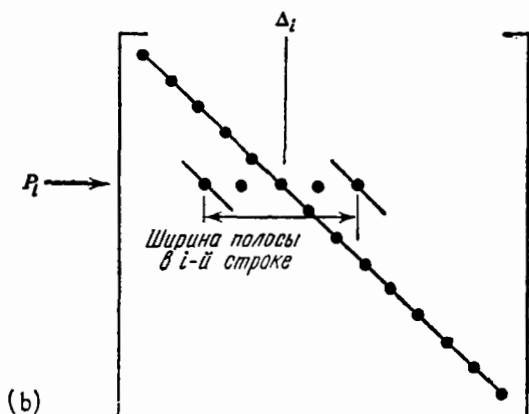
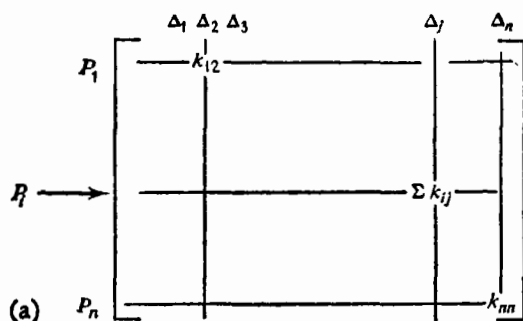


Рис. 3.3. Основные аспекты задания глобальной матрицы жесткости. (а) Способ построения коэффициента k_{ij} в глобальной матрице жесткости и расположение коэффициента k_{12} ; (б) типичный окончательный вид строки матрицы жесткости.

6. Образовавшаяся после выполнения операций на шаге 5 система уравнений решается относительно неизвестных степеней свободы. Внутренние силы, действующие в узлах элемента, определяются в результате подстановки найденных значений степеней свободы в соотношения, связывающие силы и перемещения в элементе. Нахождение указанных величин может потребовать преобразования глобальной системы координат в локальную систему координат с последующим вычислением напряжений.

Выполняемые в процессе реализации алгоритма алгебраические преобразования запишем в матричном виде. Предполагается, что операции на шаге 1—4 выполнены и глобальные уравнения жесткости выписаны и имеют вид

$$\{P\} = [K]\{\Delta\}. \quad (3.5)$$

Далее предположим, что соответствующие закреплению степени свободы $\{\Delta_s\}$ можно сгруппировать, а уравнение (3.5) разбить на блоки так, чтобы выделить сгруппированные степени свободы (на практике эта операция не является необходимой и неудобна, но применяется здесь для большей ясности изложения). Итак,

$$\begin{Bmatrix} P_f \\ P_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ff} & K_{fs} \\ K_{sf} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_f \\ \Delta_s \end{Bmatrix}. \quad (3.6)$$

Заметим, что нижние индексы вводятся в соответствии с разд. 2.6. Так как $\{\Delta_s\} = 0$, то

$$\{P_f\} = [K_{ff}]\{\Delta_f\}, \quad \{P_s\} = [K_{sf}]\{\Delta_f\}. \quad (3.7a, b)$$

Общее решение уравнения (3.7a) получим в следующем *символическом* виде:

$$\{\Delta_f\} = [K_{ff}]^{-1}\{P_f\} = [F]\{P_f\}, \quad (3.8)$$

где матрица $[F]$ — совокупность *глобальных коэффициентов влияния для перемещений*. Подчеркнем, что операция обращения матрицы является символической. На практике, если рассматривается относительно небольшое число условий нагружения $\{P_f\}$, наиболее эффективный способ реализации этого процесса состоит в решении указанных уравнений с известной правой частью.

Реакции опоры $\{P_s\}$ находятся в результате подстановки уравнения (3.8) в (3.7b):

$$\{P_s\} = [K_{sf}][F]\{P_f\}. \quad (3.7c)$$

Чтобы определить распределение внутренних сил в i -м элементе, можно подставить вычисленные степени свободы данного элемента, обозначаемые ниже через $\{\Delta^i\}$, в матрицу жесткости элемента $[k^i]$, что приведет к вычислению усилий $\{F^i\}$ в узлах соединения этого элемента. Чтобы получить напряжения, а не усилия в узлах, зная перемещения, необходимо перед выполнением расчета вывести обычные соотношения, связывающие напряжения в элементе с соответствующими значениями степеней свободы в узловых точках, а именно

$$\{\sigma^i\} = [S^i]\{\Delta^i\}, \quad (3.9)$$

где $\{\sigma^i\}$ — величины напряжений, характеризующих напряженное состояние внутри i -го элемента, а $[S^i]$ — соответствующая *матрица жесткости элемента*. Вектор $\{\sigma^i\}$ объединяет величины напряжений в заданной точке элемента. Таким образом, при этом подходе, если вектор перемещений для элемента вычислен, то для определения напряжений необходимо умножить его слева на соответствующую матрицу жесткости.

В предыдущих рассмотрениях не было уделено внимание некоторым основным свойствам глобальных уравнений жесткости. Во-первых, свойство симметрии коэффициентов жесткости элементов обеспечивает симметричность коэффициентов глобальных уравнений жесткости, поэтому необходимо держать в памяти ЭВМ лишь диагональные элементы матрицы и элементы по одну сторону от диагонали. Во-вторых, как было указано, отвечающие данной степени свободы уравнения жесткости (уравнения равновесия) зависят от степеней свободы тех элементов, которые прилежат к узлу, где задана исходная степень свободы.

Изображенные на рис. 3.1 элементы могут представлять лишь небольшую часть реальной конечно-элементной модели. Элементы, которые находятся вне области, занимаемой элементами A , B , C и D , никак не влияют на вид уравнения (3.4). Другими словами, совокупность отличных от нуля элементов в строке матрицы жесткости состоит из коэффициента на главной диагонали и коэффициентов, отвечающих степеням свободы в данном узле и узлам элементов, которые прилежат к данному узлу. Все остальные элементы в строке равны нулю. Если в полной конечно-элементной модели существует много степеней свободы, а матрица жесткости содержит относительно мало нулевых элементов, то такая матрица называется *разреженной* или *слабо заселенной* матрицей.

Очевидно, что с вычислительной точки зрения удобно «прижать» все нулевые элементы как можно ближе к главной диагонали матрицы (см. рис. 3.3(b)), выделяя тем самым нулевые элементы и облегчая их исключение из вычислительного процесса. Это можно сделать, нумеруя степени свободы таким образом, чтобы расстояние от главной диагонали до самого удаленного нулевого элемента в каждой строке было наименьшим, т. е. минимизируя *ширину полосы* ленточной матрицы.

Минимизация ширины полосы ленточной матрицы — это всего лишь один из способов увеличения эффективности вычислительного алгоритма решения уравнений. Какой бы подход ни применялся для экономичности вычислительного процесса, существен учет свойств симметричности и разреженности матриц жесткости. Обсуждение алгоритмов численного решения уравнений лежит за пределами данной книги, поэтому читателю, желающему получить всестороннее представление о данном вопросе, рекомендуется обратиться к работам [3.5].

Все детали реализации изложенного выше прямого метода жесткости проиллюстрированы на рис. 3.4. Далее рассмотрен пример расчета подкрепленного треугольного элемента.

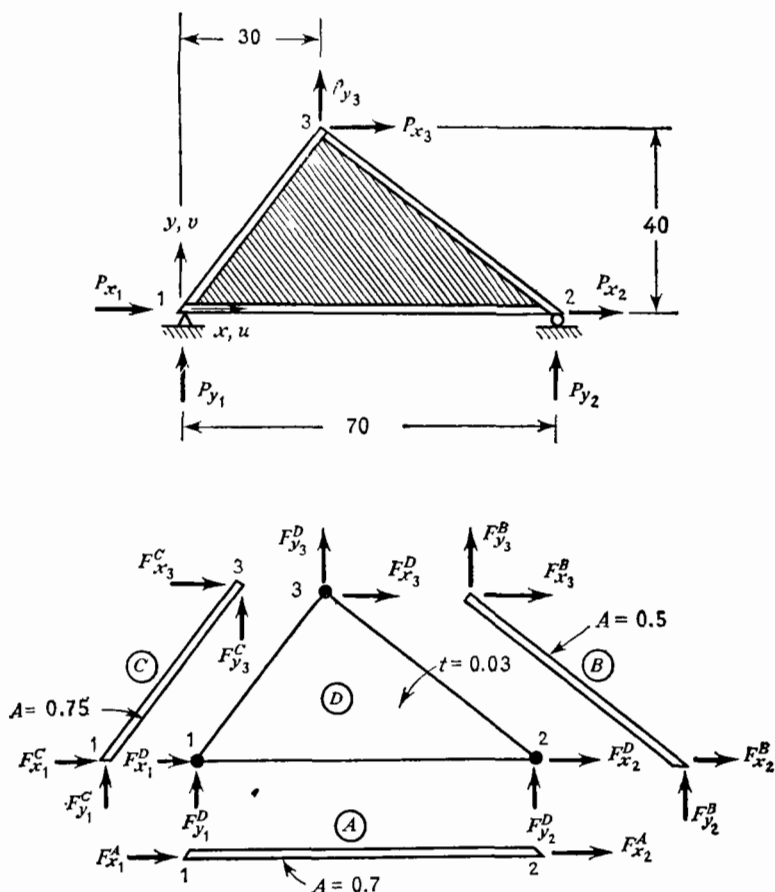


Рис. 3.4. Иллюстративный пример — прямой метод жесткости, примененный к подкрепленному треугольному элементу (линейные размеры даны в дюймах, площадь A — в квадратных дюймах). Пример расчета см. ниже.

Пример расчета треугольного элемента (см. рис. 3.4)

Уравнение жесткости элемента. $E=10^7$ фунт/дюйм², $\mu=0.3$. Все величины вычисляются вручную. Для элемента A (элемент 1—2) справедливо $A/L=0.7/70$. Относительно матрицы жесткости см. разд. 2.3. Преобразование проводится согласно разд. 2.7; при этом $\cos \varphi=1$, $\sin \varphi=0$:

$$\begin{Bmatrix} F_{x_1}^A \\ F_{x_2}^A \end{Bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 1,000 & -1,000 \\ -1,000 & 1,000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}.$$

Для элемента B (элемент 2—3) справедливо $A/L=0,5/56,56$, $\cos \varphi=-0,707$, $\sin \varphi=0,707$:

$$\begin{Bmatrix} F_{x_2}^B \\ F_{x_3}^B \\ F_{y_2}^B \\ F_{y_3}^B \end{Bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 0,442 & & & \\ -0,442 & 0,442 & (\text{Симметрично}) & \\ -0,442 & 0,442 & 0,442 & \\ 0,442 & -0,442 & -0,442 & 0,442 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}.$$

Для элемента C (элемент 1—3) $A/L=0,75/50$, $\cos \varphi=0,6$, $\sin \varphi=0,8$:

$$\begin{Bmatrix} F_{x_1}^C \\ F_{x_3}^C \\ F_{y_1}^C \\ F_{y_3}^C \end{Bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 0,540 & & & \\ -0,540 & 0,540 & (\text{Симметрично}) & \\ 0,720 & -0,720 & 0,960 & \\ -0,720 & 0,720 & -0,960 & 0,960 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_3 \end{Bmatrix}.$$

Для элемента D (элемент 1—2—3) (относительно алгебраической записи матрицы жесткости см. рис. 5.4):

$$\begin{Bmatrix} F_{x_1} \\ F_{x_2} \\ F_{x_3} \\ F_{y_1} \\ F_{y_2} \\ F_{y_3} \end{Bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 1,272 & & & & & \\ -0,695 & 1,127 & & & & (\text{Симметрично}) \\ -0,577 & -0,433 & 1,010 & & & \\ 0,613 & -0,035 & -0,577 & 1,272 & & \\ -0,118 & -0,459 & 0,577 & 0,377 & 0,860 & \\ -0,495 & 0,495 & 0 & -1,649 & -1,237 & 2,866 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}.$$

Построение глобальной матрицы жесткости. Суммируя полученные уравнения, имеем

$$\begin{Bmatrix} P_{x_1} \\ P_{x_2} \\ P_{x_3} \\ P_{y_1} \\ P_{y_2} \\ P_{y_3} \end{Bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 2,812 & & & & & \\ -1,695 & 2,569 & & & & (\text{Симметрично}) \\ -1,117 & -0,875 & 1,992 & & & \\ 1,333 & -0,035 & -1,297 & 2,232 & & \\ -0,118 & -0,901 & 1,019 & 0,377 & 1,302 & \\ -1,215 & 0,936 & 0,278 & -2,609 & -1,678 & 4,288 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}.$$

Использование граничных условий для перемещений. Здесь $u_1=v_1=v_2=0$. Выделите первый, четвертый и пятый столбцы и выпишите отдельно соответствующие строки:

$$\begin{Bmatrix} P_{x_2} \\ P_{x_3} \\ P_{y_3} \end{Bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 2,569 & -0,875 & 0,936 \\ -0,875 & 1,992 & 0,278 \\ 0,936 & 0,278 & 4,288 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}.$$

Обращение матрицы жесткости и подсчет перемещений. Обращая полученную матрицу и подставляя $P_{x_2}=4000$ фунтов, $P_{x_3}=10\,000$ фунтов, $P_{y_3}=2000$ фун-

тов, находим

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = 10^{-6} \begin{bmatrix} 5.203 & 2.466 & -1.296 \\ 2.466 & 6.235 & -0.943 \\ -1.296 & -0.943 & 2.677 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{x_2} \\ P_{x_3} \\ P_{y_3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.04288 \text{ дюйма} \\ 0.07033 \text{ дюйма} \\ -0.00926 \text{ дюйма} \end{Bmatrix}.$$

Вычисление сил реакции опоры. Из первой, четвертой и пятой строк глобальной системы уравнений жесткости (с исключенными соответствующими столбцами) получаем

$$\begin{Bmatrix} P_{x_1} \\ P_{y_1} \\ P_{y_2} \end{Bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} -1.695 & -1.117 & -1.215 \\ -0.035 & -1.297 & -2.609 \\ -0.901 & 1.019 & -1.678 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.04288 \\ 0.07033 \\ -0.00926 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -14\,000 \\ -6857 \\ 4857 \end{Bmatrix}$$

(силы даны в фунтах). Эти значения согласуются со значениями для статического равновесия всей конструкции.

Вычисление осевых сил в элементах. Для элемента *A* из матрицы жесткости элемента со столбцом, отвечающим $u_1=0$, получаем $F_{x_1}^A (= -F_{x_2}^A) = -10^5 \cdot u_2 = -10^5 \cdot 0.04288 = -4288$ фунтов.

Для элемента *B* (столбец, соответствующий v_2 , исключен)

$$\begin{Bmatrix} F_{x_2}^B \\ F_{y_2}^B \end{Bmatrix} = 0.442 \cdot 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.04288 \\ 0.07033 \\ -0.00926 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1623 \text{ фунта} \\ 1623 \text{ фунта} \end{Bmatrix}.$$

Резльтирующее осевое усилие равно $\sqrt{(-1623)^2 + (1623)^2} = 2294$ фунта. Для элемента *C* (столбцы, соответствующие u_1, v_1 , исключены)

$$\begin{Bmatrix} F_{x_1}^C \\ F_{y_1}^C \end{Bmatrix} = -10^5 \begin{bmatrix} 0.540 & 0.720 \\ 0.720 & 0.960 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.07033 \\ 0.00926 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 3131 \\ 4175 \end{Bmatrix}.$$

Резльтирующее осевое усилие равно $\sqrt{(3131)^2 + (4175)^2} = 5218$ фунтов.

Подсчет напряжений в элементе D. Используя приведенную на рис. 5.5 матрицу напряжений элемента и исключая столбцы, отвечающие u_1, v_1 и v_2 , получим

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = 3.925 \cdot 10^3 \begin{bmatrix} 40 & 0 & 21 \\ 12 & 0 & 70 \\ -10.5 & 24.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.04288 \text{ дюйма} \\ 0.07033 \text{ дюйма} \\ -0.00926 \text{ дюйма} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5969 \text{ фунт/дюйм}^2 \\ -525 \text{ фунт/дюйм}^2 \\ 4996 \text{ фунт/дюйм}^2 \end{Bmatrix}.$$

В заключение обращаем внимание на то обстоятельство, что не все степени свободы элемента, фигурирующие в уравнении (3.1), с необходимостью будут аналитически связаны с дополнительными степенями свободы соседних элементов. Простым примером этого может служить представленный на рис. 3.5 случай балочного элемента с внутренним шарниром в соединении *i*. Угловые перемещения элементов *A* и *B* (θ_i^A и θ_i^B) независимы друг

от друга и не связаны. Это сведется к заполнению начальных элементов отдельных столбцов в глобальной матрице жесткости. В гл. 6 показано, что основные теоретические предпосылки, используемые при построении конечных элементов, обеспечивают выполнимость условий допустимости для степеней свободы соседних элементов. Некоторые элементы обладают большим числом

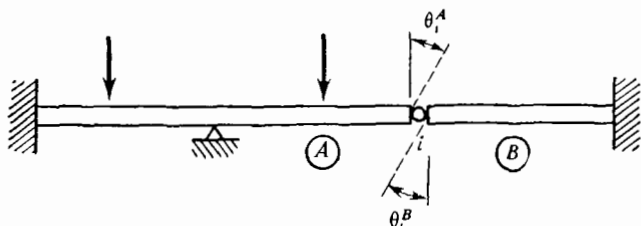


Рис. 3.5.

степеней свободы, чем это требуется для выполнения условий *допустимости*. В некоторых случаях, тем не менее, желательно связать указанные степени свободы, но в других случаях (особенно для пластинчатых и оболочечных элементов) невозможно осуществить это согласование. Эти вопросы вновь затрагиваются в гл. 12.

3.3. Метод конгруэнтных преобразований в жесткостном анализе

При построении глобальной матрицы жесткости не обязательно следовать методике, описанной в разд. 3.2. Одна из альтернатив заключается в образовании несвязанного массива, состоящего из всех матриц жесткости элементов, и последующего введения связей между элементами посредством построения и применения преобразования координат, в котором степени свободы элементов и узлов включают преобразованные векторы. Назовем этот подход *методом конгруэнтных преобразований*. Рассмотрим сначала конструкцию, задаваемую с помощью p конечных элементов, для которых индивидуальные уравнения жесткости записываются в виде (3.1). Объединим уравнения жесткости элементов:

$$\{F^e\} = [k^e] \{\Delta^e\}, \quad (3.10)$$

где $\{F^e\}$ и $\{\Delta^e\}$ — векторы, включающие степени свободы соответствующих элементов, т. е.

$$\{F^e\} = [F^1] [F^2] \dots [F^p]^T, \quad (3.11)$$

$$\{\Delta^e\} = [\Delta^1] [\Delta^2] \dots [\Delta^p]^T, \quad (3.12)$$

а $[k^e]$ — диагональный массив подматриц, в котором каждый блок на диагонали является одной из матриц жесткости элемента,

а именно

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \Gamma [k^1] \\ \vdots \\ \Gamma k^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [k^1] \\ \vdots \\ [k^i] \\ \vdots \\ [k^p] \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Массив Γk^e называется *несвязанной глобальной матрицей жесткости*.

Теперь необходимо связать элементы. Для этого используем условия непрерывности перемещений в узлах конструкции, представляемые алгебраическими уравнениями

$$\{\Delta^e\} = [A] \{\Delta\}, \quad (3.14)$$

где $\{\Delta\}$ объединяет *глобальные перемещения в узлах*, а $[A]$ называется *глобальной кинематической матрицей* или *матрицей связности*. (В дальнейшем проиллюстрируем вид матрицы $[A]$ с помощью простого примера.) Рассматривая величину работы (см. разд. 2.4), можно построить соответствующие преобразования для сил. Для этого запишем сначала это преобразование символически

$$\{P\} = [B] \{F^e\}, \quad (3.15)$$

где $[B]$ — *глобальная статическая матрица*, так как очевидно, что она соответствует уравнениям, обеспечивающим равновесие внешних $\{P\}$ и внутренних $\{F^e\}$ сил. Поэтому в (3.15) каждая строка имеет вид (3.2).

Используя введенное в разд. 2.4 понятие работы, выразим производимую внешними силами работу в виде

$$W_{\text{ext}} = 1/2 \{P\}^T \{\Delta\} \quad (3.16)$$

и, используя (3.15), получим

$$W_{\text{ext}} = 1/2 \{F^e\}^T [B]^T \{\Delta\}. \quad (3.16a)$$

Кроме того, работа, производимая внутренними силами, задается выражением

$$W_{\text{int}} = 1/2 \{F^e\}^T \{\Delta^e\}, \quad (3.17)$$

или, согласно (3.14),

$$W_{\text{int}} = 1/2 \{F^e\}^T [A] \{\Delta\}. \quad (3.17a)$$

Учитывая условие равенства работ, производимых внутренними и внешними силами, и сравнивая соотношения (3.16a) и (3.17a),

получим

$$[B]^T = [A]. \quad (3.18)$$

Применим теперь эти соображения непосредственно для преобразования уравнения (3.10). Основываясь на введенной в разд. 2.7 методике преобразования, выпишем глобальные уравнения жесткости в обычном виде, т. е. в виде соотношений (3.5), где

$$[K] = [A]^T [k^e] [A]. \quad (3.19)$$

Может оказаться, что метод конгруэнтных преобразований менее эффективен, чем прямой метод жесткости. В методе конгруэнтных преобразований требуется построить матрицы $[k^e]$ и $[A]$, каждая из которых имеет большую размерность, чем матрица $[K]$, а также перемножить матрицы согласно (3.19). С другой стороны, усилия, затрачиваемые на построение несвязанной матрицы жесткости, минимальны. Составляющие матрицы элементов не должны содержать моды движения тела как жесткого целого; в этом случае можно исключить степени свободы, соответствующие статически определенным неподвижным условиям закрепления. Блок матрицы жесткости, который необходимо оставить, чтобы включить в $[k^e]$, обозначается в (2.11) через $[k_{ff}]$. Более строгое описание этой процедуры приводится в разд. 7.1, однако для настоящих рассуждений достаточно заметить, что процедура преобразования, описываемая выражением (3.19), сводится к освобождению каждого элемента от соответствующего закрепления.

Операции, задаваемые соотношением (3.19), также очень просты ввиду свойств матрицы $[A]$. Изучим структуру этой матрицы. Вообще говоря, если элементы A, B, C и D связаны в узле со степенями Δ_i , то требование совместности перемещений приводит к уравнению $\Delta_i = \Delta_i^A = \Delta_i^B = \Delta_i^C = \Delta_i^D$, которое образует столбец в матрице $[A]$, где на каждой позиции, отвечающей $\Delta_i^A, \dots, \Delta_i^D$, стоит единица, а остальные элементы столбца суть нули.

Далее следует отметить, что использование матриц жесткости элементов в глобальной системе координат приводит к тому, что ненулевые элементы матрицы $[A]$ равны единице. Построенная таким образом матрица называется *булевой матрицей*, и очевидно, что структура матрицы обуславливает высокую эффективность вычислительных алгоритмов перемножения матриц согласно (3.19). Если матрица жесткости элемента записана только в координатах, связанных с элементом, то соотношения (3.14) трансформируются, причем используется преобразование от локальной системы координат к глобальной. В этом случае элементы матрицы $[A]$ не обязательно строго равны единице и матрица $[A]$ не имеет вид булевой матрицы. В худшем случае, однако, $[A]$ — разреженная матрица с коэффициентами, равными единице, с направляющими косинусами и линейными размерами. Более того, как показано в разд. 7.1,

соотношения (3.19) не обязательно включают формальный алгоритм перемножения матриц.

Чтобы проиллюстрировать этот подход, рассмотрим опять подкрепленный треугольный пластинчатый элемент, изображенный на рис. 3.4. Матрицы Γk^e и $[A]$ представлены на рис. 3.6. В под-

Несвязанные уравнения жесткости $\{F^e\} = \Gamma k^e \{\Delta^e\}$.

(Для каждого элемента задаются статически определимые условия закрепления.)

$$\begin{Bmatrix} F_{x_2}^A \\ F_{x_2}^B \\ F_{x_3}^B \\ F_{y_3}^B \\ F_{x_3}^G \\ F_{y_3}^G \\ F_{x_3}^D \\ F_{x_3}^D \\ F_{y_3}^D \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 1.000 & & & & & & & & \\ 0 & 0.442 & & & & & & & \\ 0 & -0.442 & 0.442 & & & & & & \\ 0 & 0.442 & -0.442 & 0.442 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.540 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.720 & 0.960 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.127 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.443 & 1.010 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.495 & 0 & 2.886 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2^A \\ u_2^B \\ u_3^B \\ v_3^B \\ u_3^C \\ v_3^C \\ u_2^D \\ u_3^D \\ v_3^D \end{Bmatrix}.$$

(Симметрично)

Соотношение связи $\{\Delta^e\} = \{A\} \{\Delta\}$

$$\begin{Bmatrix} u_2^A \\ u_2^B \\ u_3^B \\ v_3^B \\ u_3^G \\ v_3^G \\ u_2^D \\ u_3^D \\ v_3^D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}.$$

Перемножая матрицы $[A]^T \Gamma k^e [A]$, приходим к матрице жесткости (с учетом условий закрепления), построенной на рис. 3.4.

Рис. 3.6. Метод конгруэнтных преобразований при построении уравнений жесткости в иллюстративном примере.

матрицах, которые соответствуют матрицам жесткости элементов, отсутствуют члены, отвечающие движению элемента как жесткого целого. Согласно предположениям, положенным в основу проводимых вычислений, соответствующих рис. 3.4, векторы, определенные в узлах элементов, записываются в глобальных направлениях,

и поэтому матрица $[A]$ содержит только единичные ненулевые элементы.

Развиваемый здесь на базе естественных рассуждений метод конгруэнтных преобразований можно также построить, используя энергетический принцип. Этот альтернативный подход излагается в разд. 7.2. Будет показано, что указанный альтернативный подход позволяет выявить особенности расчета всей конструкции без построения на практике глобальных матриц. Этот подход известен как процесс *прямой минимизации энергии* [3.6].

Прежде чем подвести итог данного раздела, рассмотрим некоторые важные свойства статической матрицы системы $[B]$ (и, конечно, транспонированной матрицы — кинематической матрицы системы $[A]$). Это позволит выявить любую возможную форму *кинematicкой неустойчивости* конечно-элементной модели конструкции и определить *дополнительные силы*. Конструкция кинематически неустойчива, если при приложении сил возникают формы движения как абсолютно твердого тела. Дополнительные силы — это силы, переопределяющие статически определимую систему.

Чтобы описать действия, которые необходимо проделать над уравнениями статики для определения указанных выше величин, рассмотрим конечно-элементную модель плоской фермы, содержащую n степеней свободы (так как каждому узлу соответствует две степени свободы, то число узлов равно $n/2$), p элементов и t опорных реакций. Обобщение на более сложные случаи не представляет труда.

Построим сначала вектор сил $\{F^e\}$ таким образом, чтобы он содержал внутренние силы в элементах (т. е. составляющие, отвечающие движению тела как жесткого целого, исключаются), а также силы реакции опоры для всей конструкции. Этих сил достаточно, чтобы описать условия равновесия для единственного набора внешних нагрузок $\{P\}$. Тогда для описания этих условий опять применимо уравнение (3.15). Перепишем (3.15) в следующем виде:

$$[B; -I] \begin{Bmatrix} F^e \\ P \end{Bmatrix} = 0. \quad (3.15a)$$

Матрицу $[B; -I]$ назовем *дополнительной матрицей*. Так как она составлена с учетом двух уравнений равновесия в каждом из $n/2$ узлов, то в ней n строк. Для p усилий в элементах и t реакций опор вектор $\{F^e\}$ содержит $(p+t)$ компонент, а для статически неопределимой конструкции это число превосходит n . Разность $r = (p+t) - n$ соответствует числу дополнительных сил. Основной задачей при выявлении дополнительных сил и (или) кинематической неустойчивости является выделение r компонент вектора $\{F^e\}$. Эти компоненты $\{F^r\}$ и есть дополнительные силы (силы, статически переопределяющие систему). Далее выражаем оставшиеся ста-

тически определимые силы $\{F^0\}$ через дополнительные силы $\{F^r\}$ и прикладываемые нагрузки $\{P\}$. Это можно осуществить, применяя процедуру исключения Гаусса — Жордана.

Применение процедуры исключения Гаусса — Жордана для матрицы $[B; -I]$ заключается в следующем:

1. Все элементы первой строки дополнительной матрицы делятся на коэффициент, стоящий в первом столбце. (Если в первом столбце стоит нулевой элемент, то необходимо предварительно соответствующим образом поменять местами столбцы.)

2. После деления каждый элемент первой строки умножается на коэффициент, стоящий в первом столбце второй строки, и полученные значения вычитаются из соответствующих элементов второй строки. В результате получим модифицированную вторую строку, у которой в первом столбце стоит нулевой элемент. Аналогичные операции проделываются со всеми остальными строками, что приводит к обнулению всех элементов, кроме первого, стоящих в первом столбце.

3. Операции, выполняемые на шагах 1 и 2, повторяют для второго столбца, добиваясь обнуления всех элементов столбца, кроме элемента, стоящего на главной диагонали матрицы, значение которого получается равным единице. Эту операцию повторяют для каждого из столбцов, образуя в итоге единичную $[I]$ матрицу порядка $n \times n$.

В соответствии с изложенным выше уравнение (3.15a) преобразуется к виду

$$[I | C_2 | C_1] \begin{Bmatrix} F^0 \\ \bar{F}^r \\ \bar{P} \end{Bmatrix} = 0, \quad (3.15b)$$

$$\text{откуда} \quad \{F^0\} = -[C_1]\{P\} - [C_2]\{F^r\}. \quad (3.15c)$$

Наконец, преобразуем это выражение таким образом, чтобы получить $\{F^e\}$ в левой части равенства ($\{F^e\} = [F^0 \ F^r]^T$)

$$\{F^e\} = [D_1]\{P\} + [D_2]\{F^r\}, \quad (3.15d)$$

$$\text{где} \quad [D_1] = \begin{bmatrix} -C_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [D_2] = \begin{bmatrix} -C_2 \\ I \end{bmatrix}.$$

Относительно изложенной процедуры сначала заметим, что соответствующие $\{F^0\}$ столбцы матрицы не обязательно должны быть первыми n столбцами исходной матрицы $[B; -I]$. Поэтому выявление дополнительных сил можно осуществить при достаточно произвольном начальном выборе столбцов матрицы. Желательно до нормализации главного диагонального элемента отыскать столбец с «наилучшим» значением коэффициента в соответствующей строке. Найденный столбец следует поменять местами с вектором, занимающим исходный столбец, а затем выполнить нормализацию

и другие операции (шаг 2). Существует ряд соображений относительно критерия выбора «наилучшего» коэффициента в строке. Простейшим из них является выбор столбца с наибольшим значением коэффициента.

Второе замечание, касающееся вышеизложенной процедуры, заключается в том, что *кинематическая неустойчивость конечно-элементной модели выявляется по наличию нулевых строк, причем их число соответствует числу степеней свободы указанной неустойчивости*. С помощью процедуры исключения Гаусса — Жордана формируются диагональные матрицы. Напомним, что, согласно разд. 2.9, в матрице жесткости элемента можно выявить степени свободы, отвечающие движению тела как твердого целого, если преобразовать матрицу жесткости к диагональному виду и выделить ее нулевые диагональные элементы. В настоящем рассмотрении ненулевые элементы диагональной матрицы состоят из коэффициентов всех независимых уравнений.

На рис. 3.7 иллюстрируются операции по определению кинематической неустойчивости простой фермовой конструкции с помощью вышеизложенной процедуры.

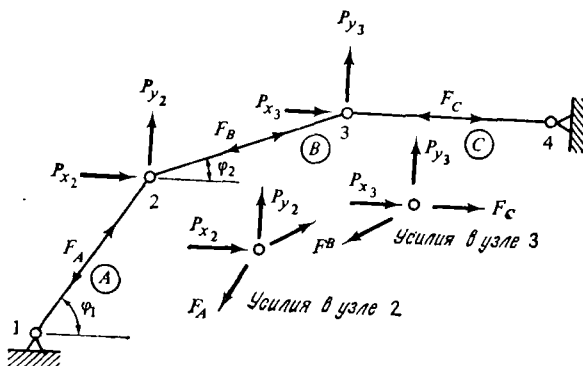


Рис. 3.7. Выявление кинематической неустойчивости с помощью процедуры исключения Гаусса—Жордана в уравнениях равновесия для узлов.

Чтобы упростить алгебраические выкладки, из расчета исключаются опорные точки 1 и 4, при этом уравнения равновесия в узлах 2 и 3 имеют следующий вид ($c_2 = \cos \varphi_2$, $s_2 = \sin \varphi_2$ и т. д.):

$$\begin{aligned} \sum F_{x_2} & \begin{bmatrix} F_A & F_B & F_C & P_{x_2} & P_{y_2} & P_{x_3} & P_{y_3} \\ -c_1 & c_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -s_1 & s_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -c_2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -s_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Нормализуя первую строку на элемент, стоящий в первом столбце (т. е. разделив элементы первой строки на $-c_1$), получим

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -c_2/c_1 & 0 & -1/c_1 & 0 & 0 & 0 \\ -s_1 & s_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -c_2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -s_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Исключаем в первом столбце элемент, стоящий во второй строке, умножая элемент в первой строке на s_1 и складывая с элементом во второй строке. Кроме того, разделим образовавшуюся вторую и четвертую строки на s_1 , а третью — на c_1 :

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -c_2/c_1 & 0 & -1/c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (s_2/s_1 - c_2/c_1) & 0 & -1/c_1 & 1/s_1 & 0 & 0 \\ 0 & -c_2/c_1 & 1 & 0 & 0 & 1/c_1 & 0 \\ 0 & -s_2/s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/s_1 \end{array} \right].$$

Исключим элемент, стоящий на пересечении второй строки и второго столбца, складывая с четвертой и вычитая третью строку из второй. Нормализуем на элемент, стоящий на пересечении четвертой строки и второго столбца (т. е. умножаем на $-s_1/s_2$):

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -1/c_1 & 0 & -1/c_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1/c_1 & 1/s_2 & -1/c_1 & 1/s_1 \\ 0 & 1 & -c_1/c_2 & 0 & 0 & -1/c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/s_2 \end{array} \right].$$

Исключим все остальные элементы во втором столбце, т. е. только элемент в третьей строке. Для этого умножим четвертую строку на -1 и сложим с третьей строкой. Получим

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -1/c_1 & 0 & -1/c_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1/c_2 & 1/s_2 & -1/c_1 & 1/s_1 \\ 0 & 0 & -c_1/c_2 & 0 & 0 & -1/c_2 & 1/s_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/s_2 \end{array} \right].$$

Нормализуем на элемент, стоящий на пересечении третьей строки и третьего столбца (т. е. помножим на c_2/c_1):

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -1/c_1 & 0 & -1/c_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1/c_1 & 1/s_2 & -1/c_1 & 1/s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/c_1 & -c_2/c_1 s_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/s_2 \end{array} \right].$$

Исключим все элементы в третьем столбце, прибавляя к соответствующим строкам третью строку:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1/c_1 & 0 & -2/c_1 & -c_2/c_1 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/c_1 & 1/s_2 & -2/c_1 & (1/s_1 - c_2/c_1 s_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/c_2 & -c_2/c_1 s_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/s_2 \end{array} \right].$$

Получена единичная матрица, отвечающая внутренним силам. Образовавшаяся нулевая строка указывает на кинематическую неустойчивость для одной из степеней свободы.

3.4. Обзор преимуществ метода конечных элементов

На рис. 3.8 отражена довольно общая ситуация, возникающая при расчете конструкций. Все аспекты этой гипотетической ситуации встречаются при проектировании реальных конструкций, описанных в гл. 1. Геометрию всей конструкции нельзя описать единым математическим выражением, а наличие вырезов и выделенных направ-

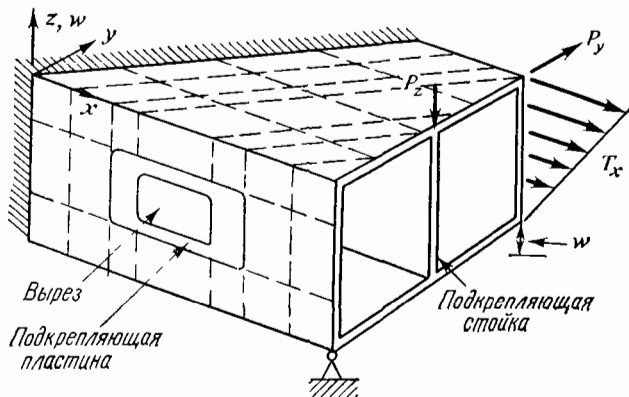


Рис. 3.8 Общая ситуация, возникающая при проектировании конструкций (штриховыми линиями обозначены ребра жесткости); T_x — прикладываемые распределенные нагрузки; w — задаваемые перемещения.

лений для ребер жесткости исключает возможность использования регулярной сетки разбиения. Различные условия закрепления, как силовые, так и кинематические, а также условия нагружения трудно учесть при расчетах классическими методами даже для конструкций с очень упрощенной конфигурацией. Указанные факторы, относящиеся к заданию *аналитической модели, геометрии конструкции*, а также *граничных условий*, для численного решения задач подобного типа вынуждают применить метод конечных элементов. К этим факторам, которые обсуждаются ниже, добавляется фактор представления свойств материала конструкции.

Наиболее очевидное преимущество конечно-элементного анализа, как отмечалось выше, заключается в представлении большого количества конструктивных элементов заданной аналитической моделью — пластин, трехмерных тел, ребер жесткости, частей оболочек и т. д. Таким образом, имеется широкая область *аналитического представления*. На практике, вообще говоря, существуют обстоятельства, ограничивающие указанные возможности. О некоторых из них речь пойдет в следующих главах. Так, например, для конечно-элементной модели пластины с ребром жесткости контакт пластины с ребром имеет место лишь в узловых точках. Поэтому для

обеспечения непрерывности механических характеристик конструкции (перемещений и напряжений) на линии, соединяющей указанные узловые точки, на конечно-элементные представления требуется наложить соответствующие ограничения. Вообще говоря, всем требованиям, обеспечивающим *непрерывность* характеристик при переходе от элемента к элементу, в полном объеме удовлетворить нельзя, поэтому большая доля теоретических исследований в методе конечных элементов посвящена рассмотрению указанных вопросов и выявлению требований, которые возникают при построении конечных элементов.

Другим сдерживающим фактором при построении конечно-элементной модели является выбор упрощенных функций для построения часто встречающихся элементов. В окрестности углов у вырезов в конструкциях возникает, например, концентрация напряжений. Поэтому в тех случаях, когда при проектировании существенно знание характера изменения поля напряжений, для описания этого поля необходимо значительное измельчение сетки разбиения. В противоположность аналитическим методам, требующим использования регулярных сеток, измельчение сетки здесь можно провести относительно просто, но, чтобы это усовершенствование было экономически оправданным, нужно, чтобы оно было соразмерно требуемой точности решения.

В описанных выше случаях можно ввести специальные конечные элементы, которые построены с использованием более сложных функций, описывающих резкое изменение напряжений. Подобное поведение имеет место вблизи границ конструкций, в областях приложения сосредоточенных нагрузок. Здесь также существует альтернатива выбора: измельчение сетки с простыми элементами или задание специальных элементов на грубой сетке.

Одним из особых преимуществ метода конечных элементов, давно выделенным специалистами, является возможность геометрического представления конструкции, т. е. задание используемой при расчете сетки разбиения существенно нерегулярным способом. Мы уже столкнулись с идеей введения в плоских задачах треугольных элементов, а в гл. 5 и далее будут выведены соотношения между перемещениями и силами для этих элементов. Универсальность задания сетки разбиения с помощью треугольных элементов совершенно очевидна. Весьма существенны, хотя и менее явно выражены, преимущества от представления сетки разбиения криволинейными элементами. В разд. 8.8 рассматривается частный случай, когда граничные кривые определяются полиномиальными выражениями. Этот случай задания сетки называется *изопараметрическим*.

Граничные условия как для сил (прикладываемых усилий), так и для перемещений учитываются весьма легко с помощью рассматриваемых, изложенных в предыдущих разделах. Ранее подразумевалось, что прикладываемые силы имели сосредоточенный характер.

Очевидно, что в действительности в большом числе случаев нагрузки распределены по поверхности конструкции. Подобные силовые воздействия учитываются с помощью введения статически эквивалентных узловых нагрузок, и, хотя интуитивно очевидный процесс пропорционального распределения или сосредоточения обычно приводит к приемлемым численным результатам, в гл. 6 будет показано, что метод конечных элементов естественно приводит к более приемлемому, но не очевидному с интуитивной точки зрения определению узловых усилий, эквивалентных распределенным нагрузкам.

При проектировании реальных конструкций учет целого ряда физических факторов приводит к появлению в расчетных схемах величин, действие которых эквивалентно действию нагрузок. Распределение температуры в конструкции может вызывать стесненное тепловое расширение. Чтобы решить эту задачу численно, необходимо преобразовать температурные деформации в фиктивные нагрузки или перемещения. В гл. 6 в определяющие соотношения, связывающие силы и перемещения для элемента, вводятся члены, учитывающие влияние тепловых и других *начальных деформаций*.

Следует отметить, что метод конечных элементов вносит ряд дополнительных преимуществ в расчет температурных напряжений. Последовательная методология конечно-элементного анализа задач теплопроводности пригодна для расчета распределения температуры в конструкции. Основные идеи расчета стационарных задач теплопроводности методом конечных элементов излагаются в разд. 5.4. В работах [3.7, 3.8] описывается более подробно применение метода конечных элементов в этой области, не связанной непосредственно с расчетом конструкций, включая решение нестационарных задач теплопроводности. Имеется возможность применить одну и ту же программу общего назначения, реализующую метод конечных элементов, как для расчета температур, вызванных тепловым потоком, так и температурных напряжений, возникающих из-за наличия температурного поля. Кроме того, в тех случаях, когда свойства материала зависят от температуры, можно задать характеристики для каждого элемента в зависимости от значения температуры в элементе.

Граничные условия для перемещений в действительности не всегда задаются посредством стеснения степеней свободы (заданием нулевых перемещений). В некоторых случаях перемещение в точке есть заданная величина, что может быть учтено в операциях, изложенных в предыдущих разделах. Упругое закрепление можно учесть, вводя либо упругие элементы (пружины) в соответствующих узлах, либо специальный конечный элемент, который строится, чтобы представить упругое закрепление на границе, прилегающей к нему. Иногда перемещения некоторого числа узлов на границе конструкции связаны с помощью специальных условий *связи*. Эти

и другие особенности учета условий закрепления изучаются в разд. 3.5.

Более тонким аспектом метода конечных элементов является возможность учета сложных *физических свойств материала*. Почти все имеющиеся классические решения относятся к конструкциям, созданным из однородных *изотропных* материалов. При расчете методом конечных элементов ограничения на однородность материала снять трудно, но вполне возможно, однако неоднородный случай в книге не рассматривается. Как показано в главах, где строятся конечные элементы, анизотропные свойства материала можно учесть, однако, без существенного усложнения вычислительного процесса. Действительно, что касается возможностей учета указанных аспектов, они далеко превзошли возможности получения таких экспериментальных данных о свойствах материала, которые бы точно отражали степень анизотропии среды.

Выше нашей целью было проведение линейного анализа. Сфера действия метода конечных элементов по сравнению с классическими методами будет даже шире в области решения нелинейных задач, таких, как расчет пластических деформаций, когда не представляется возможным получить аналитическое решение даже для тел простой формы. В книге не рассмотрены вопросы численного исследования неупругих конструкций и других нелинейных задач; однако, чтобы получить представление о прогрессе, достигнутом в указанном направлении, читателю рекомендуется ознакомиться с работами [3.9, 3.10].

3.5. Специальные операции

3.5.1. Разбиение на подконструкции

Большинство реальных конструкций настолько велико и сложно, что минимально допустимая конечно-элементная модель всей конструкции выдвигает чрезмерно высокие требования к возможностям вычислительной техники при решении полученных уравнений. В связи с этим приходится решать задачу поэтапно, при этом основные части конструкции, называемые *подконструкциями*, рассчитываются отдельно, а затем полученные решения объединяются. Примеры даны в разд. 1.3. Кроме того, на практике процесс проектирования часто начинается с независимых расчетов уже существующих подконструкций, и окончательные проектировочные расчеты оказывается эффективным проводить с использованием данных о подконструкциях. Более того, подход, при котором рассчитываются отдельные подконструкции, позволяет проектировщику оперировать с промежуточными числовыми данными для компонент конструкции, что важно при повторяющихся расчетах, встречающихся, например, в оптимальном проектировании и нелинейном анализе.

На рис. 3.9 показана вся конструкция, разбитая на три основные подконструкции F , G и H . Рассмотрим сначала жесткостные характеристики подконструкции G . Здесь используются следующие нижние индексы: c — степени свободы, соответствующие границам, разделяющим подконструкции; d — степени свободы, принадле-

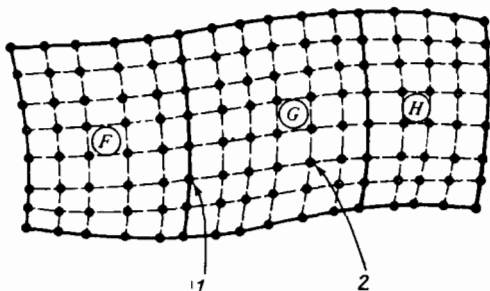


Рис. 3.9. Схема разбиения на подконструкции (прикладываемые нагрузки не изображены); 1 — типичный узел, отвечающий степени свободы c ; 2 — типичный узел внутри подконструкции (узел d).

жащие только подконструкции G , т. е. не связанные ни с какой другой подконструкцией. Предполагается, что рассматриваются модифицированные уравнения жесткости для подконструкции, учитывающие условия закрепления. Соотношения жесткости для подконструкции G можно записать в виде (для простоты записи символы, указывающие на принадлежность соотношений подконструкции G , не используются)

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_d \\ \mathbf{F}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{dd} & \mathbf{k}_{dc} \\ \mathbf{k}_{cd} & \mathbf{k}_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_d \\ \Delta_c \end{Bmatrix}. \quad (3.20)$$

Можно сначала решить верхние уравнения в (3.20), чтобы выразить перемещения, относящиеся к рассматриваемой подконструкции $\{\Delta_d\}$, в терминах граничных смещений, замечая при этом, что для соответствующих степеней свободы силы $\{\mathbf{F}_d\}$ есть не что иное, как приложение нагрузки $\{\mathbf{P}_d\}$. Имеем

$$\{\Delta_d\} = [\mathbf{k}_{dd}]^{-1} \{\mathbf{P}_d\} - [\mathbf{k}_{dd}]^{-1} [\mathbf{k}_{dc}] \{\Delta_c\}, \quad (3.21)$$

$$\{\mathbf{F}_c\} = [[\mathbf{k}_{cc}] - [\mathbf{k}_{cd}][\mathbf{k}_{dd}]^{-1}[\mathbf{k}_{dc}]] \{\Delta_c\} + [\mathbf{k}_{cd}][\mathbf{k}_{dd}]^{-1} \{\mathbf{P}_d\}. \quad (3.22)$$

Для простоты введем обозначения

$$\{\mathbf{R}_c\} = [\mathbf{k}_{cd}][\mathbf{k}_{dd}]^{-1} \{\mathbf{P}_d\}, \quad (3.23)$$

$$[\hat{\mathbf{k}}_{cc}] = [[\mathbf{k}_{cc}] - [\mathbf{k}_{cd}][\mathbf{k}_{dd}]^{-1}[\mathbf{k}_{dc}]], \quad (3.24)$$

поэтому (3.22) запишется в виде

$$\{\mathbf{F}_c\} = [\hat{\mathbf{k}}_{cc}] \{\Delta_c\} + \{\mathbf{R}_c\}. \quad (3.25)$$

Полученное уравнение жесткости в совокупности с аналогичными уравнениями для других основных подконструкций можно использовать при построении уравнений жесткости для степеней свободы, отвечающих участкам соприкосновения подконструкций, т. е. для всей конструкции (подконструкции F , G и H):

$$\{P_c\} = \{F^F\} + \{F^G\} + \{F^H\}, \quad (3.26)$$

где верхними индексами F , G и H помечены соответствующие силы на участках соприкосновения.

Решая полученные уравнения, находим перемещения на участках соприкосновения $\{\Delta_c\}$. Чтобы получить силы и перемещения внутри подконструкции, перемещения $\{\Delta_c\}$ подставляются снова в уравнения для подконструкций (3.20) и (3.21).

Требуемый процесс конденсации можно осуществить также с помощью *преобразования координат*. Вспоминая, что, согласно разд. 2.8, если совокупность степеней свободы сопоставляется с меньшим числом степеней свободы с помощью матрицы преобразования $[\Gamma_0]$, то исходная матрица жесткости преобразуется с помощью тройного произведения $[\Gamma_0]^T [K] [\Gamma_0]$, а вектор сил преобразуется согласно $[\Gamma_0]^T \{P\}$ (см. уравнения (2.37) и (2.38)). В данном случае в силу (3.21) и с учетом равенства $\{\Delta_c\} = [I] \{\Delta_c\}$ получим

$$\left\{ \begin{matrix} \Delta_d \\ \Delta_c \end{matrix} \right\} = \left[\begin{matrix} -[k_{dd}]^{-1} [k_{dc}] \\ [I] \end{matrix} \right] \{\Delta_c\} = [\Gamma_0] \{\Delta_c\}. \quad (3.27)$$

Применяя это соотношение к равенству (3.20), получим (3.25).

Более эффективным подходом к расчету сложных конструкций может служить метод *редуцированных* подконструкций [3.11]. Чтобы аналитически описать этот подход, необходимо усилить концепцию уравнений связи, которая принимается в п. 3.5.2.

3.5.2. Уравнения связи

Уравнения связи — это соотношения между степенями свободы, задаваемые дополнительно к основным уравнениям жесткости. Простое задание условий закрепления, т. е. $\Delta_j = 0$, приводит к ограничениям, но, как было видно, его легко учесть непосредственно после построения глобальной матрицы жесткости. Целям настоящих рассмотрений более соответствует показанный на рис. 3.10 случай изгибаемого элемента, соединенного с твердым телом. Ясно, что на смещение узлов 1—5 наложены связи, препятствующие установлению линейного закона для смещения w , которое диктуется угловым смещением нормали к срединной поверхности оболочечного элемента. Связи возникают и во многих других случаях, включая обсуждаемую в следующем разделе схему метода редуцированных подконструкций, некоторые подходы к расчету не-

сжимаемых материалов, а также при учете специальных граничных условий и при попытках задать определенные типы перемещений на некоторых участках конструкции. Далее в книге встретятся указанные ситуации.

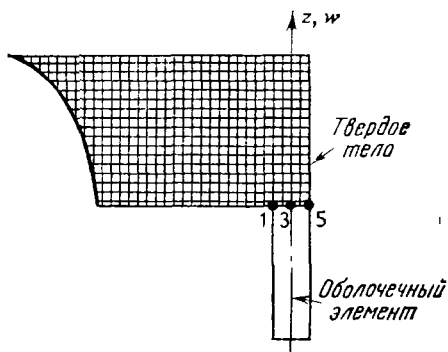


Рис. 3.10. Изгибаемый оболочечный элемент, соединенный с твердым телом.

Каждое уравнение связи позволяет исключить одну из степеней свободы, оставляя другие. Используем здесь эту возможность для построения матрицы преобразования, которую можно применять для конденсации стольких степеней свободы, сколько ограничений задано сверх числа уравнений жесткости. Таким образом, используем подход, предложенный в разд. 2.8.

Рассмотрим случай, когда имеется r связей в системе с n степенями свободы. Общее представление линейных уравнений связи в этом случае имеет вид

$$[G]_{r \times n} \{\Delta\}_{n \times 1} = \{s\}_{r \times 1}, \quad (3.28)$$

где элементы в $[G]$ суть коэффициенты в уравнениях, задающих ограничения, а $\{s\}$ — вектор, компоненты которого заданные константы. Для простоты рассмотрим лишь случай $\{s\} = 0$. Вывод соотношений для более общего случая $\{s\} \neq 0$ представляется сделать читателю в качестве упражнения (см. задачу 3.18).

Для построения матрицы преобразования вновь проведем разбиение степеней свободы на две группы $\{\Delta_e\}$ и $\{\Delta_c\}$, где $\{\Delta_e\}$ содержит r степеней свободы, а $\{\Delta_c\}$ содержит $(n-r)$ степеней свободы. Имеем

$$\begin{bmatrix} G_{e_{r \times r}} & G_{c_{r \times n-r}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_e \\ \Delta_c \end{Bmatrix} = 0. \quad (3.29)$$

Таким образом, степени свободы объединены так, что $\{\Delta_e\}$ степеней выбраны в соответствии с числом ограничений r . Требуется исключить эти степени свободы из выражения для функционала энергии посредством схемы конденсации. Хотя выбор исключаемых степеней

свободы часто произволен, возникают случаи, когда это необходимо делать с чрезвычайными предосторожностями [3.12].

Разрешая (3.29) относительно $\{\Delta_e\}$, получим

$$\{\Delta_e\} = -[G_e]^{-1} [G_c] \{\Delta_c\} = [G_{ec}] \{\Delta_c\}, \quad (3.30)$$

что, согласно схеме, разработанной в разд. 2.8, можно использовать для получения формул преобразования степеней свободы в следующем виде:

$$\left\{ \begin{matrix} \Delta_e \\ \Delta_c \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} G_{ec} \\ I \end{bmatrix} \{\Delta_c\} = [\Gamma_c] \{\Delta_c\}. \quad (3.31)$$

Применяя полученные формулы к глобальным уравнениям в виде тройного произведения $[\Gamma_c]^T [k] [\Gamma_c]$, получаем редуцированную матрицу жесткости, относящуюся только к $\{\Delta_c\}$, а также редуцированный вектор сил

$$\{\bar{P}_c\} = [\Gamma_c]^T \begin{Bmatrix} P_e \\ P_c \end{Bmatrix}.$$

Решая редуцированные уравнения жесткости, находим $\{\Delta_c\}$, который можно подставить в (3.30) и найти $\{\Delta_e\}$.

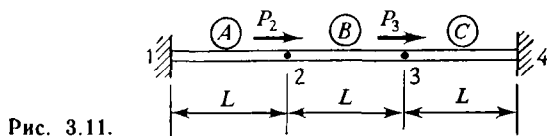


Рис. 3.11.

В качестве иллюстрации рассмотрим изображенную на рис. 3.11 систему, состоящую из трех стержневых элементов. Согласно прямому методу жесткости, система уравнений без учета условий закреплений имеет вид ($k_0 = AE/L$)

$$k_0 \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 2 & & \\ 0 & -1 & 2 & \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix}, \quad (\text{Симметрично})$$

а с учетом условий закрепления $u_1 = u_4 = 0$ записывается как

$$k_0 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix}.$$

Предположим теперь, что узлы 2 и 3 жестко соединены таким образом, что $u_2 = u_3$. В матричной форме это записывается в виде

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = 0.$$

Поэтому формулы преобразования имеют вид

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \{u_3\},$$

а редуцированные уравнения жесткости переходят в уравнения

$$k_0 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} u_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix}$$

или $2k_0 u_3 = P_2 + P_3$. Этот ответ согласуется с очевидным решением данной задачи. Ограничения преобразуют элемент B в жесткую связь между узлами 2 и 3. Поэтому приложенная нагрузка равна сумме усилий в этих узлах ($P_2 + P_3$), а коэффициент при u_3 равен сумме жесткостей элементов A и C , которые по существу соединены в одном и том же узле.

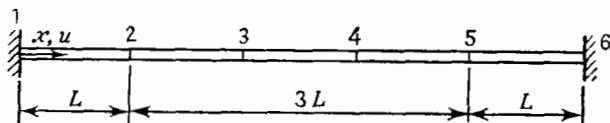


Рис. 3.12.

Следует отметить, что во многих случаях лишь часть из полного набора степеней свободы может фигурировать в уравнениях связи. На рис. 3.12, например, величины u_4 и u_6 не появляются в уравнениях связи только в том случае, когда u_2 и u_3 взаимосвязаны. Предположим теперь, что полный набор степеней свободы можно представить как $\begin{bmatrix} \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_e \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Delta_c \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Delta_g \end{bmatrix} \end{bmatrix}$, где группы $\begin{bmatrix} \Delta_e \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} \Delta_c \end{bmatrix}$ фигурируют в уравнениях связи, аналогичных (3.29), а набор $\begin{bmatrix} \Delta_g \end{bmatrix}$ не фигурирует в них. Тогда можно записать следующее преобразование степеней свободы:

$$\begin{Bmatrix} \Delta_e \\ \Delta_c \\ \Delta_g \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_c & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_c \\ \Delta_g \end{Bmatrix}, \quad (3.32)$$

где $\begin{bmatrix} \Gamma_c \end{bmatrix}$ определяется согласно (3.31). Это преобразование можно применить непосредственно к глобальным уравнениям жесткости обычным образом.

Если связи накладываются на относительно небольшое число степеней свободы, может оказаться более эффективным включение связей в глобальную матрицу жесткости на основе непосредственных выкладок по сравнению с использованием для этого матричного преобразования. Прямой метод аналогичен подходу, применяемому для специальной системы координат в п. 3.5.3.

Вернемся теперь к схеме редуцированных подконструкций, в которой операции конденсации и наложения связей включены в

единую матрицу преобразований. Предположим, что граничные узлы разделены на две группы. Так же как и прежде, степени свободы $\{\Delta_c\}$ приписываются соседним подконструкциям. На перемещения, отвечающие оставшимся граничным степеням свободы

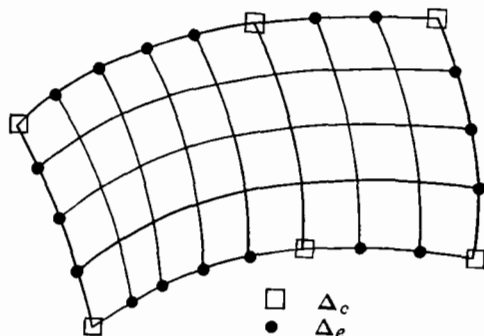


Рис. 3.13. Схема анализа с помощью редуцированных подконструкций

$\{\Delta_e\}$, наложены связи, вид которых определяется степенями свободы $\{\Delta_c\}$ (рис. 3.13). Перемещения, отвечающие степеням свободы $\{\Delta_e\}$, могут задаваться, например, в виде линейной, квадратичной или другой, имеющей более высокий порядок функции. Разбивая матрицу жесткости подконструкции на клетки, получим

$$\begin{Bmatrix} \underline{F_d} \\ \underline{F_e} \\ \underline{F_c} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{dd} & k_{de} & k_{dc} \\ k_{ed} & k_{ee} & k_{ec} \\ k_{cd} & k_{ce} & k_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\Delta_d} \\ \underline{\Delta_e} \\ \underline{\Delta_c} \end{Bmatrix}. \quad (3.33)$$

Определим также, аналогично (3.30), соотношения между $\{\Delta_e\}$ и $\{\Delta_c\}$, которые задают ограничения, т. е. $\{\Delta_e\} = [G_{ec}] \{\Delta_c\}$. Вспомогательное далее, что, согласно разд. 2 8, искомая матрица преобразований строится в результате приравнивания нулю сил, соответствующих исключаемым степеням свободы. Поэтому, решая верхние уравнения относительно $\{\Delta_d\}$ при $\{F_d\} = 0$, получим

$$\{\Delta_d\} = -[k_{dd}]^{-1} [k_{de}] \{\Delta_e\} + [k_{dc}] \{\Delta_c\}. \quad (3.34)$$

Подставляя в эту формулу выражение (3.30), приходим к уравнению

$$\{\Delta_d\} = -[k_{dd}]^{-1} [k_{de}] [G_{ec}] \{\Delta_c\} + [k_{dc}] \{\Delta_c\}. \quad (3.35)$$

Комбинируя соотношения (3.30), (3.35) и учитывая, что $\{\Delta_c\} = [I] \{\Delta_c\}$, запишем окончательно искомое преобразование в виде

$$\begin{Bmatrix} \underline{\Delta_d} \\ \underline{\Delta_e} \\ \underline{\Delta_c} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -[k_{dd}]^{-1} [k_{de}] [G_{ec}] + [k_{dc}] \\ [G_{ec}] \\ [I] \end{bmatrix} \{\Delta_c\} = [\Gamma] \{\Delta_c\}. \quad (3.36)$$

Эти соотношения можно применить к уравнению (3.33) в виде преобразования, чтобы получить матрицу жесткости, относящуюся лишь к $\{\Delta_c\}$ и соответствующему редуцированному вектору сил.

Проиллюстрируем этот подход, обращаясь к рис. 3.14, где изображена конструкция, состоящая из четырех плоских прямоугольных элементов, каждый из которых построен в предположении о линейности смещений на границе элемента (подробности см. в гл. 9;

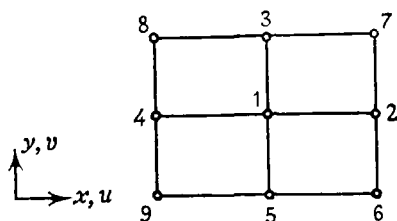


Рис. 3.14.

там же приведена матрица жесткости элемента). Предположим, что на границе конструкции смещения изменяются по линейному закону. Тогда величины $u_2, u_3, u_4, u_5, v_2, v_3, v_4$ и v_5 представляют степени свободы $\{\Delta_e\}$, а $u_6, u_7, u_8, u_9, v_6, v_7, v_8, v_9$ — степени свободы $\{\Delta_c\}$. Внутренние степени свободы суть u_1 и v_1 , поэтому $\{\Delta_d\} = [u_1 \ v_1]$. Ниже в соответствии с (3.30) для этой задачи построена матрица $[G_{ec}]$, остальные матрицы $[k_{dd}], [k_{de}], [k_{dc}]$, которые необходимы для построения матрицы преобразования из (3.36), определяются с помощью матрицы жесткости всей конструкции. Интересно заметить, что матрица жесткости, получаемая в результате этого преобразования и имеющая отношение только к угловым узлам, идентична матрице, получаемой в том случае, когда вся область представляется в виде одного элемента с линейным законом изменения перемещений на контуре и с использованием матрицы жесткости элемента, приведенной на рис. 9.13.

$$\{\Delta_e\} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \end{Bmatrix} = [G_{ec}] \{\Delta_c\}.$$

3.5.3. Связанная система координат

Иногда бывает необходимо записать часть глобальных уравнений в связанной системе координат, особенно в тех случаях, когда условия закрепления задаются вдоль направлений, отличных от направлений осей глобальной системы координат, или когда оболочка рассчитывается с помощью плоских пластинчатых элементов.

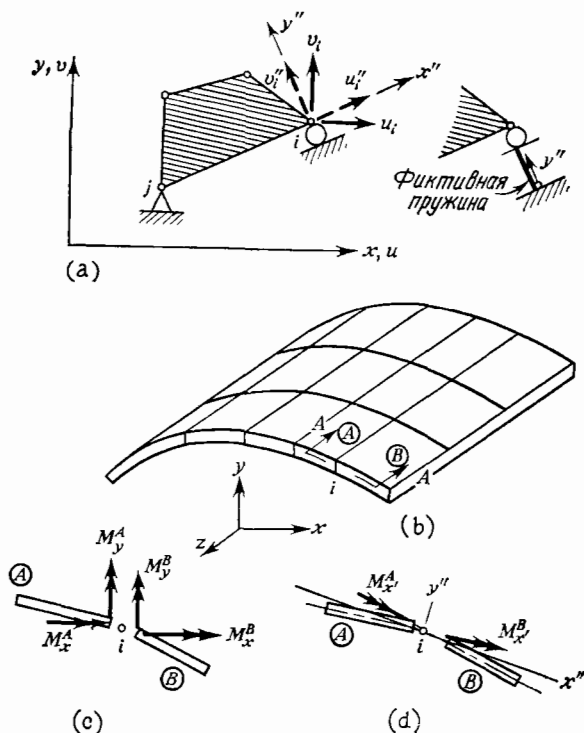


Рис. 3.15. Локальные координаты в конечно-элементном анализе. (а) Закрепление, ограничивающее вращение, и оси координат; (б) конечно-элементное представление оболочечной конструкции; (в) векторы моментов в глобальной системе координат; (г) векторы моментов в локальной системе координат.

Типичная ситуация представлена на рис. 3.15(а). Смещение точки i описывается компонентами смещения u_i и v_i в глобальной системе. Однако простое приравнивание нулю одной или обеих компонент не будет правильно представлять связь, накладываемую условиями закрепления в направлении y'' . Связи можно задавать корректно, если выразить поведение точки i в терминах компонент смещений u''_i и v''_i в системе координат, помеченной двумя штрихами, после чего v_i полагают равной нулю.

На рис. 3.15(b) изображена оболочечная конструкция, которая моделируется в виде системы плоских пластинчатых конечных элементов. На рис. 3.15(c) и (d) в векторном виде отражены условия равновесия для моментов в узле i для сечения $A - A$. Из рис. 3.15(c) следует, что в глобальной системе координат существенны составляющие векторов в обоих направлениях x и y . Однако, согласно рис. 3.15(d), на котором изображены векторы моментов $M_{x'}$ в осях элементов, а также связанная система координат $x''-y''$ (ось x'' которой направлена по касательной к оболочке в точке i), очевидно, что проекции векторов на ось y'' малы по сравнению с проекциями на ось x'' . Вообще говоря, в реальной конструкции составляющая вдоль оси y'' равна нулю. Указанная диспропорция компонент в ортогональных направлениях приводит к серьезным последствиям при решении глобальных уравнений. Один из способов избавиться от этих последствий состоит в том, чтобы в каждом узле ввести связанную систему координат $x''-y''$ и исключить малые составляющие вдоль оси y'' , как если бы это были закрепленные степени свободы.

На примере задачи, представленной на рис. 3.15(a), опишем подробнее, каким образом преобразуется глобальная матрица жесткости, чтобы она соответствовала системе координат, связанной с узлами. Для заданных координат узлов i и j направляющие косинусы осей системы координат $x''-y''$ вычисляются в виде $l_x = (x_i - x_j)/L$, $l_y = (y_i - y_j)/L$ по отношению к осям системы координат $x-y$, где $L = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$.

Теперь, используя полученные направляющие косинусы, проекции смещения u_i'' и v_i'' можно выразить через проекции смещения u_i и v_i следующим образом (см. разд. 2.7, где приведен указанный вид преобразования):

$$u_i'' = l_x u_i - l_y v_i, \quad (3.37)$$

$$v_i'' = l_y u_i + l_x v_i. \quad (3.38)$$

Для глобальной матрицы жесткости это значит, что столбец исходной глобальной матрицы жесткости, умноженный на u_i , следует умножить на l_x и вычесть из произведения l_y на столбец, умноженный на v_i . Полученный вектор-столбец, соответствующий u_i'' , заменяет вектор-столбец, соответствующий u_i . Эта операция проиллюстрирована на рис. 3.16. Аналогичная операция, отвечающая (3.38) и заменяющая v_i на v_i'' , также представлена на рис. 3.16.

Силовые равенства (строки) в глобальных уравнениях жесткости преобразуются на базе аналогичных рассуждений. Так, согласно обычному преобразованию координат, имеем

$$F_{x_i'} = l_x F_{x_i} + l_y F_{y_i}, \quad (3.39)$$

$$F_{y_i'} = -l_y F_{x_i} + l_x F_{y_i}. \quad (3.40)$$

Согласно этим уравнениям, новая строка, стоящая на месте F_{x_i} , строится путем умножения на l_x строки, соответствующей F_{x_i} , и умножения на l_y строки, соответствующей F_{y_i} , и последующего

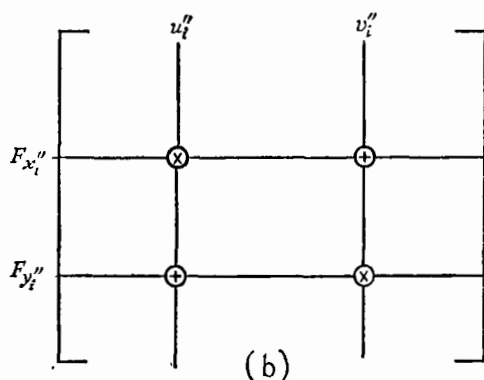
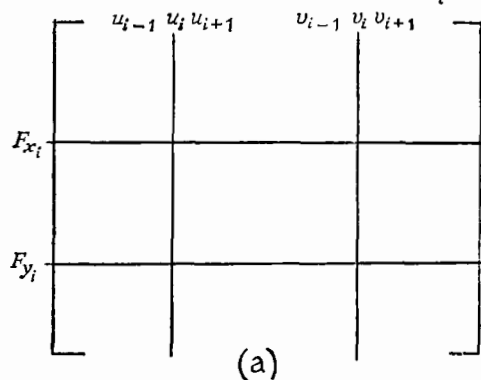


Рис. 3.16. Модифицированная глобальная матрица жесткости. (a) Исходная глобальная матрица жесткости; (b) модифицированная глобальная матрица жесткости. Строка для F_{x_i}'' получена суммированием умноженной на l_x строки для F_{x_i} и умноженной на l_y строки для F_{y_i} ; строка для F_{y_i}'' получена суммированием умноженной на $-l_y$ строки для F_{x_i} и умноженной на l_x строки для F_{y_i} ; столбец для u_i'' получен суммированием умноженного на l_x столбца для u_i и умноженного на l_y столбца для v_i ; столбец для v_i'' получен суммированием умноженного на $-l_y$ столбца для u_i и умноженного на l_x столбца для v_i .
Замечание. Произведения коэффициентов при строках и столбцах на главных диагоналях (помечены символом \otimes) и на пересечениях (\oplus) равны соответственно квадратам и произведениям величин l_x и l_y .

сложения строк. Новая строка, стоящая на месте F_{y_i} , также строится путем реализации операций, отвечающих уравнению (3.40).

Перечисленные операции должны быть выполнены в каждом узле, где требуется провести преобразование системы координат.

Выражения для граничных условий в новых координатах можно включить в измененную глобальную матрицу жесткости [К]. В данном подходе при подсчете внутренних сил необходимо сначала преобразовать вычисленные перемещения к глобальной системе координат.

Альтернативным к вышеизложенному подходу служит подход, в котором элементы матриц жесткости и напряжений формируются непосредственно в терминах, соответствующих локальным системам координат. Это вносит определенные трудности при учете входных данных, так как условия закрепления задаются в узлах, а не на элементах; тем не менее процедура компактна и эффективна. Построение глобальной матрицы жесткости и другие операции осуществляются обычным путем. Однако требуются иные операции для включения всех указанных выше преобразований в узлах в единую глобальную матрицу преобразований. Этот подход алгоритмически прост, но оказывается эффективным лишь в том случае, когда в рассмотрение включено большое количество узлов всей конструкции.

Подходом, устраняющим алгебраические трудности, возникающие во всех представленных методиках, является процедура введения специального граничного элемента, как указано справа на рис. 3.15(a). Это специальный случай процедуры, определенной на рис. 3.15(d), где исключены степени свободы в направлении y'' .

Литература

- 3.1. Beaufait F., Rowan W. H., Hoadley P. G., Hackett R. M. *Computer Methods of Structural Analysis*.—Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc., 1970.
- 3.2. Meek J. L. *Matrix Structural Analysis*.—New York, N. Y.: McGraw-Hill Book Co., 1971.
- 3.3. Wang C. K. *Matrix Methods of Structural Analysis*, 2nd ed.—Scranton, Pa.: International Textbook Co., 1970.
- 3.4. Willems N., Lucas W. *Matrix Analysis for Structural Engineers*.—Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc., 1968.
- 3.5. Rose D. J., Willoughby R. A. (eds.). *Sparse Matrices and Their Applications*.—New York, N. Y.: Plenum Press, 1972.
- 3.6. Fox R., Stanton E. *Developments in Structural Analysis by Direct Energy Minimization*.—AIAA J., June 1968, 6, No. 6, p. 1036—1042. [Имеется перевод: Ракетная техн. и космон.—М.: Мир, 1968, № 6.]
- 3.7. Nickell R. E., Wilson E. L. *Application of the Finite Element Method to Heat Conduction Analysis*.—Nuc. Eng. Design, 1966, 4, p. 276—286.
- 3.8. Gallagher R. H. *Computational Methods in Nuclear Reactor Structural Design for High-Temperature Applications*, Chapter 7. Thermal Analysis.—Report ORNL-4756, July 1972.
- 3.9. Marcal P. V. *Finite Element Analysis with Material Nonlinearities—Theory and Practice*.—In: *Finite Element Method in Civil Engineering*, J. McCutcheon, M. S. Mirza, and A. Mufti, (eds).—Montreal, Quebec: McGill Univ., June 1972, p. 35—70.

- 3.10. Gallagher R. H. Geometrically Nonlinear Finite Element Analysis.—In: Finite Element Method in Civil Engineering, J. McCutcheon, M. S. Mirza, and A. Murfi (eds.).—Montreal, Quebec: McGill Univ., June 1972, p. 3—34.
- 3.11. Kamel H., Liu D., McCabe M., Phillipopoulos V. Some Developments in the Analysis of Complex Ship Structures.—In: Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, J. T. Oden, et al. (eds.).—Ala.: Univ. of Alabama Press, 1972, p. 703—726.
- 3.12. Walton W. C., Steeves E. C. A New Matrix Theorem and its Application for Establishing Independent Coordinates for Complex Dynamical Systems with Constraints.—NASA TR R-326, Oct. 1969.

Задачи

3.1. Постройте матрицу жесткости для четырехсегментной балки, изображенной на рис. Р3.1, используя прямой метод жесткости; $EI=20 \cdot 10^4$ кдюйм².

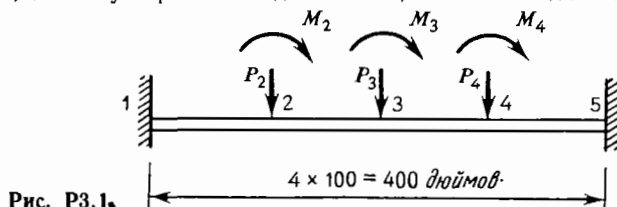


Рис. Р3.1.

- 3.2. Постройте матрицу жесткости в задаче 3.1, используя методку конгруэнтных преобразований.
- 3.3. Сконденсируйте матрицу жесткости в задаче 3.1 к размерности 3×3 , исключая угловые смещения.
- 3.4. Введите связь $w_3=w_4$ в уравнениях жесткости задачи 3.3 и постройте редуцированную матрицу жесткости. Сравните решения для w_4 при ограничениях и без них, положив $P_4=4800$ фунтов (остальные силы равны нулю).
- 3.5. Вычислите напряжения в элементах и узловые смещения для конструкции, изображенной на рис. Р3.5 (размеры даны в дюймах), используя прямой метод жесткости. Проведите вычисления в той последовательности, которая указана

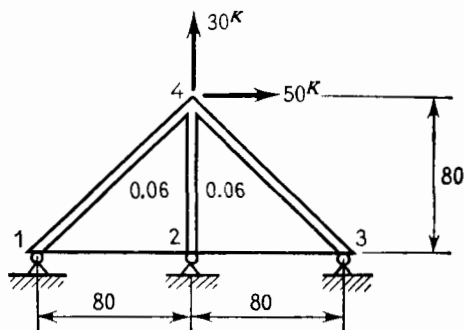


Рис. Р3.5. (Линейные размеры даны в дюймах.)

в разд. 3.2. Матрица жесткости для треугольного элемента, находящегося в плоском напряженном состоянии, приведена на рис. 5.4; $E=10^7$ фунт/дюйм²; $\mu=0.3$; $A_{1-4}=A_{2-4}=A_{3-4}=1.0$ дюйм²,

3.6. Исследуйте изображенную на рис. Р3.6 конструкцию, используя последовательность действий, оговоренных в задаче 3.5. (Разделите, как указано, прямоугольный элемент на два треугольных элемента.) $E=10^7$ фунт/дюйм², $\mu=0.3$.

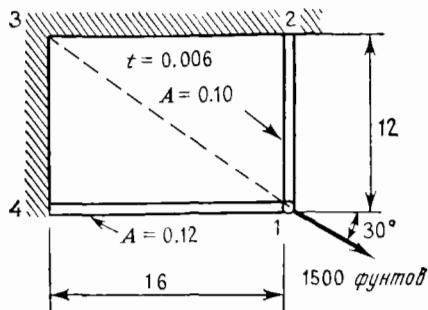


Рис. Р3.6. (Линейные размеры даны в дюймах, площадь A — в квадратных дюймах.)

3.7. Вычислите смещение изображенной на рис. Р3.7 точки A в направлении x , используя прямой метод перемещений, $E=10^7$ фунт/дюйм², $\mu=0.3$. Разделите, как указано, лист материала на четыре прямоугольных элемента. Матрица жесткости для прямоугольного пластинчатого элемента приведена на рис. 9.13. Учтите симметрию относительно оси x .

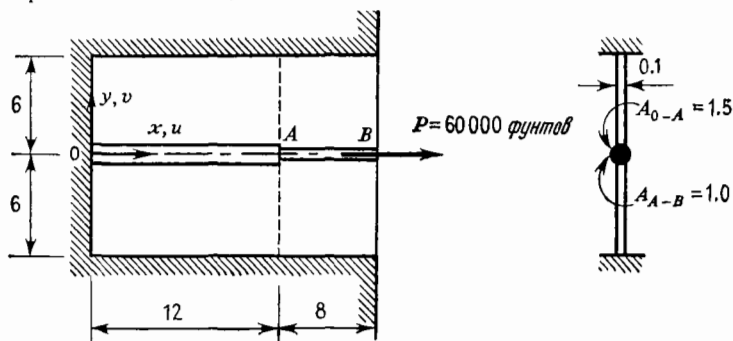


Рис. Р3.7. (Линейные размеры даны в дюймах, площадь A — в квадратных дюймах.)

3.8. Матрица жесткости для изображенной на рис. Р3.8 (линейные размеры даны в дюймах, площадь — в квадратных дюймах) конструкции задана в осях системы

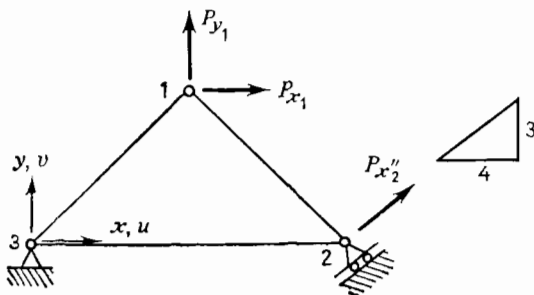


Рис. Р3.8.

$x - y$. Постройте матрицу жесткости в терминах P_{x_1} , P_{y_1} и P_{x_2} .

$$\begin{Bmatrix} P_{x_1} \\ P_{x_2} \\ P_{y_1} \\ P_{y_2} \end{Bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 10.0 & & & \\ -2.5 & 4.5 & & \\ 1.83 & 2.5 & 5.0 & \\ 2.5 & -2.5 & -2.5 & 2.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{Симметрично})$$

3.9. Исследуйте изображенную на рис. Р3.9 (размеры даны в дюймах) конструкцию согласно методике, оговоренной в задаче 3.5. Трапецевидную пластину разбейте на прямоугольные и треугольные пластины. Соответствующие матрицы жесткости приведены на рис. 5.4 и 9.13; $E=20 \cdot 10^6$ фунт/дюйм², $\mu=0.2$.

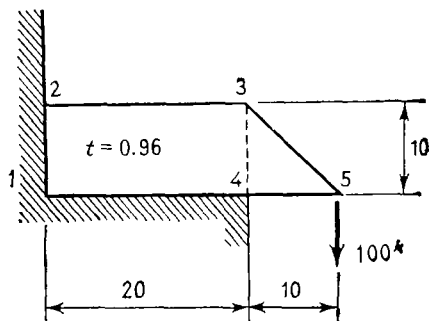


Рис. Р3.9. (Линейные размеры даны в дюймах.)

3.10. Постройте необъединенную глобальную матрицу жесткости $[k^e]$ и глобальную кинематическую матрицу $[A]$ для конструкции из задачи 3.5. Вычислите на компьютере глобальную матрицу жесткости с помощью $[A]^T [k] [A]$.

3.11. Постройте необъединенную глобальную матрицу $[k^e]$ и глобальную кинематическую матрицу $[A]$ для конструкции из задачи 3.6. Вычислите вручную или на компьютере глобальную матрицу жесткости с помощью преобразования $[A]^T [k] [A]$.

3.12. Постройте необъединенную глобальную матрицу жесткости $[k^e]$ и кинематическую матрицу системы $[A]$ для конструкции из задачи 3.7. Вычислите глобальную матрицу жесткости $[k]$.

3.13. Обобщите утверждение (3.5), включив начальные смещения $\{\Delta^{init}\}$ в вектор перемещений и соответствующие силы $\{P^{init}\}$ в вектор сил. Начальные смещения

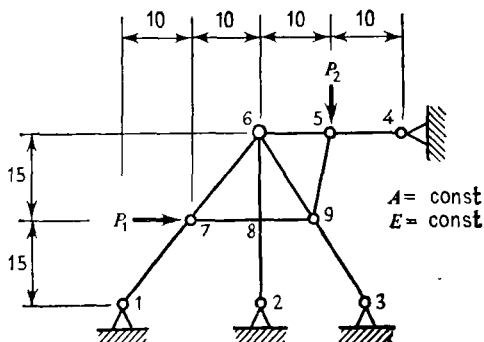


Рис. Р3.14. (Линейные размеры даны в футах.)

суть заданные величины, а соответствующие им силы неизвестны. Обобщите процедуру решения, определенную в (3.5), чтобы учесть указанные условия.

3.14. Исследуйте кинематическую устойчивость изображенной на рис. Р3.14 (размеры даны в футах) фермы с помощью процедуры исключения Гаусса — Жордана, примененной к трем уравнениям равновесия конструкции, т. е. исключите узлы 5—9.

3.15. Получите уравнения равновесия в матричной форме для изображенной на рис. Р3.15 (размеры даны в дюймах) фермы и примените процедуру исключения Гаусса — Жордана для выявления дополнительных сил (все площади равны).

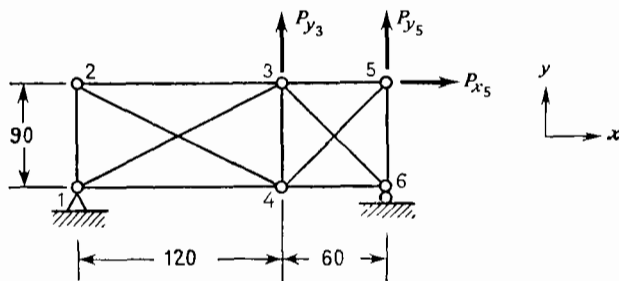


Рис. Р3.15. (Линейные размеры даны в дюймах.)

3.16. Рассматривая элементы 2—3 и 3—4 как подконструкции для конструкции из задачи 3.1, исключите w_3 и θ_3 как внутренние степени свободы и постройте матрицу жесткости конструкции относительно w_2 , θ_2 , w_4 , θ_4 .

3.17. Изображенные на рис. Р3.17 элементы 1—2 и 2—3 имеют только крутильную жесткость $k = GJ/L$. Вычислите углы закрутки θ_x и θ_y , обусловленные приложенными скручивающими моментами M_{xx} и M_{yy} .

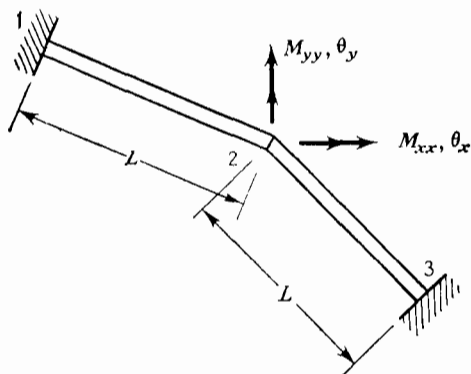


Рис. Р3.17.

3.18. Предполагается, что уравнения связи в задаче с n степенями свободы имеют вид $[G]\{\Delta\} = \{s\}$, где $[G]$ есть $(r \times n)$ -матрица. Разделите степени свободы на две группы $\{\Delta_e\}_{r \times 1}$ и $\{\Delta_c\}_{(n-r) \times 1}$. Постройте матрицу преобразований в виде (3.31) (учитывая однако вектор $\{s\}$). Выпишите уравнения жесткости в редуцированной форме (т. е. уравнения жесткости в терминах $\{\Delta_e\}$).

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В этой главе получим основные дифференциальные соотношения линейной теории упругости. Подробный вывод этих соотношений проводится в прямоугольной системе координат для двумерного случая. Этот случай в основном рассматривается в главах, в которых излагаются основы метода конечных элементов. Без вывода приведем также соотношения, которые обобщают результаты, полученные для двумерного случая, на трехмерные задачи. Обобщения на более частные случаи и системы координат отложим до глав, в которых рассматриваются соответствующие типы конечных элементов.

Следует также заметить, что вывод указанных соотношений осуществляется простейшим способом с минимумом строгости. Данный подход соответствует уровню изложения, характерному для более ранних книг по теории упругости [4.1, 4.2] или сравнительно недавно вышедших курсов, которые можно назвать *повышенными курсами сопротивления материалов* [4.3, 4.4]. Более строгий уровень построения теории, включающий нелинейные аспекты и более общие типы поведения материала, читатель может найти в книгах [4.5—4.7].

В теории упругости имеются три системы соотношений: (1) дифференциальные уравнения равновесия; (2) соотношения, связывающие деформации с перемещениями, и условия совместности; (3) уравнения состояния материала. Для любого тела, имеющего конечные размеры, системы (1) и (2) дополняются *граничными условиями*. В данной главе выводится каждое из этих соотношений, а затем в общих чертах показано, как из совокупности указанных соотношений получить определяющую систему уравнений. В заключение приводятся некоторые замечания, касающиеся вопроса единственности решения задач упругости и его значимости для метода конечных элементов.

4.1. Дифференциальные уравнения равновесия

Для простоты изучим сначала равновесие бесконечно малого плоского элемента с действующими, как указано на рис. 4.1, нормальными σ_x , σ_y и касательной τ_{xy} компонентами напряжения, а также компонентами объемной силы (т. е. силы на единицу объема) X и Y . Объемные силы могут возникнуть по разным причинам, однако в

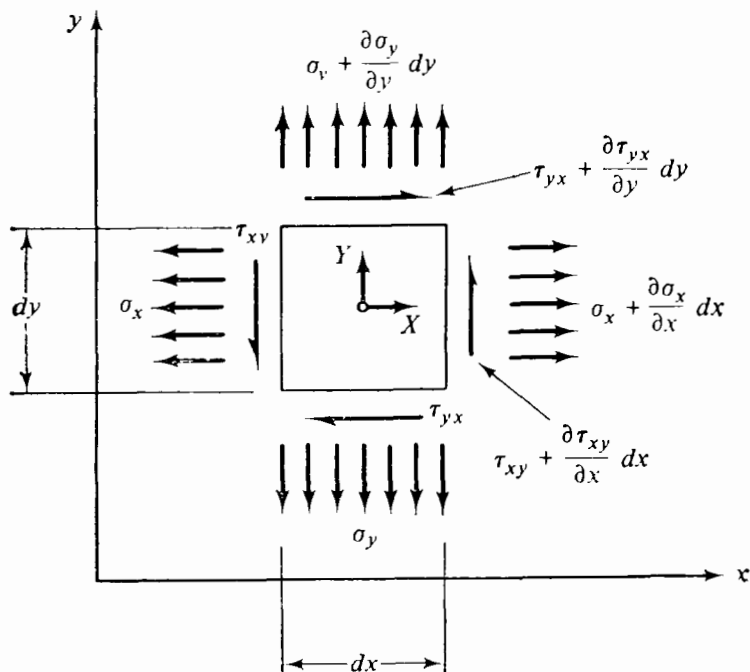


Рис. 4.1.

настоящем рассмотрении они введены главным образом для того, чтобы учесть действие сил инерции в динамическом случае. Предполагается, что компоненты напряжения, как показано на рис. 4.1, постоянны в направлении, перпендикулярном их действию; иными словами, хотя σ_x и меняется вдоль оси x , она считается постоянной на грани шириной dy . Проводя более тонкий анализ, учитывающий изменение компоненты напряжения вдоль грани, можно показать, что получаются члены более высокого порядка по сравнению с членами, рассматриваемыми в классической линейной теории упругости. Записывая условие равновесия в проекции на ось x (толщина грани в направлении, нормальном плоскости $x-y$, равна

единице), имеем

$$\sum F_x = 0 = \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy - \sigma_x dy + X dx dy + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx - \tau_{yx} dx \quad (4.1)$$

и после приведения подобных членов получим

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0. \quad (4.2a)$$

Аналогичные рассуждения для направления вдоль оси y дают

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0. \quad (4.2b)$$

Естественно, что в плоском случае должны удовлетворяться три условия равновесия, причем третьим из них является равенство моментов относительно оси, нормальной к плоскости. Наложение

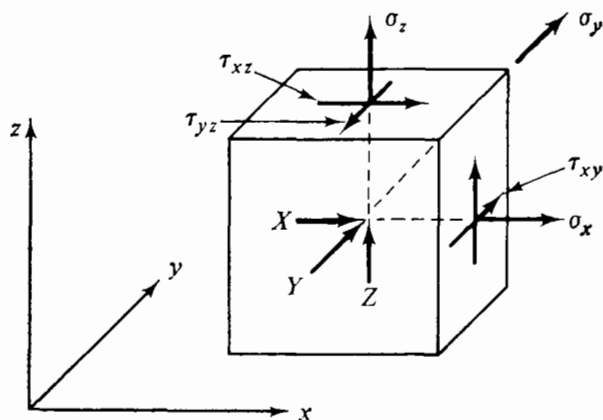


Рис. 4.2.

этого условия приводит к тому, что $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Таким образом, уравнения (4.2a) и (4.2b) представляют собой искомые уравнения равновесия плоской задачи теории упругости. Не составляет труда обобщить эти выражения на трехмерный случай (с объемными силами X , Y и Z). (См. рис. 4.2, где изображены компоненты напряжения и силы.)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Конечно-элементная формулировка задачи в определенных случаях опирается на выбор поля напряжений. Поэтому необходимо либо выбирать поля таким образом, чтобы они удовлетворяли дифференциальным уравнениям равновесия, либо проверять, удовлетворяют ли этим условиям выбранные функции, которые априори задавались без учета указанных условий. Например, если выбрать плоское поле напряжений, компоненты которого тождественно равны константам $\sigma_x=a_1$, $\sigma_y=a_2$, $\tau_{xy}=a_3$, то очевидно, что условия (4.2a) и (4.2b) выполняются. Более сложное поле, имеющее вид

$$\sigma_x=a_1+a_2y, \quad \sigma_y=a_3+a_4x, \quad \tau_{xy}=a_5,$$

где a_1, \dots, a_5 — константы, также удовлетворяет уравнениям (4.2a) и (4.2b). С другой стороны, поле

$$\sigma_x=a_1+a_2x, \quad \sigma_y=a_3+a_4y, \quad \tau_{xy}=a_5$$

не удовлетворяет дифференциальным уравнениям равновесия до тех пор, пока не обратятся в нуль коэффициенты a_2 и a_4 ($a_2=a_4=0$).

Удобно находить поля напряжений, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям равновесия, с помощью введения *функций напряжения*. Функции напряжения представляют собой функции, которые будучи продифференцированы согласно соответствующим правилам, дают компоненты напряжения, автоматически удовлетворяющие дифференциальным уравнениям равновесия. Плоское напряженное состояние можно охарактеризовать одной такой функцией Φ , называемой *функцией напряжения Эри* и определяемой соотношениями

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (4.4)$$

Очевидно, что в отсутствие объемных сил ($X=Y=0$) указанные поля напряжений автоматически удовлетворяют уравнениям (4.2) при любом выборе Φ . Рассмотрим, например, $\Phi = a_0 + a_5x + a_1y + \frac{1}{2}a_2x^2 + \frac{1}{2}a_4y^2 - a_3xy$. Тогда $\sigma_x=a_1$, $\sigma_y=a_2$, $\tau_{xy}=a_3$, что совпадает с вышеприведенным примером.

Функции напряжения можно построить также для трехмерной теории упругости, теории изгиба пластин и других отдельных случаев упругого деформирования. Так, при расчете изгиба пластин методом конечных элементов, особенно полезно знание функций, называемых *функциями напряжения Саусвелла*. Эти функции рассматриваются в гл. 12. Основные трудности, связанные с введением функций напряжения, заключаются в том, что последние не имеют четко выраженного физического смысла. Это усложняет задание граничных условий и исследование других ключевых аспектов в процессе решения любой практической задачи.

4.2. Граничные условия для напряжений

Дифференциальные уравнения равновесия должны выполняться в любой внутренней точке тела. Помимо этого, необходимо учесть условия равновесия на границе тела (*статические граничные условия*). Рассмотрим, согласно рис. 4.3, границу двумерной области, на которой действуют заданные поверхностные усилия \bar{T}_x и \bar{T}_y^* .

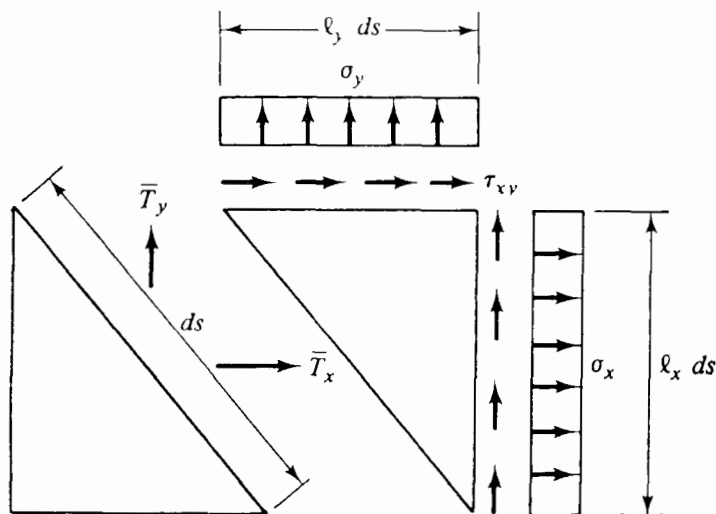


Рис. 4.3.

Обычно эти поверхностные силы определяются как силы, направленные вдоль оси x и y и действующие на единицу площади поверхности, расположенной под некоторым углом к указанным осям. На рис. 4.3 изображен участок поверхности длиной ds для плоского напряженного состояния (так как рассматривается пластинка единичной толщины, то площадь поверхности численно равна длине ds). Символами l_x и l_y обозначены соответственно косинусы углов между нормалью к поверхности и осями x и y . Из условий равновесия в направлении оси x имеем

$$\bar{T}_x ds = \sigma_x (l_x ds) + \tau_{xy} (l_y ds)$$

$$\text{или} \quad \bar{T}_x = l_x \sigma_x + l_y \tau_{xy}, \quad (4.5a)$$

а для направления вдоль оси y —

$$\bar{T}_y = l_y \sigma_y + l_x \tau_{xy}. \quad (4.5b)$$

* В этой книге все задаваемые величины (граничные усилия, перемещения) обозначаются символами с чертой сверху.

В методе конечных элементов рассматриваются условия равновесия не только во внутренних точках конструкции или на ее внешних поверхностях, но и в точках соприкосновения элементов. На границе каждого из соприкасающихся элементов в середине имеется некоторое напряженное состояние, поэтому уравнения должны выполняться в каждой точке соприкасающихся граней. На рис. 4.4(a)

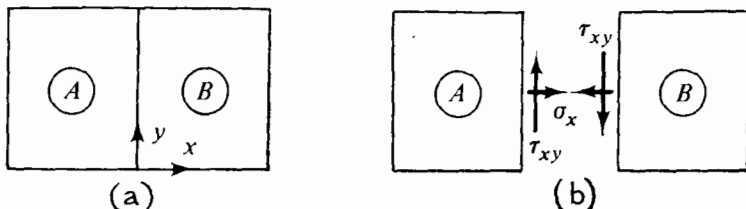


Рис. 4.4.

изображены два соседних элемента A и B , поверхность соприкосновения которых проходит по оси y глобальной системы координат. На поверхности раздела не действуют внешние нагрузки. Для выяснения условий равновесия на границе элементов разделим элементы, как показано на рис. 4.4(b). В соответствии с ориентацией поверхности раздела имеем $l_y=0$, $l_x=1$, и уравнения (4.5) сводятся к уравнениям $\bar{T}_x=\sigma_x$, $\bar{T}_y=\tau_{xy}$.

Следовательно, если граница раздела между элементами проходит вдоль оси y , то для выполнения условий равновесия требуется лишь, чтобы нормальная компонента напряжения σ_x и касательная компонента τ_{xy} на этой границе были непрерывны. Разрешается, чтобы нормальная компонента напряжения σ_y , если она существует, была разрывной при переходе этой границы в направлении x . Если поверхность раздела наклонена под некоторым углом к осям x и y , то нормальные и тангенциальные компоненты усилий на ненагруженной поверхности (\bar{T}_n и \bar{T}_s) должны быть непрерывны на границе, разделяющей элементы. С каждой стороны от поверхности раздела два усилия выражаются через три компоненты напряжения. Поэтому, несмотря на то что компоненты напряжения в направлении координат могут изменяться при переходе от одного элемента к другому, условия равновесия при переходе через поверхность соприкосновения элементов все же сохраняются.

Перед нами снова возникла необходимость ввести символ, который обозначал бы совокупность компонент некоторой переменной. Причем этот символ должен отличаться от символа, соответствующего вектору, который задает значения этих компонент в той или иной точке. Вводимый таким образом символ есть тензор напряжений σ , который включает в себя компоненты $\sigma_x \dots \tau_{zx}$; этот символ будем записывать жирным шрифтом без скобок. Если нужно перечи-

слить компоненты тензора σ , то будем записывать их в виде вектор-строки или вектор-столбца в следующем порядке: $\lfloor \sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} \rfloor$. Аналогично поле заданных поверхностных усилий будем обозначать через \bar{T} и считать, что этот символ относится к совокупности $\lfloor T_x T_y T_z \rfloor$, а объемные силы объединим символом $\bar{X} = \lfloor X Y Z \rfloor$. Символом же, соответствующим вектору, обозначаются привычные понятия матрицы-строки $\lfloor \quad \rfloor$ или матрицы-столбца $\{ \quad \}$. Если, например, напряжения для плоского напряженного состояния определить в двух точках, скажем 1 и 2, то запись примет вид

$$\{\sigma\}^T = \lfloor \sigma_{x_1} \sigma_{y_1} \tau_{xy_1} \sigma_{x_2} \sigma_{y_2} \tau_{xy_2} \rfloor.$$

4.3. Соотношения, связывающие деформации с перемещениями, и условия совместности

При формулировке метода конечных элементов на основе метода перемещений очень важны *кинематические* дифференциальные соотношения, связывающие деформации с перемещениями. Наоборот, дифференциальные уравнения равновесия (*условия статики*), приведенные в разд. 4.1, не играют столь существенной роли при этом подходе.

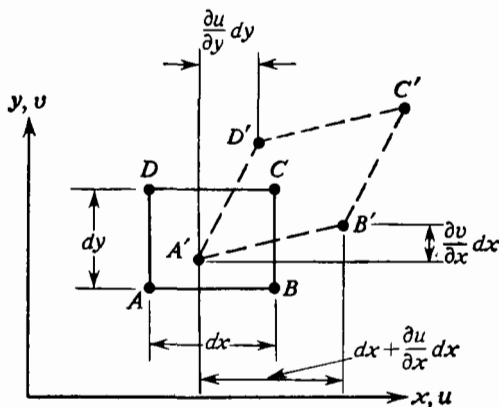


Рис. 4.5.

Для вывода соотношений между деформациями и перемещениями рассмотрим малое смещение из недеформированного состояния $ABCD$ в деформированное состояние $A'B'C'D'$ для бесконечно малого элемента, изображенного на рис. 4.5. В результате деформации имеем для *малых* (линейных) деформаций

$$(A'B')^2 = \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx \right)^2. \quad (4.6a)$$

По определению, относительная деформация (отношение приращения длины к начальной длине) ϵ_x равна $(A'B' - AB)/AB$ или при $AB = dx$

$$A'B' = (1 + \epsilon_x) dx. \quad (4.6b)$$

Возводя (4.6b) в квадрат, приравняв полученное выражение к (4.6a) и поделив на $(dx)^2$, получим

$$2\epsilon_x + \epsilon_x^2 = 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2.$$

Пренебрегая теперь членами, имеющими более высокий порядок малости, что соответствует предположению о малости деформаций, имеем

$$\epsilon_x = \partial u / \partial x. \quad (4.7a)$$

Аналогично для деформации вдоль оси y

$$\epsilon_y = \partial v / \partial y. \quad (4.7b)$$

Деформация сдвига γ_{xy} определяется как изменение значения угла, бывшего прямым до деформации. Указанный вид деформации также изображен на рис. 4.5, откуда становится ясным, что изменение угла, вызванное перемещением отрезка AB в направлении оси x в положение $A'B'$, равно

$$(1/dx) (\partial v / \partial x) dx = \partial v / \partial x.$$

Аналогично получим изменение угла при перемещении отрезка AD в направлении оси y . Следовательно,

$$\gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x. \quad (4.7c)$$

Уравнения (4.7a, b, c) являются соотношениями, связывающими деформации и перемещения в плоском случае. В трехмерных задачах остается лишь добавить следующие соотношения, обозначив через w компоненту перемещения в направлении оси z :

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}. \quad (4.7d, e, f)$$

При решении задач методом конечных элементов надо иметь в виду одно обстоятельство, касающееся связи между деформациями и перемещениями: *выделение движения тела как твердого целого*. Выражения для деформаций не содержат такого движения, однако оно фигурирует в перемещениях. Следовательно, при определении деформаций путем дифференцирования перемещений из искомым соотношений исключается движение тела как твердого целого. Например, для линейного элемента горизонтальное смещение точки может быть задано выражением (рис. 4.6) $u = a_1 + a_2 x$, из которого следует, что $\epsilon_x = du/dx = a_2$.

Следовательно, член a_1 , который был исключен в результате дифференцирования, и соответствует движению элемента как твердого тела. Указанный факт говорит о том, что если конечно-элементная модель строится на основе задаваемых априори функций перемещений, то количество независимых параметров, с помощью которых описывается деформированное состояние в элементе, меньше количества параметров, задающих перемещения, на число степеней свободы элемента как твердого тела.

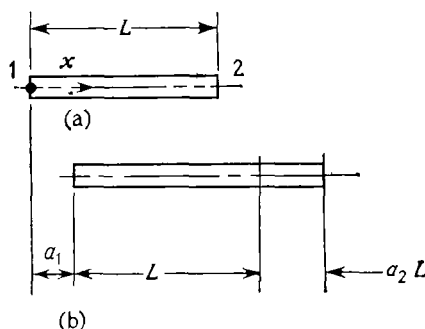


Рис. 4.6. (а) Недеформированное состояние; (б) смещенное деформированное состояние.

Другое обстоятельство, тесно связанное с основными приведенными выше соотношениями, но в некотором смысле противоположное по предпосылкам, относится к деформациям. В плоском случае три уравнения (уравнения (4.7а, б, с)), определяющие три компоненты деформации, выражаются через две компоненты перемещений. В трехмерных задачах существуют шесть компонент деформации и три компоненты перемещения. Следовательно, ни в одном из этих случаев эти уравнения не имеют единственного решения, если деформации заданы произвольным образом. Необходимые дополнительные уравнения можно вывести из условия *совместности*, которое требует, чтобы компоненты перемещения были однозначными непрерывными функциями.

Условие совместности получим наиболее элементарным способом, последовательно дифференцируя соответствующие выражения. Для плоской задачи теории упругости последовательно продифференцируем γ_{xy} по x и по y :

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2}. \quad (4.8)$$

Последнее выражение получается с учетом того, что, в силу однозначности и непрерывности, $\partial^2 / \partial x \partial y = \partial^2 / \partial y \partial x$. Обобщение этого условия на трехмерный случай приводит к системе из шести уравнений.

Так же как и при обозначении характеристик напряженного состояния, следует различать поля перемещений во *внутренних точках тела* и поля перемещений в *граничных* (на *поверхности тела*) точках. Поле перемещений внутри тела обозначим через Δ . Этот символ относится к совокупности смещений вдоль осей координат u, v, w . Смещения на границе обозначим через \bar{u} и отнесем к совокупности величин u, v, w для граничных точек. Таким образом,

$$\Delta = [u \ v \ w]^T \text{ (внутри тела),}$$

$$\bar{u} = [u \ v \ w]^T \text{ (на поверхности).}$$

Кроме того, в трехмерной задаче введем для деформаций следующее обозначение:

$$\mathbf{e} = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}]^T.$$

Граничные условия на перемещения (кинематические граничные условия) попросту требуют совпадения перемещений на поверхности упругого тела \bar{u} с заданными перемещениями u , т. е.

$$\bar{u} - u = 0. \quad (4.9)$$

4.4. Уравнения состояния материала

Обычно *уравнения состояния для материала*, которые в настоящем рассмотрении относятся только к механическим характеристикам материала, задают путем постулирования полного набора коэффициентов, связывающих каждую компоненту напряжения со всеми компонентами деформации. Далее, из соображения симметрии и учета анизотропных свойств материала число коэффициентов уменьшают таким образом, чтобы они отвечали соответствующим механическим характеристикам среды, например наличию в ней ортотропной плоской деформации. Ниже, чтобы отчетливо показать физическую природу этих свойств и осветить результаты эксперимента, будем двигаться в обратном направлении: от наиболее простых аспектов поведения материала к более сложным.

Простейшие механические свойства материала можно выяснить из испытаний образца на одноосное растяжение. Линейный участок на диаграмме напряжение — деформация представляется алгебраически законом Гука: $\sigma_x = E\varepsilon_x$ или $\varepsilon_x = \sigma_x/E$. Это выражение дает зависимость деформации от напряжения. Если существует механизм, приводящий к появлению деформаций без приложения нагрузок, т. е. начальная деформация $\varepsilon_x^{\text{init}}$, то

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \varepsilon_x^{\text{init}} \text{ или } \sigma_x = E\varepsilon_x - E\varepsilon_x^{\text{init}}. \quad (4.10)$$

Для построения зависимостей в двумерном случае рассмотрим сначала *изотропный* материал и выясним, как он ведет себя при

наличии в нем напряжений. У изотропного материала зависимость деформаций от напряжений неизменна при ортогональном преобразовании координат. На рис. 4.7(а) изображено, как прикладываемое к образцу напряжение σ_x в направлении оси x вызывает деформацию образца в обоих направлениях x и y . Вдоль

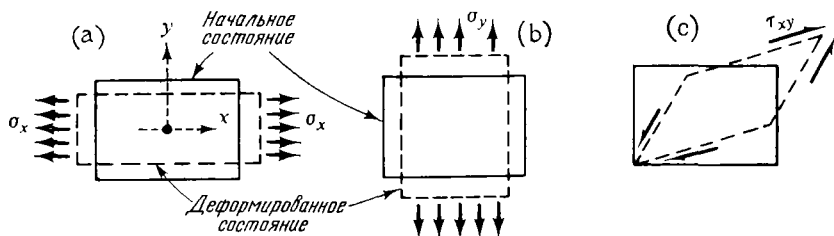


Рис. 4.7.

оси x деформация равна попросту σ_x/E . Образец сжимается и в направлении оси y , так как коэффициент Пуассона μ отличен от нуля, поэтому в этом направлении деформация равна $-\mu\sigma_x/E$. Аналогично наличие напряжения σ_y вызывает деформации в направлении осей x и y , равные соответственно $-\mu\sigma_y/E$ и σ_y/E (как показано на рис. 4.7(b)). На значения относительных удлинений вдоль осей x и y не влияет наличие деформации сдвига, изображенной на рис. 4.7(c), которая связана со сдвиговым напряжением соотношением

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}.$$

В результате суперпозиции и записи соотношений в матричной форме (с $\sigma = [\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}]^T$, $\epsilon = [\epsilon_x \epsilon_y \tau_{xy}]^T$) получим

$$\epsilon = [E]^{-1} \sigma, \quad (4.11)$$

где

$$[E] = \frac{E}{(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

$$[E]^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Матрица $[E]$ называется *матрицей жесткости материала*, а $[E]^{-1}$ — *матрицей податливости материала*. Аналогично выражению (4.10) можно непосредственно обобщить вышеприведенные соотношения на случай наличия начальных деформаций $\epsilon^{init} = [\epsilon_x^{init} \epsilon_y^{init} \tau_{xy}^{init}]^T$, что приводит к соотношению

$$\epsilon = [E]^{-1} \sigma + \epsilon^{init}. \quad (4.14)$$

Начальные деформации представляют наибольший интерес в задачах термоупругости, где $\epsilon_x^{\text{init}} = \epsilon_y^{\text{init}} = \alpha \Upsilon$, $\gamma_{xy}^{\text{init}} = 0$, для изотропного тела с коэффициентом линейного расширения α и отклонением температуры от температуры ненапряженного состояния на Υ .

Наиболее часто применяемый подход при построении конечно-элементной модели — подход, при котором задаются функции перемещений, — требует, чтобы напряжения были выражены через деформации. Поэтому, обращая уравнение (4.14), получим

$$\sigma = [E]\epsilon - [E]\epsilon^{\text{init}}. \quad (4.15)$$

Теперь благодаря матричным уравнениям (4.14) и (4.15) в нашем распоряжении имеется достаточно общее представление механических свойств материала. Проводя обобщения на шестимерные векторы σ и ϵ , можно охватить все разнообразие задач трехмерной теории упругости. Полностью заполненная матрица $[E]$ размерностью 6×6 определяет общий случай *анизотропного* материала, который обладает различными свойствами в различных направлениях. Много частных случаев поведения материала находится в диапазоне между изотропией и полной анизотропией. Так, в частности, сюда можно отнести ортотропные материалы, имеющие три взаимно перпендикулярные плоскости упругой симметрии. В последующих главах будет подробно представлен ряд матриц $[E]$ и $[E]^{-1}$ специального вида, отвечающих требованиям соответствующей конечно-элементной модели. Важным свойством всех матриц жесткости и податливости для рассматриваемых здесь материалов является их *симметричность* (см. соотношения (4.12) и (4.13)).

Пока достаточно отметить, что метод конечных элементов особенно хорош при решении задач со сложными жесткостными свойствами материала. Из дальнейшего будет видно, что матрица $[E]$ (или обратная к ней матрица) легко обрабатывается в алгоритмах численного интегрирования. Ограничения, накладываемые на сложность и представления жесткостных характеристик материала, часто диктуются практикой: для большинства практических задач трудно располагать большей информацией о механических характеристиках материала, чем полученной в результате эксперимента информацией о зависимости напряжений от деформаций для ортотропного материала в двумерном случае. Исключение составляют слоистые пластины с ортотропными слоями (механические характеристики слоев можно определить экспериментально, а затем вычислить характеристики всей слоистой пластины) и композитные материалы (например, стекло-волоконистые композиты). Благодаря особой роли композитов как ортотропных материалов, применяемых на практике, публикации, касающиеся их разработки и использования, представляют отличный источник информации для детального построения вполне общих соотношений, задающих жесткостное поведение материала (см. [4.8]).

4.5. Дифференциальные уравнения равновесия и совместности

Приведенные выше системы уравнений можно объединить с целью получения альтернативных форм дифференциальных уравнений, точное решение которых будет удовлетворять и исходным уравнениям. Эти альтернативные формы называются соответственно дифференциальными уравнениями *равновесия* и *совместности*.

Сделаем несколько замечаний относительно мотивировки построения указанных дифференциальных уравнений. Ранее были независимо сформулированы два набора условий: статические и динамические. Статические условия записываются исключительно через статические переменные (напряжения или функции напряжений). Кинематические условия записываются только через кинематические переменные (перемещения или деформации). Для единственности решения необходимо связать статические и кинематические переменные. Это осуществляется с помощью введения определяющих соотношений.

Выведем сначала дифференциальные уравнения равновесия, так как подход, использующий при построении конечно-элементной модели метод жесткостей (или метод перемещений), одновременно может служить подходом, позволяющим получить приближенное решение этих уравнений. Для простоты исключим из рассмотрения объемные силы и начальные деформации ($X=Y=0$, $\{\epsilon^{\text{init}}\}=0$). Вывод искомых уравнений заключается в построении соотношений, связывающих напряжения с перемещениями, с последующей подстановкой этих соотношений в дифференциальные уравнения равновесия. Например, подставляя соотношения, связывающие деформации с перемещениями, в уравнение состояния для σ_x , получим

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu E}{1-\mu^2} \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (4.16)$$

Аналогичные операции нужно провести также для σ_y и τ_{xy} . Далее, подставляя полученные соотношения в дифференциальные уравнения равновесия (уравнения (4.2a) и (4.2b)), имеем

$$\begin{aligned} \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{E}{2(1-\mu)} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \frac{E}{2(1-\mu)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Если можно найти отвечающие кинематическим граничным условиям непрерывные однозначные поля перемещений, которые удовлетворяют вышеприведенным соотношениям и соответствующим граничным условиям, то будет найдено искомое точное решение. Это и есть *теорема единственности*.

Рассмотрим, например, квадратичные поля перемещений в плоском случае

$$\begin{aligned}u &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6xy, \\v &= a_7 + a_8x + a_9y + a_{10}x^2 + a_{11}y^2 + a_{12}xy,\end{aligned}$$

где a_1, a_2, \dots, a_{12} — константы. После подстановки в (4.17) получим

$$\begin{aligned}\frac{2E}{1-\mu^2} \left[a_4 + \frac{1-\mu}{2} a_5 \right] + \frac{E}{2(1-\mu)} a_{12} &= 0, \\ \frac{2E}{1-\mu^2} \left[\frac{1-\mu}{2} a_{10} + a_{11} \right] + \frac{E}{2(1-\mu)} a_6 &= 0.\end{aligned}$$

Очевидно, представленное поле перемещений не отвечает точному решению задачи упругости при произвольном выборе констант a_i . Однако при $a_5 = a_{10} = 0$ решение можно представить в виде указанного поля, если

$$a_4 = -\frac{(1+\mu)}{4} a_{12} \quad \text{и} \quad a_{11} = -\frac{(1+\mu)}{4} a_6.$$

Эти условия все же не дают гарантии того, что данные поля перемещений являются соответствующим решением задачи. Для u и v должны быть выполнены граничные условия на перемещения, а поле напряжений, выраженное через u и v (полученное путем дифференцирования этих компонент, согласно связи деформаций с перемещениями и подстановки в зависимость напряжений), должно удовлетворять граничным условиям для напряжений.

Перейдем к формулировке определяющих соотношений, соответствующих условию совместности. Основным дифференциальным уравнением совместности для плоского случая является уравнение (4.8). Подставляя в него определяющие выражения для деформаций через напряжения, согласно (4.11), получим

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \mu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \mu \sigma_x) = 2(1+\mu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (4.18)$$

В это соотношение входят три неизвестные величины ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$). С помощью определенной в разд. 4.1 выражениями (4.6) функции Эри Φ преобразуем это уравнение таким образом, чтобы в него вошла только одна неизвестная величина. Подставляя указанные выражения в (4.18), приходим к уравнению

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0$$

или

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = \nabla^4 \Phi = 0, \quad (4.19)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (4.20)$$

Оператор ∇^2 — *лапласиан* или *гармонический оператор*, а уравнение (4.19) — *бигармоническое уравнение*.

Рассуждения, касающиеся условий выбора полей перемещений, которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия, в той же мере применимы и в данном случае. Функция напряжений по определению удовлетворяет уравнениям равновесия. Однако выражения, выбранные в качестве функции напряжений, вполне могут не удовлетворять уравнению (4.19), которое задает условие совместности. В этом случае выбранные выражения будут лишь приближением к точному решению задачи. Точное же решение должно удовлетворять как граничным условиям, так и уравнению (4.19).

4.6. Заключительные замечания

Представленная в разд. 4.5 *теорема единственности* в теории упругости формально утверждает, что *если вместе с объемными силами заданы либо поверхностные силы, либо перемещения на поверхности тела, то в теле существует только одно поле напряжений, или перемещений*. Решение, удовлетворяющее всем условиям равновесия и совместности внутри тела и на его границе, единственно.

Для того чтобы эти условия выполнялись, зависимость деформаций от напряжений должна соответствовать линейно-упругому телу; условия равновесия записываются без учета деформаций, и проводимые рассматривания ограничиваются рамками теории малых деформаций. В гл. 13, например, изучаются вопросы упругой неустойчивости, которая характеризуется наличием смежных и, следовательно, неединственных форм равновесия. Эти формы выявляются при учете влияния деформации на условия равновесия.

Знание теоремы единственности важно исследователю, использующему метод конечных элементов. Если бы конечно-элементная модель отвечала *всем* условиям равновесия и совместности, то *точное решение* было бы найдено и *никакое дальнейшее измельчение сетки не привело бы к улучшению ответа*. Однако все исследователи, конечно, допускают, что для процедуры численного решения, на какой бы основе она ни строилась — представление в рядах, конечно-разностная, конечно-элементная — измельчение сетки приводит к улучшению решения. Это обстоятельство ясно показывает, что для любого доступного численного метода полученное с его помощью точное решение не будет удовлетворять либо всем, либо какому-то основному условию.

Метод конечных элементов не обладает по сравнению с другими численными методами особыми недостатками, так как для него не выполняется лишь одно из условий равновесия или совместности. Действительно, будет показано, что при некоторых конечно-

элементных подходах все неприятности можно свести только к одной: к отсутствию выполнения условий равновесия, в то время как все условия непрерывности для перемещений окажутся выполненными. Для этих подходов можно доказать, что получаемые численные решения обладают таким свойством, как монотонная сходимость, и характеризуются тем, что некоторые параметры решения, например энергия деформации или коэффициенты влияния, находятся по одну сторону от точных значений. Знание этих предельных значений может оказать неоценимую услугу при оценке точности решения.

Литература

- 4.1. Timoshenko S., Goodier J. Theory of Elasticity. 2nd ed.—New York, N. Y.: McGraw-Hill Book Co., 1951. [Имеется перевод: Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости.— М.: Наука, 1979, 560 с.]
- 4.2. Wang C. T. Applied Elasticity.—New York, N. Y.: McGraw-Hill Book Co., 1953.
- 4.3. Oden J. T. Mechanics of Elastic Structures.—New York, N. Y.: McGraw-Hill Book Co., 1967.
- 4.4. Volterra E., Gaines J. Advanced Strength of Materials.—Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc., 1971.
- 4.5. Sokolnikoff I. S. Mathematical Theory of Elasticity, 2nd ed.—New York, N. Y.: McGraw-Hill Book Co., 1956.
- 4.6. Green A., Zerna W. Theoretical Elasticity, 2nd ed.—New York, N. Y.: Oxford University Press, 1968.
- 4.7. Новожилов В. В. Теория упругости.— Л.: Судпромгиз, 1958.
- 4.8. Anonymous. Structural Design Guide for Advanced Composite Applications. 2nd ed., U. S. Air Force Materials Laboratory, Wright Patterson AFB, Ohio, 1969.

Задачи

4.1. Удовлетворяют ли следующие распределения напряжений условиям равновесия (объемные силы равны нулю)? Схематически укажите напряженное состояние

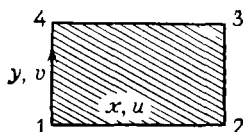


Рис. Р4.1.

ние на границе, согласующееся с этими функциями, для элемента, изображенного на рис. Р4.1.

$$\sigma_x = a_1 + a_2 x,$$

$$\sigma_y = a_3 + a_4 y,$$

$$\tau_{xy} = a_5 - a_2 y - a_4 x.$$

4.2. Ниже в полярных координатах приводятся уравнения равновесия и соотношения, связывающие деформации и перемещения при плоском напряженном состоянии. Уравнения состояния идентичны соотношениям, записанным в прямо-

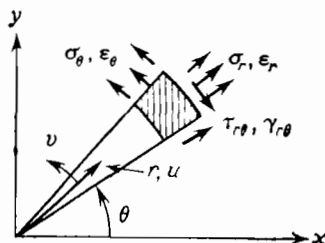


Рис. Р4.2.

угольной системе координат. Выпишите определяющие дифференциальные уравнения равновесия с учетом тепловой деформации.

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r},$$

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0.$$

4.3. Сформулируйте линейные дифференциальные уравнения равновесия для трехмерной задачи теории упругости, учитывая сначала зависимость напряжений от трех координат, а затем исключив члены более высокого порядка малости.

4.4. Используйте приведенную ниже функцию перемещений для построения матрицы жесткости, соответствующей изображенному на рис. Р4.4 элементу в форме

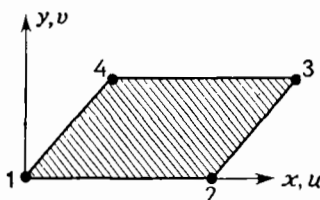


Рис. Р4.4.

параллелограмма. Проверьте, удовлетворяет ли эта функция: (а) условиям равновесия внутри элемента, (б) условиям равновесия на границе элемента, (с) условиям непрерывности между элементами.

$$u = a_1 x + a_2 y + a_3 \left(xy - \frac{x_4}{y_4} y^2 \right) + a_4,$$

$$v = a_5 x + a_6 y + a_7 \left(xy - \frac{x_4}{y_4} y^2 \right) + a_8.$$

4.5. Постройте матрицу связи напряжений с деформациями $[E]$ для плоской деформации ортотропного материала. В итоге она должна связывать $\sigma = [\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}]^T$ с $\epsilon = [\epsilon_x \epsilon_y \gamma_{xy}]^T$. В этом случае $\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0$. Упругие модули суть E_x , E_y , G_{xy} . Коэффициент Пуассона, отвечающий деформации, направленной вдоль оси y , вызванной напряжением в направлении оси x , равен μ_{yx} и т. д.

4.6. Проверьте, выполняются ли для элемента, изображенного на рис. Р4.1, и для приводимого ниже поля перемещений уравнения равновесия. Что значит

с физической точки зрения, что эта функция не удовлетворяет условиям равновесия?

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4,$$

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4,$$

где

$$N_1 = (1 - x/x_2)(1 - y/y_3), \quad N_2 = (x/x_2)(1 - y/y_3),$$

$$N_3 = (x/x_2)(y/y_3), \quad N_4 = (1 - x/x_2)(y/y_3).$$

4.7. Смещения на границе элемента, изображенного ниже, описываются с помощью функций

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3, \quad v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3,$$

где

$$N_1 = \frac{(2s-a)(s-a)}{a^2}, \quad N_2 = \frac{4s(a-s)}{a^2}, \quad N_3 = \frac{s(2s-a)}{a^2}.$$

Определите нормальные и тангенциальные усилия \bar{T}_n и \bar{T}_s , соответствующие этим перемещениям.

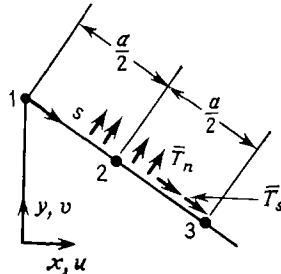


Рис. Р4.7.

4.8. Пусть Φ_1 , Φ_2 и Φ_3 — трехмерные функции напряжений, определяемые следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y \partial x}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z \partial x}, \quad \sigma_z = \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x \partial y},$$

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right),$$

$$\tau_{yz} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right),$$

$$\tau_{zx} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right).$$

Докажите, что они удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия и выведите соответствующие им уравнения совместности,

ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ

Начиная с данной главы, приступим к выводу соотношений между силами и перемещениями для элементов. При этом рассмотрим два подхода: *прямой метод* и *метод взвешенных невязок*.

В прямом методе построение соотношений для элемента осуществляется непосредственно с помощью учета приведенных в предыдущей главе трех систем уравнений теории упругости: уравнений равновесия, соотношений между перемещениями и деформациями, а также уравнений состояния. Этот метод особенно полезен при выяснении фундаментальных соотношений между *конечно-элементной аппроксимацией* и *реальной конструкцией*. Так, этим методом будет проведено теоретическое обоснование построений, проведенных в разд. 2.2 и 2.3. Прямому методу присущи черты, свойственные и другим подходам к построению конечно-элементной модели. Особенно это затрагивает вопросы задания сил, если известны напряжения, и деформаций, если известны перемещения. Этот подход включает основные положения, использованные на ранней стадии развития метода конечных элементов [см. 5.1, 5.2]. Однако область применения прямого метода ограничена: его трудно или даже невозможно применить при выводе соотношений для усложненных элементов и в некоторых специальных задачах.

В свою очередь область применения метода взвешенных невязок [5.3] практически неограниченна, и, как оказалось, он обладает достоинствами, отсутствующими у альтернативных подходов. Один из вариантов этого подхода приводит к формулировке, идентичной той, к которой приходим при применении описанных в гл. 6 вариационных принципов. Для некоторых классов нелинейных задач методом взвешенных невязок можно вывести соотношения, которые нельзя получить с помощью классических вариационных принципов [см. 5.4, 5.5]. Кроме того, этот подход помогает уяснить физические основы таких вариационных принципов, как экстремальные принципы для потенциальной и дополнительной энергий.

В данной главе соотношения, определяющие поведение конструкции, используются в основном для построения матрицы жесткости элементов с использованием полей перемещений. Однако описываемые ниже методы применимы для построения соотношений не только данного типа, но справедливы при выводе любого типа соотношений для элемента, если заданы поля перемещений и (или) напряжений, и в действительности используются также в разнообразных физических задачах, не связанных с расчетом конструкций. В этой главе приводится небольшое число простых примеров, иллюстрирующих последнее утверждение.

5.1. Прямой метод

Прямой метод построения уравнений жесткости состоит из следующих шагов.

1. Поле перемещений элемента Δ выражается в терминах конечного числа параметров $\{a\}$. Желательно, чтобы ими были степени свободы в узлах $\{\Delta\}$. Если выбраны параметры $\{a\}$, не имеющие физического смысла, то необходимо задать преобразования, связывающие указанные параметры с имеющими физический смысл степенями свободы $\{\Delta\}$.

2. Поле деформаций ε выражается в терминах степеней свободы $\{\Delta\}$ посредством дифференцирования поля перемещений согласно соотношениям, связывающим деформации с перемещениями (4.7).

3. С учетом уравнений состояния (4.15) устанавливается связь между полем напряжений σ и степенями свободы $\{\Delta\}$.

4. С помощью определения усилий, статически эквивалентных напряжениям, действующим на границе элемента, выводятся выражения для сил в узлах элемента $\{F\}$ в зависимости от вида поля напряжений σ . Так как поле напряжений σ выражено в терминах $\{\Delta\}$ (шаг 3), то на данном шаге можно связать $\{F\}$ и $\{\Delta\}$. Результирующие соотношения являются, по определению, уравнениями жесткости элемента.

Чтобы проиллюстрировать изложенную выше процедуру, построим матрицы жесткости для трех простых элементов: стержневого, балочного, треугольного плоско-напряженного.

Рассмотрим сначала стержневой элемент (см. рис. 2.7). Выразим поле перемещений $\Delta = u$ через обобщенные перемещения $\{a\}$. Очевидно, что две степени свободы, отвечающие перемещениям в точках 1 и 2, определяют деформированное состояние этого элемента. Поэтому выберем в совокупности $\{a\}$ два параметра, иными словами

$$\{a\} = [a_1 \ a_2]^T. \quad (5.1)$$

Для описания одномерного распределения u между концевыми точками выберем *полиномиальное представление*. Это представление

совместимо с аналогичным представлением для большинства двумерных и трехмерных элементов, так как входящие в полином общего вида переменные x , y и z обеспечивают хорошую аппроксимацию для элементов любой формы. Дополнительные вопросы, касающиеся теоретического обоснования выбора вида полинома, рассматриваются в гл. 8. В нашем же случае, имея два параметра, логично выбрать линейный полином по x , т. е.

$$u = a_1 + a_2 x = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}. \quad (5.2)$$

Для общего случая можем использовать следующую символическую запись:

$$\Delta = [p] \{a\}. \quad (5.2a)$$

Принятая в (5.2a) символическая запись нуждается в пояснении. В разд. 4.3 было указано, что перемещение узла, обозначенное через Δ , может иметь до трех компонент, а именно u , v и w . Следовательно, можно независимо для каждой компоненты задать полиномиальное представление. В этом случае $[p]$ — прямоугольная матрица, имеющая три строки. Если, например, перемещение в трехмерном случае задано в виде

$$u = a_1 + a_2 x, \quad v = a_3 + a_4 x, \quad w = a_5 + a_6 x,$$

то будем иметь

$$\Delta = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix}.$$

Рассматривая вновь стержневой элемент, определим, согласно рекомендациям шага 1, преобразования, связывающие параметры представления с физическими степенями свободы u_1 и u_2 . Это можно осуществить, выписывая (5.2) в точках $x=0$ и $x=L$. Имеем

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}, \quad (5.3)$$

что в общем виде символически запишется в виде

$$\{\Delta\} = [B] \{a\}. \quad (5.3a)$$

Обращая матрицу $[B]$, получим

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} L & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad (5.4)$$

или в общем виде

$$\{a\} = [B]^{-1} \{\Delta\}. \quad (5.4a)$$

Подставляя это соотношение в (5.2), находим

$$u = \lfloor \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{x}{L} \rfloor \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \lfloor N_1 \ N_2 \rfloor \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad (5.5)$$

или в символической записи

$$\Delta = [p] [B]^{-1} \{\Delta\} = [N] \{\Delta\}, \quad (5.5a)$$

где $[1 - (x/L)] = N_1$ и $x/L = N_2$ называются *функциями формы* поля перемещений.

Выполняя операции на шаге 2 (введение соотношений между деформациями и перемещениями), имеем $\epsilon = \epsilon_x = u'$, где штрихом обозначена производная величины u по x . Операции на этом шаге можно выполнить двумя способами. В первом случае можно продифференцировать соотношения (5.2) и использовать выражения (5.4) для вывода искомых соотношений. Таким образом,

$$u' = \lfloor 0 \ 1 \rfloor \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}. \quad (5.6)$$

в общем виде символически запишется в виде

$$\epsilon = [C] \{a\}, \quad (5.6a)$$

и подставляя в полученное выражение формулы (5.4), приходим к соотношению

$$\epsilon = u' = \frac{1}{L} \lfloor 0 \ 1 \rfloor \begin{bmatrix} L & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \left[-\frac{1}{L} \ \frac{1}{L} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}.$$

Можно непосредственно продифференцировать соотношения (5.5). Имеем

$$\epsilon = u' = \left[-\frac{1}{L} \ \frac{1}{L} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (5.6b)$$

или

$$\epsilon = [D] \{\Delta\}. \quad (5.6c)$$

Можно заметить, что из уравнения (5.6) параметр a_1 по существу исключен, и это уравнение можно записать в виде $u' = a_2$. Сокращенная форма записи обусловлена тем, что, как показано в разд. 4.3, дифференцирование перемещений с целью получения деформаций приводит к исключению членов, отвечающих движению тела как твердого целого. В данном случае такому движению соответствует член a_1 . В более общем случае параметры, отвечающие движению тела как твердого целого, обозначены через $\{a_s\}$, а остальные параметры — через $\{a_f\}$. Тогда сокращенная форма соотношения, связывающего перемещения и деформации для общего случая, имеет вид

$$\epsilon = [C_f] \{a_f\}. \quad (5.6d)$$

Выполняя операции шага 3 (введение соотношений между напряжениями и деформациями) для стержневого элемента, находим, что $[E]=E$ и $\sigma=\sigma_x$, и с учетом (5.6b)) приходим к соотношению

$$\sigma_x = E \left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad (5.7)$$

или символически

$$\sigma = [E] [D] \{\Delta\} = [S] \{\Delta\}, \quad (5.7a)$$

где $[S]=[E] [D]$ — одно из представлений *матрицы жесткости элемента*.

Напомним, что понятие матрицы напряжений элемента было введено в (3.9) с помощью равенства $\{\sigma\}=[S] \{\Delta\}$, которое позволяет оценивать напряжения в *заданных точках*. Например, для стержневого элемента $\{\sigma\}=[\sigma_x, \sigma_x]^T$, если напряжения вычисляются в конечных точках. Таким образом, символ $[S]$ используется для обозначения преобразования вектора перемещения $\{\Delta\}$ в распределенные напряжения σ , и символ $[S]$ — для обозначения преобразования $\{\Delta\}$ в вектор напряжений $\{\sigma\}$, определенный в *заданных точках*. Соотношение для элемента $\{\sigma\}=[S] \{\Delta\}$ можно использовать вместо (5.7a). В этом виде выражение для напряжения используется далее при построении изгибаемого элемента.

Выполняя операции завершающего шага, т. е. преобразуя напряжения в узловые силы, заметим, что эти силы задаются в виде $\{F\}=[F_1 \ F_2]^T$ и каждая компонента силы определяется умножением соответствующей компоненты напряжения на площадь поперечного сечения элемента A . Имеем (F_1 действует в направлении, противоположном положительным σ_x)

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = A \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \sigma_x \quad (5.8)$$

или

$$\{F\}=[A] \{\sigma\}; \quad (5.8a)$$

подставляя (5.7), получаем

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = AE \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}. \quad (5.9)$$

Находим, что уравнения жесткости элемента записываются в виде $\{F\}=[k] \{\Delta\}$, где

$$[k]=[A] [E] [D]. \quad (5.10)$$

Итак, установлено, что матрица жесткости строится при помощи перемножения следующих трех матриц: $[D]$ — *матрицы преобразования перемещений для соответствующих степеней свободы в деформации*; $[E]$ — *матрицы жесткости упругого материала*; $[A]$ — *матрицы преобразований напряжений в узловые силы*.

Матрицу $[D]$ можно разбить на элементарные составляющие. В случае когда поле перемещений записывается в терминах обобщенных степеней свободы, из (5.4а) и (5.6а) имеем

$$[D] = [C] [B]^{-1}. \quad (5.11)$$

Два обстоятельства следует отметить в предшествующих рассуждениях. Во-первых, до сих пор не рассматривался какой-либо конкретный вид условий равновесия внутри элемента. Известно, разумеется, что напряжения в этом элементе постоянны, и после проверки, согласно (5.7), убеждаемся, что выбранное поле перемещений отвечает этому условию. В общем случае напряженное состояние, соответствующее предполагаемому полю перемещений, не удовлетворяет условиям равновесия. Это обстоятельство тем не менее не влияет на возможности построения матрицы жесткости указанным выше способом. Во-вторых, ввиду непрерывности выбираемых функций перемещения непрерывны внутри элемента и при переходе через границу от одного элемента к соседнему с ним элементу. Это обусловлено тем, что взаимодействие двух одномерных элементов происходит только в узловых точках. Однако в общем случае для двух- и трехмерных элементов взаимодействие между элементами происходит не только в узлах, поэтому поля перемещений для элемента должны выбираться с учетом обеспечения свойств непрерывности полей перемещений на границах соседних элементов. Это обстоятельство обсуждалось в разд. 2.2 и вновь рассматривается в разд. 5.2. Так как настоящее представление отвечает всем условиям равновесия и непрерывности перемещений, то оно задает «точное» представление матрицы жесткости элемента.

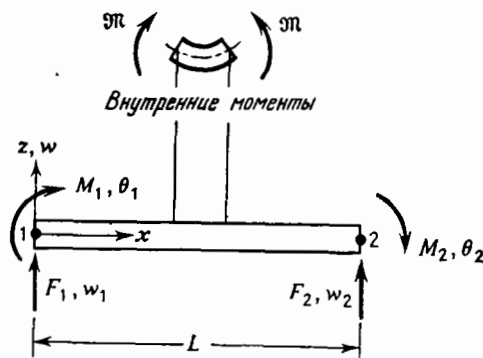


Рис. 5.1. Балочный элемент.

Во многих случаях при расчетах прикладываемые нагрузки распределены в виде непрерывной функции от x . В излагаемом подходе предполагается, что распределенные нагрузки заменены ста-

тически эквивалентными им узловыми силами. Более элегантный способ учета этой ситуации приведен в гл. 6.

Рассмотрим далее балочный элемент, изображенный на рис. 5.1. Основные моменты исследования схожи при этом со случаем стержневого элемента, однако следует отметить одну важную отличительную особенность, а именно вид задаваемых степеней свободы в узле соединения. Кроме того, поле деформаций неоднородно внутри элемента. Согласно теории изгиба балок, не учитывающей поперечные сдвиговые деформации, в концевых точках необходимо определять не только поперечные смещения (w_1 и w_2), но и угловые смещения (θ_1 и θ_2). Последние равны отрицательному значению тангенса угла наклона нейтральной оси, так как вращение в положительном направлении (по часовой стрелке) вызывает отрицательные поперечные смещения. Имеем

$$\theta_1 = - \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0}, \quad \theta_2 = - \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=L}.$$

Таким образом,

$$[\Delta] = [w_1 \ \theta_1 \ w_2 \ \theta_2]^T. \quad (5.12)$$

Как и в случае стержневого элемента, для описания поля перемещений Δ , определяемого в рассматриваемом случае величиной w , выберем полином. Имеются четыре степени свободы, и поэтому для аппроксимации прогиба, если не опускать низшие степени в полиномиальном представлении, нужно выбрать кубический полином, содержащий четыре члена:

$$w = a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4. \quad (5.13)$$

Определяя w и $-dw/dx$ в точках 1 и 2, имеем

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ L^3 & L^2 & L & 1 \\ -3L^2 & -2L & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix},$$

причем обратное соотношение имеет вид

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} 2 & -L & -2 & -L \\ -3L & 2L^2 & 3L & L^2 \\ 0 & -L^3 & 0 & 0 \\ L^3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}.$$

После подстановки в (5.13) получим

$$w = [N] \{\Delta\}, \quad (5.14)$$

где $[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$,

$$\begin{aligned} N_1 &= (1 + 2\xi^3 - 3\xi^2), & N_3 &= (3\xi^2 - 2\xi^3), \\ N_2 &= -x(\xi - 1)^2, & N_4 &= -x(\xi^2 - \xi), \end{aligned} \quad (5.14a)$$

причем $\xi = x/L$.

Деформации в случае изгиба равны кривизнам (вторым производным), т. е. w'' . Следовательно,

$$w'' = [N''] \{\Delta\}, \quad (5.15)$$

где

$$\begin{aligned} N_1'' &= -N_3'' = \frac{6}{L^2}(2\xi - 1), \\ N_2'' &= -\frac{2}{L}(3\xi - 2), & N_4'' &= -\frac{2}{L}(3\xi - 1). \end{aligned} \quad (5.15a)$$

Кроме того, *напряжения* в этом случае суть *внутренние* изгибающие моменты \mathfrak{M} , и определяющее соотношение запишется в виде

$$\mathfrak{M} = EI w''. \quad (5.16)$$

Так как вторые производные в (5.15a) изменяются линейно внутри элемента, то кривизна может быть определена однозначно, если заданы w'' в узлах 1 и 2. Согласно (5.15), получим

$$\begin{Bmatrix} w_1'' \\ w_2'' \end{Bmatrix} = \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} -6 & 4L & 6 & 2L \\ 6 & -2L & -6 & -4L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = [D] \{\Delta\}. \quad (5.15b)$$

Рассматривая условия равновесия сил, необходимо заметить, что внутренние моменты \mathfrak{M}_1 и \mathfrak{M}_2 в узлах 1 и 2 соответственно считаются положительными, если им отвечает положительная кривизна (см. рис. 5.1). Поэтому $\mathfrak{M}_1 = M_1$, а $\mathfrak{M}_2 = -M_2$. Можно применить условия равновесия для моментов, чтобы выразить F_1 и F_2 через \mathfrak{M}_1 , и \mathfrak{M}_2 , и, объединив всю систему уравнений, записать

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathfrak{M}_1 \\ \mathfrak{M}_2 \end{Bmatrix} = [A] \{\sigma\}. \quad (5.8b)$$

Кроме того, так как требуется на двух концах элемента связать моменты с кривизнами, необходимо записать уравнение изгиба (5.16) в расширенном виде ^{*}

$$\{\mathfrak{M}\} = [E] \{w''\}, \quad (5.16a)$$

^{*} Строго говоря, A и E относятся соответственно к полю напряжений σ и полю деформаций ε . В данном случае рассматриваются векторы узловых напряжений ($\{\sigma\} = [\mathfrak{M}_1' \ \mathfrak{M}_2']^T$) и узловых деформаций ($\{\varepsilon\} = [w_1'' \ w_2'']^T$). Чтобы не вводить новых обозначений, в обоих случаях используются одинаковые символы.

где

$$\begin{Bmatrix} \mathfrak{M}_1 \\ \mathfrak{M}_2 \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1'' \\ w_2'' \end{Bmatrix} = [E] \{e\}.$$

Окончательно, объединяя (5.15b), (5.16a) и (5.8b) в виде произведения $[k] = [A][E][D]$, получим

$$[k] = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} w_1 & \theta_1 & w_2 & \theta_2 \\ 6 & -3L & 2L^2 & (\text{Симметрично}) \\ -6 & +3L & 6 & \\ -3L & L^2 & 3L & 2L^2 \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

Вновь матрица жесткости была получена без учета в явном виде условий равновесия внутри элемента, которые для указанного элемента при отсутствии разрывов задаются уравнением

$$d^4w/dx^4 = 0. \quad (5.18)$$

Очевидно, что четвертая производная кубического полинома, задаваемого формулой (5.13), равна нулю, поэтому приведенное выше условие выполняется. Условие равновесия определяется простым суммированием сил и моментов в узлах, как указано в гл. 3.

Интуитивно можно предполагать, что в узлах должны выполняться условия непрерывности угловых смещений для изгибаемых элементов. Следовательно, условия непрерывности смещений в узлах глобального конечно-элементного представления требуют непрерывности как w , так и θ . Рассматриваемое представление удовлетворяет этим условиям. Так как оно удовлетворяет всем условиям равновесия, если нагрузки приложены только в узлах, то получаемое в этих случаях решение является точным. Можно построить приближенное поле перемещений (например, линейное поле, выраженное только через w_1 и w_2 , как в конечно-разностных методах) и, если в глобальном представлении используется конечное число сегментов, получить приближенное решение задачи.

Представление поля перемещений с помощью *функции формы* (5.5), (5.14) играет центральную роль в обоих иллюстративных примерах. Хотя понятие функции формы обсуждается более подробно в последующих главах, в особенности в гл. 8, важно отметить ее основные свойства, приступая к изучению способов построения элементов. Рассмотрим сначала случай, когда поле (или пробная функция) независимой переменной Δ выражается только в терминах значений Δ_i указанной переменной в заданных точках. Стержневой элемент (5.5) является примером указанного случая. При этом функция формы N_i определяется таким образом, что принимает значение, равное 1 в узле, где задана величина Δ_i , и равно нулю в других узлах, отвечающих остальным степеням свободы. Это сделано для то-

го, чтобы $\Delta = \Delta_i$ в узле, соответствующем Δ_i . Причина, побудившая назвать N_i функцией формы, теперь ясна: она характеризует изменение переменной Δ в области, занимаемой элементом, для $\Delta_i = 1$ и при фиксированных остальных степенях свободы. Сказанное иллюстрируется на примере стержневого элемента на рис. 5.2.

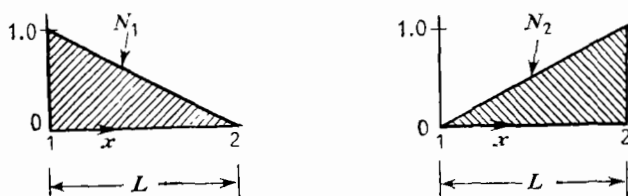


Рис. 5.2.

В некоторых случаях описание независимой переменной включает степени свободы в виде производных в заданных точках. Например, представление w для изгибаемого элемента (5.14) с помощью функции формы содержит в качестве степеней свободы производные от w (θ_1 и θ_2) в концевых точках. Функции формы, умножаемые на эти степени свободы, должны иметь размерности, которые обеспечивают появление членов, имеющих размерность перемещения. Поэтому в случае балочного элемента множители при θ_1 и θ_2 в (5.14) имеют размерность длины (перемещения), так как θ_1 и θ_2 измеряются в радианах.

5.2. Треугольный плоско-напряженный элемент

Проиллюстрируем прямой метод построения уравнений жесткости элемента на примере треугольного плоско-напряженного элемента, изображенного на рис. 5.3 и 5.4. Элемент имеет постоянную толщину t , его материал изотропен, и для удобства рассмотрения элемент расположен так, чтобы одна из его сторон лежала на оси x . Этот иллюстративный пример заслуживает особого внимания, так как, во-первых, рассматривается более общее напряженное состояние (двумерное) и, во-вторых, получающиеся уравнения жесткости приводят к приближенным решениям дифференциальных уравнений, определяющих задачи глобального анализа, и, в-третьих, изучаемый элемент имеет первостепенное значение во всех областях практических приложений.

Поведение элемента, как видно из рис. 5.4, описывается шестью степенями свободы:

$$\{\Delta\} = [u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3]^T, \quad (5.19)$$

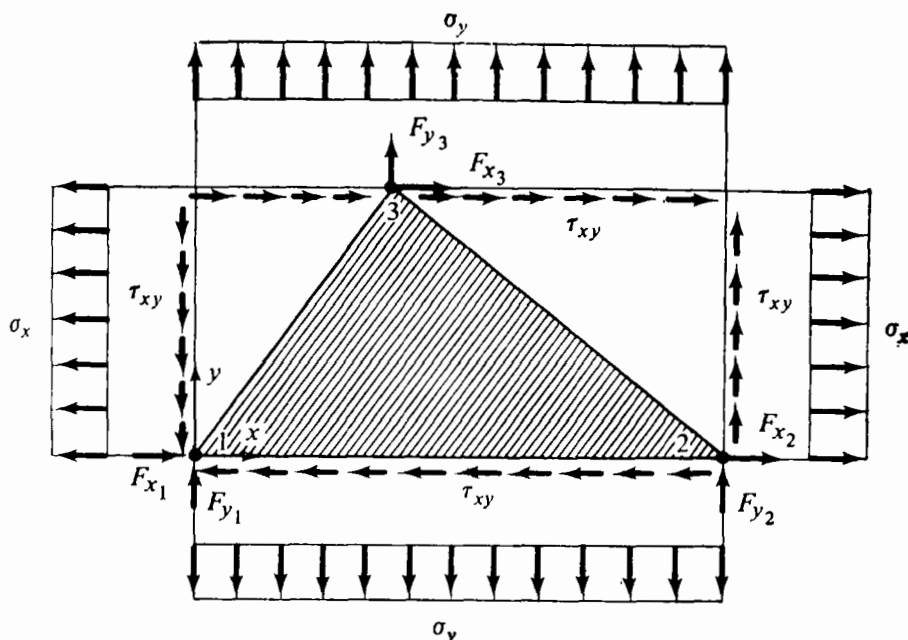


Рис. 5.3. Способ представления граничных напряжений в треугольном элементе для подсчета узловых сил.

и так как направления x и y равноправны, то выбирается по три параметра для описания как u , так и v :

$$u = a_1 + a_2x + a_3y, \quad v = a_4 + a_5x + a_6y. \quad (5.20)$$

Заметим, что эти выражения являются полными *линейными* полиномами. Вычисляя u в узлах 1, 2 и 3, получим

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = [B_u] \{a\}, \quad (5.21a)$$

откуда после обращения матрицы и подстановки в (5.20) имеем

$$u = N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3, \quad (5.21a)$$

где

$$N_1 = \frac{1}{x_2y_3} (x_2y_3 - x_3y_3 - x_2y + x_3y),$$

$$N_2 = \frac{1}{x_2y_3} (xy_3 - x_3y), \quad N_3 = \frac{y}{y_3}.$$

$$[k] = \frac{Et}{2(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & v_1 & v_2 & v_3 \\ \gamma_3^2 + \gamma_1 x_3^2 - 2 & \gamma_3^2 + \gamma_1 x_3^2 & \gamma_1 x_3^2 & \gamma_1 y_3^2 - x_3 x_{3-2} & \gamma_1 y_3^2 + x_3^2 & x_3^2 \\ -\gamma_3^2 - \gamma_1 x_3 x_{3-2} & -\gamma_1 x_2 x_3 & -\gamma_1 x_2 y_3 & -\gamma_1 y_3^2 - x_3 x_{3-2} & -x_2 x_3 & x_2^2 \\ \gamma_1 x_2 x_{3-2} & \mu y_3 x_{3-2} + \gamma_1 x_3 y_3 & \gamma_1 x_2 y_3 & \gamma_1 y_3^2 - x_3 x_{3-2} & \gamma_1 y_3^2 + x_3^2 & x_3^2 \\ -\gamma_2 y_3 x_{3-2} & \mu y_3 x_{3-2} + \gamma_1 x_3 y_3 & -\gamma_1 x_2 y_3 & \gamma_1 y_3^2 - x_3 x_{3-2} & \gamma_1 y_3^2 + x_3^2 & x_3^2 \\ \mu x_3 y_3 + \gamma_1 y_3 x_{3-2} & -\gamma_2 x_3 y_3 & \gamma_1 x_2 y_3 & -\gamma_1 y_3^2 - x_3 x_{3-2} & \gamma_1 y_3^2 + x_3^2 & x_3^2 \\ -\mu x_2 y_3 & \mu x_2 y_3 & 0 & x_2 x_{3-2} & -x_2 x_3 & x_2^2 \end{bmatrix} \quad (\text{Симметрично})$$

где

$$\gamma_1 = \frac{1-\mu}{2}, \quad \gamma_2 = \frac{1+\mu}{2}$$

$$x_{3-2} = x_3 - x_2$$

$$y_{3-2} = y_3 - y_2$$

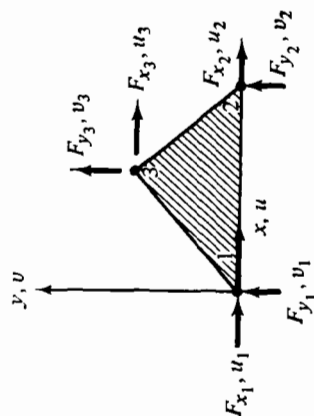


Рис. 5.4. Матрица жесткости изотропного плоско-напряженного треугольного элемента с постоянной деформацией внутри элемента.

Те же функции формы получаются и для v , поэтому функция, задающая смещение v , имеет вид

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3. \quad (5.21b)$$

Если теперь учесть соотношения между перемещениями и деформациями в плоской задаче теории упругости (4.7а, б, с) и применить их к (5.21а, б), то получим соотношение (5.6с), в котором

$$\begin{aligned} \epsilon &= [\epsilon_x \epsilon_y \gamma_{xy}]^T, \\ [D] &= \begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} \\ N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} & N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.22)$$

где $N_{i,x}$ означает производную N_i по x и т. д.

Для плоского напряженного состояния матрица $[E]$ задается выражением (4.12), поэтому, чтобы завершить построение основных матриц элемента, необходимо лишь задать матрицу связи между напряжениями и узловыми силами $[A]$. Это можно выполнить в результате непосредственного преобразования граничных напряжений в узловые силы. Для силы F_{x_2} , например (см. рис. 5.3), имеем

$$F_{x_2} = \frac{t}{2} [y_3 \sigma_x - x_2 \tau_{xy} + (x_2 - x_3) \tau_{yx}].$$

Применяя эту процедуру для определения каждой узловой силы, получим соотношение (5.8а), в котором

$$\begin{aligned} \{F\} &= [F_{x_1} F_{x_2} F_{x_3} F_{y_1} F_{y_2} F_{y_3}]^T, \quad \sigma = [\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}]^T, \\ [A] &= \frac{t}{2} \begin{bmatrix} -y_3 & 0 & x_3 - x_2 \\ y_3 & 0 & -x_3 \\ 0 & 0 & x_2 \\ 0 & x_3 - x_2 & -y_3 \\ 0 & -x_3 & y_3 \\ 0 & x_2 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Матрица жесткости для рассматриваемого элемента вычисляется согласно (5.10) в результате перемножения матриц $[A]$ $[E]$ $[D]$ и использования выписанных выше соотношений. Эта матрица представлена на рис. 5.4.

Как и для предыдущих примеров, изучим те аспекты упругой задачи, которые явно не затрагивались выше. Деформации ϵ постоянны внутри элемента, так как они получены в результате дифференцирования линейного поля перемещений. Напряжения, выражаемые через деформации с учетом упругих констант, также постоянны. Поэтому дифференцированные уравнения равновесия (4.3), включающие операции дифференцирования напряжений, выполня-

ются. Поле напряжений σ оказывается *равновесным*, несмотря на то что явных попыток удовлетворения условию равновесия не делалось.

Что можно сказать относительно выполнения условий равновесия для напряжений вдоль границы соседних элементов? На рис. 2.5(d) и (e) изображена линия, разделяющая два смежных элемента A и B . На рис. 5.5 представлена матрица жесткости треугольного элемента, построенная, согласно (5.7a), в результате объединения соотношений между напряжениями σ и узловыми перемещениями $\{\Delta\}$.

$$[S] = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & v_1 & v_2 & v_3 \\ -u_3 & u_3 & 0 & \mu x_{3-2} & -\mu x_3 & \mu x_2 \\ -\mu u_3 & \mu u_3 & 0 & x_{3-2} & -x_3 & x_2 \\ y_1 x_{3-2} & -\gamma_1 x_3 & \gamma_1 x_2 & -\gamma_1 u_3 & \gamma_1 u_3 & 0 \end{bmatrix} \times \frac{E}{(1-\mu^2) x_2 y^3},$$

$$\gamma_1 = (1-\mu)/2, \quad x_{3-2} = x_3 - x_2;$$

$\{\sigma\} = [S] \{\Delta\}$, где $\{\sigma\} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}]^T$ и $\{\Delta\}$ определено согласно (5.19).

Рис. 5.5. Матрица жесткости для плоско-напряженного изотропного элемента с постоянным напряжением внутри элемента.

Из этих соотношений непосредственно видно, что каждая компонента напряжения зависит от всех узлов отдельного элемента. Следовательно, для случая, изображенного на рис. 2.5(e), хотя как σ_n^A , так и σ_n^B зависят от u_1, u_2, v_1 и v_2 , σ_n^B является функцией от u_3 и v_3 , в то время как σ_n^A — функцией u_4 и v_4 . Поэтому нормальные и тангенциальные усилия на границе (T_n и T_s), полученные на основе этих напряжений для рассматриваемых элементов, вообще говоря, не равны. Итак, *условия равновесия на границе элементов не выполняются*.

С другой стороны, *условия непрерывности перемещений u и v на линиях, разделяющих элементы, выполняются*. Поле перемещений линейно и перемещение вдоль границы элемента изменяется по линейному закону. Когда края элементов соединяются, то совмещение узлов 1 и 2 двух элементов обеспечивает непрерывность перемещений во всех точках, находящихся между узлами. Удовлетворить этому условию можно и другим способом, получая при помощи поля перемещений (5.21a) выражения для смещений краев элементов. Можно показать, что перемещения на каждой стороне элемента полностью определяются с помощью величин, заданных в граничных узлах рассматриваемой стороны. Общий подход к построению непрерывных полей перемещений основан на допущении того факта, что перемещение на линии, задающей границу элемента, должно быть однозначной функцией степени свободы, принадлежащей указанной линии. Случай, когда перемещения на границе элемента определяются неоднозначно, приведен на рис. 2.5(b).

Таким образом, для простого треугольного элемента в плоском напряженном состоянии внутри элемента выполняются и условие равновесия, и условие совместности, однако вдоль линий, разделяющих элементы, выполняется лишь условие непрерывности перемещений u и v . Условия равновесия нарушаются вдоль границ элемента, но равновесие граничных сил выполняется в среднем для узлов элемента. В результате измельчения сетки треугольных элементов можно добиться уменьшения ошибки, вызванной невозможностью удовлетворить условиям равновесия в каждой точке конструкции.

В разд. 2.3 было указано, что часто бывает полезно задать массив коэффициентов жесткости в безразмерной форме. Как видно из рис. 5.4, каждый член матрицы жесткости треугольного элемента содержит произведение (либо квадратичную функцию) линейных размеров элемента, а константа, на которую умножается матрица, — такое же произведение ($x_2 y_3$) в знаменателе. Следовательно, внося указанную константу в матрицу, получим набор безразмерных коэффициентов жесткости, причем каждый отдельный коэффициент включает отношения размеров элемента, например y_3/x_2 .

5.3. Ограничения в прямом методе

Понятие матрицы жесткости элемента введено в разд. 2.3 аксиоматически и без указания методики отыскания ее коэффициентов. При тех же условиях в разд. 2.5 было показано, что матрица должна обладать свойством симметрии. Однако из определяющего уравнения прямого метода (5.10) непосредственно не следует, что сформированная матрица симметрична. Центральная матрица тройного произведения $[A][E][D]$, т. е. матрица упругости $[E]$, согласно присущим ей внутренним свойствам, симметрична. С другой стороны, матрицы $[A]$ и $[D]$ строятся независимым образом и необязательно конгруэнтны. Конгруэнтное преобразование симметричной матрицы $[E]$ обеспечило бы симметричность результирующей матрицы.

Трудности при построении симметричной матрицы можно преодолеть, если добиться конгруэнтности путем замены в (5.10) матрицы $[A]$ матрицей, транспонированной к матрице преобразования перемещений в деформации $[D]$. Тогда $[k] = [D]^T [E] [D]$. Как показано в разд. 6.4, аналогичный результат получится, если использовать принцип минимума потенциальной энергии. [Процедуры слегка отличаются, если деформации зависят от пространственных координат. В прямом методе используется дискретное интегрирование (см. изгибаемый элемент), а энергетический подход включает интегрирование непрерывных функций.]

Другими словами, можно выбрать подход, где операции проводятся только с помощью матрицы преобразования напряжений

в силы $\{A\}$. В этом случае требуется обратить (5.10), т. е. оперировать с $\{f\} = [D]^{-1} [E]^{-1} \{A\}^{-1}$ (с должным учетом степеней свободы, отвечающих движению тела как твердого целого), где $[D^{-1}]$ заменяется на $\{A\}^{-1}$. Полученный результат соответствует применению принципа минимума дополнительной энергии. Этот принцип обсуждается в разд. 6.6.

Вторая трудность возникает в прямом методе при выяснении степени гладкости перемещений на границе элементов, которая определяется выбранными функциями формы. Рассмотрим, например, построение плоско-напряженного элемента из предыдущего пункта. Если исходить из простых физических рассуждений, оказывается, что условия непрерывности при переходе от элемента к элементу полностью удовлетворяются, если непрерывны перемещения u и v . Необходимо ли добиваться непрерывности производных от перемещений du/dx , dv/dy и т. д., которые по существу определяют деформации? Требуется ли в случае плоского напряженного состояния непрерывность производных более высокого порядка? На эти вопросы нельзя ответить, опираясь на теоретическую базу прямого метода. Ответы на эти вопросы даются в гл. 6 с использованием вариационных методов.

Еще одна трудность возникает в прямом методе, если необходимо рассмотреть распределение нагрузки, начальные деформации или другие явления, такие, как нестационарные процессы или потеря устойчивости. Оказывается, что члены, отвечающие этим эффектам в прямом методе, можно учесть только простым распределением соответствующих величин по узлам. В последующих главах на базе вариационных принципов рассматривается более рациональный подход к построению членов, представляющих эти эффекты.

В заключение, как нам кажется, имеет смысл привести сводку введенных преобразований, которые будут использованы в последующих главах.

Преобразование обобщенных перемещений в поле перемещений

$$\Delta = [p] \{a\}. \quad (5.2a)$$

Преобразование узловых перемещений в поле перемещений

$$\Delta = [N] \{\Delta\}. \quad (5.5a)$$

Преобразование обобщенных перемещений в узловые перемещения

$$\{\Delta\} = [B] \{a\}. \quad (5.3a)$$

Преобразование обобщенных перемещений в поле деформаций

$$\epsilon = [C] \{a\} = \quad (5.6a)$$

$$= [C_f] \{a_f\} \quad (\text{степени свободы, отвечающие движению тела как твердого целого } \{a_s\} = 0). \quad (5.6d)$$

Преобразование узловых перемещений в поле деформаций

$$\epsilon = [D] \{\Delta\}. \quad (5.6c)$$

Преобразование узловых смещений в поле напряжений

$$\sigma = [S] \{\Delta\}. \quad (5.7a)$$

Преобразование узловых смещений в узловые напряжения

$$\{\sigma\} = [S] \{\Delta\}. \quad (3.9)$$

Преобразование узловых напряжений в силы

$$\{F\} = [A] \{\sigma\}. \quad (5.8a)$$

5.4. Прямой метод при решении физических задач

С помощью прямого метода можно строить конечно-элементную модель физических процессов не менее успешно, чем при расчете упругого деформирования. Рассмотрим, например, одномерную задачу стационарной теплопроводности. Изучение этого процесса представляет практический интерес для проектировщиков, имеющих дело с задачами расчета термических напряжений, в которых весьма желательно иметь возможность единообразного подхода при расчете полей температуры и напряжений.

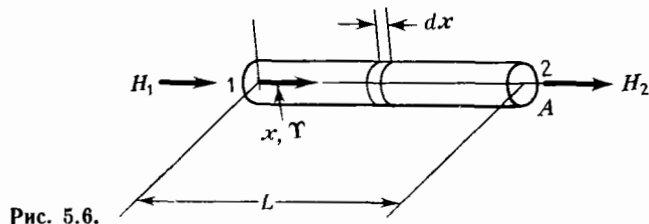


Рис. 5.6.

Рассматривается изображенный на рис. 5.6 изолированный стержень. Выделим «одномерный» элемент с площадью поперечного сечения A , длиной L и имеющий коэффициент теплопроводности ν . Найдём соотношения между температурами (T_1, T_2) ($^{\circ}F$) в точках 1 и 2 и значением теплового потока в этих точках (H_1, H_2) (БТЕ).

В качестве определяющего соотношения выберем в данном случае закон теплопроводности Фурье

$$h = -\nu dT/dx, \quad (5.23)$$

где h — стационарный тепловой поток на единицу площади (БТЕ/фут²). Знак минус означает, что тепловой поток направлен в сторону уменьшения температуры. Согласно предыдущим построениям

для одномерного стержневого элемента, представим Γ в виде

$$\Gamma = \left[\left(1 - \frac{x}{L} \right) \frac{x}{L} \right] \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix},$$

откуда

$$\frac{d\Gamma}{dx} = \left[-\frac{1}{L} \frac{1}{L} \right] \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix}. \quad (5.24)$$

Полный тепловой поток в точке 1 равен $H_1 = hA$, а в точке 2 $H_2 = hA$ (знак минус возникает из-за того, что положительное направление для H_2 соответствует в этом узле тепловому потоку во внешнюю среду). Объединяя эти соотношения с соотношениями (5.23) и (5.24), находим, что

$$\begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{Bmatrix} = \frac{A_1}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix}. \quad (5.25)$$

Набор коэффициентов в правой части уравнения называется *матрицей теплопроводности элемента*.

Кроме того, с помощью прямого метода можно построить матрицы теплопроводности для плоских треугольных элементов и других простых элементов. Аналогично можно построить соответствующие матрицы для конечных элементов в задачах фильтрации, электромагнетизма, расчета потенциального течения жидкости. Однако, как было замечено, чтобы использовать более сложные элементы и рассматривать более сложные физические аспекты перечисленных процессов, необходимо привлекать более тонкие теоретические концепции. Одна из таких концепций применяется в следующем разделе.

5.5. Метод взвешенных невязок

При использовании метода конечных элементов для решения задач, не связанных с механикой твердого деформируемого тела, требуется более общий подход к построению соотношений для элемента. Таким подходом является *метод взвешенных невязок* (МВН) [5.3]. В методе взвешенных невязок считается, что выбранная для аппроксимации независимой переменной в задаче математической физики «пробная функция» (т. е. рассматриваемые в разд. 5.1 и 5.2 полиномы), вообще говоря, не удовлетворяет соответствующим определяющим уравнениям. Так, подстановка пробной функции в определяющие дифференциальные уравнения приведет к *невязке*, обозначенной через R . Чтобы получить «наилучшее» решение, требуется минимизировать интеграл от невязок по области, рассматриваемой в задаче, т. е.

$$\int_{\text{vol}} R \cdot d(\text{vol}) = \min.$$

Можно расширить возможности метода, вводя в подынтегральное выражение минимизируемого функционала *взвешенные* величины невязки. Введение весовых функций позволяет обратить в нуль интеграл от взвешенных невязок. Обозначая весовую функцию через φ , приходим к более общему соотношению

$$\int_{\text{vol}} R \cdot \varphi \, d(\text{vol}) = 0. \quad (5.26)$$

Таким образом, (5.26) представляет собой общее утверждение в методе взвешенных невязок.

Весовые функции можно выбирать различным образом и каждый конкретный выбор отвечает соответствующему критерию в МВН. Обратимся к *методу Галеркина*, так как этот метод приводит к таким же уравнениям, как и при использовании обычных энергетических или вариационных подходов [5.6—5.8].

Чтобы описать МВН, использующий критерий Галеркина, рассмотрим определяющее дифференциальное уравнение

$$\mathcal{D}(\Delta) = 0, \quad (5.27)$$

где \mathcal{D} — дифференциальный оператор, а Δ — независимая переменная, которую нужно аппроксимировать с помощью $\bar{\Delta}$ в виде (5.5), т. е. с помощью суммирования n функций формы N_i , помноженных на соответствующие степени свободы Δ_i . Подставляя $\bar{\Delta}$ в (5.27), получим невязку

$$R = \mathcal{D}(\bar{\Delta}) \neq 0. \quad (5.28)$$

Согласно критерию Галеркина, функции формы N_i определяются как весовые функции. Поэтому для каждого i имеем

$$\int_{\text{vol}} N_i \mathcal{D}(\Delta) \, d(\text{vol}) = 0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad (5.29)$$

что приводит к общему числу уравнений, равному n .

Уравнения (5.29) относятся к узлам внутри области и не учитывают граничных условий, например заданных внешних нагрузок или перемещений. Чтобы учесть граничные условия, требуется проинтегрировать по частям интегралы (5.29), то приводит к появлению интегралов по области и границе.

Проиллюстрируем предлагаемый метод, применяя его сначала для построения уравнений жесткости стержневого элемента, обсуждавшегося ранее в этой главе, с добавлением распределенной нагрузки q согласно рис. 5.7. Требуется построить соотношения в терминах перемещений, где $\Delta = u$. Для этого случая определяющее дифференциальное уравнение получается подстановкой соотношений между напряжениями и перемещениями $[\sigma_x = E(du/dx)]$ в

уравнение равновесия $A(d\sigma_x/dx)+q=0$. (Заметим, что последние уравнения представляют собой одномерный случай уравнений (4.3) с $X=q/A$.) Имеем

$$EA(d^2u/dx^2)+q=0. \quad (5.30)$$

Левая часть этих уравнений в рассматриваемом случае есть не что иное, как $\mathcal{D}(\Delta)$. Аппроксимирующая функция \bar{u} задается согласно

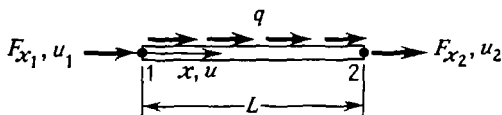


Рис. 5.7.

(5.5). Подставляя ее в (5.30) и применяя МВН с критерием Галеркина, получим

$$\int_0^L N_i \left(EA \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} \right) dx = - \int_0^L N_i q dx \quad (i=1, 2). \quad (5.31)$$

Проведем теперь интегрирование по частям *) левой части уравнения. Имеем

$$\int_0^L \left(\frac{dN_i}{dx} \right) \frac{d\bar{u}}{dx} EA dx = \int_0^L N_i q dx + N_i EA \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_0^L. \quad (5.31a)$$

Так как параметры u_i не зависят от координат, то

$$\frac{d\bar{u}}{dx} = \sum \frac{dN_i}{dx} u_i = \left[\frac{dN}{dx} \right] \{u\},$$

где $\{u\}$ — вектор узловых перемещений элемента. Подставим теперь это соотношение в левую часть (5.31a). Получим

$$EA \int_0^L \left(\frac{dN_i}{dx} \right) \left[\frac{dN}{dx} \right] dx \{u\} = \int_0^L N_i q dx + N_i EA \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_0^L, \quad (5.31b)$$

и полная система уравнений, получаемая с $F_1 = EA(d\bar{u}/dx)$ и $N_1 = 1$ при $x=0$, а также $N_1=0$ при $x=L$ (аналогично для F_2 и N_2), имеет вид

$$[k]\{u\} = \{F\} + \{F^a\}, \quad (5.32)$$

*) В данном случае соответствующая формула интегрирования по частям имеет вид

$$\int_0^L N_i \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} dx = N_i \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_0^L - \int_0^L \frac{dN_i}{dx} \frac{d\bar{u}}{dx} dx.$$

где

$$[k] = \left[EA \int_0^L \left\{ \frac{dN}{dx} \right\} \left\{ \frac{dN}{dx} \right\}^T dx \right], \quad (5.33)$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}, \quad \{F^d\} = \begin{Bmatrix} \int_0^L N_1 q dx \\ \int_0^L N_2 q dx \end{Bmatrix}. \quad (5.34, 5.35)$$

Искомая матрица $[k]$ совпадает с полученной в разд. 5.1. Как было указано выше, определяющие дифференциальные уравнения, записанные в смещениях, т. е. дифференциальные уравнения равновесия, можно преобразовать с помощью метода взвешенных невязок в алгебраические уравнения относительно параметров перемещений с коэффициентами в виде интегралов. Этот подход обсуждается в гл. 6 и состоит в построении соотношений метода конечных элементов на базе рассмотрения потенциальной энергии. Соответственно определяющие дифференциальные уравнения, записанные относительно напряжений, можно преобразовать в уравнения метода конечных элементов как с помощью метода взвешенных невязок, так и с помощью подхода, использующего минимизацию дополнительной энергии. Результаты в обоих случаях совпадают.

Определяющие соотношения получаются в результате совместного учета уравнений упругости. В приведенных рассмотрениях определяющие дифференциальные уравнения получают постановкой соотношений между напряжениями и деформациями в дифференциальные уравнения равновесия. Что произойдет, если применить метод взвешенных невязок непосредственно к уравнениям теории упругости? Имеем

$$\text{Условие равновесия: } d\sigma_x/dx + q/A = 0, \quad (5.36)$$

Соотношение между напряжениями и деформациями:

$$du/dx - \sigma_x/E = 0. \quad (5.37)$$

При построении алгебраических уравнений в этом случае введем весовой множитель ψ для дифференциального уравнения равновесия и весовой множитель φ для соотношения между напряжениями и деформациями. Получим

$$\int_0^L \left(\frac{d\bar{\sigma}_x}{dx} + \frac{q}{A} \right) \psi A dx = 0, \quad (5.38)$$

$$\int_0^L \left(\frac{d\bar{u}}{dx} - \frac{\bar{\sigma}_x}{E} \right) \varphi A dx = 0. \quad (5.39)$$

Аппроксимации напряжений и перемещений представим в виде

$$\bar{u} = [N] \{u\}, \quad (5.5b)$$

$$\bar{\sigma}_x = [\Xi] \{\sigma\}, \quad (5.40)$$

где члены матрицы $[N]$ — функции формы для перемещений, а матрицы $[\Xi]$ — функции формы для напряжений. Выбирая весовые множители для этих членов, используем для ψ функции формы перемещений N_i , а для φ функции формы напряжений Ξ_i . Рассмотрим сначала взвешенный интеграл от дифференциального уравнения равновесия. Вводя $\psi = N_i$, имеем

$$\int_0^L \left(\frac{d\bar{\sigma}_x}{dx} + \frac{q}{A} \right) N_i A dx = 0 \quad (5.38a)$$

и после интегрирования первого члена и проведения выкладок получаем

$$\int_0^L \frac{dN_i}{dx} \bar{\sigma}_x A dx = N_i A \bar{\sigma}_x \Big|_0^L + \int_0^L q N_i dx. \quad (5.41)$$

Подставляя выражение (5.40) для $\bar{\sigma}_x$ и замечая, что $N_i A \bar{\sigma}_x = F_i$, имеем для всех величин N_i

$$[\Omega_{21}] \{\sigma\} = \{F\} + \{F^a\}, \quad (5.42)$$

$$\text{где} \quad [\Omega_{21}] = \left[\int_0^L \left\{ \frac{dN}{dx} \right\} [\Xi] A dx \right], \quad (5.43)$$

$$\{F^a\} = \left\{ \int_0^L q N_i dx \right\}, \quad (5.44)$$

а $\{F\}$ — обычный вектор, объединяющий узловые силы.

Рассматривая далее взвешенный интеграл с подынтегральным выражением в виде произведения левой части соотношения между напряжениями и перемещениями на весовую функцию $\varphi = \Xi_i$, получим

$$\int_0^L \left(\frac{d\bar{u}}{dx} - \frac{\bar{\sigma}_x}{E} \right) \Xi_i A dx = 0 \quad (5.39a)$$

и после подстановки выражений (5.5b) и (5.40) для \bar{u} и $\bar{\sigma}_x$ имеем для всех Ξ_i

$$[\Omega_{21}] \{u\} + [\Omega_{11}] \{\sigma\} = 0, \quad (5.45)$$

где $\{\Omega_{21}\}$ определяется уравнением (5.43) и

$$\{\Omega_{11}\} = - \left[\int_0^L \{\Xi\} \frac{\{\Xi\}^T}{E} A dx \right]. \quad (5.46)$$

Очевидно, что это соотношение связывает $\{\mathbf{u}\}$ и $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ таким образом, что оно оказывается удобным для объединения уравнений (5.42) и (5.45) в единое матричное уравнение:

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{21}^T \\ \Omega_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{F} + \mathbf{F}^d \end{Bmatrix}. \quad (5.47)$$

Выведенные таким образом уравнения назовем уравнениями *смешанного типа* [см. уравнение (2.3) в разд. (2.3)]. В гл. 6 показано, что, применяя вариационные принципы при построении соотношений для элемента, можно прийти к тем же результатам, если использовать энергетический *принцип Рейсснера*. Так как возможны отличные от приведенных выше комбинации основных уравнений упругости, то ясно, что можно построить и другие типы соотношений между силами и перемещениями смешанного вида.

Рассмотрим теперь применение метода взвешенных невязок в двумерных задачах. Выберем для этой цели дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = C, \quad (5.48)$$

или в более сжатой символической форме

$$\nabla^2 \Phi = C, \quad \text{где } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (5.49)$$

(∇^2 — оператор Лапласа). Уравнение (5.49), называемое *уравнением Пуассона*, описывает широкий круг физических процессов. В механике конструкций оно может описывать растягиваемую мембрану под нормальным давлением, где Φ — поперечное смещение, C — функция отношения величины давления к растягиваемым нагрузкам. Это уравнение может также описывать кручение стержней некруглого сечения, при этом Φ — функция напряжений. Это же уравнение описывает потенциальное течение жидкости, при этом Φ — функция тока или распространения тепла, здесь Φ — температура.

Согласно методу взвешенных невязок, аппроксимируем Φ в виде

$$\bar{\Phi} = \llbracket \mathbf{N} \rrbracket \{\Phi\}, \quad (5.50)$$

где $\llbracket \mathbf{N} \rrbracket$, как и ранее, включает набор функций формы, определяющих вид $\bar{\Phi}$ в системе координат x, y , а $\{\Phi\}$ объединяет значе-

ния $\bar{\Phi}$ в дискретных точках. Следуя методу взвешенных невязок, имеем

$$\int_A (\nabla^2 \bar{\Phi} - C) N_i dA = 0. \quad (5.51)$$

Как и ранее, проинтегрируем по частям дифференциальные слагаемые этих уравнений. Это можно осуществить при помощи первой формулы Грина [5.9], утверждающей, что

$$\begin{aligned} \int_A \nabla^2 \bar{\Phi} N_i dA = \int_S N_i \left(l_x \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} + l_y \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} \right) dS - \\ - \int_A \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) dA. \end{aligned} \quad (5.52)$$

После подстановки (5.50) вместо $\bar{\Phi}$ получим для всех $\bar{\Phi}_i$

$$[k^n] \{\Phi\} = \{F^n\} + \{F^c\}, \quad (5.53)$$

где

$$[k^n] = \left[\int_A \left[\left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] + \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right] \right] dA \right], \quad (5.54)$$

$$\{F^n\} = \left\{ \int_S \{N\} \left(l_x \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} + l_y \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} \right) dS \right\}, \quad (5.55)$$

$$\{F^c\} = \left\{ \int_A \{N\} C dA \right\}. \quad (5.56)$$

Из (5.55) следует, что в рассматриваемой задаче учитываются производные от $\bar{\Phi}$ вдоль границы. Однако задачи, описываемые уравнением [5.48], характеризуются граничными уравнениями, приводящими к альтернативной записи соотношений (5.55).

Следует отметить некоторые особенности применения метода взвешенных невязок. Во-первых, очевидно, что интеграл, значение которого должным образом характеризует определенный тип поведения, можно легко выписать из интеграла взвешенного приближенного решения соответствующих дифференциальных уравнений. В механике конструкций существует целый ряд альтернативных типов дифференциальных уравнений, следовательно, существуют и альтернативные виды интегралов

Во-вторых, следует отметить важную роль операции интегрирования по частям. В методе взвешенных невязок до применения этой операции рассматривается лишь внутренняя область элемента. В результате интегрирования по частям благодаря появлению интегралов по границе можно учесть граничные условия. Повторное применение формул интегрирования по частям дает возможность

определить альтернативные формы представления граничных интегралов.

Для рассматриваемых в книге задач метод взвешенных невязок с критерием Галеркина и энергетический (вариационный) метод приводят к совпадающим результатам. Так как энергетический метод более знаком инженерам-проектировщикам и является основным подходом в литературе по методу конечных элементов, в последующих главах ограничимся изложением этого подхода.

Литература

- 5 1. Turner M., Clough R., Martin H., Topp L. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures — J Aero Sci, Sept 1956, 23, No. 9, p 805—823 854.
- 5 2. Gallagher R. H. Correlation Study of Methods of Matrix Structural Analysis — New York, N Y Pergamon Press, 1964
- 5 3. Finlayson B. The Method of Weighted Residuals and Variational Principles. — New York, N Y. Academic Press, 1972.
- 5 4. Hutton S. G., Anderson D. L. Finite Element Method. A Galerkin Approach. — Proc. ASCE, J Engr. Mech Div, Oct. 1971, 97, No. EM5, p 1503—1520
- 5 5. Aral M., Mayer P., Smith C. V. Finite Element Galerkin Method Solutions to Selected Elliptic and Parabolic Differential Equations — Proc. of Third Air Force Conf on Matrix Methods in Struct. Mech., Oct. 1971.
- 5 6. Zienkiewicz O. C., Parekh C. J. Transient Field Problems Two-Dimensional and Three-Dimensional Analysis by Isoparametric Elements. — Int J Numerical Meth Engr, 1970, 2, No 1, p 61—72.
- 5 7. Szabo B., Lee G. C. Derivation of Stiffness Equations for Problems in Elasticity by Galerkin's Method. — Int J Numerical Meth Engr., 1969, 1, No 3, p 301—310.
- 5 8. Szabo B. A., Lee G. C. Stiffness Matrix for Plates by Galerkin's Method — Proc ASCE, J Engr Mech. Div, June 1969, 95, No EM3, p 571—585
- 5 9. Sokolnikoff I., Redheffer R. Mathematics of Physics and Modern Engineering, 2nd ed. — New York, N.Y.: McGraw-Hill Book Co., 1966, p 370—375.

Задачи

- 5.1. Постройте матрицу жесткости для простого скручиваемого элемента, используя прямой метод
- 5.2. Используя *прямой* метод, постройте матрицу жесткости для прямоугольного элемента в плоском напряженном состоянии в предположении линейности сме-

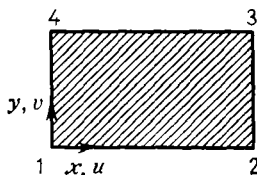


Рис. Р5.2.

щений вдоль границы. Получите этот результат численно, построив сначала матрицы $[D]$ и $[A]$ в общем виде. Определив коэффициенты этих матриц, перемножьте на компьютере матрицы $[A][E][D]$. Положите $t=0$ 1 дюйма, $x_2=16$ дюймов, $y_3=12$ дюймов, $E=10^7$, $\mu=0$ 3. Сверьте полученные результаты с приведенными на

рис. 9.13.

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4,$$

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4,$$

$$N_1 = (1 - \xi)(1 - \eta), \quad N_2 = \eta(1 - \xi), \quad N_3 = \xi\eta, \quad N_4 = (1 - \xi)\eta,$$

где

$$\xi = x/x_2, \quad \eta = y/y_3.$$

5.3. Постройте матрицу жесткости [S] для прямоугольного элемента в плоском напряженном состоянии, который сформирован на базе функций формы, приведенных в задаче 5.2. Выбрать в качестве переменных величины x и y .

5.4. Постройте матрицу жесткости для приведенного в разд. 5.3 треугольного плоско-напряженного элемента из ортотропного материала.

5.5. Сформулируйте процедуру построения матрицы жесткости балочного элемента на основе метода взвешенных невязок с критерием Галеркина и проиллюстрируйте ее на примере построения первой строки матрицы (F_1 в зависимости от $\omega_1, \theta_1, \omega_2, \theta_2$).

5.6. Выведите, используя метод взвешенных невязок с критерием Галеркина, необходимые интегральные соотношения для непосредственного построения матриц жесткости элементов в плоском напряженном состоянии, если известны поля перемещений.

5.7. Обобщите *прямой* метод на непосредственное построение матриц податливости элементов и проиллюстрируйте подход построением матрицы податливости балочного элемента.

5.8. Обобщите *прямой* метод на непосредственное построение матриц связи сил с перемещениями смешанного вида (см. гл. 2) и проиллюстрируйте это на примере балочного элемента.

5.9. Постройте матрицу теплопроводности для плоского треугольного элемента, используя *прямой* метод в предположении линейного характера распределения температур: $T = N_1 T_1 + N_2 T_2 + N_3 T_3$, где T_1, T_2 и T_3 — значения температуры в узлах элемента.

5.10. Дифференциальное уравнение, описывающее выпучивание балки, имеет вид

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + F_x \frac{d^2 w}{dx^2} = 0.$$

Используя метод взвешенных невязок с критерием Галеркина, получите интегральную форму соотношений, необходимую для построения соответствующих уравнений жесткости элемента. Предположите, что поле перемещений аппроксимируется в виде $w = N_1 \omega_1 + N_2 \theta_1 + N_3 \omega_2 + N_4 \theta_2$, где N_1, \dots, N_4 задаются с помощью (5.14а).

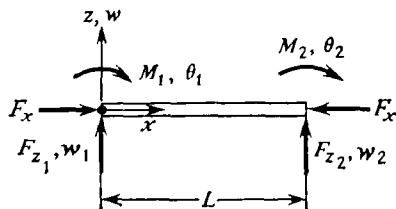


Рис. Р5.10.

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Вариационные или энергетические методы исследования конструкций образуют мощный и широко применяемый подход к построению соотношений для конечных элементов. Простейшие варианты этих методов используются для расчета инженерных конструкций уже более ста лет. Однако некоторые усложненные варианты вариационных и энергетических методов так же современны, как и сам конечно-элементный анализ элементов, и их развитие, по-видимому, обуславливалось желанием создать новую теоретическую основу метода конечных элементов. Так или иначе, последние работы в этой области дают всесторонний анализ возможных вариационных принципов строительной механики, в частности определяют область их применения и выявляют присущие им недостатки.

В данной главе соответствующие вариационные принципы механики конструкций описываются с учетом их дальнейшего использования для построения *конечно-элементных* соотношений. Применение этих принципов при построении соотношений для *всей конструкции* излагается в гл. 7. Таким образом, предполагается, что соотношения между силами и перемещениями для каждого отдельного конечного элемента можно построить независимо, а построение соотношений для всей конструкции — отдельная процедура. Это согласуется с изложенным в разд. 2.2 и использовавшимся далее в гл. 3 и 5 подходом к расчету *стержневых конструкций* методом конечных элементов. Однако энергетический метод позволяет по-иному подойти к методу конечных элементов и получить глобальные соотношения, суммируя энергию отдельных элементов. Вопросы перехода от одной точки зрения к другой обсуждаются в этой и следующей главах.

Данная глава начинается с подробного изложения вывода соотношений принципа виртуальных перемещений. Далее кратко излагаются основные понятия вариационного исчисления и подробно изучаются экстремальные принципы минимума *потенциальной и*

дополнительной энергии. Эти принципы представляют собой специальную форму более общих принципов виртуальных перемещений и виртуальных сил соответственно. В заключение кратко рассматриваются *смешанные* вариационные принципы, а также *гибридные* и *обобщенные вариационные методы* построения элементов, основанные на экстремальных принципах потенциальной или дополнительной энергии.

В данной главе рассматривается только отдельно взятый конечный элемент. Все выражения записываются так, как если бы вся конструкция являлась конечным элементом, поэтому нет необходимости вводить верхние и нижние индексы, чтобы различать глобальные и локальные величины.

6.1. Принцип виртуальной работы

6.1.1. Формулировка и доказательство принципа

Принцип виртуальной работы лежит в основе следующих вариационных принципов, описываемых ниже: классических принципов стационарности потенциальной и дополнительной энергии, а также менее известных *смешанных* принципов. Принцип виртуальной работы, по сути дела, служит независимым подходом к построению соотношений метода конечных элементов. Используются две формы общего принципа: принцип *виртуальных перемещений* и принцип *виртуальных сил* соответственно. Они приводят к общеизвестным принципам стационарности потенциальной и дополнительной энергии.

В формулировке принципа виртуальной работы, использующей *виртуальные перемещения*, предполагается, что на тело, находящееся в состоянии равновесия, действуют объемные и поверхностные силы, при этом задается виртуальное (воображаемое) поле переме-

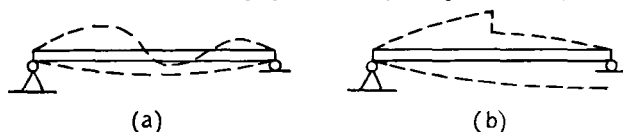


Рис. 6.1. Сравнение допустимых и недопустимых виртуальных перемещений: (а) допустимые; (б) недопустимые.

щений, характеризующееся в каждой точке компонентами δu , δv , δw . Виртуальные перемещения должны быть *кинематически допустимыми*, т. е. непрерывными функциями пространственных координат, и удовлетворять кинематическим граничным условиям на участках поверхности, где эти условия заданы.

На рис. 6.1 (а), к примеру, пунктирными линиями изображены кинематически допустимые перемещения балки. Каждое из допус-

тимых перемещений удовлетворяет условиям закрепления на концах между этими точками и характеризуется непрерывным изменением наклона касательной (требование теории изгиба). Перемещения, изображенные на рис. 6.1 (b), либо не удовлетворяют условиям закрепления на концах, либо имеют разрывную производную внутри области и поэтому являются недопустимыми. В последующих разделах всесторонне обсуждается значение требований допустимости полей перемещений при расчетах методом конечных элементов.

При указанных условиях принцип виртуальных перемещений утверждает, что сумма потенциала внешних нагрузок δV и величины запасенной энергии деформации δU при виртуальных перемещениях $\delta \Delta$ равна нулю. Таким образом,

$$\delta U + \delta V = 0. \quad (6.1)$$

Чтобы доказать это утверждение, рассмотрим плоское напряженное состояние ($\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$) пластины единичной толщины при отсутствии объемных сил и начальных деформаций. (Рассмотрение общего случая не представляет трудностей.) Напряженное состояние тела, находящегося в равновесии, задается с помощью компонент тензора напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} . Компоненты поля виртуальных перемещений $\delta \Delta$ обозначаются через δu и δv . Указанным величинам, согласно соотношениям между перемещениями и деформациями, соответствуют вариации деформаций

$$\delta \epsilon_x = \partial(\delta u)/\partial x, \quad \delta \epsilon_y = \partial(\delta v)/\partial y, \quad \delta \gamma_{xy} = \partial(\delta v)/\partial x + \partial(\delta u)/\partial y. \quad (6.2)$$

Приходим к следующему выражению для энергии деформации, соответствующей виртуальным перемещениям:

$$\delta U = \int_A \sigma \cdot \delta \epsilon dA = \int_A [\sigma_x(\delta \epsilon_x) + \sigma_y(\delta \epsilon_y) + \tau_{xy}(\delta \gamma_{xy})] dA. \quad (6.3)$$

Заметим, что работа, обусловленная изменением напряжений при виртуальных перемещениях, не учитывается из-за малости. Подставляя теперь соотношения между деформациями и перемещениями (6.2), получим

$$\delta U = \int_A \left\{ \sigma_x \frac{\partial}{\partial x} (\delta u) + \sigma_y \frac{\partial}{\partial y} (\delta v) + \tau_{xy} \left[\frac{\partial}{\partial y} (\delta u) + \frac{\partial}{\partial x} (\delta v) \right] \right\} dA. \quad (6.3a)$$

Заметим далее, что

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial (\sigma_x \delta u)}{\partial x} dA &= \int_A \delta u \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dA + \int_A \sigma_x \frac{\partial (\delta u)}{\partial x} dA \\ \text{или} \quad \int_A \sigma_x \frac{\partial (\delta u)}{\partial x} dA &= \int_A \frac{\partial (\sigma_x \delta u)}{\partial x} dA - \int_A \delta u \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dA \end{aligned} \quad (6.4)$$

и аналогично для интегралов, содержащих

$$\sigma_y \partial(\delta v)/\partial y, \quad \tau_{xy} \partial(\delta u)/\partial y, \quad \tau_{xy} \partial(\delta v)/\partial x.$$

Следовательно, после подстановки имеем

$$\delta U = - \int_A \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \delta u + \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) \delta v \right] dA + \\ + \int_A \left[\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x \delta u) + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xy} \delta v) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_y \delta v) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} \delta u) \right] dA. \quad (6.3b)$$

В правой части соотношения члены в круглых скобках в первом интеграле, а именно

$$\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right), \quad \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right),$$

равны нулю в силу дифференциальных уравнений равновесия (4.2). Поэтому выражение для δU можно упростить и записать в виде

$$\delta U = \int_A \left[\frac{\partial}{\partial x} [\sigma_x \delta u + \tau_{xy} \delta v] + \frac{\partial}{\partial y} [\sigma_y \delta v + \tau_{xy} \delta u] \right] dA. \quad (6.3c)$$

Используем теперь *теорему Гаусса* (интегрирование по частям в плоском случае) для преобразования данного выражения, записанного для внутренних точек тела, в выражение, содержащее члены, отвечающие не только внутренним точкам области, но и ее границе. С физической точки зрения теорема утверждает, что изменение величин в области характеризуется разностью потоков, входящих и выходящих из области.

Согласно этой теореме,

$$\int_A \left[\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x \delta u + \tau_{xy} \delta v) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_y \delta v + \tau_{xy} \delta u) \right] dA = \\ = \int_S [(\sigma_x \delta u + \tau_{xy} \delta v) l_x + (\sigma_y \delta v + \tau_{xy} \delta u) l_y] dS, \quad (6.5)$$

где l_x и l_y — направляющие косинусы нормали к поверхности. Итак, (6.3с) записывается в виде

$$\delta U = \int_S [(\sigma_x l_x + \tau_{xy} l_y) \delta u + (\sigma_y l_y + \tau_{xy} l_x) \delta v] dS. \quad (6.6)$$

Теперь из (4.5) следует, что $\bar{T}_x = \sigma_x l_x + \tau_{xy} l_y$ и $\bar{T}_y = \sigma_y l_y + \tau_{xy} l_x$, где \bar{T}_x и \bar{T}_y — заданные усилия на границе. Кроме того, полезно различать участок границы, где заданы усилия (обозначим его через S_σ), и участок границы, где заданы перемещения (обозначим его через S_u). Виртуальные перемещения равны нулю на участке границы, где заданы перемещения. Поэтому

$$\delta U = \int_{S_\sigma} (\bar{T}_x \delta u + \bar{T}_y \delta v) dS = - \delta V,$$

так как очевидно, что потенциал приложенных нагрузок, соответствующий виртуальным перемещениям δV , равен выписанному интегралу. (Величина δV отрицательна потому, что она отвечает (вариации) потенциальной энергии приложенных нагрузок, которая уменьшается при деформации упругой конструкции.) Итак, принцип виртуальной работы доказан.

Очень часто акцентируется внимание на том обстоятельстве, что при проведении рассмотрений не использовались уравнения состояния и поэтому при применении принципа не требуется ограничиваться линейным законом связи между напряжениями и деформациями. Однако при расчетах физически нелинейных задач методом конечных элементов обычно рассматривается последовательность малых приращений нагрузок и производится линеаризация. Тем не менее общий характер принципа важен при построении инкрементальных моделей.

В книге не рассматривается принцип виртуальных сил, а отдается предпочтение вытекающему из него принципу стационарности дополнительной энергии, обсуждаемому в разд. 6.6. Заметим только, что в принципе виртуальных сил виртуальные напряжения должны удовлетворять условиям равновесия.

6.1.2. Конечно-элементная дискретизация виртуальной работы

Доказав справедливость принципа виртуальной работы, перейдем к описанию общей процедуры построения матрицы жесткости элемента. Рассмотрим вначале процедуру выбора предполагаемого поля перемещений Δ . Как отмечалось выше, величина Δ записывается жирным шрифтом, что показывает возможность учета полного набора компонент смещений u , v и w . Согласно введенным обозначениям, запишем выражение для указанного поля в виде

$$\Delta = [N] \{\Delta\}. \quad (5.5a)$$

Используя формулы, связывающие перемещения с деформациями, получим

$$\epsilon = [D] \{\Delta\}. \quad (5.6c)$$

Распределения виртуальных перемещений $\delta\Delta$ и виртуальных деформаций $\delta\epsilon$ берутся в том же самом виде, что и в (5.5a) и (5.6c). Имеем

$$\delta\Delta = [N] \{\delta\Delta\}, \quad (6.7)$$

$$\delta\epsilon = [D] \{\delta\Delta\}. \quad (6.8)$$

Применим принцип виртуальных перемещений к довольно общему случаю, когда учитываются объемные силы X (проекции сил обозначаются через X , Y и Z) и начальные деформации ϵ^{init} . С учетом

последних уравнения состояния имеют вид

$$\sigma = [E] \varepsilon - [E] \varepsilon^{\text{init}}. \quad (4.15)$$

Теперь может быть выписано выражение для виртуальной работы. Для этого рассматриваются только узловые силы F_i . Распределенные нагрузки рассматриваются ниже. Потенциал прикладываемых узловых сил $\{F\}$, отвечающий виртуальным узловым перемещениям $\{\delta\Delta\}^*$, равен

$$\delta V = - \int \delta\Delta \{F\}. \quad (6.9)$$

Работа внутренних сил получается в результате действия внутренних напряжений σ на деформациях $\delta\varepsilon$, обусловленных виртуальными перемещениями. Обобщая (6.3) на случай интегрирования по объему, получим

$$\delta U = \int_{\text{vol}} \sigma \delta\varepsilon d(\text{vol}) \quad (6.10)$$

и после подстановки σ согласно соотношениям между напряжениями и деформациями (4.15) будем иметь

$$\delta U = \int_{\text{vol}} \varepsilon [E] \delta\varepsilon d(\text{vol}) - \int_{\text{vol}} \varepsilon^{\text{init}} [E] \delta\varepsilon d(\text{vol}). \quad (6.11)$$

Далее, чтобы получить дискретный аналог выражений для виртуальной работы и энергии, подставим вместо ε выражение (5.6с), а вместо $\delta\varepsilon$ — выражение (6.8). Имеем

$$\delta U = \int \delta\Delta \{[k] \{\Delta\} - \{F^{\text{init}}\}\}, \quad (6.12)$$

где

$$[k] = \left[\int_{\text{vol}} [D]^T [E] [D] d(\text{vol}) \right] \quad (\text{матрица жесткости элемента}), \quad (6.12a)$$

$$\{F^{\text{init}}\} = \left\{ \int_{\text{vol}} [D]^T [E] \varepsilon^{\text{init}} d(\text{vol}) \right\} \quad (\text{вектор начальных усилий для элемента}). \quad (6.12b)$$

Чтобы учесть объемные силы, потенциал приложенных сил δV нужно дополнить интегралом $-\int_{\text{vol}} \delta\Delta \cdot X d(\text{vol})$. Подставляя $\delta\Delta = [N] \{\delta\Delta\}$,

$$\text{получим } - \int \delta\Delta \{F^b\}, \text{ где} \\ \{F^b\} = \left\{ \int_{\text{vol}} [N]^T X d(\text{vol}) \right\} \quad (\text{вектор объемных сил для элемента}). \quad (6.12c)$$

* Указанные произведения скалярных и векторных величин соответствуют определению работы как произведения силы на перемещение в направлении действия силы (см. разд. 2.4). При подсчете работы принимается, что сила равна полному своему значению, поэтому множитель 1/2 (фигурирующий в выражении для работы, если значение силы растет от нуля до своего максимального значения) отсутствует.

Более того, специально выделим объемные силы, обусловленные динамическим поведением конструкции, которые, согласно принципу Даламбера, рассматриваются как некоторые эффективные силы (силы инерции)

$$\mathbf{X} = -[\rho] \ddot{\Delta}, \quad (6.13)$$

где $[\rho]$ — тензор масс на единицу объема, записанный в матричной форме. Из (5.5а), предполагая, что задание характера изменения $\{\Delta\}$ во времени полностью определяет движение, имеем

$$\ddot{\Delta} = [\mathbf{N}] \{\ddot{\Delta}\}, \quad (6.14)$$

поэтому

$$\{\mathbf{F}^b\} = -[\mathbf{m}] \{\ddot{\Delta}\}, \quad (6.12d)$$

где

$$[\mathbf{m}] = \int_{\text{vol}} [\mathbf{N}]^T [\rho] [\mathbf{N}] d(\text{vol}) \quad (\text{матрица масс}). \quad (6.12e)$$

Приравнивая δU к $-\delta V$, согласно принципу виртуальной работы (6.1), получаем

$$\lfloor \delta \Delta \rfloor \{ -[\mathbf{m}] \{\ddot{\Delta}\} + \{\mathbf{F}\} \} = \lfloor \delta \Delta \rfloor \{ [\mathbf{k}] \{\Delta\} - \{\mathbf{F}^{\text{init}}\} \}. \quad (6.15)$$

Окончательно, замечая, что это соотношение справедливо для любых значений виртуальных узловых перемещений $\{\delta \Delta\}$, запишем следующие уравнения жесткости элемента, учитывающие начальные деформации и силы инерции:

$$\{\mathbf{F}\} = [\mathbf{k}] \{\Delta\} - \{\mathbf{F}^{\text{init}}\} + [\mathbf{m}] \{\ddot{\Delta}\}. \quad (6.16)$$

Эти уравнения представляют собой уравнения равновесия элемента. Коэффициенты этих уравнений записываются на основе соотношений (6.12а) — (6.12е).

Если на поверхность тела действуют *распределенные нагрузки*, выражение для потенциала приложенных нагрузок δV (см. (6.9)) необходимо дополнить интегралом, представляющим работу этих нагрузок на перемещениях поверхности тела. Чтобы различать поле перемещений точек внутри тела и поле поверхностных перемещений, обозначим последнее через \mathbf{u} . Величина \mathbf{u} определяется заданием смещений Δ на поверхности тела и так как последние, согласно (5.5а), выражаются в терминах узловых смещений, то и перемещения также выражаются через перемещения узлов. Имеем

$$\mathbf{u} = [\mathbf{Y}] \{\Delta\}. \quad (6.17)$$

Обозначая распределенные внешние нагрузки (усилия) через $\bar{\mathbf{T}}$, получим следующий вклад в потенциал прикладываемых нагрузок δV : $-\int_{S_\sigma} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{T}} dS$, где через S_σ обозначен участок поверхности, на

котором заданы усилия \bar{T} , а δu — виртуальные перемещения поверхности. Снова выбирая распределение виртуальных перемещений в том же виде, что и для действительных перемещений (6.17), получим

$$-\delta u = [Y] \{\delta \Delta\}. \quad (6.17a)$$

Дальнейшая подстановка в выражение для виртуальной работы внешних сил дает

$$[\delta \Delta] \{ F^a \} = [\delta \Delta] \int_{S_a} [Y]^T \cdot \bar{T} dS, \quad (6.18)$$

поэтому

$$\{ F^a \} = \int_{S_a} [Y]^T \cdot \bar{T} dS. \quad (6.12f)$$

Левую часть соотношения (6.18) следует добавить к левой части соотношения для виртуальной работы (6.15), откуда следует, что $\{ F^a \}$ должно быть добавлено к левой части уравнения жесткости (6.16). По причинам, указанным выше, компоненты матрицы $\{ F^a \}$ называются *энергетическими эквивалентными нагрузками*.

Следует отметить, что, как и в гл. 5, предполагаемое поле перемещений можно выразить в терминах обобщенных перемещений, т. е. в виде

$$\Delta = [p] \{a\}, \quad (5.2a)$$

и применяя процедуру из разд. 5.1, это выражение можно записать в терминах узловых смещений. Можно показать, что окончательная формула имеет вид

$$\Delta = [p] [B]^{-1} \{ \Delta \} = [N] \{ \Delta \}. \quad (5.5a)$$

Глава 8 частично посвящена изучению альтернативных форм записи поля через узловые перемещения либо через обобщенные степени свободы.

Если поле перемещений выражается в терминах обобщенных параметров, то иногда удобно строить матрицы элемента, используя эти параметры. Рассмотрим, в частности, матрицу жесткости элемента. В этом случае для получения деформаций дифференцируют перемещения: $e = [C] \{a\}$ (см. (5.6a)), а деформации, обусловленные виртуальными перемещениями, равны $\delta e = [C] \{\delta a\}$. Подстановкой в выражение (6.11) для δU получим (начальные деформации для простоты не рассматриваются)

$$\delta U = [\delta a] [k^a] \{a\}, \quad [k^a] = \left[\int_{vol} [C]^T [E] [C] d(vol) \right], \quad (6.2g)$$

где $[k^a]$ называется далее *опорной матрицей жесткости*. Аналогичные опорные выражения можно получить и для вектора начальных сил, матрицы масс и т. д.

Заметим, что выражения (6.12a) и (6.12e) для матриц жесткости и массы имеют вид *конгруэнтных преобразований*, обеспечивающих симметричность матрицы, полученной в результате умножения, если симметрична центральная матрица. Так как матрицы упругости $[E]$ и матрица плотности $[\rho]$ симметричны, то и получаемые в результате матрицы будут симметричны. Изложенный подход отличается от прямого метода из разд. 5.1 тем, что преобразование от узловых степеней свободы к деформациям служит основой преобразования узловых сил в напряжения.

6.1.3. Принцип согласованности при построении выражения для виртуальной работы

Приведенные выше построения служат прообразом принципа *согласованности* при построении конечных элементов. Очевидно, что каждая из матриц (основная матрица жесткости, матрицы массы и распределенных нагрузок) построена с применением функций формы предполагаемого поля перемещения, причем для каждой используется один и тот же набор функций формы. Поэтому матрица массы согласована с основной матрицей жесткости, и матрицы, построенные на этом принципе, называются *согласованными матрицами массы*.

Альтернативные виды матриц — *несогласованные матрицы* — появляются на практике вполне естественно. Например, при расчетах динамических задач глобальные матрицы жесткости и массы часто рассматриваются независимо. Предполагается, что массовые характеристики инерционны, поэтому можно пропорционально распределить массы для каждой из степеней свободы. Построенные таким образом матрицы массы называются *матрицами сосредоточенных масс*.

Подход, основанный на физической точке зрения, может быть применен и в случае распределенных нагрузок. При этом математическая модель содержит фиктивные силовые параметры $\{F^a\}$, отвечающие распределенным нагрузкам. Эти параметры определяются в результате приравнивания интегралов от произведений распределенных нагрузок на соответствующие перемещения к работам узловых сил на соответствующих перемещениях. Следовательно, $\{F^a\}$ — вектор *энергетически эквивалентных усилий*.

Выписанные выше выражения выводятся еще раз в разд. 6.4 с помощью принципа стационарности потенциальной энергии. Затем приводятся двойственные формулировки для принципа стационарности дополнительной энергии и рассматриваются другие (смешанные) принципы стационарности. Однако сначала необходимо напомнить ряд основных положений в задаче определения стационарных значений для функций многих переменных.

6.2. Вариационное исчисление

6.2.1. Безусловная минимизация

Принцип виртуальной работы характеризуется вариацией энергии деформации и потенциала прикладываемых нагрузок. Если рассмотреть варьируемые величины U и V , то можно установить ряд полезных свойств, которыми они обладают. Это рассмотрение показывает, что задача анализа конструкций, основанная на подсчете вариации суммы $U+V$, относится к хорошо разработанной области математики, известной как *вариационное исчисление* [6.1—6.4]. Ряд важных результатов в этом разделе математики можно непосредственно применить к задачам конечно-элементного анализа конструкций.

В этом разделе изложим некоторые наиболее простые результаты вариационного исчисления. Здесь рассматриваются непрерывные (интегральные или дифференциальные) формулировки этих результатов, перенос на дискретный случай будет осуществлен в последующих разделах. Рассмотрим сначала одномерную задачу, описываемую единственной независимой переменной $\Delta(x)$, где x — пространственная координата. Основной задачей вариационного исчисления является определение величины $\Delta(x)$, которая доставляет стационарное значение интегралу

$$\Pi = \int f(x, \Delta, \Delta') dx, \quad (6.19)$$

где $\Delta' = d\Delta/dx$. Через f обозначена функция, характеризующая в механике конструкций, например, плотность потенциальной или дополнительной энергии, а Π — функционал, т. е. функция от функ-

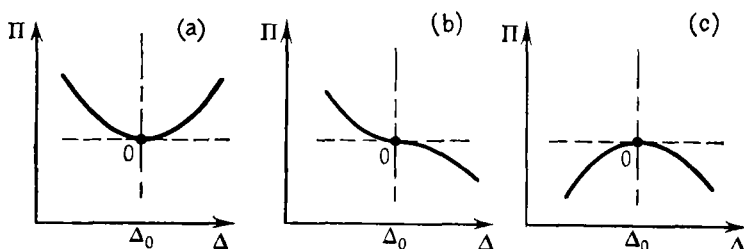


Рис. 6.2. Типы стационарных точек: (а) минимум; (б) перегиб; (с) максимум.

ции (в данном случае функция от f). Стационарное значение может быть либо максимумом, либо минимумом, либо значением, отвечающим нейтральной точке. Эти случаи схематически изображены на рис. 6.2. Функция f должна быть, разумеется, дважды дифференцируемой. Если функция имеет лишь первую производную, отлич-

ную от нуля, то она линейна, а линейные функции не имеют минимума.

Чтобы вывести выражения, позволяющие определить точку, в которой достигается стационарное значение, и иметь возможность различать представленные на рис. 6.2 ситуации, рассмотрим сначала функцию $\Pi(\Delta)$, где Δ — переменная величина. Согласно теореме Тейлора, разложение в ряд этой функции в окрестности точки Δ_0 имеет вид

$$\Pi(\Delta) = \Pi(\Delta_0) + \frac{d\Pi(\Delta_0)}{d\Delta}(\Delta - \Delta_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2\Pi(\Delta_0)}{d\Delta^2}(\Delta - \Delta_0)^2 + \dots \quad (6.20)$$

Правило определения местоположения точки экстремума вытекает из выписанной формулы, если обозначить точку экстремума через Δ_0 . При стремлении к этой точке расстояние $\Delta - \Delta_0$ становится очень малым, а третий член в разложении делается пренебрежимо мал по сравнению со вторым членом. Если выполняется условие минимума, любое смещение из точки Δ_0 приведет к увеличению значения $\Pi(\Delta)$, и в этом случае второй член всегда должен быть положительным. Однако, до тех пор пока производная $d\Pi(\Delta_0)/d\Delta$ не обратится в нуль, второй член может иметь произвольный знак в зависимости от знака смещения $d\Delta$. Аналогичные рассуждения справедливы и для точки максимума. Поэтому в *стационарной точке* справедливо следующее условие:

$$d\Pi(\Delta_0)/d\Delta = 0. \quad (6.21)$$

Это хорошо известное требование равенства нулю угла наклона кривой в стационарной точке. В вариационном исчислении оно известно как *первое необходимое условие*. Стационарная точка должна удовлетворять указанному условию, однако его выполнения еще недостаточно, чтобы с уверенностью сказать, является ли эта точка точкой максимума, минимума или нейтральной точкой. Чтобы ответить на поставленный вопрос (см. рис. 6.2), необходимо определить знак кривизны (второй производной) функции $\Pi(\Delta_0)$ в точке Δ_0 . В точке минимума кривизна положительна, в точке максимума — отрицательна, а в нейтральной точке — равна нулю. Символически это запишем в виде

$$d^2\Pi(\Delta_0)/d\Delta^2 > 0 \text{ (минимум)}, \quad (6.22a)$$

$$d^2\Pi(\Delta_0)/d\Delta^2 < 0 \text{ (максимум)}, \quad (6.22b)$$

$$d^2\Pi(\Delta_0)/d\Delta^2 = 0 \text{ (нейтральная точка)}. \quad (6.22c)$$

Вернемся теперь к вопросу отыскания стационарного значения функционала $\Pi(\Delta)$. На рис. 6.3 изображена функция Δ в зависимости от пространственной координаты x . Предположим, что задача определена внутри интервала между точками x_1 и x_2 , а Δ должна удовлетворять определенным условиям в граничных точках интер-

вала; указанные граничные значения обозначим через Δ_1 и Δ_2 . Функция Δ , которая обеспечивает стационарное значение функционала $\Pi(\Delta)$, обозначается через Δ_0 и изображается сплошной линией на рис. 6.3. Чтобы определить Δ_0 , необходимо выбрать функцию, кото-

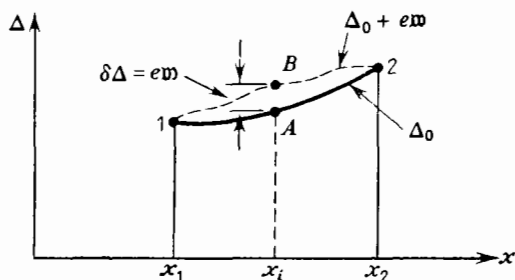


Рис. 6.3. Стационарная (Δ_0) и пробная ($\Delta_0 + \varepsilon w$) кривые.

рая отличается от Δ_0 на величину εw , где w — произвольная амплитудная функция, удовлетворяющая условиям для Δ в точках x_1 и x_2 , а ε — величина амплитуды. Таким образом, аппроксимационное выражение имеет вид

$$\Delta = \Delta_0 + \varepsilon w, \quad (6.23a)$$

а наклон изображенной кривой равен

$$d\Delta/dx = \Delta' = \Delta'_0 + \varepsilon w'. \quad (6.23b)$$

Заметим далее, что εw задает малую вариацию функции Δ , которую обозначим через $\delta\Delta$. Итак,

$$\delta\Delta = \varepsilon w, \quad \delta\Delta' = \varepsilon w'. \quad (6.24a, b)$$

Вариация $\delta\Delta$ приводит к малому изменению функционала, обозначаемому через $\delta\Pi$, которая является *первой вариацией функционала*.

Символ δ , или дельта-оператор, означает малые произвольные изменения зависимой переменной Δ при фиксированных значениях независимой переменной x . Как видно из рис. 6.3, в заданной точке x_i величина $\delta\Delta$ есть амплитуда $B - A$. Отличие дельта-оператора δ от оператора дифференциального исчисления dy заключается в том, что последний связывает dx с dy . Иными словами, dy характеризует расстояние по вертикали между точками данной кривой, находящимися на расстоянии dx . Важным свойством оператора дельта, используемого при построении вариационных соотношений, является *коммутативность* по отношению к операциям дифференцирования и интегрирования, т. е.

$$\delta \left(\frac{d\Delta}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (\delta\Delta), \quad \delta \left(\int \Delta dx \right) = \int (\delta\Delta) dx.$$

Учитывая вышеизложенное, перейдем к выводу соотношений, определяющих стационарное значение функционала Π . Сначала запишем функционал для аппроксимирующей функции $\Delta_0 + \epsilon w$. В этом случае (6.19) имеет вид

$$\Pi(\epsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \Delta_0 + \epsilon w, \Delta'_0 + \epsilon w') dx. \quad (6.25)$$

Далее в этом выражении разложим f в окрестности точек Δ_0 и Δ'_0 (при фиксированном x). Получим

$$f(x, \Delta_0 + \epsilon w, \Delta'_0 + \epsilon w') - f(x, \Delta_0, \Delta'_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial \Delta_0} (\delta \Delta) + \frac{\partial f}{\partial \Delta'_0} (\delta \Delta') \right] + \\ + \text{члены более высокого порядка малости.} \quad (6.26)$$

Левая часть этого соотношения представляет собой изменение f , обусловленное вариацией $\delta \Delta = \epsilon w$, т. е. это δf . Поэтому, пренебрегая членами более высокого порядка малости, можно записать первую вариацию функционала в виде

$$\delta \Pi = \int_{x_1}^{x_2} \delta f dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial \Delta_0} \delta \Delta + \frac{\partial f}{\partial \Delta'_0} \delta \Delta' \right) dx = 0, \quad (6.27)$$

причем приравнивание выражения к нулю сделано в соответствии с условиями стационарности.

Чтобы получить полезное выражение для $\delta \Pi$, необходимо проинтегрировать это выражение по частям. Как показано в гл. 5, эта операция нужна частично и для того, чтобы получить граничные условия. В нашем случае интегрирование по частям поможет вывести $\delta \Delta$ в виде сомножителя, при этом необходимо проинтегрировать по частям только второй член. Имеем

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \Delta'_0} (\delta \Delta') dx = \delta \Delta \cdot \frac{\partial f}{\partial \Delta'_0} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \delta \Delta \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \Delta'_0} \right) dx. \quad (6.28)$$

Так как вариация $\delta \Delta$ должна обращаться в нуль на концах x_1 и x_2 , первый член в правой части соотношения равен нулю. Поэтому (6.27) примет вид

$$\delta \Pi = \int_{x_1}^{x_2} \delta \Delta \left[\frac{\partial f}{\partial \Delta_0} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \Delta'_0} \right) \right] dx = 0. \quad (6.27a)$$

Очевидно, в силу произвольности $\delta \Delta$ интеграл обращается в нуль при условии

$$\frac{\partial f}{\partial \Delta_0} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \Delta'_0} \right) = 0. \quad (6.29)$$

Это уравнение известно как *уравнение Эйлера* (или *уравнение Эйлера — Лагранжа*) для функционала Π . Функция Δ , доставляющая экстремальное значение функционалу Π , удовлетворяет соответствующему уравнению Эйлера. На практике величины, входящие в уравнение Эйлера, позволяют выписать определяющее дифференциальное уравнение физического процесса, описываемого исходным функционалом.

6.2.2. Пример

Чтобы проиллюстрировать, как «работает» выписанная выше процедура, рассмотрим функционал, отвечающий стержневому элементу. Вспомним, что виртуальная работа обуславливает равенство $\delta(U+V)=0$. Это соответствует выполнению первого необходимого условия для функционала $U+V$. В случае стержневого элемента (см. разд. 5.5) имеем

$$U+V=\frac{1}{2}\int_0^L e^2 EA \, dx - \int_0^L q \cdot u \, dx = \int_0^L \left[\frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 EA - q \cdot u \right] dx.$$

Следовательно, сравнивая с (6.19), заключаем, что

$$f = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 EA - q \cdot u \right].$$

Учитывая теперь дифференциальное уравнение Эйлера (6.29), получим (так как здесь $\Delta_0=u$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} &= -q, & \frac{\partial f}{\partial u'} &= AE \frac{du}{dx}, \\ \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial u'} \right) &= -q - AE \frac{d^2 u}{dx^2} = 0 \end{aligned}$$

или $AE(d^2u/dx^2)+q=0$, которое является определяющим дифференциальным уравнением (уравнением равновесия) в этой задаче.

6.2.3. Граничные условия и ограничения

Требования, согласно которым искомая функция или ее производная принимает заданное значение в граничных точках, известны как *главные граничные условия*. Если функция не удовлетворяет этим условиям, то первый член в правой части соотношений (6.28) обращается в нуль, если

$$\partial f / \partial \Delta'_0 = 0. \quad (6.30)$$

Условие, выраженное соотношением (6.30), известно как *естественное граничное условие*. В качестве иллюстрации рассмотрим

стержневой элемент, для которого, согласно выписанным выше формулам, имеем $\partial f / \partial \Delta'_0 = \partial f / \partial u' = AE (du/dx)$. Однако известно, что $du/dx = \epsilon_x$, $E\epsilon = \sigma_x$ и $F = A\sigma_x$, поэтому $F=0$ в этой точке. Следовательно, можно удовлетворить естественным граничным условиям, означающим, что сила на свободном конце стержневого элемента равна нулю. Этому типу граничных условий в функционале энергии отвечает член, представляющий работу прикладываемых нагрузок.

В заключение важно указать способ учета *ограничений*, рассматриваемых в вариационном исчислении. Одним из способов является *метод множителей Лагранжа*. Рассмотрим задачу минимизации функционала $\Pi(\Delta)$, и пусть ограничение имеет вид

$$\mathcal{G}(\Delta) = 0. \quad (6.31)$$

Построим новый функционал Π^a , называемый *расширенным функционалом*, умножая \mathcal{G} на константу λ и прибавляя полученное произведение к исходному функционалу:

$$\Pi^a = \Pi + \lambda \mathcal{G}, \quad (6.32)$$

где λ — *множитель Лагранжа*. Если теперь Π достигает экстремального значения на Δ_0 при ограничении $\mathcal{G}(\Delta)=0$, то частные производные Π^a по Δ и λ , приравненные к нулю, дадут условия для определения Δ_0 и λ (необходимые условия)

$$\frac{d\Pi^a}{d\Delta} = \frac{\partial \Pi}{\partial \Delta} + \lambda \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \Delta} = 0, \quad (6.33a)$$

$$\frac{d\Pi^a}{d\lambda} = \mathcal{G} = 0. \quad (6.33b)$$

Заметим, что одно из полученных соотношений и есть исходное ограничение $\mathcal{G}=0$. Строгое обоснование метода излагается в книгах по вариационному исчислению (см., например, [6.1]—[6.4]).

Множители Лагранжа могут иметь важный физический смысл в рассматриваемой задаче. В некоторых случаях этот смысл можно выяснить, детально изучая их свойства. В других случаях физический смысл множителей Лагранжа легко выяснить, рассматривая функционал Π . Например, при расчете конструкций на основе энергетических методов Π представляет собой энергию и имеет размерность силы, умноженной на перемещение. В некоторых задачах ограничения задают соотношения между перемещениями. Поэтому из соображений размерности величина λ должна иметь размерность силы и множители Лагранжа можно рассматривать как *обобщенные силы*.

6.3. Дискретная вариационная задача

6.3.1. Безусловная минимизация

Перейдем к изучению *дискретных* функционалов, в которых переменная Δ аппроксимируется суммой конечного числа членов. Так как рассматривается концепция метода конечных элементов, выберем аппроксимацию в виде (5.5а), т. е. $\Delta = \lfloor N \rfloor \{\Delta\}$. Для простоты рассмотрим случай одной переменной Δ . Случай, когда рассматривается поле переменных (например, $\Delta = \lfloor u v w \rfloor$), изучается аналогичным образом. При изучении свойств дискретного функционала полезно представить его в виде поверхности в $(n+1)$ -мерном пространстве, где n ортогональных координат отвечают n степеням свободы $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, а на $(n+1)$ -й оси откладываются значения функционала $\Pi(\{\Delta\})$. Каждая точка на такой поверхности — значение величины $\Pi(\{\Delta\})$. Поверхность в задаче с двумя степенями

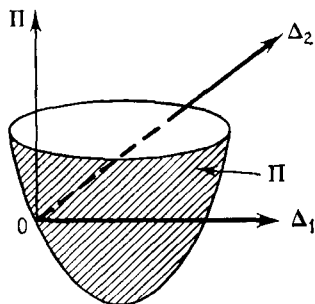


Рис. 6.4. Поверхность Π , задающая функционал для двухстепенной системы.

свободы (Δ_1, Δ_2) изображена на рис. 6.4. Нельзя изобразить ситуацию, если число степеней свободы превосходит два, однако алгебраические свойства изображенного случая переносятся и на общую n -мерную задачу. Так как рассматриваются свойства экстремального значения $\Pi(\{\Delta\})$, обобщим на наш случай формулу разложения в ряд Тейлора, выписанную в (6.20) для непрерывной задачи в окрестности стационарной точки $\{\Delta_0\}$. Имеем

$$\begin{aligned} \Pi(\{\Delta_i\}) = \Pi(\{\Delta_0\}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_i} \Big|_{\{\Delta_0\}} (d\Delta_i) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \Delta_i \partial \Delta_j} \Big|_{\{\Delta_0\}} (d\Delta_i) (d\Delta_j) + \dots, \quad (6.34) \end{aligned}$$

где $d\Delta_i$ — разность между i -й компонентой $\{\Delta\}$ и соответствующей компонентой $\{\Delta_0\}$ (и аналогично для $d\Delta_j$). Можно также записать

это разложение и в матричном виде:

$$\Pi(\{\Delta\}) = \Pi_0 + \left[\frac{\partial \Pi}{\partial \Delta} \right] \{d\Delta\} + \frac{1}{2} \frac{d^2 \Pi}{d\Delta^2} [\kappa] \{d\Delta\} + \dots, \quad (6.34a)$$

где $\{d\Delta\} = \{\Delta\} - \{\Delta_0\}$, а отдельные элементы матрицы $\{\kappa\}$, называемой матрицей Гессе, имеют вид $\kappa_{ij} = \partial^2 \Pi / \partial \Delta_i \partial \Delta_j$. Как $\lfloor \partial \Pi / \partial \Delta \rfloor$, так и $[\kappa]$, согласно (6.34), вычисляются на $\{\Delta_0\}$. Здесь выписаны лишь три члена разложения, так как функционалы, рассматриваемые в линейных задачах механики конструкций, являются *квадратичными*. Поэтому производные третьего и более высокого порядка, фигурирующие в последующих членах, не дают вклада в $\Pi(\{\Delta\})$.

Если $\Pi(\Delta)$ имеет *стационарную точку*, то, по определению, на касательной плоскости в указанной точке выполняется условие, согласно которому любая бесконечно малая вариация координат $d\Delta$, не вызовёт в первом приближении изменения функционала. Это требование является первым необходимым условием, выраженным для непрерывного случая формулой (6.21) и записываемым здесь в виде

$$\delta \Pi(\{\Delta\}) = 0. \quad (6.35)$$

Чтобы преобразовать это выражение к виду, удобному для построения алгебраических уравнений, решение которых приведет к нахождению стационарной точки, используем δ как дифференциальный оператор. Итак,

$$\delta \Pi(\{\Delta\}) = \frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_1} \delta \Delta_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_2} \delta \Delta_2 + \dots + \frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_n} \delta \Delta_n = \left[\frac{\partial \Pi}{\partial \Delta} \right] \{\delta \Delta\} = 0, \quad (6.35a)$$

и в силу независимости вариаций $\delta \Delta_i$,

$$\left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial \Delta} \right\} = 0. \quad (6.35b)$$

Это условие применимо к i ($i=1, \dots, n$) степеням свободы Δ_i . В результате получим систему из n уравнений.

В некоторых случаях стационарная точка дискретизированного функционала обладает дополнительным свойством — это точка экстремума (максимума или минимума). Если это — точка минимума, то любое смещение из этой точки увеличит значение Π . Так как $\lfloor \partial \Pi / \partial \Delta \rfloor \{d\Delta\}$ равно нулю в этой точке, то из условия минимума следует, что

$$\lfloor d\Delta \rfloor [\kappa] \{d\Delta\} > 0. \quad (6.36a)$$

Так как вариация $\{\delta \Delta\}$ произвольна, выписанное условие приводит к положительной определенности гессиана $[\kappa]$. По определению, матрица является положительно определенной, если для любого вектора $\{d\Delta\} \neq 0$ произведение $\lfloor d\Delta \rfloor [\kappa] \{d\Delta\}$ положительно. Для

точки максимума, наоборот, справедливо

$$[\delta\Delta][\kappa]\{\delta\Delta\} < 0, \quad (6.36b)$$

поэтому $[\kappa]$ — отрицательно определенная матрица.

Вариационная формулировка позволяет изучить вопросы, связанные с понятием *согласованности* в случае конечно-элементной дискретизации физической задачи. Ранее уже отмечалось, что внутри одной и той же области функция должна быть дифференцируема столько раз, каков порядок производных в соответствующем уравнении Эйлера (т. е. для стержневого элемента уравнение Эйлера имеет второй порядок, поэтому функция должна быть не менее чем квадратична). В методе конечных элементов функционал полной системы состоит из суммы функционалов Π' для p отдельных областей (элементов), т. е.

$$\Pi = \sum_{i=1}^p \Pi' \quad (j = 1, \dots, p). \quad (6.37)$$

Что же тогда может служить условием *согласованности* на границах элементов? Выяснить смысл этого условия поможет рассмотрение вариаций полей для одномерной полосы элементов, изображенной на рис. 6.5. Если для этого случая функционал представляет

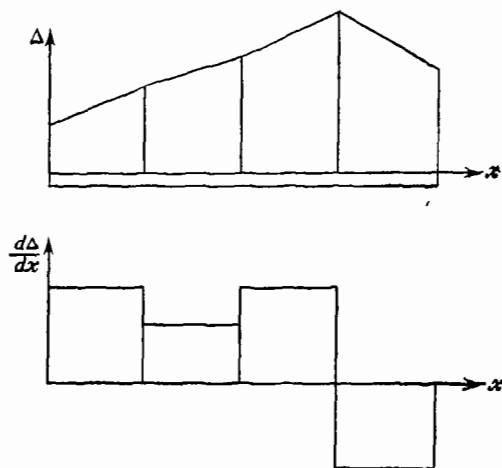


Рис. 6.5. Кусочно-постоянная вариация величины $d\Delta/dx$.

собой интеграл от первой производной ($d\Delta/dx$) по области, занимаемой всей системой, то видно, что непрерывность Δ позволяет однозначно определить Π . Эта ситуация обобщается следующим образом: однозначное определение функционала возможно, если *обес-*

печивается непрерывность производных, на один порядок меньших, нежели наибольший порядок производных, встречающихся в функционале.

6.3.2. Метод множителей Лагранжа для учета ограничений

Метод множителей Лагранжа справедлив при наличии ограничений и в дискретизированной задаче. Если имеется r ограничений вида

$$\mathcal{G}^k(\Delta_1, \dots, \Delta_n) = 0 \quad (k = 1, \dots, r), \quad (6.38)$$

со вводится расширенный функционал

$$\Pi^a(\{\Delta, \lambda\}) = \Pi(\{\Delta\}) + \sum_{k=1}^r \lambda_k \mathcal{G}^k, \quad (6.39)$$

где второе слагаемое в правой части соотношения — сумма произведений \mathcal{G}_j на соответствующие множители Лагранжа λ_k . Приметим первое необходимое условие для каждой степени свободы Δ_i и для каждого множителя Лагранжа λ_k . Система получающихся соотношений для степеней свободы имеет вид

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_i} + \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial \mathcal{G}^k}{\partial \Delta_i} = 0, \quad (6.35c)$$

а дифференцирование по λ_k приводит к ограничениям (6.38).

Заметим, что аналогично разд. 6.2 соображения анализа размерностей позволяют определить размерности множителей Лагранжа и выявить физический смысл этих множителей. Если $\mathcal{G}^k = 0$ представляют собой ограничения на перемещения, то λ_k — соответствующие силы. В гл. 7 представится возможность проиллюстрировать указанное утверждение на примере.

6.4. Минимум потенциальной энергии

6.4.1. Свойства потенциальной энергии

Принцип минимума потенциальной энергии представляет собой основу для непосредственной формулировки уравнений жесткости элемента. Потенциальная энергия конструкции Π_p представляет собой сумму энергии деформации U и потенциала внешних сил V , т. е.

$$\Pi_p = U + V. \quad (6.40)$$

Принцип формулируется следующим образом: *среди всех допустимых перемещений те, которые удовлетворяют условиям равновесия, обеспечивают стационарное значение потенциальной энергии. По-*

этому

$$\delta \Pi_p = \delta U + \delta V = 0. \quad (6.41)$$

В состоянии равновесия потенциальная энергия Π_p минимальна. Следовательно,

$$\delta^2 \Pi_p = \delta^2 U + \delta^2 V > 0. \quad (6.42)$$

При выводе приведенного выше принципа для простоты исключим из рассмотрения объемные силы. Обозначим через dU величину энергии деформации, приходящуюся на единицу объема, или плотность энергии деформации (см. разд. 2.4, где дается исходное определение энергии деформации). Тогда изменение плотности энергии деформации вследствие изменения величины деформации $\delta \epsilon$, вызванного виртуальным перемещением, равно

$$\delta(dU) = \sigma \delta \epsilon, \quad (6.43)$$

где σ — равновесное напряженное состояние, существовавшее до вариаций перемещений. Ввиду малости здесь опущены слагаемые, обусловленные действием приращений напряжений на соответствующих виртуальных деформациях. Подставляя соотношения между напряжениями и деформациями (4.15), получим следующие выражения для приращения энергии деформации:

$$\delta(dU) = \epsilon[E] \delta \epsilon - \epsilon^{\text{init}}[E] \delta \epsilon. \quad (6.44)$$

Интегрируя в пределах от 0 до значения ϵ , соответствующего σ , получим (меняя местами члены в подынтегральном выражении второго интеграла)

$$dU = \frac{1}{2} \epsilon[E] \epsilon - \int_{\text{vol}} \epsilon[E] \epsilon^{\text{init}} d(\text{vol}), \quad (6.45)$$

откуда для всего конечного элемента после интегрирования dU по объему имеем (обозначая третий член в правой части соотношения через $C(\epsilon^{\text{init}})$):

$$U = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \epsilon[E] \epsilon d(\text{vol}) - \int_{\text{vol}} \epsilon[E] \epsilon^{\text{init}} d(\text{vol}) + C(\epsilon^{\text{init}}). \quad (6.46)$$

Замечая также, что применение δ аналогично применению дифференциала, запишем первую вариацию U в виде

$$\delta U = \int_{\text{vol}} \epsilon[E] \delta \epsilon d(\text{vol}) - \int_{\text{vol}} \epsilon^{\text{init}}[E] \delta \epsilon d(\text{vol}). \quad (6.47)$$

Потенциал приложенных нагрузок равен

$$V = - \sum_{i=1} F_i \Delta_i - \int_{S_\sigma} \bar{T} \cdot u dS, \quad (6.48)$$

где все входящее в выражение символы определены ранее. Снова заметим, что интеграл по участку поверхности S_n , где заданы перемещения, не входит в выписанное выражение благодаря выполнению условий *кинематической допустимости* для выбранных полей перемещений. Иными словами, указанные геометрические главные (или вынужденные) граничные условия строго выполняются.

Первая вариация V дается выражением

$$\delta V = - \sum F_i \delta \Delta_i - \int_{S_\sigma} \bar{T} \cdot \delta u \, dS. \quad (6.49)$$

Обращаясь вновь к принципу виртуальной работы (6.1), видим, что, согласно (6.41), $\delta U + \delta V = \delta \Pi_p = 0$, откуда первая вариация должным образом записанной потенциальной энергии Π_p равна нулю, т. е. Π_p стационарна в точке, соответствующей решению.

6.4.2. Конечно-элементная дискретизация

Приведем рассуждения, опираясь на знание полей перемещений, выраженных в терминах степеней свободы. Согласно (5.6с), имеем $\mathbf{e} = [\mathbf{D}] \{\Delta\}$. Поэтому, подставляя указанное выражение для \mathbf{e} в (6.46), получим

$$U = \frac{\underline{\Delta}}{2} [\mathbf{k}] \{\Delta\} - \underline{\Delta} \{ \mathbf{F}^{\text{init}} \} + C(\mathbf{e}^{\text{init}}), \quad (6.50)$$

где $[\mathbf{k}]$ и $\{\mathbf{F}^{\text{init}}\}$ определяются согласно выражениям (6.12а) и (6.12b), полученным с учетом принципа виртуальной работы.

Кроме того, запишем в дискретном виде величину V (учитывая, что, согласно (6.17а), $\delta u = \{Y\} \{\Delta\}$):

$$V = - \underline{\Delta} \{ \mathbf{F} \} - \underline{\Delta} \{ \mathbf{F}^d \}, \quad (6.51)$$

где $\{\mathbf{F}^d\}$ определяется из (6.12 f).

Теперь с учетом (6.50) и (6.51) запишем выражение для потенциальной энергии полностью в дискретном виде

$$\Pi_p = \frac{\underline{\Delta}}{2} [\mathbf{k}] \{\Delta\} - \underline{\Delta} \{ \mathbf{F} \} + \{ \mathbf{F}^{\text{init}} \} + \{ \mathbf{F}^d \}, \quad (6.39a)$$

которое является квадратичной формой общего вида. Используя далее условие стационарности [т. е. $\{\partial \Pi / \partial \Delta\} = 0$, см. (6.35b)], получим

$$[\mathbf{k}] \{\Delta\} = \{ \mathbf{F} \} + \{ \mathbf{F}^{\text{init}} \} + \{ \mathbf{F}^d \}. \quad (6.52)$$

Чтобы выяснить, максимальна или минимальна в этой точке энергия, рассмотрим вторую вариацию. Для консервативных на-

грузок, если $\{F\}$ — постоянный вектор, то

$$\delta^2 \Pi_p = \lfloor \Delta \rfloor [k] \{\Delta\}. \quad (6.53)$$

Ясно из физического смысла, что энергия деформации должна быть положительна. Учитывая, что энергия деформации равна $U = \frac{1}{2} \lfloor \Delta \rfloor [k] \{\Delta\}$, а $\{\Delta\}$ — произвольный вектор, заключаем, что $[k]$ — положительно определенная матрица. Следовательно, величина $\delta^2 \Pi_p$ неотрицательна и потенциальная энергия минимальна.

Факт достижения потенциальной энергией минимума на решении может быть использован проектировщиком для оценки некоторых параметров и установления границ для точного решения. Это свойство используется в дальнейшем в гл. 7 при построении решения для всей конструкции. Заметим также, что положительная определенность матрицы $[k]$ позволяет установить минимальные свойства. Для некоторых смешанных вариационных принципов, о которых речь пойдет ниже, основная матрица коэффициентов в конечно-элементном представлении не обладает этим свойством и поэтому нельзя задать границы изменения параметров решения.

Следует подчеркнуть, что принцип минимума потенциальной энергии можно применить при построении матрицы жесткости элемента как *присущее конструкции* свойство без учета условий, которые должны выполняться при переходе через границы элемента, если элемент включен в глобальное представление конструкции. Если при построении глобального конечно-элементного представления эти условия нарушаются, то аналитическая модель характеризуется *межэлементной несогласованностью*, при этом нет уверенности в том, что при решении будет достигнут нижний предел. На практике несогласованные элементы применяют из-за того, что они проще согласованных элементов. Можно проверить, позволяет ли использование указанных элементов найти в пределе при измельчении сетки правильное решение [6.5]. Примеры таких элементов даны в последующих главах.

Как было показано, формулы для матриц элементов в линейных задачах теории упругости совпадают, если их получать на основе принципов соответственно виртуальной работы и минимума потенциальной энергии. Принцип виртуальной работы является более фундаментальным и его обобщения позволяют построить конечно-элементные представления не только для задач расчета конструкций. Поэтому многие предпочитают использовать именно этот принцип. С другой стороны, выражения для энергии деформации либо хорошо известны, либо легко выписываются во многих задачах расчета конструкций. Кроме того, энергетический подход делает наглядными экстремальные свойства решения и позволяет построить, как мы увидим в гл. 7, альтернативные алгоритмы, основанные на этих свойствах.

6.4.3. Примеры

Интересно применить описанный выше подход для построения матрицы жесткости и других матриц для элементов, изученных в гл. 5. Для простоты при выборе подходящих полей перемещений в эле-

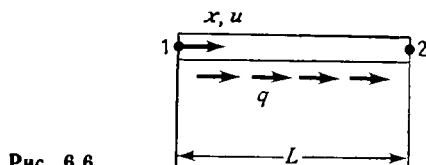


Рис. 6.6.

менте используем выражения, которые записываются непосредственно в терминах узловых смещений элементов, а не обобщенных параметров. Так, для рассмотренного в разд. 5.1 и 5.5 (см. рис. 6.6) стержневого элемента (5.3), имеем $u = (1 - x/L) u_1 + (x/L) u_2$, поэтому

$$\begin{aligned} [N] &= \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{x}{L} \right], \\ [N'] &= \left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right]. \end{aligned}$$

Подставляя указанные выражения в (6.12а) и (6.12е), получим матрицу жесткости $[k]$ и матрицу массы $[m]$ элемента

$$\begin{aligned} [k] &= \int_0^L \left\{ \begin{matrix} -1/L \\ 1/L \end{matrix} \right\} E \left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] A dx = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \\ [m] &= \int_0^L \left\{ \begin{matrix} (1 - x/L) \\ x/L \end{matrix} \right\} \rho \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{x}{L} \right] A dx = \rho AL \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

а если начальные деформации обусловлены термоупругим расширением ($e^{\text{init}} = \alpha \Upsilon$), из (6.12б) имеем

$$\{F^{\text{init}}\} = \int_0^L \left\{ \begin{matrix} -1/L \\ 1/L \end{matrix} \right\} E \alpha \Upsilon A dx = AE \alpha \Upsilon \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Кроме того, для распределенной вдоль стержня нагрузки q (1 фунт/дюйм) постоянной интенсивности имеем $X = q/A$. Из (6.12с) следует, что

$$\{F^b\} = \int_0^L \left\{ \begin{matrix} 1 - x/L \\ x/L \end{matrix} \right\} q dx = q \frac{L}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Полученная матрица $[k]$ совпадает с матрицей, построенной с помощью прямого метода. Так как поле перемещений в элементе имеет простой вид, то пропорциональное задание узловых сил с помощью транспонирования матрицы, связывающей перемещения и деформации, и непосредственное задание сил в узлах приводят к идентичным результатам. Что касается термоупругих сил, то, как и следовало ожидать, компоненты вектора $\{F^{init}\}$ представляют силы, требуемые для компенсации перемещений элемента, вызванных приращением температуры T . Кроме того, реализация распределенных нагрузок совпадает с той, которая получена в результате выполнения процедуры пропорционального распределения нагрузок по узлам.

Рассмотрим треугольный элемент, изображенный на рис. 5.3. Согласно (5.21a), имеем

$$[N] = \frac{1}{x_2 y_3} \begin{bmatrix} (x_2 y_3 - x y_3 - x_2 y + x_3 y) & (x y_3 - x_3 y) & (x_2 y) \end{bmatrix},$$

а из (5.22) следует, что

$$[D] = \frac{1}{x_2 y_3} \begin{bmatrix} -y_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - x_2 & -x_3 & x_2 \\ x_3 - x_2 & -x_3 & x_2 & -y_3 & y_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица жесткости, полученная с использованием $[D]$ в выражении (6.12a) для виртуальной работы, совпадает с изображенной на рис. 5.4 из-за простого характера линейного поля, задаваемого с помощью $[N]$. Построение матриц $[m]$ и $\{F^{init}\}$ оставляем читателю в качестве упражнения (см. задачи 6.4 и 6.7).

Для плоского напряженного состояния распределенные нагрузки обычно прикладываются к краям конструкции, а не в виде нагрузок, распределенных по поверхности элемента. Следовательно, для подсчета $\{F^d\}$ имеет смысл рассмотреть вопросы, связанные с распределением нагрузок по поверхности всей конструкции. Целесообразно отложить обсуждение этих вопросов до гл. 9, где рассматриваются глобальные аспекты расчета задач плоского напряженного состояния.

Как стержневой, так и треугольный элемент с линейным распределением перемещений дает неправильное представление об особенностях построения конечных элементов с использованием принципа минимума потенциальной энергии (или виртуальной работы). Это происходит из-за характера предполагаемых полей перемещений, которые соответствуют полям напряжений, удовлетворяющим дифференциальным уравнениям равновесия. Например, для треугольного элемента оказывается, что дифференциальное уравнение равновесия $\partial \sigma_x / \partial x + \partial \tau_{xy} / \partial y = 0$ тождественно удовлетворяется, если в него подставить выражение (5.7a) для напряжений

$|\sigma| = [E][D]\{\Delta\}$. Однако выбор кинематически допустимого поля перемещений обычно осуществляется без учета условий равновесия, и поэтому, вообще говоря, это поле не будет удовлетворять указанным условиям. Данное обстоятельство будет в дальнейшем проиллюстрировано при построении более сложных элементов.

6.4.4. Аппроксимация геометрических характеристик

В разд. 3.4 было отмечено, что одним из преимуществ метода конечных элементов является возможность рассчитывать конструкции сложной геометрии. Следует, однако, отметить, что, как правило, реальную конфигурацию конструкции приходится при расчетах каким-либо образом аппроксимировать, а это служит дополнительным источником погрешностей. Хотя аппроксимации поведения (т. е. перемещений) уделяется больше внимания, вопросы, связанные с аппроксимацией геометрии конструкций, имеют такое же, а подчас и более важное значение. В настоящее время известно, что вариационный подход дает возможность более точно аппроксимировать геометрию конструкции.

При обсуждении указанного круга вопросов полезно делать различие между трехмерными конструкциями, пластинами и призматическими телами. В случае трехмерных конструкций, как правило, имеют дело с криволинейными поверхностями, а для пластин и призматических элементов основными параметрами являются вариации толщин и площади. Некоторые основные рассуждения аппроксимации последних приводятся в данной главе. Вопросы аппроксимации геометрии трехмерных тел обсуждаются в последующих главах.

Стержневой элемент с переменным поперечным сечением, изображенный на рис. 6.7, иллюстрирует основные факторы аппроксимации геометрии конусообразных призматических элементов и

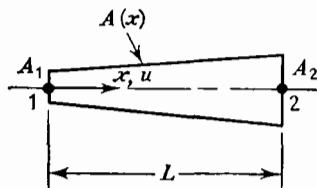


Рис. 6.7. Стержневой элемент с сужающимся переменным поперечным сечением.

пластин переменной толщины. Обычно при расчетах профилированные элементы аппроксимируются ступенчатым образом с использованием элементов постоянной толщины. Это — хорошая аппроксимация, если берется достаточно большое количество элементов, однако вычисления показывают, что возникающая при такой ап-

проксимации ошибка может превосходить ошибку от аппроксимации полей перемещений.

Альтернативой ступенчатому представлению служит простая аппроксимация величины $A(x)$ во всем конструктивном элементе либо на сегментах, разбивающих этот конструктивный элемент. Указанная аппроксимация необходима в силу следующего обстоятельства. Если требуется найти явный вид матрицы жесткости элемента, то, как легко видеть, никаким единым представлением $A(x)$ нельзя задать точно все возможные формы конструкции.

Учитывая сказанное, запишем энергию деформации элемента в виде

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \left(\frac{du}{dx} \right)^2 [A(x)] dx.$$

Функция перемещения (5.5), использовавшаяся ранее для элемента постоянного сечения, в нашем случае не является точной, так как она приводит к условию постоянства деформаций, которое уже не выполняется вдоль оси элемента. Однако эта аппроксимация удобна и будет здесь использована.

Для данного примера предположим, что $A(x)$ (см. рис. 6.7) изменяется между точками 1 и 2 линейно. Поэтому запишем

$$A(x) = \left[\left(1 - \frac{x}{L} \right) \frac{x}{L} \right] \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix},$$

где A_1 и A_2 — площади поперечного сечения в точках 1 и 2. Для указанных аппроксимаций перемещений и геометрических характеристик получим выражение для энергии деформации

$$U = E \frac{[u_1 \ u_2]}{2L^3} \int_0^L \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \left[\left(1 - \frac{x}{L} \right) \frac{x}{L} \right] \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} dx \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}.$$

После интегрирования получим

$$U = [u_1 \ u_2] [k] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix},$$

где
$$[k] = \frac{A A_{12} +}{2L} E \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Путем сравнения можно построить следующую «точную» матрицу жесткости стержневого элемента с линейным изменением толщины

$$[k] = \frac{E}{L} \frac{A_2 - A_1}{\ln(A_2/A_1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Из сравнения представленных матриц жесткости видно, что для построения точной матрицы требуется вычислить значение логарифмической функции.

Процедура построения профилированных балочных, пластинчатых и оболочечных элементов на основе простой аппроксимации их геометрии аналогична описанной выше процедуре для профилированного стержневого элемента. Можно аппроксимировать геометрические характеристики, основываясь на функциях, аппроксимирующих перемещения для элементов постоянной толщины. Этот подход называется *изопараметрическим представлением*, т. е. в этом случае одни и те же (*изо-*) параметры используются для аппроксимации перемещений и геометрии. Степень непрерывности полей перемещений при переходе от одного элемента к другому, заложенная в функциях формы, переносится и на геометрическое представление. Так, в рассматриваемом выше примере функция (площадь) непрерывна при переходе от одного элемента к другому. Общая теория изопараметрического представления будет изложена в разд. 8.8.

В практике проектирования не прижились даже столь простые способы аппроксимации профилированных стержневых и пластинчатых элементов. Проектировщики предпочитают использовать ступенчатую аппроксимацию элементами постоянной толщины. Вообще говоря, имеющиеся в настоящее время вычислительные возможности позволяют достаточно точно аппроксимировать очертания подобного рода конструкций, используя большое число элементов. Поэтому подходы, использующие изопараметрические представления, еще не получили широкого распространения при расчетах профилированных элементов. Однако это не так в случае трехмерных тел, когда расчеты даже на относительно грубой сетке конечных элементов требуют очень больших вычислительных затрат.

Альтернативой использования профилированных элементов является непосредственное численное интегрирование и подсчет интеграла энергии деформации. При этом во всех точках численного интегрирования должны быть затабулированы значения геометрических характеристик, входящих в подынтегральное выражение, и, естественно, этот подход применим также для интегралов, возникающих в описанных выше процедурах (изопараметрическое представление). Действительно, получаемое, согласно изложенному в разд. 8.8 подходу, использующему изопараметрическое представление, подынтегральное выражение в интеграле энергии деформации обычно бывает слишком сложным и поэтому для его интегрирования требуется привлекать численные методы.

6.5. Гибридные методы перемещений и метод обобщенной потенциальной энергии

6.5.1. Первый гибридный метод перемещений

Предлагаемые гибридные методы перемещений и метод обобщенной потенциальной энергии являются альтернативами методов, использующих единственное аппроксимирующее поле и характеризующихся межэлементной согласованностью. Как гибридные методы, так и метод обобщенной потенциальной энергии базируются на применении *нескольких полей*, когда одно поле перемещений задано внутри элемента, другое поле перемещений или напряжений определено независимым образом на границах элемента. В гибридном методе уравнения для элемента выводятся в результате исключения обобщенных параметров, а в методе обобщенной потенциальной энергии «подправляются» несоответствия в перемещениях вдоль границ элементов, образовавшиеся в результате использования полей, характеризующихся межэлементной несогласованностью.

В этом разделе изучаются два гибридных метода, основанных на рассмотрении функционала потенциальной энергии. В первом из них (*гибрид I*) поле перемещений внутри элемента выражается в терминах обобщенных перемещений, а поле напряжений на границе описывается независимо в терминах узловых сил. В результате получается матрица податливости элемента. Второй метод (*гибрид II*) основывается на предложенной выше концепции в том смысле, что поле перемещений внутри элемента и граничные напряжения выражаются в терминах обобщенных параметров, а перемещения на границе независимо описываются с помощью узловых перемещений. Это приводит к матрице жесткости элемента.

Для того чтобы оперировать с независимыми полями, необходимо *модифицировать* выражение для потенциальной энергии. Описывая модификацию, используемую в гибридном методе I, рассмотрим лишь *внутренние* элементы, т. е. элементы, стороны которых не лежат на границе конструкции, и исключим из рассмотрения объемные силы и начальные напряжения. Под *границей* элемента понимается совокупность всех сторон элемента (S_n) и считается, что на границе действуют межэлементные усилия \bar{T} . Поэтому, согласно (6.40) и (6.49), имеем модифицированное выражение для потенциальной энергии

$$\Pi_n^* = U - \int_{S_n} \bar{T} \cdot \mathbf{u} dS, \quad (6.54)$$

где \mathbf{u} — граничные смещения, согласующиеся с выбранным полем перемещений внутри элемента Δ . Обобщение известного выражения для потенциальной энергии заключается в том, что \bar{T} запишется в терминах узловых силовых параметров. Поэтому как параметры

перемещения u (и Δ), так и силовые параметры в узлах будут играть роль неизвестных в Π_p^m . В классической формулировке принципа минимума потенциальной энергии в выражении входят лишь параметры перемещения. Для того чтобы выяснить, как описываются

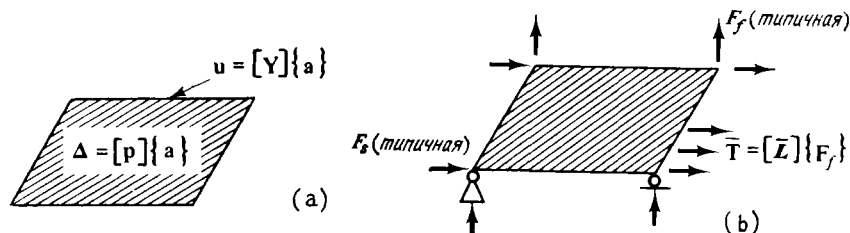


Рис. 6.8. Предполагаемые поля напряжений и перемещений, используемые в первом гибридном методе перемещений. (а) Описание перемещений (внутренние и поверхностные перемещения выражены через одни и те же обобщенные параметры $\{a\}$); (б) описание перемещений (поверхностные силы выражены через силы, заданные в узлах, которые могут свободно смещаться).

поля внутри элемента и на его границе, на рис. 6.8 приведен гипотетический элемент и изображены предполагаемые поля перемещений и напряжений.

Согласно используемой в гл. 5 терминологии, обозначим обобщенные параметры внутреннего поля перемещений через $\{a\}$. Для обычного полиномиального представления имеем

$$\Delta = [p] \{a\}, \quad (5.2a)$$

и используя соотношения между перемещениями и деформациями, приходим к соотношению

$$\epsilon = [C_f] \{a_f\}, \quad (5.6d)$$

где через $\{a_f\}$ обозначены степени свободы, которые остались после того, как в результате выполнения операций дифференцирования в формулах, связывающих перемещения и деформации, были исключены степени свободы $\{a_s\}$, отвечающие движению тела как твердого целого. Кроме того, требуется рассмотреть граничные значения u этого поля. Указанные величины получаются непосредственными вычислениями значений Δ вдоль границы элемента. Имеем

$$u = [Y] \{a\} = [Y_f \ Y_s] \begin{Bmatrix} a_f \\ a_s \end{Bmatrix}, \quad (6.55)$$

где для удобства дальнейших рассуждений выделены степени свободы $\{a_f\}$ и $\{a_s\}$.

Последней существенной частью гибридного метода перемещений является вопрос о записи граничных усилий \bar{T} через узловые силы $\{F_f\}$. Нижним индексом f помечена система узловых сил, в

которую не входят силы, обеспечивающие статически определенное закрепление элемента. Это обусловлено тем, что при отсутствии объемных сил вектор \bar{T} должен представлять систему самоуравновешенных сил. Запишем указанные соотношения в виде

$$\bar{T} = [\bar{L}] \{F_f\}. \quad (6.56)$$

Вектор \bar{T} представляет собой усилия, уравновешенные действием сил со стороны соседних элементов (с соответствующим учетом всех сил, действующих на границах, разделяющих элементы). Следует подчеркнуть, что, вообще говоря, трудно, а иногда и невозможно построить соотношения вида (6.56), которые удовлетворяли бы этим условиям. Более удобная процедура, подробно описанная в п. 6.6.4 и гл. 7, заключается в использовании вместо полей напряжений функции напряжений, а вместо $\{F_f\}$ — значения функции напряжений в узлах. Однако применение узловых сил $\{F_f\}$ объясняется использованием балочных элементов для пояснения различных формулировок методов. При этом силы $\{F_f\}$ представляют собой узловые параметры балочного элемента.

Теперь можно выписать модифицированную потенциальную энергию (6.54) в дискретном виде. Во-первых, заметим, что при записи работы граничных усилий (интеграл по S_n) вклад указанных самоуравновешенных сил, действующих на перемещениях тела как твердого целого, равен нулю. Так как в (6.55) перемещения тела как твердого целого u_s равны $\{Y_s\} \{a_s\}$, при проведении выкладок с u_s оставим лишь произведение $\{Y_s\} \{a_f\}$, обозначив его через u_f . Принимая во внимание, что

$$U = \frac{1}{2} \int_{vol} e [E] e d(vol),$$

подставим в (6.54) выражения для e , u_f и \bar{T} , используя соответственно формулу (5.6d), левую часть (6.55) и (6.56). Тогда

$$\Pi_p^{m_1} = \frac{L \{a_f\}}{2} [H] \{a_f\} - [J] \{F_f\}, \quad (6.54a)$$

где

$$[H] = \left[\int_{vol} [C_f]^T [E] [C_f] d(vol) \right], \quad (6.57)$$

$$[J] = \left[\int_{S_n} [Y_f]^T [\bar{L}] dS \right]. \quad (6.58)$$

Варьируя (6.54a) по $[a_f]$, получим

$$[H] \{a_f\} - [J] \{F_f\} = 0,$$

откуда

$$\{a_f\} = [H]^{-1} [J] \{F_f\}.$$

Подставив выписанное выражение в (6.54a), запишем

$$\Pi_p^{m_1} = - \frac{\lfloor F_f \rfloor}{2} \{f\} \{F_f\}, \quad (6.54b)$$

где выведенная матрица податливости равна

$$\{f\} = \{J\}^T \{H\}^{-1} \{J\}. \quad (6.59)$$

6.5.2. Пример реализации первого гибридного метода перемещений

Проиллюстрируем изложенный подход на примере построения матрицы податливости консольного балочного элемента, изображенного на рис. 6.9. В этом случае $\Delta = w$ и, так как «поверхность» границы

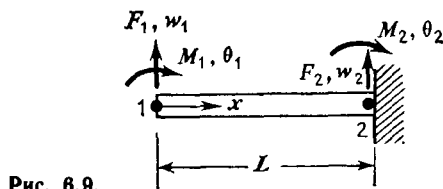


Рис. 6.9.

состоит из дискретных точек, интеграл по границе в (6.54) заменяется конечной суммой. Будем строить обычную матрицу податливости указанного элемента и поэтому для описания w , как и в формуле (5.13) из гл. 5, примем кубичный полином

$$w = x^3 a_1 + x^2 a_2 + x a_3 + a_4 = [p_f p_s] \begin{Bmatrix} a_f \\ a_s \end{Bmatrix},$$

где

$$[p_f] = \begin{bmatrix} x^3 & x^2 \end{bmatrix}, \quad [p_s] = \begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix}, \\ \{a_f\} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}^T, \quad \{a_s\} = \begin{bmatrix} a_3 & a_4 \end{bmatrix}^T.$$

Кроме того,

$$w' = \begin{bmatrix} 3x^2 & 2x & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = -\theta, \\ \varepsilon = w'' = \begin{bmatrix} 6x & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = [C_f] \{a_f\}.$$

Получим граничные значения для этих полей, выписывая выражения для w и w' в точках 1 и 2. Имеем

$$u \equiv \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ L^3 & L^2 & L & 1 \\ -3L^2 & -2L & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = [Y_f Y_s] \begin{Bmatrix} a_f \\ a_s \end{Bmatrix}.$$

В рассматриваемом случае усилия на границе суть узловые силы, т. е. $\bar{\mathbf{T}} = [F_1 \ M_1 \ F_2 \ M_2]^T$. Однако, как отмечалось выше, величины F_1 , M_1 , F_2 , M_2 связаны условиями статического равновесия. В частности, $F_2 = -F_1$ и $M_2 = -F_1 L - M_1$. Поэтому

$$\bar{\mathbf{T}} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -L & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} = [\bar{\mathbf{L}}] \{\mathbf{F}_f\}.$$

Для балочного элемента энергия деформации равна $(EI/2) \int_L (w'')^2 dx$, следовательно, из (6.59) имеем

$$[\mathbf{H}] = [EI] \int_L [\mathbf{C}_f]^T [\mathbf{C}_f] dx.$$

После подстановки величин $[\mathbf{C}_f]$, $[\mathbf{Y}_f]$ и $[\bar{\mathbf{L}}]$ в выписанное выражение для $[\mathbf{H}]$ и соотношение (6.58) получим

$$[\mathbf{H}] = EIL \begin{bmatrix} 12L^3 & 6L \\ 6L & 4 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} 2L^3 & 3L^2 \\ L^2 & 2L \end{bmatrix}.$$

С учетом (6.59) приходим к формуле

$$[\mathbf{f}] = [\mathbf{J}]^T [\mathbf{H}]^{-1} [\mathbf{J}] = \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 2L^2 & 3L \\ 3L & 6 \end{bmatrix},$$

дающей корректное представление матрицы податливости балочного элемента.

6.5.3. Второй гибридный метод перемещений

Второй гибридный метод перемещений [6.6] основан на концепции прямого построения матрицы жесткости элемента. Выберем систему граничных перемещений $\bar{\mathbf{u}}$, характеризующихся межэлементной согласованностью, выраженных в терминах узловых перемещений $\{\Delta\}$. Эта система выбрана независимо от выбора поля Δ , описывающего перемещение внутри элемента в терминах параметров $\{\mathbf{a}\}$ (рис. 6.10). В общем случае имеется рассогласование между рассматриваемыми перемещениями на границах элемента, определяемое величиной $(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u})$, где, как и прежде, \mathbf{u} — граничные перемещения, отвечающие $\{\mathbf{a}\}$.

Вспомним, что, согласно строгой формулировке принципа минимума потенциальной энергии разд. 6.2, граничные условия для перемещений удовлетворяются точно и составляют *главные* граничные

условия. Так как в нашем случае эти условия строго не выполняются, то последние рассматриваются как *естественные* граничные условия. Вспомним, что естественные граничные условия представ-

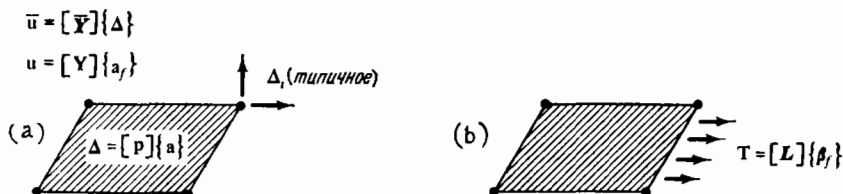


Рис. 6.10. Предполагаемые поля напряжений и перемещений, используемые во втором гибридном методе перемещений. (а) Описание перемещений (внутренние и соответствующие поверхностные смещения $\{u\}$ выражены через обобщенные параметры $\{a_f\}$, задаваемые поверхностные смещения $\{\bar{u}\}$ — через узловые смещения $\{\Delta\}$); (б) описание напряжений (поверхностные силы выражены через обобщенные параметры $\{\beta_f\}$).

ляются непосредственно в функционале энергии при помощи члена, выражающего работу. Выпишем интеграл работы граничных сил T на невязке перемещений $(\bar{u} - u)$, т. е.

$$\int_{S_n} T(\bar{u} - u) dS,$$

и модифицируем соответствующим образом выражение для потенциальной энергии ^{*}. Имеем

$$\Pi_p^{m_2} = U - \int_{S_\sigma} \bar{T} \cdot u dS - \int_{S_n} T(\bar{u} - u) dS. \quad (6.60)$$

В проводимых рассмотрениях граница S_σ состоит из частей границ элементов, аппроксимирующих границу конструкции. Так как здесь рассматриваются лишь вопросы построения внутренних элементов, то в дальнейшем опустим интеграл по S_σ . Таким образом,

^{*} Член $\int_{S_n} T(\bar{u} - u) dS$ можно получить иначе, если предположить, что $\Pi_p^{m_2}$ —

функционал, построенный с целью исключения невязки в перемещениях $(\bar{u} - u)$. Поэтому требуется ввести ограничения вида $(\bar{u} - u) = 0$. С этой целью используем, во-первых, метод множителей Лагранжа из разд. 6.3, согласно которому необходимо ввести дополнительное слагаемое $\int_{S_n} \lambda(\bar{u} - u) dS$ в выражение для потенциальной энергии. Однако, как было замечено ранее, множитель Лагранжа имеет в нашем случае размерность параметра нагружения и является граничным усилием T , соответствующим невязке $(\bar{u} - u)$. Поэтому к основному выражению для потенциальной энергии необходимо добавить член $\int_{S_n} T(\bar{u} - u) dS$.

приходим к следующему модифицированному выражению для потенциальной энергии:

$$\Pi_p^{m*} = U - \int_{S_n} \mathbf{T}(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) dS. \quad (6.60a)$$

Для дискретизации выражения (6.60a) требуется выразить величины \mathbf{e} , \mathbf{u} , $\bar{\mathbf{u}}$ и \mathbf{T} через исходные поля. Представления для \mathbf{e} и $\bar{\mathbf{u}}$ уже имеются в виде (5.6d) и (6.55). Требуется теперь соответствующим образом представить \mathbf{u} и \mathbf{T} .

Необходимо выразить \mathbf{u} в терминах узловых перемещений $\{\Delta\}$. (Это соотношение было уже записано (см. (6.17)) символически в виде $\mathbf{u} = [\bar{\mathbf{U}}] \{\Delta\}$, где верхней чертой отмечены заданные величины.) Кроме того, граничные усилия \mathbf{T} должны быть выражены через обобщенные параметры $\{\beta_f\}$. Здесь для обозначения параметров, не входящих в число параметров, отвечающих движению тела как твердого целого, также используется нижний индекс f , что согласуется с предыдущими рассуждениями относительно определения граничных усилий (см. замечания, приведенные в тексте до выражения (6.56)). Итак, запишем указанные соотношения в виде

$$\mathbf{T} = [\mathbf{L}] \{\beta_f\}. \quad (6.61)$$

Дискретизацию Π_p^{m*} можно выполнить при помощи подстановки в (6.60a) выражений для \mathbf{e} , \mathbf{u} , $\bar{\mathbf{u}}$ и \mathbf{T} соответственно из (5.6d), левой части (6.55), (6.17) и (6.61). В итоге получим

$$\Pi_p^{m*} = \frac{[a_f]}{2} [\mathbf{H}] \{a_f\} - [L] \{\beta_f\} [I] \{\Delta\} + [a_f] [\mathbf{Q}] \{\beta_f\}, \quad (6.60b)$$

где $[\mathbf{H}]$ определяется согласно (6.57), а

$$[\mathbf{I}] = \left[\int_{S_n} [\mathbf{L}]^T [\bar{\mathbf{Y}}] dS \right], \quad (6.62)$$

$$[\mathbf{Q}] = \left[\int_{S_n} [\mathbf{Y}_f]^T [\mathbf{L}] dS \right]. \quad (6.63)$$

Чтобы построить искомую матрицу жесткости, выпишем алгебраические уравнения, варьируя сначала Π_p^{m*} по $\{a_f\}$, а затем по $\{\beta_f\}$. Имеем

$$[\mathbf{H}] \{a_f\} + [\mathbf{Q}] \{\beta_f\} = 0, \quad (6.64a)$$

$$[\mathbf{I}] \{\Delta\} - [\mathbf{Q}]^T \{\beta_f\} = 0. \quad (6.64b)$$

Выражая из этой системы $\{a_f\}$ и $\{\beta_f\}$ через $\{\Delta\}$ и вновь подставляя полученные выражения в (6.60b), получим

$$\Pi_p^{m*} = \frac{[a_f]}{2} [\mathbf{k}] \{\Delta\}, \quad (6.65)$$

где

$$[\mathbf{k}] = [\mathbf{I}]^T [[\mathbf{Q}]]^T [\mathbf{H}]^{-1} [\mathbf{Q}]]^{-1} [\mathbf{I}]. \quad (6.66)$$

6.5.4. Пример реализации второго гибридного метода

Рассмотрим снова балочный элемент, который изображен на рис. 6.11. Величины ε и ψ определяются так же, как и в предыдущем примере, а матрица $[H]$ та же самая. Граничные смещения \bar{u} равны узловым перемещениям:

$$\bar{u} = [w_1 \ \theta_1 \ w_2 \ \theta_2]^T = [\Delta]^T,$$

поэтому очевидно, что $[\bar{Y}] = [I]$ (единичная матрица). Так как в настоящем подходе требуется выразить вектор граничных усилий $T \equiv [F_1 \ M_1 \ F_2 \ M_2]^T$ в терминах обобщенных параметров, то для

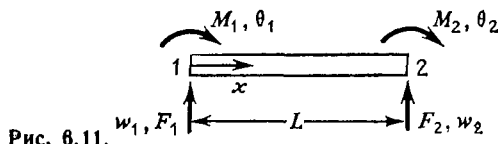


Рис. 6.11.

каждой узловой силы выберем один обобщенный параметр, т. е. $[\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \ \beta_4]^T$. Как и ранее, T — система самоуравновешенных сил, поэтому из условия равновесия следует, что $F_2 = -F_1$ и $M_2 = -F_1 L - M_1$. Откуда $\beta_3 = -\beta_1$ и $\beta_4 = -\beta_1 L - \beta_2$. Следовательно,

$$T \equiv [F_1 \ M_1 \ F_2 \ M_2]^T = [L] \{\beta_f\},$$

где матрица $[L]$ совпадает с матрицей $[\bar{L}]$, построенной для иллюстрации первого гибридного метода, а $\{\beta_f\} = [\beta_1 \ \beta_2]^T$.

Из иллюстративного примера для Π_p^m имеем матрицу $[Y_f]$ для этого случая. Применяя эту матрицу совместно с приведенным выше выражением для $[L]$ и $[\bar{Y}] = [I]$ в формулах (6.62), (6.63), находим

$$[I] = [L]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -L \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad [Q] = \begin{bmatrix} 2L^3 & 3L^2 \\ L^2 & 2L \end{bmatrix}.$$

Подставляя указанные матрицы и полученную ранее матрицу $[H]$ в (6.66), приходим к обычной матрице жесткости элемента.

6.5.5. Обобщенная потенциальная энергия

Подход, основанный на обобщенной потенциальной энергии, можно пояснить, по-иному интерпретируя выражение (6.60а). Рассмотрим вычисление энергии деформации U и поверхностных интегралов как не связанные друг с другом операции. Взятая отдельно, энергия деформаций зависит от перемещений внутри элемента Δ . В этом частном виде метода обобщенной потенциальной энергии [6.6—

6.8], который рассматривается ниже, перемещения внутри элемента записываются в терминах узловых перемещений, т. е. $\Delta = [N] \{\Delta\}$. Однако эти перемещения не удовлетворяют требованиям межэлементной непрерывности. Так, матрица жесткости, которую назовем *основной матрицей жесткости* $[k_0]$, подсчитывается в результате подстановки Δ в U . Поэтому элементы не будут согласованы.

Рассмотрим теперь поверхностный интеграл по S_n в (6.60a). (Здесь опять обсуждаются лишь внутренние элементы, поэтому поверхностный интеграл по S_0 опускается.) Из предыдущих рассуждений следует, что этот интеграл отвечает за реализацию условий непрерывности перемещений вдоль границ элемента. Как и ранее, опишем граничные перемещения \bar{u} независимо от внутренних перемещений таким образом, чтобы они были согласованы при переходе границы элемента, но выражались через узловые перемещения $\{\Delta\}$. Что касается граничных усилий T , то в нашем случае они сначала записываются через производные от перемещений. При этом используются соотношения теории упругости (4.5), соотношения, связывающие напряжения с деформациями и деформации с перемещениями.

Эти перемещения далее аппроксимируются с помощью \bar{u} . В результате получим интеграл, который квадратичен по узловым перемещениям $\{\Delta\}$ и который содержит в качестве матрицы Гессе *корректировочную* матрицу жесткости $[k_c]$. Следовательно, полная матрица жесткости имеет вид

$$[k] = [k_0] + [k_c]. \quad (6.67)$$

Альтернативным к описанному выше подходу, основанному на методе обобщенной потенциальной энергии, является подход [6.9, 6.10], в котором основные матрицы жесткости элементов $[k_0]$ определяются численно и суммируются, образуя глобальную матрицу жесткости без какой-либо корректировки соотношений, отражающих разрывность перемещений для отдельных элементов. Далее в виде ограничений выписываются соотношения, отражающие выполнение в среднем условий межэлементной непрерывности, и эти ограничения при помощи метода множителей Лагранжа добавляются к глобальным уравнениям. Так как этот подход правильнее отнести к процедуре анализа конструкции в целом, возвратимся к нему снова в гл. 7.

Так как идеи построения элементов с помощью гибридных методов и метода обобщенной потенциальной энергии иллюстрировались на простых примерах, то приведенные построения не обладают общностью. Это отчетливо видно из замечаний относительно построения некоторых полей перемещений и граничных усилий (см. текст, следующий за (6.56)). Однако в главах, касающихся расчета плоского напряженного состояния и изгиба конструкций, мы вновь

вернемся к формулировкам этого типа, проводя при этом рассмотрения более общего вида. Исследования еще более общих вопросов представлены в работах [6.5—6.8, 6.11, 6.12].

6.6. Метод минимизации дополнительной энергии

6.6.1. Свойства дополнительной энергии

Принцип минимума дополнительной энергии дает возможность на базе вариационного подхода непосредственно построить соотношения податливости элемента, т. е. выражения для параметров перемещения элемента в терминах силовых параметров. Дополнительная энергия Π_c конструкции равна сумме дополнительной энергии деформации U^* и потенциала граничных сил V^* , соответствующего заданным смещениям, т. е.

$$\Pi_c = U^* + V^*. \quad (6.68)$$

Принцип можно сформулировать следующим образом: *среди всех полей напряжений, удовлетворяющих условиям равновесия внутри тела и равных заданным значениям напряжений на границе тела, поле напряжений, которое удовлетворяет соотношениям между напряжениями и перемещениями и отвечает всем заданным граничным условиям для перемещений, доставляет стационарное значение дополнительной энергии. Таким образом,*

$$\delta \Pi_c = \delta U^* + \delta V^* = 0. \quad (6.69)$$

В линейной теории упругости величина Π_c для состояния равновесия минимальна:

$$\delta^2 \Pi_c = \delta^2 U^* + \delta^2 V^* \geq 0. \quad (6.70)$$

Чтобы убедиться в справедливости высказанного утверждения, можно провести те же рассуждения, что и в разд. 6.4 при доказательстве принципа минимума потенциальной энергии. В нашем случае виртуальные перемещения следует заменить на виртуальное поле напряжений, накладываемое на действительное поле перемещений. Замечая, что граничные условия для напряжений должны удовлетворяться и при выбранном виртуальном поле напряжений, приходим к (6.69), т. е. к соотношению $\delta \Pi_c = 0$, где дополнительная энергия равна

$$\Pi_c = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \sigma [E]^{-1} \sigma d(\text{vol}) - \int_{S_u} \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{u}} dS. \quad (6.68a)$$

Здесь первый интеграл в правой части равенства равен U^* , а второй интеграл равен $-V^*$. Символом S_u помечена поверхность, на которой заданы перемещения $\bar{\mathbf{u}}$, а \mathbf{T} — соответствующие граничные усилия.

6.6.2. Конечно-элементная дискретизация с использованием узловых сил

Запишем теперь Π_c в дискретном виде, чтобы построить конечно-элементное представление. Наиболее простой и известный способ дискретизации — выразить поле напряжений элемента через узловые силы. Это описание можно представить в виде

$$\sigma = [Z] \{F_f\}, \quad (6.71)$$

где $\{F_f\}$ — набор узловых сил, за исключением сил реакции, обеспечивающих статически определимое закрепление элемента. Задание граничных усилий основывается на применении соотношения (6.71). Результат символически запишем в виде, аналогичном (6.56):

$$T = [L] \{F_f\}.$$

Заметим, как и в п. 6.5.1, что в общем случае трудно, а подчас и невозможно выписать выражение для T как функции от узловых усилий $\{F_f\}$. Однако для балочного и стержневого элементов определить указанное преобразование можно.

Подставляя в (6.68а) выражения для σ и T , полученные из (6.71) и (6.56), найдем

$$\Pi_c = \frac{[F_f]}{2} [f] \{F_f\} - [F_f] \{\bar{\Delta}\}, \quad (6.68b)$$

$$[f] = \left[\int_{vol} [Z]^T [E]^{-1} [Z] d(vol) \right] \text{ (матрица податливости элемента)}, \quad (6.72)$$

$$\{\bar{\Delta}\} = \left\{ \int_{S_a} [L]^T \bar{u} dS \right\} \text{ (заданный вектор перемещений элемента)}. \quad (6.73)$$

Как и в случае потенциальной энергии, используя приведенные формулы, можно доказать минимальность величины Π_c .

6.6.3. Пример

Применение изложенных выше идей может быть продемонстрировано на примере построения матрицы податливости консольного балочного элемента, изображенного на рис. 6.12. Основное выражение для дополнительной работы в этом случае имеет вид

$$\Pi_c = \frac{1}{2EI} \int_L (\mathcal{M})^2 dx - [F_1 M_1] \left\{ \begin{matrix} w_1 \\ \theta_1 \end{matrix} \right\}.$$

Заметим, что в качестве *напряжения* здесь выступает изгибающий момент \mathcal{M} , а смещения в узлах w_1 и θ_1 играют роль заданных перемещений; при этом $[L]$ — единичная матрица. Из рисунка видно,

что момент изменяется линейно:

$$\mathcal{M} = xF_1 + M_1 = [x \ 1] \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} = [Z] \{F\}.$$

Поэтому

$$P_c = \frac{[F_1 \ M_1]}{2} [f] \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} - [F_1 \ M_1] \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix},$$

где

$$[f] = \frac{1}{EI} \int_L \begin{Bmatrix} x \\ 1 \end{Bmatrix} [x \ 1] dx = \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 2L^2 & 3L \\ 3L & 6 \end{bmatrix}.$$

Полученные указанным образом матрицы податливости элементов можно либо преобразовать в матрицы жесткости элементов, используя процедуру из разд. 2.6, либо непосредственно использовать при расчетах всей конструкции по методу сил. Когда уравнения податливости элементов выражены через силы, то расчет

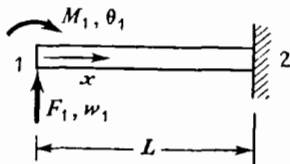


Рис. 6.12.

всей конструкции может проводиться с применением *матричного метода сил*. В этом методе в качестве неизвестных выбираются системы самоуравновешенных сил, причем в эти системы не включаются силы, обеспечивающие статически определенное закрепление конструкции. Как показывается в гл. 7, этот метод расчета всей конструкции вызывает трудности как с точки зрения выбора указанных систем сил, так и выполнения требуемых матричных операций.

6.6.4. Конечно-элементная дискретизация, использующая функцию напряжений

Трудностей, возникающих при применении метода сил, можно в значительной мере избежать, если брать в качестве параметров напряжения или функции напряжений. Так, например, для плоского напряженного состояния выражение дополнительной энергии имеет вид

$$U^* = \frac{1}{2} \int_A [\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}] [E]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} t dA. \quad (6.74)$$

Напомним, что, согласно разд. 4.1, напряжения σ_x , σ_y и τ_{xy} можно выразить через производные от функции Эри Φ в следующем виде (см. (4.4)):

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \Phi_{,yy}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \Phi_{,xx}, \quad \tau_{xy} = \frac{-\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\Phi_{,xy}.$$

Следовательно,

$$U^* = \frac{1}{2} \int_A \left[\Phi_{,yy} \Phi_{,xx} - \Phi_{,xy} \right] [E]^{-1} \begin{Bmatrix} \Phi_{,yy} \\ \Phi_{,xx} \\ -\Phi_{,xy} \end{Bmatrix} t \, dA. \quad (6.74a)$$

Функцию напряжений представим в виде

$$\Phi = [N] \{\Phi\}, \quad (6.75)$$

где $\{\Phi\}$ — вектор параметров функции напряжений в узлах элемента. Обозначим вектор вторых производных через

$$[\Phi_{,yy} \quad \Phi_{,xx} \quad -\Phi_{,xy}]^T = [N''] \{\Phi\}. \quad (6.76)$$

Тогда величина U^* запишется в следующем дискретном виде:

$$U^* = \frac{[\Phi]}{2} [f] \{\Phi\}, \quad (6.74b)$$

где теперь вместо (6.72) матрица податливости равна

$$[f] = \left[\int_A [N']^T [E]^{-1} [N''] t \, dA \right]. \quad (6.72a)$$

Существенные преимущества этой формулировки матрицы податливости элемента определяются следующими двумя обстоятельствами. Во-первых, степени свободы узлов связаны со степенями свободы узлов соседних элементов так же, как и в методе жесткости, поэтому построение объединенной глобальной матрицы податливости можно осуществить аналогично тому, как описано в разд. 3.2 для прямого метода жесткости. Таким образом, предложен *прямой метод податливости* [6.13].

Второе обстоятельство относится к некоторым аспектам двойственности характеристик функций напряжений и перемещений. Однородное дифференциальное уравнение для функции напряжений Эри совпадает с уравнением изгиба пластин для функции прогиба w при нулевых распределенных нагрузках. Поэтому, если в (6.74a) функция напряжений заменяется на w , а $[E]^{-1}$ — на $[E]$, то интеграл оказывается равным энергии деформации изгибаемой тонкой пластины. Следовательно, определение функции напряжений (поля Φ) идентично отысканию поля прогибов (поля w) при изгибе пластин, а соответственные матрицы податливости и жесткости различаются лишь коэффициентами упругости заменой $[E]^{-1}$ на

[Е]. Двойственные функции напряжений могут быть определены и для других ситуаций (например, функции напряжений Саусвелла для изгибаемых пластин двойственны смещениям в плоскости для плоского напряженного состояния). Из этого следует, что многие аспекты построения матрицы жесткости элемента, сформулированные сначала в терминах предполагаемых согласованных полей перемещений, переносятся и на метод сил (податливости). Мы еще вернемся к этому вопросу в последующих главах.

6.7. Гибридный метод допустимых напряжений [6.14—6.15]

6.7.1. Основные положения

Гибридный метод напряжений является подходом к построению матриц жесткости элементов, основанный на обобщении принципа минимума дополнительной энергии. Как и при обсуждении гибридных методов перемещений, ограничимся изложением процедуры построения элемента, окруженного полностью другими элементами. Кроме того, предполагается, что на поверхности элемента и вдоль его границ между узлами силы не действуют. Чтобы получить искомый модифицированный функционал Π_c для нашего случая, необходимо лишь видоизменить интеграл по границе в выражении (6.68a) для Π_c^m .

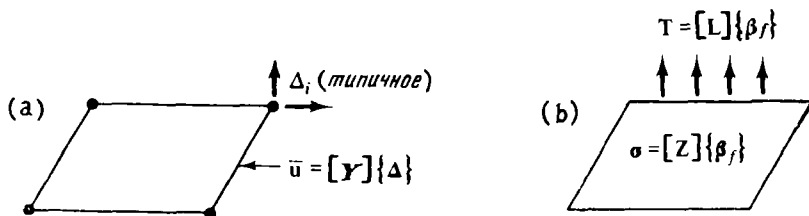


Рис. 6.13. Предполагаемые поля напряжений и перемещений, используемые в гибридном методе напряжений. (а) Описание перемещений (поверхностные перемещения выражены через узловые перемещения $\{\Delta\}$); (б) описание напряжений (внутренние и поверхностные напряжения выражены через обобщенные параметры $\{\beta_f\}$).

Основа гибридного метода напряжений состоит в задании *уравновешенного поля напряжений* σ внутри элемента через обобщенные параметры $\{\beta_f\}$ с одновременным заданием поля перемещений \bar{u} , характеризующегося *межэлементной согласованностью*, через узловые перемещения $\{\Delta\}$. Система граничных усилий T определяется в соответствии с σ . Таким образом, указанная система выражается через $\{\beta_f\}$ (рис. 6.13). Модифицированное выражение для

дополнительной работы имеет вид

$$\Pi_c^m = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \sigma [E]^{-1} \sigma d(\text{vol}) - \int_{S_n} \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{u}} dS. \quad (6.68c)$$

Чтобы представить Π_c^m в дискретном виде, запишем сначала предполагаемое поле напряжений в терминах обобщенных параметров $\{\beta_f\}$:

$$\sigma = [Z] \{\beta_f\}. \quad (6.77)$$

Еще раз заметим, что напряжения описываются параметрами, которые исключают члены, отвечающие движению тела как твердого целого. Указанное обстоятельство обусловлено тем, что σ — уравновешенное поле напряжений. Это можно показать и другим способом. Действительно, заметим, что в том случае, когда напряжения вначале определяются с помощью поля функции напряжения (см. (4.4) и (6.76)), то это поле содержит параметры $\{\beta_s\}$, которые, однако, пропадают после дифференцирования по формулам (4.4).

Усилия на границе элемента \mathbf{T} можно легко выразить в терминах $\{\beta_f\}$, вычисляя вдоль границы величины, входящие в (6.77). Эта процедура входит и во второй гибридный энергетический метод и поэтому из (6.61) имеем $\mathbf{T} = [\mathbf{L}] \{\beta_f\}$. Окончательно заметим еще раз, что независимо задаваемые граничные перемещения $\bar{\mathbf{u}}$ связаны с узловыми перемещениями с помощью соотношений (6.17): $\bar{\mathbf{u}} = [\bar{\mathbf{Y}}] \{\Delta\}$.

Используя выражения (6.77), (6.61) и (6.17) для σ , \mathbf{T} и $\bar{\mathbf{u}}$, запишем (6.68c) в дискретном виде:

$$\Pi_c^m = \frac{1}{2} [\beta_f]^T [H] \{\beta_f\} - [\beta_f]^T [I] \{\Delta\}, \quad (6.68d)$$

$$\text{где} \quad [H] = \left[\int_{\text{vol}} [Z]^T [E]^{-1} [Z] d(\text{vol}) \right] \quad (6.78)$$

и аналогично (6.62)

$$[I] = \left[\int_{S_n} [L]^T [\bar{\mathbf{Y}}] dS \right].$$

Варируя (6.68d) по $\{\beta_f\}$, находим

$$[H] \{\beta_f\} - [I] \{\Delta\} = 0,$$

или

$$\{\beta_f\} = [H]^{-1} [I] \{\Delta\}.$$

Подставляя полученное выражение в (6.68d), окончательно имеем

$$\Pi_c' = -\frac{L\Delta}{2} [k] \{\Delta\},$$

где *)

$$[k] = [I]^T [H]^{-1} [I]. \quad (6.79)$$

6.7.2. Пример

Иллюстрируя этот подход на примере балочного элемента, заметим, что роль «поля напряжений» здесь играет распределение изгибающего момента \mathfrak{M} , а

$$U^* = \frac{1}{2EI} \int_L (\mathfrak{M})^2 dx, \quad [H] = \left[\frac{1}{EI} \int_L [Z]^T [Z] dx \right].$$

Так как изгибающий момент в нашем случае меняется линейно, имеем

$$\mathfrak{M} = [1 \ x] \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{Bmatrix} = [Z] \{\beta_f\}.$$

В соответствии с представленным на рис. 6.14 распределением находим $M_1 = \beta_1$, $-M_2 = \beta_1 + \beta_2 L$, $F_1 = \beta_2$, $F_2 = -\beta_2$. Следовательно,

$$T \equiv [F_1 \ M_1 \ F_2 \ M_2]^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & -L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{Bmatrix} = [L] \{\beta_f\},$$

где $\bar{u} = [u_1 \ \theta_1 \ u_2 \ \theta_2]$ ($[I]$ — единичная матрица).

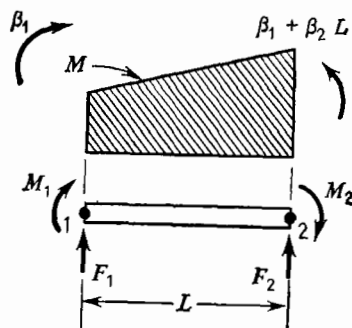


Рис. 6.14.

*) Следует отметить, что ранг матрицы жесткости $[k]$ будет неполным, если число параметров $\{\Delta\}$ превышает число членов $\{\beta_f\}$ более, чем на число степеней свободы, отвечающих движению тела как твердого целого. Формула (6.79) предполагает, что на соотношение размерностей векторов не накладываются ограничения.

Подставляя выписанные соотношения в соответствующее выражение для Π_c^m , получим

$$[H] = \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 6L & 3L^2 \\ 3L^2 & 2L^3 \end{bmatrix}, \quad [I] = [L]^T.$$

Легко проверить, что обычное выражение для матрицы жесткости элемента можно получить, используя приведенные в (6.79) матрицы $[H]$ и $[I]$.

6.8. Энергетический метод Рейсснера и альтернативные функционалы

6.8.1. Основные положения

В гибридных методах, основанных на концепции мультиполей в принципах минимума модифицированной потенциальной и дополнительной энергии, внутри элемента используется одно поле, а на границах элемента — другое независимое поле или два независимых поля. Можно, однако, использовать вариационный принцип, которому внутренне присуще понятие мультиполей. При этом подходе соответствующие поля перемещений и напряжений одновременно задаются для всего элемента.

Применение метода Галеркина из разд. 5.5 к вспомогательным уравнениям упругости, а не к комбинации дифференциальных уравнений (равновесия или совместности) приводит к выражениям с одновременным участием двух полей. Ниже эта же формулировка рассматривается с других позиций, а именно: строится функционал, в который входят два поля, и доказывается, что уравнения Эйлера для этого функционала представляют собой соответствующие вспомогательные уравнения теории упругости. Так как вспомогательные уравнения можно записать различными путями, существует несколько функционалов, в которые входят два поля. Здесь рассматривается функционал Рейсснера (Π_R) [6.16], которому в методе конечных элементов уделяется особое внимание.

Этот функционал можно выписать, исходя из выражения для потенциальной энергии. Исключая снова из рассмотрения начальные деформации и объемные силы, заметим, что по определению

$$U^* + U = \int_{\text{vol}} \sigma \cdot \epsilon d(\text{vol}) \quad (6.80)$$

$$\text{или} \quad U = \int_{\text{vol}} \sigma \cdot \epsilon d(\text{vol}) - U^*, \quad (6.80a)$$

где дополнительная энергия деформации U^* задается первым интегралом, входящим в правую часть выражения (6.68a). Под-

ставляя полученную формулу в выражение (6.40) для Π_R , получим функционал Рейсснера Π_R :

$$\Pi_R = \int_{\text{vol}} \sigma D \Delta d(\text{vol}) - U^* + V, \quad (6.81)$$

где через $D\Delta$ обозначены производные от перемещений в формулах (4.7) для деформаций. Видно, что если независимо выбраны как поле перемещений, так и соответствующее поле напряжений, то в поверхностный интеграл V входят как заданные граничные усилия, так и заданные граничные перемещения, т. е.

$$V = - \int_{S_n} \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{u} dS - \int_{S_u} \mathbf{T} \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) dS, \quad (6.82)$$

где S_u — участок границы, на котором заданы перемещения $\bar{\mathbf{u}}$.

Варьируя выражение (6.81) и интегрируя его по частям, можно показать, что уравнения Эйлера для функционала Π_R представляют собой уравнения равновесия (4.3) и дифференциальные соотношения, связывающие напряжения с перемещениями, т. е. уравнения, получаемые подстановкой соотношений между деформациями и перемещениями (4.7) в уравнения состояния (4.15). Обратное утверждение было доказано в разд. 5.5 методом взвешенных невязок.

Дискретизируя выписанные соотношения, чтобы использовать их при анализе методом конечных элементов, рассмотрим ниже только те поля, которые выражаются в терминах физических степеней свободы. Так, записывая в дискретной форме выражения для σ , ϵ , \mathbf{T} и \mathbf{u} и учитывая (6.71), (5.6с), (6.56) и (6.17), находим, что

$$\Pi_R = [F_f] [\Omega_{12}] \{\Delta\} - \frac{[F_f]}{2} [\Omega_{11}] \{F_f\} - [A] \{\bar{F}\} + [F_f] \{\bar{\Delta}_f\}, \quad (6.81a)$$

где

$$[\Omega_{12}] = \left[\int_{\text{vol}} [\mathbf{Z}]^T [\mathbf{D}] d(\text{vol}) \right] - \left[\int_{S_u} [\mathbf{L}]^T [\mathbf{Y}] dS \right], \quad (6.83a)$$

$$[\Omega_{11}] = \left[\int_{\text{vol}} [\mathbf{Z}]^T [\mathbf{E}]^{-1} [\mathbf{Z}] d(\text{vol}) \right], \quad (6.83b)$$

$$\{\bar{F}\} = \left\{ \int_{S_\sigma} [\mathbf{Y}]^T \cdot \bar{\mathbf{T}} dS \right\}, \quad (6.83c)$$

$$\{\bar{\Delta}_f\} = \left\{ \int_{S_u} [\mathbf{Y}]^T \bar{\mathbf{u}} dS \right\}, \quad (6.83d)$$

а $[\mathbf{Z}]$, $[\mathbf{D}]$, $[\mathbf{L}]$ и $[\mathbf{Y}]$ — соответственно матрицы связи между напряжениями и узловыми силами, деформациями и узловыми пере-

мещениями, граничными усилиями и узловыми силами, граничными перемещениями и узловыми перемещениями.

Варьируя выражение для Π_R в виде (6.81a) как по $\{F_f\}$, так и по $\{\Delta\}$, получим следующую смешанную матрицу связи между силами и перемещениями:

$$\begin{bmatrix} -\Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{12}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_f \\ \Delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_f \\ \bar{F} \end{Bmatrix}. \quad (6.84)$$

Матрица этого же вида была ранее выписана в разд. 2.3, и аналогичное представление встречалось уже в (5.47).

6.8.2. Пример

Для примера рассмотрим еще раз простой изгибаемый элемент, который изображен на рис. 6.15. Применяя указанный подход к элементу, полностью окруженному элементами того же типа,

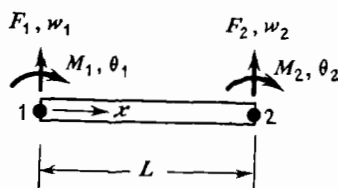


Рис. 6.15.

предполагаем, что выбранное поле перемещений позволяет удовлетворить соответствующим условиям непрерывности на границе элемента. Поэтому в (6.82) разность $u - \bar{u}$ равна нулю в подынтегральном выражении для интеграла по поверхности S_u , откуда следует, что поверхностные интегралы в $[\Omega_{12}]$ и $\{\bar{\Delta}\}_f$ равны нулю для дискретной формы записи функционала (см. (6.83a) и (6.83d)).

Для балочного элемента поле напряжений σ есть момент M , поле перемещений Δ — поперечные перемещения w , а поле деформаций — кривизна w'' . В нашем случае интеграл по поверхности S_σ представляет собой сумму дискретных величин $F_1 w_1 + F_2 w_2 + M_1 \theta_1 + M_2 \theta_2$. Поэтому функционал Рейсснера можно записать как

$$\Pi_R = \int_L M w'' dx - \frac{1}{2} \int_L \frac{M^2}{EI} dx - (F_1 w_1 + F_2 w_2 + M_1 \theta_1 + M_2 \theta_2).$$

Выражение для кривизны было определено ранее. Из (5.15) имеем $w'' = [N''] \{\Delta\}$, где

$$[N''] = \frac{2}{L^2} [3(2\xi - 1) \quad -3(2\xi - 1) \quad -L(3\xi - 2) \quad -L(3\xi - 1)],$$

$$\{\Delta\} = [w_1 \quad w_2 \quad \theta_1 \quad \theta_2]^T \text{ и } \xi = x/L.$$

Поле моментов описывается линейной функцией:

$$\mathfrak{M} = \lfloor (1-\xi) \ \xi \rfloor \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}.$$

Подставляя указанное выражение в Π_R , получим

$$\begin{aligned} \Pi_R = & -\frac{\lfloor M_1 M_2 \rfloor}{2EI} \int_0^L \begin{Bmatrix} 1-\xi \\ \xi \end{Bmatrix} \lfloor (1-\xi) \ \xi \rfloor dx \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} + \\ & + \lfloor M_1 M_2 \rfloor \int_0^L \begin{Bmatrix} (1-\xi) \\ \xi \end{Bmatrix} \lfloor N'' \rfloor dx \{\Delta\} - F_1 \omega_1 - F_2 \omega_2 - M_1 \theta_1 - M_2 \theta_2. \end{aligned}$$

Проводя указанное интегрирование и варьируя Π_R по $M_1, M_2, \omega_1, \omega_2, \theta_1$ и θ_2 , имеем

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{12}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_1 \\ F_2 \\ M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix},$$

где

$$[\Omega_{11}] = -\frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad [\Omega_{12}] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -L & 0 \\ 1 & -1 & 0 & L \end{bmatrix}.$$

Выписанная система уравнений может быть непосредственно использована при построении глобальной системы уравнений, включающих в качестве неизвестных как обе силовые характеристики (M_1, M_2), так и перемещения ($\omega_1, \omega_2, \theta_1, \theta_2$). В этом частном случае можно с помощью уравнения для элемента получить известную матрицу жесткости для этого элемента. С этой целью решаем вначале уравнения, записанные в верхней части полной системы:

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = -[\Omega_{11}]^{-1} [\Omega_{12}] \{\Delta\},$$

и подставляем полученные выражения в уравнения, записанные в нижней части

$$-[\Omega_{12}]^T [\Omega_{11}]^{-1} [\Omega_{12}] \{\Delta\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}.$$

Можно проверить, что $[\mathbf{k}] = -[\Omega_{12}] [\Omega_{11}]^{-1} [\Omega_{12}]$ — матрица жесткости для балочного элемента.

В работах [6.4, 6.8, 6.17—6.19] и др. описаны более общие вариационные принципы, из которых вытекают принципы стационарности потенциальной и дополнительной энергии и функционала Рейсснера. Так, к одной из альтернативных формулировок можно прийти, если выразить из (6.80) величину U^* , подставить ее в (6.68) при одновременном учете граничных условий в виде (6.82). Альтернативные формулировки элементов, вкладываемые в указанные более общие виды функционалов, в той или иной степени использовались в разд. 6.5 и 6.7.

6.9. Некоторые заключительные замечания

В этой главе показано, что существует целый ряд независимых подходов к построению уравнений податливости, жесткости, а также смешанных уравнений для элемента. Эти альтернативные подходы вытекают в основном из принципов стационарности потенциальной и дополнительной энергии и смешанных энергетических принципов. Внутри каждого подхода также существуют различные формулировки, обусловленные предположениями о характере полей в совокупности со смягчением (*релаксацией*) определенных условий для основных типов энергетических принципов.

Хотя метод, основанный на принципе стационарности *потенциальной энергии* (метод виртуальных перемещений), является преобладающим подходом при формулировке соотношений между силами и перемещениями для элемента, он все же не самый удобный. Во многих случаях на практике трудно выбрать поле внутри элемента, которое бы отвечало всем условиям согласованности при переходе через границу, которые вытекают из характера соединения соседних элементов. Примером этому служат изгибаемые элементы, для которых на границе элементов должны быть непрерывны не только поля, но и производные от функций, задающих эти поля (угловые смещения). Не существует полей перемещений простого вида, которые отвечали бы этим требованиям.

По этой причине нередко построение соотношений для элемента пластины при изгибе осуществляется выбором поля перемещений, которое непрерывно внутри элемента, а не при переходе через границу соседних элементов. Принцип минимума потенциальной энергии справедлив при формулировке соотношений для отдельного элемента, однако решение в случае глобального представления не соответствует строгому применению принципа минимума потенциальной энергии из-за разрывности перемещений вдоль границ смежных элементов.

Аналогичные трудности встречаются и при формулировке соотношений для элемента на основе принципа минимума *допол-*

нительной энергии, особенно в том случае, когда поле напряжений внутри элемента описывается полями функций напряжений. В этом случае можно провести параллель с процессом построения соотношений на базе принципа минимума потенциальной энергии, и все возникающие при этом трудности переносятся на соответствующие формулировки для принципа минимума дополнительной энергии.

Альтернативой к формулировкам на базе принципов минимума потенциальной и дополнительной энергии с непрерывными и разрывными полями на границе соседних элементов служат подходы, вытекающие из принципов минимума обобщенной потенциальной и дополнительной энергии, применение гибридных подходов и функционала со многими полями. Метод, опирающийся на *принцип минимума обобщенной потенциальной энергии*, используемый при построении соотношений для отдельного элемента, дает корректирующую матрицу жесткости элемента. В гл. 7 показано, что уравнения, соответствующие этой матрице, можно использовать и в глобальном конечно-элементном представлении, полученном на базе принципа минимума потенциальной энергии с разрывными вдоль границ элементов полями перемещений.

В *гибридных методах* используются не только обобщенные формулировки известных энергетических принципов, но и представляющие характеристики элемента с помощью нескольких полей. Например, *внутри* элемента задается один вид поля перемещений и (или) напряжений, *на границе* элемента задается независимо в другой форме поле напряжений и (или) перемещений. Все поля, за исключением одного, задаются в терминах обобщенных параметров. Последнее поле выражается в терминах физических степеней свободы. Соответствующее энергетическое выражение (модификация потенциальной и дополнительной энергии) записывается вначале в терминах обоих классов параметров и требуется выполнение условий стационарности для набора обобщенных параметров. В результате приходим к системе уравнений для обобщенных параметров, выраженных в терминах физических степеней свободы. Эти соотношения используются для исключения обобщенных параметров из выражения для энергии. Получающееся в результате выражение для энергии содержит в этом случае искомую матрицу жесткости или податливости в обычной форме.

Вариационные принципы с использованием мультиполей приводят непосредственно к смешанному виду соотношений между силами и перемещениями для элемента. Так как уравнения Эйлера для этих функционалов являются уравнениями, лежащими в основе теории упругости, включающими производные низких порядков, требование к непрерывности задаваемых полей ниже, чем при подходах, использующих вариационные принципы.

Приведем, как и в разд. 5.4, сводку преобразований, применя-

емых в предшествующих формулировках элементов. Эти преобразования, которые при описании величин граничных усилий или перемещений помечены черточкой сверху, при формулировке соотношений для элемента считаются известными в каждом конкретном случае. Кроме того, силы и перемещения помечаются нижними индексами f и s , при этом матрицы преобразования соответствующим образом разбиваются на подматрицы, если необходимо различать степени свободы, отвечающие соответственно *неподвижному закреплению* элемента и *незакрепленному* элементу.

Преобразование обобщенных силовых параметров в поле на напряжений

$$\sigma = [Z] \{\beta_f\} \quad (6.77)$$

Преобразование узловых напряжений в поле напряжений

$$\sigma = [Z_i] \{F_f\} \quad (6.71)$$

Преобразование обобщенных силовых параметров в граничные усилия

$$T = [L] \{\beta_f\} \quad (6.61)$$

Преобразование узловых сил в граничные усилия

$$T = [L] \{F_f\} \quad (6.56)$$

Преобразование обобщенных параметров смещения в граничные смещения

$$u = [Y] \{a\} \quad (6.55)$$

Преобразование смещений в граничные смещения

$$u = [Y] \{\Delta\}. \quad (6.17)$$

Литература

- 6.1 Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике — М. Гостехтеориздат, 1957.
- 6.2 Schecter R. The Variational Method in Engineering — New York, N.Y. McGraw Hill Book Co. 1967.
- 6.3 Langhaar H. L. Energy Methods in Applied Mechanics — New York, N.Y. John Wiley & Sons Inc., 1962.
- 6.4 Washizu K. Variational Methods in Elasticity and Plasticity — Oxford Pergamon Press. 1968.
- 6.5 Strang G., Fix G. An Analysis of the Finite Element Method — Englewood Cliffs, N.J. Prentice Hall Inc. 1973. [Имеется перевод Стрэнга Г., Фикса Дж. Теория метода конечных элементов — М. Мир, 1977, 349 с.]
- 6.6 Tong Pin. New Displacement Hybrid Finite Element Model for Solid Continua — Int. J. Num. Meth. Eng. 1970, 2, p. 73—83.
- 6.7 McLay R. W. A Special Variational Principle for the Finite Element Method — AIAA J., Mar. 1969, 7 No. 3, p. 533—534. [Имеется перевод Ракетная техн. и космос — М. Мир, 1969, № 3.]
- 6.8 Kikuchi F., Ando Y. New Variational Functional for the Finite Element Me-

- thod and Its Application to Plate and Shell Problems —Nuc Eng Design, 1972, 21, p 95—113
- 6 9 Greene R E, Jones R E, McLay R W, Strome D R Generalized Variational Principles in the Finite Element Method —AIAA J July 1969, 7, No 7, p 1254—1260 [Имеется перевод Ракетная техн и космон, 1969, № 7]
- 6 10 Harvey J W, Kelsey S Triangular Plate Bending Element with Enforced Compatibility —AIAA J, 9, No 6 June 1971 p 1023—1026 [Имеется перевод Ракетная техн и космон — М Мир, 1971, № 6]
- 6 11 Pian T H H, Tong Pin Basis of Finite Element Methods for Solid Continua — Int J Num Meth Eng, 1969, 1, No 1, p 3—29
- 6 12 Pian T H H Hybrid Models —In Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics, S J Fenves, et al (ed) —New York, N Y Academic Press, 1973
- 6 13 Gallagher R H, Dhalla A Direct Flexibility Finite Element Analysis — Proc of First Int Conf on Struct Mech in Nuclear Reactor Tecnology Berlin, 1971
- 6 14 Pian T H H Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Strees Distributions —AIAA J, 1964 2 p 1333—1336 [Имеется перевод Ракетная техн и космон — М Мир 1964]
- 6 15 Pian T H H Element Stiffness Matrices for Boundary Compatibility and Prescribed Boundary Stresses —Proc of Conf on Matrix Methods in Struct Mechanics, AFFDL TR 66 80, 1965, p 457—477
- 6 16 Reissner E On a Variational Theorem in Elasticity —J Math Phys, 1950, 29, p 90
- 6 17 Fraeys de Veubeke B Displacement and Equilibrium Models in the Finite Element Method, Chapter 9 Stress Analysis, O C Zienkiewicz and G Holister (ed) —London John Wiley, Ltd, 1965
- 6 18 Prager W Variational Principles of Linear Elastostatics for Discontinuous Displacements, Strains, and Stresses —In Recent Progress in Applied Mechanics The F Odqvist Volume —New York John Wiley & Sons, Inc, 1967, p 463—474
- 6 19 Sewell M J On Dual Approximation Principles and Optimization in Continuum Mechanics —Phil Trans, Royal Soc of London, 13 Nov 1969, 265, No 1162, p 319—351

Задачи

- 6 1. Проверьте справедливость принципа виртуальных сил $\delta U^* = -\delta V$, где U^* — дополнительная энергия деформации. При этом виртуальное поле напряжений $\delta\sigma$ должно удовлетворять всем граничным условиям в напряжениях.
- 6 2. Найдите энергетически эквивалентные нагрузки в узлах стержневого элемента для распределения нагрузок, задаваемого формулой $q=q_0(1-(x/L)^2)$.
- 6 3. Постройте согласованную матрицу массы для простого изгибаемого балочного элемента.
- 6 4. Постройте согласованную матрицу массы $[m]$ для треугольного элемента из изотропного материала в случае плоского напряженного состояния (см рис 5 3), где ρ — масса, приходящаяся на единицу объема. При этом геометрические характеристики треугольного элемента обозначаются символом $I_{nm} = \int_A x^n y^m dA$.
- 6 5. Нагрузки, распределение которых показано на рис Р6 5, приложены к грани элемента, перемещение которого задается следующей линейной функцией

$$v = \left(1 - \frac{x}{a}\right) v_1 + \left(\frac{x}{a}\right) v_2$$

Вычислите энергетически эквивалентные силы в точках 1 и 2.

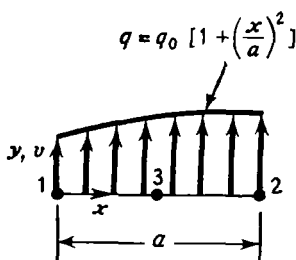


Рис. Р6.5.

6.6. Нагрузки, введенные в задаче 6.5, приложены к грани элемента, перемещение которого задается следующей квадратичной функцией:

$$v = \frac{(2x-a)(x-a)}{a^2} v_1 + 4x \frac{(a-x)}{a^2} v_3 + x \frac{(2x-a)}{a^2} v_2.$$

Вычислите энергетически эквивалентные силы в точках 1, 2 и 3.

6.7. Определите вектор термоупругих сил, действующих в направлении x , для треугольного элемента, изображенного на рис. 5.3, если в элементе распределение

температуры имеет вид $T = \sum_{i=1}^8 N_i T_i$, где N_i — функция формы для элемента, а T_i — значения температуры в узлах.

6.8. Найдите энергетически эквивалентные узловые силы и моменты для балочного элемента длиной a , находящегося под действием поперечной нагрузки q , распределение которой показано в задаче 6.5.

6.9. Найдите энергетически эквивалентный вектор сил для равномерно нагруженного треугольного элемента с шестью узлами, изображенного на рис. Р6.9, поле

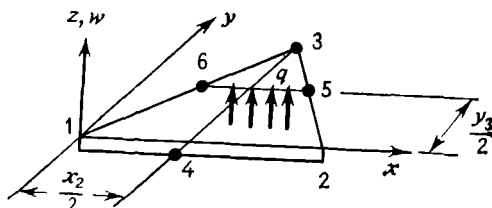


Рис. Р6.9.

перемещений которого записывается в виде

$$w = \frac{1}{(x_2 y_3)^2} \sum_{i=1}^6 N_i w_i,$$

где

$$N_1 = (x_2^2 y_3^2 + 2 y_3^2 x^2 + \frac{1}{2} x_2^2 y^2 - 3 x_2 y_3^2 x + 2 x_2 y_3 x y - \frac{3}{2} x_2^2 y_3 y),$$

$$N_2 = (2 y_3^2 x^2 - x_2 y_3^2 x + \frac{1}{2} x_2^2 y^2 - 2 x_2 y_3 x y + \frac{1}{2} x_2^2 y_3 y),$$

$$N_3 = (2 x_2^2 y^2 - x_2^2 y_3 y),$$

$$N_4 = 4 (x x_2 y_3^2 - y_3^2 x^2 - \frac{1}{2} x_2^2 y_3 y + \frac{1}{4} x_2^2 y^2),$$

$$N_5 = 4 (x_2 y_3 x y - \frac{1}{2} x_2^2 y^2),$$

$$N_6 = 4 (x_2^2 y_3 y - x_2 y_3 x y - \frac{1}{2} x_2^2 y^2).$$

6.10. Укажите член, связывающий F_{z_3} и w_3 в согласованной матрице массы для элемента, описанного в задаче 6.9. Толщина элемента t , масса, приходящаяся на единицу объема, равна ρ .

6.11. Потенциальная энергия скручиваемого элемента задается следующим выражением:

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \int_L \left[EG \left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right)^2 + GJ \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 \right] dx - \int_L \bar{M} \cdot \varphi dx,$$

где J и G — соответственно константы кручения и деформации; G — модуль сдвига, φ — угол закрутки \bar{M} — скручивающий момент, приходящийся на единицу длины элемента. Выпишите уравнение Эйлера для функционала и соответствующие граничные условия.

6.12. Для системы, характеризуемой двумя параметрами (Δ_1, Δ_2) и к которой приложена сила P , потенциальная энергия равна $\Pi_p = (6-3P)\Delta_1^2 - 5(1-P)\Delta_1\Delta_2 + (4-P)\Delta_2^2$. Вычислите значение P , соответствующее нейтральному равновесию.

6.13. Постройте (3×3) -матрицу жесткости для стержневого элемента (рис. Р6.13) с тремя узлами, в котором поле перемещений имеет вид

$$u = \frac{1}{L^2} [(2x-L)(x-L)u_1 + 4(L-x)xu_2 + x(2x-L)u_3].$$

Сведите эту матрицу к обычной (2×2) -матрице жесткости стержневого элемента.

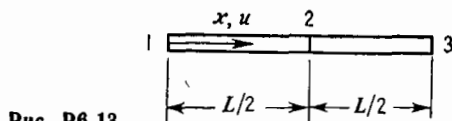


Рис. Р6.13.

6.14. Приблизительно найдите матрицу жесткости для стержневого элемента, изображенного на рис. Р6.14, используя линейное поле перемещений

$$u = (1-x/L)u_1 + (x/L)u_2$$

и принцип минимума потенциальной энергии. Конструктивный элемент имеет постоянную ширину, равную b .

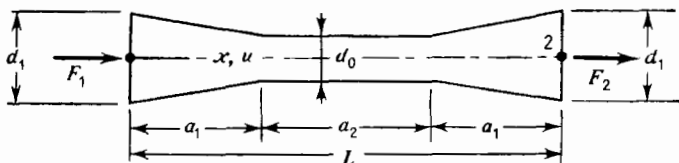


Рис. Р6.14.

6.15. Выпишите матрицу жесткости прямоугольного элемента для плоского напряженного состояния, введенного в задаче 5.2, используя приведенное там же поле перемещений и принцип минимума потенциальной энергии. Сравните полученные результаты с результатами, приведенными на рис. 9.13.

6.16. Постройте матрицу податливости треугольного элемента для плоского напряженного состояния (см. рис. 5.3), используя гибридный метод перемещений. Наложите условия закрепления $u_1 = v_1 = v_2 = 0$. Сравните полученную матрицу с матрицей из задачи 2.3.

6.17. Сформулируйте точную матрицу податливости для суживающегося балочного элемента, изображенного на рис. Р6.17, используя принцип минимума до-

полнительной работы. Обратите матрицу податливости и получите соответствующую матрицу жесткости.

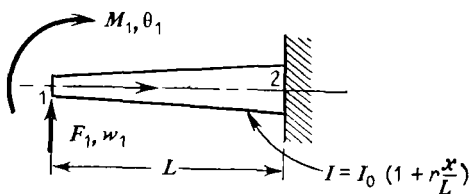


Рис. Р6.17.

6.18. Постройте матрицу податливости трехузлового треугольного элемента для плоского напряженного состояния, используя принцип минимума дополнительной работы. Используйте условия закрепления $u_2=v_2=v_3=0$ (см. рис. 5.3). Сравните результат с матрицей податливости из задачи 2.4.

6.19. Пользуясь принципом минимума дополнительной работы, постройте матрицу податливости для изгибаемого криволинейного элемента, изображенного на рис. Р6.19. Сравните с матрицей, приведенной в задаче 2.6. (Крепление в точке 2.)

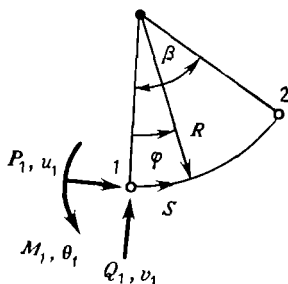


Рис. Р6.19.

6.20. При помощи гибридного метода напряжений постройте матрицу жесткости треугольного элемента, находящегося в плоском напряженном состоянии (рис. 5.3), используя для этого постоянное поле напряжений и линейное распределение перемещений на границах. Сравните результат с рис. 5.4.

6.21. Выпишите функционал Рейсснера в дискретном виде, используя значения функции напряжений Эри как параметры напряжений, а также компоненты перемещений u и v . Обсудите выбор вида функций формы для этих полей в случае четырехугольного элемента с узлами в вершинах четырехугольника.

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ ГЛОБАЛЬНОГО АНАЛИЗА КОНСТРУКЦИЙ

Применение вариационных принципов при формулировке соотношений для элемента позволяет, как показано в гл. 6, построить соотношения податливости, жесткости и смешанные соотношения. С помощью процедур из гл. 3 полученные таким образом соотношения жесткости можно непосредственно использовать для построения уравнений, описывающих поведение всей конструкции. Таким образом, может показаться, что вариационные принципы не потребуются в дальнейшем, кроме как для построения соотношений, описывающих отдельный элемент. В действительности же вариационные принципы чрезвычайно полезны и в некоторых вопросах глобального анализа конструкций.

Прежде всего, вариационные принципы позволяют предложить различные подходы к построению глобальных уравнений. При глобальном анализе конструкций роль вариационных принципов во многом заключается в том, что они позволяют с другой точки зрения взглянуть на алгебраические операции, обусловленные различными подходами. Специальным операциям глобального анализа можно также дать вариационную трактовку; вариационный подход особенно важен при учете ограничений по методу множителей Лагранжа. Кроме того, на вариационных принципах основаны методы доказательства сходимости, а некоторые из этих принципов позволяют даже установить характер сходимости.

Далее подробно исследуется метод, основанный на принципе минимума потенциальной энергии, и рассматривается метод, базирующийся на принципе минимума дополнительной работы. Смешанные методы не рассматриваются, так как для них процедуры построения глобальных уравнений аналогичны процедурам, основанным на обычных вариационных принципах. Для этих методов не установлены свойства сходимости, которые позволили бы определить верхнюю или нижнюю границы для точного решения.

7.1. Принцип минимума потенциальной энергии

Чтобы объяснить, как применяют метод, основанный на принципе минимума потенциальной энергии, для глобального анализа конструкции, опять напомним, что энергия деформации — скалярная величина. Поэтому энергия деформации U для всей конструкции, состоящей из p элементов, равна сумме p слагаемых, представляющих энергию деформации отдельных элементов, т. е.

$$U = \sum_{i=1}^p U^i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p [\Delta^i]^T [k^i] \{\Delta^i\}, \quad (7.1)$$

где $[\Delta^i]$ и $[k^i]$ — соответственно вектор узловых перемещений и матрица жесткости i -го элемента. Чтобы использовать это обстоятельство при построении глобальных алгебраических уравнений, введем следующие массивы:

$\{\Delta^e\} = [\Delta^1 \Delta^2 \dots \Delta^p]^T$ — вектор, содержащий все наборы степеней свободы; определен ранее в (3.12). (7.2)

$[k^e]$ — *несвязанная глобальная матрица жесткости*. Эта матрица блочно-диагональная, каждый блок которой — матрица жесткости элемента. Все матрицы жесткости элементов включены в этот массив. Матрица $[k^e]$ была введена в разд. 3.3 согласно формуле (3.13).

С учетом этих обобщений выражение (7.1) можно записать в виде

$$U = \frac{1}{2} [\Delta^e]^T [K] \{\Delta^e\}. \quad (7.3)$$

Теперь необходимо учесть, что элементы соединены. С этой целью обратимся опять к содержанию разд. 3.3 и уравнения (3.14), т. е. $\{\Delta^e\} = [A] \{\Delta\}$. Здесь $\{\Delta\}$ включает все *глобальные перемещения в узлах*, а матрица $[A]$, как отмечено ранее, — *глобальная матрица связности*. Применяя ее к U в виде классического преобразования, получим

$$U = ([\Delta]/2)[K] \{\Delta\}, \quad (7.4)$$

где

$$[K] = [A]^T [k^e] [A]. \quad (7.5)$$

Матрица $[K]$ полностью совпадает с глобальной матрицей жесткости, построенной в разд. 3.3. Там же приводится и численный пример, иллюстрирующий изложенную выше процедуру.

В разд. 3.3 утверждалось, что матрицы жесткости элементов, включающие $[k^e]$, не должны содержать степени свободы, отвечающие движению тела как твердого целого. Это можно объяснить теперь с энергетической точки зрения следующим образом. Матрица $[k^i]$ для каждого элемента строится в соответствии с определением энергии деформации. Поэтому, как указывалось в разд. 2.4, энергия деформации элемента полностью определяется

матрицей жесткости, записанной в терминах степеней свободы, из числа которых исключены степени свободы, отвечающие неподвижному статически определимому закреплению элемента. Более того, видно, что преобразование, задаваемое правой частью соотношения (7.5), «освобождает» отдельный элемент от соответствующего закрепления.

Вернемся к рассмотрению общей теории представления потенциальной энергии всей конструкции. Построение потенциальной энергии завершается заданием потенциала сил V . Простейшая ситуация возникает тогда, когда на каждую степень свободы приходится сосредоточенная нагрузка $\{P\}$. В этом случае

$$V = - \int \Delta \{P\}. \quad (7.6)$$

Если имеются распределенные нагрузки, то произведение, представленное правой частью выражения (7.6), получается после интегрирования произведения векторов распределенной нагрузки и соответствующих перемещений. Последние задаются путем вычисления поля перемещений связанных элементов на рассматриваемом участке границы. Как показано в гл. 6, эти интегралы определяются отдельно для каждого из элементов и результирующие произведения векторов суммируются, что и приводит к глобальному произведению векторных величин в виде (7.6).

В разд. 6.4 показано, что потенциальная энергия Π_p выражается в виде

$$\Pi_p = U + V, \quad (7.7)$$

и после подстановки выражений для U и V из (7.4) и (7.6) имеем

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \int \Delta \{K\} \Delta - \int \Delta \{P\}. \quad (7.8)$$

Применяя к этому выражению необходимое условие минимума, т. е.

$$\{\partial \Pi_p / \partial \Delta\} = 0, \quad (7.9)$$

получим

$$\{K\} \Delta = \{P\}. \quad (7.10)$$

Следует отметить одно важное методологическое различие между изложенной выше методикой и прямым методом жесткости. Прямой метод жесткости позволяет получить каждое уравнение, непосредственно рассматривая равновесие узловых сил для каждой степени свободы. В подходе, основанном на принципе минимума потенциальной энергии, те же уравнения получаются в результате сложения энергий каждого элемента с учетом ключевой матрицы, позволяющей связать локальные и глобальные степени свободы, — матрицы $[A]$. Последняя методика особенно ценна в ситуациях, когда силовые параметры, соответствующие определенным типам степеней свободы, не имеют ясно выраженного физического смысла

(например, для степеней свободы в виде производных высших порядков от перемещений).

В начале гл. 6 отмечалось, что многие положения конечно-элементного анализа можно трактовать лишь на основе энергетических концепций. Для метода, основанного на использовании потенциальной энергии, это значит, что энергии деформации отдельных элементов суммируются согласно (7.1), а потенциал приложенных нагрузок выписывается непосредственно по заданным силам. Процедура построения глобальной матрицы жесткости в этом случае совпадает с процедурой построения матрицы в прямом методе жесткости. Однако здесь нет необходимости вводить такие понятия, как силы в узлах элемента, потенциал этих сил ($-\{F^e\}\{\Delta^e\}$) и операции, связанные с построением соотношений жесткости путем непосредственного рассмотрения условий равновесия в узлах для каждой степени свободы. Аналогичным образом с помощью энергетических методов можно построить глобальные конечно-элементные соотношения для всех описанных в гл. 6 классических, смешанных и гибридных принципов.

Кроме того, на вычислительной стадии конечно-элементного анализа можно ввести процедуру [7.1], учитывающую, что потенциальная энергия на решении достигает минимального значения. Из соотношения (7.8) видно, что P_p — квадратичная функция переменных $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, и условие, что решение отвечает равновесию системы, совпадает с условием минимума функционала P_p . Существует много надежных алгоритмов нахождения набора параметров, доставляющих минимум квадратичной функции от этих параметров. Так как описание математических алгоритмов не входит в задачу этой книги, обзор указанных алгоритмов не приводится. Читателю рекомендуется обратиться к работам [7.1] и [7.2]. Отметим, однако, одну особенность данного подхода. В действительности можно построить глобальные кинематические матрицы, объединяющие кинематические матрицы элементов, на основе поэлементного учета матриц, т. е. в виде

$$\{\Delta^i\} = [A^i]\{\bar{\Delta}^i\}, \quad (7.11)$$

где величина $\{\bar{\Delta}^i\}$ введена для обозначения вектора *внешних* степеней свободы для i -го элемента. Тогда выражение (7.1) примет вид

$$U = 1/2 \sum_{i=1}^p \{ \bar{\Delta}^i \}^T [A^i]^T [k^i] [A^i] \{\bar{\Delta}^i\}. \quad (7.12)$$

Используя это представление, можно вычислить скалярную величину U , не выписывая глобальных матриц $[K]$ и $[A]$. Это делается для того, чтобы исключить операции с нулевыми матрицами, обусловленные соотношением (7.5).

7.2. Решение, полученное на основе принципа минимума потенциальной энергии,— нижняя граница решения

Численное решение, удовлетворяющее всем условиям минимума потенциальной энергии, называется *нижним граничным* решением, так как найденные численно значения энергии деформации и коэффициентов, стоящих на главной диагонали матрицы податливости, не превосходят значений для «точного» решения (т. е. получаемого при бесконечном числе элементов).

Высказанное утверждение можно легко проиллюстрировать, рассмотрев коэффициент податливости f_{ii} , стоящий на главной диагонали матрицы податливости. При возрастании величины силы P_i от нуля до текущего значения (при отсутствии других сил) производится работа $P_i \Delta_i / 2$, равная внутренней энергии деформации U . Потенциал приложенных сил есть $-P_i \Delta_i$, поэтому точное значение потенциальной энергии равно

$$\Pi_{p_{\text{exact}}} = U + V = \frac{P_i \Delta_i}{2} - P_i \Delta_i = -\frac{P_i \Delta_i}{2} = -\frac{P_i^2 f_{ii \text{ exact}}}{2}. \quad (7.13)$$

Приближенное значение потенциальной энергии для той же силы равно

$$\Pi_{p_{\text{approx}}} = \frac{-P_i^2 f_{ii \text{ approx}}}{2}. \quad (7.14)$$

Приближенное значение Π_p лежит правее, чем точное значение, так как точное значение есть минимум. Замечая, что $\Pi_{p_{\text{exact}}}$ — отрицательная величина, из сравнения (7.13) и (7.14) находим, что значение $f_{ii \text{ approx}}$ должно быть меньше значения $f_{ii \text{ exact}}$, а именно

$$f_{ii \text{ exact}} \geq f_{ii \text{ approx}}, \quad (7.15)$$

откуда следует, что решение, полученное на основе принципа минимума потенциальной энергии, дает *нижнюю границу* для коэффициента податливости, стоящего на главной диагонали.

Чтобы проиллюстрировать высказанные выше утверждения, рассмотрим вначале конструкцию, составленную из двух стержней (см. рис. 7.1). В этом случае потенциальная энергия равна

$$\Pi_p = \frac{3}{4} (AE/L) u_2^2 - P_2 u_2.$$

На рис. 7.2 изображена величина Π_p в зависимости от значений, принимаемых u_2 . Если, например, оценим $u_2 = \frac{1}{2} P_2 L / AE$, то

$$\Pi_p = -\frac{5}{16} (P_2^2 L / AE),$$

в то время как для $u_2 = P_2 L / AE$ получим

$$\Pi_p = -\frac{1}{4} (P_2^2 L / AE).$$

Правильное решение равно, конечно, $\frac{2}{3}(P_2 L / AE)$, для которого $\Pi_p = -\frac{1}{3}(P_2^2 L / AE)$.

Если требуется описать поведение потенциальной энергии в более общих случаях, например когда рассматривается большое число степеней свободы, то необходимо ввести по одной ортогональной

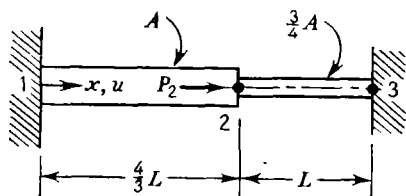


Рис. 7.1.

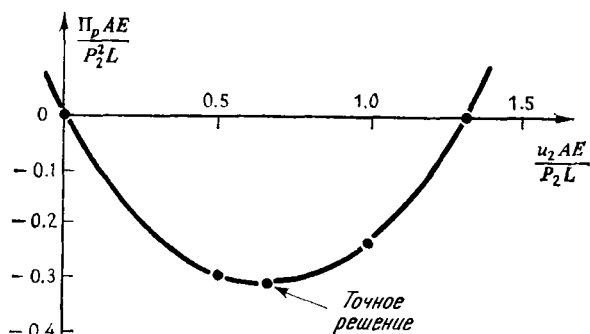


Рис. 7.2.

оси для каждой степени свободы и дополнительную ось для Π_p . Невозможно изобразить указанную ситуацию для более чем двух степеней свободы, однако указанные геометрические свойства используются в подходе, кратко описанном в конце разд. 7.1.

$$A = \left(1 - \frac{x}{L}\right) A_1 + \frac{x}{L} A_2$$

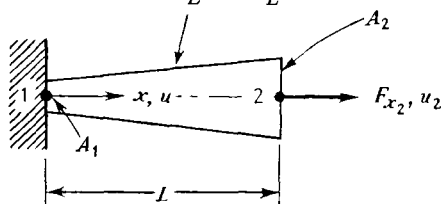


Рис. 7.3.

Чтобы показать важность теоремы о нижней границе при выборе полных перемещений для отдельных элементов, рассмотрим сужающийся стержневой элемент, изображенный на рис. 7.3. «Точное» поле и в этом случае есть логарифмическая функция, однако в разд. 6.4

при построении соответствующих коэффициентов жесткости использовалось линейное поле, применимое для элементов постоянного поперечного сечения, т. е.

$$A = \left(1 - \frac{x}{L}\right) A_1 + \frac{x}{L} A_2.$$

Рассмотрим случай, когда площадь поперечного сечения на правом конце элемента в два раза больше площади сечения на левом конце. Если левый конец стержня неподвижен, то в точном решении смещение u_2 , соответствующее единичному значению F_2 , равно

$$u_2 = \frac{L}{(A_2 - A_1)E} \ln \left(\frac{A_2}{A_1} \right) = 0.69315 \frac{L}{A_1 E}.$$

С другой стороны, приближенное решение равно

$$u_2 = \frac{2L}{(A_1 + A_2)E} = 0.66667 \frac{L}{A_1 E}.$$

Таким образом, приближенное решение примерно на 4% меньше точного решения. Образуя конечно-элементные представления стержня

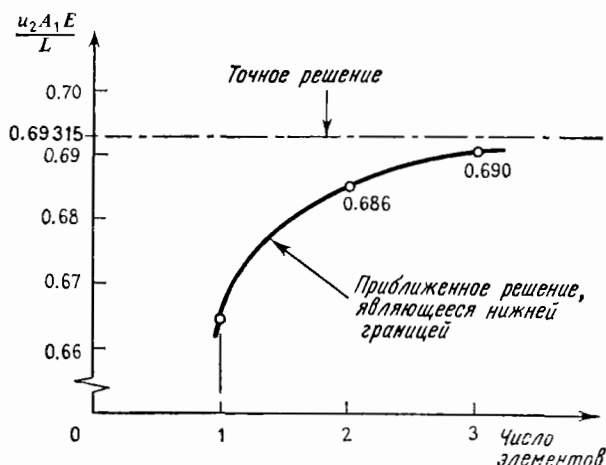


Рис. 7.4.

с различным числом конечных элементов, получим сходимость к точному решению, как показано на рис. 7.4.

7.3. Учет ограничений методом множителей Лагранжа

Как показано в разд. 6.2, метод множителей Лагранжа является подходом, позволяющим учесть ограничения (связи) в рамках классических представлений вариационного исчисления. Применим

этот метод к системам со многими степенями свободы. В этой форме указанный метод является альтернативой к описанному в п. 3.5.2 методу преобразований.

Согласно концепции метода множителей Лагранжа, экстремум функционала при ограничениях (связях) может быть найден, если умножить каждое ограничение на константу (λ_i — множитель Лагранжа), прибавить полученные выражения к исходному функционалу и выполнить варьирование по каждой степени свободы и каждому множителю. Как и ранее (см. (3.28)), для r связей и n степеней свободы система в общем виде записывается следующим образом:

$$[G]_{r \times n} \{\Delta\}_{n \times 1} = \{s\}_{r \times 1}. \quad (7.16)$$

При этом r величин λ_i обозначим через

$$[\lambda] = [\lambda_1 \dots \lambda_r]. \quad (7.17)$$

Теперь, согласно принятой выше методике, построим *вспомогательный функционал* Π_p^a :

$$\Pi_p^a = \frac{[\Delta]}{2} [K] \{\Delta\} - [\Delta] \{P\} + [\lambda] [G] \{\Delta\} - [\lambda] \{s\}. \quad (7.18)$$

Варьируя по каждой Δ_i и λ_i , получим следующую систему уравнений:

$$\begin{bmatrix} K & G^T \\ G & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ s \end{Bmatrix}. \quad (7.19)$$

Заметим, что в нижней части матричного соотношения записана система ограничений. Эти уравнения можно решить непосредственно. Матрица, определяющая эту систему, *положительно полуопределена*. Поэтому, выбирая алгоритм решения, нужно быть осторожным. В предположении, что матрица $[K]$ неособая, из решения верхней части уравнений получаем

$$\{\Delta\} = [K]^{-1} \{P\} - [K]^{-1} [G]^T \{\lambda\}, \quad (7.20)$$

поэтому из нижней части находим

$$\{\lambda\} = ([G] [K]^{-1} [G]^T)^{-1} ([G] [K]^{-1} \{P\} - \{s\}), \quad (7.21)$$

откуда, подставляя полученное выражение обратно в (7.20), находим $\{\Delta\}$.

Следует отметить, что (7.19) отвечает *формулировке смешанного типа*. (Ср. с (2.3).) Это можно понять, вспоминая, что согласование размерностей в расширенном функционале приводит к тому, что множители Лагранжа имеют размерность силовых параметров. Ввиду положительной полуопределенности соотношений (7.19) не удастся доказать в общем случае, что найденное таким образом решение, основанное на принципе минимума потенциальной энергии, дает нижние границы для рассматриваемых характеристик.

Следует также заметить, что в методе преобразований из п. 3.5.2 матрица преобразований $[\Gamma_c]$ вначале используется в функционале для потенциальной энергии, а затем преобразованная величина Π_p варьируется по оставшимся степеням свободы. Это иллюстрируется на рис. 7.5, где изображена показанная ранее на рис. 6.4 по-

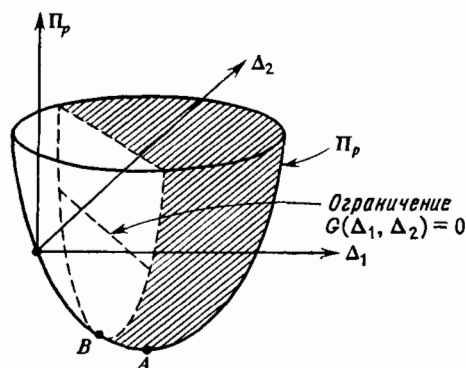


Рис. 7.5. Поверхность Π_p , задающая потенциальную энергию двустепенной системы, при наличии ограничения $G(\Delta_1, \Delta_2)=0$.

верхность, соответствующая потенциальной энергии системы с двумя степенями свободы (Δ_1 и Δ_2). В данном случае имеется линейная связь $G(\Delta_1, \Delta_2)=0$. Эта связь определяет плоскость, перпендикулярную к плоскости Δ_1, Δ_2 и отрезающую участок поверхности, изображающей энергию, на котором находится точка минимума A для предыдущего случая. Теперь минимум достигается в точке B , находящейся на кривой, полученной в результате пересечения поверхности плоскостью.

Метод преобразований уменьшает число входящих в систему уравнений, а метод множителей Лагранжа увеличивает. Однако следует иметь в виду, что метод преобразований требует значительного числа матричных операций.

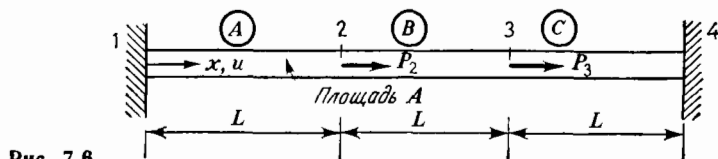


Рис. 7.6.

Чтобы проиллюстрировать метод множителей Лагранжа, рассмотрим изображенную на рис. 7.6 систему, состоящую из стержневых элементов, при ограничениях $u_2 - u_3 = 0$. Согласно методу

множителей Лагранжа, имеем систему уравнений ($k_0 = AE/L$)

$$\begin{bmatrix} 2k_0 & -k_0 & 1 \\ -k_0 & 2k_0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_2 \\ P_3 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Решая эти уравнения путем обращения матрицы, получим

$$\frac{1}{2k_0} \begin{bmatrix} 1 & 1 & k_0 \\ 1 & 1 & -k_0 \\ k_0 & -k_0 & -3(k_0)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_2 \\ P_3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \lambda \end{Bmatrix}.$$

Условие $u_2 = u_3$ предполагает наличие жесткого элемента между точками 2 и 3, поэтому упруго деформируются лишь звенья *A* и *C*. Таким образом, как следует из анализа решения, смещение точки 2, вызванное действием силы P_2 , равно $P_2/2k_0$. Это же значение для смещения получается, если действует лишь сила P_3 . Множитель Лагранжа $\lambda = 1/2(P_2 + P_3)$ — силовой параметр; в этом случае он соответствует силе, передаваемой через жесткое звено. Заметим, что связи наложены на закрепленную конструкцию. Поэтому здесь может быть применена процедура (7.20), (7.21), в которой обращается базисная матрица жесткости.

Условия закрепления $\Delta_i = 0$, являющиеся одновременно ограничениями, можно также учесть с помощью метода множителей Лагранжа. Обычно (см. разд. 3.2) это осуществляют путем непосредственного вычеркивания из матрицы жесткости столбцов, отвечающих этим условиям, и исключением из матрицы соответствующих строк. Однако в подходе, использующем множители Лагранжа, глобальную матрицу жесткости можно оставить без изменений,

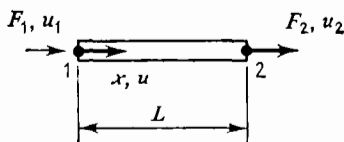


Рис. 7.7.

если к выражению для потенциальной энергии добавить умноженные на множители Лагранжа члены, соответствующие каждому условию закрепления. Эту процедуру можно проиллюстрировать на примере стержневого элемента, изображенного на рис. 7.7. Элемент закреплен на левом конце так, чтобы $u_1 = 0$. Система алгебраических уравнений, отвечающая методу множителей Лагранжа, в

этом случае имеет вид

$$\begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} & 1 \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Если поменять местами первый и третий столбцы выписанной вспомогательной матрицы жесткости, то придем к легко разрешимой системе уравнений, откуда получим

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & L/AE & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda \\ u_2 \\ u_1 \end{Bmatrix},$$

откуда в свою очередь $u_2 = F_2 L / AE$, $u_1 = 0$ и $\lambda = F_1 + F_2$. В этой задаче множитель Лагранжа равен сумме сил, действующих в направлении оси x . При этом ограничения накладываются на незакрепленную конструкцию, что приводит к вырожденности основной матрицы жесткости. Следовательно, процедуру, представленную соотношениями (7.20) и (7.21), здесь применить нельзя.

7.4. Метод обобщенной потенциальной энергии

В гл. 6 изучался ряд подходов, альтернативных к традиционным и основанных на принципах минимума потенциальной и дополнительной энергии. Причем альтернативные подходы характеризовались смягчением условий непрерывности полей между элементами. Изложенные процедуры позволяли сформулировать для элемента самосогласованные соотношения, которые стыкуются с соотношениями соседних элементов, не требуя введения модификации в процедуру глобального анализа. Ниже описывается другой класс процедур, в которых условия на межэлементную непрерывность полей смягчены, но для реализации которых требуется выполнить специальные операции с глобальными уравнениями (и, в частности, наложить некоторые ограничения на глобальные уравнения жесткости).

В излагаемом подходе предполагается, что пробные функции для элемента записываются в терминах степеней свободы в узлах соединений, т. е. $\Delta = [N] \{\Delta\}$. Считаем также, что степени свободы $\{\Delta\}$ связываются с соответствующими степенями свободы соседних элементов, а пробные функции не полностью совместимы на границах, разделяющих элементы. Предположим, к примеру, что смещения u вдоль стороны 1—2 изображенных на рис. 7.8 элементов A

и B описываются функциями

$$u_{1-2}^A = N_1^A u_1 + N_2^A u_2 + N_3^A u_3 + N_4^A u_4, \quad (7.22a)$$

$$u_{1-2}^B = N_1^B u_1 + N_2^B u_2 + N_5^B u_5 + N_6^B u_6, \quad (7.22b)$$

где N_1^A, \dots, N_6^B — квадратичные функции от y (вообще говоря, указанные функции зависят от x и y , однако здесь они вычисляются вдоль линии, на которой x не меняется). Ни для элемента A , ни для

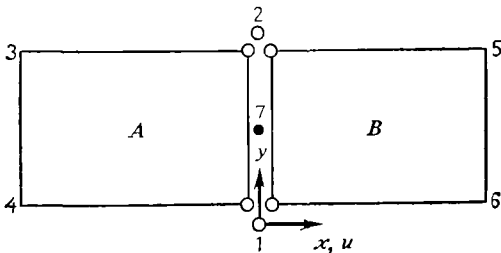


Рис. 7.8.

элемента B перемещение не определяется однозначно заданием перемещений u_1 и u_2 в конечных точках. Величины u_{1-2}^A и u_{1-2}^B на границе 1—2 различны; следовательно, перемещения терпят разрыв и существует невязка $u_{1-2}^A - u_{1-2}^B$. Однако межэлементная непрерывность может быть восстановлена при помощи задания условия

$$\int_0^{y_2} (u_{1-2}^A - u_{1-2}^B) dy = 0, \quad (7.23)$$

левая часть которого с учетом (7.22) преобразуется к виду

$$\int_0^{y_2} [(N_1^A - N_1^B) u_1 + (N_2^A - N_2^B) u_2 + N_3^A u_3 + N_4^A u_4 - N_5^B u_5 - N_6^B u_6] dy. \quad (7.24)$$

После интегрирования получим линейное алгебраическое уравнение вида

$$G_{11} u_1 + G_{12} u_2 + G_{13} u_3 + G_{14} u_4 + G_{15} u_5 + G_{16} u_6 = 0. \quad (7.25)$$

Используя методы множителей Лагранжа, можно учесть уравнение (7.25) в процессе решения. В рассматриваемом примере для каждой компоненты смещения на каждой из границ элемента возникает по одному такому соотношению.

В данном случае множители Лагранжа представляют среднее значение внутренних сил на линиях, вдоль которых устраняются разрывы полей перемещений. Более того, глобальные уравнения имеют вид уравнений (7.19), которые представляют собой соотношения между силами и перемещениями в смешанной формулировке (см. уравнение (2.3)). Таким образом, смешанные формулировки

можно интерпретировать как результат применения традиционных энергетических методов со «смягченными» требованиями непрерывности.

Если разрыв полей перемещений вдоль каждой из границ, разделяющих соседние элементы, более высокого порядка, то на каждой такой границе требуется ввести дополнительное уравнение-ограничение. Один из способов учета этих ограничений состоит в требовании, чтобы невязки из-за разрывов вдоль границы равнялись нулю. Для этого выпишем произведение функции, задающей ограничения, на множитель Лагранжа $\lambda(u_{1-2}^A - u_{1-2}^B) = 0$, где λ — в нашем случае непрерывная функция координаты, меняющейся вдоль границы. Затем прибавим к выражению для потенциальной энергии член $\int \lambda(u_{1-2}^A - u_{1-2}^B) dy$. Чтобы на основе выписанного функционала системы получить алгебраические уравнения, разложим λ в степенной ряд $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 y + \lambda_2 y^2 + \dots$, выбирая столько членов, сколько имеется условий, необходимых для однозначного определения перемещения вдоль стороны. Поэтому имеем

$$\int \lambda(u_{1-2}^A - u_{1-2}^B) dy = \lambda_0 \int (u_{1-2}^A - u_{1-2}^B) dy + \lambda_1 \int (u_{1-2}^A - u_{1-2}^B) y dy + \\ + \lambda_2 \int (u_{1-2}^A - u_{1-2}^B) y^2 dy + \dots,$$

так что ограничения принимают вид

$$\int (u_{1-2}^A - u_{1-2}^B) dy = 0, \quad \int (u_{1-2}^A - u_{1-2}^B) y dy = 0, \\ \int (u_{1-2}^A - u_{1-2}^B) y^2 dy = 0, \quad \dots \quad (7.26)$$

Следует заметить, что альтернативный подход к определению ограничений, восстанавливающих непрерывность, заключается в обеспечении непрерывности в дискретных точках границы. В приведенном выше примере имеется невязка для одной степени свободы в полях перемещений на границах элементов. Обозначая точку, лежащую на стороне 1—2, цифрой 7 (см. рис. 7.8), можно записать $u_7^A - u_7^B = 0$. Вычисляя затем в точке 7 соответствующие значения полей перемещения для элементов A и B , получим уравнения, задающие ограничения в виде, аналогичном соотношению (7.25). Если учесть указанное ограничение с помощью метода множителей Лагранжа, то в этом случае множитель Лагранжа представляет собой величину силы в рассматриваемой точке.

Преимущества обобщенного вариационного подхода отчетливо проявляются при построении конечно-элементных моделей изгибаемых пластин. Возможность проиллюстрировать этот факт представится в гл. 12.

7.5. Принцип минимума дополнительной энергии

Если при конечно-элементном анализе в соотношениях податливости в качестве неизвестных выбрать узловые или граничные силы, то выписать соответствующие формулировки на базе выражения для дополнительной энергии намного труднее, нежели конечно-элементные представления жесткостной формулировки, опирающиеся на принцип минимума потенциальной энергии. Это происходит из-за того, что для статически неопределимой конечно-элементной идеализации конструкции нельзя непосредственно выполнить преобразование от узловых сил элемента $\{F^e\}$ к прикладываемым нагрузкам $\{P\}$. Если, с другой стороны, в качестве основных неизвестных выбраны функции напряжений, то формулировки сходны с используемыми при жесткостном представлении. Опишем эти два подхода ниже.

Рассмотрим вначале случай, когда в качестве неизвестных выбираются *силы*, причем объемные силы и предварительные напряжения предполагаются отсутствующими. Для определения величины дополнительной энергии деформации U^* в конечно-элементной модели, состоящей из P элементов, воспользуемся соотношением (6.68b). Имеем

$$U^* = \sum_{i=1}^p U_i^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p [F^i]^T [f^i] \{F^i\}, \quad (7.27)$$

где $\{F^i\}$ и $[f^i]$ — соответственно вектор сил и матрица податливости i -го элемента. Это можно записать в следующем виде:

$$U^* = \frac{1}{2} [F^e]^T [f^e] \{F^e\}, \quad (7.28)$$

где $\{F^e\}$ — вектор, включающий всю совокупность силовых векторов отдельных элементов $[F^i]$ и все силы реакции опоры $[R^s]$, т. е.

$$[F^e] = [[F^1] [F^1] \dots [F^p] [R^s]].$$

Здесь $[f^e]$ — глобальная матрица податливости, имеющая блочно-диагональную структуру, где каждый блок есть матрица податливости отдельного элемента. Все матрицы отдельных элементов $[f^i]$, $i=1, \dots, p$, входят в этот массив. Кроме того, в нем фигурируют нулевые строки и столбцы, соответствующие силам реакции опоры в точках закрепления.

Может показаться, что следующий логически оправданный шаг состоит в переходе от внутренних сил и сил реакции $\{F^e\}$ к узловым силам $\{P\}$; однако, как было указано выше, это нельзя осуществить непосредственно в случае статически неопределимой конструкции. Следовательно, $\{F^e\}$ выражается в виде суммы двух силовых систем $\{F^0\}$ и $\{F^r\}$. Здесь $\{F^0\}$ — любая система внутренних сил, уравновешивающих $\{P\}$, и пока выбор этой системы не соответствует

окончательному решению задачи, эта система будет связана с несогласованным деформированным состоянием. Силы $\{F_r\}$ представляют собой амплитуды самоуравновешенных сил. Число этих сил равно числу статически неопределимых степеней свободы в рассматриваемой задаче.

Как показано в разд. 3.3, выбор дополнительных сил, а также построение соотношений, связывающих внутренние силы с приложенными нагрузками и дополнительными силами, можно осуществить, оперируя глобальными уравнениями статики (3.15), т. е. $\{P\} = [B] \{F^e\}$. Кроме того, для этих целей можно использовать физические соображения. В любом случае в результате получим уравнения

$$\{F^e\} = [D_1 \ D_2] \left\{ \begin{matrix} P \\ \bar{r} \end{matrix} \right\}. \quad (3.15d)$$

Далее необходимо выписать выражение для работы V^* , совершаемой на заданных полях перемещений. Для простоты исключим случай ненулевых перемещений. Считаем, что число степеней свободы в узлах, соответствующих точкам опоры, равно нулю. Поэтому вклад этих слагаемых в V^* равен нулю. В соответствии с традиционными положениями анализа, учитывающего дополнительные силы, рассмотрим только сосредоточенные, прикладываемые к узлам силы P_i . Однако при рассмотрении указанных сил временно допустим, что соответствующие степени свободы Δ_i заданы и далее в процессе решения \bar{P}_i трактуются как варьируемые параметры. Следовательно,

$$V^* = - [P] \{\Delta\}. \quad (7.29)$$

Подставляя полученное выражение в (7.28) и проводя выкладки с учетом, что $\Pi_c = U^* + V^*$ (см. (6.68)), получим

$$\begin{aligned} \Pi_c = & \frac{[P]}{2} [D_1]^T [F^e] [D_1] \{P\} + [F_r] [D_2]^T [F^e] [D_1] \{P\} + \\ & + \frac{[F_r]}{2} [D_2]^T [F^e] [D_2] \{F_r\} - [P] \{\Delta\}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Чтобы найти стационарное значение величины Π_c , выполним варьирование правой части (7.30) по всем параметрам, как $\{P\}$, так и $\{F_r\}$. Тогда

$$\left[\begin{matrix} [D_1]^T [F^e] [D_1] & [D_1]^T [F^e] [D_2] \\ [D_2]^T [F^e] [D_1] & [D_2]^T [F^e] [D_2] \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} P \\ \bar{r} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \Delta \\ 0 \end{matrix} \right\}. \quad (7.31)$$

Решение нижней части уравнения дает

$$\{F_r\} = - [D_2] [F^e] [D_2]^{-1} [D_2]^T [F^e] [D_1] \{P\}, \quad (7.32)$$

и после подстановки в верхнюю часть уравнения приходим к выражению

$$[F] \{P\} = \{\Delta\}, \quad (7.33)$$

где объединенная глобальная матрица податливости имеет вид

$$[F] = [[D_1]^T \Gamma f^e \rfloor [D_1] - [D_1]^T \Gamma f^e \rfloor [D_2] [[D_2]^T \times \\ \times \Gamma f^e \rfloor [D_2]]^{-1} [D_2]^T \Gamma f^e \rfloor [D_1]] \{P\}. \quad (7.33a)$$

Поле внутренних сил (и силы реакции опоры, если они входят в $\{F^e\}$) можно найти, подставляя (7.32) в (3.15d). Имеем

$$\{F^e\} = [D_1] - [D_2] [[D_2]^T \Gamma f^e \rfloor [D_2]]^{-1} [D_2]^T \Gamma f^e \rfloor [D_1]] \{P\}. \quad (7.34)$$

Прикладываемые узловые силы рассматриваются теперь как известные величины.

Будет показано, что в сравнении с жесткостным анализом приведенный выше анализ податливости требует большего числа следующих друг за другом матричных преобразований. Еще более значительны оказываются затраты на построение соотношений (3.15d), исходя из значения матрицы $[B]$. Согласно методике, описанной в разд. 3.3, матрица $[B]$ формируется из уравнений равновесия для каждой степени свободы. Поэтому в $[B]$ то же число строк, что и число уравнений в прямом методе жесткости. Заметим, что метод исключения Гаусса — Жордана есть по существу метод обращения матриц, поэтому затраты на выполнение этих операций соответствуют затратам на построение обратной к матрице $[K]$, т. е. объединенной глобальной матрицы жесткости.

Способ, позволяющий избежать перечисленные трудности, должен использовать, как предложено в разд. 6.6, *функции напряжений* в качестве *параметров поля напряжений*. Согласно этой схеме, дополнительная энергия деформации i -го элемента имеет вид

$$U^{i*} = (\lfloor \Phi^i \rfloor / 2) [f^i] \{\Phi^i\}, \quad (6.74b)$$

где для плоского напряженного состояния величина $\{\Phi^i\}$ содержит в качестве параметров значения функции напряжений Эри и соответствующие производные в узлах элемента (см. (6.75)). Для других типов напряженного состояния используются другие функции напряжений. В нашем случае податливость элемента $[f^i]$ определяется согласно (6.72a).

Непрерывность поля напряжений при переходе через границы элементов — если поля напряжений элементов допускают непрерывное задание — достигается приравниванием значений параметров функций напряжений в узлах соединений элементов. (Поля напряжений в элементах могут быть записаны через узловые параметры функции напряжений, но в такой форме, что будет нарушаться непрерывность усилий при переходе через границу между элементами. Такие элементы можно также объединить, приравнявая параметры функции напряжений в узлах, однако с их помощью нельзя получить правильное конечно-элементное представление величины дополнительной энергии.) Эту процедуру можно осуществить аналогично

той, которая указана в разд. 3.2 для метода жесткости. Таким образом, строится процедура прямого метода податливости. Представим полученную глобальную (для p элементов) дополнительную энергию деформации U^* в виде

$$U^* = \sum_{i=1}^p U_i^* = \frac{[\Phi]}{2} [F] \{\Phi\}, \quad (7.35)$$

где $[F]$ — глобальная матрица податливости, соответствующая функциям напряжений (а не силам), а $\{\Phi\}$ — вектор глобальных параметров функции напряжений. Кроме того, U^* можно выписать, используя приведенную в разд. 3.3 схему конгруэнтных преобразований.

Важно учесть тот факт, что дополнительная энергия деформации элемента U_i^* строится по полю напряжений σ , задаваемому с помощью производных соответствующего порядка от поля функции напряжений Φ (см. (6.74) и (4.4)). Например, порядок производных для случая плоского напряженного состояния равен двум. Следовательно, U^* определяется с точностью до членов, которые исчезают в результате дифференцирования. Ситуация совпадает с той, которая возникает для конечно-элементного представления с использованием перемещений, когда нельзя выделить движение тела как твердого целого из-за выполняемых для определения поля деформации ϵ операций дифференцирования перемещений Δ .

Чтобы удовлетворить указанному выше требованию, можно зафиксировать достаточное число узловых силовых параметров, чтобы получить статически определимые неподвижные условия закрепления. К примеру, было замечено, что функция напряжений Эри для плоского напряженного состояния двойственна поперечным смещениям в теории изгиба тонких пластин, в которой для реализации требуемых условий закрепления следует фиксировать три соответствующим образом выбранные степени свободы. Отсюда следует, что аналогичным образом в случае плоского напряженного состояния достаточно зафиксировать три силовых параметра.

Совершенно необязательно, чтобы зафиксированные степени свободы, скажем Φ_j , включались непосредственно в дополнительную энергию деформации подстановкой $\Phi_j = 0$ в U^* . Можно ввести эти ограничения с помощью обсуждавшейся в разд. 7.3 процедуры множителей Лагранжа. В этом разделе было также показано, что если ограничения делают систему статически определимой и эти ограничения учитываются с помощью метода Лагранжа, то в этом случае в основной матрице $[F]$ необязательно подавлять степени свободы, отвечающие движению тела как твердого целого. Учет приложенных сил приводит к системе ограничений, и если прикладываемые нагрузки самоуравновешены, то для рассматриваемых целей этих соотношений достаточно.

Рассмотрим теперь слагаемое V^* , входящее в выражение для дополнительной энергии. Задаваемые в точках (узлах) параметры функции напряжений не являются при анализе заданными величинами, и, кроме того, соответствующие им параметры деформации не имеют важного для приложений физического смысла. Поэтому методика, в которой узловые параметры деформации являются заданными величинами, не имеет в настоящем рассмотрении никакого значения, и можно считать $V^*=0$. Тогда, согласно (6.68) и (7.35),

$$\Pi_c = U^* = (\mathbf{L} \Phi) / 2 \mathbf{I} \mathbf{F} \{\Phi\},$$

и очевидно, что вариация Π_c по Φ приводит к следующему результату: $\mathbf{I} \mathbf{F} \{\Phi\} = 0^*$. Однако ясно, что в рассмотрении мы еще не выделили реально действующих нагрузок. Выполняя это, получим ограничения, обеспечивающие правильный характер решения.

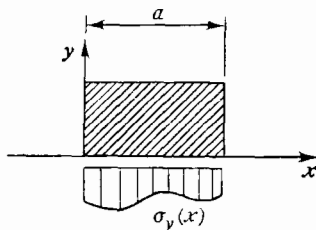


Рис. 7.9.

Чтобы описать методику, рассмотрим случай плоского напряженного состояния. На стороне элемента, параллельной оси x , действует нормальное напряжение σ_y , как изображено на рис. 7.9. Согласно (4.4), в любой точке на этой стороне $\partial^2 \Phi / \partial x^2 = \sigma_y$. Дважды интегрируя это выражение и определяя константы интегрирования через Φ и $\partial \Phi / \partial x = \Phi_x$ в концевых точках (т. е. через $\Phi_l, \Phi_j, \Phi_{x_l}, \Phi_{x_j}$), получим

$$-\Phi_{x_l} + \Phi_{x_j} = \int_l^j \sigma_y dx, \quad (7.36a)$$

$$-\Phi_l + \Phi_j - \Phi_{x_l} a = \int_l^j \int_l^x \sigma_y dx. \quad (7.36b)$$

Так как σ_y задана и является функцией только от x , то можно вычислить интегралы в соотношениях (7.36a, b). Таким образом, получим два уравнения, которые задают ограничения. Учитывая аналогично все остальные граничные условия для напряжений,

* Если существуют начальные деформации или объемные силы, то справа стоит не нуль. Однако это обстоятельство не меняет причин, побуждающих строить ограничения, учитывающие поверхностные нагрузки.

получим дополнительные ограничения. Сохраняя введенные ранее обозначения, запишем полную систему уравнений, задающих ограничения в виде

$$[G] \{\Phi\} = \{s\}. \quad (7.37)$$

Эти ограничения можно учесть с помощью метода множителей Лагранжа (см. разд. 7.3) либо с помощью метода конденсации (п. 3.5.2). Используя первый метод и обозначая через $[\lambda]$ вектор множителей Лагранжа, выпишем следующий *расширенный функционал дополнительной энергии*:

$$\Pi_c^a = \frac{L\{\Phi\}}{2} [F] \{\Phi\} + [\lambda] [G] \{\Phi\} - [\lambda]^T \{s\}. \quad (7.38)$$

Варируя по $\{\Phi\}$ и $[\lambda]$, получим

$$\begin{bmatrix} F & G^T \\ G & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ s \end{Bmatrix}. \quad (7.39)$$

Эта система разрешима, потому что указанные выше ограничения, соответствующие движению тела как твердого целого, включены в эту систему. Они фигурируют и в уравнениях (7.37), если эти уравнения выписаны для системы приложенных нагрузок, которые полностью уравновешены. Так как в анализе обычно имеются неизвестные реакции опоры, которые не позволяют определить полную самоуравновешенную систему поверхностных сил, то, вообще говоря, необходимо учитывать эти условия путем непосредственной модификации глобальной матрицы податливости.

Подробное изложение способов построения ограничений, реализующих для различных напряженных состояний силовые граничные условия, приводится в работах [7.5, 7.6].

Следует заметить, что указанные построения строго отвечают принципу минимума дополнительной энергии для всей конструкции только в том случае, если вид распределения прикладываемых напряжений вдоль границ элементов совпадает с видом выбранных полей напряжений в элементах, которым эти границы принадлежат. Если это не так, то уравнения, задающие ограничения (например, (7.37)), отвечают лишь приближенному удовлетворению условий, которые должны выполняться точно в принципе минимума дополнительной энергии.

7.6. Свойство верхней грани для решения, получаемого с помощью принципа минимума дополнительной энергии

Действительное решение, получаемое с помощью принципа минимума дополнительной энергии, при определенных условиях обладает следующим свойством: значения коэффициентов влияния для пере-

мещений представляют собой *верхнюю грань* для значений указанных коэффициентов, которые получаются в пределе при уменьшении размеров ячеек сетки.

Рассмотрим случай, когда задаваемые перемещения равны нулю, так что $V^*=0$ и $P_c=U^*$. Для единственной прикладываемой нагрузки P_i и вызванного этой силой перемещения Δ_i имеем

$$U^*=P_i \Delta_i / 2. \quad (7.40)$$

Сравним точное и приближенное значения дополнительной энергии деформации, замечая, что точное значение представляет собой минимум. Следовательно,

$$U_{\text{exact}}^* < U_{\text{approx}}^*, \quad (7.41)$$

и после подстановки (7.40) в (7.41) приходим к неравенству

$$P_i (\Delta_i)_{\text{exact}} < P_i (\Delta_i)_{\text{approx}},$$

или

$$\frac{(\Delta_i)_{\text{exact}}}{(P_i)} = (f_{ii})_{\text{exact}} < (f_{ii})_{\text{approx}} = \frac{(\Delta_i)_{\text{approx}}}{(P_i)}, \quad (7.42)$$

т. е. приближенное значение f_{ii} оказывается верхней границей.

Как для верхней границы решения, обсуждавшейся выше, так и для нижней границы (минимум потенциальной энергии) можно дать физическое объяснение. Приближенное решение, основанное на принципе минимума дополнительной энергии, характеризуется разрывными полями перемещений, и поэтому оно более «податливо» по сравнению с точным решением. На решение, получаемое при помощи принципа минимума потенциальной энергии и характеризующееся непрерывным, но приближенным полем перемещений, накладываются ограничения. Поэтому оно «жестче» точного решения.

Смешанные и гибридные формулировки не обладают свойствами нижней или верхней границ. Однако можно доказать, что они приводят к решениям, лежащим в промежутке между указанными пределами. Предположим, например, что в гибридном методе напряжений поле напряжений удовлетворяет условиям равновесия не только внутри элемента, но и при переходе через границу элементов. Тогда традиционная формулировка на основе принципа минимума дополнительной энергии для этого поля приведет к решению, соответствующему верхней грани («высоко податливое» решение). Выбор поля перемещений на границе в гибридной формулировке накладывает некоторые ограничения на конечно-элементное представление, уменьшает податливость и смещает получаемые решения в сторону точного решения. При этом, конечно, имеется возможность «перегрузить ограничениями» аналитическое представление и проскочить точное решение в сторону «нижней границы», соответствующей перемещениям, обусловленным граничным полем перемещений.

Высказанные соображения имеют смысл только тогда, когда имеется привязка к известным значениям для верхней и нижней границ решений, и справедливы в пределах, определяемых полями, на которых строятся решения. Это значит, что степень сложности граничного поля перемещений в гибридном методе напряжений должна в некоторой мере соответствовать предполагаемому внутреннему полю напряжений. Более сложные представления могут оказаться неэффективными. Оценки к указанным рассмотрениям можно найти в [7.7].

Литература

- 7.1. Fox R., Stanton E. Developments in Structural Analysis by Direct Energy Minimization.—AIAA J, June 1968, 6, No. 6, p. 1036—1042 [Имеется перевод: Ракетная техн. и космон.— М.: Мир, 1968, № 6.]
- 7.2. Fried I. More on Gradient Iterative Methods in Finite Element Analysis.—AIAA J, Mar, 1969, 7, No. 3, p. 565—567. [Имеется перевод. Ракетная техн. и космон — М.: Мир, 1969, № 3.]
- 7.3. Greene R. E., Jones R. E., McLay R. W., Strome D. R. Generalized Variational Principles in the Finite-Element Method.—AIAA J., July 1969, 7, No. 7, p. 1254—1260 [Имеется перевод Ракетная техн. и космон — М.: Мир, 1969, № 7.]
- 7.4. Harvey J., Kelsey S. Triangular Plate Bending Element with Enforced Compatibility.—AIAA J., June 1971, 9, No. 6, p. 1023—1026 [Имеется перевод: Ракетная техн. и космон.— М.: Мир, 1971, № 6.]
- 7.5. Gallagher R. H., Dhall A. K. Direct Flexibility Finite Element Elastoplastic Analysis —Proc First Internat'l Conf on Struct. Mech in Nuc React. Tech., Berlin, 1979.
- 7.6. Morley L. S. D. The Triangular Equilibrium Element in the Solution of Plate Bending Problems.—Aero. Quarterly, May 1968, 19, p. 149—169
- 7.7. Tong P., Pian T. H. H. Bounds to the Influence Coefficients by the Assumed Stress Method.—Int. J. Solids and Structures, 1970, 6, p. 1429—1432.

Задачи

- 7.1. Разлагая соответствующие произведения матриц, проверьте, что конденсацию системы уравнений жесткости можно осуществить, полагая равными нулю силы, отвечающие исключенным степеням свободы, и строя матрицу преобразования, отвечающую этому базису (т. е. проверьте подстрочное прим. в разд. 2.7).
- 7.2. Вычислите смещение свободного края нагруженной на конце консольной балки (см. рис. P7.2). С этой целью постройте матрицу жесткости для конусообразного элемента, выбирая коническую конфигурацию для элемента и функцию формы, отвечающую конструктивному элементу постоянного поперечного сечения. Проведите расчеты для одно- и двухэлементного представлений и проверьте для решений свойство нижней границы $[I = I_1(1 - 1/2(x/L)^2)]$
- 7.3. Разработайте методику решения и выведите основные матричные соотношения, позволяющие учесть начальные деформации в матричном методе сил (методе, основанном на принципе минимума дополнительной энергии).
- 7.4. Выполните расчет матричным методом сил в задаче 3.5, однако без рассмотрения пластинчатых элементов.

7.5. Решите иллюстративную задачу из гл. 3 (рис. 3.4 и 3.6), используя подход, основанный на минимизации квадратичной функции от узловых перемещений (см. (7.11) и (7.12)).

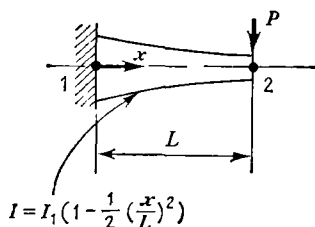


Рис. Р7.2.

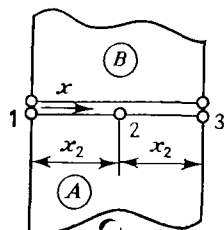


Рис. Р7.6.

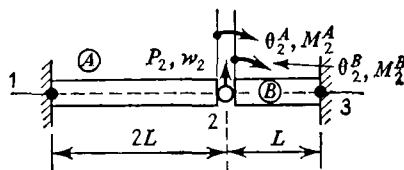
7.6. Два прямоугольных элемента, изображенных на рис. Р7.6, должны быть соединены. Перемещения v для соответствующих элементов вдоль линии соединения равны

$$v^A = \left[\frac{(x-x_2)(x-2x_2)}{2(x_2)^2} \right] v_1 + \left[\frac{x(2x_2-x)}{(x_2)^3} \right] v_2 + \left[\frac{x(x-x_2)}{2(x_2)^2} \right] v_3,$$

$$v^B = \left(\cos \frac{\pi x}{4x_2} \right) v_1 + \left(\sin \frac{\pi x}{4x_2} \right) v_3.$$

Выпишите в алгебраической форме ограничение, которое необходимо наложить, чтобы обеспечить непрерывность перемещений в точке 2.

7.7. Постройте матрицу жесткости для изображенной на рис. Р7.7 балки в терминах степеней свободы w_2 , θ_2^A и θ_2^B . Далее задайте условия непрерывности угло-

Рис. Р7.7. Элементы A и B имеют одинаковую изгибную жесткость EI .

вых смещений в шарнире с помощью метода множителей Лагранжа и найдите прогиб в точке 2. В заключение поставьте и решите задачу, добиваясь непосредственно непрерывности угловых смещений в точке 2. Найдите внутренний изгибающий момент в точке 2 и сравните полученный результат с результатом, найденным с помощью метода множителей Лагранжа.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОВЕДЕНИЯ ЭЛЕМЕНТА И ЕГО ГЕОМЕТРИИ

До сих пор обсуждение методов построения элементов носило достаточно общий характер и давало возможность применять теории, основанные на допусках напряжений, функциях напряжений, полей деформаций и перемещений. Займемся теперь проблемой выбора указанных полей, или *функций поведения*, на систематической и рациональной основе, наиболее пригодной для численной реализации алгоритмов метода конечных элементов. Учитывая, что построение элементов на основе предполагаемых перемещений получило более широкое распространение, последующее обсуждение будет затрагивать в основном вопросы выбора функций перемещений. Однако в настоящее время усиливается интерес к использованию формулировок на основе напряжений или функций напряжений, а также гибридных формулировок, причем почти все рассуждения, приводимые здесь для функций перемещений, применимы и для других типов функций.

В начале главы изучаются общие условия, которым должны удовлетворять выбираемые представления функций поведения. Далее обсуждаются вопросы задания указанных представлений в виде полиномиальных рядов. Затем описывается регулярный подход к построению представлений в терминах физических степеней свободы, т. е. в виде *функций формы*. Для треугольных (двумерных) элементов этот подход реализуется посредством использования *треугольных координат*, а для тетраэдра (трехмерный случай) — *тетраэдральных координат*. Далее описываются концепции, лежащие в основе интерполяции семейств функций для двух- и трехмерных четырехугольных и шестигранных элементов.

Полезная концепция, согласующаяся с идеей функционального представления параметров поведения, заключается в представлении конфигурации элемента в той же форме. Это позволяет определить элементы более сложных очертаний, например произвольные

четыреугольники или элементы с криволинейными границами. Этот подход, названный *изопараметрическим* представлением, также рассмотрен в этой главе.

8.1. Требования к представлению функций поведения элемента

Одно из преимуществ использования вариационных принципов при формулировке соотношений для элемента в конечно-элементном анализе заключается в том, что они помогают установить требования к *пробным функциям или полям*, описывающим поведение элемента. Можно записать следующие основные условия, вытекающие из вариационных и других соображений:

1. Выбираемые функции должны обладать определенной гладкостью (которая диктуется вариационной формулировкой) внутри элемента, а также при переходе через границы, разделяющие элементы одного и того же типа или имеющие одни и те же функции формы вдоль указанных границ формы.

2. Построенные на базе выбранных функций соотношения, связывающие силы и перемещения, должны давать нулевую энергию деформации при движении тела как твердого целого.

3. Выбираемые функции должны включать представления постоянных величин для соответствующих напряжений или деформаций.

Согласно условию 1, необходимо, чтобы пробные функции были дифференцируемы столько раз, каков наибольший порядок производных в функционале вариационной задачи. Иначе члены, содержащие указанные производные, обратятся в нуль или возникнет какое-либо другое несоответствие. Существование производных n -го порядка требует, чтобы в полиномиальном представлении функций поведения фигурировали по крайней мере члены n -й степени. Очевидно, нетрудно выбрать функцию, удовлетворяющую этому аспекту условия 1.

Условие 1, удовлетворяющееся при переходе границы, разделяющей элементы, называется условием *межэлементной непрерывности*. В разд. 6.3 показано, что если при построении соотношений между силами и перемещениями используется вариационный принцип, то условие 1 вытекает из требования однозначного определения интеграла (функционала), соответствующего указанному вариационному принципу. В частности, требуется непрерывность всех производных до порядка, на единицу меньшего максимального порядка производной в функционале. При выборе функций поведения, удовлетворяющих рассматриваемому аспекту условия 1, в конечно-элементном анализе возникают более серьезные трудности. Для

простых элементов возможны регулярные методики построения требуемых функций, которые рассматриваются в этой главе ниже.

Решение, строго соответствующее принципу минимума потенциальной энергии, при построении Π_p требует рассмотрения полей *перемещений*, обладающих межэлементной совместимостью. Если ищется решение, отвечающее принципу минимума дополнительной энергии, то при построении Π_c необходимо использовать функции, задающие равновесные поля напряжений, удовлетворяющие условиям равновесия на границах, разделяющих элементы. Как было показано в разд. 7.2 и 7.6, указанные решения обладают тем преимуществом, что для них могут быть установлены границы изменения определенных параметров решения. Кроме того, можно доказать монотонную сходимость этих параметров при измельчении сетки разбиения [8.1, 8.2].

Учитывая сказанное, будем уделять особое внимание определению функций, которые удовлетворяют требованиям классических вариационных принципов. Однако следует отметить, что некоторая степень межэлементной непрерывности требуется для функций, фигурирующих и в альтернативных принципах (принцип Рейсснера, гибридные принципы и т. д.), и даже для *межэлементно несовместимых* полей, которые соответствуют традиционным вариационным принципам на стадии формулировки конечных элементов. При построении глобальных уравнений необходимо потребовать непрерывности функций, задающих физические степени свободы.

Для существования решения, основанного на принципе минимума энергии, необходимо выполнение условия 2. В разд. 2.9 показано, что число мод движений тела как твердого целого, содержащихся в системе уравнений жесткости элемента, можно определить, подсчитав собственные значения матрицы коэффициентов жесткости. Это условие сводится к требованию, чтобы упругие деформации не возникали при движении тела как твердого целого. В случае простых элементов нетрудно проверить это требование. Например, для изображенного на рис. 5.4 треугольного элемента деформация ϵ_x определяется, согласно (5.21a) и (5.22), в виде

$$\epsilon_x = (1/x_2 y_3) (-y_3 u_1 + y_3 u_2).$$

Так как при движении тела как твердого целого $u_1 = u_2$, поэтому $\epsilon_x = 0$. Аналогичные условия выполняются для ϵ_y и γ_{xy} .

Во многих формулировках сознательно нарушается условие 2, если представление движения тела как твердого целого выбранными функциями перемещений требует чрезмерно сложных выражений и операций при построении соотношений между силами и перемещениями для элемента. Это особенно справедливо, если построение осуществляется в криволинейных координатах. С целью упрощения построений для большого числа формулировок криволиней-

ных элементов допускается указанное нарушение условия равенства нулю деформаций при движении тела как твердого целого. Численные эксперименты [8.3, 8.4] показали, что невыполнение этого условия для некоторых элементов ухудшает, но не исключает сходимость решения к правильному результату.

Более серьезные последствия возникают при нарушении условия 3. Невозможность аппроксимировать поле постоянных деформаций приводит к тому, что решение сходится к неверному результату и в некоторых случаях ошибка значительна. Ранее в некоторых случаях считалось целесообразным строить поле перемещений элемента, которое не аппроксимирует состояние постоянной деформации; в других случаях это состояние исключалось из рассмотрения неумышленно. Сходимость к неправильному решению происходит из-за того, что при измельчении сетки деформированное состояние внутри отдельного элемента должно стремиться к состоянию с постоянной деформацией. Однако этого не происходит, так как указанного состояния в рассматриваемом представлении нет. Пример подобной ошибочной формулировки дается в разд. 12.2.

Ниже рассмотрим два основных класса представлений функций поведения. Это — представления в виде *полиномиальных рядов* и функций формы. Указанные выше вопросы изучаются для обоих классов.

8.2. Полиномиальные ряды

Простейший способ аналитического описания функций поведения элемента состоит в представлении их в виде *полиномиального ряда*, коэффициенты которого являются *обобщенными параметрами* a_i . Даже в том случае, когда поле элемента записано в терминах функций формы, функции формы можно рассматривать как преобразование полиномиального поля.

При обсуждении полиномиальных рядов будем рассматривать для простоты двумерный случай и предположим, что поле Δ описывается единственной величиной Δ . Запишем указанные полиномиальные ряды в виде $\Delta = \sum_{i=1}^n x^j y^k a_i$, или

$$\Delta = \lfloor p(m) \rfloor \{a\}, \quad (8.1)$$

где n — полное число членов ряда, а верхние индексы j и k — целые показатели степени, значения которых связаны с нижним целочисленным индексом i следующим образом:

$$i = \frac{1}{2}(j+k)(j+k+1) + k + 1. \quad (8.2)$$

Кроме того, через m обозначен *порядок* полинома, т. е. наибольшее значение показателя степени отдельного члена ряда (наибольшее

значение суммы целочисленных показателей степени j и k). Полinom называется *полным* полиномом некоторого порядка, если он содержит все члены указанного порядка и ниже. Матрица-строка $\lfloor p(m) \rfloor$ представляет, в частности, вектор пространственных переменных полного полинома m -го порядка. Число членов в полном полиноме дается выражением

$$n = 1/2 (m+1) (m+2). \quad (8.3)$$

В качестве примера рассмотрим полный линейный полином

$$\Delta = a_1 + a_2 x + a_3 y = \lfloor p(1) \rfloor \{a\}.$$

Здесь $n=3$, что согласуется с (8.3). Кроме того, для второго члена $j=1$ и $k=0$, откуда, согласно (8.2), $i=2$.

При изучении многих вопросов, связанных с полиномиальными рядами, удобно пользоваться так называемым *треугольником Паскаля*. Он имеет вид

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & & & & & & \text{(константа — 1 член)} \\ a_2 x & a_3 y & & & & & \text{(линейная функция — 2 члена)} \\ a_4 x^2 & a_5 x y & a_6 y^2 & & & & \text{(квадратичная функция — 3 члена)} \\ a_7 x^3 & a_8 x^2 y & a_9 x y^2 & a_{10} y^3 & & & \text{(кубическая функция — 4 члена)} \\ a_{11} x^4 & a_{12} x^3 y & a_{13} x^2 y^2 & a_{14} x y^3 & a_{15} y^4 & & \text{(полином 4-го порядка — 5 членов)} \end{array}$$

и т. д. для полинома любого порядка. Треугольник Паскаля показывает сразу, сколько членов имеется в полном полиноме любого заданного порядка.

Как правило, число обобщенных параметров выбирается *равным* числу узловых степеней свободы элемента. Хотя этот случай и был рассмотрен в гл. 5 и 6, далее изучим его вновь для завершенности изложения и для выявления свойств, не обсуждавшихся ранее.

Определение обобщенных параметров в терминах узловых степеней свободы завершается определением полиномиальных разложений для каждой степени свободы. При этом получаем столько уравнений, сколько существует степеней свободы. Выписывая их в виде (8.1), получаем

$$\{\Delta\} = [B] \{a\}. \quad (5.3a)$$

Коэффициенты матрицы $[B]$ — целые числа или функции, зависящие от размеров элемента. Обобщенные перемещения записываются в терминах узловых степеней свободы, а именно

$$\{a\} = [B]^{-1} \{\Delta\}. \quad (5.4a)$$

Из (8.1) имеем

$$\Delta = \lfloor p(m) \rfloor [B]^{-1} \{\Delta\} = \lfloor N \rfloor \{\Delta\} \quad (8.2a)$$

или для поля Δ более общего вида

$$\Delta = [p(m)] [B]^{-1} \{\Delta\} = [N] \{\Delta\}, \quad (5.5a)$$

где матрицы-строки заменены на прямоугольные матрицы, имеющие число строк, равное числу компонент поля Δ . В некоторых случаях, например когда геометрические характеристики элемента определяют зависимость одной степени свободы от другой, матрица $[B]$ может стать вырожденной. Это происходит также тогда, когда комбинация членов в полиноме представляет функцию формы, обращаящуюся в нуль во всех узлах. Такая «нулевая» функция формы соответствует тому, что ранг матрицы $[B]$ понижается на единицу.

Выбору числа членов в полиномиальном представлении, т. е. числу компонент в $[a]$, следует уделить особое внимание. При этом вначале необходимо рассмотреть условия из разд. 8.1. Требованиям на движение тела как твердого целого и постоянные деформации легко удовлетворить для описываемых в книге одномерных плоских и трехмерных элементов за счет непосредственного выбора рядов, в которые входят константы и линейные члены.

Удовлетворить условиям межэлементной непрерывности не так просто. Напомним, что, согласно рассуждениям, приведенным в предыдущих главах, если описание функции вдоль границы, разделяющей элементы, однозначно задается степенями свободы вдоль указанной границы, то межэлементная непрерывность данной функции сохраняется вдоль указанной границы, отделяющей рассматриваемый элемент от соседнего элемента. Например, если для описания перемещений элемента выбрана кубическая функция, то для описания функций на каждой границе элемента необходимо иметь четыре независимые степени свободы.

Объединяя приведенные рассуждения с идеей *геометрической изотропии* [8.5], можно установить критерий выбора необходимого числа членов в полиномиальном представлении функции поведения элемента. Геометрическая изотропия обуславливает сохранение всех членов для полинома данного порядка при любой замене координатных осей декартовой системы координат.

Согласно (8.3), полное *допустимое* число членов в полном двумерном полиномиальном представлении m -го порядка равно $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$. Рассмотрим плоский многоугольник с \mathfrak{N} сторонами. Требуется выразить параметр Δ в виде полиномиального разложения в терминах значений этой величины, вычисленных в заданных точках лишь на *границе* элемента. Если требуется, чтобы этот полином однозначно определялся на каждом участке границы, то его необходимо задавать там с помощью $m+1$ точки. Общее число точек, которое *необходимо задать* для всего полинома на границе, равно $\mathfrak{N}(m+1) - \mathfrak{N} = \mathfrak{N}m$ (следует учесть, что к каждой из \mathfrak{N} вершин многоугольника сходятся две стороны). Приравнявая допустимое число коэффициентов, задаваемое согласно (8.3), требуе-

тому числу точек, получим

$$\frac{1}{2}(m+1)(m+2) = \mathfrak{N}m. \quad (8.4)$$

Это условие выполняется лишь при $\mathfrak{N}=3$ и $m=1$ или $m=2$. Эти элементы, имеющие вид простого треугольного и шестиузловой треугольного элементов, изображены на рис. 8.1.

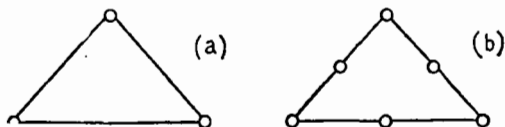


Рис. 8.1. Треугольные элементы с узлами по периметру: (а) простой трехузловой; (б) шестиузловой.

Можно построить и другие *треугольные* элементы, удовлетворяющие приведенным выше условиям, если смягчить требование, согласно которому все узлы лежат на границе элемента. Это делается в разд. 8.5. В качестве узловых степеней свободы можно также рассматривать производные от функции поведения. Прямоугольные элементы не удовлетворяют указанным условиям, если «полный» полином определен, как указывалось выше, даже при смягчении требования на принадлежность узлов границам элементов и задании степеней свободы только через значения самой функции. На этом аспекте акцентируется внимание в разд. 8.4.

Приведенные выше рассуждения можно перенести на трехмерные напряженные элементы и пластинчатые изгибаемые элементы. При этом следует отметить два обстоятельства. Во-первых, здесь необходимо добавить формальное математическое определение полноты ряда. Согласно этому определению, если функция Δ представлена рядом $\sum a_i \Delta_i$, то требуется, чтобы

$$\Delta - \sum_{i \rightarrow \infty} a_i \Delta_i \rightarrow 0. \quad (8.5)$$

Это условие выполняется для полиномиальных представлений.

Во-вторых, еще раз подчеркнем, что можно определить элементы и строить для них полиномиальные разложения, которые не удовлетворяют условиям межэлементной совместности. Результирующие формулировки оказываются вполне приемлемыми, если не считать отсутствия уверенности в достижении верхнего или нижнего пределов решения.

Полиномиальные выражения, записанные в терминах обобщенных смещений, можно непосредственно использовать при построении матрицы жесткости элемента, соответствующей указанным обобщенным смещениям. Это было проведено в гл. 5 и 6 при построении основных матриц элемента и в гл. 7 в связи с рассмотрением обобщенных вариационных принципов. Полученные таким образом

матрицы жесткости могут служить *опорными* матрицами жесткости, которые можно преобразовать в матрицы, соответствующие альтернативным физическим степеням свободы.

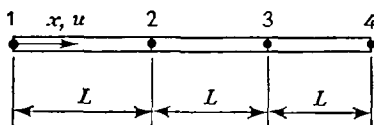


Рис. 8.2. Четырехузловой стержневой элемент.

Рассмотрим, например, четырехузловой стержневой элемент, изображенный на рис. 8.2, модель которого надо построить на базе кубического полинома:

$$u = \begin{bmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} p(3) \end{bmatrix} \{a\}.$$

Основная формула для опорной матрицы жесткости, согласно (6.18), имеет вид

$$[k^a] = \left[\int_{\text{vol}} [C]^T [E] [C] d(\text{vol}) \right]. \quad (6.18)$$

В нашем случае $d(\text{vol}) = A dx$, $[E] = E$, а матрица преобразования обобщенных перемещений в деформации $[C]$ имеет вид матрицы-строки $\begin{bmatrix} p' \end{bmatrix}$, где $\begin{bmatrix} p' \end{bmatrix} = (d/dx) \begin{bmatrix} p(3) \end{bmatrix}$, поэтому

$$[k^a] = \left[AE \int_0^{3L} \{p'\} \begin{bmatrix} p' \end{bmatrix} dx \right].$$

Если требуется определить матрицу жесткости элемента, соответствующую физическим степеням свободы u_1 , u_2 , u_3 и u_4 , необходимо выписать преобразование обобщенных смещений в узловые смещения. В данном случае это преобразование записывается в виде

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ L^3 & L^2 & L & 1 \\ (2L)^3 & (2L)^2 & 2L & 1 \\ (3L)^3 & (3L)^2 & 3L & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}.$$

Обращая стоящую в правой части равенства матрицу, получим матрицу, задающую преобразование a_1, \dots, a_4 в u_1, \dots, u_4 . Далее это преобразование применяется к опорной матрице жесткости обычным образом.

Кроме того, можно отнести матрицу жесткости к граничным смещениям (u_1, u_4) и производным от смещений в указанных точках ($du_1/dx, du_4/dx$). В этом случае вид преобразования полностью совпадает с приведенным в гл. 5 для изгибаемого элемента (за исключением знака в выражениях для производных) и здесь не приводится.

8.3. Непосредственное построение функций формы с помощью процедуры интерполяции

Хотя полиномиальное представление предполагаемых полей перемещений полезно для задания полноты функций и выполнения определенных условий, а также подчас существенно в некоторых подходах, используемых в конечно-элементном анализе, чаще предпочтительнее задавать рассматриваемые поля непосредственно в терминах узловых степеней свободы, т. е. в виде функций формы. Это можно осуществить с помощью процедуры *интерполяции*. В этом разделе продемонстрируем применение этой процедуры к функциям формы в одномерном случае.

8.3.1. Интерполяция Лагранжа

Интерполяция Лагранжа позволяет определить коэффициенты полиномиального представления функции через значения функции в точках прямой.

Рассмотрим прямую, изображенную на рис. 8.3(а), разделенную на сегменты равной длины с помощью $(m+1)$ точки $1, 2, \dots, m+1$.

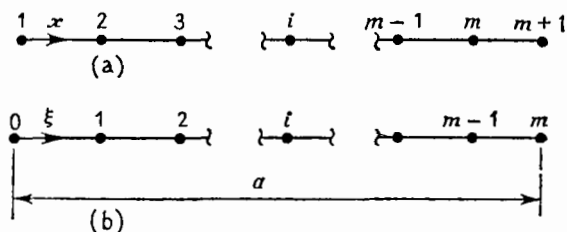


Рис. 8.3. Интервалы для интерполяции Лагранжа. (а) Разбиение на интервалы при рассмотрении физических координат; (б) разбиение на интервалы при рассмотрении естественных координат.

Расположение точек определяется *физическими координатами* x_1, x_2, \dots, x_{m+1} . Требуется определить функцию Δ , принимающую определенные значения $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{m+1}$ в этих точках. Это можно осуществить, придавая полиному m -го порядка в данных точках указанные значения. Результирующее выражение имеет вид

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m+1} N_i \Delta_i = [N] \{\Delta\},$$

где, очевидно, члены N_i — функции формы, так как $N_i=1$ для Δ_i и $N_i=0$ для Δ_j , $j \neq i$. Указанные действия были выполнены уже в разд. 5.1 при составлении соотношений $\{\Delta\}=[B] \{a\}$ и разрешении их относительно $\{a\}$. К счастью, для одномерного случая уже имеется в наличии формула, полученная Лагранжем:

$$N_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m+1} (x - x_j) / \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m+1} (x_i - x_j), \quad (8.6)$$

где символом \prod обозначено произведение указанных разностей $[(x-x_j)$ или $(x_i-x_j)]$ в заданном диапазоне изменения j .

В развернутой форме рассмотренные выражения запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(x-x_2)(x-x_3) \dots (x-x_{m+1})}{(x_1-x_2)(x_1-x_3) \dots (x_1-x_{m+1})}, \\ N_2 &= \frac{(x-x_1)(x-x_3) \dots (x-x_{m+1})}{(x_2-x_1)(x_2-x_3) \dots (x_2-x_{m+1})}, \\ &\dots \dots \dots \\ N_{m+1} &= \frac{(x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_m)}{(x_{m+1}-x_1)(x_{m+1}-x_2) \dots (x_{m+1}-x_m)}. \end{aligned}$$

В качестве примера рассмотрим простейший стержневой элемент с двумя узлами, т. е. с $m=1$. В этом случае $x_1=0$ и

$$\Delta = \frac{x-x_2}{-x_2} \Delta_1 + \frac{x}{x_2} \Delta_2 = \left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \Delta_1 + \frac{x}{x_2} \Delta_2,$$

что является обычным представлением для этого типа элемента.

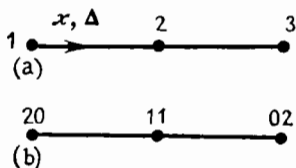


Рис. 8.4. Трехузловой стержневой сегмент — альтернативные формы нумерации узлов. (a) Нумерация узлов для физических координат; (b) нумерация узлов для естественных координат.

Для трех точек на линии (рис. 8.4(a)) имеем $m=2$. Опять $x_1=0$ и при равномерном разбиении $x_2=2x_1$. Таким образом,

$$\Delta = \frac{(x-x_2)(x-2x_2)}{2x_2^2} \Delta_1 + x \frac{2x_2-x}{x_2^2} \Delta_2 + \frac{x(x-x_2)}{2x_2^2} \Delta_3.$$

Альтернативная форма представления координат узлов на прямой использует *естественные координаты*, которые получаются при переходе от физических координат к безразмерной системе, причем естественные координаты принимают в узлах значения 0

или 1. Поэтому применение естественных координат является полезным при задании функций формы.

Чтобы ввести естественные координаты в одномерном случае, рассмотрим изображенный на рис. 8.5 сегмент длиной x_2 . Расстоя-

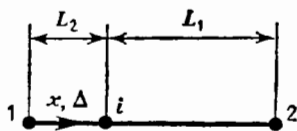


Рис. 8.5. Естественные координаты в одномерном случае.

ния от точки i до точек 1 и 2, определенные через L_1 и L_2 , обозначены так, что

$$L_1 + L_2 = 1. \quad (8.7)$$

Следовательно, согласно данному выше определению естественных координат, $L_1 = 1$ в точке 1 и $L_1 = 0$ в точке 2, $L_2 = 1$ в точке 2 и $L_2 = 0$ в точке 1.

Теперь можно задать координату x узла в виде

$$x = L_1 x_1 + L_2 x_2. \quad (8.8)$$

Объединяя (8.7) и (8.8), запишем

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{Bmatrix} \quad (8.9)$$

и после обращения матрицы получим следующее выражение для L_1 и L_2 через физические координаты x_1 и x_2 :

$$\begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{(x_2 - x_1)} \begin{bmatrix} x_2 & -1 \\ -x_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix}. \quad (8.10)$$

В этой связи подчеркнем, что задание граничных точек линии точками 1 и 2 служит лишь для того, чтобы ввести естественные координаты, соответствующие полной длине этой линии. Если разбить весь отрезок на несколько сегментов, то внутренние и граничные точки обозначаются различным образом.

Естественные координаты позволяют в простом виде представить функции формы для линий, разделенных на любое число сегментов. С этой целью удобно перенумеровать узлы согласно схеме на рис. 8.3(b). Самой крайней с левой стороны точке присваивается номер 0, а самой правой — номер m . Построение функции формы сводится к выбору интерполяционного полинома m -го порядка, проходящего через эти точки.

Обозначая вновь типичную степень свободы через i , выпишем формулу перехода к естественным координатам в виде следующей

интерполяционной формулы Лагранжа:

$$N_i(L_i) = \prod_{j=1}^i \left(\frac{mL_i - j + 1}{j} \right) \quad \text{для } i \geq 1, \\ = 1 \quad \text{для } i = 0. \quad (8.11)$$

Аналогичная формула справедлива и для $N_i(L_2)$. Прежде чем выписать полную функцию формы, заметим сначала, что каждый узел может быть идентифицирован указанием положения относительно двух граничных точек элемента. Используем ниже индексы p и q , где p обозначает число узлов, лежащих справа от рассматриваемой точки, а q — число узлов, лежащих слева. На рис. 8.4(b), например, три узла обозначены как 20, 11 и 02. Им соответствуют функции формы N_{20} , N_{11} и N_{02} . Зададим теперь функцию формы в виде

$$N_{pq} = N_p(L_1)N_q(L_2), \quad (8.12)$$

где $N_p(L_1)$ и $N_q(L_2)$ даются формулой (8.11) с соответствующей заменой i на p и q .

Для рассмотренного выше элемента имеем (при $m=2$) $N_2(L_1) = L_1(2L_1-1)$, $N_2(L_2) = L_2(2L_2-1)$, $N_1(L_1) = 2L_1$, $N_1(L_2) = 2L_2$, $N_0(L_1) = N_0(L_2) = 0$. Тогда представление функции перемещений в естественных координатах имеет вид (здесь узловые перемещения помечены теми же нижними индексами, что и функции формы)

$$\Delta = N_{20}\Delta_{20} + N_{11}\Delta_{11} + N_{02}\Delta_{02} = \\ = L_1(2L_1-1)\Delta_{20} + 4L_1L_2\Delta_{11} + L_2(2L_2-1)\Delta_{02}.$$

При определении L_1 и L_2 в (8.10) x_2 следует заменить на x_{02} , а x_1 на x_{20} . Чтобы проверить соответствие выписанного выражения с предыдущим заданием этой функции в терминах физических координат, необходимо определить преобразование координат, представленных на рис. 8.4(b), к координатам на рис. 8.4(a). Приведенное выше выражение оказывается тождественным с полученным для этого случая ранее, за исключением того, что нижние индексы у x на единицу меньше (в нашем случае x_1 соответствует x_2 из проведенного ранее построения).

Используя функции формы, выраженные в терминах L_1 и L_2 , в формуле для матриц жесткости элемента (см. разд. 6.2), получим

интегралы вида $\int_0^a L_1^b L_2^c dx$, где a — полная длина элемента. Одним

из преимуществ использования безразмерных координат L_1 и L_2 является возможность получения явного алгебраического выражения для выписанного интеграла [8.6]. Чтобы показать это, заметим

сначала, что $L_2 = 1 - L_1$ и $dx = a d\xi$. Таким образом,

$$\int_0^a L_1^b L_1^c dx = \int_0^1 L_1^b (1 - L_1)^c a d\xi.$$

После преобразования интеграл имеет вид [8.7]

$$a \int_0^1 L_1^b (1 - L_1)^c d\xi = a \frac{\Gamma(b+1) \Gamma(c+1)}{\Gamma(b+c+2)},$$

где $\Gamma(b+1)$, $\Gamma(c+1)$, $\Gamma(b+c+2)$ — гамма-функции, для которых $\Gamma(b+1) = b!$ и аналогично для $\Gamma(c+1)$, $\Gamma(b+c+2)$. Следовательно,

$$\int_0^a L_1^b L_1^c dx = \frac{ab!c!}{(b+c+1)!}. \quad (8.13)$$

Заметим, что $0! = 1$.

Далее в книге не используются одномерные естественные координаты. Однако проведенное рассмотрение закладывает основу использования указанных координат в двух- и трехмерном случаях, где выгоду от их применения трудно переоценить.

8.3.2. Эрмитова интерполяция

В задачах изгиба требуется аппроксимировать как функцию, так и ее производные. В других случаях, когда представление первой производной не существенно, может оказаться желательным ввести

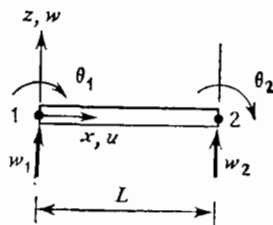


Рис. 8.6. Степени свободы для эрмитовой интерполяции кубическим полиномом в одномерном случае.

первую производную и даже производные более высокого порядка в качестве степеней свободы. Это можно осуществить с помощью эрмитовой полиномиальной интерполяции, к рассмотрению которой мы переходим ниже.

Рассмотрим нормированный интервал, соединяющий точки 1 и 2, в координатах $\xi = x/L$, как показано на рис. 8.6. Требуется построить функцию Δ , которая вместе со своими производными до $(m-1)$ -го порядка включительно удовлетворяет рассматриваемым условиям в граничных точках. Эта функция может быть записана в виде

функции формы следующим образом:

$$\Delta = N_1 \Delta_1 + N_2 \Delta'_1 + \dots + N_m \Delta_1^{m-1} + N_{m+1} \Delta_2 + N_{m+2} \Delta'_2 + \dots + N_{2m} \Delta_2^{m-1}, \quad (8.14)$$

где верхние индексы у Δ_1 и Δ_2 (например, $m-1$) означают порядок производных по x . Теперь в нашем распоряжении имеется $2m$ условий для построения каждой функции формы N_i , так как каждая функция формы (или ее соответствующая производная) должна равняться 1, если Δ (или ее соответствующая производная) вычисляется для степени свободы, отвечающей N_i , и должна равняться нулю, если вычисления проводятся для любой из оставшихся $(2m-1)$ степеней свободы. Следуя принятому в практике выбору полиномиального описания функции поведения, заключаем, что существование $2m$ условий предполагает описание каждой функции N_i полиномом порядка $2m-1$, т. е. полиномом, имеющим $2m$ коэффициентов. Таким образом,

$$N_i = a_1 + a_2 \xi + a_3 \xi^2 + \dots + a_{2m} \xi^{2m-1}. \quad (8.15)$$

Далее разрешаем полученные выражения относительно $2m$ величин a_i . Указанные операции повторяем для каждой из $2m$ функций формы N_i .

Вышесказанное можно проиллюстрировать на примере простого изгибаемого конструктивного элемента, изображенного на рис. 8.6. Так как предполагается, что на каждом конце поперечное перемещение w и его первая производная непрерывны, то $m=2$. Здесь $\Delta=w$ и в точке 1

$$\Delta_1 = w_1, \quad \Delta'_1 = -\left. \frac{dw}{dx} \right|_1 = \theta_1.$$

Аналогичные равенства справедливы и для точки 2. Из (8.15) следует, что каждая функция формы в этом случае имеет вид

$$N_i = a_1 + a_2 \xi + a_3 \xi^2 + a_4 \xi^3.$$

Рассмотрим теперь построение функции N_1 . Вначале представим ее в виде $N_1 = a_1 + a_2 \xi + a_3 \xi^2 + a_4 \xi^3$. Полагая $N_1=1$ при $x=0$ и $N_1=0$ при $x=L$, а $N'_1=0$ на обоих концах $x=0$ и $x=L$, получим

$$1 = a_1 \quad (N_1 = 1 \text{ при } \xi = 0),$$

$$0 = \frac{a_2}{L} \quad (N'_1 = 0 \text{ при } \xi = 0),$$

$$0 = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \quad (N_1 = 0 \text{ при } \xi = 1),$$

$$0 = \frac{a_2}{L} + \frac{2a_3}{L} + \frac{3a_4}{L} \quad (N'_1 = 0 \text{ при } \xi = 1),$$

откуда $a_1=1$, $a_2=0$, $a_3=-3$, $a_4=2$, поэтому $N_1=1-3\xi^2+2\xi^3$. Аналогичным образом находим, что оставшиеся функции формы, задаваемые первоначально с помощью (5.14a), имеют вид

$$N_3=3\xi^2-2\xi^3, \quad N_2=-x(\xi-1)^2, \quad N_4=-x(\xi^2-\xi).$$

8.4. Прямоугольные элементы

Чтобы обобщить концепцию интерполяции на двумерный случай и построить функции, которые однозначно определяются на каждой стороне прямоугольника с помощью заданных на этих сторонах и вершинах прямоугольника степеней свободы, можно использовать простое перемножение одномерных в направлениях x и y функций

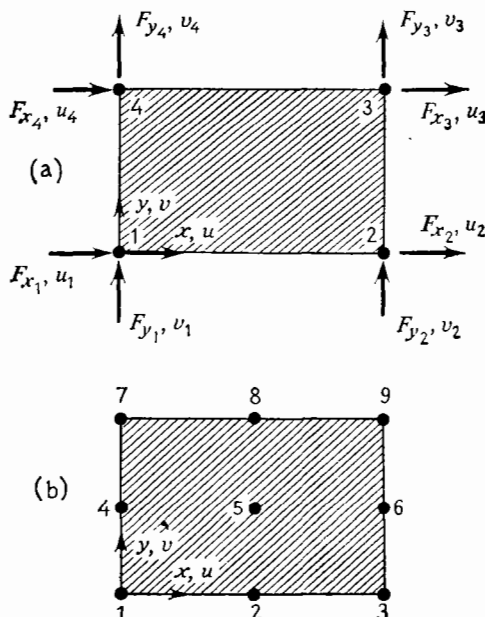


Рис. 8.7. Интерполяция Лагранжа в двумерном случае. (а) Прямоугольник с билинейной функцией; (б) прямоугольник с биквадратной функцией.

форм. Изображенный на рис. 8.7(а) прямоугольник с узлами, расположенными только в его вершинах, для которого требуется найти линейное поле перемещений, служит примером указанной процедуры. Имеем для компоненты перемещений Δ (которая может быть u или v):

$$\Delta = (N_{1x}N_{1y})\Delta_1 + (N_{2x}N_{1y})\Delta_2 + (N_{2x}N_{2y})\Delta_3 + (N_{1x}N_{2y})\Delta_4, \quad (8.16)$$

где $N_{1x}=(1-\xi)$, $N_{2x}=\xi$, $N_{1y}=(1-\eta)$, $N_{2y}=\eta$, а $\xi=x/x_2$, $\eta=y/y_2$. Соотношение (8.16) отвечает билинейной интерполяционной формуле.

Далее можно рассмотреть изображенный на рис. 8.7(b) *) прямоугольник, имеющий дополнительные узлы на серединах сторон и один узел внутри элемента (биквадратная интерполяция). Имеем

$$\Delta = (N_{1x} N_{1y}) \Delta_1 + (N_{2x} N_{1y}) \Delta_2 + (N_{3x} N_{1y}) \Delta_3 + \\ + (N_{1x} N_{2y}) \Delta_4 + (N_{2x} N_{2y}) \Delta_5 + (N_{3x} N_{2y}) \Delta_6 + \\ + (N_{1x} N_{3y}) \Delta_7 + (N_{2x} N_{3y}) \Delta_8 + (N_{3x} N_{3y}) \Delta_9, \quad (8.17)$$

где $N_{1x}=[(x-2x_2)(x-x_2)]/2x_2^2$ и т. д. согласно введенной ранее лагранжевой процедуре интерполяции.

Заметим, что полная интерполяция квадратичной или более высокого порядка функции приводит к появлению внутренних узлов. Интерполяция кубической функции дает массив размерности 4×4 и четыре внутренних узла.

Указанные выше построения легко провести, вводя следующее тройное матричное произведение:

$$\Delta = [N_\xi] [N_\eta] [R] \{N_\eta\}, \quad (8.18)$$

где $[N_\xi]$, $[N_\eta]$ — векторы функции формы соответственно в направлениях x и y , а $[R]$ — матрица узловых перемещений. Для билинейной интерполяции, например, имеем

$$\Delta = [(1-\xi) \ \xi] \begin{bmatrix} \Delta_1 & \Delta_4 \\ \Delta_2 & \Delta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (1-\eta) \\ \eta \end{Bmatrix},$$

что приводит к (8.16).

В разд. 8.5 при помощи треугольника Паскаля демонстрируется, что не представляет труда задать совокупность узлов для треугольных элементов, обеспечивающую полноту полиномиальных разложений вплоть до любого заданного порядка. Чтобы выяснить взаимосвязь между лагранжевой интерполяцией для прямоугольных элементов и полнотой соответствующего полинома, рассмотрим вновь изображенный на рис. 8.8 треугольник Паскаля.

Во-первых, следует заметить, что порядок одномерного полинома в точности отвечает соответствующему порядку интерполяционной формулы Лагранжа. Например, $\Delta = a_1 + a_2 x$ соответствует линейной интерполяции. Тогда билинейная интерполяция, определенная в терминах обобщенных координат, может быть описана на основе треугольника Паскаля в виде произведения линейных функций. Из рис. 8.8(a) следует, что это приводит к $\Delta = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy$. Коэффициенты полинома при биквадратной ин-

*) Здесь и в других примерах этой главы способ нумерации узлов, описанный в разд. 2.1, не используется.

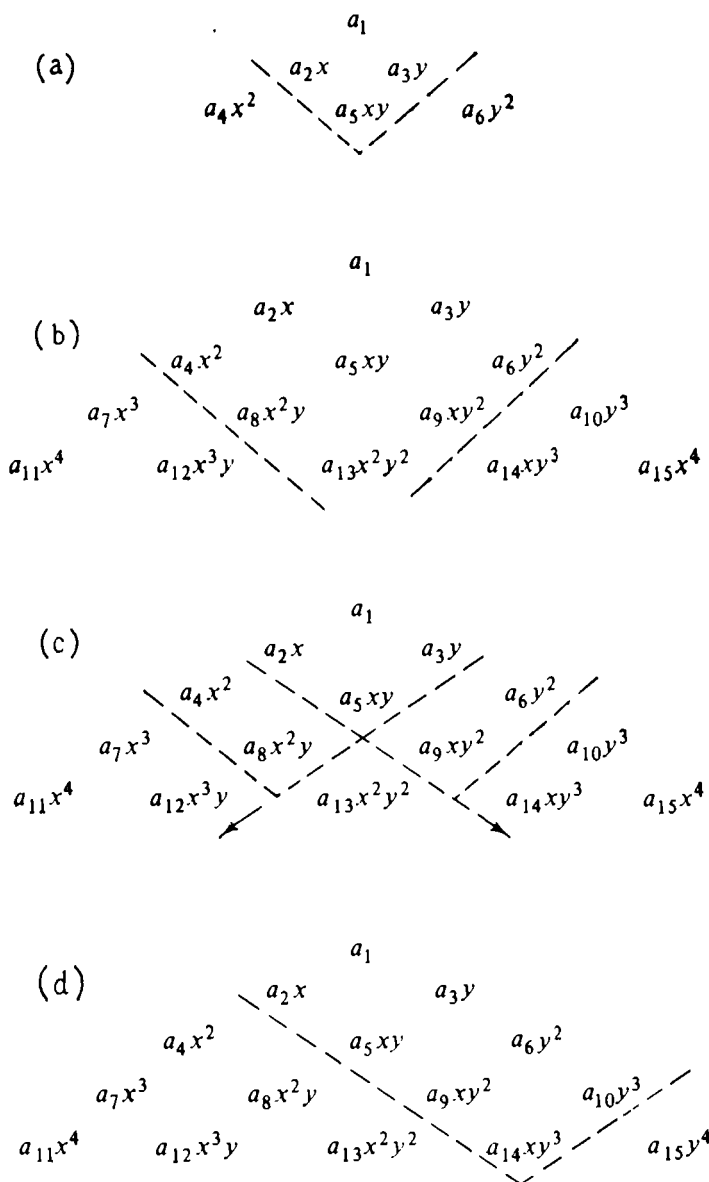


Рис. 8.8. Представление функций формы в терминах полиномиальных рядов: (а) билинейная интерполяция; (б) биквадратная интерполяция; (с) полиномиальный базис для восьмиугольного прямоугольника; (д) полиномиальный базис с линейным разложением по x и квадратичным разложением по y (шесть узлов).

терполяции могут быть без труда определены согласно рис. 8.8(b). Это может быть выполнено и для представлений более высокого порядка при помощи соответствующих произведений.

Из рассмотрения треугольника Паскаля становится очевидным, что двумерная лагранжева интерполяция содержит полную систему членов порядка n в полиномиальном разложении и отдельные члены до порядка $2n$. Линейная (первого порядка) интерполяция является полной относительно членов первого порядка (a_2x , a_3y) и неполной по отношению к членам второго порядка (так как члены с x^2 и y^2

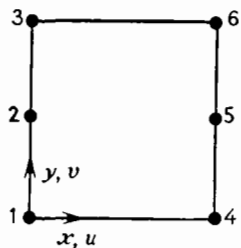


Рис. 8.9. Неравномерная интерполяция вдоль направлений x и y .

опущены, а имеется лишь член с произведением xy). Поскольку скорость сходимости определяется наивысшим порядком полного полинома [8.8], полное разложение в двумерном случае для прямоугольника применять неэффективно. Это одна из причин исключения определенных степеней свободы. Наличие внутренних узлов, как, например, в биквадратном или других представлениях более высокого порядка, вообще говоря, создает неудобства при оперировании с данными, поэтому требуются функции, выраженные в терминах узлов, принадлежащих лишь сторонам и вершинам элементов.

Простой способ достижения указанной цели иллюстрируется на рис. 8.9 и 8.8(d). Изображенный на рис. 8.9 прямоугольный элемент содержит шесть узловых точек, расположенных так, чтобы в направлении x имела возможность для линейной интерполяции, а в направлении y — для квадратичной. На рис. 8.8(d) изображены соответствующие члены полиномиального разложения. Очевидно, что в этом случае можно использовать лагранжеву интерполяцию и выразить поле перемещений непосредственно через функции формы. Используя схему из (8.18), получим линейные интерполяционные функции для $[N_\xi]$ и квадратичные интерполяционные функции для $[N_\eta]$ и, кроме того, матрицу

$$[R] = \begin{bmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \\ \Delta_4 & \Delta_5 & \Delta_6 \end{bmatrix}.$$

Схема эрмитовой интерполяции распространяется на двумерный случай аналогично тому, как это делалось для лагранжевой интер-

поляции. Соотношение (8.18) и в этом случае рассматривается как основа подхода, однако здесь матрица $[R]$ должна содержать степени свободы, равные производным от трансляционных степеней

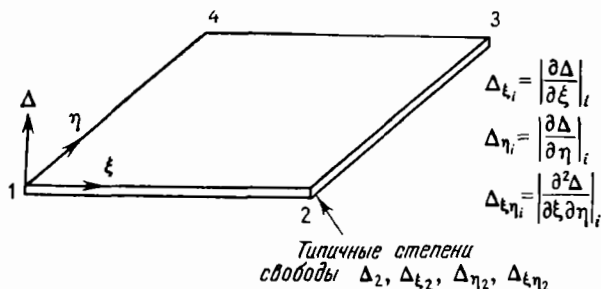


Рис. 8.10. Бикубическая эрмитова полиномиальная интерполяция.

свободы. Например, для пластины, изображенной на рис. 8.10, имеем (см. рисунок, где обозначены соответствующие степени свободы)

$$[R] = \begin{bmatrix} \Delta_1 & \Delta_{\eta_1} & \Delta_4 & \Delta_{\eta_4} \\ \Delta_{\xi_1} & \Delta_{\xi\eta_1} & \Delta_{\xi_4} & \Delta_{\xi\eta_4} \\ \Delta_2 & \Delta_{\eta_2} & \Delta_3 & \Delta_{\eta_3} \\ \Delta_{\xi_2} & \Delta_{\xi\eta_2} & \Delta_{\xi_3} & \Delta_{\xi\eta_3} \end{bmatrix},$$

тогда $[N_{\xi}] = [N_{1\xi} N_{2\xi} N_{3\xi} N_{4\xi}]$, где $N_{1\xi}, \dots, N_{4\xi}$ — эрмитовы функции формы в направлении x , определенные в самом конце п. 8.3.2. Аналогичным образом строится $[N_{\eta}]$.

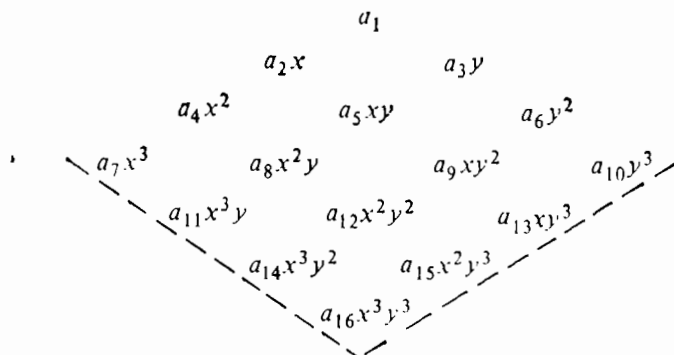


Рис. 8.11. Бикубическое полиномиальное разложение.

Чтобы задать указанное выше соотношение для полиномиального разложения, необходимо лишь обратиться к рис. 8.11, согласно которому, как и предполагалось, исходя из матрицы $[R]$, в разло-

жение входит 16 членов. Данная функция формы изучается еще раз более подробно в разд. 12.2.

В зависимости от задачи необходимо определить различное число узлов на каждой из четырех сторон или же иметь одинаковое число узлов на каждой стороне, но исключить внутренние узлы. Если можно в каждом из случаев выделить соответствующие члены полиномиального разложения, то легко построить преобразование от обобщенных параметров полинома $\{a\}$ к узловым перемещениям $\{\Delta\}$, а затем с целью получения выражений в терминах последних разрешить эти соотношения (см. (5.3a) — (5.5a)). Внутренние узлы можно исключить, задавая полную интерполяционную функцию, выписывая энергию деформации для элемента и «конденсируя» нежелательные степени свободы с помощью процедуры, описанной в разд. 2.8. Альтернативным подходом служит непосредственное построение функций формы с помощью методики, обсуждаемой в разд. 8.7.

8.5. Треугольные элементы

В случае треугольных элементов процедуры интерполяции тесно связаны с понятием *треугольных координат*. Эти координаты помогают не только построить функции формы, которые непосредственно относятся к узловым, а не к обобщенным степеням свободы, но также с их помощью регулярным способом обозначить узловые точки элемента. Другие преимущества использования треугольных координат становятся очевидными только после детальных рассуждений.

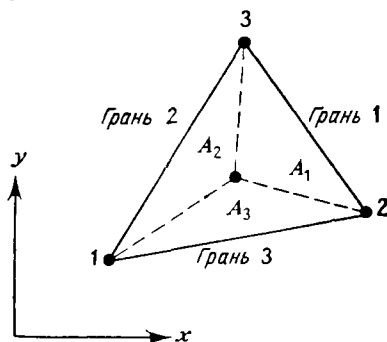


Рис. 8.12. Треугольные координаты.

Регулярный способ обозначения узлов в треугольных координатах может быть задан, как указано на рис. 8.12. В этом случае грани элемента определяются противолежащей вершиной. Например, грани 1 противолежит вершина 1. Исследуем сначала способы идентификации узла внутри треугольника. Если, как указано на рис. 8.12,

провести из данного узла внутри треугольника отрезки к его вершинам, то исходный треугольник разделится на три треугольника с площадями A_1 , A_2 и A_3 , где нижние индексы соответствуют прилежащим граням. *Треугольные координаты* L_i ($i=1, 2, 3$) суть по определению отношение площадей A_i ко всей площади A , т. е.

$$L_1 = A_1/A, \quad L_2 = A_2/A, \quad L_3 = A_3/A. \quad (8.19)$$

Кроме того, сумма указанных площадей A_i равна A : $A_1 + A_2 + A_3 = A$. Разделив обе части соотношения на A , получим

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1. \quad (8.20)$$

Очевидно, что, согласно п. 8.3.1, эти координаты являются *естественными координатами* треугольной области. Теперь треугольные координаты можно использовать для определения прямоугольных координат x и y изображенной на рис. 8.12 точки. Имеем

$$x = L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3, \quad y = L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3. \quad (8.21)$$

Справедливость этого утверждения можно легко проверить. Действительно, предположим, что точку перемещают внутри треугольника до тех пор, пока она не совпадет с точкой 1. Тогда $A_1 = A$, $A_2 = A_3 = 0$ и $L_1 = 1$, $L_2 = L_3 = 0$. Следовательно, если x соответствует точке 1, то $x = x_1$. Очевидно, что треугольные координаты полностью совпадают с функциями формы для простого треугольного элемента с тремя узлами.

Геометрические характеристики элемента заданы с помощью координат вершин x и y . Чтобы выразить L_1 , L_2 и L_3 через эти данные, объединим (8.20) и (8.21) в следующую систему из трех уравнений:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix}.$$

Обращая матрицу, получим

$$L_i = \frac{1}{2A} (b_{0i} + b_{1i}x + b_{2i}y) \quad (i=1, 2, 3), \quad (8.22)$$

где

$$b_{0i} = x_{i+1}y_{i+2} - x_{i+2}y_{i+1}, \quad b_{1i} = y_{i+1} - y_{i+2}, \quad b_{2i} = x_{i+2} - x_{i+1}, \quad (8.23)$$

индекс i пробегает значения 1, 2, 3, и

$$A = \frac{1}{2} (x_2 y_3 + x_3 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_3 y_2 - x_1 y_3). \quad (8.24)$$

Здесь A , согласно обозначению, — площадь треугольника.

Если сторона, соединяющая точки 1 и 2, расположена вдоль оси x и точка 1 помещена в начале координат ($x_1=y_1=y_2=0$), то получим

$$L_1 = \frac{1}{x_2 y_3} (x_2 y_3 - x y_3 - x_2 y + x_3 y),$$

$$L_2 = \frac{1}{x_2 y_3} (x y_3 - x_3 y), \quad L_3 = \frac{y}{y_3}.$$

Эти члены совпадают с функциями формы N_1, N_2, N_3 , заданными посредством (5.21а) для идентично расположенного треугольного элемента постоянной деформации.

Для того чтобы построить функции формы для элементов высокого порядка в треугольных координатах L_i , необходимо вначале определить способ задания и обозначения узлов указанных элементов. Эти рассуждения проиллюстрированы на рис. 8.13. Стороны

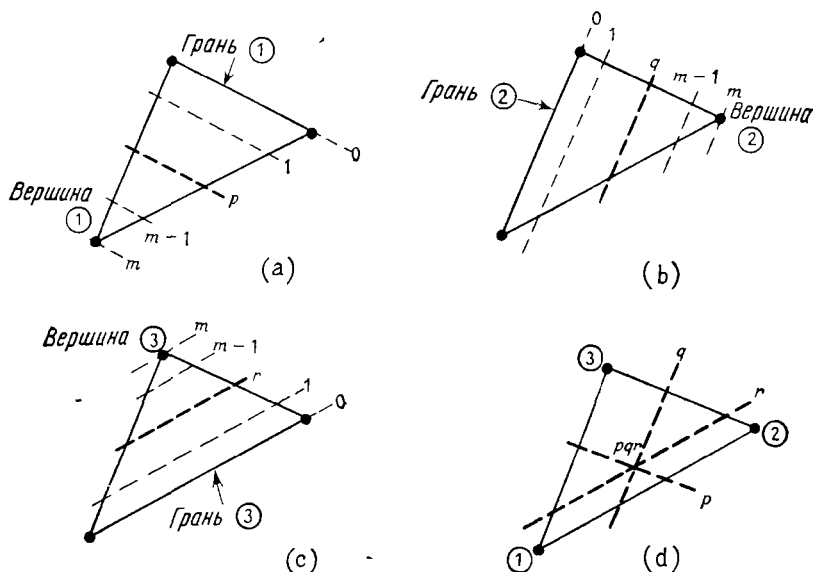


Рис. 8.13. Нумерация узлов сетки для треугольных координат. (а) Сетка в направлении 1; (б) сетка в направлении 2; (с) сетка в направлении 3; (д) обозначение типичного узла pqr .

обозначаются по противоположной вершине, например сторона 1 лежит против вершины 1. Нормаль к стороне определяет соответствующее направление. Штриховые линии на рис. 8.13(а) делят расстояние между стороной 1 и узлом 1 на m равных сегментов в направлении 1. Каждая линия пронумерована цифрами от 0 до m , причем линия с номером 0 совпадает со стороной 1. [Эти узлы не нумеру-

ются целыми числами от 1 до $m+1$, см. рис. 8.3(a), так как предыдущая нумерация более удобна. Аналогичный сдвиг при нумерации был проведен в одномерном случае на рис. 8.3(b).] На рисунке типичная линия разбивания обозначена символом p . Указанное разбиение приводит к появлению $(m+1)$ узлов на сторонах 2 и 3 и, очевидно, создает предпосылки для построения поля перемеще-

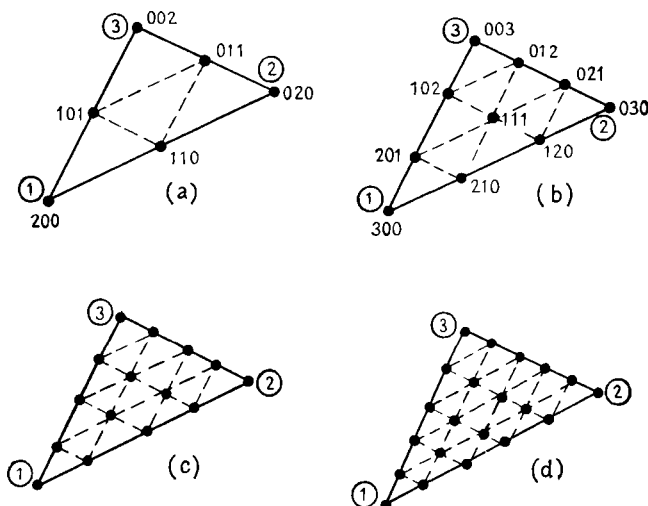


Рис. 8.14. Треугольники высокого порядка (а) Полный квадратичный полином ($m=2$); (б) полный кубический полином ($m=3$); (в) полный полином четвертого порядка ($m=4$); (г) полный полином пятого порядка ($m=5$). 1, 2, 3 — вершины, соответствующие треугольным координатам L_1, L_2, L_3

ний, основанного на полиномиальном представлении m -го порядка. Аналогичные построения можно провести для направлений 2 и 3, как показано на рис. 8.13(b) и (с), где типичные линии обозначены соответственно через q и r .

На рис. 8.13(d) показан способ идентификации некоторого узла. Узел задается тремя цифрами p, q и r в соответствии с обозначением типичных линий в трех направлениях. Заметим, что сумма трех чисел $(p+q+r)$ равна m . Указанный способ идентификации точек иллюстрируется на рис. 8.14 для четырех видов разбиения треугольного элемента. Следует заметить, что узлы в вершинах также помечены цифрами 1, 2 и 3, соответствующими треугольным координатам.

При задании функции перемещений в треугольном элементе для узловых перемещений принимается та же нумерация, что и для соответствующих узлов, т. е. pqr . В соответствии с установившейся традицией разыскиваем функции перемещений для элемента в

виде

$$\Delta = [N] \{ \Delta \} = \sum^{1/2(m+1)(m+2)} N_{pqr} \Delta_{pqr}. \quad (8.25)$$

Так, при $m=1$ функция перемещений дается формулой

$$\Delta = N_{100} \Delta_{100} + N_{010} \Delta_{010} + N_{001} \Delta_{001}, \quad (8.25a)$$

а для $m=2$, согласно рис. 8.14(a),

$$\Delta = N_{200} \Delta_{200} + N_{110} \Delta_{110} + \dots + N_{101} \Delta_{101} \quad (8.25b)$$

и т. д. для полинома любого порядка.

Теперь необходимо задать способ построения функций формы N_{pqr} так, чтобы они удовлетворяли обычным условиям, накладываемым на данные функции (например, $N_{pqr}=1$ в точке pqr ; $N_{pqr}=0$ во всех остальных точках). Как показано в одномерном случае, этим условиям можно удовлетворить, задавая функции формы в виде произведений функций соответствующих координат и проводя лагранжеву интерполяцию в каждом из направлений. По аналогии с одномерным случаем для применяемой функции имеем

$$N_{pqr}(L_1, L_2, L_3) = N_p(L_1) N_q(L_2) N_r(L_3), \quad (8.12a)$$

где члены в правой части соотношения задаются в виде

$$N_i(L_1) = \begin{cases} \prod_{j=1}^i \left(\frac{mL_1 - j + 1}{j} \right) & \text{для } i \geq 1, \\ 1 & \text{для } i = 0 \end{cases} \quad (8.11)$$

при $i=p, q$ или r соответственно.

В качестве примера рассмотрим построение функции формы N_{200} . Имеем $m=p=2$, $q=r=0$, поэтому $N_q = N_0(L_2)=1$, $N_r = N_0(L_3)=1$ и

$$N_2(L_1) = \frac{(2L_1 - 1 + 1)}{1} \times \frac{(2L_1 - 2 + 1)}{2} = L_1(2L_1 - 1).$$

Следовательно, $N_{200} = L_1(2L_1 - 1)$. Непосредственно устанавливается, что $N_{020} = L_2(2L_2 - 1)$, $N_{002} = L_3(2L_3 - 1)$, $N_{011} = 4L_2L_3$, $N_{110} = 4L_1L_2$ и $N_{101} = 4L_3L_1$. Имеются случаи, когда желательно оперировать с обобщенными, а не с узловыми степенями свободы. При этом полезно знать, что полный полином степени m можно записать в треугольных координатах в виде

$$\Delta = \sum_{i=1}^n a_i L_1^p L_2^q L_3^r \quad (p+q+r=m), \quad (8.1a)$$

где в сумму входят все однородные члены степени m , т. е. показатели функций формы в точности определяются трехцифровыми ин-

дексами узлов согласно рис. 8.14(а) и (б). Для кубического разложения, например, имеем

$$\Delta = (L_1)^3 a_1 + (L_2)^3 a_2 + (L_3)^3 a_3 + (L_1)^2 L_2 a_4 + (L_2)^2 L_1 a_5 + \\ + (L_3)^2 L_1 a_6 + (L_2)^2 L_3 a_7 + (L_1)^2 L_3 a_8 + (L_3)^2 L_2 a_9 + L_1 L_2 L_3 a_{10}.$$

Располагая выражением выписанного типа при построении опорной матрицы жесткости, можно использовать преимущества явных формул интегрирования для треугольного элемента.

Второй часто выполняемой при представлении полей в треугольных координатах операцией, особенно при рассмотрении соотношений между деформациями и перемещениями, является операция дифференцирования. Например, рассмотрим деформацию $\epsilon_x = du/dx$. Если рассматривается квадратичное поле перемещений, где u выражается в виде $N_{200}u_{200} + \dots + N_{101}u_{101}$, то первый член в выражении для ϵ_x равен

$$\frac{\partial N_{200}}{\partial x} = 4L_1 \frac{\partial L_1}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial x}.$$

Замечая, что, согласно определению L_i (8.22), $\partial L_i / \partial x = b_{1i} / 2A$ ($i = 1, 2, 3$), поэтому

$$\frac{\partial N_{200}}{\partial x} = \frac{b_{11}}{2A} (4L_1 - 1).$$

И наконец, что наиболее важно, можно выписать простое явное выражение для интегралов, которое является также обобщением формул одномерного случая. Искомые интегралы имеют вид

$$\mathcal{J}(L_1, L_2, L_3) = \int_A (L_1)^b (L_2)^c (L_3)^d dA = \\ = \frac{2Ab!c!d!}{(b+c+d+2)!}. \quad (8.26)$$

(Ср. с (8.13).) Из (8.20) вытекает, что только две координаты независимы и интеграл всегда можно преобразовать к виду

$$\mathcal{J}(L_1, L_2) = \int_A (L_1)^e (L_2)^f dA.$$

Так как это выражение представляет собой частный вид (8.26) при $d=0$, $b=e$, $c=f$, то

$$\mathcal{J}(L_1, L_2) = 2A \frac{e!f!}{(e+f+2)!}. \quad (8.26a)$$

Имея в виду приведенные выше рассуждения, интересно отметить некоторые не столь заметные преимущества представлений в треугольных координатах. Во-первых, задание узлов в представ-

лении элементов высокого порядка (см. рис. 8.14) автоматически указывает место расположения узлов. Заметим далее, что изображенные на этих рисунках массивы в точности соответствуют различным уровням в треугольнике Паскаля. Поэтому каждому порядку интерполяции в треугольных координатах отвечает полное полиномиальное представление соответствующего порядка. Ранее отмечалось значение понятия полноты и, по-видимому, по этой причине треугольные элементы занимают особое место в конечно-элементном анализе. Другая причина их распространенности состоит в возможности гибкого их использования при представлении геометрических объектов сложной формы.

8.6. Тетраэдральные элементы

Изображенный на рис. 8.15 тетраэдр есть трехмерный аналог плоского треугольного элемента. Подобно случаю плоского треугольного элемента определение функций формы и интегрирование энергии деформации осуществляются здесь в *тетраэдральных координатах*, которые являются аналогом треугольных координат из разд. 8.5.

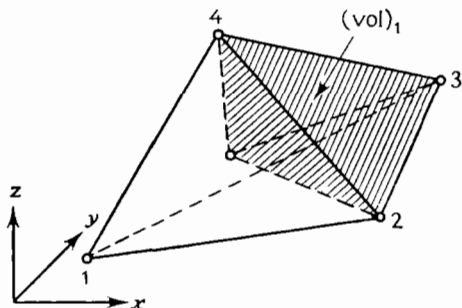


Рис. 8.15. Базисный тетраэдр.

Местоположение точки внутри тетраэдра, полный объем которого обозначен через (vol) , можно определить при помощи следующего набора отношений:

$$L_1 = \frac{(vol)_1}{(vol)}, \quad L_2 = \frac{(vol)_2}{(vol)}, \quad L_3 = \frac{(vol)_3}{(vol)}, \quad L_4 = \frac{(vol)_4}{(vol)}, \quad (8.27)$$

где $(vol)_i$ ($i=1, \dots, 4$) обозначает объем, заключенный между линиями, соединяющими точку с вершинами тетраэдра, противолежащими вершине i . На рис. 8.15 изображен $(vol)_1$. Величины L_1, \dots, L_4 представляют собой тетраэдральные координаты. С учетом (8.27) имеем

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1 \quad (8.28)$$

и, дополняя это уравнение соотношениями между декартовыми координатами точки x, y, z и тетраэдральными координатами, получим

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{Bmatrix}.$$

Обращая матрицу, заключаем, что

$$L_i = \frac{1}{6(\text{vol})} [(\text{VOL})_i + C_{1i}x + C_{2i}y + C_{3i}z] \quad (i = 1, \dots, 4), \quad (8.29)$$

где $(\text{VOL})_i$ — объем, заключенный между стороной тетраэдра 1 и лучами, проходящими через ее вершины и начало координат; (vol) равен одной шестой значения детерминанта выписанной выше (4×4) -матрицы, а C_{1i} , C_{2i} и C_{3i} — детерминанты возникающих при обращении (3×3) -подматриц.

Имеющаяся аналогия между тетраэдральными и треугольными координатами позволяет применить изобразенный на рис. 8.16 тетраэдр Паскаля при определении совокупности членов разло-

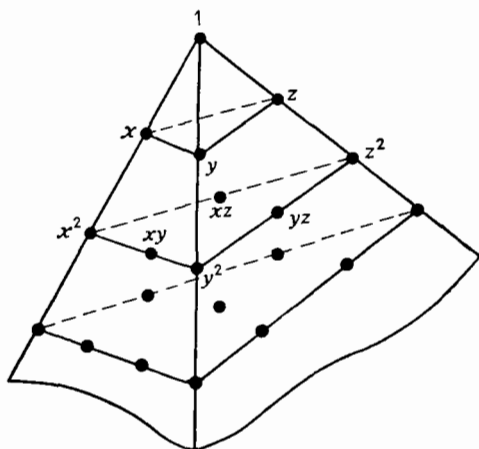


Рис. 8.16. Обобщение на трехмерный случай треугольника Паскаля.

жения для полных полиномов любого порядка, задаваемых в узловых точках элемента, а также функций формы, соответствующих указанным полиномам. Типичная тетраэдральная функция формы помечается четырьмя нижними индексами в виде N_{pqrs} и следующим образом зависит от L_1, \dots, L_4 :

$$N_{pqrs}(L_1, L_2, L_3, L_4) = N_p(L_1) N_q(L_2) N_r(L_3) N_s(L_4), \quad (8.30)$$

т. е. представляется в виде произведения функций от соответствующих объемных координат. Введение соответствующих нижних индексов аналогично случаю треугольных координат и иллюстрируется для тетраэдрального элемента, построенного на базе квадрата

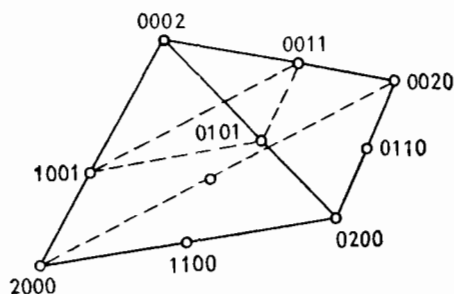


Рис. 8.17. Нумерация узлов для тетраэдрального элемента с квадратичным полиномиальным представлением.

тичных функций на рис. 8.17. Заметим, что сумма четырех индексов должна равняться $m=2$ в этом случае и порядку m выбранной функции в общем случае. Соответствующая формула для N_i , $i=p, q$ или r дается опять выражением (8.11).

При интегрировании в объемных координатах будем иметь следующую формулу для типичного интеграла:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(L_1, L_2, L_3, L_4) &= \int_{\text{vol}} (L_1)^a (L_2)^b (L_3)^c (L_4)^d d(\text{vol}) = \\ &= \frac{6(\text{vol}) a! b! c! d!}{(a+b+c+d+3)!}. \end{aligned} \quad (8.31)$$

Вследствие (8.28) только три из координат независимы, и поэтому можно упростить выписанное выражение. Предположим, что исключение $(L_4)^d$ приводит к следующему преобразованию интеграла $\mathcal{J}(\quad)$:

$$\mathcal{J}(L_1, L_2, L_3) = \int_{\text{vol}} (L_1)^e (L_2)^f (L_3)^g d(\text{vol}),$$

тогда имеем

$$\mathcal{J}(L_1, L_2, L_3) = \frac{6(\text{vol}) e! f! g!}{(e+f+g+3)!}. \quad (8.31a)$$

Подробное исследование тетраэдральных координат приводится в [8.9].

8.7. Внутренние моды и редукция к простым формам

Ранее отмечалось, что желательно выписывать уравнения элемента, отвечающие узлам, расположенным лишь в вершинах и на сторонах элемента. С внутренними степенями свободы трудно оперировать. Также было показано, что внутренние степени свободы естественным образом вводятся при построении функций формы для элементов высокого порядка. Аналогичная ситуация возникает, если соотношения выводятся на основе обобщенных координат, причем число указанных координат превышает число степеней свободы, отвечающих сторонам и вершинам элемента. Эти «дополнительные» обобщенные координаты можно рассматривать как «внутренние» степени свободы. В этом разделе излагается два способа, с помощью которых можно исключить внутренние степени свободы. Кроме того, изучается вспомогательная задача построения функций формы для элементов с различным числом узлов на соответствующих сторонах элемента.

Рассмотрим сначала случай, когда внутренние степени свободы естественно возникают при построении функций формы для элемента высокого порядка. В этом случае матрица жесткости элемента может быть построена с использованием всех степеней, представленных в функции формы. Предположим, что внутренние степени свободы обозначены нижним индексом b , а степени свободы, отвечающие сторонам и вершинам элемента, — нижним индексом c . Тогда построенная матрица жесткости может быть записана в виде

$$\begin{bmatrix} k_{bb} & k_{bc} \\ k_{cb} & k_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_b \\ \Delta_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_b \\ F_c \end{Bmatrix}. \quad (8.32)$$

Во внутренних точках элемента силы $\{F_b\}$ будут известными величинами, полученными в результате рассмотрения энергетически эквивалентных нагрузок, приложенных сосредоточенных нагрузок и т. д., либо эти силы равны нулю, так как указанные точки не соприкасаются с другими элементами конструкции. Следовательно, исключение внутренних мод проводится в точности по схеме конденсации из разд. 2.8.

Здесь уместно отметить, что «внутренние моды» более точно называть как «дутые моды», т. е. моды, имеющие отличные от нуля амплитуды внутри элемента и обращающиеся в нуль на его сторонах. Это происходит в силу того, что амплитуда функции формы равна единице для рассматриваемой степени свободы и нулю для остальных степеней свободы.

Второй способ исключения нежелательных степеней свободы состоит в непосредственной модификации функции формы таким образом, чтобы она выражала только требуемое число параметров. По видимому, простейшей схемой исключения степеней свободы из

рассматриваемых выражений является введение соотношений, связывающих исключаемые степени свободы с оставшимися степенями. Рассмотрим, например, изображенный на рис. 8.14(а) треугольный элемент, построенный при помощи квадратичного поля перемещений, функция формы для которого подробно изучалась в разд. 8.5. Предположим, что необходимо исключить узел 110. Можно потребовать, чтобы перемещение вдоль данной стороны было линейно; тогда $\Delta_{110} = (\Delta_{200} + \Delta_{020})/2$, и, подставляя в полное выражение для поля перемещений, получим

$$\Delta = N_{200}^R \Delta_{200} + N_{020}^R \Delta_{020} + N_{002} \Delta_{002} + N_{011} \Delta_{011} + N_{101} \Delta_{101},$$

где $N_{200}^R = (N_{200} + 1/2 N_{110})$, $N_{020}^R = (N_{020} + 1/2 N_{110})$.

Предложенный подход может быть успешно применен и для прямоугольных областей. Например, выше была указана необходимость исключения внутреннего узла изображенного на рис. 8.7(б) прямоугольного элемента с биквадратным полем перемещений. Перемещение в этой точке можно задать в виде среднего значения от перемещений на серединах сторон: $\Delta_5 = 1/4 (\Delta_2 + \Delta_4 + \Delta_6 + \Delta_8)$. Можно также включить при усреднении и узлы в вершинах прямоугольника с помощью взвешенного учета соответствующих степеней свободы. Таким образом, можно выписать набор различных выражений в терминах заданной сокращенной системы степеней свободы.

Более элегантный подход [8.10] к построению специальных функций перемещений можно осуществить с помощью процедуры, включающей суперпозицию отдельных функций перемещений. Прежде чем приступить к реализации данного подхода, который здесь будет использован только для прямоугольных элементов, удобно выразить функции формы в терминах безразмерных координат (ξ, η) с началом в центре прямоугольника. В этой связи функции формы для прямоугольников задаются в физической системе координат (x, y) , начало которой расположено в вершине прямоугольника.

Чтобы осуществить это преобразование (см. рис. 8.18(а)), используем соотношения $\xi = (x - x_5)/(x_5 - x_1)$ и $\eta = (y - y_5)/(y_5 - y_1)$, где x_5 и y_5 — координаты центра прямоугольника, а x_1 и y_1 — координаты нижней левой вершины. Тогда безразмерные координаты четырех угловых точек всегда равны $+1$ или -1 .

Рассмотрим теперь построение функции формы для прямоугольного элемента с биквадратным полем перемещений, в котором необходимо исключить внутреннюю точку (см. рис. 8.18(а)). Функцию формы для лежащего на стороне элемента узла 2 можно получить в виде произведения квадратичной функции $(1 - \xi^2)$, соответствующей направлению вдоль рассматриваемой стороны, и линейной функции $1/2(1 - \eta)$ для перпендикулярного направления. Поэтому полная функция формы для этой точки равна $N_2 = 1/2(1 - \xi^2)(1 - \eta)$. Построение функции формы для угловой точки приводит к более сложной задаче. Во-первых, как показано на рис. 8.18(б) для точки

1, билинейная функция дает ненулевые смещения в точках 2 и 4. Задать нулевые смещения в этих точках можно, вычитая из данной функции $1/2$ функции формы N_2 (см. рис. 8.18(c)) и $1/2$ функции формы N_4 . [Согласно предыдущим рассуждениям, $N_4 = 1/2(1-\xi)(1-\eta^2)$]. Следовательно,

$$N_1 = 1/4(1-\xi)(1-\eta) - 1/4(1-\xi^2)(1-\eta) - 1/4(1-\xi)(1-\eta^2).$$

Можно показать, что полиномиальные коэффициенты, входящие в рассмотренные функции, лежат в отмеченных на рис. 8.18(c) областях, т. е. они отвечают квадратичным функциям, соответству-

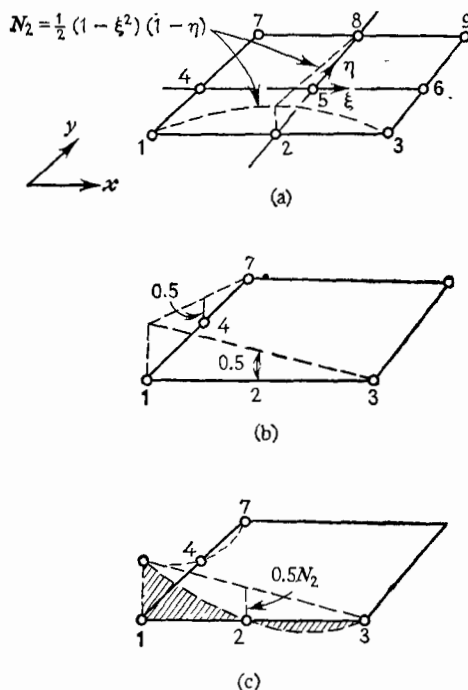


Рис. 8.18. Непосредственное построение поля перемещений для восьмиузлового прямоугольного элемента.

ющим разложениям вдоль сторон, умноженным на линейные функции в перпендикулярном направлении. С помощью изложенной методики схема легко распространяется на построение выражений любого порядка вдоль сторон элемента для двух- и трехмерного случаев.

8.8. Изопараметрическое представление [8.11]

Изопараметрические элементы — это элементы, в которых функции, используемые для представления поведения при деформировании, используются также и для описания геометрических характеристик элемента. Построение изопараметрического элемента представляет собой «преобразование» безразмерного прямоугольного элемента с заданным числом узлов в реальный криволинейный элемент с тем же числом узлов. Так, если функции, задающие поле перемещений в формулировке, основанной на принципе минимума потен-

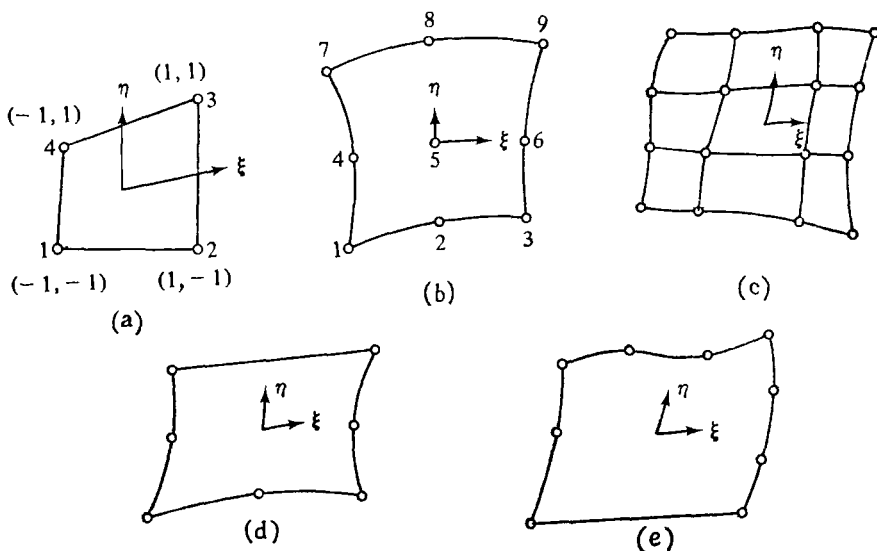


Рис. 8.19. Изопараметрические элементы.

циальной энергии, суть кубические полиномы, стороны элемента описываются теми же кубическими функциями. Если межэлементно совместные поля перемещений выбираются для описания геометрических характеристик элемента, то в объединенной аналитической модели деформированный элемент состыковывается с любым подобным ему соседним элементом без разрывов геометрических характеристик.

В двумерном анализе простейшим четырехсторонним изопараметрическим элементом является изображенный на рис. 8.19(a) элемент, в котором для обобщения прямоугольника на случай произвольного четырехугольника используется линейное поле. Лучшее задание криволинейных сторон достигается для элементов более высокого порядка, например изображенных на рис. 8.19(b) и (c),

где квадратичные и кубические функции, используемые для представления перемещений, применяются также для задания границ. Представляют, кроме того, практический интерес изображенные на рис. 8.19(d) и (e) *элементы смешанного типа* с различным числом узлов на каждой стороне и при наличии или отсутствии внутренних узлов.

Несущественно, что те же самые функциональные представления для перемещений используются и для задания геометрических характеристик элемента. Если порядок функций, представляющих геометрические характеристики, ниже порядка функциональных представлений для перемещений, то рассматриваемые элементы называются *субпараметрическими*; если же порядок функций, задающих геометрию, выше, то элементы называются *суперпараметрическими*. Изопараметрические, суб- и суперпараметрические конечно-элементные представления являются, пожалуй, наиболее важными при анализе трехмерных упругих тел. Соответствующие вопросы рассматриваются в гл. 10. Трехмерный анализ обычно требует чрезвычайно большой памяти ЭВМ. Если конструкция имеет криволинейную поверхность, то при регулярном конечно-элементном представлении обычно требуется большое число элементов для воспроизведения геометрических характеристик конструкции без существенного улучшения в представлениях полей напряжений или перемещений. Поэтому представление с помощью изопараметрических элементов уменьшает затраты на описание геометрии.

Для описания операций, выполняемых при построении изопараметрических элементов, достаточно рассмотреть двумерный случай. На первом шаге требуется задать систему безразмерных координат (ξ, η) с началом в центре элемента. Эти операции рассмотрены в разд. 8.7 для плоского прямоугольного элемента. Заметим еще раз, что для любого прямоугольника $\xi = (x - x_c)/(x_c - x_1)$ и $\eta = (y - y_c)/(y_c - y_1)$, где x_c и y_c — координаты центра прямоугольника, а x_1 и y_1 — координаты нижней левой угловой точки. Вспомним также, что безразмерные координаты четырех угловых точек всегда равны $+1$ или -1 (см. рис. 8.19(a)).

На втором шаге необходимо выразить функции формы $[N] = [N_1 \dots N_i \dots N_n]$ в терминах безразмерных координат. При билинейной интерполяции, например, имеем (для узлов, определенных на рис. 8.19(a))

$$[N] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1-\xi)(1-\eta) & (1+\xi)(1-\eta) & (1+\xi)(1+\eta) & (1-\xi)(1+\eta) \end{bmatrix}.$$

Определим функции формы, которые в силу сказанного записываются в виде $[N(\xi, \eta)]$, и зададим координаты x и y элемента в виде

$$x = [N(\xi, \eta)] \{x\}, \quad y = [N(\xi, \eta)] \{y\}, \quad (8.33)$$

где $\{x\}$ и $\{y\}$ включают координаты x и y узловых точек элемента, т. е.

$$\{x\} = [x_1 \dots x_i \dots x_n]^T, \quad \{y\} = [y_1 \dots y_i \dots y_n]^T. \quad (8.34)$$

Таким образом, $x=x_i$, $y=y_i$ в точке i . Соответственно имеем

$$u = [N(\xi, \eta)] \{u\}, \quad v = [N(\xi, \eta)] \{v\}, \quad (8.35)$$

где $\{u\} = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4]^T$, $\{v\} = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4]^T$.

Чтобы построить матрицу жесткости элемента, необходимо найти деформации, которые в свою очередь являются производными по x и y от перемещений. Однако теперь перемещения являются функциями от координат ξ и η . Следовательно необходимо найти связь между производными по x и y и производными по ξ и η . Это можно осуществить, применяя правило дифференцирования сложных функций. Получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial y}, \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial y}. \end{aligned} \quad (8.36)$$

Используя (8.33), определим $\partial x / \partial \xi = [\partial N / \partial \xi] \{x\}$ и аналогичным образом $\partial x / \partial \eta$ и т. д. Поэтому (8.36) можно записать в виде

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad (8.37)$$

где

$$[J]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial N}{\partial \xi} \right] \\ \left[\frac{\partial N}{\partial \eta} \right] \end{bmatrix}_{2 \times n} [\{x\} \{y\}]_{n \times 2}. \quad (8.38)$$

Как принято в матричной алгебре, матрица первых производных, т. е. (2×2) -матрица $[J]$, называется матрицей Якоби.

Для иллюстративного случая билинейного элемента (см. рис. 8.19(a)) имеем

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial N}{\partial \xi} \right] &= \frac{1}{4} [-(1-\eta) \ (1-\eta) \ (1+\eta) \ -(1+\eta)], \\ \left[\frac{\partial N}{\partial \eta} \right] &= \frac{1}{4} [-(1-\xi) \ -(1-\xi) \ (1+\xi) \ (1+\xi)]. \end{aligned}$$

Поэтому верхний левый элемент в $[J]$ равен

$$J_{11} = 1/4 [-(1-\eta) (x_2 - x_1) + (1+\eta) (x_3 - x_4)].$$

Аналогично находятся выражения для J_{12} , J_{21} и J_{22} .

Левая часть соотношения (8.37) задана, а вектор в правой части следует найти. Поэтому для получения требуемой информации, необходимо обратить [J]. Может случиться, что проектировщик задает систему реальных узлов (т. е. координаты узлов x_1, x_2 и т. д.), которая недопустима, т. е. возникает ситуация, когда матрица [J] вырождена. Операция обращения матрицы [J] чувствительна к определенным отклонениям от основной прямоугольной формы и, кроме того, к местоположению узлов на сторонах элемента [8.13]. Для биквадратных элементов, например, лучше всего располагать узлы в средней точке между соседними узлами, лежащими в вершинах.

Теперь можно изучить вопросы использования изопараметрических элементов при построении матрицы жесткости элемента. Соотношения между деформациями и перемещениями имеют обычный вид $\epsilon = [D] \{\Delta\}$, где деформации ϵ относятся к декартовой системе координат (x, y) . Поэтому [D] содержит производные функций формы по декартовым координатам. Для плоского состояния имеем, согласно (5.22),

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] & 0 \\ 0 & \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right] \\ \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right] & \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] \end{bmatrix} = [D] \left\{ \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \right\}. \quad (8.39)$$

Поэтому для определения [D] необходимо использовать преобразование (8.37).

Соотношения между напряжениями и деформациями имеют вид $\sigma = [E]\epsilon$, а элементарная площадь $dx dy$ при интегрировании заменяется на

$$dx dy = |J| d\xi d\eta, \quad (8.40)$$

где |J| — детерминант матрицы [J]. Кроме того, интегрирование выполняется в пределах от -1 до $+1$. Теперь можно записать обычную формулу для матрицы жесткости элемента (6.12а), выбирая в направлении z единичную толщину:

$$[k] = \left[\int_A [D]^T [E] [D] dA \right] = \left[\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [D]^T [E] [D] \det |J| d\xi d\eta \right]. \quad (8.41)$$

Очевидно, что выражение для [J] является весьма сложным даже в простейшем случае билинейного элемента. Поэтому задание явных выражений для [k] невозможно, и коэффициенты матрицы должны определяться путем численного интегрирования [8.12].

В связи с вопросами выбора функций формы для изопараметрического представления интересно отметить, что, если моды движе-

ния тела как твердого целого и условия постоянства деформаций включались в исходную (для прямоугольника) функцию поведения, то они сохраняются и после преобразования. В случае плоской задачи перемещение, соответствующее движению тела как твердого целого, и условия постоянства деформаций можно записать в общем виде $\Delta = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$. Для прямоугольника имеем

$$\Delta = [N(\xi, \eta)] \{\Delta\} = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y. \quad (8.42)$$

В каждом узле требуется, чтобы $\Delta_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i$, и после подстановки в (8.42) для n степеней свободы получим

$$\alpha_1 \sum_{i=1}^n N_i + \alpha_2 \sum_{i=1}^n N_i x_i + \alpha_3 \sum_{i=1}^n N_i y_i = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$

или

$$\sum_{i=1}^n N_i = 1, \quad \sum_{i=1}^n N_i x_i = x, \quad \sum_{i=1}^n N_i y_i = y.$$

Первое из приведенных условий выполняется в силу основных свойств функций формы, а второе и третье условия — вследствие (8.33).

Идеи изопараметрического представления переносятся естественно и на трехмерный случай. Здесь не приводится детального изложения этих вопросов, так как обобщение матриц $[J]$ и $[D]$ на трехмерный случай является очевидным. Так же непосредственно проводится обобщение на представление в треугольных и тетраэдральных координатах, причем в этом случае необходимо предварительно выразить одну из координат L_i в терминах остальных координат. Для треугольных координат необходимо сначала использовать (8.20), а для тетраэдральных координат — соотношения (8.28).

Литература

- 8.1 Johnson M., McLay R. Convergence of the Finite Element Method in the Theory of Elasticity. — J Appl Mech, 90, June 1968, p. 274—289 [Имеется перевод. Прикл механ — М.: Мир, 1968, № 6.]
- 8.2. Tong P., Pian T. The Convergence of Finite Element Method in Solving Linear Elastic Problems. — Int J Solids and Structures 1967, 3, p. 865—879.
- 8.3. Haistler W., Stricklin J. Rigid Body Displacements of Curved Elements in the Analysis of Shells by the Matrix-Displacement Method. — AIAA J, Aug. 1967, 5, No 8, p. 1525—1527 [Имеется перевод: Ракетная техн и космон — М.: Мир, 1967, № 8.]
- 8.4. Murray K. H. Comments on the Convergence of Finite Element Solutions — AIAA J, 1970, 8, No. 4, p. 815—816 [Имеется перевод: Ракетная техн и космон — М.: Мир, 1970, № 4.]
- 8.5. Dunne P. Complete Polynomial Displacement Fields for Finite Element Method — Aero. J., Mar 1968, 72, p. 246—247

- 8.6. Eisenberg M A, Malvern L F On Finite Element Integration in Natural Coordinates.—Int. J Num. Meth. Eng., 1973, 7, p. 574—575.
- 8.7. Abramowitz M, Stegun I A Handbook of Mathematical Functions.—Washington, D C.: Nat'l Bureau of Standards, 1964 [Имеется перевод Абрамовиц М, Стиган И. Справочник по специальным функциям.— М. Мир, 1979]
- 8.8. Strang G, Fix G. An Analysis of the Finite Element Method —Englewood Cliffs, N J Prentice-Hall, Inc., 1973
- 8.9. Silvester P Tetrahedral Polynomial Finite Elements for the Helmholtz Equation.—Int J Num Meth Eng., 1972, 4, No. 4, p. 405—413
- 8.10. Taylor R. L. On the Completeness of Shape Functions for Finite Element Analysis.—J Num. Meth. Eng., 1972, 4, No 1, p. 17—22
- 8.11. Zienkiewicz O C. Isoparametric and Allied Numerically Integrated Elements—A Review —In: Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics, S J Fenves, et al. (eds.).—New York, N.Y : Academic Press, 1973, p. 13—42.
- 8.12. Irons B. M Quadrature Rules for Brick Based Finite Elements —Int J Num Meth Eng., 1971, 3, No 2, p. 293—294.
- 8.13. Bond T J., et al A Comparison of Some Curved Two-Dimensional Finite Elements.—J Strain Analysis, 1973, 8, No 3, p. 182—190.

Задачи

- 8.1. Изучите вопрос применимости поля перемещений из (9.16) с точки зрения критерия, введенного в разд. 8.1.
- 8.2. Используя критерий из разд. 8.1, обсудите вопрос применимости функции, выписанной ниже, для представления полей перемещений для изображенного на

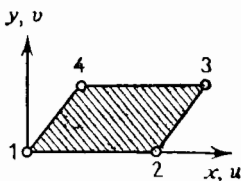


Рис. Р8.2.

рис. Р8.2 конечного элемента в виде параллелограмма, находящегося в плоском напряженном состоянии.

$$u = a_1 x + a_2 y + a_3 \left(xy - \frac{x_4}{l_4} y^2 \right) + a_4.$$

- 8.3. Выпишите функцию перемещений u для изображенного на рис. 8.7 (b) прямоугольного элемента на основе двумерной лагранжевой интерполяции, исключив точку 5 посредством задания линейного распределения перемещений между точками 4 и 6, а также 2 и 8.
- 8.4. Перепишите приведенную в разд. 2.8 процедуру исключения дополнительных степеней свободы так, чтобы имела возможность учета нагрузок, соответствующих исключенным степеням свободы.
- 8.5. Выпишите в треугольных координатах коэффициенты функции формы N_{300} , N_{210} и N_{111} для кубического поля перемещений.
- 8.6. Получите в треугольных координатах коэффициенты функции формы N_{400} и N_{220} для квадратичного поля перемещений.
- 8.7. Определив, согласно разд. 8.5, функции формы N_{200} и т. д., докажите correctness выписанных в задаче 6.9 выражений.
- 8.8. Постройте функции формы для изображенного на рис. 8.5 тетраэдра в терминах узловых координат в случае $x_1 = y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = z_3 = 0$.

8.9. Вычислите интеграл $\int_A (\partial N_{200}/\partial x)(\partial N_{011}/\partial y) dA$ для треугольного элемента с вершиной 200 в начале координат и вершинами 110 и 020, расположенными на оси x .

8.10. Определите функции формы для четырехугольного стержневого конструктивного элемента (см. рис. 8.2), используя лагранжеву интерполяцию.

8.11. Постройте функцию формы для прямоугольной изгибаемой пластины, используя эрмитову интерполяцию так же, как это делается при формулировке лагранжевых элементов. Удовлетворяет ли построенная функция всем критериям из разд. 8.1?

8.12. Постройте с помощью эрмитовой интерполяции одномерную функцию формы, соответствующую полиному пятой степени. В качестве степени свободы на каждом конце сегмента примите саму функцию, ее первую и вторую производные.

8.13. Биквадратная интерполяционная формула (8.17) выписана в системе координат с началом в нижнем левом углу элемента. Выпишите ее в координатах ξ, η с началом в центре элемента.

8.14. Постройте подходящее поле перемещений u для изображенного на рис. P8.14 элемента.

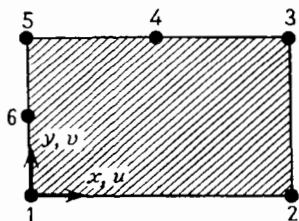


Рис. P8.14.

8.15. Предположим, что, как и в случае теплопроводности (см. разд. 5.4), поведение треугольного элемента описывается скаляром Υ , задаваемым в виде

$$\Upsilon = L_1 \Upsilon_1 + L_2 \Upsilon_2 + L_3 \Upsilon_3 + L_1 L_2 L_3 \Upsilon_0 = \lfloor N \rfloor \{ \Upsilon \},$$

где L_1, L_2 и L_3 — треугольные координаты; Υ_1, Υ_2 и Υ_3 — значение температуры в вершинах элемента, Υ_0 — обобщенный параметр. Матрица поведения задается формулой

$$[k] = \left[v \int_A \left(\left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} + \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} \right) dA \right],$$

где v — коэффициент теплопроводности. Постройте матрицу поведения для этого случая и исключите «дутые» моды L_1, L_2, L_3 с помощью процедуры конденсации.

ПЛОСКО-НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Теперь в нашем распоряжении имеются все компоненты, необходимые для построения разнообразных видов конечных элементов и функций, задающих их поведение. С данной главы начинается описание конкретных типов элементов для анализа сплошной среды. Этому в книге посвящены четыре главы, в которых соответственно рассматриваются плоско-напряженные элементы, трехмерные элементы, специальные виды трехмерных элементов и изгибаемые пластинчатые элементы. Три главы, включая данную, открываются кратким изложением основных соотношений, отвечающих рассматриваемому типу поведения, т. е. определяющих дифференциальных уравнений и специальных форм соответствующих дифференциальных уравнений. Содержание последующих разделов этих глав и двух оставшихся глав, относящихся к указанной группе, определяется типом рассматриваемого элемента.

Данная глава посвящена вопросам конечно-элементного представления тонких пластин, находящихся в условиях плоского напряженного состояния, т. е. при действии в их плоскости нормальных и касательных напряжений. Плоское напряженное состояние является простейшей формой напряженного состояния конструкций, часто встречающейся на практике. Указанные элементы используются для представления конструктивных элементов тонкостенных и подкрепленных конструкций, кесонных конструкций, а также для учета мембранных напряжений в оболочках.

Основные соотношения плоского напряженного состояния служат инструментом для проведения различных фундаментальных теоретических построений в последующих главах. Первый раздел этой главы краток и содержит в основном лишь указания на те места книги, где определяющие соотношения вводятся впервые. Для плоско-напряженных элементов наиболее существенным отличительным фактором является их конфигурация. Хотя возможны различные конфигурации элементов, здесь рассматриваются тре-

угольные и четырехугольные элементы, причем каждый из указанных элементов детально изучается в отдельном разделе главы.

Формулировки треугольных элементов плоского напряженного состояния в принципе основаны на задании предполагаемых полей перемещений и интеграла потенциальной энергии. В данной главе предложено несколько альтернативных формулировок различной степени сложности для треугольных элементов. Здесь обсуждаются также аспекты практического построения треугольных элементов и, в частности, вопросы интерпретации результатов расчета полей напряжений. Представлены численные решения в зависимости от измельчения сетки разбиения для двух задач, для которых имеются аналитические решения. Приводятся замечания относительно роли смешанных вариационных принципов и принципа минимума дополнительной энергии при построении треугольных конечных элементов.

При рассмотрении прямоугольных плоско-напряженных элементов вначале изучаются формулировки, полученные с помощью межэлементно согласованных полей перемещений. Для этих элементов приводятся результаты расчетов, откуда становится ясно, что задачи, которые должны описывать состояние изгиба, лучше моделируются с помощью элементов, содержащих дополнительные функции перемещений. Изучению указанных функций отводится специальный раздел. При формулировке элементов гибридный метод напряжений имеет определенные преимущества в отдельных задачах плоско-напряженного анализа. Этот подход к построению элементов описывается в заключительном разделе главы.

9.1. Основные соотношения

9.1.1. Дифференциальные уравнения и уравнения состояния

Рассмотрим тонкую пластинку, находящуюся в плоском напряженном состоянии (рис. 9.1). Координатные оси x и y расположены в срединной плоскости пластины, в которой действуют постоянные по толщине пластины t напряжения σ_x , σ_y и τ_{xy} . Предполагается, что нормальным напряжением σ_z и касательными напряжениями τ_{xz} и τ_{yz} можно пренебречь. Дифференциальные уравнения равновесия имеют вид уравнений (4.2). Соотношения между деформациями и перемещениями представлены формулами (4.7). Уравнение (4.8) представляет собой дифференциальное уравнение совместности.

Нечасто требуется иметь в распоряжении уравнения состояния для плоского напряженного состояния в случае более общем, чем для ортотропного материала. Поэтому с учетом начальных дефор-

маций $\varepsilon_x^{\text{init}}$, $\varepsilon_y^{\text{init}}$ и $\gamma_{xy}^{\text{init}}$ запишем

$$\sigma = [E] \varepsilon - [E] \varepsilon^{\text{init}}, \quad (4.15)$$

где

$$\sigma = [\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}]^T, \quad (9.1)$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_x \varepsilon_y \gamma_{xy}]^T, \quad (9.2)$$

$$[E] = \frac{1}{(1 - \mu_{xy}\mu_{yx})} \begin{bmatrix} E_x & \mu_{yx}E_x & 0 \\ \mu_{xy}E_y & E_y & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \mu_{xy}\mu_{yx})G \end{bmatrix} \quad (9.3)$$

с $\mu_{xy}E_y = \mu_{yx}E_x$. Здесь G — модуль сдвига.

Следует отметить, что уравнения состояния для ортотропного материала часто задаются в глобальной системе координат (x, y) , а элемент необходимо построить в осях координат (x', y') , связанных

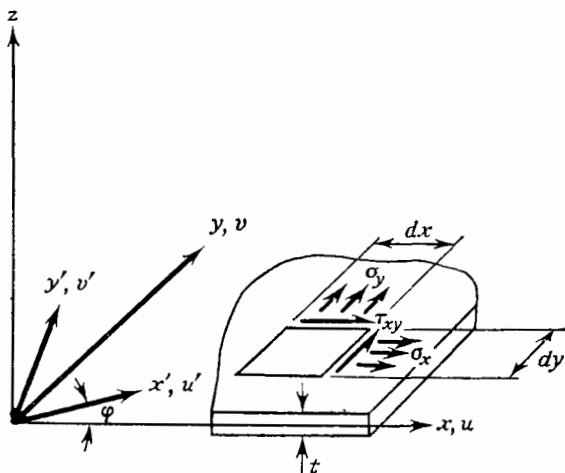


Рис. 9.1. Плоско-напряженное состояние.

с элементом. Если, как показано на рис. 9.1, φ — угол между глобальной и связанной системами координат, то преобразование компонент напряжений в глобальной системе к компонентам в связанной системе имеет вид

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \tau'_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & 2 \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & -2 \sin \varphi \cos \varphi \\ -\sin \varphi \cos \varphi & \sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (9.4a)$$

а для компонент деформаций имеем

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon'_x \\ \varepsilon'_y \\ \gamma'_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi \\ -2 \sin \varphi \cos \varphi & 2 \sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (9.4b)$$

Соответствующий вид граничных условий уже был выписан ранее: граничные условия для напряжений представлены в (4.5), а для перемещений — в (4.9). Определяющие дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях задаются соотношениями (4.17). Определяющее дифференциальное уравнение совместности представлено в (4.18) в терминах напряжений, а в терминах функции напряжений Эри — в (4.19).

9.1.2. Потенциальная энергия

Для потенциальной энергии рассмотрим ниже лишь слагаемое, отвечающее энергии деформации U . Потенциал действующих сил V зависит от вида этих сил, причем о нем можно сказать что-либо определенное, если задано распределение указанных нагрузок. Энергия деформации для плоского напряженного состояния равна

$$U = \frac{1}{2} \int_A \sigma \epsilon \, t \, dA, \quad (9.5)$$

где σ и ϵ определяются согласно (9.1) и (9.2). Вводя в (9.5) уравнение состояния ортотропного материала (без учета начальных деформаций) и принимая во внимание соотношение между деформациями и перемещениями (4.7), получим

$$U = \frac{1}{2} \int_A \epsilon [E] \epsilon \, t \, dA, \quad (9.5a)$$

где $[E]$ определяется согласно (9.3) и

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}.$$

После преобразования имеем

$$U = \frac{1}{2(1-\mu_{xy}\mu_{yx})} \int_A \left[E_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2\mu_{xy} E_y \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + E_y \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + (1-\mu_{xy}\mu_{yx}) G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] t \, dA. \quad (9.5b)$$

Принцип минимума потенциальной энергии предполагает рассмотрение допустимых полей перемещений. В данном случае поле перемещений определяется, вообще говоря, в каждом узле компонентами u и v , поэтому вектор смещений в узлах обозначим через $[\Delta] = [[u] [v]]$. Кроме того, в обсуждаемом ниже методе

жесткости поля перемещений u и v выписываются непосредственно в терминах узловых перемещений в виде функции формы, т. е. $u = [N] \{u\}$, $v = [N] \{v\}$ (вообще говоря, u выбирается лишь как функция от $\{u\}$ и аналогично для v). Для плоского случая в разд. 5.2 в соотношении (5.22) и разд. 8.8 в соотношении (8.39) уже использовалось преобразование степеней свободы в деформации. Поэтому в принятых обозначениях имеем

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] & 0 \\ 0 & \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right] \\ \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right] & \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{v\} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{v\} \end{Bmatrix}. \quad (9.6)$$

Следовательно, уравнение (9.5a) преобразуется к виду

$$U = \frac{[N] [u] [N] [v]}{2} [k] \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{v\} \end{Bmatrix}, \quad (9.5c)$$

где

$$[k] = \left[\int_A [D]^T [E] [D] t dA \right]. \quad (9.7)$$

9.1.3. Дополнительная энергия

Согласно (6.68a), дополнительная энергия деформации равна

$$U^* = \frac{1}{2} \int \sigma [E]^{-1} \sigma t dA. \quad (9.8)$$

Применим подход, основанный на введении функций напряжений Φ , и заметим, что функция напряжений Эри Φ из (4.4) пригодна в рассматриваемом случае. Допустимое поле, задаваемое функцией напряжений Эри внутри элемента, можно записать в виде функции формы следующим образом:

$$\Phi = [N] \{\Phi\}, \quad (6.77)$$

где $\{\Phi\}$ состоит из значений функции напряжений в узлах, а $[N]$ содержит выбранные функции формы. Тогда, дважды дифференцируя Φ и учитывая определение функции напряжений (4.4), получим

$$\sigma = [N''] \{\Phi\}. \quad (6.78)$$

где коэффициенты матрицы $[N'']$, вообще говоря, являются функциями от x и y . Подстановка в выражение для дополнительной энергии деформации приводит к соотношению

$$U^* = ([N] \{\Phi\} / 2) [f] \{\Phi\}, \quad (9.8a)$$

где так же, как и в (6.72a),

$$[f] = \left[\int_A [N']^T [E]^{-1} [N'] t dA \right]. \quad (9.9)$$

Здесь не приводятся основные соотношения для формулировки смешанных вариационных принципов в случае плоского напряженного состояния; в этой главе лишь кратко излагается роль этих принципов при формулировке элементов. В работе [9.1] можно найти подробное изложение вопросов, связанных с функционалом Рейсснера, в случае плоского напряженного состояния.

9.2. Треугольные плоско-напряженные элементы

9.2.1. Элементы, построенные на базе предполагаемых перемещений

В этом разделе рассматриваются плоско-напряженные треугольные элементы, построенные в предположении, что поля перемещений представлены соответственно полными линейными, квадратичными

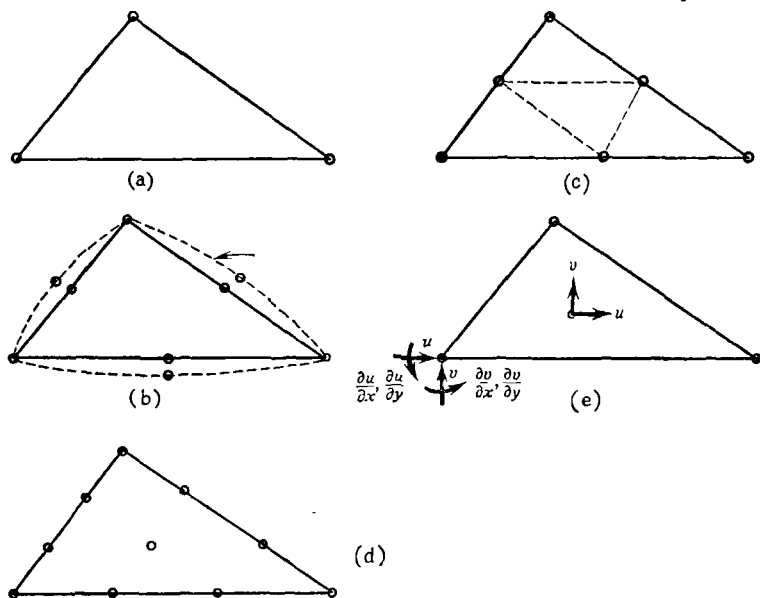


Рис. 9.2. Возможные виды треугольных элементов: (а) треугольный с постоянным значением деформации (CST-элемент); (б) треугольный с линейной деформацией (LST-элемент); (с) образованный из четырех треугольников с узлами на серединах сторон; (д) десятиузловой треугольный с квадратичной деформацией (QST-элемент); (е) треугольный с квадратичной деформацией, включающий производные в качестве степеней свободы.

и кубическими полиномами. В разд. 8.5 показано, что теоретически для треугольных элементов нет ограничений на степень полиномиального представления, так как легко расположить узловые точки внутри и на границе элемента, чтобы учесть функцию любого порядка. Однако на практике ценность элементов, основанных на полиномах, степень которых превышает третью, является дискуссионной. В этом случае, с одной стороны, существенно труднее выписать коэффициенты для элемента, а с другой — необходимость измельчения конечно-элементной сетки, моделирующей конфигурацию реальной конструкции, делает недействительными преимущества более усложненных представлений поведения элемента.

На рис. 9.2 изображены элементы, обсуждаемые в этом разделе. Основной элемент (см. рис. 9.2(a)) со степенями свободы в вершинах треугольника построен в предположении постоянства деформаций, что равнозначно постоянству напряжений или линейности перемещений. Этот элемент часто называется *CST-элементом*. Матрица жесткости этого элемента для изотропного материала получена с помощью альтернативных процедур в разд. 5.2 и 6.4 и представлена на рис. 5.4. Так как этот вывод в разд. 5.2 проведен детально, здесь не требуется дополнительных пояснений.

По мере усложнения следующим элементом является изображенный на рис. 9.2(b) шестиузловой треугольный элемент, построение которого основано на задании полных квадратичных полиномов для перемещений u и v . Так же как в разд. 8.5, имеем

$$u = N_{200}u_{200} + N_{020}u_{020} + N_{002}u_{002} + N_{110}u_{110} + N_{011}u_{011} + N_{101}u_{101} \quad (8.25b)$$

и аналогичное выражение для v . В терминах треугольных координат из (8.11a) и (8.12a) получим

$$\begin{aligned} N_{200} &= L_1(2L_1 - 1), & N_{020} &= L_2(2L_2 - 1), & N_{002} &= L_3(2L_3 - 1), \\ N_{110} &= 4L_1L_2, & N_{011} &= 4L_2L_3, & N_{101} &= 4L_3L_1. \end{aligned} \quad (9.10)$$

В этом случае после применения соотношений между деформациями и перемещениями (4.7) приходим к (9.6), где $\{u\} = [u_{200} \dots u_{101}]^T$, $\{v\} = [v_{200} \dots v_{101}]^T$,

$$\left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] = \left[\frac{\partial N_{200}}{\partial x} \quad \frac{\partial N_{020}}{\partial x} \quad \frac{\partial N_{002}}{\partial x} \quad \frac{\partial N_{110}}{\partial x} \quad \frac{\partial N_{011}}{\partial x} \quad \frac{\partial N_{101}}{\partial x} \right] \quad (9.11)$$

и аналогично для других векторов из (9.6). Первый член в (9.11) равен, как показано в разд. 8.5,

$$\frac{\partial N_{200}}{\partial x} = \frac{b_{11}}{2A}(4L_1 - 1). \quad (9.12)$$

Все остальные члены получают также легко в результате дифференцирования.

Матрица жесткости формулируется с использованием (9.7). На практике интегрирование тройного произведения $[D]^T[E][D]$ по области, занимаемой элементом, выполняется численно в виду сложности явных выражений для коэффициентов жесткости элемента. Однако получение явных выражений возможно, если построение ведется в терминах коэффициентов жесткости для CST-элементов [9.2]. Явные выражения для коэффициентов матрицы жесткости элементов более высокого порядка оказываются громоздкими.

Квадратичное поле перемещений приводит к линейным распределениям деформаций (или напряжений) в треугольном элементе, такой элемент обычно называется *LST-элементом*. Может показаться, что объединение четырех CST-элементов, как показано на рис. 9.2(с), приведет к тому же результату, что и один LST-элемент. Однако LST-элемент определяет непрерывное (линейное) напряженное состояние внутри элемента, а совокупность CST-элементов дает четыре различных постоянных значения каждой компоненты напряжения.

Внутри LST-элемента дифференциальные уравнения не удовлетворяются. Этот факт был продемонстрирован ранее в разд. 4.5 с помощью полиномиального представления полей перемещений u , и v , а не с помощью рассмотрения функции формы. Очевидно, условия равновесия в узлах, находящихся внутри всех элементов более высокого порядка, также нарушаются.

Как показано на рис. 9.2(б) штриховыми линиями, LST-элемент подходит для представления в изопараметрической форме. Операции, реализующие это представление, были описаны в разд. 8.8. Вообще говоря, все обсуждаемые здесь и в последующих главах конкретные элементы подходят для представления в изопараметрической форме. Так как детали построения во всех случаях соответствуют изложенным в разд. 8.5, то далее, за исключением частных случаев, не будут обсуждаться вопросы, связанные с изопараметрической формой представления.

Для дальнейшего улучшения представления может использоваться треугольный элемент, базирующийся на полных кубических (десятичленных) полиномах перемещений для компонент u и v . В этом случае встречаются два альтернативных способа расположения степеней свободы. В первом — изображенном на рис. 9.2(д) — задается обычным образом набор из 10 узловых точек, и в качестве степеней свободы выбираются значения u и v в каждом узле. Во втором — изображенном на рис. 9.2(е) — узлы задаются лишь в вершинах, где наряду с u и v задаются также и производные от этих величин ($du/dx = u_x$ и т. д.). Это приводит к появлению 9 степеней свободы соответственно для каждой компоненты u и v , т. е. всего к 18 степеням свободы. В полном разложении обеих величин u и v имеется 20 степеней свободы. Дополнительные две степени сво-

боды можно задать в виде двух компонент смещения центральной точки элемента. Можно исключить эти две степени свободы с помощью процедуры конденсации, описанной в разд. 2.8 или с помощью более элегантных процедур, описанных подробно в работах [9.4—9.6].

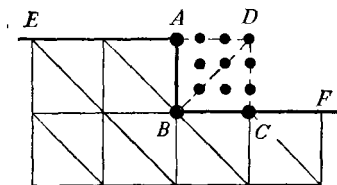
Кроме того, можно разделить исходный треугольный элемент на три треугольника, выбрать внутри каждого из них девяти- или десятичленные полиномы для u и v и исключить внутренние степени свободы, налагая условия непрерывности перемещений. Этот подход более распространен для изгибаемых треугольных элементов и обсуждается в связи с этим в п. 12.3.2.

Элементы более высокого порядка с наборами узлов, соответствующих треугольнику Паскаля, т. е. с узлами вдоль сторон и внутри элементов, приводят к более общим уравнениям жесткости с большей шириной ленты в соответствующих ленточных матрицах по сравнению с элементами, степени свободы которых сосредоточены лишь в вершинах. Причину этого можно выяснить, добавив совокупность из двух треугольных элементов к конечно-элементной

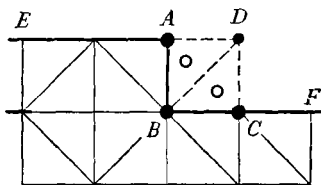
9 дополнительных узлов —
по 2 степени свободы
на узел

○ 2 степени свободы на узел

● 6 степеней свободы на узел



(a)



(b)

Рис. 9.3. Сравнение альтернативных форм задания степеней свободы. (a) Объединение двух треугольных элементов с квадратичной деформацией; (b) производные в качестве узловых степеней свободы.

модели с границей, задаваемой на рис. 9.3 точками E, A, B, C, F . Если, как показано на рис. 9.3(a), добавим элементы с представлением деформаций в них в виде квадратичной функции, которые имеют 10 узлов (тип элемента совпадает с изображенным на рис. 9.2(d)), то в соответствующей ленточной матрице возникают дополнительные коэффициенты, отвечающие 18 степеням свободы. Добавление двух элементов с квадратичным распределением деформаций внутри них и со степенями свободы в виде производных в узлах и в центре треугольников (тип элемента показан на рис. 9.2(e)) приводит, однако, к появлению дополнительных 10 степеней свободы. Различие объясняется тем, что в точке D в элементах со степенями свободы в виде производных степени свободы взаимосвязаны.

Увеличение ширины ленты в ленточной матрице приводит к возрастанию стоимости решения уравнений при проведении расчетов. Другое преимущество элементов со степенями свободы в виде производных заключается в том, что производные, используемые как степени свободы, непосредственно пропорциональны деформациям и, следовательно, напряжениям, так что граничные условия в напряжениях могут быть заданы непосредственно. Недостатком является то обстоятельство, что для плоского напряженного состояния силовые характеристики в узлах, отвечающие степеням свободы в виде производных от перемещений, не наделены ясным физическим смыслом.

9.2.2. Вопросы выбора треугольной сетки

Треугольный элемент завоевал популярность благодаря простоте задания постоянного значения деформации внутри элемента, а также в виду удобства описания геометрических характеристик сложных конструкций. В то же время для сложных конструкций возникают определенные трудности при выборе подходящей сетки разбиения из имеющегося разнообразия вариантов.

В связи с выбором набора треугольных элементов следует прежде всего отметить отсутствие «геометрической изотропии». Чтобы проиллюстрировать это утверждение, рассмотрим задачу анализа напряженного и деформированного состояния бруса, изображенного на рис. 9.4. Наборы элементов, представленные соответственно на

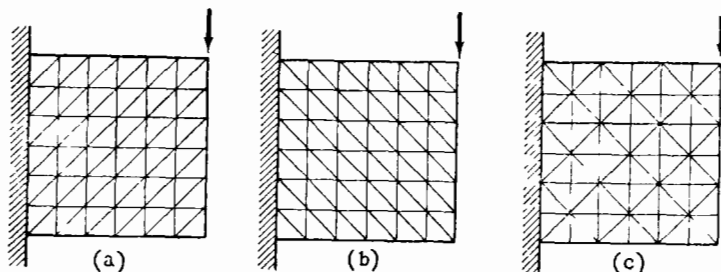


Рис. 9.4. Возможные варианты разбиения для рассматриваемой задачи.

рис. 9.4(а) и (б), хотя и содержат равное количество элементов одинаковой формы, приводят к различным численным решениям для перемещений и напряжений. Эти различия могут быть малы для густых сеток разбиения, используемых при практических расчетах, однако было бы желательно использовать все имеющиеся возможности, приводящие к исключению или уменьшению этих расхождений. Для настоящего случая изображенная на рис. 9.4(с) схема с очевидностью решает проблему. Однако для многих реальных кон-

струкций получить решение не так просто и при расчетах следует учитывать некоторое несовершенство указанных разбиений.

Как видно из предыдущего примера, геометрическую изотропию можно сохранить, если конструкция имеет прямоугольные очертания или содержит много прямоугольных областей. Преобладание на практике конструкций прямоугольного очертания приводит к использованию «элементов-кирпичиков», когда проектировщик применяет прямоугольные элементы, состоящие в действительности из нескольких треугольных элементов. На рис. 9.5 изображены два таких элемента, в каждом из которых сохраняется геометрическая изотропия.

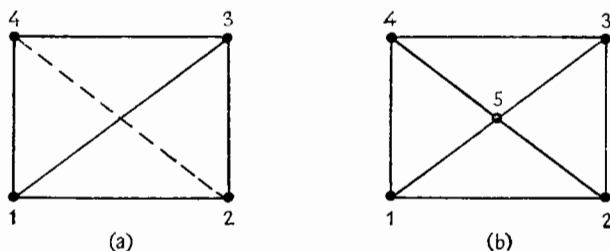


Рис. 9.5. Способы объединения треугольников при построении прямоугольника.

Изображенный на рис. 9.5(а) прямоугольный элемент построен из четырех треугольных. Два треугольника, у которых толщина в два раза меньше толщины реальной пластины, соприкасаются вдоль диагонали, соединяющей точки 1 и 3. На них лежит пара треугольников той же толщины, соприкасающихся вдоль диагонали, соединяющей точки 2 и 4. Можно также рассмотреть четыре треугольника, расположенных так, как показано на рис. 9.5(б), с центральной точкой 5, которая исключается из результирующей матрицы жесткости для прямоугольного элемента с помощью процесса конденсации, описанного в разд. 2.8.

Одним из неудобств рассмотренных выше схем является трудность интерпретации вычисленных напряжений подходящим для процесса проектирования образом. При проектировании прямоугольных панелей требуется задание постоянных или линейных полей напряжений в элементе. Однако при реализации схемы согласно рис. 9.5(б) поле напряжений внутри прямоугольника описывается четырьмя различными значениями каждой компоненты напряжений. Обычно для всего прямоугольника эти значения усредняют. Проблема заключается в том, что четыре дискретных значения могут различаться существенно, вызывая сомнение в точности полученных средних величин.

Теоретические исследования [9.7] скорости сходимости численных решений к точным решениям определяющих дифференциаль-

ных уравнений (4.17) проводились для различных типов треугольных элементов. Изучавшиеся схемы изображены на рис. 9.6. Оказалось, что наибольшую скорость сходимости обеспечивает схема *A*. Однако для этой схемы расположения элементов возникает проблема обеспечения геометрической изотропии. Сетка равносторонних треугольников (схема *D*) обеспечивает такую же скорость сходимости, как и схема *A*. Более слабая сходимость выявлена для схем *B* и *C*. При использовании этих схем возникали ошибки, зависящие от рассматриваемого направления, которые можно скомпенсировать, комбинируя различные схемы, что обычно и делается при анализе.

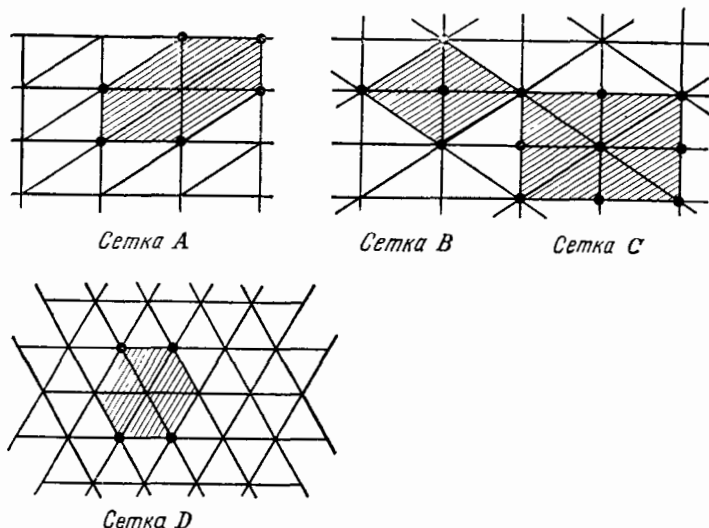


Рис. 9.6. Рассматриваемые в [9.7] сетки.

Другой практический вопрос, связанный с геометрией расположения элементов, основанных на допустимых полях перемещений, возникает при рассмотрении напряженного состояния на свободных краях. Как ясно из рис. 5.3, напряжения в элементе с постоянным напряжением внутри него «выходят» за грани элемента. Поэтому свободное от напряжений состояние на границе конструкции является полностью приближенным, и шаг разбиения сетки в направлении нормали к такой границе должен быть достаточно мал, чтобы обеспечить малость напряжений на границе и переход к большим значениям интенсивности указанных напряжений внутри конструкции.

Продолжая обсуждение вопросов применения рассмотренных выше схем для решения прикладных задач, необходимо заметить, что следует стремиться избегать вытянутых элементов. При удли-

нении жесткость треугольного элемента с постоянным значением деформации не стремится к жесткости стержневого элемента, и можно показать [9.8], что точность решения падает с увеличением удлинения элемента (отношения максимальных линейных размеров в двух направлениях). Следует стремиться использовать равносторонние элементы.

В гл. 6 и 7 показано, что решение, доставляющее минимум потенциальной энергии, построенное на базе конечного числа степеней свободы, дает нижнюю границу точного значения энергии деформации. Поэтому для заданного числа степеней свободы требует-

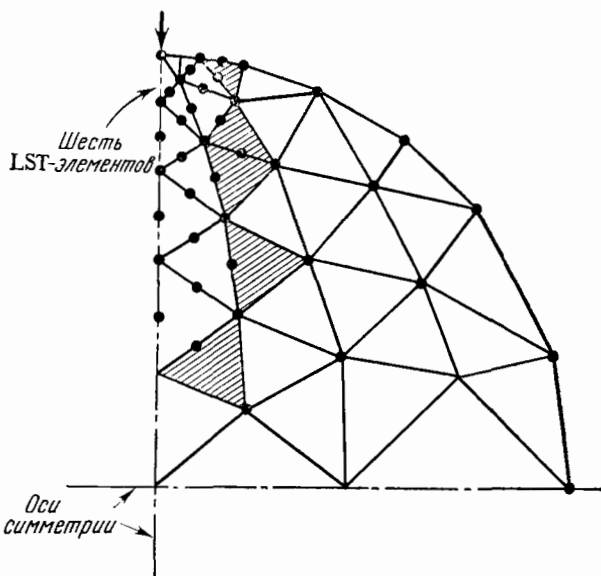


Рис. 9.7. Конечно-элементное представление четвертой части диска, нагруженного вдоль радиуса. Используются одновременно элементы высокого и низкого порядков с переходными элементами между ними (из [9.10]). Перепечатывается с разрешения Council of the Institution of Mechanical Engineers из журнала *Journal of Strain Analysis*. *Замечание.* Сетка состоит из 21 CST-элемента, 14 LST-элементов и 5 переходных элементов (заштрихованы).

ся так разместить узлы, чтобы достичь максимального значения энергии деформации. Теоретически возможно разместить узлы указанным образом в связи с общей процедурой анализа, при этом координаты x и y узловых точек рассматриваются как степени свободы и участвуют в определении экстремума функционала [9.9]. Этот процесс должен, разумеется, осуществляться итерационным образом и оказывается чрезмерно дорогостоящим при решении реальных задач.

Исходя из практических условий, инженер должен оценить области с большим градиентом деформации и в этих областях, если используются обычные элементы, применять очень мелкие сетки, отвечающие простым элементам, либо применять элементы более высокого порядка. Если используется последний подход, необходимо построить переходные элементы от элементов высокого порядка в областях с резкими перепадами деформаций к более простым элементам в областях, где распределение деформаций по существу однородно или не столь важно для решения задачи. Чтобы выполнить это, полезно использовать элементы высокого порядка с меньшим числом узловых точек на краях, соприкасающихся с более простым элементом [9.10]. Эта ситуация иллюстрируется на рис. 9.7 для классической задачи расчета кругового диска, на который действуют две диаметрально противоположные сосредоточенные силы. В разд. 8.7 показано, как построить поля перемещений в элементах с разным числом узлов на соответствующих сторонах. В точке приложения сосредоточенной силы или в вершине трещины, где напряжение в материале теоретически бесконечно (*сингулярность напряжений*), а также в непосредственной близости от этих точек желательно учесть сингулярность при построении элементов. В конце п. 9.3.3 мы снова вернемся к указанным построениям.

9.2.3. Интерпретация полей напряжений

Так как построения конечных элементов на базе перемещений проводятся при помощи принципа минимума потенциальной энергии, причем уравнения равновесия удовлетворяются лишь в среднем по элементу и в общем поточечные условия не выполняются ни внутри элемента, ни вдоль линий раздела элементов, следует предположить, что возникнут трудности при интерпретации вычисленных напряжений.

Прежде чем перечислить эти трудности, важно выяснить детали расчета напряжений в том случае, когда имеются начальные деформации, распределенные нагрузки и силы инерции. Напомним, что, согласно соотношению (5.7a) из разд. 5.1, поле напряжений в элементе σ можно вычислить, зная вектор перемещений в элементе $\{\Delta\}$ с помощью соотношений $\sigma = [E] [D] \{\Delta\} = [S] \{\Delta\}$. Если имеется начальная деформация ε^{init} , то закон, связывающий деформации и напряжения, имеет вид $\sigma = [E]\varepsilon - [E]\varepsilon^{init}$, и, так как $\varepsilon = [D] \{\Delta\}$, в этом случае получим

$$\sigma = [E] [D] \{\Delta\} - [E]\varepsilon^{init} = [S] \{\Delta\} - [E]\varepsilon^{init}. \quad (5.7b)$$

Введение членов, учитывающих распределение нагрузки, выполняется не так просто. В разд. 6.1 было показано, что если имеется распределенная нагрузка \bar{T} , то понятие «энергетически эквивалентной» или «соответствующей» нагрузки приводит к следую-

чему виду уравнений жесткости для элемента (исключая другие типы специальных сил):

$$\{F\} = [k] \{\Delta\} - \{F^d\}, \quad (6.16a)$$

где

$$\{F^d\} = \left\{ \int_{S_0} [N]^T \cdot \bar{T} dS \right\}. \quad (6.12f)$$

Тогда при указанных условиях не изменяется вид закона, связывающего напряжения и деформации $\sigma = [E] \varepsilon$, и соотношение $\varepsilon = [D] \{\Delta\}$ также не меняется, поэтому выражение $\sigma = [S] \{\Delta\}$ можно использовать при подсчете напряжений, вызванных распределенными нагрузками.

Рассмотрим изложенные вопросы для изображенного на рис. 9.8(а) стержневого элемента, нагруженного равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q . Конструкция разбива-

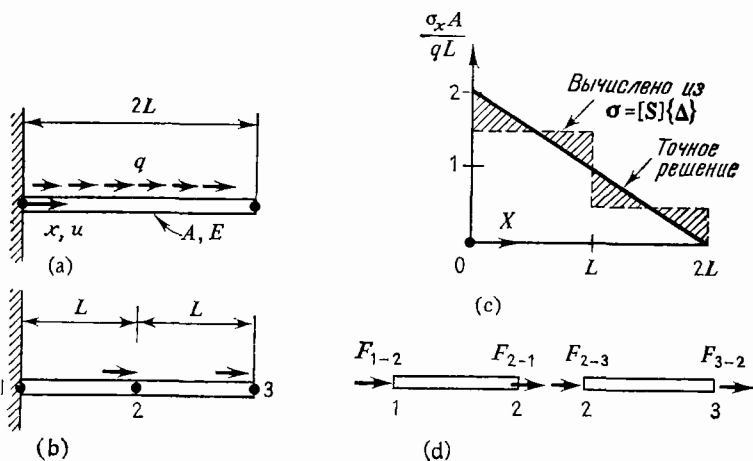


Рис. 9.8. Подсчет напряжений в равномерно нагруженных стержневых элементах конструкции. (а) Рассматриваемый элемент конструкции; (б) аналитическое представление; (с) распределение напряжений; (д) отдельные элементы.

ется на два элемента согласно рис. 9.8(б). Для каждого элемента задается энергетически эквивалентная нагрузка $\{F^d\} = qL/2 [1 \ 1]^T$. Уравнение жесткости для всей конструкции имеет вид

$$\begin{Bmatrix} qL \\ qL/2 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix},$$

решая которое получим

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{L}{AE} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} qL \\ qL/2 \end{Bmatrix},$$

так что $u_2 = \frac{3}{2}(qL^2/AE)$, $u_3 = 2qL^2/AE$. Матрица жесткости для стержневого элемента представляет собой матрицу-строку $(E/L) \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$, и можно предположить, что в каждом элементе напряжение постоянно, т. е. $\sigma_{1-2} = \frac{3}{2}qL/A$, $\sigma_{2-3} = qL/A$. На рис. 9.8(с) данное напряженное состояние изображено штриховыми линиями. Точное распределение, полученное в результате решения задачи, показано сплошной линией.

Чтобы предложить совершенно иной подход к расчету напряжений, рассмотрим основные уравнения, связывающие силы и перемещения для элемента. Для элемента 2—3 имеем

$$\begin{Bmatrix} F_{2-3} \\ F_{3-2} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{3}{2} \frac{qL^2}{AE} \\ \frac{2qL^2}{AE} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \frac{qL}{2} \\ \frac{qL}{2} \end{Bmatrix},$$

поэтому $F_{2-3} = -qL$ [знак минус соответствует растяжению, см. 9.8(d)], а $F_{3-2} = 0$. Аналогично для элемента 1—2 находим, что $F_{2-1} = qL$ и $F_{1-2} = -2qL$ (снова знак минус означает растяжение на левом конце). Разделив эти силы на площадь поперечного сечения A , получим точное распределение напряжений^{*)}, изображенное на рис. 9.8(с). Таким образом, правильные напряжения получаются, если вначале находятся силы в узлах, которые затем преобразуются в напряжения. Выражения для узловых сил могут включать не только распределенные нагрузки, но также силы инерции $[m] \{\ddot{\Delta}\}$, как в (6.16), или другие виды распределенных воздействий.

Заметим, что узловые силы *локально* (в узлах) преобразовываются в напряжения. Для стержневого элемента, когда существует взаимно однозначное соответствие между компонентами сил в узлах и искомыми компонентами напряжений, это — непосредственно выполняемая операция. Однако для плоского напряженного состояния существуют *три* компоненты напряжений и только *две* компоненты силы в каждом узле. Указанное рассогласование присуще большинству многомерных напряженных состояний. Поэтому при подсчете напряжений обычно пренебрегают «поправкой», вносимой членом $\{F^d\}$, и вновь используют формулу $\sigma = [S] \{\Delta\}$. Возникающая при этом ошибка отражена на рис. 9.8(с) заштрихованными областями, откуда видно, что величина ошибки становится малой, если использовать, как это часто бывает на практике, большое число элементов.

*) Интересно отметить, что точные значения напряжений получаются в *узлах соединений* для любых распределений прикладываемых нагрузок, если применяются энергетически эквивалентные силы, вычисленные на основе функций формы, которые представляют точное решение соответствующих однородных (с нулевыми силами) определяющих дифференциальных уравнений. Это происходит потому, что все соответствующие условия (равновесия, совместности) в этих точках при энергетически эквивалентных нагрузках выполняются точно (см. [9.11]).

Процедура, основанная на начальном вычислении узловых сил, позволяет соответствующим образом интерпретировать процедуру, базирующуюся на использовании матрицы жесткости. В формуле (6.16a) (что и учитывалось выше) член $[k] \{\Delta\}$ соответствует члену $[S] \{\Delta\}$ в (5.7b), поэтому можно определить $\{F^d\}$ как соответствующее выражению $[E] e^{init}$ в (5.7b). Однако $[E] e^{init}$ можно рассматривать как «начальные напряжения» σ^{init} , которые в данном случае представляют собой напряжения, обусловленные энергетически эквивалентной нагрузкой. При этом следует учесть, что все же остаются трудности при построении указанного преобразования для многомерных напряженных состояний.

Ранее было показано, что при определенных условиях (например, для стержневого элемента при приложении распределенной нагрузки) можно подсчитать непрерывное точное распределение напряжений, однако практические соображения могут побудить к определению приближенных «гистограммных» форм распределений напряжений, когда напряжения терпят разрывы при переходе от элемента к элементу. В других случаях (как, например, для треугольных элементов с постоянным значением деформации при приложении к конструкции сосредоточенных сил) численное решение приводит в основном к разрывным распределениям напряжений во всей конструкции. Следовательно, для целей проектирования имеется необходимость в схеме, которая приводила бы к непрерывному представлению поля напряжений. Рациональным образом это можно сделать с помощью введения понятия *сопряженных напряжений* [9.12]. Реализация этой идеи предполагает использование техники сглаживания, которая обеспечивает непрерывность представлений полей напряжений для согласованных конечно-элементных моделей.

Если для поля перемещений $\Delta = [N] \{\Delta\}$ функции формы $[N]$ приводят к согласованному представлению, то простейшей и наиболее естественной *согласованной аппроксимацией напряжений* может служить соотношение $\sigma^c = [N] \{\sigma\}$, где σ^c — согласованное поле напряжений, а $\{\sigma\}$ включает значения напряжений в заданных точках. Будем называть это представление *совместимым с перемещениями*. Конечно, можно выбрать согласованное представление напряжений, которое не является совместимым с перемещениями, однако для этого требуются дополнительные рассуждения, не использующие результаты проведенных вычислений. «Стандартный» расчет сопряженных напряжений основан на том, что напряжения согласованы и совместимы с перемещениями. Заметим, что σ^c может включать три компоненты в случае плоского напряженного состояния (σ_x , σ_y , τ_{xy}), поэтому $[N]$ — прямоугольная матрица.

Согласно теории для аппроксимации сопряженных напряжений, необходимо образовать два типа матриц для элементов. Пер-

вая матрица представляет собой квадратную матрицу

$$\left[\int_{\text{vol}} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] d(\text{vol}) \right],$$

столбцы которой соответствуют элементам в $\{\sigma\}$. Эту матрицу легко определить, рассматривая виртуальную работу сил, соответствующих сопряженным напряжениям σ^e , на виртуальных перемещениях. Вторая матрица — это вектор-строка, задаваемая напряжением

$$\left[\int_{\text{vol}} \sigma [\mathbf{N}] d(\text{vol}) \right],$$

где σ — несогласованное поле напряжений, записанное здесь в виде строки. Эту матрицу также можно получить, рассматривая виртуальную работу сил, отвечающих несогласованному полю напряжений σ и совместимых перемещений.

Полученные выражения для матриц элемента объединяют в соотношение, представляющее всю конструкцию, путем суммирования, идентичного с используемым в прямом методе жесткости. Сохраняя для глобального представления то же самое обозначение, что и для элементного, можно выписать вектор сопряженных напряжений в виде

$$[\sigma] = \left[\int_{\text{vol}} \sigma [\mathbf{N}] d(\text{vol}) \right] \left[\int_{\text{vol}} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] d(\text{vol}) \right]^{-1}.$$

Можно считать, что выписанное выражение получается в результате приравнивания альтернативных выражений для виртуальной работы.

Чтобы проиллюстрировать данную идею, рассмотрим задачу, изображенную на рис. 9.8. В этом случае для каждого элемента $d(\text{vol}) = A dx$ и

$$\sigma_{1-2} = \left[\left(-1 \frac{x}{L} \right) \frac{x}{L} \right] \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix}, \quad \sigma_{2-3} = \left[\left(1 - \frac{x}{L} \right) \frac{x}{L} \right] \begin{Bmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix}.$$

Поэтому для каждого элемента

$$\left[\int_{\text{vol}} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] d(\text{vol}) \right] = \frac{AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что эта матрица, за исключением постоянного множителя, совпадает с совместимой матрицей массы элемента. Объединим

эти матрицы и получим представление для всей конструкции

$$\begin{matrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Кроме того, для каждого элемента, где постоянно напряжение $\sigma = \sigma_x$, имеем

$$\int_{\text{vol}} \sigma [N] d(\text{vol}) = \frac{AL\sigma_x}{2} [1 \ 1];$$

и опять, объединяя для всей конструкции с учетом, что $\sigma_x = \frac{3}{2}(qL/A)$ в элементе 1—2 и $\sigma_x = \frac{1}{2}(qL/A)$ в элементе 2—3, получаем $q(L^2/4) [3 \ 4 \ 1]$. Поэтому, согласно подходу, основанному на введении сопряженных напряжений, имеем

$$[\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3] = q \frac{L^2}{4} [3 \ 4 \ 1] \frac{6}{AL} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = q \frac{L}{A} \left[2 \ 1 \ \frac{1}{4} \right].$$

Это распределение совпадает с точным распределением напряжений на участке 1—2 и отличается от точного решения на участке 2—3 в силу того, что σ_3 оказалось равным $qL/4A$, а не нулю.

Можно показать [9.12], что вычисленные указанным выше способом напряжения минимизируют среднеквадратичное отклонение несовместных напряжений σ от поля сопряженных напряжений σ^c . Иными словами, если $\{\sigma\}$ подсчитывается, как предложено выше, то следующий интеграл достигает своего минимального значения:

$$\int_{\text{vol}} \{[N] \{\sigma\} - \sigma^c\}^2 d(\text{vol}).$$

Из вышеизложенного вытекает несколько обобщений подхода, основанного на понятии сопряженных напряжений, два из которых приводятся ниже:

1. Можно использовать согласованные, но несовместные с перемещениями представления напряжений. Это, конечно, приведет к потере преимущества иметь в распоряжении $[N]$ на основе уже рассчитанного поля перемещений. Действительно, можно рассматривать описанный выше подход как «изосопряженное представление напряжений».

2. Для построения вектор-строки можно использовать отличное от σ напряжение. Если можно определить некоторое поле напряжений, которое лучше удовлетворяет локальным условиям равновесия, то, используя его, можно предположительно получить более подходящие сопряженные напряжения.

Требования, возникающие при проектировании, часто таковы, что изложенный выше подход, в котором необходимо строить и обращать матрицу большой размерности, экономически невыгоден, и на практике больше опираются на непосредственную интерпретацию величин напряжений, полученных с помощью матриц напряжений для элемента. Формула $\sigma = [S] \{\Delta\}$, где $[S]$ — вообще говоря, функция пространственных координат, задает поле напряжений в терминах указанных координат. Однако для расчетов необходимо иметь формулу вида $\{\sigma\} = [S] \{\Delta\}$, где $\{\sigma\}$ опять определяет напряжения в заданных точках. Главной задачей для исследователя является такое задание этих точек, которое удовлетворяло бы целям проектирования.

Проблема встает особенно остро, если используются треугольные элементы с постоянным напряжением. По-видимому, для задания напряженного состояния лучше всего выбирать точки в центре каждого элемента. Однако не имея большого количества элементов, трудно интерпретировать полученный результат. Можно также задавать средние значения напряжений в узлах, принадлежащих нескольким элементам. В любом случае дискретный вид получаемых результатов подразумевает разумный характер поведения кривых, задающих компоненты напряжения на контуре.

На рис. 9.9 представлены некоторые способы [9.13] интерпретации рассчитываемых полей напряжений в задачах с треугольными элементами, составляющими прямоугольную сетку. Схема, изображенная на рис. 9.9(а), позволяет полностью исключить необходимость использования данных для элемента и приводит к конечно-разностной аппроксимации деформаций при помощи узловых смещений. Так, в точке 3

$$\epsilon_x = \frac{u_4 - u_2}{2a}, \quad \epsilon_y = \frac{v_7 - v_6}{2b} \text{ и т. д.,}$$

откуда с учетом уравнений состояния легко подсчитать напряжения.

Для другой простой альтернативной схемы представим, что конечно-элементная модель разделена вдоль сеточной линии, как показано на рис. 9.9 (b). Силы взаимодействия F_{x_i} и F_{y_i} , действующие в узлах вдоль этой линии, вычисляются в результате умножения соответствующих узловых перемещений на отвечающие им матрицы жесткости элементов с последующим суммированием так подсчитываемых сил в каждом узле. Эти силы распределяют, как показано на рис. 9.9(с) (штриховая линия), в виде ступенчатой диаграммы напряжений, которые затем представляются в полигональной форме (сплошная линия). При построении распределений касательных напряжений используется свойство близости. Так, в точке 2, например, $\sigma_y = F_{y_2}/at$, $\tau_{xy} = F_{x_2}/at$.

Уточнение этой методики осуществляется следующим образом. Для каждой точки записывается уравнение статики, связывающее

F_y с соседними напряжениями σ , см. рис. 9.9(d). Например,

$$F_{y_5} = \frac{1}{8} (4 \sigma_{yx_5} + \sigma_{yx_3} + \sigma_{yx_1}) at.$$

Имеется столько уравнений, сколько неизвестных напряжений. Решение этих уравнений однозначно определяет распределение

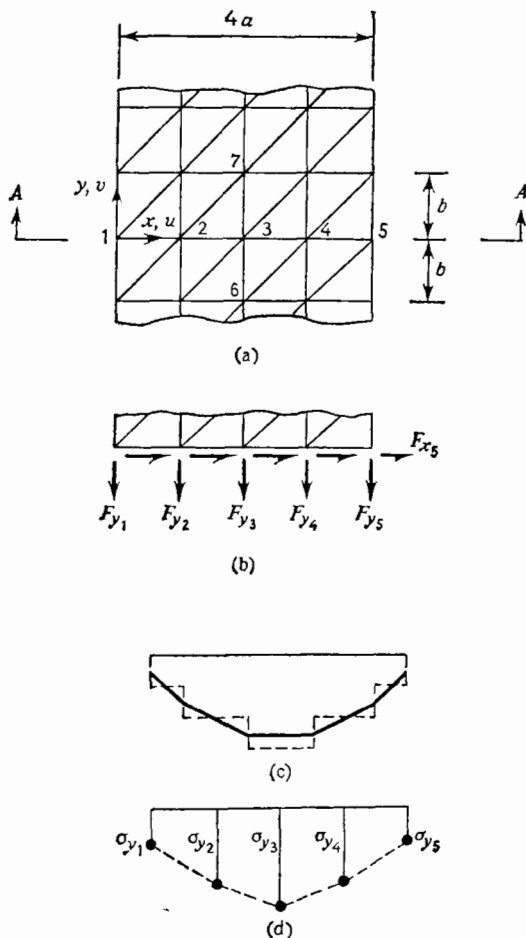


Рис. 9.9. Подходы к определению напряжений для прямоугольных сеток.

напряжений. Эти операции можно рассматривать как элементарную форму подхода, основанного на введении сопряженных напряжений.

9.2.4. Сравнение результатов численного анализа для треугольных элементов

Две задачи, которые долго служили основой сравнения альтернативных формулировок плоско-напряженных элементов, иллюстрируют существенно различные свойства треугольных элементов. Существование этих задач как основы сравнения вытекает из того факта, что они принадлежат тому небольшому количеству плоско-напряженных задач теории упругости, которые тщательно исследовались с помощью традиционных методов решения.

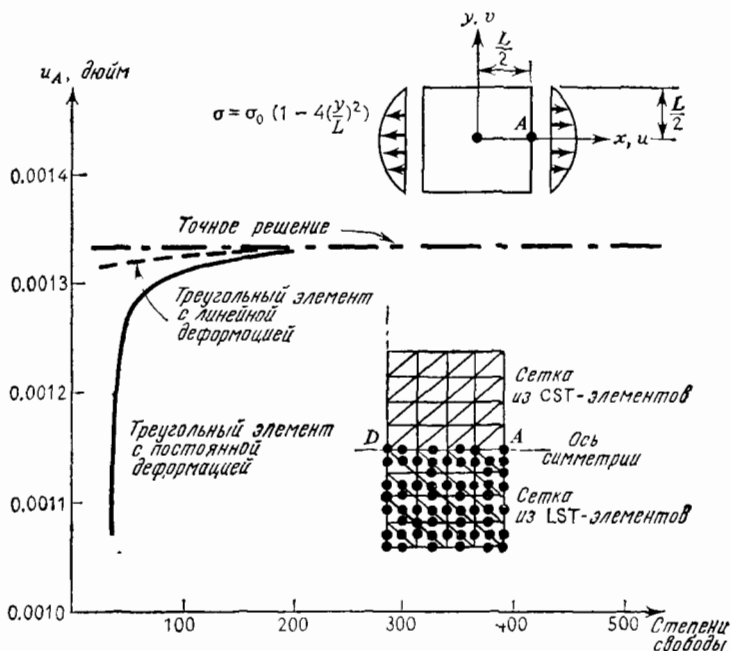


Рис. 9.10. Пластины при распределенной по краю в виде квадратичной функции нагрузке. Сравнение результатов для треугольных элементов.

В первой задаче (рис. 9.10) рассматривается прямоугольная пластина постоянной толщины, к краям которой приложены параболически распределенные нагрузки. Подробности решения этой задачи на базе предполагаемых полиномиальных представлений напряжений и принципа минимума дополнительной работы приводятся в [9.14]. На вставке рис. 9.10 изображена представительная сетка треугольников с постоянной и линейной деформациями в элементах (CST- и LST-элементы). (Благодаря симметрии относительно двух осей рассматривается лишь четверть пластины.) Из рисунка также видно, какие еще виды сеток использовались с различным числом степеней свободы.

Представленные на рис. 9.10 численные результаты для смещения точки A в горизонтальном направлении демонстрируют высокую степень точности решений при относительно небольшом числе степеней свободы. Аналогичный характер сходимости и точность достигаются и при расчете напряжений, хотя, как указывалось ранее, здесь встречаются определенные трудности при интерпретации полученных численных результатов для напряжений. Решение, полученное на основе применения треугольных элементов с линейным распределением деформаций внутри них, существенно лучше решения, полученного для треугольных элементов с постоянными деформациями внутри элементов.

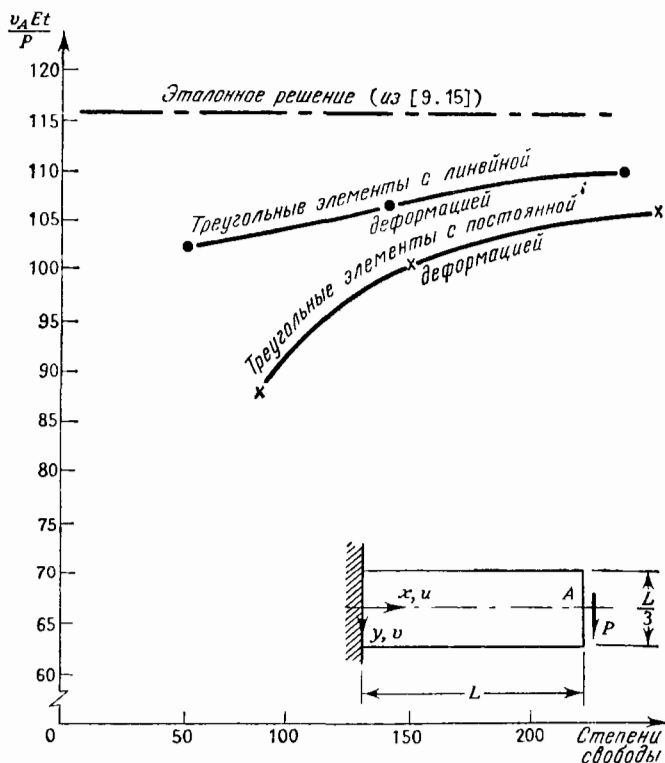


Рис. 9.11. Конечно-элементный анализ консольной балки — треугольные элементы.

На рис. 9.11 представлены результаты, относящиеся ко второй задаче. Рассматривается изгиб консольной балки единичной толщины, к свободному концу которой приложена сила P . Сила на конце приложена в виде распределенных по квадратичному за-

кону касательных напряжений. Нагрузки представляют собой энергетически эквивалентные силы, приписываемые к узлам (см. гл. 6). На рисунке изображены результаты численного эксперимента для вертикального смещения в нейтральном слое на свободном конце в зависимости от числа степеней свободы в конечно-элементной идеализации. Здесь в серии расчетов также используются CST- и LST-элементы. Решение, с которым проводится сравнение, берется из [9.15].

В этом случае видно, что использование CST-элементов не позволяет достичь приемлемой точности для числа степеней свободы, не превышающих 200. Результаты для LST-элементов значительно лучше, чем для CST-элементов, однако характеристики сходимости здесь значительно хуже, чем в предыдущем примере. Результаты экспериментов, приведенные в [9.3, 9.16], подтверждают сказанное. Другие численные решения показывают, что улучшение результатов, полученное при использовании треугольных элементов с квадратичным распределением деформаций в них, по сравнению с треугольными элементами с линейной деформацией не очень велико.

Приведенные результаты показывают, что при решении основных задач теории упругости о плоском напряженном состоянии предпочтительнее использовать треугольные элементы с линейной деформацией в них, а преимущества использования треугольных элементов более высокого порядка не столь очевидны. Каждое такое заключение должно быть смягчено рассмотрением стоимости построения коэффициентов жесткости элементов, размерности уравнений, а также возможностей решения глобальных уравнений и возможностей вычислительной машины. Заметим, что, хотя общая задача о плоском напряженном состоянии изучается адекватным образом, описанные ранее формулировки для плоского напряженного состояния не являются подходящим средством для анализа задач изгиба. Об этом речь пойдет в разд. 9.3.

9.2.5. Альтернативные вариационные принципы при построении треугольных элементов

Простота и достигаемая точность конечно-элементного представления, основанного на принципе минимума потенциальной энергии (базирующегося на перемещениях), в случае плоского напряженного состояния сдерживают развитие конечно-элементных представлений, опирающихся на альтернативные вариационные принципы. Как указывалось в гл. 7, принцип минимума дополнительной работы важен потому, что позволяет установить верхнюю границу для некоторых параметров решения. Однако его развитие и применение ограничиваются возникающими при построении элементов трудностями и пониманием того факта, что практическое

задание нагрузок и аппроксимация реальных геометрических характеристик могут привести к нарушению условий, обеспечивающих достижение верхней границы для решения.

Формулировки, основанные на принципе минимума дополнительной работы в задачах о плоском напряженном состоянии, включают задание функционала, содержащего вторые производные, если в качестве основной неизвестной выступает функция напряжений Эри Ф. Следовательно, требуется, чтобы Ф и ее первые производные были непрерывны при переходе от элемента к элементу. Эти вопросы интенсивно изучались в связи с задачами изгиба пластин, где нормальное смещение w должно удовлетворять дифференциальному уравнению того же вида, что и функция Ф. Выбор представлений для поля данного типа осуществляется в гл. 12. Сводка решений прикладных задач для плоского напряженного состояния приводится в [9.17].

В постановках задач о плоском напряженном состоянии с использованием понятия дополнительной энергии в качестве неизвестных в узлах могут приниматься также напряжения и другие силовые параметры. Некоторые авторы (см., например, [9.18]) выбирали схемы этого типа для численной проверки верхней границы решения. При этом величины напряжений в треугольных элементах принимаются постоянными, а уравнения для элемента записываются с помощью матрицы жесткости, так что вся конструкция может быть рассчитана методом перемещений. Применение этой аналитической схемы наталкивается на трудности, обусловленные кинематической неустойчивостью (см. разд. 3.3).

В случае плоского напряженного состояния подход, основанный на дополнительной энергии, оказывается полезным также для задач неупругого анализа. В расчетах поведение материала определяется в форме зависимости деформаций от напряжений, т. е. $\epsilon = [E]^{-1}\sigma$. Поэтому для формулировок с потенциальной энергией требуется обращать это выражение, что может привести к трудностям при расчете задач с учетом временных зависимостей. При анализе предельных состояний [9.19] использовались преимущества подхода на базе дополнительной энергии.

Гибридный метод напряжений при построении элементов требует знания модифицированных форм функционала дополнительной энергии. «Граничные» свойства здесь уже неприменимы, однако в то же время можно гарантировать, что решение будет находиться между границами, определяемыми решениями, полученными с помощью обычных энергетических принципов. Более того, используя данный подход, удобно представить сингулярности в напряжениях. Указанные вопросы обсуждаются далее в разд. 9.3.3, где на примере прямоугольных элементов иллюстрируется гибридный метод напряжений для плоского напряженного состояния.

Наконец, заметим, что для плоского напряженного состояния формулировки на основе функционала энергии Рейсснера обладают теми же преимуществами и недостатками, что и формулировки на основе дополнительной работы. В [9.1] даются примеры применения подхода с использованием функционала энергии Рейсснера для треугольных элементов.

9.3. Прямоугольные элементы

9.3.1. Представления перемещений

Даже для прямоугольного элемента простейшего вида, имеющего узлы лишь в четырех угловых точках (рис. 9.12), можно сформулировать несколько альтернативных видов матриц жесткости. Число независимых параметров в представлении основного деформиро-

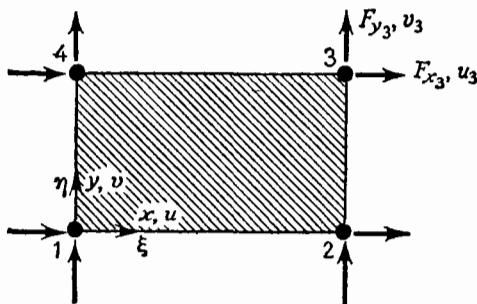


Рис. 9.12. Прямоугольный плоско-напряженный элемент. Типичные узловые силы и перемещения.

ванного состояния равно полному числу обобщенных координат, за исключением числа координат, отвечающих движению тела как твердого целого. В данном случае имеется восемь обобщенных координат (перемещения u и v в четырех вершинах прямоугольника) и три моды движения тела как твердого целого. Поэтому полное число параметров, используемых для задания деформированного состояния, равно пяти. За вычетом трех параметров, предназначенных для удовлетворения условиям постоянства деформаций, имеется возможность выбора двух дополнительных параметров. В этом разделе рассмотрим два способа их задания.

Выписывая подробно первую матрицу жесткости для прямоугольного элемента, выберем поля перемещений u и v , которые изменяются линейно вдоль сторон элемента. Условие межэлементной непрерывности перемещений будет выполнено, если можно полностью представить такими элементами плоскую конструкцию или если данный элемент соединяется с CST-треугольными элементами. В разд. 8.4 было показано, что выбираемые поля перемеще-

ний $u = [N] \{u\}$ и $v = [N] \{v\}$ задаются двухточечной интерполяционной функцией Лагранжа, где $\xi = x/x_2$, $\eta = y/y_3$,

$$[N] = [(1-\xi)(1-\eta); \xi(1-\eta); \xi\eta; (1-\xi)\eta], \quad (9.13a)$$

$$\{u\} = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4]^T, \quad (9.13b)$$

$$\{v\} = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4]^T. \quad (9.13c)$$

Используя уравнения, связывающие перемещения и деформации, получим матрицу $[D]$ из (9.6) п. 9.2.1, коэффициенты которой равны

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] &= \frac{1}{x_2} [- (1-\eta); (1-\eta); \eta; -\eta], \\ \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right] &= \frac{1}{y_3} [- (1-\xi); -\xi; \xi; (1-\xi)], \end{aligned} \quad (9.14)$$

где $\{u\}$ и $\{v\}$ в правой части соотношений (9.6) задаются с помощью (9.13b, c). Имея $[D]$ и зная для конкретного типа материала (изотропного, ортотропного и т. д.) матрицу $[E]$, получим из выражения (9.7) матрицу жесткости в виде

$$[k] = \left[\int_A [D]^T [E] [D] t dA \right].$$

Для изотропного материала окончательный вид матрицы жесткости в рассматриваемом случае приводится на рис. 9.13.

Интересно изучить основные свойства этой формулировки. Выбранное поле перемещений всюду (внутри элемента и при переходе через границы элементов) непрерывно. Что можно сказать об условиях равновесия? Подставляя выражения для u и v , получим следующие остаточные члены:

для уравнения равновесия в направлении оси x :

$$\frac{E}{2(1-\mu)x_2y_3} [v_1 - v_2 + v_3 - v_4],$$

для уравнения равновесия в направлении оси y :

$$\frac{E}{2(1-\mu)x_2y_3} [u_1 - u_2 + u_3 - u_4].$$

Видно, что если перемещения задают равномерное расширение ($u_1 = u_4$, $u_2 = u_3$, $v_1 = v_2$, $v_3 = v_4$), выписанные выражения обращаются в нуль и имеет место равновесие. Тем самым невязки в выполнении условий равновесия пропорциональны сдвиговым деформациям. Сдвиговые напряжения меняются линейно внутри элемента. Нормальные напряжения постоянны вдоль направлений их действия, но меняются по линейному закону вдоль перпендикулярных направлений.

Представленный на рис. 9.12 элемент является базисным элементом в семействе *лагранжевых* плоско-напряженных прямоуголь-

(Симметрично)

u_1	v_1	u_2	v_2	u_3	v_3	u_4	v_4
$4(y_1^2 + \gamma_1 x_1^2)$							
$3\gamma_2$	$4(x_2^2 + \gamma_1 y_2^2)$						
$2(y_1^2 - 2\gamma_1 x_1^2)$	$-\gamma_3$	$4(y_2^2 + \gamma_1 x_2^2)$					
γ_3	$-2(2x_2^2 - \gamma_1 y_2^2)$	$-3\gamma_2$	$4(x_2^2 + \gamma_1 y_2^2)$				
$-2(y_2^2 + \gamma_1 x_2^2)$	$-3\gamma_2$	$-2(2y_2^2 - \gamma_1 x_2^2)$	$- \gamma_3$	$4(y_2^2 + \gamma_1 x_2^2)$			
$-3\gamma_2$	$-2(x_2^2 + \gamma_1 y_2^2)$	γ_3	$2(x_2^2 - 2\gamma_1 y_2^2)$	$3\gamma_2$	$4(x_2^2 + \gamma_1 y_2^2)$		
$-2(2y_2^2 - \gamma_1 x_2^2)$	γ_3	$-2(y_2^2 + \gamma_1 x_2^2)$	$3\gamma_2$	$2(y_2^2 - 2\gamma_1 x_2^2)$	$- \gamma_3$	$4(y_2^2 + \gamma_1 x_2^2)$	
$-\gamma_3$	$2(x_2^2 - 2\gamma_1 y_2^2)$	$3\gamma_2$	$2(x_2^2 - \gamma_1 y_2^2)$	γ_3	$-2(2x_2^2 + \gamma_1 y_2^2)$	$-3\gamma_2$	$4(x_2^2 + \gamma_1 y_2^2)$

$E t$
 $3\gamma_1 \gamma_2 x_2 y_3$

$$\gamma_1 = \frac{1-\mu}{2}$$

$$\gamma_2 = \frac{1+\mu}{2}$$

$$\gamma_3 = \frac{3}{2}(1-3\mu)$$

Рис. 9.13. Матрица жесткости для прямоугольного элемента с линейным законом распределения граничных перемещений.

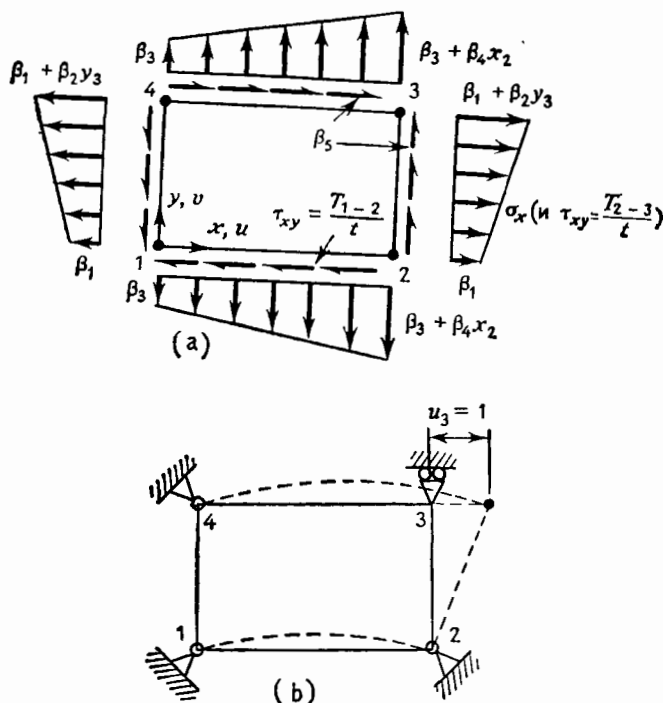


Рис. 9.14. Характер поведения прямоугольного элемента, основанного на пятичленном поле напряжений. (а) Напряжения и граничные усилия; (б) отклик на единичное перемещение u_3 (смещение граничных точек изображено штриховой линией).

ных элементов высокого порядка, названных так потому, что здесь поле перемещений строится с использованием интерполяционной формулы Лагранжа. Биквадратный элемент этого семейства приводится на рис. 8.7(б). Для построения множителей, входящих в функцию формы, используется квадратичная интерполяция. Операции по исключению внутренних и граничных степеней свободы, а также по преобразованию основного прямоугольного элемента в изопараметрический приводятся в разд. 8.7 и 8.8 и поэтому здесь не излагаются.

Второй детально описываемой в этом разделе формулировкой является наиболее ранний вариант построения матрицы жесткости для прямоугольного элемента [9.20]. Принципиально построение основано на следующих допускаемых полях напряжений:

$$\sigma_x = \beta_1 + \beta_2 y, \quad \sigma_y = \beta_3 + \beta_4 x, \quad \tau_{xy} = \beta_5. \quad (9.15)$$

Это поле напряжений иллюстрируется на рис. 9.14(а). Пластина имеет толщину t . Подставляя в дифференциальные уравнения рав

$$[k] = \frac{Et}{16\gamma_1\gamma_2x_2y_3} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ \hline x_2^2\gamma_1 + y_3^2\gamma_4 & y_3^2\gamma_1 + x_2^2\gamma_4 & & & & & & \\ \gamma_2x_2y_3 & \gamma_3x_2y_3 & x_2^2\gamma_1 + y_3^2\gamma_4 & & & & & \\ x_2^2\gamma_1 - y_3^2\gamma_4 & \gamma_3x_2y_3 & & & & & & \\ -\gamma_3x_2y_3 & x_2^2\gamma_5 - y_3^2\gamma_1 & -\gamma_2x_2y_3 & y_3^2\gamma_1 + x_2^2\gamma_4 & & & & \\ -x_2^2\gamma_1 - y_3^2\gamma_5 & -\gamma_2x_2y_3 & y_3^2\gamma_5 - x_2^2\gamma_1 & \gamma_3x_2y_3 & x_2^2\gamma_1 + y_3^2\gamma_4 & & & \\ -\gamma_2x_2y_3 & -y_3^2\gamma_1 - x_2^2\gamma_5 & -\gamma_3x_2y_3 & y_3^2\gamma_1 - x_2^2\gamma_4 & \gamma_2x_2y_3 & y_3^2\gamma_1 + x_2^2\gamma_4 & & \\ y_3^2\gamma_5 - x_2^2\gamma_1 & -\gamma_3x_2y_3 & -x_2^2\gamma_1 - y_3^2\gamma_5 & \gamma_2x_2y_3 & x_2^2\gamma_1 - y_3^2\gamma_4 & \gamma_3x_2y_3 & x_2^2\gamma_1 + y_3^2\gamma_4 & \\ \gamma_3x_2y_3 & y_3^2\gamma_1 - x_2^2\gamma_4 & \gamma_2x_2y_3 & -y_3^2\gamma_1 - x_2^2\gamma_5 & -\gamma_3x_2y_3 & x_2^2\gamma_5 - y_3^2\gamma_1 & -\gamma_2x_2y_3 & y_3^2\gamma_1 + x_2^2\gamma_4 \end{bmatrix}$$

(Симметрично)

$$\gamma_1 = \frac{1-\mu}{2}, \quad \gamma_4 = \frac{4-\mu^2}{3}$$

$$\gamma_2 = \frac{1+\mu}{2}, \quad \gamma_5 = \frac{2+\mu^2}{3}$$

$$\gamma_3 = \frac{1-3\mu}{2}$$

Рис. 9.15. Матрица жесткости прямоугольного элемента, основанного на предполагаемом поле напряжений (9.15).

новесия (4.2) выражения (9.15), убеждаемся, что это — равновесное поле напряжений.

Чтобы построить матрицу жесткости, рассмотрим функции перемещений u и v , соответствующие соотношениям (9.15). Это можно сделать, выражая деформации через напряжения с помощью уравнений состояния в виде $\epsilon = [E]^{-1}\sigma$ и затем интегрируя уравнения, связывающие деформации и перемещения. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} u &= (1-\xi)(1-\eta)u_1 + \xi(1-\eta)u_2 + \xi\eta u_3 + (1-\xi)\eta u_4 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\mu \frac{x_2}{y_3} (\xi - \xi^2) + \frac{y_3}{x_2} (\eta - \eta^2) \right] (v_1 - v_2 + v_3 - v_4), \quad (9.16) \\ v &= (1-\xi)(1-\eta)v_1 + \xi(1-\eta)v_2 + \xi\eta v_3 + (1-\xi)\eta v_4 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{x_2}{y_3} (\xi - \xi^2) + \mu \frac{y_3}{x_2} (\eta - \eta^2) \right] (u_1 - u_2 + u_3 - u_4). \end{aligned}$$

На рис. 9.14(b) показано поле смещения в элементе для единичного значения u_3 и при подавленных остальных степенях свободы. Заметим, что перемещение u линейно, а перемещение v меняется по квадратичному закону вдоль сторон, лежащих в перпендикулярном направлении. Так как для определения компоненты смещения на каждой стороне имеется лишь два угловых смещения, приходим к выводу, что поле перемещений этого элемента не удовлетворяет требованиям, обеспечивающим межэлементную непрерывность перемещений.

Используя функции перемещений (9.16), соотношения между деформациями и перемещениями (4.7) и формулы для жесткости элемента (9.7), получим матрицу жесткости элемента, представленную на рис. 9.15.

9.3.2. Несовместные моды [9.21]

Как показано на рис. 9.11 из п. 9.2.4, основанные на линейных полях перемещений матрицы жесткости треугольного элемента не обеспечивают достаточной точности при анализе изгиба балки. Поэтому можно ожидать, что матрицы жесткости прямоугольного элемента также не обеспечивают удовлетворительной точности при решении этой задачи. В п. 9.3.4 этот факт будет выявлен в результате численного эксперимента. Причину появления невязок можно выяснить, изучая простой прямоугольный элемент в состоянии чистого изгиба (рис. 9.16 (a)). В этом случае точные распределения смещений (рис. 9.16 (b)) даются формулами

$$u = C_1 xy, \quad v = \frac{1}{2} C_1 (a^2 - x^2), \quad (9.17a, b)$$

где C_1 и a — константы. Подставляя данные выражения в соотношение, связывающее сдвиговые деформации и перемещения $\gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x$, можно проверить, что условие равенства нулю сдви-

говых деформаций, характеризующее чистый изгиб, выполнено. Так как поле перемещений, задаваемое линейно меняющейся на сторонах элемента функцией перемещений (9.13), содержит только величину (9.17а) и описывает перемещения, изображенные на рис. 9.16(с), то и к исходному линейному полю перемещений необходи-

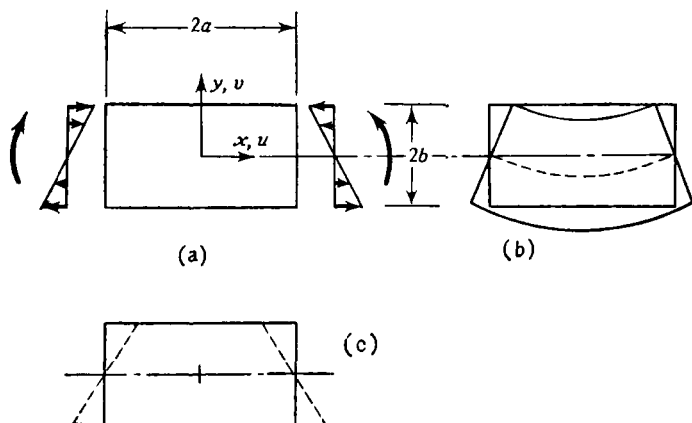


Рис. 9.16. Способы представления чистого изгиба: (а) состояние чистого изгиба; (б) точные перемещения, (с) перемещения в элементе — линейные поля

мо добавить моды в виде (9.17б). Для общности желательно сохранить симметрию по x и y , поэтому добавим данные моды как к полю u , так и к полю v . Итак, имеем

$$u = [[N_L] [N_B]] \begin{Bmatrix} u_L \\ u_B \end{Bmatrix}, \quad v = [[N_L] [N_B]] \begin{Bmatrix} v_L \\ v_B \end{Bmatrix}, \quad (9.18)$$

где $[N_L]$, $\{ u_L \}$ и $\{ v_L \}$ — функции формы и значения смещений в узлах для линейного поля (9.13), а $[N_B]$, $\{ u_B \}$ и $\{ v_B \}$ — функции формы и узловые смещения несовместной «дугой» моды, добавленной для описания поведения при изгибе (см. (9.17б) и рис. 9.16 (б)).

Вначале матрица жесткости для элемента строится в терминах $\{ u_L \}$, $\{ u_B \}$, $\{ v_L \}$ и $\{ v_B \}$. Матрица жесткости для элемента, выраженная через $\{ u_L \}$ и $\{ v_L \}$, получается в результате исключения дополнительных степеней свободы $\{ u_B \}$ и $\{ v_B \}$ с помощью процедуры конденсации, описанной в разд. 2.8. После выполнения указанных операций оказывается, что результирующая матрица жесткости совпадает с представленной на рис. 9.15. Причину этого обстоятельства можно выяснить, рассматривая рис. 9.14(б), на котором изображены смещения на границе, соответствующие единичному

смещению рассматриваемого типа. Те же смещения получаются из (9.16) и очевидно, что они имеют вид «дутых» мод, введенных в проводившихся рассмотрениях.

9.3.3. Формулировки на базе гибридного метода напряжений [9.22]

В случае плоского напряженного состояния прямоугольные элементы позволяют пояснить применение гибридного метода напряжений, имеющего более самостоятельное значение, нежели приведенный в разд. 6.7 пример.

Для плоского напряженного состояния полем напряжений, удовлетворяющим дифференциальным уравнениям равновесия, является поле, определяемое с помощью (9.15) и изображенное на рис. 9.14(b). Используя обозначения из разд. 6.7, заметим, что для построения матрицы жесткости необходимо знание трех основных матриц, а именно, матриц $[Z]$, $[L]$ и $[Y]$. Согласно (6.77), матрица $[Z]$ содержит лишь коэффициенты уравнений для напряжений, поэтому имеем

$$[Z] = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \\ 1 & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.19)$$

В рассматриваемом случае $\{\beta_f\} = [\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \ \beta_4 \ \beta_5]^T$.

Матрица $[L]$ задает распределение усилий на сторонах элемента, совместимых с полем напряжений в нем. Изображенное на рис. 9.14(a) напряженное состояние также задает значения граничных усилий $T_{x_{1-2}}$, $T_{y_{2-3}}$ и т. д. Например, $T_{x_{2-3}} = t(\beta_1 + \beta_2 y)$. Таким образом, можно выписать уравнение

$$T = [L] \{\beta_f\}, \quad (6.61)$$

где

$$T = [T_{x_{1-2}} \ T_{y_{1-2}} \ T_{x_{2-3}} \ T_{y_{2-3}} \ T_{x_{3-4}} \ T_{y_{3-4}} \ T_{x_{4-1}} \ T_{y_{4-1}}]^T, \quad (9.20)$$

а коэффициенты для $[L]$ задаются из (9.15).

Для смещений на границе выбираются представления в виде линейных функций. Так, вдоль края 2—3 поле перемещений описывается функцией

$$u_{2-3} = \left(1 - \frac{y}{y_3}\right) u_2 + \frac{y}{y_3} u_3.$$

После того как функции указанного типа будут записаны для всех сторон, их можно объединить в виде

$$\bar{u} = [\bar{Y}] \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{v\} \end{Bmatrix}, \quad (6.17)$$

где

$$\bar{\mathbf{u}} = [u_{1-2} \ v_{1-2} \ \dots \ v_{4-1}]^T, \quad (9.21)$$

а $\{\mathbf{u}\}$ и $\{\mathbf{v}\}$ определяются согласно (9.13b) и (9.13c). Образует теперь, согласно данному в разд. 6.7 описанию гибридного метода, матрицу жесткости элемента $[\mathbf{k}] = [\mathbf{I}]^T [\mathbf{H}]^{-1} [\mathbf{I}]$, где

$$[\mathbf{I}] = \left[\int_{S_n} [\mathbf{L}]^T [\bar{\mathbf{Y}}] dS \right] \quad (6.62)$$

(S_n — полная граница элемента) и

$$[\mathbf{H}] = \left[\int_{\text{vol}} [\mathbf{Z}]^T [\mathbf{E}]^{-1} [\mathbf{Z}] d(\text{vol}) \right]. \quad (6.78)$$

Оказывается, что матрица жесткости, полученная указанным выше способом, совпадает с изображенной на рис. 9.15 матрицей жесткости, выведенной с использованием поля перемещений (9.16). Поле перемещений (9.16) соответствует, разумеется, используемому выше полю напряжений. Однако существует одно различие, заключающееся в том, что полю перемещений в чисто жесткостной формулировке соответствуют *нелинейные* перемещения на краях, а для выписанной выше формулировки — только *линейные* смещения на краях. Это объясняется тем, что нелинейные компоненты смещения в чисто жесткостной формулировке (см. рис. 9.14(a)) направлены перпендикулярно действию сил, вызывающих указанные перемещения, и поэтому эти силы не производят работу.

Тот факт, что в представленном примере матрицу жесткости можно построить с помощью обычных жесткостных формулировок, а не в результате гибридного анализа, не означает, что так можно поступить всегда в гибридных методах жесткости для плоско-напряженного состояния. С использованием различных полей напряжений и перемещений можно построить практически безграничное число вариантов формулировок на базе гибридных методов жесткости. Гибридный метод жесткости полезен, по крайней мере, в двух случаях. Некоторые параметры перемещений, полученные указанным способом, лежат между верхней границей, определенной «равновесной» формулировкой, и нижней границей, определенной «совместимой» формулировкой, если внутреннее поле напряжений соответствует первой, а перемещения на границе — последней [9.23]. Кроме того, можно ввести выражения, которые задают сингулярности в решениях для напряжений, как это случается в конструкциях у начала трещин [9.24].

9.3.4. Сравнение численных результатов

На рис. 9.17 изображен график зависимости вычисленного значения смещения конца балки $\nu_A Et/P$ от числа использованных при анализе степеней свободы для прямоугольных конечных элементов в задаче об изгибе нагруженной на свободном конце консольной балки (см. п. 9.2.4). Представлены результаты как для прямоуголь-

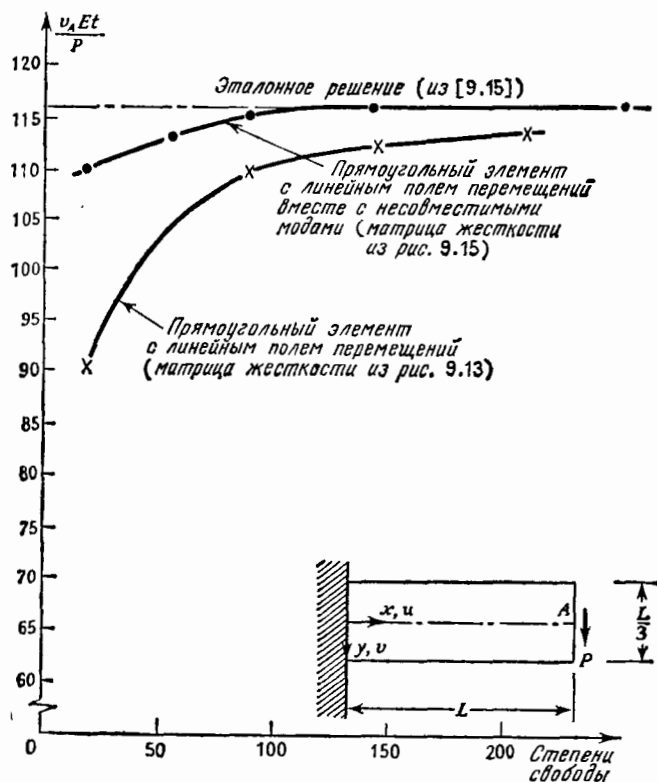


Рис. 9.17. Конечно-элементный анализ консольной балки — прямоугольные элементы.

ных элементов, построенных на базе перемещений, меняющихся по линейному закону вдоль границ элемента (матрица жесткости изображена на рис. 9.13), так и для элементов, основанных на поле перемещений (9.16) (матрица жесткости изображена на рис. 9.15). Последние, как было показано, можно также интерпретировать как полученные на основе гибридных жесткостных формулировок или базирующихся на линейных перемещениях вдоль границы, отвечающих «дугам» модам.

Результаты показывают, что использование формулировок на базе линейных смещений на границе (межэлементно совместимых) приводит к довольно медленной сходимости к эталонному решению. То же самое справедливо и для треугольных элементов (см. рис. 9.11). Напротив, использование формулировок с несовместимыми модами приводит к очень точным решениям в этой задаче. Результаты для наименьшего числа степеней свободы (< 60 степеней свободы) получены при измельчении сетки лишь в направлении оси x , т. е. при одном элементе по толщине балки. Поэтому формулировки для плоско-напряженных задач общего вида можно использовать в представлении частных случаев изгиба, где обычно требуется выполнение гипотезы плоских сечений (плоские сечения до деформации остаются плоскими после нее). Для задач изгиба балок не часто требуется строить элементы, отличающиеся от простейшего изгибного элемента, однако в гл. 10 будет показано, что концепция несовместимых мод, являющаяся альтернативной в смысле интегрирования энергии деформации элемента на грубых сетках, весьма полезна при использовании трехмерных элементов теории упругости для анализа пластин и оболочек.

Литература

- 9.1. Dunham R. S., Pister K. S. A Finite Element Application of the Hellinger-Reissner Variational Theorem.—Proc of the Second Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL TR 68-150, p. 471—487.
- 9.2. Pederson P. Some Properties of Linear Strain Triangles and Optimal Finite Element Models.—Int. J. Num. Meth. Eng., 1973, 7, p. 415—430.
- 9.3. Brebbia C., Connor J. J. Fundamentals of Finite Element Techniques.—London: Butterworths Publishers, 1973.
- 9.4. Holand I. The Finite Element Method in Plane Stress Analysis, Chapter 2 of «The Finite Element Method in Stress Analysis», Holand and Bell (ed.).—Trondheim, Norway: Tapir Press, 1969.
- 9.5. Tocher J. L., Hartz B. J. Higher-Order Finite Element for Plane Stress.—Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div., Aug. 1967, 93, No. EM4, p. 149—174.
- 9.6. Holand L., Bergan P. G. Discussion of «Higher-Order Finite Element for Plane Stress».—Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div., Apr. 1968, 94, No. EM2, p. 698—702.
- 9.7. Walz J. E., Fulton R. E., Cyrus N. J., Eppink R. T. Accuracy of Finite Element Approximations.—NASA TN D-5728, Mar. 1970.
- 9.8. Taig I. C., Kerr I. R. Some Problems in Discrete Element Representation of Aircraft Structures.—In: Matrix Methods of Structural Analysis, B. Fraeijs de Veubeke (ed.).—New York, N. Y.: The MacMillan Co., 1964, p. 282—284.
- 9.9. Turcke D. J., McNeice G. M. Guidelines for Selecting Finite Element Grids Based on an Optimization Theory.—Int. J. Comp. Struct., 1974, 4.
- 9.10. McNeice G. M., Hunnisset S. F. Mixed-Displacement Finite-Element Analysis with Particular Application Using Plane Stress Triangles.—J. Strain Analysis, 1972, 7, No. 4, p. 243—252.
- 9.11. Tong P. Exact Solutions of Certain Problems by Finite Element Method.—AIAA J., 1969, 7, No. 1, p. 178—180 [Имеется перевод: Ракетная техн. и космос.—М.: Мир, 1969, № 1.]
- 9.12. Oden J. T., Brauchli H. J. On the Calculation of Consistent Stress Distribu-

- tions in Finite Element Approximations.—Int. J. Num. Meth. Eng., 1971, 3, p. 317—322.
- 9.13 Hrennikoff A. Precision of Finite Element Method in Plane Stress.—Pub. Int. Assn. Bridge Struct. Eng., 1969, 29-11, p. 125—137
 - 9.14 Timoshenko S., Goodier J. N. Theory of Elasticity, 2nd ed.—New York, N.Y.: McGraw-Hill Book Co., p. 167—171, 1951 [Имеется перевод: Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости.—М.: Наука, 1979, 560 с.]
 - 9.15 Hooley R. F., Hibbert P. D. Bounding Plane Stress Solutions by Finite Elements.—Proc. ASCE, J. Struct. Div., Feb. 1966, 92, No. ST. 1, p. 39—48.
 - 9.16 Cowper G. R. Variational Procedures and Convergence of Finite Element Methods.—In: Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics, S. J. Fenves, et al. (eds.)—New York, N.Y.: Academic Press, 1973, p. 1—12.
 - 9.17 Gallagher R. H., Dhalla A. K. Direct Flexibility-Finite Element Elastoplastic Analysis.—Proc. of First Internat. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology, Berlin, Sept. 1971, 6, Part M.
 - 9.18 Fraeijs de Veubeke B. Upper and Lower Bounds in Matrix Structural Analysis.—In: Matrix Methods of Structural Analysis, B. Fraeijs de Veubeke (ed.)—New York, N.Y.: The MacMillan Co., 1964, p. 166—201.
 - 9.19 Belytschko T., Hodge P. G. Plane Stress Limit Analysis by Finite Elements.—Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div., Dec. 1970, 96, No. EM6, p. 931—44.
 - 9.20 Turner M. J., Gough R. W., Martin H. C., Topp L. J. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures.—J. Aero Sci., Sept. 1956, 23, No. 23, 9, p. 805—824
 - 9.21 Wilson E. L., et al. Incompatible Displacement Models.—In: Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics, S. J. Fenves, et al. (eds.)—New York, N.Y.: Academic Press, 1973, p. 43—57.
 - 9.22 Pian T. H. H. Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distributions.—AIAA J., 1964, 2, p. 1333—1335 [Имеется перевод: Ракетная техн. и космон.—М.: Мир, 1964.]
 - 9.23 Pian T. H. H., Tong P. Basis of Finite Element Methods for Solid Continua.—Int. J. Num. Meth. Eng., 1969, 1, No. 1, p. 3—28.
 - 9.24 Tong P., Pian T. H. H., Lasry S. J. A Hybrid-Element Approach to Crack Problems in Plane Elasticity.—Int. J. Num. Meth. Eng., 1973, 7, No. 3, p. 297—308.

Задачи

- 9.1. Используя гибридный метод жесткости, постройте матрицу жесткости для треугольного элемента с постоянным значением напряжений (см. рис. 5.4).
- 9.2. Постройте смешанную матрицу сил и перемещений для плоско-напряженного треугольного элемента с постоянным значением напряжений в элементе, используя вариационный принцип Рейснера. Полученную матрицу преобразуйте в матрицу жесткости элемента аналогично тому, как это делалось для балочного элемента из разд. 6.8
- 9.3. Проверьте правильность выражения для коэффициента k_{11} матрицы жесткости прямоугольного элемента (см. рис. 9.15) (F_{x_1} в зависимости от u_1).
- 9.4. Постройте матрицу жесткости для кольцевого элемента, изображенного на рис. P9.4. Так как выполнены условия осевой симметрии, то $e_r = du/dr$, $e_\theta = u/r$. Выберите в качестве функции перемещений функцию $u = [1 - (r/r_{2-1})]u_1 + (r/r_{2-1})u_2$, где $r_{2-1} = r_2 - r_1$.
- 9.5. Обсудите формулировку гибридного прямоугольного элемента на основе потенциальной энергии, используя для описания усилий на краях элемента функцию напряжений.

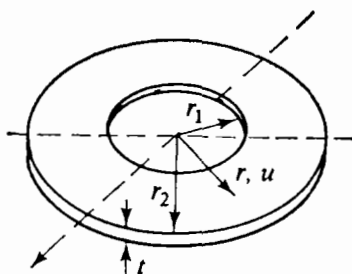


Рис. Р9.4.

9.6. Вычислите энергетически эквивалентные нагрузки для квадратичного закона распределения напряжений и сетки конечных элементов, указанной на рис. 9.10. Предположите, что в треугольных элементах деформации постоянны, а не меняются по линейному закону.

9.7. Постройте вектор начальных сил для треугольного элемента с линейно меняющейся деформацией в случае линейно меняющейся температуры в свободном от напряжения теле, т. е. $\gamma = N_1\gamma_1 + N_2\gamma_2 + N_3\gamma_3$, где N_1 и т. д. — функции формы линейного поля, а γ_1 , γ_2 и γ_3 — температуры в вершинах элемента.

9.8. Придумайте подходящее поле перемещений для построения матрицы жесткости секторного элемента, изображенного на рис. Р9.8 и постройте матрицу перехода от узловых смещений к деформациям [D].

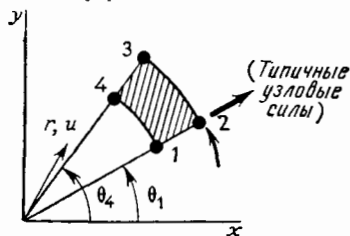


Рис. Р9.8.

9.9. (Численная задача.) Проведите конечно-элементный анализ квадратной пластины, изображенной на рис. Р9.9 (та же задача, что и на рис. 9.10), самостоя-

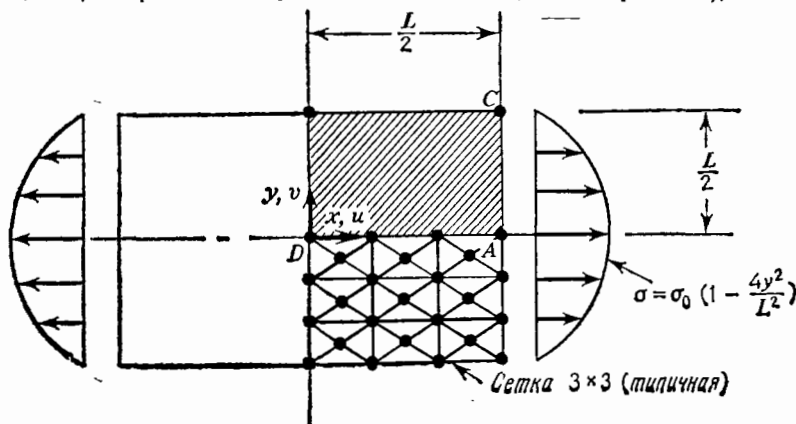


Рис. Р9.9.

тельно выбирая тип элемента и сетки. Для сравнения решений как для перемещений, так и для напряжений см. работу: Cowper G. R., Lindberg G. M., Olson M. D. A Shallow Shell Finite Element of Triangular Shape.— Int. J. Solids and Structures, 1970, 6, p. 1133—1156.

Замечание. Необходимо строить сетку лишь в заштрихованном квадранте. Заметим, что u и v равны нулю в точке D , перемещения v равны нулю вдоль оси x , а u — вдоль оси y ; $E=10^7$ фунт/дюйм², $\mu=0.3$, $t=1$.

9.10. (Численная задача.) Проведите конечно-элементный анализ изображенной на рис. Р9.10 консольной балки прямоугольного сечения единичной толщины (та же задача, что и на рис. 9.11), самостоятельно выбирая тип элементов и сетку. Нагрузка P распределена по параболическому закону в виде касательных напряжений, приложенных к прямоугольному поперечному сечению: $\tau_{xy}=(2P/9L)(1-36y^2/L^2)$; $E=10^7$ фунт/дюйм², $\mu=0.2$, $t=1$.

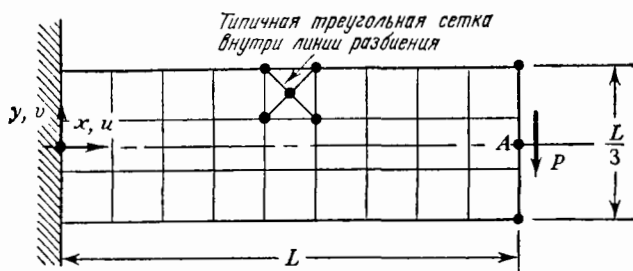


Рис. Р9.10 (сетка 3×9 изображена лишь в иллюстративных целях).

ТРЕХМЕРНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ: ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Сплошные, или трехмерные, элементы позволяют получить решение задач общей трехмерной теории упругости. Указанным задачам ранее уделялось относительно мало внимания при проектировании из-за трудности использования традиционных подходов к решению. Поэтому в этой области, за исключением простейших случаев, конечно-элементный анализ стал фактически неоспоримым средством отыскания решения. Имеются в виду такие задачи, как расчет массивных бетонных конструкций плотин, расчет напряжений в породах, решение задач механики для грунтов и скальных пород, возникающих при буровых работах, численное определение напряжений во фланцах и соединениях толстостенных труб.

Основные сплошные элементы представляют собой непосредственное обобщение на трехмерный случай плоских элементов. Изображенный на рис. 10.1(a) тетраэдральный элемент есть обобщение треугольного элемента на трехмерный случай, а шестигранный элемент (рис. 10.1 (b)) — трехмерный аналог плоского прямоугольного элемента. Хотя построены различные специальные и альтернативные виды трехмерных элементов (например, пятигранный или клинообразный элемент), на практике чаще используют тетраэдральный и шестигранный элементы. В этой главе рассматриваются только эти основные элементы.

Из-за «проклятия размерности» конечно-элементное представление для сплошного тела требует введения исключительно большого числа степеней свободы (рис. 10.2). Из рисунка видно, что если для получения решения заданной точности в одномерном случае требуется 10 степеней свободы, то в трехмерном случае — 3000. Поэтому решающими для использования метода в трехмерном случае являются вопросы экономичности. Необходимо добиться наибольшей эффективности выполнения (1) операций ввода и вывода данных, (2) процедур решения систем уравнений большой размерности,

(3) представления реальной конструкции ее конечно-элементной моделью.

Вопросы (1) и (2) лежат вне круга вопросов данной книги, читателю рекомендуется обратиться к литературе, цитируемой в конце данной главы. Требования (3) обуславливают применение очень сложных процедур представления геометрических характеристик. Поэтому концепция *изопараметрического* представления геометрии

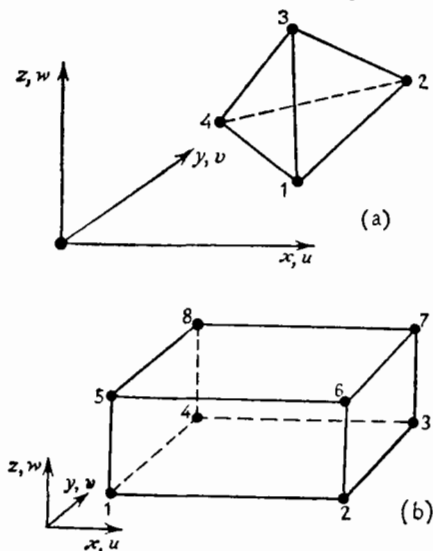


Рис. 10.1. Сплошные элементы: (а) элемент в виде правильного тетраэдра и оси координат; (б) элемент в виде правильного шестигранника и оси координат.

элемента, т. е. использование функций формы для описания границ элемента, приобретает особое значение для трехмерных элементов. Эти концепции развивались в разд. 8.8 и обсуждаются далее.

Существующие формулировки трехмерных элементов почти всецело основываются на предполагаемых полях перемещений и принципе минимума потенциальной энергии. Формулировкам на базе дополнительной энергии и смешанным формулировкам еще предстоит продемонстрировать свои преимущества для задач данного класса. Так, в задачах трехмерной упругости, если функционал дополнительной энергии выражен в терминах функции напряжений, то нужно преодолеть трудности, обусловленные операциями с функциями, которые непрерывны вместе с частью своих производных при переходе через границу элемента. Поэтому в данной главе рассматриваются лишь формулировки, основанные на предполагаемых перемещениях.

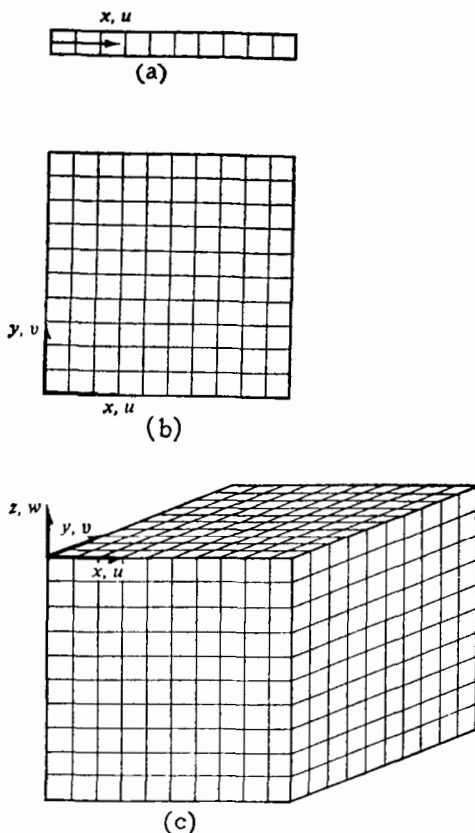


Рис. 10.2. Рост числа степеней свободы с увеличением размерности задачи. (а) Одномерный случай (10 степеней свободы); (б) двумерный случай (200 степеней свободы); (с) трехмерный случай (3000 степеней свободы).

10.1. Основные соотношения

10.1.1. Уравнения теории упругости

Основные соотношения для трехмерных элементов даются линейной теорией упругости. Рассматривая равновесие бесконечно малого элемента, имеем (для простоты объемные силы исключены)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\
 \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\
 \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{10.1}$$

Линейные соотношения между деформациями и перемещениями записываются в виде

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.\end{aligned}\quad (10.2)$$

На практике может оказаться необходимым применять уравнения состояния с 21 упругой константой. Тем не менее в основном внимание в данной главе уделяется вопросам построения уравнений жесткости для элемента и рассмотрение ограничивается случаем изотропного материала, для которого

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} (1-\mu) & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & (1-\mu) & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & (1-\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\mu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\mu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\mu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}$$

или

$$\sigma = [E] \varepsilon, \quad (10.3)$$

10.1.2. Потенциальная энергия

Энергия деформации, входящая в выражение для потенциальной энергии, имеет вид

$$U = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \varepsilon [E] \varepsilon d(\text{vol}) - \int_{\text{vol}} \varepsilon [E] \varepsilon^{\text{init}} d(\text{vol}) + C(\varepsilon^{\text{init}}), \quad (10.4)$$

где ε определяется согласно (10.3) и при учете температурного расширения

$$\varepsilon^{\text{init}} = [\alpha \gamma \alpha \gamma \alpha \gamma \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad (10.5)$$

где α — коэффициент температурного расширения, Υ — приращение температуры, отсчитываемое от температуры, при которой в теле отсутствуют напряжения.

Как и в гл. 9, удобно записать некоторые поля перемещений в элементе в терминах узловых перемещений $\{\Delta\}$. В этих случаях преобразование от узловых перемещений к деформациям можно записать в виде (см. (5.6с))

$$\mathbf{e} = [\mathbf{D}] \{\Delta\}. \quad (10.6)$$

Энергия деформации равна (см. разд. 6.4)

$$U = \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\Delta} [\mathbf{k}] [\Delta] - \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\Delta} \{\mathbf{F}^{\text{init}}\} + \mathbf{C}(\mathbf{e}^{\text{init}}), \quad (10.7)$$

где

$$[\mathbf{k}] = \left[\int_{\text{vol}} [\mathbf{D}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{D}] d(\text{vol}) \right], \quad (10.8)$$

$$\{\mathbf{F}^{\text{init}}\} = \left\{ \int_{\text{vol}} [\mathbf{D}]^T [\mathbf{E}] \{\mathbf{e}^{\text{init}}\} d(\text{vol}) \right\}. \quad (10.9)$$

В других рассматриваемых в этой главе случаях выражать поля перемещений через узловые перемещения неудобно и требуется использовать обобщенные параметры перемещений $\{\mathbf{a}\}$. Тогда, согласно (5.6а), преобразование обобщенных параметров перемещений $\{\mathbf{a}\}$ к деформациям можно записать в виде $\mathbf{e} = [\mathbf{C}] \{\mathbf{a}\}$, а из (5.4а) получим преобразование узловых перемещений к обобщенным перемещениям: $\{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{B}\}^{-1} \{\Delta\}$. Поэтому матрица жесткости дается выражением

$$[\mathbf{k}] = ([\mathbf{B}]^{-1})^T \left[\int_{\text{vol}} [\mathbf{C}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{C}] d(\text{vol}) \right] [\mathbf{B}]^{-1}. \quad (10.8a)$$

10.2. Построения тетраэдральных элементов

10.2.1. Общие замечания

В разд. 8.6 показано, что понятия тетраэдральных координат (L_1, L_2, L_3, L_4) и «тетраэдра Паскаля», естественно, приводят к определению семейства тетраэдральных элементов первого и более высокого порядков. Такие элементы характеризуются компонентами трансляционных перемещений (u, v, w) в каждом узле. Как показывает рассмотрение плоских треугольных элементов, в качестве степеней свободы можно выбрать не только компоненты трансляционных перемещений, но и значения их производных $(du/dx, du/dy)$ и т. д.) в узлах. Поэтому для элементов первого и второго порядков не существует альтернативных элементов из-за недостаточного числа степеней свободы, однако альтернативные элементы можно

построить в случае тетраэдральных элементов, основанных на кубических функциях (рис. 10.3).

Полный кубический полином содержит 20 членов, поэтому элемент, который характеризуется только трансляционными перемещениями, может иметь, как показано на рис. 10.3(а), 20 узловых точек. В этих узлах задается 60 степеней свободы, используемых

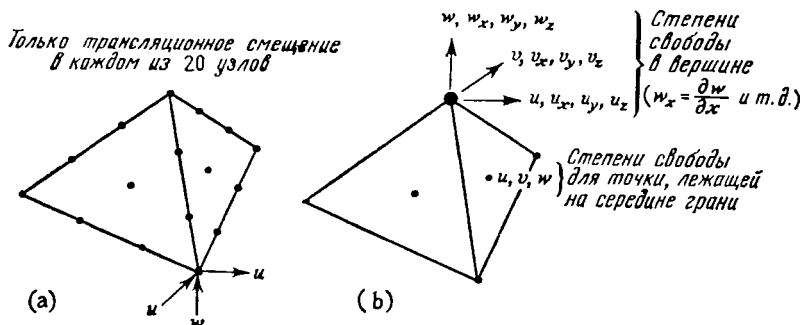


Рис. 10.3. Возможные типы тетраэдральных элементов, основанных на полях перемещений в виде полных кубических полиномов.







для описания перемещений u , v и w . Если необходимо сохранить *полноту* полиномиальных функций, применяемых для построения элемента с участием степеней свободы в виде производных от перемещений, то такой элемент должен также содержать 60 степеней свободы. Способ задания указанных степеней свободы изображен на рис. 10.3(б). Каждой из четырех вершин соответствует по три компоненты трансляционного перемещения и для каждой компоненты перемещения — по три частных производные, всего 12 величин на узел. Так, например, для компоненты u имеем

$$u_1, \dots, u_4; \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_1, \dots, \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_4; \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_1, \dots, \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_4; \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_1, \dots, \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_4. \quad (10.10)$$

и аналогично для v и w . Это приводит к появлению 48 степеней свободы. Дополнительные 12 степеней свободы можно задать в виде трансляционных перемещений центров каждой из четырех граней (см. рис. 10.3(б)). Однако иметь узлы в центрах граней неудобно. Поэтому предпринимались попытки для построения элемента со степенями свободы только в вершинах, т. е. с 48 степенями свободы. Приводимое ниже обсуждение достоинств, присущих альтернативным формулировкам для тетраэдрального элемента, дает понять, почему элементу с 48 степенями свободы уделяется такое внимание.

Были проведены обширные исследования по оценке вычислительной эффективности использования различных видов тетраэдральных элементов [10.1—10.3]. В табл. 10.1, взятой из [10.3], указы-

Таблица 10.1. Тетраэдральные конечные элементы

Обозначение	Представление	Число узлов	Число степеней свободы, приходящихся		Замечания	Среднее число степеней свободы, приходящихся на элемент в глобальном анализе
			на узел	на элемент		
a		4	3	12	Поля перемещений в виде полного линейного полинома (постоянная деформация); подробнее см. [10.3—10.5] и [10.19]	0.6
b		10	3	30	Поля перемещений в виде полного квадратичного полинома (линейная деформация); подробнее см. [10.4]	4.2
c		20	3	60	Поля перемещений в виде полного кубического полинома; подробнее см. [10.6]	13.8
d		8		60	Поля перемещений в виде полного кубического полинома; подробнее см. [10.6]; 12 степеней свободы в вершинах и вдоль ребер (u, v, w, u_x, \dots, w_x) и 3 степени свободы на серединах граней (u, v, w)	8.4
e		16	3	48	Трансляционные перемещения в качестве степеней свободы; поля перемещений в виде неполных кубических полиномов; подробнее см. [10.2] и [10.6]	—
f		4	12	48	Перемещения и производные от перемещений в качестве степеней свободы; поля перемещений в виде неполных кубических полиномов; подробнее см. [10.1—10.3]	2.4

вается среднее число степеней свободы, приходящихся на один элемент, для системы с бесконечным числом элементов; кроме того, это число равняется средней полуширине ленты в соответствующих глобальных матрицах жесткости. Если используются эффективные методы решения алгебраических уравнений, то цена вычислений пропорциональна приблизительно корню квадратному из полуширины ленты. Кроме того, при оценке относительной эффективности необходимо учесть и другие факторы. Так, сказанное выше подразумевает, что для задания глобальной конфигурации требуется фиксированное число элементов, но следует, конечно, учитывать, что с ростом порядка элемента увеличивается и точность решения. Из тетраэдральных элементов, представленных в табл. 10.1, наибольшими преимуществами обладает элемент T48. Средняя полуширина ленты матрицы, отвечающая этому элементу, невелика из-за наличия степеней свободы в виде производных от перемещений. Это свойство обсуждалось в разд. 9.2 для плоских элементов со степенями свободы в виде производных от перемещений.

Следует в то же время отметить, что в случае неоднородности материала, когда теоретически нельзя допустить постоянство деформаций, возникают проблемы, связанные с применением степеней свободы в виде производных от перемещений. Если имеет место относительно слабое изменение свойств от точки к точке (например, при наличии градиента температур для материала, свойства которого зависят от температуры), требование к непрерывности деформаций (производных от перемещений) оказывается не столь существенным. Если же существует значительная степень неоднородности материала, условие непрерывности деформаций неприемлемо. В этом случае можно связывать лишь степени свободы в виде трансляционных перемещений.

Кроме того, следует учитывать факторы, обусловленные представлением геометрических характеристик конструкции и особенно криволинейных границ. Конечно, можно использовать один тип представления для задания полей перемещений и другой — для описания криволинейных границ элемента. Остальные используемые при этом функции могут также различаться. Тем не менее оказывается, что наиболее удобно использовать одни и те же виды аппроксимаций для геометрических характеристик и полей перемещений.

Учитывая сказанное, ограничимся ниже построением тетраэдральных элементов лишь с линейным полем перемещений и элементов T48. Первые являются базовыми для всего семейства тетраэдральных элементов; элементы более высокого порядка (с квадратичными и кубическими полями перемещений) из этого класса легко формулируются как обобщение этих элементов. Введенные в разд. 8.4 тетраэдральные координаты позволяют построить функции формы для представления любого порядка и приводят к алгебраичес-

ким выражениям для интегралов от этих функций по объему элемента. (Явные формулировки для квадратичных элементов можно найти в [10.4] и [10.5], а для элементов с кубическим полем перемещений в [10.6].) Элементам T48 уделяется внимание из-за их эффективности при решении прикладных задач и из-за того, что на их примере демонстрируются операции, которые нужно выполнить, если перемещения записываются в терминах обобщенных координат, а не в виде функций формы.

10.2.2. Элемент с линейным полем перемещений [10.19]

Линейные поля перемещений $\{u, v, w\}$ можно записать в тетраэдральных координатах $[L] = [L_1 L_2 L_3 L_4]$ (см. разд. 8.6) в виде

$$u = [L] \{u\}, \quad v = [L] \{v\}, \quad w = [L] \{w\}, \quad (10.11)$$

где

$$u = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4], \quad (10.12)$$

и аналогично для $\{v\}$ и $\{w\}$. Замечая, что, согласно (8.29),

$$L_i = \frac{1}{6(\text{vol})} [(VOL)_i + c_{1i}x + c_{2i}y + c_{3i}z],$$

где (vol) , c_{1i} , c_{2i} и c_{3i} выражаются в разд. 8.6 в терминах узловых координат x_1, \dots, z_4 . Применяя соотношения (10.2) между деформациями и перемещениями к уравнениям (10.11), приходим к следующей форме уравнения (10.6):

$$\begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{6(\text{vol})} \begin{bmatrix} [c_1] & [0] & [0] \\ [0] & [c_2] & [0] \\ [0] & [0] & [c_3] \\ [c_2] & [c_1] & [0] \\ [0] & [c_3] & [c_2] \\ [c_3] & [0] & [c_1] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{v\} \\ \{w\} \end{Bmatrix} \quad \{v\} = [D] \{\Delta\}, \quad (10.13)$$

где $[c_i] = [c_{1i} \ c_{1i} \ c_{1i} \ c_{1i}]$, и аналогичные представления справедливы для $[c_2]$ и $[c_3]$; матрица $[0]$, имеющая размерность 1×4 , — нулевая матрица-строка. Линейное поле перемещений обуславливает постоянство деформаций внутри элемента. Поэтому такой элемент часто называют *тетраэдральным элементом с постоянной деформацией* (CSTh-элемент). Если $[E]$ определено в соответствии с (10.3) и все элементы матрицы $[D]$ постоянны, то из (10.8) получим выражение для матрицы жесткости тетраэдрального элемента в виде $[k] = [D]^T [E] [D](\text{vol})$, где объем элемента (vol) подсчитывается, как указано в разд. 8.6.

На практике чрезвычайно трудно задать конфигурацию конечно-элементной модели только одним указанным элементом. Проб-

лема заключается в правильном объемном расположении тетраэдров без пустот и т. д. Поэтому вычислительные программы часто предусматривают непосредственное задание шестигранных элементов, которые автоматически составляются из фиксированного числа тетраэдров. На рис. 10.4 изображен один из таких «супер-элементов», включающий пять тетраэдров.

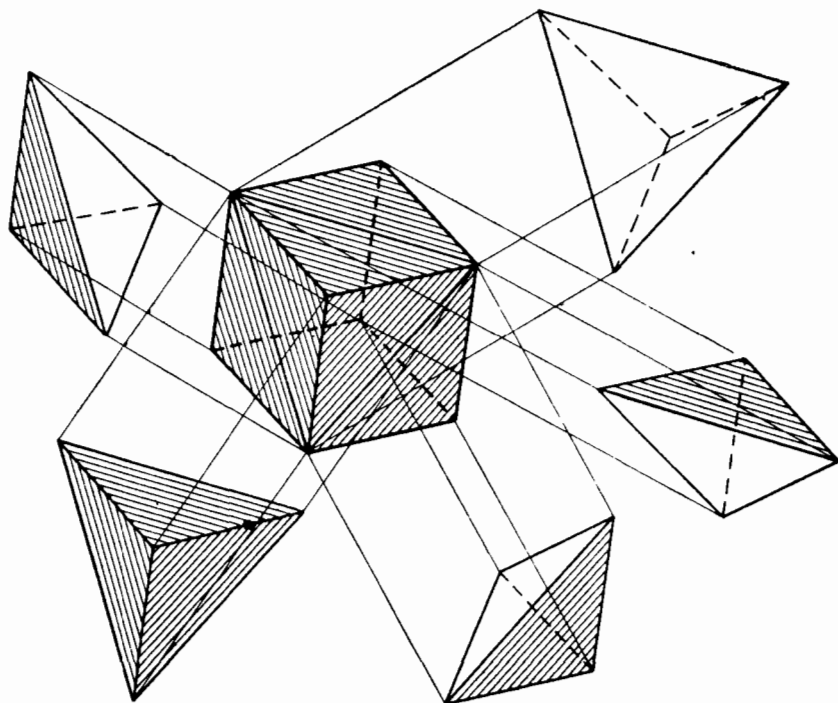


Рис. 10.4. Шестигранник, составленный из пяти тетраэдров.

10.2.3. Элементы высших порядков [10.6]

Простой способ построения элемента Т48 основан на разложении величин в ряд по тетраэдральным координатам в виде

$$\begin{aligned}
 u = & L_1 a_1 + L_2 a_2 + L_3 a_3 + L_4 a_4 + L_1 L_2 a_5 + L_3 L_4 a_6 + L_4 L_1 a_7 + \\
 & + L_3 L_2 a_8 + L_2 L_4 a_9 + L_3 L_1 a_{10} + (L_1^2 L_2 - L_1 L_2^2) a_{11} + \\
 & + (L_1^2 L_4 - L_3 L_4^2) a_{12} + (L_4^2 L_1 - L_4 L_1^2) a_{13} + \\
 & + (L_3^2 L_2 - L_3 L_2^2) a_{14} + (L_2^2 L_4 - L_2 L_4^2) a_{15} + (L_3^2 L_1 - L_3 L_1^2) a_{16}. \quad (10.14)
 \end{aligned}$$

Поля перемещений u и w определяются аналогичным образом, поэтому полный набор обобщенных параметров перемещения может быть представлен как $\{a\} = [a_1 \dots a_{48}]^T$.

Теперь порядок построения матрицы жесткости соответствует изложенному в предыдущих главах. Выписанные поля перемещений дифференцируют согласно соотношениям между деформациями и перемещениями (10.2) и приходят к уравнениям вида $\epsilon = [C] \{a\}$. Кроме того, в каждой из четырех вершин определяются функции перемещений и их первые производные. В результате получают 48 уравнений, записанных в виде $\{\Delta\} = [B] \{a\}$, где $\{\Delta\}$ содержит степени свободы, представленные в (10.10) для поля u и в аналогичных формулах для полей v и w . Следовательно, матрица жесткости дается формулой (10.8a):

$$[k] = ([B]^{-1})^T \left[\int_{\text{vol}} [C]^T [E] [C] d(\text{vol}) \right] [B]^{-1}.$$

Очевидно, полученное выражение слишком сложно для задания явного представления.

Изложенная подробно в [10.6] процедура построения матрицы жесткости для рассматриваемого элемента существенно отличается от приведенной выше. В указанной работе приводятся в виде таблиц матрицы жесткости в обобщенных координатах и матрицы преобразования обобщенных координат в узловые. Знание явных выражений для «основной» матрицы жесткости, как показано в разд. 8.2, где строится матрица жесткости, соответствующая обобщенным смещениям $\{a\}$, позволяет построить целое семейство матриц жесткости тетраэдральных элементов для полей перемещений в виде полных кубических полиномов обобщенных параметров.

Развивались и другие подходы к построению матрицы жесткости элемента T48. Так, в [10.1] вначале строится полный (двадцатиэлементный) кубический полином в объемных координатах, а далее в предположении, что перемещения меняются по квадратичному закону вдоль граней элемента, число членов доводится до 16. Для определения элементов в криволинейных координатах используются также различные метрики. В [10.2] полный квадратичный полином в объемных координатах (10 членов) дополнен шестью членами, взятыми из кубического разложения.

10.3. Прямоугольные шестигранные элементы

10.3.1. Общие замечания

На рис. 10.5 изображено базисное семейство прямоугольных шестигранных элементов, степени свободы которых представляют собой лишь трансляционные перемещения. Это семейство называется *лагранжевым*, так как поля перемещений, на основе которых они строятся, задаются с помощью лагранжевой интерполяции, описанной в п. 8.3.1. Простейший элемент из этого семейства изображен на рис. 10.5 (а) и строится на основе линейных полей перемещений,

полностью определяемых степенями свободы в восьми вершинах. Обобщение на квадратичные и кубические поля перемещений приводит, как показано соответственно на рис. 10.5(b) и (с), к появлению внутренних узлов. Указанные внутренние узлы можно исключить из рассмотрения с помощью стандартной процедуры конденсации

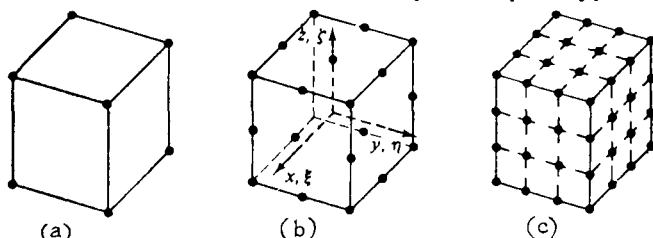


Рис. 10.5. Лагранжево семейство шестигранных элементов (внутренние узлы не изображены): (а) линейный: 8 узлов, 24 степени свободы; (б) квадратичный: 27 узлов, 81 степень свободы; (с) кубический: 64 узла, 192 степени свободы.

ции (см. разд. 2.8). Кроме того, с помощью описанного в разд. 8.7 приема, преобразуя лагранжевы интерполяционные функции, можно построить функции формы, которые записываются только в терминах внешних узлов.



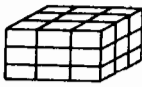
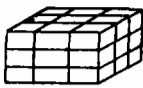

Используя интерполяцию Эрмита (п. 8.3.2), можно также построить прямоугольный шестигранный элемент со степенями свободы в виде значений производных в вершинах элемента. Для построения базисного элемента из этого семейства необходимо задание кубических полей перемещений, причем общее число степеней свободы для элемента достигает 192.

Хотя построение прямоугольных шестигранных элементов все более высокого порядка с любым типом степеней свободы теоретически возможно, все же на практике ограничиваются лишь несколькими основными видами. Характеристики этих элементов сведены в табл. 10.2 [10.3]. Из представленных в таблице элементов обсудим подробно задание полей перемещений лишь для случаев *a*, *b* и *c*, так как именно эти элементы используются в рассматриваемых ниже тестовых численных экспериментах и широко применяются на практике. Описание полей перемещений для случаев *d* и *e* можно найти соответственно в [10.7] и [10.8].

10.3.2. Прямоугольный шестигранник с линейным полем перемещений

В дальнейших построениях удобно поместить начало координат в центре элемента и выразить все координаты в безразмерном виде, причем указанные координаты ξ , η и ζ задаются согласно методике разд. 8.7 (см. рис. 10.5(b)). Аналогично случаю плоских элементов, описанному в разд. 8.4, для полей перемещений при интерполяции

Таблица 10.2. Прямоугольные шестигранные конечные элементы

Обозначение	Представление	Число узлов	Число степеней свободы, приходящихся		Замечания
			на узел	на элемент	
a		8	3	24	Поля перемещений в виде линейных полиномов; u, v, w в качестве степеней свободы в каждом узле; подробнее см. [10.4, 10.9]
b		20	3	60	Поля перемещений в виде квадратичных полиномов; u, v, w в качестве степеней свободы в каждом узле; см. [10.4, 10.10, 10.17]
c		32	3	96	Поля перемещений в виде неполных кубических полиномов; u, v, w в качестве степеней свободы в каждом узле; см. [10.4] и [10.14]
d		64	3	192	Поля перемещений в виде полных кубических полиномов с внутренними узлами; u, v, w в качестве степеней свободы в каждом узле; в изопараметрическом случае называется элемент LUMINA; подробнее см. [10.7]
e		8	12	96	Поля перемещений в виде неполного полинома пятой степени [10.13] либо эрмитовой полиномиальной интерполяции [10.8]; перемещения и производные от перемещений в качестве степеней свободы; изопараметрическое представление обсуждается в цитированной литературе

Лагранжа имеем

$$u = [N] \{u\}, \quad v = [N] \{v\}, \quad w = [N] \{w\}, \quad (10.15)$$

причем

$$[N] = [N_1 \dots N_8], \\ \{u\} = [u_1 \dots u_8]^T, \quad \{v\} = [v_1 \dots v_8]^T, \quad \{w\} = [w_1 \dots w_8]^T,$$

где

$$N_i = 1/8 (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i). \quad (10.16)$$

Построение матрицы жесткости для этого элемента осуществляется обычным способом. Поля перемещений (10.15) дифференцируются согласно соотношениям между перемещениями и деформациями (10.2). Приходим к формулам преобразования узловых смещений в деформации

$$\{\epsilon\} = [D] \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{v\} \\ \{w\} \end{Bmatrix}. \quad (10.6a)$$

Если $[E]$ выбрана в соответствии с (10.3), то приходим к матрице жесткости, задаваемой выражением (10.8), т. е.

$$[k] = \left[\int_{vol} [D]^T [E] [D] d(vol) \right].$$

Явный вид этой матрицы приводится в [10.9].

10.3.3. Прямоугольные шестигранники высших порядков

Как указывалось, можно легко построить шестигранный элемент более высокого порядка, применяя для этого интерполяцию Лагранжа требуемого порядка. Возникающие в этом подходе трудности обусловлены наличием узлов внутри элемента и на его гранях. Поэтому предпочтительнее использовать элементы, имеющие узлы только на ребрах, как, например, двадцатиузловой элемент, представленный в графе *b* табл. 10.2. В этом случае матрицы соотношений (10.15) имеют вид

$$[N] = [N_1 \dots N_{20}], \quad \{u\} = [u_1 \dots u_{20}]^T$$

и аналогичные выражения для $\{v\}$ и $\{w\}$. Как отмечалось в разд. 8.7, этот вид функций формы с исключенными внутренними узлами не единствен. Широко используется и следующий альтернативный вид. В вершинах (с началом координат в центре)

$$N_i = 1/8 (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i) (\xi \xi_i + \eta \eta_i + \zeta \zeta_i - 2), \quad (10.17)$$

а для типичного узла, находящегося в средней точке ребра,

$$\begin{aligned} \xi_i &= 0, \quad \eta_i = \pm 1, \quad \zeta_i = \pm 1, \\ N_i &= 1/4 (1 - \xi^2) (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i). \end{aligned} \quad (10.18)$$

Формулы, задающие связь этой функции с коэффициентами полиномиального разложения, а также альтернативные виды функций формы для 20 узловых элементов приводятся в [10.10].

Более сложное представление с 32 узлами дается в табл. 10.2 в графе с. Здесь функции формы в вершинах имеют вид (с началом координат в центре)

$$N_i = 1/64 (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i) [9(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - 19], \quad (10.19)$$

а для типичных узлов, лежащих на ребрах в точках $\xi_i = \pm 1/3$, $\eta_i = \pm 1$, $\zeta_i = \pm 1$, имеем

$$N_i = 9/64 (1 - \xi^2) (1 + 9\xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i). \quad (10.20)$$

Процедура преобразования выписанных полей перемещений в матрицы жесткости элементов совпадает с процедурой для шестигранника с линейным полем перемещений.

10.4. Сравнение численных результатов

В [10.1, 10.3, 10.4, 10.9] были проведены исследования относительной точности и эффективности некоторых тетраэдральных и шестигранных элементов, описанные в п. 10.3.1 и 10.3.2. На рис. 10.6 изображена задача, рассматриваемая в [10.4] в качестве тестовой

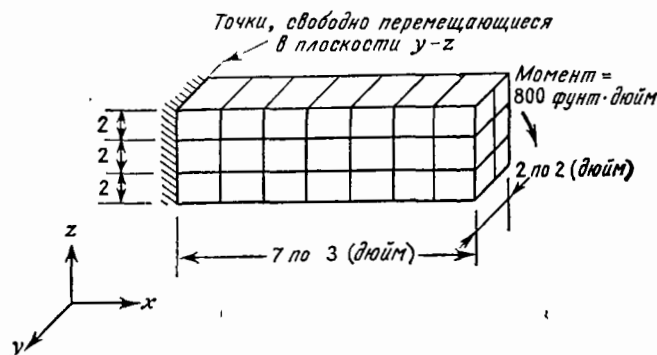


Рис. 10.6. Консольная балка, используемая для изучения точности решений (из [10.4]) (размеры даны в дюймах).

для сравнения точности получаемых решений. Конструкция представляет собой консольную балку, к которой на конце приложен момент. Балка разбивается на 42 прямоугольных шестигранных элемента. Часть решений получена с помощью шестигранных элементов, образованных в результате объединения тетраэдральных элементов, например, как показано на рис. 10.4. Изучаемые элементы включают тетраэдры, построенные на линейных и квадратичных полях перемещений, что соответствует графам а и б в табл. 10.1, а также прямоугольным шестигранным элементам, построенным на линейных полях перемещений (10.16) — (10.18) (графа б в табл.

10.2). Тетраэдральный элемент с квадратичным полем перемещений и двадцатиузловой шестигранный элемент приводят к тем же результатам при вычислении смещения конца балки, что и балочная теория. Тетраэдральный элемент (образованный, как показано на рис. 10.4, объединением пяти элементов) с линейным полем перемещений и шестигранный элемент с линейным полем перемещений приводят к результатам, соответственно на 39 и 10% меньшим, чем решение на основе балочной теории.

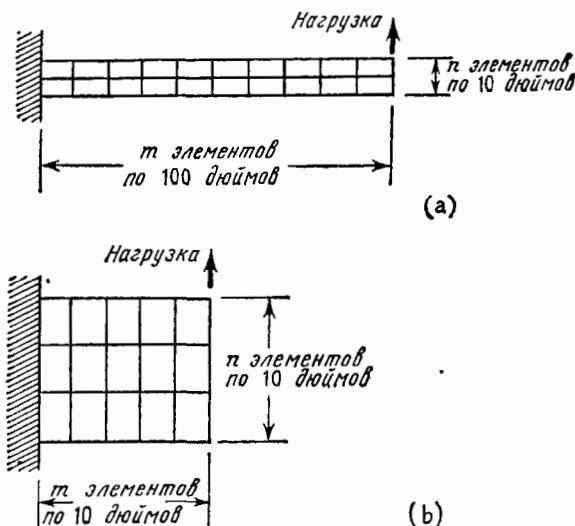


Рис. 10.7. Тестовые конструкции для изучения вычислительной эффективности метода (из [10.4]): (а) гибкая консоль; (б) жесткая консоль. Замечание. Обе конструкции имеют единичную толщину.

Для двух тестовых задач, изображенных на рис. 10.7, 10.8, приводятся результаты сравнения эффективности численного решения, измеряемой затрачиваемым машинным временем, для шестигранного элемента с линейным полем перемещений и двадцатиузловой шестигранника (графа *b* в табл. 10.2). Результаты показывают, что для тонкой балки (рис. 10.7(а) и 10.8(а)) двадцатиузловой элемент, очевидно, лучше. Этот элемент может воспроизвести линейный характер изменения деформаций по толщине балки, что характерно для изгиба. Сказанное выполняется и для короткой балки (рис. 10.7(б) и 10.8(б)), где наблюдается напряженное состояние более общего вида. В [10.4] приводится много других результатов, выходящих за круг вопросов, рассматриваемых в данной книге.

Приведенные в [10.4] результаты численных экспериментов подтверждают преимущество непосредственного построения шести-

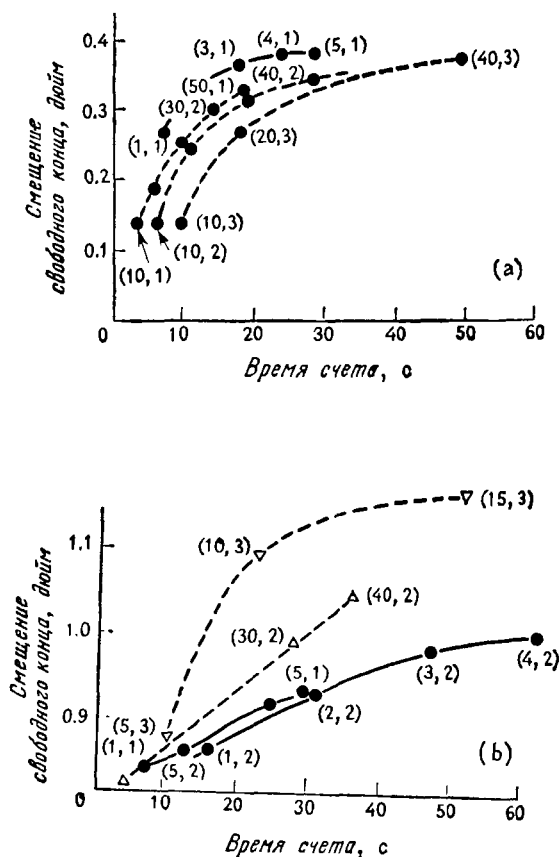


Рис.10.8. Результаты исследования вычислительной эффективности при расчете консольных балок (из [10.4]). (а) гибкая консоль (см. рис. 10.7(а)); (б) жесткая консоль (см. рис. 10.7(б)). Обозначения — 20-узловой шестигранник, — — шестигранник с линейным полем перемещений; (n, m) — размерность сетки.

гранного элемента по сравнению с составленными из тетраэдральных элементов согласно рис. 10.4. Для подтверждения этого высказывания требуется еще большее количество численных экспериментов. Различия в деталях при формулировке элементов, искусство программирования и вид электронно-вычислительных устройств влияют на получаемые разными исследователями выводы. Поэтому при анализе трехмерных конструкций проектировщики отдают предпочтение тетраэдральным элементам. Интересную сводку результатов практического применения указанных элементов можно найти в [10.11].

10.5. Изопараметрическое представление и анализ оболочек с помощью трехмерных элементов

Успех применения трехмерных элементов существенно зависит от имеющихся возможностей проведения высокоэффективного общего анализа системы, причем использование наиболее эффективных алгоритмов при построении алгебраических уравнений и их численном решении является обязательным [10.12].

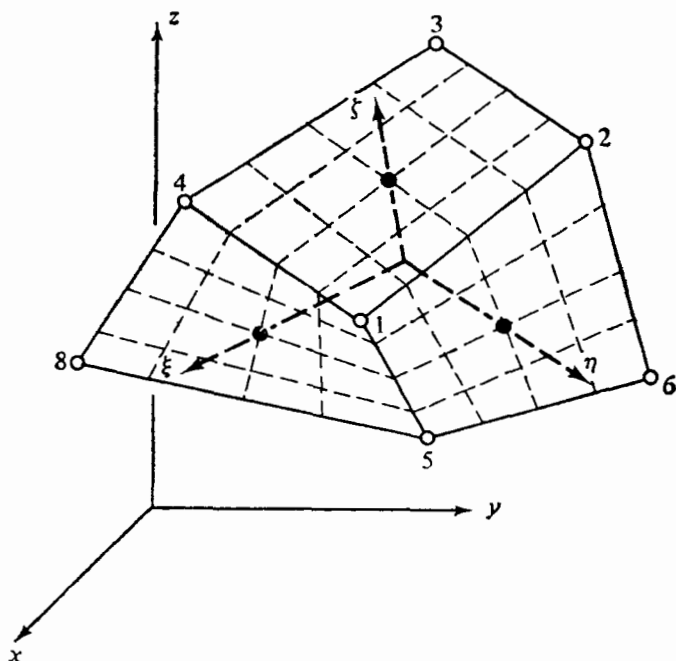


Рис. 10.9. Шестигранный элемент с линейным полем перемещений — изопараметрические координаты.

Другим фактором достижения максимальной эффективности анализа является использование изопараметрического представления геометрии трехмерных элементов. Если элементы ограничены плоскими, а не криволинейными гранями, то часть степеней свободы при общем анализе должна определяться соответственно геометрическим представлением. Число указанных степеней свободы существенно уменьшается, если использовать концепцию изопараметрических элементов при задании криволинейных границ элемента. Тогда степени свободы максимально используются при определении поведения конструкции.

На рис. 10.9 иллюстрируется способ задания координатных осей

для изопараметрического представления шестигранника с линейным распределением перемещений. Поле перемещений для прямоугольной формы этого элемента, задаваемого формулой (10.16), записывается непосредственно через безразмерные координаты (ξ, η, ζ) , изображенные на рис. 10.9. Таким образом, выполняя операции, описанные в разд. 8.8, можно непосредственно построить изопараметрическую форму этого элемента. Однако алгебраические

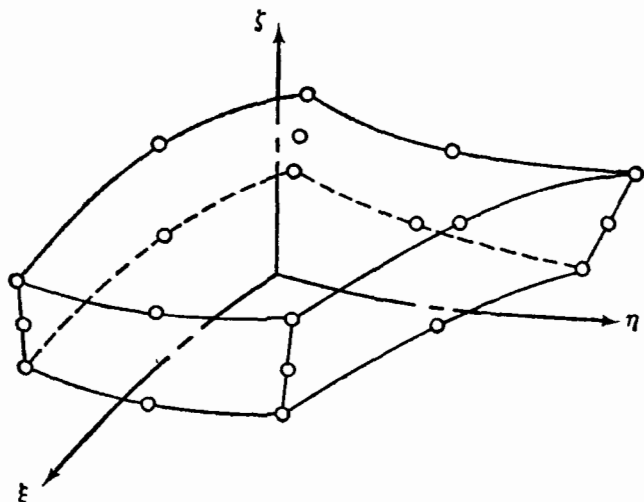


Рис. 10.10. Шестигранный элемент, используемый в качестве искривленного оболочечного элемента.

сложности таковы, что явное выражение для результирующих коэффициентов жесткости получить затруднительно даже для этого элемента, являющегося самым простым из шестигранников. В общем случае является существенным численное определение соответствующих энергетических интегралов. Читателю рекомендуется обратиться к работам [10.13—10.15] для ознакомления со многими аспектами формулировок изопараметрических трехмерных элементов.

Изопараметрические трехмерные элементы полезны также для представления оболочечных конструкций. На рис. 10.10 изображен двадцатиузловой изопараметрический элемент, построенный в виде, удобном для анализа подобных задач. Применение этих элементов при анализе толстых оболочек дает прекрасные результаты, однако при уменьшении толщины элемента получаемое решение не стремится к решению для тонких оболочек. Как указывалось в п. 9.3.2, это происходит потому, что возникают члены, характеризующие избыточную жесткость в представлении энергии деформации сдвига. В работах [10.16] и [10.17] показано, что можно получить хорошие

результаты для тонких оболочек, если аппроксимировать вклад энергии деформаций сдвига и сохранить точность задания слагаемых энергии нормальных деформаций. Так как этот тип элемента требует выполнения численного интегрирования при подсчете энергии деформации, легко осуществить это, понижая порядок численного интегрирования выражений для энергии сдвиговых деформаций. Численные результаты обсуждаются в разд. 12.6.

Альтернативным подходом к анализу оболочечных конструкций с использованием трехмерных элементов является подход, при котором рассматриваются дополнительные несовместимые моды. Этот подход описан в п. 9.3.2 и обсуждается в [10.18]. Такая схема позволяет использовать простейший вид шестигранного элемента, который базируется на линейных полях перемещений и имеет только восемь узлов в вершинах шестигранника.

Литература

- 10.1. Hughes J. R., Allik H. Finite Elements for Compressible and Incompressible Continua.—Proc. of Symp. on Application of Finite Element Methods in Civil Eng., Vanderbilt Univ., Nashville, Tenn., Nov. 1969. p. 27—62.
- 10.2. Rashid Y. R., Smith P. D., Prince N. On Further Application of the Finite Element Method to Three-Dimensional Elastic Analysis.—Proc. of Symp. on High Speed Computing of Elastic Structures, Univ. of Liege, Belgium, 1970, 2, p. 433—454.
- 10.3. Fjeld S. A. Three-Dimensional Theory of Elasticity.—In: Finite Element Methods in Stress Analysis.—Trondheim, Norway: TAPIR Press, 1969, p. 333—364.
- 10.4. Clough R. W. Comparison of Three Dimensional Finite Elements.—Proc. of Symp. on Application of Finite Element Methods in Civil Eng., Vanderbilt Univ., Nashville, Tenn., Nov. 1969, p. 1—26 (printed by the American Society of Civil Engineers).
- 10.5. Argyris J. H. Matrix Analysis of Three Dimensional Media—Small and Large Displacements.—AIAA J., 1965, 3, No. 1, p. 45—51. [Имеется перевод: Ракетная техн. и космон.— М.: Мир, 1965, № 1.]
- 10.6. Argyris J. H., Fried I., Scharpf D. W. The TET 20 and the TEA 8 Elements for the Matrix Displacement Method.—Aero J., July 1968, 72, No. 691, p. 618—623.
- 10.7. Argyris J. H. The LUMINA Element for the Matrix Displacement Method.—Aero J., June 1968, 72, No. 690, p. 514—517.
- 10.8. Argyris J. H., Fried I., Scharpf D. W. The Hermes 8 Element for the Matrix Displacement Method.—Aero. J., July 1968, 72, No. 691, p. 613—617.
- 10.9. Melosh R. J. Structural Analysis of Solids.—Proc. ASCE, J. Struct. Div., Aug. 1963, 89, No. ST-4, p. 205—223.
- 10.10. Rigby G. L., McNeice G. M. A Strain Energy Basis for Studies of Element Stiffness Matrices.—AIAA J., 1972, 10, No. 11, p. 1490—1493. [Имеется перевод: Ракетная техн. и космон.— М.: Мир, 1972, № 11.]
- 10.11. Anonymous. Three-Dimensional Continuum Computer Programs for Structural Analysis.—ASME Special Publication, 1972.
- 10.12. Rashid Y. Three-Dimensional Analysis of Elastic Solids.—Int. J. Solids and Struct., Part I, 1969, 5, p. 1311—1332; Part II, 1970, 6, p. 195—207.
- 10.13. Zienkiewicz O., Irons B., Scott F. C., Campbell J. S. Three-Dimensional

- Stress Analysis —Proc. of Symp on High Speed Computing of Elastic Structures, Univ. of Liege, Belgium, 1970, 1, p 413—432
- 10.14 Ergatoudis J., Irons B M, Zienkiewicz O C. Three-Dimensional Analysis of Arch Dams and Their Foundations —Symp. on Dams at the Institution of Civil Engs, London, Mar 1968
- 10.15. Irons B M Quadrature Rules for Brick Based Finite Elements —Int J. Num Meth Eng, 1971, 3, No 2, p 293—294
- 10.16 Pawsey S F., Clough R W Improved Numerical Integration of Thick Shell Finite Elements —Int J Num Meth Eng, 1971, 3, p 575—586
- 10 17 Zienkiewicz O C, Taylor R. L., Too J. M Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells —Int J Num. Meth Eng, 1971, 3, p 275—290.
- 10 18 Wilson E et al Incompatible Displacement Models.—In Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics, S J Fenves et al (eds) —New York, N Y : Academic Press, 1973, p. 43—57.
- 10.19. Gallagher R H, Padlog J., Bijlaard P P Stress Analysis of Heated Complex Shapes.—ARS J., May 1962, 32, No 5, p. 700—707.

СПЛОШНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ: ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

На практике при проектировании конструкций существуют две ситуации, когда напряженное состояние в теле трехмерно, но его можно исследовать с помощью двумерных представлений; это — соответственно *плоское деформированное* и *осесимметричное* состояния. В данной главе рассматриваются указанные ситуации, а также особый случай несжимаемых материалов, характерный для всех классов упругих конструкций.

Плоское деформированное состояние возникает тогда, когда размер конструкции в одном из направлений, скажем в направлении оси z , велик по сравнению с размерами в других направлениях (в направлении осей x и y), а прикладываемые нагрузки действуют в плоскости $x - y$ и не меняются в направлении z . Пожалуй, наиболее важные практические приложения — это представления, связанные с расчетом плотин, туннелей и других геотехнических сооружений, хотя в плоском деформированном состоянии при определенных нагрузках находятся и такие небольшие по размеру конструкции, как стержни и ролики. Основные аспекты конечно-элементного представления для анализа плоской деформации описаны в разд. 11.1.

Еще один частный класс трехмерных задач порождается осесимметричными конструкциями. Многочисленные инженерные объекты в области машиностроения, ядерной и аэрокосмической промышленности, включая бетонные и стальные резервуары, ядерные реакторы, роторы, поршни, оболочки и ракетные двигатели попадают в класс осесимметричных конструкций. В отличие от общих трехмерных задач здесь для задания соотношений используются цилиндрические, а не прямоугольные координаты. В некоторых случаях получающиеся упрощения выражений компенсируются за счет усложнения процесса интегрирования энергии деформации при получении матрицы жесткости.

Осесимметричные конструкции часто нагружаются осесимметрично, что позволяет еще больше упростить процесс формулировки

элементов. Этот случай рассмотрен в разд. 11.2. Однако в некоторых задачах проектирования нагрузки несимметричны. В таких случаях исследователь должен решить, будет ли он разлагать рассматриваемые представления по гармоникам в окружном направлении или использовать аппарат общего трехмерного анализа. С точки зрения экономичности вычислений целесообразно использовать первый подход, который подробно описывается в разд. 11.3.

Для несжимаемых материалов, таких, как резина, с коэффициентом Пуассона $\mu=0.5$, характерные трудности связаны с построением выражений для потенциальной энергии, так как члены матрицы преобразований от деформаций к напряжениям делятся на величину $(1-2\mu)$. Однако, чтобы обойти эти трудности, можно легко модифицировать традиционный подход, основанный на рассмотрении потенциальной энергии. В этом случае также выгодно использовать подходы, базирующиеся на рассмотрении дополнительной энергии или функционала рейсснеровского типа. В разд. 11.4 изучаются оба класса операций при исследовании несжимаемых материалов.

11.1. Плоско-деформированное состояние

Условия плоского деформированного состояния изображены на рис. 11.1. Прямоугольный стержень, размер которого в направлении оси z больше, чем в направлениях x и y , закреплен так, чтобы исключить смещения вдоль оси z . Нагрузки \bar{T} зависят лишь от ко-

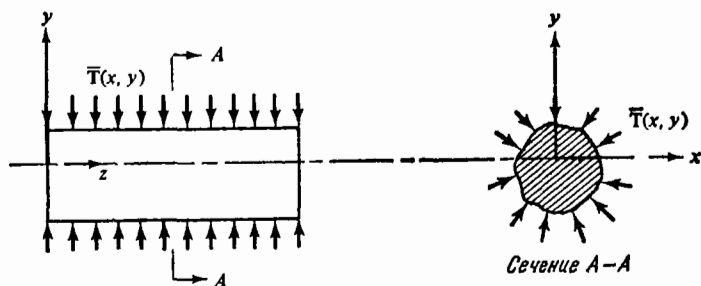


Рис. 11.1. Условия при анализе плоского деформированного состояния.

ординат x и y . Заметим, что при указанных условиях продольная деформация ϵ_z и касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} равны нулю. Полагая в соотношениях между деформациями и напряжениями

(4.14) ε_z равной нулю, получим для изотропного материала

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\mu\sigma_x}{E} - \frac{\mu\sigma_y}{E} = 0, \quad (11.1a)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu\sigma_y}{E} - \frac{\mu\sigma_z}{E}, \quad (11.1b)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu\sigma_x}{E} - \frac{\mu\sigma_z}{E}. \quad (11.1c)$$

Разрешая первое уравнение относительно σ_z , подставляя полученное выражение в последние два уравнения и добавляя соотношение между γ_{xy} и τ_{xy} , получим

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{(1-\mu^2)}{E} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-\mu}{(1-\mu)} & 0 \\ \frac{-\mu}{(1-\mu)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{(1-\mu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (11.2)$$

и после обращения матрицы

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & 0 \\ \mu & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (11.3)$$

Линейные соотношения, связывающие перемещения и деформации, относятся лишь к заданию геометрических характеристик деформации и применимы как в случае плоского напряженного, так и плоского деформированного состояния. Следовательно, соответствующие соотношения содержатся в (4.7), и принципиальное различие между конечно-элементными формулировками для плоско-напряженного и плоско-деформированного состояний заключается в различии законов, связывающих деформации и напряжения, т. е. законов (11.3) и (9.3). Поэтому здесь справедливы построения из гл. 9, включая использование концепции элементов высоких порядков, рассмотрение альтернативных вариантов с использованием в элементах дополнительных узлов и степеней свободы в виде производных от перемещений, а также применение изопараметрического представления геометрии элемента.

Другое отличие от случая плоского напряженного состояния заключается в неравенстве нулю компоненты напряжения σ_z . После нахождения узловых перемещений значение σ_z можно вычислить с использованием соотношений (11.3), (4.7), (11.1a).

Часто конструкции, изображенные на рис. 11.1, имеют конечные размеры в направлении оси z , и смещения их в этом направле-

нии ничто не препятствует, поэтому предположение, что $\varepsilon_z=0$, не выполняется. В этих случаях обычно полагают $\varepsilon_z=\text{const}$ (случай *обобщенного плоского деформированного состояния*). Чтобы построить конечно-элементное представление для этого случая, можно использовать соотношения трехмерной теории упругости (10.3), связывающие напряжения с деформациями, полагая $\gamma_{xz}=\gamma_{yz}=0$ и $\varepsilon_z=\text{const}$. Деформации ε_x , ε_y и γ_{xy} выражаются через предполагаемые поля перемещений u и v обычным образом. Результирующие глобальные уравнения жесткости формулируются затем в терминах узловых значений величин u и v и одной константы ε_z .

11.2. Осесимметричные тела

11.2.1. Основные соотношения

Осесимметричный конечный элемент имеет форму кольца постоянного поперечного сечения. Элемент задается в цилиндрической системе координат, ось симметрии которой z , а радиальное расстояние определяется координатой r . Бесконечно малая площадка поперечного сечения такого элемента, включая участок внешней поверх-

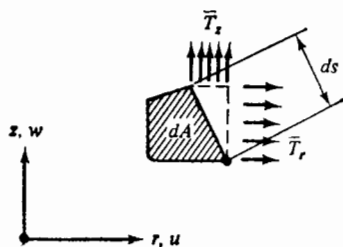


Рис. 11.2. Элементарная площадка поперечного сечения для осесимметричного сплошного элемента

ности ds , лежит в плоскости $z-r$, как показано на рис. 11.2. Окружная координата, не участвующая в данном рассмотрении, задается углом θ . Узлы элемента, по сути, представляют собой узловые окружности. Поэтому расчет осесимметричных тел при *осесимметричных нагрузках* сводится к расчету двумерной задачи, так как поле перемещений может описываться только двумя компонентами в плоскости поперечного сечения, а именно радиальным перемещением u и осевым смещением w .

Соответствующими компонентами деформации в цилиндрических координатах являются радиальная ε_r , окружная ε_θ , осевая ε_z и сдвиговая γ_{rz} деформации; соответствующими компонентами напряжений — компоненты σ_r , σ_θ , σ_z и τ_{rz} . Окружные напряжения и деформации существуют благодаря тому, что равномерное радиальное смещение увеличивает длину окружности. Приведем линейные

соотношения между деформациями и перемещениями [11.1]

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad (11.4)$$

и уравнения состояния

$$\sigma = [E] \varepsilon - [E] \varepsilon^{\text{init}}, \quad (4.15)$$

где

$$\sigma = [\sigma_r \sigma_\theta \sigma_z \tau_{rz}]^T, \quad (11.5)$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_r \varepsilon_\theta \varepsilon_z \gamma_{rz}]^T, \quad (11.6)$$

$$\varepsilon^{\text{init}} = [\varepsilon_r^{\text{init}} \varepsilon_\theta^{\text{init}} \varepsilon_z^{\text{init}} \gamma_{rz}^{\text{init}}]^T. \quad (11.7)$$

В частности, для изотропного материала при изменении температуры T по сравнению с температурой свободного от напряжений тела имеем $\varepsilon_r^{\text{init}} = \varepsilon_\theta^{\text{init}} = \varepsilon_z^{\text{init}} = \alpha T$, $\gamma_{rz}^{\text{init}} = 0$. Матрица упругих констант совпадает с матрицей для плоско-деформированного состояния лишь с тем отличием, что здесь для учета третьей компоненты напряжений необходимо добавить строку и столбец. Для изотропного материала имеем

$$[E] = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} (1-\mu) & \mu & (1-\mu) & 0 \\ \mu & (1-\mu) & \mu & 0 \\ (1-\mu) & \mu & (1-\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\mu)}{2} \end{bmatrix}, \quad (11.8)$$

где строки и столбцы записаны так, чтобы соответствовать векторам напряжений и деформаций (11.5) и (11.6).

Благодаря осевой симметрии в выражении для потенциальной энергии интеграл по объему можно преобразовать в интеграл по площади. Бесконечно малый элемент объема, отвечающий бесконечно малой площади, изображенной на рис. 11.2, равен $d(\text{vol}) = 2\pi r dA$, а площадь поверхности, соответствующая длине ds , равна $dS = 2\pi r ds$. Поэтому выражение для потенциальной энергии примет вид

$$\begin{aligned} \Pi_p = \pi \int_A [\varepsilon] [E] \varepsilon r dA - 2\pi \int_A [\varepsilon] [E] \varepsilon^{\text{init}} r dA - \\ - 2\pi \int_S (u \cdot \bar{T}_r + w \cdot \bar{T}_z) r ds, \quad (11.9) \end{aligned}$$

где ε , $\varepsilon^{\text{init}}$ и $[E]$ определяются согласно (11.6)–(11.8), а \bar{T}_r и \bar{T}_z — заданные усилия на единицу площади поверхности.

11.2.2. Осесимметричный кольцевой элемент с треугольным поперечным сечением

Осесимметричные сплошные элементы являются обобщением плоско-напряженных элементов и так же, как и в случае плоской деформации, здесь применимы многие построения из гл. 9. Поэтому ниже рассмотрим подробно соотношения лишь для изображенного на рис. 11.3 простейшего треугольного осесимметричного элемента. Элемент расположен произвольным образом в плоскости $r-z$ так, что ни одна из сторон его не направлена вдоль оси симметрии.

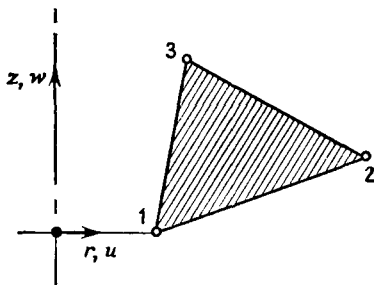


Рис. 11.3. Сечение треугольного кольцевого элемента.

Для данного типа элемента пригодно линейное поле перемещений. Так как ε_0 находится в обратно пропорциональной зависимости от радиуса, то возникают дополнительные трудности при построении матрицы жесткости элемента даже для случая линейного поля перемещений. Чтобы понять, в чем состоят эти трудности, удобно воспользоваться обобщенными перемещениями. Поэтому выберем

$$u = a_1 + a_2 r + a_3 z, \quad w = a_4 + a_5 r + a_6 z. \quad (11.10)$$

Дифференцируя эти функции в соответствии с формулами (11.4), получим

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/r & 1 & z/r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = [C] \{a\}. \quad (11.11)$$

Подстановка последнего в (11.9) приводит к следующему выражению (для простоты начальные деформации исключены):

$$\Pi_p = \frac{1}{2} [a]^T [k^a] \{a\} + V^a, \quad (11.12)$$

где символом V^a обозначен потенциал заданных сил, выраженных через параметры $\{a\}$, а основная матрица жесткости определяется формулой

$$[k^a] = \frac{2\pi E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[\int_A [C]^T [E]' [C] r dA \right], \quad (11.13)$$

где матрица $\left[\int_A [C]^T [E]' [C] r dA \right]$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ (1-\mu)I_4 & 2I_1 & (1-\mu)I_6 + (\frac{1}{2}-\mu)I_1 & 0 & 0 & 0 \\ I_2 & I_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1-\mu)I_5 & 0 & (\frac{1}{2}-\mu)I_1 & 0 & (\frac{1}{2}-\mu)I_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{2}-\mu)I_1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu I_4 & 2\mu I_1 & \mu I_3 & 0 & 0 & (1-\mu)I_1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \text{(Симметрично)} \\ \\ \\ \end{matrix} \quad (11.14)$$

Здесь

$$I_1 = \iint r dr dz, \quad I_2 = \iint dr dz, \quad I_3 = \iint z dr dz, \quad (11.15-11.17)$$

$$I_4 = \iint \frac{dr dz}{r}, \quad I_5 = \iint \frac{z^2}{r} dr dz, \quad I_6 = \iint \frac{z^2}{r} dr dz. \quad (11.18-11.20)$$

Величины I_1 , I_2 и I_3 легко вычисляются. Имеем

$$I_1 = \frac{(r_1 + r_2 + r_3) [r_1 (z_2 - z_3) + r_2 (z_3 - z_1) + r_3 (z_1 - z_2)]}{6}, \quad (11.15a)$$

$$I_2 = \frac{[r_1 (z_2 - z_3) + r_2 (z_3 - z_1) + r_3 (z_1 - z_2)]}{2}, \quad (11.16a)$$

$$I_3 = \frac{(z_1 + z_2 + z_3) [r_1 (z_2 - z_3) + r_2 (z_3 - z_1) + r_3 (z_1 - z_2)]}{6}. \quad (11.17a)$$

Выражения для I_4 , I_5 и I_6 содержат переменную r в знаменателе и результирующие выражения имеют более сложный вид:

$$I_4 = \sum_{i=1}^3 \frac{(r_i z_{i+1} - r_{i+1} z_i)}{(r_i - r_{i+1})} \ln \frac{r_i}{r_{i+1}}, \quad (11.18a)$$

$$I_5 = H_{12} + H_{23} + H_{31}, \quad (11.19a)$$

где для $i, j=1, 2, 3$

$$H_{ij} = \frac{-(z_i - z_j)}{4(r_i - r_j)} [z_i (3r_j - r_i) - z_j (3r_i - r_j)] + \frac{1}{2} \left(\frac{r_i z_j - r_j z_i}{r_i - r_j} \right)^2 \ln \frac{r_i}{r_j}, \quad (11.21)$$

$$I_6 = G_{12} + G_{23} + G_{31}, \quad (11.20a)$$

и где для $i, j=1, 2, 3$

$$\begin{aligned} G_{ij} = & \frac{(z_i - z_j)}{18(r_i - r_j)^2} [z_j^2 (11r_i^2 - 7r_i r_j + 2r_j^2) + \\ & + 2z_i z_j (2.5r_i^2 - 11r_i r_j + 2.5r_j^2) + \\ & + z_i^2 (11r_j^2 - 7r_i r_j + 2r_i^2)] + \\ & + \frac{1}{3} \left(\frac{r_i z_j - r_j z_i}{r_i - r_j} \right)^3 \ln \frac{r_i}{r_j}. \end{aligned} \quad (11.22)$$

Выписанные выражения относятся к обобщенным параметрам $\{a\}$. Матрица жесткости, соответствующая физическим координатам, легко строится с помощью задания преобразования от обобщенных координат к физическим (11.10) и применения этого преобразования к $[k^a]$.

Если узлы расположены на оси симметрии, то возникают особые случаи, так как члены с $\ln(r_i/r_j)$ и $(r_i - r_j)$ в знаменателе принимают бесконечное значение. Используя правило Лопиталья, можно провести оценки. Для особого случая с $r_i = 0$, $r_j, r_k \neq 0$ имеем ($i, j, k = 1, 2, 3$)

$$I_4 = \frac{[r_j(z_k - z_i) + r_k(z_i - z_j)]}{(r_j - r_k)} \ln \frac{r_j}{r_k}, \quad (11.18b)$$

$$I_5 = H_{jk} - \frac{1}{4} [(z_j - z_i)(3z_i + z_j) + (z_i - z_k)(3z_i + z_k)] - \frac{1}{2} z_i^2 \ln \frac{r_j}{r_k}, \quad (11.19b)$$

$$I_6 = G_{jk} - \frac{(z_j - z_i)}{18} (11z_i^2 + 5z_i z_j + 2z_j^2) - \frac{(z_i - z_k)}{18 r_k^2} (11z_i^2 + 5z_i z_k + 2z_k^2) - \frac{1}{3} z_i^2 \ln \frac{r_j}{r_k}. \quad (11.20b)$$

Заметим также, что $u_i = 0$ приводит к уменьшению размерности матрицы жесткости.

Если $r_i = r_j = 0$ и $r_k \neq 0$, то можно также показать [11.3], что члены, содержащие I_4 , I_5 и I_6 , не входят в выражение для матрицы жесткости из-за выполнения равенства $u_i = u_j = 0$.

В некоторых приложениях полезно иметь «граничный» элемент для сплошного цилиндра, как показано на рис. 11.4. Чтобы по-

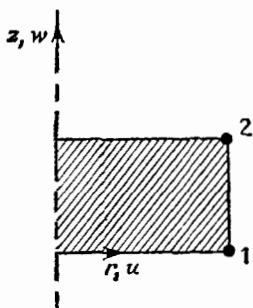


Рис. 11.4. Граничный элемент для сплошного цилиндра.

строить такой элемент, можно использовать поля перемещений $u = a_1 r + a_2 z$ и $w = a_3 r + a_4 z$. Подробный вывод уравнений жесткости для данного элемента совпадает с изложенными выше операциями.

Очевидно, что получение явных «точных» выражений для коэффициентов жесткости, соответствующих осесимметричному тре-

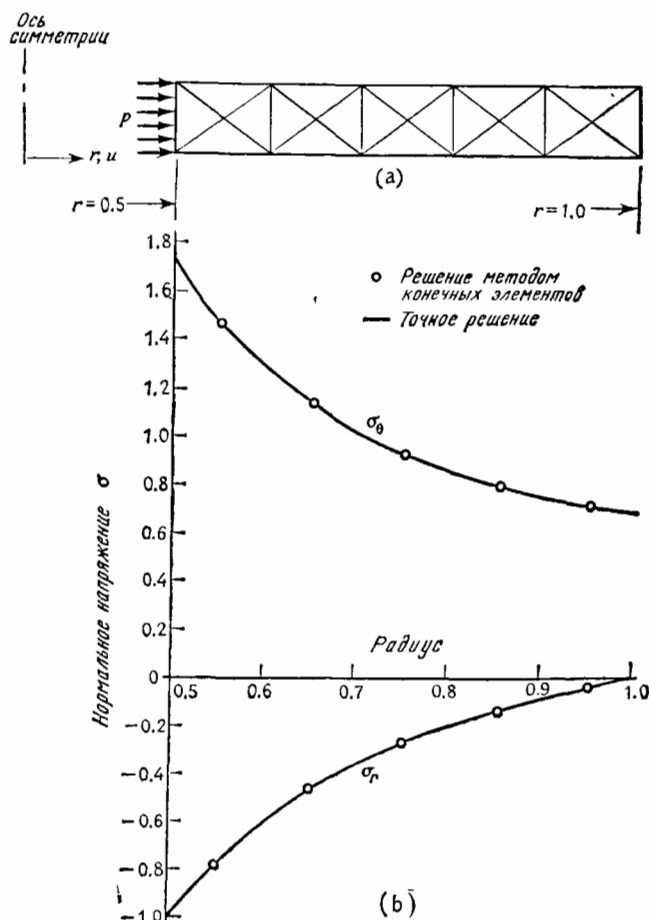


Рис. 11.5. Анализ толстостенного цилиндра, находящегося под действием внутреннего давления. (a) Конечно-элементное представление; (b) вычисленные напряжения.

угольному элементу, затруднительно. Тем не менее выписанные выше соотношения приводились в различном виде, например, в [11.2—11.4]. Формулы и сведенные в таблицы коэффициенты для основных членов элементов высших порядков представлены в [11.5] и [11.6]. Простые приближенные формулировки для осесимметричного треугольника основаны на использовании «среднего» радиуса (например, значения в центре элемента), рассматриваемого в качестве константы интегрирования. Точность этой аппроксимации зависит от близости элемента к оси вращения.

При сравнении с классическими решениями установлено, что треугольный кольцевой элемент обеспечивает высокую точность, и это свойство, по-видимому, сохраняется и при решении прикладных задач. На рис. 11.5 изображено конечно-элементное представление для задачи расчета толстостенной трубы, находящейся под

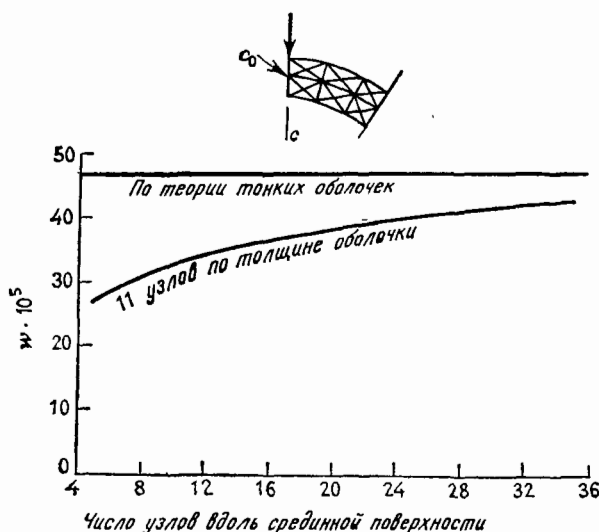


Рис. 11.6. Анализ сегмента сферы с использованием треугольных кольцевых элементов [11.3]. С любезного разрешения журнала AIAA Journal; w — перемещение в точке C_0 (в дюймах); нагрузка в центре равна 965 фунтов.

действием внутреннего давления. Используется довольно грубая сетка элементов. Различие между точным и численным решениями практически отсутствует.

Во второй задаче (рис. 11.6) анализируется сегмент жестко закрепленной сферической оболочки при действии сосредоточенной силы в ее вершине [11.3]. Для сравнения приводится решение этой задачи с применением тонких оболочечных конечных элементов. Очевидно, что осесимметричный сплошной конечный элемент обеспечивает сходимость к решению, несколько отличающемуся от решения, полученного на базе тонких оболочечных конечных элементов. Различие объясняется расхождением между моделью поведения толстых оболочек и упрощенным представлением, даваемым теорией тонких оболочек.

11.3. Произвольные нагрузки

Нагрузки, действующие на осесимметричную конструкцию, не обязательно должны быть распределены осесимметричным образом. Примером реальных нагрузок указанного типа могут служить ветровые нагрузки на трубы или другие цилиндрические конструкции. Кроме того, при землетрясениях силы инерции, возникающие в результате ускорения поверхности земли, обуславливают неосесимметричные нагрузки на резервуары и толстостенные цилиндрические конструкции. В том случае, когда распределенная нагрузка \bar{T} меняется лишь вдоль окружной координаты θ и представляется небольшим числом членов разложения в ряд, можно сохранить большую часть преимуществ, изложенных в предыдущем разделе формулировок. Ниже опишем способ обобщения последних с целью учета неосесимметричных нагрузок.

Во-первых, предполагается, что усилия \bar{T} разбиваются соответственно на радиальные, окружные и осевые компоненты T_r , T_θ и T_z . Тогда, применяя стандартную процедуру разложения в ряд Фурье (см. [11.7]), построим следующие аппроксимации:

$$\begin{aligned}\bar{T}_r &= \sum \bar{T}_{r_n}^s \cos n\theta + \sum \bar{T}_{r_n}^a \sin n\theta, \\ \bar{T}_\theta &= -\sum \bar{T}_{\theta_n}^s \sin n\theta + \sum \bar{T}_{\theta_n}^a \cos n\theta, \\ \bar{T}_z &= \sum \bar{T}_{z_n}^s \cos n\theta + \sum \bar{T}_{z_n}^a \sin n\theta,\end{aligned}\quad (11.23)$$

где каждый член в каждом из разложений называется *гармоникой*, а n — *порядком* гармоник. Суммирование производится по n , причем в сумме столько членов, сколько необходимо для описания изменения нагрузок в окружном направлении. Верхними индексами s отмечены симметричные компоненты нагрузки, а индексом a — антисимметричные компоненты. Представительные компоненты радиальной нагрузки изображены на рис. 11.7. Результирующие перемещения имеют соответствующий вид

$$\begin{aligned}u &= \sum u_n^s \cos n\theta + \sum u_n^a \sin n\theta, \\ v &= -\sum v_n^s \sin n\theta + \sum v_n^a \cos n\theta, \\ w &= \sum w_n^s \cos n\theta + \sum w_n^a \sin n\theta,\end{aligned}\quad (11.24)$$

где u^s , v^s и w^s — симметричные компоненты смещения, а u^a , v^a и w^a — антисимметричные компоненты. Эти компоненты задаются в терминах степеней свободы с помощью привычного представления через функции формы

$$\begin{aligned}u_n^s &= [N_u] \{u_n^s\}, & u_n^a &= [N_u] \{u_n^a\}, \\ v_n^s &= [N_v] \{v_n^s\}, & v_n^a &= [N_v] \{v_n^a\}, \\ w_n^s &= [N_w] \{w_n^s\}, & w_n^a &= [N_w] \{w_n^a\},\end{aligned}\quad (11.25)$$

где $\{u_n^s\}, \dots, \{w_n^a\}$ — векторы, имеющие компонентами соответственно степени свободы элемента для симметричных и антисимметричных членов n -й гармоники, а $[N_a]$, $[N_v]$ и $[N_w]$ — векторы, включающие функции формы для компонент перемещений u , v и w . Они являются функциями только координат r и z .

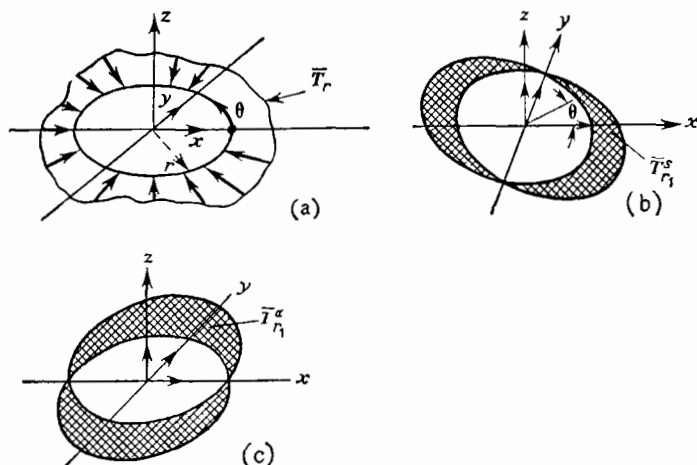


Рис. 11.7. Несимметричное радиальное нагружение и первые гармоники. (а) Распределение несимметричного радиального нагружения; (б) первая осесимметричная гармоника; (с) первая антисимметричная гармоника.

Ввиду того что теперь необходимо учитывать изменения величин и в окружном направлении, уравнения, связывающие перемещения и деформации, примут вид

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \epsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \\ \gamma_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, & \gamma_{z\theta} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}, & \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \end{aligned} \quad (11.26)$$

Объединим эти компоненты деформации для n -й гармоники в следующий вектор-столбец:

$$\epsilon_n = [\epsilon_r^n \ \epsilon_\theta^n \ \epsilon_z^n \ \gamma_{r\theta}^n \ \gamma_{z\theta}^n \ \gamma_{zr}^n]^T.$$

Отвечающая этому вектору (6×6) -матрица жесткости материала задается выражением (10.3).

Если в соотношения между деформациями и перемещениями (11.26) подставить выражение для перемещений n -й гармоники (11.24), получим систему уравнений, связывающую деформации и узловые перемещения. Используя обычные обозначения для преоб-

разованный этого типа, запишем

$$\varepsilon_n = [D_n^s] \begin{Bmatrix} \{\bar{u}_n^s\} \\ \{\bar{v}_n^s\} \\ \{\bar{w}_n^s\} \end{Bmatrix} + [D_n^a] \begin{Bmatrix} \{\bar{u}_n^a\} \\ \{\bar{v}_n^a\} \\ \{\bar{w}_n^a\} \end{Bmatrix} = [D_n^s] \{\Delta_n^s\} + [D_n^a] \{\Delta_n^a\}, \quad (11.27)$$

где $[D_n^s]$ и $[D_n^a]$ представляют соответственно симметричные и антисимметричные преобразования перемещений в деформации и

$$\begin{aligned} [\Delta_n^s] &= [[u_n^s] [v_n^s] [w_n^s]], \\ [\Delta_n^a] &= [[u_n^a] [v_n^a] [w_n^a]]. \end{aligned}$$

Теперь можно определить потенциальную энергию элемента. Полагая $d(\text{vol}) = r d\theta dr dz$ и используя (10.3) и (11.27), получим для потенциальной энергии n -й гармоники Π_{pn} (начальные деформации для простоты исключены)

$$\begin{aligned} (\Pi_{pn}) &= \frac{[\Delta_n^s]}{2} [K_n^s] \{\Delta_n^s\} + \frac{[\Delta_n^a]}{2} [K_n^a] \{\Delta_n^a\} - [\Delta_n^s] \{F_n^{ds}\} - \\ &\quad - [\Delta_n^a] \{F_n^{da}\} - [\Delta_n^s] \{F_n^s\} - [\Delta_n^a] \{F_n^a\}, \quad (11.28) \end{aligned}$$

где для симметричных членов матрица жесткости имеет вид

$$[K_n^s] = \left[\iiint [D_n^s]^T [E] [D_n^s] r d\theta dr dz \right], \quad (11.29)$$

а $\{F_n^{da}\}$ и $\{F_n^s\}$ — соответственно векторы распределенных нагрузок и узловых сил для симметричного поведения. Аналогично члены с верхним индексом a определяют матрицы, отвечающие антисимметричному поведению. Следует заметить, что разложение выражений для этих матриц вряд ли приводит к появлению членов типа

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 n\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2 n\theta d\theta = \pi,$$

позволяющие затем исключить окружную координату из выражения для интеграла.

Поэтому общая задача разбивается на отдельные задачи анализа симметричной и антисимметричной мод для каждой из гармоник. Реакция конструкции определяется как сумма соответствующих решений. Следует учесть, что при получении решений для компонент гармоник с $n=1$ необходимо задать три условия закрепления, а при $n>1$ для обеспечения невырожденности глобальной матрицы жесткости необходимо зафиксировать лишь осевую моду движения тела как твердого целого. Для $n=0$ необходимо исключить вращение тела как твердого целого и смещение вдоль оси. Примеры применения описанного в этом разделе подхода приводятся в [11.8—11.10].

11.4. Заданное объемное изменение — несжимаемость

Обычной задачей механики грунтов является изучение отвердения. Эта задача характеризуется заданием изменения объема в грунте. В том случае, когда изменение объема равняется нулю, выполнены условия *несжимаемости*. В обоих случаях для анализа грунтов требуется модифицировать изложенные выше процедуры.

Анализ полностью насыщенных грунтов без дренажа, согласно линейной теории, предполагает, что рассматриваемый материал является двухфазной пористой средой. Одна фаза состоит из пористого материала с линейными упругими характеристиками, а другая фаза — сплошная несжимаемая жидкость. Предположим, что напряжения σ^0 в первой фазе (пористом материале) связаны с деформациями ϵ^0 обычным линейным законом

$$\sigma^0 = [E^0] \epsilon^0. \quad (11.30)$$

Коэффициенты упругости $[E^0]$ заданы, а коэффициент Пуассона имеет значение, меньшее 0.5. Уравнения (11.30) представляют собой уравнения состояния для *фильтрации* в грунте. Систему уравнений жесткости можно построить при помощи соотношения (11.30), если преобразование от степеней свободы к деформациям соответствует типу используемого элемента. Однако наличие давления в порах для насыщенного состояния требует равенства нулю объемной деформации ϵ_v , т. е.

$$\epsilon_v = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = 0. \quad (11.31)$$

Поэтому с учетом уравнений, связывающих перемещения и деформации, и обычных представлений перемещений через функции формы ($u = [N_u] \{u\}$, $v = [N_v] \{v\}$ и $w = [N_w] \{w\}$) получим

$$\epsilon_v = \left[\left[\frac{\partial N_u}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial N_v}{\partial y} \right] \left[\frac{\partial N_w}{\partial z} \right] \right] \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{v\} \\ \{w\} \end{Bmatrix} = 0, \quad (11.32)$$

а так как требуется, чтобы изменение объема для каждого элемента равнялось нулю, то для отдельно взятого элемента будем иметь

$$\int_{vol} \epsilon_v d(vol) = [G_s^e] \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{v\} \\ \{w\} \end{Bmatrix} = 0, \quad (11.33)$$

где

$$[G_s^e] = \int_{vol} \left[\left[\frac{\partial N_u}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial N_v}{\partial y} \right] \left[\frac{\partial N_w}{\partial z} \right] \right] d(vol). \quad (11.34)$$

Уравнения (11.33), очевидно, представляют собой ограничения, которые можно добавить к глобальной системе уравнений с помощью

техники множителей Лагранжа (см. гл. 7). Следовательно, полная система глобальных уравнений имеет вид

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^0 & \mathbf{G}_s^T \\ \mathbf{G}_s & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta^0 \\ \lambda \end{Bmatrix}, \quad (11.35)$$

где $[\Delta^0] = [[u] [v] [w]]$; $\{\lambda\}$ — вектор множителей Лагранжа по одному на каждый элемент; $[\mathbf{K}^0]$ — глобальная матрица жесткости, построенная из элементов, матрицы жесткости которых выводят на основе уравнения состояния (11.30); $[\mathbf{G}_s]$ — матрица коэффициентов системы ограничений, образованная из строк матрицы $[\mathbf{G}_e^c]$, задаваемой с помощью (11.34); $\{\mathbf{P}\}$ — вектор прикладываемых сил.

Как и следовало ожидать, на основе проведенных в гл. 6 и 7 обсуждений вопросов, связанных с множителями Лагранжа, величины λ_s пропорциональны давлению в порах внутри соответствующих элементов. Указанные значения давлений достаточны для предотвращения изменения объема элемента.

В процессе затвердевания грунта изменение объема отлично от нуля и зависит от времени. Если принимается пошаговый метод решения, то на каждом шаге по времени определяются отличные от нуля величины изменения объема. Поэтому правые части уравнений (11.34), (11.35) не равны нулю. Эти и другие аспекты анализа затвердевания грунта приведены в [11.11—11.14].

В однофазном материале при коэффициенте Пуассона μ , равном 0.5, соответствующие несжимаемому материалу члены, входящие в уравнения состояния, стремятся к бесконечности из-за множителя $(1-2\mu)$ в знаменателе (см. (10.3), (11.3) и (11.8)). Если μ лишь немного отличаются от 0.5, то решение для перемещений может оказаться неточным, что в свою очередь существенно скажется при подсчете напряжений, так как последние находятся в результате дифференцирования перемещений.

Чтобы модифицировать подход, основанный на рассмотрении потенциальной энергии, заметим, что для несжимаемого материала лишь девиаторные компоненты деформации существенны в соотношениях между напряжениями и деформациями. Поэтому девиаторные компоненты деформации отделяются от дилатационных компонент и используются как базисные для конечно-элементной формулировки.

Кроме того, удобным прямым подходом к анализу однофазного несжимаемого материала является подход с использованием специальной формы принципа Рейсснера, предложенной Херрманом [11.15]. Функционал Рейсснера обсуждался в разд. 6.8. Рассматривая для простоты изотропный несжимаемый материал, находящийся в плоском деформированном состоянии, заметим, что физическая сущность рассматриваемой задачи позволяет объединить напряже-

ния, входящие в функционал, в единый параметр \bar{p} , характеризующий давление, т. е.

$$\bar{p} = (1/E) (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (11.36)$$

Кроме того, можно записать закон, связывающий напряжения и деформации, в виде «дилатационного» соотношения

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{E}{(1-2\mu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z). \quad (11.37)$$

В случае плоской деформации можно показать, что перемещения u и v , а также величина параметра давления \bar{p} определяются из условия стационарности следующего функционала:

$$\Pi_I = \int_A \left\{ \frac{E}{2(1+\mu)} [(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2) + 2\gamma_{xy}^2 + 2\mu\bar{p}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)] - \right. \\ \left. - \mu(1-2\mu)\bar{p}^2 \right\} dA - \int_{S_\sigma} \bar{T} u dS. \quad (11.38)$$

При дискретизации этого функционала с целью проведения конечно-элементного анализа желательно задать \bar{p} через функцию формы с узловыми степенями свободы $\{\bar{p}\}$, которые связаны с соответствующими значениями смежных элементов. Если, с другой стороны, \bar{p} остается «свободным» внутри элемента при $\mu=0.5$, то могут возникнуть те же трудности, что и для традиционной формулировки с потенциальной энергией. В частности, для линейного поля перемещений и постоянного значения \bar{p} в элементе можно показать [11.16], что формулировки на базе потенциальной энергии и функционала Рейсснера совпадают. Из числовых результатов [11.16] следует, что наиболее эффективно решения находятся в том случае, когда порядок интерполяции перемещений и величины \bar{p} совпадают. Вопросы конечно-элементной дискретизации этих функционалов и построения аналогичных смешанных функционалов для анизотропных сред излагаются в [11.15—11.19]. Во многих несжимаемых материалах, например в резине, при нагружении возникают большие деформации. Это обстоятельство требует построения специального вида определяющих соотношений с учетом больших деформаций и соответствующих модификаций конечно-элементных формулировок. Эти вопросы рассматриваются в [11.20].

Литература

- 11.1 Den Hartog J. P. Advanced Strength of Materials — New York, N. Y. McGraw Hill Book Co., 1952.
- 11.2 Dunham R. S., Nickell R. E. Finite Element Analysis of Axisymmetric Solids with Arbitrary Loadings — Report 67.6, Dept. of Civil Eng., Structural Engineering Laboratory, Univ. of California, Berkeley, Calif., June 1967.

- 11 3 Utku S Explicit Expressions for Triangular Torus Element Stiffness Matrices —AIAA J , June 1968, 6, No 6, p 1174—1175 [Имеется перевод Ракетная техн и космон — М Мир, 1968, № 6]
- 11 4 Belytschko T Finite Element for Axisymmetric Solids under Arbitrary Loadings with Nodes at Origin —AIAA J , 1972, 10, No 11, p 1582—1584 [Имеется перевод Ракетная техн и космон — М Мир, 1972, № 11]
- 11 5 Chacour S A High Precision Axisymmetric Triangular Element Used in the Analysis of Hydraulic Turbine Components —Trans ASME, J Basic Eng , 1970, 92, p 819—826
- 11 6 Sylvester P Konrad A Axisymmetric Triangular Elements for the Scalar Helmholtz Equation —Int J Num Meth Eng , 1973, 5, No 4, p 481—498
- 11 7 Sokolnikoff I S, Redheffer R M Mathematics of Physics and Modern Engineering — New York, N Y McGraw-Hill Book Co , 1966, p 56—83
- 11 8 Wilson E Structural Analysis of Axisymmetric Solids —AIAA J , Dec 1965, 3, No 12, p 2267—2274 [Имеется перевод Ракетная техн и космон — М Мир, 1965, № 12]
- 11 9 Argyris J H, Buck K E, Grieger I, Mareczek G Application of the Matrix Displacement Method to the Analysis of Pressure Vessels —Trans ASME , 1970, 92, Ser B, p 317—329
- 11 10 Zienkiewicz O C The Finite Element Method in Engineering Science Chapter 13 —London McGraw-Hill Book Co , Ltd , 1971 [Имеется перевод Зенкевич О Метод конечных элементов в технике — М Мир, 1975, 541 с]
- 11 11 Christian J T Undrained Stress Distribution by Numerical Methods —Proc ASCE, J Soil Mech Fdn Div , Nov 1968, 94 No SM6, p 1333—1345
- 11 12 Christian J T, Boehmer J W Plane Strain Consolidation by Finite Elements —Proc ASCE, J Soil Mech Fdn Div , July 1970, 96, No SM4, p 1435—1457
- 11 13 Hwang C, Morgenstern N, Murray D On Solution of Plane Strain Consolidation Problems by Finite Element Methods —Canadian Geotechn J , 1971, 8, p 109—118
- 11 14 Sandhu R S Finite Element Analysis of Consolidation and Creep —Proc. of Conf on Application of the Finite Element Method in Geotechnical Eng , ed C Desai, U S Army Eng Vicksburg Experiment Sta , Vicksburg, Miss , 1972, p 697—698
- 11 15 Herrmann L R Elasticity Equations for Incompressible and Nearly Incompressible Materials by a Variational Theorem —AIAA J , Oct 1965, 3, No 10, p 1896—1900 [Имеется перевод Ракетная техн и космон — М Мир, 1965, № 10]
- 11 16 Hughes T, Allik H Finite Elements for Compressible and Incompressible Continua —Proc of Symp on Application of Finite Element Methods in Civil Eng , eds W Rowan and R Hackett, Vanderbilt Univ , Nashville, Tenn , Nov 1969, p 27—62
- 11 17 Hwang C, Ho M, Wilson N Finite Element Analysis of Soil Deformations —Proc of Symp on Application of Finite Element Methods in Civil Eng , eds W Rowan and R Hackett, Vanderbilt Univ , Nashville, Tenn , Nov 1969, p 729—746
- 11 18 Key S W A Variational Principle for Incompressible and Nearly Incompressible Anisotropic Elasticity —Int J Solids and Structures, 1969, 5 p 951—964
- 11 19 Taylor R L Pister K, Herrmann L R On a Variational Theorem for Incompressible and Nearly Incompressible Orthotropic Elasticity —Int J Solids and Structures, 1968, 4, p 875—883
- 11 20 Oden J T, Key J E Numerical Analysis of Finite Axisymmetric Deformations of Incompressible Elastic Solids of Revolution —Int J Solids and Structures, 1970, 6, p 497—518.

Задачи

11.1. Постройте матрицу жесткости для кольцевого элемента, показанного в разрезе на рис. P11.1, используя линейную радиальную функцию перемещений.

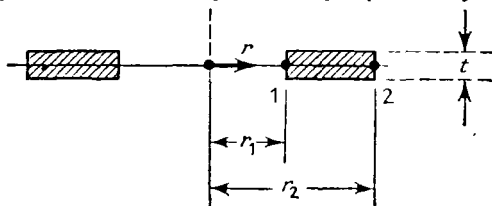


Рис. P11.1.

11.2. Постройте матрицу жесткости кольцевого элемента, изображенного в разрезе на рис. 11.4, используя билинейную функцию перемещений.

11.3. Проверьте формулу (11.18b) для I_4 .

11.4. Используя для перемещения u из (11.24) двучленное гармоническое разложение в ряд по симметричным членам (т. е. u_1^b и u_2^b), постройте соответствующую матрицу жесткости кольцевого элемента из задачи 11.1.

11.5. Основываясь на функционале Рейсснера для плоско-напряженного состояния (см. (6.81)), получите выражение (11.38) для функционала Π_I в случае несжимаемого материала.

11.6. Выведите дискретную форму для Π_I (см. соотношение (11.38)) и преобразуйте полученную смешанную матрицу к матрице жесткости, предполагая, что параметры поля давления не связаны с параметрами этого поля соседних элементов.

11.7. Получите матричные уравнения для анализа обобщенного плоского деформированного состояния, используя описанный в конце разд. 11.1 подход.

11.8. Получите явный вид матрицы $[D_n^s]$ из (11.27).

11.9. Постройте для несжимаемого упругого изотропного материала матрицу жесткости, основанную на девиаторных компонентах деформации. Используйте простой (с линейным полем перемещений) треугольный элемент при условиях плоской деформации.

11.10. Обобщите соотношения жесткости для плоской деформации (11.3) на случай учета начальных деформаций.

ИЗГИБ ПЛАСТИН

Много усилий затрачено на построение конечных элементов, моделирующих пластину при изгибе [12.1]. Требованиям адекватной формулировки трудно удовлетворить, и по этой причине было предложено чрезвычайно широкое множество альтернативных формулировок. Поэтому строились улучшенные модели на основе более широкого использования вариационных принципов, нежели для других типов элементов. Однако и здесь основными были формулировки, базирующиеся на принципе минимума потенциальной энергии.

Значение изучения вопросов, касающихся изгиба плоских пластин, превосходит чисто утилитарные аспекты непосредственного построения элементов в рамках линейных статических формулировок, как это сделано в данной главе. Один из эффективных элементов конечно-элементного анализа тонких оболочек базируется на представлении их плоскими элементами. Такие элементы строятся с помощью суперпозиции свойств изгибаемых и плоско-напряженных элементов. Плоское напряженное состояние описывалось в гл. 9; данная глава завершает описание существенных аспектов анализа оболочек.

Важность понимания вопросов изгиба пластин вытекает также из практической ценности изучения динамических аспектов поведения и потери устойчивости пластинчатых и оболочечных конструкций. Последняя тема рассмотрена в гл. 13. При построении конечно-элементных уравнений, описывающих это явление, будем опираться на полученное в данной главе конечно-элементное представление.

И наконец, следует отметить, что упоминавшиеся выше трудности в выборе адекватных полей перемещений возникают из-за того, что изгиб тонких пластин описывается дифференциальным уравнением *четвертого*, а не *второго порядка*, как в случае плоских

и трехмерных задач теории упругости. Уравнениями четвертого порядка наряду с широким кругом физических задач описываются и другие задачи теории упругости, поэтому важно выяснить основные характерные трудности для каждой из них.

Этот вопрос был затронут потому, что трудности при выборе допустимых полей перемещений можно обойти, используя смешанные вариационные принципы и вариационные принципы, базирующиеся на рассмотрении функционала дополнительной работы, для которых минимальны требования при выборе полей напряжений, либо с помощью изопараметрических трехмерных элементов, которые описывают поведение тонких пластин при наложении определенных ограничений и выполнении других операций. Изопараметрические элементы изучались в гл. 9 и 10, первый подход обсуждается ниже.

В начале данной главы описывается наиболее простая ситуация, возникающая при изгибе пластин, т. е. изгиб в отсутствие сдвиговых напряжений и начальных деформаций. Кроме того, обсуждаемые формулировки и задачи в основном относятся к изотропным материалам. Вслед за кратким обзором основных соотношений теории изгиба пластин внимание уделено многочисленным альтернативным формулировкам для четырехугольных и треугольных элементов. В противоположность гл. 9 «Плоско-напряженное состояние» треугольные элементы здесь менее предпочтительны, нежели четырехугольные. Поэтому последние рассматриваются в первую очередь.

Во многих отношениях построение и стиль этой главы отличаются от построения и стиля других глав книги. Детальное описание операций по формулировке лишь небольшого числа из широкого разнообразия формулировок пластинчатых элементов при изгибе потребует объема целой главы. Наша же основная цель — дать всестороннее описание техники построения конечных элементов для изгибаемых пластин, и чтобы добиться этого, здесь принят обзорный стиль изложения. Однако некоторые основные аспекты проблемы рассматриваются подробно.

Подробно приводятся основные соотношения и выражения для энергетических функционалов изгиба пластин, благодаря этому можно выявить важную роль смешанных функционалов и функционала дополнительной работы. Весьма полно дается описание прямоугольных элементов. Пристальное внимание уделяется двум широко распространенным видам треугольных элементов. И наконец, рассматриваются деформации, вызываемые поперечными сдвигами. Этот аспект изгиба пластин важен сам по себе. Кроме того, на его основе можно предложить подходы описания изгиба без сдвига, которые более просты с точки зрения формулировки, нежели общепринятые подходы, базирующиеся на использовании допустимых полей перемещений.

12.1. Теория изгиба

12.1.1. Основные соотношения

Теория изгиба пластин подробно излагается во многих книгах (см., например, [12.2—12.4]), и ниже вкратце приводятся лишь необходимые соотношения для дальнейшего построения элементов.

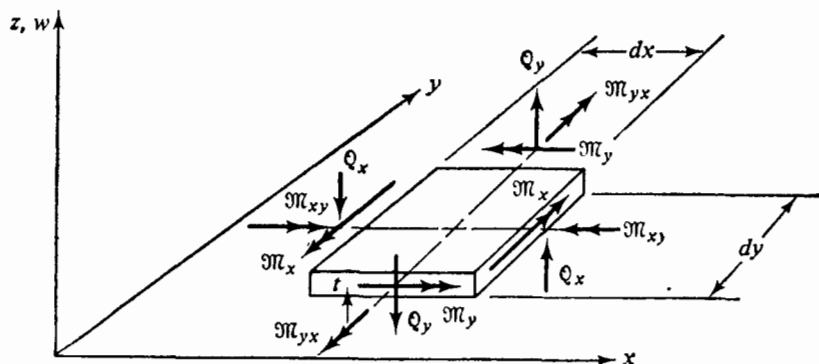


Рис. 12.1. Бесконечно малый элемент тонкой пластины

На рис. 12.1 изображен бесконечно малый элемент тонкой пластины толщины t . Пластина характеризуется плоским напряженным состоянием ($\sigma_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$) и, согласно обычным предположениям изгиба пластин, напряжения линейно изменяются по толщине. Интегрируя действующие в пластине напряжения по ее толщине, приходим к результирующим силовым характеристикам в виде *изгибающих* M_x , M_y и *крутящего* M_{xy} моментов, отнесенных к единице длины. Векторы, отвечающие положительным значениям этих моментов, изображены на рис. 12.1. Для простоты на рисунке не показаны производные этих элементов и соответствующие им сдвиги, которые учитываются при формулировке дифференциальных уравнений равновесия. Имеем

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z \, dz, \quad M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z \, dz,$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z \, dz.$$

Удобно рассматривать *строку усилий* $\mathfrak{M} = [M_x \ M_y \ M_{xy}]^T$ как аналог вектора напряжений $\sigma = [\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}]^T$ для плоского напряженного состояния.

Основное предположение теории изгиба тонких пластин заключается в том, что отрезки, которые были первоначально перпендикулярны к срединной поверхности пластины, остаются перпендику-

лярными к этой поверхности и в процессе деформирования пластины. Производные угловых смещений этих нормалей определяют кривизны κ_x , κ_y и кручение κ_{xy} поверхности. Предполагается, что они адекватно аппроксимируются вторыми производными функции поперечных смещений w :

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (12.1)$$

где w отсчитывается от исходного состояния срединной поверхности пластины. Кривизны и кручение — главные меры деформации при изгибе тонких пластин. Следовательно, вектор кривизны $\kappa = [\kappa_x \kappa_y \kappa_{xy}]$ является аналогом поля деформации $\varepsilon = [\varepsilon_x \varepsilon_y \gamma_{xy}]$ для плоского напряженного состояния.

Учитывая приведенные выше аналогии и определения, построим еще одну аналогию с плоской теорией упругости и введем уравнения состояния изгиба тонких пластин

$$\mathfrak{M} = [E_f] \kappa, \quad (12.2)$$

где для ортотропной пластины

$$[E_f] = \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix}. \quad (12.3)$$

Здесь D_x , D_y и D_1 — *изгибные жесткости* ортотропной пластины. В более знакомом случае *изотропной* тонкой пластины

$$[E_f] = D \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix}, \quad (12.3a)$$

где

$$D = \frac{E t^3}{12(1-\mu^2)}. \quad (12.4)$$

Определяющее дифференциальное уравнение равновесия изгиба пластин важно для понимания вопросов выбора полей перемещений в элементе. Основой для этого уравнения служат дифференциальные уравнения равновесия, которые выводятся путем рассмотрения равновесия сил, действующих на бесконечно малый элемент соответственно вдоль вертикальной оси и осей x и y . Следовательно, имеем

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0, \quad (12.5a)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{M}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0. \quad (12.5b)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{M}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{M}_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0, \quad (12.5c)$$

где q — поперечная распределенная нагрузка, а Q_x и Q_y — перерезывающие силы.

Теперь, подставив соотношения между моментами и кривизнами (12.2) в (12.5b) и (12.5c), а результирующие выражения — в (12.5a), получим

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_1 + 2D_{xy}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q. \quad (12.6)$$

Для пластины из изотропного материала это уравнение упрощается:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q. \quad (12.6a)$$

Заметим, что получение решения задачи изгиба тонких пластин с кинематической точки зрения полностью сводится к нахождению единственной компоненты перемещения w , т. е. прогибов.

12.1.2. Потенциальная энергия

Большинство существующих формулировок конечных элементов для изгибаемых пластин получаются на базе принципа минимума потенциальной энергии. Развивая аналогию с плоско-напряженным состоянием, получим

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \int_A \mathbf{x}^T [E_f] \mathbf{x} dA + V, \quad (12.7)$$

где \mathbf{x} и $[E_f]$ определены ранее, а V — потенциал прикладываемых нагрузок. В случае заданных распределенных нагрузок \bar{q} , нормальных к поверхности пластины, указанный потенциал выражается формулой

$$- \int_A \bar{q} \cdot w dA, \quad (12.8a)$$

а для заданных граничных усилий \bar{Q} , изгибающих и скручивающих моментов \bar{M}_n и \bar{M}_s (рис. 12.2) потенциал равен

$$- \int_{S_\sigma} (\bar{Q} \cdot w + \bar{M}_n \theta_n + \bar{M}_s \cdot \theta_s) dS, \quad (12.8b)$$

где S_σ — участок границы, где приложены указанные нагрузки. Наконец, для заданных усилий \bar{F}_{z_i} и моментов \bar{M}_{x_i} и \bar{M}_{y_i} в узловых соединениях имеем

$$- \sum_{i=1}^r F_{z_i} w_i - \sum_{i=1}^r \bar{M}_{x_i} \theta_{x_i} - \sum_{i=1}^r \bar{M}_{y_i} \theta_{y_i}, \quad (12.8c)$$

где суммирование по i распространяется на все узловые соединения элемента.

Рисунок 12.3, на котором изображен прямоугольный пластинчатый изгибаемый элемент, поясняет вид сосредоточенных сил и моментов и соответствующих им перемещений. Основные предположения теории изгиба тонких пластин (сохранение нормали, пренебрежение сдвиговыми деформациями) приводит к тому, что наклон срединной поверхности и угловое смещение в каждой точке совпа-

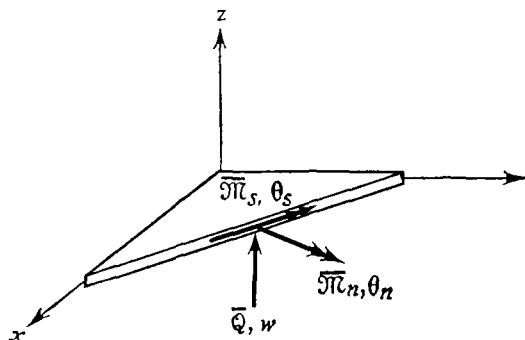


Рис. 12.2. Заданные граничные усилия.

дают. Поэтому $\theta_x = |\partial w / \partial y|$, $\theta_y = -|\partial w / \partial x|$. В выражении для θ_y отрицательное значение производной обусловлено тем, что вращение в положительном направлении вокруг оси (см. рис. 12.3) вызывает отрицательные прогибы w . Следует также указать на различие между моментами в узлах, являющихся *сосредоточенными* моментами M_x , M_y , измеряемыми в единицах дюйм·фунт (или м·Н), и распределенными моментами \mathcal{M}_x , \mathcal{M}_y , \mathcal{M}_{xy} , измеряемыми в единицах дюйм·фунт/дюйм. Узловые параметры искомого конечно-элементного представления суть сосредоточенные моменты (M_{x_i} , M_{y_i}) и силы (F_{z_i}), а также соответствующие им перемещения.

С физической точки зрения очевидно, что поле перемещений конечного элемента при изгибе, как этого требует принцип минимума потенциальной энергии, должно быть непрерывно вместе со своими первыми производными при переходе границ элементов. Те же условия получают математически, анализируя выражение для функционала потенциальной энергии P_p , включающее *вторые производные* от w , что и обуславливает необходимость непрерывности *первых производных*. Этому требованию удовлетворить трудно. Поэтому при формулировке изгибаемых пластинчатых элементов оказались весьма привлекательными альтернативные вариационные принципы, требующие непрерывности лишь самой функции w .

Вид функционала потенциальной энергии показывает, что выбираемое поле должно быть по крайней мере квадратичным — в ре-

результате взятия вторых производных исключается вклад всех линейных и постоянных членов полей перемещений. Как было показано для балки, обычно при описании изгиба используют кубические функции. Насколько этот подход эффективен для пластин, станет ясно из последующих разделов.

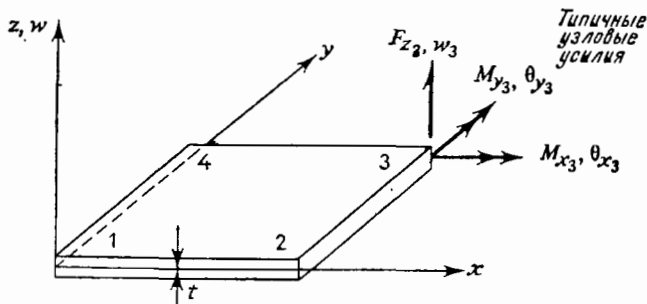


Рис. 12.3. Изгибаемая тонкая прямоугольная пластина.

В качестве заключительного замечания, касающегося потенциальной энергии, отметим, что для изотропного материала уравнение (12.6) является *уравнением Эйлера* для функционала потенциальной энергии. Значение этого обстоятельства заключается в том, что то же уравнение (с функцией напряжений Эри Φ в качестве неизвестной переменной) определяет растяжение пластины при применении формулировок, базирующихся на принципе минимума дополнительной работы. Следовательно, рассуждения, касающиеся выбора полей перемещений, непосредственно справедливы и для формулировок, соответствующих плоской задаче.

Уместно изучить процедуру дискретизации функционала потенциальной энергии при получении конечно-элементных соотношений между силами и перемещениями. Принимаемый подход очень близок процедурам из предыдущих глав. Выражение для выбранного поля перемещений сначала дифференцируется согласно (12.1) с целью отыскания поля κ . В результате приходим к соотношениям вида

$$\kappa = [D]\{\Delta\}. \quad (12.9)$$

Например, для изображенного на рис. 12.3 прямоугольного элемента

$$\{\Delta\} = [w_1 \ w_2 \ w_3 \ w_4 \ \theta_{x_1} \ \theta_{x_2} \ \theta_{x_3} \ \theta_{x_4} \ \theta_{y_1} \ \theta_{y_2} \ \theta_{y_3} \ \theta_{y_4}]^T. \quad (12.10)$$

Подставляя (12.9) в выражение для энергии деформации, входящее в полную потенциальную энергию, получим

$$P_p = \frac{1}{2} \Delta^T [k] \Delta + V, \quad (12.7a)$$

где, как и в предыдущих главах,

$$[k] = \left[\int_A [D]^T [E,] [D] dA \right]. \quad (12.11)$$

Заметим, что предполагаемое поле перемещений фигурирует в определении величины V , если заданы распределенные нагрузки \bar{q} , \bar{Q} , \bar{M}_n и \bar{M}_{ns} .

В тех случаях, когда предполагаемое поле представлено полиномиальным рядом, важно обратить внимание на определение величин θ_x и θ_y . Имеем (см. разд. 8.2)

$$w = [p(m)] \{a\}, \quad (12.12a)$$

поэтому

$$\theta_x = \left[\frac{\partial p(m)}{\partial y} \right] \{a\}, \quad \theta_y = - \left[\frac{\partial p(m)}{\partial x} \right] \{a\}. \quad (12.12b, c)$$

Следовательно, определяя (12.12) в узлах, приходим, как обычно, к полной системе уравнений вида

$$\{\Delta\} = [B] \{a\}. \quad (12.13)$$

Разрешим это уравнение относительно $\{a\}$ и подставим полученное выражение вновь в (12.12). Продифференцируем результирующие выражения согласно (12.1) и выпишем (12.9). Также можно продифференцировать выражение (12.12) непосредственно согласно соотношениям, связывающим кривизны и перемещения (соотношения (12.1)), и подставить полученный результат в выражение для энергии деформации. Получим «основную» матрицу жесткости, относящуюся к параметрам $\{a\}$. Матрица жесткости, соответствующая узловым перемещениям, получается в результате применения к основной матрице жесткости матрицы, обратной к $[B]$ из (12.13), подобно тому, как преобразуются координаты. Ниже, в этой главе представится возможность проиллюстрировать эту процедуру.

12.1.3. Дополнительная энергия

Дополнительная энергия упругой конструкции определяется в гл. 6 в терминах напряжений $\sigma = [\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}]$. Теперь, используя аналогию, описанную в п. 12.1.1, можно построить выражение для дополнительной энергии при изгибе тонкой пластины. Имеем $\Pi_c = U^* + V^*$, где в данном случае

$$U^* = \frac{1}{2} \int_A \mathfrak{M}^T [E,]^{-1} \mathfrak{M} dA \quad (12.14)$$

и для распределенных и граничных нагрузок

$$V^* = - \int_A q \cdot \bar{w} dA - \int_{S_n} Q \cdot \bar{w} + M_n \cdot \bar{\theta}_n + M_s \cdot \bar{\theta}_s dS. \quad (12.15)$$

Здесь поперечные \bar{w} и угловые $\bar{\theta}_n$ и $\bar{\theta}_s$ смещения задаются на участке S_n границы, а граничные условия задаются на оставшейся части границы S_0 .

При анализе изгиба пластин особенно полезна функция дополнительной энергии, выраженная в терминах функций напряжений. В рассматриваемом случае соответствующими функциями напряжений являются функции напряжений Саусвелла Φ^u и Φ^v (см. [12.5]), определяемые следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_x &= - \left(\frac{\partial \Phi^v}{\partial y} + \Omega \right), \quad \mathbb{M}_y = - \left(\frac{\partial \Phi^u}{\partial x} + \Omega \right), \quad \mathbb{M}_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi^v}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^u}{\partial y} \right), \\ Q_x &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi^u}{\partial y} - \frac{\partial \Phi^v}{\partial x} \right) - \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad Q_y = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi^v}{\partial x} - \frac{\partial \Phi^u}{\partial y} \right) - \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \end{aligned} \quad (12.16)$$

где Ω — параметр, связанный с распределенной нагрузкой следующим образом:

$$q = \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \right) \Omega. \quad (12.17)$$

Если подставить выписанные выше выражения для \mathbb{M}_x , \mathbb{M}_y , \mathbb{M}_{xy} , Q_x , Q_y в уравнения (12.5), то можно убедиться, что уравнения равновесия удовлетворяются, что и должно быть для функций напряжений.

Наиболее часто задаваемые перемещения полагаются равными нулю, т. е. $V^* = 0$. Поэтому при обсуждении дискретизации P_c сосредоточим наше внимание на выражении для U^* . Подставляя в (12.14) выражение (12.16), получим

$$\begin{aligned} U^* &= \frac{1}{2} \left[\int_A \Phi'^T [E_I]^{-1} \Phi' dA - 2 \int_A \Phi'^T [E_I]^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \Omega dA + \right. \\ &\quad \left. + \int_A \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} [E_I]^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \Omega^2 dA \right], \end{aligned} \quad (12.18)$$

$$\text{где} \quad \Phi' = \left[-\frac{\partial \Phi^v}{\partial y} \quad -\frac{\partial \Phi^u}{\partial x} \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi^v}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^u}{\partial y} \right) \right]^T. \quad (12.19)$$

Третий интеграл в правой части (12.18) исчезает при дифференцировании U^* , а второй интеграл даст вектор констант. Следовательно, чтобы рассмотреть основные свойства конечного элемента, изучим лишь первый интеграл. Ясно, что, за исключением вида констант и того факта, что матрица $[E_I]^{-1}$ заменяет $[E_I]$, этот член имеет тот же вид, что и энергия деформации для плоско-напряженного состояния. Итак, выберем тот же вид аппроксимации, что и

для случая плоского напряженного состояния; имеем

$$\Phi^u = [N] \{ \Phi^u \}, \quad \Phi^v = [N] \{ \Phi^v \}, \quad (12.20)$$

где $\{ \Phi^u \}$ и $\{ \Phi^v \}$ включают вычисленные в узлах-соединениях значения Φ^u и Φ^v (и возможно, их производные по x и y). После дифференцирования, согласно (12.18), получим

$$\Phi' = [D] \left\{ \begin{matrix} \Phi^u \\ \Phi^v \end{matrix} \right\} = [D] \{ \Phi \}. \quad (12.21)$$

За исключением отдельных констант, матрица $[D]$ совпадает с матрицей преобразования от деформаций к перемещениям для плоского напряженного состояния (см. (5.6b)). Тогда путем подстановки в первый интеграл из (12.18) имеем

$$\frac{1}{2} \int_A \Phi'^T [E_f]^{-1} \Phi' dA = \frac{[f]}{2} \{ \Phi \}, \quad (12.22)$$

где
$$[f] = \left[\int_A [D]^T [E_f]^{-1} [D] dA \right]. \quad (12.23)$$

Сравнивая полученное выражение с (9.7), видим, что матрица податливости $[f]$ при изгибе, соответствующая функциям напряжений, совпадает с общим видом матрицы жесткости для плоско-напряженного состояния. (Толщина t включена в $[E_f]^{-1}$.)

12.1.4. Функционал Рейсснера

Функционал Рейсснера для общей трехмерной теории упругости был представлен в разд. 6.8. Как и в случае функционалов потенциальной и дополнительной энергии, можно получить вид функционала Рейсснера для изгиба, опираясь на полученные ранее результаты, если использовать аналогию между напряжениями и изгибающими моментами, а также между деформациями и кривизнами. Функционал для изгиба пластин, аналогичный (6.81), имеет вид

$$\Pi_R = \int_A \mathfrak{M} \cdot \kappa dA - U^* + V + V^*, \quad (12.24)$$

где U^* и V определены согласно (12.14) и (12.18). Так как ожидается, что выбранное поле перемещений \bar{w} не будет соответствовать заданным перемещениям $\bar{\bar{w}}$, необходимо представить выражения от перемещений в V^* (см. 12.15)) через $(\bar{w} - \bar{\bar{w}})$, $(\partial \bar{w} / \partial n - \partial \bar{\bar{w}} / \partial n)$ и $(\partial \bar{w} / \partial s - \partial \bar{\bar{w}} / \partial s)$.

Формула (12.24) не накладывает каких-либо требований к непрерывности \mathfrak{M} . Однако в силу наличия вторых производных относительно κ необходимо, чтобы поперечные перемещения и их

производные удовлетворяли условиям межэлементной непрерывности. Это обстоятельство не дает каких-либо преимуществ данному функционалу по сравнению с функционалом потенциальной энергии. Чтобы добиться преимуществ, проинтегрируем выписанное выражение по частям и получим следующий функционал Π_H , введенный Херрманом [12.6, 12.7]:

$$\Pi_H = \int_A \mathbf{w}' \cdot \mathbf{w} dA - U^* - \int_{S_n} \mathfrak{M}_s \frac{\partial w}{\partial s} dS + V + V^*, \quad (12.24a)$$

где S_n — полная граница элемента и

$$\mathbf{w}' \cdot \mathbf{w}' = \frac{\partial \mathfrak{M}_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}_y}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{M}_{xy}}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{M}_{xy}}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Теперь, если обозначить дискретизованную величину w аналогично предыдущим главам, т. е.

$$\mathbf{w} = [N_w] \{\Delta\}, \quad (12.25)$$

то внутри элемента наклон $\mathbf{w}' = [\partial w / \partial x \quad \partial w / \partial y]$ запишется в виде $\mathbf{w}' = [N'_w] \{\Delta\}$, а на границе S_n — в виде $\partial w / \partial s = [Y] \{\Delta\}$. Кроме того, для \mathfrak{M} запишем

$$\mathfrak{M} = [N_M] \{\mathbf{M}\} \quad (12.26)$$

и внутри элемента $\mathfrak{M}' = [N'_M] \{\mathbf{M}\}$, а на его границе $\mathfrak{M}_s = [L] \{\mathbf{M}\}$. Подставляя в (12.24), получим

$$\Pi_H = [M] [\Omega_{12}] \{\Delta\} - \frac{[M]}{2} [\Omega_{11}] \{\mathbf{M}\} - [L] \{\overline{\mathbf{M}}\} + [M] \{\overline{\Delta}\}, \quad (12.24b)$$

где

$$[\Omega_{11}] = \left[\int_A [N_M]^T [E_I]^{-1} [N_M] dA \right],$$

$$[\Omega_{12}] = [\Omega_{21}]^T = \left[\int_A [N'_M]^T [N'_w] dA - \int_{S_n} [L]^T [Y] dS \right],$$

а $\{\overline{\mathbf{M}}\}$ и $\{\overline{\Delta}\}$ определяются согласно заданным нагрузкам и перемещениям соответственно на поверхности элемента и на его границе.

Варьируя Π_H последовательно по $[M]$ и $[L]$, получим

$$\begin{bmatrix} -\Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{12}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{M} \\ \Delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{\Delta} \\ \overline{\mathbf{M}} \end{Bmatrix}. \quad (12.27)$$

Условия внутриэлементной непрерывности для w и \mathfrak{M} из Π_H заключаются в том, что w и \mathfrak{M}_n должны быть непрерывны, где \mathfrak{M}_n — изгибающий момент, нормальный к границе элемента.

Проверяя эту функцию при переходе через границы элемента, приходим к выводу, что поля прогибов w и угловых смещений θ_x , θ_y непрерывны, если соединены элементы, построенные на одинаковых функциях. Поэтому условия межэлементной совместности удовлетворяются. Если величины из (12.29), на которые умножаются узловые перемещения, расписать подробно и изучить, то окажется, что член, отвечающий постоянной сдвиговой деформации, а именно простая функция кручения w_t , отсутствует. Как указывалось в разд. 8.1, чтобы быть уверенным в сходимости к правильному результату, необходимо учесть все состояния с постоянной деформацией, а для изгиба пластин простая закрутка соответствует постоянной деформации кручения. Следовательно, необходимо отклонить предлагаемую функцию.

Выбор межэлементной согласованной функции перемещений, включающей также все однородные деформированные состояния, можно осуществить, используя обсуждаемую в гл. 8 концепцию интерполяции. Здесь, для того чтобы удовлетворить условиям, накладываемым вдоль границы как на функцию, так и на ее производные, используем интерполяционную формулу Эрмита (разд. 8.4). Основываясь на этом подходе, можно записать полный полином третьего порядка [12.8]:

$$w = [\text{Соотношение (12.28)} + N_3(x) N_3(y) \Gamma_1 + N_4(x) N_3(y) \Gamma_2 + \\ + N_4(x) N_4(y) \Gamma_3 + N_3(x) N_4(y) \Gamma_4], \quad (12.31)$$

где степени свободы Γ_i — значения смешанных производных в узлах: $\Gamma_1 = |\partial^2 w / \partial x \partial y|_1$, и т. д. Поэтому заметим, что балочная функция (12.28) является всего лишь неполным эрмитовым полиномиальным разложением и в случае прямоугольного элемента для представления единственной функции требуется 16 членов разложения. Те же требования уже выдвигались в разд. 8.4, в котором показано, что полное произведение кубических функций включает 16 членов. Матрица жесткости элемента, полученная на основе (12.31), приведена в [12.8].

Альтернативой к указанным функциям может служить *двенадцатичленный полином*, содержащий столько слагаемых, сколько «очевидных» степеней свободы имеется в узлах. Этот полином задается в виде треугольника Паскаля согласно рис. 12.4. Он может быть записан через функции формы. Представление с помощью функций формы имеет тот же вид, что и для случая балочных функций поперечных смещений (12.28). Матрица-строка $[N_w]$ задается выражением (12.29а). Для оставшихся членов функции формы имеем

$$[N_{\theta_x}] = [(1 - \xi) N_3(y) \quad \xi N_2(y) \quad -\xi N_4(y) \quad -(1 - \xi) N_4(y)], \\ [N_{\theta_y}] = [-(1 - \eta) N_3(x) \quad (1 - \eta) N_4(x) \quad \eta N_4(x) \quad -\eta N_3(x)]. \quad (12.32)$$

Заметим, рассматривая рис. 12.4, что двенадцатичленная функция не является полным полиномом в смысле, определенном в разд. 8.1. Функция полна вплоть до третьего порядка (10 членов), и необходимо выбрать еще 2 члена из пяти, отвечающих четвертому порядку. Слагаемое x^2y^2 можно не рассматривать, так как для него нет логической пары из оставшихся. Члены x^4 и y^4 приведут к квадратичным вариациям перемещений вдоль границ элемента и к

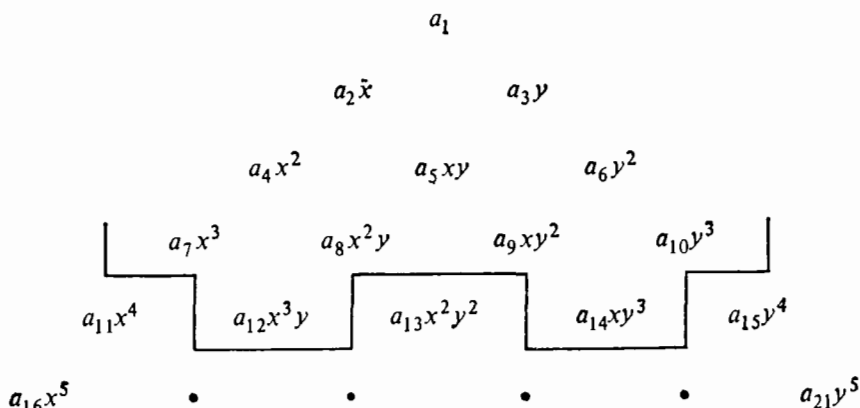


Рис. 12.4. Двенадцатичленный полином, согласующийся с треугольником Паскаля.

более серьезным разрывам непрерывности перемещений вдоль межэлементных границ, нежели члены x^3y и xy^3 . Поэтому выберем последние. Интересно отметить, что указанный выбор позволяет удовлетворить определяющему дифференциальному уравнению (12.6а) на свободных от нагрузок областях пластины; следует, однако, еще раз отметить, что для стационарности аппроксимации потенциальной энергии удовлетворение этому условию не требуется.

Интересны и другие свойства этой функции. Она включает члены, задающие движение тела как твердого целого и однородную деформацию, причем исследование показывает, что прогибы оказываются межэлементно согласованными. Однако угловые перемещения не удовлетворяют этим условиям.

Чтобы подтвердить эти высказывания, необходимо лишь оценить полиномиальное представление (рис. 12.4) вдоль типичной границы элемента. Выбирая с этой целью сторону 1—2 (вдоль оси x), имеем

$$\begin{aligned}
 w &= a_1 + a_2x + a_4x^2 + a_7x^3, \\
 \frac{\partial w}{\partial x} &= a_2 + 2a_4x + 3a_7x^2, \\
 \frac{\partial w}{\partial y} &= a_3 + a_5x + a_8x^2 + a_{12}x^3,
 \end{aligned}$$

где w и $d\omega/dx$ определяют изгиб в направлении x . Кроме того, заметим, что разложение для w представляет собой кубический полином. Из опыта с изгибом балки ясно, что заданные на концах четыре степени свободы ($w_1, w_2, \theta_{y1}, \theta_{y2}$) из общего числа степеней свободы полностью определяют вариацию w и $d\omega/dx$ вдоль этой границы. Однако наклон нормали $d\omega/dy$ описывается кубической функцией, и, так как для определения этой функции остались всего лишь две степени свободы θ_{x1} и θ_{x2} , то она определяется неоднозначно. Поэтому решение, полученное с использованием элементов указанного типа, не будет доставлять минимум потенциальной энергии. С другой стороны, имеются теоретические обоснования сходимости решения для этого типа элементов (см., например, [12.13]). Матрица жесткости элемента, отвечающая этой функции, задана в табл. 12.1 (см. стр. 389—391).

Исследуя изображенный на рис. 12.4 треугольник Паскаля, можно выбрать различные альтернативные представления. Существуют также соответствующие альтернативы при построении полей перемещений с использованием функций формы. В работе [12.9] приводится ряд функций формы для представлений с двенадцатью степенями свободы. В [12.10] и [12.11] обсуждаются альтернативные степенные поля перемещений с 16 степенями свободы, в [12.8, 12.12] и др. формируются прямоугольные элементы для пластин с более чем 16 степенями свободы.

12.2.2. Предполагаемые модели перемещения — метод подобластей

Альтернативные построения, основанные на предполагаемых полях перемещений, можно осуществить, разбивая четырехугольный элемент на четыре треугольных элемента и задавая независимо поля перемещений в каждом из треугольников. Далее треугольные элементы объединяют, чтобы получить четырехугольный элемент посредством задания условий непрерывности перемещений вдоль «внутренних» границ, определяемых разбиением на подобласти.

В работе [12.14] предложен этот подход при формулировке межэлементно согласованного элемента с 16 степенями свободы. Внутри каждого треугольника выбирается полное кубическое (10 членов) полиномиальное представление поля перемещений. Традиционное задание трех степеней свободы (перемещение и два вращения) в углах дополняется заданием вдоль каждой стороны одной степени свободы в виде углового перемещения.

Аналогичный подход был предложен в работе [12.15], где на основе принципа минимума потенциальной энергии построен четырехугольный элемент путем соответствующего объединения четырех треугольных элементов. Здесь треугольные элементы сами строятся посредством разбиения элемента на три треугольные подобласти (формулировка этих треугольников описывается в п. 12.3.2).

Следует отметить, что, прежде чем составлять из треугольников четырехугольный элемент, стороны которого становятся внешними границами, задаются условия, обеспечивающие исключение степеней свободы в серединах указанных сторон. Таким образом, в окончательном варианте четырехугольный элемент имеет всего 12 степеней свободы (по три в каждом углу). Условия внутренней и межэлементной согласованности для этого элемента выполняются.

12.2.3. Обобщенный вариационный подход

Обобщенный вариационный подход, описанный в гл. 6 и 7, особенно привлекателен при формулировках изгиба пластин. Так как трудно определить и оперировать с полями поперечных перемещений, которые полностью межэлементно согласованы, желательно выбрать удобное поле, которое не удовлетворяет этим условиям, и далее навязать условие непрерывности, задавая ограничения. Для двенадцатиэлементной функции (12.27), например, необходимо обеспечить лишь непрерывность угловых перемещений. Довольно глубокие исследования в этой области четырехугольных изгибаемых элементов можно найти в статьях [12.16, 12.17]. Этот подход обсудим для треугольных элементов в разд. 12.13.

12.2.4. Смешанные формулировки в напряжениях и перемещениях

В работах [12.18, 12.19] исследованы гибридные формулировки в напряжениях для прямоугольных элементов, а формулировки для четырехугольных элементов даны в [12.20]. В каждой используется схема с единственным полем. В [12.21] приведены две альтернативные формулировки путем разбиения элемента на подобласти и с использованием гибридной схемы в напряжениях.

Подход на базе функционала Рейсснера, модифицированный, как описано в разд. 12.2, Херрманом [12.7], был применен в работе [12.22] для различных четырехугольных элементов как для представления единственным полем, так и при разбиении элемента на подобласти.

12.2.5. Предполагаемые поля напряжений

Как было указано, для функционала дополнительной энергии, выраженного в терминах функции напряжений Саусвелла, требуются те же поля, что и при описании перемещений, если анализировать плоско-напряженное состояние на основе подхода, использующего принцип минимума потенциальной энергии. Поэтому рассуждения, касающиеся последней темы из разд. 9.3, справедливы и в данном случае. Результаты подсчетов с использованием указанного подхода приведены в [12.23].

12.2.6. Сравнение численных результатов

Рассмотрим вначале жестко закрепленную квадратную пластину $2a \times 2a$, на которую в центре действует сосредоточенная сила P_1 (рис. 12.5). Учитывая симметрию относительно двух осей, можно

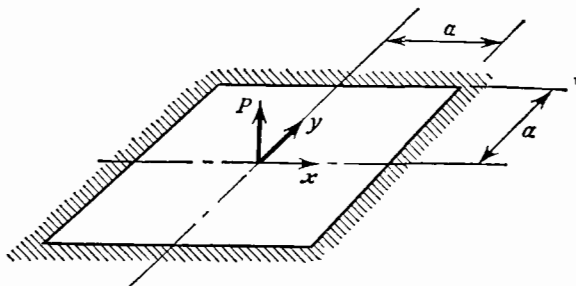


Рис. 12.5. Квадратная жестко зашлепленная пластина.

исследовать эту задачу, используя лишь один элемент для четверти пластины, введя при этом лишь одну степень свободы: перемещение w_1 под сосредоточенной силой. В этом случае $P_1 = k_{11}w_1$, $P = P_1/4$, $x_2 = y_2 = a$. Согласно табл. 12.1 (см. стр. 389), для формулировки с использованием 12 членов имеем

$$\frac{P_1}{4} = \frac{Et^3}{360(1-\mu^2)a^2} [120(1+1) - 24\mu + 84] w_1,$$

или, полагая $D = Et^3/12(1-\mu^2)$, $\mu = 0.3$, имеем $w_1 = 0.0237(a^2 P_1/D)$. Используя коэффициенты жесткости из [12.8] для шестнадцатичленной формулировки, получим $w_1 = 0.0212(a^2 P_1/D)$.

Точное решение [12.2] равно $w_1 = 0.0224(a^2 P_1/D)$, поэтому каждое из решений приблизительно на 8% отличается от точного, находясь по разные стороны от него. Как и предполагалось, «согласованное» (шестнадцатичленное) решение ограничивает снизу точное решение.

На рис. 12.6 представлена задача, рассматриваемая при сравнении различных формулировок пластинчатых элементов при изгибе. В задаче определяются перемещения, вызванные действием сосредоточенной силы, приложенной в центре свободно опертой пластины. Приводимые графики вычислений отражают зависимость возникающей при численном определении перемещений ошибки от размеров сетки разбиения квадрата пластины.

Следует отметить, что представленные результаты не обязательно определяют нужные параметры для сравнения точности и эффективности, так же как и размеры ячейки не обязательно являются наиболее точной мерой затраченных усилий. Такие величины, как напряжение или энергия деформации, являются более существен-

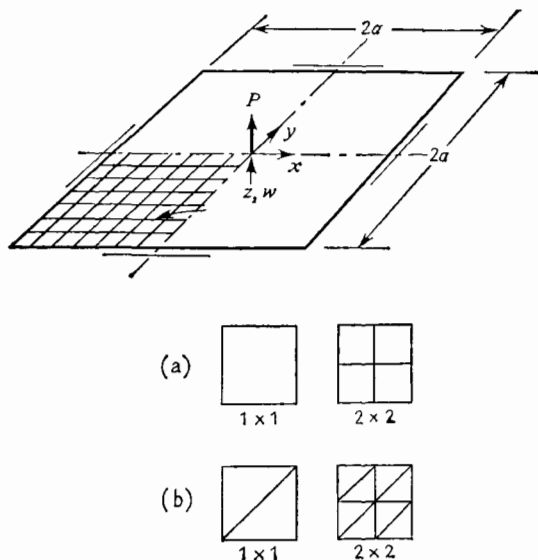


Рис. 12.6. Задачи для сравнения вычислительных аспектов. (а) Сетки для прямоугольных элементов; (б) сетки для треугольных элементов. Показаны лишь представительные образцы сеток. Здесь также используются сетки, повернутые на 90° .

ными параметрами, характеризующими поведение конструкции. Наиболее предпочтительной мерой затраченных усилий могли бы служить такие факторы, как затрачиваемые усилия при программировании алгоритма, затраты на решение системы уравнений и интерпретацию полученных результатов. Например, те же самые величины, но в зависимости от других характеристик эффективности были приведены в работе [12.24]. В данной главе графики главным образом приводятся для того, чтобы выяснить верхнюю и нижнюю границы решений, продемонстрировать сходимость и оценить альтернативы внутри ограниченного числа форм элементов и процедур их построения.

На рис. 12.7 приведены результаты для различных формулировок прямоугольных элементов. Заметим, что двенадцатичленный полином стремится к точному решению сверху, так как условия межэлементной непрерывности перемещений нарушаются, характеристика, соответствующая «нижней границе», которая получается с использованием принципа минимума потенциальной энергии, не достигается. Наоборот, формулировка с использованием шестнадцатичленного полинома и разбиения элемента на подобласти, предложенная в работе [12.14], обуславливает сходимость и обеспечивает достижение нижней границы для получающихся решений. На этом же рисунке приведены результаты для двух формулировок

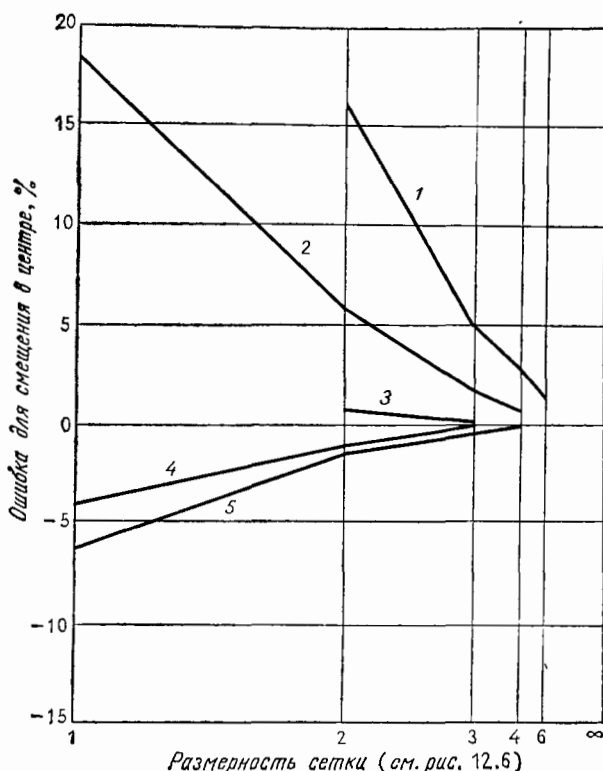


Рис. 12.7. Сравнение численных результатов: четырехугольные конечно-элементные формулировки; 1 — смешанная формулировка с линейными M и w [12.22]; 2 — двенадцатичленный полином (12.32); 3 — смешанная формулировка с квадратичными M и w [12.22]; 4 — шестнадцатичленный полином [12.31]; 5 — согласованные четырехугольные подобласти [12.14].

на базе модифицированного функционала Рейсснера [12.22]. В одной из них вводится линейное поле изгибающих моментов и поле граничных поперечных смещений. В другой используются квадратичные функции. Очевидно, что существенное увеличение точности вытекает из увеличения порядка этих функций.

12.3. Треугольные элементы

12.3.1. Формулировки в перемещениях — единственное поле

На рис. 12.8 представлены различные способы задания степеней свободы для треугольного пластинчатого элемента при изгибе, обусловленные различным выбором членов в полиномиальном представлении поперечного смещения w .

Желательный вид треугольного пластинчатого элемента при изгибе показан на рис. 12.8(а). Этому элементу отвечают сила в направлении z и по два изгибающих момента в каждой вершине. Узлы внутри элемента и на его границах между вершинами отсутствуют. Он характеризуется девятью степенями свободы и поэтому требует девятичленного разложения для w . Однако из рассмотре-

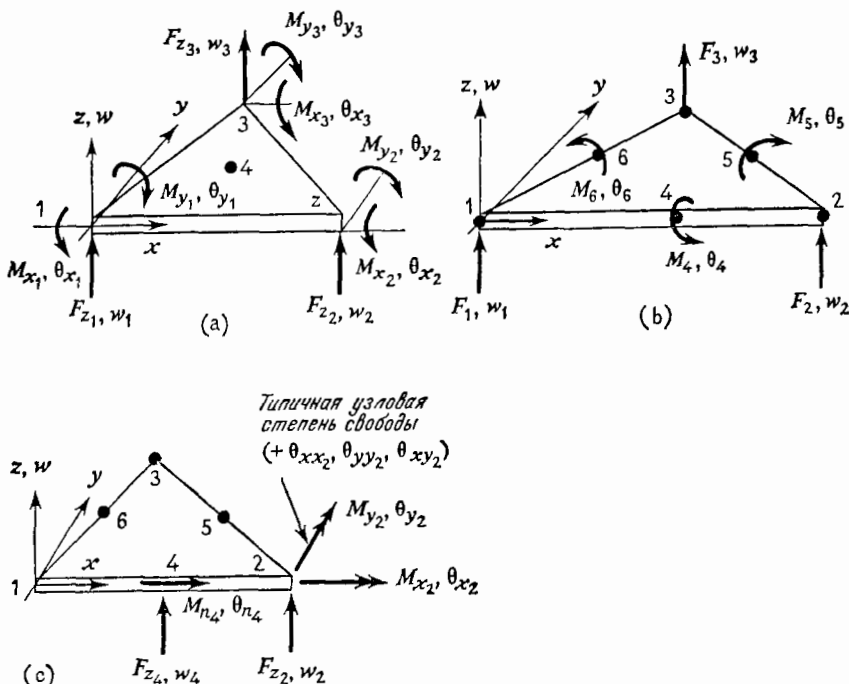


Рис. 12.8. Конечно-элементное представление треугольными элементами с единственным полем. (а) Треугольник с девятью степенями свободы (если задано w_4 , то число степеней свободы равно 10: $w = a_1 + a_2x + \dots + a_{10}y^3$); (б) треугольник с шестью степенями свободы ($w = a_1 + a_2x + \dots + a_6y^2$); (в) треугольник с двадцатью одной степенью свободы ($w = a_1 + a_2x + \dots + a_{21}y^5$).

ния треугольника Паскаля следует, что полный полином содержит либо 6 членов (квадратичный), либо 10 членов (кубический). Чтобы получить девятичленное разложение, можно объединить пару членов [например, $a_8(x+y)xy$], однако можно убедиться, что для некоторых форм элемента преобразование от обобщенных степеней свободы к узловым становится вырожденным. Поэтому выбор 9 членов не может быть осуществлен с помощью полиномиальных разложений, которые для заданного порядка полны.

Если невзирая на полноту выбирается полином с 9 членами, то нарушаются условия «геометрической изотропии». Например, мож-

но выбросить член xy^2 или x^2y . Построенные таким образом элементы некоторое время использовались и встречались в различных широко распространенных программах; однако точность полученных решений была неудовлетворительна. Ниже перечислены более удовлетворительные возможные формулировки на основе единственного поля:

1. Можно определить элемент лишь с 6 степенями свободы (см. рис. 12.8(b)) и полной квадратичной функцией, задающей w . При этой формулировке будут нарушаться требования межэлементной непрерывности перемещений.

2. Можно выбрать полный кубический полином с 10 степенями свободы, причем 10-я степень свободы задана во внутренней точке (см. рис. 12.8(a)). При этой формулировке также нарушаются условия межэлементной непрерывности перемещений.

3. Число степеней свободы можно увеличить до тех пор, пока не будет достигнуто соответствие с полным полиномом, который удовлетворяет условиям межэлементной непрерывности. Можно показать, что для этого требуется введение полного полинома 5-й степени (см. рис. 12.8(c)).

4. Межэлементно непрерывное поле перемещений, отвечающее изображенному на рис. 12.8(a) с 9 степенями свободы, можно построить в терминах треугольных координат посредством суперпозиции соответствующей системы функций формы [12.25]. Существенно улучшенный вариант формулировки этого типа приводится в [12.26].

Далее подробнее рассмотрим формулировки из п. 1, 2 и 3. За подробностями, касающимися формулировок из п. 4, заинтересованные читатели могут обратиться к работам [12.25, 12.26]; некоторые аспекты этого подхода будут затронуты при обсуждении в этом разделе числовых результатов.

Конечно-элементное представление поля перемещений с шестью степенями свободы изображено на рис. 12.8(b). Поле прогибов описывается в виде

$$w = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2. \quad (12.33)$$

Кроме того, узловые перемещения определяются как значения прогибов в вершинах элемента (точки 1, 2 и 3) и нормальные угловые смещения в серединах сторон (точки 4, 5 и 6). Поэтому

$$[\Delta] = [\omega_1 \omega_2 \omega_3 \theta_4 \theta_5 \theta_6].$$

Выражая каждую степень свободы в $[\Delta]$ в терминах разложения (12.33), получим систему уравнений $\{\Delta\} = [B]\{a\}$ типа (12.13), где $\{a\} = [a_1 \dots a_6]^T$. Основная матрица жесткости строится на основе представления (12.33) (см. (6.18)) и далее преобразуется к матрице, отвечающей физическим степеням свободы, путем использования матрицы $[B]^{-1}$ как матрицы преобразования.

Хотя при этой формулировке нарушаются условия межэлементной непрерывности перемещений, все условия равновесия выполнены. Поле моментов удовлетворяет условиям равновесия внутри элемента и на границе смежных элементов [12.27].

Для построения матрицы жесткости элемента на базе полного кубического полинома можно применить обобщенный подход с использованием потенциальной энергии [12.28]. Элемент показан на рис. 12.8(а). В этом случае в каждой из трех вершин задаются значения w и угловые смещения θ_x и θ_y , а в качестве 10-й степени свободы выбирается прогиб в центре. Имеем для вектора степеней свободы

$$\{ \Delta \} = \{ w_1 \theta_{x_1} \theta_{y_1} w_2 \theta_{x_2} \theta_{y_2} w_3 \theta_{x_3} \theta_{y_3} w_4 \}. \quad (12.34)$$

Прогиб w представляется в виде $w = \{ N \} \{ \Delta \}$, где составляющие $\{ N \}$ в терминах треугольных координат записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} N_1 &= L_1^2 (L_1 + 3L_2 + 3L_3) - 7L_1 L_2 L_3, \\ N_2 &= L_1^2 (y_{31} L_3 - y_{12} L_2) + (y_{12} - y_{31}) L_1 L_2 L_3, \\ N_3 &= L_1^2 (x_{12} L_2 - x_{31} L_3) + (x_{31} - x_{12}) L_1 L_2 L_3, \\ N_4 &= L_2^2 (L_2 + 3L_3 + 3L_1) - 7L_1 L_2 L_3, \\ N_5 &= L_2^2 (y_{12} L_1 - y_{23} L_3) + (y_{23} - y_{12}) L_1 L_2 L_3, \\ N_6 &= L_2^2 (x_{23} L_3 - x_{12} L_1) + (x_{12} - x_{23}) L_1 L_2 L_3, \\ N_7 &= L_3^2 (L_3 + 3L_1 + 3L_2) - 7L_1 L_2 L_3, \\ N_8 &= L_3^2 (y_{23} L_2 - y_{31} L_1) + (y_{31} - y_{23}) L_1 L_2 L_3, \\ N_9 &= L_3^2 (x_{31} L_1 - x_{23} L_2) + (x_{23} - x_{31}) L_1 L_2 L_3, \\ N_{10} &= 27L_1 L_2 L_3, \quad x_{ij} = x_i - x_j, \quad y_{ij} = y_i - y_j. \end{aligned} \quad (12.35)$$

Матрица жесткости элемента строится непосредственно путем дифференцирования (12.35) в соответствии с $\kappa = [D] \{ \Delta \}$. Затем из (12.11) получаем коэффициенты жесткости элемента.

Для выписанного поля нарушаются условия межэлементной согласованности. При переходе через границу элемента компонента w непрерывна, а нормальные угловые смещения θ_n разрывны. Это смещение меняется по квадратичному закону вдоль каждой стороны, что приводит к необходимости использования трех параметров для однозначного задания смещения, однако в наличии имеются только два параметра (θ_n на концах отрезка). Оставшиеся четыре параметра в этих точках введены для однозначного определения w .

Чтобы разрешить эту ситуацию, можно выписать уравнение, задающее непрерывность нормальной производной в серединах сторон. Предположим, что два соседних элемента обозначены через A и B , а нормальные производные в серединах их сторон — соответственно через θ_n^A и θ_n^B . Условие непрерывности угловых смеще-

ний требует, чтобы

$$\theta_n^A - \theta_n^B = 0. \quad (12.36)$$

Можно использовать это условие для задания уравнения связи. Дифференцируя сначала по n поля перемещений соседних элементов (12.35), приходим к формулам $\theta_n^A = \partial \omega^A / \partial n$, $\theta_n^B = \partial \omega^B / \partial n$, которые затем подставим в (12.36). Полученные таким образом уравнения связи можно использовать при глобальном анализе путем непосредственной подстановки либо с помощью метода множителей Лагранжа, как описано соответственно в разд. 3.5 и 7.4.

Другой способ построения межэлементных условий связи заключается в этом случае в приравнивании нулю интеграла от выражения, задающего разность между угловыми смещениями соседних элементов (см. разд. 7.4 и [12.29]). Еще одним обобщенным вариационным подходом является подход [12.17], в котором строится «корректирующая» матрица жесткости элемента, которая добавляется к основной (межэлементно несогласованной) матрице жесткости элемента. Последняя выводится путем рассмотрения интеграла по границе элемента, куда подставлена простая межэлементно согласованная функция.

Следующее более тонкое представление дается полным пятнадцатичленным полиномом 4-й степени. В работе [12.30] на основе этой функции сформулирован треугольный элемент. Набор степеней свободы включает обычные 3 степени свободы в каждом из узлов, а также прогиб и производные по нормали в серединах каждой стороны. Межэлементная согласованность нарушается из-за недостаточного числа параметров, имеющих для однозначного задания производных по нормали на каждой из сторон. В работе [12.31] также исследован вопрос построения элемента на базе полинома 4-й степени, но с восемнадцатью членами.

Переходя к рассмотрению полного полинома 5-й степени, заметим, что, согласно треугольнику Паскаля, он включает 21 член. Полностью удовлетворить условиям межэлементной непрерывности можно, определив степени свободы, как показано на рис. 12.8(с). В этом элементе задаются по шесть степеней свободы в каждом узле — линейное и угловые смещения и три кривизны, а также угловые смещения в середине каждой из сторон. Число степеней свободы можно довести до 18 путем исключения угловых смещений в серединах сторон [12.33—12.35], задавая кубический характер изменения производных вдоль сторон.

Строились также элементы еще более высокого порядка с единственным полем, сохраняющие межэлементную непрерывность (см., например, [12.32, 12.36, 12.37]). Построение таких элементов проводилось на основе полных полиномов 6-й степени (28 членов) и 7-й степени (36 членов) с введением в узлах элемента специальных степеней свободы (производных более высокого порядка).

12.3.2. Сравнение численных результатов. Формулировки в перемещениях — единственное поле

Сравнение численных результатов для формулировок с единственным полем, о которых шла речь, проводится на рис. 12.9 для свободно опертой квадратной пластины, нагруженной в центре сосредоточенной силой.

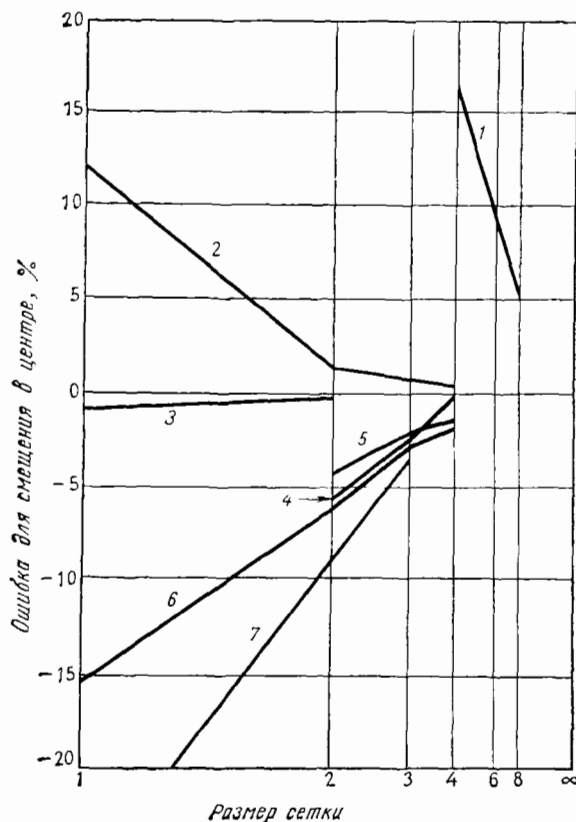


Рис. 12.9. Сравнение численных результатов: треугольные элементы с единственным полем. 1 — шестиугольный (квадратичный) полином [12.27]; 2 — несогласованные поля [12.25]; 3 — двадцатичленный полином (пятой степени) [12.34]; 4 — десятичленный (кубический) полином с ограничениями [12.28]; 5 — десятичленный (кубический) полином с корректирующей матрицей [12.17]; 6 — Разак (А-9) [12.26]; 7 — согласованные поля [12.25]. Размер сетки взят из рис. 12.6.

Заметим сначала, что элемент с шестью степенями свободы (полный квадратичный полином) [12.27] обуславливает сходимость к решению сверху, т. е. это решение является *верхней границей*.

Это происходит потому, что решение полностью согласуется с условиями равновесия. Результат довольно неточен для заданных значений параметров сетки, хотя, с другой стороны, матрица жесткости элемента имеет довольно простой вид. Действительно, можно в явном виде выписать эту матрицу жесткости без значительных усилий.

Численные результаты для элемента, основанного на полном кубическом полиноме, относятся лишь к случаю задания ограничений, обеспечивающих сохранение непрерывности угловых перемещений при переходе через границу элемента. Результаты, полученные без задания ограничений, настолько неточны, что соответствующие им графики не поместились в представленном на рисунке диапазоне изменения величин. Как можно ожидать, решения, полученные либо путем наложения соответствующих ограничений на каждой границе между соседними элементами [12.28], либо путем введения «корректирующей» матрицы жесткости с использованием обобщенного вариационного принципа [12.17], очень близки.

Однако здесь все же приведены результаты, полученные с помощью элементов, основанных на кубических функциях формы, выраженных в терминах треугольных координат (12.35), откуда исключен член, содержащий $L_1 L_2 L_3$ (т. е. формулировка, построенная Бейзли и др.) [12.25]. Принимая во внимание простоту этого элемента, можно заключить, что полученные численные результаты превосходные. Тем не менее следует отметить, что точность получаемых результатов зависит от геометрии конечно-элементной сетки [12.25].

Результаты для формулировок, основанных на полных полиномах 5-й степени (21 член), очень точны. Результаты для случая, когда узлы в серединах сторон исключены перед проведением расчетов, не приведены, потому что они отличаются незначительно. Затраты на формулировку этих элементов вполне существенны, и вновь следует упомянуть, что «торговля» между затратами на построение элемента и размерами сетки, не представленная на рис. 12.9, должна учитываться при любых практических обстоятельствах.

12.3.3. Формулировки с использованием предполагаемых перемещений. Метод разбиения на подобласти

Работа [12.38] послужила толчком к построению матриц жесткости треугольных элементов для расчета изгиба пластин на базе метода разбиения на подобласти, в котором элемент разбивается на треугольные подэлементы. Эти авторы использовали неполный (девятичленный) кубический полином в каждом из трех подэлементов, выбирая систему координат в каждом подэлементе так, чтобы не возникли трудности из-за отсутствия геометрической изотропии, и в том виде, чтобы обеспечить квадратичный характер изменения

перемещений вдоль каждой стороны, которая станет внешней для всего элемента.

Улучшенный вариант этой формулировки подразумевает использование полного кубического полинома (10 членов) внутри каждой подобласти. Поэтому основных степеней свободы всего 30 и число их уменьшают до 12 — девять степеней свободы в вершинах и угловые смещения в середине каждой стороны — налагая условия

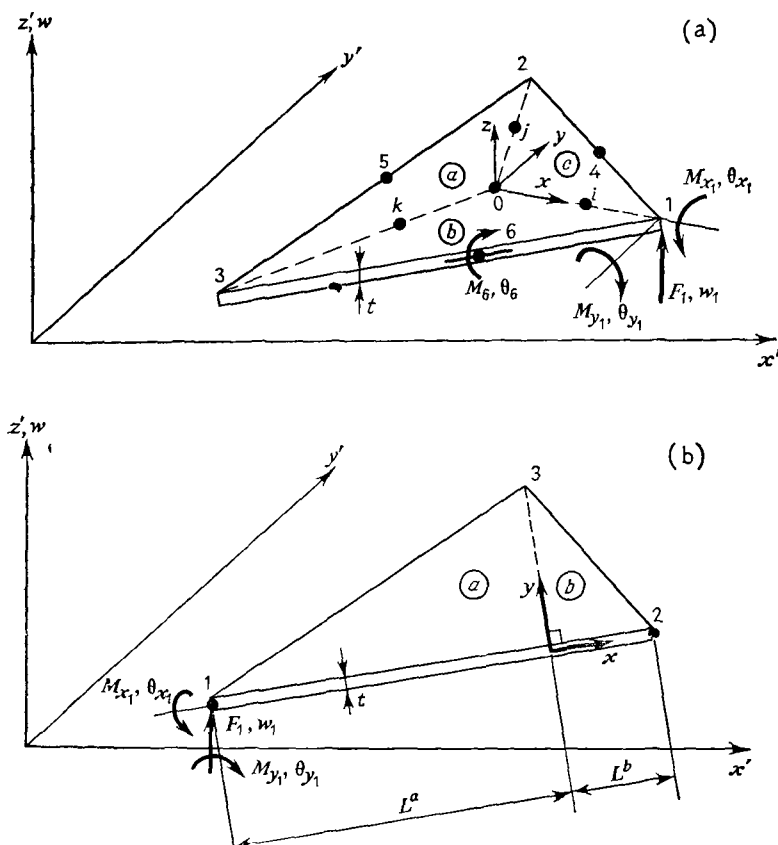


Рис. 12.10. Треугольные элементы — разбиение на подобласти: (а) треугольник с тремя подобластями; (б) треугольник с двумя подобластями.

непрерывности перемещений при переходе через границы подэлементов. Ниже эта формулировка описывается подробно.

Элемент изображен на рис. 12.10(а). Подобласти обозначены буквами a, b, c . Как указывалось ранее, предполагается, что внутри каждой подобласти прогиб описывается полным кубическим полиномом; имеем

$$\begin{aligned} w^a &= a_1 + a_2x + a_3y + \dots + a_{10}y^3 = \lfloor p(3) \rfloor \{a\}, \\ w^b &= b_1 + b_2x + b_3y + \dots + b_{10}y^3 = \lfloor p(3) \rfloor \{b\}, \\ w^c &= c_1 + c_2x + c_3y + \dots + c_{10}y^3 = \lfloor p(3) \rfloor \{c\}. \end{aligned} \quad (12.37)$$

Число (30) неизвестных параметров $\{a\}$, $\{b\}$ и $\{c\}$ сразу уменьшают до 24, используя шесть условий, связанных с согласованностью перемещений во внутреннем узле 0, т. е. $a_1=b_1=c_1$, $a_2=b_2=c_2$, $a_3=b_3=c_3$. Дальнейшая редукция с 24 до 12 степеней свободы осуществляется заданием условий непрерывности и равенства «внутренних» и «внешних» степеней свободы в вершинах (1, 2, 3), в серединах сторон (4, 5, 6) и в серединах внутренних границ (i, j, k).

Чтобы детально развить этот подход, определим следующие удобные обозначения для векторов смещений в узлах. В вершинах вектор перемещений $\lfloor w_{\theta_x \theta_y} \rfloor$ будем записывать в виде $\lfloor \Delta_i^g \rfloor$, где нижний индекс i обозначает узел ($i=1, 2, 3$), а верхним индексом g помечена подобласть ($g=a, b, c$), к которой принадлежит вершина. Например,

$$\begin{Bmatrix} w_i^a \\ \theta_{x,i}^a \\ \theta_{y,i}^a \end{Bmatrix} = \{\Delta_i^a\}.$$

Если вектор относится к перемещению в узле объединенного элемента (комбинации из трех элементов) или в точках на серединах сторон подэлементов ($i, j, k, 4, 5, 6$), то индексы опускаются. Соответствующие 24 уравнения совместности можно записать в виде

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1^c \\ \Delta_2^a \\ \Delta_3^b \\ \Delta_4^c \\ \Delta_5^c \\ \Delta_6^b \\ \Delta_1^c \\ \Delta_2^a \\ \Delta_3^b \\ \Delta_4^c \\ \Delta_5^c \\ \Delta_6^b \\ \Delta_1^c \\ \Delta_2^a \\ \Delta_3^b \\ \Delta_4^c \\ \Delta_5^c \\ \Delta_6^b \\ \Delta_1^c \\ \Delta_2^a \\ \Delta_3^b \\ \Delta_4^c \\ \Delta_5^c \\ \Delta_6^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_1^c \\ \Delta_2^a \\ \Delta_3^b \\ \Delta_4^c \\ \Delta_5^c \\ \Delta_6^b \\ \Delta_1^c \\ \Delta_2^a \\ \Delta_3^b \\ \Delta_4^c \\ \Delta_5^c \\ \Delta_6^b \\ \Delta_1^c \\ \Delta_2^a \\ \Delta_3^b \\ \Delta_4^c \\ \Delta_5^c \\ \Delta_6^b \\ \Delta_1^c \\ \Delta_2^a \\ \Delta_3^b \\ \Delta_4^c \\ \Delta_5^c \\ \Delta_6^b \end{Bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{Девять уравнений: равенство перемещений в вершинах для подэлементов и целого элемента} \\ \text{Три уравнения: равенство угловых смещений в серединах сторон 4, 5, 6 для подэлементов и целого элемента} \\ \text{Девять уравнений: равенство перемещений смежных подэлементов в вершинах} \\ \text{Три уравнения: равенство угловых перемещений во внутренних узлах } i, j, k \end{array} \right.$$

Определяя эти перемещения в узловых точках с помощью (12.37), имеем

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{B}_{aa}] & [\mathbf{B}_{ao}] \\ [\mathbf{B}_{oa}] & [\mathbf{B}_{oo}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{a}_a\} \\ \{\mathbf{a}_o\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\Delta\} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (12.38)$$

где уравнения разбиты на группы так, чтобы

$$\begin{aligned} \{\mathbf{a}_a\} &= \{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} b_7 b_8\}^T, \\ \{\mathbf{a}_o\} &= \{b_4 b_5 b_6 b_9 b_{10} c_4 c_5 c_6 c_7 c_8 c_9 c_{10}\}^T, \\ \{\Delta\} &= \{\omega_1 \theta_x \theta_y, \omega_2 \dots \theta_y, \theta_{n_4} \theta_{n_5} \theta_{n_6}\}^T, \end{aligned} \quad (12.39)$$

где θ_{n_4} , θ_{n_5} и θ_{n_6} — угловые смещения, нормальные к стороне элемента в точках 4, 5, 6. Используя процедуру конденсации (см. разд. 2.8), получим

$$[\hat{\mathbf{B}}_{aa}] \{\mathbf{a}_a\} = \{\Delta\}, \quad (12.40)$$

где

$$[\hat{\mathbf{B}}_{aa}] = [\Gamma]^T \begin{bmatrix} [\mathbf{B}_{aa}] & [\mathbf{B}_{ao}] \\ [\mathbf{B}_{oa}] & [\mathbf{B}_{oo}] \end{bmatrix} [\Gamma] \quad \text{и} \quad [\Gamma] = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{B}_{oo}^{-1} \mathbf{B}_{oa} \end{bmatrix}.$$

Наконец, решая (12.40), находим

$$\{\mathbf{a}_a\} = [\hat{\mathbf{B}}_{aa}]^{-1} \{\Delta\}, \quad \{\mathbf{a}_o\} = -[\mathbf{B}_{oo}^{-1}][\mathbf{B}_{oa}] [\hat{\mathbf{B}}_{aa}]^{-1} \{\Delta\}. \quad (12.41)$$

При построении матрицы жесткости для элемента сначала необходимо построить матрицу жесткости, выраженную в терминах полного набора параметров $[\mathbf{a}_a] [\mathbf{a}_o]$ (см. разд. 8.1), а затем с помощью (12.41) преобразовать полученную матрицу к соответствующим физическим координатам.

По-видимому, простейшей формулировкой в методе разбиения на подобласти для треугольных элементов является СРТ-элемент, реализованный в программе STRUDL-II [12.39]. Как изображено на рис. 12.10(b), этот элемент состоит из двух треугольников. Предполагается, что перемещения в областях a и b задаются кубическими разложениями. Чтобы обеспечить непрерывность нормальных производных вдоль стороны 1—2, для которой $\partial\omega/\partial n = \partial\omega/\partial y$, исключают члены, содержащие x^2y . (Если эти члены сохранить, то нормальная производная будет квадратичной функцией от x .) Кроме того, чтобы обеспечить непрерывность ω и нормальных производных $\partial\omega/\partial n = \partial\omega/\partial x$ на границе областей a и b , можно приравнять в соответствующих разложениях свободные члены и коэффициенты, стоящие перед линейными выражениями, содержащими величину y в произвольной степени. Так, для разложений в соответствующих областях имеем

$$\begin{aligned} \omega^a &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8xy^2 + a_9y^3, \\ \omega^b &= a_1 + a_2x + a_3y + b_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + b_7x^3 + a_8xy^2 + a_9y^3, \end{aligned} \quad (12.42)$$

где девять величин a_i — базисные коэффициенты, стоящие перед

слагаемыми в разложении для области a и перед теми же величинами в области b . Две величины (b_4, b_7) все же не связаны с разложением в области a . Чтобы установить связь между выписанными разложениями, зададим следующие два уравнения связи, обуславливающие линейный характер изменения нормальных производных вдоль сторон 1—3 и 2—3:

$$a_7 = \frac{1}{3} \left[2 - \left(\frac{y_3}{L^a} \right)^2 \right] a_8 - \frac{y_3}{L^a} a_9, \quad b_7 = \frac{1}{3} \left[2 - \left(\frac{y_3}{L^b} \right)^2 \right] a_8 + \frac{y_3}{L^b} a_9. \quad (12.43)$$

Подставив эти выражения в (12.42), выразим поле через 9 параметров. Здесь также основная матрица жесткости формулируется через эти параметры, и необходимое преобразование от этих параметров к узловым смещениям легко построить. Интересно отметить, что, хотя условие на непрерывность нормальных производных задается по всему периметру элемента, поперечные смещения разрывны при переходе через сторону 1—2.

12.3.4. Сравнение численных результатов. Метод разбиения на подобласти для треугольных элементов, основанных на предполагаемых полях перемещений

На рис. 12.11 приводится сравнение численных результатов для различных формулировок в методе разбиения на подобласти. Для грубых сеток использование при разбиении на подобласти формулировок с 10 степенями свободы в каждом подэлементе приводит к существенному увеличению точности полученных результатов по

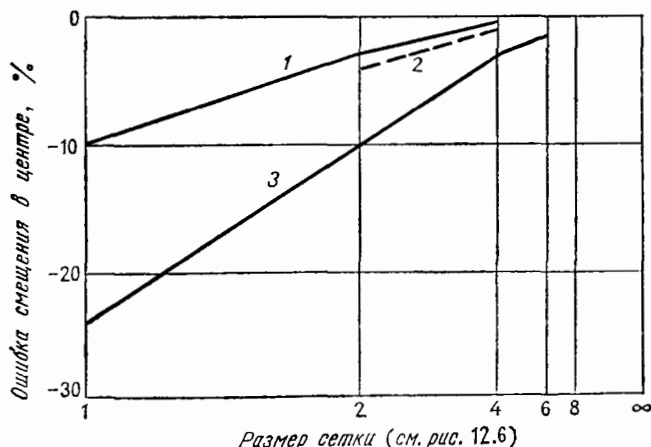


Рис. 12.11. Сравнение численных результатов — подобласти треугольных элементов. 1 — десятичный полином в подобласти; 2 — СРТ-элемент [12.39]; 3 — девятичный полином в подобласти [12.38].

сравнению с формулировкой с 9 степенями свободы, приходящими на подэлемент. Интересно отметить, что последняя формулировка приводит к матрице жесткости (и конечно, к численным результатам), совпадающей с полученной Бейзли и др. [12.25] для треугольного согласованного элемента с единственным полем (ср. с решением, приведенным на рис. 12.9). Применение СРТ-элементов обуславливает вполне приемлемую точность для рассматриваемого круга задач.

12.3.5. Формулировки в напряжениях

Если выражение для дополнительной энергии записывается в терминах функций напряжения Саусвелла Φ^u и Φ^v , как это сделано в разд. 12.1.3, то выбор представлений для этих функций напряжения аналогичен выбору полей перемещений u и v в случае плосконапряженного состояния. Поэтому для треугольного элемента, у которого степени свободы заданы в вершинах, функции напряжений можно аппроксимировать в виде [12.40]

$$\Phi^u = N_1 \Phi_1^u + N_2 \Phi_2^u + N_3 \Phi_3^u, \quad \Phi^v = N_1 \Phi_1^v + N_2 \Phi_2^v + N_3 \Phi_3^v, \quad (12.44)$$

где $N_1 = L_1$, $N_2 = L_2$, $N_3 = L_3$ и L_1 , L_2 , L_3 — треугольные координаты, введенные в гл. 8. Если же треугольный элемент задан с помощью степеней свободы в вершинах (обозначенных как точки 1, 2, 3)

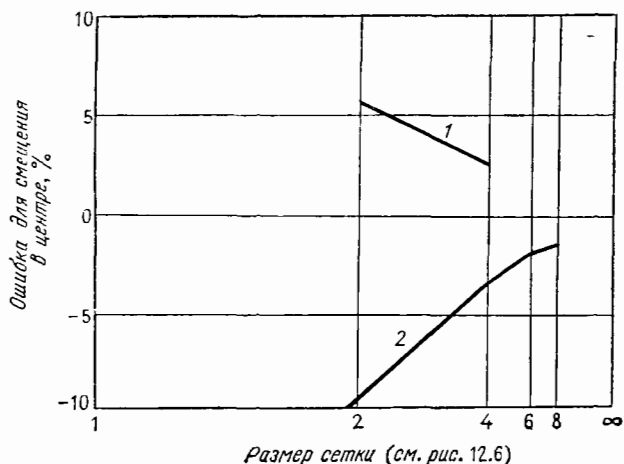


Рис. 12.12. Сравнение численных результатов: для треугольных элементов, основанных на уравновешенных полях напряжений, и треугольных элементов, основанных на совместимых полях перемещений. 1 — формулировка, базирующаяся на уравновешенных полях напряжений [12.40] (линейные поля функций напряжений); 2 — формулировка, основанная на совместимых полях перемещений [12.38] (девятичленный полином в подобласти).

и в серединах сторон (точки 4, 5, 6), то соответствующее разложение для Φ^u и Φ^v имеет вид [12.41]

$$\Phi^u = [N] \{\Phi\}, \quad \Phi^v = [N] \{\Phi^v\}, \quad (12.45)$$

где $[N] = [N_1 N_2 \dots N_n]$ с элементами, определенными в разд. 8.5,

$$\{\Phi^u\} = [\Phi_1^u \Phi_2^u \dots \Phi_6^u]^T, \quad \{\Phi^v\} = [\Phi_1^v \Phi_2^v \dots \Phi_6^v]^T.$$

Теперь, чтобы построить матрицу податливости элемента, необходимо выполнить операции, соответствующие (12.19) — (12.23).

Очевидные преимущества применения подхода к анализу изгиба пластин снижаются в значительной степени трудностью задания нагрузок. Следует напомнить, что интеграл по границе в выражении для дополнительной энергии зависит от задаваемых перемещений, которые обычно полагаются равными нулю. Граничные условия на нагруженной поверхности должны учитываться особым образом, обычно посредством наложения уравнений связи. Подсчет перемещений также представляет определенные трудности. Эти и некоторые другие аспекты практического использования данного подхода описаны в [12.23] и [12.40—12.42].

На рис. 12.12 даны результаты расчета свободно опертой квадратной пластины, в центре которой приложена сосредоточенная сила; расчет основан на линейных полях (12.44). Для сравнения приведены численные результаты для межэлементно согласованных формулировок для перемещений, полученных на базе метода разбиения на подобласти с использованием девятичленного полинома в каждой подобласти [12.38]. Результаты, как и следовало ожидать, подтверждают, что решения, полученные с помощью альтернативной формулировки, основанной на принципе минимума дополнительной энергии, сходятся к точному решению снизу и обеспечивают достаточную точность.

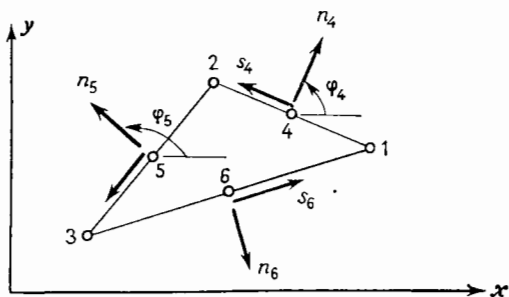


Рис. 12.13. Треугольный изгибаемый элемент для смешанной (Π_H) формулировки — линейное поле перемещений и постоянное поле моментов.

12.3.6. Смешанные поля перемещений и напряжений

Модифицированная форма вариационного принципа Рейсснера, заданная формулами (12.24)—(12.27), представляет характерную формулировку, основанную на смешанных полях перемещений и напряжений для изгибаемых пластинчатых элементов, и подробно описывается ниже для случая простейшего треугольного элемента (рис. 12.13). Предположим, что прогибы описываются линейным полем, а компоненты внутренних изгибающих моментов являются константами. Тогда

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_w \end{bmatrix} \{\mathbf{w}\},$$

где N_1, N_2, N_3 — функции формы, введенные в (12.44). Кроме того, $\mathfrak{M}_x = a_1, \mathfrak{M}_y = a_2, \mathfrak{M}_{xy} = a_3$, где a_1, a_2 и a_3 — константы. Чтобы выразить эти константы через физические параметры, определим нормальные изгибающие моменты M_4, M_5 и M_6 в серединах сторон. Оценив изгибающие моменты M_x, M_y, M_{xy} и разрешив относительно a_1, a_2, a_3 , получим соотношение (12.26) (т. е. $\mathfrak{M} = [\mathbf{N}_m] \{\mathbf{M}\}$), в котором

$$\mathfrak{M} = \begin{bmatrix} \mathfrak{M}_x & \mathfrak{M}_y & \mathfrak{M}_{xy} \end{bmatrix}^T, \quad \{\mathbf{M}\} = \begin{bmatrix} M_4 & M_5 & M_6 \end{bmatrix}^T,$$

$$[\mathbf{N}_m] = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi_4 & \sin^2 \varphi_4 & 2 \sin \varphi_4 \cos \varphi_4 \\ \cos^2 \varphi_5 & \sin^2 \varphi_5 & 2 \sin \varphi_5 \cos \varphi_5 \\ \cos^2 \varphi_6 & \sin^2 \varphi_6 & 2 \sin \varphi_6 \cos \varphi_6 \end{bmatrix}.$$

Углы $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ определяются согласно рис. 12.13. Необходимо также получить выражение для тангенциальных моментов $\mathfrak{M}_s = \begin{bmatrix} \mathfrak{M}_s & \mathfrak{M}_s & \mathfrak{M}_s \end{bmatrix}^T$ как функций от $\{\mathbf{M}\}$. Для этого можно сначала записать \mathfrak{M}_s как функцию от \mathfrak{M} в виде $\mathfrak{M}_s = [\Gamma_s] \mathfrak{M}$, где

$$[\Gamma_s] = \begin{bmatrix} -\sin \varphi_4 \cos \varphi_4 & \sin \varphi_4 \cos \varphi_4 & \cos 2\varphi_4 \\ -\sin \varphi_5 \cos \varphi_5 & \sin \varphi_5 \cos \varphi_5 & \cos 2\varphi_5 \\ -\sin \varphi_6 \cos \varphi_6 & \sin \varphi_6 \cos \varphi_6 & \cos 2\varphi_6 \end{bmatrix},$$

откуда следует, что $\mathfrak{M}_s = [\Gamma_s][\mathbf{N}_m]\{\mathbf{M}\} = [\mathbf{L}]\{\mathbf{M}\}$.

Как показывает соотношение (12.24b), дискретизованное выражение рассматриваемого функционала Π_H содержит матрицы $[\Omega_{12}] = [\Omega_{21}]^T$ и $[\Omega_{11}]$, которые в свою очередь построены с использованием матриц $[\mathbf{N}_M], [\mathbf{N}'_m], [\mathbf{N}_w], [\mathbf{N}'_w], [\mathbf{L}]$ и $[\mathbf{Y}]$, где штрихом обозначена операция дифференцирования базисных матриц $[\mathbf{N}_m]$ и $[\mathbf{N}_w]$ в соответствии с определением, данным в п. 12.1.4. Кроме того, матрица $[\mathbf{Y}]$ получается в результате аналогично определенных операций дифференцирования поля перемещений. Так как $[\mathbf{N}_m]$ — матрица, элементы которой являются константами, то $[\mathbf{N}'_m] = [0]$

и, согласно (12.24b), имеем

$$[\Omega_{11}] = \left[\int_A [N_M]^T [E_f]^{-1} [N_M] dA \right],$$

$$[\Omega_{12}] = [\Omega_{21}]^T = \left[- \int_{S_n} [L]^T [Y] dS \right].$$

Интересно отметить, что численные результаты, полученные с использованием изложенных выше формулировок, совпадают с ре-

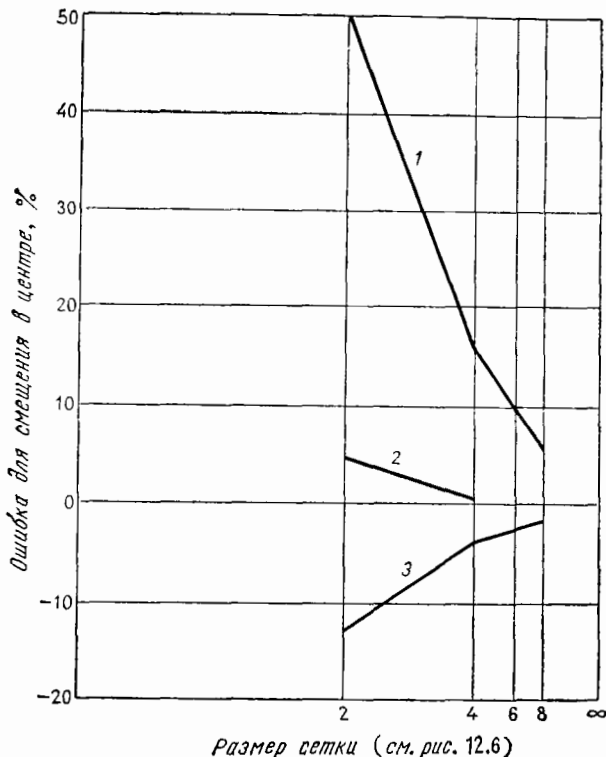


Рис. 12.14. Сравнение численных результатов: смешанные и гибридные треугольные элементы. 1 — смешанная формулировка [12.6], линейное ω , постоянный M ; 2 — смешанная формулировка [12.45], квадратичное ω , линейный M ; 3 — гибридная формулировка для предполагаемых полей напряжений [12.48], линейное ω , постоянный M .

зультатами, полученными с использованием матрицы жесткости, построенной на основе полного квадратичного поля перемещений [12.27] (см. рис. 12.8(b) и уравнение (12.33) из п. 12.3.1). Это можно было предвидеть, рассматривая совокупность степеней свободы,

так как схема, изображенная на рис. 12.13, совпадает с приведенной на рис. 12.8(b), поскольку нормальные изгибающие моменты (M_4, M_5, M_6) в первой схеме соответствуют угловым смещениям ($\theta_4, \theta_5, \theta_6$) в последней. Тожественность можно доказать, проводя алгебраические выкладки. Для полностью внутреннего элемента (окруженного элементами того же типа) $\{\Delta\}=0$. Поэтому, как и в разд. 6.7, выражая из верхней части уравнения (12.27) $\{\mathbf{M}\}$ через $\{\Delta\}$ и подставляя в нижнюю часть этого уравнения, получим $[\mathbf{k}]\{\Delta\} = \{\bar{\mathbf{M}}\}$, где

$$[\mathbf{k}] = [\Omega_{12}]^T [\Omega_{11}]^{-1} [\Omega_{12}].$$

Детальное изучение соответствия этих двух формулировок можно найти в [12.43] и [12.44].

Можно, разумеется, использовать представления более высокого порядка как для полей изгибающих моментов, так и для полей перемещений. Логическим обобщением [12.45] является выбор линейно распределенных моментов и квадратично изменяющихся перемещений. Широкий диапазон альтернативных полей изгибающих моментов и перемещений можно найти в [12.22].

Гибридные схемы приводят к совершенно другому классу смешанных формулировок в напряжениях и перемещениях для треугольных изгибаемых элементов. Как и при расчете задач растяжения пластин, гибридный подход в напряжениях, описанный в разд. 6.6, применяется наиболее часто. В работах [12.43] и [12.46—12.48] довольно интенсивно исследуются различные комбинации внутренних изгибающих моментов и граничных полей перемещений.

На рис. 12.14 приведены численные результаты для различных типов смешанных формулировок. P_N -формулировка, основанная на рассмотрении постоянных моментов и линейно изменяющихся перемещений, как уже было отмечено, приводит к результатам, идентичным тем, которые уже были представлены на рис. 12.9 для жесткостной формулировки с шестичленным (квадратичным) полиномом. Смешанная формулировка, основанная на представлении более высокого порядка [12.45] (линейно изменяющиеся моменты, квадратичные перемещения), существенно повышает точность решения. Заметим, однако, что в этом случае для каждого элемента требуется вдвое больше узлов (шесть, а не три). Этот факт не нашел отражения на горизонтальной оси рис. 12.14. Наконец, как видно из графика, гибридная формулировка в напряжениях [12.48] с полями, сравнимыми с используемыми в простейшей P_N -формулировке, приводит к решениям, лежащим по другую сторону от точного решения и намного более точным для заданного размера разбиения. Тем не менее приходится вновь предупредить, что при определении относительных преимуществ той или иной формулировки необходимо учитывать много других факторов.

12.4. Прогибы, вызванные поперечным сдвигом

Построение матрицы жесткости элемента для изгибаемых стержня или пластины с учетом деформаций сдвига не может быть осуществлено в явном виде посредством подстановки поля поперечных перемещений (15.14а) в суммарное выражение энергий изгиба и сдвиговых деформаций. Как уже отмечалось [12.49], требование, что при изгибе балок плоские сечения остаются плоскими, приводит к внутреннему ограничению, исключающему деформации сдвига. Когда это ограничение снято, то появляются сдвиговые деформации, обуславливающие дополнительный вклад во внутреннюю энергию, и для того чтобы сохранилось равенство величин внутренней энергии и работы внешних сил, необходимо такое же увеличение работы внешних сил. Таким образом, узловые силы соответствуют возросшим значениям перемещений, и так как коэффициент жесткости определяется по единичному смещению, то значение силы, вызывающее единичное смещение при допущении сдвиговых деформаций, должно уменьшиться.

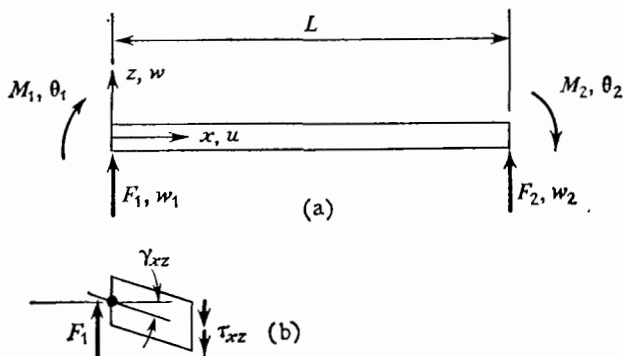


Рис. 12.15. Элемент, подверженный изгибным и поперечным сдвиговым деформациям. (а) Узловые силы и перемещения в элементе; (б) характер поперечных сдвиговых деформаций.

Рассмотрим, например, элемент, изображенный на рис. 12.15. Предполагается, что сдвиговое напряжение τ_{xz} существенно постоянно на части площади, обозначенной символом A_s , и пренебрежимо мало на всех остальных участках (случай балки с широкими фланцами; для других видов поперечного сечения значение площади необходимо помножить на соответствующую константу). Выпучивание из плоскости не рассматривается. Тогда, согласно закону Гука, имеем (рис. 12.15(б)) $\gamma_{xz} = F_1/A_s G$. Кроме того, из теории балок $F_1 = EI (d^3w/dx^3)$, поэтому

$$\gamma_{xz} = \frac{EI}{A_s G} \left(\frac{d^3w}{dx^3} \right).$$

Вклад деформаций сдвига в энергию деформации равен

$$\frac{1}{2} \int_0^L (\gamma_{xz})^2 A_s G dx.$$

Поэтому с учетом выражения для сдвиговой деформации γ_{xy} полная энергия деформации запишется в виде

$$U = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 EI dx + \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \frac{(EI)^2}{A_s G} dx.$$

Теперь, если поперечное смещение w описывается обычным образом с помощью кубического полинома (см. (5.14a)), то можно записать данный интеграл для энергии деформации в дискретном виде и, минимизируя энергию деформации, получить матрицу жесткости элемента. Типичный член этой матрицы k_{11} , который связывает F_{z1} и w_1 , имеет вид

$$k_{11} = \frac{12EI}{L^3} + \frac{144(EI)^2}{A_s GL^6}.$$

Это выражение, вообще говоря, некорректно по причинам, высказанным ранее.

Простой подход к формулировке корректной матрицы жесткости элемента [12.50] состоит в том, что сначала строят матрицу податливости, учитывающую сдвиговые деформации. Так, если элемент консольно закреплен в точке 2, то смещение в точке 1, вызванное одним лишь сдвигом, равно (с $G=E/2(1+\mu)$)

$$\gamma_{xz} L = \frac{2(1+\mu) F_1 L}{A_s E},$$

и полные уравнения податливости имеют вид

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{3EI} + \frac{2(1+\mu)L}{A_s E} & \frac{L^2}{2EI} \\ \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \end{Bmatrix}.$$

Применяя методику, описанную в разд. 2.6, на основе этих уравнений строят матрицу жесткости. Тогда корректное выражение для коэффициента жесткости имеет вид

$$k_{11} = \frac{12EI}{L^3} \frac{1}{[(1+12(1+\mu)L)/A_s L^2]}.$$

Из сказанного можно сделать общий вывод, что учитывать эффекты, связанные с деформацией сдвига для балочных, пластинчатых и оболочечных элементов, можно тогда, когда они формулируются непосредственно в терминах соотношений податливости (подход на основе принципа минимума дополнительной работы)

или в виде смешанных соотношений, получаемых из функционалов, в которые входит дополнительная энергия деформации (например, из функционала Рейсснера (12.24)).

Ранее подчеркивалось, что на практике в основном используют подходы, основанные на принципе минимума потенциальной энергии (предполагаемые перемещения). Имеется все же возможность использовать эти подходы при формулировке уравнений жесткости с учетом поперечных сдвиговых деформаций для балок, пластин и оболочек путем простой аппроксимации, в которой суммируются результаты, полученные по отдельности при анализе чистого изгиба и чистого сдвига. Чтобы описать этот подход, изучим элемент 1—2, изображенный на рис. 12.16, являющийся частью всей балочной конструкции. Из рисунка видно, что поперечная сдвиговая деформация равна $\gamma_{xz} = (w_2^s - w_1^s)/L$, где верхним индексом s отмечено, что соответствующие перемещения обусловлены лишь деформациями сдвига. Кроме того, так как $\gamma_{xz} = 2(1+\mu)F_1/A_s E$, то

$$F_1 = \frac{A_s E}{2(1+\mu)L} (w_2^s - w_1^s).$$

Это — уравнение жесткости для элемента. Аналогично можно построить уравнение жесткости для оставшейся поперечной перерезывающей силы F_2 . Объединяя эти уравнения жесткости обычным

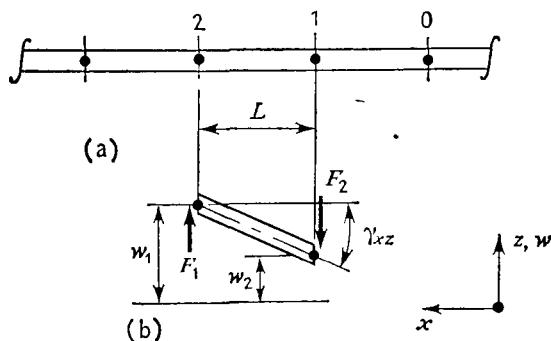


Рис. 12.16. Смещение в виде чистого сдвига для балочного элемента. (а) Целая балка; (б) характер смещения для элемента 1—2.

способом, принятым в прямом жесткостном анализе, можно построить глобальные уравнения жесткости для перерезывающих сил. Обозначим их через

$$\{P\} = [k^s] \{\Delta^s\}. \quad (12.46)$$

Разрешая эти уравнения, получим

$$\{\Delta^s\} = [k^s]^{-1} \{P\}. \quad (12.47)$$

Обозначая глобальную матрицу жесткости, соответствующую численному изгибу через $[k']$, а соответствующие перемещения — через $\{\Delta'\}$, также получим

$$\{\Delta'\} = [k']^{-1} \{P\}. \quad (12.48)$$

Аппроксимация полных перемещений представляется в виде суммы сдвиговых и изгибных перемещений:

$$\{\Delta\} = \{\Delta^s\} + \{\Delta'\}. \quad (12.49)$$

Чтобы применить выписанную выше схему для пластин или изгибаемых оболочечных конструкций, необходимо аналитически представить конструкцию в виде системы фиктивных балочных элементов с учетом сдвиговых деформаций. Если эта аппроксимация неадекватна, то можно использовать теорию пластин, которая учитывает поперечные деформации сдвига. Существует ряд таких теорий [12.51—12.53], и большинство из них использовалось в конечно-элементном анализе [12.54—12.57]. Однако, вероятно, что если упрощенный подход неадекватен, то и теории пластин, учитывающие деформации поперечного сдвига, будут также неадекватными. В этом случае имеет смысл применить трехмерный анализ и пространственные элементы. Мы снова вернемся к рассмотрению этого вопроса в разд. 12.6.

12.5. Исключение ограничения на деформации поперечного сдвига (дискретная процедура, основанная на гипотезе Кирхгофа) [12.58]

Как отмечалось, исключение деформаций поперечного сдвига при анализе изгибаемых балок и пластин осуществляется введением условия, соответствующего гипотезе Кирхгофа. Можно построить выражение для энергии деформации, не привлекая этого предположения. В этом случае можно добавить выражение для энергии сдвиговых деформаций и использовать полученное таким образом выражение для энергии при формулировке матрицы жесткости элемента.

Чтобы проиллюстрировать эту методику, вновь рассмотрим балочный элемент. Хотя условие, заключающееся в равенстве углового смещения θ наклону (отрицательному) нейтральной оси, исключено, условие, что плоское в недеформированном состоянии сечение остается плоским и после деформации, сохраняется. Таким образом, основной величиной, описывающей деформацию изгиба, является угол θ , причем кривизна $\kappa = d\theta/dx$.

Полный наклон нейтральной оси dw/dx в этом случае обусловлен двумя факторами: угловым смещением и наклоном, вызванным деформацией сдвига. Сохраняя упрощающие предположения о дей-

ствии перерезывающих сил лишь на площади A_s и соответствующем ему состоянию однородного сдвига γ_{xz} , получим $-dw/dx = \theta + \gamma_{xz}$, или

$$-\gamma_{xz} = \theta + dw/dx. \quad (12.50)$$

Имея в виду эти условия, можно написать следующее выражение для энергии деформации:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 EI dx + \frac{1}{2} \int_0^L \left(\theta + \frac{dw}{dx} \right)^2 A_s G dx. \quad (12.51)$$

Энергия деформации определяется теперь двумя независимыми величинами θ и w . Поэтому выпишем выражение для энергии в дискретном виде, выбирая два независимых поля:

$$w = [N_w] \{w\}, \quad \theta = [N_\theta] \{\theta\}, \quad (12.52)$$

где $[N_w]$ и $[N_\theta]$ — соответствующие векторы функции формы, а $\{w\}$ и $\{\theta\}$ — соответствующие степени свободы. Подставляя данные выражения в (12.51), получим

$$U = \frac{[\theta]}{2} [k_f] \{\theta\} + \frac{[\theta]}{2} [k^{S_1}] \{\theta\} + [\theta] [k^{S_2}] \{w\} + \frac{[w]}{2} [k^{S_3}] \{w\}, \quad (12.53)$$

где

$$\begin{aligned} [k_f] &= \int_0^L \{N_\theta\} [N_\theta'] EI dx, & [k^{S_1}] &= \int_0^L \{N_\theta\} [N_\theta] A_s G dx, \\ [k^{S_2}] &= \int_0^L \{N_\theta\} [N_w'] A_s G dx, & [k^{S_3}] &= \int_0^L \{N_w'\} [N_w'] A_s G dx, \end{aligned}$$

или

$$U = \frac{[\Delta]}{2} [k] \{\Delta\}, \quad (12.53a)$$

где

$$[\Delta] = [[\theta] [w]], \quad [k] = \begin{bmatrix} k_f + k^{S_1} & k^{S_2} \\ k^{S_2 T} & k^{S_3} \end{bmatrix}.$$

Важно помнить, что выписанные выше выражения для энергии содержат лишь первые производные от независимых переменных. Это означает, что выбранные функции не обязательно должны удовлетворять условию непрерывности наклона при переходе через границы элемента. Это обуславливает подход к анализу изгиба тонких пластин, в котором в качестве основной переменной используется угловое смещение. При этом энергия сдвиговой деформации, определяемая соответствующими членами в выражении энергии, мала и не оказывает существенного влияния при вычислении прогибов.

К сожалению, этот подход не эффективен из-за того, что получаемая матрица плохо обусловлена при стремлении величины энергии сдвиговой деформации к нулю и вырождена, когда энергия равна нулю. Так как это обстоятельство возникает из-за того, что аналитическая модель неустойчива при наличии независимых параметров перемещений $\lfloor \theta \rfloor$ и $\lfloor w \rfloor$, можно восстановить устойчивость, связывая эти степени свободы в дискретных точках согласно гипотезе Кирхгофа. Так, при $\gamma_{xy}=0$ из уравнения (12.50) следует $\theta = -dw/dx$. Так как θ и w записаны в дискретном виде, то на основе этого условия можно выписать уравнения связи для узловых параметров $\lfloor \lfloor \theta \rfloor \lfloor w \rfloor \rfloor$.

Применение методики, основанной на дискретной формулировке и учете гипотезы Кирхгофа, отчетливо иллюстрируется на примере, изображенном на рис. 12.17 [12.54]. На свободный конец консольной балки, разбитой на два сегмента, действует сила P_3 . Выберем следующие поля перемещений в элементе A :

$$\theta = (1-\xi)\theta_1 + \xi\theta_2, \quad w = (1-\xi)w_1 + \xi w_2,$$

где ξ — значение безразмерной осевой координаты вдоль элемента ($\xi = x/L$). Для элемента B выбираются аналогичные линейные поля.

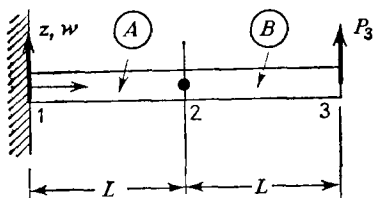


Рис. 12.17

Заметим, что описание параметров w и θ является приближенным. Если пренебречь сдвигом, из (12.51) получим следующее выражение для энергии деформации:

$$U = \frac{EI}{2L} \lfloor \theta_2 \theta_3 w_2 w_3 \rfloor \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix}.$$

Теперь, чтобы выписать условия связи между θ и w , потребуем, чтобы деформация сдвига γ_{xz} равнялась нулю в центре каждого элемента, т. е. $dw/dx + \theta = 0$ в центре каждого элемента. Так как θ изменяется линейно между концевыми точками i и j , то значение θ в середине элемента равно $(\theta_i + \theta_j)/2$; поэтому

$$\frac{w_2}{L} + \frac{\theta_2}{2} = 0,$$

$$\frac{w_3 - w_2}{L} + \frac{\theta_3 + \theta_2}{2} = 0.$$

Разрешая эту систему относительно θ_2 и θ_3 , находим

$$\theta_2 = -\frac{2}{L} \omega_2, \quad \theta_3 = -\frac{2\omega_3}{L} + \frac{4\omega_2}{L},$$

и после подстановки в U можно получить уравнения жесткости

$$\begin{Bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \frac{4EI}{L^3} \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix}.$$

Решая эти уравнения при $P_2=0$, $P_3=P$, находим $\omega_3=10PL^3/(4EI)$. Это значение близко к точному решению $8PL^3/(3EI)$. Ошибка обусловлена тем, что ω и θ аппроксимировались линейными функциями.

В общей конечно-элементной формулировке ограничения включаются более элегантно: либо при помощи метода матричного преобразования из разд. 3.5, либо при помощи метода множителей Лагранжа из разд. 7.3.

Дискретный подход с учетом гипотезы Кирхгофа эффективно использовался при решении задач изгиба пластин [12.60, 12.61], осесимметричных оболочек [12.59] и тонких оболочек общего вида [12.58].

12.6. Эффективность применения трехмерных конечных элементов

В разд. 9.3 показано, что плоско-напряженные двумерные элементы можно приспособить для эффективного представления изгиба пластин, добавляя к базисному линейному полю перемеще-

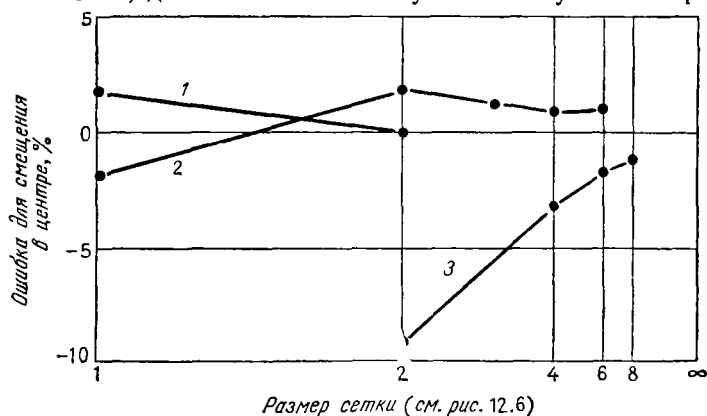


Рис. 12.18. Сравнение численных результатов для шестиугольных сплошных элементов и треугольных пластинчатых элементов, основанных на согласованных перемещениях. 1 — редуцированное численное интегрирование энергии деформации сдвига — двадцатиузловой шестигранник [12.62]; 2 — восьмиузловой шестигранник с квадратичными модами [12.48]; 3 — согласованные перемещения [12.38] (девятичленный полином в подобласти).

ний квадратичные моды перемещения. Анализ пластин и оболочек можно осуществить аналогичным образом, добавив квадратичные моды к шестигранному элементу, построенному на базе линейных полей перемещений. Эта методика обсуждалась в гл. 10. Кроме того, если при построении матриц жесткости элементов применяется численное интегрирование, то можно использовать подход, в котором, как изложено в гл. 9 и 10, осуществляется редуцированное интегрирование сдвиговой составляющей энергии деформации.

На рис. 12.18 представлены результаты, характеризующие эффективность данного подхода при анализе задачи, выбранной в данной главе в качестве тестовой для сравнения. Чтобы проиллюстрировать методикку дополнения восьмиузлового шестигранного элемента с линейным полем перемещений квадратичными модами перемещений, приведем результаты, опубликованные в работе [12.48]. Результаты, полученные на основе редуцированного интегрирования энергии сдвиговых деформаций для двадцатиузлового шестигранного элемента, который изображен на рис. 10.10, сообщены в [12.62]. Для сравнения приводятся результаты расчетов тонкой пластины с использованием треугольных изгибных элементов, построение матрицы жесткости которых опирается на описанный в п. 12.3.3 прием разбиения на подэлементы. (Следует заметить, что для учета различий в построении элементов для приводимых на рисунке результатов использовался измененный масштаб. Чтобы выяснить истинные значения и применяемые при этом сетки разбиения, следует обратиться к цитируемым ниже работам.) Из рис. 12.18 следует, что при использовании модифицированного трехмерного элемента получаются достаточно точные результаты. Использование формулировок на базе восьмиузлового шестигранного элемента с дополнительными квадратичными модами приводит, по-видимому, к значениям, отличающимся в пределе приблизительно на 1.5% от точного решения. По-видимому, это обусловлено влиянием эффектов, вытекающих из того, что при построении элемента толщина конечна.

12.7. Заключительные замечания

Сама суть конечно-элементного представления изгиба пластин приводит к тому, что достоверные и точные результаты можно получить для моделей, построенных на базе предполагаемых перемещений (на основе принципа минимума потенциальной энергии). Однако выдвигаемым при этом требованиям к решениям трудно удовлетворить, что приводит к большому объему алгебраических операций при построении базисных коэффициентов матрицы жесткости. Поэтому проявляется значительный интерес к формулировкам изгибных элементов для пластин, основанным на использовании других

вариационных принципов с менее жесткими требованиями к предполагаемым функциям. При этом получаются формулировки, приводящие к достоверным и точным результатам, однако возможные области применимости этих формулировок еще далеко не выявлены.

Для задач изгиба пластин еще не выяснены вопросы, касающиеся нахождения компромисса между затратами на формулировку элемента, которые обычно растут с усложнением поведения и геометрии элемента, и глобальным анализом, объем которого уменьшается с ростом затрат на построение элемента. Правильное сравнение этих альтернатив должно включать не только вычислительные затраты, необходимые для достижения требуемого уровня точности решения, но и отражать амортизационные затраты на разработку связанного с ними математического обеспечения.

По-видимому, имея в распоряжении конечно-элементные формулировки как для растягиваемых, так и для изгибаемых пластин, можно путем простой суперпозиции элементов двух типов проводить анализ изгибаемых и растягиваемых тонких оболочечных структур. Это действительно так, хотя при построении глобального представления (см. п. 3.5.3) и при интерпретации величин, входящих в решение, необходимо проявлять определенную осторожность. Большое число исследователей при проведении указанных расчетов отдает предпочтение изогнутым тонким оболочечным элементам, чтобы исключить недостатки, присущие плоским элементам. Однако в этом случае возникает много новых вопросов, связанных с адекватным выбором уравнений теории оболочек, заданием геометрических характеристик, выбором функций перемещений и другими факторами. Обсуждение вопросов применения плоских или искривленных элементов при анализе тонких оболочек не входит в задачу данной книги. Интересующийся этими вопросами читатель может обратиться к работе [12.1].

Литература

- 12.1. Gallagher R. H. Analysis of Plate and Shell Structures.—Proc. of Conf. on Application of Finite Element Method in Civil Eng., Vanderbilt Univ., Nashville, Tenn., 1969, p. 155—206.
- 12.2. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. Theory of Plates and Shells, 2nd ed.—New York, N.Y.: McGraw-Hill Book Co., 1969. [Имеется перевод: Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки.— М.: Наука, 1966, 635 с.]
- 12.3. Mansfield E. H. The Bending and Stretching of Plates.—Oxford, England: Pergamon Press, 1964.
- 12.4. Marguerre K., Woernle H. T. Elastic Plates.—Waltham, Mass.: Blaisdell Pub. Co., 1969.
- 12.5. Southwell R. V. On the Analogues Relating Flexure and Extension of Flat Plates.—Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1950, 3, p. 257—270.
- 12.6. Herrmann L. R. Finite Element Bending Analysis of Plates.—J. Eng. Mech. Div., ASCE, 1967, 93, No. EM-5, p. 13—25.

- 12.7. Herrmann L. R. A Bending Analysis for Plates.—Proc. (First) Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech.—AFFDL TR 66-80, Oct. 1965, p. 577—604.
- 12.8. Bogner F. K., Fox R. L., Schmit L. A. The Generation of Interement, Compatible Stiffness and Mass Matrices by the Use of Interpolation Formulas.—Proc. (First) Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech.—AFFDL TR 66-80, Nov. 1965.
- 12.9. Dawe D. J. A Finite Element Approach to Plate Vibration Problems.—J. Mech. Eng. Sci., 1965, 7, p. 28—32.
- 12.10. Gopalacharyulu S. A Higher Order Conforming Rectangular Element.—Int. J. Num. Meth. Eng., 1973, 6, No. 2, p. 305—308.
- 12.11. Irons B. (Comment on Ref. [12.10]).—Int. J. Num. Meth. Eng., 1973, 6, No. 2, p. 308—309.
- 12.12. Wegmuller A., Kostem C. Finite Element Analysis of Plate and Eccentrically Stiffened Plates.—Fritz Eng. Lab. Report No. 378A. 3, Lehigh Univ., Bethlehem, Pa., Feb. 1973.
- 12.13. Walz J. E., Fulton R. E., Cyrus N. J. Accuracy and Convergence of Finite Element Approximations.—Proc. of 2nd Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech.—AFFDL TR 68-150, Oct. 1968, p. 995—1027.
- 12.14. Fraeijs de Veubeke B. A Conforming Finite Element for Plate Bending.—Int. J. Solids and Struct., 1968, 4, No. 1, p. 95—108.
- 12.15. Clough R., Felippa C. A Refined Quadrilateral Element for the Analysis of Plate Bending.—Proc. of 2nd Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech.—AFFDL TR 68-50, Oct. 1968, p. 399—440.
- 12.16. Greene B. E., Jones R. E., McLay R. W., Strome D. Generalized Variational Principles in the Finite-Element Method.—AIAA J., July 1969, 7, 1254—1260. [Имеется перевод: Ракетная техн. и космон.—М.: Мир, 1969, № 7.]
- 12.17. Kikuchi F., Ando Y. Some Finite Element Solutions for Plate Bending Problems by Simplified Hybrid Displacement Method.—Nuc. Eng. Design, 1972, 23, p. 155—178.
- 12.18. Pan T. H. H. Element Stiffness Matrices for Boundary Compatibility and for Prescribed Boundary Stresses.—Proc. (First) Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech.—Wright-Patterson AFB, Ohio, AFFDL TR 65-80, Oct. 1965, p. 457—478.
- 12.19. Severn R., Taylor P. The Finite Element Method for Flexure of Slabs when Stress Distributions are Assumed.—Proc. Inst. Civil Eng., 1966, 34, p. 153—163.
- 12.20. Allwood R., Cornes G. A Polygonal Finite Element for Plate Bending Problems using the Assumed Stress Approach.—Int. J. Num. Meth. Eng., 1969, 1, No. 22, p. 135—149.
- 12.21. Cook R. D. Two Hybrid Elements for the Analysis of Thick, Thin, and Sandwich Plates.—Int. J. Num. Meth. Eng., 1972, 5, No. 2, p. 277—288.
- 12.22. Bron J., Dhatt G. Mixed Quadrilateral Elements for Bending.—AIAA J., Oct. 1972, 10, No. 10, p. 1359—1361.
- 12.23. Fraeijs de Veubeke B., Sander G., Beckers P. Dual Analysis by Finite Elements: Linear and Non Linear Applications.—AFFDL TR 72-93, Dec. 1972.
- 12.24. Abel J., Desai C. Comparison of Finite Elements for Plate Bending.—Proc. ASCE, J. Struct. Div., Sept. 1972, 98, No. ST9, p. 2143—2148.
- 12.25. Bazeley G., Cheung Y., Irons B., Zienkiewicz O. Triangular Elements in Plate Bending—Conforming and Non-Conforming Solutions.—Proc. of (First) Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech.—AFFDL TR 66-80, Oct. 1965, p. 547—576.
- 12.26. Razzaque A. Q. Program for Triangular Elements with Derivative Smoothing.—Int. J. Num. Meth. Eng., 1973, 6, No. 3, p. 333—344.
- 12.27. Morley L. S. D. The Constant-Moment Plate Bending Element.—J. Strain Analysis, 1971, 6, No. 1, p. 20—24.
- 12.28. Harvey J. W., Kelsey S. Triangular Plate Bending Elements with Enforced Compatibility.—AIAA J., 1971, 9, p. 1023—1026.

- 12.29. Anderheggen E. A Conforming Finite Element Plate Bending Solution.—*Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1970, 2, No. 2, p. 259—264.
- 12.30. Chu T. C., Schnobrich W. C. Finite Element Analysis of Translational Shells.—*Comp. Struct.*, 1972, 2, p. 197—222.
- 12.31. Irons B. A Conforming Quartic Triangular Element for Plate Bending.—*Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1969, 1, No. 1, p. 29—46.
- 12.32. Argyris J. H., Friedl I., Scharpf D. The TUBA Family of Plate Elements for the Matrix Displacement Method.—*Aero. J.*, 1968, 72, p. 701—709.
- 12.33. Bell K. A Refined Triangular Plate Bending Finite Element.—*Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1969, 1, No. 1, p. 101—122.
- 12.34. Cowper G. R., Kosko E., Lindberg G., Olson M. Static and Dynamic Applications of a High Precision Triangular Plate Bending Element.—*AIAA J.*, 1969, 7, No. 10, p. 1957—1965. [Имеется перевод: Ракетная техн. и космон.— М.: Мир, 1969, № 10.]
- 12.35. Butlin G., Ford R. A Compatible Triangular Plate Bending Finite Element.—*Int. J. Solids and Structures.*, 1970, 6, p. 323—332.
- 12.36. Zenisek A. Interpolation Polynomials on the Triangle.—*Num. Math.* 1970, 15, p. 283—296.
- 12.37. Svec O. J., Gladwell G. A Triangular Plate Bending Element for Contact Problems.—*Int. J. Solids and Structures*, 1973, 9, p. 435—446.
- 12.38. Clough R. W., Tocher J. Finite Element Stiffness Matrices for the Analysis of Plate Bending.—*Proc. (First) Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech.*—AFFDL TR 66-80, 1965, p. 515—546.
- 12.39. Connor J., Will G. A Triangular Flat Plate Bending Element.—TR 68-3, Dept. of Civil Engineering, M. I. T., Cambridge, Mass., 1968.
- 12.40. Elias Z. M. Duality in Finite Element Methods.—*Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div.*, 1968, 94, No. EM 4, p. 931—946.
- 12.41. Morley L. S. D. A Triangular Equilibrium Element with Linearly Varying Bending Moments for Plate Bending Problems.—*J. Roy. Aero. Soc.*, 1967, 71, p. 715—721.
- 12.42. Morley L. S. D. The Triangular Equilibrium Element in the Solution of Plate Bending Problems.—*Aero. Quart.*, 1968, 19, 4, p. 149—169.
- 12.43. Allman D. Triangular Plate Element for Plate Bending with Constant and Linearly Varying Bending Moments.—*High Speed Computing of Elastic Structures*, 1971, 1, Univ. of Liege, Belgium, p. 105—136.
- 12.44. Hellan K. On the Unity of Constant Strain-Constant Moment Finite Elements.—*Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1973, 6, No. 2, p. 191—209.
- 12.45. Visser W. A Refined Mixed-Type Plate Bending Element.—*AIAA J.*, 1969, 7, No. 9, p. 1801—1802. [Имеется перевод: Ракетная техн. и космон.— М.: Мир, 1969, № 9.]
- 12.46. Dungar R., Severn R. T., Taylor P. Vibration of Plate and Shell Structures Using Triangular Finite Elements.—*J. Strain Analysis*, 1967, 2, No. 1, p. 73—83.
- 12.47. Dungar R., Severn R. T. Triangular Finite Elements of Variable Thickness and their Application to Plate and Shell Problems.—*J. Strain Analysis*, 1969, 4, No. 1, p. 10—21.
- 12.48. Cook R. D. Some Elements for Analysis of Plate Bending.—*Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div.*, 1972, 98, No. EM6, p. 1452—1470.
- 12.49. Severn R. T. Inclusion of Shear Deflection in the Stiffness Matrix for a Beam Element.—*J. Strain Analysis*, 1970, 5, No. 4, p. 239—241.
- 12.50. Williams D. An Introduction to the Theory of Aircraft Structures.—London: E. Arnold Pub., 1960.
- 12.51. Love A. E. H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 4th ed.—New York, N. Y.: Dover Pub., Inc., 1927. [Имеется перевод: Ляв А. Математическая теория упругости.— М.: ОНТИ, 1935.]

- 12.52 Mindlin R. D. Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates — J Appl Mech, 1951, 18, p 31—38.
- 12.53 Reissner E. The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates — J Appl Mech, 1945, 12, p A 69—A 77
- 12.54 Smith I. A Finite Element Analysis for 'Moderately Thick' Rectangular Plates in Bending — Int J Mech Sci, 1968, 10, p 563—570
- 12.55 Greimann I. F., Lynn P. P. Finite Element Analysis of Plate Bending with Transverse Shear Deformation — Nuc Eng Desigh, 1970, 14, p 223—230
- 12.56 Pryor C. W., Barker R. M. A Finite Element Analysis Including Transverse Shear Effects for Laminated Plates. — AIAA J., 1971, 9, No 5 p 912—917
- 12.57 Pryor C. W., Barker R. M., Frederick D. Finite Element Bending Analysis of Reissner Plates — Proc ASCE, J Eng Mech Div, 1970, 96, No EM6, p 967—983
- 12.58 Wempner G., Oden J. T., Kross D. Finite-Element Analysis of Thin Shells — Proc ASCE, J Eng Mech Div, 1968, 94, No EM6, p 1273—1294
- 12.59 Weeks G. A. A Finite Element Model for Shells Based on the Discrete Kirchhoff Hypothesis — Int J. Num Meth Eng, 1972, 5, No 1, p 3—16
- 12.60 Stricklin J. A., Hauser W. E., Tisdale P. R., Gunderson R. A. Rapidly Converging Triangular Plate Element — AIAA J., 1969, 7, No 1, p 180—181 [Имеется перевод Ракетная техн и космон — М: Мир, 1969, № 1]
- 12.61 Fried I. Shear in C^0 and C^1 Plate Bending Elements. — Int J Solids and Structures, 1973, 9, No 4, p. 449—460
- 12.62. Pawsey S. F., Clough R. W. Improved Numerical Integration of Thick Shell Finite Element — Int J Num Meth Eng., 1971, 3, No 4, p 575—586

Задачи

- 12.1. Интегрируя по частям, докажете, что выражение для функционала Π (12.24а) выводится из выражения для функционала Рейсснера Π_R (12.24)
- 12.2. Используя выражение для коэффициентов жесткости из табл. 12.1 (двенадцатичленный прямоугольник), вычислите смещение в центре свободно опертой квадратной пластины при действии на нее в этой точке сосредоточенной силы. Учтите симметрию, используйте один элемент в каждом квадранте пластины и полученные результаты сверьте с решением на рис. 12.7.
- 12.3. Выпишите выражение для энергетически эквивалентной угловой силы F_z , для равномерно распределенной поперечной нагрузки q , действующей на прямоугольный элемент с 16 степенями свободы. Вычислите значение прогиба в центре квадратной пластины с закрепленными краями, нагруженной указанной силой, используя в силу симметрии один элемент, и сравните полученный результат с точным решением.
- 12.4. Сформулируйте представление с использованием функции формы $w = [N]^T \{\Delta\}$, где $\{\Delta\} = [w_1, w_2, w_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6]^T$, для треугольного элемента, изображенного на рис. 12.8(б).
- 12.5. Обсудите формулировку матрицы жесткости при изгибе для прямоугольного изгибаемого элемента с использованием гибридного метода на основе предполагаемых полей напряжений. Выберите подходящие функции для внутренних полей напряжений и граничных смещений
- 12.6. Матрицу жесткости для треугольного изгибаемого пластинчатого элемента сформулируйте с помощью методики разбиения на подэлементы, используя для этого три треугольника, изображенных на рис. 12.10(а), и квадратичные разложения в каждой подобласти. Используя условия согласованности перемещений, сведите число независимых параметров для двух разложений с 18 до 12 (по 6 в каждом). Далее уменьшите это число до 9 при помощи условия согласованности для узловых смещений в вершинах. Обсудите соответствие результирующей функции условиям совместности перемещений вдоль границ элемента и вдоль границ подобластей.

Таблица 12.1. Матрица жесткости для прямоугольного изгибного элемента, основанного на двенадцати членном полиноме (о характеристике элемента см. рис. 12.3)

w_1	θ_{z_1}	θ_{y_1}	w_2
$120(\beta^2 + \gamma^2) - 24\mu + 84$			
$[10\beta^2 + (1 + 4\mu)]6\gamma_3$	$40x_2^2 + 8(1 - \mu)x_3^2$		
$-[10\gamma^2 + (1 + 4\mu)]6x_2$	$-30\mu x_2 x_3$	$40x_3^2 + 8(1 - \mu)x_2^2$	
$60\gamma^2 - 2\beta^2 + 24\mu - 84$	$-[10\beta^2 + (1 - \mu)]6x_3$	$[-5\gamma^2 + (1 + 4\mu)]6x_2$	
$[10\beta^2 + (1 - \mu)]6\gamma_3$	$20x_2^2 - 2(1 - \mu)x_3^2$	\circ	$120(\beta^2 + \gamma^2) - 24\mu + 84$
$[-5\gamma^2 + (1 + 4\mu)]6x_2$	\circ	$20x_3^2 - 8(1 - \mu)x_2^2$	$-[10\beta^2 + (1 + 4\mu)]6\gamma_3$
$-60(\gamma^2 + \beta^2) - 24\mu + 84$	$[-5\beta^2 + (1 - \mu)]6x_3$	$[5\gamma^2 - (1 - \mu)]6x_2$	$-60(2\gamma^2 - \beta^2) + 24\mu - 84$
$[5\beta^2 - (1 - \mu)]6x_3$	$10x_2^2 + 2(1 - \mu)x_3^2$	\circ	$[-5\beta^2 + (1 + 4\mu)]6\gamma_3$
$[-5\gamma^2 + (1 - \mu)]6x_2$	\circ	$10x_3^2 + 2(1 - \mu)x_2^2$	$-[10\gamma^2 + (1 - \mu)]6x_2$
$-60(2\gamma^2 - \beta^2) + 24\mu - 84$	$[-5\beta^2 + (1 + 4\mu)]6x_3$	$[10\gamma^2 + (1 - \mu)]6x_2$	$-60(\beta^2 + \gamma^2) - 24\mu + 84$
$[5\beta^2 - (1 + 4\mu)]6x_3$	$20x_2^2 - 8(1 - \mu)x_3^2$	\circ	$[-5\beta^2 + (1 - \mu)]6\gamma_3$
$[10\gamma^2 + (1 - \mu)]6x_2$	\circ	$20x_3^2 - 2(1 - \mu)x_2^2$	$[-5\gamma^2 + (1 - \mu)]6x_2$

(Симметрично)

$$[k_1] = \frac{EI^3}{360(1 - \mu^2)x_2 x_3}$$

Таблица 12.1 (продолжение)

θ_{x_1}	θ_{y_1}	w_3	θ_{x_1}
$\beta = \frac{x_2}{y_3}$ $\gamma = \frac{y_3}{x_2}$			
(Симметрично)			
$40x_2^2 + 8(1 - \mu)y_3^2$			
$30\mu x_2 y_3$	$40y_3^2 + 8(1 - \mu)x_2^2$		
$[-5\beta^2 + (1 + 4\mu)]6y_3$	$[10\gamma^2 + (1 - \mu)]6x_2$	$120(\beta^2 + \gamma^2) - 24\mu + 84$	
$20x_2^2 - 8(1 - \mu)y_3^2$	0	$-[10\beta^2 + (1 + 4\mu)]6y_3$	$40x_2^2 + 8(1 - \mu)y_3^2$
0	$20y_3^2 - 2(1 - \mu)x_2^2$	$[10\gamma^2 + (1 + 4\mu)]6x_2$	$-30\mu x_2 y_3$
$[5\beta^2 - (1 - \mu)]6y_3$	$[5\gamma^2 - (1 - \mu)]6x_2$	$60(\gamma^2 - 2\beta^2) + 24\mu - 84$	$[10\beta^2 + (1 - \mu)]6y_3$
$10x_2^2 + 2(1 - \mu)y_3^2$	0	$-[10\beta^2 + (1 - \mu)]6y_3$	$20x_2^2 - 2(1 - \mu)y_3^2$
0	$10y_3^2 + 2(1 - \mu)x_2^2$	$[5\gamma^2 - (1 + 4\mu)]6x_2$	0

Таблица 12.1 (окончание)

θ_{y_1}	w_4	θ_{x_1}	--
(Симметрично)			
$40y_3^2 + 8(1 - \mu)x_2^2$			
$[5\gamma^2 - (1 + 4\mu)]6x_2$	$120(\beta^2 + \gamma^2) - 24\mu + 84$		
0	$[10\beta^2 + (1 + 4\mu)]6y_3$	$40x_2^2 + 8(1 - \mu)y_3^2$	
$20y_3^2 - 8(1 - \mu)x_2^2$	$[10\gamma^2 + (1 + 4\mu)]6x_2$	$30\mu x_2 y_3$	$40y_3^2 + 8(1 - \mu)x_2^2$

390

12. Мэгиб пластин

Задачи

391

1

--	--	--	--	--	--

.

1

7

12.7. Постройте матрицу жесткости для кольцевого изгибного элемента, изображенного в сечении на рис. P12.7. Используйте балочную функцию формы, записанную в терминах радиальной координаты r .

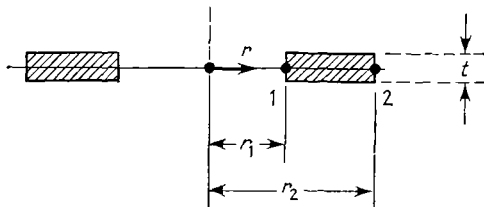


Рис. P12.7.

12.8. Широко используемая функция прогибов для изгиба пластин получается из (12.35) в результате задания смещения в центре в виде

$$w_4 = \frac{1}{3} (w_1 + w_2 + w_3) + \frac{1}{18} [(x_2 + x_3 - 2x_1) \theta_{y_1} + (x_1 + x_3 - 2x_2) \theta_{y_2} + (x_1 + x_2 - 2x_3) \theta_{y_3} + (y_2 + y_3 - 2y_1) \theta_{x_1} + (y_1 + y_3 - 2y_2) \theta_{x_2} + (y_1 + y_2 - 2y_3) \theta_{x_3}].$$

Определите результирующий вид функции перемещений и исследуйте ее свойства на предмет межэлементной непрерывности перемещений.

12.9. Температурное поле в балочном элементе линейно изменяется по высоте и длине, но симметрично относительно вертикальной оси поперечного сечения. Изменение температуры в поперечном сечении обуславливает появление теплового момента M^α , который изменяется вдоль элемента согласно формуле

$$M^\alpha = (1 - x/L) M_1^\alpha + (x/L) M_2^\alpha,$$

где M_1^α и M_2^α — тепловые моменты соответственно на концах. Сформулируйте в этом случае вектор температурных сил для балочного элемента.

12.10. Вычислите смещение свободного конца консольной балки постоянного прямоугольного поперечного сечения при действии на нее в этой точке сосредоточенной силы. Разбивая ее на два сегмента и используя метод суперпозиции, изложенный в разд. 12.4, сравните полученный результат с точным решением.

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ ТЕЛ

В этой главе метод конечных элементов распространяется на решение задач *линейной* теории устойчивости упругих тел. Линейный анализ потери устойчивости упругих систем сводится к определению критических значений нагрузок, приводящих к выпучиванию упругой конструкции. При этом распределение внутренних усилий, вызванных заданным *распределением* прикладываемых нагрузок, находится независимо в результате решения отдельной задачи. Хотя физические условия, связанные с разрушением конструкции, включают аспекты нелинейной теории потери устойчивости наряду с вопросами неупругого деформирования, линейная теория устойчивости точно записывает условия разрушения, представляющие интерес при проектировании большого числа конструктивных элементов, особенно балок и пластин. Таким образом, линейная теория устойчивости упругих тел служит основой для постановки большого числа прикладных задач проектирования. Даже если для точного расчета величины разрушающих нагрузок необходимо учитывать нелинейные эффекты, адекватное качественное решение часто получается на базе линейной теории.

Метод конечных элементов играет важную роль при решении задач линейной теории устойчивости, потому что с его помощью можно учесть нерегулярности нагружения и геометрии конструкции, которые не поддаются учету в классических методах. При использовании классических методов для анализа конструкций, созданных из материала с анизотропными свойствами, встречаются те же трудности. Кроме того, концепции и конечно-элементные соотношения, соответствующие линейной теории, служат базой для построения нелинейной теории устойчивости.

Как и в других разделах теории метода конечных элементов, изучение устойчивости упругих тел состоит из двух этапов: (1) формулировки соотношений для элемента и (2) решения полной системы. В гл. 5 и 6 показано, что существует много путей построения конеч-

но-элементных соотношений и достаточное число способов реализации указанных операций. Ниже рассмотрим лишь принцип стационарности потенциальной энергии, в качестве предполагаемых полей рассматриваются поля перемещений, а соотношения для элемента, отвечающие указанному подходу, имеют вид уравнений жесткости. Следовательно, изучение всей конструкции осуществляется с использованием уравнений жесткости посредством метода перемещений. Высокая универсальность и гибкость вычислительных программ конечно-элементного анализа жесткости, написанных для анализа задач статики, позволяет применять эти программы с небольшими изменениями и для анализа линейной теории устойчивости упругих тел.

Общая теория конечно-элементного анализа устойчивости упругих систем приводится в разд. 13.1. Далее следуют разделы, в которых излагаются вопросы, в основном касающиеся призматических и пластинчатых элементов.

13.1. Общая линейная теория анализа устойчивости

Сначала рассмотрим призматический элемент постоянного сечения (рис. 13.1), который часто встречается в пространственных фермовых конструкциях и в качестве ребра жесткости в подкрепленных

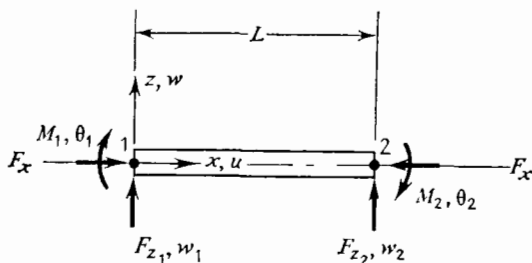


Рис 13.1. Призматический элемент.

пластинах и оболочках. Этот элемент позволяет проиллюстрировать формулировки жесткостных свойств конечного элемента в задачах линейной теории устойчивости и в то же время дает возможность вникнуть в ключевые аспекты, присущие всем конструктивным формам.

Предполагается, что элемент работает только на растяжение и изгиб, деформацией сдвига пренебрегаем. Поэтому имеем следующее уравнение, связывающее деформацию и перемещения:

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} - z \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2. \quad (13.1)$$

Здесь первый и второй члены — известные компоненты осевой и изгибной деформации соответственно, а третий член, который является

нелинейным по w , представляет собой связанную деформацию изгиба и растяжения. Появление этого члена поясняется на рис. 13.2, где изображен элементарный отрезок длины в деформированном состоянии. Длину \bar{dx} после деформации можно представить в виде

$$\bar{dx} = \left[1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx.$$

Разлагая это выражение в ряд, имеем

$$\bar{dx} = \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \dots \right] dx.$$

Этот ряд обрывается после второго члена, который равен третьему члену из выражения (13.1) и характеризует вклад указанного эффекта в полную осевую деформацию.

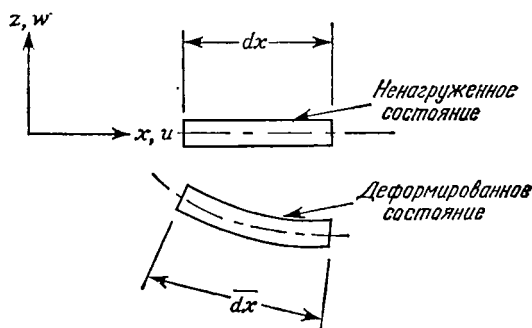


Рис. 13.2. Вид смещения.

Энергия деформации для элемента дается выражением

$$U^e = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} E \varepsilon_x^2 d(\text{vol}) \quad (13.2)$$

и после подстановки выражения (13.1) в (13.2) (причем $d(\text{vol}) = dA dx$) получим

$$U^e = \frac{1}{2} \int_L \int_A \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + z^2 \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{dw}{dx} \right)^4 - 2z \left(\frac{du}{dx} \right) \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right) - z \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right) \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du}{dx} \right) \left(\frac{dw}{dx} \right)^3 \right] E dA dx. \quad (13.3)$$

Затем выполним интегрирование по толщине элемента, учитывая, что

$$\int_A dA = A, \quad \int_A z dA = 0, \quad \int_A z^2 dA = I, \quad (13.4)$$

при z , отсчитываемом от срединной линии. Имеем следующее выражение:

$$U^e = \frac{1}{2} \int_L \left[A \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + I \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 + A \left(\frac{du}{dx} \right) \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \frac{A}{4} \left(\frac{dw}{dx} \right)^4 \right] E dx. \quad (13.5)$$

Далее, чтобы преобразовать выписанные выражения в соотношения линейной теории устойчивости, опустим член более высокого порядка $(A/4)(dw/dx)^4$ и заметим, что при предположении о возможности независимого анализа напряженного состояния до наступления выпучивания осевая сила F_x связана с осевой деформацией линейным соотношением

$$F_x = EA \frac{du}{dx}, \quad (13.6)$$

где величина F_x положительна при растяжении. Поэтому выражение (13.5) приводится к виду

$$U^e = \frac{1}{2} \int_L \left[EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + EI \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 + F_x \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] dx. \quad (13.7)$$

Таким образом, выражение для энергии деформации приводится к форме, в которой энергии осевой и изгибной деформации не связаны друг с другом, т. е.

$$U^e = U_a^e + U_i^e, \quad (13.8)$$

где

$$U_a^e = \frac{1}{2} \int_A EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx, \quad (13.9)$$

$$U_i^e = \frac{1}{2} \int_L \left[EI \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 + F_x \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] dx. \quad (13.10)$$

Здесь энергия U_a относится к осевым деформациям, реализованным перед наступлением выпучивания.

Можно теперь сосредоточить внимание на случае изгибной деформации, предполагая, что решение для осевой силы находится независимо, согласно принципу минимума потенциальной энергии.

Используя концепции гл. 6, можно выписать уравнение Эйлера для функционала (13.10) в виде

$$EI \frac{d^4w}{dx^4} - F_x \frac{d^2w}{dx^2} = 0. \quad (13.11)$$

Это хорошо известное уравнение, описывающее выпучивание балки.

Принимается следующее функциональное представление для поперечных смещений в терминах четырех узловых смещений:

$$w = [N_1 N_2 N_3 N_4] \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = [N] \{\Delta_f\}. \quad (13.12)$$

На этом этапе не используется какой-либо особый вид функции формы $[N]$, при этом подразумевается, что функция формы, которая точно применима для изгиба балки, не удовлетворяет строго дифференциальному уравнению, отвечающему данному случаю (уравнение (13.11)).

Подставляя (13.12) в (13.10), получим

$$U_f^e = \frac{[\Delta_f]}{2} [k_f] \{\Delta_f\} + \frac{[\Delta_f]}{2} [k_g] \{\Delta_f\}, \quad (13.13)$$

где

$$[k_f] = \left[\int_L EI \{N''\} [N''] dx \right], \quad (13.14)$$

$$[k_g] = \left[F_x \int_L \{N'\} [N'] dx \right]. \quad (13.15)$$

Здесь матрица $[k_f]$ — обычная матрица изгибной жесткости элемента. Матрица $[k_g]$ относится к эффектам упругой потери устойчивости и характеризует «приращение» изгибной жесткости. Поэтому ее часто называют *инкрементальной* матрицей жесткости. Как может быть установлено на основании выражения (13.15) и проверено в дальнейшем при выводе явного вида матрицы $[k_g]$, отдельные члены этой матрицы зависят исключительно от геометрических параметров (например, длины). Поэтому эта матрица часто называется *геометрической* матрицей жесткости.

В случае изгиба потенциал прикладываемых нагрузок (узловых сил, см. рис. 13.1) задается выражением

$$V^e = - [w_1 w_2 \theta_1 \theta_2] \begin{Bmatrix} F_{z_1} \\ F_{z_2} \\ M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = - [\Delta_f] \{F\}, \quad (13.16)$$

поэтому вклад от изгиба в потенциальную энергию элемента равен

$$\Pi_p^e = U^e + V^e = \frac{[\Delta_f]}{2} [k_f] \{\Delta_f\} + \frac{[\Delta_f]}{2} [k_g] \{\Delta_f\} - [\Delta_f] \{F\}. \quad (13.17)$$

При изгибе тонких пластин соотношения связи между перемещениями и деформациями, соответствующие (13.1), имеют вид (рис. 13.3)

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}.\end{aligned}\quad (13.18)$$

Проводя выкладки, полностью аналогичные приведенным выше, получим расширенный функционал энергии изгибных деформаций для изотропных пластин

$$\begin{aligned}U^e &= \frac{D}{2} \int_A \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dA + \\ &+ \frac{1}{2} \int_A \sigma_x t \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dA + \frac{1}{2} \int_A \sigma_y t \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dA + \\ &+ \int_A \tau_{xy} t \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) dA,\end{aligned}\quad (13.19)$$

где t — толщина пластины, а $\sigma_x t$, $\sigma_y t$ и $\tau_{xy} t$ — интенсивности усилий в срединной плоскости (мембранные усилия), т. е. силы на единицу длины.

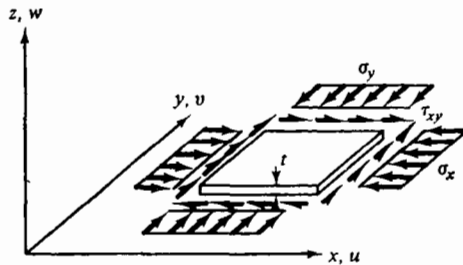


Рис. 13.3. Напряжения, действующие в срединной плоскости пластины при изгибе

Функциональное представление поперечных смещений можно опять записать в виде $w = \lfloor N \rfloor \{\Delta_f\}$. При подстановке функции перемещений в (13.19) получим

$$\begin{aligned}U^e &= \frac{\lfloor \Delta_f \rfloor}{2} [k_f^e] \{\Delta_f\} + \frac{\lfloor \Delta_f \rfloor}{2} [k_{ex}] \{\Delta_f\} + \\ &+ \frac{\lfloor \Delta_f \rfloor}{2} [k_{ey}] \{\Delta_f\} + \frac{\lfloor \Delta_f \rfloor}{2} [k_{g_{xy}}] \{\Delta_f\},\end{aligned}\quad (13.20)$$

где $[k_f]$ — обычная матрица изгибной жесткости и

$$[k_{gx}] = \left[\int_A (\sigma_x t) \{N'_x\} [N'_x] dA \right] \quad (13.21)$$

$$c \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] \{\Delta_f\} = [N'_x] \{\Delta_f\}. \quad (13.22)$$

Для $[k_y]$ и $[k_{g_{xy}}]$ справедливы выражения, аналогичные (13.21). Если ввести

$$[k_g] = [[k_{gx}] + [k_{gy}] + [k_{g_{xy}}]], \quad (13.23)$$

то (13.20) примет тот же вид, что и (13.13).

Интересно отметить, что члены, описывающие эффекты потери устойчивости, имеют геометрическую природу и не зависят от свойств материала. Следовательно, способ учета этих эффектов одинаков как для изотропных, так и для ортотропных пластин; т. е. $[k_g]$ не зависит от степени анизотропии пластин.

13.2. Глобальная формулировка

Потенциальная энергия для системы получается простым суммированием потенциальных энергий отдельных элементов. Поэтому глобальная потенциальная энергия имеет тот же вид, что и энергия элементов, т. е.

$$\Pi_{\text{system}} = \sum \Pi_p^e = \frac{[L \Delta_f]}{2} [K_f] \{\Delta_f\} + \frac{[L \Delta_f]}{2} [K_g] \{\Delta_f\} + V, \quad (13.24)$$

где в данном случае

$$[K_f] = [\Sigma k_f], \quad [K_g] = [\Sigma k_g]. \quad (13.24a, b)$$

Здесь суммирование производится по всем элементам системы. Векторы $\{\Delta_f\}$ и $\{P\}$ суть перемещения и приложенные нагрузки соответственно. Заметим, что $\{P\}$ соответствует нагрузкам, связанным с изгибом. Здесь опущены нижние индексы f , так как они уже использовались для обозначения сил, связанных со свободно перемещающимися узлами. Здесь необходимо подчеркнуть, что в задаче имеются силы $\{P_a\}$, связанные с деформированием в осевом направлении, которые, однако, не входят в $\{P\}$. Считаем, что нагрузки *консервативны*, т. е. работа этих сил V на любых кинематически возможных перемещениях зависит только от начальной и конечной конфигураций системы. Тем самым исключаются случаи, когда направление действия силы «отслеживает» направление отклоненного элемента системы, на который эта сила действует.

Для условий равновесия в невозмущенном состоянии, т. е. когда осевая сила меньше критической нагрузки, применение *принципа стационарности потенциальной энергии* в виде равенства нулю первой вариации от Π_p (т. е. $\delta\Pi_p=0$) приводит к уравнению жесткости

$$\{P\}=[K_f]\{\Delta_f\}+[K_g]\{\Delta_f\}. \quad (13.25)$$

При этом $\{\Delta_f\}$ можно определить из уравнения (13.25), используя обычные средства, причем мы придем к результатам, учитывающим взаимодействие осевого и поперечного деформирования, влияние осевых нагрузок на жесткостные характеристики балки. Следует отметить, что таким образом можно учесть эффект увеличения изгибной жесткости при действии растягивающих нагрузок.

Чтобы рассмотреть вопрос потери упругой устойчивости, когда *интенсивность* системы осевых нагрузок, вызывающих выпучивание, еще не известна, инкрементальная матрица жесткости должна быть вначале подсчитана численно при произвольно выбранной интенсивности нагрузки (предполагается, что *распределение* осевых сил фиксировано). При выпучивании считаем, что интенсивность системы осевых нагрузок в ω раз больше произвольно выбранной интенсивности сил $\{P_a\}$, использованных при построении матрицы $[k_g]$, поэтому уравнение равновесия принимает вид

$$\delta\Pi_p=[K_f]\{\Delta_f\}+\omega[k_g]\{\Delta_f\}-\{P\}=0. \quad (13.26)$$

В этом месте необходимо рассмотреть условия нейтрального равновесия; они определяют собственное значение ω и отвечающую ему моду выпучивания $\{\Delta_{cr}\}$. Необходимую информацию нельзя получить, рассматривая первую вариацию функционала потенциальной энергии, поэтому следует выписать вторую вариацию $\delta^2\Pi_p=\delta(\delta\Pi_p)$.

Из рис. 6.2, на котором схематически изображена зависимость потенциальной энергии от некоторого представительного параметра перемещения Δ , следует, что в состоянии устойчивого равновесия $\delta^2\Pi_p>0$, а для нейтрального равновесия $\delta^2\Pi_p=0$. Последнее условие определяет точку бифуркации искомого решения. Теперь, применив эти условия к (13.24), запишем вторую вариацию потенциальной энергии в виде

$$\delta^2\Pi_p=[\delta\Delta_f][K]\{\delta\Delta_f\}=0,$$

и так как в данном случае $[K]=[K_f]+[K_g]$, то

$$|[K_f]+[K_g]|=0, \quad (13.27)$$

где символом $||$ обозначен детерминант.

Таким образом, имеем условие, согласно которому детерминант матрицы (13.27) равен нулю. Альтернативой этому условию является то, что не существует единственного решения (условие бифур-

кации) уравнения (13.26), если найдется вектор $\{\Delta_f\}$ и скаляр ω , такие, что $[K_f + \omega K_g]\{\Delta_f\} = 0$.

Вычисление детерминанта с целью определения значения ω для системы большого порядка неэффективно. Обычно используют модификацию уравнения (13.27), умножая его на $\{\Delta_f\}$. После преобразований получим

$$\frac{1}{\omega} \{\Delta_f\} = [K_f]^{-1} [K_g] \{\Delta_f\}. \quad (13.27a)$$

С помощью итерационных методов или другим способом находят наименьшее значение величины ω и соответствующий собственный вектор $\{\Delta_{f_{cr}}\}$.

В обсуждаемых задачах для балок и пластин вектор степеней свободы $\{\Delta_f\}$ состоит как из трансляционных w_i , так и из угловых перемещений θ_i . Интуитивно может показаться, что знания трансляционных перемещений достаточно для адекватного определения моды выпучивания и по этой моде можно было бы в свою очередь достаточно точно вычислить интенсивность критической нагрузки. Провести в явном виде процедуру конденсации в задаче на собственные значения, представленной уравнением (13.27), неудобно, так как в результате получатся матрицы, из которых нельзя выделить ω . В этом случае следовало бы применить итерационный процесс. С другой стороны, описанная в разд. 2.8 процедура конденсации, которая строго применима лишь для традиционных матриц жесткости, может быть использована и для геометрических матриц жесткости с целью получения приближенной конденсированной матрицы.

Приспособим процедуру из разд. 2.8 для решения рассматриваемой задачи следующим образом. Предположим вначале, что вектор перемещений разбит на трансляционные и угловые составляющие, т. е. $[\Delta] = [w; \theta]$. Для матрицы $[k_f]$, например, имеем

$$[k_f] = \begin{bmatrix} K_{f_{ww}} & K_{f_{w\theta}} \\ K_{f_{\theta w}} & K_{f_{\theta\theta}} \end{bmatrix}.$$

(В действительности, возможно *любое* разбиение общей совокупности степеней свободы, однако для простоты рассмотрения и обозначения оставим деление на степени свободы $\{w\}$ и $\{\theta\}$). Согласно разд. 2.8, преобразование от $[w]$ к степеням свободы $[w; \theta]$, основанное на традиционной матрице жесткости $[k_f]$, имеет вид

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -k_{f_{\theta\theta}}^{-1} k_{f_{\theta w}} \end{bmatrix} \{w\} = [\Gamma_0] \{w\}. \quad (13.28)$$

Матрица преобразования $[\Gamma_0]$ используется теперь для преобразования обычной матрицы жесткости $[k_f]$ и геометрической матрицы

жесткости $[k_g]$. Имеем

$$[\hat{k}_f] + \omega [\hat{k}_g] \{w\} = 0, \quad (13.29)$$

где

$$[\hat{k}_f] = [\Gamma_0]^T [k_f] [\Gamma_0], \quad [\hat{k}_g] = [\Gamma_0]^T [k_g] [\Gamma_0]. \quad (13.29a, b)$$

Собственное значение ω и соответствующая форма моды выпучивания выделяются из редуцированной системы (13.29). Вопросы эффективности этой схемы будут описаны в дальнейшем.

13.3. Призматический элемент

13.3.1. Выпучивание при изгибе

Целью настоящих рассмотрений является преобразование энергии деформации (13.13) в явную формулировку для матрицы жесткости элемента посредством выбора функционального представления для w .

Точное представление для этого случая можно сформулировать, используя функцию перемещений, которая удовлетворяет соответствующему дифференциальному уравнению [13.1]. Однако, стремясь, как обычно, при конечно-элементном анализе выбрать простое аппроксимирующее поле перемещений, альтернативно выберем (при $\xi = x/L$) поле перемещений для изгибаемого элемента без осевой нагрузки (см. (5.14a)). Имеем

$$w = \begin{bmatrix} (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) & (3\xi^2 - 2\xi^3) & (1 - 2\xi + \xi^2) & \xi & (\xi - \xi^2) & \xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}.$$

Использование выписанного выражения в (13.13) приводит к хорошо известному представлению для базисной изгибной матрицы $[k_f]$, задаваемой выражением (5.17), а также к следующей явной форме для матрицы $[k_g]$:

$$[k_g] = \frac{F_x}{30L} \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \theta_1 & \theta_2 \\ 36 & 36 & 0 & 0 \\ -36 & 36 & 0 & 0 \\ -3L & 3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 3L & -4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Симметрично}). \quad (13.30)$$

В качестве примера применения инкрементальной матрицы жесткости при решении задач о потере устойчивости балок найдем критическую силу для изображенной на рис. 13.4 простой балки, используя один элемент. Здесь $w_1 = \theta_2 = 0$, $F_x = -P_{x_{cr}}$, $L = l/2$. По-

этому характеристическое уравнение примет вид

$$\left(\frac{8EI}{l} - \frac{P_{x_{cr}} l}{15}\right) \left(\frac{96EI}{l^3} - \frac{12P_{x_{cr}}}{5l}\right) - \left(\frac{24EI}{l^2} - \frac{P_{x_{cr}}}{10}\right)^2 = 0,$$

решая которое получаем $P_{x_{cr}} = 9.94EI/l^2$. Это решение лишь на 0.752% отличается от точного решения $\pi^2(EI/l^2)$.

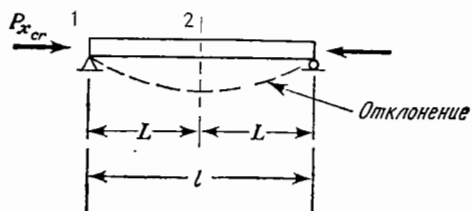


Рис. 13.4.

На рис. 13.5 представлена ошибка в процентах при решении этой задачи как функция от числа элементов разбиения. Для сравнения приведены соответствующие результаты для конечно-разностного решения [13.2]. Пониженная точность конечно-разностного решения вызвана допущением линейного изменения w между узлами по сравнению с принимаемым здесь кубическим характером

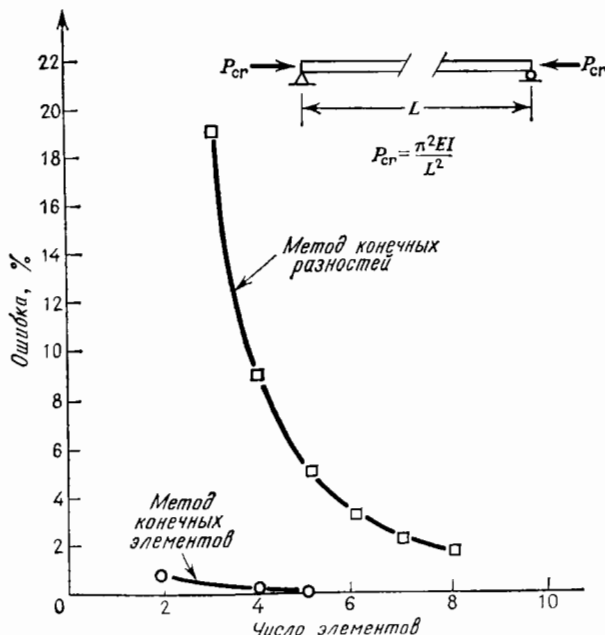


Рис. 13.5. Характеристики сходимости методов — выпучивание колонны Эйлера.

изменения. Заметим, однако, что конечно-разностные уравнения используют только одну степень свободы в каждом узле, а именно прогиб w .

На рис. 13.6 изображен график зависимости ошибки в процентах от числа элементов в представлении при определении критической нагрузки сужающейся консольной балки. Сплошной линией

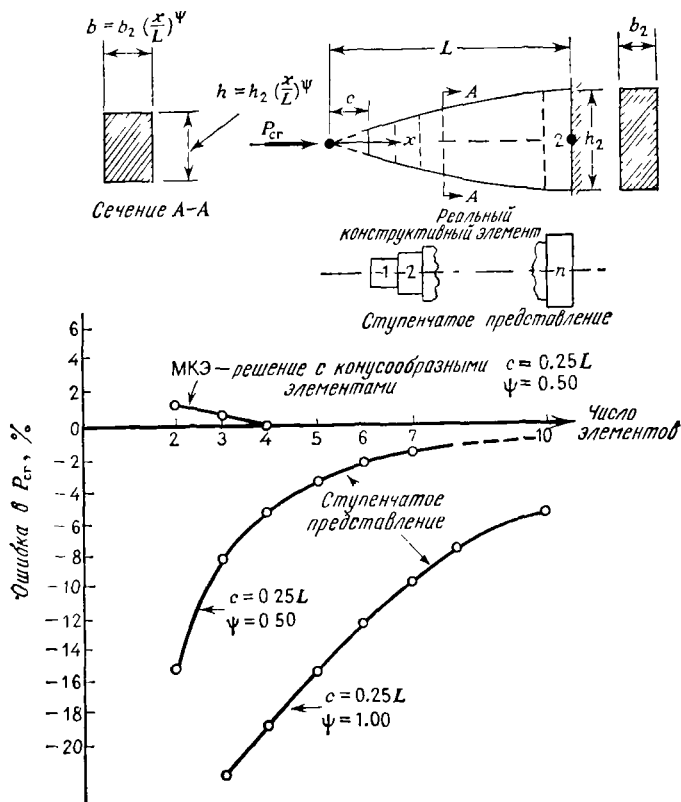


Рис. 13.6. Характеристики сходимости методов — устойчивость сужающейся балки

изображен график для ступенчатого представления [13.3], в котором для задания элемента используются геометрические характеристики в центре элемента. Следует отметить два аспекта, касающиеся полученных решений. Во-первых, точность решений при любой мелкости сетки строго меньше, чем для балки постоянного сечения. Во-вторых, решения для ступенчатого разбиения сходятся к точному решению снизу в отличие от решений для сужающихся элементов. Таким образом, становится очевидным, что более гибкая

геометрическая аппроксимация оказывается более важной по сравнению с аппроксимацией в конечно-элементном представлении функции перемещений. Более того, оказывается, что не существует «представительного» поперечного сечения элемента.

Трудно, а подчас и невозможно сформулировать точную матрицу жесткости для элемента с переменным поперечным сечением. С другой стороны, можно использовать принцип минимума потенциальной энергии при формулировке приближенного суживающегося элемента, задавая при этом геометрические характеристики, точно (как это сделано в разд. 6.4 и 7.2) или близко аппроксимируя форму суживающегося элемента и выбирая то представление перемещений, которое использовалось для элемента с постоянным поперечным сечением.

При применении этого подхода, сохраняющего непрерывность геометрических характеристик в узлах, получаются решения высокой точности, представленные на рис. 13.6 пунктирной линией. Пожалуй, наиболее важным заключением, вытекающим из проведенных рассмотрений, является то, что следует уделять большее внимание представлению геометрических характеристик по сравнению с выбором предполагаемых функций перемещений.

13.3.2. Изгибно-крутильная потеря устойчивости

Если призматический конструктивный элемент является частью пространственной стержневой системы, он, вообще говоря, подвергается изгибу в двух плоскостях, кручению вокруг своей оси и действию осевых нагрузок. Взаимодействие этих компонент порождает более сложные моды упругой потери устойчивости, нежели простые моды выпучивания, описанные в предыдущих разделах. Обобщение на этот случай осуществляется стандартными методами, не выходящими за рамки проведенных рассмотрений, и детально описывается в [13.4]. Чтобы проиллюстрировать используемые при этом операции, рассмотрим один из аспектов общего случая — условие изгибно-крутильной формы потери устойчивости.

Призматический элемент, используемый при рассмотрении, изображен на рис. 13.7. Предполагается, что для определения состояния элемента при изгибе и осевом деформировании в плоскости $y - z$ до наступления выпучивания проводится независимый анализ. Таким образом, известны относительные амплитуды моментов на концах M_x и M_x , перерезывающие силы в граничных точках F_z , F_z и осевая нагрузка F_y . Рассматриваемая форма потери устойчивости включает кручение вокруг оси y и изгиб в плоскости $x - y$. Чтобы учесть депланацию, необходимо включить в качестве меры смещения производную от угла закрутки θ_y по координате y , которую обозначим через θ'_y . Таким образом, для каждого конца элемента в качестве степеней свободы принимаются θ_y , θ'_y , u и

$u' (=du/dy)$ с соответствующими силовыми параметрами, обозначенными через M_y , M_{yy} , F_x и M_z .

При выписанных условиях для изгибно-крутильной формы потери устойчивости в [13.4] показано, что соответствующее выражение для потенциальной энергии имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi_p = & \frac{1}{2} \int_L \left[EI_z (u'')^2 + GJ (\theta_y')^2 + E\Gamma (\theta_y'')^2 - \frac{F_y I_p}{A} (\theta_y')^2 - F_y (u')^2 + \right. \\ & \left. + (F_z y + F_z (L-y) + M_{x_1} - M_{x_2}) \theta_x u'' \right] dy - \\ & - \sum_{i=1}^2 (M_{y_i} \theta_{y_i} + M_{yy_i} \theta_{y_i}' + F_{x_i} u_i + M_{z_i} u_i'), \end{aligned} \quad (13.31)$$

где штрихами обозначены производные по осевой координате y , G — модуль сдвига, J — жесткость кручения по Сен-Венану, I_p — полярный момент инерции, Γ — константа деplanationа, а величины A , I_z определены ранее; $M_{x_{1-2}} = M_{x_1} - M_{x_2}$.

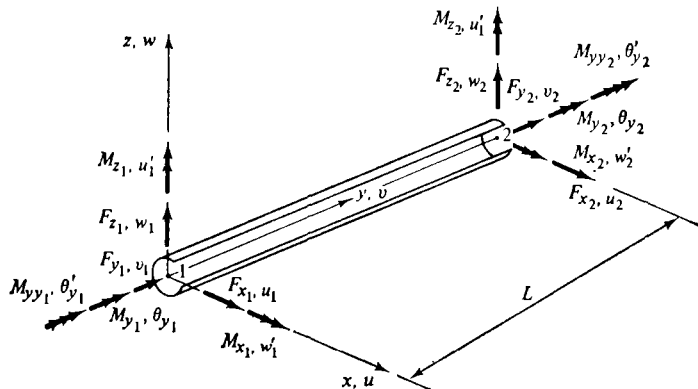


Рис. 13.7. Призматический элемент для анализа изгибно-крутильной формы потери устойчивости

Каждая из величин, характеризующих перемещения u и θ_y , должна удовлетворять двум граничным условиям в каждом узле. Первое условие накладывается на сами переменные u_i , θ_{y_i} , а второе — на их первые производные u_i' , θ_{y_i}' . Этот тип условий встречался при простом изгибе. Поэтому в данном случае можно использовать представление функций в том же виде, как и для простого изгиба. Имеем

$$u = \lfloor N \rfloor \{ \Delta_u \}, \quad (13.32)$$

$$\theta_y = \lfloor N \rfloor \{ \Delta_{\theta_y} \}, \quad (13.33)$$

где $\{N\}$ — вектор функций формы из (5.14а) и

$$\{\Delta_n\} = [u_1, u_2, u'_1, u'_2]^T, \quad (13.34)$$

$$\{\Delta_\theta\} = [\theta_y, \theta_y, \theta'_y, \theta'_y]^T. \quad (13.35)$$

Подставив эти выражения в (13.31) и проводя интегрирование с применением принципа стационарности потенциальной энергии,

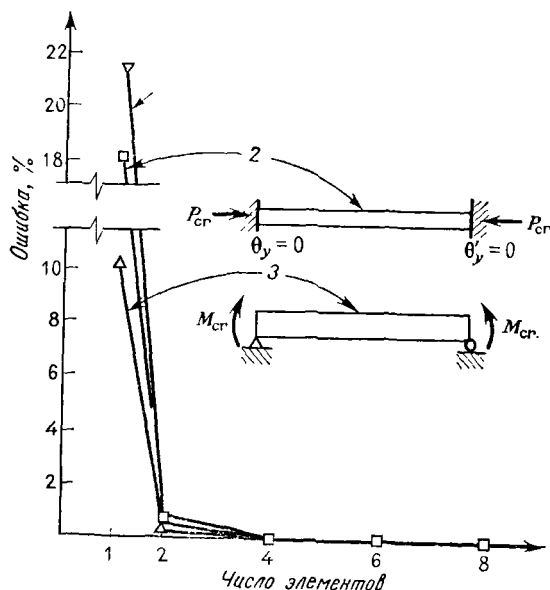


Рис. 13.9. Характеристики сходимости метода: изгибная (1), крутильная (2) и поперечная (3) формы потери устойчивости.

т. е. дифференцирования по каждой степени свободы в узле, приходим к уравнению жесткости того же вида, что и в предыдущих разделах данной главы:

$$\{F\} = [k_f] + [k_g]\{\Delta\},$$

где в данном случае

$$\{F\} = [F_x, M_z, M_y, M_{yy}, F_x, M_z, M_y, M_{yy}]^T,$$

$$\{\Delta\} = [u_1, u'_1, \theta_y, \theta'_y, u_2, u'_2, \theta_y, \theta'_y]^T.$$

Основная $[k_f]$ и геометрическая матрицы жесткости для этого случая изображены на рис. 13.8.

Чтобы проиллюстрировать точность формулировки, рассмотрим задачу о поперечной неустойчивости свободно опертой балки, концы которой не могут проворачиваться (рис. 13.9) при действии на

нее в этих точках одинаковых моментов $M_{x_1} = -M_{x_2} = M_{cr}$. Все остальные узловые параметры перемещений ($u_1, u_2, \theta_{y_1}, \theta_{y_2}$) равны нулю. Применяя эти условия к уравнениям жесткости, представленным на рис. 13.8, получим

$$\begin{vmatrix} \frac{2EI_z}{L} & \frac{L}{6} M_{cr} \\ \frac{L}{6} M_{cr} & \left(\frac{5}{30} GJL + \frac{2E\Gamma}{L} \right) \end{vmatrix} = 0,$$

откуда имеем

$$M_{cr} = \frac{3}{L} \sqrt{(EI_z)(GJ) \left(\frac{4}{3} + \frac{E\Gamma}{GJ} \frac{16}{L^2} \right)}.$$

В этом случае точное решение равно

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{(EI_z)(GJ) \left(1 + \frac{E\Gamma}{GJ} \frac{\pi^2}{L^2} \right)}.$$

Если крутильная жесткость по Сен-Венану мала по сравнению с депланационной жесткостью (т. е. $GJ \ll E\Gamma$), ошибка достигает примерно 20%; если справедливо обратное, то для прямоугольного сечения ошибка приблизительно равна 10%.

На рис. 13.9 представлены данные по сходимости решений в случае крутильной и поперечной форм потери устойчивости, полученные с помощью выписанных формулировок. Для сравнения приведены результаты для ранее рассмотренного случая изгибной формы потери устойчивости. Во всех трех случаях при двухэлементной идеализации ошибка составляет менее 1%.

13.3.3. Устойчивость стержневых систем

Анализ устойчивости стержневых систем представляет собой более сложную задачу, нежели одномерный (например, для балки) анализ устойчивости, так как распределение осевых нагрузок, вообще говоря, зависит от связанного изгибного и осевого деформирования конструкции. Поэтому задача устойчивости не может быть сформулирована независимо от анализа осевого деформирования конструкции, что делает проблему нелинейной. Проиллюстрируем это утверждение на простом примере. На рис. 13.10 изображен узел j с силами (и перемещениями), прикладываемыми к элементу и отнесенными к локальной (для элемента) системе координат. Эти величины помечены штрихами. Для каждого элемента поэтому в линейном анализе устойчивости имеем

$$\begin{Bmatrix} \overline{F'_x} \\ \overline{F'_z} \\ \overline{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k'_x & 0 \\ 0 & k'_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{u'} \\ \overline{w'} \\ \overline{\theta'} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k'_g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{u'} \\ \overline{w'} \\ \overline{\theta'} \end{Bmatrix}, \quad (13.36)$$

где делается различие между матрицами $[k_a]$ и $[k_i]$, характеризующими осевое и изгибное деформирования, а штрихи обозначают, что эти матрицы относятся к осям, связанным с элементом. После перехода к глобальным (без штрихов) координатам u и w соотношение между матрицами запишется в следующем виде

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_z \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{g11} & k_{g12} \\ k_{g21} & k_{g22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (13.37)$$

Видно, что описание осевого и изгибного поведения является связанным, и члены, отвечающие линейной теории устойчивости, уже не отмечаются нижним индексом. Это условие сохраняется после того, как все элементы объединяются при построении уравнений

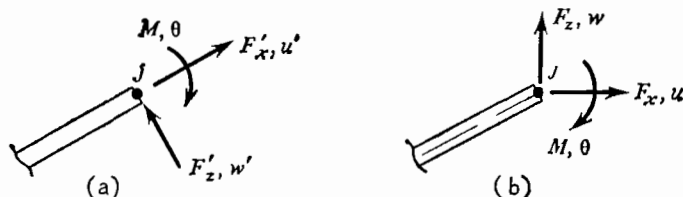


Рис. 13.10 Стержневой элемент — узловые силы (а) Локальные координаты, (б) глобальные координаты

для всей конструкции. Таким образом, коэффициенты геометрической матрицы жесткости зависят от изгибного поведения конструкции и не могут быть определены независимо.

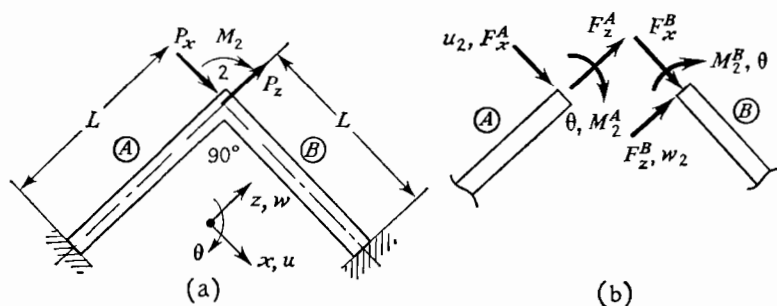


Рис. 13.11. Пример простой рамы для анализа потери устойчивости (а) Рама, (б) конечно элементное представление

Чтобы проиллюстрировать эту ситуацию, рассмотрим раму, изображенную на рис. 13.11(а). На рис. 13.11(б) показана конечно-элементная идеализация этой рамы. Только точка 2 может перемещаться, поэтому уравнение жесткости необходимо выписать лишь

для этой точки. С учетом базисных уравнений жесткости для поперечного и продольного нагружения искомые выражения примут вид

$$\begin{aligned} F_x^A &= 12 \frac{EI}{L^3} u_2 - 6 \frac{EI}{L^2} \theta + \frac{5}{6} \frac{F_z^A}{L} u_2 - \frac{F_z^A}{10} \theta, \\ F_z^B &= 12 \frac{EI}{L^3} w_2 - 6 \frac{EI}{L^2} \theta + \frac{5}{6} \frac{F_x^B}{L} w_2 - \frac{F_x^B}{10} \theta, \\ F_z^A &= \frac{AE}{L} u_2, \quad F_z^B = \frac{AE}{L} u_2, \\ M_z^A &= -6 \frac{EI}{L^2} u_2 + 4 \frac{EI}{L} \theta - \frac{F_z^A}{10} u_2 + \frac{2}{15} L F_z^A \theta, \\ M_z^B &= -6 \frac{EI}{L^2} w_2 + 4 \frac{EI}{L} \theta - \frac{F_x^B}{10} w_2 + \frac{2}{15} L F_x^B \theta \end{aligned}$$

Заметим, что оси элементов соответствуют глобальным осям координат, поэтому штрихи, отличающие координатные системы, писать не нужно. После объединения элементов результирующие соотношения между силами и перемещениями запишутся в форме

$$\begin{Bmatrix} P_x \\ P_z \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AF}{L} + 12 \frac{EI}{L^3} & & \\ 0 & \frac{AE}{L} + 12 \frac{EI}{L^3} & \\ -6 \frac{EI}{L^2} & -6 \frac{EI}{L^2} & 8 \frac{EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ w_2 \\ \theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{6} \frac{F_z^A}{L} & & \\ 0 & \frac{5}{6} \frac{F_x^B}{L} & \\ -\frac{F_z^A}{10} & -\frac{F_x^B}{10} & \frac{2L}{15} (F_z^A + F_x^B) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ w_2 \\ \theta \end{Bmatrix}$$

(Симметрично)

или в суммарном виде

$$\begin{Bmatrix} P_x \\ P_z \\ M_z \end{Bmatrix} = [K_f] \begin{Bmatrix} u_2 \\ w_2 \\ \theta \end{Bmatrix} + [K_g] \begin{Bmatrix} u_2 \\ w_2 \\ \theta \end{Bmatrix}.$$

Изучение этих уравнений показывает, что силы F_z^A и F_x^B , которые входят в матрицу $[K_g]$, являются функциями от перемещений u_2 , w_2 и θ . Поэтому непосредственное решение этой системы невозможно, и необходимо применить итерационную процедуру, описываемую ниже.

Сначала необходимо положить нулю члены матрицы $[K_g]$ и найти перемещения. Имеем

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ w_2 \\ \theta \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det} \begin{bmatrix} (\Psi) \frac{8EI}{L} - \left(\frac{6EI}{L^2} \right)^2 & (\text{Симметрично}) \\ \frac{6EI}{L^2} & (\Psi) \frac{8EI}{L} - \left(\frac{6EI}{L^2} \right)^2 \\ (\Psi) \frac{6EI}{L^2} & (\Psi) \frac{6EI}{L^2} & (\Psi)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_x \\ P_z \\ M_z \end{Bmatrix},$$

где $\Psi = (AE/L + 12EI/L^3)$,

$$\det = \left(\frac{AE}{L} + \frac{12EI}{L^3} \right) \left[\left(\frac{AE}{L} + \frac{12EI}{L^3} \right) \frac{8EI}{L} - 2 \left(\frac{6EI}{L^2} \right)^2 \right].$$

Это решение для u_1 , w_1 и θ можно подставить в уравнение для элементов и получить решение для F_z^A и F_x^B на первой итерации. Последние можно использовать в матрице $[K_g]$ и получить улучшенное решение для u_2 , w_2 и θ . Итерации повторяются до тех пор, пока не будет получено сходящееся решение.

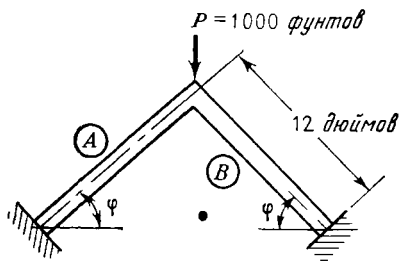


Рис. 13.12. Рассчитываемая рама — изменяемый угол в заделке

Почувительно сравнить решение, полученное на первой итерации при применении данного подхода, с решением, полученным при независимом определении осевых нагрузок. В последнем подходе $P_x = 1000$ фунтов, $P_z = M_z = 0$, $F_z^A = 0$, $F_x^B = 1000$ фунтов. С другой стороны, используя выписанные выше уравнения для первой итерации в случае $L = 12$ дюймов и прямоугольного поперечного сечения 1×1 дюйм², получим $F_x^B = 995.7$.

Отличие приведенного выше решения от решения, в котором не учитывается взаимодействие осевых и изгибных деформаций, в этом случае невелико (примерно 0.5%). Однако для более детального изучения был проведен ряд расчетов для изображенной на рис. 13.12 конструкции с теми же характеристиками поперечного сечения и при различных значениях «пологости» или углового параметра ϕ . В табл. 13.1 приведены результаты, характеризующие увеличение точности (в процентах) в определении величин $F_x^B = F_z^A$, обусловленное учетом взаимодействия осевого и поперечного деформирования

Таблица 13.1

φ (градусы)	Изгиб без учета осевых сил $F_x^B = (P/2) \sin \varphi$	Изгиб с учетом осевых сил F_x^B	Различие в %
45	707.0	702.2	0.8
30	1000.0	980.0	2.0
15	1932.0	1761.0	8.9
5	5737.0	3008.0	47.5

по сравнению с упрощенным подходом. Очевидно, что взаимодействие изгибного и осевого деформирования может, вообще говоря, существенно влиять на потерю устойчивости упругих тел.

Влиянием прогибов на распределение осевых нагрузок обычно пренебрегают в так называемом *классическом* подходе к линейному анализу устойчивости. В этом случае вначале проводится анализ осевой нагрузки конструкции до изгиба. Далее строится непосредственно геометрическая матрица жесткости. Однако трудно, а подчас невозможно использовать специальным образом высоко автоматизированные процедуры имеющихся в наличии вычислительных программ конечно-элементного анализа.

Примеры построения матриц для задач конечно-элементного анализа устойчивости стержневых систем можно найти в [13.5, 13.6].

13.4. Элементы для пластин

Набор элементов для изгиба пластин достаточно широк из-за разнообразия геометрических форм и полей перемещений, и для большей части жесткостные соотношения анализа упругой устойчивости слишком сложны, чтобы их приводить здесь. Построение подобных соотношений в явном виде для треугольных элементов особенно сложно. Поэтому ограничимся рассмотрением двух прямоугольных элементов. Читателю рекомендуется обратиться к работам [13.7—13.12], где описаны подробности формулировки других изгибных пластинчатых элементов.

Двумя основными функциями перемещений для прямоугольного элемента являются двенадцатичленная (12.32) и шестнадцатичленная полиномиальные функции, полученные при помощи полиномиальной эрмитовской интерпретации (12.31). Основное теоретическое соотношение для геометрических матриц жесткости элементов пластин задается выражением (13.21) (см. также комментарии к этой формуле). Подстановка двенадцатичленного полинома в эти уравне-

Таблица 13.2. Геометрическая матрица жесткости для прямоугольного пластинчатого элемента, основанная на 12-членном полиноме; постоянные в плоскости напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} (подробности об элементе и матрицу $[k_f]$ см. в табл. 12.1).

$$\{F\} = [k_f] + [k_{ex}] + [k_{ey}] + [k_{exy}][\Delta]$$

$$\{F\} = [F_x, M_x, M_y, F_x, M_x, M_y, F_x, M_x, M_y, F_x, M_x, M_y]$$

$$[\Delta] = [w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, w_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, w_3, \theta_{x3}, \theta_{y3}, w_4, \theta_{x4}, \theta_{y4}]$$

w_1	θ_{x1}	θ_{y1}	w_2	θ_{x2}	θ_{y2}	w_3	θ_{x3}	θ_{y3}	w_4	θ_{x4}	θ_{y4}
552											
66y ₃	12y ₃ ³										
-42x ₂	○	56x ₂ ²									
204	39y ₃	-21x ₂	552								
-39y ₃	-9y ₃ ³	○	-66y ₃	12y ₃ ³							
-21x ₂	○	28x ₂ ²	-42x ₂	○	56x ₂ ²						
-204	-39y ₃	21x ₂	-552	66y ₃	42x ₂	552					
39y ₃	9y ₃ ³	○	66y ₃	-12y ₃ ³	○	-66y ₃	12y ₃ ³				
-21x ₂	○	-7x ₂ ²	-42x ₂	○	-14x ₂ ²	42x ₂	○	56x ₂ ²			
-552	-66y ₃	42x ₂	-204	39y ₃	21x ₂	204	-39y ₃	21x ₂	552		
-66y ₃	-12y ₃ ³	○	-39y ₃	9y ₃ ³	○	39y ₃	-9y ₃ ³	○	66y ₃	12y ₃ ³	
-42x ₂	○	-14x ₂ ²	-21x ₂	○	-7x ₂ ²	21x ₂	○	28x ₂ ²	42x ₂	○	56x ₂ ²

(Симметрично)

$$[k_{ex}] = \frac{\sigma_x / y_3}{1260x_2}$$

Таблица 13.2 (продолжение)

w_1	θ_{x_1}	θ_{y_1}	w_2	θ_{x_2}	θ_{y_2}	w_3	θ_{x_3}	θ_{y_3}	w_4	θ_{x_4}	θ_{y_4}
552											
$42y_3$	$56y_3^2$										
$-66x_2$	0	$12x_2^2$									
-552	$-42y_3$	$66x_2$	552								
$42y_3$	$-14y_3^2$	0	$-42y_3$	$56y_3^2$							
$66x_2$	0	$-12x_2^2$	$-66x_2$	0	$12x_2^2$						
-204	$-21y_3$	$39x_2$	204	$-21y_3$	$-39x_2$	552					
$21y_3$	$-7y_3^2$	0	$-21y_3$	$28y_3^2$	0	$-42y_3$	$56y_3^2$				
$-39x_2$	0	$9x_2^2$	$39x_2$	0	$-9x_2^2$	$66x_2$	0	$12x_2^2$			
204	$21y_3$	$-39x_2$	-204	$21y_3$	$39x_2$	-552	$42y_3$	$-66x_2$	552		
$21y_3$	$28y_3^2$	0	$-21y_3$	$-7y_3^2$	0	$-42y_3$	$-14y_3^2$	0	$42y_3$	$56y_3^2$	
$39x_2$	0	$-9x_2^2$	$-39x_2$	0	$9x_2^2$	$-66x_2$	0	$-12x_2^2$	$66x_2$	0	$12x_2^2$

(Симметрично)

$$[k_{\theta}] = \frac{\sigma_y f y_1}{1260 x_2}$$

Таблица 13.2 (окончание)

w_1	θ_{x_1}	θ_{y_1}	w_2	θ_{x_2}	θ_{y_2}	w_3	θ_{x_3}	θ_{y_3}	w_4	θ_{x_4}	θ_{y_4}
180											
○	○										
○	$-5x_2y_3$	○									
○	○	$-36x_2$	-180								
○	○	$5x_2y_3$	○	○							
$36x_2$	$5x_2y_3$	○	○	$-5x_2y_3$	○						
-180	$-36y_3$	$36x_2$	○	$36y_3$	○	180					
$36y_3$	$6y_3^2$	$-5x_2y_3$	$-36y_3$	○	$5x_2y_3$	○	○				
$-36x_2$	$-5x_2y_3$	$6x_2^2$	○	$5x_2y_3$	○	○	$-5x_2y_3$	○			
○	$36y_3$	○	180	$-36y_3$	$-36x_2$	○	○	$36x_2$	-180		
$-36y_3$	○	$5x_2y_3$	$36y_3$	$-6y_3^2$	$-5x_2y_3$	○	○	$5x_2y_3$	○	○	
○	$5x_2y_3$	○	$36x_2$	$-5x_2y_3$	$-6x_2^2$	$-36x_2$	$5x_2y_3$	○	○	$-5x_2y_3$	○

(Симметрично)

$$[k_{\alpha\alpha}] = \frac{\tau_{xy}^2 y_3}{1260x_2}$$

ния и выполнение интегрирования приводят к матрицам $[k_{g_x}]$, $[k_{g_y}]$ и $[k_{g_{xy}}]$, представленным в табл. 13.2. Подробнее о формулировке этих матриц см. [13.13]. Соответствующие матрицы для шестнадцатичленной формулировки можно найти в [13.14].

Интересно сравнить результаты, полученные с помощью этих альтернативных формулировок для критической нагрузки защемленной квадратной пластины при однородном сжатии, используя, как показано на рис. 12.5, единственный элемент внутри квадранта. Все узловые перемещения, за исключением w_1 , равны нулю, поэтому поведение пластины описывается единственным уравнением. Используя базисный коэффициент жесткости из табл. 12.1 и геометрический коэффициент жесткости из табл. 13.2 (при $x_2=y_3=a$), для двенадцатичленной формулировки имеем

$$\frac{D}{30a^2} [120(1+1) - 24(0.3) + 84] = \frac{552}{1260} t\sigma_{x_{cr}} \text{ или } \sigma_{x_{cr}} = \frac{24.0D}{a^2 t}.$$

Используя геометрические коэффициенты жесткости, приведенные в [13.14] для шестнадцатичленной формулировки, получим $\sigma_{x_{cr}} = 26.5D/a^2t$, в то время как аналитическое решение [13.15] равно $24.8D/a^2t$. Таким образом, оба решения относительно точны для этой исключительно грубой сетки.

На рис. 13.13 представлены графики, характеризующие ошибку в процентах как функцию от параметров разбиения при подсчете на основе указанных альтернативных формулировок критической нагрузки равномерно нагруженной свободно опертой квадратной пластины. Как двенадцатичленное, так и шестнадцатичленное представление приводит к точным решениям, которые сходятся к правильному результату. Для шестнадцатичленной формулировки характер сходимости соответствует стремлению к результату сверху. Дополнительные вычислительные затраты, обусловленные существованием дополнительных степеней свободы в каждом узле, лишь частично окупаются точностью решения, полученного на базе межэлементно согласованной шестнадцатичэлементной формулировки.

Последнее утверждение подтверждается результатами, представленными на рис. 13.13, которые получены с помощью процедуры конденсации, описанной в разд. 13.2. В результате процедуры конденсации исключаются все степени свободы, за исключением поперечных смещений в узлах w_i , при этом достигается та же точность, что и для двенадцатичленной полиномиальной модели с тремя степенями свободы в каждом узле.

Приведенный пример выявляет одно из наиболее важных преимуществ использования метода конечных элементов при анализе устойчивости пластин. Так как силы в плоскости постоянны, нет необходимости проводить анализ для нахождения их распределе-

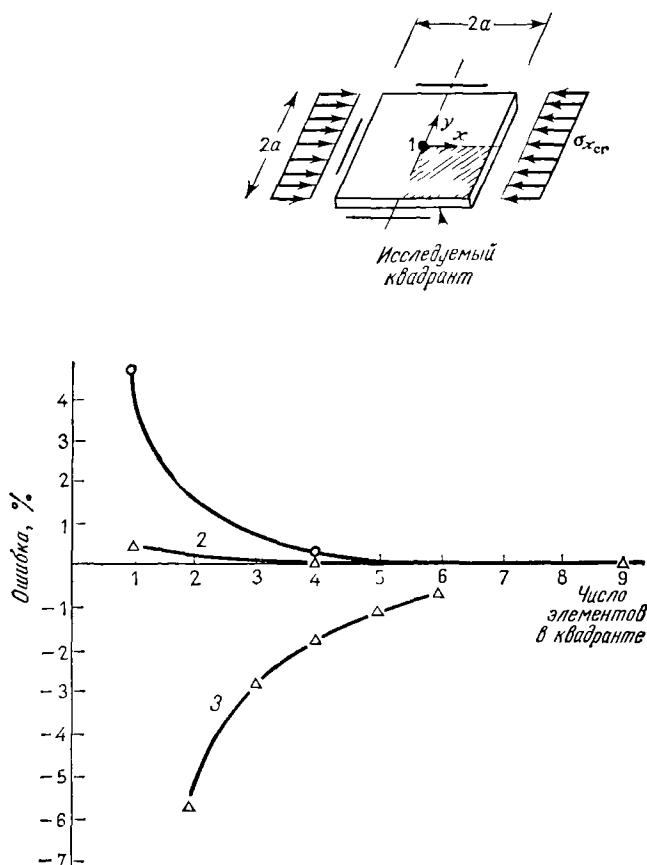


Рис 13.13 Сравнение численных результатов при анализе потери устойчивости пластин — прямоугольные элементы 1 — согласованная (16 степеней свободы) формулировка со схемой редукции, 2 — согласованная (16 степеней свободы) формулировка без схемы редукции, 3 — двенадцатичленный полином

ния внутри пластины. Однако если силы в плоскости не однородны либо отвечают сосредоточенным нагрузкам или геометрия пластины имеет особенности (например, пластина с подкрепленными вырезами или специальной формы в плане), проблема в сущности трудноразрешима с помощью классических аналитических методов. С другой стороны, метод конечных элементов легко учитывает эти случаи благодаря тому, что силы в срединной поверхности легко находятся из конечно-элементного анализа плоско-напряженного состояния, как описано в гл. 9.

Литература

- 13 1 L vesley R K Matrix Methods of Structural Analysis Chapter 10 —Oxford, England Pergamon Press, 1965
- 13 2 Wang C T Applied Elasticity —New York, N Y McGraw Hill Book Co , 1954
- 13 3 Gallagher R , Lee B Matrix Dynamic and Instability Analysis with Non uniform Elements —Int J Num Meth Eng , 1970, 2, No 2, p 265—276
- 13 4 Barsoum R , Gallagher R Finite Element Analysis of Torsional and Lateral Stability Problems —Int J Num Meth Eng , 1970 2, No 3, p 335—352
- 13 5 Halldorsson O , Wang C K Stability Analysis of Frameworks by Matrix Methods —Proc ASCE, J Struct Div , July 1968, 94, No ST7 p 1745—1760
- 13 6 Hartz B J Matrix Formulation of Structural Stability Problems —Proc ASCE J Struct. Div , Dec 1965, 91 No ST6, p 141—158
- 13 7 Gallagher R , Gellatly R , Mallett R , Padlog J A Discrete Element Procedure for Thin Shell Instability Analysis —AIAA J , Jan 1967, 5, No 1, p 138—144
- 13 8 Anderson R. G , Irons B M , Zienkiewicz O C Vibrations and Stability of Plates Using Finite Elements —Int J Solids and Struct , Oct 1968, 4, p 1031—1035
- 13 9 Argyris J H , et al Some New Elements for the Matrix Displacement Method —Proc of the 2nd Air Force Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Dayton, Ohio, Oct 1968
- 13 10 Kabaila A P , Graeijns de Veubeke B Stability Analysis by Finite Elements —AFFDL TR 70 35, Mar 1970
- 13 11 Vos R G Vann W P A Finite Element Tensor Approach to Plate Buckling and Postbuckling — Int J Num Meth Eng , 1973 5 No 3, p 351—366
- 13 12 Clough R W , Felippa C A A Refined Quadrilateral Element for Analysis of Plate Bending — Proc of 2nd Conf on Matrix Methods in Struct Mech — AFFDL TR 68 160 Oct 1968
- 13 13. Przemieniecki J S Discrete Element Methods for Stability Analysis of Complex Structures — Aero J , Dec 1968, 72, p 1077—1086
- 13 14 Pifko A Isakson G A Finite Element Method for the Plastic Buckling Analysis of Plates — AIAA J Oct 1969, 7, No 10, p 1950—1957
- 13 15 Timoshenko S , Gere J Theory of Elastic Stability, 2nd ed — New York, N Y McGraw Hill Book Co , 1961

Задачи

- 13 1. Докажите, применяя вариационные процедуры, описанные в гл 6, что уравнение (13 11) является уравнением Эйлера для функционала, задаваемого выражением (13 10) ($V=0$)
- 13 2. Выпишите уравнение Эйлера для функционала (13 31), отвечающего изгибно-крутильному деформированию
- 13 3 Решение определяющего дифференциального уравнения изгиба при действии осевой нагрузки F_x (13 11) имеет вид (см рис 13 1)

$$w = \left\{ \frac{\cos \omega(L-x) + (\cos \omega L - \cos \omega x) + \omega L \sin \omega L [1 - (x/L)] - 1}{\omega L \sin \omega L - 2(1 - \cos \omega L)^2} \right\} \omega_1 + \\ + [] \omega_2 + [] \theta_1 + [] \theta_2,$$

где $\omega^2 = F_x/EI$ Примените эту функцию перемещений при определении коэффициента жесткости, связывающего ω_1 и F_{x_1}

- 13.4. Если матрица жесткости для балочно-стержневого элемента формулируется с использованием «точной» функции перемещений, то коэффициент жест-

кости, связывающий F_x и θ_1 (см. рис. 13.1), задается формулой

$$k_{12} = -\frac{EI}{L^2} \frac{\omega^2 L^2 (1 - \cos \omega L)}{2(1 - \cos \omega L) - \omega L \sin \omega L},$$

где ω определяется так же, как и в задаче 13.3. Выпишите в полиномиальном виде этот коэффициент, разлагая в ряды тригонометрические функции, сохраняя два первых члена разложения. Сравните полученную формулировку с приведенной в данной главе.

13.5. Рассчитайте свободно опертую балку-колонну, используя приведенную в этой главе матрицу $[k_g]$, в случае действия центральной сосредоточенной силы P и осевых нагрузок интенсивностью $F_x/F_{x_{cr}} = 0.5, 0.75$ и 0.9 [$F_{x_{cr}} = (\pi^2 EI/L^2)$]. Сравните полученный результат с точным решением.

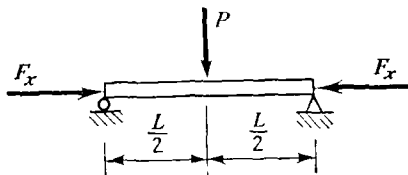


Рис. P13.5.

13.6. Используя один элемент, вычислите критическую нагрузку для суживающейся балки, изображенной на рис. P13.6.

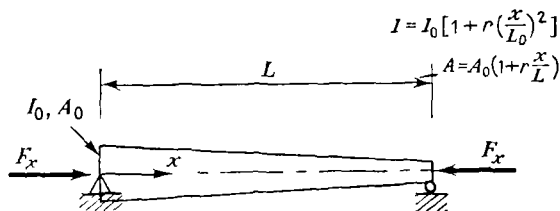


Рис. P13.6.

13.7. Расчлените уравнения анализа потери устойчивости по отношению к перемещениям $\{w\}$ и $\{\theta\}$, как это сделано в (13.28). Осуществите «точную» редукцию этих уравнений, разрешая нижнюю часть уравнений относительно $\{\theta\}$. Далее, разлагая в ряд член $[k_{f\theta\theta} + \omega k_{g\theta\theta}]^{-1}$, который фигурирует в результирующем выражении, и исключая члены более высокого порядка, чем ω , покажите, что получаемое выражение совпадает с (13.29).

13.8. Для рамы, изображенной на рис. P13.8, вычислите P_{cr} без учета осевой

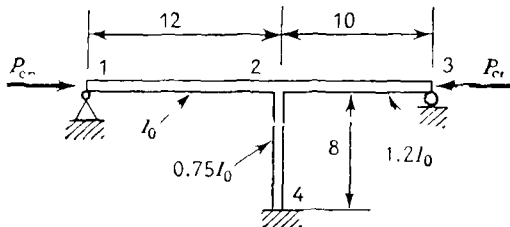


Рис. P13.8. (Размеры в футах.)

жесткости при построении соотношений связи между силами и перемещениями ($P_{cr} = 0.135 I_0 E$ из [13.15]).

13.9. Вычислите P_{cr} для ступенчатой балки, изображенной на рис. P13.9.

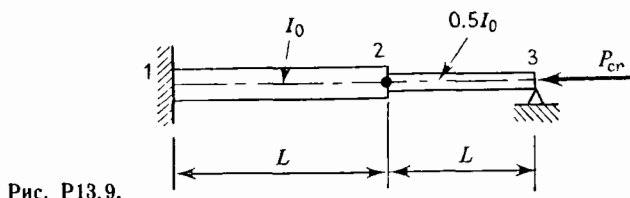


Рис. P13.9.

13.10. Вычислите P_{cr} для балки, изображенной на рис. P13.10.

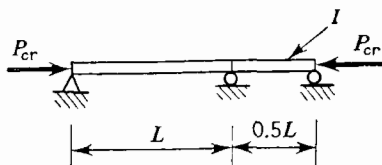


Рис. P13.10.

13.11. (Задача для вычисления на ЭВМ.) Вычислите P_{cr} для балки, изображенной на рис. P13.11 ($E=30 \cdot 10^6$ фунт/дюйм², $I_0=10.0$ дюйм⁴, $A_0=2.0$ дюйм²).

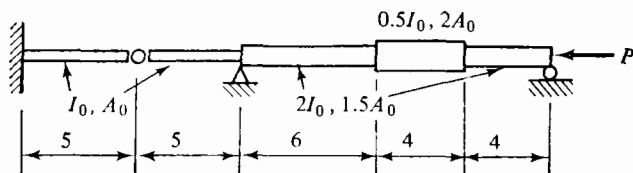


Рис. P13.11. (Размеры в футах.)

13.12. Вычислите критическую нагрузку для заостренной колонны, используя один элемент с жесткостным представлением, сформулированным на базе эрмита полиномиального представления поперечных смещений пятого порядка. Для этого представления требуется знание следующих степеней свободы: w , $dw/dx = -w_x$ и $d^2w/dx^2 = w_{xx}$ в каждом узле. При этом

$$L^5 w = (L^5 - 10L^2 x^3 + 15Lx^4 - 6x^5) w_1 - L (L^4 x - 6L^2 x^3 + 8Lx^4 - 3x^5) w_{x1} + \\ + \frac{1}{2} L^2 (L^3 x^2 - 3L^2 x^3 + 3Lx^4 - x^5) w_{xx1} + (10L^2 x^3 - 15Lx^4 + 6x^5) w_2 - \\ - L (7Lx^4 - 4L^2 x^3 + 3x^5) w_{x2} + \frac{1}{2} L^2 (L^2 x^3 - 2Lx^4 + x^5) w_{xx2}.$$

13.13. Сформулируйте матрицу жесткости $[k_g]$ для треугольного изгибного пластинчатого элемента, изображенного на рис. P13.13, при наложении постоянных напряжений σ_x в срединной поверхности. Построение матрицы жесткости элемента основано на квадратичной (шестиуленной) функции для w (см. рис. 12.8b из гл. 12).

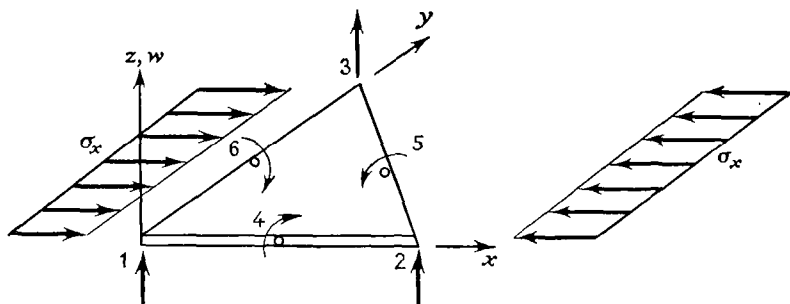


Рис. Р13.13.

13.14. В кольцевом пластинчатом элементе, изображенном на рис. Р13.14, матрица жесткости построена в соответствующей задаче из гл. 12, значение температуры выросло на величину T по сравнению с температурой для напряженного состояния. Используя один элемент, вычислите критическое значение T , вызывающее выпучивание. (Используйте линейную по радиусу функцию смещения и линеаризуйте полученные в результате интегрирования выражения.)

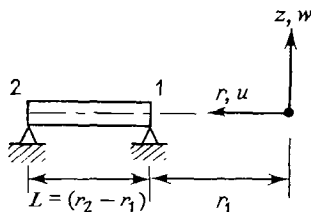


Рис. Р13.14.

13.15. Для изображенной на рис. Р13.15 балки определите критическую нагрузку P_x , используя два элемента. Сравните с точным решением $\pi^2 EI / 4L^2$.

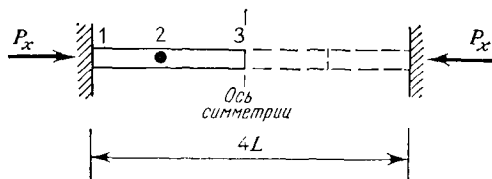


Рис. Р13.15.

13.16. Для балки из задачи 13.15 определите зависимость основной частоты колебаний от следующих значений отношения приложенной нагрузки P_x к «эффективной критической силе»: $P_{cr} = EI / L^2$, $P_x / P_{cr} = 10$, $P_x / P_{cr} = 20$, где L — длина элемента.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Анализ конструкций матричный** 7
Аналитическая модель 88
Аналитическое представление 88
Аппроксимация конечно-элементная 120
- Библиотека конечных элементов** 31
- Вариация функционала первая** 162
Вектор ортогональный 63
— собственный 63
Векторы сопряженные 57
Выделение движения как твердого целого 114
- Деформации малые** 113
— начальные 90
- Закон Бетти** 52
Закрепление консольное 49
Значения собственные 63
- Конденсация** 60
Координаты естественные 236
— тетрагональные 227
— треугольные 227
— физические 235
Коэффициент жесткости элемента 45
Коэффициенты жесткости глобальные 72
- Математическая модель** 41
Материал анизотропный 118
— изотропный 91, 116
Матрица булева 82
— Гессе 167
— глобальная статическая 81
— дополнительная 84
— единичная 58
— жесткости геометрическая 397
— — глобальная несвязанная 81
— — инкрементальная 397
— — материала 117
— — модальная 64
— — опорная 158
— — элемента 45, 129
— кинематическая глобальная 81
— корректировочная 186
— массы согласованная 159
— несогласованная 159
— ортогональная 58
— отрицательно определенная 168
— податливости материала 117
— положительно определенная 172
— — полуопределенная 212
— разреженная 76
— сосредоточенных масс 159
— теплопроводности элемента 142
Метод Галеркина 143
— взвешенных невязок 142
— жесткости прямой 70
— множителей Лагранжа 165
— податливости прямой 190
Методы вариационные обобщенные 8, 152
— гибридные 178
— конгруэнтных преобразований 70
— прямые 8
Минимизация энергии прямая 84
Множитель Лагранжа 165

Нагрузки распределенные 43
 — энергетически эквивалентные 158
 Неустойчивость кинематическая 84
 — — конечно-элементной модели 86
 — упругая 9

Оператор Лапласа 147
 Оси координат глобальные 39
 — — локальные 39

Перемещения глобальные в узлах 81
 — кинематически допустимые 152
 — обобщенные 47, 126
 Подконструкция 23, 91
 Представление изопараметрическое 177
 Преобразование конгруэнтное 55
 — контраградиентное 57
 — координат 93
 Принцип виртуальной работы 152
 — виртуальных перемещений 152
 — — сил 152
 — минимума дополнительной энергии 140
 — — потенциальной энергии 139
 — Рейсснера 147
 — согласованности 159
 Принципы вариационные с использованием мультиполей 199
 Программа общего назначения 7

Свойство взаимности Максвелла 52
 Силы дополнительные 84
 — обобщенные 41, 47
 — поверхностные 43
 Система уравнений жесткости полная 48
 Смещение трансляционное 37
 — узловое 37
 Соотношения между силами и перемещениями 45
 Состояние плоско-деформированное 326
 — плоско-напряженное 265
 Степень свободы 39

Теорема Гаусса 154
 — единственности 119
 Точка соединения 38
 — стационарная 161
 — узловая 38

Уравнение жесткости 69
 — податливости для закрепленного элемента 48
 — Пуассона 147
 — состояние для материала 116
 — характеристическое 63
 — Эйлера 164
 Уравнения жесткости глобальные 72
 — — для элемента 45
 — равновесия 119
 — смешанного типа 147
 Условие необходимое первое 161
 Условия граничные 89
 — — главные 164
 — — естественные 164
 — кинематической допустимости 171
 — равновесия 15
 — совместности 15

Формулировки смешанного типа 212
 Функции двойственные 191
 — пробные 228
 Функционал 161
 — дискретный 166
 — расширенный 165
 — — дополнительной энергии 223
 — Рейсснера 195
 Функция напряжений Саусвелла 110
 — — Эри 110
 — формы 133

Элемент изгибный пластинчатый 9
 — основной 21
 — плоско-напряженный 9
 — сплошной (трехмерный) 21
 — тетраэдральный с постоянной деформацией 312
 Элементы высокого порядка 45
 — изопараметрические 258
 — субпараметрические 259
 Энергия деформации 50
 — обобщенная потенциальная 185

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редактора перевода	5
Предисловие	6
Список обозначений	11
 1. ВВЕДЕНИЕ	 15
1.1. Краткая история развития метода конечных элементов	17
1.2. Типы элементов	19
1.3. Некоторые приложения метода конечных элементов	22
1.4. Программы общего назначения	30
Литература	33
 2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ С ЭЛЕМЕНТАМИ	 35
2.1. Система координат	36
2.2. Идеализация с помощью основных конечных элементов	41
2.3. Свойства соотношений между силами и перемещениями для элемента	45
2.4. Работа и энергия	50
2.5. Свойства взаимности	51
2.6. Преобразование соотношений жесткости и податливости	53
2.7. Преобразование степеней свободы	56
2.8. Конденсация	60
2.9. Выделение мод движения тела как твердого целого	62
Литература	65
Задачи	65
 3. СПОСОБЫ ГЛОБАЛЬНОГО АНАЛИЗА КОНСТРУКЦИЙ	 69
3.1. Прямой метод жесткости. Основные понятия	70
3.2. Прямой метод жесткости. Общая методика	73
3.3. Метод конгруэнтных преобразований в жесткостном анализе	80
3.4. Обзор преимуществ метода конечных элементов	88
3.5. Специальные операции	91
Литература	102
Задачи	103

4. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ	107
4.1. Дифференциальные уравнения равновесия	108
4.2. Граничные условия для напряжений	111
4.3. Соотношения, связывающие деформации с перемещениями, и условия совместности	113
4.4. Уравнения состояния материала	116
4.5. Дифференциальные уравнения равновесия и совместности	119
4.6. Заключительные замечания	121
Литература	122
Задачи	122
5. ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ	125
5.1. Прямой метод	126
5.2. Треугольный плоско-напряженный элемент	134
5.3. Ограничения в прямом методе	139
5.4. Прямой метод при решении физических задач	141
5.5. Метод взвешенных невязок	142
Литература	149
Задачи	149
6. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ	151
6.1. Принцип виртуальной работы	152
6.2. Вариационное исчисление	160
6.3. Дискретная вариационная задача	166
6.4. Минимум потенциальной энергии	169
6.5. Гибридные методы перемещений и метод обобщенной потенциальной энергии	178
6.6. Метод минимизации дополнительной энергии	187
6.7. Гибридный метод допустимых напряжений [6.14—6.15]	191
6.8. Энергетический метод Рейсснера и альтернативные функционалы	194
6.9. Некоторые заключительные замечания	198
Литература	200
Задачи	201
7. ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ ГЛОБАЛЬНОГО АНАЛИЗА КОНСТРУКЦИЙ	205
7.1. Принцип минимума потенциальной энергии	206
7.2. Решение, полученное на основе принципа минимума потенциальной энергии, — нижняя граница решения	209
7.3. Учет ограничений методом множителей Лагранжа	211
7.4. Метод обобщенной потенциальной энергии	215
7.5. Принцип минимума дополнительной энергии	218
7.6. Свойство верхней грани для решения, получаемого с помощью принципа минимума дополнительной энергии	223
Литература	225
Задачи	225

8. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОВЕДЕНИЯ ЭЛЕМЕНТА И ЕГО ГЕОМЕТРИИ	226
8.1. Требования к представлению функций поведения элемента	223
8.2. Полиномиальные ряды	230
8.3. Непосредственное построение функций формы с помощью процедуры интерполяции	235
8.4. Прямоугольные элементы	241
8.5. Треугольные элементы	246
8.6. Тетраэдральные элементы	252
8.7. Внутренние моды и редукция к простым формам	255
8.8. Изопараметрическое представление [8.11]	258
Литература	262
Задачи	263
9. ПЛОСКО-НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ	265
9.1. Основные соотношения	266
9.2. Треугольные плоско-напряженные элементы	270
9.3. Прямоугольные элементы	290
Литература	300
Задачи	301
10. ТРЕХМЕРНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ: ОБЩИЙ СЛУЧАЙ	304
10.1. Основные соотношения	306
10.2. Построения тетраэдральных элементов	308
10.3. Прямоугольные шестигранные элементы	314
10.4. Сравнение численных результатов	318
10.5. Изопараметрическое представление и анализ оболочек с помощью трехмерных элементов	321
Литература	323
11. СПЛОШНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ: ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ	325
11.1. Плоско-деформированное состояние	326
11.2. Осесимметричные тела	326
11.3. Произвольные нагрузки	335
11.4. Заданное объемное изменение — несжимаемость	338
Литература	340
Задачи	342
12. ИЗГИБ ПЛАСТИН	343
12.1. Теория изгиба	345
12.2. Прямоугольные элементы	354
12.3. Треугольные элементы	361
12.4. Прогибы, вызванные поперечным сдвигом	377
12.5. Исключение ограничения на деформации поперечного сдвига (дискретная процедура, основанная на гипотезе Кирхгофа) [12.58]	380
12.6. Эффективность применения трехмерных конечных элементов	383
12.7. Заключительные замечания	384
Литература	385
Задачи	388

13. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ ТЕЛ	393
13.1. Общая линейная теория анализа устойчивости	394
13.2. Глобальная формулировка	399
13.3. Призматический элемент	402
13.4. Элементы для пластин	413
Литература	419
Задачи	419
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	423

Ричард Галлагер

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ: ОСНОВЫ

Ст. научн. ред. П. Я. Корсоюцкая
Мл. научн. ред. Р. И. Пяткина
Художник Л. М. Муратова
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор Е. В. Ящук
Корректор С. А. Денисова

ИБ № 3791

Сдано в набор 30.12.83

Подписано к печати 5.06.84

Формат 60×90¹/₁₆.

Бумага типографская № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 13,50 бум. л. Усл. печ. л. 27,00. Усл. кр.-отг. 27,00

Уч.-изд. л. 25,52. Изд. № 1/2718. Тираж 10 000 экз.

Заказ № 2547. Цена 2 р 40 к

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

129820. ГСП, Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Октябрьской Революции

и ордена Трудового Красного Знамени

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова

Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР

по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.

113054, Москва, Валуевская, 28