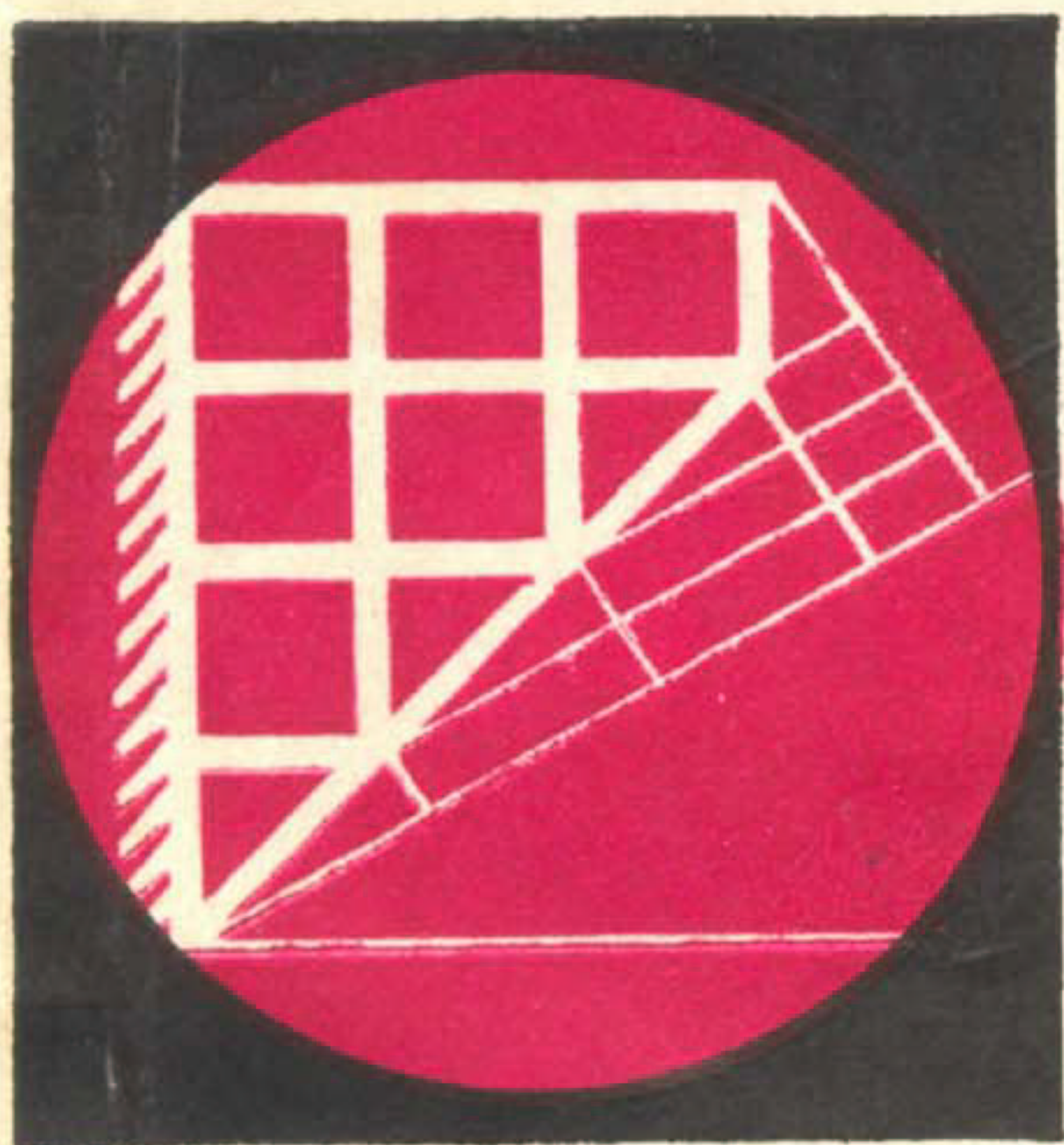


М 367947



В. П. КАНДИДОВ  
С. С. ЧЕСНОКОВ  
В. А. ВЫСЛОУХ

# Метод конечных элементов в задачах динамики



Издательство  
Московского университета



В.П.Кандидов, С.С.Чесноков, В.А.Выслоуж

**МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ  
В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ**

Издательство Московского университета  
1980

УДК 534. 1:535. 2:518. 517

Печатается по постановлению  
Редакционно-издательского совета  
Московского университета

Рецензенты:  
канд. физ.-матем.  
наук М.С.Галкин,  
канд. техн. наук  
А.Ф.Минаев

Кандидов В.П., Чесноков С.С., Выслоух В.А.

Метод конечных элементов в задачах динамики. М., Изд-во  
Моск. ун-та, 1980.

165 с. 56 ил. Библиогр. 104 назв.

В книге излагается метод конечных элементов применительно к некоторым задачам динамики распределенных систем. Значительное внимание уделяется вопросам сокращения объема вычислений при сохранении точности решения. Основная часть книги посвящена построению расчетных моделей и алгоритмов для анализа колебаний плоских упругих тел и их устойчивости при обтекании потоком газа. На конкретных примерах дается физическая интерпретация результатов численного исследования, а также обсуждается точность различных моделей. Метод конечных элементов обобщается также на некоторые задачи самовоздействия при распространении световых пучков в нелинейных средах.

Книга представляет интерес для научных сотрудников, инженеров и аспирантов, использующих численные методы в теории колебаний и распространения волн, а также работающих в области аэроупругости.

К 20204 - 039  
077 (02) - 80 БЗ № 46-8-79 1703040000

© Издательство Московского университета, 1980 г.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Метод конечных элементов сформировался в 60-х годах и в настоящее время является эффективным средством решения различных задач физики и техники. Своим возникновением метод обязан структурному анализу, развитому в технике для статического расчета конструкций и сооружений. Оттуда идея "дискретизации" была с успехом перенесена на непрерывные системы. Вначале область применения метода конечных элементов ограничивалась расчетом полей статической деформации упругих систем: пластин, оболочек, арок, гидротехнических сооружений. Затем метод стал развиваться в задачах динамики упругих систем, нестационарных задачах теплопроводности, нелинейной диффузии, гидродинамики и др.

Быстрое развитие метода, особенно вначале, связано прежде всего с его наглядностью. Модель непрерывной системы набирается из конечных элементов, как бы из деталей. В результате устанавливается простое соответствие между конечными элементами и частями исследуемой системы. Это позволяет привлекать физическую интуицию к целенаправленному построению модели, используя более совершенные элементы или изменяя их размеры.

Достоинства метода проявляются прежде всего при исследовании полей в ограниченных областях неправильной конфигурации со сложными условиями на границе. С помощью типовых элементов различной формы и степени аппроксимации удастся довольно точно воспроизвести границу области. При этом граничные условия не накладывают специальных требований на вводимые элементы.

Подход к методу конечных элементов как способу построения модели для численного анализа системы позволяет



рассматривать его как одну из конкретных ветвей диалектики — общего метода исследования систем путем их расчленения [1]. Наряду с этим метод конечных элементов начинает широко использоваться для расчета нестационарных полей в неограниченных областях и областях правильной формы с простыми граничными условиями. В этом случае метод можно рассматривать как вариационный способ получения консервативных конечноразностных схем с необходимой степенью аппроксимации.

Метод конечных элементов сочетает идеи, лежащие в основе разностных и вариационных методов. С одной стороны, подобно разностным схемам, на рассматриваемую область наносится сетка разбиения; искомыми координатами служат значения поля и его производных в узлах сетки. С другой стороны, для определения поля на элементах разбиения используют вариационные принципы. При этом решение на элементе обычно аппроксимируется полиномами, что приближает метод конечных элементов к методу сплайнов. В методе конечных элементов удается в значительной мере соединить преимущества разностных и вариационных методов: универсальность первых и высокую точность вторых.

С развитием вычислительных средств возможности метода конечных элементов постоянно расширяются. Свидетельством тому является стремительный рост числа работ, посвященных развитию, обоснованию метода и приложениям его к конкретным задачам. В последние годы вышли в свет монографии с изложением теории и практики метода. Некоторые из них переведены на русский язык (О.Зенкевич. "Метод конечных элементов в технике", "Мир", 1975; Дж.Оден. "Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред". "Мир", 1976; Г.Стренг, Дж.Фикс. "Теория метода конечных элементов". "Мир", 1977).

Настоящая книга посвящена одной из областей применения метода конечных элементов — исследованию полей, зависящих от времени. В ней рассматриваются задачи о колебаниях упругих систем и их устойчивости в потоке газа. Кроме того, метод обобщается на такие нелинейные задачи, как распространение ограниченного лазерного пучка, дрейф носителей в полупроводниковом приборе. Значительное внимание уделяется вопросам сокращения вычислительных затрат при сохранении точности.



Книга написана по результатам многолетних работ, ведущихся на физическом факультете МГУ. Эти работы начались по инициативе проф. С.П.Стрелкова и длительное время выполнялись под его непосредственным руководством.

При работе над книгой большую помощь авторам оказали Л.П.Ким и К.Д.Егоров, полезными были обсуждения с В.И.Телегиным. Авторы пользуются возможностью выразить им благодарность.



## ОСНОВЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Метод конечных элементов — один из прямых методов решения задач математической физики в вариационной постановке. Как и всякий другой приближенный метод, он имеет различные модификации, отличающиеся физической интерпретацией, общей схемой, математической обоснованностью и, наконец, областью применимости. Однако их объединяет общая идея метода, состоящая в том, что минимизация функционала вариационной задачи осуществляется на совокупности функций, каждая из которых определена на своей подобласти. Благодаря этому становится возможным использовать на каждой подобласти стандартную последовательность базисных функций и получать решения для широкого класса задач, отличающихся распределением параметров внутри области, ее геометрией, граничными условиями.

В этой главе излагаются общие принципы метода, даются два основных подхода к решению динамических задач, обсуждаются вопросы сходимости, уменьшения числа динамических переменных.

### § 1. Общая схема, основания

Рассмотрим схему метода конечных элементов на примере двумерной области  $\Omega$ . В задачах динамики упругих тел искомым полем обычно является поле перемещений, реже — поле напряжений. В частности, для тонких пластин  $v(x, y, t)$  — поперечное смещение срединной поверхности, либо векторное поле, компоненты которого — продольные смещения по осям  $x$  и  $y$ . В задачах нестационарной



ционарной диффузии  $v(x, y, t)$  – концентрация, в задачах теории волн  $v(x, y, t)$  – комплексная амплитуда волны.

Пусть требуется найти поле  $v(x, y, t)$  в некоторой области  $\Omega$ , ограниченной контуром  $L$ . Разобьем  $\Omega$  на подобласти  $\Omega^e$ . (На рис. 1.1. подобласти взяты в виде треугольников и четырехугольников; контур  $L$  заменен ломаной.)

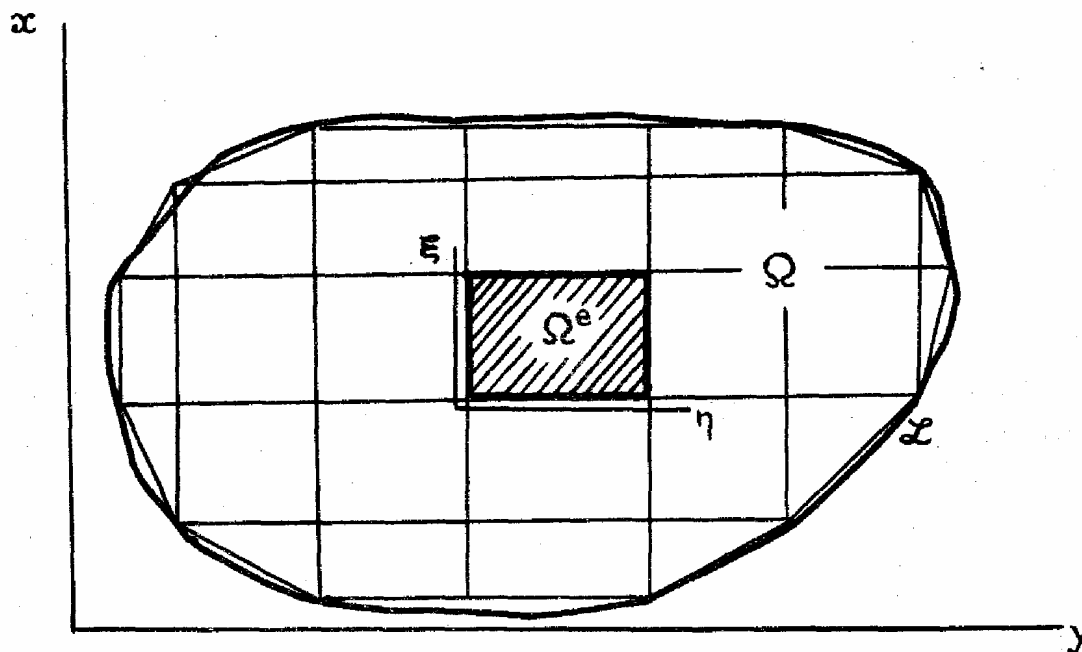


Рис. 1.1

Представим  $v(x, y, t)$  совокупностью функций  $v^e(x, y, t)$ , каждая из которых определена на своей подобласти  $\Omega^e$ . Такую совокупность будем называть кусочно-определенной функцией. Функцию  $v^e(x, y, t)$  аппроксимируем, в свою очередь, линейной формой конечного числа базисных функций. Тем самым задачу об определении непрерывной функции  $v(x, y, t)$  сведем к задаче о нахождении конечного числа обобщенных координат – коэффициентов линейной формы. В качестве координат возьмем значения функции  $v(x, y, t)$  и ее пространственных производных в ряде фиксированных точек – узлах подобласти  $\Omega^e$ . Для вычисления координат воспользуемся вариационным принципом, согласно которому они определяются из условия стационарности или экстремальности некоторой величины, имеющей смысл энергии. В результате для обобщенных координат отдельных подобластей  $\Omega^e$  и всей области  $\Omega$  получим систему обыкновенных диффе-



ренциальных уравнений, которая описывает их изменение во времени. Таким образом, поле  $v(x, y, t)$  вычисляется в виде кусочно-определенной функции, которая выражается через введенные координаты. Эта функция является приближением по энергии к точному решению.

Подобласть  $\Omega^e$ , на которой поле однозначно определяется конечным числом координат, удовлетворяющих уравнениям динамики, называют конечным элементом. Совокупность конечных элементов, связанных между собой кинематически и динамически посредством условий сопряжения, образует модель поля  $v(x, y, t)$  на области  $\Omega$ .

Видно, что метод конечных элементов в значительной мере подобен классическим вариационным методам, в которых базисные функции, аппроксимирующие решение  $v(x, y, t)$ , вводятся на всей области [2]. Однако в рассматриваемом методе приближенное решение строится на кусочно-определенной функции и варьируемыми координатами являются значения поля и его производных в узлах. Вследствие этого в методе конечных элементов для задач данного класса можно применять типовые конечные элементы, на которых поле аппроксимируется стандартной системой базисных функций. В частности, типовые элементы находятся также и у границы области; выполнение краевых условий сводится к наложению дополнительных связей на их координаты. Далее, для модели из конечных элементов характерно "близкодействие", т.е. координаты некоторого узла определяют поле только на прилежащих к нему элементах. Поэтому матрицы коэффициентов в системе уравнений для координат всегда имеют ленточную структуру с большим числом нулей в отличие от классических вариационных методов, где матрицы коэффициентов зачастую являются заполненными.

Согласно вариационным принципам решение дифференциального уравнения в частных производных на области  $\Omega$  заменяется равносильной задачей о нахождении функции  $v(x, y, t)$ , на которой функционал  $S[v]$  минимален или стационарен [2]. Наряду с этим для широкого класса задач вариационная формулировка следует непосредственно из фундаментальных физических положений, а уравнение в частных производных с граничными условиями является эквивалентной постановкой задачи в дифференциальной форме [3].



В случае свободных колебаний линейных консервативных систем (например, малые колебания упругого тела без трения в пустоте) минимизируемым функционалом является действие [3]

$$S[v] = \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt, \quad (1.1)$$

здесь  $T$  и  $U$  — кинетическая и потенциальная энергия поля в замкнутой области  $\bar{\Omega}$ .

В динамике неконсервативных систем, когда экстремальный принцип неприменим, обычно используется более общий принцип виртуальных перемещений. По этому принципу сумма работ всех приложенных нагрузок на виртуальном перемещении  $\delta v$  равна нулю. Если это перемещение сопровождается изменением потенциальной энергии, то

$$-\delta U + \int_{\bar{\Omega}} [-\sigma \tilde{v} \delta v + f v] d\Omega = 0. \quad (1.2)$$

Здесь первое слагаемое — вариация потенциальной энергии, например, упругой деформации; второе и третье — работы инерционных сил и внешней нагрузки плотности  $f$ ,  $\sigma$  — плотность тела на единицу поверхности.

В случае нелинейных и несамосопряженных задач используется формулировка, которая следует из метода Галеркина [2]. Пусть внутри области  $\Omega$  функция  $v(x, y, t)$  удовлетворяет уравнению

$$P[v(x, y, t)] - f(x, y, t) = 0, \quad x, y \in \Omega; \quad (1.3)$$

на контуре  $L$  — краевому условию

$$N[v(x, y, t)] = g(x, y), \quad x, y \in L; \quad (1.4)$$

где  $P, N$  — дифференциальные операторы,  $f, g$  — известные функции.

Приближенное решение  $v(x, y, t)$  в методе Галеркина ищется в виде линейной формы конечного числа базисных функций  $\Psi_j(x, y)$

$$\tilde{v}(x, y, t) = \sum_{j=1}^J \tilde{q}_j(t) \Psi_j(x, y). \quad (1.5)$$

При этом  $\Psi_j(x, y)$  удовлетворяют всем краевым условиям на контуре  $L$ . После подстановки  $\tilde{v}(x, y, t)$  в уравнение (1.3) возникает "невязка" — отличие от нуля левой части. Из условий ортогональности "невязки" к функциям базиса определяются галеркинские координаты  $\tilde{q}_j(t)$

$$\int_{\Omega} (P[\tilde{v}(x, y, t)] - f(x, y, t)) \Psi_j(x, y) d\Omega = 0, \quad j=1, 2, \dots, J. \quad (1.6)$$

При таком подходе выполнение краевых условий на контуре  $L$  связано со значительными трудностями. Это



преодолевается в несколько иной формулировке метода Галеркина, которая, в частности, следует из принципа локального потенциала [4,5]. Здесь задача (1.3), (1.4) заменяется эквивалентной задачей о минимуме или, чаще, о стационарности функционала двух переменных: искомого поля  $v(x, y, t)$  и усредненного по отклонениям поля  $v^0(x, y, t)$

$$S[v, v^0] = \int_{\Omega} s[v, v^0] d\Omega, \quad (1.7)$$

здесь  $s[v, v^0]$  — плотность локального потенциала. Условие стационарности локального потенциала  $\delta_v S[v, v^0] = 0$ , при котором варьирование производится только по функции  $v$ , с последующим требованием  $v^0(x, y, t) = v(x, y, t)$  приводит к задаче (1.3), (1.4).

Для определения  $v(x, y, t)$  используется самосогласованное приближение, т.е.  $v(x, y, t)$  и  $v^0(x, y, t)$  представляется линейными формами одних и тех же базисных функций. Тогда если  $v(x, y, t)$  взята в виде (1.5), то

$$v^0(x, y) = \sum_{j=1}^J \tilde{q}_j^0(t) \Psi_j(x, y). \quad (1.8)$$

В этом случае функционал  $S$  становится функцией переменных двух видов: варьируемых  $\tilde{q}_j(t)$  и стационарных  $\tilde{q}_j^0(t)$ . Из условия экстремальности

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{q}_j} S(\tilde{q}_j, \tilde{q}_j^0) = 0 \quad (1.9)$$

и последующего наложения условия  $\tilde{q}_j^0 = \tilde{q}_j$  следует система уравнений относительно  $\tilde{q}_j(t)$ , которая совпадает с (1.6.).

Заметим, что кроме вариационных подходов известны другие формулировки исходной задачи. Например, в [6] предлагается использовать непосредственно законы сохранения энергии, импульса и других фундаментальных величин; в [7] для вывода уравнений модели применяется приближенное решение, полученное методом смягчения краевых условий.

## § 2. Кинематика конечного элемента

Рассмотрим отдельную подобласть  $\Omega^e$ . Аппроксимируем поле на ней линейной формой конечного числа перед выбранных базисных функций  $\bar{\psi}^e(\xi, \eta)$ , где  $\xi, \eta$  — ло-



кальные координаты на  $\Omega^e$  (рис. 1.1). Удобно записать  $v^e(\xi, \eta, t)$  в виде матричного соотношения.

$$v^e(\xi, \eta, t) = \bar{\psi}^T(\xi, \eta) [d_k] \bar{q}^e(t). \quad (2.1)$$

Здесь  $\bar{\psi}^T(\xi, \eta) = \{\psi_1(\xi, \eta), \psi_2(\xi, \eta), \dots, \psi_\nu(\xi, \eta)\}$  – вектор-строка из  $\nu$  базисных функций\*;  $\bar{q}^e(t)$  – вектор-столбец обобщенных координат элемента;  $[d_k]$  – матрица преобразования координат.

Узлами могут быть любые точки на  $\Omega^e$ , например геометрический центр фигуры, середины сторон для подобласти, ограниченной ломаной, и т.п. Опыт показывает, что наиболее удобно выбирать в качестве узлов точки, которые будут общими для наибольшего числа смежных элементов модели. На рис. 1.1. за узлы приняты вершины четырехугольников и треугольников. Обозначим число узлов на элементе через  $n$ , их координаты –  $\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2; \dots$ . Вектор обобщенных координат можно представить в виде

$$\bar{q}^{eT}(t) = \{\bar{v}^T, \frac{\partial \bar{v}^T}{\partial \xi}, \frac{\partial \bar{v}^T}{\partial \eta}, \dots\}^e,$$

здесь  $\bar{v}^T = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  – строка значений поля в узлах:

$v_1 = v(\xi_1, \eta_1, t), v_2 = v(\xi_2, \eta_2, t), \dots; \frac{\partial \bar{v}^T}{\partial \xi}, \frac{\partial \bar{v}^T}{\partial \eta}, \dots$  – строки, элементы которых суть значения производных функции  $v(x, y, t)$  в узлах элемента. Размерность вектора  $\bar{q}^e(t)$  равна общему числу обобщенных координат элемента  $r$ .

Введение матрицы  $[d_k]$  в выражение (2.1.) дает определенную свободу в выборе обобщенных координат элемента для взятого множества функций  $\bar{\psi}(\xi, \eta)$ . С ее помощью осуществляется преобразование от системы координат в пространстве функций  $\bar{\psi}(\xi, \eta)$  к обобщенным координатам  $\bar{q}(t)$ . Для вычисления матрицы  $[d_k]$  подставим в (2.1) векторы  $\bar{q}^e(t)$ , образующие линейно независимую систему, например,  $\bar{q}_1^{eT} = \{v_1^e, 0, 0, \dots\}$ ,  $\bar{q}_2^{eT} = \{0, v_2^e, 0, \dots\}$  и т.д. Воспользовавшись определением компонент вектора  $q^e(t)$ , получим

$$\begin{cases} v_1^e(t) = \bar{\psi}^T(\xi_1, \eta_1) [d_k] \bar{q}_1^e(t), \\ v_2^e(t) = \bar{\psi}^T(\xi_2, \eta_2) [d_k] \bar{q}_2^e(t), \\ \dots \end{cases}$$

\*

Верхний индекс T обозначает транспонирование.

Порядок системы равен  $r$ . Если число базисных функций  $\nu = r$ , матрица  $[d_k]$  – квадратная, порядка  $\nu \times \nu$ . Когда  $r > \nu$ , матрица  $[d_k]$  – прямоугольная с нулевыми столбцами и часть координат являются вырожденными. При  $r < \nu$  числа координат  $\bar{q}$  недостаточно и функция  $v^e(\xi, \eta, t)$  не определена однозначно на выбранной последовательности  $\bar{\psi}(\xi, \eta, t)$ .

Требования к базисным функциям  $\bar{\psi}^e(\xi, \eta)$ , во-первых, определяются физической непротиворечивостью аппроксимации на конечном элементе поля на подобласти  $\Omega^e$ . В частности, базисные функции  $\bar{\psi}(\xi, \eta)$  должны быть таковы, чтобы при нулевом векторе обобщенных координат  $\bar{q}^e = 0$  поле на элементе  $v^e(\xi, \eta, t) \equiv 0$ . Во многих случаях можно указать вырожденные поля, при которых не возникает потенциальной энергии на подобласти  $\Omega^e$ \*. Поэтому базисные функции должны быть таковы, чтобы для векторов, соответствующих этим полям, плотность потенциальной энергии на элементе  $u[v^e] \equiv 0$ .

Во-вторых, требования к базисным функциям  $\bar{\psi}(\xi, \eta)$  определяются энергетическими соображениями. Пусть функционал, используемый в задаче, выражается через пространственные производные функции  $v^e(\xi, \eta, t)$  до  $K$ -того порядка включительно. При этом производные до  $K-1$ -го порядка называются главными [2]. Из требования нетривиальности выбранной аппроксимации  $v^e(\xi, \eta, t)$  следует, что в последовательности  $\bar{\psi}(\xi, \eta)$  должна быть по крайней мере одна функция, у которой не обращаются тождественно в нуль производные до  $K$ -того порядка, т.е.  $\partial^n \bar{\psi} / \partial \xi^1 \partial \eta^{n-1} \neq 0, 1 = 0, 1, \dots, n, n = 1, \dots, K$ . Далее требование конечности энергии или локального потенциала приводит к ограниченности всех производных базисных функций до  $K$ -того порядка на замкнутой области  $\bar{\Omega}^e$ . Наконец, существуют поля  $v^e(\xi, \eta, t)$ , при которых плотность энергии не зависит от  $\xi, \eta$  на  $\bar{\Omega}^e$ . Поэтому функции  $\bar{\psi}(\xi, \eta)$  должны быть таковы, чтобы для векторов  $\bar{q}^e(t)$ , соответствующих этим полям, плотность энергии на конечном элементе была

---

\* Для конкретных задач такие поля нетрудно найти из физических соображений. В случае упругой деформации потенциально вырожденными полями являются поля перемещений подобласти  $\Omega^e$  как твердого тела, в задачах диффузии – движение с постоянной скоростью частиц постоянной плотности.



постоянна. В частности, в задачах теории упругости такие векторы соответствуют полям постоянной деформации; в плоском случае постоянны первые пространственные производные функции  $v^e(\xi, \eta, t)$ , в случае изгиба – кривизны функции прогиба  $v^e(\xi, \eta, t)$  [8].

Наконец, на базисные функции можно наложить условия, связанные с характером аппроксимации поля на всей области  $\Omega$ . Если две смежные подобласти имеют общие узлы, то в этих точках, очевидно, совпадают функции и их главные производные, входящие в число координат. В то же время на всей внутренней границе, разделяющей подобласти, этого утверждать, вообще говоря, нельзя. Таким образом, непрерывность поля  $v(x, y, t)$  и его главных производных во всей области  $\Omega$  заменяется, их непрерывностью в подобластях  $\Omega^e$  и в отдельных точках сетки разбиения. Это является следствием того, что поле  $v^e(\xi, \eta, t)$  на конечном элементе приближается ограниченной последовательностью функций  $\bar{\psi}(\xi, \eta)$ . Утверждение о непрерывности поля  $v(\xi, \eta, t)$  и его производных в узлах модели обычно называют кинематическими условиями сопряжения конечных элементов.

Однако при определенном выборе базисных функций  $\bar{\psi}(\xi, \eta)$  и обобщенных координат  $\bar{q}^e$  можно получить конечные элементы, для которых из кинематических условий следует непрерывность функции  $v(x, y, t)$  и ее главных производных вдоль всей границы между элементами. Такие элементы называются согласованными [8]. В противном случае, когда вдоль общей границы поле непрерывно, а главные производные терпят разрыв и непрерывны только в узлах, элементы называются несогласованными. Для элемента, ограниченного ломаной, согласованность означает, что функция  $v^e(\xi, \eta, t)$  и ее главные производные на некоторой стороне элемента однозначно выражаются через обобщенные координаты в узлах, лежащих на этой стороне.

Наложением кинематических условий сопряжения завершается аппроксимация поля  $v(x, y, t)$  на области  $\Omega$  с помощью модели из конечных элементов. На этом этапе метод конечных элементов близок к методу сплайнов [9]. Однако далее для получения уравнений, связывающих координаты модели, используется интегральная формулировка задачи в отличие от метода сплайнов, где исходное дифференциальное уравнение удовлетворяется в узлах.

### § 3. Структурная модель из конечных элементов

Для ряда задач уравнение динамики модели удобно получать в процессе ее составления из отдельных элементов. При этом предварительно выводятся уравнения движения для конечного элемента. Такой способ близок к истокам метода – структурному анализу, где система или конструкция представляется набором ее составляющих частей. Он применяется для анализа систем сложной геометрической формы со смешанными краевыми условиями. Этот способ нашел распространение в задачах о колебаниях и устойчивости упругих конструкций. Некоторые вопросы практической реализации структурного подхода в методе конечных элементов изложены в [98], где рассмотрены в основном задачи статики строительных конструкций.

Пусть непрерывная упругая система разбита на части, которые связаны между собой в узлах. Каждая часть заменена конечным элементом, т.е. некоторой моделью, поле перемещений которой, как было сказано ранее, определяется конечным множеством базисных функций  $\bar{\psi}^e(\xi, \eta)$ . Для вывода уравнений динамики отдельного элемента воспользуемся принципом виртуальных перемещений. Движение элемента происходит под действием внешней нагрузки плотности  $f(\xi, \eta, t)$  и сил взаимодействия с соседними элементами, которые приложены в узлах. Силы взаимодействия являются обобщенными силами, сопряженными координатам  $\bar{q}^e(t)$ . Обозначим вектор обобщенных сил через  $\bar{Q}^e(t)$ ; его размерность, как и вектора  $\bar{q}^e(t)$ , равна  $r$ . Выражение (1.2) принимает вид

$$-\delta U^e + \delta A_m^e + \delta A_f^e + \delta A_Q^e = 0. \quad (3.1)$$

Здесь  $\delta A_m^e = -\int \sigma \bar{v} \delta v d\Omega^e$  – виртуальная работа сил инерции,  $\delta A_f^e = \int f \delta v d\Omega^e$  – виртуальная работа внешней нагрузки,  $\delta A_Q^e = \delta \bar{q}^{eT} \bar{Q}^e$  – работа сил взаимодействия.

При малых отклонениях от положения равновесия потенциальная энергия элемента, как системы с конечным числом степеней свободы, выражается квадратичной формой его обобщенных координат [10]. Ее вариация

$$\delta U^e = \delta \bar{q}^{eT} [K^e] \bar{q}^e. \quad (3.2)$$

Здесь  $[K^e]$  – матрица жесткости элемента. Виртуальная работа  $\delta A_m^e$  равна скалярному произведению вектора виртуальных перемещений  $\delta \bar{q}^e$  и вектора обобщенных сил инерции. В матричной форме



$$\delta A_m^e = -\delta \bar{q}^e T [M^e] \ddot{\bar{q}}^e, \quad (3.3)$$

где  $[M^e]$  — матрица инерции элемента.

Чтобы получить матрицы  $[K^e]$  и  $[M^e]$ , воспользуемся представлением поля перемещений на элементе  $v^e(\xi, \eta, t)$  в виде (2.1). При этом для каждой из матриц возьмем различные системы базисных функций, оставляя неизменным вектор обобщенных координат  $\bar{q}^e$ . Такой путь позволяет независимо изменять точность аппроксимации инерционных и упругих свойств участка системы.

Матрица жесткости. Для вычисления матрицы  $[K^e]$  рассмотрим выражение, описывающее плотность потенциальной энергии упругой деформации [11]:

$$u(\xi, \eta, t) = \frac{1}{2} \bar{E}^T [c] \bar{E}. \quad (3.4)$$

Здесь  $[c]$  — матрица коэффициентов упругости материала системы;  $\bar{E}^T(\xi, \eta, t) = \left\{ \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}, \frac{\partial v}{\partial \eta}, \dots \right\}$  вектор деформации, компоненты которого суть пространственные производные перемещения  $v^e$  и их линейные комбинации. Конкретные выражения для компонент  $\bar{E}$  зависят от вида рассматриваемой деформации. Пусть матрица  $[K^e]$  определяется на последовательности базисных функций  $\bar{\psi}$ , т.е. перемещение  $v^e$  представляется формулой (2.1). Подставляя (2.1) в выражение для вектора деформации  $\bar{E}$ , а затем в (3.4), получим плотность потенциальной энергии в виде

$$u^e = \frac{1}{2} \bar{q}^e T [d_k]^T [u^e] [d_k] \bar{q}^e, \quad (3.5)$$

где  $[u^e(\xi, \eta)] = [E_\psi(\xi, \eta)] [c] [E_\psi(\xi, \eta)]^T$  — матрица плотности по-

тенциальной энергии,  $[E_\psi]^T = \left\{ \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \xi}, \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \eta}, \dots \right\}$  — матрица деформации в пространстве функций  $\bar{\psi}$ ; ее  $i$ -тая строка есть вектор деформаций при перемещении, совпадающем с  $i$ -той базисной функцией. После интегрирования выражения (3.5) по области  $\bar{\Omega}^e$  получим потенциальную энергию элемента

$$U^e = \frac{1}{2} \bar{q}^e T [d_k]^T [u^e] d\Omega [d_k] \bar{q}^e. \quad (3.6)$$

Из сравнения ее вариации с формулой (3.2) следует, что матрица жесткости элемента

$$[K^e] = [d_k]^T [u^e] d\Omega [d_k], \quad (3.7)$$

$[K^e]$  — квадратная, симметричная матрица порядка  $r \times r$ . Произведение  $[K^e] \bar{q}^e$  есть вектор обобщенных сил упру-

гости, действующих в узлах элемента, когда его поле перемещений  $v^e$  задается координатами  $q^e$ . Если базисные функции  $\bar{\psi}(\xi, \eta)$  удовлетворяют требованиям физической непротиворечивости, то при  $\bar{q}^e$ , соответствующем перемещению элемента как твердого тела, вектор  $[K^e]\bar{q}^e \equiv 0$ . Кроме того, сумма элементов любого столбца матрицы  $[K^e]$  равна нулю. Это является следствием статической уравновешенности конечного элемента. Симметрия матрицы  $[K^e]$  выражает принцип взаимности для конечного элемента упругой среды.

Матрица инерции. Пусть матрица  $[M^e]$  строится на системе базисных функций  $\bar{\chi}(\xi, \eta)$ , т.е. поле перемещений, определяющее инерционную нагрузку, равно

$$v_m^e(\xi, \eta, t) = \bar{\chi}^T(\xi, \eta) [d] \bar{q}^e(t). \quad (3.8)$$

Виртуальное перемещение на элементе

$$\delta v_m^e = \bar{\chi}^T [d] \delta \bar{q}^e. \quad (3.8a)$$

Подставим (3.8) и (3.8a) в выражение для виртуальной работы  $\delta A_m^e$  и поменяем порядок сомножителей в матричном произведении. Тогда

$$\delta A_m^e = -\delta \bar{q}^{eT} [d]^T \int \bar{\chi} \bar{\chi}^T d\Omega^e [d] \ddot{\bar{q}}^e.$$

Сравнивая эту формулу с (2.10), получим, что матрица инерции конечного элемента равна

$$[M^e] = [d]^T \int \sigma \bar{\chi} \bar{\chi}^T d\Omega^e [d]. \quad (3.9)$$

Матрица  $[M^e]$  — квадратная, симметричная, порядка  $r \times r$ ; ее ранг равен числу базисных функций  $\nu_m$ .

Вектор внешних сил. Вектор узловых сил  $\bar{Q}_F^e(t)$ , эквивалентный внешней нагрузке  $f(\xi, \eta, t)$ , найдем из выражения (3.1) для виртуальной работы  $\delta A_f^e$ . Используем ту же систему базисных функций  $\bar{\chi}$ , что и для определения матрицы инерции. Подставим (3.8) в (3.1) и преобразуем  $\delta A_f^e$  к виду

$$\delta A_f^e = \delta \bar{q}^{eT} \bar{Q}_f^e. \quad (3.10)$$

Здесь  $\bar{Q}_f^e = [d]^T \int \bar{\chi} f d\Omega^e$  — вектор внешних сил, построенный на системе базисных функций  $\bar{\chi}(\xi, \eta)$ .

Подставляя это соотношение, а также (3.2), (3.3) в равенство виртуальных работ (3.1), получим уравнение динамики конечного элемента

$$[M^e] \ddot{\bar{q}}^e + [K^e] \bar{q}^e = \bar{Q}_f^e + \bar{Q}^e. \quad (3.11)$$

Оно описывает движение элемента с конечным числом степеней свободы под действием узловых внешних сил  $\bar{Q}_f^e$  и сил взаимодействия с соседними элементами  $\bar{Q}^e$ . Для элемента с произвольным распределением упругих,



массовых параметров и внешней нагрузки матрицы  $[M^e]$ ,  $[K^e]$  и вектор  $\bar{Q}_f^e$  находятся численным интегрированием. При некоторых простых законах их изменения удается получить аналитические выражения для  $[M^e]$ ,  $[K^e]$  и  $\bar{Q}_f^e$  через параметры элемента. Матрицы  $[M^e]$  и  $[K^e]$  можно рассматривать тогда как упруго-массовые характеристики типового элемента для задач некоторого класса.

Построение модели. Уравнения вида (3.11) имеют место для каждого элемента модели. Очевидно, что в одной модели совместимы только конечные элементы с одними и теми же обобщенными координатами в узлах. Чтобы получить уравнения для всей модели, формулируются условия кинематического и динамического сопряжения соседних элементов, а также краевые условия для элементов, имеющих общую границу с контуром  $L$ .

Кинематические, или геометрические, условия сопряжения состоят в равенстве обобщенных координат соседних элементов в общих узлах. Исходя из этого, формируется вектор обобщенных координат модели  $\bar{q}(t)$ , у которого компонентами являются значения поля и его пространственных производных во всех ее узлах. Если на границе модели заданы геометрические краевые условия, то значения координат в крайних узлах совпадают с заданной функцией в этих точках. Обобщенные координаты, известные из краевых условий, исключаются из вектора  $\bar{q}(t)$ , а соответствующие этим координатам уравнения в (3.11) отбрасываются. Пусть  $N$  — число свободных узлов,  $r/n$  — число координат в одном узле модели. Тогда размерность вектора  $\bar{q}$  равна  $R = \frac{r}{n} N^*$ .

Динамические условия сопряжения состоят в уравновешенности сил взаимодействия: сумма обобщенных сил  $Q^e(t)$ , приложенных к элементам в общем внутреннем узле, равна нулю. В узлах, лежащих на границе модели, эти условия дополняются динамическими краевыми условиями. Так, если участок контура  $L$  свободен, сумма обобщенных сил взаимодействия в крайних узлах равна нулю, как и во внутренних. На участках где задана по-

---

\* Если на границе возможны два геометрических условия, то некоторые из крайних узлов могут быть полусвободными и в число компонент вектора  $\bar{q}$  добавляются свободные координаты этих узлов.

гонная плотность сил реакции  $\bar{f}_L(t)$ , вычисляется вектор внешних узловых сил реакции  $\bar{Q}_L(t)$  как и для распределенной нагрузки  $f(\xi, \eta, t)$ . Полученный таким образом вектор  $\bar{Q}_L$  суммируется с вектором  $\bar{Q}_f$ . Для более общих краевых условий выводятся уравнения, связывающие обобщенные силы и координаты в граничных узлах. Эти уравнения получают для принятой аппроксимации поля (3.8) или (2.1) с помощью принципа виртуальных перемещений. После включения полученных уравнений в матричные уравнения (3.11), динамические условия сопряжения в граничных узлах сводятся к равенству нулю сил взаимодействия.

Чтобы удовлетворить динамическим условиям сопряжения, дополним  $\bar{q}^e$  каждого элемента до вектора обобщенных координат всей модели  $\bar{q}$  с учетом нумерации узлов и положения элементов в модели. Соответственно этому переформируем матрицы  $[M^e]$  и  $[K^e]$  и векторы  $\bar{Q}^e$ ,  $\bar{Q}_f^e$ , дополнив их соответствующим количеством нулевых коэффициентов. Тогда уравнения (3.11) примут вид

$$[M^e] \ddot{\bar{q}} + [K^e] \bar{q} = \bar{Q}_f^e + \bar{Q}^e. \quad (3.11a)$$

Суммируя эти уравнения для всех элементов и учитывая, что в силу динамических условий сопряжения сумма сил взаимодействия в каждом узле равна нулю, получим уравнение динамики модели из конечных элементов

$$[M] \ddot{\bar{q}} + [K] \bar{q} = \bar{Q}_f. \quad (3.12)$$

Здесь  $[K]$  и  $[M]$  – матрицы жесткости и инерции модели из конечных элементов;  $\bar{Q}_f$  – вектор внешних узловых сил, действующих на модель. Для консервативных систем матрицы  $[M]$  и  $[K]$  – симметричные; их порядок равен числу обобщенных координат модели  $R$ . Ранг матрицы  $[M]$  равен  $J$  – числу динамически независимых обобщенных координат. Таким образом, уравнение (3.12) описывает движение системы, которая имеет  $J$  колебательных степеней свободы [10].

Решение уравнения (3.12) осуществляется на вычислительных машинах. Для более полного использования памяти ЦВМ обычно учитывается, что матрицы  $[K]$  и  $[M]$  имеют ленточную структуру. Такая структура является следствием того, что обобщенные силы жесткости или инерции в некотором узле определяются только координатами элементов, прилежащих к этому узлу. При гармонической внешней нагрузке (3.12) является системой



алгебраических уравнений относительно  $\bar{q}$ , компоненты которого есть комплексные амплитуды колебаний в узлах. При  $f=0$  уравнение (3.12) описывает собственные колебания модели. Решение задачи на собственные значения дает спектры частот  $\omega_j$  и векторов  $\bar{q}_j$ . Векторы  $\bar{q}_j$  называются собственными формами колебаний модели; по ним можно построить распределения амплитуд колебаний системы на собственных частотах  $\omega_j$ . Точность вычисляемых таким образом собственных частот повышается с увеличением числа степеней свободы модели  $J$ . При этом  $J$  можно увеличивать как путем добавления динамических координат в каждом узле, так и путем измельчения сетки конечных элементов.

#### § 4. Интегральная схема модели

Рассмотренный способ составления модели из конечных элементов, как отдельных частей, для которых имеются уравнения динамики, не является единственным. Исходя из вариационной постановки задачи на всей области  $\Omega$ , можно искать решение в виде функции, кусочно-определенной на элементах, не ронкая в характер их взаимодействия. Например, непосредственно из требования минимума для действия (1.1) на кусочно-определенной функции (2.1) следует матричное уравнение вида (3.12) для консервативной системы. Подобный путь является более предпочтительным при решении несамосогласованных и нелинейных задач, когда используется метод Галеркина или принцип локального потенциала. В этих случаях бывает затруднительным дать интерпретацию взаимодействия элементов в узлах, в частности, придать простой физический смысл обобщенным силам.

В этом параграфе излагается схема получения уравнений динамики модели путем минимизации функционала на всей области  $\Omega$ . Минимизирующей является кусочно-определенная функция  $v(x, y, t)$ , которая аппроксимирует исходное поле в модели из конечных элементов.

Рассмотрим нелинейную задачу (1.3), (1.4). Положим, что оператор  $P$  в уравнении (1.3) представим в виде

$$Pv = Av + \tilde{B}v + \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (4.1)$$

где  $A$  — положительно определенный, а  $\tilde{B}$  — нелинейный операторы. Оба оператора не зависят от времени и выра-

жаются через пространственные производные. Пусть нелинейность  $\tilde{B}$  связана с зависимостью параметров системы от поля  $v$  и пусть действие оператора  $\tilde{B}$  можно представить следующим образом:

$$\tilde{B}v(x, y, t) = b(v)Bv(x, y, t),$$

где  $b(v)$  – нелинейный коэффициент, который для стационарной среды не зависит от  $t$ ,  $B$  – линейный дифференциальный оператор.

Тогда уравнение (1.3) примет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + Av + b(v)Bv - f = 0. \quad (4.2)$$

Получим вариационную формулировку задачи (4.2), (1.4) на основе концепции локального потенциала [4]. Функционал  $S[v, v^\circ]$  зависит от двух переменных  $v[x, y, t]$  и  $v^\circ(x, y, t)$ . Функцию  $v^\circ$  можно интерпретировать как усредненное поле, а искомую  $v$  – как наиболее вероятное из флуктуирующих полей в малой окрестности возле  $v^\circ$  [4]. Локальный потенциал  $S[v, v^\circ]$  выражается суммой функционалов, соответствующих слагаемым уравнения (4.2). Для получения этих функционалов разложим нелинейный коэффициент  $b(v)$  в ряд по  $v$  в окрестности  $v^\circ$ . Если ограничиться нулевым членом разложения, то нелинейное слагаемое породит в  $S$  квадратичный функционал переменной  $v(x, y, t)$ . Этот функционал зависит от функции  $v^\circ(x, y, t)$ , как от параметра. Таким образом, третьему слагаемому в (4.2) соответствует функционал  $\int b(v^\circ)Bv \cdot v d\Omega$ .

Аналогично первое слагаемое будет представлено в  $S$  функционалом  $2 \int \partial v^\circ / \partial t d\Omega$ . Второй и последний члены в (4.2) отражаются в  $S$  функционалом энергии [2]. Таким образом, локальный потенциал для уравнения (4.2)

$$S[v, v^\circ] = \int (2 \frac{\partial v^\circ}{\partial t} v + Av \cdot v + b(v^\circ)Bv \cdot v - 2fv) d\Omega. \quad (4.3)$$

Если граничное условие (1.4) является естественным [2] для оператора  $A$ , то оно входит в функционал энергии и, следовательно, в потенциал  $S$ . В более общих случаях граничные условия необходимо специально учитывать при построении  $S[v, v^\circ]$ . Условие стационарности функционала (4.3)

$$\delta_v S[v, v^\circ] = 0 \quad (4.4)$$

с последующим требованием

$$v^\circ(x, y, t) = v(x, y, t) \quad (4.5)$$

приводит к задаче (4.2), (1.4). При этом условие (4.5) считаем справедливым для всех моментов времени  $t$ .

Заметим, что вид локального потенциала неоднозначен. Не всегда можно показать, что  $S[v, v^0]$  имеет минимум на функции  $v(x, y, t)$ . В этом случае принцип локального потенциала с самосогласованным способом решения является не более как вариационной формулировкой метода Галеркина, которая включает граничные условия.

Будем искать  $v(x, y, t)$ , удовлетворяющую вариационной задаче (4.3) – (4.5), в виде совокупности функций  $v^e(\xi, \eta, t)$ , каждая из которых определена на своей подобласти  $\Omega^e$  и равна нулю вне ее. Тогда функционал (4.3) запишется следующим образом:

$$S[v, v^0] = \sum_{e=1}^N \int_{\Omega^e} s[v, v^0] d\Omega^e. \quad (4.6)$$

Такое представление справедливо, если главные производные функции  $v(x, y, t)$  непрерывны на границах между смежными подобластями  $\Omega^e$ . В противном случае, необходимо специальное исследование [12].

Пусть на  $\Omega^e$  функция  $v^e(\xi, \eta, t)$  аппроксимируется линейной формой (2.1). Потребуем выполнения кинематических условий сопряжения между элементами в общих узлах. Введем вектор обобщенных координат для всей модели области  $\Omega$  и выразим поле  $v^e$  на отдельном элементе  $\Omega^e$  через этот вектор

$$v^e(\xi, \eta, t) = \bar{\psi}^{eT}(\xi, \eta) [D^e] \bar{q}(t). \quad (4.7)$$

Здесь матрица преобразования  $[D^e]$  определяется не только системой функций  $\bar{\psi}$ , выбором обобщенных координат элемента  $q^e$ , но и взаимным расположением элементов. У матрицы  $[D^e]$   $N$  строк и  $\nu$  столбцов. Используем самосогласованное приближение [4, 5]. Тогда среднее поле на конечном элементе

$$v^{oe} = \bar{\psi}^{eT} [D^e] \bar{q}^o. \quad (4.8)$$

Подставим (4.7), (4.8) в (4.6) и, учитывая (4.3), вычислим интегралы по  $\Omega^e$ . В результате, потенциал  $S[v, v^0]$  станет функцией, у которой аргументы – компоненты векторов  $\bar{q}$  и  $\bar{q}^o$ .

$$S(\bar{q}, \bar{q}^o) = \sum_{e=1}^N (2\bar{q}^T [M^e] \dot{\bar{q}}^o + \bar{q}^T [A^e] \bar{q} + \bar{q}^T [B^e(\bar{q}^o)] \bar{q} - 2\bar{q}^T \bar{Q}_f^e). \quad (4.9)$$



Здесь  $[M^e] = [D^e]^T \int_{\Omega^e} \bar{\psi} \bar{\psi}^T d\Omega^e [D^e]$  – матрица релаксации конечного элемента (симметричная),  $[A^e] = [D^e]^T \int_{\Omega^e} A \bar{\psi} \bar{\psi}^T d\Omega^e$ ,  $[D^e]$  – матрица, соответствующая оператору  $A$  (симметричная),  $[B^e(\bar{q}^0)] = [D^e]^T \int_{\Omega^e} b(\bar{\psi}[D^e]\bar{q}^0) B \bar{\psi} \bar{\psi}^T d\Omega^e [D^e]$

– матрица нелинейности среды, ее элементы зависят от вектора средних значений координат  $\bar{q}^0$ ;

$\bar{Q}_f^e(t)$  – вектор внешних сил на конечном элементе.

Порядок всех матриц –  $N \times N$ , размерность векторов  $\bar{Q}_f^e$  и  $\bar{q}$  –  $N$ .

Условие стационарности (4.4) сводится теперь к равенству нулю первых производных по  $q_a$  от функции

$$S(q, \bar{q}^0), \text{ т.е. } \frac{\partial S}{\partial q_a} = 0, a = 1, 2, \dots, N,$$

здесь  $q_a$  – компонента вектора  $\bar{q}$ .

После наложения условия (4.5) и суммирования по элементам найдем

$$[M] \dot{\bar{q}} + [A] \bar{q} + [B(\bar{q})] \bar{q} - \bar{Q}_f = 0. \quad (4.10)$$

Матрицы  $[M]$ ,  $[A]$ ,  $[B]$  вычисляются путем сложения соответствующих матриц отдельных элементов.

Матричное уравнение (4.10) описывает динамику нелинейной модели из конечных элементов. Численное интегрирование уравнения (4.10) возможно непосредственно на основе метода конечных элементов [13], но обычно для этого используют разностные схемы интегрирования по времени типа Рунге–Кутты, Эйлера и т.п. При этом для вычисления матрицы  $[B(\bar{q})]$  можно либо взять значение вектора  $\bar{q}$  на предыдущем шаге интегрирования по  $t$ , либо применять итерационный процесс [14, 15].

## § 5. Вопросы сходимости и уменьшения числа динамических переменных

Найденное с помощью модели из конечных элементов приближенное решение представляется совокупностью функций  $v^e(\xi, \eta, t)$ , кусочно-определенных на области  $\Omega$ . Отклонение этого решения от точного, как и во всех вариационных методах, оценивается по энергии и в среднем [2]. Величина отклонения определяется точностью модели, которая зависит от числа конечных элементов, их совершенства, топологии разбиения и, наконец, от характера решаемой задачи. Поэтому сравнение точности различ-

ных моделей из конечных элементов вызывает значительные трудности. В задачах динамики для сравнения моделей обычно пользуются числом степеней свободы модели  $J$  как некоторой обобщенной характеристикой ее возможностей.

Решения  $v_J(x, y, t)$ , полученные на совокупности моделей с различным числом степеней свободы  $J$ , образуют последовательность  $\{v_J\}$ . Для обоснования метода существенным является вопрос сходимости этой последовательности при  $J \rightarrow \infty$  и о совпадении ее предела с точным решением задачи. Очевидно, что последовательность моделей с различным  $J$  и, следовательно, решений  $\{v_J\}$  можно получить различными способами. Например, этого можно добиться одновременным уменьшением размеров всех элементов. Тогда увеличивается число узлов модели, но остаются неизменными число координат в каждом узле и характеристики используемых конечных элементов. Множество  $\{v_J\}$  можно построить также путем последовательного усовершенствования конечных элементов, т.е. введения в их узлах дополнительных координат.

При практическом использовании метода конечных элементов наибольшее значение имеет эффективность расчетной модели, под которой можно понимать достигаемую точность решения при фиксированном числе степеней свободы  $J$ . Это связано с тем, что  $J$  ограничено объемом оперативной памяти ЦВМ и, кроме того, именно оно определяет в конечном итоге вычислительные затраты.

Сходимость. При изучении сходимости обычно рассматривается поведение последовательности решений  $\{v_J\}$ , связанное с уменьшением размеров всех элементов. Общее исследование сходимости метода конечных элементов как прямого метода решения вариационных задач изложено в [12, 16]. Наиболее детально сходимость изучена для статических задач теории упругости [17, 18]. В этом случае вариационная постановка исходной задачи приводит к нахождению последовательности  $\{v_J\}$ , минимизирующей функционал энергии. Элементы этой последовательности являются линейными комбинациями некоторой системы функций\*, определенных на отдельных элементах.

---

\* Функции этой системы можно найти, если в модели задавать поочередно векторы  $\bar{q}_1^T = \{1, 0, 0, \dots\}$ ,  $\bar{q}_2^T = \{0, 1, 0, \dots\}, \dots$

Если эта система, образуемая при уменьшении размеров элементов, является полной в энергетическом пространстве, то минимизирующая последовательность  $\{v_J\}$  сходится по энергии и в среднем к точному решению [2]. Очевидно, что для модели из согласованных конечных элементов, у которых главные производные непрерывны на границах, последовательность кусочно-определенных функций  $\{v_J\}$  обладает свойством полноты. В этом случае метод конечных элементов можно рассматривать как некоторую модификацию метода Ритца, в котором неизвестные коэффициенты линейной формы – обобщенные координаты модели, а координатные функции – кусочно-определенные. Энергетическая норма отклонения приближенного решения от точного для случая статической поперечной деформации дана в [18].

Доказательство полноты для полей на несогласованных конечных элементах вызывает трудности. Обойти их позволяет установленный в [17] обобщенный критерий, согласно которому система кусочно-определенных функций полна, если плотность потенциальной энергии на элементе упругого тела может принимать постоянные значения. Тогда, если плотность внешней нагрузки не имеет особенностей на границах элементов, то вклад скачков главных производных с уменьшением размеров элементов стремится к нулю. Сходимость метода в статических задачах теории упругости исследована также в [19, 20], где проводится сопоставление его с вариационно-разностным методом\*.

Сходимость метода конечных элементов при решении задач динамики изучена в меньшей степени. В случае колебаний консервативных систем исследование сходимости, по-видимому, не вызовет дополнительных затруднений. Поскольку кинетическая энергия является квадратичным функционалом от функции  $v(x, y, t)$  и ее пространственных производных более низкого порядка, чем входящие в потенциальную энергию, то критерий полноты последовательности кусочно-определенных функций остается справедливым.

Наряду с исследованием сходимости метода на основе энергетических оценок, можно анализировать ее с по-

---

\* Более подробно с современной теорией вариационно-разностных методов можно ознакомиться в [99].



мощью конечно-разностного формализма. Для однородных систем при равномерном разбиении на элементы правильной формы удается записать матричные уравнения в конечно-разностных операторах. Тем самым устанавливается прямое соответствие конкретной модели из конечных элементов некоторой разностной схеме. С помощью таких схем можно оценить степень аппроксимации уравнений в частных производных при замене исходной системы конкретной моделью из конечных элементов [21]. Кроме того, на основе конечно-разностных схем удобно исследовать устойчивость решения при численном интегрировании по времени уравнений (3.12) [14, 22]. Вопросы погрешности аппроксимации исходного дифференциального уравнения в методах конечных элементов и конечных разностей детально обсуждены в [100].

В некоторых случаях удается найти явное решение системы конечно-разностных уравнений, описывающих динамику модели из конечных элементов. Так, в [23-26] получены общие решения для случая поперечных колебаний тонких стержней и пластин, найдены дисперсионные и частотные уравнения систем с различными крайними условиями. В этих работах рассчитана зависимость ошибки метода от числа степеней свободы  $J$  моделей, построенных из конечных элементов различных типов.

Сокращение числа динамических переменных. В работах, посвященных методу конечных элементов, постоянное внимание уделяется проблеме повышения эффективности расчетных схем. Поиск решения этой проблемы ведется в различных направлениях. Рассматриваются модели из конечных элементов различной геометрической формы [27], изопараметрические элементы с криволинейными границами [28, 29], изучается эффективность введения неоднородных элементов [30], повышается точность аппроксимации поля на элементе путем расширения последовательности базисных функций и, следовательно, увеличения числа обобщенных координат в узлах [31, 32] и т.п.

Опыт применения метода показывает, что наиболее результативным оказывается начальное усовершенствование, которое выражается в переходе к согласованному неоднородному элементу с простой зависимостью параметров от пространственных координат. Дальнейшие усложнения элемента

приводят к значительному росту вычислительных затрат и не повышают эффективности метода [33, 34].

При чрезмерном усложнении элементов теряются в значительной степени преимущества метода, связанные с его универсальностью. По-видимому, для каждого класса прикладных или исследовательских задач существует оптимальная степень сложности элемента, на основе которого дальнейшее увеличение точности достигается путем уменьшения размеров элементов.

В задачах динамики повышение эффективности метода выражается прежде всего в сокращении числа динамических переменных модели без изменения степени аппроксимации поля на элементах. Этого можно достичь наложением на обобщенные координаты модели дополнительных голономных связей. Если число наложенных уравнений связи равно  $R-J$ , то из  $R$  координат модели, входящих в уравнение движения (3.12) или (4.10), останутся динамически независимыми  $J$  координат. Проведенная таким способом редукция динамических переменных позволяет при фиксированном  $J$  увеличить число элементов и тем самым повысить точность аппроксимации реальной системы моделью из конечных элементов.

Уравнения дополнительных связей можно записать, исходя из различных соображений. Одни из них основаны на геометрических преобразованиях поля перемещений модели; накладываемые связи можно считать кинематическими. В основе динамического подхода лежит анализ вклада различных обобщенных координат в энергию модели.

При кинематическом подходе уравнениями связи могут быть, например, накладываемые в узлах условия непрерывности пространственных производных поля более высокого порядка, чем главные. Из полученных таким образом алгебраических уравнений можно выразить  $R-J$  обобщенных координат через оставшиеся  $J$ . Рассмотренный способ близок к применяемому в методе сплайнов. Однако в отличие от метода конечных элементов в методе сплайнов уравнения связи накладываются до получения уравнений динамики [35].

Динамический подход к сокращению числа степеней свободы берет свое начало от первых схем расчета колебаний упругих систем. В известной модели поперечных колебаний стержней [36] инерционная нагрузка представ-

лена движением сосредоточенных масс, помещенных в узлах. Аналогичный прием применен в [37] для модели поперечных колебаний пластин. Описанные модели имеют по одной колебательной степени свободы на узел в отличие от соответствующих моделей из конечных элементов, содержащих в каждом узле 2–3 динамические переменные. В [29, 38] предлагается разделить узлы модели на главные и побочные, полагая при этом, что последние свободны от инерционной нагрузки. Такое разделение узлов основывается на интуиции исследователя и его применение на практике может вызвать затруднение. Приближенные выражения для матриц инерции, полученные сопоставлением величины их коэффициентов, используются в [39]. Одновременно с развитием вычислительных средств и проблеме повышения эффективности метода в динамических задачах уделяется большое внимание [34, 40].

Довольно общий прием для одновременного уменьшения числа динамических переменных во всех узлах модели сформулирован в [26, 41]. Он состоит в использовании различных систем базисных функций для матриц жесткости и инерции. Идея сокращения числа динамических координат основывается на том, что кинетическая энергия выражается через пространственные производные поля  $v(x, y, t)$  более низкого порядка, чем потенциальная. С точки зрения равной степени аппроксимации всех слагаемых плотности функционала энергии представляется оправданным применить при получении матриц инерции и релаксации укороченную последовательность базисных функций. Эти соображения подтверждаются непосредственным анализом известных матриц инерции. Вклад главных производных функций  $v(x, y, t)$  в обобщенные силы инерции существенно меньше, чем узловых значений поля. Для задачи о собственных колебаниях упругого тела в [101] дано обоснование такого приема для редукции динамических координат с точки зрения вариационного подхода. В этой работе введен функционал на независимых полях перемещения и импульса. Этот прием оказывается наиболее эффективным в динамических задачах о поперечных колебаниях и устойчивости тонких упругих тел.

Рассмотрим основную схему излагаемого приема на примере структурной модели. Пусть матрица инерции (3.9) определена на системе базисных функций  $\bar{\chi}(\xi, \eta)$ .



число которых  $\nu_m^e$  меньше размерности вектора обобщенных координат  $r^e$ . Для линейно-независимых функций  $\bar{\chi}$  величина  $\nu_m^e$  равна рангу матрицы  $[M^e]$ . Тогда, при  $\nu_m^e < r^e$  матрица  $[M^e]$  содержит  $r^e - \nu_m^e$  нулевых столбцов и строк. Назовем такую матрицу укороченной. Для конечного элемента с укороченной матрицей инерции часть уравнений системы (3.11) является дифференциальными. Их число  $\nu_m^e$  равно рангу матрицы  $[M^e]$ . Остальные  $r^e - \nu_m^e$  уравнений системы (3.12) – алгебраические. Из этих уравнений можно выразить в явном виде  $r^e - \nu_m^e$  координат через оставшиеся  $\nu_m^e$ . Таким образом,  $r^e - \nu_m^e$  обобщенных координат конечного элемента становятся динамически вырожденными. Обобщенные силы, сопряженные с вырожденными координатами, согласно (3.11) определяются только упругой деформацией элемента и не зависят от узловых ускорений.

Уравнение динамики модели из элементов с укороченной матрицей инерции совпадает по виду с (3.12). Однако ранг матрицы инерции модели равен  $J$ , причем  $J < R$ . Действительно, в каждом свободном узле модели после наложения условий сопряжения остается  $\nu_m^e / n^e$  динамических координат. Их число для всей модели равно

$$J = \sum_e \frac{\nu_m^e}{n^e} \quad (5.1)$$

В то же время число обобщенных координат модели

$$R = \sum_e \frac{r_m^e}{n^e}, \quad \text{где} \quad r^e > \nu_m^e. \quad (5.2)$$

Удобно представить (3.12) системой двух матричных уравнений. Для этого в векторе  $\bar{q}(t)$  сначала расположим динамические координаты модели  $\bar{q}_1(t)$ , а затем кинематические  $\bar{q}_c(t)$ , т.е.  $\bar{q}^T = \{\bar{q}_1^T, \bar{q}_c^T\}$ . Аналогично представим вектор  $\bar{Q}_f(t)$ . Соответственно этому разобьем матрицы  $[M]$  и  $[K]$  на блоки. Тогда в матрице инерции будут отличны от нуля только элементы левого верхнего блока порядка  $J \times J$

$$[M] = \left[ \begin{array}{c|c} M_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \quad (5.3)$$

В матрице жесткости, построенной на системе функций  $\bar{\psi}(\xi, \eta)$ , число которых равно  $r^e$ , отличны от нуля элемен-

ты во всех четырех блоках. Запишем уравнение (3.12) следующим образом

$$\left[ \begin{array}{c|c} M_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \ddot{\bar{q}}_1 \\ \ddot{\bar{q}}_c \end{array} \right\} + \left[ \begin{array}{c|c} K_1 & K_2 \\ \hline K_3 & K_4 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_c \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \bar{Q}_1 \\ \bar{Q}_c \end{array} \right\}. \quad (5.4)$$

В этой системе первые  $J$  уравнений дифференциальные, последние  $R-J$  – алгебраические. Исключим в (5.4) вырожденные координаты  $\bar{q}_c$  с помощью алгебраических преобразований. Тогда система (5.4) примет вид

$$[M_1] \ddot{\bar{q}}_1 + [\tilde{K}] \bar{q}_1 = \tilde{\bar{Q}}_f, \quad (5.5)$$

где  $[\tilde{K}] = [K_1] - [K_2][K_4]^{-1}[K_3]$

редуцированная матрица жесткости модели,  $\tilde{\bar{Q}}_f = \bar{Q}_1 - [K_2][K_4]^{-1}\bar{Q}_c$  – редуцированный вектор внешних сил.

Изложенная схема понижения порядка матричного уравнения динамики модели, основанная на введении укороченных матриц инерции, применяется в последующих главах для задач разных типов.

## Глава 2

### ДИНАМИКА ОДНОМЕРНЫХ СИСТЕМ

Приложение метода конечных элементов к одномерным задачам не является, вообще говоря, характерным. Однако на их примере можно в наглядной форме изложить основы метода и провести исследование сходимости и оценку точности в полном объеме. Кроме того, имеется ряд прикладных задач, в частности в строительной механике, которые сводятся к изучению динамики разветвленных одномерных систем. В этих случаях применение метода конечных элементов позволяет сократить вычислительные затраты и повысить точность анализа.

В первых двух параграфах этой главы рассматривается динамика механических систем. Вначале строятся конечные элементы для изгибно-крутильных колебаний стержней. Проводится аналитическое исследование сходимости при уменьшении шага разбиения, обсуждаются вопросы повышения точности расчета реальных систем путем введения неоднородных элементов. Далее излагаются несколько конкретных задач аэроупругости. Рассматриваются различные типы аэродинамической нагрузки, дан пример исследования устойчивости упругой системы в потоке, скорость которого меняется периодически. В заключительном параграфе на основе метода конечных элементов излагается подход к решению нелинейного уравнения диффузии, описывающего дрейф носителей в полупроводниках.

#### § 6. Поперечные колебания стержней

При анализе малых поперечных колебаний тонких стержней воспользуемся некоторыми упрощающими предположениями, обычно допускаемыми в теории упругости,



Положим, что при изгибе стержня не происходит деформаций, т.е. существует упругая ось и статическая связь между изгибными и крутильными деформациями отсутствует. Однако если линия центров тяжести поперечных сечений не совпадает с упругой осью стержня, то в стержне возникают изгибно-крутильные колебания за счет инерционной связи.

Конечный элемент для расчета изгибно-крутильных колебаний. На рис. 6.1 изображен отрезок

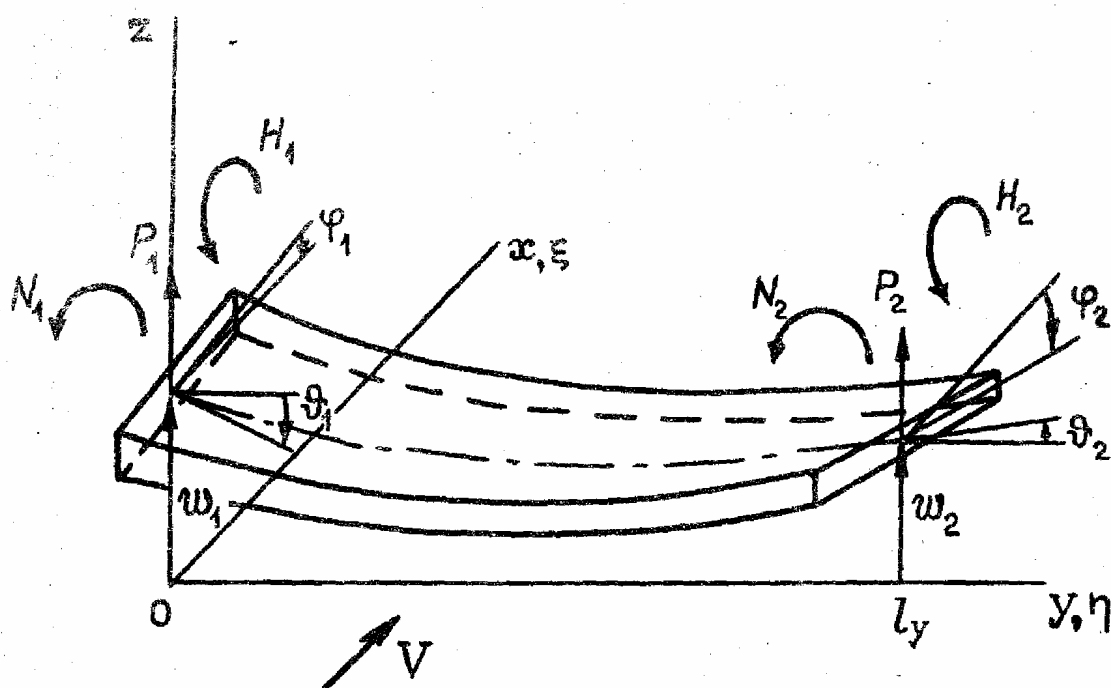


Рис. 6.1

стержня, упругая ось которого при колебаниях совершает движение в плоскости YOZ. Рассматриваемый элемент может служить, например, моделью части крыла большого удлинения. Геометрические параметры элемента таковы: ширина  $l_x$ , толщина  $l_z$ , длина  $l_y$ , расстояния от упругой оси до центра тяжести поперечного сечения и до передней кромки соответственно  $a l_x$  и  $b l_x$ . Стержень имеет жесткость на изгиб  $EI$ , жесткость на кручение  $GI_p$ ; плотность материала равна  $\rho$ .

Энергия упругой деформации единицы длины стержня выражается через функции поперечного прогиба  $w(y, t)$

(смещения точек упругой оси в направлении OZ) и угла закручивания  $\phi(y, t)$  в виде [42]

$$u(y, t) = \frac{1}{2} EI \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{1}{2} GI_p \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2. \quad (6.1)$$

Для построения конечного элемента на этом отрезке, возьмем в качестве узлов точки на упругой оси в крайних сечениях отрезка. Пусть обобщенными координатами являются следующие шесть величин (рис. 6.1)

$$w_i = w|_{y_i}; \quad \phi_i = \phi|_{y_i}; \quad \nu_i = \frac{\partial w}{\partial y}|_{y_i}; \quad i = 1, 2. \quad (6.2)$$

Тогда вектор обобщенных координат элемента

$$\bar{q}^{eT} = \{\bar{w}^{eT}, \bar{\phi}^{eT}, \bar{\nu}^{eT}\}, \quad (6.3)$$

здесь  $\bar{w}^{eT} = \{w_1, w_2\}$ ;  $\bar{\phi}^{eT} = \{\phi_1, \phi_2\}$ ;  $\bar{\nu}^{eT} = \{\nu_1, \nu_2\}$ .

При выборе базисных функций для аппроксимации форм прогиба  $w$  и кручения  $\phi$  нужно удовлетворить требованиям, обсужденным в гл. I. В частности, условие возможности постоянства плотности потенциальной энергии (§ 5) принимает вид так называемого критерия "постоянной деформации" [8], который можно сформулировать так: при задании в узлах элемента значений обобщенных координат, соответствующих однородному распределению деформаций в упругом теле, деформации в элементе также должны быть однородными. Указанному критерию удовлетворяют, например, формы статического прогиба и кручения стержня постоянного сечения под действием сил и моментов, приложенных на концах:

$$\begin{aligned} w &= b_1 + b_2 y + b_3 y^2 + b_4 y^3, \\ \phi &= c_1 + c_2 y. \end{aligned} \quad (6.4)$$

В соответствии с этим выберем систему базисных функций

$$\bar{\psi}^T(\eta) = \{1, \eta, \eta^2, \eta^3\}, \quad (6.5)$$

здесь  $\eta = y/l_y$  — безразмерная координата вдоль стержня. Выражая коэффициенты полиномов (6.4) через значения обобщенных координат в узлах, найдем матрицы перехода  $[d_k^w]$  и  $[d_k^\phi]$  для изгибных и крутильных деформаций соответственно

$$[d_k^w] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_y & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 & -2l_y & -l_y \\ 2 & -2 & 0 & 0 & l_y & l_y \end{bmatrix}; \quad [d_k^\phi] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Согласно (2.1) функции поперечного смещения и угла закручивания выразятся на элементе следующим образом

$$w(\eta, t) = \bar{\psi}^T(\eta) [d_k^w] \bar{q}^e(t); \phi(\eta, t) = \bar{\psi}^T(\eta) [d_k^\phi] \bar{q}^e(t). \quad (6.7)$$

При такой аппроксимации смещение, его первая производная и угол закручивания непрерывны на границе между элементами.

Согласно критерию, сформулированному в [8], тем самым обеспечивается сходимость результатов при уменьшении размера элементов.

В узлах элемента действуют обобщенные силы, которые представим вектором

$$\bar{Q}^{eT} = \{\bar{P}^{eT}, \bar{H}^{eT}, \bar{N}^{eT}\}, \quad (6.8)$$

здесь  $\bar{P}^{eT} = \{P_1, P_2\}$  - вектор поперечных сил,

$\bar{H}^{eT} = \{H_1, H_2\}$  - вектор крутящих моментов,

$\bar{N}^{eT} = \{N_1, N_2\}$  - вектор изгибающих моментов.

Подставляя (6.7) в выражение для плотности потенциальной энергии (6.1) и интегрируя его по длине элемента, получим полную энергию деформации

$$U^e = \frac{1}{2} \bar{q}^{eT} [K^e] \bar{q}^e,$$

здесь

$$[K^e] = [d_k^w]^T \int_0^1 [u^w] d\eta [d_k^w] + [d_k^\phi]^T \int_0^1 [u^\phi] d\eta [d_k^\phi] \quad (6.9)$$

- матрица жесткости элемента размерности 6x6,

$$[u^w] = EI \frac{d^2 \bar{\psi}}{d\eta^2} \frac{d^2 \bar{\psi}^T}{d\eta^2}; [u^\phi] = GI_p \frac{d \bar{\psi}}{d\eta} \frac{d \bar{\psi}^T}{d\eta} \quad (6.10)$$

- матрицы плотности потенциальной энергии для изгибной и крутильной деформаций соответственно. По формулам (6.9), (6.10) можно получить матрицу жесткости с любым распределением упругих параметров вдоль элемента. Для практики можно ограничиться несколькими простыми зависимостями  $EI(\eta)$  и  $GI_p(\eta)$  и получить аналитические выражения для  $[K^e]$ . В частности, если жесткость на изгиб является линейной функцией  $EI = I_y^3 (k_1 + k_2 \eta)$ , то матрица жесткости имеет вид [41]

$$[K^e] = \begin{bmatrix} (12k_1 + 6k_2) - (12k_1 + 6k_2) & 0 & 0 & (6k_1 + 2k_2)l_y & (6k_1 + 4k_2)l_y \\ (12k_1 + 6k_2) & 0 & 0 & -(6k_1 + 2k_2)l_y & -(6k_1 + 4k_2)l_y \\ g & -g & 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{симметрично} & & & (4k_1 + k_2)l_y^2 & (2k_1 + k_2)l_y^2 \\ & & & & (4k_1 + 3k_2)l_y^2 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

здесь  $g = 1/l_y \int_0^1 G I_p(\eta) d\eta$  — средняя жесткость на кручение.

Из (6.11) видно, что обобщенные силы  $\bar{P}$  и  $\bar{N}$  не зависят от углов закручивания  $\bar{\phi}$ , а  $\bar{N}$  — от  $\bar{w}$  и  $\bar{v}$ . Это следствие сделанных предположений об отсутствии упругой связи между изгибом и кручением. Полагая в (6.11)  $k_1 = EI/l_y^3$ ,  $k_2 = 0$ , легко получить матрицу жесткости одно-родного элемента, параметры которого постоянны.

Перейдем к получению матрицы инерции элемента. Вертикальное смещение точек элемента, находящихся на расстоянии  $x$  от упругой оси,

$$v(\eta, x, t) = w(\eta, t) + x\phi(\eta, t). \quad (6.12)$$

Для вычисления виртуальной работы инерционной нагрузки  $f = -\rho l_z \ddot{v}$  воспользуемся укороченной системой базисных функций

$$\bar{\chi}^T(\eta) = \{1, \eta\}. \quad (6.13)$$

Соответствующая этой системе матрица перехода  $[d]$  имеет вид [41]

$$[d] = [d^w] + x[d^\phi] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \xi l_x \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.14)$$

здесь  $\xi = x/l_x$  — безразмерная координата. Используя (6.14), запишем смещение произвольной точки стержня (6.12) в обычной форме

$$v(\eta, \xi, t) = \bar{\chi}^T(\eta) [d(\xi)] \bar{q}^e(t). \quad (6.15)$$

Согласно (3.1) виртуальная работа сил инерции определяется выражением

$$\delta A_m = -\delta \bar{q}^{eT} [M^e] \ddot{\bar{q}}^e, \quad (6.16)$$

здесь  $[M^e] = \int_0^1 d\eta \int_{-b}^b \rho [d]^T \bar{\chi} \bar{\chi}^T [d] d\xi$  — укороченная матрица инерции,  $b$  — безразмерное расстояние от оси жесткости до передней кромки. Инерционные свойства стерж-



ня при изгибно-крутильных колебаниях характеризуются параметрами [43]

$$i_m = \int_{-b}^{1-b} \rho l_z \xi^2 d\xi \quad (\text{погонный момент инерции относительно оси жесткости}),$$

$$s = \int_{-b}^{1-b} \rho l_z \xi d\xi \quad (\text{погонный статический момент относительно оси жесткости}),$$

$$\mu = \int_{-b}^{1-b} \rho l_z d\xi \quad (\text{погонная плотность}).$$

Аппроксимируя их изменение вдоль длины элемента линейными функциями  $i_m = i_1 + i_2 \eta$ ;  $s = s_1 + s_2 \eta$ ;  $\mu = \mu_1 + \mu_2 \eta$ , находим

$$[M^e] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \mu_1 + \mu_2/4 & \mu_1/2 + \mu_2/4 & s_1 + s_2/4 & s_1/2 + s_2/4 & 0 & 0 \\ & \mu_1 + \mu_2/4 & s_1/2 + s_2/4 & s_1 + s_2/4 & 0 & 0 \\ & & i_1 + i_2/4 & i_1/2 + i_2/4 & 0 & 0 \\ & & & i_1 + i_2/4 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

симметрично

Равенство нулю двух последних строк и столбцов матрицы (6.17) обусловлено применением укороченной системы базисных функций  $\bar{\chi}$ . Оно приводит к тому, что обобщенные координаты  $v_1$  и  $v_2$  становятся динамически вырожденными, так как не вносят вклад в кинетическую энергию. Таким образом, число динамических переменных элемента с укороченной матрицей инерции равно четырем. Рассматриваемый элемент имеет две колебательные степени свободы на узел.

Пусть на элемент действует поперечная распределенная нагрузка  $f_w$  и распределенный крутящий момент  $f_\phi$ . Если для сведения этих нагрузок к системе узловых сил также воспользоваться укороченной системой базисных функций (6.13), то компоненты вектора внешних изгибающих моментов обратятся в нуль и вектор внешних сил будет иметь вид

$$\bar{Q}_f^{eT} = \{\bar{P}_f^{eT}, \bar{H}_f^{eT}, \bar{O}^T\}. \quad (6.18)$$

Виртуальная работа внешних сил  $\delta A_f = \delta \bar{q}^{eT} \bar{Q}_f^e$ . Выражения для компонент векторов  $\bar{P}_f$  и  $\bar{H}_f$  зависят от конкретного вида распределенной нагрузки. Ниже будут рассмотрены в качестве примера некоторые типы аэродинамических нагрузок.

Из принципа виртуальных перемещений (3.1) следует уравнение движения элемента под действием сил  $\bar{Q}^e$  и  $\bar{Q}_f^e$

$$[\bar{M}^e] \ddot{\bar{q}}^e + [K^e] \bar{q}^e - \bar{Q}_f^e = \bar{Q}^e. \quad (6.19)$$

Построение модели стержня. Модель непрерывного стержня представляет собой ряд последовательно соединенных элементов. Для получения уравнения движения модели необходимо дополнить уравнения типа (6.19), записанные для каждого элемента, условиями сопряжения между соседними элементами и граничными условиями закрепления концов.

Геометрические условия сопряжения, выражающие непрерывность форм прогиба и кручения,

$$w_n^+ = w_n^- = w_n; \phi_n^+ = \phi_n^- = \phi_n; \nu_n^+ = \nu_n^- = \nu_n, \quad n = 2, 3, \dots, N-1; \quad (6.20)$$

здесь индексами "+" и "-" помечены обобщенные координаты элементов, расположенных соответственно справа и слева от узла с номером n, N - число узловых точек модели.

На обобщенные силы, действующие в точках соединения элементов, накладываются условия уравновешенности

$$P_n^+ + P_n^- = 0, H_n^+ + H_n^- = 0, N_n^+ + N_n^- = 0, n = 2, 3, \dots, N-1. \quad (6.21)$$

В крайних узловых точках ( $n=1$  и  $n=N$ ) имеют место условия закрепления. В качестве примера запишем условия для стержня, закрепленного на левом конце и свободного на правом

$$w_1 = \phi_1 = \nu_1 = 0; P_N = H_N = N_N = 0.$$

Так как после наложения граничных условий часть узлов становится неподвижной, исключим их из рассмотрения и будем под N в дальнейшем понимать число свободных узлов модели.

Введем векторы обобщенных координат и сил для модели в виде

$$\bar{q}^T = \{\bar{w}^T, \bar{\phi}^T, \bar{\nu}^T\}, \bar{Q}^T = \{\bar{P}^T, \bar{H}^T, \bar{N}^T\}, \bar{Q}_f^T = \{\bar{P}_f^T, \bar{H}_f^T, \bar{N}_f^T\}, \quad (6.22)$$

здесь  $\bar{w}^T = \{w_1, w_2, \dots, w_N\}$ ,  $\bar{P}^T = \{P_1, P_2, \dots, P_N\}$  и т.д. Подставим (6.22) в уравнения движения отдельных элементов (6.19), для чего образуем расширенные матрицы  $[M^e]$ ,  $[K^e]$ , дополнив  $[M^e]$ ,  $[K^e]$  соответствующим количеством нулевых коэффициентов. Сложим затем получен-

ные уравнения почленно и, учитывая условия сопряжения (6.21), получим

$$[M] \ddot{\bar{q}} + [K] \bar{q} = \bar{Q}_f. \quad (6.23)$$

Размерности матриц равны  $3N \times 3N$ , векторов —  $3N$ .

Рассмотрим в качестве примера модель стержня, закрепленного на левом конце и свободного на правом, состоящую из трех элементов. На рис. 6.2 схематически изображена процедура образования матрицы инерции  $[M]$  из трех расширенных матриц  $[M^e]$ . Зачерненными кружками помечены отличные от нуля коэффициенты. С учетом того, что крайний левый узел закреплен, вектор обоб-

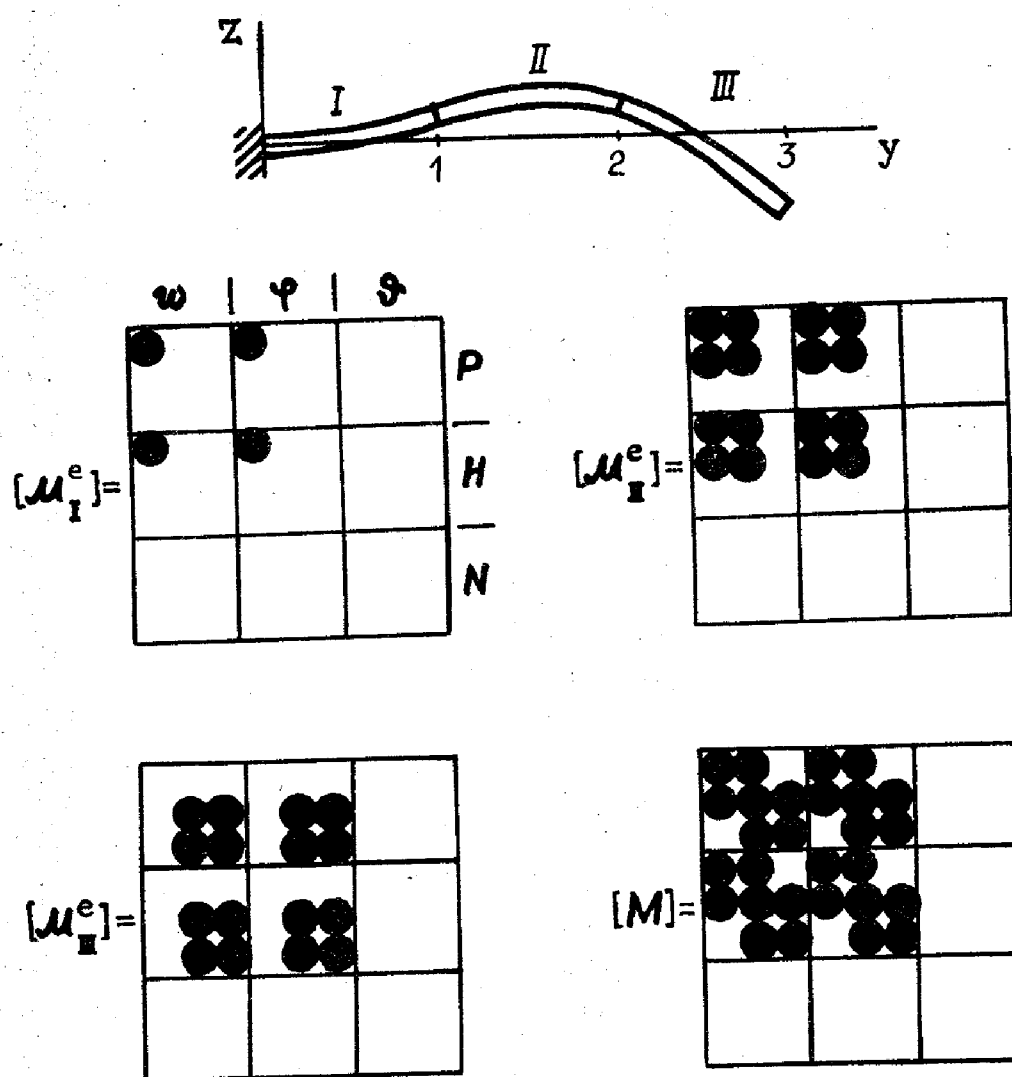


Рис. 6.2

шенных координат модели  $\bar{q}^T = \{w_1, w_2, w_3, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3\}$ .

Учитывая, что при использовании укороченных матриц инерции углы наклона  $\bar{\nu}$  динамически вырождены, представим векторы  $q$  и  $Q_F$  в виде  $\bar{q}^T = \{\bar{q}_1, \bar{\nu}^T\}$ ,  $\bar{Q}_F^T = \{\bar{Q}_{1f}^T, \bar{N}_f^T\}$ , причем  $N_f = 0$ . Подразделяя матрицы  $[M]$  и  $[K]$  на соответствующие прямоугольные блоки, перепишем (6.23) следующим образом

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\bar{q}}_1 \\ \ddot{\bar{\nu}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{\nu} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{1f} \\ \bar{0} \end{Bmatrix}. \quad (6.24)$$

Исключая из (6.24) переменные  $\nu$ , получаем уравнение движения модели в виде

$$[M_1] \ddot{\bar{q}}_1 + [\tilde{K}] \bar{q}_1 = \bar{Q}_{1f}, \quad (6.25)$$

здесь  $[\tilde{K}] = [K_1] - [K_2][K_4]^{-1}[K_3]$  — редуцированная матрица жесткости.

В результате порядок уравнения движения модели уменьшается на одну треть и становится равным  $2N$ . Модель с укороченными матрицами инерции имеет в каждом узле две степени свободы.

Аналитическое исследование сходимости. Исследование точности и скорости сходимости проведем для случая свободных изгибных колебаний однородного стержня. Модели крутильных колебаний хорошо изучены. Заметим только, что расчетная схема, полученная здесь методом конечных элементов, совпадает с трехточечной разностной схемой для одномерного оператора Лапласа. Для этой схемы в [44] показано, что в случае стержня, закрепленного на одном конце, ошибка при получении частот обратно пропорциональна квадрату используемого числа степеней свободы.

Перепишем в конечно-разностной форме матричное уравнение (6.24) для чисто изгибных колебаний. После исключения кинематических переменных  $\bar{\nu}$  получим [23, 24]

$$\frac{1}{36} \mu l_y \Delta_n^4 \ddot{w} + \frac{1}{3} \mu l_y \Delta_n^2 \ddot{w} + \mu l_y \ddot{w}_n + \frac{EI}{l_y^3} \Delta_n^4 w = 0, \quad n = 3, 4, \dots, N-2, \quad (6.26)$$

здесь  $\Delta$  — оператор конечной разности; например,  $\Delta_n^2 w = w_{n-1} - 2w_n + w_{n+1}$  и т.д.

Нетрудно показать, что степень аппроксимации дифференциального уравнения изгибных колебаний стержня разностными уравнениями (6.26) составляет  $O(l_y^2)$ . Гар-



монические колебания модели описываются функцией дискретного аргумента  $n$

$$w(n, t) = w_0(n)e^{i\omega t} \quad (6.27)$$

здесь  $w_0(n)$  – амплитуда собственных колебаний в узлах,  $\omega$  – круговая частота. В общем случае

$$w_0(n) = A \sin \kappa l_y n + B \cos \kappa l_y n + C \operatorname{sh} \kappa l_y n + D \operatorname{ch} \kappa l_y n. \quad (6.28)$$

Параметры  $\kappa$  и  $k$  определяют частоту колебаний  $\omega$ . Подставляя (6.27) в (6.26) и учитывая (6.28), получим уравнения связи между  $\kappa$ ,  $k$  и  $\omega$

$$\omega = 12 \sqrt{\left(\frac{EI}{\mu}\right) \frac{N^2 \sin^2 \kappa l_y / 2}{L_y^2 (2 \cos^2 \kappa l_y / 2 + 1)}} = 12 \sqrt{\left(\frac{EI}{\mu}\right) \frac{N^2 \operatorname{sh}^2 \kappa l_y / 2}{L_y^2 (2 \operatorname{ch}^2 \kappa l_y / 2 + 1)}}, \quad (6.29)$$

здесь  $L_y$  – длина стержня.

Уравнение (6.29) назовем "дисперсионным" по аналогии с непрерывным стержнем. Соответствующие "частотные" уравнения получаются из подстановки (6.28) в граничные условия. Совместно с (6.29) они позволяют найти спектр собственных частот модели стержня с любыми условиями закрепления. Например, для консольного стержня частотное уравнение [24]

$$\cos \kappa l_y N \operatorname{ch} \kappa l_y N + 1 + 1/2 \sin \kappa l_y N \operatorname{sh} \kappa l_y N \left( \frac{\operatorname{th} \kappa l_y / 2}{\operatorname{tg} \kappa l_y / 2} - \frac{\operatorname{tg} \kappa l_y / 2}{\operatorname{th} \kappa l_y / 2} \right) = 0. \quad (6.30)$$

Заметим, что при  $N \rightarrow \infty$  соотношения (6.29) стремятся к дисперсионному соотношению непрерывного стержня  $\omega_j = \sqrt{\left(\frac{EI}{\mu}\right) b_j^2}$ , где  $b_j$  – волновое число. Уравнение (6.30) при  $N \rightarrow \infty$  переходит в частотное уравнение непрерывного стержня [10]

$$\operatorname{ch} b L_y \cos b L_y + 1 = 0.$$

Собственные частоты модели  $\omega_j$ , определяемые из системы (6.29), (6.30), сравним с известными частотами непрерывного стержня  $\omega_j^0$ . Для этого удобно ввести относительное отклонение  $\epsilon_j = (\omega_j - \omega_j^0) / \omega_j^0$ . На рис. 6.3 представлена зависимость  $\epsilon$  для первых трех тонов консольного стержня от числа степеней свободы  $J$ . Для наглядности значения  $\epsilon_j$ , относящиеся к одному номеру собственного тона  $j$ , соединены отрезками прямых. Сплошные линии соответствуют модели с укороченными матрицами инерции. Отрезками штриховых линий показана зависимость  $\epsilon$  у модели с полными матрицами инерции\*. При уве-

\* Эти данные предоставил авторам Л.П.Ким.

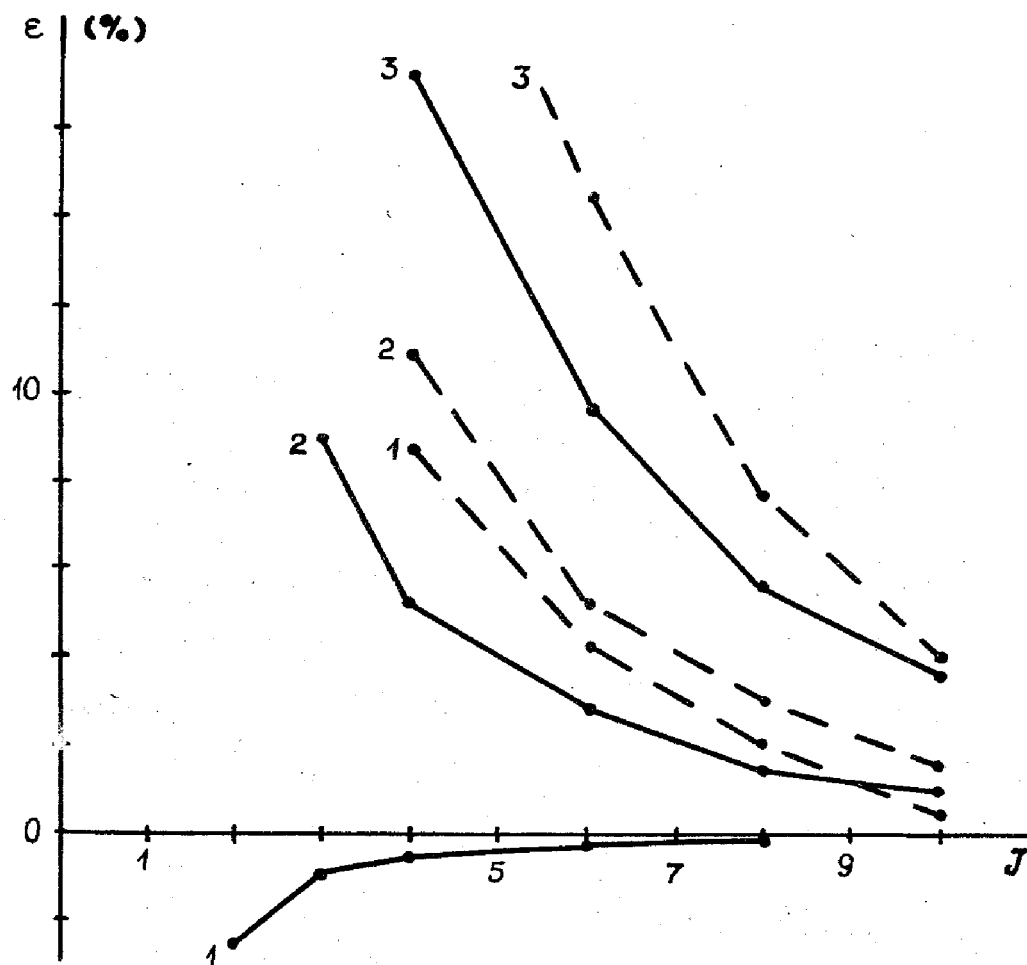


Рис. 6.3

личении  $J$  относительные отклонения обеих моделей уменьшаются, монотонно стремясь к нулю, причем скорость убывания погрешности порядка  $1/J^2$ . Анализ приведенных результатов показывает, что при фиксированном  $J$  модель с укороченными матрицами инерции обеспечивает лучшую точность, чем модель с полными матрицами. В частности, для воспроизведения частот первых двух токов с ошибкой не более 2%, модель с укороченными матрицами инерции должна иметь  $J \sim 8$ , с полными —  $J \sim 10$ . При этом первая модель допускает вдвое более мелкое разбиение на элементы, чем вторая, что важно при исследовании неоднородных систем. Аналитическое исследование сходимости, проведенное при других условиях закрепления, также позволяет сделать вывод, что модель с укороченными матрицами инерции более предпочтительна для практических расчетов.

Аналитическое решение можно также получить для хорошо известной модели Майклстэда, представляющей собой

совокупность отрезков невесомых стержней, в узлах соединения которых находятся точечные массы. Эта модель представляет собой частный случай модели из конечных элементов, у которых при получении матриц инерции используется кусочно-постоянная аппроксимация функций перемещения. Сравнение точности различных моделей проведено в [23, 24].

Оценки точности при расчете неоднородных стержней. Рассмотрим задачу о собственных колебаниях консольно закрепленного стержня, изгибная жесткость которого описывается ступенчатой функцией (рис. 6.4). Если погонная плотность стержня  $\mu_0$  постоянна, то его точные частоты при разных значениях коэффициента  $c$  могут быть вычислены прямым интегрированием уравнения колебаний.

В таблице 6.1 для двух значений коэффициента  $c$  представлены частоты колебаний первых трех токов  $\Omega_j$ , приведенные к параметрам на закрепленном конце, т.е.  $\Omega_j = \omega_j L^2 / \sqrt{EI_0 / \mu_0}$ .

Для сравнения там же помещены точные значения частот.

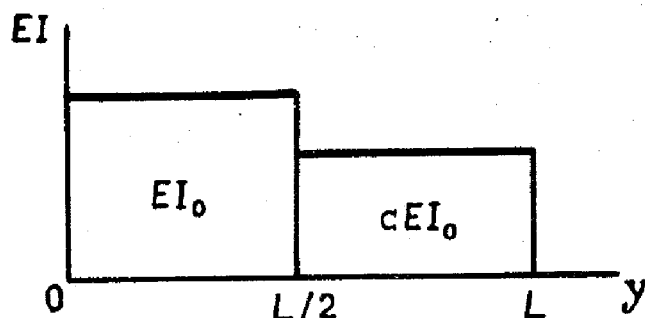


Рис. 6.4

Таблица 6.1.

Частоты изгибных колебаний стержня со ступенчатым изменением жесткости

Номер тона	$c = 1/4$				$c = 1/10$			
	$J = 6$	$J = 12$	$J = 20$	точное значение	$J = 6$	$J = 12$	$J = 20$	точное значение
1	1.627	1.633	1.633	1.633	2.260	2.272	2.274	2.280
2	7.62	7.45	7.41	7.38	9.06	8.834	8.782	8.74
3	24.24	22.69	22.29	22.08	28.93	26.93	26.36	25.1

Из таблицы видно, что уже при  $J = 12$  метод конечных элементов дает точность, удовлетворительную для практических расчетов. При  $J = 20$  ошибка становится сравнимой с ошибкой вычисления прямым интегрированием.

Для сравнения точности, даваемой элементами с постоянным и переменным распределениями параметров вдоль длины, проведем расчет изгибных колебаний консольного стержня, имеющего в продольном сечении форму равномерно утончающегося клина. Жесткость стержня описывается в этом случае кубическим полиномом вида  $EI(y) = EI_0(I - (I-s)y/L_y)^3$ , а погонная плотность меняется линейно  $\mu(y) = \mu_0(I - (I-s)y/L_y)$ . (Здесь  $EI_0$  и  $\mu_0$  - значения параметров стержня на закреплённом конце,  $s = l_{ZL}/l_{Z0}$  - отношение толщин на свободном и закреплённом концах.) Матрица жесткости неоднородного элемента с кубическим изменением  $EI$  вдоль длины приведена в [24].

Относительные отклонения частот первого тона, полученных с помощью неоднородных элементов, от вычисленных методом Ритца [42] при значениях параметра  $s = 2/3$  и  $1/4$  представлены в первых двух колонках таблицы 6.2. Для сравнения там же указаны относительные отклонения частот модели из однородных элементов. Из таблицы видно, что применение неоднородных элементов примерно вдвое повышает точность при том же числе степеней свободы.

Таблица 6.2

Относительные отклонения (в %) частот первого тона моделей клиновидного стержня от частот по Ритцу

	Неоднородные элементы		Однородные элементы	
	$J = 3$	$J = 5$	$J = 3$	$J = 5$
$s = 2/3$	- 4.51	- 1.17	- 8.56	- 2.82
$s = 1/4$	-	- 5.86	-	- 12.1

Пример расчета изгибно - крутильных колебаний. Рассмотрим прямое крыло большого удлинения (рис. 6.5), параметры которого представлены на



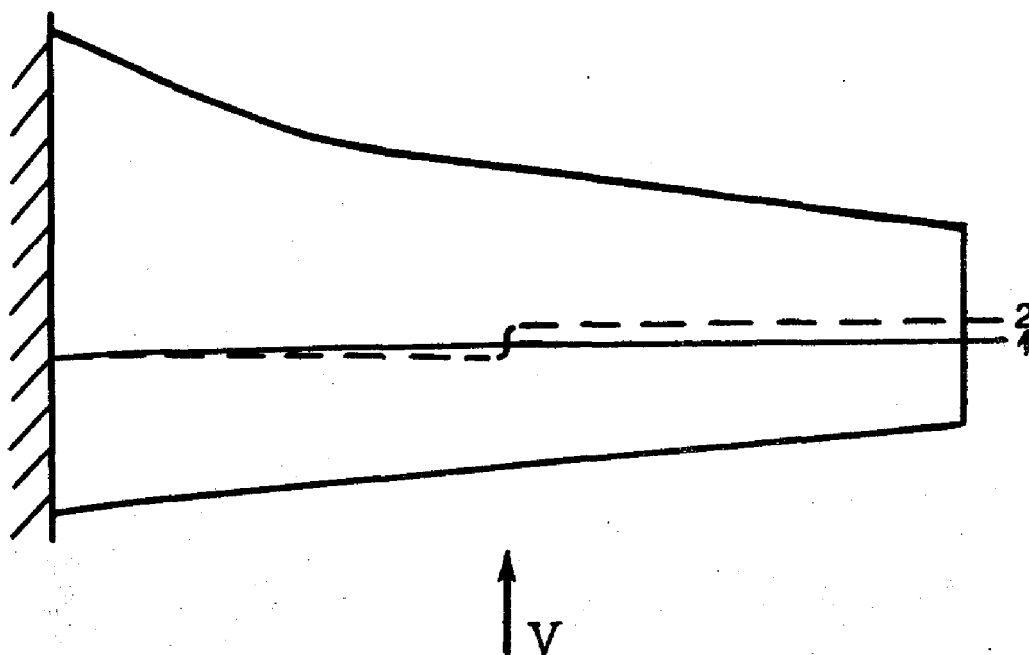


Рис. 6.5 1 - ось жесткости, 2 - ось центров тяжести

рис. 6.6. Чтобы оценить сходимость метода при расчете конкретной системы, сравним результаты при разбиении ее на 6, 8, 12, 16 и 18 элементов. Наряду с однородными элементами используем элементы с линейно-меняющимися параметрами. Расчетные значения частот, взятые из [41], сведены в таблицу 6.3.

Таблица 6.3.

Частоты изгибно-крутильных колебаний крыла

Тип элементов	Число элементов	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$
Однородные	8 (J=16)	30.88	120.7	156.3	300.3	354.6	547.0
	12 (J=24)	31.11	121.3	157.2	305.1	354.9	553.5
	16 (J=32)	31.45	122.4	157.3	310.7	355.0	558.8
	18 (J=36)	31.52	122.6	157.4	312.3	356.2	559.5
С линейным изменением параметров	6 (J=12)	32.34	130.2	159.8	335.5	370.5	592.2
	8 (J=16)	31.94	124.0	158.4	323.6	362.1	517.9
	12 (J=24)	31.70	123.2	157.8	318.2	358.5	568.1
	16 (J=32)	31.59	123.0	157.8	317.9	357.9	563.9
	18 (J=36)	31.59	122.9	157.7	316.7	357.7	560.4

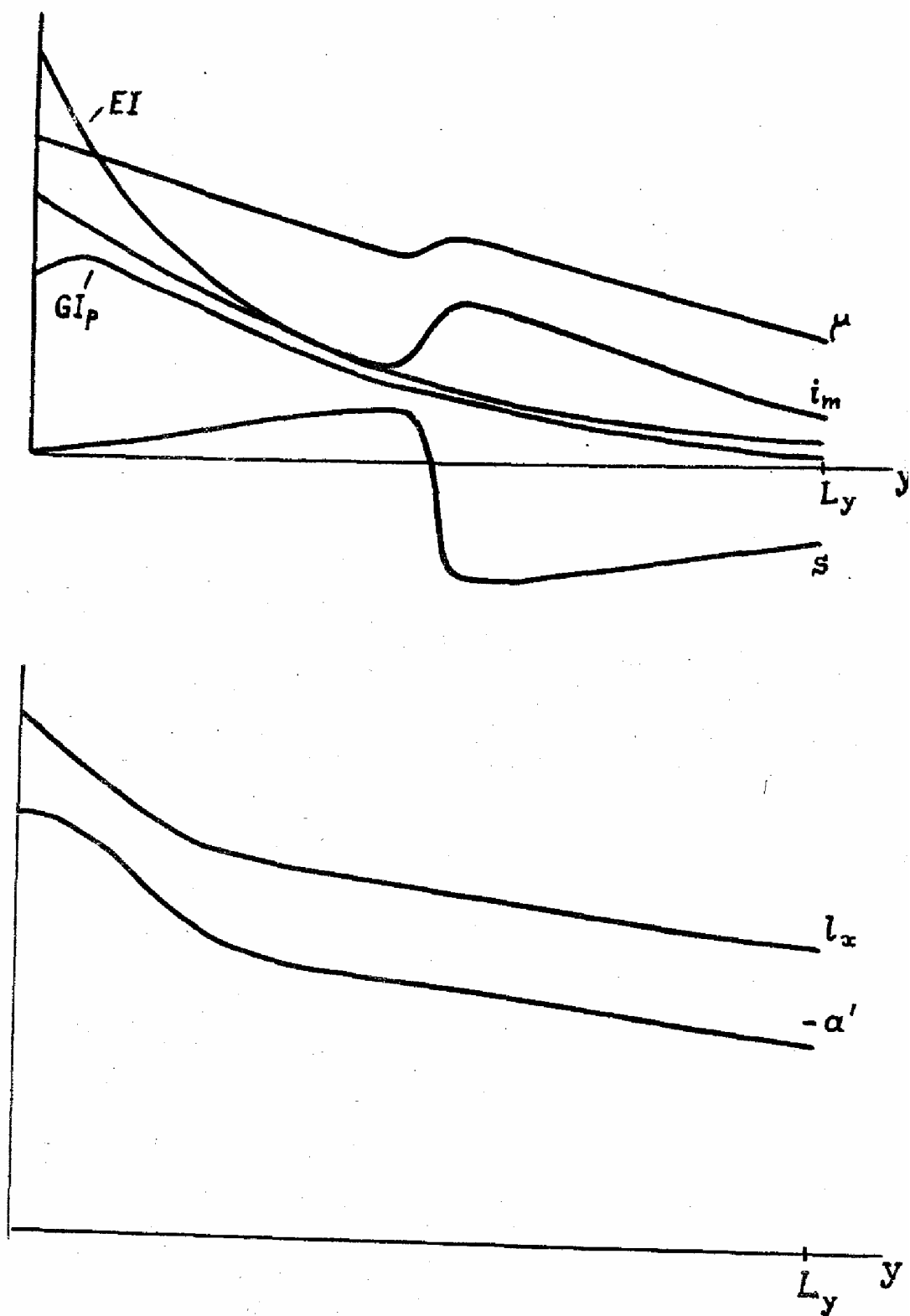


Рис. 6.6

С увеличением  $J$  частоты сходятся к некоторым значениям, причем для однородных элементов снизу, а для элементов с линейным изменением параметров – сверху. Сравнение линейной и однородной аппроксимации параметров оказыва-

ется в пользу неоднородных элементов, так как при том же числе степеней свободы они дают большую точность. Применение неоднородных элементов позволяет уменьшить без потери точности число степеней свободы модели и тем самым сократить объем вычислений.

## § 7. Исследование некоторых задач аэроупругости

Эффективность метода в неконсервативных задачах проиллюстрируем несколькими примерами расчета устойчивости одномерных систем в потоке газа.

Полоса в сверхзвуковом потоке. Для предварительной оценки точности метода в неконсервативном случае рассмотрим классическую задачу о бесконечно длинной упругой полосе в сверхзвуковом потоке газа. Передняя кромка полосы свободна, задняя закреплена (рис. 7.1).

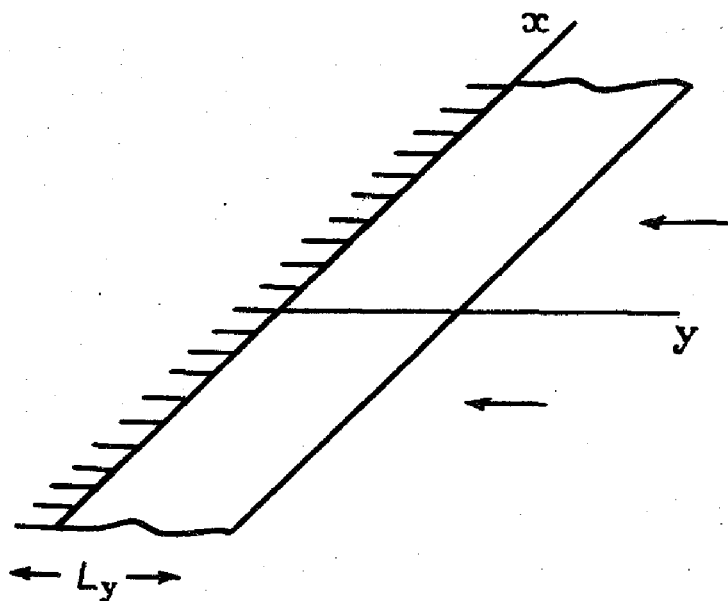


Рис. 7.1

Если прогиб полосы является цилиндрическим, то задача сводится к исследованию устойчивости стержня единичной ширины  $l_x \doteq 1$  в потоке, набегающем вдоль него от свободного конца к закрепленному. Стержень совершает чисто изгибные колебания. Матрицы жесткости и инерции для этого случая получаются из (6.11) и (6.17)

отбрасыванием блоков, соответствующих крутильным колебаниям.

Для определения аэродинамического давления воспользуемся так называемой двумерной теорией [43], согласно которой

$$f_A = -2 \frac{\rho_0 V}{\sqrt{(M_0^2 - 1)}} \left( \dot{w} + V \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad (7.1)$$

здесь  $\rho_0$  - плотность воздуха,  $V$  - скорость потока,  $M_0$  - число Маха ( $M_0 > 1$ ). Подставляя (7.1) в выражение для виртуальной работы внешних сил (3.1) и пользуясь укороченной системой базисных функций (6.13), найдем вектор узловых сил

$$\bar{Q}_A = -2 \frac{\rho_0 V}{\sqrt{(M_0^2 - 1)}} \{ [D^e] \dot{\bar{q}}^e + V [B^e] \bar{q}^e \}, \quad (7.2)$$

здесь  $[D^e] = [d^w]^T \int_0^1 \bar{X} \bar{X}^T d\eta [d^w]$  - матрица аэродинамического демпфирования  $[B^e] = [d^w]^T \int_0^1 X \frac{d\bar{X}^T}{d\eta} d\eta [d^w]$  - матрица аэродинамической жесткости.

Приведем отличные от нуля блоки матриц  $[D^e]$  и  $[B^e]$

$$[D_1^e] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad [B_1^e] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Уравнение колебаний модели (6.25) с учетом аэродинамических воздействий примет вид

$$[M_1] \ddot{\bar{w}} + [\tilde{K}] \bar{w} + 2 \frac{\rho_0 V}{\sqrt{(M_0^2 - 1)}} \{ [D_1] \dot{\bar{w}} + V [B_1] \bar{w} \} = 0. \quad (7.3)$$

Решение уравнения (7.3) есть сумма частных решений вида

$$\bar{w}_j(t) = \bar{w}_{oj} e^{\lambda_j t},$$

здесь  $w_{oj}$  - собственный вектор, определяющий форму колебаний на  $j$ -том тоне,  $\lambda_j$  -  $j$ -тое собственное значение. Собственные значения и векторы неконсервативной задачи, вообще говоря, комплексны, т.е.

$$\lambda_j = \delta_j + i\omega_j, \quad w_{oj} = \text{Re} w_{oj} + i \text{Im} w_{oj}.$$

Следовательно, колебание на  $j$ -том тоне характеризуется коэффициентом затухания ( $-\delta_j$ ) и частотой  $\omega_j$ . При изменении скорости потока собственные значения задачи (7.3) описывают некоторые траектории на комплексной плоскости. Система устойчива, если все собственные зна-

чения находятся в левой полуплоскости, т.е. в области отрицательных  $\delta$ .

Устойчивость системы определяется характером действующих на нее аэродинамических сил [45], т.е. в нашем случае матрицами  $[B]$  и  $[D]$ , каждую из которых можно представить в виде суммы симметричной и антисимметричной матриц. Симметричная часть матрицы аэродинамической жесткости  $[B]$  соответствует потенциальной составляющей аэродинамических сил. При некоторых соотношениях параметров системы потенциальная составляющая нагрузки может вызвать статическую потерю устойчивости типа дивергенции. Для дивергенции характерно монотонное нарастание отклонения системы от положения равновесия. Антисимметричная часть матрицы  $[B]$  соответствует циркуляционным силам; существенно, что работа этих сил за период отлична от нуля. Циркуляционные силы вызывают динамическую потерю устойчивости типа флаттера, когда нарастание отклонения от положения равновесия носит колебательный характер. Если система устойчива, то добавление к уже рассмотренным силам диссипативных, соответствующих матрице  $[D]$ , делает ее асимптотически устойчивой. В этом случае отклонения системы от положения равновесия при  $t \rightarrow \infty$  стремятся к нулю.

В рассматриваемой задаче удобно ввести безразмерные параметры частоты  $\Omega = \omega L_y^2 / \sqrt{EI/\mu}$ , затухания  $\Delta = \delta L_y^2 / \sqrt{EI/\mu}$  и аэродинамического давления  $\kappa_0 = 2\rho_0 V^2 L_y^3 / (EI \sqrt{M_0^2 - 1})$ . Параметр  $\kappa_0$  характеризует скорости набегающего потока. Результаты расчета, взятые из [46, 47], представлены на рис. 7.2. Там изображены траектории собственных значений для первого (сплошная линия) и второго (штриховая линия) тонов при увеличении параметра  $\kappa_0$ . По оси абсцисс отложены значения коэффициента затухания  $(-\Delta)$ , по оси ординат — частоты  $\Omega$ .

При возрастании параметра скорости  $\kappa_0$  корни, соответствующие первым двум тонам, уходят в левую полуплоскость. Частота  $\Omega_1$  первого тона уменьшается и при  $\kappa_0 = \kappa_0^{(1)}$  обращается в нуль; корень  $\lambda_1$  сливается с комплексно-сопряженным  $\lambda_1^*$ . Затем, с увеличением скорости, вырождение снимается и корни первого тона быстро расходятся вдоль действительной оси. Один из них при  $\kappa_0 \geq \kappa_0^{(1)}$  переходит в правую полуплоскость; затухание  $(-\Delta)$  при этом отрицательно. Пластина становится неустойчи-



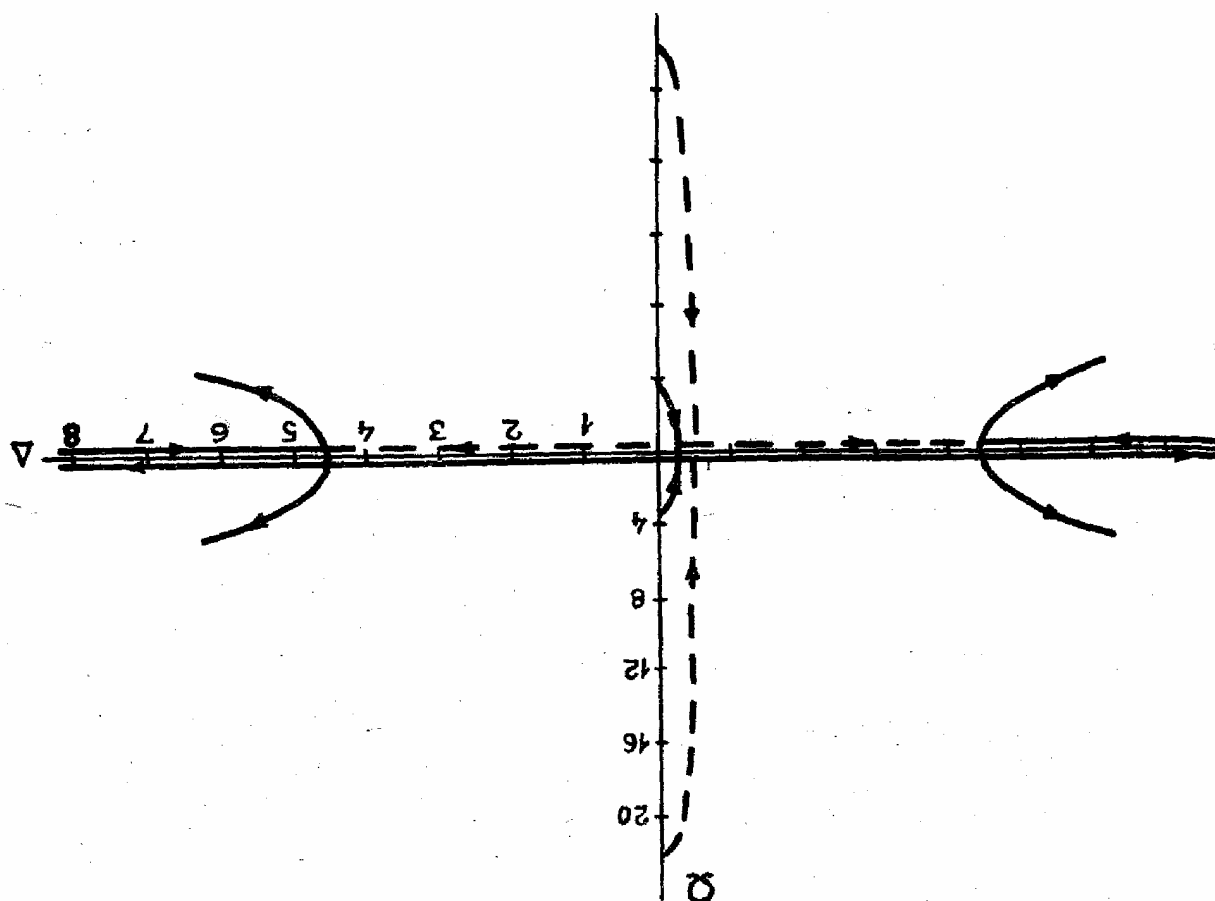


Рис. 7.2

вой по первому тону, ее движение имеет характер возрастающих во времени непериодических отклонений, т.е. дивергенции. Распределение амплитуд первых двух тонов полосы при  $\kappa_0 = \kappa_0^{(1)}$  изображено на рис. 7.3, а.

При дальнейшем увеличении скорости корни первого тона сначала движутся от начала координат, затем при некотором  $\kappa_0$  начинают возвращаться. Одновременно становится заметным смещение корней второго тона. Когда  $\kappa_0 = \kappa_0^{(2)}$ , эти корни сливаются, затем расходятся от начала координат (дивергенция по второму тону). Распределение амплитуд на первом и втором тонах при  $\kappa_0 = \kappa_0^{(2)}$  изображено на рис. 7.3, б.

При  $\kappa_0 > \kappa_0^{(2)}$  корни первого и второго тона движутся по действительной оси навстречу друг другу. Наконец, когда  $\kappa_0 = \kappa_0^{(3)}$ , корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  сливаются и при  $\kappa_0 > \kappa_0^{(3)}$  становятся комплексно сопряженными, два из них лежат в правой полуплоскости. В этом случае возможны нарастающие во времени колебания, т.е. флаттер. Распре-

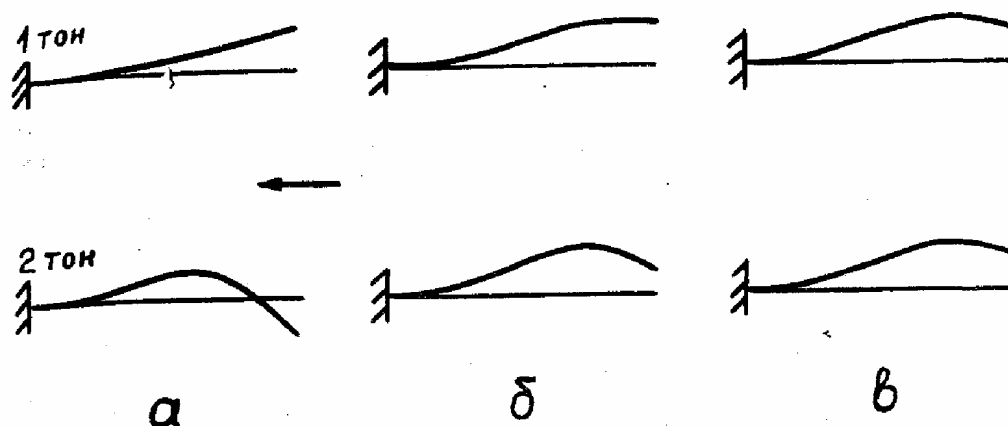


Рис. 7.3

деление амплитуд при  $\kappa_0 = \kappa_0^{(3)}$  представлено на рис. 7.3, в.

В таблице 7.1 помещены критические значения  $\kappa_0$ , полученные при различном числе степеней свободы модели  $J$ . В последней колонке указаны критические значения, полученные в [48] аналитически.

Таблица 7.1.  
Критические значения параметра  $\kappa_0$  для полосы

	$J = 4$	$J = 6$	$J = 9$	Аналитические значения
$\kappa_0^{(1)}$	6.31	6.32	6.33	6.33
$\kappa_0^{(2)}$	162.4	161.0	160.8	161
$\kappa_0^{(3)}$	162.9	161.3	161.3	162

Как видно из таблицы, расчетные значения, полученные при  $J \geq 6$ , отличаются от аналитических не более чем на 0,4%. Отметим, что практическое значение имеет только первое критическое значение. При  $\kappa_0 > \kappa_0^{(1)}$  разрушение пластины наступит, видимо, раньше, чем будут достигнуты следующие критические значения.

Крыло большого удлинения в дозвуковом потоке. На крыло, совершающее колебания в дозвуковом потоке воздуха, действует нормальная аэродинами-

ческая нагрузка и аэродинамический момент. Вследствие инерционной связи между изгибными и крутильными колебаниями осуществляется обмен энергии между воздушным потоком и колеблющимся крылом. В случае стационарного приближения теории несущей полосы [43] погонная плотность нормальной нагрузки определяется формулой

$$f_A^w = -1/2 \rho_0 V l_x C_x^\phi (-\dot{w} + V\phi + 1/2 l_x (1/2 - \alpha') \dot{\phi}), \quad (7.3)$$

здесь  $C_x^\phi$  — производная по  $\phi$  от коэффициента подъемной силы,  $l_x$  — хорда крыла,  $\alpha' l_x$  — расстояние от середины крыла до оси жесткости. Поскольку крыло совершает совместные изгибно-крутильные колебания, размерность вектора обобщенных координат элемента равна шести. Координата  $\phi$  — угол атаки крыла. Подставляя (7.3) в (3.10) и используя укороченную систему базисных функций (6.13), получим для отдельного элемента вектор узловых сил, эквивалентных нагрузке  $f_A^w$

$$\bar{Q}_A^{we} = -\rho_0 V \{ [D^{we}] \dot{\bar{q}}^e + V [B^{we}] \bar{q}^e \}. \quad (7.4)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} [D^{we}] &= 1/2 \int_0^1 C_x^\phi l_x \{ -[A^{w,w}] + 1/2 l_x (1/2 - \alpha') [A^{w,\phi}] \} d\eta, \\ [B^{we}] &= 1/2 \int_0^1 C_x^\phi l_x [A^{w,\phi}] d\eta, \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$[A^{w,w}] = [dw]^T \bar{\chi} \bar{\chi}^T [dw], [A^{w,\phi}] = [dw]^T \bar{\chi} \bar{\chi}^T [d\phi].$$

Выражения, аналогичные (7.4), (7.5), можно получить для вектора  $Q_A^{\phi e}$ , который определяется аэродинамическим моментом плотности  $f_A^\phi$ . Согласно [43]

$$f_A^\phi = -1/2 l_x (1/2 + \alpha') f_A^w + 1/16 \pi \rho_0 V l_x^3 \dot{\phi}. \quad (7.6)$$

Тогда

$$\bar{Q}_A^{\phi e} = -\rho_0 V \{ [D^{\phi e}] \dot{\bar{q}}^e + V [B^{\phi e}] \bar{q}^e \}. \quad (7.7)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} [D^{\phi e}] &= 1/4 \int_0^1 l_x^2 (1/2 + \alpha') C_x^\phi \{ -[A^{\phi,w}] + 1/2 l_x (1/2 - \alpha') [A^{\phi,\phi}] \} d\eta - \\ &\quad - \pi/16 \int_0^1 l_x^3 [A^{\phi,\phi}] d\eta, \\ [B^{\phi e}] &= 1/4 \int_0^1 l_x^2 C_x^\phi (1/2 + \alpha') [A^{\phi,\phi}] d\eta, \\ [A^{\phi,w}] &= [d\phi]^T \bar{\chi} \bar{\chi}^T [dw]; [A^{\phi,\phi}] = [d\phi]^T \bar{\chi} \bar{\chi}^T [d\phi]. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Вектор сил, эквивалентный всей аэродинамической нагрузке, действующей на элемент

$$\bar{Q}_A^e = \bar{Q}_A^{we} + Q_A^{\phi e} = -\rho_0 V \{ [D^e] \dot{\bar{q}}^e + V [B^e] \bar{q}^e \}. \quad (7.9)$$

Матрицы аэродинамической жесткости  $[B^e]$  и демпфирования  $[D^e]$  для элемента с учетом (7.5) и (7.8) вычисляются по формулам

$$[B^e] = [B^{we}] + [B^{\phi e}], [D^e] = [D^{we}] + [D^{\phi e}].$$

Эти матрицы нетрудно получить в явном виде, задавшись какой-либо аналитической зависимостью параметров вдоль длины элемента. В частности, при  $l_x = \text{const}$ ,  $\alpha' = \text{const}$ ,  $C_x^{\phi} = \text{const}$  блок матрицы  $[B^e]$ , соответствующий динамическим переменным  $\bar{w}$  и  $\bar{\phi}$ , равен [41]

$$[B_1^e] = 1/2 C_x^{\phi} l_x l_y \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 l_x (1/2 + \alpha') & 1/6 l_x (1/2 + \alpha') \\ 0 & 0 & 1/6 l_x (1/2 + \alpha') & 1/3 l_x (1/2 + \alpha') \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

Этой матрицей описывается дополнительная жесткость, возникающая в элементе за счет набегающего потока. Аэродинамическая жесткость сводится к крутящим моментам  $\bar{H}_A^e$  и поперечным силам  $\bar{P}_A^e$ , которые действуют в узлах элемента и определяются только углом атаки  $\bar{\phi}$ .

Матрица демпфирования  $[D^e]$  имеет структуру, сходную со структурой матрицы инерции (6.17). Аэродинамическое демпфирование сводится матрицей  $[D^e]$  к узловым моментам  $\bar{H}_A^e$  и поперечным силам  $\bar{P}_A^e$ , которые зависят от обобщенных скоростей  $\dot{\bar{\phi}}$  и  $\dot{\bar{w}}$ .

Уравнение изгибно-крутильных колебаний модели крыла в потоке после исключения кинематических переменных  $\bar{v}$  примет вид

$$[M_1] \ddot{\bar{q}}_1 + [\tilde{K}] \bar{q}_1 + \rho_0 V \{ [D_1] \dot{\bar{q}}_1 + V [B_1] \bar{q}_1 \} = 0. \quad (7.10)$$

Напомним, что компонентами вектора  $\bar{q}_1$  являются смещения  $\bar{w}$  и углы закручивания  $\bar{\phi}$  в узлах модели. Его размерность равна  $2N$ ,  $N$  — число свободных узлов модели.

Рассмотрим в качестве примера устойчивость крыла большого удлинения, изображенного на рис. 6.5. Пусть модель крыла состоит из 12 элементов с линейно-меняющимися параметрами. Частоты трех низших тонов

колебаний крыла в пустоте составляют (см. табл. 6.1) для первого тона изгиба 31.70 рад/с, для второго тона изгиба 123.2 рад/с, для первого тона кручения 157.8 рад/с.

На рис. 7.4 представлены траектории корней этих тонов при увеличении скорости потока  $V$ . Точками указаны положения корней при изменении скорости с шагом 50 м/с [41]. Видно, что при скорости, равной примерно 320 м/с, происходит вырождение первого тона, т.е. его частота обращается в нуль. С дальнейшим увеличением скорости корень первого тона начинает двигаться к началу координат и при  $V = 460$  м/с, наступает статическая неустойчивость типа дивергенции. Так как в этом случае скорость потока превышает звуковую, полученный результат имеет чисто теоретический интерес; в рассматриваемой области дозвуковых скоростей крыло остается устойчивым.

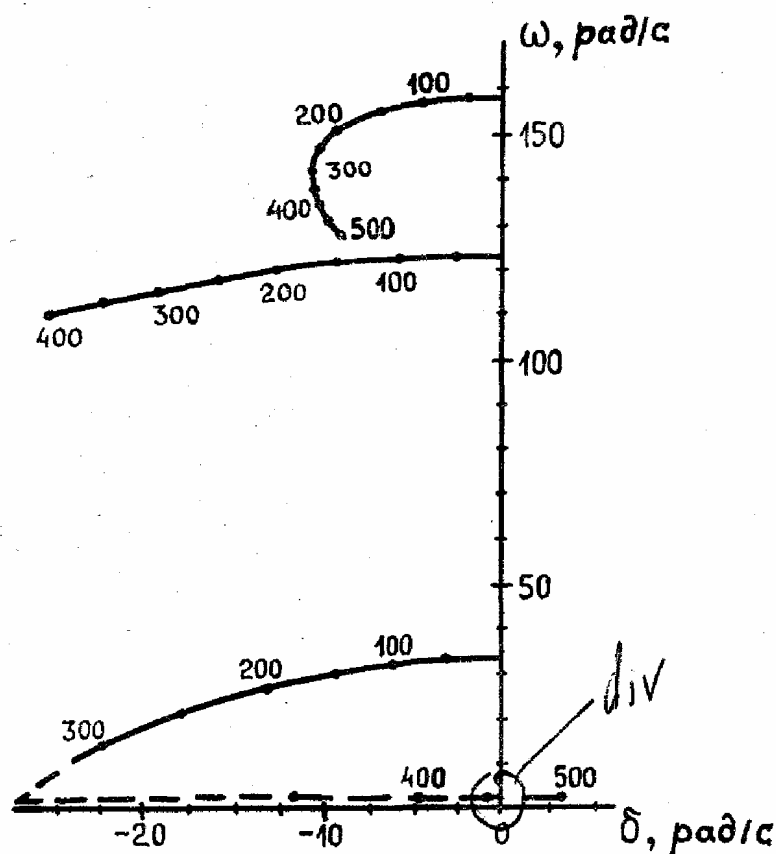


Рис. 7.4

Флаттер вращающийся лопасти вертолета. Изложенная методика с небольшими дополнениями может быть применена для исследования устойчивости лопасти

вертолета (рис. 7.5). Следуя принятым в [49] предположениям, лопасть заменяется тонким стержнем, который совершает изгибные колебания во вращающейся плоскости YOZ совместно с крутильными вокруг оси OY.

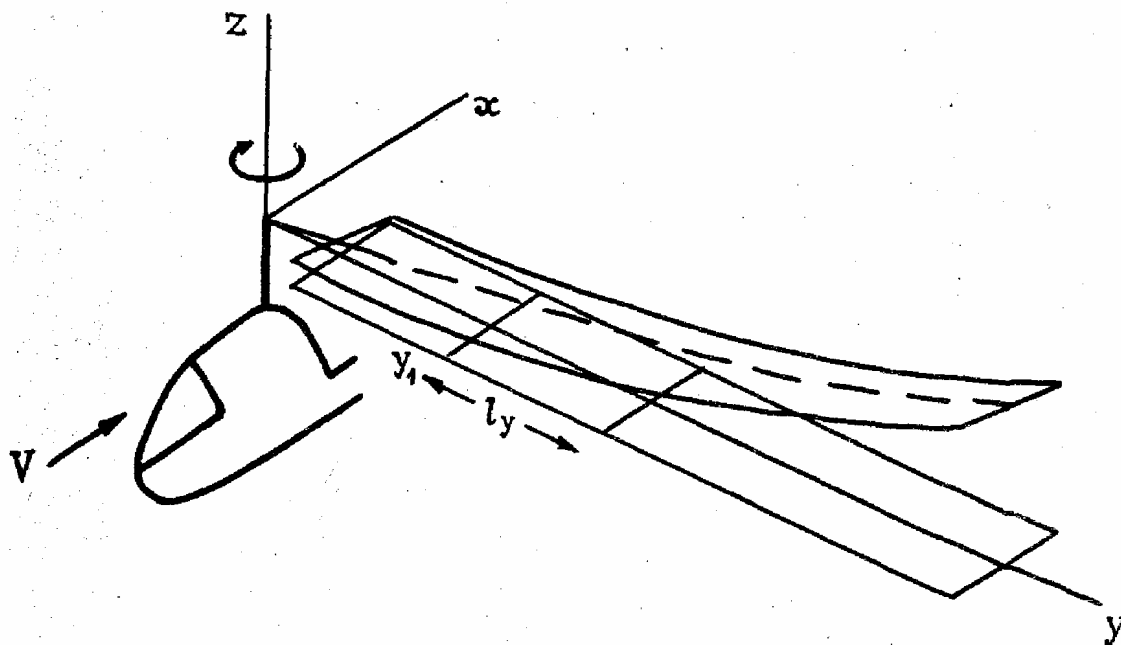


Рис. 7.5

Лопасть винта, вращающегося с угловой скоростью  $\Omega$ , находится в поле центробежных сил инерции. В соответствии с этим, в выражении для плотности потенциальной энергии (6.1) появляется дополнительное слагаемое

$$u_{\Omega} = \Omega^2/2(1/2\mu(L_y^2 - y^2)(\frac{\partial w}{\partial y})^2 - \mu a l_x y (\frac{\partial w}{\partial y})\phi + i_m \phi^2). \quad (7.11)$$

Подставляя в (7.11) формы прогиба и кручения (6.7) и используя укороченную систему базисных функций (6.13), получим после интегрирования по длине элемента потенциальную энергию в поле центробежных сил

$$U_{\Omega}^e = \frac{1}{2} \Omega^2 q^e T [G^e] q^e, \quad (7.12)$$

$$\text{здесь } \{G^e\} = \int_{y_1/L_y}^{y_1/L_y + 1} [u_{\Omega}] d\eta$$

— матрица реакции элемента в поле центробежных сил,



$$\begin{aligned}
[u_\Omega] = & 1/2 \mu (L_y^2 - l_y^2 \eta^2) [d^w]^T \frac{d\bar{\chi}}{d\eta} \frac{d\bar{\chi}^T}{d\eta} [d^w] - \\
& - 1/2 \mu \alpha l_x l_y \eta \{ [d^w]^T \frac{d\bar{\chi}}{d\eta} \bar{\chi}^T [d\phi] + [d\phi]^T \bar{\chi} \frac{d\bar{\chi}^T}{d\eta} [d^w] \} + \\
& + i_m [d\phi]^T \bar{\chi} \bar{\chi}^T [d\phi]
\end{aligned}$$

— матрица плотности энергии,  $y_1$  — координата узла, ближайшего к оси вращения,  $\eta = (y - y_1)/l_y$  — безразмерная координата в локальной системе, связанной с элементом.

Матрица  $[G^e]$  имеет такую же структуру, что и укороченная матрица инерции (6.17).

При поступательном перемещении вертолета со скоростью  $V_0$  скорость набегающего на лопасть потока

$$V = \Omega y + V_0 \sin \Omega t. \quad (7.13)$$

Подставляя (7.13) в выражение для аэродинамической нагрузки дозвукового потока (7.3) и (7.6), получим по формулам, аналогичным (7.5) и (7.8), матрицы аэродинамической жесткости и демпфирования. Подобно матрице  $[G^e]$ , они определяются расстоянием от элемента до оси вращения и кроме того, периодически зависят от времени.

В корне лопасти осуществляется упругое закрепление, которое описывается граничными условиями [49]

$$w|_{y=0} = 0, EI \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = 0, \phi|_{y=0} = \frac{1}{C_{упр}} GI_p \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=0} - k \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0},$$

здесь  $C_{упр}$  — жесткость устройства управления,  $k$  — коэффициент влияния компенсатора взмаха.

С учетом граничных условий, уравнение изгибно-крутильных колебаний модели лопасти, вращающейся в набегающем потоке,

$$[M_1] \ddot{\bar{q}}_1 + \{[\tilde{K}] + \Omega^2 [G_1]\} \bar{q}_1 + [D_1(t)] \dot{\bar{q}}_1 + [B_1(t)] \bar{q}_1 = 0. \quad (7.14)$$

Численное интегрирование уравнения (7.14), содержащего периодические коэффициенты, трудоемко. Более удобным представляется применение для решения подобных задач аналоговых вычислительных машин (АВМ).

Структурная схема АВМ подобна структуре модели из конечных элементов. Протяженным участкам модели соответствуют блоки жесткости  $K$ , реакции  $G$  и аэродинамической нагрузки  $B, D$ , в которых образуются узловые силы и моменты, вызванные деформацией лопасти и аэро-

динамическим воздействием. Узлам модели соответствуют блоки инерции  $M$ , где в результате интегрирования всех узловых сил образуются смещения  $w$  и углы атаки  $\phi$ . В целом электронная модель лопасти представляет собой совокупность колебательных колец, число которых совпадает с числом динамических координат [50-52].

Приведем результаты исследования на АВМ динамики лопасти вертолета МИ-6 [53]. Поведение частот совместных изгибно-крутильных колебаний в пустоте при изменении скорости вращения показано на рис. 7.6. Буквами "и", "к" помечено,

из каких форм раздельных колебаний можно представить формы совместных. График отражает изменение связанности изгибных и крутильных форм с изменением скорости вращения. Кривые II, III образуют известный в теории колебаний график Вина. На рис. 7.7 изображены траектории корней. Сплошные кривые I, II соответ-

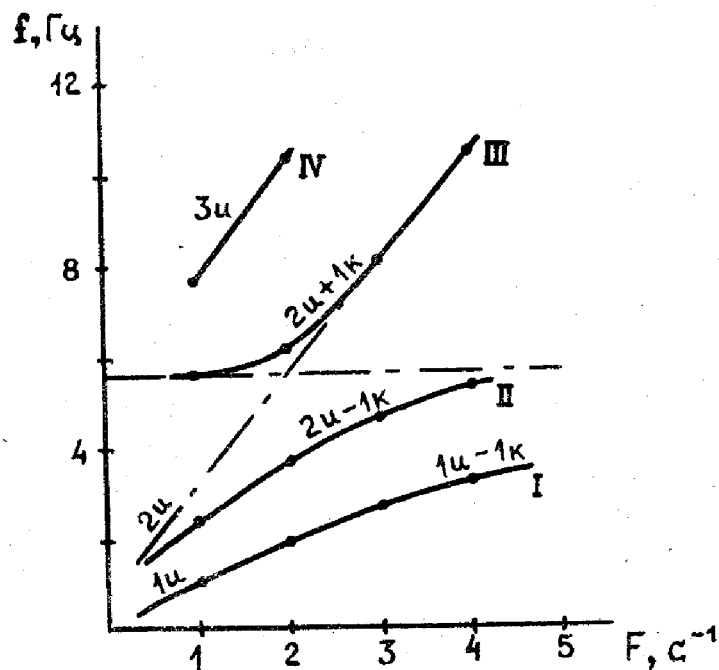


Рис. 7.6

вуют маховому тону и первому тону упругих колебаний при изменении частоты вращения в режиме висения. Частоты вращения указаны в скобках. С увеличением частоты вращения до  $3 \text{ с}^{-1}$  наступает флаттер. Лопасть совершает при этом маховое движение и одновременно крутильные колебания, сдвинутые по фазе на  $\pi/2$ . Влияние компенсатора взмаха  $k$  отражает кривая III; критическая частота вращения увеличивается до  $4 \text{ с}^{-1}$ .

Траектория корня первого упругого тона при поступательном полете представлена на рис. 7.7 штриховой линией. Здесь параметром является скорость полета  $V$  (м/с). Видно, что существует область скоростей, где движение лопасти неустойчиво. Интересно отметить, что форма колебаний при флаттере является суперпозицией третьего из-

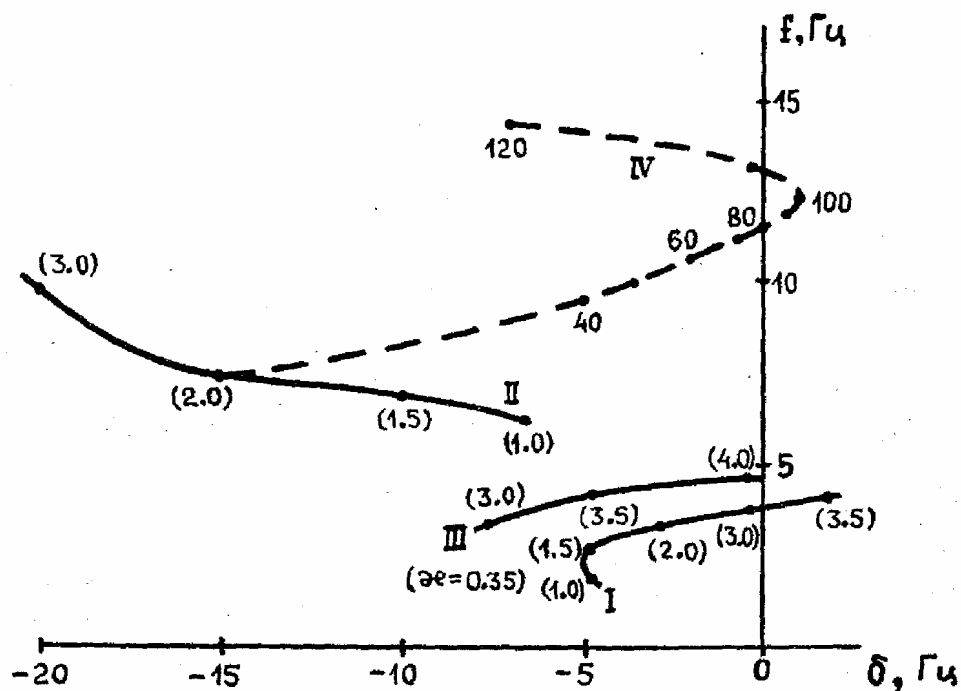


Рис. 7.7

гибного и первого крутильного тонов. Последнее обстоятельство вызвано, по-видимому, большой связанностью этих тонов в данном режиме полета.

Рассмотренный пример показывает, что применение АВМ расширяет возможности метода конечных элементов при решении конкретных задач аэроупругости.

## § 8. Переходной процесс в полупроводниковом диоде

При работе полупроводниковых приборов в импульсных схемах процессы установления концентрации носителей и электрических полей играют важную роль. От скорости протекания этих процессов при различных уровнях инжекции зависит быстродействие прибора [54].

Рассмотрим движение неосновных носителей в широком слое полупроводника  $n$ -типа, находящегося между  $p$ - $n$ -переходом и омическим контактом (рис. 8.1). Положим, что концентрации электронов  $n(y, t)$ , дырок  $p(y, t)$ , а также плотности их токов не зависят от поперечных координат. Пусть к диоду подключен генератор, который задает ток плотности  $j(t)$ .

Согласно теории полупроводниковых приборов, изменение концентрации дырок в  $p$ -области описывается нелинейным уравнением в частных производных, которое в предположении

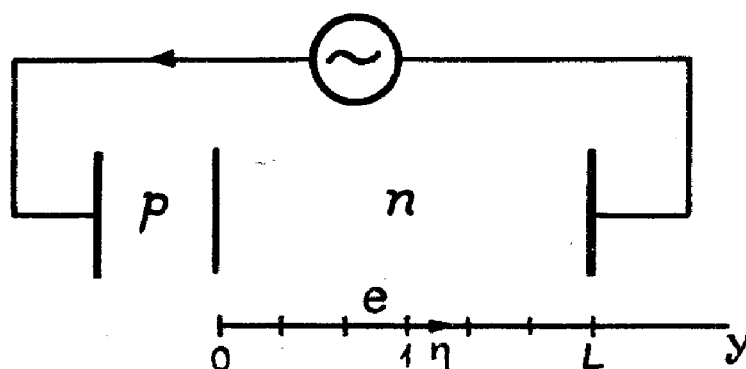


Рис. 8.1

нейтральности зарядов, имеет вид [54, 55]

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{p - p_0}{\tau} + \frac{\partial}{\partial y} \left( D(p) \frac{\partial p}{\partial y} \right) - j C(p) \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (8.1)$$

Здесь  $D(p) = \frac{D_p b(2p + N_d)}{p(b+1) + bN_d}$  — коэффициент нелинейной

диффузии;  $C(p) = \frac{bN_d}{e(p(b+1) + bN_d)}$  — коэффициент, определяю-

щий дрейф дырок в электрическом поле;  $\tau$  — среднее время жизни избыточной дырки в  $n$ -области до ее рекомбинации;  $p_0$  — равновесная концентрация дырок;  $N_d$  — кон-

центрация доноров;  $b = \frac{D_n}{D_p} = \frac{\mu_n}{\mu_p}$  — постоянная, определяемая

коэффициентами диффузии и подвижностями дырок и электронов;  $e$  — заряд электрона. При заданной плотности тока  $j(t)$  граничное условие у перехода ( $y = 0$ ) формулируется следующим образом:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=0} = -jK(p); \quad K(p) = \frac{\gamma(p(b+1) + bN_d) - p}{ebD_p(2p + N_d)} \Big|_{y=0} \quad (8.2)$$

— коэффициент инжекции.

На правой границе области ( $y = L$ ) положим

$$p|_{y=L} = p_0. \quad (8.3)$$

Перед включением тока концентрация дырок совпадает с равновесной

$$p|_{t=0} = p_0. \quad (8.4)$$

Заметим, что система (8.1)–(8.4) описывает изменение концентрации носителей при заданной форме тока включения  $j(t)$ . Это — упрощенная постановка задачи, поз-

воляющая выяснить только роль диффузии и дрейфа носителей в переходном процессе. Как показывает анализ, в начальной стадии процесса основную роль играет дрейф дырок в поле, а в областях большого градиента концентрации также и диффузия их. На этом этапе  $p < N_d$  и возможна линеаризация уравнения и граничного условия. Однако с развитием процесса при  $p \approx N_d$  для определения зависимости  $p(y, t)$  необходимо численное исследование нелинейного параболического уравнения (8.1) с условиями (8.2) – (8.4).

Для решения поставленной задачи методом конечных элементов воспользуемся принципом локального потенциала. Следуя § 4, составим функционал двух переменных: наиболее вероятной концентрации –  $p(y, t)$  и усредненной по флуктуациям –  $p^0(y, t)$

$$S[p, p^0] = \int_0^L \left[ \frac{\partial p^0}{\partial t} p + \frac{1}{2} D(p^0) \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} (p - p^0)^2 + jC(p^0) \frac{\partial p^0}{\partial y} p \right] dy + jD(p^0) K(p^0) p \Big|_{y=0}. \quad (8.5)$$

Значения коэффициентов  $D(p^0)$ ,  $C(p^0)$ ,  $K(p^0)$  взяты для усредненного значения концентрации  $p^0$ . Последнее слагаемое в  $S[p, p^0]$  обусловлено граничным условием (8.2). Это условие нелинейно и не является естественным для самосопряженной части оператора уравнения (8.1). Непосредственным варьированием функционала  $S$  по  $p$  можно убедиться, что требование его стационарности

$$\delta_p S[p, p^0] = 0 \quad (8.6)$$

$$\text{при условии } p^0 = p \quad (8.6a)$$

эквивалентно задаче (8.1), (8.2), (8.3).

Разобьем отрезок  $[0, L]$  на  $N$  элементов (рис. 8.1). Концентрацию на каждом из них аппроксимируем как обычно линейной формой базисных функций

$$p^e(\eta, t) = \bar{\chi}^T(\eta) [d] \bar{q}^e(t), \quad (8.7)$$

$\eta$  – локальная координата элемента ( $\eta \in [0, 1]$ ). За обобщенные координаты возьмем значения концентраций на концах элемента

$$\bar{q}^e(t) = \{p_1(t), p_2(t)\}; p_1(t) = p(0, t); p_2(t) = p(1, t).$$

Согласно самосогласованному приближению

$$p^{oe}(\eta, t) = \bar{\chi}^T(\eta) [d] \bar{q}^{oe}(t). \quad (8.7a)$$

Подставим (8.7), (8.7a) в (8.5) и, следуя технике, изложенной в § 4, получим из (8.6) и (8.6a)

$$\sum_{e=1}^N \delta \bar{q}^e T \{ [M^e] \dot{\bar{q}}^e + ([D^e] + [M^e] + [C^e]) \bar{q}^e \} + \delta p_1^1 j D(p^1) K(p^1) = 0. \quad (8.8)$$

Здесь  $[M^e] = [d]^T l_y^e \int_0^1 \bar{X} \bar{X}^T d\eta [d]$  — матрица релаксации носителей на элементе:

$$[D^e] = [d]^T l_y^e \int_0^1 D(p^e) \frac{d\bar{X}}{d\eta} \frac{d\bar{X}^T}{d\eta} d\eta [d]$$

— матрица нелинейной диффузии носителей;

$$[C^e] = [d]^T j \int_0^1 C(p^e) \bar{X} \frac{d\bar{X}^T}{d\eta} d\eta [d]$$

— матрица дрейфа носителей.

Элементы матриц  $[D^e]$  и  $[C^e]$  зависят от концентрации на элементе  $p^e(\eta, t)$  и определяются численным интегрированием. Для получения аналитических выражений этих матриц можно разложить функции  $D(p)$  и  $C(p)$  в ряд около точки  $p_{cp}^e = (p_1 + p_2)^e / 2$ . Например,

$$D(p^e) = D_0(p_{cp}^e) + D_1(p_{cp}^e)\beta + D_2(p_{cp}^e)\beta^2 + \dots, \quad (8.9)$$

где  $\beta = \frac{p_2 - p_1}{p_{cp}} \left( \eta - \frac{1}{2} \right) \leq 1$ .

Введем вектор обобщенных координат модели  $\bar{q}$ , компоненты которого суть концентрации в ее узлах, и воспользуемся в (8.8) независимостью вариаций этих компонент

$$[M] \dot{\bar{q}} + \{ [D(\bar{q})] + [M] + [C(\bar{q})] \} \bar{q} = \bar{F}. \quad (8.10)$$

Здесь  $\bar{F}^T = \{ j D(o) K(o), 0, 0, \dots \}$  — вектор внешних истоков носителей в узлах модели. Он отражает граничное условие на левом конце модели.

Матрицы  $[M]$ ,  $[D]$ ,  $[C]$  — клеточно-диагональные. Они легко образуются из матриц отдельных элементов по схеме, изложенной в § 6.

Интегрирование уравнения (8.10) осуществляется на ЦВМ методом Рунге-Кутты с начальным условием

$$\bar{q}^T(o) = \{ p_o, p_o, \dots, p_o \}.$$



При решении матрицы  $[D(q)]$  и  $[C(q)]$  вычисляются для значений обобщенных координат  $q$ , полученных на предыдущем шаге интегрирования по  $t$ .

Примеры. Пусть  $\bar{\chi}^T(\eta) = \{1 - \eta, \eta\}$ . (8.11)  
Тогда  $[d]$  - единичная матрица;

$$[M^e] = \frac{l_y^e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ где } l_y^e - \text{длина элемента};$$

$$[D^e] = (D_0 - \frac{1}{12} (\frac{p_2 - p_1}{p_{cp}})^2 D_2 + \dots)^e \frac{1}{l_y^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$[C^e] = (\frac{1}{2} C_0 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{12} (\frac{p_2 - p_1}{p_{cp}}) C_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \dots)^e;$$

$$\text{здесь } D_0 = D(p_{cp}), D_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D(p)}{\partial p^2} \Big|_{p=p_{cp}};$$

$$C_0 = C(p_{cp}), C_1 = \frac{\partial C(p)}{\partial p} \Big|_{p=p_{cp}}.$$

Результаты решения при задании ступеньки тока представлены на рис. 8.2 в относительных единицах. Здесь изображено изменение во времени концентрации  $p$  для сечений  $y = L/3$  и  $y = 2L/3$ . При разбиении слоя на три элемента изменение  $p(t)$  представлено штриховой линией, на шесть элементов - сплошной. С увеличением  $N$  функции  $p(L/3, t)$  и  $p(2L/3, t)$  стремятся к некоторым пределам. Как показали расчеты, предел, практически, достигается при  $N \geq 9$ .

Рассмотрим возможность повышения точности путем совершенствования конечного элемента без увеличения числа его динамических координат \*. Для этого в качестве базисных возьмем функции, образующие фундаментальную систему решений близкой задачи. Таковой, например, является задача о стационарной линейной диффузии носителей с конечным временем жизни в отсутствии электрического поля. Она описывается уравнением

$$\frac{p^e - p_0}{\tau} + D_0^e \frac{\partial^2 p^e}{\partial y^2} = 0.$$

Тогда

$$\bar{\chi}^{eT} = \frac{1}{sh\mu} \{sh\mu(1-\eta), sh\mu\eta\}^e; \mu^e = \frac{l_y^e}{\sqrt{(D_0^e \tau)}}, \quad (8.12)$$

здесь  $D_0^e$  - нулевой член разложения в (8.9).

\* Заметим, что такая проблема представляет интерес для более сложных задач, например двух- или трехмерных.

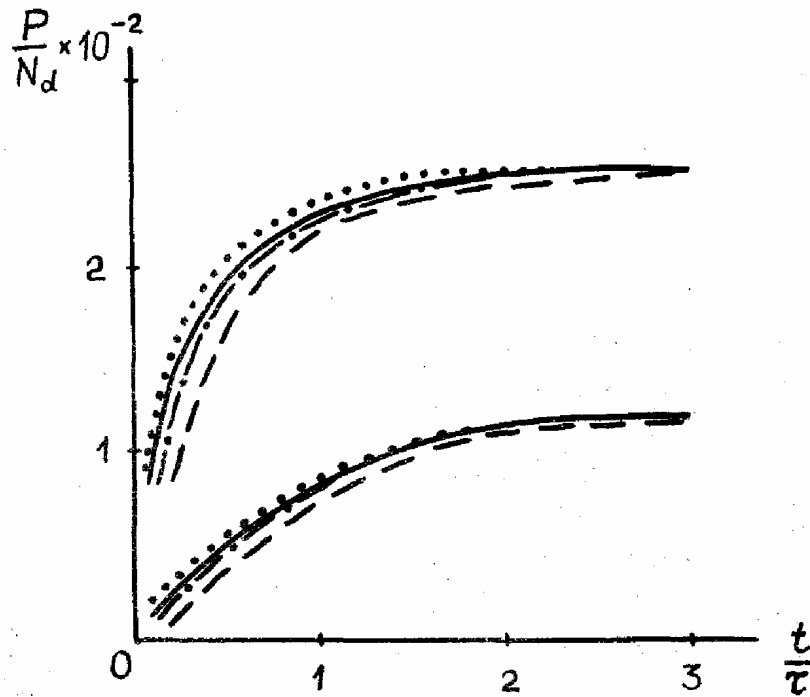


Рис. 8.2

Физически аппроксимация (8.7) с функциями (8.12) означает, что время установления концентрации в пределах элемента предполагается много меньше характерного времени переходного процесса. В этом случае [d] – единичная,

$$[M^e] = \frac{1}{\text{sh}^2 \mu} \begin{bmatrix} \frac{\text{sh } 2\mu}{4\mu} - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}(\text{ch}\mu - \frac{1}{\mu} \text{sh}\mu) \\ -\frac{1}{2}(\text{ch}\mu - \frac{1}{\mu} \text{sh}\mu) & \frac{\text{sh } 2\mu}{4\mu} - \frac{1}{2} \end{bmatrix} e.$$

Матрицы  $[D^e]$  и  $[C^e]$  приведем, ограничившись нулевым членом разложения в (8.9)

$$[D^e] = \frac{1}{\text{sh}^2 \mu} \begin{bmatrix} \frac{\text{sh } 2\mu}{4\mu} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}(\text{ch}\mu + \frac{1}{\mu} \text{sh}\mu) \\ -\frac{1}{2}(\text{ch}\mu + \frac{1}{\mu} \text{sh}\mu) & \frac{\text{sh } 2\mu}{4\mu} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} e,$$

$$[C^e] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & \frac{\mu}{\text{sh}\mu} \\ -\frac{\mu}{\text{sh}\mu} & 1 \end{bmatrix}^e$$

Видно, что с уменьшением размеров элемента, т.е. при  $\mu^e \rightarrow 0$  система базисных функций (8.12) стремится к системе (8.11), а матрицы  $[M^e]$ ,  $[D^e]$ ,  $[C^e]$  стремятся к соответствующим матрицам при линейной аппроксимации. Это – следствие того, что на малой длине элемента  $l_y^e$  распределение концентрации элемента вполне удовлетворительно аппроксимируется линейной функцией. Результаты решения при базисных функциях в виде (8.12) представлены на рис. 8.2. В случае  $N = 3$  изменение концентрации изображено штрих-пунктирной линией, при  $N = 6$  – пунктирной.

Результаты проведенных численных исследований на модели из конечных элементов позволили определить в зависимости от времени размеры области у р-п-перехода, в которой дрейф носителей является несущественным. Только для этой области возможно заменить уравнение (8.1) линейным уравнением диффузии с некоторым эквивалентным коэффициентом диффузии.

## ДИНАМИКА ПЛАСТИН

Поперечные колебания тонких пластин – одна из задач, решение которой методом конечных элементов наиболее эффективно. Как известно, эта задача сводится к уравнению в частных производных четвертого порядка со сложными и разнообразными граничными условиями [56]. В случае обтекания пластины потоком газа уравнение колебаний решается совместно с интегральным, которое описывает зависимость плотности аэродинамической нагрузки от смещений во всех точках пластины. В этой задаче проявляются прежде всего преимущества метода, связанные с его универсальностью. С помощью модели из типовых элементов возможно исследование колебаний пластин, имеющих различные геометрические формы и условия закрепления. Существенно, что из-за высокого порядка дифференциального уравнения пластины увеличивается степень аппроксимации поля перемещений на элементе, что приводит к росту числа обобщенных координат. Поэтому сокращение числа динамических переменных в практических расчетах является достаточно актуальным. При исследовании устойчивости пластин особое место занимает задача об определении аэродинамических воздействий и о взаимодействии потока с упругой системой.

Первая часть главы посвящена построению конечных элементов для изучения колебаний тонких пластин. Обсуждаются вопросы сходимости и точности при расчете свободных колебаний. Далее излагается способ моделирования аэродинамических воздействий сверхзвукового потока на пластину, пригодный для широкого диапазона скоростей. Значительная часть главы посвящена примерам исследования устойчивости пластин в потоке газа. В заключение рассматривается модель двуслойной пластины круглой формы.

## § 9. Поперечные колебания пластин

В рамках теории тонких пластин динамическая деформация однозначно определяется поперечным прогибом  $w(x, y, t)$ , являющимся функцией двух пространственных переменных. Переход к полям перемещений, заданным на двумерной области, накладывает на форму прогиба элемента дополнительные требования. В самом деле, как и в одномерном случае изгиба стержней, главные производные, которые из условий сходимости должны быть непрерывными на границе между элементами (гл. 1), имеют первый порядок. Однако при изгибе пластин непрерывность первых производных в узлах не гарантирует, вообще говоря, их непрерывность в промежутках между узлами. В связи с этим проблема построения согласованных элементов пластин может решаться двумя способами: либо использованием для форм прогиба специально подобранных корректирующих функций [8], либо введением дополнительных обобщенных координат в узлах элемента [8, 57]. В настоящее время последний путь является более распространенным.

**Согласованные элементы.** Во многих практических случаях можно ограничиться элементами прямоугольной и треугольной формы, заменяя контур пластины ломаной. Очевидно, что конечный элемент будет согласованным, если производная по нормали к каждой его стороне однозначно выразится через обобщенные координаты узлов, прилежащих этой стороне. Согласно [57] удовлетворить этому требованию можно, вводя в каждом узле элемента (рис. 9.1) в качестве обобщенных координат следующие четыре величины

$$w_i = w|_{x_i, y_i}; \quad \phi_i = \frac{\partial w}{\partial x}|_{x_i, y_i}; \quad \nu_i = \frac{\partial w}{\partial y}|_{x_i, y_i}; \quad \tau_i = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}|_{x_i, y_i} \quad (9.1)$$

$$i = 1, 2, 3, 4.$$

Они имеют наглядный геометрический смысл: это смещения, углы наклона и перекручивания в узлах. Для прямоугольного элемента вектор обобщенных координат содержит 16 компонент

$$\bar{q}^{eT} = \{\bar{w}^{eT}, \bar{\phi}^{eT}, \bar{\nu}^{eT}, \bar{\tau}^{eT}\}, \quad (9.2)$$

здесь  $w^{eT} = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$  и т. д.

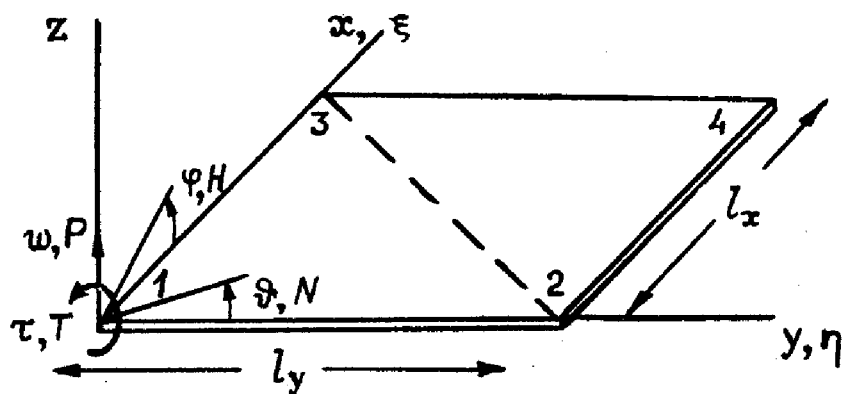


Рис. 9.1

Аппроксимируем форму прогиба элемента полиномом, взяв следующую последовательность базисных функций

$$\bar{\psi}^T(\xi, \eta) = \{\xi^i \eta^j\}, \quad i, j = 0, 1, 2, 3; \quad (9.3)$$

здесь  $\xi = x/l_x$ ,  $\eta = y/l_y$ .

Представим прогиб элемента в локальной системе координат  $\xi\eta$  в обычном виде

$$w^e(\xi, \eta, t) = \bar{\psi}^T(\xi, \eta) [d_k] \bar{q}^e(t). \quad (9.4)$$

Матрица перехода  $[d_k]$  имеет в этом случае порядок  $16 \times 16$ .

При построении треугольного элемента ограничимся случаем прямоугольного треугольника, катеты которого совпадают с осями координат [58] (например, элемент 123 на рис. 9.1). Для совместного использования в одной модели с прямоугольным элементом, треугольный элемент должен иметь такие же обобщенные координаты (9.1).

Систему базисных функций для треугольного элемента получим из (9.3), оставив следующие 12 членов:

$$\bar{\psi}_1^T(\xi, \eta) = \{1, \xi, \eta, \xi^2, \xi\eta, \eta^2, \xi^3, \xi^2\eta, \xi\eta^2, \eta^3, \xi^3\eta, \xi\eta^3\}. \quad (9.5)$$

Этой системе соответствует матрица перехода  $[d_k]$  порядка  $12 \times 12$ . Заметим, что форма прогиба треугольного элемента с базисными функциями (9.5) является согласованной на катетах и несогласованной на гипотенузе. Последнее обстоятельство представляется несущественным, если гипотенузы рассматриваемых элементов не распола-

гаются на линиях разбиения, а лежат только на свободных краях пластины.

Перейдем к описанию динамических свойств элементов. Вектору обобщенных координат  $\bar{q}^e$  сопряжен вектор обобщенных узловых сил  $\bar{Q}^e$

$$\bar{Q}^{eT} = \{\bar{P}^{eT}, \bar{H}^{eT}, \bar{N}^{eT}, \bar{T}^{eT}\}. \quad (9.6)$$

Его компонентами являются поперечные силы  $\bar{P}^e$ , изгибающие  $\bar{H}^e$ ,  $\bar{N}^e$  и перекручивающие  $\bar{T}^e$  моменты. Выражение для плотности потенциальной энергии упругой деформации тонкой изотропной пластины имеет вид [56].

$$u = \frac{D}{2} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + 2(1 - \nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 \right], \quad (9.7)$$

здесь  $D = E l_z^3 / (12(1 - \nu^2))$  — цилиндрическая жесткость,  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $l_z$  — толщина пластины. Подставим в (9.7) выражение для формы прогиба (9.4) и приведем плотность энергии к виду

$$u = \frac{1}{2} \bar{q}^{eT} [d_k]^T [u] [d_k] \bar{q}^e. \quad (9.8)$$

Здесь матрица плотности потенциальной энергии

$$[u] = D \left[ \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}^T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}^T}{\partial \eta^2} + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}^T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}^T}{\partial \xi^2} \right) + \right. \\ \left. + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 \bar{\psi}^T}{\partial \xi \partial \eta} \right]. \quad (9.9)$$

Матрицы жесткости элементов вычисляются по общей формуле

$$[K^e] = [d_k]^T \int \int [u] d\xi d\eta [d_k]. \quad (9.10)$$

Для прямоугольных элементов в выражении (9.10) используются базисные функции (9.3), для треугольных — (9.5). В первом случае матрица  $[K^e]$  имеет размерность  $16 \times 16$ , во втором —  $12 \times 12$ .

Пользуясь выражением (9.10), можно получить в явном виде матрицы жесткости для однородных и неоднородных элементов с простым законом зависимости параметров от пространственных координат. Пусть, например, однородный элемент подкреплен в каком-то сечении ребром жесткости. Выразив прогиб данно-



го сечения через узловые обобщенные координаты элемента и воспользовавшись выражением для плотности энергии изгибных деформаций стержня (6.1), можно найти по формуле (9.10) добавочные коэффициенты в матрице  $[K^e]$ , описывающие дополнительную жесткость ребра.

При получении матриц инерции используем укороченные системы базисных функций:

для прямоугольного элемента -  $\bar{\chi}^T(\xi, \eta) = \{1, \xi, \eta, \xi\eta\}$ , (9.11)

для треугольного  $\bar{\chi}_1^T(\xi, \eta) = \{1, \xi, \eta\}$ . (9.11a)

Матрицы перехода, соответствующие этим последовательностям, имеют размерности  $4 \times 16$  и  $3 \times 12$ . Например, для прямоугольного элемента матрица перехода

$$[d] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & \dots & 0 & | & 0 & \dots & 0 & | & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & | & \cdot & & \cdot & | & \cdot & & \cdot & | & \cdot & & \cdot \\ -1 & 0 & 1 & 0 & | & \cdot & & \cdot & | & \cdot & & \cdot & | & \cdot & & \cdot \\ 1 & -1 & -1 & 1 & | & 0 & \dots & 0 & | & 0 & \dots & 0 & | & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что форма

$$w^e(\xi, \eta, t) = \bar{\chi}^T(\xi, \eta)[d] \bar{q}^e(t), \quad (9.12)$$

на основе которой вычисляются силы инерции, полностью определяется поперечными смещениями узловых точек  $\bar{w}^e$  и не зависит от координат  $\bar{\phi}^e, \bar{v}^e, \bar{r}^e$ .

Приведем формулу для получения укороченной матрицы инерции

$$[M^e] = [d]^T \iint \sigma \bar{\chi} \bar{\chi}^T d\xi d\eta [d],$$

здесь  $\sigma$  - поверхностная плотность. Порядок матрицы  $[M^e]$  совпадает с числом обобщенных координат элемента, однако ее ранг равен числу узлов. В ней отличен от нуля только блок, связывающий силы инерции и поперечные ускорения в узлах. Для однородного прямоугольного элемента он имеет вид [58]

$$[M_{Pw}^e] = \frac{\sigma l_x l_y}{36} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Этот же блок для треугольного элемента [60]

$$[M^e]_{Pw} = \frac{\sigma^1 x^1 y^1}{36} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Равенство нулю остальных блоков матрицы  $[M^e]$  означает, что изгибающие и перекручивающие моменты сил инерции в элементе отсутствуют, и вся инерционная нагрузка сводится к поперечным узловым силам.

Таким же образом можно свести к поперечным узловым силам и распределенную внешнюю нагрузку  $f(\xi, \eta, t)$ .

Компоненты вектора внешних сил вычисляются по формулам

$$\bar{Q}_f^e = [d]^T \iint \bar{\chi} f d\xi d\eta. \quad (9.13)$$

Используя динамический принцип виртуальных перемещений (3.1), получим уравнение, связывающее векторы  $\bar{Q}^e$  и  $\bar{q}^e$ .

$$[M^e] \ddot{\bar{q}}^e + [K^e] \bar{q}^e - \bar{Q}_f^e = \bar{Q}^e.$$

Условия сопряжения. Граничные условия. Для записи в явном виде условий сопряжения рассмотрим один из внутренних узлов сетки разбиения (рис. 9.2). На обобщенные координаты смежных элементов накладываются требования непрерывности

$$w_1^I = w_2^{II} = w_3^{III} = w_4^{IV}, \dots, r_1^I = r_2^{II} = r_3^{III} = r_4^{IV}. \quad (9.14)$$

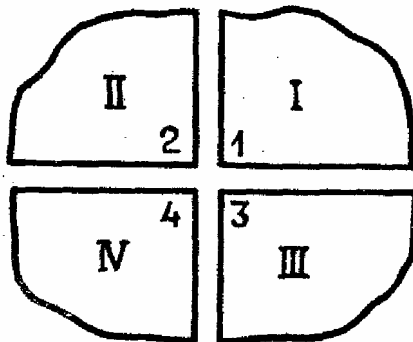


Рис. 9.2

Они обеспечивают гладкость формы перемещений модели, т.е. непрерывность на общих границах нормальных производных первого порядка. В ряде работ [61–63] предлагается повысить порядок непрерывности до второго путем введения большего числа (от шести до девяти) обобщенных координат в каждом узле элемента. Такое услож-

нение элементов приводит к повышению точности в статических задачах, однако в задачах динамики вряд ли может считаться оправданным. В [33, 34, 61, 63] отмечается, что избыток узловых координат и повышение порядка непрерывности нормальных производных не ведут к существенному повышению точности.

Полученный в результате наложения условий (9.14) вектор обобщенных координат модели  $\bar{q}$  имеет структуру, подобную (9.2), т.е.

$$\bar{q}^T = \{\bar{w}^T, \bar{\phi}^T, \bar{\nu}^T, \bar{\tau}^T\}, \quad (9.15)$$

здесь  $\bar{w}^T = \{w_1, w_2, \dots, w_N\}$  и т.д.,  $N$  — число узлов модели.

Динамические условия сопряжения формулируются из требования уравниваемости всех обобщенных сил в узлах. Для каждого внутреннего узла (рис. 9.2)

$$P_1^I + P_2^{II} + P_3^{III} + P_4^{IV} = 0, \dots, T_1^I + T_2^{II} + T_3^{III} + T_4^{IV} = 0. \quad (9.16)$$

Граничные условия для модели записываются в узлах, лежащих на контуре пластины. Например, если край пластины свободен (рис. 9.3а), то граничные условия сводятся к уравниваемости сил в общих узлах каждой пары соседних элементов. В случае закрепленного края  $x = 0$  (рис. 9.3, б) требуется, чтобы в узлах на границе обращались в нуль координаты  $\bar{w}$  и  $\bar{\phi}$ . Следует также приравнять нулю углы  $\bar{\nu}$  и перекручивания  $\bar{\tau}$  с тем, чтобы обеспечить тождественное равенство нулю смещения и нормальной производной на отрезке между узлами. Для свободно опертого края  $x = 0$  (рис. 9.3, в) равны нулю смещения  $\bar{w}$  и углы  $\bar{\nu}$ ; условия уравниваемости записываются для моментов  $\bar{H}$  и  $\bar{T}$ .

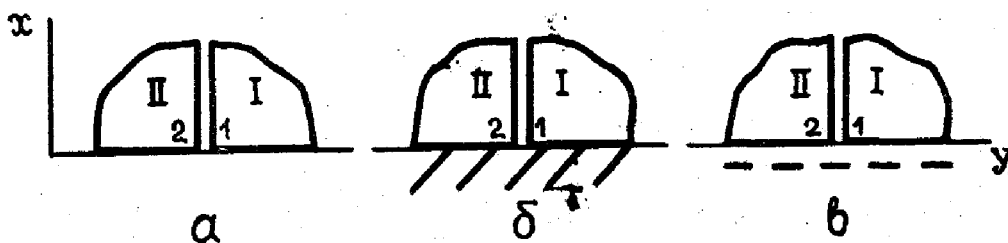


Рис. 9.3

Следуя алгоритму, изложенному в предыдущей главе, можно получить на основе динамических условий сопряжения матричное уравнение движения модели

$$[M]\ddot{\bar{q}} + [K]\bar{q} = \bar{Q}_f.$$

Понижение порядка матричного уравнения движения. Компоненты вектора  $\bar{q}$  удобно разбить на две группы; в первую из них входят динамические переменные  $\bar{w}$ , во вторую – кинематические  $\bar{q}_c$ , т.е.

$$\bar{q}^T = \{\bar{w}^T, \bar{q}_c^T\},$$

причем  $\bar{q}_c^T = \{\bar{\phi}^T, \bar{v}^T, \bar{\tau}^T\}$ . Аналогично  $\bar{Q}_f^T = \{\bar{P}_f^T, \bar{Q}_c^T\}$ . При использовании укороченных систем базисных функций  $\bar{Q}_c = 0$ . Для пластины, имеющей лишь свободные и защемленные кромки, размерность вектора  $\bar{w}$  равна  $N$ , вектора  $\bar{q}_c$  –  $3N$  ( $N$  – число свободных узлов модели). Подразделяя матрицы жесткости и инерции на блоки, соответствующие разбиению векторов  $\bar{q}$  и  $\bar{Q}_f$ , запишем уравнение (9.17) в виде

$$\begin{bmatrix} M_{Pw} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\bar{w}} \\ \ddot{\bar{q}}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{Pw} & K_{Pq} \\ K_{Qw} & K_{Qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w} \\ \bar{q}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_f \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (9.18)$$

Исключая из (9.18) кинематические переменные  $\bar{q}_c$ , получаем

$$[M_{Pw}]\ddot{\bar{w}} + [\tilde{K}]\bar{w} = \bar{P}_f, \quad (9.19)$$

$$\text{где } [\tilde{K}] = [K_{Pw}] - [K_{Pq}][K_{Qq}]^{-1}[K_{Qw}] \quad (9.20)$$

– редуцированная матрица жесткости модели.

В результате изложенной процедуры порядок уравнения движения понижается вчетверо и становится равным числу свободных узлов модели  $N$ . В дальнейшем в уравнении (9.19) индексы у матриц будем опускать.

Заметим, что при построении матриц инерции на полных системах базисных функций (9.3), (9.5) все блоки  $[M]$  отличны от нуля. Это означает, что все координаты модели являются динамическими. Для модели с полной матрицей инерции порядок системы (9.18) равен  $4N$ .

Численное исследование точности. При  $P_f = 0$  решение уравнения (9.19) дает собственные частоты и распределения амплитуд на низших тонах свободных колебаний модели пластины. Оценим точность модели из построенных элементов с укороченными матрицами инерции

на некоторых примерах. На рис. 9.4 изображены однородные пластины квадратной и треугольной формы, у которых одна сторона закреплена, а остальные свободны. Точность метода оценим по частотам и формам свободных колебаний моделей при различных разбиениях на элементы; на рис. 9.4. изображены сетки разбиения 4 x 4. При сравнении будем пользоваться приведенными частотами  $\Omega = \omega L_y^2 / \sqrt{(D/\sigma)}$ .

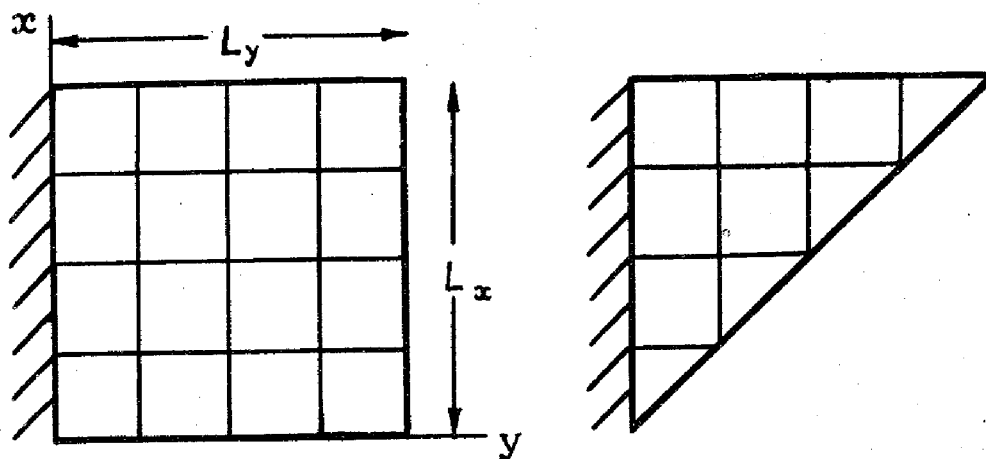


Рис. 9.4

Результаты, полученные для первых пяти тонов квадратной пластины, представлены в табл. 9.1. В трех первых колонках помещены частоты согласованной модели с укороченными матрицами инерции [58], в четвертой — частоты модели с полными матрицами инерции\*. В пятой колонке для сравнения даны значения частот, полученные методом Ритца [64].

Из таблицы видно, что при увеличении числа степеней свободы  $J$  частоты, полученные для модели с укороченной матрицей инерции, быстро сходятся к некоторым значениям. С ростом  $J$  относительные отклонения от частот, полученных по Ритцу, монотонно уменьшаются.

Сопоставление третьей и четвертой колонок показывает, что модель с укороченной матрицей инерции при меньшем числе степеней свободы обеспечивает в целом такую же

\* Эти данные предоставил авторам М.В.Полуодов.

Таблица 9.1

Частоты согласованной модели квадратной пластины

Номер тона	Модель с укороченной матрицей инерции			С полной матрицей инерции	Метод Ритца
	3x3 J = 12	4x4 J = 20	5x5 J = 30	3x3 J = 48	—
1	3.45	3.46	3.47	3.48	3.49
2	8.59	8.57	8.55	8.53	8.55
3	22.48	22.18	21.92	21.37	21.44
4	29.79	28.98	28.42	27.34	27.46
5	—	—	32.26	32.33	31.17

точность, что и модель с полной матрицей инерции.

Наряду с вычислением частот важную роль играет возможность определения форм колебаний. Для получения формы какого-либо тона колебаний используется соответствующий собственный вектор, на основе которого строятся распределения амплитуд в сечениях пластины, совпадающих с линиями разбиения. Для графического изображения двумерного поля амплитуд обычно применяются линии равного смещения, в частности узловые линии, на которых амплитуды обращаются в нуль. На рис. 9.5 показано расположение узловых линий 2 ÷ 5-го тонов модели с укороченной матрицей инерции при разных разбиениях на элементы. (Штриховые линии соответствуют разбиению 3x3, штрихпунктирные — 4x4, линии с крестиками — 5x5, сплошные — методу Ритца.) Видно, что с уменьшением шага узловые линии приближаются к полученным методом Ритца.

Результаты для второго примера — свободных колебаний треугольной пластины — представлены в табл. 9.2, структура которой аналогична структуре табл. 9.1. Полу-

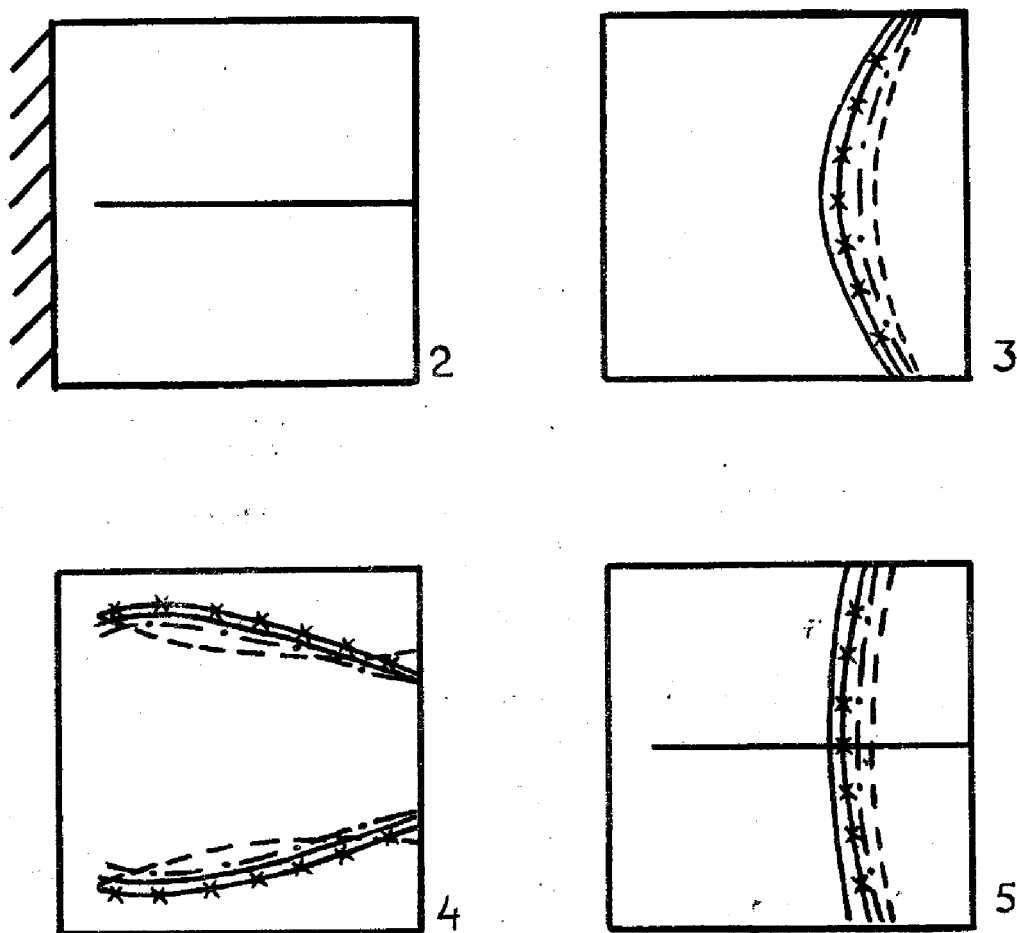


Рис. 9.5

ченные в [58] частоты модели с укороченными матрицами инерции сопоставляются с данными работы [62], где использованы треугольные согласованные элементы, имеющие 6 степеней свободы на узел. Экспериментальные частоты колебаний треугольной пластины взяты из [65]. Из таблицы видна хорошая точность, обеспечиваемая моделью с укороченной матрицей инерции при небольшом числе степеней свободы.

Несо согласованные элементы. Для большинства практических расчетов вполне пригодной оказывается более простая модель из несо согласованных конечных элементов. Наиболее распространенный прямоугольный несо согласованный элемент описан в [8]. Он имеет в каждом узле три обобщенных координаты

$$w_i = w|_{x_i, y_i}, \quad \phi_i = \frac{\partial w}{\partial x}|_{x_i, y_i}, \quad \nu_i = \frac{\partial w}{\partial y}|_{x_i, y_i}; \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (9.21)$$

Таблица 9.2

Частоты согласованной модели треугольной пластины

Номер тона	Модель с укороченной матрицей инерции			С полной матрицей инерции	Эксперимент
	4x4 J = 10	5x5 J = 15	6x6 J = 21	3x3 J = 40	
1	6.04	6.06	6.08	6.29	5.93
2	23.81	23.64	23.58	23.92	23.4
3	33.35	33.30	33.20	33.34	32.6
4	59.81	59.43	58.68	57.32	55.7
5	83.39	82.40	81.30	78.19	75.7

Форма прогиба несогласованного элемента задается системой из 12 базисных функций (9.5). Матрица жесткости и полная матрица инерции несогласованного элемента имеют размерность  $12 \times 12$ . Применение укороченных матриц инерции понижает, как и ранее, число степеней свободы модели до  $N$ . Однако матричные преобразования (9.20), при помощи которых получается редуцированная матрица жесткости, требуют в случае несогласованных элементов меньшего объема вычислений и меньшего объема памяти ЦВМ.

Выбор базисных функций для треугольного несогласованного элемента вызывает определенные трудности. Результаты расчета при использовании треугольных несогласованных элементов, как правило, существенно зависят от ориентации последних в сетке разбиения [8, 62, 63].

Указанные затруднения можно обойти, если воспользоваться предложенным в [60] треугольным элементом с вынесенным узлом. Треугольный элемент дополняется до прямоугольника введением законтурной области. На всем прямоугольнике задается система базисных функций (9.5), но интегрирование в (9.10) при вычислении матрицы жесткости производится по области  $\Omega^e$  треугольного эле-



мента. Матрица инерции элемента с вынесенным узлом вычисляется на системе базисных функций (9.11a). Вследствие этого вынесенный узел является свободным от инерционной нагрузки и все его обобщенные координаты становятся кинематическими. После получения матрицы жесткости их можно выразить через обобщенные координаты трех основных узлов элемента.

Представляет интерес оценить точность несогласованных элементов с укороченными матрицами инерции на рассмотренных выше примерах колебаний квадратной и треугольной пластин (рис. 9.4).

Соответствующие результаты, взятые из работ [59, 60], сведены в табл. 9.3 и 9.4. В случае квадратной пластины (табл. 9.3) сравнение производится с данными для несогласованных элементов с полными матрицами инерции, имеющих три степени свободы в каждом узле [66]. Для треугольной пластины (табл. 9.4), как и ранее, в основу сравнения положены результаты [62], полученные с помощью согласованной модели с шестью динамическими переменными в каждом узле. Попарное сопоставление табл. 9.3 с 9.1 и 9.4 с 9.2 показывает, что

Таблица 9.3

Частоты несогласованной модели квадратной пластины

Номер тона	Модель с укороченной матрицей инерции			С полной матрицей инерции	Метод Ритца
	3x3 J = 12	4x4 J = 20	5x5 J = 30	3x3 J = 36	-
1	3.44	3.46	3.46	3.47	3.49
2	8.61	8.57	8.56	8.53	8.55
3	23.11	22.50	22.12	21.67	21.44
4	29.59	28.81	28.30	26.85	27.46
5	—	—	32.33	30.80	31.17

Таблица 9.4

Частоты несогласованной модели треугольной пластины

Номер тона	Модель с укороченной матрицей инерции			Согласованная	Эксперимент
	3x3 $J = 6$	4x4 $J = 10$	5x5 $J = 15$		
1	6.40	6.44	6.45	6.29	5.93
2	23.62	23.87	23.74	23.92	23.4
3	36.07	35.60	35.00	33.34	32.6
4	51.58	58.31	58.34	57.32	55.7
5	—	—	85.14	78.19	75.7

несогласованные элементы с укороченными матрицами инерции обеспечивают вполне достаточную для практических целей точность. В табл. 9.5 представлены результаты расчета первых двух тонов прямоугольных пластин с разным отношением сторон  $L_y/L_x$ . При обозначении разбиений принято, что первая цифра означает число элементов вдоль оси  $OY$ , вторая — вдоль оси  $OX$ . Сравнение производится с данными по методу Ритца [64].

Проиллюстрируем также возможности метода примерами расчета колебаний пластин более сложной формы — прямоугольной трапеции с двумя значениями угла при вершине  $\Lambda = 45^\circ$  и  $26^\circ.6$  (рис. 9.6). Результаты расчета первых четырех тонов пластин, полученные при разбиении  $4 \times 5$  ( $J = 14$ ), сведены в табл. 9.6. Для сравнения там же помещены экспериментальные данные [65]. На рис. 9.7 линиями равного смещения изображены расчетные формы колебаний пластины с  $\Lambda = 45^\circ$ . За единицу принято смещение в вершине прямого угла, линии проведены с шагом 0.2.

В [102] несогласованные прямоугольные элементы используются для расчета собственных колебаний пластин

сложной конфигурации. Применение элементов с укороченной матрицей инерции и треугольных элементов с вынесенным узлом к задаче динамики ортотропных пластин рассмотрено в [103].

Аналитическое исследование сходимости. Приведенные

примеры носят иллюстративный характер. Они не снимают вопроса о сходимости метода, которая для несогласованных элементов в общем случае не доказана. При использовании в таких элементах полной матрицы инерции некоторые вопросы сходимости обсуждаются в [25].

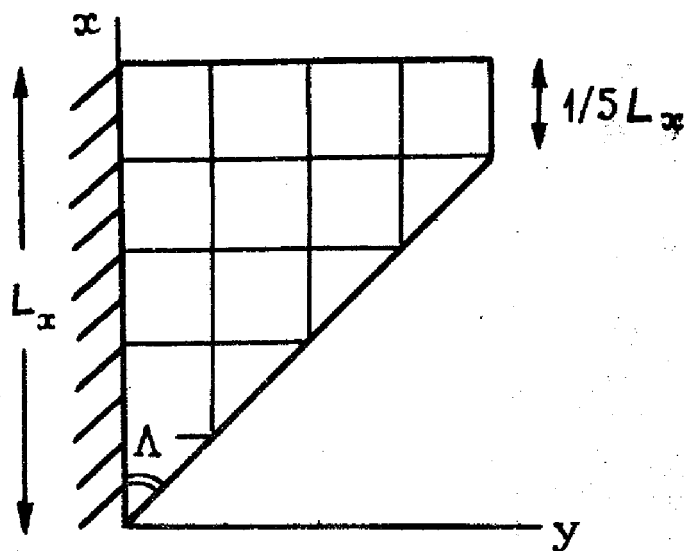


Рис. 9.6

Таблица 9.5

Частоты несогласованной модели прямоугольных пластин

Разбиение		2x2 J = 6	2x4 J = 10	3x3 J = 12	4x4 J = 20	3x6 J = 21	По Ритцу
$L_y/L_x = 1/2$	1 тон	3.409	3.409	3.462	3.477	3.462	3.51
	2 тон	5.419	5.326	5.402	5.388	5.351	5.37
Разбиение		2x2 J = 6	3x3 J = 12	4x2 J = 12	4x4 J = 20	6x3 J = 24	По Ритцу
$L_y/L_x = 2$	1 тон	3.375	3.417	3.427	3.428	3.433	3.47
	2 тон	15.21	15.04	14.96	14.95	14.88	14.93

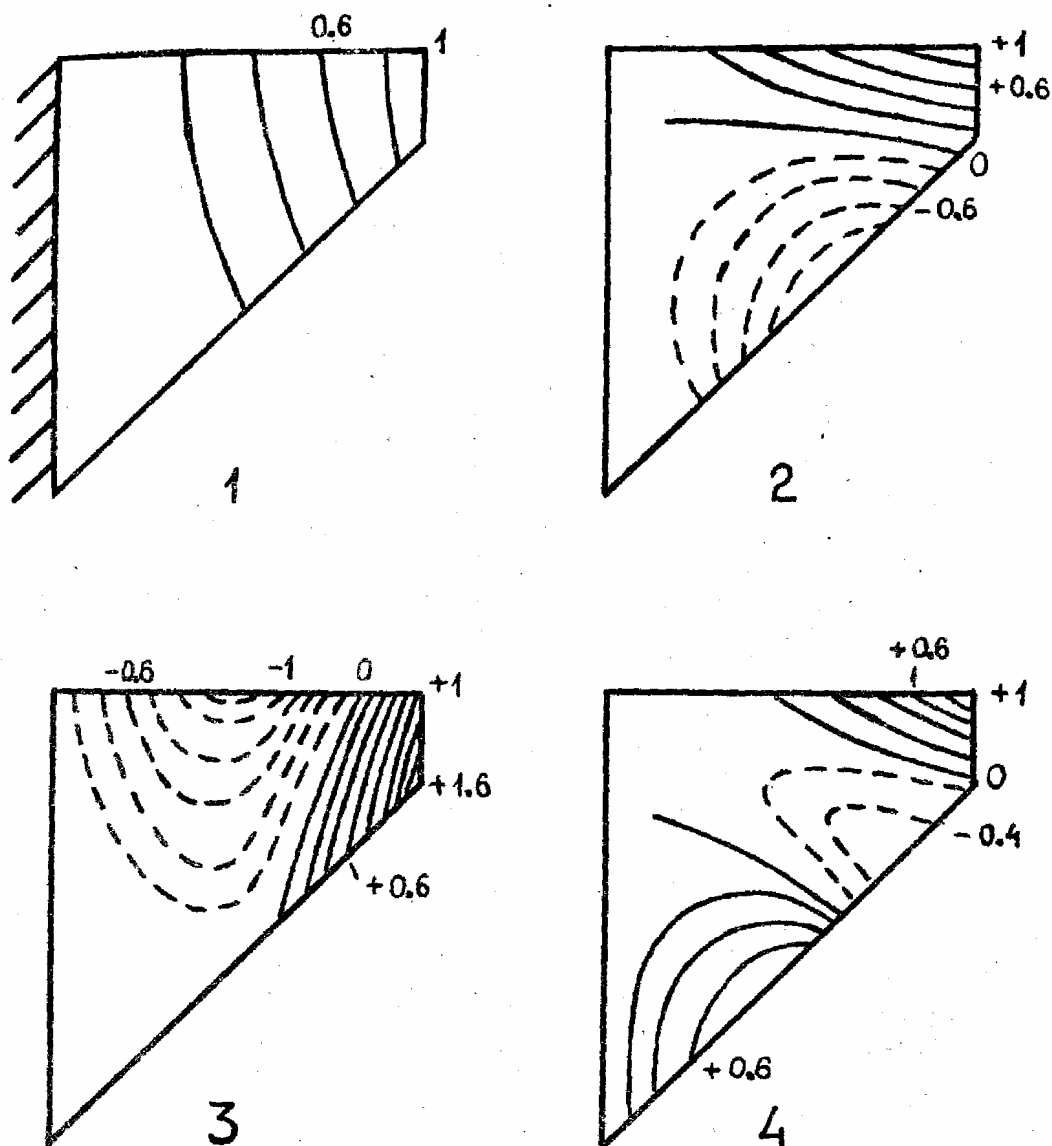


Рис. 9.7

Рассмотрим несогласованную модель с укороченными матрицами инерции. Пусть прямоугольная пластина разбита на  $M^0 \times N^0$  одинаковых прямоугольных элементов (рис. 9.8). Следуя [26], запишем для внутреннего узла сетки  $(m, n)$  уравнения из системы (9.18) в операторной форме

$$\begin{aligned} \hat{k}_{pw} w_{m,n} + \hat{k}_{p\phi} \phi_{m,n} + \hat{k}_{p\nu} \nu_{m,n} + \hat{m}_{pw} \ddot{w}_{m,n} &= 0, \\ \hat{k}_{Hw} w_{m,n} + \hat{k}_{H\phi} \phi_{m,n} + \hat{k}_{H\nu} \nu_{m,n} &= 0, \\ \hat{k}_{Nw} w_{m,n} + \hat{k}_{N\phi} \phi_{m,n} + \hat{k}_{N\nu} \nu_{m,n} &= 0, \end{aligned} \quad (9.22)$$

здесь  $\hat{k}$  и  $\hat{m}$  — некоторые разностные операторы, конкретный вид которых зависит от коэффициентов матриц жест-

Таблица 9.6

Частоты несогласованной модели трапециевидных пластин

$\Lambda = 45^\circ$	N тона	Расчет	Экспе- римент	$\Lambda = 26^\circ.6$	N тона	Расчет	Экспе- римент
	1	4.627	4.56		1	4.206	4.13
	2	16.69	17.1		2	10.43	10.08
	3	25.80	24.3		3	20.45	19.36
	4	41.06	40.2		4	24.73	22.7

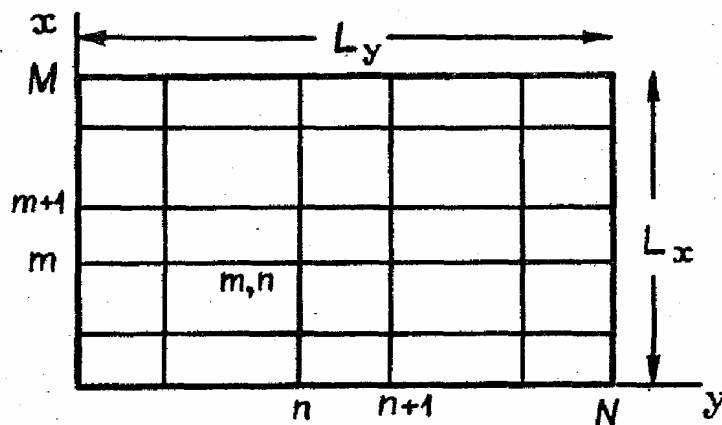


Рис. 9.8

кости  $[K^e]$  и инерции  $[M^e]$ . Из двух последних уравнений системы (9.22) вытекает, что переменные  $w, \phi$  и  $v$  связаны алгебраически. Это – прямое следствие применения укороченной матрицы инерции. Используя явный вид коэффициентов матриц  $[K^e]$  и  $[M^e]$ , получим для операторов  $\bar{k}$  и  $\bar{m}$  выражения

$$\bar{k}_{Pw} = \frac{D}{l_x l_y} \{ [\gamma - 2(a + a^{-1})] \Delta^{2x2y} - 12a \Delta^{2y} - 12a^{-1} \Delta^{2x} \},$$

$$\begin{aligned}
\hat{k}_{P\phi} &= \hat{k}_{Hw} = \frac{D}{l_x l_y} \left[ \frac{l_x^2}{l_y} (\Delta^{2xy} + 6\Delta^y) - \frac{l_y(1-\nu)}{5} \Delta^{2xy} \right], \\
\hat{k}_{P\nu} &= \hat{k}_{Nw} = \frac{D}{l_x l_y} \left[ \frac{l_y^2}{l_x} (\Delta^{x2y} + 6\Delta^x) - \frac{l_x(1-\nu)}{5} \Delta^{x2y} \right], \\
\hat{k}_{H\phi} &= \frac{D}{l_x l_y} \left\{ -\frac{l_x^2}{3} [\Delta^{2x2y} + 6\Delta^{2x} + 6\Delta^{2y} + 36] + \frac{l_y^2(1-\nu)}{15} [\Delta^{2x2y} - 6\Delta^{2x}] \right\}, \\
\hat{k}_{N\nu} &= \frac{D}{l_x l_y} \left\{ -\frac{l_y^2}{3} [\Delta^{2x2y} + 6\Delta^{2x} + 6\Delta^{2y} + 36] + \frac{l_x^2(1-\nu)}{15} [\Delta^{2x2y} - 6\Delta^{2y}] \right\}, \\
\hat{m}_{Pw} &= \frac{\sigma}{36} \{ \Delta^{2x2y} + 6a\Delta^{2y} + 6a^{-1}\Delta^{2x} + 36 \}, \\
\hat{k}_{H\nu} &= \hat{k}_{N\phi} = 0; \quad a = l_x^2/l_y^2; \quad \gamma = 14/5 - 4\nu/5. \quad (9.23)
\end{aligned}$$

Здесь через  $\Delta$  обозначены операторы конечных разностей, например,

$$\Delta^x w_{m,n} = w_{m+1,n} - w_{m-1,n}; \quad \Delta^{2x} w_{m,n} = w_{m+1,n} - 2w_{m,n} + w_{m-1,n}$$

и т.д. Решение системы (9.22) будем искать в виде

$$w_{m,n} = \exp(\beta_x l_x m) \exp(\beta_y l_y n) \exp(i\omega t), \quad (9.24)$$

$$\phi_{m,n} = \Phi(\beta_x, \beta_y) w_{m,n}$$

$$\nu_{m,n} = \Theta(\beta_x, \beta_y) w_{m,n}.$$

Функции  $\Phi$  и  $\Theta$  характеризуют распределение амплитуд  $\phi$  и  $\nu$ . Они зависят от параметров  $\beta_x$  и  $\beta_y$  — аналогов волновых чисел для непрерывной пластины. Подставим (9.24) в систему уравнений (9.22), используя (9.23). После исключения переменных  $\Phi(\beta_x, \beta_y)$  и  $\Theta(\beta_x, \beta_y)$  получим

$$\begin{aligned}
& 16[\gamma - 2(a + a^{-1})] S_x S_y - 48a S_y - 48a^{-1} S_x + \\
& + \frac{48a S_y (1 + S_y) [(3 + 2S_x) - 2/5(1 - \nu) S_x]^2}{(3 + 2S_y) [(3 + 2S_x) - 2/5(1 - \nu) S_x (3 - 2S_y) / (3 + 2S_y)]} + \\
& + \frac{48a^{-1} S_x (1 + S_x) [(3 + 2S_y) - 2/5(1 - \nu) S_y]^2}{(3 + 2S_x) [(3 + 2S_y) - 2/5(1 - \nu) S_y (3 - 2S_x) / (3 + 2S_x)]} = \quad (9.25) \\
& = \frac{a^{-1} N^4}{9} (3 + 2S_x)(3 + 2S_y) \Omega^2.
\end{aligned}$$

Здесь  $S_x = \text{sh}^2(\beta_x l_x/2)$ ;  $S_y = \text{sh}^2(\beta_y l_y/2)$ ;  $\Omega = \omega L_y^2 / \sqrt{D/\sigma}$ . Назовем (9.25) дисперсионным уравнением, по аналогии с непрерывной пластиной. Частотные уравнения, связывающие  $\beta_x$  и  $\beta_y$ , могут быть получены из граничных условий.

Рассмотрим пластину, свободно опертую по всему контуру. Тогда из граничных условий следует, что

$$\beta_x = \pm i \frac{\pi}{L_x} \mu; \beta_y = \pm i \frac{\pi}{L_y} \nu; \mu = 1, 2, \dots M^0 - 2; \nu = 1, 2, \dots N^0 - 2. \quad (9.26)$$

При  $M^0, N^0 \rightarrow \infty$  и условии, что  $l_x M^0 = L_x$ ,  $l_y N^0 = L_y$ , уравнение (9.25) переходит в дисперсионное уравнение для непрерывной пластины

$$(\Omega_{\mu, \nu}^0)^2 = \pi^4 [\mu^2 + (L_y/L_x)^2 \nu^2].$$

Здесь через  $\Omega_{\mu, \nu}^0$  обозначена приведенная частота пластины. Аналогично можно получить, что  $\lim_{M^0, N^0 \rightarrow \infty} \Phi(\beta_x, \beta_y) = \beta_x$ ,

$\lim_{M^0, N^0 \rightarrow \infty} \Theta(\beta_x, \beta_y) = \beta_y$ . Таким образом, уравнения связи между углами и смещениями в узлах модели (9.24) в пределе переходят в соответствующие соотношения для непрерывной пластины.

Сравнительно просто можно получить частотные уравнения также для некоторых других случаев. Пусть, например, две кромки пластины  $x = 0$  и  $x = L_x$  свободно оперты, а две другие —  $y = 0$  и  $y = L_y$  — закреплены. Тогда, по-прежнему,  $\beta_x = \pm i \frac{\pi}{L_x} \mu$  ( $\mu = 1, 2, \dots M^0 - 2$ ), но  $\beta_y$  становится комплексным, т.е.  $\beta_y = \pm i k \pm k$ . Параметры  $k$  и  $k$  при этом связаны уравнением

$$2[\text{ch} k l_y N^0 \cos k l_y N^0 - 1] + \text{sh} k l_y N^0 \sin k l_y N^0 \times \\ \times \left[ \frac{\sin k l_y (3 + 2 \text{sh}^2(k l_y/2))}{\text{sh} k l_y (3 - 2 \sin^2(k l_y/2))} - \frac{\text{sh} k l_y (3 - 2 \sin^2(k l_y/2))}{\sin k l_y (3 + 2 \text{sh}^2(k l_y/2))} \right] = 0.$$

Другие граничные условия, включающие случай свободных кромок, приводят к более сложным зависимостям между "волновыми числами" модели.

При обсуждении точности и сходимости метода будем пользоваться относительными отклонениями частот моделей  $\Omega$  от известных частот пластины  $\Omega^0$ , т.е.  $\epsilon_{\mu, \nu} = (\Omega_{\mu, \nu} - \Omega_{\mu, \nu}^0) / \Omega^0$ . Ограничимся случаем квадратной свободноопертой пластины ( $L_x = L_y$ ,  $M^0 = N^0$ ), рассмотренным в [26].

На рис. 9.9 представлены результаты расчета собственных частот различных моделей. Относительные отклонения  $\epsilon$  приведены в зависимости от числа степеней свободы  $J$ , которое отложено по оси абсцисс в логарифмическом масштабе. Для нумерации тонов использованы два индекса, заключенные в круглые скобки. Первый из них равен числу полуволн вдоль оси  $OX$ , второй – числу полуволн вдоль оси  $OY$ . Сплошные линии относятся к несогласованной модели с укороченными матрицами инерции [26], штриховые и пунктирные к несогласованной и согласованной соответственно моделям с полной матрицей инерции [25].

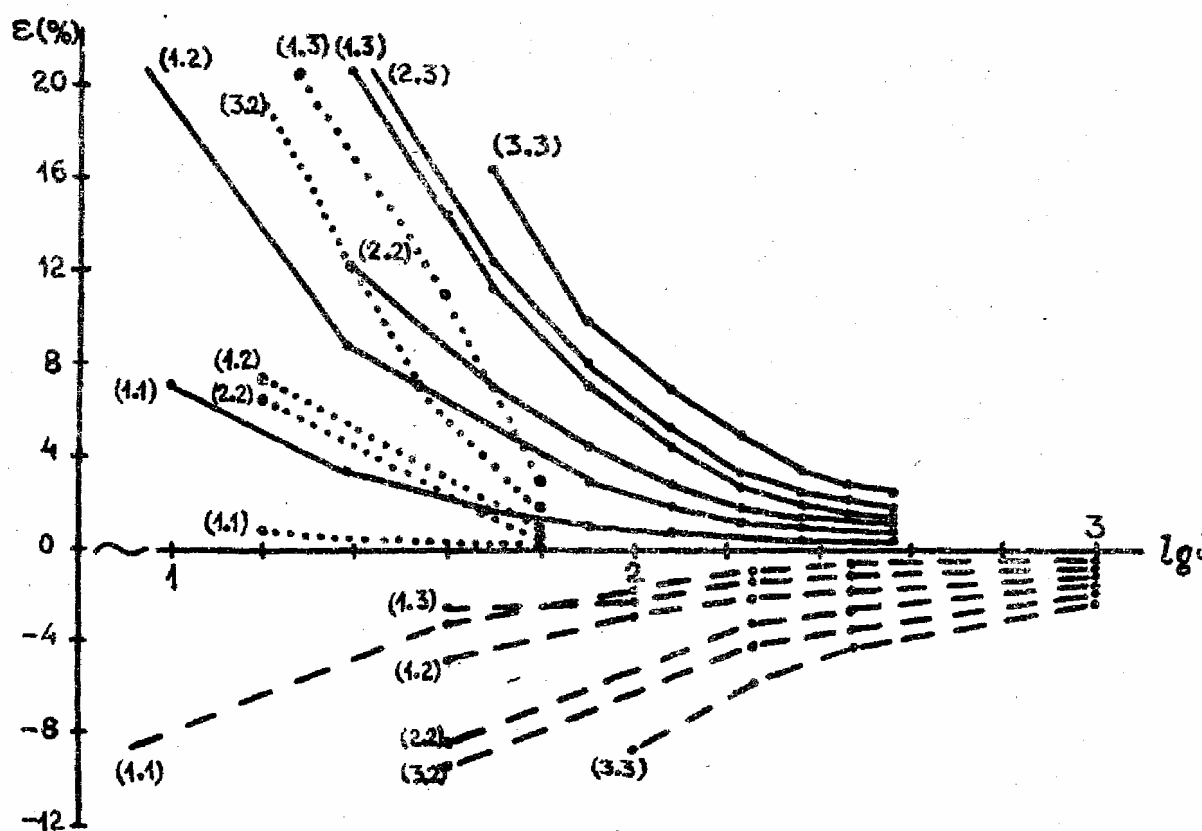


Рис. 9.9

Из графиков видно, что сходимость для всех моделей имеет монотонный характер. При фиксированном  $J$  точность несогласованной модели с укороченными матрицами инерции в целом не хуже, чем у аналогичной модели с полными матрицами. В то же время скорость сходимости  $d \lg \epsilon / d \lg J$  для первой модели выше, чем для второй. Согласованная модель с полными матрицами инерции превосходит обе рассмотренные модели как по точности, так и по скорости сходимости.



Важно отметить, что при заданном числе степеней свободы  $J$  модель с укороченными матрицами инерции допускает гораздо более мелкое разбиение на элементы, чем модели с полными матрицами. Это обстоятельство весьма существенно при исследовании неоднородных систем, у которых параметры зависят от пространственных координат. В данном случае требуется мелкая сетка разбиения при любом типе модели и применение укороченных матриц инерции может обеспечить определенные преимущества.

Чтобы проиллюстрировать это замечание, рассмотрим поперечные колебания консольно закрепленной пластины, имеющей в сечении форму равномерно утончающегося клина (рис. 9.10). На этом же рисунке изображено разбиение пластины на  $4 \times 4$  однородных элементов. Для такой пластины удобно пользоваться частотами, приведенными к параметрам на толстом краю.

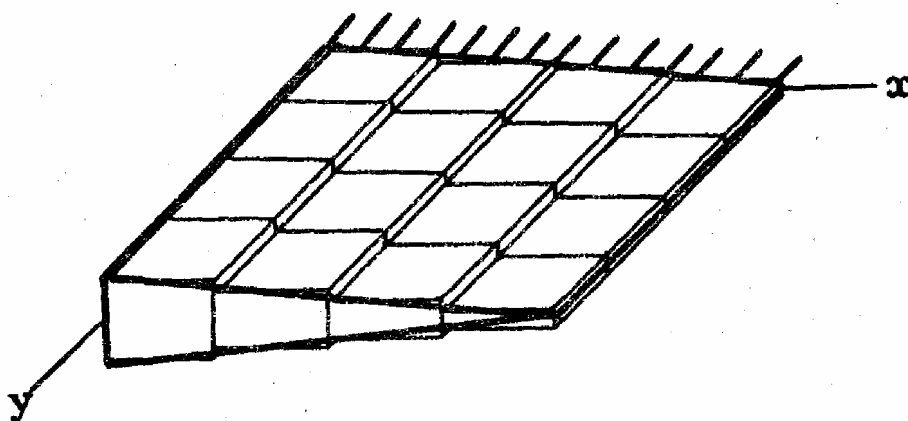


Рис. 9.10

Результаты расчета первых восьми тонов пластины представлены в табл. 9.7. В трех первых колонках помещены частоты несогласованной модели с укороченными матрицами инерции [26], в четвертой – аналогичной модели с полными матрицами [30], в пятой – экспериментальные данные [30].

Сравнение третьей и четвертой колонок показывает, что при одной и той же сетке разбиения  $5 \times 5$  точность

Таблица 9.7

Частоты несогласованной модели неоднородной пластины

Номер тона	Модель с укороченными матрицами инерции			С полными матрицами инерции	Эксперимент
	3x3 J=12	4x4 J=20	5x5 J=30	5x5 J=90	
1	2.387	2.384	2.381	2.385	2.302
2	5.050	5.260	5.412	5.469	5.566
3	9.580	10.03	10.08	10.21	10.69
4	10.51	10.97	11.18	11.50	14.51
5	17.74	15.52	15.85	15.42	16.25
6	22.81	20.24	18.46	17.58	18.38
7	29.19	25.54	23.57	22.22	24.98
8	35.93	27.90	25.17	26.60	25.59

сравниваемых моделей примерно одинакова, хотя число степеней свободы отличается втрое. Это дает основания полагать, что в динамике неоднородных систем точность в значительной мере определяется шагом сетки разбиения.

#### §10. Моделирование воздействий сверхзвукового потока

Рассмотрим задачу об определении воздействий сверхзвукового потока газа на модель упругой пластины. Специфика сверхзвуковых аэродинамических воздействий состоит в том, что возмущение скорости (или плотности) потока, возникшее в момент времени  $t$ , распространяется

со скоростью звука  $\alpha_0$  и сносится вниз по потоку со скоростью  $V > \alpha_0$ . Таким образом, это возмущение влияет на движение всех точек, расположенных в конусе Маха с вершиной  $(\xi', \eta')$ .

Приведем математическую формулировку задачи об обтекании плоского тела. Для определения аэродинамического давления, возникающего при отклонении пластины от невозмущенного состояния, обычно применяется теория потенциального течения [67]. Основное уравнение для потенциала возмущений  $\phi(x, y, z, t)$  в рамках линейной теории имеет вид

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha_0^2} \frac{D^2 \phi}{Dt^2}, \quad (10.1)$$

здесь  $\frac{D}{Dt} = V \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}$  — субстанциональная производная. Аэродинамическое давление выражается через потенциал

$$p_a(x, y, t) = -2\rho_0 \frac{D\phi}{Dt}. \quad (10.2)$$

На поверхности пластины выполняется условие непроницаемости

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{D}{Dt} w(x, y, t). \quad (10.3)$$

Кроме того, в области влияния концевого эффекта  $S_1^*$

$$\phi|_{z=0} = 0. \quad (10.4)$$

В области вихревой пелены  $S_2$  обращается в нуль давление, т.е.

$$\frac{D}{Dt} \phi|_{z=0} = 0. \quad (10.5)$$

Более полная постановка задачи о сверхзвуковом обтекании плоских тел изложена в [67, 68].

Если поперечное смещение  $w(x, y, t)$  представимо в виде суперпозиции малых колебаний, то для определения дав-

---

\* Область  $S_1$  ограничена образующей конуса Маха, касающейся контура, боковой кромкой тела и касательной к контуру, параллельной оси  $x$ . Область  $S_2$  — задней кромкой и касательными к контуру, параллельными оси  $x$  (рис. 10.1).

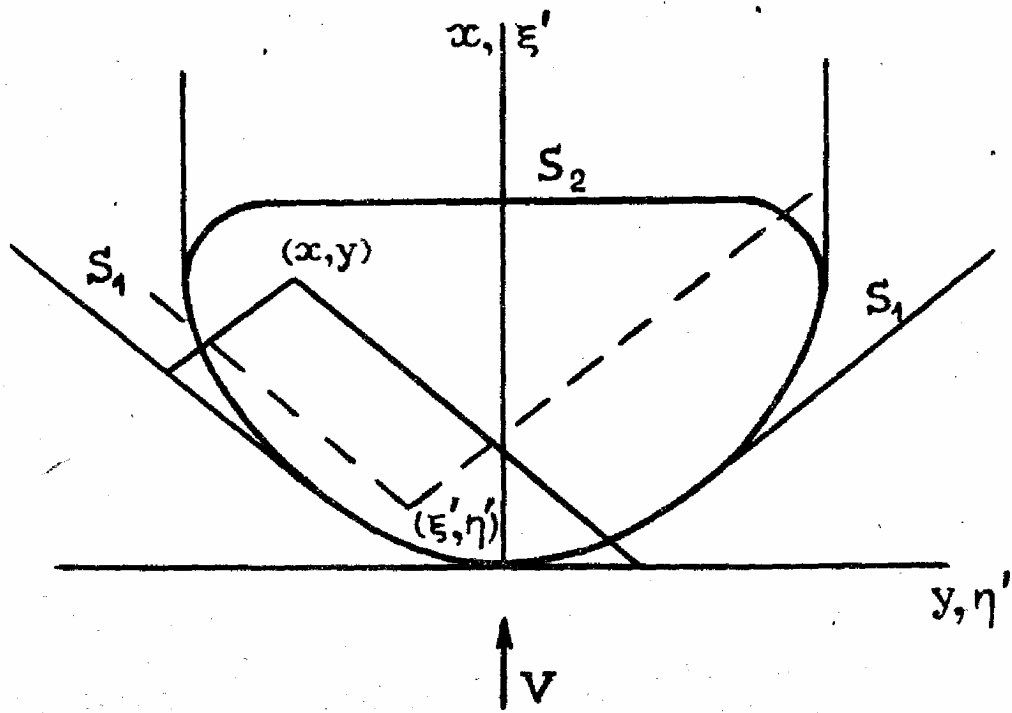


Рис.10.1

ления можно воспользоваться методом пульсирующих источников [69]. Акустические источники с интенсивностью  $W(\xi', \eta') \exp(\lambda t)$  располагаются в плоскости  $z=0$  так, чтобы удовлетворить системе граничных условий (10.2)–(10.5). Тогда потенциал  $\phi$  выражается через распределение источников с помощью интегрального соотношения:

$$\phi(x, y, 0, t) = -\frac{\exp(\lambda t)}{\pi} \iint_{\Sigma} W(\xi', \eta') G(x - \xi', y - \eta', k, M_0) d\Omega, \quad (10.6)$$

$$G = \exp\left\{-\frac{k M_0^2}{\beta^2} \frac{(x - \xi')}{L_x}\right\} \operatorname{ch}\left\{\frac{k M_0}{\beta^2} \frac{(rs)}{L_x}\right\}^{1/2} (rs)^{-1/2},$$

$$\beta^2 = M_0^2 - 1, \quad r = (x - \xi') - \beta(y - \eta'), \quad s = (x - \xi') + \beta(y - \eta'),$$

$k = \lambda L_x / V$  – число Струхала,  $M_0 = V / a_0$  – число Маха. Интегрирование в (10.6) производится по площади  $\Sigma$ , заключенной в обратном конусе Маха с вершиной в точке  $(x, y)$ . Эта область, вообще говоря, может включать области влияния конечного эффекта  $S_1$  и вихревой пелены  $S_2$ . На

поверхности тела плотность источников однозначно выражается через форму прогиба

$$W(\xi', \eta', t) = \frac{D}{Dt} w(\xi', \eta', t). \quad (10.7)$$

Выражение в правой части (10.7) называют скосом потока. В областях  $S_1$  и  $S_2$  плотность источников иногда можно вычислить, обращая интегральное соотношение (10.6) с учетом (10.4), (10.5) [67].

Случай локальной связи давления и скоса потока. В некоторых предельных случаях аэродинамическое давление в некоторой точке тела удается выразить через скос потока в этой же точке. К их числу относится поршневая теория [43], справедливая при  $M_0 k \gg 1$ . Эта теория приводит к следующему выражению для давления

$$p(x, y, 0, t) = 2\rho_0 V \frac{D}{Dt} w. \quad (10.8)$$

Формула (10.8) легко обобщается на случай, когда толщина пластины  $l_z$  меняется в зависимости от пространственных координат [43]

$$p(x, y, 0, t) = 2\rho_0 V \left(1 + \frac{\gamma+1}{2} M_0 \frac{\partial l_z}{\partial x}\right) \frac{D}{Dt} w, \quad (10.8a)$$

здесь  $\gamma = c_p/c_v$  — отношение теплоемкостей для газа. Вторым важным случаем, когда нагрузка локально зависит от формы прогиба, является так называемая квазистационарная теория несущей полосы [43]. Она применима при ограничениях  $L_x/L_y \ll 1$ ,  $k \ll 1$ ,  $M_0 \geq \sqrt{2}$ . Давление

$$p(x, y, 0, t) = \frac{2\rho_0 V}{\beta} \left( V \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{2M_0^2 - 1}{\beta^2} \frac{\partial w}{\partial t} \right). \quad (10.9)$$

На практике часто используют также формулу Аккерета

$$p(x, y, 0, t) = \frac{2\rho_0 V}{\beta} \left( V \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t} \right). \quad (10.9a)$$

Локальная связь давления с формой прогиба позволяет найти узловые силы, действующие на элементе, и построить его аэродинамические матрицы непосредственно из

принципа виртуальных перемещений (3.1). Определим узловые аэродинамические силы для случая поршневой теории, воспользовавшись выражением формы прогиба (9.12). Тогда давление на элементе

$$p(\xi, \eta, 0, t) = 2\rho_0 V \left( V \frac{\partial \bar{\chi}^T}{\partial \xi} + \lambda \bar{\chi}^T \right) [d] \bar{q}^e. \quad (10.10)$$

Подставив (10.10) в формулу (9.13) и проинтегрировав по площади элемента, получим вектор узловых аэродинамических сил

$$\bar{P}_a^e = 2\rho_0 V^2 L_x ([B^e] + k[D^e]) \bar{w}^e, \quad (10.11)$$

где  $[B^e]$  и  $[D^e]$  — матрицы аэродинамической жесткости и демпфирования

$$[B^e] = \frac{1}{L_x} [d]^T \iint \bar{\chi} \frac{\partial \bar{\chi}^T}{\partial \xi} d\Omega^e [d], \quad (10.12)$$

$$[D^e] = \frac{1}{L_x^2} [d]^T \iint \bar{\chi} \bar{\chi}^T d\Omega^e [d].$$

Для прямоугольного элемента в качестве базисных берутся функции (9.11)

$$[B^e] = \frac{1}{12} \frac{1_y}{L_x} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}, [D^e] = \frac{1_x 1_y}{36 L_x^2} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}. \quad (10.13)$$

Не представляет труда получение аналогичных матриц и для треугольного элемента. В случае теории несущей полосы вектор аэродинамических сил отличается от (10.11) только множителем и перед матрицами.

Формирование аэродинамических матриц модели  $[B]$ ,  $[D]$ , как обычно, осуществляется суммированием соответствующих членов  $[B^e]$  и  $[D^e]$  с учетом взаимного расположения и типа элементов. В результате вектор аэроди-

наимических сил, действующих в узлах) модели, (размерностью  $N$ )

$$\bar{P}_a = (\kappa_0 [B] \bar{w} + \kappa_1 [D] \dot{\bar{w}}) \quad (10.14)$$

Конкретный вид множителей  $\kappa_0, \kappa_1$  определяется используемой аэродинамической теорией. Матрицы  $[B]$  и  $[D]$  имеют размерность  $N \times N$  и обладают ленточной структурой. Кроме того, нетрудно заметить, что матрица демпфирования  $[D]$  совпадает с матрицей масс системы. С изменением скорости потока (числа Маха) меняется лишь величина множителей  $\kappa_0, \kappa_1$ , стоящих перед матрицами.

В общем случае, когда потенциал, а следовательно, и давление интегрально зависит от формы прогиба, вычисление узловых аэродинамических сил представляет собой значительно более трудоемкую задачу. В настоящее время существует большое количество численных методов, позволяющих вычислить аэродинамические силы, если формы перемещения заданы в явном виде для всей системы в целом. Обзор таких подходов содержится в работах [70, 71]. Однако их применение совместно с методом конечных элементов нецелесообразно, так как в нем базисные функции задаются кусочно на элементах. Это свойство метода конечных элементов позволяет развить иной способ определения аэродинамических воздействий при интегральной зависимости давления от формы прогиба [58, 72]:

Интегральная зависимость давления от перемещений системы. Большой практический интерес представляет случай малых чисел Струхала  $k \ll 1$ . Физически это ограничение означает, что время распространения возмущения в пределах системы мало, по сравнению с периодом колебаний. Это позволяет разложить в ряд по степеням  $k$  ядро интегрального соотношения (10.6). При малых числах Струхала ( $k \sim 0.1 \div 0.5$ ) можно ограничиться членами первого порядка малости по  $k$ . Члены  $O(k^2)$  соответствуют так называемым "присоединенным массам", и при исследовании колебаний ими можно пренебречь, если плотность среды  $\rho_0$  значительно меньше плотности тела  $\rho$ . Тогда потенциал примет вид

$$\begin{aligned} \phi(x, y, t) = \exp(\lambda t) \sum \iint W(\xi', \eta') [G_0 + k G_1] d\xi' d\eta', \\ G_0 = - (rs)^{-1/2} / \pi, G_1 = G_0 M_0^2 (x - \xi') / (\beta^2 L_x). \end{aligned} \quad (10.15)$$

Заметим, что при  $M_0 k \sim 1$  в разложении (10.6) необходимо учитывать члены более высокого порядка по  $k$ , а при  $M_0 k \gg 1$  можно пользоваться "поршневой" теорией. Для учета концевго эффекта при малых числах Струхала применима теорема об эквивалентных областях интегрирования на поверхности тела [43]. Согласно этой теореме, в формуле (10.6) интегрирование по площади  $\Sigma$ , включающей область влияния концевго эффекта  $S_1$ , заменяется интегрированием по эквивалентной области  $\Sigma'$  на поверхности тела (рис. 10.2). Использование данной теоремы существенно упрощает задачу. Определим потенциал возмущений в узле сетки с координатами  $(x_i, y_i)$ . Для этого представим интеграл в формуле (10.15) в виде суммы интегралов по всем элементам  $j$

$$\phi(x_i, y_i, t) = \exp(\lambda t) \sum_j \iint W(\xi', \eta') [G_0 + k G_1] d\xi' d\eta'. \quad (10.16)$$

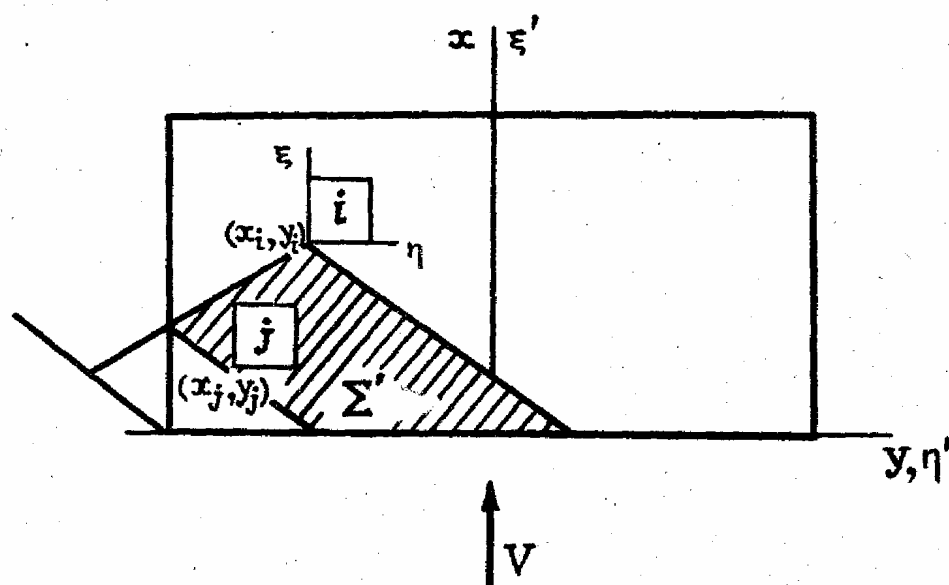


Рис. 10.2

Здесь подынтегральные функции  $G_0$  и  $G_1$  отличны от нуля только в области  $\Sigma'$ .

Вычислим вклад, вносимый в потенциал  $j$ -тым элементом, лежащим в обратном конусе Маха

$$\phi^j(x_i, y_i, t) = \exp(\lambda t) \iint_{\Omega_j} W^j(\xi', \eta') [G_0 + k G_1] d\xi' d\eta'. \quad (10.17)$$



Для этого скос потока на  $j$ -том элементе  $W^j$  выразим через его узловые координаты с помощью соотношения (10.7). Форма перемещения отдельного элемента в локальных координатах  $(\xi, \eta)$  выражается формулой (9.12) при вычислении потенциала  $\phi^j$ , в базисных функциях удобно перейти к глобальным координатам  $\xi' = \xi + x_j, \eta' = \eta + y_j$  (рис. 10.2). Тогда скос

$$W^j(\xi', \eta', t) = (V \frac{\partial \bar{X}^T}{\partial \xi'} + \lambda \bar{X}^T) [d] \bar{q}^j. \quad (10.18)$$

Подставив (10.18) в (10.17), получим

$$\begin{aligned} \phi^j(x_i, y_i, t) &= V(\bar{q}_0^T + k\bar{q}_1^T) \bar{q}^j, \\ \bar{q}_0^T &= \iint \frac{\partial \bar{X}^T}{\partial \xi'} G_0 d\xi' d\eta' [d], \\ \bar{q}_1^T &= \iint (\frac{\partial \bar{X}^T}{\partial \xi'} G_1 + \frac{\bar{X}^T}{L_x} G_0) d\xi' d\eta' [d]. \end{aligned} \quad (10.19)$$

Вследствие использования укороченных базисных функций, в векторах  $\bar{q}_0, \bar{q}_1$  отличны от нуля только первые четыре компоненты. По своему смыслу это вклады в действительную и мнимую часть потенциала  $\phi^j(x_i, y_i, t)$  за счет единичной амплитуды смещения соответствующего узла  $j$ -того элемента. Если модель содержит треугольные элементы, то их влияние можно учесть аналогично.

Общий потенциал  $\Phi^j(x_i, y_i, t)$  в точке  $(x_i, y_i)$  получим суммированием вкладов всех элементов модели по формуле (10.16). Он линейно выражается через смещения узловых точек модели

$$\Phi^j(x_i, y_i, t) = V(\bar{G}_0^T + k\bar{G}_1^T) \bar{w}. \quad (10.20)$$

Здесь  $\bar{G}_0$  и  $\bar{G}_1$  — столбцы размерности  $N$ . Вычислив значения  $\Phi^j$  во всех узлах разбиения, образуем вектор узловых потенциалов модели  $\bar{\Phi}$ . Окончательно связь потенциалов и смещений получим в виде

$$\bar{\Phi} = V([G_0] + k[G_1]) \bar{w}. \quad (10.21)$$

Размерность матриц  $[G_0], [G_1]$  —  $N \times N$ ; они набираются из строк  $G_0^T, G_1^T$ . Таким образом, получена зависимость значений потенциалов в узлах модели от ее динамических переменных  $\bar{w}$ .

Чтобы вычислить давление, действующее со стороны потока, необходимо знать непрерывное, а не дискретное распределение потенциала. Следуя методу конечных элементов, положим, что потенциал внутри  $i$ -того элемента  $\phi(\xi, \eta, t)$  выражается через его узловые значения  $\bar{\Phi}^i$  следующим образом

$$\phi^i(\xi, \eta, t) = \bar{\chi}^T(\xi, \eta)[d]\bar{\Phi}^i. \quad (10.22)$$

Вектор значений потенциалов в узлах  $i$ -того элемента  $\bar{\Phi}^i$  получим, выбирая из  $\bar{\Phi}$  в формуле (10.21) компоненты, соответствующие узлам (1,2,3,4) элемента  $i$  (см. рис. 10.2).

$$\bar{\Phi}^i = V([G_0^i] + k[G_1^i])\bar{w}. \quad (10.23)$$

Матрицы  $[G_0^i]$  и  $[G_1^i]$  имеют размерность  $4 \times N$ . Это отражает тот факт, что потенциал  $\bar{\Phi}^i$  в каждом из четырех узлов элемента определяется, вообще говоря, смещениями всех узлов модели. Для удобства рассмотрения найдем вклад  $\bar{\Phi}^{ij}$ , который вносит в потенциалы  $\bar{\Phi}^i$  смещение  $w_j$  только одного узла модели с номером  $j$

$$\bar{\Phi}^{ij} = V(\bar{G}_0^{ij} + k\bar{G}_1^{ij})w_j, \quad (10.24)$$

здесь  $\bar{G}_0^{ij}$  и  $\bar{G}_1^{ij}$  —  $j$ -тые столбцы матриц  $[G_0^i]$ ,  $[G_1^i]$ , содержащие 4 компоненты. Тогда непрерывное распределение потенциала, соответствующее вкладу этого узла, выразится следующим образом:

$$\phi^{ij}(\xi, \eta, t) = \bar{\chi}^T[d]\bar{\Phi}^{ij}. \quad (10.25)$$

По распределению потенциала внутри элемента вычислим давление на  $i$ -том элементе за счет смещения  $j$ -того узла модели, воспользовавшись (10.2)

$$p^{ij}(\xi, \eta, t) = -2\rho_0 \left( V \frac{\partial \bar{\chi}^T}{\partial \xi} + \lambda \bar{\chi}^T \right) [d] \bar{\Phi}^{ij}. \quad (10.26)$$

Переход от давления к узловым силам, действующим на  $i$ -том элементе, осуществляется с помощью принципа виртуальных перемещений

$$\bar{P}_\alpha^{ij} = -2\rho_0 V L_x ([B^e] + k[D^e]) \bar{\Phi}^{ij}. \quad (10.27)$$

Нетрудно заметить, что матрицы  $[B^e]$ ,  $[D^e]$  совпадают с введенными ранее (10.12). Подставляя (10.24) в (10.27), получим

$$\bar{P}_\alpha^{ij} = -2\rho_0 V^2 L_x \{ [B^e] \bar{G}_0^{ij} + k([B^e] \bar{G}_1^{ij} + [D^e] \bar{G}_0^{ij}) w_j \}. \quad (10.28)$$

Аналогично определяются узловые силы, вызванные  $j$ -тым смещением, для всех остальных элементов модели. Суммируя их с учетом взаимного расположения и типа элементов, получим вектор аэродинамических сил в виде

$$\bar{P}_\alpha^j = 2\rho_0 V^2 L_x (\bar{B}^j + k \bar{D}^j) w_j. \quad (10.29)$$

Возвращаясь к вектору узловых смещений модели  $\bar{w}$ , получим

$$\bar{P}_\alpha = (\kappa_0 [B] \bar{w} + \kappa_1 [D] \dot{\bar{w}}), \quad (10.30)$$

$$\kappa_0 = 2\rho_0 V^2 L_x, \quad \kappa_1 = \kappa_0 L_x / V.$$

Аэродинамические матрицы  $[B]$ ,  $[D]$  размерностью  $N \times N$  составлены из столбцов  $\bar{B}^j$ ,  $\bar{D}^j$ . Следует отметить, что их элементы являются линейными комбинациями членов матриц  $[G_0]$  и  $[G_1]$ . В отличие от случая локальных воздействий (10.14) матрицы  $[B]$ ,  $[D]$  являются полными, а не ленточными. Зависимость  $[B]$ ,  $[D]$  от числа Маха  $M_0$  проявляется, во-первых, аналитически (ядро 10.15 зависит от  $M_0$ ), во-вторых, в их структуре (с изменением  $M_0$  меняется расположение образующих конуса Маха на сетке элементов).

При использовании последовательной аэродинамической теории колебания одного из узлов модели приводят к появлению аэродинамических сил на всех элементах, лежащих в прямом конусе Маха. С ростом  $M_0$  конус Маха сужается, величина сил в удаленных узлах падает и распределение узловых сил стремится к локальному, полученному по теории, несущей полосы.

Численный пример. Рассмотрим простую задачу расчета аэродинамических сил, которая позволяет сравнить приближенное решение с аналитическим. Пусть недеформируемая прямоугольная пластина с хордой  $L_x$  и удлинени-

ем, равным двум, совершает гармонические колебания вокруг передней кромки  $x=0$  (рис. 10.2), тогда

$$w(\xi', t) = a\xi' \exp(i\omega t). \quad (10.31)$$

Разобьем пластину на 6 элементов вдоль хорды и 12 вдоль размаха. В силу симметрии достаточно рассмотреть половину пластины, например слева от оси ОХ. Матрицы аэродинамической жесткости [B] и демпфирования [D] вычислены на ЦВМ для потока с  $M_0 = \sqrt{2}$ . Подставляя в (10.13) эти матрицы и вектор  $\bar{w}$ , соответствующий форме перемещения (10.31), получим значения действительной и мнимой частей аэродинамических сил в узлах.

Результаты расчета [58] представлены на рис. 10.3. По оси ординат отложены безразмерные значения действительной и мнимой частей узловых сил

$$\text{Re}P_a^0 = \frac{\text{Re}P_a}{\kappa_0 a}, \quad \text{Im}P_a^0 = \frac{\text{Im}P_a}{\kappa_1 a \omega};$$

по оси абсцисс — номера узлов вдоль размаха. Для сечений, перпендикулярных потоку, значения сил в узлах нанесены точками и соединены сплошной линией. Номера этих сечений указаны рядом с образовавшимися ломаными.

Для данного примера нетрудно вычислить точные значения узловых сил, исходя из аналитического выражения для давления. Скос потока, соответствующий форме перемещения (10.31),

$$W(\xi', t) = a(V + i\omega\xi') \exp(i\omega t).$$

Подставляя  $W(\xi', t)$  в (10.15), получим явное выражение для распределения потенциала

$$\phi = \begin{cases} -\frac{a}{\pi} \{x A + 2s + i\omega [-\frac{x^2}{2} A + (x - 2y)s]\} \exp(i\omega t), & x > y, \\ -\frac{a}{\pi} \{x\pi - i\omega \frac{x^2}{2} \pi\} \exp(i\omega t), & x \leq y, \end{cases}$$

где  $A = \frac{\pi}{2} - \arcsin(1 - \frac{2y}{x})$ ,  $s = \sqrt{y(x - y)}$ .

Переходя от потенциала к давлению, получим

$$p = \begin{cases} \frac{2\rho_0 V a}{\pi} [VA + 4i\omega s] \exp(i\omega t), & x > y, \\ 2\rho_0 V^2 a, & x \leq y. \end{cases}$$

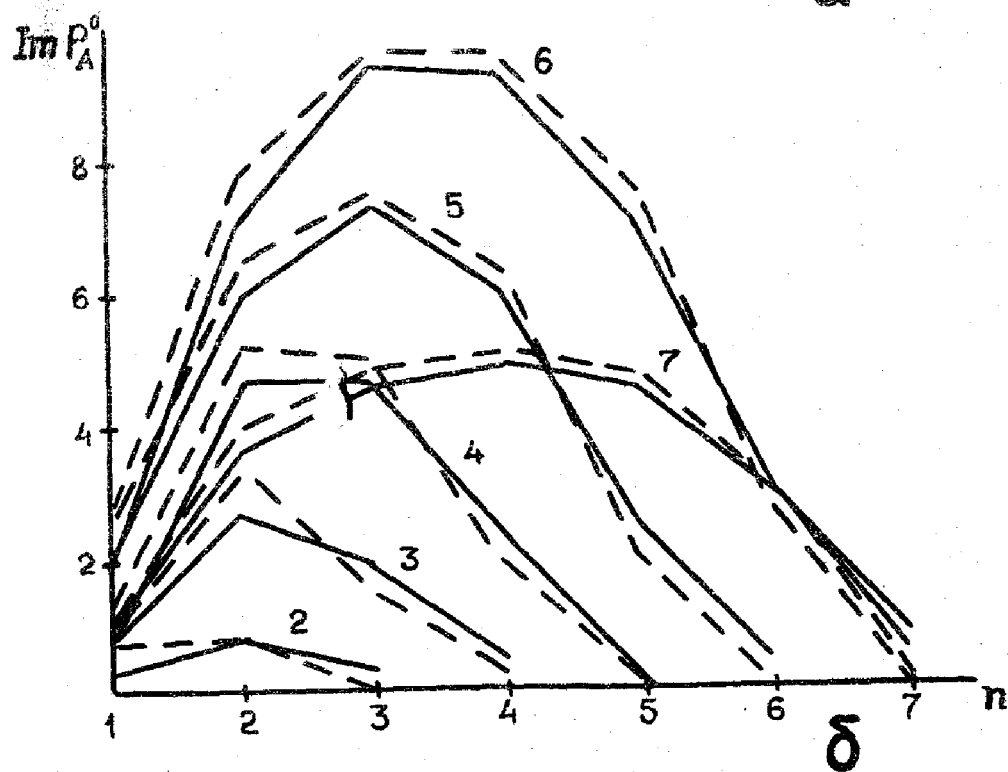
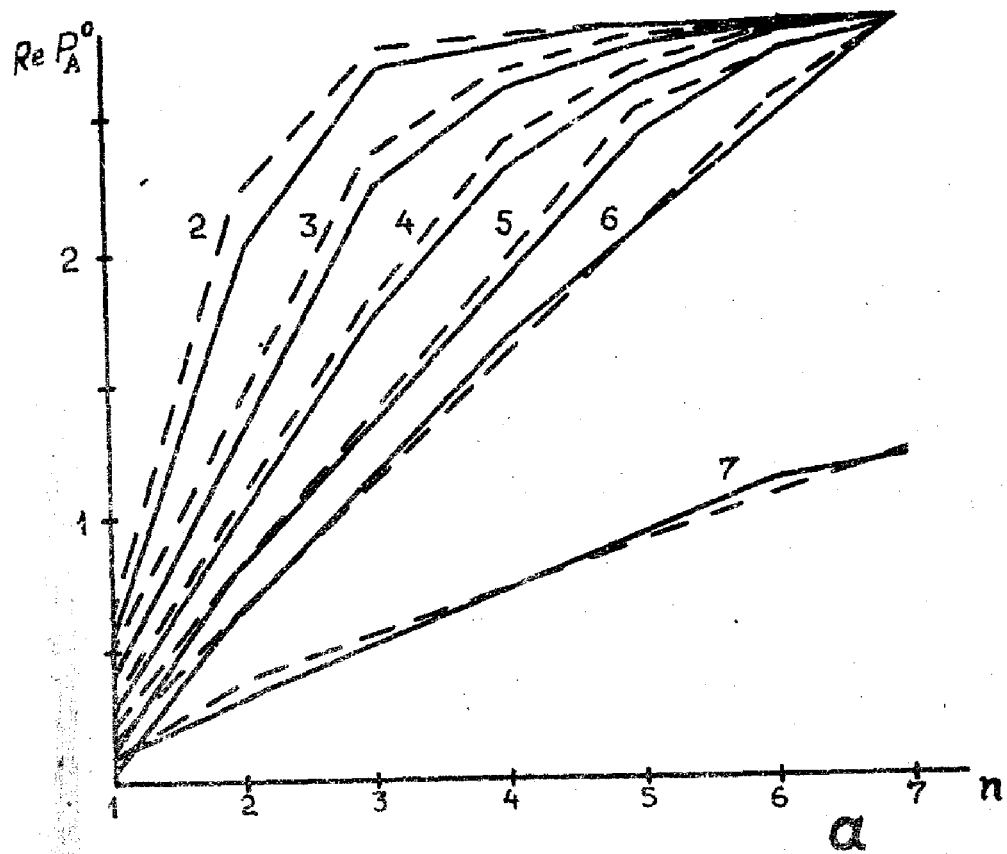


Рис. 10.3

Точные значения узловых сил, эквивалентных давлению, получаются по обычной схеме: на элементе — методом виртуальных перемещений, для модели — суммированием вкладов отдельных элементов. Полученные значения действительной и мнимой части сил приведены на рис. 10.3, где они соединены штриховой линией.

Из сопоставления кривых видно хорошее совпадение приближенных и точных значений узловых сил вдали от кромок пластины и удовлетворительное вблизи передней и боковой кромок. Заметим, что значения потенциала, вычисленные в узлах модели, совпадают с точными, так как для рассмотренного примера класс допустимых перемещений элемента включает форму перемещения (10.31). Отклонение расчетных сил от точных связано с аппроксимацией потенциала внутри элемента (10.25).

Прямой учет краевого эффекта и вихревой пелены. Выше был рассмотрен диапазон малых чисел Струхала, когда для учета краевого эффекта можно использовать теорему об эквивалентных областях интегрирования на поверхности тела. Это позволило однозначно выразить скос потока через динамические переменные модели, т.е. через смещения узловых точек. В более общем случае ( $k \ll 1$ ) возникает необходимость учета влияния возмущений плотности в области  $S_1$ . Для этого введем элементы в этой области, причем сетку разбиения здесь удобно связать с образующими конуса Маха.

При разложении потенциала возмущений по степеням частотного параметра  $k$  (10.15) необходимо удерживать члены более высокого порядка, т.е.

$$\phi(x, y, t) = \iint_{\Sigma} W(\xi', \eta', t) \sum_{n=0}^N k^n G_n(x - \xi', y - \eta') d\xi' d\eta'.$$

Пусть плотность источников  $W$  на элементах, лежащих в области  $S_1$ , по-прежнему выражается через координаты узлов соотношением (10.18), повторяя всю схему рассуждений, приведенных для малых чисел Струхала, получим зависимость узловых значений потенциала от  $\bar{w}$  в виде

$$\bar{\phi} = \sum_{n=0}^N k^n [G_n] \bar{w}. \quad (10.32)$$

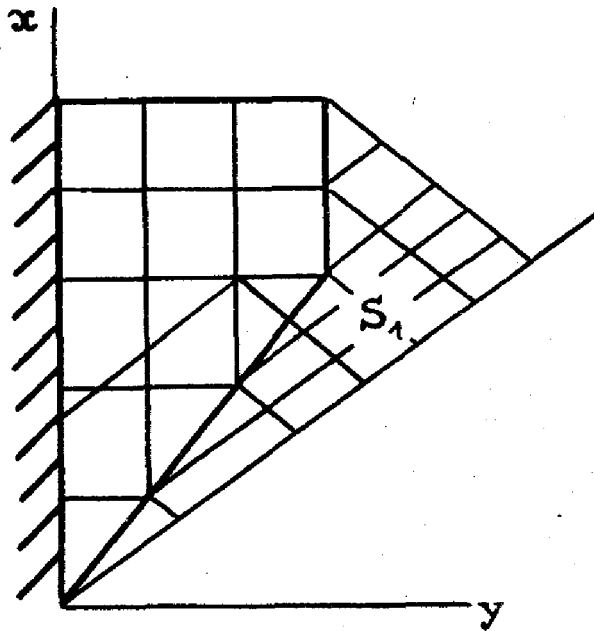


Рис.10.4

В соответствии с принадлежностью узловых координат к различным областям векторы  $\bar{\Phi}$  и  $\bar{w}$  представим следующим образом

$$\bar{\Phi} = \begin{Bmatrix} \bar{\Phi}_0 \\ \bar{\Phi}_1 \end{Bmatrix}, \quad \bar{w} = \begin{Bmatrix} \bar{w}_0 \\ \bar{w}_1 \end{Bmatrix}, \quad (10.33)$$

здесь индекс "0" указывает на принадлежность узла к  $S_0$ , а индекс "1" - к  $S_1$ .

Потенциал возмущений в области  $S_1$  является непрерывной функцией, нечетной относительно координаты  $z$ . Следовательно, выполняется условие [67].

$$\Phi(x, y, 0, t) = 0, (x, y) \in S_1.$$

Из этого условия, а также из вида аппроксимации для потенциала в пределах элемента (10.22), следует, что  $\bar{\Phi}_1 \equiv 0$ . Теперь формулу (10.32) можно записать так

$$\begin{Bmatrix} \bar{\Phi}_0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \sum_{n=0}^N k^n \begin{bmatrix} G_n^{00} & G_n^{01} \\ G_n^{10} & G_n^{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{w}_0 \\ \bar{w}_1 \end{Bmatrix}, \quad (10.34)$$

Представим (10.34) системой двух матричных уравнений

$$\bar{\Phi}_0 = \sum_{n=0}^N k^n \{ [G_n^{00}] \bar{w}_0 + [G_n^{01}] \bar{w}_1 \}, \quad (10.35)$$

$$0 = \sum_{n=0}^N k^n \{ [G_n^{10}] \bar{w}_0 + [G_n^{11}] \bar{w}_1 \}.$$

Так как второе равенство системы (10.35) выполняется для любого  $k$ , координаты узлов, принадлежащих  $S_1$ , можно исключить. Окончательно вектор потенциалов

$$\bar{\Phi}_0 = \sum_{n=0}^N k^n [\tilde{G}_n] \bar{w}_0,$$

где  $[\tilde{G}_n] = [G_n^{00}] - [G_n^{01}][G_n^{11}]^{-1}[G_n^{10}]$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ . (10.36)

Переход от узловых потенциалов к аэродинамическим матрицам совершается так же, как и ранее, по формулам (10.25), (10.30). Вектор аэродинамических сил представляется рядом по степеням частотного параметра

$$\bar{P}_a = \sum_{n=0}^N k^n [B_n] \bar{w}. \quad (10.37)$$

Заметим, что в рамках метода конечных элементов можно учесть влияние вихревой пелены  $S_2$ , если она входит в область интегрирования  $\Sigma$ . Такая ситуация может иметь место, если составляющая скорости потока, перпендикулярная задней кромке, меньше скорости звука. Тогда дополнительно вводятся элементы в области  $S_2$ . После исключения координат, принадлежащих  $S_1$ , формируются обычным способом аэродинамические матрицы  $[B_n]$ . Векторы  $\bar{P}_a$  и  $\bar{w}$  естественно подразделить следующим образом

$$\bar{P}_a = \begin{Bmatrix} \bar{P}_0 \\ \bar{P}_2 \end{Bmatrix}, \quad \bar{w} = \begin{Bmatrix} \bar{w}_0 \\ \bar{w}_2 \end{Bmatrix}. \quad (10.38)$$

Индекс "2" указывает на принадлежность соответствующих узлов области  $S_2$ . В  $S_2$  обращается в нуль давление (10.5). Нетрудно установить, что для модели это требо-



вание равносильно условию  $\bar{P}_2 = 0$ . Исключив координаты узлов, принадлежащих  $S_2$ , с помощью стандартной процедуры получим

$$\bar{P}_\alpha = \sum_{n=0}^N k^n [\tilde{B}_n] \bar{w}, \quad (10.39)$$

где  $[\tilde{B}_n] = [B_n^{00}] - [B_n^{02}][B_n^{22}]^{-1}[B_n^{20}]$ .

Таким образом, развиваемая методика вычисления аэродинамических сил допускает обобщения на широкий класс конфигураций систем и значений аэродинамических параметров.

### §11. Устойчивость пластин в потоке газа

Последовательное применение метода конечных элементов позволило выразить аэродинамические силы, действующие в узлах модели, через значения узловых смещений и скоростей в явном виде. Это дает возможность, как и в одномерном случае, записать уравнение колебаний пластины в потоке газа в замкнутой форме, подобной (7.3). Аэродинамические силы, как и раньше, можно разделить на потенциальные, циркуляционные и диссипативные составляющие, которые играют разную роль при потере устойчивости. Для пластины, как и для стержня, в зависимости от соотношения между упругими, массовыми и аэродинамическими параметрами, возможны два типа потери устойчивости: статическая, называемая дивергенцией, и динамическая — флаттер. Оба типа потери устойчивости характеризуются переходом одного из комплексных собственных значений системы  $\lambda_j = \delta_j + i\omega_j$  в область положительных  $\delta_j$ .

Вместе с тем, по сравнению с одномерным случаем, возникает ряд особенностей. Во-первых, значительно возрастает порядок матриц, а также степень их заполнения (т.е. число отличных от нуля диагоналей). Во-вторых, если используется нелокальная теория, то на характер распределения аэродинамических сил и на устойчивость начинает оказывать существенное влияние не только геометрическая форма системы в плане, но и "геометрия" потока, определяемая конусом Маха.

При исследовании конкретных систем удобно вынести из всех матриц, входящих в уравнение движения модели,

размерные множители, характеризующие физические параметры системы (упругие, массовые и т.п.). В результате уравнение движения модели примет вид

$$\sigma_0 [M^0] \ddot{\bar{w}} + [K^0] \bar{w} + \kappa_1 [D] \dot{\bar{w}} + \kappa_0 [B] \bar{w} = 0, \quad (11.1)$$

здесь  $\sigma_0 = \sigma L_x^4/D$ ,  $\kappa_0 = \kappa M_0^2/\sqrt{(M_0^2 - 1)}$ ,  $\kappa_1 = \kappa_0 L_x/V$ ,

$\kappa = \rho_0 \alpha_0^2 L_x^3/D$  — приведенное аэродинамическое давление. Матрицы, входящие в уравнение (11.1), являются безразмерными и зависят только от геометрии системы и вида разбиения.

Локальные аэродинамические воздействия. Практическое исследование сходимости. Алгоритм исследования устойчивости системы является сравнительно простым, если применима локальная аэродинамическая теория. Вычисление матриц аэродинамического воздействия  $[E]$  и  $[D]$  на основе (10.9а, 10.13) производится для каждой конкретной системы один раз, по тем же правилам, что и получение матриц  $[M]$  и  $[K]$ . Изменение скорости потока эквивалентно варьированию в уравнении (11.1) двух связанных параметров  $\kappa_0$  и  $\kappa_1$ . Задавая значения этих параметров с некоторым шагом и решая на ЦВМ для каждой пары  $\kappa_0$  и  $\kappa_1$  уравнение (11.1), можно вычислить набор собственных значений и векторов системы в потоке. На основе полученных данных проводится исследование траектории корней и эволюции форм колебаний в заданном диапазоне скоростей. Изложенный алгоритм позволяет при сравнительно небольших вычислительных затратах найти критическое значение параметра  $\kappa_0$ , от которого для конкретной системы легко перейти к критическому числу Маха. В случае простых систем нетрудно также провести практическое исследование сходимости результатов при уменьшении шага сетки разбиения.

В качестве первого примера рассмотрим колебания квадратной консольной пластины (рис. 9.4) в потоке, набегающем вдоль закрепленной кромки. Результаты расчета собственных значений пластины [46] приведены на рис. 11.1 где изображены траектории корней при увеличении параметра  $\kappa_0$ . (Эти данные получены при разбиении  $4 \times 4$ ). По оси абсцисс отложены значения безразмерного коэффициента затухания  $\Delta = \delta/\sigma_0$ , по оси ординат — безразмерной частоты  $\Omega = \omega/\sigma_0$ .

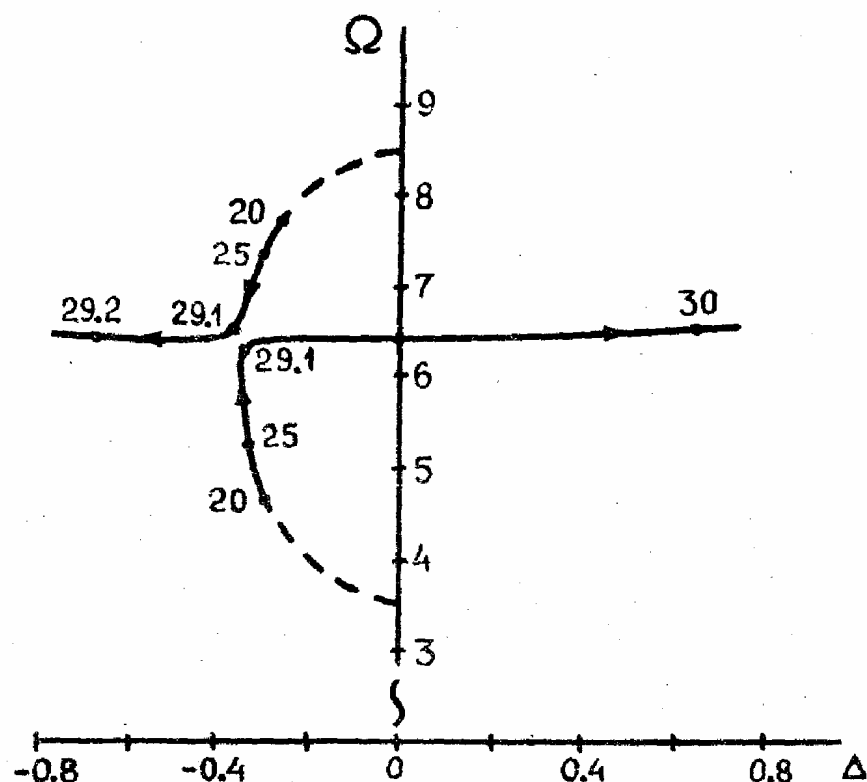


Рис.11.1

С появлением потока оба первых корня  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  уходят в левую полуплоскость; колебания пластины являются на этих тонах затухающими. При увеличении скорости оба корня, двигаясь влево от мнимой оси, одновременно сближаются друг с другом. Начиная с  $\kappa_0 = 29.1$ , при котором корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  подходят наиболее близко друг к другу, коэффициент затухания на первом тоне резко убывает и при  $\kappa_0 = 29.2$  обращается в нуль. При дальнейшем возрастании  $\kappa_0$  первый корень переходит в правую полуплоскость; пластина становится динамически неустойчивой. Второй корень при этом продолжает двигаться влево, так, что частоты на обоих тонах совпадают. Корни, соответствующие третьему и четвертому тону, остаются в левой полуплоскости; коэффициенты затухания на этих тонах незначительно увеличиваются с ростом  $\kappa_0$ .

Рассмотрим эволюцию форм колебаний. На рис. 11.2 линиями равного смещения изображены распределения амплитуд первого и второго тонов при различных  $\kappa_0$ . За единицу принято смещение свободного конца задней кромки,

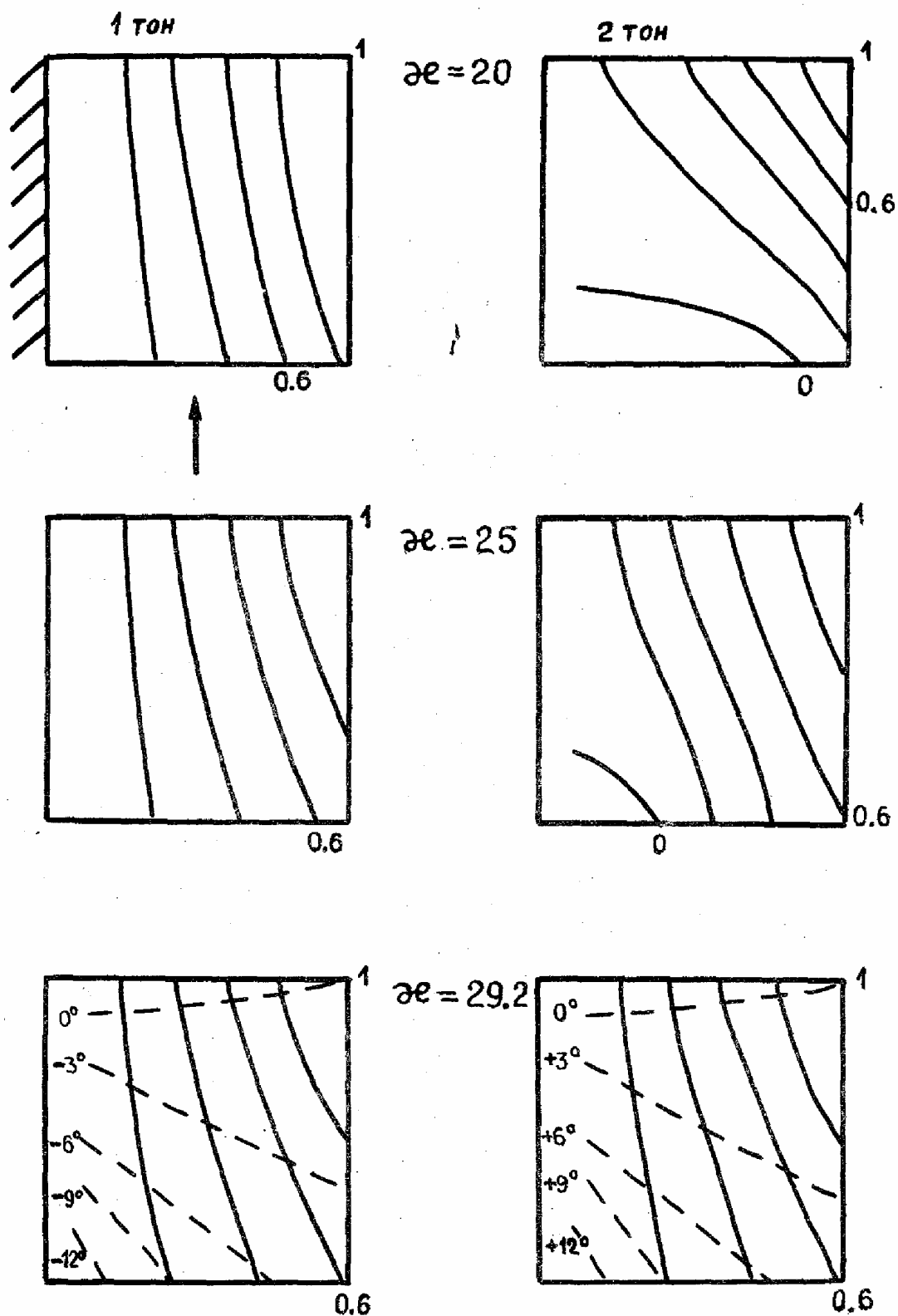


Рис.11.2

линии проведены с шагом 0.2. Видно, что на первом тоне с увеличением  $\kappa_0$  появляется наклон в плоскости, параллельной потоку, т.е. угол атаки. На втором тоне узловая

линия смещается вверх по потоку и при  $\kappa_0 \approx \kappa_{\text{окр}}$  находится перед пластиной. Начиная с  $\kappa_0 = 29$ , становятся заметными сдвиги фаз между колебаниями различных узлов. Когда  $\kappa_0 = 29.2$ , собственные векторы на первом и втором тонах являются комплексно сопряженными; амплитуды на этих тонах совпадают, а фазы противоположны по знаку. Линии равных фаз изображены на рис. 11.2 штрихами.

Критические значения параметров  $\kappa_0$  и  $\Omega$ , рассчитанные при различных разбиениях пластины на элементы, приведены в первых трех колонках табл. 11.1. Из таблицы видна хорошая сходимость результатов при увеличении числа степеней свободы моделей  $J$ . Критические значения, рассчитанные при 12 и 20 степенях свободы, различаются на 0.6%, критические частоты совпадают. Аналогичные данные, полученные без учета аэродинамического демпфирования, представлены в 4-6 колонках табл. 11.1. В седьмой колонке для сравнения помещены критические параметры, вычисленные в [73] методом Ритца. Видно, что для приблизительно одинакового числа степеней свободы

Таблица 11.1

Критические значения  $\kappa_0$  и  $\Omega$  для квадратной пластины

Раз- биение	С учетом демпфирования			Без учета демпфирования			По Ритцу $J = 15 \sim 20$
	2x2 $J = 6$	3x3 $J = 12$	4x4 $J = 20$	2x2 $J = 6$	3x3 $J = 12$	4x4 $J = 20$	
$\kappa_{\text{окр}}$	30.1	29.4	29.2	30.7	29.9	29.5	28.1
$\Omega_{\text{кр}}$	6.43	6.47	6.47	6.45	6.48	6.48	6.44
Н ко- лонки	1	2	3	4	5	6	7

( $\sim 20$ ) результаты, найденные обоими методами, хорошо согласуются; критические  $\kappa_0$  различаются на 5%, частоты на 0.6%.

Как и следовало ожидать ([43]), пренебрежение аэродинамическим демпфированием мало влияет на критические значения. Однако поведение корней иное. При увеличении  $\kappa_0$  вплоть до критической величины корни движутся навстречу друг другу по мнимой оси; при  $\kappa_0 = \kappa_{\text{окр}}$  они сли-

ваются, затем расходятся вправо и влево симметрично относительно оси  $\Omega$ , так, что при всех  $\kappa_0 > \kappa_{0\text{кр}}$  частоты обоих тонов совпадают, а коэффициенты затухания равны по величине и противоположны по знаку. Формы колебаний, полученные с учетом и без учета демпфирования, практически не различаются.

Рассмотрим теперь сходимость метода конечных элементов на примерах прямоугольных пластин различного удлинения. Соответствующие данные, полученные без учета демпфирования, сведены в табл. 11.2, где в последней колонке приведены результаты по методу Ритца [73]. При обозначении разбиений принято, что первая цифра равна числу элементов поперек потока, вторая — вдоль потока.

$L_y/L_x = 1/2$ Разбиение	2 x 2 $r=6$	3 x 3 $r=12$	2 x 4 $r=10$	4 x 4 $r=20$	3 x 6 $r=21$	По Ритцу $r=15\sim 20$
$\kappa_{0\text{кр}}$	13,4	16,1	15,7	17,2	18,1	18,4
$\Omega_{\text{кр}}$	4,48	4,72	4,81	4,88	5,08	5,09
$L_y/L_x = 2$ Разбиение	2 x 2 $r=6$	4 x 2 $r=12$	3 x 3 $r=12$	6 x 3 $r=24$	4 x 4 $r=20$	По Ритцу $r=15\sim 20$
$\kappa_{0\text{кр}}$	79,9	79,3	79,3	72,1	70,5	68,3
$\Omega_{\text{кр}}$	10,02	9,72	9,85	9,58	9,73	9,43

Анализ табл. показывает, что на точность расчета устойчивости прямоугольных пластин, по-видимому, влияет не только число степеней свободы модели, но и число элементов, расположенных по потоку. Этот факт следует учитывать в практических задачах.

Данные, иллюстрирующие сходимость для треугольной консольной пластины (рис. 9.4), представлены в табл. 11.3. Последняя колонка здесь отведена для известных результатов, полученных в [74] при использовании треугольных элементов с шестью координатами в каждом узле. Видно вполне удовлетворительное согласие критических парамет-

Таблица 11.3

Критические значения  $\kappa_0$  и  $\Omega$  для треугольной пластины

Раз- биение	3x3 J = 6	4x4 J = 10	5x5 J = 15	6x6 J = 21	2x2 J = 21
$\kappa_{0\text{кр}}$	131.9	109.5	102.7	97.1	86.3
$\Omega_{\text{кр}}$	19.86	19.46	19.23	19.11	-

ров, вычисленных с помощью разных элементов при одинаковом числе степеней свободы  $J = 21$ .

Применение теории несущей поверхности. Исследование устойчивости пластин на основе нелокальной теории несущей поверхности позволяет находить критические значения  $\kappa_{\text{кр}}$ ,  $\Omega_{\text{кр}}$  при более слабых, чем ранее, ограничениях на параметры потока (в частности, при небольших числах Маха  $1 < M_0 < 2$ ). Одновременно можно уточнить границы применимости различных вариантов локальной теории. Необходимо, однако, отметить, что алгоритм исследования устойчивости при этом существенно усложняется. Согласно методике, изложенной в §10, получение аэродинамических матриц связано теперь с численным интегрированием выражения (10.15), что требует значительного объема вычислений. При изменении  $M_0$  меняется взаимное расположение системы и образующих конуса Маха, поэтому процедура получения матриц  $[B]$  и  $[D]$  должна быть проведена заново. Поэтому нелокальную теорию рационально использовать лишь в узком диапазоне скоростей около критического числа Маха, предварительно найденного по локальной теории.

Перейдем к конкретным приложениям. Рассмотрим вначале классическую задачу о флаттере панели, которая теоретически и экспериментально исследована в ряде работ [48, 75, 76]. Здесь она служит иллюстрацией применения различных аэродинамических теорий. На рис. 11.3 изображена однородная квадратная панель, у которой две кромки, параллельные потоку, свободно оперты, две другие закреплены. Панель установлена под нулевым углом атаки и обтекается с одной стороны.

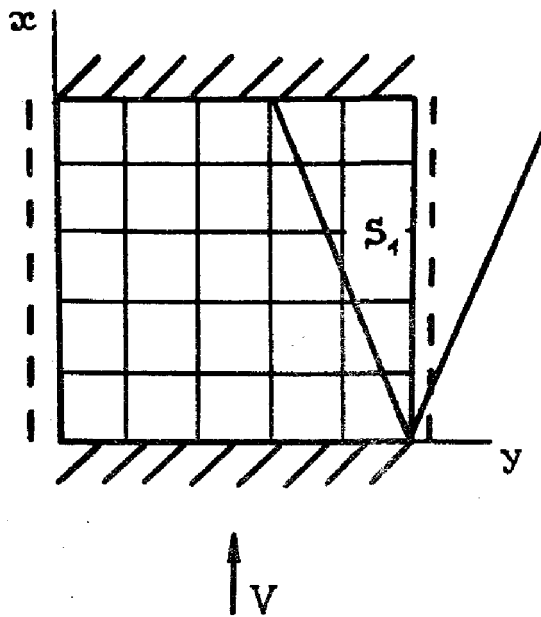


Рис.11.3

Пусть модель пластины состоит из 25 квадратных элементов [77]; число степеней свободы при этом равно 16. Первые три частоты колебаний модели в пустоте составляют  $\Omega_1 = 28.042$ ,  $\Omega_2 = 51.798$ ,  $\Omega_3 = 66.041$ . Их сравнение с теоретическими значениями ( $\Omega_1 = 28.950$ ,  $\Omega_2 = 54.747$ ,  $\Omega_3 = 69.327$ ) показывает, что выбранная модель обеспечивает вполне удовлетворительную точность.

Исследование колебаний панели в потоке проведено

в [77]; в предположении, что при  $y < 0$  и при  $y > L_y$  скос потока равен нулю (физически это соответствует заделке упругой панели в абсолютно жесткую плиту). В соответствии с экспериментом [76] при фиксированном числе Маха менялась толщина панели  $l_z$ , что эквивалентно изменению приведенного аэродинамического давления  $\kappa = \rho_0 \alpha_0^2 L_x^3 / D$ . (В реальном и численном экспериментах алюминиевая пластина имела параметры  $E = 7.35 \times 10^{10}$  н/м<sup>2</sup>,  $\nu = 0.33$ ,  $\rho = 2.85 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $L = 0.25$  м.)

Для случая  $M_0 = \sqrt{2}$  траектории первых трех собственных значений в зависимости от  $l_z$  изображены на рис. 11.4. Рядом с расчетными точками указаны значения толщины панели в миллиметрах. Из рис. видно, что в потоке с уменьшением  $l_z$  частота и затухание первого тона увеличиваются. Частота третьего тона уменьшается; затухание вначале увеличивается, но для  $l_z = 1$  мм, начинает уменьшаться и при  $l_z = 0.875$  мм становится положительным. В панели происходит потеря устойчивости типа флаттера. Частота второго тона незначительно уменьшается; затухание на этом тоне растет.

Исследование форм колебаний позволяет проанализировать картину потери устойчивости. При этом удобно перейти от толщины панели к приведенному давлению  $\kappa$ . Эволюция форм изображена на рис. 11.5. Распределения ампли-



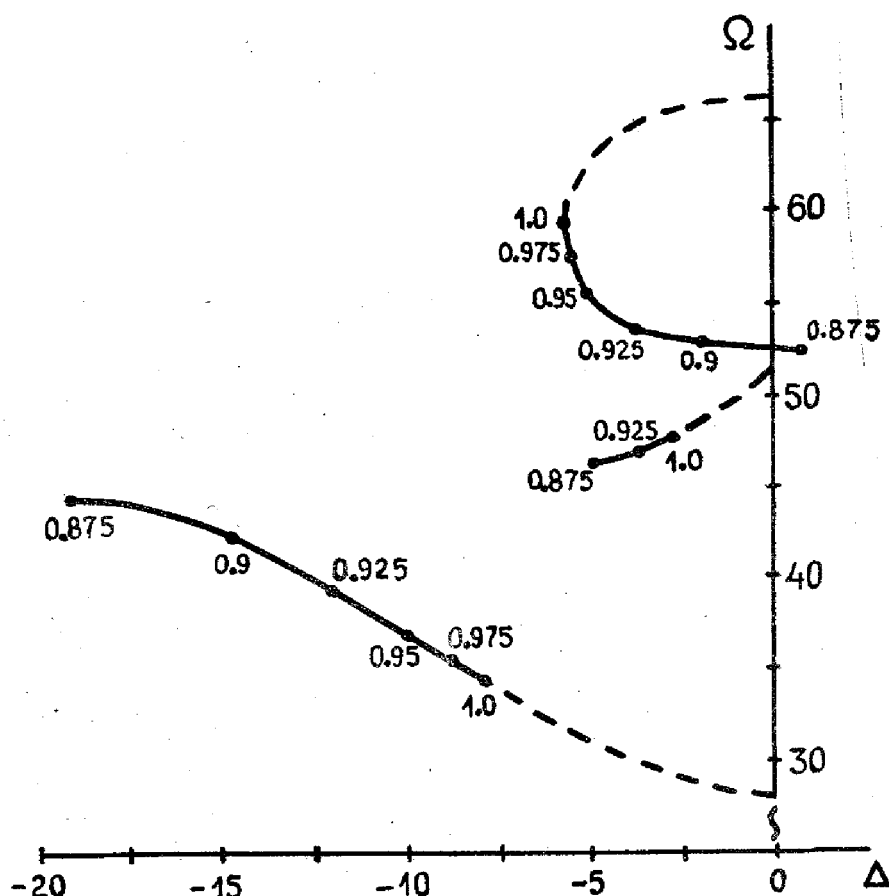


Рис.11.4

туд показаны линиями равного смещения. За единицу принята максимальная амплитуда, линии нанесены с шагом 0.2. (В силу симметрии задачи нарисована только левая половина панели). Видно, что в потоке распределение амплитуд первого тока становится асимметричным, вершина профиля смещена к задней кромке. По мере увеличения  $\kappa$ , на первом тоне возникает узловая линия, которая смещается вниз по потоку. Узловая линия третьего тона движется навстречу потоку. В момент потери устойчивости распределения амплитуд первого и третьего тонов практически совпадают. Сдвиги фаз между колебаниями соседних узлов модели достигают  $8^\circ$ . Таким образом, критические формы представляются суперпозицией бегущих и стоячих волн. Из приведенных данных видно, что устойчивость теряется за счет взаимодействия через поток первого и третьего тонов колебаний.

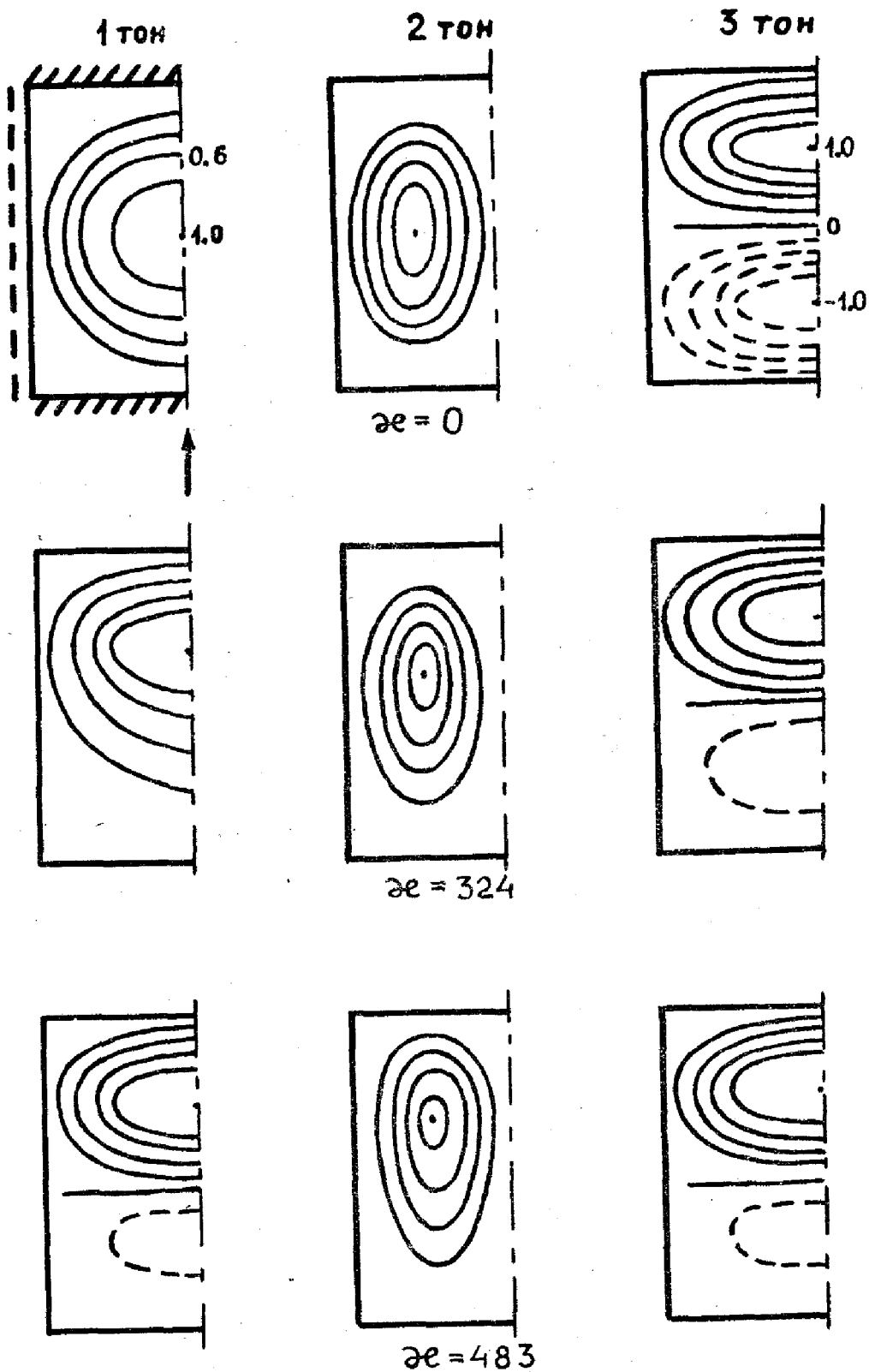


Рис.11.5

Зависимость границ устойчивости (критических значений параметра  $\kappa_{кр}$ ) от  $M_0$  представлена на рис. 11.6. Результаты, полученные по теории несущей поверхности, обозначены кружками и соединены штрихпунктирной линией. Кривая I отражает данные с учетом аэродинамического демпфирования, кривая II – без учета. Граница устойчивости, вычисленная на основе той же модели, но с использованием локальной аэродинамической теории показана штриховой линией. Результаты теоретического расчета [48] изображены сплошной линией, экспериментальные данные [76] помечены треугольниками.

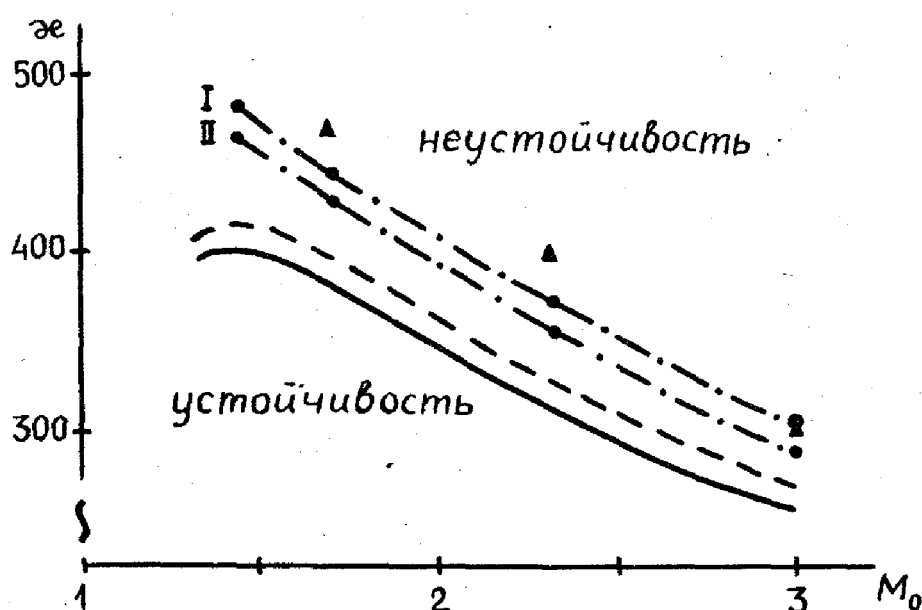


Рис.11.6

Сопоставление расчетных границ устойчивости по локальной теории с явным решением [48] показывает, что ошибка метода в данной задаче не превышает 3%. Далее, видно, что критические значения, полученные с использованием теории несущей поверхности, несколько выше, чем по локальной теории и лучше согласуются с экспериментальными данными. Аэродинамическое демпфирование, как и ранее, слабо влияет на границы устойчивости.

Вернемся к рассмотренной в начале параграфа задаче о колебаниях в потоке треугольной пластины с одной заземленной кромкой (рис. 9.4,  $J=21$ ). Качественно исполь-

зование нелокальной аэродинамической теории приводит к тем же результатам, что и локальной [ 78].

В докритическом режиме корни первого и второго тонов движутся навстречу друг другу, оставаясь чисто мнимыми (демпфирование не учитывается). Перемещение корней иллюстрируется рис. 11.7, где по оси абсцисс отложено отношение  $\kappa/\kappa_{кр}$ , а по оси ординат — частоты первых двух тонов, отнесенные ко второй частоте колебаний в пустоте. Видно, что наиболее существенно меняется частота первого тона; по мере приближения  $\kappa$  к  $\kappa_{кр}$  "скорость" движения корней возрастает.

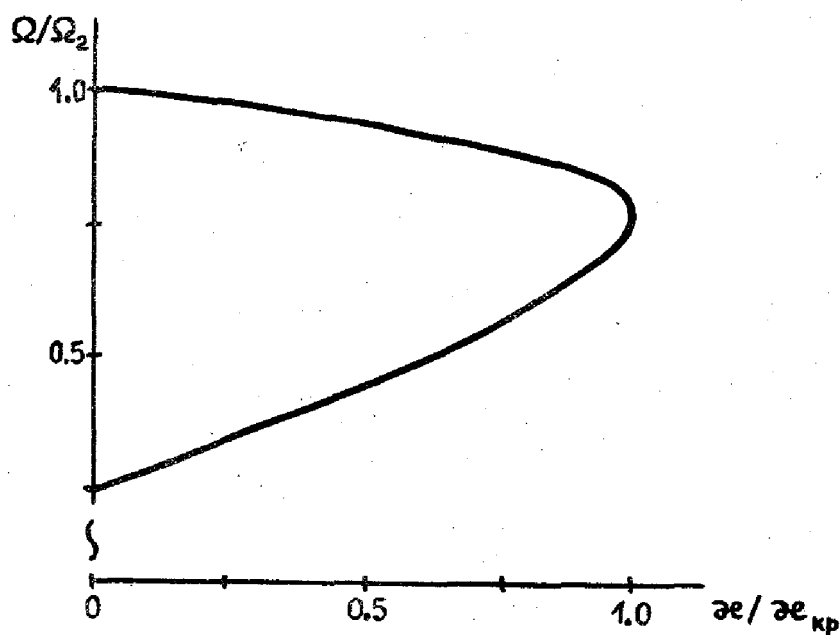


Рис.11.7

Рассмотрим эволюцию форм колебаний в случае, когда передняя кромка является дозвуковой\* ( $M_0 = 1.3 < \sqrt{2}$ ). На рис. 11.8 линиями равного смещения изображены распределения амплитуд первого и второго тонов при различных  $\kappa$ . С ростом приведенного аэродинамического давления на пер-

\* Кромка называется дозвуковой, если нормальная к ней составляющая скорости потока  $V_n \leq C_0$ , в противном случае — сверхзвуковой.

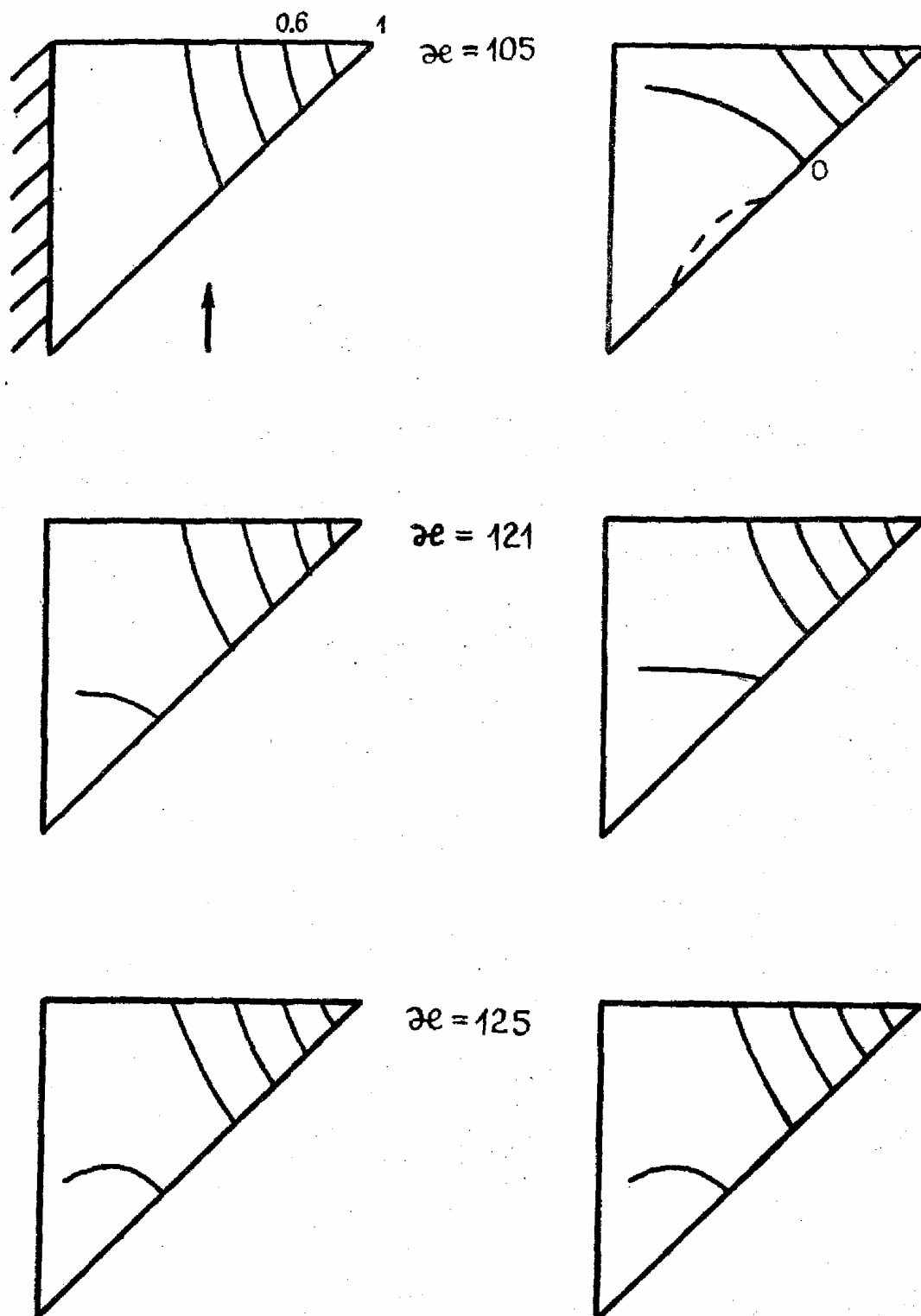


Рис.11.8

вом тоне появляется узловая линия, пересекающая переднюю кромку; в дальнейшем она смещается вдоль по потоку. При  $\kappa = \kappa_{кр}$  формы становятся комплексно-сопряженны-

ми. Критическую форму, по аналогии с одномерным случаем (§7), можно назвать крутильной. Заметим, что с ростом  $M_0$ , когда передняя кромка становится сверхзвуковой, характер потери устойчивости и вид критических форм существенно не меняется.

Зависимость границ устойчивости ( $\kappa_{кр}$ ) от  $M_0$  приведена на рис. 11.9. Расчетные данные изображены кружками. Сплошной линией нанесена граница, полученная методом конечных элементов [74] по локальной теории; треугольниками — экспериментальные данные [74]. Сопоставление результатов показывает, что критические значения по теории несущей поверхности несколько выше вычисленных по локальной теории и лучше согласуются с экспериментом при небольших числах Маха. С ростом  $M_0$ , как и следовало ожидать, расчетные границы устойчивости сближаются. Важно отметить некоторое снижение запаса устойчивости при малых числах Маха ( $M_0 = 1.3$ ).

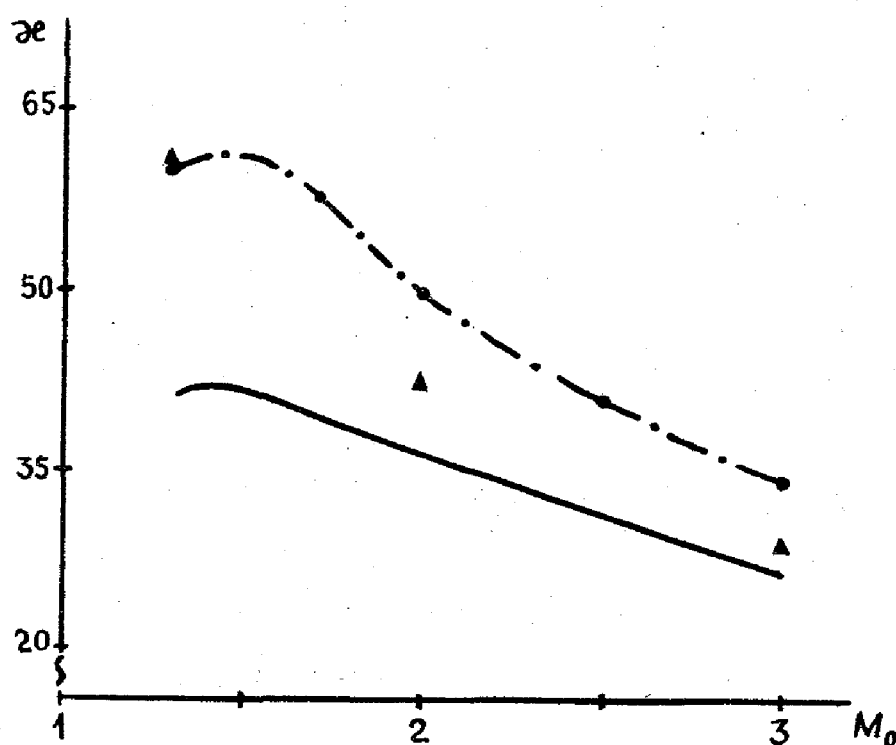


Рис.11.9

Естественно, ожидать, что для консольно закрепленных пластин прямоугольной формы отмеченный выше эффект окажется более заметным. В этом случае расширяется об-

ласть, в которой аэродинамическое давление сильно отличается от вычисленного по локальной теории. Существенно, что данная область расположена вблизи незакрепленных боковых кромок. Влияние краевого эффекта оценим на примере расчета устойчивости квадратной консольной пластины, уже рассмотренной с точки зрения локальной теории.

По теории несущей поверхности анализ устойчивости пластины проведен в [72] при значениях числа Маха  $M_0 = \sqrt{2}, 1.7, 2.3, 2.6, 2.9, 3.3$ . Расчетная зависимость параметра  $\kappa_{кр}$  от  $M_0$  представлена на рис. 11.10 кружками, соединенными штрих пунктирной линией. Для сравнения там же сплошной линией представлены данные по локальной теории, обсуждавшиеся в первой части параграфа. Важно отметить, что одновременно с сильным снижением запаса устойчивости при малых числах Маха краевой эффект приводит к немонотонной зависимости безразмерной критической толщины  $l_z$  от  $M_0$  (рис. 11.11).

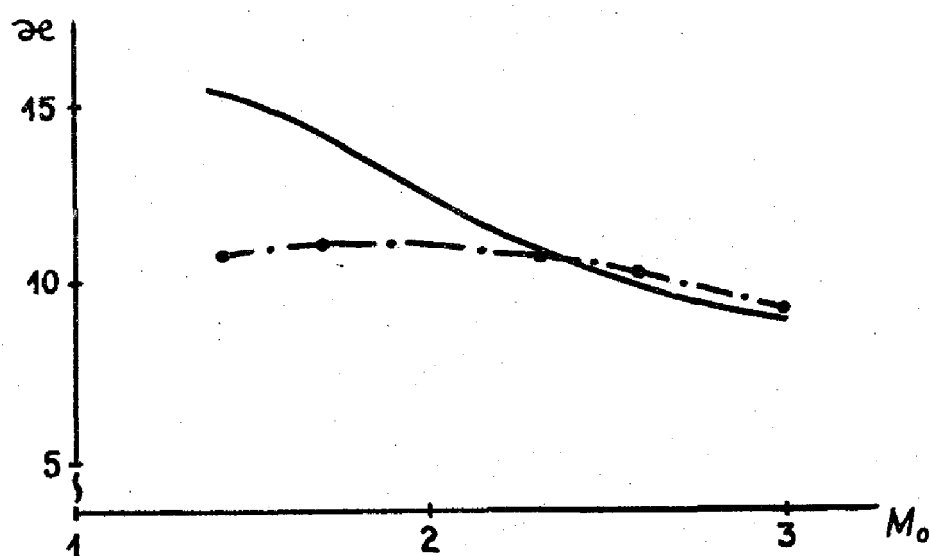


Рис. 11.10

При использовании теории несущей поверхности снижается также критическая частота флаттера. Этот факт обусловлен тем, что для формы, соответствующей второму тону, краевой эффект вызывает появление дополнительного дестабилизирующего момента аэродинамических сил, пропорционального эффективному углу атаки. Действие этого

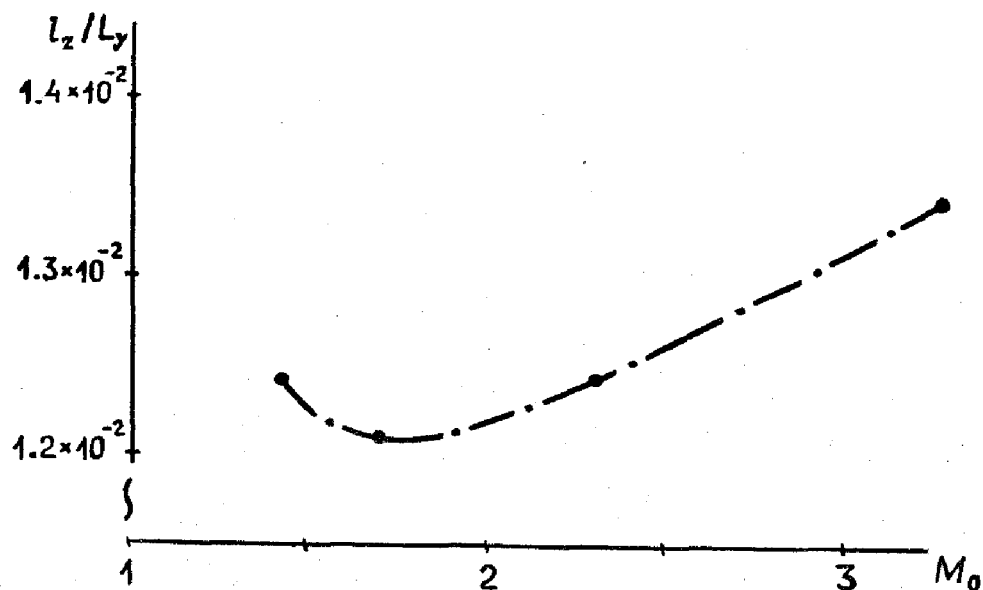


Рис.11.11

момента приводит к тому, что при малых  $M_0$  ( $\sim \sqrt{2}$ ) флаттерные формы ближе к "крутильным", по сравнению с полученными по локальной теории (ср.рис.11.2 и 11.12). С ростом  $M_0$  величина дестабилизирующего момента уменьшается.

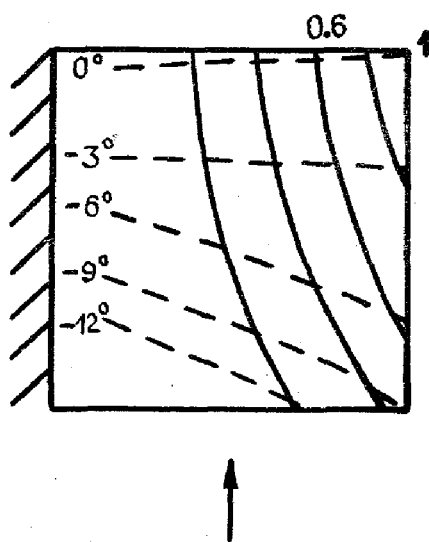


Рис. 11.12

Рассмотренные примеры показывают, что использование при небольших числах Маха ( $M_0 < 2$ ) локальной теории может привести к значительным ошибкам в определении запаса устойчивости. Поэтому вычисленную для конкретной системы границу устойчивости следует уточнить в области малых  $M_0$ , используя теорию несущей поверхности.

Устойчивость неоднородных систем. Для иллюстрации возможностей метода конечных элементов при расчете неоднородных систем проведем исследование устойчивости пластины, имеющей в сечении форму равномерно сужающегося клина (рис. 9.10). Расчетная модель имеет 30 степеней свободы; частоты свободных колебаний пластины приведены в табл. 9.7. Набегающий

114



поток направлен вдоль закрепленной кромки от толстого края к заостренному.

Схема исследования устойчивости полностью аналогична всем предыдущим случаям. Проанализируем перемещение частот первых двух тонов вдоль мнимой оси в зависимости от параметра  $\kappa/\kappa_{кр}$  (рис. 11.13). Видно, что как и ра-

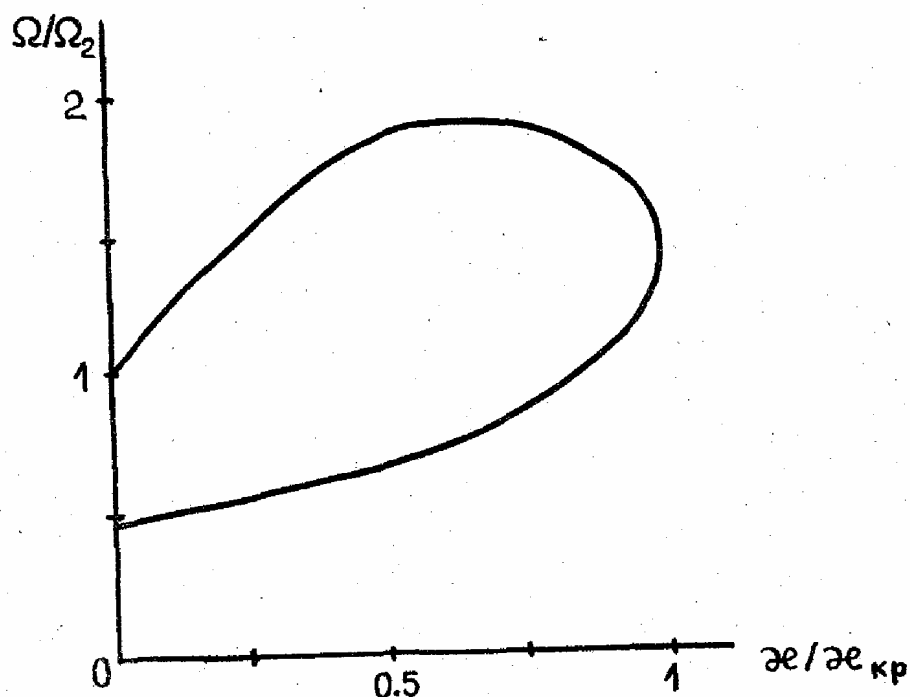


Рис. 11.13

нее, по мере роста приведенного аэродинамического давления частота первого тона монотонно увеличивается. Поведение частоты второго тона  $\Omega_2$  иное, чем для однородной пластины. При изменении  $\kappa$  от нуля до  $\kappa_{кр}$ ,  $\Omega_2$  сначала возрастает, затем достигает некоторого максимального значения и начинает уменьшаться. Такой ход зависимости  $\Omega_2$  от  $\kappa$  объясняется тем, что узловая линия второго тона смещается навстречу потоку, т.е. в область с большей эффективной жесткостью. Потеря устойчивости происходит в момент слияния частот. Как и в случае однородной пластины, критические значения, вычисленные по локальной теории, оказываются выше, чем по теории несущей поверхности.

Самостоятельный интерес представляет оценка влияния толщины конструкций на критические параметры. При описании аэродинамических воздействий в рамках локальной теории нетрудно учесть зависимость толщины неоднородных пластин от пространственных координат. Для этого вместо (10.8) используется уточненная формула (10.8а). Тогда в матрицах аэродинамической жесткости  $[B]$  и демпфирования  $[D]$  появляются дополнительные слагаемые, пропорциональные числу Маха  $M_0$  и зависящие от значения производной  $\partial l_z / \partial x$ . Эти слагаемые, описываемые матрицами  $[\bar{B}]$  и  $[\bar{D}]$ , можно вычислить, задавшись на каждом элементе явной зависимостью  $\partial l_z / \partial x$ , по формулам

$$[\bar{B}^e] = \frac{\gamma + 1}{2L_x} M_0 [d]^T \iint \frac{\partial l_z}{\partial \xi} \bar{\chi} \frac{\partial \bar{\chi}^T}{\partial \xi} d\Omega^e [d],$$

$$[\bar{D}^e] = \frac{\gamma + 1}{2L_x^2} M [d]^T \iint \frac{\partial l_z}{\partial \xi} \bar{\chi} \bar{\chi}^T d\Omega^e [d].$$
(11.2)

Практическую оценку влияния уточняющих членов в выражении для аэродинамического давления (10.8а) проведем на примере расчета устойчивости квадратной неоднородной пластины, имеющей в сечении форму ромба (рис. 11.14). В [79] для такой задачи использована модель из 16 неоднородных элементов с линейно-меняющейся толщиной [26], имеющая 20 степеней свободы. Расчет свободных колебаний в пустоте дает следующие значения для частот, приведенных к величинам  $\sigma_e$  и  $D_e$  в сечении  $e-e$ : на первом тоне  $\Omega_1 = 2.437$ , на втором —  $\Omega_2 = 6.652$ .

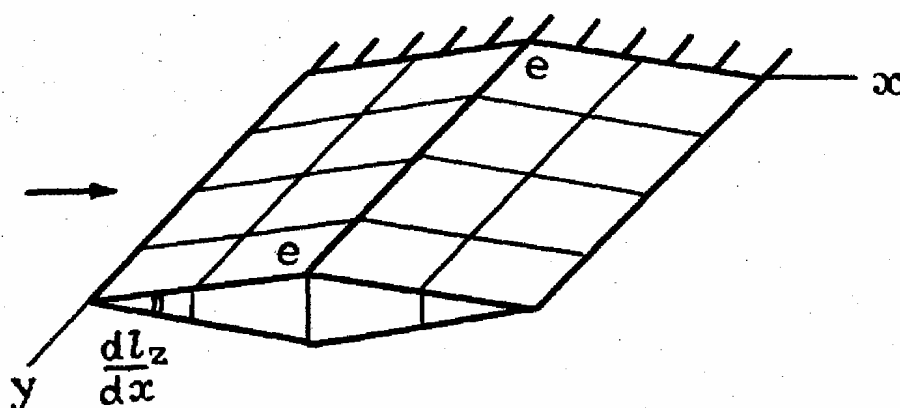


Рис. 11.14

Картина потери устойчивости неоднородной пластины аналогична случаю однородной. Однако, с увеличением толщины в сечении  $e - e$ , что эквивалентно увеличению угла заточки  $|\partial l_z / \partial x|$ , критические значения параметра  $\kappa_{\text{окр}}$  и частоты флаттера  $\Omega_{\text{кр}}$  уменьшаются (табл. 11.4).

Таблица 11.4

Критические значения  $\kappa_0$  и  $\Omega$   
при разных углах заточки пластины

$ \partial l_z / \partial x $	$1.5 \times 10^{-2}$	$3.0 \times 10^{-2}$	$4.5 \times 10^{-2}$	$6.0 \times 10^{-2}$
$\kappa_{\text{кр}}$	3.12	2.95	2.82	2.69
$\Omega_{\text{кр}}$	3.291	3.268	2.229	3.203

Тот же расчет при использовании неуточненной теории (10.8) дает при всех значениях угла заточки одни и те же завышенные значения  $\kappa_{\text{окр}} = 3.39$  и  $\Omega_{\text{кр}} = 3.317$ . Приведенный пример позволяет сделать вывод, что при исследовании устойчивости реальных конструкций желательно учитывать в описании аэродинамического давления их переменную толщину.

Рассмотрим в заключение неконсервативную задачу, на основе которой можно дополнительно сравнить расчет по методу конечных элементов с экспериментом. В [80] методом электромеханического моделирования исследованы колебания прямоугольной пластины под действием трех сосредоточенных сил (рис. 11.15). В точке  $a$  приложена "подъемная" сила  $P_a$ , пропорциональная "углу атаки"  $(\partial w / \partial x)|_s$  взятому в точке  $s$ , т.е.  $P_a = k(\partial w / \partial x)|_s$ . В точках  $e$  и  $f$  приложены "демпфирующие" силы  $P_e = d\dot{w}|_e$ ,  $P_f = d\dot{w}|_f$ . Пластина является неоднородной, так как в ее углу (в точке  $g$ ) помещена добавочная масса  $m$ . В [80] использованы два значения массы —  $m_1$  и  $m_2$ . Параметры пластины таковы:  $L_x = 0.254$  м,  $L_y = 0.3937$  м,  $l_z = 0.0035$  м,  $D = 1.6986 \times 10^3$  нм,  $\rho = 2.7 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $m_1 = 0.1587$  кг,  $m_2 = 0.2268$  кг. Коэффициент демпфирования  $d = 7.00$  нм.с. Коэффициент пропорциональности  $k$  между "подъемной силой" и "углом атаки" варьировался

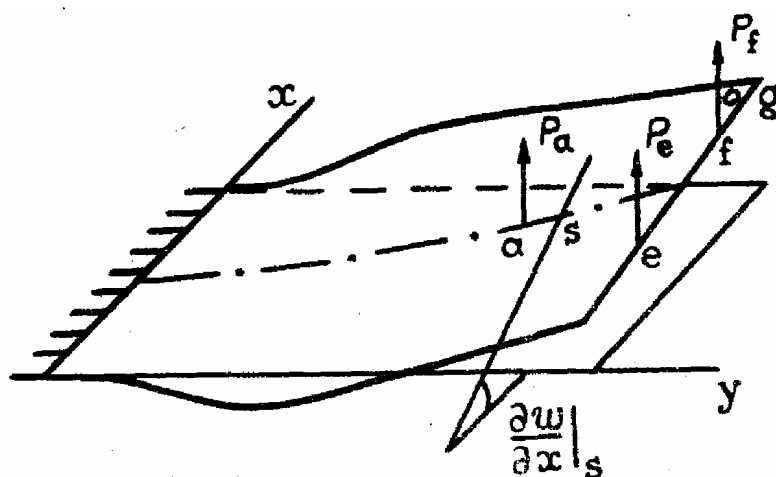


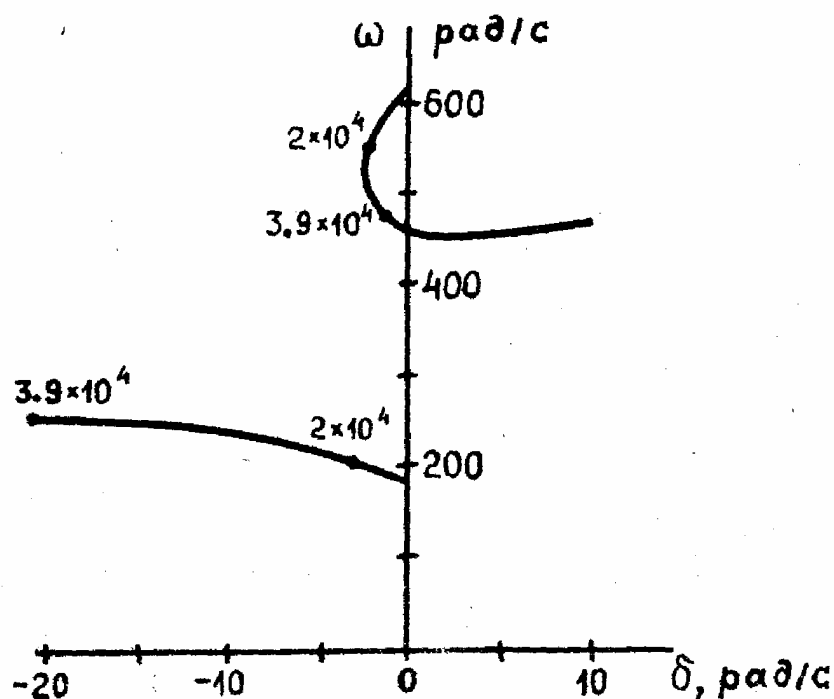
Рис. 11.15

в [80] путем изменения коэффициента усиления соответствующего силовозбудителя. Тем самым экспериментально определялось значение  $k_{кр}$ , при котором в пластине возникали незатухающие колебания.

Примененная в [81] расчетная модель пластины состоит из 24 прямоугольных элементов ( $J=28$ ). Разбиение пластины проведено таким образом, что точки приложения "подъемной" и "демпфирующих" сил совпадают с узлами модели. "Угол атаки" в точке  $s$  определен через смещения прилежащих узлов модели по формулам линейной интерполяции. При получении матрицы инерции элемента, содержащего точку  $g$ , учтены размеры и величина добавочной массы  $m$ .

Рассчитанные корневые портреты первого и второго тонов пластины с добавочной массой  $m_1$  изображены на рис. 11.16. Соответствующие значения коэффициента пропорциональности  $k$  между углом атаки и подъемной силой указаны рядом с линиями. С ростом  $k$  оба корня сначала уходят в левую полуплоскость. При некотором  $k$  корень второго тона начинает двигаться вправо и при  $k = k_{кр}$  его действительная часть обращается в нуль. При дальнейшем увеличении  $k$  пластина становится неустойчивой.

Траектории корней, полученные для пластины с добавочной массой, существенно отличаются по своему характеру от корневых портретов для однородных пластин (ср. рис. 11.1). Из-за того, что добавочная масса сильно смещена от оси симметрии пластины, при колебаниях возни-



кает инерционная связь между "изгибными" и "крутильными" тонами. Существование этой связи играет, по-видимому, основную роль при потере устойчивости пластины.

Расчетные критические значения коэффициента  $k$  и частоты  $\omega$  [81] приведены в табл. 11.5. Там же помещены экспериментальные данные [80].

Таблица 11.5

Критические значения  $k$  и  $\omega$  пластины, несимметрично нагруженной добавочной массой

Масса	Расчет		Эксперимент	
	$k, \frac{\text{н}}{\text{рад}}$	$\omega, \frac{\text{рад}}{\text{с}}$	$k, \frac{\text{н}}{\text{рад}}$	$\omega, \frac{\text{рад}}{\text{с}}$
$m_1$	$4.161 \times 10^4$	476	$4.023 \times 10^4$	471
$m_2$	$3.412 \times 10^4$	447	$2.920 \times 10^4$	458

Из табл. видно, что **расчетные** результаты хорошо согласуются с экспериментальными. Для массы  $m_1$  коэффи-

циент  $k$  отличается на 3,4%, частота — на 0,9%, для массы  $m_2$  — на 17 и 2,6% соответственно.

Проведенный в этом параграфе анализ показывает, что на основе метода конечных элементов могут быть поставлены численные эксперименты по изучению поведения в потоке упругих систем. Следует отметить хорошее качественное и количественное соответствие данных натурального и численного эксперимента. Большой объем информации, получаемый при численных исследованиях, позволяет построить ясную физическую картину происходящих процессов, раскрыть механизм потери устойчивости и дать соответствующие практические рекомендации. Например, на основе модели из конечных элементов может быть решена задача об оптимизации профиля пластины при заданном запасе ее динамической устойчивости в сверхзвуковом потоке [104].

## § 12. Круглая пластина. Задача о пьезоизлучателе

Практические потребности расчета пластин произвольной конфигурации вызывают необходимость введения конечных элементов с криволинейными границами. Способы построения подобных элементов, называемых изопараметрическими, широко обсуждаются в литературе [8, 28, 29]. Вместе с тем для некоторых конкретных задач удобно ввести менее универсальные, но значительно более простые элементы. Одной из них является исследование осесимметричных колебаний круглых многослойных пластин. Эта задача может найти практические приложения, например, при расчете пьезоакустических преобразователей дискового типа [82].

Построение кольцевого элемента двуслойной пластины. В осесимметричном случае задачу о колебаниях круглой пластины можно свести к одномерной. Пусть плоскость  $z=0$  в полярной системе координат совмещена со срединной поверхностью нижнего слоя пластины. Разобьем пластину на конечные элементы в виде концентрических колец, связанных между собой по смежным круговым контурам. Для таких элементов узлами являются окружности, ограничивающие кольца в плоскости  $z=0$ . Сече-

ние двуслойного кольца в полярной системе координат изображено на рис. 12.1.

Деформированное состояние элемента схематически показано на рис. 12.2. Сплошная и штриховая линии соответствуют срединным поверхностям нижнего и верхнего слоев, штрих-пунктирная — общей срединной поверхности. Согласно [83]

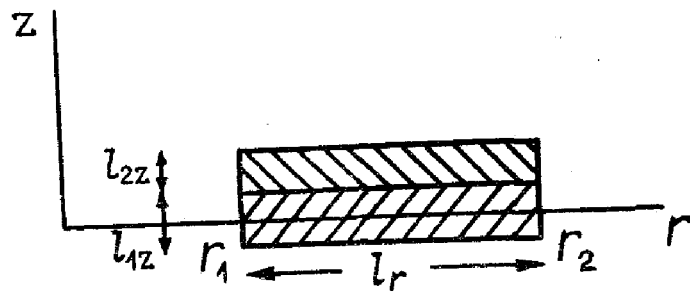


Рис. 12.1

$$h_1 = l_{1z}/2 - z_0, h_2 = l_{2z}/2 + z_0, z_0 = \frac{E_1 l_{1z}^2 - E_2 l_{2z}^2}{2(E_1 l_{1z} + E_2 l_{2z})}. \quad (12.1)$$

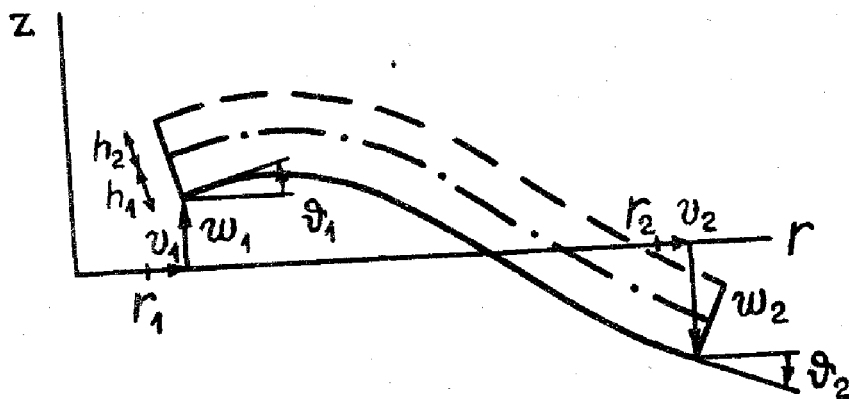


Рис. 12.2

Изгиб двуслойной пластины сопровождается продольной деформацией ее слоев, что является существенным для работы пьезоизлучателя. Поэтому введем в качестве обобщенных координат элемента следующие шесть величин (рис. 12.2)

$$w_1, w_2, v_1 = \left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r_1}, v_2 = \left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r_2}, v_1, v_2$$

В соответствии с этим вектор обобщенных координат

$$\bar{q}^{et} = \{\bar{w}^{et}, \bar{v}^{et}, \bar{v}^{et}\}. \quad (12.2)$$

Сопряженный ему вектор обобщенных сил, приложенных к узловым контурам,

$$\bar{Q}^{et} = \{\bar{P}^{et}, \bar{N}^{et}, \bar{F}^{et}\}, \quad (12.3)$$

Здесь компоненты векторов  $\bar{P}^e$ ,  $\bar{N}^e$ ,  $\bar{F}^e$  суть плотности поперечных сил, изгибающих моментов и продольных сил на единицу длины узловой окружности.

Введем для каждого элемента локальную систему координат  $r = r - r_1$ . В этой системе зададим базисные функции в виде

$$\bar{\psi}^T = \{1, \xi, \xi^2, \xi^3\}, \quad (12.4)$$

здесь  $\xi = r/l_r$ ,  $l_r = r_2 - r_1$ .

Полную систему функций (12.4) используем для аппроксимации поля поперечных перемещений  $w$  и укороченную (из первых двух) — для продольных смещений  $v$ . При этом вектор (12.2) определяет поля  $w$  и  $v$  в любом сечении, параллельном плоскости  $z = 0$ . В частности, поперечное и продольное перемещения в общей срединной поверхности двуслойной пластины

$$w = h_1 + \bar{\psi}^T [d^w] \bar{q}^e, \quad v = \bar{\psi}^T [d^v] \bar{q}^e, \quad (12.5)$$

причем матрицы перехода имеют вид

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_1/l_r & 0 & l_r & 0 & 0 & 0 \\ (r_1^2/l_r^2 - 3) & 3 & -2r_2 & -l_r & 0 & 0 \\ (r_1^3/l_r^3 + 9r_1/l_r + 2) - (9r_1/l_r + 2)(3r_1^2/l_r + 5r_1 + r_2) & (2r_1 + r_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (12.6)$$

$$\eta^v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -h_1(r_1/l_r + 1) & h_1 r_1/l_r & r_1/l_r + 1 & -r_1/l_r \\ 0 & 0 & h_1 & -h_1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Плотность энергии упругой деформации элемента складывается из суммарной энергии изгиба верхнего и нижнего



элев  $u_w$  и энергии продольных деформаций  $u_v$ , т.е.

$$u = u_w + u_v. \quad (12.7)$$

Пользуясь выражениями для энергии в осесимметричном случае [56] и учитывая (12.5), получим матрицу жесткости элемента

$$[K^e] = 2\pi \{ [d^w]^T \int_{r_1}^{r_2} [u^w] r dr [d^w] + [d^v]^T \int_{r_1}^{r_2} [u^v] r dr [d^v] \}, \quad (12.8)$$

$$\text{здесь } [u^w] = (D_1 + D_2 + \frac{E_1 l_1 z h_1^2}{1 - \nu_1^2} + \frac{E_2 l_2 z h_2^2}{1 - \nu_2^2}) \times \\ \times [\frac{d^2 \vec{\psi}}{dr^2} \frac{d^2 \vec{\psi}^T}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{d \vec{\psi}}{dr} \frac{d \vec{\psi}^T}{dr} + \frac{\nu}{r} (\frac{d^2 \vec{\psi}}{dr^2} \frac{d \vec{\psi}^T}{dr} + \frac{d \vec{\psi}}{dr} \frac{d^2 \vec{\psi}^T}{dr^2})], \quad (12.9)$$

$$[u^v] = (\frac{E_1 l_1 z}{1 - \nu_1^2} + \frac{E_2 l_2 z}{1 - \nu_2^2}) [\frac{d \vec{\psi}}{dr} \frac{d \vec{\psi}^T}{dr} + \frac{1}{r^2} \vec{\psi} \vec{\psi}^T + \frac{\nu}{r} (\frac{d \vec{\psi}}{dr} \vec{\psi}^T + \vec{\psi} \frac{d \vec{\psi}^T}{dr})].$$

Отметим, что формулы (12.8), (12.9) теряют смысл при  $r_1 = 0$ . Для построения матрицы жесткости центрального элемента, занимающего особое положение в разбиении, формы прогиба и продольного смещения возьмем в виде

$$w = w_1 + r_1/2(\xi^2 - 1)\nu_1 + h_1; v = \nu_1 \xi - h_1 \xi \nu_1; \xi = r/r_1. \quad (12.10)$$

Они определяются обобщенными координатами  $w_1, \nu_1, \nu_1$ , заданными на внешнем контуре элемента  $r = r_1$ . В центре элемента при этом автоматически выполняются условия  $\partial w / \partial r = 0; v = 0$ , имеющие место в центре непрерывной пластины при осесимметричных деформациях. Формы (12.10) соответствуют системе базисных функций

$$\vec{\psi}^T = \{1, \xi, \xi^2\} \quad (12.11)$$

и матрицам перехода

$$[d^w] = \begin{bmatrix} 1 & -r_1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_1/2 & 0 \end{bmatrix}, [d^v] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (12.12)$$

Учитывая, что в задаче о вынужденных колебаниях все компоненты вектора внешних сил могут быть отличными от нуля, воспользуемся для получения матрицы инерции элемента полной системой базисных функций (12.4) (для центрального элемента - (12.11)). Она вычисляется по формуле

$$[M^e] = 2\pi \left\{ [dw]^T \int_{r_1}^{r_2} \sigma \bar{\psi} \bar{\psi}^T r dr [dw] + [dv]^T \int_{r_1}^{r_2} \sigma \bar{\psi} \bar{\psi}^T r dr [dv] \right\}, \quad (12.13)$$

здесь  $\sigma = l_{1z} \rho_1 + l_{2z} \rho_2$  - масса единицы площади двуслойной пластины.

Формирование матриц жесткости и инерции всей модели из кольцевых элементов выполняется по обычной процедуре, изложенной в гл. 2.

Пример расчета свободных колебаний. Для оценки точности построенной модели рассмотрим свободные колебания круглой однородной пластины, закрепленной по внешнему контуру. В этой задаче продольные смещения не являются динамическими переменными, поэтому на каждом узловом контуре модель имеет две колебательные степени свободы:  $w$  и  $v$ . В табл. 12.1 представлены приведенные частоты первых пяти осесимметричных тонов при различных разбиениях пластины на элементы\*. Там же помещены для сравнения данные, полученные в [42] методом Ритца.

Таблица 12.1  
Приведенные частоты круглой пластины

Число элементов	3	4	5	Частоты
Номер тона	J=4	J=6	J=8	по Ритцу
1	10,234	10,230	10,221	10,216
2	41,197	40,111	39,957	39,771
3	103,46	92,905	90,786	89,104
4	-	176,402	166,49	158,29
5	-	-	267,71	246,89

\* Эти данные предоставил авторам С.А.Христочевский.

Из табл. видно, что сходимость результатов имеет монотонный характер. По первым трем тонам модель из пяти элементов ( $J=8$ ) обеспечивает точность не хуже 2%.

Моделирование пьезоэлектрических сил. Некоторые типы пьезоакустических преобразователей представляют собой круглые двуслойные пластины из металла и пьезокерамики. Металл и керамика склеены таким образом, что между ними отсутствует проскальзывание. Пусть в рассматриваемой модели (рис. 12.1) верхний слой толщины  $l_{2z}$  изготовлен из пьезокерамики, нижний — толщины  $l_{1z}$  — из металла.

Если к керамической пластине в направлении оси OZ приложена э.д.с.  $E$ , то в радиальном направлении возникают осесимметричные электромеханические напряжения. Эти напряжения вызывают изгибные деформации всей пластины [82]. Согласно [82], плотность энергии пьезоэлектрических деформаций имеет вид

$$u_e = -D_e \left\{ \frac{\partial v^{(2)}}{\partial r} + \frac{v^{(2)}}{r} \right\}, \quad (12.14)$$

здесь  $D_e = \frac{E_2}{1-\nu_2} d_{31} E$ ,

$d_{31}$  — модуль поперечного пьезоэффекта,

$v^{(2)}$  — продольное смещение срединной поверхности керамического слоя.

Подставляя в (12.14) выражение (12.5) и интегрируя по площади элемента, получим полную энергию пьезоэлектрических деформаций

$$U_e^e = -2\pi D_e \bar{q}^T [d^v]^T \int_{r_1}^{r_2} \left( \frac{d\bar{\psi}}{dr} + \frac{\bar{\psi}}{r} \right) r dr.$$

При этом в матрице  $[d^v]$ , взятой по (12.6) или по (12.12),  $h_1$  следует заменить на расстояние между срединными поверхностями верхнего и нижнего слоев  $h = h_1 + h_2$ .

Вариация  $\delta U_e^e$  равна с противоположным знаком работе узловых пьезоэлектрических сил  $\bar{Q}_e^e$  на виртуальном перемещении  $\delta \bar{q}^{eT}$ . Отсюда

$$\bar{Q}_e^e = 2\pi D_e [d^v]^T \int_{r_1}^{r_2} \left( \frac{d\bar{\psi}}{dr} + \frac{\bar{\psi}}{r} \right) r dr.$$

После несложных вычислений получаем

$$\bar{Q}_e^{eT} = 2\pi D_e \{0, 0, hr_1, -hr_2, -r_1, r_2\}. \quad (12.15)$$

Для центрального элемента  $\bar{Q}_e^{et} = 2\pi D_e \{0, -hr_1, r_1\}$ . Сравнивая (12.15) с (12.3) видим, что распределенные пьезоэлектрические напряжения, возникающие в слое керамики, в результате сведены к узловым изгибающим моментам и продольным силам, приложенным к срединной поверхности металлического слоя.

Модель пьезоакустического преобразователя. Поперечное сечение двуслойного пьезоакустического преобразователя изображено на рис. 12.3. Керамический диск обычно имеет меньший диаметр, чем металлический; контур последнего закреплен. Разбиение на элементы естественно производить так, чтобы один из узловых контуров модели совпал с границей керамического диска. Тот факт, что в качестве координатной плоскости ( $z = 0$ ) выбрана срединная поверхность недеформированной металлической пластины, обеспечивает одинаковую запись условий сопряжения на всех узловых контурах модели.

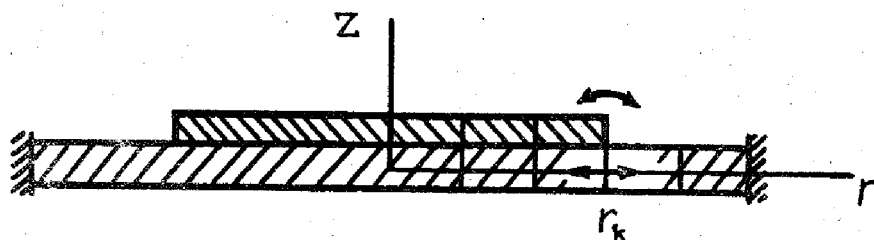


Рис. 12.3

Из выражения (12.15) видно, что компоненты вектора пьезоэлектрических сил, действующих на модель, во всех узлах обращаются в нуль. Исключение составляет лишь узловой контур, совпадающий с краем керамики. На этом контуре приложена продольная сила  $F_e^{(k)} = 2\pi \frac{E_2}{1-\nu_2} d_{31} E r_k$  и изгибающий момент  $N_e^{(k)} = -F_e^{(k)} h$ . Если на пьезокерамику подана гармоническая э.д.с.  $E = E_0 \exp(ipt)$ , то под действием этих двух обобщенных сил модель совершает вынужденные колебания на частоте  $p$ . Распределение амплитуд при этом находится из решения системы алгебраических уравнений

$$(-p^2[M] + [K])\bar{q} = \bar{Q}_{eo}.$$

## ГЛАВА 4

### ЗАДАЧИ САМОВОЗДЕЙСТВИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКЕ

При изучении распространения волн в слабонелинейной диспергирующей среде обычно используется спектральный подход. Решение волнового уравнения представляется суперпозицией взаимодействующих волн, амплитуды которых мало меняются за период колебаний и на расстояниях порядка длины волны. Такое приближение позволяет получить для комплексных амплитуд волны систему укороченных уравнений. К исследованию уравнений для медленно меняющихся амплитуд сводятся задачи генерации высших гармоник, параметрического взаимодействия, самовоздействия ограниченных пучков и пакетов волн [84]. В частности, задача самовоздействия описывается так называемым нелинейным "параболическим" уравнением, которое для многих практических случаев решается только численно.

Самовоздействие световых пучков связано с изменением показателя преломления в поле световой волны. Зависимость показателя преломления от интенсивности электрического поля  $E$  может быть вызвана эффектом Керра, электрострикцией, нагревом среды. Если  $\partial n / \partial (E^2) > 0$ , то нелинейная рефракция приводит к самофокусировке пучка, если  $\partial n / \partial (E^2) < 0$  — к дефокусировке [85]. Электронный и ориентационный эффекты Керра наиболее сильно проявляются в жидкостях. Время установления этих эффектов не превышает соответственно  $10^{-15}$  и  $10^{-12}$  с. Поэтому при анализе явлений самовоздействия, вызванных эффектом Керра, можно рассматривать показатель преломления как функцию мгновенного значения интенсивности ( $E^2$ ) в каждой точке среды [86].

Тепловое самовоздействие связано с зависимостью показателя преломления от температуры в канале пучка. Рас-

пределение температуры определяется коэффициентом поглощения среды, распределением интенсивности, ее величиной, а также температуропроводностью среды. Процесс теплового самовоздействия существенно нелокален. Для его анализа необходимо совместно решать нелинейное параболическое уравнение для амплитуды поля и уравнение теплопроводности для среды [87]. В обычных условиях температура в канале пучка зависит также от поперечного перемещения среды, что приводит к отклонению пучка и искажению его профиля [88]. В импульсном режиме может оказаться существенным изменение плотности среды, вызываемое звуковой волной, если длительность импульса сравнима со временем ее распространения поперек пучка. Наоборот, при большой длительности импульса возможно развитие конвективных потоков. Таким образом, проблема теплового самовоздействия охватывает широкий круг явлений массо- и теплопереноса в канале пучка.

Для исследования частных случаев этой проблемы привлекаются различные численные методы, в основном методы конечных разностей и сплайнов (см., например, [86, 89–91]). Прямое использование перечисленных методов приводит к большому объему информации, которая должна храниться в памяти ЦВМ, особенно при решении нестационарных задач. Поэтому представляет интерес построение расчетных схем повышенного порядка точности.

В настоящей главе рассматривается возможность применения метода конечных элементов к решению задач самовоздействия. Вначале дается вариационная формулировка задачи с помощью функции Лагранжа, а также на основе концепции локального потенциала. Затем метод иллюстрируется на примерах осевой самофокусировки в среде с керровской нелинейностью. Здесь рассматривается простая модель из конечных элементов, а также модель повышенной точности, в которой используется идея редуцирования динамических координат. Наконец, в § 15 излагается более общая модель из прямоугольных элементов, пригодная для решения задач без осевой симметрии.

### § 13. Вариационная формулировка

Распространение электромагнитных волн в нелинейной среде описывается волновым уравнением [92]

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{\mathbf{E}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{D}}}{\partial t^2} = 0 \quad (13.1)$$

здесь  $c$  — скорость света в вакууме.

Уравнение среды, связывающее индукцию  $\bar{\mathbf{D}}$  и напряженность  $\bar{\mathbf{E}}$ , для изотропного случая можно представить в виде

$$\bar{\mathbf{D}} = \epsilon(\bar{\mathbf{E}}, \rho) \bar{\mathbf{E}}. \quad (13.2)$$

Диэлектрическая проницаемость  $\epsilon(\bar{\mathbf{E}}, \rho)$  является нелинейным функционалом от напряженности поля  $\bar{\mathbf{E}}$  и плотности среды  $\rho$ .

Если нелинейность среды определяется эффектом Керра, и изменение плотности  $\rho$  за счет нагрева среды и электрострикции пренебрежимо мало, то

$$\bar{\mathbf{D}}(\bar{\mathbf{E}}) = \epsilon_0 \bar{\mathbf{E}} + \epsilon_2 E^2 \bar{\mathbf{E}}, \quad \epsilon_2 > 0. \quad (13.3)$$

Здесь  $\epsilon_0, \epsilon_2$  — первые коэффициенты разложения диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  в ряд по интенсивности поля  $I \sim |\bar{\mathbf{E}}|^2$ . Вообще,  $\epsilon_0$  и  $\epsilon_2$  являются комплексными; их мнимые части определяют соответственно линейное и нелинейное поглощение среды. Его величина обычно невелика и при исследовании задач самовоздействия изменением амплитуды поля, связанным непосредственно с поглощением, пренебрегают. Обусловленное им уменьшение амплитуды учитывают после получения решения.

Если нелинейность среды связана с изменением плотности, вызванным нагревом среды при поглощении излучения, то [87]

$$\bar{\mathbf{D}}(\bar{\mathbf{E}}) = \epsilon_0 \bar{\mathbf{E}} + \frac{\partial \epsilon}{\partial T} T \bar{\mathbf{E}}. \quad (13.4)$$

Отклонение температуры  $T$  от равновесной определяется уравнением теплопроводности, при записи которого предполагается, что поток тепла вдоль оси пучка пренебрежимо мал

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \kappa \Delta T + aI, \quad (13.5)$$

где  $c_p, \kappa$  — теплоемкость, теплопроводность среды,

$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$  — субстанциональная производная,

$V$  – скорость поперечного переноса среды, направление движения которой принято по оси  $OX$ ,  
 $\Delta$  – оператор Лапласа по координатам, лежащим в плоскости, перпендикулярной оси пучка,  
 $\alpha$  – коэффициент однофотонного поглощения.

Если режим импульсный и определяющим является изменение плотности, возникающее при звуковых колебаниях, то уравнение среды рассматривается совместно с волновым для плотности  $\rho$

$$\left(\frac{D^2}{Dt^2} - \alpha_0^2 \Delta\right) \left(\frac{D\rho}{Dt}\right) = \left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right) \alpha \Delta I; \quad (13.5a)$$

здесь  $\alpha_0$  – скорость звука в невозмущенной среде.

Пусть пучок распространяется вдоль оси  $OZ$ . Представим решение системы (13.1), (13.2) в виде [85]

$$\bar{E}(\bar{r}, t) = \frac{1}{2} \bar{e} C(\mu z, \sqrt{\mu} x, \sqrt{\mu} y) \exp(i\nu) + \text{комплексно сопряженное слагаемое.} \quad (13.6)$$

Здесь  $C$  – комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля;  $\mu$  – малый параметр, который характеризует медленную зависимость амплитуды  $C$  от координат по сравнению с гармоническим множителем (при этом зависимости  $C$  от поперечных координат  $x, y$  является более "сильной", чем от продольной  $z$ );

$\bar{e}$  – вектор, совпадающий с направлением линейной поляризации поля;

$\nu = \omega t - \bar{k}\bar{r}$  – фаза гармонического множителя;

$\bar{k}$  – волновой вектор, модуль которого  $k = \omega/c$ ;

$\bar{r}(x, y, z)$  – радиус-вектор в точку наблюдения, для которого можно считать  $\frac{\partial \bar{r}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} \sim \mu, \frac{\partial \bar{r}}{\partial z} \sim 1$ .

Если подставить (13.6) в систему (13.1), (13.2) и ограничиться членами первого порядка малости по  $\mu$ , то получится приближенное уравнение для комплексной амплитуды

$$2ik \frac{\partial C}{\partial z} = \Delta C + k^2 \frac{\epsilon_2(|C|^2, \rho)}{\epsilon_0} C. \quad (13.7)$$

Это уравнение описывает в параболическом приближении процесс распространения ограниченного пучка в нелинейной среде с учетом дифракции. Начальными условиями для уравнения (13.7) являются амплитудный и фазовый профи-



ли пучка на входе в среду. Граничное условие записывается в виде  $C \rightarrow 0$  при  $x, y \rightarrow \pm\infty$ .

В случае среды с керровской нелинейностью, когда  $\rho = \text{const}$ , решение уравнения (13.7) дает изменение комплексной амплитуды  $C$  в процессе самофокусировки. Заметим, что уравнение (13.7) получено в предположении о медленности изменения амплитуды поля по оси  $z$  ( $\partial C / \partial z \sim \mu$ ). Поэтому для пучков большой интенсивности в окрестности фокуса с малой перетяжкой это уравнение теряет смысл. В случае теплового самовоздействия уравнение (13.7) решается совместно с уравнениями среды (13.5) либо (13.5а). Получаемая таким образом система дополняется начальными и граничными условиями для распределения параметров в среде при  $t = 0$  и  $x, y \rightarrow \pm\infty$ .

Получим вариационную формулировку задачи самовоздействия для ограниченного пучка. Рассмотрим вначале среду с керровской нелинейностью. Лагранжиан для электромагнитного поля

$$S = \frac{1}{8\pi} \int dv \{ \epsilon_0 (\bar{E}\bar{E}) + \frac{1}{2} \epsilon_2 E^2 (\bar{E}\bar{E}) - (\bar{H}\bar{H}) \}, \quad (13.8)$$

где  $\bar{H}$  — напряженность магнитного поля. Варьируемыми функциями, т.е. координатами системы являются компоненты векторного потенциала  $\bar{A}$

$$\bar{H} = \text{rot} \bar{A}, \quad \bar{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}. \quad (13.9)$$

Можно убедиться, что условие стационарности функционала  $S$  эквивалентно уравнению (13.1) [92].

Непосредственное использование функционала (13.8) в методе конечных элементов невозможно, так как  $S$  выражается через функции, быстро меняющиеся в пространстве и во времени. Преобразуем  $S$  на основе адиабатического приближения Уизема [93, 94], суть которого состоит в следующем. Согласно представлению (13.6) в функционал  $S$  входят слагаемые, которые периодичны по  $\nu$  с периодом  $2\pi$ . На этом интервале амплитуда волны  $C$  и волновой вектор  $\bar{k}$  получают незначительные приращения; изменение  $S$  в пространстве в основном определяется зависимостью от  $\nu$  экспоненциального множителя. Поэтому можно усреднить функционал  $S$  по  $\nu$  на интервале от 0 до  $2\pi$ , полагая "медленные" параметры волны постоянными.

Подставим напряженность  $\vec{E}$  в виде (13.6) в лагранжиан (13.8) и используем соотношения (13.9). После пренебрежения членами порядка  $\mu^2$  получим

$$S = \frac{1}{32\pi} \int dv \left\{ \frac{\epsilon_2}{4} CC^* (C^2 e^{2i\nu} + 2CC^* + C^{*2} e^{-2i\nu}) + \mu \frac{\epsilon_0}{k^2} (\Delta C e^{2i\nu} + \Delta C^* e^{-2i\nu} - 2 \text{grad} C \text{grad} C^* - 2ik(C \frac{\partial C}{\partial z} e^{2i\nu} + C^* \frac{\partial C^*}{\partial z} e^{-2i\nu} + C^* \frac{\partial C}{\partial z} - C \frac{\partial C^*}{\partial z}) \right\}.$$

Отсюда усредненный по  $\nu$  лагранжиан  $\langle S \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S d\nu$  равен\*

$$\langle S \rangle = \frac{1}{16\pi k} \int dv \left\{ ik(C \frac{\partial C^*}{\partial z} - C^* \frac{\partial C}{\partial z}) - \text{grad} C \text{grad} C^* + \frac{1}{2} \frac{k^2 \epsilon_2}{\epsilon_0} C^2 C^{*2} \right\}. \quad (13.10)$$

Функционал  $\langle S \rangle$  определен на комплексных амплитудах поля  $C$  и  $C^*$ , являющихся "медленными" функциями координат. При этом  $\langle S \rangle$  — действительная величина. Нетрудно видеть, что из экстремальности  $\langle S \rangle$  следует укороченное уравнение (13.7) для амплитуды  $C$  либо для  $C^*$ . При этом учитывается, что  $\delta C = 0$  на концах интервала интегрирования по  $z$ . Таким образом, для среды с керровской нелинейностью получена вариационная формулировка задачи самофокусировки в параболическом приближении. В этой задаче, где нелинейность определяется локальным значением напряженности  $\vec{E}$ , неизвестной является только комплексная амплитуда  $C(x, y, z)$ , либо две функции — амплитудный профиль  $|C(x, y, t)|$  и фазовый  $\arg C(x, y, t)$ . Подобная формулировка использована в [95] для вывода уравнений относительно параметров пучка гауссового профиля, аналогичных уравнениям в приосевом приближении.

В случае тепловой дефокусировки воспользуемся принципом локального потенциала (см. гл. 1). Для решения системы (13.1), (13.5) в параболическом приближении построим два функционала

$$\langle S[C, C^*, T^0] \rangle \quad \text{и} \quad \Phi[T, T^0, C^0, C^{*0}],$$

---

\* В формуле (13.10)  $x, y, z$  заменены на  $\sqrt{\mu} x, \sqrt{\mu} y, \mu z$ .

определенных на следующих функциях: неизвестной температуре среды  $T$ , амплитудах поля  $C, C^*$  и, кроме того, на усредненных по отклонениям  $T^0, C^0, C^{*0}$ .

$$\begin{aligned} \langle S \rangle = & \frac{1}{16\pi k} \int dv \left\{ ik \left( C \frac{\partial C^*}{\partial z} - C^* \frac{\partial C}{\partial z} \right) - \right. \\ & \left. - \text{grad} C \text{grad} C^* + \frac{k^2 \epsilon_2(\rho(T^0))}{\epsilon_0} C C^* \right\}, \end{aligned} \quad (13.11)$$

$$\Phi = \int dv \left\{ \kappa (\text{grad} T)^2 + \rho c_p \frac{DT^0}{Dt} T - a \frac{c \sqrt{\epsilon_0}}{8\pi} C^0 C^{*0} T \right\}.$$

Условие одновременной стационарности функционалов  $\langle S \rangle$  и  $\Phi$  на варьируемых функциях  $C^0, C^*, T$  и неизменных  $C^0, C^{*0}, T^0$  с последующим наложением условий

$$C^0 = C, C^{*0} = C^*, T^0 = T, \quad (13.12)$$

приводит к системе уравнений (13.5), (13.7). При этом  $\epsilon_2$  зависит только от  $\rho(T)$ .

Очевидно, что локальный потенциал можно записать и для задачи самофокусировки в керровской среде. В этом случае в функционале  $\langle S \rangle$  (13.10) нелинейная зависимость будет выражаться через неварьируемые амплитуды, т.е. через  $\epsilon_2(C^0, C^{*0})$ .

#### § 14. Осесимметричный случай

Рассмотрим стационарную задачу о самофокусировке осесимметричного пучка в среде с керровской нелинейностью. Пусть на границе среды  $z=0$  задано распределение комплексной амплитуды  $C(r, 0)$ , такое, что при  $r \rightarrow \infty$   $C(r, 0) \rightarrow 0$ . Запишем локальный потенциал  $\langle S \rangle$  в безразмерных цилиндрических координатах

$$r' = r/\sigma_0, \quad z' = z/k\sigma_0^2,$$

$\sigma_0$  — эффективный радиус пучка на входе в среду. Кроме того, удобно ввести безразмерную амплитуду  $C' = C/\sqrt{I_0}$ , где  $I_0$  — некоторая интенсивность, например, на оси пучка. Тогда\*

$$\langle S \rangle \sim \int_0^z dz \int_0^\infty r dr \left\{ i \left( C \frac{\partial C^*}{\partial z} - C^* \frac{\partial C}{\partial z} \right) - \left( \frac{\partial C}{\partial r} \frac{\partial C^*}{\partial r} \right) + \Theta |C|^2 C C^* \right\}, \quad (14.1)$$

\* Здесь и далее штрихи у безразмерных величин опущены.

здесь  $\Theta = (R_d/R_n)^2$ ,  $R_d = k\sigma_0^2/2$ ,  $R_n = \sigma_0 \sqrt{(\epsilon_0/\epsilon_2 I_0)}/2$ .

Параметр  $R_d$  можно интерпретировать как фокусное расстояние рассеивающей линзы, эквивалентной дифракции,  $R_n$  — собирающей, эквивалентной нелинейной рефракции [85].

Разобьем плоскость  $z = \text{const}$  на элементы, имеющие форму концентрических колец (см. § 12). Узлами таких элементов являются окружности, их разделяющие, а обобщенными координатами — значения комплексной амплитуды  $C$  и, возможно, ее радиальных производных на узловых окружностях. Поле внутри элемента представим в виде

$$C^e(\xi, z) = \bar{\psi}^T(\xi)[d]\bar{q}^e(z). \quad (14.2)$$

Базисные функции  $\bar{\psi}(\xi)$  записаны в безразмерных координатах  $\xi$  и являются действительными.

Они должны удовлетворять требованиям, сформулированным в § 2. Заметим, что условие конечности функционала  $\langle S \rangle$  накладывает дополнительные ограничения на базисные функции центрального элемента ( $r \in [0, r_1]$ ), а также периферийного, у которого  $r$  меняется от  $r_N$  до  $\infty$ .

Следуя § 4, подставим аппроксимацию решения на отдельных элементах (14.2) в функционал (14.1). После замены интегрирования по всей области суммой интегралов по отдельным элементам, получим

$$\begin{aligned} \langle S \rangle \sim \int_0^z dz \{ i(\dot{\bar{q}}^T[M]\dot{q}^* - \dot{q}^{*T}[M]\dot{\bar{q}}) + \frac{1}{2}(\dot{\bar{q}}^T[H]q^* + q^{*T}[H]\dot{\bar{q}} + \\ + \frac{\Theta}{2}(\dot{\bar{q}}^T[R(\dot{q}^0, \dot{q}^{*0})]\dot{q}^* + \dot{q}^{*T}[R(\dot{q}^0, \dot{q}^{*0})]\dot{\bar{q}}) \}, \end{aligned} \quad (14.3)$$

$\bar{q}$  — вектор координат модели. Первые два слагаемых функционала  $\langle S \rangle$  являются билинейными формами комплексных координат  $\bar{q}$  и сопряженных им  $\bar{q}^*$ . В последнем слагаемом (14.3) для практических приложений удобно выделить матрицу  $[R]$ , элементы которой являются функциями координат  $\dot{q}^0$ .

Матрицы  $[M]$ ,  $[H]$ ,  $[R]$  формируются (см. § 6) из соответствующих матриц отдельных элементов, имеющих вид

$$[M_n^e] = [d]^T \int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} \bar{\psi} \bar{\psi}^T \xi d\xi [d],$$

$$\begin{aligned}
[H_n^e] &= -[d]^T \int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} \frac{d\bar{\psi}}{d\xi} \frac{d\bar{\psi}^T}{d\xi} \xi d\xi [d], \\
[R_n^e] &= [d]^T \int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} |C|^2 \bar{\psi} \bar{\psi}^T \xi d\xi [d].
\end{aligned}
\tag{14.4}$$

Вычислим вариацию потенциала  $\langle S \rangle$  по  $q$ . Затем приравняем ее нулю и положим, что  $\bar{q}^0 = \bar{q}$ ,  $\bar{q}^{*0} = \bar{q}^*$ ; в результате получим матричное уравнение, описывающее изменение по  $z$  обобщенных координат модели

$$2i[M]\dot{\bar{q}} = [H]\bar{q} + \Theta[R(\bar{q})]\bar{q}. \tag{14.5}$$

Интегрируя систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений (14.5), например методом Рунге-Куты, можно найти узловые координаты и исследовать изменение профиля пучка в зависимости от  $z$ .

Простая модель\*. Возьмем в качестве базисных функций систему фундаментальных решений уравнения Лапласа на плоскости

$$\bar{\psi}^T(\xi) = \{1, \ln \xi\}, \quad \xi = r/r_n. \tag{14.6}$$

Обобщенными координатами являются значения комплексной амплитуды в узлах

$$\bar{q}^e(z) = \{C_n, C_{n+1}\}.$$

В этом случае матрица преобразования координат

$$[d_n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{S_n} & \frac{1}{S_n} \end{bmatrix}, \quad S_n = \ln(r_{n+1}/r_n).$$

Матрица дифракции  $n$ -ного элемента

$$[H_n^e] = \frac{1}{S_n} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Если для получения матрицы релаксации взята система базисных функций (14.6), то

\* Данная модель рассмотрена Н.Ф.Анисимовой.

$$[M_n^e] = \begin{bmatrix} r_{n+1}^2 - r_n^2 - 2m + m_{22} & m - m_{22} \\ m - m_{22} & m_{22} \end{bmatrix},$$

где  $m = (r_{n+1}^2 s_n - (r_{n+1}^2 - r_n^2)/2)/2s_n$ ,

$$m_{22} = \bar{s}_n^{-2} (r_{n+1}^2 s_n (s_n - 1) + (r_{n+1}^2 - r_n^2)/2)/2.$$

При вычислении матрицы нелинейной рефракции положим, что модуль амплитуды  $C$  на элементе является постоянным и равен среднему арифметическому узловых значений, тогда

$$[R_n^e] = \frac{1}{2} (|C_n|^2 + |C_{n+1}|^2) [M_n^e].$$

Для центрального элемента целесообразно выбрать

$$\bar{\psi}_1(\xi) = \{1, \xi^2\}, \bar{q}_1^e = \{C_0, C_1\}.$$

Видно, что такие функции обеспечивают не только конечность функционала  $\langle S \rangle$  при  $r = 0$ , но и удовлетворяют граничному условию  $\partial C / \partial r|_{r=0} = 0$ . На периферийном элементе  $C(r, z)$  однозначно определяется координатой  $q_N = C_N$ , поэтому достаточно одной базисной функции

$$\psi_{N+1}(\xi) = \xi^{-2}, [M_{N+1}^e] = 2r_N^2; [H_{N+1}^e] = \frac{3}{4}; [R_{N+1}^e] = \frac{1}{2} |C_{N+1}|^2 r_N^2.$$

В задаче самофокусировки целесообразно использовать неравномерное разбиение на элементы, уменьшая их размер по мере приближения к оси пучка. Для базисных функций (14.6) удобно взять закон изменения радиуса узловых окружностей

$$r_{n+1}/r_n = e^a, a = \frac{1}{N} \ln(r_N/r_1).$$

Тогда выражения для матриц модели существенно упрощаются. Например,  $j$ -тая строка матрицы дифракции

$$H(j) = \frac{1}{a} (0, \dots, 0, 1, -2, 1, 0, \dots, 0).$$

Оценим погрешность аппроксимации построенной модели в линейном случае ( $\Theta = 0$ ). Для простоты возьмем

матрицу релаксации диагональной, такой, что ее элементы

$$M(j, j) = m(j, j)/a, \quad m(j, j) = (r_{j-1} r_j - 2r_j^2 + r_{j+1} r_j).$$

Запишем  $j$ -е уравнение системы (14.5) с помощью конечно-разностных операторов

$$-\Delta^2 C_j + m(j, j) \dot{C}_j = 0.$$

Нетрудно показать, что полученная расчетная схема имеет порядок аппроксимации  $O(a^2)$ , т.е. погрешность убывает как  $N^{-2}$ .

Для иллюстрации построенной схемы рассмотрим задачу о развитии возмущения на фоне плоской волны [91]. Пусть при  $z = 0^*$

$$C(r, 0) = 1 + 0.1 \exp(-r^2/\sigma_0^2),$$

На рис. 14.1 изображено изменение модуля амплитуды  $|C(o, z)|$  на оси пучка ( $\sigma_0 = 3$ ). (Модель состоит из 15 элементов,  $a = \frac{1}{15} \ln 35$ .) На том же рис. точки соответствуют данным [91]. Видно, что простая модель даже при сравнительно малом числе координат вполне удовлетворительно воспроизводит процесс самофокусировки.

Модель повышенной точности. Аппроксимируем комплексную амплитуду на элементе кубическим полиномом. Для этого возьмем

$$\tilde{\psi}^T(\xi) = \{1, \xi, \xi^2, \xi^3\}, \quad \xi = \frac{r_{n+1} - r}{l_n}, \quad l_n = r_{n+1} - r_n. \quad (14.7)$$

Пусть обобщенными координатами являются значения амплитуды и ее радиальных производных на узловых окружностях

$$\vec{q}_n^e = \{C_n, C'_n, C_{n+1}, C'_{n+1}\}, \quad C'_n = \left. \frac{\partial C}{\partial r} \right|_{r=r_n}. \quad (14.8)$$

Матрица  $[d]$ , размерностью  $4 \times 4$ , совпадает с введенной ранее (§ 6). При построении конечного элемента будем

---

\* При  $r > r_N$  положим  $C(r, 0) = r^{-2}$ .

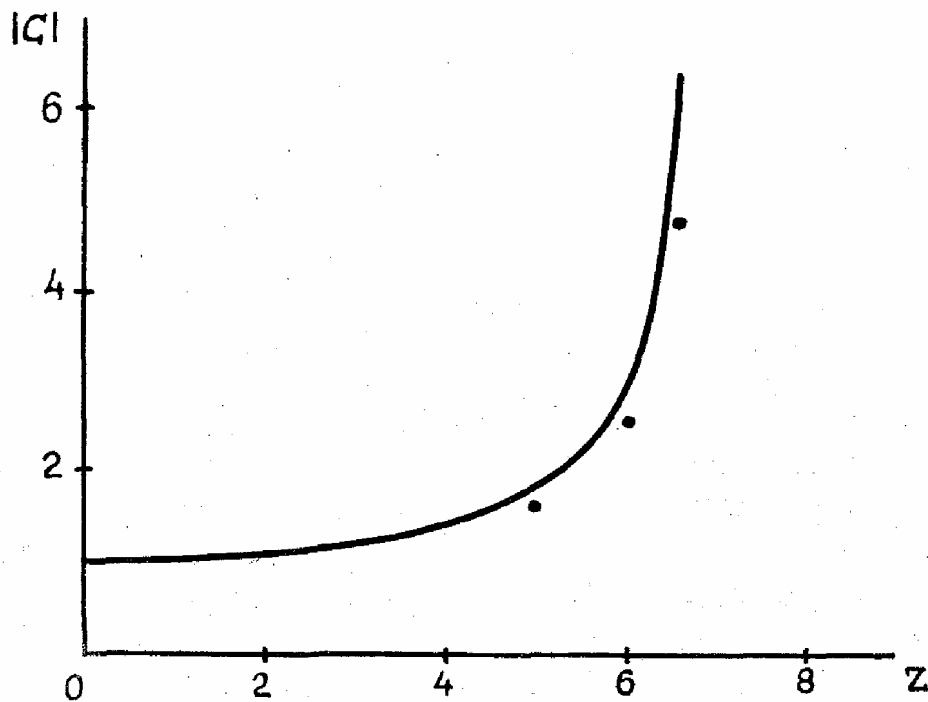


Рис. 14.1

пользоваться процедурой Галеркина. В этом случае нет необходимости в составлении функционала, эквивалентного данному нелинейному уравнению. Подставив выражение для комплексной амплитуды поля на элементе (14.2), (14.7), (14.8) в исходное уравнение (13.7), получим невязку

$$\delta(\xi) = 2i\bar{\psi}^T[d]\dot{\bar{q}}_n^e - \Delta\bar{\psi}^T[d]\bar{q}_n^e - \Theta f, \quad (14.9)$$

здесь  $f = |C|^2 C$ . Нелинейный член  $f$  в пределах элемента для простоты считаем постоянным. Потребуем ортогональности невязки  $\delta(\xi)$  к координатным функциям. Полученную систему уравнений можно записать в следующем виде

$$\delta\bar{q}_n^{e*} \{2i[M_n^e]\dot{\bar{q}}_n^e - [N_n^e]\bar{q}_n^e - \bar{F}_n^e\} = 0, \quad (14.10)$$

здесь

$$[M_n^e] = [d]^T \int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} \bar{\psi}\bar{\psi}^T \xi d\xi [d] \quad (14.11a)$$

матрица релаксации размерностью  $4 \times 4$ ,

$$\bar{F}_n^e = f[d]^T \int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} \bar{\psi} \xi d\xi \quad (14.11b)$$



— вектор, соответствующий нелинейной рефракции на элементе.

Воспользовавшись формулой интегрирования по частям, матрицу  $[H_n^e]$  приведем к виду

$$[H_n^e] = [d]^T \left( \xi \bar{\psi} \frac{d\bar{\psi}}{d\xi} \right) \bigg|_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} - \int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} \frac{d\bar{\psi}}{d\xi} \frac{d\bar{\psi}^T}{d\xi} \xi d\xi [d]. \quad (14.11b)$$

Таким образом, выделена симметричная часть матрицы  $[H_n^e]$  и члены, зависящие от значений базисных функций и их производных на узловых окружностях.

Матрица

$$[M_n^e] = \frac{l_n^2}{840} \begin{bmatrix} 312s_n - 240 & 108s_n - 54 & 44s_n - 30 & -26s_n + 14 \\ & 312s_n - 72 & 26s_n - 12 & -44s_n + 14 \\ & & 8s_n - 5 & -6s_n + 3 \\ & & & 8s_n - 3 \end{bmatrix},$$

симметрично

симметричная составляющая матрицы  $[H_n^e]$

$$[H_n^e] = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} -36s_n + 18 & 36s_n - 18 & -33s_n + 30 & -3s_n + 3 \\ & -36s_n + 18 & 3s_n & 33s_n - 3 \\ & & -4s_n + 3 & s_n - 1/2 \\ & & & -4s_n + 1 \end{bmatrix},$$

симметрично

где  $s_n = r_{n+1}/l_n$ .

В пределах центрального элемента введем параболическую аппроксимацию

$$C_o^e(\xi, z) = \{1, \xi^2\} [d_o] \bar{q}_o^e, \quad \bar{q}_o^{eT} = \{C_1, C_1'\}.$$

Такой элемент обеспечивает конечность невязки  $\delta(\xi)$  при  $\xi = 0$  и удовлетворяет граничному условию на оси пучка.

Далее, как обычно, образуем модель сечения пучка. Геометрические условия сопряжения состоят в непрерывности амплитуды поля и ее первой производной по радиусу на контурах, разделяющих элементы. Отметим, что при формировании матрицы  $[H]$  члены  $[H_n^e]$ , зависящие от значений базисных функций и их производных на узловых окружностях (14.11в), взаимно уничтожаются. Таким образом, выражения для матриц релаксации и дифракции модели, полученные путем непосредственного применения метода Галеркина и с помощью варьирования функционала (14.1), совпадают.

На внешнем контуре  $r = r_{N+1}$  потребуем выполнения граничных условий  $C_{N+1} = C'_{N+1} = 0$ . Уравнение, описывающее распространение пучка, запишем с учетом блочной структуры матриц модели

$$\delta \bar{q}^T \left\{ 2i \begin{bmatrix} M_{\alpha\alpha} & M_{\alpha\alpha'} \\ M_{\alpha'\alpha} & M_{\alpha'\alpha'} \end{bmatrix} \bar{q} - \begin{bmatrix} H_{\alpha\alpha} & H_{\alpha\alpha'} \\ H_{\alpha'\alpha} & H_{\alpha'\alpha'} \end{bmatrix} \bar{q} - \bar{F} \right\} = 0, \quad (14.12)$$

здесь

$$\bar{q}^T = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N, \alpha'_1, \dots, \alpha'_N\} + i\{b_1, \dots, b_N, b'_1, \dots, b'_N\},$$

$$\alpha_n = \operatorname{Re} C_n, \quad b_n = \operatorname{Im} C_n, \quad \alpha' = \operatorname{Re} \frac{\partial C}{\partial r} \Big|_n, \quad b' = \operatorname{Im} \frac{\partial C}{\partial r} \Big|_n.$$

В уравнении (14.12) динамическими переменными являются значения комплексной амплитуды и ее радиальных производных в узлах. Все блоки — симметричные, трехдиагональные; их размерность  $N \times N$ .

Для уменьшения числа динамических переменных (см. § 5) наложим дополнительные связи на координаты, потребовав непрерывности второй производной амплитуды поля  $C''(r, z)$  на узловых окружностях. В результате получим линейные уравнения, связывающие значения комплексной амплитуды и ее первых производных. При равномерном разбиении на элементы ( $l_n = \text{const}$ ) они запишутся следующим образом:

$$3(C_{n+1} - C_{n-1}) = l(C'_{n+1} + 4C'_n + C'_{n-1}), \quad n = 2, 3, \dots, N-1;$$

$$\begin{aligned} 3(C_2 - C_1) &= l(C_2' + \frac{5}{2} C_1'), \\ -3C_{N-1} &= l(4C_N' + C_{N-1}'). \end{aligned} \quad (14.13)$$

Разрешим эту систему относительно  $\bar{C}'^T = \{\alpha_1', \dots, \alpha_N'\} + i\{b_1', \dots, b_N'\}$

$$\bar{C}' = [\Gamma] \bar{C}, \quad (14.14)$$

здесь  $[\Gamma]$  — числовая матрица, размерностью  $N \times N$ . Используя (14.14), перейдем в уравнении (14.12) от координат  $\bar{q}$  к координатам  $\bar{C}$

$$\bar{q} = [I] \bar{C}, \quad \delta \bar{q}^{*T} = \delta \bar{C}^{*T} [I \Gamma^T], \quad \bar{C}^T = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\} + i\{b_1, \dots, b_N\} \quad (14.15)$$

здесь  $[I]$  — единичная матрица. Подставляя (14.15) в (14.12), после некоторых преобразований получим уравнение

$$2i[\tilde{M}] \ddot{\bar{C}} = [\tilde{H}] \bar{C} + \tilde{F}, \quad (14.16)$$

здесь матрицы  $[\tilde{M}]$ ,  $[\tilde{H}]$  имеют размерность  $N \times N$ , симметричны и вычисляются по правилу

$$\begin{aligned} [\tilde{M}] &= [M_{\alpha\alpha}] + [M_{\alpha\alpha}][\Gamma] + [\Gamma]^T [M_{\alpha'\alpha'}]^T + [\Gamma]^T [M_{\alpha'\alpha'}][\Gamma], \\ \tilde{F} &= [I][\Gamma^T] F. \end{aligned}$$

Матрица  $[\tilde{H}]$  определяется аналогично.

В линейном случае можно оценить погрешность аппроксимации предлагаемой схемы. Из теории сплайнов известно [9], что если решение исходной задачи  $C_0(r, z)$  имеет непрерывные производные до четвертого порядка включительно, то использование кубических сплайнов обеспечивает точность аппроксимации для производных порядка  $\alpha$

$$|C^\alpha - C^\alpha| \leq K |l_n|^{4-\alpha}, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3, 4, \quad (14.17)$$

здесь  $l_n$  — максимальный размер элемента,  $K$  — некоторая постоянная. Из выражения (14.17) и явного вида функционала для линейной задачи ((14.1) при  $\Theta = 0$ ) следует, что отклонение приближенного решения от точного по норме функционала  $\langle S \rangle$  имеет порядок  $O(l_n^3)$ , т.е. погрешность убывает как  $N^{-3}$ .

Для практической оценки точности развитой методики рассмотрим линейную задачу ( $\Theta = 0$ ) о дифракции гауссова

пучка. Пусть при  $z = 0$  задан пучок с плоским фазовым фронтом, амплитуда которого действительна и меняется по закону

$$C(r, 0) = \alpha(r, 0) = \exp\{-r^2/\sigma_0^2\}. \quad (14.18)$$

В процессе численного интегрирования (14.16) контролируется выполнение закона сохранения энергии по сечению пучка

$$\epsilon = 2\pi \int_0^{r_{N+1}} |C|^2 r dr = \text{const.}$$

При обсуждении результатов удобно использовать модуль комплексной амплитуды и фазу

$$\phi(r) = \text{Im} \int_0^r \frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial r} r dr. \quad (14.19)$$

Интеграл в (14.19) определяется численно, с использованием известных узловых значений поля и ее радиальной производной (14.14). Получены следующие результаты: в некотором диапазоне изменения профиль пучка остается гауссовым, причем его полуширина  $\sigma(z)$  увеличивается в полном соответствии с известной аналитической зависимостью [96]. На рис. 14.2 сплошные линии соответствуют теории, результаты вычислений методом конечных элементов помечены треугольниками ( $\sigma_0 = \sqrt{2}/2$ ,  $\sqrt{2}$ ;  $N = 32$ ). По мере того, как амплитуда поля вблизи границы  $r = r_{N+1}$  достигает нескольких процентов от максимального значения, на профиле возникают искажения, распространяющиеся от периферии к центру пучка. Они связаны с заменой граничных условий на бесконечности соответствующими условиями при  $r = r_{N+1}$ . Процесс возникновения и распространения возмущений профиля показан на рис. 14.3\*. Закон сохранения энергии во всем диапазоне изменения  $z$  выполняется с точностью до сотых долей процента.

---

\* Допустимый диапазон изменения  $r$  можно расширить, например, изменением масштаба сетки при достижении амплитудой вблизи границы заданного порога или введением нескольких дополнительных элементов увеличивающегося радиуса.

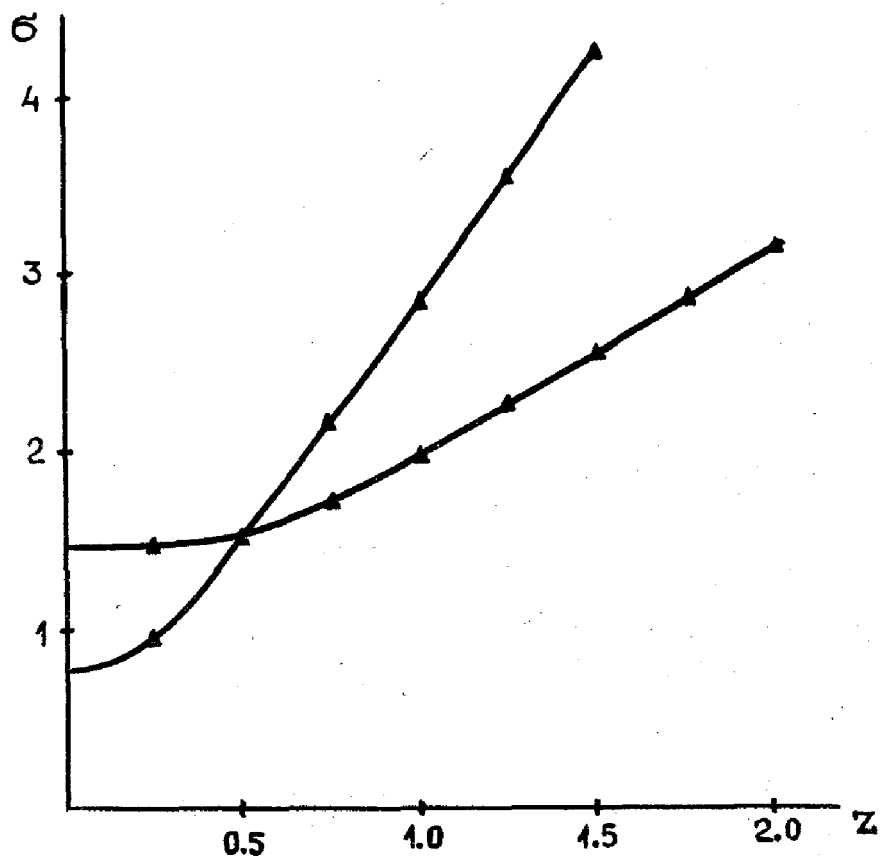


Рис. 14.2

Пример численного расчета самофокусировки. Пусть на границе  $z=0$  среды с керровской нелинейностью задан гауссов пучок с плоским фазовым фронтом. Будем рассматривать поведение пучка в зависимости от параметра  $\sigma_0$ , который характеризует входную мощность. На рис. 14.4 приведена зависимость модуля комплексной амплитуды поля на оси пучка в зависимости от  $z$ . Сплошные кривые относятся к модели с повышенной точностью ( $N = 32$ ), штриховые — к простейшей модели, описанной в первой части параграфа ( $N = 15$ ). Видно, что когда ширина пучка заметно превышает критическую ( $\sigma_0 = 4$ ;  $3 > \sigma_{кр} > 2.73$ ), рост амплитуды носит резкий, экспоненциальный характер. Если она лишь незначительно больше критической ( $\sigma_0 = 2.80$ ), то амплитуда нарастает более плавно, причем ее изменение становится немонотонным. При  $\sigma_0 = 1.2 < \sigma_{кр}$  амплитуда с увеличением  $z$  — уменьшается,

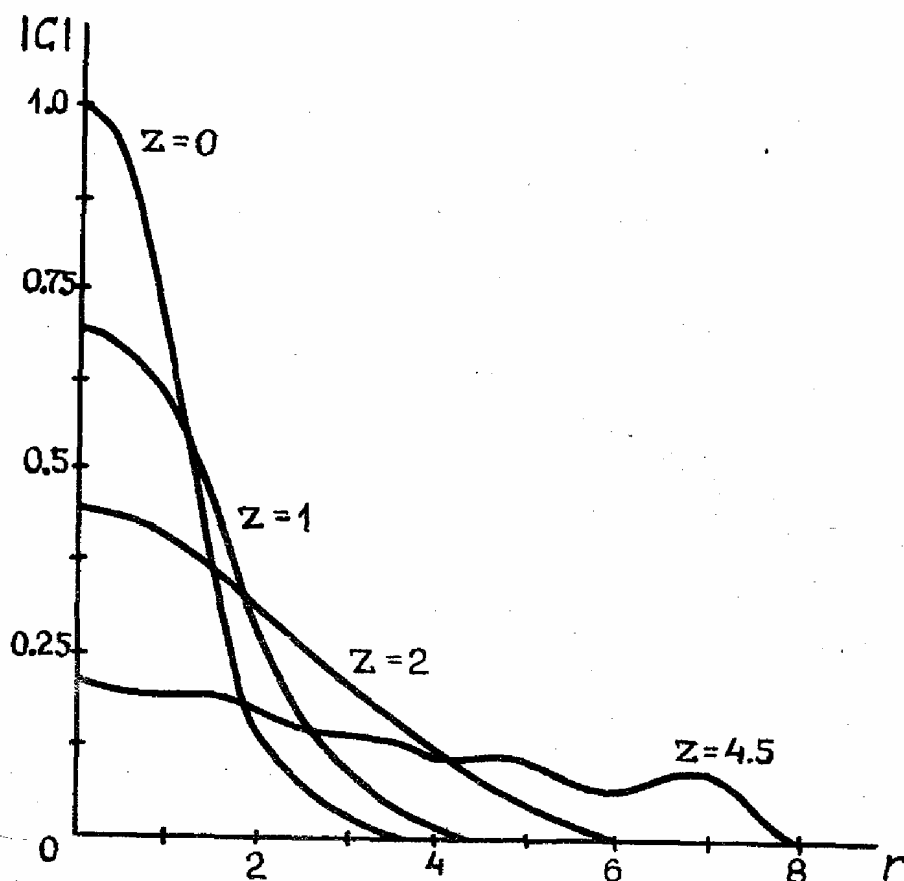


Рис. 14.3

т.е. дифракционные члены преобладают над нелинейными. Кружками и треугольниками на том же рис. помечены данные, взятые из [91, 97].

Видно, что результаты по методу конечных элементов количественно и качественно совпадают с известными [91, 97]. Представляет интерес рассмотреть зависимость модуля амплитуды поля от радиуса при фиксированном  $z$ . Она изображена на рис. 14.5 для  $z = 0$  и 4,  $\sigma_0 = 4$ . Видно, как вследствие нелинейности среды искажается гауссов профиль пучка. На том же рисунке штриховой линией приведена зависимость фазы от  $r$ . Следует отметить, что распределение фазы является весьма информативной характеристикой, так как позволяет в известной мере предсказать дальнейшее поведение пучка. Из рис. видно, что приосевая часть пучка ( $r < 2$ ) продолжает фокусироваться (фаза параболически нарастает), в то время как периферийная — "дифрагирует". Пользуясь распределением фаз, можно, например, оценить долю сфокусированной энергии и предполагаемое положение фокуса. Во всех проведенных

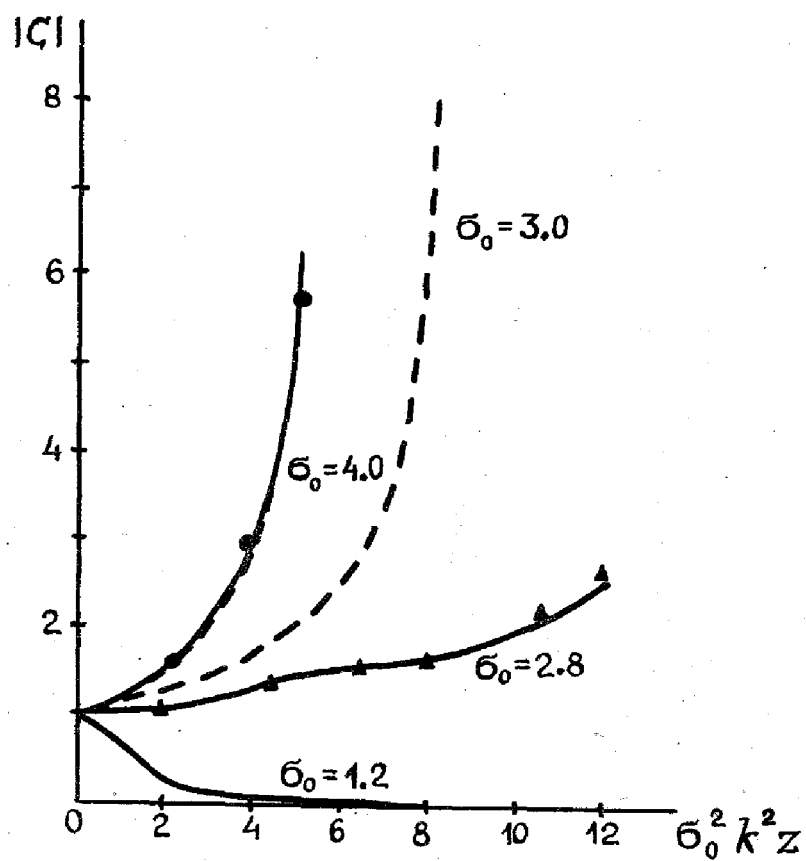


Рис. 14.4

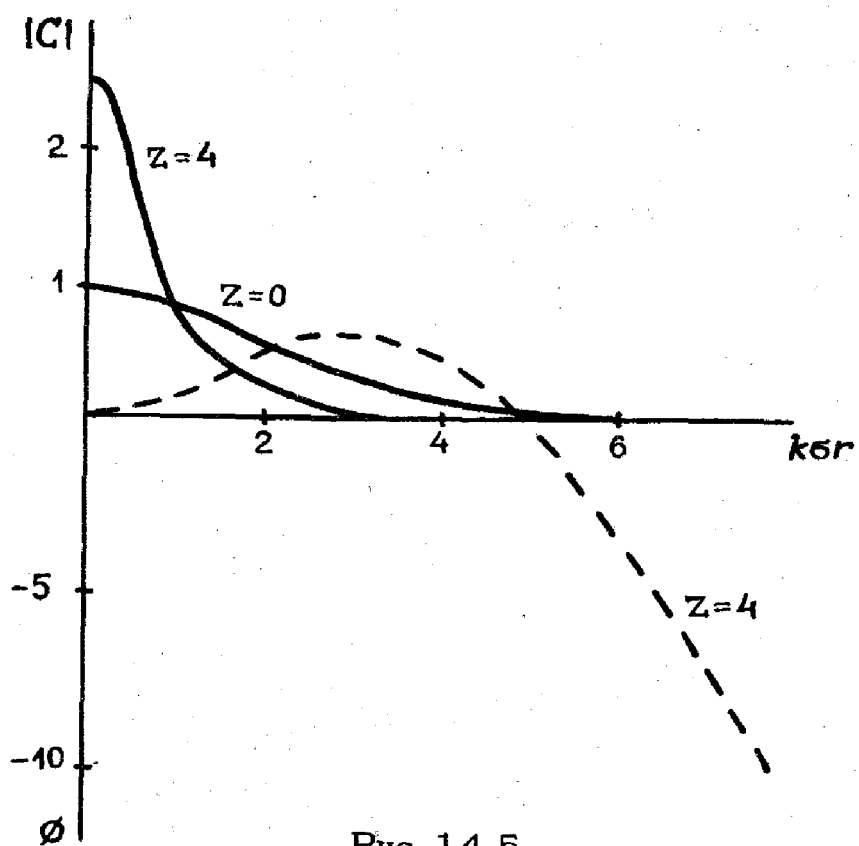


Рис. 14.5

численных расчетах интеграл энергии сохраняется с точностью до десятых долей процента.

### § 15. Случай движущейся среды \*

В задачах самовоздействия, не имеющих осевой симметрии, проблема построения "экономичной" расчетной схемы высокой точности имеет особенно важное значение. В этом случае воспроизвести тонкую структуру профиля пучка при его самофокусировке или тепловой дефокусировке можно только с помощью модели с большим числом координат. Как было видно из предыдущего параграфа, введение дополнительных координат на элементе с последующим редуцированием их приводит к необходимости обрабатывать заполненные матрицы высокого порядка. В этом параграфе рассматривается модель из конечных элементов с вынесенными узлами. Использование узлов, лежащих за контуром элемента, позволяет повысить точность аппроксимации искомой функции  $C(x, y, z)$ . В такой модели узел принадлежит одновременно большему числу элементов, чем в моделях, рассмотренных в главах 2, 3, где узлы лежат на контуре элемента. В результате расширяется число взаимно связанных узлов и, следовательно, увеличивается число отличных от нуля диагоналей в матрицах модели. Однако порядок уравнения динамики не возрастает.

Рассмотрим стационарную задачу о тепловой дефокусировке светового пучка в движущейся среде. Бесконечную область изменения переменных  $x, y$  заменим прямоугольником  $\Omega$ , стороны которого  $2L_x$  и  $2L_y$  больше его поперечных размеров. Разобьем  $\Omega$  на прямоугольные элементы  $\Omega^e$  со сторонами  $2l_x$  и  $2l_y$  (рис. 15.1). Введем на отдельном элементе локальную систему координат с началом в его геометрическом центре. Пусть для аппроксимации амплитуды  $C(\xi, \eta, z)$  и температуры  $T(\xi, \eta, t)$  на элементе используются соответственно значения этих функций  $C_{ij}$  и  $T_{ij}$  в шестнадцати ближайших узлах. Тогда, используя указанную на рис. 15.1 нумерацию, запишем векторы обобщенных координат

---

\* Материалы, включенные в этот параграф, предоставил авторам К.Д.Егоров.



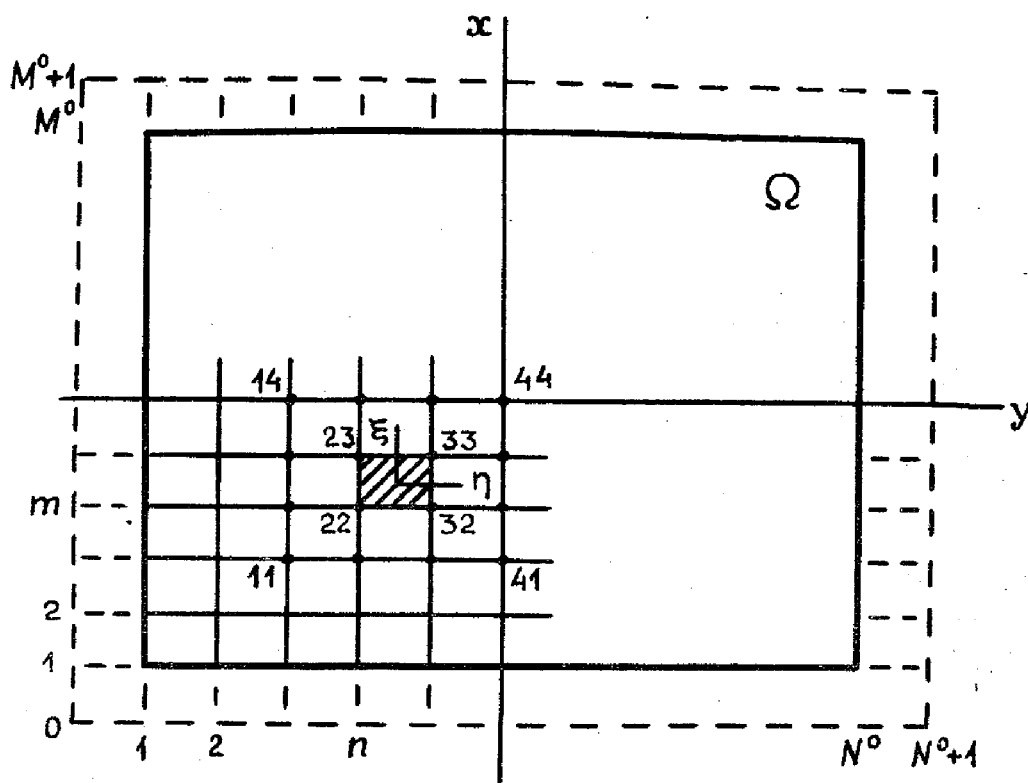


Рис. 15.1

$$\begin{aligned} \bar{q}^{eT} &= \{C_{ij}\}, \quad C_{ij}(z) = C(\xi_i, \eta_j, z), \\ \bar{p}^{eT} &= \{T_{ij}\}, \quad T_{ij}(z) = T(\xi_i, \eta_j, z), \quad i, j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (15.1)$$

Возьмем систему базисных функций в виде произведений многочленов Лагранжа третьей степени

$$\bar{\psi}^T(\xi, \eta) = \{X_i(\xi)Y_j(\eta)\}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad (15.2)$$

где

$$X_i(\xi) = \frac{\prod_{a=1, a \neq i}^4 (\xi - \xi_a)}{\prod_{a=1, a \neq i}^4 (\xi_i - \xi_a)}, \quad Y_j(\eta) = \frac{\prod_{a=1, a \neq j}^4 (\eta - \eta_a)}{\prod_{a=1, a \neq j}^4 (\eta_j - \eta_a)}, \quad \xi, \eta \in \Omega^e. \quad (15.3)$$

Для дальнейшего удобно записать систему (15.2) из шестнадцати базисных функций в виде

$$\bar{\psi}^T(\xi, \eta) = \{\bar{X}^T(\xi)Y_1(\eta), \bar{X}^T(\xi)Y_2(\eta), \bar{X}^T(\xi)Y_3(\eta), \bar{X}^T(\xi)Y_4(\eta)\}, \quad (15.4)$$

где  $X^T(\xi) = \{X_i(\xi)\}_{i=1,2,3,4}$  — строка из четырех многочленов Лагранжа (15.3). Каждый элемент строки (15.4) является, в свою очередь, строкой из четырех элементов. Назовем запись (15.4) расширенной строкой и обозначим ее

$$\bar{\psi}^T(\xi, \eta) = \{\bar{X}^T(\xi) \bar{Y}^T(\eta)\}. \quad (15.4a)$$

Значения интерполяционного многочлена в узлах совпадают с функцией  $C(\xi, \eta, z)$  и, следовательно, матрица преобразования координат является единичной. Таким образом на элементе

$$\begin{aligned} C^e(\xi, \eta, z) &= \bar{\psi}^T(\xi, \eta) \bar{q}^e(z), \\ T^e(\xi, \eta, z) &= \bar{\psi}^T(\xi, \eta) \bar{p}^e(z). \end{aligned} \quad (15.5)$$

Представим, как обычно, функционалы (13.11) суммами интегралов по областям  $\Omega^e$  и рассмотрим отдельные слагаемые, принадлежащие некоторому элементу. В безразмерных переменных, введенных в § 14,

$$\langle S^e \rangle = \int_0^z dz \int_{-l_x}^{l_x} d\xi \int_{-l_y}^{l_y} d\eta \left\{ C \frac{\partial C^*}{\partial z} - C^* \frac{\partial C}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial \xi} \frac{\partial C^*}{\partial \xi} - \frac{\partial C}{\partial \eta} \frac{\partial C^*}{\partial \eta} + \Theta T^e |C|^2 \right\}, \quad (15.6)$$

$$\Phi^e \sim \int_0^z dz \int_{-l_x}^{l_x} d\xi \int_{-l_y}^{l_y} d\eta \left\{ \frac{\gamma}{2} \left( \frac{\partial T}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\gamma}{2} \left( \frac{\partial T}{\partial \eta} \right)^2 + \beta \frac{\partial T^0}{\partial \xi} T - |C^e|^2 T \right\},$$

$$\Theta = (R_D/R_H)^2,$$

где  $R_H = \frac{\sigma}{2} \sqrt{(\epsilon_0 / (\frac{\partial \epsilon}{\partial T} - T))}$  — радиус "тепловой" рефракции,

$\beta = V \frac{c_p \rho T_0}{a I_0 \sigma_0}$  — безразмерная скорость движения среды,

$\gamma = \frac{\kappa T_0}{a I_0 \sigma_0^2}$  — безразмерная температуропроводность

среды,  $T_0$  — некоторая характерная температура среды, например невозмущенная.

Заметим, что функции  $T^0$ ,  $C^0$  и  $C^{*0}$  — неварьируемые. Введем аппроксимацию интенсивности на элементе системы базисных функций (15.2)

$$|C|^2 = \bar{\psi}^T(\xi, \eta) \bar{I}^e(z), \quad \bar{I}^{eT} = \{C_{ij} \cdot C_{ij}^*\}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4. \quad (15.5a)$$

Тогда, после подстановки (15.5) и (15.5a) в функционалы (15.6) и интегрирования по  $\Omega^e$ , получим\*

$$\begin{aligned} \langle S^e \rangle \sim \int_0^z dz \{ i(\bar{q}[M^e] \dot{\bar{q}}^* - \bar{q}^{*T}[M^e] \dot{\bar{q}}) + \frac{1}{2}(\bar{q}^T[H^e] \bar{q}^* + \bar{q}^*[H^e] \bar{q}) + \\ + \Theta \bar{p}^{oT}[R^e] \bar{I} \}, \end{aligned} \quad (15.7)$$

$$\Phi^e \sim \int_0^z dz \{ -\frac{\gamma}{2} \bar{p}^T[H^e] \bar{p} + \beta \bar{p}^{oT}[V^e] \bar{p} - \bar{I}^{oT}[R^e] \bar{p} \}.$$

При вычислении матриц конечного элемента  $[M^e]$ ,  $[H^e]$ ,  $[R^e]$   $[V^e]$  воспользуемся представлением системы базисных функций расширенной строкой (15.4) и соответственно расширенным вектором  $\bar{\psi}(\xi, \eta)$ . Тогда, матрица релаксации

$$[M^e] = \int_{-1_x}^{1_x} d\xi \int_{-1_y}^{1_y} d\eta [m^e],$$

$$\text{где} \quad [m^e] = \begin{Bmatrix} \bar{X}Y_1 \\ \bar{X}Y_2 \\ \bar{X}Y_3 \\ \bar{X}Y_4 \end{Bmatrix} \{ \bar{X}^TY_1, \bar{X}^TY_2, \bar{X}^TY_3, \bar{X}^TY_4 \}. \quad (15.8)$$

Матрица  $[m^e]$  — квадратная и состоит из  $4 \times 4$  блоков. Каждый ее блок равен произведению полиномов  $Y_i Y_j$  и матрицы  $\bar{X} \bar{X}^T$ , которая получается после умножения слева столбца  $\bar{X}$  на строку  $\bar{X}^T$ , т.е.

$$[m^e] = \{ \bar{X} \bar{X}^T \cdot Y_i Y_j \}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Для симметрии в записи представим  $[m^e]$  в виде

$$[m^e] = [\bar{X} \bar{X}^T \cdot \bar{Y} \bar{Y}^T]. \quad (15.9)$$

Действительно, формирование  $[m^e]$  можно представить как расширение матрицы  $\bar{Y} \bar{Y}^T$  путем замены каждого ее элемента  $ij$  блоком  $\bar{X} \bar{X}^T$ , взятым с весом  $Y_i Y_j$ .

---

\* Здесь индекс  $e$  у вектора  $\bar{q}$  опущен.

Отметим сразу, что операция расширения обладает рядом свойств, полезных при вычислениях. Так, например,

$$[[a] \cdot [b]][[c] \cdot [d]] = [[ac] \cdot [bd]],$$

откуда, в частности, следует, что

$$[[a] \cdot [c]]^{-1} = [[a]^{-1} \cdot [c]^{-1}],$$

т.е. в дальнейшем нет необходимости обращать матрицу порядка  $N^2 \times N^2$ , а достаточно обратить две матрицы  $N \times N$ . Поскольку полиномы  $X$  зависят только от координаты  $\xi$ , а  $Y$  — от  $\eta$ , то двойные интегралы в (15.8) сводятся к произведению однократных. Отсюда матрица релаксации элемента является расширенной

$$[M^e] = [[M_x^e] [M_y^e]]. \quad (15.10)$$

Образующие ее матрицы

$$[M_y^e] = \begin{matrix} l_x \\ \int d\xi \bar{X}(\xi) \bar{X}^T(\xi) \\ -l_x \end{matrix}, \quad [M_x^e] = \begin{matrix} l_y \\ \int d\eta \bar{Y}(\eta) \bar{Y}^T(\eta) \\ -l_y \end{matrix}, \quad (15.11)$$

отличаются только множителями, пропорциональными длинам сторон элемента.

Матрица дифракции элемента определяется вторым и третьим слагаемыми в подинтегральном выражении (15.6) и равна сумме двух матриц. Используя определение расширенной матрицы (15.9), можно записать

$$[H^e] = - \begin{matrix} l_x & l_y \\ \int d\xi \int d\eta \{ [\bar{X} \bar{X}'^T \cdot \bar{Y} \bar{Y}^T] + [\bar{X} \bar{X}^T \cdot \bar{Y} \bar{Y}'^T] \} \\ -l_x & -l_y \end{matrix},$$

здесь  $\bar{X}'^T = \{ \frac{\partial X_i}{\partial \xi} \}$ ,  $\bar{Y}'^T = \{ \frac{\partial Y_j}{\partial \eta} \}$ ,  $i, j = 1, 2, 3, 4$ .

После интегрирования получим

$$[H^e] = [[H_x^e] \cdot [M_y^e]] + [[M_x^e] \cdot [H_y^e]]. \quad (15.12)$$

Образующие матрицы  $[M_x^e]$  и  $[M_y^e]$  определяются формулами (15.11),

$$[H_x^e] = - \int_{-l_x}^{l_x} d\xi \bar{X}'(\xi) \bar{X}'^T(\xi), [H_y^e] = - \int_{-l_y}^{l_y} d\eta \bar{Y}'(\eta) \bar{Y}'^T(\eta). \quad (15.13)$$

Откуда 
$$[H_x^e] = \frac{1}{720 l_x} \begin{bmatrix} -8 & 9 & 6 & -7 \\ 9 & -372 & 357 & 6 \\ 6 & 357 & -372 & 9 \\ -7 & 6 & 9 & -8 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно увидеть, что матрица теплопроводности, определяемая первым слагаемым функционала  $\Phi$ , совпадает с матрицей дифракции. Антисимметричная матрица  $[V^e]$ , характеризующая движением среды, вычисляется по формуле (см. 15.8, 15.9)

$$[V^e] = - \int_{l_x}^{l_x} d\xi \int_{-l_y}^{l_y} d\eta [\bar{X}' \bar{X} \cdot \bar{Y} \bar{Y}^T]$$

или 
$$[V^e] = [[V_x^e] [M_y^e]], [V_x^e] = - \int_{-l_x}^{l_x} d\xi \bar{X}' \bar{X}^T;$$

Матрицы  $[R^e]$  в последних слагаемых функционалов  $\langle S \rangle$  и  $\Phi$  определяются выражением

$$[R^e] = \int_{-l_x}^{l_x} d\xi \int_{-l_y}^{l_y} d\eta \bar{\psi} \bar{\psi}^T,$$

и, следовательно, совпадают с  $[M^e]$ .

Для получения уравнения динамики модели введем глобальную нумерацию ее узлов, включая также законтурные. На рис. 15.1 эти узлы находятся на пересечении штриховых линий разбиения, лежащих вне области  $\Omega$ . Сформируем векторы размерности  $J = (M + 2) \cdot (N + 2)$

$$\bar{q}^T(z) = \{C_{mn}(z)\},$$

$$\begin{aligned}\bar{p}^T(z) &= \{T_{mn}(z)\}, \\ \bar{I}^T(z) &= \{C_{mn}(z) C_{mn}^*(z)\}, \quad m = 0, 1, \dots, M+1, \\ &\quad n = 0, 1, \dots, N+1,\end{aligned}\quad (15.15)$$

где  $M+2, N+2$  — число узлов модели по осям  $ox$  и  $oy$  соответственно.

Дополним матрицы элементов нулями согласно их расположению в модели, выполнив это вначале для образующих матриц. Образующие по оси  $OX$  —  $[M_x^e], [H_x^e], [V_x^e]$  дополняются до  $[M_x]_m, [H_x]_m, [V_x]_m$  размерности  $(M+2) \times (M+2)$ , по оси  $OY$  —  $[M_y^e], [H_y^e]$  — до  $[M_y]_n, [H_y]_n$  размерности  $(N+2) \times (N+2)$ . Дополненные матрицы элемента  $[M]_{m,n}; [H]_{m,n}; [R]_{m,n}$  — симметричны,  $[V]_{m,n}$  — антисимметрична. Они являются расширенными от образующих  $[M_x]_m, [M_y]_n, [H_x]_m, [H_y]_n, [V_x]_m$  и определяются выражениями

$$\begin{aligned}[M]_{m,n} &= [[M_x]_m \cdot [M_y]_n], [R]_{m,n} = [M]_{m,n}, \\ [H]_{m,n} &= [[H_x]_m \cdot [M_y]_n] + [[M_x]_m \cdot [H_y]_n], \\ [V]_{m,n} &= [[V_x]_m \cdot [M_y]_n].\end{aligned}\quad (15.16)$$

Расширенные матрицы имеют порядок  $J \times J$ .

Суммируя вклады отдельных элементов (15.7) в функционалы модели  $\langle S \rangle, \Phi$ , получим

$$\begin{aligned}\langle S \rangle \sim \int_0^z dz \{ i(\bar{q}^T [M] \dot{\bar{q}}^* - \bar{q}^{*T} [M] \dot{\bar{q}}) + \frac{1}{2}(\bar{q}^T [H] \bar{q}^* + \bar{q}^{*T} [H] \bar{q}) + \\ + \Theta \bar{p}^{OT} [R] \bar{I} \},\end{aligned}\quad (15.17)$$

$$\Phi \sim \int_0^z dz \{ -\frac{\gamma}{2} \bar{p}^T [H] \bar{p} - \beta \bar{p}^{OT} [V] \bar{p} - \bar{I}^{OT} [R] \bar{p} \}.$$

Матрицы модели вычисляются простым суммированием дополненных матриц элементов. Например, для релаксации

$$[M] = \sum_{m=0}^{M+1} \sum_{n=0}^{N+1} [M]_{m,n}.$$

Как видно из (15.17), в построенной модели из конечных элементов  $\langle S \rangle$  является функцией компонент векторов  $\bar{q}$ ,  $\bar{q}^*$ ,  $\bar{I}$  и неварьируемого вектора  $\bar{p}^0$ , а  $\Phi$  — функцией компонент  $\bar{p}$  и неварьируемого вектора  $\bar{I}^0$ . Вычислим вариацию  $\langle S \rangle$  по  $C_{m,n}^*$ , учитывая определение вектора интенсивности согласно (15.5a). Тогда, в соответствии с принципом локального потенциала, получим после матричных преобразований уравнение

$$2i[M]\dot{\bar{q}} = [H]\bar{q} + \Theta[q][R]\bar{p}, \quad (15.18)$$

здесь  $[q]$  — диагональная матрица, элементы которой суть компоненты вектора  $\bar{q}$ .

Варьирование  $\Phi$  по  $T_{m,n}$  приводит к уравнению

$$\beta[V]\bar{p} = \gamma[H]\bar{p} + [R]\bar{I}. \quad (15.19)$$

В полученной системе уравнений динамические переменные — только компоненты вектора  $\bar{q}$ , т.е. значения комплексной амплитуды поля в узлах. Вектор  $\bar{p}$  является динамически вырожденным для стационарной задачи. Действительно, температура среды в узлах выражается из алгебраической системы (15.19) через интенсивность поля  $|C|^2$ .

При решении системы уравнений (15.18, 15.19) накладываются краевые условия. Так, для пучка, находящегося в центре области  $\Omega$ , размеры которой больше ширины пучка ( $L_x, L_y > \sigma$ ), можно положить равной нулю амплитуду поля и температуру среды во всех законтурных узлах и узлах, лежащих на границе  $\Omega$ , т.е.

$$C_{m,n} = 0, T_{m,n} = 0 \text{ при } m = 0, 1, M, M+1, n = 0, 1, \dots, N+1;$$

$$\text{и } m = 0, 1, \dots, M+1, n = 0, 1, N, N+1.$$

Для задач, симметричных, например, относительно плоскости ZOX, имеют место условия

$$C_{m,0} = C_{m,2}, \\ T_{m,0} = T_{m,2}, m = 0, 1, \dots, M+1.$$

Система (15.18), (15.19) имеет высокий порядок и для ее решения целесообразно использовать простые схемы численного интегрирования по  $z$ .

Чтобы оценить погрешности построенной модели, можно исследовать степень аппроксимации дифференциальных операторов уравнений (13.7), (13.5) при замене их матричной системой (15.18), (15.19). Для простоты рассмотрим одномерный оператор, например,  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ . Из явного вида матриц  $[H^e]$  дифракции (теплопроводности) элемента (15.13) и процедуры формирования матрицы модели  $[H]$  следует, что оператор  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  заменяется выражением

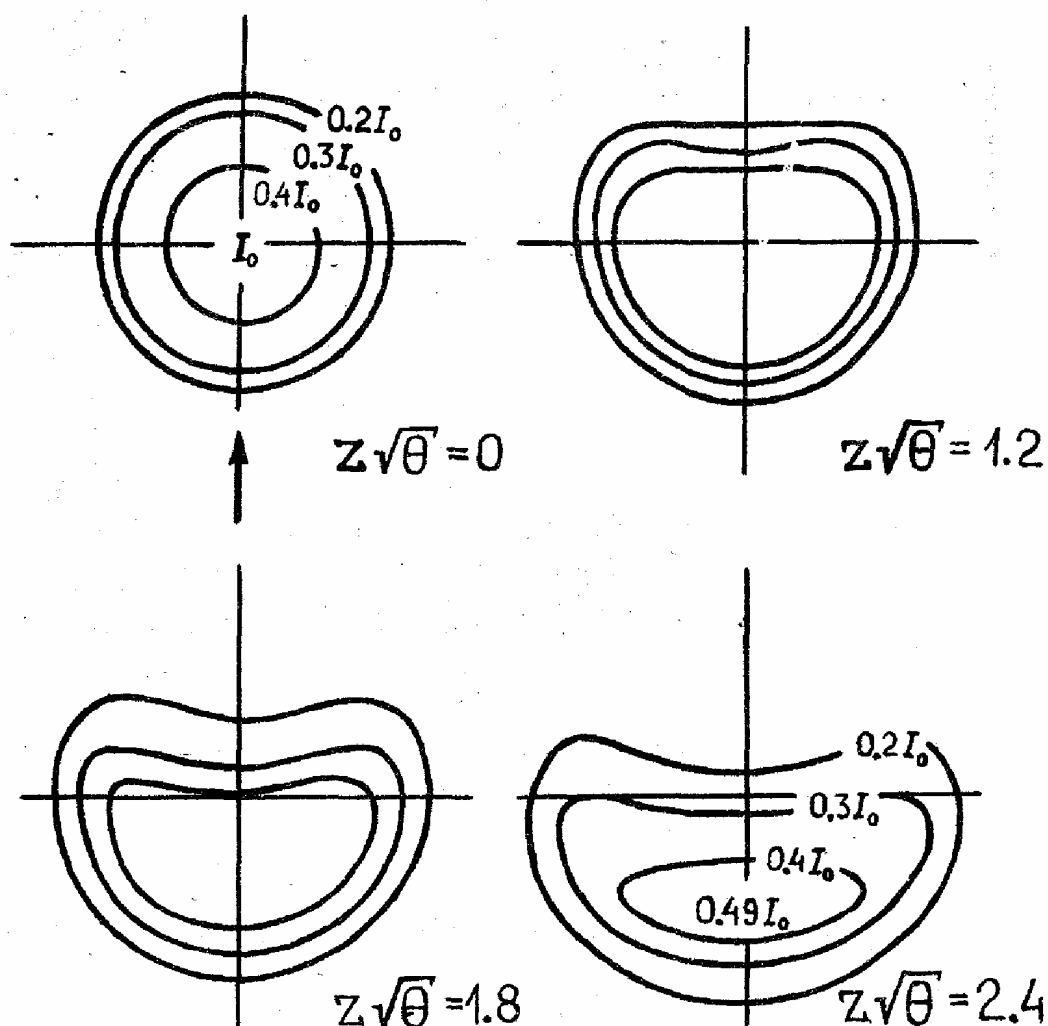


Рис. 15.2



$$\left. \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right|_{x_m} \approx -\frac{1}{720 l_x^2} (374 \Delta_m^2 - 7(\Delta_{m-2}^2 + \Delta_{m+2}^2) - 2\Delta_m^4).$$

Нетрудно показать, что порядок погрешности в этом случае составляет  $O(l_x^4)$ .

Пример. В качестве примера рассмотрим распространение пучка гауссова профиля с плоским фазовым фронтом для которого  $\beta^{-1}\Theta = 10$ . Пусть скорость движения среды не зависит от  $z$ . Положим, что распределение температуры среды определяется только массопереносом, т.е.  $\kappa = 0$ . Результаты расчета приведены на рис. 15.2, где изображены линии равной интенсивности в поперечнике пучка для ряда значений  $z$ .

Исследование явления самофокусировки неосесимметричных пучков в среде с керровской нелинейностью изложено в [105], где рассмотрены пучки эллиптического сечения. Показано, что существует ряд критических значений энергии пучка, при которых он фокусируется в одну, две и более нитей.

Дальнейшее развитие метод конечных элементов, применительно к нелинейной оптике, получил в работе [106]. Там аналитически и численно исследована сходимость для моделей, приведенных в этой главе. Для интегрирования по  $z$  матричных уравнений типа (14.16), (15.18) наряду с явной условно устойчивой схемой разработаны абсолютно устойчивые алгоритмы на основе схемы Кранка – Николсона и схемы переменных направлений.

В настоящее время изложенные в главе схемы широко применяются для численного исследования различных задач самовоздействия световых пучков. Так, рассмотрено формирование профиля пучка в жидких кристаллах [107], оптических усилителях и других искусственных средах. В атмосферной оптике эти схемы используются для изучения процесса просветления облаков и туманов под действием мощного излучения, распространения импульсного излучения в атмосферных условиях и т. п. [108].

Применение метода конечных элементов оказалось плодотворным в задачах управления параметрами пучка когерентного излучения – нового направления современной оптики. На основе изложенных выше схем построены алгоритмы компенсации тепловой дефокусировки световых пучков при импульсном и непрерывном режимах излучения [109, 110].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На короткой истории метода конечных элементов легко проследить, как из узко прикладного приема строительной механики он сформировался в численный метод математической физики. Быстрому проникновению метода в различные области науки немало способствовало развитие вычислительной техники. Быстродействие и объем оперативной памяти современных ЦВМ позволяют рассматривать модели реальных систем, состоящие из большого числа элементов. Однако это не снимает проблемы построения моделей, оптимальных в смысле точности, которая связана прежде всего с удачным выбором динамических переменных. Оптимизация расчетных схем позволяет уменьшить вычислительные погрешности при операциях над матрицами высокого порядка и приводит к сокращению затрат машинного времени.

Успехи метода конечных элементов в решении научных и прикладных задач вызваны его физической наглядностью и универсальностью. Теоретические основы метода в настоящее время в основном сформулированы. Его дальнейшее развитие, по-видимому, связано с созданием типовых методик, алгоритмов, а также комплексов стандартных программ для широкого класса задач.

## Литература

1. Крон Г. Исследование сложных систем по частям — диакоптика. М., "Наука", 1972.
2. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М., "Наука", 1970.
3. Ланцош К. Вариационные принципы механики. М., "Мир", 1965.
4. Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М., "Мир", 1973.
5. Шехтер Р. Вариационный метод в инженерных задачах. М., "Мир", 1971.
6. Oden J.T. A general theory of finite elements: I, Topological considerations; 2, Applications. "Int. J. Num. Meth. in Engng", 1969, I, N 2, 205-221; N 3, 247-260.
7. Кандидов В.П. Приближенный расчет неоднородных пластин путем разбиения на элементы. — "Вестн. Моск. ун-та, матем. мех.", 1964, № 4, 67-73.
8. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М., "Мир", 1975.
9. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М., "Мир", 1972.
10. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. М., "Наука", 1964.
11. Лейбензон Л.С. Вариационные методы решения задач упругости. М.-Л., Гостехиздат, 1943.
12. Деклу Ж. Метод конечных элементов. М., "Мир", 1976.
13. Argyris J.H., Scharpf D.W. Finite elements in time and space. — "Aeron. J.", 1969, 73, № 708, 1041-1044.
14. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. М., "Мир", 1975.
15. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, т. II. М., Физматгиз., 1960.
16. Strang G. Piecewise polynomials and the finite element method. — "Bull. of Am. Math. Soc.", 1973, 79, № 6.

17. Oliveira E. Theoretical foundations of the finite element method. — "Int. J. Solids. Str.", 1968, 4, № 10, 929-952.
18. Ženišek A., Zlamal M. Convergence of a finite element procedure for solving boundary value problems of the fourth order. — "Int. J. for Num. Meth. in Engng.". 1970, 2, № 3, 307-311.
19. Корнеев В.Г. Сопоставление метода конечных элементов с вариационно-разностным методом решения задач теории упругости. — "Изв. Всесоюз. НИИ Гидротехники", 1967, 83, 286-307.
20. Кравчук А.С. Замечание к доказательству сходимости метода конечных элементов. — ПММ, 1974, 38, 958.
21. Zienkiewicz O.C. Finite elements — the background story. L. — N.Y., 1973.
22. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М., "Наука", 1971.
23. Кандидов В.П., Ким Л.П. Дискретная модель для исследования колебаний балок. — "Вестн. Моск. ун-та, физ., астр.", 1968, № 5, 61-68.
24. Кандидов В.П., Чесноков С.С. Применение метода конечных элементов для расчета поперечных колебаний одномерных систем. — "Вестн. Моск. ун-та, физ., астр.", 1971, № 4, 416-421.
25. Lindberg G.M., Olson M.D., Convergence studies of eigenvalue solutions using two finite plate bending elements. — "Int. J. Num; Meth. in Engng.". 1970, 2, № 1, 99-116.
26. Vysloukh V.A., Kandidov V.P., Chesnokov S.S. Reduction of the degrees of freedom in solving dynamic problems by the finite element method. — "Int. J. for Num. Meth. in Engng.". 1973, 7, № 2, 185-194.
27. Shie W.Y., Lee Seng-Lip, Parmalee R.A. Analysis of plate bending by triangular elements. — "J. Eng. Mech. Division, Proc. ASCE". 1968, 94, № 5, 97-103.
28. Irons B.M. Engineering application of numerical integration in stiffness method. — AIAA J. 1966, 14, № 11, 2035-2037.
29. Anderson R.G., Irons B.M., Zienkiewicz O.C. Vibration and stability of plates using finite elements. — "Int. J. Solids Struct.". 1968, 4, N 12, 1031-1055.
30. Dawe D.J. Vibration of rectangular plates of variable thickness. — "J. Mech. Eng. Sci.". 1966, 8, N 1, 42-51.
31. Dunne P.C. Complete polynomial displacement fields for finite element method. — "Aeron. J.". 1968, 72, N 687, 245-246.

32. Argyris J.H., Fried J., Scharpf D.W. The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method. — "Aeron. J.". 1968, 72, N 692, 701-709.
33. Smith I.M., Duncan W. The effectiveness of nodal continuities in finite element analysis of thin rectangular and skew plates in bending. — "Int. J. for Num. Meth. in Engng.". 1970, 2, N 3, 253-258.
34. Hinton E., Rock T., Zienkiewicz O.C. A note on mass lumping and related processes in the finite element method. — "Int. J. Earthquake Eng. and Struct. Dyn.". 1976, 4, N 3, 245-249.
35. Birkhoff G., Garabedian H. Smooth surface interpolation. — "J. Math. Phys.". 1960, 39, N 3, 257-268.
36. Myklestad N.O. Vibration analysis. N.Y., 1956.
37. Кандидов В.П. Электронное моделирование флаттера крыла малого удлинения в сверхзвуковом потоке. — В кн.: "Математическое моделирование и теория электрических цепей", вып. III, 221-237. Киев, "Наукова думка". 1965.
38. Irons B.M. Eigenvalue economisers in vibration problems. — "J. Roy. Aeron. Soc.". 1963, 67, 526.
39. Geragin M. Error bounds for eigenvalue analysis by elimination of variables. — "J. Sound Vibr.". 1971, 19, N 2, 111-132.
40. Rock T.A., Hinton E.A. A finite element method for the free vibration of plates allowing for transverse shear deformation. — "Comput. and Struct.". 1976, 6, N 1, 37-44.
41. Кандидов В.П., Ким Л.П. Расчет устойчивости изгибно-крутильных колебаний крыла в дозвуковом потоке методом конечных элементов. — "Уч. зап. ЦАГИ". 1972, 3, № 1, 111-117.
42. Филиппов А.П. Колебания механических систем. Киев, "Наукова думка", 1965.
43. Бисплингхофф Р.Л., Эшли Х., Халфмен Р.Л. Аэроупругость. М., ИЛ, 1958.
44. Duncan W.J. A critical examination of the representation of massive and elastic body by sistem of rigid masses elastically connected. — "Quartly. J. Mech. Appl. Math.". 1952, 5, part I, 23-36.
45. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М., "Мир", 1971.
46. Кандидов В.П., Чесноков С.С. Расчет устойчивости прямоугольных пластин в потоке воздуха методом конечных элементов. — "Вестн. Моск. ун-та, физ., астр.". 1972, № 5, 495-502.
47. Кандидов В.П., Чесноков С.С. Исследование динамической устойчивости пластин методом конечных элементов. — В кн.:

- "Труды IV Всесоюз. конф. по пробл. устойчивости в строит. мех.", 165-168. Харьков, 1972.
48. Мовчан А.А. О колебаниях пластинки, движущейся в газе. — ПММ. 1956, 20, вып. 2, 125-137.
  49. Миль М.Л. Вертолеты. М., Машиностроение, 1966.
  50. Кандидов В.П., Некрасов И.В., Орданович А.Е. Один метод исследования существенно неконсервативных колебательных систем на электронной моделирующей установке. — "Вестн. Моск. ун-та, физ., астр.". 1966, № 4, 69-78.
  51. Кандидов В.П., Христочевский С.А. Применение метода конечных элементов для исследования изгибно-крутильного флаттера на аналоговой вычислительной машине. — "ИВУЗ, авиац. техн.". 1972, № 1, 43-50.
  52. Адамчук И.Д., Кандидов В.П., Ким Л.П. Электронное моделирование динамической устойчивости упругой конструкции балочного типа. — "ИВУЗ, авиац. техн.". 1968, № 4, 141-144.
  53. Егоров К.Д., Кандидов В.П., Пулинец С.А. Исследование флаттера упругой лопасти вертолета на аналоговой вычислительной машине. — "ИВУЗ, авиац. техн.". 1975, № 4, 69-76.
  54. Шокли В. Теория электронных полупроводников. М., ИЛ, 1962.
  55. Гомонова А.И., Капцов Л.Н., Сергеев А.М. Анализ переходного процесса включения тиристора. — "ИВУЗ, радиотехника". 1971, 24, № 1.
  56. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1963.
  57. Карсон В.Ж., Ньютон Р.Е. Анализ потери устойчивости пластин с использованием полностью совместных конечных элементов. — "Ракетн. техн. и космонавт.". 1969, 7, № 3, 174-176.
  58. Chesnokov S.S., Kandidov V.P., Vysloukh V.A. Study on the vibration of thin plates in a gas stream by the finite element method. — In.: Proc. Int. Conf. on Finite Element Meth. in Engng. Sydney, 1974, p. 611-620.
  59. Кандидов В.П., Чесноков С.С. Модифицированный конечный элемент для расчета колебаний тонких пластин. — "Вестн. Моск. ун-та, физ. астр.". 1972, № 1, 44-51.
  60. Кандидов В.П., Чесноков С.С. Треугольный элемент для расчета колебаний пластин. — "Вестн. Моск. ун-та, физ. астр.". 1972, № 5, 624-626.
  61. Mason V. Rectangular elements for plate vibration. — "J. Sound Vibr.". 1968, 7, N 3, 437-448.
  62. Каупер Ж.Р., Коско Е., Линдберг Ж.М., Олсен М.Д. При-

менение высокоточных элементов изгибаемых пластин в статических и динамических задачах. — "Ракетн. техн. и космонавт.". 1969, № 10, 127-133.

63. Smith I.M., A finite element analysis for moderately thick rectangular plates in bending. — "Int. J. Mech. Sci.", 1968, 10, N 7, 563-570.
64. Barton M.V. Vibration of rectangular and skew cantilever plates. — "J. Appl. Mech.". 1951, 18, N 2, 129-134.
65. Gustafson P.N., Stokey W.F., Zorowski C.F. An experimental study of natural vibrations of cantilevered triangular plates. — "J. Aeron. Sci.". 1953, 20, N 5, 761-766.
66. Dawe D.J. A finite element approach to plate vibration problems. — "J. Mech. Engrg. Sci.". 1965, 7, N 1, 28-37.
67. Майлс Дж.У. Потенциальная теория неустановившихся сверхзвуковых течений. М., Физматгиз, 1963.
68. Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К., Табачников В.Т. Крыло в нестационарном потоке газа. М., "Наука", 1971.
69. Garrik I.E., Rubinov S.I. Theoretical study of air forces on an oscillating or steady thin wing in a supersonic main stream. — "NASA Report", 1957, N 872.
70. Bradley R.G., Miller B.D. Lifting surface theory advances and applications. — "AIAA Paper.". 1970, N 192.
71. Ashley H. Some considerations relative to the prediction of unsteady air loads on lifting configurations. — "J. of Aircraft". 1971, 8, N 10, 747-756.
72. Выслоух В.А., Кандидов В.П., Чесноков С.С. Модель упруго пластины из конечных элементов в сверхзвуковом потоке. — ИММ, 1975, 39, вып. 1, 86-94.
73. Марченко Г.А. Метод Ритца в неконсервативных задачах теории упругой устойчивости. — "ИВУЗ, авиац. техн.". 1966, № 3, 63-68.
74. Olson M.D. Some flutter solutions using finite elements. — AIAA J. 1970, 8, N 4, 747-752.
75. Kariappa, Somashekar B.R. Flutter of skew panels by the matrix displacement approach. — "Aeron. J.". 1970, 74, N 716, 672-675.
76. Микишев Г.Н. Экспериментальное исследование автоколебаний квадратной пластины в сверхзвуковом потоке. — "Изв. АН СССР, ОТН, МИМ". 1959, № 1, 82-85.
77. Выслоух В.А. Об устойчивости панели в сверхзвуковом потоке. — "Вестн. Моск. ун-та, физ., астр.". 1975, № 5, 609-612.
78. Выслоух В.А., Кандидов В.П., Чесноков С.С. Применение метода конечных элементов для исследования устойчивости треугольной

- пластин в сверхзвуковом потоке. — "Уч. зап. ЦАГИ". 1976, 7, № 1, 160-164.
79. Чесноков С.С. Учет переменной толщины конструкций при исследовании устойчивости в потоке воздуха методом конечных элементов. ВИМИ, депонент № ВМ. Д01369, 1975.
  80. Kearns J.P. Flutter simulation. — "Transactions of Instrum. Soc. Am.". 1963, 2, N 4, 291-297.
  81. Кандидов В.П., Чесноков С.С. Сравнение расчета по методу конечных элементов с экспериментом на примере одной задачи динамической устойчивости. — "Вестн. Моск. ун-та, физ. астр.". 1972, № 3, 357-359.
  82. Камп Л. Подводная акустика. М., "Мир", 1972.
  83. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.-Л., Гостехиздат, 1947.
  84. Рабинович М.И., Таланов В.И. Четыре лекции по основам теории нелинейных волн и волновых взаимодействий. Изд-во Ленингр. ун-та, 1972.
  85. Ахманов С.А., Сухоруков А.П., Хохлов Р.В. Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде. — УФН. 1967, 93, 19.
  86. Луговой В.Н., Прохоров А.М. Теория распространения мощного лазерного излучения в нелинейной среде. — УФН, 1973, 111, 203-247.
  87. Akhmanov S.A. et al. Thermal self-actions of laser beams. — JEEE, QE-4, 1968, N 10, 568.
  88. Алешкевич В.А., Сухоруков А.П. Об отклонении мощных световых пучков под действием ветра в поглощающих средах. — "Письма в ЖЭТФ". 1970, 12, 112-115.
  89. Ulrich P.B., Wallace J. Propagation characteristics of collimated, pulsed laser beams through an absorbing atmosphere. — "J. Opt. Soc. Am.". 1973, 63, N 1, 8.
  90. Fleck J.A., Jr., Morris J.R., Feit M.D. Time-dependent propagation of high energy laser beams through the atmosphere. — "Appl. Phys.". 1976, 10, 129-160.
  91. Беспалов В.И., Литвак А.Г., Таланов В.И. Самовоздействие электромагнитных волн в кубичных изотропных средах. — В кн.: "Нелинейная оптика". М., "Наука", 1968.
  92. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М., ГИТТЛ, 1957.
  93. Уизем Г.Б. Вариационные методы и их приложение к волнам на воде. — В кн.: "Нелинейная теория распространения волн". М., "Мир", 1970.



94. Найфэ А. Методы возмущений. М., "Мир", 1976.
95. Воробьев В.В. Самофокусировка световых пучков без осевой симметрии. — "ИВУЗ, радиофизика". 1970, 13, № 12, 1905.
96. Kogelnik H., Li J. Laser beams and resonators. — "Appl. Opt.". 1966, 5, 1550.
97. Соболев В.В., Сынах В.С. Численный эксперимент по самофокусировке электромагнитных волн в нелинейной среде. — ПМТФ. 1966, № 6, 20-22.
98. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. "Судостр.", Л., 1974.
99. Вариационно-разностные методы в математической физике. Под ред. акад. Г.И. Марчука. Новосибирск, 1974.
100. Gray W.G., Pinder G.F. On the relationship between the finite element and finite difference methods. — "Int. J. for Num. Meth. in Engng.". 1976, 10, N 4, 893-923.
101. Hughes Th.J.R. Reduction scheme for some structural eigenvalue problems by a variational theorem. — "Int. J. for Num. Meth. in Engng.". 1976, 10, N 3, 845-852.
102. Журавлева А.М., Лукин Б.С. Применение метода конечных элементов для исследования вибрации некоторых типов пластинчатых конструкций. — В кн.: "Динамика и прочность машин". вып. 23. 1976, с. 13-19.
103. Вольмир А.С., Сметаненко В.А. Исследование собственных колебаний пластинок, выполненных из композиционных материалов, с помощью метода конечных элементов. — "Механика полимеров". 1976, № 2, с. 284-288.
104. Weisshaar T.A. Panel flutter optimization — a refined finite element approach. — "Int. J. for Num. Meth. in Engng.". 1976, 10, N 1, 77-91.
105. Егоров К.Д., Кандидов В.П. Самофокусировка пучков эллиптического сечения. — "Вестн. Моск. ун-та, физ., астр.", 1978, № 2, 70-75.
106. Chesnokov S.S., Egorov K.D., Kandidov V.P., Vysloukh V.A. The finite element method in problems of nonlinear optics. — "Int. J. for Num. Meth. in Engng.", 1979, 14, 1581-1596.
107. Аракелян С.М., Варданян Г.А., Вислоух В.А., Ляхов Г.А., Макаров В.А., Чилингарян Ю.С. Влияние эффектов пространственной дисперсии нелинейности на самофокусировку лазерного излучения в жидких кристаллах. Теория и численный эксперимент. — "ИВУЗ, радиофизика", 1979, 22, 55-61.

V Всесоюзный симпозиум по распространению лазерного излучения в атмосфере. Тезисы докладов, часть III. Томск, 1979.

Выслоух В.А., Егоров К.Д., Кандидов В.П. Численный эксперимент по фазовой компенсации теплового самовоздействия световых пучков. – "ИВУЗ, радиофизика", 1979, 22, 434-440.

Выслоух В.А., Чесноков С.С., О фазовой коррекции нестационарного теплового самовоздействия. – "Вестн. Моск. ун-та, физ., астр.", 1979, № 5.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
Глава 1. Основы метода конечных элементов . . .	6
§ 1. Общая схема, основания . . . . .	6
§ 2. Кинематика конечного элемента . . . . .	10
§ 3. Структурная модель из конечных элементов . . . . .	14
§ 4. Интегральная схема модели . . . . .	19
§ 5. Вопросы сходимости и уменьшения числа динамических переменных . . . . .	22
Глава 2. Динамика одномерных систем . . . . .	30
§ 6. Поперечные колебания стержней . . . . .	30
§ 7. Исследование некоторых задач аэроупругости . . . . .	45
§ 8. Переходной процесс в полупроводниковом диоде . . . . .	56
Глава 3. Динамика пластин . . . . .	63
§ 9. Поперечные колебания пластин . . . . .	64
§ 10. Моделирование воздействий сверхзвукового потока . . . . .	84
§ 11. Устойчивость пластин в потоке газа . . . . .	99
§ 12. Круглая пластина. Задача о пьезоизлучателе . . . . .	120
Глава 4. Задачи самовоздействия в нелинейной оптике . . . . .	127
§ 13. Вариационная формулировка . . . . .	128
§ 14. Осесимметричный случай . . . . .	133
§ 15. Случай движущейся среды . . . . .	146
Заключение . . . . .	156
Литература . . . . .	157

Валерий Петрович Кандидов,  
Сергей Сергеевич Чесноков,  
Виктор Андреевич Выслоух

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ  
В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ

БЗ № 46-8-79

ИБ № 494

Заведующий редакцией С.И.З е л е н с к и й

Редактор Г.Е.Г о р е л и к

Технический редактор Е.Д.З а х а р о в а

Корректор Л.С.К л о ч к о в а

---

Подписано к печати 07.03.80. Л-23280 Формат 60х90/16  
Бумага офс. № 1. Усл. печ. л. 10,5. Уч.-изд. л. 8,4.  
Тираж 3250 экз. Зак. 1208. Цена 1 руб. Изд. № 279.

---

Оригинал-макет подготовлен  
в Издательстве Московского университета  
103009, Москва, ул. Герцена, 5/7.  
Типография Изд-ва МГУ. Москва, Ленинские горы