Е. М. ВЕЧТОМОВ

МЕТАФИЗИКА МАТЕМАТИКИ

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Российская академия естественных наук
Вятский государственный гуманитарный университет

Посвящается
родному Вятскому краю

Е. М. Вечтомов

МЕТАФИЗИКА МАТЕМАТИКИ

Монография

Киров
2006

ББК 22.1
В 39
Печатается по решению редакционно-издательского совета Вятского государственного гуманитарного университета и совета УМО по математике педвузов Волго-Вятского региона

Рецензенты:

А. В. Михалев, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей алгебры, проректор МГУ им. М. В. Ломоносова, академик РАЕН;

М. И. Ненашев, доктор философских наук, профессор, заведующий кафедрой философии и социологии ВятГГУ, академик РАЕН;

Г. И. Саранцев, доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой методики обучения математике Мордовского госпединститута им. М. Е. Евсевьева, член-корреспондент РАО

В 39 **Вечтомов, Е. М.** Метафизика математики [Текст]: Монография / Е. М. Вечтомов. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2006. – 508 с.

ISBN 5-93825-270-9

Рассматриваются элементы теории познания, взаимосвязь научного познания с математикой. Анализируются вопросы философии, методологии и дидактики математики. Излагаются избранные математические темы, имеющие методологическую подоплеку. Особое внимание уделено гносеологическим истокам и метафизическим основаниям математики. Автор выступает твердым и последовательным сторонником естественной фундаменталистской философии математики. Книга предназначена всем тем, кто любит математику и интересуется ее историей и философией.

ISBN 5-93825-270-9

Оглавление

Предисловие

Разум человеческий владеет тремя ключами,
открывающими все: цифрой, буквой, нотой.
Знать, думать, мечтать. Все в этом.
Виктор Гюго

Великий Гюго просто и четко выразил всю гамму человеческого бытия, выделив три ипостаси и три качества разума. На символах-китах *цифре, букве* и *ноте* зиждется человеческое познание. Цифры, буквы и ноты образуют общий алфавит языка познания и общения. Из цифр составляются *числа*, из букв складываются *слова*, за нотами стоит музыка, *муза*. В числах выражается *точное знание*, они принадлежат *математике* и *науке* в целом. Вне привычного языка человеку, по-видимому, трудно четко думать; человеческая мысль протекает в словесной форме, выражается в ней. Музы, рождая *красоту*, покровительствуют *искусству* и *культуре*.

Научное познание исследует и открывает *истину*. Художественное познание постигает и творит красоту, *гармонию*. Мир един и гармоничен. Мир един, но не однополярен. Любой полюс предполагает противоположный, и они вынуждены сосуществовать. Истина невозможна безо *лжи*, красота оттеняется *безобразным*. Это – *логика*, в которой заключена истина абсолютная. Безупречная истина гармонична, а настоящая красота истинна. Красота обосновывается наукой. Пушкинский Сальери изрек: «Поверил я алгеброй гармонию». Наука есть область культуры (в широком смысле слова). Но наука и искусство (в смысле ценностных идеалов и установок) принципиально отличаются друг от друга.

Называя фундаментальные категории истины и красоты, мы сразу вспоминаем понятие *добро*, составляющее вместе с ними знаменитую мировоззренческую триаду. Диалектика истины и красоты порождает добро. Согласно Бенджамину Франклину, «красота без доброты умирает невостребованной». Сама по себе беспристрастная истина может быть холодна и отстраненна, а блестящая красота казаться нам высокомерной и недоступной. Только союз истины и красоты служит духовным вектором человеческого познания, вызывает добрые чувства, противостоит *злу*.

Среди различных форм познания мира человеком мы выделяем две – *математическую* и *философскую*. Вторая часть высказывания Джорджа Сантаяны, что «подобно тому, как все искусства тяготеют к музыке, все науки стремятся к математике», выражает основополагающий методологический постулат – *принцип математизации знания*. И, соответственно, математический способ познания является ведущим в научном познании. Математическое познание схватывает изучаемые явления посредством математического моделирования и гипотетико-дедуктивного метода, опираясь на сокровищницу теорий и мощь аппарата существующей математики.

Философское познание имеет мировоззренческий характер. А его научный аспект заключен, прежде всего, в развивающейся системе основополагающих философских категорий. Система философских категорий служит понятийной, координатной сетью, набрасываемой на исследуемые объекты. Она подобна ситу, через которое просеиваются истины, напоминает целостный план возделывания поля, на котором будет произрастать и плодоносить фундаментальное знание. Философское познание способно открывать и всеобщие закономерности. Среди них первостепенное значение имеют фундаментальные законы диалектики, сформулированные великим Гегелем.

В нашей книге рассматриваются и анализируются такие оппозиции, как «наука-культура», «субъект-объект», «объект-знание», «объект-модель», а также взаимоотношения между логикой и математикой, математикой и наукой, математикой и философией, фундаменталистским и социокультурным направлениями в философии математики. Подчеркнем, что мы придерживаемся строго фундаменталистсих взглядов на природу математики. Исповедуем метафизический подход, при котором, в частности, математика выступает как универсальная и вполне самостоятельная форма познания. Считаем, что специфика математики состоит в непреходящей научной ценности всех ее центральных результатов.

В предисловии нужно отметить некоторые особенности данной работы. Монография является переработкой предыдущих книг автора «Философия математики» [95] и «Математические очерки» [96], развитием и уточнением представленных в них положений, заданием новых тем.

Заметим, что на нас определенное влияние оказали замечательные книги В. В. Мадера [317], Н. Н. Непейводы [383], В. Я. Перминова [412].

Содержание книги достаточно хорошо видно из ее оглавления. Первые четыре главы относятся собственно к философии (метафизике) математики. Пятая глава посвящена дидактико-методическим вопросам математики. Приложение призвано, отчасти, конкретизировать основную философско-методологическую часть работы. В научно-популярных очерках I-VIII изложен ряд основных тем классической математики. При этом автором разработаны собственные математико-методические подходы к изложению некоторых тем (скажем, I, III, V).

Каждый из 26 параграфов и введение завершается перечислением источников из общего библиографического списка, имеющих прямое отношение к тематике соответствующего раздела. Непосредственные ссылки на литературу даются лишь в необходимых случаях.

Использован ряд хорошо известных цитат, почерпнутых нами из известных сборников афоризмов [116, 194] и книг [258, 428, 542, 582 и др.]. Большой библиографический список, приведенный в конце монографии, заведомо неполон.

Тематика основной части предлагаемой работы довольно обширна и разнообразна. Одни вопросы проанализированы достаточно подробно, другие мы только затронули или обозначили. Что-то, безусловно, преподнесено автором поверхностно, а что-то, возможно, имеет определенную новизну.

Материал всей книги пронизан определяющими идеями единства математики и ее лидирующего положения в науке.

Мы надеемся, что знакомство с книгой будет небесполезно для людей с разной научной, философской или методической подготовкой, которым математика и ее осмысление небезразличны.

Вятка, май 2006 года.

Е. Вечтомов

Введение. Феномен математики

Математика – царица всех наук.
Карл Гаусс

Наука математика зародилась в древнегреческих школах Фалеса и Пифагора (VI-V века до н. э.). В качестве пранауки, набора алгоритмических правил, предназначенных для практических вычислений и измерений, математика существовала за тысячелетия до этого в Китае, Вавилоне, Египте. Но 2500 лет тому назад в первых научно-философских школах начал вызревать дедуктивный метод, направленный на логическое обоснование применяемых эмпирических правил и предполагающий более четкое осмысление исходных математических предпонятий числа и геометрической фигуры. Дедукция (выведение), то есть строгие логические рассуждения и доказательства, стала отправным пунктом развития математической науки. Знаменитые «Начала» Евклида явились важнейшим запечатленным свидетельством возникновения математики и образцом научности. Как отдельная наука, логика оформилась в трудах Аристотеля (IV век до н. э.), предложившего в своем «Органоне» первую формальную систему дедукции – теорию силлогизмов.

Почти одновременно со становлением математики в Древней Греции появляется *философия* (западная философия). Философия (по-гречески «любомудрие»), существующая с самого начала как единое учение о бытии, постепенно подразделяется на *натурфилософию* (первое учение о природе, основанное на наблюдении и эмпирии) и *метафизику* (умозрительное учение о первоначалах мироздания). В пифагорейской школе философия и математика теснейшим образом переплетались. Математика также имела натурфилософскую и метафизическую составляющие. У Евклида геометрия – это метафизика реального пространства.

Пифагореизм включал в себя математику и в своих представлениях существенно опирался на нее. Пифагор и его ученики считали математику уделом и привилегией избранных, дававших обет молчания о результатах своих размышлений. Открытие несоизмеримых отрезков (диагонали и стороны квадрата), приписываемое Гиппасу (по другим легендам, открытие сделал сам Пифагор или его ученик Теэтет), привело к расколу в рядах последователей Пифагора.

Суперрациональная и гармоничная философия Пифагора дала трещину. Изгнанный верными приверженцами пифагореизма Гиппас основал собственную школу, провозгласившую открытость математических знаний. И вслед за его сторонниками математика стала трактоваться (в переводе с греческого) как «учение», «наука», *«учусь через размышление»*.

Платон называл математику «серединной наукой», связывающей преходящий и несовершенный Мир вещей (Теней) с вечным и божественным Миром Идей (Форм). Математика выступает в роли посредника, универсального средства связи между двумя Мирами – материальным и идеальным. Мир вещей дает толчок к пробуждению разума и познанию Идей. Процесс познания есть сократовский диалог (майевтика) разбуженного разума с разумом (возможно, с самим собой), вызывающий «припоминание идей» по Платону.

В Древнем Риме термином «humanitas», означающим по-латыни природу человека, обозначался курс обучения, включающий семь так называемых свободных искусств: арифметику, геометрию, астрономию, музыку, грамматику, логику и риторику. Последние три дисциплины составляли диалектику, то есть то, что делает возможным обучение. Эти предметы вошли в состав гуманитарных наук в эпоху Возрождения. До середины XIX века все образование было гуманитарным, с математикой в качестве центральной дисциплины. Только во второй половине XIX века гуманитарными были названы дисциплины, не относящиеся к естественным наукам. Произошел «трагический раскол культуры», как писал в своей книге «Две культуры» [503] Чарльз Сноу.

Никакая *научная картина мира* невозможна без математики. В своей наивной натурфилософии древние греки впервые в истории осознали могущество человеческого разума, признали необходимость и возможность исследования природы. Закон и порядок существуют в природе, и математика есть ключ к их пониманию. Математика способна открывать истины о природе [258, 259].

Механистическая картина мира, основоположником которой был Рене Декарт, целиком базировалась на математических законах. В «Принципах философии» он писал, что «одной лишь математики вполне достаточно для изучения физического мира, математика – сущность всех наук». Предвестниками философии картезианства были естествоиспытатели Николай Коперник, Тихо Браге и Иоганн Кеплер, открывшие математические законы гелиоцентрической системы мира. Галилео Галилей и Фрэнсис Бэкон обогатили научный метод Декарта, дополнив его экспериментальным способом познания. Ведущий гносеологический принцип – *принцип математизации знания* – Галилей выразил так: «Измерить все, что измеримо, и сделать измеримым то, что таковым пока еще не является». Методология Галилея подготовила почву для научных изысканий Исаака Ньютона и Готфрида Лейбница.

Вслед за Галилеем Ньютон придерживался методологического принципа – для всякого явления природы искать его математическое описание, а не физическое объяснение. Данное положение совершенно созвучно следующему высказыванию знаменитого физика XX века Поля Дирака: «Доверять математической схеме, даже если она, на первый взгляд, не связана с физикой... Следует не доверять всем физическим концепциям». Это высказывание можно дополнить словами другого выдающегося физика Ричарда Фейнмана: «Каждый новый закон физики – это чисто математическое утверждение». В своем главном сочинении «Математические начала натуральной философии» Ньютон ставит математику на первое место в естествознании; для него математика не только инструмент физического познания, но и источник новых фундаментальных понятий. Ньютон и Лейбниц создали дифференциальное и интегральное исчисление – мощный аппарат научного изучения природы. В XVII-XVIII веках математика находилась в самом центре научного видения мира – *сциентизма*.

В механистической философии ведущим общим методом исследования выступает *редукционизм*, сводящий познание целого к его частям, которые в свою очередь разлагаются на определенные первичные элементы. Последующая дифференциация знания, вычленение и становление отдельных наук также базировались на принципе редукционизма. С философской точки зрения современная научная картина мира, признавая роль анализа, тяготеет к междисциплинарному синтезу наук, проповедует системный подход, *холизм*. Холистический принцип познания утверждает, что целое имеет новое, более высокое качество по сравнению с составляющими его частями, что выражается метафорой «целое больше суммы своих частей».

На протяжении XIX столетия математика постепенно вставала на современные рельсы. Многие интуитивно понимаемые математические абстракции, доказательства и построения обрели строгую логическую форму, сама логика математизировалась, появились неевклидовы геометрии, возникла канторовская теория множеств – основа обновленной классической математики. Принципиально изменились воззрения на математику, ее методология. Если раньше математика была мощным орудием научного познания действительности, то к началу XX века она становится универсальным средством описания возможных миров. Зародились главные направления в основаниях математики – логицизм, интуиционизм и формализм.

Аксиоматика Пеано натурального ряда чисел и аксиоматика Гильберта трехмерного евклидова пространства явились первыми ласточками всеобщей аксиоматизации математики в XX веке. Аксиоматическое изложение теоретико-множественной математики в своих многотомных «Элементах математики» осуществила группа французских ученых, работавших под псевдонимом Никола Бурбаки. С середины XX столетия математики начали использовать достаточно удобный теоретико-категорный язык, по своей выразительной силе эквивалентный теоретико-множественному языку. Успешное развитие математической логики и теории алгоритмов способствовало появлению первых ЭВМ. Созданная Норбертом Винером кибернетика (наука об управлении сложными процессами) и программирование вошли теперь в информатику. Бурный процесс компьютеризации подстегнул опережающее развитие дискретной математики и сделал возможным широчайшее применение метода математического моделирования. Возникшая 35 лет назад синергетика («совместное действие»), опирающаяся на современную теорию динамических систем, становится мощным инструментом исследования всевозможных нелинейных явлений, процессов неустойчивости, хаоса.

Философия науки на Западе в XX веке носила явный отпечаток релятивизма, натурализма и эмпиризма; рационализм был не в моде [506]. Подобный эмпиризм привязывает научную методологию к экспериментальным методам и теоретическим приемам рассуждений, принятым в отдельных естественных науках; объективная истина становится принципиально зависимой от способов ее добывания (такой подход в теории познания называется операционализмом). Синергетика естественнонаучную теорию нелинейных динамик, названную И. Р. Пригожиным неравновесной термодинамикой, экстраполирует на всю науку и культуру. В строго научном плане подобные «поползновения» вряд ли правомерны. Истории человечества известны такие попытки – это и различные богословские учения, и, скажем, атомизм, механицизм или дарвинизм. С другой стороны, социокультурная философия и постмодернизм стремятся перенести гуманитарные закономерности на сферу естествознания, на точные науки. Только математика как универсальная и беспристрастная наука способна служить общей, адекватной и точной научной основой описания Мира.

В отличие от других областей знания математика сохраняет свои устои и принципы, идущие еще от Пифагора, Евклида и Архимеда. Математика изучает универсальные абстракции, укорененные в бытии посредством «внешних» категорий *формы* и *количества*, проникая через них к содержанию и сущности вещей. В этом заключается *природа математики*. Математика широко применима к окружающей действительности через математические структуры и математические модели, создаваемые математиками как по внутреннему побуждению и логике науки, так и благодаря запросам практики. Универсальность математики и эффективность ее приложений обусловлены природой математики и коренятся в единстве Мира, гармонии материального и идеального. Анри Пуанкаре постулировал, что «единственная настоящая реальность есть внутренняя гармония мира»; всякая другая реальность случайна и эфемерна. Наряду с принципом математизации знания научная картина мира должна включать *принцип гармонии*, красоты, целесообразности. Категории гармонии, красоты и целесообразности предполагают и предопределяют друг друга. В человеческом познании принцип гармонии выступает в качестве *эстетического отбора подлинного*, реализуется через эволюцию знания. Никчемные понятия и теории отмирают, целесообразные же идеи выживают и совершенствуются, фундаментальные истины непреходящи. Поступательный процесс эстетического отбора, отсеивая ложное или несущественное знание, высвечивает и выверяет истину.

Математика в научном познании Мироздания является точным и лаконичным общенаучным языком, универсальным аппаратом, мощным инструментом исследования, критерием истины, объективной методологией науки. Одна и та же математическая формула или модель может быть приложима к целому спектру явлений. Роль математики в науке аналогична роли логики в математике, а также подобна значению науки в жизни или научного познания в человеческом познании вообще. *Феномен математики* состоит в том, что она сама по себе образует автономную специфическую форму познания, включающую структурный анализ бытия, его формальное воспроизведение, дедуктивно-модельный способ обретения точного знания. Конечно, наряду с научной, в том числе математической формой познания существуют и такие формы познания, как философская, художественная, религиозная, мистическая, обыденная. Математику можно считать также феноменологией – конкретно-всеобщей наукой о явлениях с точки зрения их структурной определенности и классификации.

В последние десятилетия в сфере культуры и философии, в частности философии науки, идет острая борьба между фундаменталистами и нефундаменталистами. Фундаментализм опирается на разум, здравый смысл, реальность, логику и науку, провозглашает рациональные ценности и необходимость научного образования. Это направление стремится обосновывать существование фундаментальных основ бытия и мышления, вырабатывает общую картину мира. Фундаментализм воспитывает в человеке – такое естественное для людей – оптимистическое мироощущение. Нефундаменталистское течение проявляется в социокультурном подходе и постмодернизме. Социокультурный подход делает акцент на исторические, общественные и культурные аспекты и особенности развития научного знания, возвышает субъективизм и релятивизм в познании и в жизни. А постмодернизм превозносит иррационализм и нигилизм, негативен и деструктивен, порождает индивидуализм и ощущение бессмысленности жизни. Он отрицает науку, а также метафизику, допускающую возможность целостного рационального понимания мира и построяемость единой научной картины мира.

Выскажем наш взгляд на соотношение понятий философии, метафизики и методологии. Сначала приведем авторитетные мнения Бертрана Рассела и Т. И. Ойзермана о философии. Рассел во введении к своей книге «История западной философии» [448] назвал философию «Ничьей Землей», лежащей между точным знанием и догмами, то есть между наукой и богословием. Исходным же тезисом монографии Ойзермана «Философия как история философии» [394] является такое понимание: «Философия существует только как философии, то есть как неопределенное множество различных, противостоящих друг другу философских систем». По его мнению, философия не существует без своей генетической предпосылки – истории философии, допускающей «плюрализм философских учений».

Разделяя эти взгляды, мы формулируем следующее понимание философии. Во-первых, философия есть анализ генезиса и истории интеллектуальных учений. Во-вторых, задачей философов является создание и разработка собственных рациональных или трансцендентных мировоззренческих систем, дающих ту или иную общую картину мира. Данные направления можно отнести к истории философии. Научным же аспектом философии служит построение общей методологии, базирующейся на стройной системе философских и общенаучных категорий и законах диалектики. Именно эту составляющую философии можно назвать метафизикой науки. Заметим, что в классической традиции метафизика часто отождествляется с **онтологией** – учением о бытии как таковом.

Метафизика, или онтология, математики – важнейшая отрасль философии науки и теории познания, в которой исследуются, так или иначе, решаются вопросы о природе и статусе математики, о ее гносеологических истоках и основах, вопросы оснований и методологии математики. Научно-философское обсуждение совокупности данных проблем суть попытки ответа на первичный вопрос – **что такое математика?**

Классическая философская традиция отождествляет также метафизику со всей философией. Мы считаем метафизику собственной частью философии, а методологию – частью метафизики. Если философия означает мировоззрение, метафизика – умозрение, то методология есть научное воззрение. *Методология математики* – это учение о структуре и архитектуре математики, способах получения, построения и изложения математического знания, общих и специальных методах математического познания, организации математической деятельности человека.

В цепочках **философия→метафизика→методология** и **знание→наука→математика** точность, простота и обосновательная сила утверждений и выводов нарастают. Наука занимается точным знанием, к которому, конечно, не сводится все знание. Но и не всякое точное знание может быть строго обосновано. К такому знанию можно отнести некоторые очевидности как априорного, так и эмпирического происхождения.

Математика сродни философии. Обе занимаются глобальными вопросами, исследуют фундаментальные понятия и категории. Только философия и метафизика пытаются уловить «сущность», а математика успешно справляется с «явлением».

Завершим предисловие словами создателя нестандартного анализа Абрахама Робинсона: «Математика будущего, как и математика прошлого, будет включать исследования, относящиеся к философии математики».

Литература: [95, 113, 114, 175, 182, 207, 258, 259, 333, 379, 394, 443, 448, 503, 519, 558, 574, 610].

Глава 1. Математика и теория познания

Мы не знаем, долго ли
просуществуют земля и небо,
но знаем, что всегда 3 и 7 будет 10.
Аврелий Августин

Вступление

Теория познания – это важнейшая область философии, связанная как с **онтологией**, так и с человеческим **сознанием**. Она обозначается терминами **гносеология** и **эпистемология**, которые одни философы склонны отождествлять, другие – различать. В неклассической философии эпистемология (наряду с методологией науки) выступает как часть гносеологии, или теории познания. Если гносеология всесторонне исследует основополагающее отношение **субъект-объект**, то в центре интересов эпистемологии находится отношение **объект-знание**. В эпистемологии рассматривается само знание, его строение и эволюция. Следует отметить, что теория познания в древнегреческих научно-философских школах полностью относится к эпистемологии.

В нашей книге мы придерживаемся эпистемологии, стараясь отвлечься от исторических, социокультурных и психологических аспектов познания. Если идет речь о субъекте познания, то в таковом качестве выступает объективированный, лишенный эмоций и психологических наслоений человеческий разум, то есть незамутненное сознание и чистое мышление. Мы сознательно делаем упор на метафизическом подходе к математике и науке, считая умозрительный подход к своей науке (можете назвать его спекулятивным), опирающийся на математические знания, наблюдения и собственную деятельность, оправданным и достаточно объективным.

Не следует обожествлять человеческий разум и считать – вслед за Протагором – человека «мерой всех вещей». Как известно, поставить себя на место обобщенного субъекта, понять человека вообще проще, чем изучить конкретную личность. Тем не менее познание самого себя, к чему призывал Гераклит, совершенно необходимо, поскольку открывает новые горизонты и границы нашего познания. Как говорил австрийский философ Мориц Шлик в 1930 году, «существует познание, и ничего, кроме познания, его цель – только истина».

§ 1. Объект и предмет математики

> Чистая математика имеет своим объектом
> пространственные формы
> и количественные отношения
> действительного мира.
> *Фридрих Энгельс*

В жизни современного общества математика играет все большую роль. Математика есть универсальный язык науки и мощный метод научного исследования. Математика – это и самая безупречная логика, и объективная доказательность, и наиболее совершенный способ мышления. История математики являет собой грандиозное свидетельство интеллектуального развития человечества за последние тысячелетия. Пьер Гассенди утверждает: «Если мы что-то знаем, то это благодаря изучению математики». По словам М. В. Ломоносова, «математику уже затем учить надо, что она ум в порядок приводит». И это относится к каждому человеку, человеку любой профессии.

Вглядываясь в математические тексты, мы видим специальные знаки, с помощью которых записаны специфические выражения. Эти выражения подразделяются на *термы*, обозначающих предметы, то есть элементы предметных областей, и *формулы*, означающие высказывания о свойствах и отношениях данных предметов. Математические выражения преобразуются друг в друга по четко заданным правилам. Скажем, термы упрощаются, свертываются с помощью тождественных преобразований, а формулы переходят в более обозримые равносильные формулы. Внешне математические выражения преобразуются чисто формально – на основе только своей формы по абстрактным правилам. Однако за каждой формулой или термом стоит своя семантика – определенные смыслы, значения, интерпретации. Предварительное знание некоторых смыслов подкрепляет *логическое* мышление *интуитивным* предвидением конечной формы преобразуемых математических выражений. Математический язык способен выразить многие и разнообразные явления окружающей действительности и человеческого сознания. Абстрактные понятия и формулы математики повествуют о целых множествах подобных, формально связанных между собой явлений, о явлениях сходных, сравнимых по тем или иным параметрам. Эти параметры имеют по необходимости структурный характер, который и схватывает математика.

Рассмотрим важнейшие аспекты, объединяющие различные математические дисциплины в единое целое – в *математику*. Дадим сначала общую характеристику математике.

Математика изучает универсальные абстракции, укорененные в бытии посредством категорий формы и количества. *Число* и *геометрическая фигура* – исходные абстракции, непосредственная *математическая реальность*, составляющие – вместе с их обобщениями – предмет математики. Эффективность математики и ее приложений обеспечивается, по-видимому, предполагаемым *единством Мира* – на той или иной первооснове: Бог, абсолютная идея, законы природы и т. д.

Для уяснения роли и значимости математики в научном познании мира и в профессиональном образовании необходимо понять, что такое математика. Природа математики (как и любой науки) определяется спецификой ее объекта и предмета изучения, основными методами исследования, а также выделением различных ее характерных черт. Перечислим соответствующие подходы и описания.

Математика является наукой о пространственных формах и количественных отношениях окружающего мира (Фридрих Энгельс).

Математика – учение о количестве (Галилео Галилей).

Суть математики в числах (пифагорейцы).

Математика – наука о форме.

Математика есть наука о мере и порядке (Рене Декарт).

Математика – мера всех вещей.

Математика – часть логики (логицисты).

Математики играют в символы (формалисты).

Математика есть предмет, в котором неизвестно, о чем мы говорим и верно ли то, что мы говорим (Бертран Рассел).

Математика – особый вид интеллектуальной деятельности (интуиционисты).

Математика – это доказательство (Никола Бурбаки).

Математика изучает математические структуры (Никола Бурбаки).

Математика – это наука о бесконечном (Герман Вейль, Давид Гильберт).

Математика – это искусство давать разным вещам общее имя (Анри Пуанкаре).

Математика есть также искусство одно и то же называть по-разному (фольклор).

Математика исследует универсальные абстракции.

В математике все есть (физики-теоретики).

Математика изучает самое себя (фольклор).

Математика – колоссальная метафора.

Математика – самая простая наука, и в то же время одна из самых трудных.

Математика воспитывает личность (этический аспект).

Математика есть истина об условном, а логика – об абсолютном.

Математика – наука о явлениях, то есть феноменология.

Приведенные определения высвечивают самые существенные стороны математики и ее методологии. Эти суждения вкупе с анализом истории и тенденций развития математики позволяют нам еще тверже сформулировать следующие положения.

Объектом математики как науки являются фундаментальные категории *формы* и *количества*, взятые в наиболее общем и чистом виде, и всевозможные их проявления. *Предметом математики* служат разнообразные *математические структуры* и *математические модели*, которые появляются (открываются или изобретаются) в результате интеллектуальной деятельности человека как продукты рефлексии или отображение реальности. А общий *метод математики* есть строгая дедукция.

Итак, математика есть наука о форме и количестве и четких схемах их бытия и воплощения. Поэтому математика универсальна как метод, аппарат исследования и получения научного знания и как точный язык его описания. Математика имеет многочисленные теоретические и практические приложения, адекватные действительности. Именно в рамках математики возник общенаучный дедуктивный метод, широко применяемый не только в естествознании и технике, но и в гуманитарных науках и обществоведении. Современная математика включает логику как науку о формах правильного мышления; традиционная логика получила дальнейшее развитие в русле математической логики. Если естественные науки изучают природу, а гуманитарные и социальные науки – человека и человеческое общество, то математика исследует в ее же недрах полученные абстракции, то есть в известном смысле самое себя. В этом отношении математика близка к философии, научная составляющая которой отражена в постоянно развивающейся системе философских категорий.

Чтобы понимать математику, надо знать ее историю, место и роль в познании, в системе наук, иметь определенные представления о методологии и философии математики, что непосредственно связано с мировоззрением. Мировоззрение в целом, в широком смысле есть идеология, а научное мировоззрение – методология науки, или научная идеология, способная дать общую научную картину мира. Философское мировоззрение, помимо научных аспектов (точного знания), может содержать трасцендентальные абстракции и образы, догмы и домыслы, которые относятся, по Расселу, к сфере веры и религии. Мировоззренческими вопросами занимаются общественные науки, но, главным образом, – философия. Созданные великими философами системы, так или иначе объясняющие мироустройство, – это идеология, возможно, целых эпох.

Современная научная картина мира зиждется на двух общих принципах (российский математик и философ, академик И. Р. Шафаревич): принципе *математизации знания* и принципе *гармонии*, или *эстетического отбора*. Принцип математизации заключается, во-первых, в широком применении математических методов и теорий в других науках, технике и практике и, во-вторых, в построении наук, особенно естественных, по образу и подобию математики, дедуктивно. Наиболее ярко эта методология выражена в известном тезисе Галилея: «Измерить все, что измеримо, и сделать измеримым то, что таковым пока еще не является».

Из всех наук математика наиболее эстетична и, значит, целесообразна. Английский философ XIII века Роджер Бэкон утверждал, что «тот, кто не знает математики, не может узнать никакой другой науки и даже не может обнаружить своего невежества». Как отмечает российский математик акадкмик В. И. Арнольд, за семь веков мало что изменилось. Еще несколько цитат. Готфрид Лейбниц: «Вечные истины значимы совершенно независимо от какого-то ни было фактического состояния действительности, какова бы она ни была».

Галилей: «Философия написана в грандиозной книге – Вселенной, которая открыта нашему пристальному взгляду. Но понять эту книгу может лишь тот, кто научился понимать ее язык и знаки, которыми она изложена. Написана же она на языке математики...». Леонардо да Винчи: «Ни одно человеческое исследование не может называться истинной наукой, если оно не прошло через математические доказательства». Иммануил Кант заметил: «Учение о природе будет содержать науку в собственном смысле лишь в той мере, в какой может быть применена к ней математика».

Принцип эстетического отбора (подобно принципу естественного отбора Чарльза Дарвина) заключается в научном выживании и доминировании более красивых и совершенных понятий, идей, методов и теорий, отражающих *совершенство мира* и утверждающих *целесообразность красоты* (писатель-фантаст и ученый И. Е. Ефремов). Так, теория *групп* остается ведущей ветвью современной алгебры. Возникнув в трудах выдающихся французских математиков Жозефа Луи Лагранжа и Эвариста Галуа (группа подстановок корней алгебраического уравнения), группы проникли во многие разделы математики и естествознания. Это объясняется как важностью групп преобразований в самой математике, так и тем, что группы отражают фундаментальное понятие *симметрии*. Однако понятие груды, определяемой как алгебра с некоторой тернарной операцией и обобщающей понятие группы, не прижилось в математике. Отчасти, возможно, и благодаря своему названию.

О чем говорят эти высказывания? Все они подтверждают принцип математизации знания, его объективность и первенство в научном познании, подводят к следующему фундаментальному **методологическому тезису:**

математическая форма (формулы, модели) предметной теории (физической, химической, биологической, экономической и т. д.) сохраняется, содержание предметной теории может меняться, а прояснение ее сущности вообще проблематично (принадлежит философии).

В качестве примера можно взять теорию распространения света. Соответствующие математические формулы (геометрическая оптика) давно установлены. А физическая природа света трактовалась по-разному: корпускулярная (существуют молекулы света), волновая, корпускулярно-волновая, квантовая, полевая. Еще загадочнее обстоит дело с гравитацией.

На уровне математического описания познаваемость мира не вызывает сомнений. Как это происходит? В результате человеческой деятельности создан и продолжает совершенствоваться мощный и точный *математический язык*. На этом языке определяются и выражаются математические структуры, описывающие предметные модели исследуемых объектов (вещей, процессов, явлений). Наблюдение, эксперимент и размышление над конкретным реальным объектом приводят ученых к созданию его предметной теории. Полученные в ходе исследования и измерений математические закономерности ложатся в основу математической модели данной предметной теории. Математическая модель описывается в терминах той или иной математической структуры, изучение которой приводит к соответствующей математической теории. Результаты этой теории, будучи интерпретированы в предметной теории, приводят к новым конкретным знаниям об исследуемом объекте. Такой последовательный процесс обобщения, формализации, математических преобразований и конкретизации называется в науке *дедуктивным методом*, созданным еще в IV веке до Р. Х. древнегреческим ученым Аристотелем.

В современной математике математические структуры и их теории строятся и излагаются, как правило, на *аксиоматической* основе. Впервые аксиоматический подход к математике осуществил древнегреческий математик Евклид. Вся геометрия того времени (примерно 300 год до Р. Х.) выводилась из пяти наглядных геометрических постулатов и нескольких логических аксиом. Правда, не была понята роль первичных понятий; у Евклида все понятия, так или иначе, определялись (например, «линия – это длина без ширины»). Аксиоматика Евклида является *материальной аксиоматикой*, которая описывает реальное физическое пространство. Геометрия Евклида – это «физическая» математика – изучаемые в ней объекты (точка, прямая, плоскость) имеют наглядную объективную природу, а постулаты суть очевидные истины о реальном пространстве.

Обычно специалист в предметной области, имеющий хорошую математическую подготовку, или математик-прикладник, не создает новых математических моделей и теорий, а использует уже известные разработанные математиками теории, выбирая из них наиболее подходящую. По словам российского математика М. М. Постникова, выбираемая или создаваемая математическая модель не должна быть ни очень простой (чтобы адекватнее отразить ситуацию), ни слишком сложной (чтобы ее результативно применять). Приведем примеры опережающего характера математики. Конические сечения изучались Аполлонием за 2000 лет до открытия немецким ученым Иоганном Кеплером законов движения планет вокруг Солнца. Идея ЭВМ высказывалась еще французским ученым Блезом Паскалем и немецким математиком и философом Готфридом Лейбницем, а соответствующий математический аппарат (алгебра высказываний) разработан английским математиком Джорджем Булем задолго до создания первого компьютера. Волновая механика создавалась английским физиком-теоретиком Эрвином Шредингером, когда уже был известен использованный ею матричный вариант квантовой механики Гейзенберга (Вернер Гейзенберг – немецкий физик-теоретик, лауреат Нобелевской премии). Как говорится, нет ничего практичнее хорошей математической теории.

К какому разряду наук отнести математику? В. И. Арнольд считает математику естественной наукой, наукой о природе: «Математика является экспериментальной наукой – частью теоретической физики и членом семейства естественных наук» [18]. Благодаря практике математика возникла и развивается, а благодаря ее приложениям – ценится. Выдающийся польский математик Анджей Мостовский также утверждал, что математика – естественная наука.

Логик и математик Н. Н. Непейвода относит математику к гуманитарным наукам, «разные области которой обслуживают разные сферы человеческой деятельности» [383].

Другой точки зрения придерживается М. М. Постников [438]: задача математики – создание и изучение разнообразных математических структур, или схем. Развитие математики происходит по внутренней необходимости, в соответствии с принципом эстетического отбора. «Что изучает математика?» – вопрошает

Постников. Физика изучает природу, а физики изучают модели реальной природы. Здесь термин *модель* понимается в самом широком смысле. Схожесть моделей в том, что они имеют общую *схему*. По Постникову, под математикой понимается наука, изучающая все возможные – хотя бы мысленно – схемы, их взаимосвязи и методы конструирования, иерархии схем и т. д. На место традиционных главных вопросов философии – о первичности материи или сознания и познаваемости мира – он ставит следующие. Почему мы познаем мир посредством моделей? Это *первый основной вопрос философии природы*, который еще не поднимался. В чем причина схожести различных моделей, почему они могут иметь общую схему? Это *второй основной вопрос философии природы*, не имеющий четкого ответа до сих пор. Постников не считает математику ни естественной, ни гуманитарной наукой.

Действительно, математику трудно отнести к естественным, гуманитарным, общественным или техническим наукам. Скорее, математику можно представить как особую науку («царицу наук») и специфическую форму научного познания. Ее значение – в дедуктивном методе, научной методологии, мощном надежном инструментарии, универсальности, действенной красоте, эффективности в приложениях.

Однако многие методисты считают математику, особенно как изучаемую дисциплину, гуманитарной наукой, стержнем современного, по крайней мере, школьного гуманитарного образования [376].

Литература: [5, 18, 19, 23, 39, 72, 76, 78, 98, 100, 160, 166, 187, 252, 292, 314, 317, 327 336, 337, 366, 367, 376, 383, 410, 425, 426, 438, 446, 449, 466, 473, 543, 558, 602, 621, 632, 636].

§ 2. Гносеологические истоки математики

Мысль – мать деятельности,
она живая душа ее,
не только зачинщица,
но и охранительница.
Томас Карлейль

Математическое познание, как и процесс получения любого знания, невозможно без соответствующих гносеологических истоков, или предпосылок. Учитывая анализ математической деятельности человека, к таким истокам нужно отнести следующие основания: *априорности*, *очевидности*, *логику*, *интуицию*, *эмпирию* (опыт) и *деятельность* (практику). Ни одно из этих оснований в отдельности не может считаться достаточным для философского обоснования математики и прояснения ее природы. Все факторы действуют в совокупности, и должны все вместе учитываться философией математики. С другой стороны, данные ипостаси познания относительно самостоятельны, представляют собой различные, хотя и взаимосвязанные, грани единого Мира.

Рассмотрим подробнее отмеченные истоки математики.

Априорности. Существуют изначально присущие человеческому сознанию априорные (до опыта) формы созерцания и априорное знание. Человеку с рождения присущи зачатки априорных восприятий пространства, времени, причинности, которые в процессе человеческой деятельности проявляются и развиваются в устойчивые представления объективного характера. Без априорных восприятий, как и без естественной деятельности, невозможна ни ориентация человека в окружающем мире, ни пробуждение сознания, ни самосознание, ни человеческое познание.

Исходное пространственное восприятие протяженности, силуэтов отдельных предметов, их расположения и формы способствует формированию пространственных представлений человека и приводит к осознанию геометрических очевидностей. Априорное восприятие времени позволяет ощущать направленный ход времени через ряд последовательных мгновений, как череду актов деятельности, как калейдоскоп сменяющихся «кадров-картинок». Здесь наглядные прообразы дискретности и непрерывности незаметно перетекают друг в друга, и мы приходим к предпонятиям натурального числа и числовой прямой. Первичное восприятие причинно-следственных связей подталкивает мышление к признанию законов логики.

Математические очевидности. Совместно с априорными началами в математике основополагающую роль играют так называемые аподиктические очевидности. Это объективные неизменные очевидности, «общезначимые тривиальности», не зависящие ни от опыта, ни от логики, ни от психологии. Помимо аподиктических очевидностей существуют ассерторические очевидности, определяемые как очевидности опыта, носящие относительный, субъективный и изменчивый характер. Скажем, равновероятное выпадение «орла» и «решки» при подбрасывании монеты есть аподиктическая очевидность, а выпадении ровно пяти «орлов» при конкретном подбрасывании десяти монет (вероятность этого события меньше 1/2) – это ассерторическая очевидность.

В. Я. Перминов [412, с. 16-19] выделяет и характеризует следующие основные виды математической очевидности: эмпирическую, концептуальную, предметную, логическую, геометрическую, очевидности аналогии и структурного тождества. В то время как эмпирическая и концептуальная очевидности и очевидность аналогии носят ассерторический характер, математические очевидности остальных типов являются аподиктическими. Эмпирические и концептуальные очевидности имеют дело с образами, которые либо заменяют математические объекты (так, непрерывность числовой функции понимается как гладкость ее графика), либо направлены на внешнее прояснение теории (через ассоциации в рамках других концепций). Аналогия является важнейшим эвристическим принципом переноса результатов. Указанные три типа очевидностей не обладают строгой доказательностью. К предметной очевидности относятся арифметические очевидности (например, 1+1=2) и геометрические очевидности (так, через две различные точки проходит ровно одна прямая). Однако В. Я. Перминов специально выделяет геометрическую очевидность, поскольку не всеми математиками она признавалась и признается математически обосновательной (вспомним хотя бы Лагранжа с его «Аналитической механикой», из которой изгнаны все рисунки, или формалистов с логицистами).

Элементарная же геометрическая очевидность аподиксична (к ней относятся правила простейших геометрических построений). Логическая очевидность, безусловно, самоочевидна и доказательна. Даже не зная исходных законов логики, человек в состоянии пользоваться ими на практике (укажем закон исключенного третьего и закон силлогизма, правило отделения). Наконец, очевидность структурного тождества заключается в непосредственном узнавании типа данного математического объекта и усмотрении тождественности (изоморфности) конкретных структур. Подчеркнем еще, что любое математическое доказательство можно разбить на элементарные аподиктические шаги, истинность которых усматривается непосредственно, что выражается словами «очевидно», «легко видеть», «ясно» и т. п. Логическая очевидность позволяет связать эти элементарные шаги в цепочку безупречного вывода.

Классическая логика. На наш взгляд, классическая двузначная логика носит вселенский характер, являясь абсолютной истиной. Все другие логики строятся и изучаются средствами классической логики, поскольку именно так мы мыслим. Законы аристотелевской логики остаются законами и современной логики. Использование логики (зачастую неосознанное) в математической деятельности опирается на логическую очевидность. Известное нам устройство мира и человеческая практика подтверждают это положение.

Широко распространенное изречение гласит: «Логика лишь объясняет завоевания интуиции». Действительно, образное мышление и интуиция способны дать первоначальное понимание математических фактов. Далее в работу включается рассудок. Логика есть рациональное начало, форма существования рассудка. На логике зиждется дедукция. Строгие определения понятий, формулировки и доказательства теорем – это результаты логического мышления. Логика также открывает новое знание. Процесс логического оформления и обоснования точного знания порой долог и труден и составляет важнейший этап научного познания.

Интеллектуальная интуиция. Интуиция есть прозрение, подсознательное схватывание истины, зависящее от специфических свойств разума отдельной личности. Интуиция не рассудочна, связана с образным мышлением, с индивидуальным опытом человека.

Интеллектуальная интуиция – это не интуитивное предчувствие чего-либо, а мгновенный акт «прострела» сознания или результат подспудных размышлений вокруг определенной задачи. Если предыдущие когнитивные основания математики (априоризм, очевидности, логика) объективны и универсальны, то интеллектуальная интуиция субъективна в том смысле, что степень непосредственного овладения истиной у разных людей может быть различной.

С. Л. Франкл говорил об интуиции как единственном средстве непосредственного восприятия мира, как единственном способе адекватного познания Абсолюта (абсолютного бытия). См. [571].

Эмпирия. Кроме априорных восприятий человека и его инстинктов познание базируется на чувственных ощущениях действительности, на сенсорике, на опыте. Опыт приобретается в результате общения человека с окружающим миром, то есть в результате деятельности.

Деятельность. Деятельность понимается в широком смысле слова и отождествляется с практикой. К человеческой деятельности относятся действия людей, их наблюдения, эксперименты и размышления. Как интуиция и эмпирия, деятельность человека, наряду с объективной составляющей, имеет и субъективные черты. Человеческая деятельность индуцирует, опосредует, высвечивает и исходные очевидности, и логику, и интуицию, корни которых находятся, однако, вне практики и относятся к категории разума. Деятельность пробуждает и развивает интеллект, служит необходимым основанием познания. Отметим, что в последнее время деятельностному подходу в теории познания и в дидактике, в частности в методике обучения математике, стало уделяться повышенное внимание.

Незаменимую роль в человеческом познании играет **неявное знание**, по-видимому, базирующееся на всех шести истоках, в чем-то гносеологически близкое к априорности, очевидности и интуиции. Неявное знание зарождается неосознанно и стихийно. Неявное знание – это знание, в первую очередь, личностное, индивидуальное [430]. Но оно способно передаваться в процессе общения и обучения. И, тем самым, становиться знанием групповым, коллективным, профессиональным.

В статье [527] Л. Б. Султанова исследует место неявного знания в математике, отмечая, что понимание его важности пришло лишь в XX столетии при аксиоматической перестройке основ математики. Автор пишет, что «неявное знание в математике представляет собой скрытые леммы или определения, имеющие вид аксиом, как, например, постулат параллельных до открытия неевклидовой геометрии». Важность неявного знания обусловлена высоким уровнем математических абстракций. «Это связано с возникновением так называемого неявного *коэффициента математической символизации*, который через неявное знание и далее через область бессознательного должен связывать абстракцию математики с реальностью. ... Понятно, что при этом возможно неосознанное чисто механическое использование абстракций, когда в них видят нечто вроде счетных палочек. Чем выше уровень абстракций, тем солиднее неявный коэффициент математической символизации и более вероятна такая возможность».

В комментарии В. Я. Перминова на эту работу указывается, что не следует преувеличивать влияние субъективных факторов на математическое мышление. Комментарий завершается словами: «Мы должны возвратиться к априористской теории познания, и это позволит нам, не упуская из виду глубокую индивидуальность и субъективность творческого процесса, понять возможность интерсубъективных оснований науки, независимых как от индивидуума, так и от эпохи».

Мы лишь вкратце коснулись основных предпосылок математического познания. Стоит заметить, что каждый из указанных истоков познания представляет собой целое направление в гносеологии. Такие течения философской мысли, как априоризм, рационализм, эмпиризм, праксеология, развивались классиками философии и продолжают привлекать внимание исследователей в наши дни.

Литература: [26, 35, 38, 44, 97, 166, 174, 242, 243, 252, 317, 335-337, 383, 412-414, 417, 418, 421, 425, 426, 430, 450, 466, 471, 490, 517, 527, 558, 571, 572, 611].

§ 3. О системе философских категорий

Понимание явления сводится
к выявлению его структуры.
Макс Вертгеймер

Под системой философских категорий понимается множество важнейших исторически сложившихся универсалий (общих понятий), через которые можно определить другие общие понятия, выразить знание. Философские категории можно уточнить как на основе логических и общематематических понятий, так и филологически.

Философские категории суть фундаментальные универсальные понятия, в совокупности позволяющие отразить любое явление и само мироздание всесторонне, во всем многообразии. Категории будоражат ум (как Сократ своих сограждан) вопросами типа Кто? Что? Где? Когда? Как? Какой? Сколько? Куда? Почему? Зачем?, последовательно отвечая на которые, человек познает мир. В самом деле, *кто* говорит о субъекте, *что* вещает об объекте и о содержании, *где* – о пространстве, *когда* – о времени, *как* – о форме и методе, *какой* – о качестве, *сколько* – о количестве, *куда* – о направлении, *почему* – о причине и сущности, *зачем* – о цели и смысле. Система философских категорий представляет собой понятийную сеть, набрасываемую на изучаемые объекты, что позволяет конкретным наукам описывать их. Многие категории, отображая мир структурно, имеют, на наш взгляд, априорный, врожденный характер, стало быть, они объективны.

Неоспоримой заслугой философии как науки является создание стройной системы категорий. Основы этой системы заложены великим Аристотелем и опубликованы им в книге «Категории» [15]. Огромный вклад в развитие и совершенствование системы философских категорий, в их диалектику внес Георг Гегель (см. его знаменитый труд «Наука логики» [133]).

Законы диалектики

Гегель открыл, что всякое разумное движение, то есть развитие, опирается на *три фундаментальных закона диалектики*:

1) закон единства и борьбы противоположностей;
2) закон перехода количественных изменений в качественные;
3) закон отрицания отрицания.

Законы диалектики отвечают на три главных вопроса: *почему* возникает (причина), *как* происходит (форма, метода) и *куда* ведет (направление) любое целенаправленное движение или изменение. Универсальные законы диалектики дают максимально общие решения самых разных проблем бытия. В этом смысле законы 1)-3) – вместе с системой философских категорий и общенаучных понятий – составляют основу научной методологии. Но правильное приложение диалектики к конкретным вопросам, а не подгонка под ее законы, может быть трудной задачей, решение которой потребует частных знаний, напряженных размышлений, прозорливости и даже изобретательности.

Разумеется, законы диалектики применимы и к математике: к генезису ее понятий и идей, к разработке математических методов, к формированию математического аппарата, к открытию и доказательству теорем.

К системе философских категорий

Интеллектуальный и, хочется верить, духовный прогресс человечества, развитие культуры, науки и техники выдвигают на первый план все новые универсалии, важнейшие из которых приобретают статус философской категории. Например, в XX веке появились такие категории, как система и информация (согласно Н. Винеру, информация не является ни материей, ни энергией). К философским категориям относится и ряд общенаучных понятий: пространство, время, симметрия, бесконечность, дискретность и т. д.

Одна из главных задач философии – выделение категорий из всего многообразия общих понятий, их осознание, пояснение, описание и определение, системный анализ, то есть установление взаимосвязей и места каждой категории в системе категорий. Это необходимая и полезная работа. При строго научном подходе философские категории служат исходными, первичными понятиями, через которые можно четко выразить другие универсалии. Так должно быть: сами философские категории – неопределяемые понятия, а все другие универсалии суть производные понятия. Можно требовать и минимальности системы категорий, то есть в систему категорий не включать категории, определяемые через остальные категории системы. Например, Гегель понятие *метод* красиво, лаконично и всеохватно определяет через основные категории как «форму движения содержания»; оно является производным понятием, значит, его можно исключить из системы философских категорий. Хотя в другую систему категорий, возможно логически избыточную, понятие «метод» может входить. Итак, под системой философских категорий можно понимать базис пространства (мира, множества) универсалий – любую минимальную систему универсалий, порождающую все пространство универсалий. Понятие минимального словаря отдельной науки рассматривал Рассел в [451]. Однако условие минимальности является ограничением, устраняющим некоторые важные категории из ряда основополагающих философских категорий.

Поэтому мы даем следующее определение. *Системой философских категорий* называется множество признанных универсалий, через которые в принципе выражается любая универсалия. При этом формально допускается существование нескольких равноправных систем философских категорий. Тем не менее представляется, что все они должны иметь общее ядро, состоящее из хорошо известных философских категорий.

Уточнение системы философских категорий остается важной научной проблемой. Попытка общезначимого решения этой проблемы возможна в свете современной математики – на основе теории множеств, математической логики, компьютерной алгебры. Согласно *принципу математизации знания*, выдвинутому еще Галилеем, все науки можно построить и изложить по образу и подобию математики: описать закономерности численно, формулами и применить к ним математические вычисления и методы. Вся математика выразима на языке теории множеств, созданной Кантором в конце XIX века. Поэтому, наверное, к философским категориям следует отнести и первичные теоретико-множественные понятия: *множество* (класс), *элемент*, отношение *принадлежности*. При таком подходе многие устоявшиеся философские категории можно достаточно адекватно и четко определить через указанные понятия теории множеств. Подобная попытка предпринята в [416]. Так, категория *система* определяется как математическая структура, т. е. множество с заданными на нем отношениями.

Выявить и уточнить состав философских категорий можно и на филологической основе, анализируя словоупотребления в языке.

Возьмем, скажем, энциклопедический словарь и подсчитаем частоту различных слов (существительных и родственных им), входящих в словарь. Минимизируя список наиболее часто встречающихся существительных, через которые остальные слова, так или иначе, определяются, мы получим базис понятий данного словаря. Этот процесс можно компьютеризировать. Существуют так называемые частотные словари, которые полезно проанализировать с рассматриваемой точки зрения. Думается, на этом пути можно получить систему категорий, близкую к исторически возникшей в философии системе категорий.

Возможен и другой подход к описанию любых понятий. В конце XX века в логике стала разрабатываться теория *формализации неформализуемых понятий* [382; 383, § 13.6]. Данное неформализуемое понятие (как правило, гуманитарное) описывается во взаимосвязи с другими родственными понятиями, составляющими так называемый *тезаурус*. Формализация неформализуемого понятия представляет собой систему классических логических теорий, называемых *ипостасями* системы. Разветвление перетекающих одна в другую ипостасей позволяет целиком охватить описываемое неформализуемое понятие. Система формализации должна удовлетворять ряду естественных принципов (постулатов системы). Например, каждое расширение любой ипостаси имеет альтернативное расширение этой ипостаси, логически несовместимое с исходным расширением. Или такой принцип: пересечение множеств теорем всех расширений произвольной ипостаси совпадает с множеством теорем данной ипостаси. Н. Н. Непейвода показал, что в теории неформализуемых понятий каждая ипостась должна базироваться на классической логике, что еще раз подчеркивает исключительную роль классической логики в многообразии логик. Но при выражении ряда понятий, скажем, глобального понятия *знания о незнании*, необходимо единое обозрение совокупности формализаций, апеллирующее к неклассической логике.

Понятийный аппарат любой науки должен соответствовать системе философских категорий, специфически преломляющихся в конкретных областях. Философские категории отчетливо проявляют себя в математике.

Выскажем сначала некоторые общие соображения. Человек мыслит, имеет *разум*, с помощью которого познает мир. Познание есть процесс получения знания. Точное знание адекватно отражает мир, оно доказательно и проверяемо – им занимается *наука*. Научное знание, как и любое другое, добывается в ходе *деятельности* (наблюдение, размышление, эксперимент, общение). Составная часть разума, отвечающая за рациональное мышление – *логику*, называется *рассудком*. Значит, логику можно определить как форму существования рассудка. «Нерациональная» составляющая разума соответствует интеллектуальной *интуиции*. В творчестве и в обучении логика и интуиция одинаково важны, но на разных этапах познания, получения и осмысления знаний соотношение между ними меняется.

Во введении к своей книге «История западной философии» [448] Рассел объяснил место философии в человеческом познании – это «Ничья Земля между наукой и теологией». Наука добывает *точное знание*, а теология имеет дело с *догмами*, то есть с принимаемыми на веру общими положениями о мироздании, природе или обществе. Следовательно, по Расселу, философия есть синтез научного и догматического, является основой мировоззрения.

Следует заметить, что существуют целые серии близких по смыслу универсалий. В теории познания основополагающую роль играют следующие группы понятий:

(1) рассудок, разум, мышление, интеллект, сознание, идеальное;

(2) метод, способ, прием, средство, инструмент, алгоритм, подход;

(3) объект, предмет, вещь, материальное.

Конечно, понятия в этих сериях имеют свои смысловые оттенки, которые в определенных ситуациях нужно различать или, наоборот, можно не замечать. Рассмотрим каждую из приведенных групп понятий.

О сознании

При огрубленном подходе понятия из (1) отождествляются, причем к ним легко добавляются другие подобные: «ум», «мысль», «субъект» и т. п. Это слышится в обычной речи, читается в различных текстах. Гносеологически такие понятия необходимо объяснять и соизмерять друг с другом. Выпишем цепочкой основные понятия серии в порядке их сужения:

сознание ≡ разум ⊃ интеллект ⊃ рассудок.

Имеется в виду человеческое сознание. Хотя категория разума может иметь и вселенский смысл, например, когда мы говорим «разум Божий» или «внеземной разум». В рамках теории познания исследуются принципиальные дуализмы «сознание–бытие», «сознание–материя», «идеальное–материальное», «субъект–объект», «субъективное–объективное», «сверхчувственное–чувственное». Исторически они проистекают из дихотомии Платона «идеи–вещи». Первые компоненты перечисленных пар относятся к категории сознания, или идеального, а вторые компоненты – к категории бытия, или материального. Если материальное интерпретировать как действительность, реальность, то идеальное есть субъективная реальность, сфера мысли.

Сознание тождественно **разуму**. Действительно, разум человека входит в его сознание, с другой стороны, невозможно представить себе сознание вне разума. Разум (ум) подразделяется на *рассудок* (самосознание) и «подспудный разум», включающий в себя интеллектуальную интуицию, подсознание и даже нечто бессознательное («сумерки разума»). Разум проявляется и функционирует в *мышлении*. Мышление есть форма существования разума человека. Это деятельность разума, движение мыслей, процесс становления, изменения и развития идей, информации. По мнению И. В. Гете, «Разум имеет дело со становящимся, рассудок – со ставшим». (Но можно сказать и словами Л. Витгенштейна, что максимум сознания означает конец света.) Причем *логика*, логическое мышление – форма существования рассудка. Она принципиально отличает человека от высших животных. Логическое мышление неотделимо от абстрактного мышления, которое и позволяет научно и философски познавать и осмысливать мироздание.

В статье Г. Б. Жданова [206] рассматриваются связи сознания с фундаментальным понятием информации.

В своей монографии [627] В. Ф. Юлов удачно разграничивает *интеллект* и *психику*. А каково же соотношение интеллекта и разума? На наш взгляд, интеллект – составная часть разума, охватывающая почти все разумное. Но понятия веры и сомнения, образующие тонкий слой психики, принадлежат разуму, не принадлежа интеллекту. В результате приходим к следующей формуле:

Интеллект = Рассудок + Интеллектуальная интуиция.

На наш взгляд, бессознательному нет места в интеллекте. Заметим, что в концептуальном познании без метафизики, чистого умозрения, рефлексии и постулирования исходных принципов не обойтись.

Разум расширяет рассудок за счет интуиции. Мышление неотделимо от разума, точно так же, как логическое мышление неотделимо от рассудка. Мышление есть единственный способ проявления и существования разума у человека. Совершенно не важно, является ли мышление функцией головного мозга. Или же мозг человека служит прижизненным ретранслятором мирового разума, тонкой материи?! См. [73].

Интеллект и психика

В философском плане остается актуальной и интересной проблема соотношения интеллекта и психики. В книге В. Ф. Юлова «Мышление в контексте сознания» [627] предложена модель взаимосвязи понятий интеллекта и психики, дающая определенное решение данной проблемы. Психика делится на *ментальную* и *аффективную* составляющие. К аффективной психике относятся *эмоции* (радость, страх, гнев, удивление и т. п.). Ментальность включает в себя такие высшие формы психики, как вера, воля, психологический тип. Интеллект, в свою очередь, содержит память и воображение. Мы понятийно противопоставляем интеллект психике, но он все же имеет некоторое пересечение с ментальной психикой. Главный вывод В. Ф. Юлова гласит, что «граница между интеллектом и психикой пролегает по водоразделу "рациональное–чувственность", где первое покрывает все формы знания, а второе включает все переживания».

Под интеллектом можно также понимать умственный потенциал человека, его силу разума. Интеллект, разум соответствуют понятию «духа», а высшая психика – «душе», «сердцу».

О методе

Переходим к понятиям второй группы. В группе (2) наиболее употребительным и важным является понятие *метода*, среди производных которого мы встречаем понятия методологии и методики. Наречие «методично» означает последовательность, систематичность, системность, целенаправленность действий. По Гегелю, метод – это форма движения содержания. В философском плане лучше и не скажешь – это и абстрактно, и конкретно. В строго научном отношении невозможно определить понятие метода. Зато мы хорошо осознаем (интуитивно, на опыте и в процессе деятельности), что такое метод, узнаем и распознаем его, успешно применяем разнообразные методы. Безусловно, понятие метода относится к фундаментальным философским категориям и основополагающим научным понятиям. В каждой науке методы конкретизируются и подразделяются на общенаучные и специальные. К общенаучным методам можно отнести логические, гипотетико-дедуктивные и математико-модельные методы.

Слова *способ*, *прием*, *средство* и *инструмент* звучат как синонимы метода, однако по своему смысловому уровню они более мелкие, частные и/или прикладные. В словосочетании «метод решения задачи» термин «метод» без потерь замещается термином «способ», но его замена на слово «прием» не так адекватна и менее благозвучна. Говорят «владеть методом» и «научиться приему», а не «владеть способом». Заметим, что от понятия способа происходят понятия «способности» и «способствовать», что немного отличает данное понятие от метода.

Метод – это осуществимый способ, а способ есть возможный метод. Прием можно определить как одношаговый метод, метод в одно действие. Концепты понятий «средство» и «инструмент» имеют техническую или технологическую окраску, раскрываются как «методы извне». Наконец, *алгоритм* есть четко предписанный и прописанный метод, всегда приводящий к однозначному ответу все задачи определенного вида. Циклический алгоритм заключается в последовательном применении одного и того же приема. *Аппарат* науки, в частности математический аппарат, состоит из методов и правил, базирующихся на фактах (теоремах) и теориях данной науки. К научному аппарату в широком смысле относится и *понятийный аппарат* данной дисциплины – система ее категорий и связей между ними. Формальный математический аппарат, выраженный в пригодных для применений формулах и алгоритмах, можно назвать инструментарием математики.

Понятие *подход* значительно шире и расплывчатее понятия метода. Оно вмещает в себя понятия *мысль*, *идея* (игра мысли?), *теория*, *доктрина, концепция, парадигма, научная картина мира, мировоззрение*, которые последовательно расширяются по своему значению. Доктрина (от латинского doctrina – учение, теория) – это научная или философская теория, ведущий теоретический принцип, единый определяющий замысел исследования. Под концепцией (с латинского conceptio – понимание, ведущая мысль, единый замысел) подразумевается либо доктрина, либо подход, представленный в системе взглядов, отражающих определенный способ видения вещей и, как правило, основанных на некоей объединяющей идее. Парадигмой (греческое paradeigma означает пример, образец) называется система методологических установок, служащих для научного сообщества образцом решения научных проблем. Мировоззрение есть совокупная система взглядов на мир, общество и человека. Можно говорить о мировоззрении индивида, сообщества, эпохи и т. п. Научная картина мира – целостное научное мировоззрение, опирающееся на руководящие научные, методологические и философские принципы своего времени, согласующееся с господствующей парадигмой.

О понятии вещи

Обратимся к серии понятий (3). *Вещь* противопоставляется идее. Субъект познает *объект*, выступающий гносеологически в качестве вещи. При этом вещь может принадлежать как материальной реальности (электромагнитное поле, биологический процесс, вещество), так и сфере сознания (идеальные понятия, научные теории). Сейчас в научно-методической литературе принято различать понятия объекта и *предмета* изучения, считая понятие предмета некоторым уточнением объекта, учитывающим цель, задачи и методологию исследования. Вещи, предметы и объекты относятся к категории материального. Диалектика соотношения данных понятий следующая. Здесь исходная субстанция – вещь. Предмет есть материальный носитель первичного понятия вещи. Объектами созерцания выступают материальные предметы, а объектами размышления – абстракции, идеализации, универсалии.

Литература: [5, 6, 15, 41, 73, 89, 133, 206, 231, 278, 382, 383, 416, 448, 451, 627].

§ 4. Математика в свете философских категорий

Математика – естественный язык
выражения взаимосвязи метафизики
и идеи Единого или Логоса.
Жак Даррида

Начнем с перечисления основных сопоставлений «философия–математика»

идеальное – математическая теория (понятие, идея)
материя – математический объект, математическая модель, структура, конструкция
движение – функция, отображение
количество – число, величина, мера
качество – отношение эквивалентности
форма – геометрическая фигура, формула
содержание – класс моделей теории, объем понятия
явление – математический факт или рассуждение
сущность – модельные примеры, характеризация
мера – инвариант, координаты, мера
всеобщее – законы логики, универсальное множество
особенное – множество, класс
единичное – элемент множества
целое и часть – множество и его подмножество
внутреннее – элементы и части математической структуры
внешнее – то, что находится вне математического объекта
причина – достаточное условие теоремы
следствие – необходимое условие теоремы
причинно-следственная связь – логическое следование
метод – способ доказательства или построения, алгоритм
бытие – существование
действительное – имеющее модель
разумное – непротиворечивое
возможное, случайное – вероятность
закон, истина – теорема, доказательство
свобода – свободный (универсальный) объект
необходимость – необходимое условие
пространство – различные виды пространств

время – числовая прямая
порядок – порядковая структура
система – математическая структура
отношение – n-арное отношение (где n – кардинал)
действие – алгебраическая операция, преобразование
состояние – точка фазового пространства
симметрия – группа
сохранение – гомоморфизм
тождество – изоморфизм
конечное и бесконечное – мощность множества
дискретное и непрерывное – свойства порядковой структуры

Рассмотрим подробнее эти категории и их взаимосвязи. *Идеальное* в математике - это ее идеи, понятия, методы, теории. *Материальное* выражается в конкретных математических структурах и конструкциях. Категории идеального и материального в математике обе принадлежат сфере математического сознания, но представляют абстракции разного уровня (скажем, понятия и примеры). В приложениях математики акценты смещаются: весь математический аппарат предстает как идеальное, а описываемые объекты или специальные модели суть материальное.

Реальное *движение*, любое изменение можно попытаться описать функционально, то есть с помощью той или иной функции. Законы движения часто выражаются решениями дифференциальных уравнений. В математике изучаются различные виды функций (числовые функции, алгебраические операции, геометрические преобразования, непрерывные отображения и т. д.); на данной основе возможно разбиение (классификация) математики на отдельные математические дисциплины. Находят применение и так называемые многозначные функции (соответствия). Отметим, что категория «движение» проявляет себя в самых разнообразных ситуациях и раскрывается, конкретизируется через целый ряд понятий: изменение, развитие, становление, преобразование, процесс, действие (производные от него – воздействие, взаимодействие, противодействие) и т. п.

Количество – это, прежде всего, числа: кроме действительных чисел в математике существуют комплексные числа, кватернионы, октавы (числа Кэли), двойные и дуальные числа, p-адические числа, различные «числоподобные» объекты, изучаемые в современной алгебре. К категории количества относится и понятие *величины*, предполагающее *упорядоченность*, сравнение элементов по величине. Понятие величины еще ожидает серьезного методологического анализа.

Классификация (разбиение) объектов по определенному *качественному* признаку (животных – по родам или видам, физических тел – по размерам или форме, чисел – по арифметическим характеристикам) определяется соответствующим отношением эквивалентности. Переход от множества объектов к классам эквивалентных объектов называется факторизацией этого множества. На этом пути в математике появились фундаментальные понятия конгруэнции и факторструктуры.

Форма как категория воплощается в понятии геометрической фигуры и ее обобщениях (различные типы пространств), изучаемых в геометрии и топологии. Под эту категорию подпадает и значение *схема*. Математические формулы являются формой соответствующих понятий и предложений математики. Под *содержанием* абстракции мы понимаем класс всех ее моделей (примеров). Содержанием математической теории можно считать, наряду с моделями, множество ее теорем (доказуемых утверждений). Процесс формализации изучаемого объекта – это поиск удобной формы его представления. Формализация содержательной математической теории приводит к формальной аксиоматической системе, выраженной на символьном языке математической логики. Выкладки и вычисления в формальной системе можно автоматизировать, то есть поручить компьютеру (этим занимается компьютерная алгебра).

Подчеркнем, что математика изучает и описывает мир посредством «внешних» категорий количества и формы. Тем самым универсальность и эффективность математики, являющиеся проявлениями *единства мира*, обосновывают первостепенную роль категорий количества и формы в системе всех философских категорий.

Математическое явление трактуется и как математическая закономерность, и как процесс рассуждения. Все, так или иначе, является, проявляется. *Явление* – это некое проявление *сущности*. Поэтому термин «явление» можно трактовать очень широко – как вещь, процесс, отношение, что позволяет отнести эту категорию к числу первичных, основополагающих философских категорий. Сущность математической абстракции (понятия, теории) заключается в ее модельных примерах – образцовых моделях, «супермоделях» данной абстракции. Модельным примером абстракции считается такая модель этой абстракции, в которой так или иначе (с помощью математических и логических конструкций) отражаются все ее существенные (структурные) свойства [88]. Модельные примеры служат «материальным» воплощением самой сути абстракции.

Мера на языке философии означает количественно заданный интервал сохранения качественной идентификации объекта. В математике существует свое понятие *меры*, определяемое как аддитивная неотрицательная вещественнозначная функция, заданная на алгебре множеств. С ним тесно связаны однокоренные понятия измеримости (множеств и функций) и размерности (пространств). Более общим является понятие *величины*, которая может принимать нечисловые значения. Сравнимость по величине ассоциируется также с понятиями порядка и упорядоченного множества. Мы видим, что категория меры проявляется в математике в качестве количественного оценивания и структуризации объектов.

Категория *всеобщее* проявляется, прежде всего, в законах логики. Всеобщее связано как с квантором общности, так и с понятием универсального (всеобъемлющего) множества. В рамках фиксированной математической теории в качестве всеобщего выступают общезначимые предложения (формулы), которые по определению истинны в любой модели данной теории. *Особенное* (обособленное), помимо множества, можно толковать как отдельную тему или область математики, чему соответствует деление математики на дисциплины: теория чисел, алгебра, геометрия, математический анализ, теория вероятностей, математическая логика и т. д. *Единичное* – это и элемент (точка) множества, и уникальный математический объект: натуральный ряд, числовая прямая, действительная плоскость, число π. Элементы и подмножества относятся к содержащему их множеству как *часть* к *целому*. Натуральные (целые) числа составлены из единиц, а дроби суть суммы равных частей целого числа, частные целых чисел.

Рассматривая категории *внутреннего* и *внешнего* в математике, мы, прежде всего, имеем в виду внутреннее (локальное) или внешнее (глобальное) изучение математических объектов. При первом подходе строение математического объекта анализируется и выражается через его элементы и подобъекты. При внешнем подходе изучаемый математический объект берется как элемент *категории* себе подобных объектов с соответствующими *морфизмами*, связывающими объекты. При этом используются только сами морфизмы и свойства композиции морфизмов данной категории. Важную роль в математике играют, например, следующие категории: группы и их гомоморфизмы, топологические пространства и непрерывные отображения между ними, упорядоченные множества и изотонные отображения.

Отметим, что в математике, как показал французский математик Ловер, теоретико-множественный (внутренний) и теоретико-категорный (внешний) подходы равносильны, они имеют одинаковую выразительную силу. Пусть, например, рассматривается множество $A = \{а, б, в, г, д, е\}$ в категории всех множеств и их отображений. Нужно найти число элементов этого множества, не пересчитывая их непосредственно. Фиксируем некоторый финальный объект F категории множеств. Напомним: объект F категории называется *финальным*, если из любого объекта данной категории существует один-единственный морфизм в F. Легко видеть, что в категории множеств финальные объекты – это в точности одноэлементные множества. Подсчитав число морфизмов из F в A, получим 6 морфизмов – по одному для каждого элемента (буквы) множества A.

Причинно-следственная связь представляет собой логический вывод, справедливость которого устанавливается *доказательством* заключения теоремы на основе ее посылок (условия). Теорему всегда можно сформулировать в виде импликации $A \Rightarrow B$; при этом утверждение A называют достаточным условием для (выполнения) утверждения B, а A – необходимым условием для B. Одна и та же теорема может быть доказана различными *методами*. Термин «метод» применим и к построениям, алгоритмам, вычислениям и преобразованиям.

Понятия *возможного* и невозможного (события) находят свое выражение в теории вероятностей.

Далее, вспомним знаменитое положение Гегеля «Все действительное разумно, все разумное действительно», которое естественно интерпретировать как *теорему Геделя*: непротиворечивость формальной математической теории равносильна существованию ее модели. Здесь *разумное* трактуется как непротиворечивое, а *действительное* – как существование модели. С этой теоремой связана другая теорема Геделя – *о полноте*: формула формальной теории является теоремой тогда и только тогда, когда она общезначима. Приведем еще созвучное высказывание Лейбница: «Что мыслимо – то возможно, что возможно, то мыслимо».

Философскому и общенаучному понятию *истины* в математике отвечает понятие теоремы, определяемой как доказуемое утверждение. В содержательной математике (в которой не формализована логика) или в конкретной математической модели истина имеет семантическое (смысловое) понимание. Однако в достаточно богатой формальной аксиоматической теории понятие истины невыразимо на языке этой теории, что утверждает *теорема Тарского*. По *теореме Геделя о неполноте*, в таких формальных теориях существуют заведомо истинные – в стандартной модели натурального ряда – формулы, не являющиеся теоремами (существование недоказуемых истин).

Подобные предложения (формулы) строятся с помощью так называемого диагонального канторовского метода как некоторые утверждения о геделевых номерах самих предложений. Говоря очень упрощенно, получаются предложения типа «То, что здесь написано, нельзя доказать» или «Я – не теорема». В непротиворечивой системе (формальной теории) данное предложение не может быть ложным, так как доказуемые предложения (теоремы) истинны. Следовательно, получаем истинное, но недоказуемое предложение. Точно так же невозможно доказать непротиворечивость самой формализованной математики. Нельзя адекватно формализовать всю математику, большинство ее содержательных разделов. Философски эти логико-математические утверждения означают, что не существует формальной научной системы, в рамках которой можно точно выразить, описать все многообразие мира. Расширяя и совершенствуя научную систему мироздания, мы на любом этапе познания будем иметь что-то непознанное, а возможно, и принципиально непознаваемое. Наверное, одного научного (математического) способа познания мира недостаточно. Интуитивное и иррациональное проявляются и в философии, и в художественном восприятии мира, и в религиозном откровении.

Некоторые философские положения (см. цитированные выше высказывания Гегеля и Лейбница) легко обретают математический вид. Так, первую триаду Гегеля из его «Наука логики»

$$\text{Ничто} \to \text{Становление} \to \text{Нечто}$$

можно представить как процесс (Становление) получения $\{\,\}$ из пустого (Ничто) множества $\varnothing$ одноэлементного (Нечто) множества $\{\varnothing\}$. Применяя подобную процедуру неограниченное число раз, получим модель натурального ряда с нулем:

$$0 = \varnothing,\ 1 = \{\varnothing\},\ 2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \ldots, n+1 = n \cup \{n\}, \ldots .$$

Вспомним также пифагорейское учение «Все есть натуральное число» и *тезис Кронекера* «Бог создал натуральные числа, а остальное в математике – дело человеческого разума». Эти общие положения говорят о том, что всю математику можно построить на основе одних только натуральных чисел, причем строго логически при помощи тех или иных конструкций, что во многом было осуществлено в XX веке. Сам натуральный ряд был аксиоматизирован итальянским математиком Пеано в конце XIX века.

В марксистском определении категории *свобода* – «Свобода есть осознанная необходимость» – имеется довольно глубокий смысл, обнаруживающий себя и в математике. В различных разделах математики (универсальная алгебра, общая топология) существуют так называемые свободные объекты – они свободны от всех соотношений и дополнительных условий, не являющихся необходимыми, то есть не вытекающих из аксиом данной теории. Значение свободных объектов в категории родственных объектов заключается в том, что все объекты данного класса получаются из свободных объектов как их факторобъекты.

Априорно *пространство* представляется нам как вместилище всевозможных вещей, общее место реальных событий, протяженная пустота. Изучаемые в математике пространства по своему происхождению имеют геометрическую природу – это евклидовы, векторные, аффинные, проективные, метрические, топологические пространства, пространства с мерой. Развиваясь в основном в лоне геометрии и топологии, понятие пространства приобрело весьма абстрактный и многозначный смысл. Назовем также пространства Лобачевского, Римана, Минковского, конечные аффинные и проективные плоскости и пространства, фазовое пространство, пространство событий. Понятия пространства, точки, фигуры наглядны, служат образной основой геометрической терминологии, широко применяемой, помимо геометрии, в линейной алгебре, математическом анализе, топологии, теории графов.

Время, мыслимое как (направленная) числовая прямая, не имеет ни начала, ни конца. Любой отрезок времени ограничен, имеет начало и конец, но как множество он континуален, содержит бесконечно много мгновений. Заметим, что существует естественнонаучная гипотеза о дискретности времени (пространства, движения): время квантовано, то есть состоит из отдельных неделимых частичек (квантов), при этом любой промежуток времени является конечной последовательностью таких «протяженных мгновений». Четырехмерное «пространство-время» играет важнейшую роль в специальной теории относительности.

Категория *порядка*, или упорядоченности, отражается как в самом понятии математической структуры, уточняющем категорию *системы*, так и в его важнейшем частном случае – порядковой структуре. Порядковая структура реализуется в таких понятиях, как отношение порядка, упорядоченное множество, упорядоченная алгебраическая или топологическая система. Отсутствие порядка есть хаос. Мерой хаоса, неорганизованности или неопределенности выступает энтропия.

Каждая система определяется множеством своих *отношений*, характеризующих взаимосвязи составляющих ее элементов. Если n – натуральное число, даже произвольное трансфинитное число (ординал), то n-арное отношение на множестве связывает некоторые n-ки элементов этого множества. Частными случаями понятия n-арного отношения являются бинарные отношения (функции, эквивалентности, отношение порядка), алгебраические операции, предел последовательности. Понятия алгебраической операции, вычисления, преобразования, алгоритма относятся к категории *действие*. Производной является категория деятельности, играющая важную роль в философии, психологии, педагогике и методике.

В математической теории систем системы параметризованы, их состояния координатизированы, то есть задаются наборами числовых значений параметров – точками соответствующих фазовых пространств.

В философском плане *симметрия* означает неизменность, сохранность структуры объекта при некоторых его преобразованиях. В математике создан мощный аппарат теории групп, позволяющий успешно исследовать явление симметрии в естествознании и искусстве. Абстрактное понятие группы отражает возможность самосовмещений объекта, служит мерой его симметричности. Любой математический объект можно изучать с помощью группы всех его автоморфизмов. Так, геометрической фигуре обычного пространства сопоставляется группа его самосовмещений. Мы видим, что категория симметрии тесно связана с категориями сохранения и тождества.

В математике сохранение, или инвариантность, трактуется как отображение однотипных математических структур, сохраняющее все отношения данной сигнатуры. В общем виде такие отображения называются гомоморфизмами. К ним относятся гомоморфизмы групп, линейные отображения векторных пространств, движения (изометрии), аффинные и проективные преобразования, изотонные отображения упорядоченных множеств, непрерывные отображения топологических пространств. Заметим, что в [131] предложена концепция моделирования – как отражения действительности – на основе понятия гомоморфизма. *Тождество* – это одинаковость, равенство по определенному признаку, эквивалентность, изоморфность. Изоморфные объекты в абстрактной математике не различаются, тождественны друг другу.

Конечное и *бесконечное* – фундаментальные философские и общенаучные понятия. Они тесно связаны с такими важнейшими понятиями, как ограниченное и неограниченное. На практике мы имеем дело с конечным: жизнь индивида конечна (ограниченна), мы оперируем только рациональными числами, любая наша деятельность есть конечная последовательность отдельных действий, даже Солнечная система состоит из конечного (пусть и очень большого) числа атомов. Окружающие нас вещи ограничены по своим размерам, и их число конечно. Наше физическое пространство, понимаемое по Ньютону (ящик без стенок, без дна и крышки), бесконечно и неограниченно.

В математике говорят о конечных и бесконечных множествах. Множество называется конечным по Дедекинду, если оно не равномощно никакому своему собственному подмножеству. Напомним, что равномощность (эквивалентность) двух множеств означает, что между ними существует взаимно однозначное соответствие. Естественно, множество называется бесконечным, если оно не является конечным. Кардинальные числа (мощности) и ординальные (порядковые) числа введены Кантором как неотъемлемая составная часть теории множеств. Заметим, что представители интуиционизма не признают бесконечных множеств (актуальную бесконечность); для них возможна лишь становящаяся, потенциальная бесконечность (постепенное продвижение по натуральному ряду). Подавляющее большинство математиков признают, что без понятия бесконечности нет математики.

Категории *дискретное* и *непрерывное* многосторонне отражены в современной математике. Существуют понятия: дискретное пространство, дискретная величина, дискретная математика. В дискретной математике, называемой еще конечной математикой, изучаются, главным образом, конечные математические структуры. Конечная математика все больше становится компьютерной математикой. Можно говорить и о непрерывной математике, в которой господствуют идеи предельного перехода и непрерывности.

Математическую часто подразделяют на фундаментальную и прикладную составляющие. Такое деление условно и не очень-то правомерно. Считается, что фундаментальная математика создает и исследует абстрактные математические структуры, следуя внутренней логике своего развития, а прикладная математика имеет дело с математическими моделями реальности. Задачи и теории фундаментальной и прикладной математики различаются только способом своего возникновения – из самой математики, или из практики. Фундаментальная и прикладная математики – это единая теоретическая, фундаментальная, чистая математика. Помимо математики как таковой существуют приложения математики в предметных областях науки и практики (в физике, химии, биологии, экономике, социологии, технике, производстве и т. д.).

Чистая математика подразделяется на содержательную математику, формальную математику и метаматематику. Почти вся классическая математика излагается содержательно-аксиоматически. Формальная математика изучает формальные математические теории, при этом формально аксиоматизируется и логика рассуждений. *Метаматематика* исследует свойства и интерпретации формальных математических систем.

В математике можно также (в определенной мере условно) выделить непрерывную и дискретную математики, которые друг без друга не обходятся. Непрерывная математика оперирует идеями и понятиями непрерывности, предела, актуальной бесконечности, континуума и воплощается в математическом анализе, топологии, классических геометриях. Дискретная математика (называемая еще конечной математикой) имеет дело с конечными последовательностями вполне определенных действий, вычислений, преобразований. Дискретная математика включает в себя конструктивную математику, объемлющую в свою очередь компьютерную математику. Заметим, что в последнее время все чаще дискретная математика отождествляется с компьютерной математикой. Теоретически компьютерная математика является частью формальной математики.

Укажем теперь более конкретные, специфические положения, утверждающие единство математики.

Во-первых, вся математика пронизана такими основополагающими понятиями, как *доказательство* и *функция*. Доказательство есть отражение причинно-следственных связей в логической, дедуктивной форме. Некоторые считают даже, что «математика – это доказательство». А понятие функции математически отражает категорию движения. Математические науки условно делятся по методам доказательств и видам изучаемых ими функций, а стало быть, имеют общую методологическую почву. Так, алгебра изучает алгебраические операции, геометрия – геометрические преобразования фигур, математический анализ – свойства числовых функций, теория вероятностей – вероятностную меру и т. д. Такие важнейшие математические понятия, как производная, интеграл, мера, гомоморфизм (в самом широком смысле), суть функции.

Во-вторых, все математические дисциплины базируются на строгой логике, используют единый символический язык.

В-третьих, объединяющим современную математику началом является фундаментальное понятие *математической структуры*, понимаемой как множество с заданными на нем отношениями. Н. Бурбаки определили математику как учение о математических структурах. Ими было выделено три основных типа математических структур: алгебраический, порядковый и топологический [65]. Кроме указанных типов математических структур можно также отметить *пространства с мерой*, формализующие понятие величины, и *структуры инцидентности*, включающие различные геометрии и теорию графов.

Алгебраическая, *порядковая* и *топологическая* структуры теснейшим образом связаны друг с другом. Известные теоремы Г. Биркгофа и П. С. Александрова утверждают, что для конечных структур существуют естественные взаимно однозначные соответствия между дистрибутивными решетками (алгебра), упорядоченными множествами (порядки) и T_0-пространствами (топология). Структуры инцидентности взаимосвязаны как с алгеброй, так и с геометрией. Большинство конкретных математических объектов является переплетением двух или более типов структур, согласованных между собой. Поэтому в математике так много синтезированных дисциплин, начиная с геометрической алгебры древних греков, тригонометрии и аналитической геометрии (метод координат), вплоть до современных алгебраической геометрии, алгебраической топологии, топологической алгебры, дифференциальной геометрии, дифференциальной алгебры, вероятностной теории чисел и т. п. См. § 14 и Приложение VII.

Далее, класс всевозможных математических структур фиксированной сигнатуры образует категорию. Между данными объектами существуют морфизмы, сохраняющие их структуру. В алгебре это *гомоморфизмы*, для упорядоченных множеств – *изотонные отображения*, в топологии – *непрерывные отображения*. Среди морфизмов пар объектов выделяются *изоморфизмы*, фактически отождествляющие эти объекты. Появившаяся в середине XX века *теория категорий* также является общим языком современной математики.

Как уже было сказано (см. [153]), *теоретико-множественный* и *теоретико-категорный* языки равносильны, то есть имеют равные выразительные возможности. Но они принципиально отличаются своим подходом к исследованию математических объектов. Математические структуры изучают внутреннее строение объектов: их элементы, отношения между элементами, подобъекты. А теория категорий изучает объекты через их связи (морфизмы), то есть внешним образом. Оказывается, внутренний анализ любого математического объекта эквивалентен внешнему его рассмотрению как члена сообщества родственных объектов. Это, а также многочисленные теоремы строения, двойственности (например, двойственности Понтрягина, Стоуна, Гельфанда, Хьюитта, Пристли), характеризации, определяемости еще раз указывают на единство математики.

От формы к формуле

Пифагорейский тезис «Все есть натуральное число» можно заменить метафорой «Все есть форма», имеющей глубокий смысл. Такое почтение к форме восходит к Аристотелю. Человеческое познание представляет собой становящийся ряд образов или форм, сменяющих, отражающих и моделирующих друг друга. За одной формой следует другая, казавшаяся до этого содержанием первой. И так далее. Искомая абсолютная истина снова ускользает, скрываясь за чередой образов, облачаясь в новые одежды. Но на каждом этапе познания при смене форм происходит некое откровение, обретение относительной истины, решающей ту или иную задачу. Человеческое познание не слепо, оно следует путем целесообразности, красоты. В научном познании побеждают совершенные, четко очерченные формы.

Согласно Канту, любой умопостигаемый объект познания есть «вещь в себе» (то есть ноумен, в противовес эмпирически познаваемым явлениям – феноменам), которая может быть исследована и описана одним только внешним образом, по принципу «воздействие–реакция», или «вход-выход». Таков и математический подход к изучению действительности, составляющий фундаментальный принцип математизации научного знания. Ведущими в познании выступают категории формы и количества, посредством чего мы и оказываемся в состоянии сказать нечто о содержании, качестве и сущности. Хотя в философии форма традиционно определяется как способ существования содержания, тем не менее именно она служит творческим началом Мироздания и, соответственно, процесса познания. Всякое «содержание» как-то сформировано и оформлено. Каждое «качество» имеет свои количественные характеристики (меру инвариантности), в пределах возможного изменения которых оно и идентифицируется. Любая «сущность», так или иначе, является, оставляя нам запечатленные данные о себе. А наука занимается сбором и изучением таких анкет.

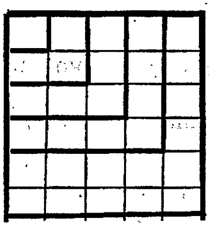
Мы сосредоточим свое внимание на проявлениях формы в математике. Отметим, что к категории формы относятся абстракции схемы и структуры, отлично «чувствующие себя» в математике. Наглядно форма выражается, прежде всего, в геометрии. Принцип гармонии, или целесообразного отбора, позволяет выделить наиболее изящные и совершенные геометрические фигуры, сделав их предметом пристального изучения. Так же прекрасны начертания замечательных математических формул.

Среди производных от слова «форма» нас интересуют такие важнейшие термины, как *формализация* и *формула*. Под **формулой** понимается записанное на символическом логико-математическом языке математическое предложение или правило. А формализация – это моделирование, заключающееся в переводе информации с обычного языка на язык формул. При этом формула выступает как воплощенная форма в математике, несущая концентрированную мысль. Это один из важнейших способов кодирования и передачи информации, наиболее лаконичный и точный, при котором не происходит объективного ее искажения. Скажем, равенство $A=[0,1]\times[0,1]$ тут же воспроизводится нами как единичный квадрат A.

Роль математических формул выразительно подчеркнул физик Генрих Герц: «Трудно избежать чувства, что эти математические формулы ведут независимое существование и имеют свой собственный интеллект, что они мудрее нас, мудрее даже своих создателей, что мы извлекаем из них больше, чем вначале было в них вложено».

В формуле одинаково важны и синтаксис (ее формальное строение), и семантика (возможные интерпретации, смыслы). Имея перед собой формулу, мы фактически можем подразумевать (находить) все ее интерпретации. В формулах происходит диалектическое соединение ипостасей формы и количества. Важнейшую роль играет *символика*. Математические знаки, обозначения и термины исторически совершенствуются. Математические суждения желательно представить в наиболее простом и ясном виде. Поэтому сложные формулы мы стремимся преобразовать, привести к более простой форме; на этом пути появляются *канонические формы* для различных классов формул. Установление эквивалентности двух формул служит одним из основных типов теорем в математике.

Говоря о содержательных формулах, следует начать с формул элементарной математики. Основное тригонометрическое тождество, являясь числовым тождеством, служит прекрасным примером *функционального равенства*. Уместно вспомнить также другие тригонометрические соотношения, свойства степеней, формулы сумм арифметической и геометрической прогрессий, выражения для длин, площадей и объемов в элементарной геометрии, бином Ньютона, формулы Виета, неравенство Коши. Многие элементарные формулы имеют геометрическую интерпретацию, допускают наглядное изображение в виде чертежа или схемы. Например, вспоминается иллюстрация известной формулы $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$:



$1+3+5+7+9=5^2$

Подобные «геометрические формы» привели к открытию различных общих формул (формулы сокращенного умножения, теорема Пифагора, некоторые комбинаторные тождества и др.).

Равенства имеют, как правило, не единственное смысловое значение. Отношение равенства, являясь симметричным в строго математическом смысле, не является таковым при смысловом прочтении формулы. Уже равенства 2+2=4 и 4=2+2 суть не одно и то же. Замечательная формула $e^{\pi i}=-1$ означает, что комплекснозначная функция $f(z)=e^z$ при значении $z=\pi i$ принимает значение –1. А формула $-1=e^{\pi i}$ – это представление числа –1 в показательной форме.

И, наконец, эта формула отражает единство мира: в ней удивительным образом оказались соединены четыре константы -1 (это, говоря условно, арифметика), π (геометрия), i (алгебра) и e (анализ), появление которых исторически произошло независимо друг от друга.

Особую роль играют формулы-определения. К ним относятся формула второго замечательного предела $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, которая служит определением числа e, основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$, являющееся определением логарифма числа b по основанию a, определение производной функции в точке и т. д.

Человек постоянно сталкивается с различными финансовыми вычислениями и расчетами, т. е. с числовыми равенствами. Можно привести восхитительные формулы для чисел e и π:

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots,\ \pi = 4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}+\ldots\right)$$

$$\text{или}\quad \pi = 16\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+4\operatorname{arctg}\frac{1}{239},$$

представление золотого сечения $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ в виде бесконечной цепной дроби, содержащей одни единицы. Следующее равенство, полученное американцем Элкисом с помощью компьютера в 1988 году, дает оптимальный контрпример к известной гипотезе Эйлера (см. [491]):

$$2682440^4 + 15365639^4 + 187960^4 = 20615673^4.$$

Формальная математика – это символическая формульная математика. На первый план выдвигаются логико-математический язык, его грамматика, логическая форма. Фактически всю математику можно строго формализовать, выразить как формальную аксиоматическую систему. При этом, как правило, появляются новые интерпретации и модели. Так, содержательная аксиоматическая теория Пеано натурального ряда категорична, а формальная теория натуральных чисел имеет модели любой бесконечной мощности. В формальной математике, хотя и происходит некоторый «неадекватный» отход от стандартных моделей, возникает новое знание, расширяются логические и философские представления о возможностях научного описания Мира (вспомним теоремы Геделя).

Законы логики (тавтологии, равносильности, правила вывода) являются таковыми благодаря только своей структуре, синтаксису, вне зависимости от конкретных интерпретаций.

Разработка методов формализации в рамках математической логики послужила основой создания искусственных языков, различных языков программирования, компьютерной алгебры. Практическим венцом такого развития стал современный компьютер.

Исключительную роль в математике играют формулы, записанные в виде *равенства* термов $t_1 = t_2$. Будем считать, что мы рассматриваем математическую структуру M, являющуюся моделью некоторой теории. Если термы t_1 и t_2 замкнуты, т. е. обозначают элементы из M, то их равенство есть конкретное высказывание (истинное или ложное). Если же хотя бы один из данных термов содержит переменную, то получаем *уравнение*, которое желательно решить в M, или *тождество* $t_1(x_1, \ldots, x_n) = t_2(x_1, \ldots, x_n)$, обращающееся в верное равенство при любых значениях из множества M всех входящих в термы переменных $x_1, \ldots, x_n$. Заметим, говоря формально, что тождество можно считать частным случаем уравнения, когда множество его решений совпадает с M^n, а верное конкретное равенство в M – тождеством без переменных.

Укажем также, что к миру формул принадлежат многочисленные дифференциальные и интегральные уравнения, а также их решения. Соответствующие разделы математики находят широкое применение в естествознании, поскольку развитые в них методы способны адекватно описывать различные природные процессы. Любая аналитически записанная функция f от аргумента x дает формулу $y = f(x)$.

От тождеств перейдем к понятию *гомоморфизма*. В общенаучном плане гомоморфизмом называется преобразование родственных объектов, сохраняющее их структуру (от первого объекта ко второму). Более тесную связь объектов обеспечивает наличие *изоморфизма* между ними (структура сохраняется в обе стороны). Изоморфные объекты структурно не различаются, являясь копиями друг друга (так, десятирублевые купюра и монета изоморфны в денежном отношении).

В математике гомоморфизмы f удовлетворяют специальным «обобщенным тождествам», выражающим перестановочность f со структурными операциями и отношениями. Пусть даны однотипные математические структуры M и N с одним и тем же списком Ω операций и отношений. В принципе можно рассматривать бесконечноместные отношения и частичные операции. Тогда функция f из M в N называется гомоморфизмом этих математических структур, если для всякого индексного множества I, для любых I-местных операции ω и предиката P из Ω и для произвольного семейства $(m_i) = (m_i)_{i \in I}$ элементов в M:

$$f(\omega((m_i))) = \omega((f(m_i))) \text{ и } P((m_i))=И \Rightarrow P((f(m_i)))=И.$$

Для алгебраических, порядковых и топологических структур получаем понятия обычного гомоморфизма, изотонного отображения и непрерывного отображения соответственно. Скажем, если M, N – мультипликативные группы, то для гомоморфизма f из M в N тождественно $f(m_1m_2) = f(m_1){\cdot}f(m_2)$. Если M, N – упорядоченные множества с одинаково обозначаемыми отношениями порядка $\le$, то гомоморфность f означает изотонность, т. е. выполнение квазитождества $m_1 \le m_2 \Rightarrow f(m_1) \le f(m_2)$. Если же M, N – топологические пространства, то гомоморфность f трактуется следующим образом: для любой сходящейся направленности (m_i) в M имеем $f(\lim m_i) = \lim f(m_i)$, что равносильно непрерывности отображения f.

Как и понятие гомоморфизма, в терминах перестановочности операций формулируются основные свойства многих математических объектов. Назовем, например, законы дистрибутивности и де Моргана, аддитивность производной и интеграла, свойства предельного перехода.

Литература: [62, 65, 66, 88, 131, 134, 153, 491].

§ 5. Модели и математическое моделирование

То, что вообще может быть сказано,
может быть сказано ясно,
а о чем невозможно говорить –
о том следует молчать..
Людвиг Витгенштейн

В научном обиходе термин «модель» (латинское «modulus» означает «мера», «образец», «норма») появился во второй половине XIX века в работах Бельтрами, Клейна и Пуанкаре, давших интерпретации неевклидовых геометрий в рамках евклидовой геометрии. Несколько позднее им воспользовались Фреге и Рассел в математической логике. Широкое использование понятия модели началось в середине прошлого века. Тогда же оформилась теория моделей как неотъемлемая часть математической логики (А. Тарский, А. И. Мальцев, А. Робинсон). К настоящему времени понятие модели стало не только общенаучным, но и приобрело статус фундаментальной философской категории.

В современной науке существуют различные толкования и употребления слова «модель». Так, Ю. А. Гастев в [131, § 1] рассматривает отношение «быть моделью», а под моделью понимает гомоморфный образ оригинала. Л. А. Друянов [191, с. 52-60] выделяет четыре типа моделей: материальные, идеальные (образные и знаковые), математические и теоретические. В [601] приводится 30 синонимов и характеристик «модели». В [616, глава 2] авторы анализируют математические и лингвистические модели в контексте системного подхода.

Уже в обыденном сознании присутствуют два главных смысла понятия модели. Возьмем цепочку:

данный дуб → понятие дерева → конкретные деревья.

В ее первом звене предмет «указанный дуб» замещается соответствующим (у нас более широким) понятием, которое при общении людей обозначается термином «дерево». Это пример «идеального моделирования». Второе звено дает примеры «материального моделирования». Заметим, что переход понятие → его термин также является материальным моделированием (кто-то остроумно сказал, что «термин есть монумент понятия»).

На каждом этапе научного познания следует выделить и разделить понятия *объект* и его *модель*. В общем виде модель выступает как аналог, двойник, копия, заменитель, заместитель, след, слепок, образ, изображение, описание данного объекта. А объект служит прототипом, прообразом, «исходной вещью», оригиналом для своей модели. Например, человек → его портрет, скульптура или маска; фотография или отпечатки пальцев человека → сам человек; дом → его макет или план; чертеж дома → построенный по нему дом. Здесь существенно только то, от чего мы отталкиваемся и к чему стремимся. Мы приходим к двум основополагающим истолкованиям понятия модели [101]:

1) *модель как идея вещи* (по Платону, Форма вещи);

2) *модель как овеществленная идея* (тень Идеи).

Гносеологически определения 1) и 2) принципиально отличаются друг от друга. Однако в научной деятельности их резкое различение несколько условно и проявляется, главным образом, в степени абстрактности и конкретности исследуемых объектов и их моделей. Ведь наука относится к сфере идеального, оперирует понятиями, замещающими реальные вещи. Рассмотрим еще следующую цепочку из пяти переходов:

домостроительная практика → теория домостроения → чертеж дома →
→ макет дома → дом → схема дома.

Первая и пятая стрелки трактуются в смысле определения 1), а вторая, третья и четвертая стрелки – в смысле определения 2). Мы видим также, что все переходы обратимы, скажем, чертеж → дом и дом → чертеж, и такое обращение переводит 1) и 2) друг в друга. Нужно иметь в виду также то, что «вещь» может иметь различные модели, и сама – служить моделью многих «исходных вещей».

Таким образом, в теоретическом плане мы придерживаемся релятивистского понимания соотношения «объект – модель». В конкретной же познавательной ситуации «оригинал → изображение» фиксируется один из случаев «вещь → идея» или «идея → вещь».

В толкованиях 1) и 2) модель условимся называть *теорией* (идея) и *объектом* (вещь) соответственно. Построение модели-теории называется *формализацией* исходной ситуации (описанием изучаемой вещи), идеальным, знаковым, или символическим, моделированием –

этот подход преобладает в естественных и гуманитарных науках. В случае 2) переход к модели-объекту называется *интерпретацией* теории, материальным, или предметным, моделированием, распространенным в математике, физическом эксперименте, технике. Заметим, что в науке, в частности в математике, любая модель есть абстракция того или иного логического уровня, выражаемая на определенном языке. Как уже отмечалось, различие между объектами и теориями несколько условно, относительно. Модели-объекты более конкретны и материальны, а их язык более содержательный. Модели-теории более абстрактны и идеализированы, их язык более формальный.

В процессе познания важно не только создание той или иной модели, но и движение к новым моделям более высокого уровня. Поэтому необходимо рассмотрение схем моделей

объект→теория→объект и теория→объект→теория,

реализующих гегелевскую триаду «тезис→антитезис→синтез». В [101] такое познание мы назвали *вертикальным*, поскольку третья ступенька всегда возвышается над первой. Под *горизонтальным* же познанием подразумевается исследование модели на одном уровне, т. е. вычисления, преобразования, дедукция внутри самой модели. Но и горизонтальное познание, обоснования и доказательства, касающиеся фиксированной модели, есть последовательная смена актов абстрагирования и конкретизации, формализации и интерпретации, гипотез и контрпримеров, о чем хорошо и ярко написал Лакатос в своей книге [6].

Поговорим теперь о *методе моделирования* и о *математических моделях*. Метод моделирования, являясь общенаучным и универсальным, широко применяется в естественных, технических и социальных науках. Модель реального явления – это приближенный идеализированный образ данного явления, выраженный на предметном языке, скажем, на языке физики. Вспомним, к примеру, классическую механику, геометрическую оптику или планетарную модель атома.

Метод математического моделирования применяется к научному исследованию действительности, то есть к решению реальных задач, по следующей схеме:

(1) реальная задачная ситуация заменяется ее предметной моделью;

(2) для полученной предметной модели ищется адекватная математическая модель, включающая четкую формулировку исходной задачи;

(3) решается соответствующая математическая задача;

(4) найденное решение интерпретируется в предметной модели.

Несколько комментариев. Шаг (1) требует хорошего знания своего предмета и носит интуитивно-содержательный характер. Шаг (2) является творческим актом, предполагающим свободную ориентацию, как в данной дисциплине, так и в математике. Шаг (3) – чисто математический вопрос. Шаг (4) дает искомый ответ. Иногда качественное решение задачи может быть получено уже в предметной модели. Однако в точных науках следует считать обоснованным лишь математизированное знание. На этапе (2) обычно обходятся известным математическим аппаратом.

Математические модели в приложениях математики понимаются в первом смысле. Математическая модель реальной ситуации – это вполне определенное описание данного явления, выраженное на языке математических формул. Математическое моделирование представляет собой построение разнообразных математических моделей реальности. Метод математического моделирования служит мощным способом научного познания действительности. Это обусловлено специфическим характером самой математики, являющейся самостоятельной универсальной формой познания мира.

Рассмотрим некоторые важные свойства математических моделей. Модели должны быть – в большей или меньшей степени – *адекватными* и *применимыми*. Адекватность есть теоретическое соответствие реальности, применимость – практическая польза. А это несколько разные вещи. Свойство адекватности модели предполагает определенную ее структурную сложность, в то время как свойство применимости модели (к описываемой ею ситуации) означает осуществимость модельных вычислений, которые легче провести в более простой модели.

Простота и *сложность* модели – понятия достаточно условные. Однако если взять две различные модели одного и того же явления, то сравнить их по сложности вполне возможно. Возьмем, например, геоцентрическую систему Птолемея и гелиоцентрическую систему

Коперника. Они одинаково хорошо описывают звездное небо, т. е. применимы для расчетов в астрономии. Но неадекватная модель Птолемея гораздо сложнее адекватной модели Коперника. (Вот такая диалектика.)

Математические модели подразделяются также на *жесткие* и *мягкие* и на *грубые* и *тонкие*. Эти две классификации похожи друг на друга, но не совпадают. Жесткая модель достаточно примитивна и проста, учитывает небольшое число информационных параметров, являющихся, как правило, константами. Мягкая модель (в сравнении с жесткой моделью) более сложна, содержит большее число параметров. При этом параметры модели являются функциями, учитывающими меняющееся состояние системы и, тем самым, обеспечивающими обратную связь. Жесткие модели применимы на определенных отрезках времени, их экстраполяция на большие периоды времени может вести к потере адекватности и применимости. Математику академику В. И. Арнольду принадлежит фраза: «Жесткие модели как путь к ошибочным предсказаниям».

Гибкое математическое моделирование реальных объектов и процессов – залог и инструмент эффективных приложений математики (см. Приложение VIII). Математические модели необходимы, во-первых, для описания однотипных явлений из различных областей знания, во-вторых, они позволяют уловить то, что трудно сделать при словесном описании.

Физик профессор Д. С. Чернавский отмечает [597, с. 83], что многие явления из разных областей знания имеют одинаковые базовые модели. Упрощенные базовые модели, улавливая существенное и отвлекаясь от второстепенного, обладают свойством *грубости*, жесткости, или структурной устойчивости. В грубой модели малые изменения параметров (динамической системы уравнений) мало влияют и на ее результаты (решения системы). Грубые модели, и только они, способны описывать действительность. Дело в том, что в тонких моделях в стадии неустойчивости предсказать поведение системы практически невозможно. Малейшее изменение параметров может вызвать хаотический скачок (катастрофу), качественно меняющий состояние системы. Проследить любое малое изменение условий можно только тогда, когда мы знали бы значения всех параметров абсолютно точно, то есть со всеми десятичными знаками непосредственно.

Выбираемая или конструируемая модель изучаемого явления должна удовлетворять следующим условиям: во-первых, она не должна быть чрезмерно простой, чтобы достаточно адекватно отражать ситуацию; во-вторых, она не должна быть и слишком сложной, чтобы ей можно было реально пользоваться; наконец, из нескольких моделей, с примерно одинаковой точностью описывающих данное явление, выбирают наиболее простую (так, гелиоцентрическая система Коперника предпочтительнее более сложной геоцентрической системы Птолемея, даже если не касаться их физической достоверности). Математические модели бывают одномерными и многомерными, непрерывными и дискретными, жесткими и мягкими (В. И. Арнольд) и т. д. Укажем на модели динамики популяции, начиная с жесткой одномерной экспоненциальной модели Мальтуса и заканчивая мягкими моделями, зависящими от целого ряда параметров. С развитием дискретной математики и компьютерных вычислений все большее значение приобретают дискретные модели. Заметно выросла роль моделирования в теории и методике обучения. Назовем Ю. А. Саурова, автора целого ряда работ по методологии обучения физике, в частности книги [482], и В. А. Тестова [537], предложившего рассматривать понятия жесткой и мягкой модели в процессе обучения математике. В статье [88] обосновывается роль основополагающих моделей (называемых автором модельными примерами) при обучении студентов математике. Подчеркнем, что модельные примеры теории позволяют реконструировать саму теорию.

В математике обычно под моделью понимается модель-объект. Моделью математической теории является конкретная математическая структура (объект), удовлетворяющая всем положениям (аксиоматике) этой теории; они появляются в процессе конкретизации, при интерпретации аксиоматических теорий. Так, аддитивная группа $\mathbf{Z}$ целых чисел служит моделью теории групп. Математическое познание, с одной стороны, есть движение от имеющих нечто общее конкретных математических объектов к созданию соответствующей теории, а с другой стороны, – это построение различных моделей той или иной теории. Поэтому в математике модель-объект может выступать и как образ, и как прообраз математической теории.

От модели к модели

Покажем, что *познание в математике представляет собой процесс восхождения к истине по чередующимся взаимосвязанным ступенькам математических образов, или моделей, имеющих большую или меньшую степень абстрактности и наглядности.*

Каждый уровень познания есть **модель**, выступающая или в качестве *объекта* (вещи, чего-то материального, наглядного), или в качестве *теории* (идеи, абстрактного, логического). В этом смысле процесс познания означает *моделирование.* Шаг вверх со ступеньки-объекта на ступеньку-теорию является *индуктивной* стадией познания, использующей мыслительные операции абстрагирования, аналогии, идеализации, обобщения, отождествления и заканчивающейся формализацией данного объекта (знаковое моделирование). Переход от ступеньки-теории к следующей ступеньке-объекту означает конкретизацию, овеществление, новую *интерпретацию* (предметное моделирование). Понятие интерпретации можно понимать как в строгом теоретико-модельном смысле слова, так и в метаматематическом смысле. Перепрыгивать через ступеньки не рекомендуется. Движение по такой винтовой лестнице (спирали) есть вертикальное познание.

Отдельными завершенными этапами вертикального познания служат схемы «объект→теория→объект» и «теория→объект→теория». В познании они воплощают и раскручивают спираль Гегеля «тезис→антитезис→синтез». В первой схеме воплощается общенаучный *дедуктивный метод*, трактуемый нами как «через общее к частному», а не «от общего к частному». Существует и другое понимание *дедукции* как означающей «выведение», переход «от общего к общему». Такая дедукция относится к горизонтальному познанию, протекающему на самих уровнях: логический вывод в теориях, преобразования в математических структурах, метаматематические рассуждения. Слишком долго задерживаться на одной и той же горизонтальной ступени мы также не советуем. Для продуктивного процесса математического познания необходимо разумное по времени чередование вертикального и горизонтального типов познания.

Схема «теория→объект→теория» охватывает процесс расширения, обобщения, уточнения, обогащения той или иной теории. Здесь в качестве модели выступает *метатеория*, содержательно изучающая свойства данной *предметной* теории (аксиоматизируемость, непротиворечивость, категоричность, полноту, разрешимость), ее выразительные возможности и границы применимости.

При вертикальном познании происходит открытие качественно нового знания, высказывание и исследование гипотез, отыскание и формулировка новых результатов. Вертикальное математическое познание подчиняется диалектическому закону отрицания отрицания, задающему и обосновывающему спиралевидный характер смены моделей. Толчком к переходу от модели-тезиса к следующей ступеньке могут послужить подспудное размышление, интеллектуальная интуиция, чувство прекрасного.

В математике горизонтальное познание заключается в дедуктивном обосновании предполагаемых результатов, в разработке содержательных и формально-логических методов такого обоснования, в доказательстве уже сформулированных теорем.

Постоянное чередование моделей-образов и моделей-теорий – это закономерность научного познания, имеющая глубокие психологические корни. Психология познания такова, что интуитивные образы и логические законы необходимо выстраиваются в цепочку мысленных процедур (индукция и дедукция, анализ и синтез), в цепочку содержательных и формальных понятий. Интуиция озаряет разум человека, а логика закрепляет завоевания интуиции. Каждая теория имеет «материальную» основу, она должна отталкиваться от наглядных, чувственных прообразов: прежде вербального идет визуальное. И наоборот, вслед теории выстраиваются ее интерпретации, представления и реализации в виде конкретных систем, среди которых находятся и исходные объекты («большое видится на расстоянии»). Мы не будем больше касаться психологии познания, в том числе познания математического, отсылая заинтересованного читателя к известным книгам [1, 3, 41,50, 58, 123, 161, 171, 186, 222, 223, 238, 285, 350-353, 371, 402, 422, 528, 576, 589].

Укажем только, что психологическая теория познавательной деятельности базируется на принципе предметности. По

С. Р. Когаловскому [267], предмет есть то, на что нацелено действие субъекта, что выделяется им из объекта в процессе его познания и преобразования. *Предмет – это модель объекта.* Тем самым идея моделирования выражает также суть принципа предметности.

В математике объектами служат *математические структуры*, определяемые как множества с заданными на них отношениями, а теориями – самые разные математические теории, как содержательные, так и формальные. В математическом познании в триаде

исходный объект $\rightarrow$ теория $\rightarrow$ новый объект

исходную модель объявим тезисом, соответствующую теорию – антитезисом; тогда новая модель будет их синтезом.

Рассмотрим пример. В качестве исходного объекта определенного этапа познания возьмем *натуральные числа*. Их простейшей теорией является *арифметика* натуральных чисел (антитезис), созданная древними греками и представляющая собой неаксиоматизированную содержательную элементарную теорию чисел. В результате появляется новый синтезированный объект – *натуральный ряд* **N** с заданными на нем операциями сложения и умножения и естественным отношением порядка. Следующий акт моделирования – содержательная аксиоматизация **N**, осуществленная Пеано и Дедекиндом после подготовительной работы, проделанной Грассманом. *Аксиоматика Пеано* натурального ряда выступает как теория **N** (антитезис к новому тезису). Всякая модель аксиоматической теории Пеано называется *системой Пеано* (новый синтетический объект). В метатеории теории Пеано доказывается изоморфизм любых двух систем Пеано. Далее, систему Пеано можно считать тезисом очередного витка познания. Ему отвечает антитезис – формализация системы Пеано на языке логики предикатов первого порядка, то есть *формальная арифметика*. Содержательная метатеория формальной арифметики допускает кроме стандартной модели **N** модели любой бесконечной мощности (по теореме Левенгейма-Сколема [514]). Это обстоятельство существенно отличает содержательную аксиоматическую теорию натуральных чисел от формальной арифметики. Таким образом, мы вкратце рассмотрели познавательную цепочку, состоящую из семи уровней развития наших представлений о математической модели натуральных чисел.

Отправляясь от натурального ряда, можно выстраивать и другие познавательные цепочки, например:

мультипликативная полугруппа N → теория гауссовых полугрупп → → другие гауссовы полугруппы → понятие свободного коммутативного моноида → коммутативный моноид со счетным множеством свободных образующих (абстрактная характеризация исходной полугруппы N).

И. М. Яглом [631, п. 7] рассматривает геометрическое познание как последовательность взаимоотношений физического и логико-математического типов моделей, называемых им «геометрией-физикой» и «геометрией-математикой». При этом «геометрия-математика» выступает как математическая модель физической вселенной, а «геометрия-физика», являющаяся естественной наукой о размерах и форме реальных тел, есть физическая модель абстрактного математического пространства.

Горизонтальное познание в рамках отдельной математической теории также протекает в форме смены абстракций содержательного и формального характера. Образец такого познания дан английским логиком И. Лакатосом [130] при разборе доказательства формулы Эйлера для многогранников, описанном автором как диалог учителя с учениками воображаемого класса. И. Лакатос убедительно обосновывает, что формирование и развитие математической теории есть постоянное чередование определений и контрпримеров, доказательств и их опровержений; в рассматриваемом случае это постепенно приводит к точной формулировке и строгому доказательству теоремы Эйлера о соотношении числа вершин, числа ребер и числа граней произвольного выпуклого многогранника.

В. В. Мадер отмечает: «Сначала выдвигается гипотеза и идет поиск доказательства, в ходе которого выявляются и фиксируются все необходимые предпосылки. Затем начинается поиск контрпримеров, поиск возможных опровержений и обобщений. Полученная информация позволяет провести более глубокий анализ доказательства. Достигается более полное понимание как самого доказательства, так и значения исходных допущений. Модификация этих допущений приводит к обобщению теоремы. После этого начинается следующий виток: поиск новых контрпримеров, анализ доказательства, ревизия исходных посылок, попытка дальнейшего обобщения теоремы. Затем идет следующий виток и т. д. и т. п.» [317, с. 420].

Остановимся теперь на упрощенной схеме моделирования самого процесса познания. Вот как описывает ее американский математик и логик Р. Линдон в [312, с. 12]: «Формальное изучение любого круга вопросов, связанных с нашим повседневным опытом, начинается с замены реальных объектов некоторыми подходящим образом выбираемыми их абстрактными описаниями, идеализациями, выбираемыми таким образом, чтобы в этих идеализациях были отражены именно те свойства исходных объектов, которые мы собираемся изучать. В нашем случае речь пойдет об абстрактных "заместителях" для таких понятий, как мышление, реальная действительность и связь между мышлением и действительностью. Вместо мышления мы будем рассматривать *язык*, точнее говоря, формализованный вариант некоторых аспектов естественного языка. Можно показать, что все чисто формальные аспекты мышления адекватным образом отображаются в таком языке.

Вместо реальной действительности мы будем рассматривать так называемую *структуру*, грубо говоря, представляющую собой совокупность предметов, которые могут быть сопоставлены в качестве значений различным выражениям языка. Наконец, роль связи между языком и действительностью будет у нас играть *интерпретация*, то есть функция, приписывающая некоторым языковым выражениям в качестве их значений некоторые определенные предметы, входящие в данную структуру».

В математической логике четко определяются понятия языка, формальной аксиоматической теории, интерпретации. При этом *моделью* формальной аксиоматической теории T называется любая математическая структура S, такая, что при каждой интерпретации T в S все аксиомы данной теории оказываются истинными в структуре S. Сама теория строится синтаксически и определяется как множество высказываний (замкнутых формул) символического языка. Наряду со строгим определением понятия интерпретации теории T интерпретацию можно понимать более широко, как *метатеорию* этой теории, т. е. семантику теории T, содержательные рассуждения о свойствах и моделях T.

Между синтаксисом и семантикой формально аксиоматизируемых математических теорий существует тесная взаимосвязь. Будем рассматривать теории, выраженные на фиксированном языке первого порядка. Для произвольной теории T обозначим через $M(T)$ класс всех ее моделей. Можно доказать, что две теории T и T' эквивалентны, т. е. имеют одни и те же теоремы, тогда и только тогда, когда $M(T) = M(T')$. Частными случаями являются две основополагающие метатеоремы: теорема о полноте, утверждающая, что высказывание служит теоремой теории T, если и только если оно выполняется на каждой модели из $M(T)$, и теорема о том, что дедуктивная непротиворечивость теории T равносильна существованию у нее модели, то есть непустоте класса $M(T)$. См. [514].

Предложенная схема чередования моделей допускает разное наполнение. В гносеологии можно говорить о постоянной смене материального и идеального, содержательного и формального. В психологии и дидактике это необходимость и осуществление последовательных интуитивных и рациональных актов мышления. Математика предстает как нескончаемый дискретный поток знаковых и предметных моделей, «знакопеременный» процесс образования понятий и теорий и построения новых объектов.

Может сложиться впечатление, что «все на свете есть модель», и тогда понятие модели оказалось бы бесформенным и бессмысленным. Мы отклоняем это сомнение. Во-первых, в познавательном плане оппозиция «объект-модель» также необходима, как и отношения-связки «материальное-идеальное» или «практика-теория». Во-вторых, понятию модели присущ принципиальный дуализм, выраженный нами в определениях 1) и 2). Как показано выше, такой подход продуктивен. В-третьих, широкое использование терминов «модель» и «моделирование» в науке и жизни означает, что понятие модели действительно стало важной и неотъемлемой философской категорией.

Литература: [1, 3, 41,50, 58, 88, 101, 123, 131, 161, 171, 186, 191, 222, 223, 238, 266-268, 285, 312, 317, 347, 350-353, 371, 402, 422, 482, 488, 514, 528, 537,576, 589, 597, 601, 616, 631].

§ 6. Принципы научного познания и математика

Нет ничего в интеллекте,
чего бы не было раньше в чувстве,
кроме самого интеллекта.
Готфрид Лейбниц

Рассмотрим принципы научного познания и роль математики в методологии познания. Напомним, что научное познание – это лишь один из видов познания действительности наряду с обыденным, философским, художественным, теологическим, оккультным и, возможно, другими типами познания. И именно принцип математизации знания во многом характеризует и выделяет научное познание среди различных форм познания Мира человеком.

Мы уже отмечали, что современная научная картина мира исходит из принципа математизации познания и принципа целесообразного отбора, или гармонии. Цепочка

измерения→координатизация→математическая модель→
→вычисления и преобразования в модели→приложения

есть схема научного познания, наиболее успешно работающая в естествознании. *Принцип математизации* предполагает построение наук по образу и подобию математики, на эмпирико-дедуктивной основе.

Принцип гармонии отождествляет целесообразность и красоту, утверждает эстетический отбор как направляющий вектор развития науки: все ложное, пустое и второстепенное преходяще, выживает только истинное, значимое и универсальное. Объективные законы красоты открыты древними греками: 1) единство в многообразии (Гераклит, Аристотель); 2) гармония как согласие разногласного (Гераклит); 3) количественные законы симметрии, пропорции, ритма (пифагорейцы). Первые два закона утверждают фундаментальное положение о *единстве Мира*, прекрасно согласующееся с человеческой практикой, с эффективностью приложений науки, и влекущее за собой принципиальную структурную познаваемость окружающего мира. В связи с законом 3) заметим, что реальные связи между научным и художественным типами познания способна навести лишь математическая симметрия, порождающая определенные эстетически значимые ассоциации.

Научное познание стартует с позиции здравого смысла, развивая и уточняя его, и в большинстве случаев подтверждая и воплощая ожидания. По сравнению с повседневным мышлением наука глубже проникает в предмет внимания, превращая его в объект исследования и выявляя устойчивые свойства и отношения, т. е. закономерности.

Многие представители точных наук придерживаются идей умеренного платонизма. Так, для математика числа и треугольники не менее реальны, чем материальные вещи, а полученные о них результаты непреходящи и вечны, как божественные истины или шедевры мирового искусства. Свои понятия и теоремы математики не изобретают, а открывают – как будто они где-то уже существуют.

Перечислим методологические положения, которые, как нам представляется, естественны и в совокупности очерчивают такой феномен, как *научное познание*. Конечно, сами эти положения принадлежат философии науки, метафизике и не являются строго научными; их нельзя считать абсолютно обоснованными.

1. **Принцип реализма**, предполагающий единство Мира. Необходимо доверять ощущениям, своим восприятиям и представлениям. «Верь глазам своим!» – исходный пункт адекватного отражения действительности. Но, доверяя ощущениям, проверяй их, повторяя. Как писал Лейбниц, «нет ничего в интеллекте, чего бы не было раньше в чувстве, кроме самого интеллекта». Обоснование достоверности наших субъективных восприятий – задача психологии.

2. **Принцип априоризма**. В своей интуитивной основе понятия пространства и времени, а стало быть, смутные представления о форме и количестве, априорны, присущи человеку от рождения. Соответствующие способности позволяют человеку ориентироваться в мире и познавать его.

3. **Принцип рационализма** базируется на здравом смысле и строгой логике. Научное познание – это сфера разума, человеческого мышления. Мышление делится на рациональное и нерациональное. Рациональное мышление – это *логика*, или форма существования рассудка как составной части разума. Другая составляющая разума, нерациональное мышление, есть *интуиция*, непосредственное

подсознательное обретение истины. Интуиция базируется на знании, подспудном размышлении и возбуждается образным созерцанием и наблюдением. Хотя интуицию и называют «шестым чувством», она принадлежит разуму, является интеллектуальным озарением в образно-чувственной форме. Логика освещает и объясняет «завоевания интуиции». Научность и логичность прямо пропорциональны друг другу. Мы рассуждаем, пользуясь обычной двузначной аристотелевской логикой; она в состоянии передать все многообразие человеческих мыслей.

4. **Принципы единства и простоты.** Единство и простота в научном познании суть идеалы (а не мифы), к которым психологически стремится познающий субъект. Философ Е. А. Мамчур пишет [324]: «Если действительное стремление к обобщению имеет глубокие психологические корни, сама тенденция к единству научного знания неистребима. И утверждения постмодернистов о принципиальной многоперспективности нашего видения мира и его истолкования, проповедуемый ими не сводимый к чему-либо единому плюрализм выглядят поверхностными и проблематичными. Есть все резоны полагать, что наука и впредь будет за видимой сложностью – какой бы безнадежно запутанной она ни казалась – искать невидимую простоту».

5. **Платонизм**: наиболее важные научные понятия имеют высокий идеализированно-бытийный статус. Их отбор происходит естественным образом в полном согласии с принципом целесообразности, гармонии. Такие понятия, генетически и исторически отсеиваясь, входят в понятийный аппарат отдельных наук, некоторые из них приобретают общенаучное значение, становятся философскими категориями.

6. Научное познание осуществляется в ходе **исследования**, протекающего в следующих формах или фазах:

а) *эмпирическая* фаза – наблюдение, опыт, эксперимент;

б) *метафизическая* фаза – умозрение, рефлексия, размышление;

в) *теоретическая* фаза – разработка оригинальных и применение известных понятий и теорий; построение идеализаций, моделей; преобразования и дедуктивные выводы формул; получение нового знания;

г) *верификация* – проверка полученных результатов, возможно в приложениях, в конкретных реализациях.

Основой научного исследования служит *метод моделирования* – в узком смысле математическое моделирование, то есть формализация конкретного знания в рамках определенной математической модели или структуры. Общим методом научного исследования является также *гипотетико-дедуктивный метод*, заключающийся в выдвижении гипотез, выводе следствий из них и соотнесении полученных следствий с имеющимися научными фактами (проверка гипотез).

7. Необходимым условием научности теории или отдельного результата является его **проверяемость**, то есть наличие определенного алгоритма, или процедуры проверки. В математике такой процедурой служит доказательство.

8. Признаком научности дисциплины является **применимость к ней математики**, математических методов, включая оправданные и обоснованные вероятностно-статистические измерения. Вспомним тезис Канта о математизации любой научной дисциплины как мере ее научности, означающий, что уровень применимости математических методов соответствует степени научности данной области познания. По Декарту, математика – это наука о Мере и Порядке. Математики научились находить порядок и в беспорядке, измерять Хаос. Математика способна хорошо анализировать объективные явления и процессы, как строго детерминированные, так и статистические. Но в гуманитарных дисциплинах применения математики пока поверхностны, поскольку в них существенную роль играет субъективный фактор (с разнообразными отягощениями).

9. **Язык** каждой дисциплины, претендующей на научность, должен быть четким, однозначно понимаемым, вплетенным в общий язык науки. Известно высказывание о математике как языке науки; для точных наук это так. И понятийные аппараты других научных областей желательно строить системно, наподобие математического языка, языка математической логики. Специальные термины определяются и интерпретируются в контексте общенаучных понятий, к которым относятся и философские категории.

10. Согласно объекту математики и принципу математизации знания в научном познании ведущими служат «внешние» категории формы и количества, а через них мысль пробивается к содержанию и качеству, через явление – к сущности, через следствие – к причине. И

мы приходим к **кибернетическому принципу** познания, когда изучаемые объекты рассматриваются как «черный ящик» или кантовская «вещь в себе», а информация об этих объектах получается по схеме входа-выхода, воздействия-реакции. Производя соответствующие измерения, вообще говоря, по различным параметрам, можно находить функциональные описания данного объекта, представляющие собой математические формулы и позволяющие более или менее уверенно узнавать его прошлое поведение и предсказывать будущее. Заметим, что в математике категория формы проявляется не только и не столько в геометрических фигурах, сколько в формулах (см. выше § 4).

11. **Вероятностный детерминизм.** «Все условно в этом мире». Абсолют же полностью детерминированн. Вещи в «подлунном мире» познаваемы приближенно, а события – с той или иной долей вероятности. Математика лишь самая точная и строгая наука. Поэтому и в научном познании необходимо иметь чувство меры. Наш мир удивителено симметричный и вероятностный одновременно [532, 533].

12. С двумя предыдущими положениями связан **принцип сущностного релятивизма**, или даже отказ от познания сущности вещей, так как это выводило бы за границы науки, требовало бы постулирования непроверяемых догм. В процессе познания одна причина сменяется другой, сущность все время ускользает (как бы насмехаясь над нашими потугами), а математические формулы остаются. Приведем пару примеров. Человечество до сих пор не знает природу гравитации или света, но, тем не менее, успешно запускает космические корабли, потому что есть формулы и соответствующее техническое воплощение. Нельзя с достоверностью утверждать, в каком – геометрически – пространстве мы живем, поскольку в пределах Солнечной системы, нашей Галактики геометрии Евклида, Лобачевского, Римана ведут себя одинаково, не различаются измерительными приборами (такую попытку предпринял Гаусс еще в начале XIX века). Или представим себе лист Мебиуса (без края) как гипотетическую двумерную Вселенную. Населяющие ее плоские существа могут из каждого места (точки) этой односторонней поверхности добраться до любого другого места. У каждой точки A есть точка-антипод A^1, находящаяся на «нулевом расстоянии» от нее, но

плоские существа, чтобы попасть из A в A^1, вынуждены будут проползти путь, не меньший длины данного листа (диаметра Вселенной), не подозревая о возможности «нуль-перехода».

13. Важнейшим инструментом научного познания стала **компьютеризация** информационных процессов и научных исследований. Компьютеры помогли решить ряд математических проблем, стоявших не одно столетие (теоретико-числовая гипотеза Эйлера, проблема четырех красок). Моделирование на компьютере, компьютерная графика, огромные вычисления и перебор вариантов, выдвижение и проверка гипотез, использование в обучении, получение информации – все эти возможности дает современная компьютерная техника. Но здесь надо помнить об опасности отрыва от реальности, ухода в виртуальный мир, что может привести к оболваниванию и зомбированию человека. Машина в принципе не может мыслить как человек, если, конечно, человеческое мышление несет в себе искру божью.

14. **Синергетика** (см. § 7) оперирует терминами организации, сложности и самоорганизации и пытается применить естественнонаучные методы теории нелинейных динамик к гуманитарной сфере, к современной культуре. Здесь значение математики трудно переоценить.

15. **Принцип скромности ученого.** Идеология, делающая человека покорителем Природы и Космоса, пупом Вселенной, пагубна для человечества. Человек как мыслящая частица Мироздания просто обязан жить в согласии с Миром, следовать его законам. Вполне возможно, что для научного познания есть запретные темы, когда мы самонадеянно пытаемся вторгнуться в Божью епархию. Такого рода ограничительные утверждения имеются и в математике – назовем теорему Геделя о неполноте (существование недоказуемых истин) и теорему Тарского о невыразимости истины: они показывают, что в рамках никакой естественной формальной системы нельзя адекватно выразить всю информацию о ней самой. Значит, всегда будет необходимость в метаязыке (метаметаязыке и т. д.). С другой стороны, обретенное знание увеличивает пространство незнания. Возросшее знание как более яркий факел, отодвигая граничную сферу света и тьмы, высвечивает новые небывалые горизонты тени и мрака.

Обобщающее положение

Наука рациональна и не нуждается в догмах и домыслах. Научное познание имеет свои границы, ибо «нельзя объять необъятное». Наука – это сфера человеческой деятельности, мощный двигатель материальной культуры, способный обеспечить человека всеми необходимыми вещественными благами, но не охватывающая целиком духовную культуру, все знание и не исключающая профанации и разрушения. Идеология сциентизма, или последовательной веры в Прогресс, не является всеохватывающим принципом.

Сделаем несколько замечаний. Настоящая наука остается уделом одиночек в том смысле, что новые идеи, методы, решения приходят в голову отдельным личностям, а научные коллективы необходимы для трудоемкой экспериментальной работы, при проведении четко распланированных исследований. Впечатляющим примером служит доказательство англичанином Эндрю Уайлсом Великой теоремы Ферма в 1994 году после непрерывных семилетних размышлений, о которых никто (кроме его жены) не знал [491]. Серьезные занятия наукой требуют жертв, таланта и большого интеллектуального напряжения. Конечно, для ускорения новых научных открытий весьма желательно широкое научное общение и сотрудничество, использование современных средств обмена информацией.

В рамках метафилософии предпринимаются попытки по-иному взглянуть на понимание науки, сузить ее смысловое значение. В основу классификации кладется критерий практической пользы и отношения к процессу освоения человеком окружающего мира. Вместо термина «наука» говорят «исследование», соответственно, научные дисциплины называют исследовательскими и подразделяют на три класса: научные дисциплины – те, которые непосредственно изучают и описывают действительность (природу, человека, общество); специальные дисциплины (например, источниковедение, искусствоведение, фольклористика); инструментальные дисциплины (сюда попадают математика, логика, общая теория систем и даже история).

Литература: [13, 47, 52, 59, 68, 76-79, 84, 90, 103, 105, 107, 125, 138, 158, 166, 213, 227, 228, 306, 307, 313, 324, 333, 336, 337, 361-363, 377, 410, 417, 442, 443, 455, 474, 484, 491, 532, 533, 559, 574, 580].

Глава 2. Два направления в философии математики

Направление науки в первую очередь
определяется творческим воображением людей,
а не окружающим нас миром фактов.
Имре Лакатос

Вступление

Главными противостоящими друг другу течениями современной философии науки являются *фундаментализм* и *нефундаментализм* (или антифундаментализм). В философии математики нефундаментализм называется *социокультурным* направлением.

Дадим общее представление об этих понятиях. Фундаментализм в научном познании понимается как выражение логоцентрической рациональности, наличие твердых и определенных оснований знания, объективный характер самого познания. Фундаментализм приписывает разуму изначальный априоризм, означающий, что выступающий на сцену разум уже имеет некоторую врожденную способность познавать.

Нефундаментализм отрицает существование надежного исходного пункта познания, превозносит творческие способности человека, признает субъективность и относительность знания, допускает неограниченное число прочтений истины.

Однако между фундаментализмом и нефундаментализмом имеются определенные связи, точно так же, как не существует непроходимых границ между материальным и идеальным, объектом и субъектом, вещью и знанием о ней.

По Гегелю, познающий субъект начинает как нефундаменталист, но, построив по ходу исследования для себя основания, заканчивает как фундаменталист (см. [190]). У многих философов понимание научного познания имеет социокультурное, или историческое, измерение. Признавая это, известный российский философ Е. В. Ильенков вслед за Спинозой и Гегелем отвергает бесконечность прочтений и смыслов идей и вещей.

Л. Г. Дротянко уточняет [190]: «Математизация научного знания и практики изменяет функции самой математики в жизнедеятельности социума. Если ранее математическое знание выполняло в основном логическую, гносеологическую, методологическую функции, то с расширением сфер приложения своих результатов она начинает приобретать аксиологическую и праксеологическую функции. Таким образом, именно фундаментальные и прикладные знания, которые имеют деятельностную интенцию, в снятом виде имеют социокультурную природу, поскольку разворачивание процесса превращения теоретического знания в фундаментальное, а затем в прикладное происходит в определенном социокультурном пространстве, специфика которого не может не учитываться в соединении науки и практики».

Из предыдущего рассуждения никоим образом не следует, что математика имеет социокультурную природу, хотя на ее приложения социокультурные обстоятельства, несомненно, влияют. Как раз наоборот, математика, будучи фундаментальной и наиболее «фундаменталистской» из наук, приобретает социокультурные функции и фундирует нефундаментализм. Тем самым, некоторые социокультурные явления обнаруживают свою фундаменталистскую природу.

Современная теория познания явственно делится на *классическую* и *неклассическую* эпистемологию (гносеологию). Главный редактор журнала «Вопросы философии» В. А. Лекторский утверждает [306], что классическая теория познания отличается от неклассической признанием следующих положений. Это – критицизм (недоверие к обыденному знанию, требование обоснованности подлинного знания), фундаментализм (необходимость и поиск достоверной основы всех наших знаний), субъектоцентризм (базисом познания служит сам факт существования субъекта) и наукоцентризм (сциентизм: только наука дает истинное знание). Неклассическая теория познания отказывается от этих принципов, акцентируя внимание на изменчивости познавательных норм и многообразии способов познания мира. Критицизм заменяется пост-критицизмом, допускающим определенное доверие к традициям и результатам, полученным другими людьми и коллективами. Следует заметить, что субъектоцентризм принимается далеко не всеми представителями классической гносеологии. Так, Карл Поппер говорил об «эпистемологии без познающего субъекта», что представляется нам важным принципом эпистемологии и полезным методом объективистского философского исследования.

§ 7. О философии науки

Смысл – там, где змеи интеграла
Меж цифр и букв, меж d и f!
Валерий Брюсов

О том, что представляет собой философия науки, просто и доступно, в историческом плане рассказано в одноименной книге Мела Томпсона [544]. В последнее время вышло несколько обстоятельных учебников по философским вопросам науки для аспирантов [109, 227, 357, 385, 508]. Более подробно современная философия науки Запада представлена в хрестоматии [506]. В указанной книге последовательно определяются и анализируются следующие направления философской мысли.

1. *Релятивизм* означает относительность, условность, ситуативность научного знания. Здесь релятивизм представлен известными философом и логиком Виллардом Вэн Куайном (1908–2000) и философом и историком Томасом Куном (1922–1996), автором культового труда «Структура научных революций» [291], основанного на понятии «парадигма».

2. *Фаллибилизм*, утверждающий ошибочность любой теории. Основателем данного учения является знаменитый философ и логик Карл Поппер (1902–1994). Его основная работа по фаллибилизму «Логика исследования» была опубликована в 1934 году. Один из видных ученых подобную позицию выразил так: «Мы знаем, что все наши теории ошибочны. Задача, следовательно, состоит в том, чтобы делать ошибки раньше». См. [436].

3. *Эволюционная эпистемология* предполагает эволюционное моделирование познания и знания. Ее натуралистический подход представляет собой экстраполяцию общенаучных (биологических) эволюционных концепций за пределы естествознания – на философию науки и научное познание. В духе И. Р. Пригожина [386] научное исследование можно трактовать как самоорганизующуюся систему, формирующую «свою» окружающую среду. Эволюционная эпистемология не отвечает на кардинальный вопрос о мере специфичности познавательных и «знаниевых» процессов, о правомерности их изучения естественнонаучными методами.

4. *Научная рациональность* – разумность, опора на разум и доступность разумному пониманию. В хрестоматии представлены четыре текста (два из них принадлежат известному философу Х. Патнему), излагаемые по одной общей схеме:

рациональность–скептицизм–новая рациональность.

Надо заметить, что человек «никогда не сможет выпрыгнуть за пределы знания к самой действительности и будет обсуждать не соответствие утверждения с действительностью, а соответствие его с каким-либо другим утверждением и какими-либо другими утверждениями и представлениями. Ведь действительность всегда дана нам в знании, мы имеем с ней дело, только если так или иначе знаем ее».

П. П. Гайденко в книге «Научная рациональность и философский разум» [125] подчеркивает следующее: «Преодолеть субъективизм, ставший в новое время руководящим принципом при исследовании научного знания и постепенно превративший гносеологию в основную философскую науку, можно лишь путем обращения к рассмотрению *бытия* как центрального понятия философии и – соответственно – к онтологическим, бытийным основаниям всякого знания, в том числе и знания научного».

5. *Конструктивный эмпиризм* связывает адекватность научной теории с точной фиксацией в ней чувственных данных. При этом автор этой концепции, Б. ван Фраассен, не допускает в свою философию понятие истины (как некое оккультное качество). Ван Фраассен – сторонник структуралистской доктрины, противостоящей обычному подходу к научной теории как гипотетико-дедуктивной системе. Для него «научная деятельность есть деятельность конструктивная, а не открытие, что она представляет собой конструирование моделей, которые должны быть адекватны явлениям, но не открытие истины, касающейся ненаблюдаемого». По Фраассену, эмпирическая адекватность теории еще не гарантирует ее принятие в науке. Должна быть прагматическая процедура принятия теории, определяемая оценкой ее объяснительных возможностей.

6. *Феноменология* – учение Э. Гуссерля (1859–1938) о научном познании, в основе которого лежит понятие феномена (отличное от кантовского) [174]. *Феноменом* называется явление, если оно без остатка являет свою сущность. Согласно Гуссерлю, феномен

постигается особого рода интуицией. Он принимал как интеллектуальную, так и чувственную интуицию. Но его интуиция созидающая, а не только постигающая. Феномен не просто постигается интуицией, он созидается интуицией. Феноменологическая философия науки могла бы служить противовесом явному или скрытому натурализму подавляющего большинства современных трудов по философии науки. Борьба с натурализмом в философии и логике – это борьба против идейной зависимости этих наук от способов рассуждения, практикуемых в естествознании. Это была одна из главных тем Э. Гуссерля. Однако натурализм провозглашается Куайном, эволюционной эпистемологией и попперовской философией науки. Но не способна ли антинатуралистическая феноменология глубже или по-иному осветить вопросы истины и значения в науке? Отметим, что идеи Гуссерля прижились в философии математики.

В научном познании постоянно, переплетаясь, действуют две тенденции – *редукционизм* и *холизм*. Редукционизм есть принцип сведения изучаемого объекта к «низшим» составляющим, целого – к его частям и элементам. Холизм же схватывает объект целиком, рассматривает объект как единую неделимую сущность более высокого уровня по сравнению с его частями. Идея холизма состоит в том, что обоснованными являются только объяснения, сделанные на основе систем высокого уровня, в противоположность редукционизму. В математике редукционизм и холизм проявляются, в известной мере, соответственно в теории множеств и в теории категорий. Однако уже понятие множества синтезирует оба подхода.

О природе понятий

Истории философии известны следующие принципиальные решения проблемы статуса понятий: *платонизм, реализм, номинализм, концептуализм, диалектический материализм.* Рассмотрим их вкратце.

Древнегреческий философ Платон, ученик Сократа, провозгласил существование «мира идей» и «мира вещей». Первый состоит из абсолютных, вечных истин. Общие понятия (универсалии), входя в «мир идей», имеют свое истинное бытие, независимое от людей и вещей. «Мир вещей» есть преходящий, жалкий отпечаток «мира идей». Отдельные вещи и люди являются несовершенной реализацией божественных идей и понятий. Процесс человеческого познания Платон объяснял на своей теории воспоминания идей. Человеческое сознание, являясь проявлением, отражением, слепком Идеального, в процессе интеллектуального напряжения и сосредоточенных размышлений способно индуцировать, «припоминать» любые истины из «мира идей». Познание человеком окружающих вещей и универсалий – это настройка мышления на определенную волну, связывающую его сознание с «миром идей», и получение по данному каналу соответствующей информации (прострел сознания).

Говоря современным языком, «мир идей» представляет собой всеобъемлющее средоточие Информации, или Универсальную память о прошлом, настоящем и будущем, а мозг конкретного человека – это принимающее устройство, позволяющее человеку и обществу получать новые знания. Чтобы «процесс пошел», необходимо возбудить мысль, настроить «приемник» на нужный канал посредством определенного толчка из окружающего «мира вещей». Таким средством Платон считал *сократовский метод диалога* (возможно, с самим собой) – искусство задавать вопросы, приводящие к рождению истины. По Платону, человек открывает истины, объективно уже существующие, а не изобретает их.

Можно сделать вывод, что в дидактике платонизм признает главным самостоятельную познавательную деятельность ученика, а роль учителя – заинтересовать ученика, мотивация учения, создание проблемных ситуаций и постановка задач, в результате чего ученик должен сам научиться ставить себе задачи и решать их. Заметим, что в последних исследованиях по физиологии мозга находит подтверждение «платоновская гипотеза» о человеческом мозге как ретрансляторе так называемой тонкой материи в «разумных» энергетических полях.

В средневековой схоластике ученые мужи-монахи вели споры о природе универсалий, их онтологическом (бытийном) статусе. Соперничали противоположные концепции – реализм и номинализм. Реализм признает лежащую вне человеческого сознания реальность, понимаемую как бытие идеальных объектов. *Крайний реализм – неоплатонизм* – то же платоновское объективное существование общих понятий и идей, но на место «мира идей» поставлен Бог. *Умеренный реализм* признает реальное существование универсалий, но только в единичных вещах, а не в загробном «мире идей»; изучая отдельные вещи и совокупности вещей, человек обнаруживает в них общность, формулирует ее и тем самым открывает новое понятие.

Номинализм отрицает реальное существование универсалий, они существуют только в мышлении. Универсалии – лишь знаки, имена вещей, существующие как «колебания голоса» и не отражающие сущности обозначаемых ими вещей; они придумываются человеком. Представитель этого философского направления англичанин Уильям Оккам (XIV век) утверждал, что предметом познания могут служить только единичные индивидуальности. Концептуализм близок к умеренному реализму, но не признает объективной реальности общих понятий. Философ XII века француз Пьер Абеляр придерживается этого течения: единичные вещи могут иметь сходные признаки, то общее, что отражается в уме человека и выражается данным понятием.

Философ-богослов XIII века Фома Аквинский указывал на троякое существование универсалий. «До вещей» – в божественном разуме, «в вещах» – как их идеи, прообразы, сущности, «после вещей» – в человеческом сознании как результат абстрагирования.

Теория отражения есть теория познания в диалектическом материализме. Понятия отражают в человеческом сознании существенные стороны вещей и явлений действительности. С помощью диалектического метода и системы философских и научных категорий человек в состоянии познать каждое отдельное явление и связи различных явлений. Человек открывает законы природы и общества, но придумывает новые образы, изобретает новые конструкции, творит и фантазирует, обновляет реальность.

Большинство математиков придерживаются позиции взвешенного реализма и умеренного платонизма. Они считают, что открывают новые математические понятия и факты, а не изобретают их. Интересное обсуждение вопроса о том, открывают или изобретают математики общие понятия, содержится в работе Альфреда Реньи «Трилогия о математике» [455].

Априоризм базовых представлений

Элементарные пространственные и временные представления даны человеку от рождения. К ним относятся восприятие протяженности и простейшей формы предметов, их взаиморасположения в пространстве, ощущение направленного течения времени, самоощущение человека в пространственном и временном измерениях. Соответствующие врожденные инстинкты, способности помогают ребенку начать познавать окружающую среду, ориентироваться в мире, развиваясь, они ведут человека всю его жизнь. Нарушение априорных, врожденных представлений связано с тяжелыми болезнями. Заметим, что ряд философов, в том числе Кант, не признают врожденный характер априорных форм познания.

От рождения человеку присущ разум, проявляющийся в мышлении. Мышление выражается в той или иной языковой форме (жесты, звуки, знаки). Чем совершеннее язык, его синтаксис и семантика, тем абстрактнее само мышление, выразительнее мысли, идеи, понятия, глубже и тоньше суждения, четче и логичнее умозаключения.

Без внешних воздействий разуму не проснуться, трудно раскрыться. Необходимо овладение языком. Посредством априорных чувствований, постоянных контактов с миром и последовательных актов мышления. Так появляется сознание и самосознание у человека. Факты говорят о том, что если ребенок живет и воспитывается в стае животных до 5-6-летнего возраста, то ему нет возврата в человеческое общество, он уже не обучаем. Тем не менее подчеркнем, что Маугли умнее, разумнее других членов стаи. И поэтому именно он – вожак стаи.

О познаваемости мира

Существуют три основные концепции познаваемости мира.

Агностицизм: мир, если он реально существует, принципиально непознаваем, научные прогнозы невозможны. Возможно математическое описание повторяющихся явлений, но нет никакой уверенности в их стабильности.

Подход Канта: мир с его законами существует, их можно математически описывать и прогнозировать развитие событий. Однако многие предметы или явления суть «вещи в себе», представляют собой «черный ящик». Проводя различные наблюдения и эксперименты, изучаемые объекты можно успешно математически описывать. По разным параметрам с объекта снимаются «показания» – функциональные зависимости типа «вход-выход». На вход «черного ящика» подаются сигналы (значения аргумента), а на его выходе тем или иным прибором улавливаются ответные сигналы – значения функции. В результате соответствующих измерений строятся таблицы и графики. На их основе составляются уравнения, достаточно точно описывающие поведение объекта. Однако то, что происходит в «черном ящике» на самом деле, мы не знаем (возможно, никогда не узнаем), а можем лишь выдвигать различные научные гипотезы, более или менее объясняющие суть происходящего. Законы Кеплера действуют, но почему именно так и чем они вызваны, исчерпывающе обосновать пока нельзя, поскольку не известна природа гравитации.

Познаваемость мира: мир объективно познаваем, рано или поздно можно «докопаться» до природы, причины и сущности любого явления действительности. Наука всесильна. Для всестороннего понимания мира достаточного только одной – научной – формы познания. В науке весьма действенен метод выдвижения, доказательства или опровержения гипотез. Научное прогнозирование возможно и необходимо.

Проблему познаваемости мира умеренный платонизм решает в духе Канта: возможно адекватное математическое описание структуры мира, количественных и формообразующих характеристик любого явления действительности. Априорность наших базовых представлений, по-видимому, позволяет интуитивно схватывать и некую сущность вещей, которая, впрочем, выходит за рамки чистой науки и принадлежит метафизике. Возможно, «эта сущность», будучи зависимой от опыта и личности индивида, субъективна, варьируется в определенных или неизвестных пределах.

В своей книге «Конец науки» [590] американский ученый и писатель Джон Хорган описывает свои интервью, взятые у ряда выдающихся ученых XX века, включая знаменитых философов – названных в печати отъявленными «предателями истины» – Карла Поппера, Имре Лакатоса, Томаса Куна и Пауля Фейерабенда, высказывающих сомнение в будущем чистой науки, о мрачных временах, ожидающих ее. Он пишет: «Очевидной целью науки, философии, религии и всех других форм знания является трансформация великого "Хм?" мистического удивления в еще более великое "Ага!" понимания. Но что будет после того, как человек придет к Ответу? Есть нечто ужасное в мысли о том, что наша способность удивляться может исчезнуть раз и навсегда, и причиной этого будет наше знание».

Разумеется, существуют и противоположные, чересчур оптимистические взгляды. Возьмем книгу «Структура реальности» [187] известного американского специалиста по квантовой физике и квантовым вычислениям Дэвида Дойча. Он вознамерился создать Теорию Всего, основываясь лишь на четырех наиболее глубоких научных теориях: квантовой физике с ее интерпретацией о множественности миров (мультиверс), эволюционной теории Дарвина, теории вычислений (включая квантовые) и теории познания. Книга написана захватывающе интересно. Научно представленные параллельные вселенные и путешествие во времени вызвали бы бурный восторг у американского фантаста Рея Брэдбери. Назовем также учебную книгу «Естествознание» [288], в которой сделана попытка представить современное естествознание в качестве единой науки о природе. По мнению авторов, единая наука о природе последовательно охватывает свои усложняющиеся составные части – физику, химию, биологию, психологию – на основе математической гармонии.

Ноосфера и глобалистика

Величайший российский ученый XX века В. А. Вернадский предрекал наступление эпохи *ноосферы*, когда человечество наконец-то возьмет на себя всю ответственность за собственное будущее и дальнейшую судьбу биосферы Земли.

Необходимы основательные стержни сдерживания, самосохранения и развития человечества. К ним относятся в первую очередь нравственность и экология. А. Л. Самсонов [478] ставит вопрос, а может ли общество, человечество в целом быть разумным? Автор утверждает, что человеческое общество является искусственной средой, находящейся в отрыве от существования биосферы. И проблема разумности человечества приводит «к некоторой границе, с одной стороны которой находится математическая модель развития, а с другой – реальная возможность выбора варианта решения. Способно ли общество сознательно выбрать тот или иной канал своего развития?». Компьютерная эра может послужить новым объединяющим стержнем для человечества, обеспечивая доступность всеобщей информации. В виртуальном мире также существуют объективные законы, позволяющие надеяться на усиление разумности общества. Неуспокоенность на достигнутом всего человечества, способность вытягивать себя за волосы (как это мог делать сказочный барон Мюнхгаузен) из привычной житейской суеты может приблизить человечество к новому этапу эволюции, к ноосфере.

А. Л. Самсонов отмечает, что «интенсификация процессов на стадии возникновения человеческого общества являетя **одним из следствий законов самоорганизации сложных систем, эволюция которых с необходимостью означает появление канала, отвечающего наиболее эффективному способу использования энергии»**. Самой эволюцией в человеке заложена некая способность к преодолению трудностей и соответствующим коллективным действиям. Рациональный подход заключается в том, чтобы учиться у природы, в том числе и принципу управления.

Математик академик Н. Н. Моисеев предпочитает заменить термин управление на направляемое воздействие. И предлагает применять принцип кормчего: «Стремясь достичь своей гавани, кормчий не должен рассчитывать только на свои силы. Он в максимальной степени должен уметь использовать могучие силы Природы – силу течений и ветра, чтобы при помощи своих слабых сил достичь желаемой цели. И уж во всяком случае не направлять свой корабль наперекор потоку» [364].

«Человек при всем своем несовершенстве не является посторонним в процессе эволюционного изменения мира и биосферы планеты. Он – закономерный этап эволюции и возможность его активного участия в этом процессе – объективная реальность. Неполнота знания присуща человеку в принципе, в математике выражением этого факта является знаменитая теорема Геделя. Но математика не “закрыта” этой теоремой как область человеческого знания. В этой же мере не закрыта настоящая и будущая история цивилизации в биосфере от воздействия и непосредственного участия человека в процессе взаимного усложнения объединенной системы. Он участник и возможно катализатор в совместных эволюционных изменениях, в том числе и в изменениях схемы познания себя и природы, равно как и в принятии решений, влияющих на объединенное будущее системы человек-биосфера» [364].

В своей последней книге [363] Н. Н. Моисеев пишет: «По существу речь должна идти...о СТРАТЕГИИ ЧЕЛОВЕЧЕСТВА, т. е. совокупных действиях людей, способных до наступления экологической катастрофы обеспечить коэволюцию Человека и окружающей среды. **Разработка такой стратегии мне представляется самой фундаментальной проблемой науки за всю историю человечества. Может быть, вся история человеческих знаний, все развитие нашей общей культуры были всего лишь подготовительным этапом для решения этой задачи, от успеха котрой зависит сохранение в биосфере биологического вида Homo sapiens».**

Возможно, началом решения данной проблемы является зарождение новой интегральной науки о современном мире – *глобалистики* (см. курс лекций по глобалистике А. П. Федотова [555]). Глобалистика определяется как наука, изучающая наиболее общие закономерности развития человечества и модели управляемого, научно и духовно организованного мира в единстве трех взаимодействующих основных сфер человеческой деятельности – экологической, социальной и экономической – в реальных условиях Земли. Она «охватывает единый мир единым взглядом и описывает этот мир, его динамику развития, его внутренние взаимосвязи единой системой обобщенных параметров» [401].

Как формулируют авторы этой статьи ([401]) В. В. Оленьев и А. П. Федотов, в глобалистике ноосфера определяется как «непрерывно расширяющаяся в пространстве и во времени сфера разума и духа, сфера основанной на них жизнедеятельности Земной цивилизации, ядром которой служит историческая биосфера Земли. Неограниченная во времени жизнедеятельность Земной цивилизации достигается гармоничным взаимодействием человечества и биосферы, регламентированным индексом устойчивости развития..., и гармонией внутри самого общества...». В заключение статьи ставится проблема формирования ноосферного мировоззрения, продолжающая линии В. И. Вернадского [82] и Тейяр де Шардена [535].

При решении поставленной глобальной задачи важное значение будут иметь правильные, научно обоснованные прогнозы. И здесь свои первые шаги совершает зарождающаяся наука *прогностика*.

Прогностика есть теория исследования и предсказания будущего, опирающаяся на информатику, математическую статистику, динамическое программирование, теорию игр, синергетику. С. К. Бетяев, автор статьи «Прогностика: первые шаги науки» [40], различает научный прогноз, прозорливость и ясновидение. При этом научный прогноз определяется как алгоритмически обоснованное предсказание. В прогностике существенную роль играет математическое прогнозирование, основанное на построении, анализе и сравнении математических моделей возможного будущего. Некоторые экономические, политические и демографические тенденции уже прогнозируются. Однако развитие искусства и науки не прогнозируемо.

В. А. Вернадский пишет [84]: «Рост науки неизбежно вызывает... необычайное расширение границ философского и религиозного сознания; религия и философия, восприняв достигнутые научным мировоззрением данные, все дальше и дальше расширяют глубокие тайники человеческого сознания». В связи с этим вызывает интерес работа [513], в которой обсуждается вопрос о том, «есть ли в современной научной картине мира место для чуда?».

Статья физика Ю. И. Кулакова «Синтез науки и религии» [290] носит чисто платонистский характер. В ней четко обрисована единая научно-теистическая картина Мира. Провозглашается первичность Мира высшей реальности (мира идей, по Платону) и вторичность мира материальной действительности (платоновского мира вещей). Достаточно подробно рассмотрено строение Мира высшей реальности, в которой важное место занимают методологические понятия закона, программы и структуры. Подчеркнуто, что физические и математические структуры, лежащие в основании современной физики, образуют особую форму бытия.

В заключении к работе автор указывает, что над миром материальных вещей возвышается Мир высшей реальности, имеющий следующую иерархию. Первый этаж занимают физические и математические структуры, описывающие фундаментальные законы природы. Второй этаж состоит из многочисленных программ, по которым происходит эволюция Вселенной. Третий этаж – это духовный мир человека. Вершиной иерархии является Бог как Высшее трансцендентное, сверхличностное Первоначало всего Сущего.

Получилась определенная метафизическая картина мира, порядком «офизиченная» и обожествленная. В целом, не вдаваясь в детали, ее можно принять в качестве первого приближения. Заметим только, что «единый универсальный язык, на котором написаны все фундаментальные физические законы», уже имеется — это математика.

Укажем еще недавнюю работу С. Д. Хайтуна «Эволюция Вселенной» [578], которая непременно заинтересует читателя.

Синергетика

В переводе с греческого слово «синергетика» означает «совместное действие». Этот термин был введен Г. Хакеном в 1969 году [579]. (См. интервью с Хакеном «Синергетике — 30 лет» [492].) Основанный на естествознании синергетический подход И. Р. Пригожин (физик и химик, философ, нобелевский лауреат по химии) и его последователи стремятся распространить на гуманитарные науки, искусство и культуру. Весь мир состоит из сложных систем, открытых или закрытых, упорядоченных или хаотических, развивающихся или саморазвивающихся. Синергетика утверждает, что и при равновесных состояниях возможно саморазвитие, флуктуации, скачки, «нелинейное» поведение. По словам ведущего российского синергетика С. П. Курдюмова, «без неустойчивости нет развития».

Общим методом исследований в синергетике служит математическая теория динамических систем, моделирующая нелинейные явления неравновесия и неустойчивости. Синергетика выявляет и описывает сходные, однотипные процессы в естествознании, гуманитарных науках и человеческом мышлении. Диалектический закон отрицания отрицания, или, что то же самое, знаменитая гегелевская триада «тезис→антитезис→синтез», реализуется в синергетической теории динамического хаоса цепочкой «порядок→хаос→новый порядок». На стадии порядка наблюдается устойчивое поведение системы. Затем происходят флуктуации, вызывающие хаос, — это неустойчивая ситуация, называемая перемешивающим слоем. Наконец, в результате скачка (бифуркации) наступает новый устойчивый порядок. Эта динамичная схема протекания и смены процессов встречается в самых разнообразных областях знания.

Синергетика имеет три аспекта (и соответственно развивается в трех направлениях):

1) *математический* как теория динамических систем;

2) *междисциплинарный* – изучение одинаково протекающих процессов самоорганизации в природе, обществе, мышлении;

3) *философский* как концептуальный базис новой научной картины мира.

Синергетической парадигмы в познании и философии придерживаются многие члены Российской академии естественных наук, такие ученые – представители естественных и точных наук, как С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий, С. П. Капица, Д. С. Чернавский, Р. Г. Баранцев и другие. Синергетика еще не стала общепризнанной наукой, дающей основу современной научной картины мира. Ведется острая полемика о научном значении и статусе синергетики.

Так, в своей статье [295] В. А. Кутырев, стремясь оправдать и спасти бытие как первостепенную онтологическую и гносеологическую категорию, резко критикует синергетику как правопреемницу диалектики. По Кутыреву, сторонники синергетики заменили вещно-событийный мир информационно-знаковой средой, образы и понятия – моделями и символами, что похоже на постмодернизм с его центральным понятием «не-наличия». Автор также обвиняет синергетику в том, что она претендует на всеобщий метод познания, и при этом не ищет причин явлений. На эту публикацию немедленно откликнулся В. П. Прытков. В своем ответе «Оправдание синергетики» [445] он отмечает, что имеются веские «основания для **предположения о синергийной природе диалектического разума**, в частности, о синергийной интерпретации диалектики: диалектический синтез есть результат, продукт совместного согласованного (синергийного) действия противоположностей».

Обратимся теперь к содержательной аналитической статье Р. В. Баранцева «Имманентные проблемы синергетики» [31]. Отмечается, что синергетика является и предметом, и методом, и идеей. Ее становление можно сравнить с историей экологии и асимптотической математики. Существует большой разброс в определениях синергетики как области знания и познания. Более органичным и правильным автору представляется методологический подход, основанный на тех или иных принципах. Выделяются три основополагающих принципа: устоявшиеся *нелинейность* и *открытость*, а третий принцип варьируется – указываются то сложность, то неравновесность, то диссипативность. В качестве третьего принципа автор предлагает *когерентность*, понимаемую как всеобщая согласованность взаимодействия элементов системы. По мнению Баранцева, универсальной семантической формуле системной триады

рацио, интуицио и эмоцио

соответствует синергетическое триединство

нелинейность, открытость и когерентность.

Он пишет: «В синергетике, где шкалы нелинейности, открытости и когерентности еще не сформированы, приходится ограничиваться качественными оценками... Выделение оппозиций есть все-таки наследие бинарной парадигмы. Однако соотношение неопределенностей можно симметризовать, приводя его к тернарному виду». К паре элементаризм (редукционизм)-холизм в качестве арбитра можно добавить идею синергизма, получив новую системную триаду.

Далее, Р. В. Баранцев указывает на основное бинарное противоречие *порядок–хаос*, которое пытается разрешить синергетика. Синергетика и здесь предлагает дополнить бинарность до системной тернарности, добавив к ним объединяющее творческое начало (*креативность*). Творчество, активность сознания внутренне присущи миру. Мы видим, что в синергетике идея бинарности отношений заменяется идеей триадичности связей. Еще один важный пример этого: неопределенность – дополнительность – совместность. Автор завершает статью обнадеживающей сентенцией: «А хаос и порядок, энтропия и жизнь, свобода и единство благодаря синергии перейдут от вражды к сотрудничеству».

В своих последних работах академик Н. Н. Моисеев, по сути дела, также склоняется к синергетике при исследовании таких сложных систем, как природа и общество, биосфера и ноосфера. Доступный наблюдению мир он называет Универсумом, который является саморазвивающейся системой. В основе описания этой глобальной системы лежит дарвиновская триада: изменчивость, наследственность, отбор. Функционирование биосферы есть череда эволюционных периодов развития и периодов катастрофических перестроек (бифуркаций биосферы). Последняя подобная бифуркация – неолитическая революция – ознаменовалась выделением человека из живой природы и его становлением как самостоятельной одухотворенной силы, характеризуемой зарождением собственности. Грядет новая глобальная перестройка биосферы, связанная с надвигающимся экологическим кризисом и неразумным, несогласованным поведением человека на Земле. Некоторый оптимизм внушает появление у человечества коллективного разума. Для придания понятию «ноосфера» определенной наглядности Н. Н. Моисеев ввел в употребление понятие *коэволюции человека и природы*, означающее развитие общества в согласии с законами развития биосферы. Его статья [364] завершается словами: «Нужно говорить, что общество способно обеспечить режим коэволюции с биосферой в том случае, если деятельность людей не допустит новой бифуркации, перехода биосферы в новый канал своей эволюции, или, пользуясь языком теории динамических систем, в новый аттрактор».

Следует высказать серьезные опасения, касающиеся безграмотного и неуместного употребления синергетической терминологии во многих работах по «гуманитарной синергетике». Такого рода опасения хорошо показаны в статье В. Б. Губина [167], посвященной подробному анализу автореферата одной докторской диссертации по социологии управления. Он называет складывающуюся плачевную ситуацию в общественной науке «гуманитарно-синергетическим ажиотажем» и замечает, что «в новой труднейшей, проблемной области физики и математики, промежуточной между механикой и термодинамикой, и своих-то настоящих знатоков – раз-два и обчелся». В рецензируемом автореферате В. Б. Губин усматривает не только отсутствие «синергетического» вклада, но и полную бездоказательность положений диссертации. Подобные псевдонаучные работы пронизаны постмодернистским духом.

Новомодные термины «синергетический подход» и «синергетическая парадигма» начали появляться и в педагогических исследованиях (см., например, [398, 537]).

Вызывают интерес полемические заметки В. Н. Поруса [437] о книге (сборнике статей) «Синергетическая парадигма. Когнитивно-коммуникативные стратегии современного научного познания» [493]. В них автор, вслед за академиком В. С. Степиным, предостерегает от профанации синергетического подхода, когда он опирается на сомнительные аналогии и метафоры. Нельзя бездумно применять методологический аппарат синергетики к теории познания. Следует различать синергетику как научную картину мира и как совокупность конкретных математических моделей, применяемых в других науках и на практике. Автор сомневается в том, что синергетика служит всеохватной парадигмой даже в естествознании. Его настораживает употребляемый в книге термин «когнитивная философия». Ответ на вопрос о том, станет ли синергетика ядром научной картины мира, должна дать сама наука. В заключение статьи В. Н. Порус пишет, что данный труд «отражает тенденцию расширения синергетического движения. Со всеми положительными и отрицательными последствиями».

В статье Р. Е. Ровинского [459] кратко проанализирован процесс развития сложных систем, направленный характер их развития. Синергетика как становящееся междисциплинарное научное направление способна описывать развитие сложных систем, их самоорганизацию. С другой стороны, синергетика определяется как «новое мировоззрение, отличное от ньютоновского мировоззрения». Автор пишет: «Относительно хорошо понятым современной наукой примером исторически направленного развития служит процесс биологического развития каждого земного организма. ... Признаки направленного исторического развития отмечаются у многих высокоорганизованных систем, составляющих разномасштабную иерархию структур мегамира. Достаточно уверенно в этом смысле можно говорить о развитии биосферы, Земли, Солнечной системы». Статья завершается так: «Направленный процесс развития состоит из последовательных взаимосвязанных одиночных актов усложнения. Сомнительна возможность объяснить согласованное существование таких одиночных актов случайностью. На приведенном выше примере программного развития земных организмов возникает понимание того, что необходимое согласование последовательных актов самоорганизации возможно при условии существования информации о будущих состояниях развивающейся системы. И такая информация должна содержаться в самой системе. Здесь можно вспомнить слова Пригожина о том, что вне равновесия материя прозревает, придав прозрению смысл наличия необходимой информации в сочетании с самоорганизацией» [459, с. 167-168].

Системы знания

В своей монографии «Эпистемология классическая и неклассическая» [306, с. 201-248] В. А. Лекторский во всем многообразии научного знания выделяет четыре системы знания: математику, естествознание, науки о человеке и обществе, историю. Математика признается особым видом знания. Связь математики с эмпирией весьма туманна. Роль математики в развитии науки и техники исключительна. Автор подчеркивает: «*Большинство ученых и философов считали, что настоящее, т. е. точное знание о природе, обществе и самом человеке может быть выражено только на математическом языке*».

Естественнонаучное знание позволило создать современную техническую цивилизацию, способно (хотя бы частично) прогнозировать будущие явления, позволяет понять и объяснить происходящие события. В. А. Лекторский пишет: «*Естественнонаучное знание дает такие способы понимания, осмысления, объяснения природных процессов, которые отличаются от всех других тем, что достигаются с помощью точной фиксации фактов опыта и строгих логических рассуждений. Естествознание (наряду с математикой) – это школа критического рационального мышления и показатель его возможностей*».

Далее кратко обсуждаются философские проблемы общественных наук, касающиеся существования соответствующих научных законов и методов исследования, психологии человеческой деятельности. Анализируя историческое познание, автор отмечает его непохожесть на другие виды научного познания. «*История имеет дело не столько с общими законами, сколько с индивидуальными фактами. Сами эти факты нередко трудно установить... С течением времени те же самые факты понимаются по-новому. Поэтому история постоянно переписывается. Если математика имеет дело со знанием неоспоримым, строго доказанным, если науки о природе могут формулировать всеобщие законы, которые безусловно действуют в* *той области, к которой они относятся, то в истории твердо установленных истин не так уж много. Зато в ней немало неясного, спорного, постоянно меняющегося. Но ведь такова и человеческая жизнь... Человек – существо историческое. Без знания и понимания истории он не существует».*

Наука и псевдонаука

До сих пор нет (и не может быть) строгого определения, что такое наука. Понятия науки и псевдонауки относятся к числу неформализуемых понятий. Не удается провести четкую демаркационную линию между наукой и ненаукой. Говоря о ценностях науки, В. А. Яковлев резюмирует [634]: «Но если нет этой границы, то получается, что наука всегда открыта различным нравственным и социальным ценностям, которые непосредственно вплетены в нее. Именно это, собственно, и доказывают когнитивные социологи. Если же это все-таки не так, и наука (научное знание) обладает особым эпистемологическим статусом, претендует на истинность, то тогда в качестве "фильтров" должны выступать определенные научные принципы как некая пограничная область между "чисто" эпистемологическими единицами (фактами и теориями) и всеми другими метанаучными и околонаучными образованиями».

Отметим, что попытку определить понятия псевдонауки и лженауки предпринял академик С. С. Кутателадзе в своей работе с характерным названием «Наука, псевдонаука и лженаука» [294]. В этом препринте он критикует философские издания Сибирского отделения Российской академии наук (РАН), в которых высказываются ложные теории, касающиеся якобы научных открытий так называемых фундаментальной длины и актуального нуля. И другие выдающиеся ученые – прежде всего математики и физики – стараются активно бороться с псевдонаучными и лженаучными «достижениями». Достаточно назвать лауреата Нобелевской премии по физике академика В. Л. Гинзбурга.

В РАН создана специальная Комиссия по борьбе с лженаукой и фальсификацией научных исследований. Ее председатель физик-академик Э. П. Кругляков дает решительный отпор лженауке и паранауке в статье «Почему опасна лженаука» [284]. Лженаучная информация заполонила СМИ, широко пронизала массовое сознание людей, проникла во властные структуры. Она дезориентирует и зомбирует человека. В этом заключается опасность лженауки. «Особенно активно ведется сегодня атака на математику, что, впрочем, естественно, так как она лежит в основе современной науки» [284, с. 8].

В своей лекции в Ватикане, в Папской академии наук В. И. Арнольд (см. интервью [165]) предупредил: «Учитывая взрывной характер всевозможных псевдонаук (вроде астрологии) во многих странах, в грядущем столетии вероятно наступление новой эры обскурантизма, подобной средневековой. Нынешний расцвет науки может смениться необратимым спадом, подобным тому, который произошел в живописи в период после итальянского Возрождения». Арнольд отмечает, что зачастую наука заменяется философской болтовней, наносящей непоправимый вред всей науке, в частности математике.

Мы считаем, что наука, безусловно, имеет свой гносеологический, сугубо познавательный статус, выделяющий ее среди других областей знания и форм человеческого познания. Наука познает реальность. Раз и навсегда формализовать понятие науки невозможно, точно так же, как и многие другие «жизненно» важные и ценные понятия: человек, природа, общество, красота, любовь, мораль, математика и т. д. Тем не менее на базе сложившейся системы философских категорий можно с той или иной степенью адекватности выразить, описать подобные понятия (см. § 3).

В переломные времена, к коим относится период перехода от одного столетия (тем более тысячелетия) к другому, от старой эпохи, казавшейся стабильной и нескончаемой, к новой, непредвиденной и устрашающей, наблюдаются метаморфозы и с человеческим разумом. Неодолимо тянет ко всему лженаучному, иррациональному, сомнительному. Разум человека как бы защищает человеческую психику от суровых реалий и стрессов, уповая на иллюзии и ожидая чуда. Человеческий разум становится «разумом раболепствующим».

Об опасностях, подстерегающих научный разум на путях лженауки и псевдонауки, идет речь в интересной и поучительной статье Б. И. Пружинина [444]. Увлекаясь решением прагматических задач, научный разум подчиняет им и заменяет ими решение объективных познавательных задач. Как отмечает автор, современная псевдонаука отвергает традиционную научную критику в свой адрес, ссылаясь на то, что она является передовой нетрадиционной наукой с совсем другими научными нормами. Псевдонаука научилась хорошо имитировать научную деятельность, хотя в последнее время ей и это не нужно делать. Говоря о состоянии методологии науки, профессор Б. И. Пружинин приходит к тому выводу, что постпозитивистское методологическое сознание соответствует статусу прикладного исследования, когда приращение знания происходит лишь в рамках решения конкретных практических задач. Псевдонаука использует научное знание, но не создает его. Затем он переходит к рассмотрению прикладной науки, которая «не может развиваться как наука. Логика ее развития задается извне. Она фактически отказывается от решения проблем, обеспечивающих ее логическую и историческую целостность, преемственность в развитии. … Предоставленная сама себе, прикладная наука постепенно трансформируется в совокупность технологических сведений». И далее прикладная наука незаметно переходит границу научности, превращаясь в псевдонауку. Типичный пример – так называемая ведомственная наука.

Представители псевдонаук выдают псевдонауку за альтернативную науку – достаточно вспомнить астрологию или уфологию. Интересна и поучительна история взаимодействия научного и паранаучного знания. Это взаимодействие способно обогатить понятийный аппарат научного поиска, приводит к возникновению новых областей науки (скажем, биоэнергетики), что имеет определенную ценность. Но не это главное. Современная псевдонаука кишит различными «техническими», инструментарно-практическими искусствами, к которым относятся ясновидение, эзотерическая медицина, политтехнология и т. п. Научное знание, заимствованное псевдонаукой, необходимо псевдонауке как авторитетное основание, способное убедить людей в ее «правильности», и как фактор поддержания научного статуса основных ее идей. «Технология псевдонаук эффективно работает лишь в социокультурном пространстве, успешно увязывая социокультурные цели и средства» (см. [444]).

Альтернативой прикладным исследованиям и псевдонаучной методологии является фундаментальная наука. Б. И. Пружинин продолжает: «Современная нам социально-культурная действительность такова, что, кажется, только в форме фундаментальной науки научно-познавательная деятельность может сохранить себя как самостоятельный культурный феномен». Фундаментальное исследование означает обобщение знания и имеет своей целью развитие концептуального базиса и аппарата науки. К методологическим принципам научного сознания автор относит преемственность, историзм и рациональность знания и познания мира. В конце статьи он указывает: «В обращении к этим принципам заключается, на мой взгляд, перспектива философско-методологической рефлексии над наукой, способной напоминать научному разуму о его долге и, тем самым, удерживать единство ее распадающегося самосознания от соблазнов псевдонаук. Если, конечно, XXI век не предпочтет псевдонауку».

Заметим, что процитированный только что автор недооценивает роль и силу современной логики в понимании «нынешних проблем методологического сознания». По этому поводу отсылаем читателя к работе Н. Н. Непейводы [383].

Применительно к математике С. Р. Когаловский подчеркивает [267]: «В прикладных рассмотрениях математические понятия, математические методы фигурируют лишь как *средства* решения задач. В теоретических же рассмотрениях они становятся *предметом* изучения, а это представляет собой принципиально иной тип деятельности. Признавая необходимость прикладной подготовки, важно вместе с тем памятовать о том, что только ее недостаточно для воспитания той высокой интеллектуальной культуры, которую может дать основательное изучение "чистой" математики».

Нам представляется, что прикладная наука, не опирающаяся на фундаментальную науку, псевдонаучна. Настоящая же прикладная наука есть приложения науки, в первую очередь науки фундаментальной. Многие инновационные технологии в гуманитарной сфере, в том числе в педагогике и психологии, социологии и экономике, носят целиком псевдонаучный характер. Философский фундаментализм и метафизика, объемлющая его, стоят гораздо ближе к науке, чем социокультурный подход. Философия постмодернизма есть специфическое социокультурное мировоззрение, которое не только псевдонаучно, но и враждебно науке (см. § 11).

Литература: [26, 31, 40, 47, 69, 82, 84, 106-109, 124, 125, 132-136, 138, 154, 165-167, 174, 182, 187, 192, 227, 242, 243, 245, 267, 284, 288, 290, 291, 294, 295, 301, 306, 313, 324, 349, 357, 362-364, 383, 385, 386, 398, 401, 409, 436, 437, 443-446, 449-451, 454, 455, 459, 478, 492, 493, 494, 506, 508, 516, 534, 535, 537, 544, 546, 549, 555, 557, 558, 578-580, 585, 590, 597, 598, 603, 611, 618, 619, 621, 634].

§ 8. Исторический и социокультурный фон математики

> История математики... страдает одним неисправимым недостатком: хронологический порядок событий не соответствует порядку логическому, естественному.
>
> *Хосе Борхес*

Периодизация истории математики

Осмысление математики, как и любого другого фундаментального явления, невозможно без знания и понимания ее истории. Крупнейший российский математик XX века академик А. Н. Колмогоров [271] выделяет в развитии математики четыре больших периода.

Первый, подготовительный период (до VI века до Р. Х.) – зарождение математики. Это время эмпирической математики. В жизни людей возникла необходимость считать и измерять. Математические сведения носили рецептурный характер (делай то-то и так-то) и приобретались путем проб и ошибок. Появились зачатки арифметики (оперирование с натуральными числами и дробями), алгебры (описательное решение простейших уравнений), геометрии (измерение длин предметов, площадей участков и объемов сосудов).

Нет сомнений в том, что математика в человеческом обществе зародилась как практическая необходимость в счете и измерениях. В результате длительной эволюции, наблюдений и приобретенного опыта сначала возникли «рабочие» правила и эмпирические умения, послужившие предпосылкой исходных математических предпонятий числа и геометрической фигуры. Так, наряду с натурфилософией, появилась пранаука математика. Только в Древней Греции в школах Фалеса и Пифагора встала на ноги наука математика. Эмпирическая пранаука математика существовала задолго до этого в Китае, Индии, Вавилоне, Египте. Но именно появление и осознание возможности и необходимости логических рассуждений, дедукции, доказательств математических правил означало становление математики как науки.

Практика подтолкнула осознание и необходимость целого ряда предпонятий, эмпирических аналогий и обобщений, наиболее важные из которых стали формироваться как теоретические понятия. Это привело к возникновению начал науки.

Период элементарной математики (VI век до Р. Х. – начало XVII века). Математика оформилась в единую дедуктивную науку в Древней Греции. Основы математики предстали в систематизированном и логически последовательном виде. Образцом строгости стали знаменитые «Начала» Евклида (около 300 года до Р. Х.). Наряду с аксиоматически изложенной геометрией, «Начала» содержат теорию пропорций. При выборе единичного отрезка числа мыслились геометрически как отрезки (длины отрезков). Дроби - это отношения отрезков. Произведение (положительных) чисел представлялось как прямоугольник (его площадь) с соответствующими сторонами. Арифметика излагалась как теория пропорций (отношений отрезков). Алгебра также стала рассматриваться на элементарном геометрическом языке (так называемая *геометрическая алгебра*); в полной мере это проявилось после открытия иррациональности.

Дело в том, что древние греки были уверены в гармоничности мира. В частности, они считали все числа рациональными, а отрезки – соизмеримыми. Обнаружение несоизмеримости стороны квадрата и его диагонали (иррациональность числа $\sqrt{2}$) повергло их в шок (первый кризис основ математики). Поэтому древнегреческие математики предпочитали оперировать числами в геометрической форме.

В «Началах» были представлены и элементы теории чисел. Доказана теорема о том, что простых чисел бесконечно много. Изложен алгоритм нахождения НОД двух натуральных чисел (алгоритм Евклида). Сформулирована основная теорема арифметики.

Большое внимание уделялось геометрическим построениям циркулем и линейкой. Еще в V веке до Р. Х. были поставлены три классические задачи на построение: о квадратуре круга, трисекции угла и удвоении куба, которые получили решение лишь в XIX веке.

Древнегреческую математику обогатили такие ученые, как Пифагор (вспомним теорему Пифагора), Аристотель (впервые разработал систему логики, теорию дедукции), Евклид, Архимед (умело вычислял площади поверхностей и объемы тел, его метод исчерпания – предтеча интегрального исчисления), Аполлоний (исследовал конические сечения – эллипс, параболу, гиперболу), Диофант (в своей

«Арифметике» виртуозно решал различные неопределенные уравнения в натуральных числах, ввел буквенные обозначения).

Важным этапом в развитии элементарной математики стало раннее средневековье (V–XII века), когда арабские и индийские математики начали употреблять десятичную систему счисления, ввели нуль, отрицательные и иррациональные числа, определили тригонометрические функции. Среднеазиатский ученый ал-Хорезми (IX век) создал первый учебник алгебры «Краткая книга об исчислении ал-Джабра и ал-Мукабалы». Слово «ал-джабр» по-арабски означает операцию переноса вычитаемых из одной части уравнения в другую; от него происходит и название самой науки *алгебра*. По этой книге долгое время обучалась вся Европа. Именно тогда алгебра оформляется как *учение о решении уравнений* (вплоть до начала XIX века).

Следующий этап в развитии математики связан с достижениями европейских математиков (XVI–XVII века). Француз Виет и итальянцы Сципион Дель Ферро, Никколо Тарталья, Джироламо Кардано и Лудовико Феррари вывели общие формулы для решения алгебраических уравнений с одним неизвестным 2-й, 3-й и 4-й степени, что привело в дальнейшем к теории многочленов и к комплексным числам. Огромный вклад в создание современной алгебраической символики, буквенной алгебры внесли итальянский математик Раффаэле Бомбелли и Франсуа Виет. Первый из них строил свою алгебру на базе арифметики, начал применять скобки, знак корня, смело оперировал с комплексными числами, производил тождественные преобразования алгебраических выражений. Виет преобразовал алгебру на основе буквенных обозначений, вывел формулы (носящие ныне его имя), связывающие корни и коэффициенты уравнения. В начале XVII века шотландский математик Джон Непер изучал логарифмические функции и построил первые таблицы логарифмов. Появилась комбинаторика.

Период математики переменных величин (XVII век – начало XIX века). Необходимость разработки методов изучения движения (естествознание, инженерное и военное дело, кораблевождение) привела к возникновению дифференциального и интегрального исчисления на основе понятия переменной величины. Почти одновременно в конце XVII века ученые Исаак Ньютон и Готфрид Лейбниц заложили основы математического анализа.

Отметим вклад Лейбница в логику. Он впервые высказал идею об универсальном исчислении, с помощью которого можно было бы решить любую математическую задачу. Эта мечта в значительной мере осуществлена в современной математической логике. Более того, создан машинный исполнитель формального исчисления – компьютер. К знаменитым логическим законам Аристотеля (законы двойного отрицания, отрицания противоречия, исключенного третьего, правило силлогизма) Лейбниц добавил закон достаточного основания.

Французские ученые Рене Декарт и Пьер Ферма разработали *метод координат, создали аналитическую геометрию,* применив символику и методы алгебры к геометрии. Ферма внес большой вклад в теорию чисел, а философ Декарт – в научную методологию.

В XVIII веке все разделы математики обогатил швейцарец Леонард Эйлер. В этот период возникли теория вероятностей, дифференциальная и проективная геометрия. Творили такие математики, как Паскаль (механик, физик, философ), Бернулли (ряд представителей этого швейцарского семейства были известными учеными), французы Жозеф Луи Лагранж, Пьер Лаплас, Гийом Лопиталь, Жан Д'Аламбер, Гаспар Монж, Клод Клеро, Этьенн Безу и Шарль Вандермонд, англичане Эдуард Варинг, Абрахам де Муавр и Брук Тейлор, шотландец Колин Маклорен, многие другие.

Период современной математики (начало XIX века – наши дни). Почти вся современная математика построена строго аксиоматически, на теоретико-множественной основе, пользуется языком и достижениями математической логики. Укажем главных действующих лиц этого периода.

Сначала коснемся математики XIX столетия. Развитие математики в XIX веке было вызвано в значительной степени ее внутренними потребностями. В статье «Математика и диалектика» [5] академик А. Д. Александров выделил необходимость решения в XIX столетии четырех проблем-загадок: 1) загадка пятого постулата Евклида, его статус; 2) загадка мнимых чисел, обоснование их применения; 3) проблема разрешимости в радикалах алгебраических уравнений; 4) уточнение основ математического анализа.

Огромный вклад в математику внес великий немецкий математик Карл Гаусс. Он доказал основную теорему алгебры многочленов, создал теорию сравнений, вывел квадратичный закон взаимности в теории чисел, строго обосновал комплексные числа. Наряду с Н. И. Лобачевским и венгерским математиком Яношем Больяи Гаусс считается первооткрывателем неевклидовой геометрии, называемой *геометрией Лобачевского*. Развил дифференциальную геометрию. Оставил заметный след практически во всех областях математики.

Вместе с Н. И. Лобачевским отметим творчество таких русских математиков, как П. Л. Чебышев, М. В. Остроградский, В. Я. Буняковский, С. В. Ковалевская, А. А. Марков (старший), В. А. Стеклов, Д. Ф. Егоров.

Поговорим немного о различных *геометриях плоскости*. Пятый постулат Евклида утверждает, что в плоскости для любых прямой l и точки A вне этой прямой можно провести единственную прямую, параллельную данной. Существуют еще две логические возможности (при сохранении кванторов общности): Л) через A можно провести более одной прямой, не пересекающейся с l; П) через A нельзя провести ни одной прямой, не пересекающейся с l. Геометрия Евклида без пятого постулата называется *абсолютной геометрией*; в ней утверждение П) ложно. Абсолютная геометрия с отрицанием пятого постулата – это геометрия Лобачевского, называемая еще *гиперболической* геометрией. Сумма внутренних углов любого треугольника в геометрии Лобачевского строго меньше 180°. В *проективной плоскости* и на *римановой поверхности* имеет место утверждение П). Основы проективной геометрии были заложены французскими математиками Жераром Дезаргом и Блезом Паскалем в XVII веке, а *геометрия Римана* (или *эллиптическая* геометрия) создана немецким математиком Рихардом Риманом в середине XIX века. Заметим, что достаточно общее понятие пространства дано в знаменитой работе Римана 1954 году «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии». В отличие от проективной геометрии евклидова геометрия, геометрия Лобачевского и геометрия Римана суть *метрические* геометрии – в них определено расстояние между любыми двумя точками. Заметим, что сумма внутренних углов треугольников римановой плоскости строго больше 180°.

Геометрии Лобачевского и Римана – основные *неевклидовы* геометрии. Они так же непротиворечивы, как и евклидова геометрия. Простая модель плоскости Лобачевского была предложена немецким математиком Феликсом Клейном в 1871 году. Именно, плоскостью считается внутренность обычного круга на евклидовой плоскости, точками – его внутренние точки, а прямыми – хорды (без концов) в данном круге. В модели Клейна расстояние между точками A и B определяется как $ln(SB/BT:SA/AT)$, где ST – хорда с концами S и T, проведенная через точки A и B (хорда $SABT$), а длины отрезков под знаком логарифма берутся в метрике евклидовой плоскости. Модель плоскости Римана построил французский математик Анри Пуанкаре. В качестве римановой плоскости он брал обыкновенную сферу с отождествленными диаметрально противоположными точками, считая прямыми большие окружности. В теории конечных геометрий рассматриваются и *конечные плоскости*. Надо отметить, что при изучении абстрактных геометрий различают *синтетический* (аксиоматический) и *аналитический* подходы.

Норвежец Нильс Абель доказал неразрешимость в радикалах общего алгебраического уравнения любой степени выше 4-й. Француз Эварист Галуа полностью решил вопрос об условиях разрешимости в радикалах любого многочлена с рациональными коэффициентами. Для этого он ввел понятие разрешимой группы подстановок корней многочлена (*группа Галуа* многочлена): многочлен разрешим в радикалах тогда и только тогда, когда разрешима его группа Галуа. Галуа построил конечные поля, называемые также *полями Галуа*. Можно считать, что именно с работ Галуа начинается развитие современной алгебры.

Заметим, что решение трех классических задач древности на построение циркулем и линейкой, а также построение правильных n-угольников сводятся к разрешимости в квадратных радикалах соответствующих уравнений. Эти задачи, кроме квадратуры круга, были решены к началу XIX века. А невозможность «квадратуры круга» получила полное обоснование вместе с доказательством в 1882 году трансцендентности числа π, принадлежащим немецкому математику Карлу Линдеману.

Немец Лежен Дирихле – основоположник аналитической теории чисел. Решая проблему Ферма, немецкий математик Эрнст Куммер начал разработку алгебраической теории чисел.

Обоснованием математического анализа занимались Огюстен Коши, Бернард Больцано, Карл Вейерштрасс и Георг Кантор. Французский математик Коши свел весь математический анализ (непрерывность, дифференциальное и интегральное исчисление, теорию рядов) к понятию предела функции, хотя и не дал строгого определения предела. Как писал А. Д. Александров [5], речь шла «о смысле выражения $\lim f(x)$: что значит в нем lim, f, x?». Впервые строгое определение предела, а также непрерывности числовой функции (на «языке ε-δ») сформулировал чешский математик и философ Больцано в 1817 году. На этой основе немецкий математик Вейерштрасс в своих лекциях скрупулезно и последовательно изложил математический анализ.

Одновременно шло построение теории действительных чисел – основы классического математического анализа, в котором изучаются важнейшие свойства числовых функций: непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость, измеримость. Такие теории построили Кантор (на базе понятия фундаментальной последовательности рациональных чисел) и Дедекинд (сечения рациональных чисел). Строгое обоснование анализа позволило избавиться от недоразумений и противоречий, вызванных нечеткостью исходных понятий, в частности в теории рядов (после того как были определены понятия суммы и сходимости числового ряда). С другой стороны, в анализе возникли тонкие вопросы о соотношении его основных понятий. Так, Вейерштрасс построил пример непрерывной, но нигде не дифференцируемой функции.

Несколько слов о развитии понятия числа. После обоснования Гауссом комплексных чисел примерно в середине XIX века сначала английский математик Уильям Гамильтон определил *кватернионы*, а чуть позднее его соотечественник Артур Кэли ввел *октавы* (называемые также числами Кэли). Это соответственно четырехмерная и восьмимерная действительные алгебры. Изучались также другие конечномерные действительные алгебры (*гиперкомплексные числа*). Немецкий математик Фердинанд Фробениус доказал, что с точностью до изоморфизма существуют три ассоциативные конечномерные действительные алгебры с делением: поля действительных и комплексных чисел и тело кватернионов. Октавы образуют лишь альтернативную (не ассоциативную) алгебру с делением.

С другой стороны, целые числа были определены как классы эквивалентных пар (интуитивно означающих разности) натуральных чисел, а рациональные числа – как классы эквивалентных пар (дроби) целых чисел. Наконец, был аксиоматизирован и сам натуральный ряд (*система Пеано*). Арифметические операции на системе Пеано определяются индуктивно (подход немецкого математика Германа Грассмана). В результате к концу XIX века завершается аксиоматизация основных числовых систем.

В 1899 году немецкий математик Давид Гильберт аксиоматизировал элементарную евклидову геометрию.

На рубеже XIX и XX веков математики обнаружили противоречия (парадоксы, антиномии) в созданной Кантором *теории множеств* – фундаменте и содержательном языке современной математики. В то время стройная и универсальная теория множеств завоевывала все новые и новые умы. И вдруг – противоречия в самых основах теории. Наиболее известен *парадокс Рассела* (1902 год): принадлежит ли множество всех множеств, не являющихся собственными элементами, самому себе? В канторовской теории множеств для любых двух множеств можно однозначно утверждать, является ли первое из них элементом второго множества или нет. Поэтому множество

$$P = \{X - \text{множество}: X \notin X\}$$

всех множеств, не являющихся элементами самих себя, либо принадлежит P, либо не принадлежит P. Легко видеть, что $P \in P$ тогда и только тогда, когда $P \notin P$. Получили явное противоречие.

Существует популярная форма парадокса Рассела, придуманная им же, – *парадокс брадобрея*: в некотором селении живет парикмахер, который стрижет всех тех и только тех его жителей, кто сам не стрижется. Стрижет ли сам себя парикмахер? Приведенное выше рассуждение показывает, что свойство парикмахера из парадокса брадобрея противоречиво, откуда следует, что такого парикмахера просто не может существовать. И в случае парадокса Рассела напрашивается вывод, что такого множества P не существует, т. е. P – не множество. Но в канторовской теории множеств любая совокупность объектов, обладающих определенным свойством, образует множество.

Как же быть? Дело в том, что такие противоречия возникают из ничем не ограниченного, чрезмерно свободного обращения с множествами. Поэтому, чтобы избежать подобных противоречий, необходимо четко определить процедуры образования множеств. А это можно осуществить на аксиоматической основе.

Первая аксиоматика теории множеств создана немецким математиком Эрнстом Цермело в 1904 году. В дальнейшем она была развита и сейчас носит название аксиоматики Цермело-Френкеля. Интересно, что в системе аксиом Цермело впервые четко сформулирована так называемая *аксиома выбора*, по поводу которой математики вели серьезные споры. Аксиома выбора гласит, что для любого непустого семейства непустых множеств существует (хотя бы одна) *функция выбора*, фиксирующая в каждом множестве семейства ровно по одному элементу.

Существуют различные утверждения, эквивалентные аксиоме выбора. Например, *теорема Цермело*: любое непустое множество можно вполне упорядочить. Или часто применяемая в теории множеств, общей алгебре и общей топологии *лемма Цорна*: если в упорядоченном множестве каждая цепь ограничена сверху, то оно имеет максимальный элемент. Для иллюстрации аксиомы выбора Рассел приводил следующий пример. Пусть мы имеем бесконечное множество пар носков. Чтобы выбрать в каждой паре по одному носку, необходима аксиома выбора. Если же имеется бесконечное множество пар ботинок, то выбрать по одному ботинку из каждой пары можно двумя естественными способами: брать только правые ботинки или только левые ботинки; здесь аксиома выбора не нужна.

Иной подход к решению проблемы теоретико-множественных парадоксов предложил американский математик Джон фон Нейман. Канторовские множества он назвал *классами*. При этом множеством называется класс, являющийся элементом некоторого класса. Тогда в парадоксе Рассела получается класс P, не являющийся множеством.

Известны также логические парадоксы, например *парадокс лжеца*. Некто говорит: «Я лгу». Истинно ли это высказывание? Парадоксы лжеца и Рассела содержат утверждение о самом себе. Предпринимались попытки избежать рефлексивных утверждений и самообращений, запретить их использование в формализованном математическом языке. Они оказались малопродуктивными. В доказательстве фундаментальной теоремы Геделя о неполноте обыгрывается аналогичная идея, дающая позитивный результат.

После Аристотеля и Лейбница следующий принципиальный шаг в развитии логики сделали математики и логики англичанин Джордж Буль, шотландец Огастен де Морган, американец Чарлз Пирс, немец Фридрих Шредер. Последний в своих «Лекциях по алгебре логики» подвел итог предыдущему развитию: была построена символическая логика высказываний. Несколько позднее символическая логика предикатов появилась у немецкого логика Готлиба Фреге, который подчинял математику логике (*логицизм*). Он же создал первое логическое исчисление – исчисление высказываний.

Так возникла *математическая логика* – логика, в которой применяются математические методы исследования. Была осознана возможность аксиоматизации самой логики, той логики, которой повседневно пользуются математики в своих рассуждениях и доказательствах (перебор и исключение случаев, метод от противного, закон исключенного третьего, правило отделения, правило силлогизма и т. д.). Это явилось началом *формальной математики* (Фреге, Рассел, Алфред Уайтхед, Гильберт). Математика вместе с используемой в ней логикой была представлена в виде *формальной аксиоматической системы*. Наряду с классической (двузначной) логикой рассматривались и другие логики: интуиционистская, многозначная, с новыми логическими связками и кванторами.

Подчеркнем, что в математической логике различают, скажем, *логику* высказываний и *исчисление* высказываний. В обоих случаях строго определяется формальный язык, в частности понятие формулы логики высказываний. В логике высказываний логическим связкам сразу придается семантическое (смысловое) значение – они определяются через свои таблицы истинности, а в исчислении высказываний логические связки – только символы, участвующие в построении формул. Формулы в логике высказываний также имеют семантику (таблицы истинности), а в исчислении высказываний рассматривается только их синтаксис, т. е. «грамматика». Но вместо таблиц истинности в исчислении высказываний имеются *аксиомы* (выделенные *тавтологии*, т. е. тождественно истинные формулы) и четко определенные *правила вывода*.

По-разному трактуется и логическое следование. В исчислении высказываний формула B называется *следствием* формулы A, если существует логический вывод (*доказательство*) B из A – такая конечная цепочка формул, начинающаяся с A и заканчивающаяся B, что каждая ее формула (кроме A) есть либо аксиома, либо получается из предыдущих формул цепочки по некоторому правилу вывода. По *теореме дедукции* B есть следствие A тогда и только тогда, когда формула $A \to B$ является *теоремой*, то есть имеет доказательство, начинающееся с некоторой аксиомы. А в логике высказываний формула A логически влечет формулу B по определению, если формула $A \to B$ есть тавтология. *Теорема о полноте исчисления высказываний* (при разумной аксиоматике) утверждает, что формула является теоремой тогда и только тогда, когда она – тавтология. Заметим, что теорема о полноте (как и теорема дедукции) не теорема исчисления высказываний, а теорема об исчислении высказываний (*метатеорема*). Таким образом, можно сказать, что исчисление высказываний – это аксиоматизированная логика высказываний. Сказанное верно также для логики предикатов и исчисления предикатов.

Теория алгебраических чисел и гиперкомплексные системы явились важными источниками развития алгебры в XIX веке. Возникли понятия идеала, кольца, поля. Группы подстановок привели к теории конечных групп (Кэли, Фробениус, норвежский алгебраист Петер Силов). В начале XX века были уже известны современные определения группы, поля, векторного пространства, алгебры над полем, решетки. Основоположниками современной абстрактной алгебры считаются немецкие математики Гильберт, Эмми Нетер и Эмиль Артин. Они поняли важность общеалгебраических понятий и идей, например понятия гомоморфизма. Предшествующие достижения были подытожены в двухтомной монографии голландского математика Ван дер Вардена «Современная алгебра», опубликованной в 1931 году.

В XX веке бурно развивались теория множеств, топология, теория чисел, теория вероятностей, теория графов, абстрактная алгебра, функциональный анализ (Стефан Банах, Л. В. Канторович, И. М. Гельфанд), теория алгоритмов (Алонзо Черч, Алан Тьюринг, А. А. Марков), теория моделей (Альфред Тарский, А. И. Мальцев, Абрахам Робинсон), дифференциальная геометрия. Наиболее крупные математики нового времени, последние математики-универсалы, - это Гильберт, Пуанкаре (особый вклад внес в топологию), Клейн (классификация геометрий на основе их групп преобразований), Герман Вейль, фон Нейман (создатель ЭВМ, алгебра, функциональный анализ), А. Н. Колмогоров.

Тенденции прогресса математики в XX веке

Во-первых, объем математических знаний колоссально вырос. По сравнению с предыдущим веком неизмеримо увеличился поток математической литературы: книг, журналов, сборников статей, научно-популярных и учебных изданий. Если раньше математики обменивались новой информацией в письмах, то в настоящее время общаются по электронной почте, на многочисленных международных и региональных математических конференциях, конгрессах, симпозиумах, семинарах. Отметим, что всего состоялось 24 Международных конгресса математиков: первый – в Цюрихе в 1897 году, а последний – в Испании в 2002 году.

Во-вторых, получили мощное развитие дисциплины, находящиеся на стыке классических разделов математики: алгебраическая геометрия, алгебраическая топология, дифференциальная геометрия, топологическая алгебра, гомологическая алгебра, теория моделей и т. д.

В-третьих, математика стала абстрактной аксиоматической наукой. Обогатился ее предметный язык. Появились невиданной общности абстракции: категории, гомологии, пучки, схемы, топосы, супералгебры и суперпространства. Математики имеют возможность использовать в своих исследованиях совершенный язык и достижения математической логики.

В-четвертых, многие разделы математики развивались под влиянием 23 проблем Гильберта, сформулированных им в докладе на II Международном математическом конгрессе, проходившем в Париже в августе 1900 года. Почти все проблемы Гильберта успешно решены, ряд из них – российскими математиками (четвертая, пятая, седьмая, десятая, тринадцатая).

В-пятых, в середине столетия появились компьютеры (ЭВМ), а вслед за ними и компьютерная математика [4, 43, 289, 390]. Компьютерная алгебра, вычислительная геометрия и т. п. – фундаментальное и весьма перспективное направление в развитии математики и ее приложений. Быстродействие компьютеров, дающее возможность в обозримое время производить автоматический перебор огромного числа случаев и громадные вычисления, позволило решить ряд трудных математических проблем. Достаточно вспомнить проблему Пуанкаре об алгебро-топологической характеризации сферы или проблему четырех красок. Только в 1967 году с помощью компьютера было получено следующее равенство, опровергающее одну теоретико-числовую гипотезу Эйлера:

$$144^5 = 27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 \text{ (см. также с. 54).}$$

Еще один пример. Более двух тысяч лет известна гипотеза о том, что любое натуральное число можно представить суммой не более 19 биквадратов (четвертых степеней) натуральных чисел. В 1925 году английские математики Годфри Харди и Джон Литлвуд доказали эту гипотезу для всех натуральных чисел, больших некоторого порогового числа n_0. Позднее методами аналитической теории чисел была получена оценка $n_0 = 10^{367}$. Только в 1986 году группа математиков и программистов с помощью компьютера установила справедливость этой древнейшей гипотезы для всех натуральных чисел, не превосходящих n_0. Тем самым проблема была решена полностью. Рассмотренный подход называется *методом супериндукции* [218].

В-шестых, как никогда ранее математическое знание сильно дифференцировалось. Возникла масса отдельных математических дисциплин. Появилось великое множество узких специалистов. Одна только алгебра содержит десятки частей: теория групп, отдельно абелевы группы, кольца и модули, отдельно неассоциативные кольца, теория полей, теория полугрупп, теория решеток, теория полуколец, линейная алгебра, коммутативная алгебра, топологическая алгебра, универсальная алгебра, теория категорий, гомологическая алгебра, дифференциальная алгебра, компьютерная алгебра и т. д. При этом каждая из частей алгебры разбита еще на целый ряд разделов.

И все-таки следует провозгласить тезис о *единстве математики*. Отдельные математические дисциплины, являясь составными частями математики, зачастую связаны общими методами и языком (вспомним хотя бы теорию категорий). Бурно развивалась *прикладная математика*. Помимо того что математика стала мощным аппаратом в других науках (*математика – язык науки*), возникли совершенно новые *фундаментальные* математические теории прикладного характера. Это теория оптимального управления (в частности, принцип максимума Понтрягина), теория массового обслуживания, математическая теория игр, теория графов, исследование операций, математическая статистика, теории информации (кодирование, декодирование), различные численные методы (например, метод Монте-Карло), фракталы и многое другое. Они, как правило, возникали из нужд практики, при решении разнообразных задач, которые подбрасывает нам все усложняющаяся жизнь, но на базе классической математики. Можно сказать, что фундаментальная математика и прикладная математика, переливаясь друг в друга, снова представляют единую, но дифференцированную математику.

Роль человеческой практики

Нет сомнений в том, что математика в человеческом обществе зародилась как практическая необходимость в счете и измерениях. В результате длительной эволюции, наблюдений и приобретенного опыта сначала возникли «рабочие» правила и эмпирические умения, послужившие предпосылкой исходных математических предпонятий числа и геометрической фигуры. Так, наряду с натурфилософией появилась пранаука математика. Только в Древней Греции в школах Фалеса и Пифагора встала на ноги наука математика. Эмпирическая пранаука математика существовала задолго до этого в Китае, Индии, Вавилоне, Египте. Но именно появление и осознание возможности и необходимости логических рассуждений, дедукции, доказательств математических правил означало становление математики как науки.

Это внешняя сторона дела, но она убедительно показывает, что другой математики быть не могло (многообразие обозначений, систем счисления в разных странах несущественно). Закономерно не только единое содержание математики, но и вполне закономерен исторический путь ее развития (с небольшими нюансами на Востоке и Западе).

«Начала» Евклида – непреходящая истинная ценность во все последующие времена, первый образец настоящей науки. После

Евклида математика на основе аристотелевской логики могла уже развиваться, исходя только из внутренних потребностей. Конечно, практика привносит новые задачи для математики, но для чистой науки это, в принципе, второстепенно.

Литература: [4, 5, 20, 22, 32, 33, 43, 46, 53, 65, 70, 71, 82, 104, 114, 145-148, 175, 184, 207, 234-237,255, 258, 259, 269, 270, 275, 289, 319, 320, 329, 345, 346, 365, 380, 390, 393, 431, 432, 448, 452, 454, 469-472, 502, 512, 523, 526, 540, 591, 592, 628, 629, 636].

§ 9. Сравнение фундаменталистской и нефундаменталистской философии математики

Прямая есть кратчайшее расстояние
между двумя точками.
Евклид

Значение синуса в военное время
может достигать четырех.
Армейский фольклор

В современной философии математики существует два главных противоборствующих направления - *фундаменталистское* и *социокультурное*, или нефундаменталистское. Кратко охарактеризуем эти течения.

Фундаментализм. Математика принципиально едина и единственна: она имеет свои неизменные объект, предмет и общие методы познания, пользуется абсолютно истинной классической двузначной логикой. Другое дело, что математика делима на разные разделы, по методам и направлениям исследования. Среди математиков выделяются «геометры» (представители образного мышления) и «алгебраисты» (склонные к формально-логическому мышлению), довлеющие к интуиции или логике, радетели аксиоматики или качественной теории. Но это не мешает математике быть одной и той же наукой, самой собой – *математикой!* Математики открывают знание. Математическая реальность имеет объективный онтологический статус. Обоснование математики можно провести на основе априорной природы исходных понятий. Утверждается надежность и достоверность доказательств в математике.

Социокультурное направление. Социокультурная философия науки, в частности математики, предполагает определяющее влияние культуры и социума конкретных стран и времен на стиль мышления, развитие и лицо науки. Подчеркивается наличие множественности математик, зависящих от времени и географии: математика разных стран и народов сильно варьируется. Нет единой, универсальной математики. Даже современная математика подразделяется нефундаменталистами на математику профессиональных математиков, математику математических логиков, инженерную математику, математику физиков, математику гуманитариев и т. д. Ставится под сомнение надежность и строгость математического доказательства. Математики изобретают новое знание, достаточно произвольно конструируют математическую реальность, опираясь на интуицию. Наряду с классической логикой существуют другие равноправные логики, скажем, интуиционистская логика. Социокультурная философия математики захватывает все большее число философов математики (назовем таких идеологов этого направления, как М. И. Панов и А. Г. Барабашев) и некоторых математиков (В. М. Тихомиров, В. А. Успенский). См. сборник работ [517].

Выделим главные проблемы, решаемые фундаменталистами и нефундаменталистами принципиально по-разному.

1. *Об объективном и вполне определенном характере математики.* Фундаменталисты решают этот вопрос положительно, а нефундаменталисты привносят в его решение много субъективного, изменчивого, зависимого от социально-исторических условий, мышления и математической деятельности отдельных людей.

2. *Едина и единственна ли существующая математика?* Как сказано выше, по мнению фундаменталистов, математика едина, однозначно предопределена и, стало быть, единственна. Нефундаменталисты признают принципиальную множественность математик и, соответственно, различие путей развития математики. Фундаменталист говорит: «Математика в России», а нефундаменталист скажет: «Математика России».

3. *Математики открывают или произвольно конструируют математическую реальность?* Фундаментализм поддерживает онтологический статус математических истин. Нефундаментализм считает математику продуктом человеческого сознания, существенно зависящего от тех социальных и культурных обстоятельств, в которых живет и мыслит человек.

4. *О достоверности математического доказательства.* Математическое доказательство надежно и достоверно, возможны лишь разные уровни его строгости (фундаментализм). Нефундаменталисты делают главный и решающий акцент на логико-математических установках (аксиоматике) и методологических принципах, лежащих в основе доказательства той или иной теоремы, которые меняются и не могут быть окончательными.

5. *Толкование априоризма.* Представители фундаментализма признают априорный характер (врожденный или нет) математических очевидностей, наших исходных представлений о пространстве и времени. А представители нефундаментализма априоризм в определенной мере приравнивают к интуиции.

6. *Исходные очевидности.* Фундаменталисты признают наличие объективных, непосредственно воспринимаемых очевидностей, лежащих в основе математической деятельности и способствующих (вместе с априорными представлениями и логикой) надежности и истинности математических рассуждений. Нефундаменталисты же не признают объективный характер очевидностей, которые для них являются интуитивными актами сознания субъекта, конструирующего математическую реальность.

7. *Роль логики в математике.* Математика – дедуктивная наука, опирающаяся на классическую логику (фундаментализм). У различных математик могут существовать свои – тоже разные – логики (нефундаментализм).

8. *Автономность математики.* В отличие от культуры наука, в особенности точные науки, математика автономны, не зависят от ценностных установок.

По поводу справедливой критики социокультурной философии математики отсылаем читателя к статье В. Я. Перминова «Ложные претензии социокультурной философии науки» [411].

Социокультурное движение стремится перенести гуманитарные закономерности на сферу естествознания, на точные науки. Синергетика же, наоборот, естественнонаучную теорию нелинейных динамик, называемую И. Р. Пригожиным неравновесной термодинамикой, экстраполирует на всю культуру, на развитие общества и человека. Являются ли подобные «поползновения» правомерными? Истории человечества известны такие попытки – это и различные богословские учения, и, скажем, дарвинизм, атомизм или механицизм. Только математика как универсальная и беспристрастная наука является общей научной основой описания Мира.

Резюмируем сказанное: в философии математики фундаментализм выступает как естественный реализм и классика, в то время как социокультурная философия имеет постмодернистский привкус. Если фундаментализм отображает подлинную онтологию математики, то нефундаментализм навязывает нам рекламу внематематических декораций, приукрашенных элементами современного дизайна.

Модернизм и постмодернизм задают культуру отрицания, радикального антитрадиционализма. Девизом модернизма служит пресловутый «Черный квадрат» Малевича, который знаменитый художник-реалист Илья Глазунов называет хулиганством и профанацией. В противовес этому фундаментализм ассоциируется с теоремой Пифагора – простой, но открытой на все следующие времена!

Постмодернистская философия акцентирует внимание на сиюминутности бытия, непомерно превозносит различие перед сходством, единичное и отдельное предпочитает общему и единому. Постмодернистский мир не знает прошлого и будущего, в нем нет места нетленным истинам, подлинным идеалам, непреходящим ценностям и добродетели. Постмодернизм, как наркотик, уводит человека от реалий бытия, здравого смысла и научного познания в виртуальные миры разрекламированных галлюцинаций. Несомненно, что широкое увлечение модернизмом любого толка сменится цельным позитивным рациональным мышлением, мышлением всечеловеческого масштаба. В противном случае негативные проблемы у землян будут нарастать, как снежный ком, – проблемы, неразрешимые в рамках постмодернизма.

Разумный глобализм и умеренный универсализм, учитывающие традиционные данности и естественную многополярность человечества, дают нам определенную надежду.

Наш оптимистический призыв заключается в следующем:

во всех делах руководствоваться **главенством разума** и **чувством меры**, а не изменчивыми помыслами и сиюминутными интересами.

Литература: [97, 98, 185, 411, 517].

§ 10. Умеренный платонизм – адекватная философия математики

На планете философии все земли
давно открыты! Я перечитываю
древних мудрецов и нахожу там
свои новейшие мысли.
Александр Солженицын

Умеренный платонизм, освобожденный от крайностей и мистики и служащий реальной методологией действующих математиков, соответствует природе математики, является подходящей философией познания, способной правильно оценить, что такое математика. Платонистская диалектика идеального и материального состоит в сопоставлении Мира идей (форм) и Мира вещей (теней). См. [423]. Разумеется, такое разделение нельзя понимать буквально. Это только некая умозрительная схема, весьма полезная метафора. Тем не менее данная схема позволяет нам говорить о философии умеренного платонизма применительно к математике.

Итак, в теоретико-познавательном плане вполне допустимо пользоваться понятиями Мира идей и Мира вещей. Мир идей прекрасен и бесконечен, состоит из вечных, непреходящих, божественных, абсолютных истин, а Мир вещей невзрачен и конечен, содержит временные, преходящие, тленные, приблизительные копии идей. Приземленный мир вещей есть несовершенная модель блистающего, небесного Мира Идей. Бренное тело человека принадлежит Миру вещей, но его высокий разум соприкасается с Миром идей. Человеческий разум, как двусторонний проводник, или транслятор, соединяет вещи и идеи, позволяет понять идеи, стоящие за вещами, и узреть вещи, воплощающие идеи. Чувства человека и окружающие его вещи и дают толчок к пробуждению разума и познанию идей. Процесс познания есть сократовский диалог разбуженного разума с разумом, вызывающий «припоминание идей» по Платону. Для подобного «припоминания» необходим определенный запас впечатлений и некоторый минимум первоначальных знаний. Мы видим, что в платонизме Мир предстает единым, функционально целостным, находящимся в неразрывных взаимосвязях своих главных полюсов – Мира идей и Мира вещей.

Сам Платон назвал математику «серединной наукой», имея в виду ее роль посредника, передаточного механизма, универсального средства связи между двумя Мирами – материальным и идеальным. Математика – самая точная и наиболее абстрактная из наук. С другой стороны, математика является теоретическим аппаратом и специфическим орудием познания, дает отточенный инструментарий, универсальный в приложениях. Таким образом, математика способна отразить и выразить в своих формулах гармонию мира, целесообразное сочетание материальной и идеальной сторон Мироздания.

Почти все математики в своих общих взглядах на математику придерживаются той или иной степени платонизма, варьируемой от крайнего, грубого платонистского реализма, признающего математические универсалии в качестве вечных самостоятельно существующих идеальных сущностей (реалий), до тезиса о том, что математические понятия все же не являются просто конвенциями. Мы занимаем «серединную» позицию, о которой прямо говорил Платон и которую называем умеренным платонизмом.

Вот мнение известного американского математика, выдающегося специалиста по комбинаторике Р. Грэхема о том, «создана ли математика искусственно или она существует вечно?». Он сравнивает математику с музыкой, с одной сонатой Бетховена: «Принципы, которые легли в основу сонаты, существовали, но их непосредственное применение, сами ноты – все уже сотворено композитором. То же относится и к математике: можно придумать конкретное доказательство, но не его исходные положения. Теория чисел, теорема о разложении на простые множители останутся без изменения и на другой планете. В других областях, например в квантовой механике, наблюдение может изменить или создать наблюдаемое, хотя это и кажется несколько таинственным».

Приведем точку зрения на платонизм в математике известного логика Н. Н. Непейводы, несколько отличную от нашей. Он определил свое философско-математическое мировоззрение как «умеренный скептический платонизм». Во введении его книги [383] читаем: «Нам симпатична концепция Платона, что системы, возникающие в реальном мире, являются реализациями общих Идей. Сами Идеи недоступны человеку, поскольку они бесконечно совершенны, а человек несовершенен и ограничен, но математика дает возможность некоторого приближения к ним. Конечно же, эти приближения также несовершенны, но они гораздо более гармоничны внутри себя, чем т. н. “реальный мир”, почему и вскрывают самые глубинные свойства этого и других возможных миров. В этом причина непостижимой эффективности математики в приложениях. Но несовершенство человека проявляется в том, что Идеи могут быть реализованы в математике разными способами, противоречащими друг другу. Это касается и тех фундаментальнейших Идей, которые лежат в основе логики». Но Н. Н. Непейвода принципиально отмежовывается от «математического платонизма», предполагающего, по его словам, «что математика вводит нас в сам мир Абсолютных Идей, что математические понятия реально существуют в Высшем Мире», считая это «профанацией платоновского взгляда и самопереоценкой человека и его научного мышления».

Интересно его различение понятий Бога, Мировой Идеи и Мира. Непейвода пишет: «Мы основываемся на точке зрения, что наш Мир имеет единую Мировую Идею, заложенную в его начале». Тем самым он признает концептуальное единство Мира. В подстрочнике на страницах xxix-xxx [383] автор добавляет следующее.

«1. Понятие Мировой Идеи не зависит от понятия Бога. Она следует из системности наблюдаемого строения Вселенной и логичности происходящего в ней. Так что в данном случае мы не опираемся на гипотезу, что Мир сотворен.

2. (Для креационистов и деистов) Отождествление Мировой Идеи с Богом – недопустимое упрощение. Это – Слово, которым Бог сотворил Мир. Оно, конечно, уже не является Высшей Сущностью, но оно неизмеримо выше по природе своей всех других сущностей тварного мира.

3. (Для агностиков и умеренных атеистов) Отождествление Мировой Идеи и Мира – тоже недопустимое упрощение. Мир – постоянно развивающаяся *реализация* данной Идеи. А, как правило, реализация беднее исходной спецификации и уж во всяком случае искажает ее».

Мы во многом согласны с цитируемым автором, но исключаем из термина *умеренный платонизм* прилагательное «скептический». Весьма радикально звучит высказывание о реализации Идей в математике и логике противоречащими друг другу способами. Скорее наоборот, чаще всего ведущие математические идеи и методы развиваются и воплощаются параллельно и единообразно у разных математиков и народов. По большому счету, магистральный путь математики един, как и наш целостный Мир. Далее, математический платонизм не следует воспринимать буквально, хотя и такое метафорическое толкование кое-что проясняет. На наш взгляд, платонический реализм является основополагающим метафизическим принципом, согласно которому всякая математическая реальность (особенно, первичная) признается не только в качестве математической идеализации, но как некая квазиэмпирическая бытийность, онтологически обусловленная наличными априорностями и очевидностями. Нет сомнений в том, что математическим и логическим системам (как реальности) соответствуют глубинные структуры нашего разума и внутренние механизмы мышления, имеющие объективный характер.

Какой должна быть философия познания, чтобы она отвечала природе математики? Умеренный, избавленный от крайностей и мистики, платонизм, служащий реальной методологией действующих математиков, соответствует природе математики, является подлинной философией математики. На наш взгляд, социокультурные изыски философов от математики [517], логические потуги, подвергающие ложной критике классическую математику, в частности канторовскую теорию множеств (см. удивительный опус [219]), рассуждения о множественности различных математик подрывают единую существующую математику. Все это говорит об избалованности философов науки: надуманность постановки ими вопросов, уход от решения действительно важных классических и современных проблем методологии и оснований математики, амбициозность по отношению к великим мыслителям прошлого, недостаточное знание и понимание самой математики. Конечно, имеются вдумчивые, настоящие исследователи философии математики. Приятно назвать имена В. В. Мадера и В. Я. Перминова.

Перечислим основные положения, которые могли бы составить нашу философию математики – *умеренный платонизм*.

1. Согласно Дойчу [187] цель науки – объяснение сущности явлений, т. е. выяснение природы и причин вещей. Мы согласны с тем, что роль науки не сводится к инструментализму, к точным предсказаниям и прогнозам. Если быть честным, то *задача науки есть адекватное описание изучаемого объекта*, той или иной реальности. Именно математические формулы и модели делают это лучше всего.

2. *Принцип универсальности разума* означает, что любые два разума в состоянии понять и выразить друг друга. Разум имеет общее интеллектуальное и информационное пространство, соединяющее людей, как воздух.

3. *Принцип единства мира.* Его можно трактовать как взаимосвязь, взаимозависимость, взаимоотражение всего происходящего в нашем трехмерном мире. Единство мира обосновывается предыдущим положением, всей человеческой практикой, исповедующей реализм, а также принципом математизации науки и методом математического моделирования.

4. *Однозначная определенность исходных математических очевидностей,* первичной математической реальности. Их взаимосвязь с фундаментальными формами мышления. См. [412, с. 9].

5. *Онтологический статус понятий*, означающий существование идей в качестве почти эмпирической реальности. Идеи и вещи уравниваются в гносеологических правах. Для математика понятие треугольника не менее реально, чем треугольный предмет или чертеж треугольника. Математическая реальность (числа, геометрические фигуры, абстракции следующих уровней) вечна (она где-то существует и до ее открытия человеком), совершенна и, по существу, неизменна. Основные математические абстракции можно толковать как феномены Гуссерля.

6. Математика определенна и однозначно обусловлена своими объектом, предметом, логикой и методами исследования. Существуют различные разделы математики и разнообразные направления ее развития, в совокупности образующие *единое здание математики.*

7. *Математическое доказательство принципиально надежно и достоверно.* Степень строгости доказательства зависит от тех требований, которые предъявляются к нему на той или иной ступени генезиса математики и диктуются конкретной ситуацией.

8. *Майевтика* (сократовский диалог, возможно, с самим собой) как действенный метод познания и обучения. Последовательность правильно поставленных вопросов (во многом они определяются общими категориями) и ответов на них позволяет вытягивать новое для человека знание. Как отмечает В. В. Мадер [317, с. 23], «познание сущности явлений есть процесс моделирования этих явлений с помощью **предугаданной схемы**». Эта предугаданная схема представляет собой результат интеллектуального диалога одного разума с другим, «трансляцию идей», работу подсознания и прозрение интуиции.

9. Познание в математике представляет собой *процесс восхождения к истине по чередующимся взаимосвязанным ступенькам математических моделей*, имеющих большую или меньшую степень абстрактности и наглядности. При этом понятие модели трактуется двояко: 1) модель как идея вещи (это теория, знаковое моделирование); 2) модель как овеществление идеи (построение объекта, интерпретация, предметное моделирование). См. § 4.

10. *Математика – априорная наука.* Это убедительно доказано В. Я. Перминовым в книге [412]. Читаем у Перминова на странице 42: «Математический априоризм диктуется самой практикой математического мышления». Существует и априорность пространственно-временных представлений (что утверждал Кант), в определенной мере объективирующая субъективизм человеческих чувств. Это необходимая база для ориентации человека в окружающем мире и для познания этого мира.

11. Математика есть истина условного, а логика абсолютно истинна. Формальная логика – раздел математики. Фактически, *логика единственна, это аристотелевская, то есть двузначная классическая логика.* Все многообразие мира можно достаточно адекватно выразить двумя противоположностями: да↔нет, истина↔ложь, 1↔0, вход↔выход и т. д. Все другие логики формулируются в терминах обычной аристотелевской логики. Признанным языком формальной математики служит логика предикатов первого порядка (тезис Гильберта, см. §13).

12. *Принципиальная возможность любого отдельного разума мысленно, рационально познавать мир*, по крайней мере, его

количественные, структурные и «формовые» характеристики. Здесь математику и логику ничем не заменишь.

Умеренный платонизм в математике означает метафизический реализм (включающий математический реализм), господство разумного и рационального, признание объективного и непреходящего характера математики. Подробнее см. § 21.

Литература: [187, 219, 317, 383, 412, 423, 517].

§ 11. Метафизика и постмодернизм

Научный вывод для установления
своей правильности требует принципов,
которым опыт не может сообщить даже вероятности.
Бертран Рассел

Призрак бродит по Европе –
призрак популизма.
Из популярной газеты

Этот параграф посвящен сопоставлению метафизического и постмодернистского направлений в философии, науке и жизни. Метафизика рассматривается как основополагающее течение философско-методологической мысли, берущее начало у Аристотеля и продолжающее успешно развиваться. Постмодернизм же представляет собой модное преходящее мировоззрение, альтернативное и враждебное здравому смыслу, метафизике и науке.

Метафизика

Метафизика (буквально «после физики», «над физикой») определяется как учение о первоначалах бытия, постигаемых умозрительно. Метафизика ориентирована на поиск единства мира – единства сущности, происхождения и оснований Мироздания. По Расселу, цель метафизики есть «попытка охватить мир как целое посредством мышления».

Основоположником метафизики считается Аристотель, называвший ее наукой наук, ядром философии. В своей книге «Метафизика» он так отзывается о метафизике: «Все науки более необходимы, нежели она, но лучше нет ни одной». Согласно Аристотелю метафизика есть учение о первых причинах всего существующего, это первая мудрость, предметом которой является «сущее вообще», или «сущее как таковое». При этом сущее означает сверхчувственное. Стагирит (так еще называют Аристотеля, поскольку он родился в Стагире, что во Фракии) считает метафизику наукой о бытии, тем самым отождествляет ее с онтологией.

Как показано в [2], в средние века метафизика претерпела заметную трансформацию от науки к спекулятивному знанию. Под влиянием богословия метафизика стала пониматься как учение о принципиально ненаблюдаемом бытии и перешла в лоно веры. Кант обосновал, что трансформированная метафизика не является наукой. Но даже при таком понимании метафизики нельзя отрицать метафизический способ мышления, его позитивную роль в духовной жизни человека. В начале своего труда «Критика чистого разума» [242] Кант указывает, что метафизика существует как природная склонность и как наука. Метафизика в модусе природной склонности означает спекулятивную потребность человеческого разума разрешать вопросы, выходящие за пределы его эмпирического использования.

Новый вариант научной метафизики можно было возводить на основе нового учения о трансцендентальном субъекте [57]. «Воскрешение метафизики» шло разными путями: индуктивная метафизика В. Вундта, философия жизни А. Бергсона, феноменологический подход М. Шелера, критическая онтология Н. Гартмана. Серьезное исследование метафизики осуществил М. Хайдеггер. Краткому изложению его трудов, в которых осмысливается и раскрывается феномен метафизики, посвящена отмеченная публикация Н. З. Бросовой [57]. По Хайдеггеру, метафизика едина и нерасчленима, имеет множество проявлений, особенно в науке, политике и религии, причем в рамках или на фоне философии. «В феномене метафизики сплетаются воедино мыслительная традиция, жизненный уклад, социально-политическая структура, и такая интегральность не поддается формально-логической дефинитивности» [57]. У Хайдеггера история Бытия – это человеческие поиски подлинной бытийной основы (метафизики) с неизбежными заблуждениями. Далее автор пишет: «Современность есть высший этап развития метафизики именно потому, что все ее характерные черты выявились теперь с предельной ясностью. ... Однако подобная кульминация не означает завершения метафизики». Метафизика ориентирована только на сущее. Ее методом познания и применения выступает последовательное расчленение сущего. «И этот метод действий становится собственной и единственной целью метафизики».

Близкое нам понимание метафизики дал в 1890 году известный американский философ и психолог У. Джемс [186, эпилог]: «Метафизика – необучайно упорное стремление к ясности и последовательности в мышлении. Отдельные науки руководствуются принципами, крайне неясными и полными противоречий, но несовершенство принципов может быть оставлено ими без внимания для специальных целей. Этим объясняется то презрительное отношение к метафизике, которое так часто можно наблюдать. Для человека, преследующего ограниченные цели, слишком утонченное, не имеющее значения для его цели обсуждение принципов представляется "метафизикой"... Но без сомнения, проблемы, не имеющие никакого значения с одной точки зрения, могут быть очень важными с другой. Для того, кто задается целью уяснить наивозможно глубже значение мира как целого, проблемы метафизики должны стать важнейшим объектом исследования».

В классической философской традиции метафизика часто отождествлялась с онтологией, то есть учением о бытии как таковом, а также со всей философией. Метафизика включает в себя и основы науки. На наш взгляд, метафизику нужно считать собственной частью философии, а методологию – частью метафизики. Если философия означает мировоззрение, метафизика – умозрение, то методология есть научное воззрение. О соотношении

$$\text{философия} \supset \text{метафизика} \supset \text{методология}$$

уже шла речь во введении к книге.

В работах советских философов было принято с термином «метафизика» связывать метафизический способ познания (как односторонний, плоский, примитивный) в противовес диалектическому методу (как всестороннему и всеохватному, отвечающему развитию и прогрессу). «Метафизика» употреблялась и как ругательное слово, созвучное слову «спекуляция». Хотелось бы реабилитировать метафизику. В нашем понимании метафизика – как целостный охват мира – включает в себя и идею развития, и фундаментальные постулаты диалектики как наиболее общие и универсальные законы Мироздания и его познания человеком.

Как и в любой философии, в метафизике присутствуют элементы веры, определенный угол восприятия реальности, свой мировоззренческой ракурс. Эти вещи не могут принадлежать науке целиком. Они над наукой и вне искусства. Они суть определенные впечатления разума, результаты размышления и рефлексии.

Все универсальные философские системы, созданные великими мыслителями прошлого, являются метафизическими учениями. К их числу относятся пифагореизм и платонизм, учение Аристотеля о форме, атомизм Демокрита, монадология Лейбница, картезианство, философия Канта, механицизм Дидро, диалектика Гегеля, материализм Маркса и т. д.

В статье С. Л. Катречко «Как возможна метафизика?» [250] четко сформулирован предмет метафизики, показан ее многоуровневый характер. Согласно автору статьи, «метафизика исследует предельные (философские) концепты, имеющие *идеальный* статус. В отличие от теоретических конструктов науки они являются не результатом многоступенчатой абстракции, а начальным условием существования объектов другого рода. Тем самым **критерий метафизического** состоит в том, что оно выступает как *трансцендентальное условие* существующего...». Предметом метафизики как области знания служат трансцендентальные концепты-сущности, выходящие за пределы опыта, но делающие такой опыт возможным. Подводя итоги своих размышлений, С. Л. Катречко отмечает, что возможность метафизики как рациональной деятельности вызвана спекулятивным мышлением человека, основанным на познавательных актах анализа и синтеза.

Он выделяет и анализирует четыре модуса метафизики:

1) *общая метафизика* (или аналитическая онтология), изучающая сущее как таковое;

2) *частная метафизика* (мета-физика), обеспечивающая работу с метафизическими целостностями. Она связана с синтетической деятельностью разума, основанной на способности человека к *схватыванию идей*;

3) *натуральная метафизика* исходит из концептуальной деятельности разума в ходе научного познания и проявляется в неустранимом *холизме* науки;

4) *гносеологическая метафизика* есть критика метафизики, анализ самого познавательного процесса и того языка, на котором «изъясняется» познание. Такая критика нужна для рационального самоограничения чрезмерных притязаний спекулятивного мышления.

Метафизике всеединства С. К. Франкла посвящена статья О. А. Назаровой [375]. Отвечая на основополагающий вопрос метафизики о возможности трансцендентного человеческому сознанию бытия быть внутренней основой знания, она пишет: «Мы имеем имманентно трансцендентное бытие, потому что мы в самой своей жизни слиты с Абсолютом, а процесс познания представляет собой прояснение этого первичного ощущения бытия, которое является нам в интуитивном переживании».

Работа физика В. Д. Захарова [212] посвящена выяснению и обоснованию важной (а порой решающей) роли метафизики в естественных науках, особенно в физике. Господствующая в физике с XVII по XIX век ньютонова научная парадигма держится на следующих четырех «фундаментальных метафизических постулатах: 1) мгновенного дальнодействия, 2) абсолютных пространства и времени, 3) концепции материальной точки, 4) принципа инерции. Ни один из них не только не является экспериментальным фактом, но и не диктуется разумом, т. е. не может быть отнесен к синтетическим априорным принципам Канта».

На примере физических теорий А. Пуанкаре показал, что нельзя построить теорию познания без метафизики. Основополагающие физические понятия силы, массы, энергии носят метафизический характер. «Принцип инерции делает пространство метафизическим понятием, не обнаружимым на опыте». Автор отмечает, что только благодаря метафизике механика Ньютона до сих пор сохраняет познавательное значение.

Далее В. Д. Захаров пишет: «Кризис ньютоновской физической парадигмы на рубеже XIX–XX веков привел к отказу от ряда метафизических постулатов Ньютона, но не к отказу от метафизики. Вместо прежних метафизических постулатов в физику вошли другие, благодаря чему физика освободилась от феноменологизма, вернув себе прежний (ньютоновский) онтологический характер». Теория тяготения Эйнштейна строилась *от метафизики к физике*, шла не от опыта и не по пути его обобщения. «Общая теория относительности – в равной мере и физическая теория, и метафизическая концепция. Объектом физической теории стала совсем другая реальность – не "природная", но метафизическая», которая получила название «невидимой онтологии». Без метафизических допущений и принципов не обошлась ни атомная физика, ни квантовая динамика, ни современная космология. Так, физический вакуум служит основным метафизическим понятием квантовой космологии. Наряду с естественной причинностью понадобилось введение в научный обиход так называемой свободной причинности (Дирак говорил о «свободе воли электрона»).

В конце своей статьи В. Д. Захаров заключает, что сегодня метафизика прекрасно приспособлена для физической апологетики. «Впервые стало возможно определить физику так же, как в Библии определена религия, - а именно как *обличение вещей невидимых*. Впервые стало возможно разрушить роковую перегородку между естественной и свободной причинами, а тем самым уничтожить почву для противопоставления научного и религиозного типов понимания».

Основополагающей роли метафизики в становлении современных физических теорий посвящена очень интересная монография В. Д. Захарова «Физика как философия природы» [213]. На примере теории гравитации и квантовой механики показано влияние метафизического мышления на развитие естествознания. Метафизика древних греков возрождается в методологии современной физики. И метафизические принципы физики оказываются подлинной философией природы.

Аналогичных взглядов на метафизику придерживается М. Вартофский в работе «Эвристическая модель метафизики в науке» (см. [524]) считая, что метафизические понятия имеют такую же ценность, как и научные понятия. Он отмечает, что «в истории науки "метафизические модели" играли важную роль при построении научных теорий и в научных спорах по поводу альтернативных теорий. Достаточно сослаться на понятия *материи, движения, силы, поля, элементарной частицы* и на концептуальные структуры *атомизма, механицизма, прерывности и непрерывности, эволюции и скачка, целого и части, неизменности в изменении, пространства, времени, причинности,* которые первоначально имели "метафизическую" природу и оказали громадное влияние на важнейшие построения науки и на ее теоретические понятия» [524, с. 63]. Тем самым мы еще раз убеждаемся в том, что философские идеи и принципы служат необходимой составной частью научного познания.

Сюда же примыкает работа А. Ю. Грязнова [164], который относит пространство к метафизическим категориям. Он пишет: «История науки свидетельствует о единстве теоретического (раз речь идет о физической *теории*) разума, который на различных исторических этапах решает разные задачи и, соответственно, получает разные результаты, но *трансцендентально* остается одним и тем же» [164, с. 146].

Отметим также статью Л. Е. Яковлевой [635], посвященную творчеству испанского философа Хавьера Субири. Он считал, что благодаря феноменологии в философии XX века произошел возврат от психологизма к метафизике. Феноменология Гуссерля вдохновила Субири на поиск «логики реальности», или новой метафизики.

А. А. Ивин, говоря о природе человека, пишет: «Человек является не только биологическим и психологическим, но и *метафизическим существом*: он становится человеком, когда открывает в себе метафизическое, т. е. надприродное, не объяснимое естественными причинами измерение» [227, с. 509]. Далее он указывает, что, согласно К. Ясперсу, метафизическая сущность человека заключается в следующих проявлениях: в неудовлетворенности своим знанием, духовным миром, социальным положением; в стремлении к безусловному, к Богу, к некоей поддерживающей его трансцендентной силе; в неутомимом стремлении к единому, вечному бытию; в сознании непостижимого воспоминания, когда душа человека как будто жила до его рождения; в понимании бессмертия как необходимости «оставить свой след на земле».

Вопросами метафизики занимались выдающиеся русские философы Н. А. Бердяев, И. А. Ильин, Л. П. Карсавин, В. С. Соловьев, С. Н. Трубецкой. П. А. Флоренский, Лев Шестов и другие [198]. Важную роль в оригинальной русской философии играли идеи всеединства и богочеловечества.

Исследователь истории метафизики И. И. Евлампиев указывает [199] на возможность метафизики нового типа – неклассической метафизики, пытающейся обосновать значение единичного бытия человека. В рамках этого варианта метафизики Абсолют также трансцендентен земному человеку. Но человек находится в неразрывной мистической связи с Абсолютом, обусловливающей интеллектуальный потенциал и творческую активность личности.

Специально вопросам метафизики посвящена монография физика-теоретика Ю. С. Владимирова [108]. Обращаем также внимание на его статью «Фундаментальная физика и математика», опубликованную в сборнике [336, с. 63-70]. В ней Ю. С. Владимиров отмечает, что складывается явственная тенденция сближения теоретической физики, математики и философии.

В связи с обозрением метафизики следует отметить интересный доклад ректора МГУ академика В. А. Садовничего «Знание и мудрость в глобализирующемся мире», сделанный им на пленарном заседании проходившего в мае 2005 года в Москве IV Российского философского конгресса [475]. Доклад был посвящен актуальной проблеме соотношения рациональности и мудрости. Показано, как философия и наука могут позитивно влиять друг на друга. По Садовничему, научное знание интернационально и принадлежит всеобщей культуре, а мудрость глубоко национальна и относится соответственно к национальным культурам. На вопрос «Что же такое человеческая мудрость?» автор отвечает следующим образом: «В отличие от знания, образованности, информированности мудрость в моем понимании – это способность принимать и усваивать опыт жизни предыдущих поколений. Без этого невозможно развитие науки и культуры, а значит, и цивилизации. Но прошлый опыт мы не должны принимать как догму, как безжизненный абсолют. Его нужно усваивать творчески и критически. Только так и можно развиваться».

В. А. Садовничий предупреждает об идущем в мире пагубном процессе нарастания и легитимизации «опасного знания» и отклонений от естественных норм и ценностей. В XXI веке общество «все в большей степени будет сталкиваться с запретами и ценностями морально-этического характера. …именно эти ценности определят дальнейший выбор пути цивилизационного развития. Либо человечество выберет концепцию развития, основанную на всевозрастающем росте потребления, которая до сих пор является доминирующей. Это старая система этических норм и ценностей. Либо люди вступят на путь самоограничения и согласия с природой и жизнью. Заставить сделать такой выбор нельзя будет ни военным могуществом, ни материальным богатством».

Постмодернизм

В сегодняшней культуре остается весьма модным и деятельным *постмодернизм*. Философия постмодернизма – это постнеклассическая философия, отрицающая даже неклассическую традицию и провозглашающая постметафизическое мышление, которое не допускает возможности построения никакой единой научной картины мира. Постомодернизм пришел на смену *модернизму* как явлению и философии, порожденным результатами научно-технической революции XX века. Человек почувствовал себя всесильным, этаким пупом Вселенной. В этом заключается пафос модернизма. Но последовавшие техногенный и экологический вызовы привели к пересмотру идеологии. Так возникли постмодернистские настроения и воззрения: всеобщий нигилизм, крайний индивидуализм, уход от реальности в виртуальные игры, сугубо эгоистические интересы, сиюминутное удовлетворение любых потребностей – во что бы то ни стало, саморазрушение. Отрицание абсолютной истины сподвигло постмодернистов к выводу о всеобщей плюралистичности, о полной свободе мнений, интерпретаций и свободе их выражения. Постмодернистская действительность, если говорить жестко, напоминает «пир во время чумы».

Применительно к науке, особенно к математике, постмодернистский подход совершенно неправомерен.

И действительно, как пишет в своей монографии [511] З. А. Сокулер, главная функция науки теперь – чисто прагматическая: служить руководством для технологических, экономических, политических и прочих решений. Ей отведена роль ориентира для социальных действий, но не для решения кардинальных проблем человеческого существования и не для восстановления связи индивида с истинным бытием. В обществе постмодерна истина, как сверхценность, исчезла из научного обихода.

Следование постмодернизму в жизни человечества может привести к гибели цивилизации. На новом витке познания и осознания себя человечество обязано преодолеть постмодернизм.

Рассмотрим публикации о постмодернизме последних лет.

В своей глубокой статье о роли постмодернизма и глобализации в современном мире философ и политолог А. С. Панарин [406] выдвигает гипотезу о том, что *«реальный переворот в рамках современного символического производства связан не с либерализмом, а с постмодернизмом»*. Автор замечает, что «скорость приращения денежной, “знаковой” массы сегодня в 80 раз опережает скорость приращения реальной товарной массы – соответствующая разница указывает на масштабы чисто спекулятивного капитала, захватывающего командные позиции в экономике и обществе». Для современных приватизаторов постмодернизм стал теоретическим и практическим проектом обоснования нового буржуазного освобождения от всяческих социальных обязательств перед обществом и государством, проектом сохранения так быстро и легко приватизированной всенародной собственности.

Ключевое понятие постмодернизма – *деконструкция*. Мир уже целиком развеществлен, проявляется только в тексте культуры. «Все, абсолютно все искажено волюнтаризмом культуры, все объекты мира представляют наслоившиеся друг на друга культурные тексты, в которых выпирает фатальная рассогласованность смыслов и замыслов». А. С. Панарин продолжает: «Интенция деконструктивизма состоит в том, чтобы буквально во всем разглядеть этот самозваный произвол, ибо если ничего первично-подлинного не просматривается, то в культуре все – самозванцы, все узурпаторы. Наше дело – узурпировать в свою очередь». Другим мотивом деконструкции автор считает *дискредитацию целого*. «Все целостное, гармоничное, системное в данной картине мира выступает всего лишь как замаскированный хаос элементов». Если прежняя философия утверждала преимущественный статус добра, красоты, истины и порядка перед злом, безобразным, ложью и беспорядком, то «постмодернизм исходит из прямо противоположной презумпции: если порядок, целостность, гармония изначально оказываются неоправданными конформистскими допущениями, то философии пристало больше прислушиваться к голосам и свидетельствам, за которыми стоит энергия зла, беспорядка, безобразного и т. п.».

Постмодернистский деконструктивизм связан с практикой глобализации, в основе которой лежат реальные мировые интеграционные процессы. Но «глобализованные» ресурсы и энергия изымаются из ведения национальных государств, «деконструируя» национальное. Глобализация идет неравномерно и противоречиво. В России дилемма «демократия-тоталитаризм» трансформируется в дилемму «демократия-глобализм». Мировая финансовая элита, реально наживающаяся на спекулятивном капитале, является лидирующей силой глобализации. И она заинтересована в постмодернизме как своей философско-идеологической надстройке, воюющей с «метафизикой наличия» и оправдывающей ее деконструктивную деятельность.[1]

Постмодернизм и глобализация высвобождают человеческие инстинкты из плена разума и нравственности и дают алиби «телу» в самых низменных его проявлениях.

«Опыт постмодернистской деконструкции, сегодня акцентированный в мироощущении привилегированных групп, как оказывается, прямо касается и непривилегированных. Но если для первых деконструкция оказывается *освобождением* – разумеется, классово-эгоистическим, выступающим как расставание со всеми социальными и национальными обязательствами – то для вторых она означает перспективу *отлучения* – от всех прежних социальных и культурных завоеваний цивилизованности».

Но практика деконструктивизма противоречива. Привилегированная национальная элита при вхождении ее в процессы глобализации или в нарождающееся гражданское общество может сама оказаться непривилегированной. «Верхи, ставшие адептами чувственности, автоматически перемещаются вниз согласно логике культуры, установленной христианством и другими монотеистическими традициями». Кроме того, оружием деконструктивизма могут воспользоваться оппоненты, как это уже осуществляется в критике тупого и воинствующего американского глобализма.

Подводя итоги своей работы, профессор А. С. Панарин заключает: «И для “новых богатых”, и для “новых бедных” жить одним днем разрушительно и опасно. Необходимо нарастить символический капитал, в недрах которого созидаются более масштабные синтезы и открываются долгосрочные перспективы. Сориентированные на долгосрочную перспективу люди, даже разделенные высокими социальными барьерами, вынуждены задумываться об искусстве жить вместе. Вот почему для культуры гражданского консенсуса, о которой столько говорят либералы, необходимо преодолеть нынешнюю либеральную аллергию на “большие идеи”. Школа “больших идей” - вот школа, которую предстоит пройти новому поколению интеллектуалов в фазе, следующей за нынешней, либерально-постмодернистской».

Автор работы «Экономика постмодерна и отношения собственности» [374] Л. А. Мясникова завершает свою статью словами: «Философия экономики постмодерна с ее изощренной “электронной практикой” технологий присвоения не выступает как антитеза модерна. Их внешнее парадигматическое различие скрывает глубинный вектор – новый опасный стратегический ход глобального капитализма. Путь этот для общества проходит по краю глубокой пропасти».

Д. Деннет в [183] резко отделяет понятие истины от философии постмодернизма, повторяя: «Ученые, считающиеся ответственными за свои слова, не видят пользы в постмодернизме». Преходящие фантазии не составляют истины. «Параллельно с нашими орудиями для сельского хозяйства и транспорта нами создана технология истины – наука. ... Для предотвращения человеческих ошибок созданы системы, не ограничивающиеся только применением физических инструментов. Организация методологических средств тоже находится под влиянием жесткого селективного отбора, подтверждающего их надежность и объективность. ... Непревзойденную объективность можно обнаружить и в геометрии, и в других областях математики, служащих со времени античности моделью достоверного знания в отличие от знания мира текучести и противоречий».

В заключение своей статьи Деннет отвечает на вопрос «Как доминирует наука?». Хотя наука не застрахована от глупости, но *методы науки* подвержены дотошному анализу и критике. В результате традиции усовершенствования науки метод становится методологией. А сама «*методология* попадает в сферу внимания *эпистемологии*, исследования самого исследования, и вне сферы научного вопрошания не остается ничего». В поисках истины наука занимает лидирующее положение. «Где вы найдете образцы религиозной ортодоксии, легко отброшенной перед лицом неопровержимой очевидности? В науке же вчерашние ереси снова и снова становятся сегодняшними новыми ортодоксиями. Ни в одной религии и ее истории вы не найдете примера такой модели».

Рассмотрим содержательную работу Д. И. Дубровского «Постмодернистская мода» [193]. Внешне постмодернизм привлекателен и даже респектабелен. Но за камуфляжем метафор скрываются истинные интенции постмодерна: «Сокрушающая критика традиционных ценностей, рационализма, гуманизма, историзма, радикальное неприятие современной социальной самоорганизации, отрицание возможностей отдельной личности быть ответственной за свои решения и действия...». Дискурсы постмодернистов есть механизм властвования и порабощения человека, они иллюзорны и противны истине. Имея широкий доступ к СМИ, постмодернисты умело пропагандируют свои взгляды в качестве доминирующей духовной реальности. Вслед за Западом, где пик популярности постмодернизма уже миновал, в России он быстро набирает силу.

Характерными чертами постмодернистской идеологии являются скептицизм, нигилизм, релятивизм, иррационализм, анархия, абсурд, беспредел. Психология постмодернизма – успех любой ценой. На телевидении безраздельно властвует его величество Интерес, чуть прикрытый видимостью благообразия.

Автор пишет: «Подмена общественного личным, высокого низменным, правды интересом и т. п. – типичный путь абсурда». И далее: «Информационная атмосфера нагнетается постоянным акцентированием в изображаемом событийном ряду порочного, ужасного, беспросветного, отвратительного. На первом месте и со всеми деталями – катастрофы, убийства, преступления, скандалы, аферы, разносортный негатив». «Борцы за свободу своего слова практически реализуют постмодернистский тезис безразмерной свободы. ... Такая свобода – путь оргии, хаоса, вакханалии ничтожеств».

Д. И. Дубровский указывает на то, что постмодернизм есть знамение начавшейся информационной эпохи и трансформации культуры, вызванных бурным развитием информационных и коммуникационных технологий. Журналистика проникла во все сферы культуры. Появился «журнализм» как особая форма мышления, определенный способ запечатления, истолкования и имитации любых явлений действительности. «Журнализм» характеризуется своей всеядностью, мобильностью и быстротой реагирования, беспринципностью, поверхностным и предвзятым изображением событий.

Противовесом «журнализму» и постмодернистской моде может служить только научное мышление. Авторитет науки должен поддерживаться не только научным сообществом, интеллигенцией, но и государством.

Однако наблюдается принижение роли науки в культуре и обществе, расцветает иррационализм, размываются границы между наукой, с одной стороны, и паранаукой и псевдонаукой – с другой.

Постмодернистские рассуждения нелогичны, часто содержат порочный круг. Зачастую то, что отвергается явно, протаскивается и используется неявно.

Категориальная структура философии имеет четыре измерения: 1) *онтологическое* (бытийное), 2) *гносеологическое* (познавательное), 3) *аксиологическое* (ценностное, оценочное) и 4) *праксеологическое* (практическое). Они не сводимы друг к другу, но серьезное исследование одной из четырех проблем предполагает некоторое прохождение через остальные измерения. Постмодернистская же философия ограничивается двумя измерениями – праксеологическим в форме прагматизма и аксиологическим в урезанном виде. Поэтому постомодернизм не может быть полнокровной научной философией.

Постмодернизм разрушает культуру, унижает разум и интеллигентность. «Но что здесь слишком нового?» – задается вопросом автор. «Вся история культуры – сплошное, временами непомерно тяжелое, испытание подлинного творческого духа. А он до сих пор жив! Это внушает оптимизм, твердую веру, что и в нашу переломную эпоху творческий дух сохранит силу и достоинство, создаст преграду нарастающему абсурду, найдет новые пути сохранения целостности и жизнестойкости земной цивилизации, возвышения человечности» [193, с. 54-55].

Г. С. Киселев вопрошает [256]: «В чем же может заключаться прогресс истории в эру Постмодерна, в которой мы живем?». Предшествовавшее постмодерну Новое время (эпоха Модерна) возвысило самомнение человека, неограниченные способности его разума и воздействия на мир. Но человек не осознал необходимости самоограничения, свою двумирную природу. Профанный гуманизм (выражение С. Л. Франкла) центром ценностей сделал реалии самого грешного мира, в результате чего наступил кризис религиозного сознания. Далее появились новые опасности, связанные с глобализацией. И потерявших веру людей поглотил Постмодерн, явившийся, по словам Е. Б. Рашковского, дурным продолжением Модерна, его похмельем.

«Начинающееся» вновь христианство, настоящая религиозность должны поменять ценностные ориентиры человека. «Ложное сознание может быть преодолено только одним способом – одухотворенным мышлением; иными словами, человек обязан осуществлять интеллектуальное усилие согласно моральному закону. Все это возможно лишь творческим преодолением самого мира и выходом за его пределы, т. е. трансценденцией, соединением с Божественным. Только в этом случае человеку не грозит кошмар воплощения в жизнь химер его ложного сознания» [256, с. 14].

Поговорим о проявлениях постмодернизма в науке и образовании. Исследователь постмодерна профессор РГГУ Г. С. Кнабе [264] примерно так описывает защиту одной диссертации на соискание ученой степени доктора культурологии. Первый оппонент «зачитал» в своем отзыве, что диссертация слабая, но поскольку все диссертационные диспуты приобрели совершенно условный и искусственный характер, то не приходится возражать против присуждения искомой степени. Второй оппонент выявил много недостатков в диссертации, но отметил, что они суть общие недостатки культурологической науки и не должны препятствовать присуждению данной степени. Третий оппонент подчеркивал одаренность диссертанта, которая, согласитесь, важнее отдельных частных особенностей работы. В результате Совет отказал в присвоении ученой степени – большинством в 10 голосов против 9. При этом никто из 9 членов Совета, проголосовавших за диссертанта, не имел никакой личной выгоды, но, по-видимому, на истину им было просто наплевать.

Заметна постмодернистская переоценка ценностей у молодежи (не хватает желания и времени на учебу, много не виданных ранее соблазнов) и устранение государства от реальных нужд образования и воспитания (якобы нет средств). Часто мы делаем вид, что учим, они – что учатся, оно – что заинтересовано в образованности своих граждан.

Философ Ф. Т. Михайлов в статье «Образование и власть» [360] анализирует отношение наших чиновников к образованию, замечая, что «образование давно уже не столько **культура**, сколько **структура**». Ученые и преподаватели высшей школы определяются государством как **служащие.** Формализм царит как в системе образования, так и в работе ВАКа. Автор пишет: «И вот уже многие сотни полуграмотных доцентов и профессоров философии, этики, эстетики, культурологи, политологии, современных проблем науки и т. п. пишут статьи, книги (сейчас это просто), выступают на конференциях, в том числе и международных, консультируют диссертации и… образуют послушный научный актив при образовательных государственных управах всех ступеней и уровней. **Так и образуется союз власти и ее ученых».**

Ф. Т. Михайлов указывает также на отношение власти и ее адептов к философскому образованию в стране. Уже 20 лет предпринимаются попытки отменить преподавание философии в вузах. Как известно, отменен аспирантский курс и кандидатский экзамен по философии, который заменен на кандидатский экзамен по истории и философии науки.

В экономике, политике, культуре и образовании правит бал своекорыстный *государственный интерес* бюрократов и олигархов, «увлеченных идолами стихийного *рынка* и политического *театра*». Необходимо «вернуть *все высшее образование* – философское в первую голову, к статусу **государственно-гражданских** институтов». Экспертами образовательных программ и инициатив должно выступить все образовательное сообщество. И это есть путь к **«государству гражданского общества».**

Статья Н. В. Громыко [159] посвящена анализу роли интернета и постмодернистских воззрений на современное образование. Выясняется, в какой мере на разрешение существующего острого конфликта между *знанием* и *информацией* влияют интернет и постмодернизм. Автор приходит к выводу: «Теоретическое мышление возможно и перспективно, если сделать интернет не средством информатизации и “постмодернизации” общества, но средством его, если можно так выразиться, эпистемологизации». Для этого должны быть разработаны новые образовательные компьютерные программы.

В идеале постмодернистский тип личности – «космополит, свободный от догмата любых культурных традиций и норм, прекрасно понимающий всю их условность; это абсолютно искренний по отношению к своим природным инстинктам “шизоид” (термин взят у Ж. Делеза и Ф. Гваттари), ценящий прежде всего потребление, в том числе потребление информации; это интеллектуал, владеющий правилами любой языковой игры и столь же легко освобождающийся от них». Основным процессом в интернете является языковая игра, заменяющая и отторгающая мышление.

Происходит информатизация и постмодернизация современной школы, влекущая за собой «отказ от ценностей теоретического мышления и целевого проектного мышления». Сознание учащихся необходимо регулярно очищать от мусора и наслоений массовой культуры. «Интернет, выводящий за пределы постмодернистской моды, может выступить средством развития как практико-ориентированной науки, так и практико-ориентированного образования одновременно».

Заметим, что идейные истоки, происхождение, история и эволюция постмодернизма тщательно прослежены и исследованы в обстоятельных трудах И. П. Ильина [232, 233].

Обратимся к работе А. В. Бузгалина с характерным названием «Постмодернизм устарел...» [61]. Автор показывает, что социальной причиной заката постмодернизма является кризис *неолиберализма*, вытекающий из двух качественных изменений мирового сообщества. Это доминирующая роль транснационального корпоративного капитала и выход на мировую арену сверхгосударства (протоимперии) США. «*Транснациональные корпорации превратились в силу, сравнимую с силой государства и, по сути дела, начали освобождаться из-под господства последнего в экономической сфере*». А США ведет самостоятельную, никем не контролируемую геополитику. При этом на смену неолиберализму может прийти *ультраимпериализм* с порабощающей идеологией глобализма. С другой стороны, в мире активизируется мощное социальное движение антиглобалистов.

Постмодернистская концепция, отрицающая системный подход, не способна объяснить сегодняшние мировые процессы и дать ответы на реальные вызовы времени. Поэтому она оказывается ненужной ни власти, ни оппозиции.

В заключение статьи автор указывает на вероятность того, «что в недалеком будущем, даже если мы оставим в стороне социально-экономические и общественно-политические столкновения, в идейно-духовной сфере столкнется новая вульгарно-апологетическая глобальная идеология, адекватная эпохе рождающегося ультраимпериализма, с одной стороны, и новая открытая диалогичная методология рождающихся альтернативных социальных движений – с другой. И в этом столкновении нам придется занять ту или иную позицию, ибо здесь, в отличие от “плюралистичного” постмодернистского мира, “воздержавшихся” не будет».

В. А. Кутырев [295] также утверждает, что *деконструкция* есть генеральная линия и классика постмодернизма в философии. Она являет собой первый этап «бури и натиска» нигилистической революции в отношении существующего Гомо сапиенс, его вещно-событийного мира, телесного бытия и словесно-теоретического мышления. Но уже наступает этап реставрации. Многие заговорили о необходимости «возврата к метафизике».

Завершая рассмотрение постмодернизма, отметим еще статью М. Е. Соболевой [504], в которой на примере философии трансцендентального прагматизма Карла-Отто Апеля показано, что и в эпоху постмодернизма возможно и даже необходимо развитие серьезных метафизических концепций. Постмодернистами метафизика давно объявлена анахронизмом. Как пишет автор, «концепция Апеля является одной из многочисленных попыток ответить на вопрос о том, существует ли единый фундамент, обосновывающий все бытие и все человеческое знание о нем». Метафизика Апеля, являясь философско-лингвистической теорией, основанной на универсальной языковой практике, показывает объективную значимость человеческого познания.

Завершая рассмотрение постмодернизма, оценивая его в целом крайне отрицательно, нельзя не отметить его живучесть и определенную пользу в качестве альтернативно-оппозиционного философствования. Обратимся к последним страницам работы В. В. Миронова [359, с. 40-43]. Здесь отмечается важность анализа постмодернизма как философской концепции и современной культурной стилистики. При этом постмодернизм понимается в широком смысле, включающем деконструктивизм и постструктурализм. Автор замечает, что постмодернистская критика классически понимаемых рациональности и метафизики не заслуживает серьезного внимания. Он подчеркивает, что «постоянные попытки разрушения философии в силу их нереализуемости не столько вредны, сколько полезны, ибо цементируют само здание философии, вырабатывая в ней иммунитет, заставляя формулировать новые фундаментальные аргументы, оправдывающие необходимость ее существования». В частности, постмодернизм заостряет проблему философской интерпретации текстов. И в этой роли он конструктивен.

В. В. Миронов пишет, что массовая культура и интернет весьма способствовали раскрутке постмодерна. Она была необходима постмодернизму для «защиты от академической среды, после чего он стал почти неуязвимым, как раскрученная поп-звезда. ... Клиповое сознание – это умонастроение эпохи, когда человек устал читать толстые тексты – будь то образцы литературы или философии; он объективно не имеет для этого времени, которое заполнено фрагментами новообразованных культурных феноменов, и одновременно стал более свободен в собственном мыслеизъявлении». Автор продолжает: «*Популярность постмодернизма заключается в том, что он оказался на стыке тектонических сдвигов, происходящих в человеческой культуре, и, как это ни парадоксально, может стать тем мостиком, который будет нас связывать со старой традиционной культурой.* Это типичный пример альтернативной концепции, которая вполне адекватна современному состоянию развития культуры, в каком-то смысле является "душой", самовыражением этого периода ее развития, а значит, вариантом философствования. Постмодерн провоцирует философские размышления, заставляя нас вновь и вновь задумываться о сущности философии и о философствовании, которое необходимо сопряжено с интерпретацией смыслов».

Подведем итоги. Метафизика и постмодернизм стоят на противоположных позициях по следующим основным мировоззренческим вопросам.

1. *Отношение к бытию.* Бытие – главная используемая и исследуемая метафизикой категория. Бытие как таковое имеет умопостигаемые основания, такие, например, как принцип единства мира. Любая бытийность подчинена вполне определенным законам. Постмодерн разрушает бытие, заменяя его потоком сознания, виртуальным или сугубо прагматически направленным, т. е. деструктивным изначально или финально. Объективный характер бытия

постмодернистами отрицается, поскольку, по их мнению, бытие произвольно конструируется субъектом.

2. *Отношение к истине.* Целью метафизического познания является поиск *истины*. Истину можно понимать как сущность бытия. Значит, истина в метафизике вполне определенна. Но возможны различные пути ее познания. Постмодернистская «истина» прячется за абсолютной плюралистичностью мнений, служащей неким всеобщим принципом. Сколько мнений, столько и истин. Но в постмодернизме за неограниченной свободой мнений скрывается корыстный *интерес*.

3. *Здравый смысл.* Метафизика опирается на здравый смысл и реализм. Постмодернизм есть идеология абсурда. Приведем пример. Россия строит капитализм. И в то же время капитал (деньги Стабфонда) лежит без движения в зарубежных банках, обесцениваясь и работая на Запад. Что это? Если не полный абсурд, то прямое вредительство!

4. *Отношение к человеку.* Метафизика показывает реальное место человека в природе, воздает должное его познавательным способностям и возможностям. Человек силен, но не всемогущ. Свобода человека ограничена естественной необходимостью. Постмодерн же навязывает человеку пагубные поведенческие штампы, атрофирует его волю, подавляет разум. Белое становится черным, черное – белым.

5. *Отношение к обществу.* Метафизическое воззрение на общество в принципе социально, поскольку стремится к объективности в познании и понимании жизни. Постмодернистская идеология ориентирована на подрыв общественного здоровья, превознося успех любой ценой, будь то власть, деньги или слава (лучше все вместе). Поэтому постмодернизм антисоциален, опасен для каждого человека, для общества в целом и для государства.

6. *Отношение к культуре.* Постмодернизм проповедует культ поверхностности в противоположность к трансцендентному в человеке и культуре, на признании чего и возможна метафизика. Подлинно высокую культуру постмодернисты заменяют массовой культурой, не требующей творческих свершений.

7. *Отношение к нравственности.* Метафизика понимает нравственность подобно Канту, – это «категорический императив», «моральный закон внутри нас», который вместе «со звездным небом над головой» образует стержень человеческого бытия. Тем самым

нравственность для человечества носит всеобщий характер, она объективна. Мораль постмодерна заключается в неограниченной личной свободе, в признании главенства либеральных прав индивида – в ущерб обществу и самому человеку. На проходившем в Москве в начале апреля 2006 года X Всемирном русском народном соборе было подчеркнуто, что нравственность едина и неделима для всех. Нравственность базируется на десяти заповедях Христовых. И никакие либеральные лозунги не могут цениться выше этих заповедей.

В заключение отметим, что ведутся ожесточенные научные, философские и культурологические споры о статусе метафизики. Фундаменталисты считают метафизику важной частью философии, способной рационально обосновать возможность и само построение целостной научной картины мира. Представители социокультурного направления скорее отрицают такую возможность, делая акцент на принципиально субъективном характере знания. Как мы видели выше, постмодернизм есть непримиримая оппозиция метафизике.

Литература: [2, 15, 57, 61, 108, 159, 164, 183, 186, 193, 198, 199, 212, 213, 227, 232, 233, 242, 243, 250, 256, 264, 295, 359, 336, 360, 374, 375, 406, 475, 504, 511, 524, 635].

Глава 3. Методология математики

Высшее назначение математики –
находить порядок в хаосе,
который нас окружает.
Норберт Винер

Вступление

Методология – это учение о методах познания, теория метода. Поэтому методологию естественно трактовать как ту часть теории познания, в которой рассматриваются общие способы исследования бытия и различные методики добывания знания. Методология есть научное мировоззрение, то есть мировоззрение осознанное и осмысленное человеком, структурированное в рамках тех или иных парадигм согласно определенным правилам.

Методология науки (науки в целом) относится к философии науки, занимается методами научного познания. Методология конкретной области науки должна учитывать (наряду с вопросами общей методологии, скажем, законами диалектики) специфику и характер данной науки.

Методология математики изучает структуру, архитектуру и ведущие принципы математики, выясняет ее природу и статус, анализирует математические факты, квалифицирует основные понятия и идеи математики, классифицирует математические методы, исследует вопросы возникновения, развития, организации и функционирования математического знания, рассматривает формы математической деятельности и специфику математического познания.

§ 12. Основания математики

«Апории!?» – воскликнул он
и бросился прочь.
Козьма Прутков

Любое строение имеет основание, фундамент. Фундамент сам на чем-то стоит, имеет определенную конструкцию и поддерживает все здание. Здание математики (или отдельной ее части) также может строиться на том или ином фундаменте, зависящем от почвы, на которой он зиждется. Этой почвой служат философские воззрения, математические достижения и приоритеты, культура, характеры людей, определяющих вместе с веяниями жизни и Богом пути развития математики соответствующей эпохи. С другой стороны, особенности конструкции фундамента оказывают огромное, если не решающее, влияние на продолжающее строиться здание математики, определяют направленность развития и изложения математики. Такой фундамент носит название оснований математики.

Первичной математической реальностью служат евклидова геометрия, натуральные числа и их дроби (отношения). Соответствующие простейшие факты и свойства являются той очевидностью, на которой базируется математика. В. Я. Перминов [412] называет такую очевидность аподиктической, отличая ее от интуиции как прозрения или схватывания истины. Для него очевидность есть определенное видение истины. Аподиктические очевидности не корректируются опытом, имеют внеэмпирический и внеисторический характер, представляя собой особого рода бесспорные реалии сознания.

Строгое обоснование натуральных чисел и евклидовой геометрии стало первой важнейшей задачей оснований математики. Аксиоматическое определение натурального ряда было осуществлено Дедекиндом и Пеано в 1889 году (см. Приложение I), а содержательная аксиоматизация евклидовой геометрии – Гильбертом [139] в 1899 году. В теории натурального ряда основополагающую роль играет аксиома математической индукции. Заметим, что различным подходам к построению теории натуральных чисел, в частности анализу форм математической индукции, посвящено Приложение I.

Основания математики – это важная часть самой математики, являющаяся ее обоснованием и надежной опорой. Основания математики теснейшим образом связаны с математической логикой. Математика всегда имела тот или иной фундамент, включающий осмысление основополагающих понятий. До XIX века не возникало сомнений в непротиворечивости математики. Так, геометрия Евклида была наукой о реальном пространстве. Ее аксиомы – очевидные истины о пространстве, дедуктивные выводы – неопровержимые факты. Пространство существует, значит, не противоречива и описывающая ее геометрия (реальное пространство есть модель геометрии). Из существования природы следует непротиворечивость описывающей ее математики.

Но открытие неевклидовых геометрий поколебало безмятежность математиков. Появилась необходимость в анализе основ геометрии. В 1899 году Гильберт публикует знаменитый труд «Основания геометрии», в котором евклидова геометрия изложена строго аксиоматически (устранены недостатки «Начал» Евклида), ее непротиворечивость сведена к непротиворечивости действительных чисел. Во второй половине XIX века была осуществлена перестройка основ математического анализа на базе строгой теории действительных чисел (*арифметизация анализа*). Кроме того, появились необычные алгебры, скажем, числа Кэли, двойные и дуальные числа. Все это способствовало зарождению оснований математики. Заметим, что Гильберт главными достижениями математики XIX века считал открытие неевклидовой геометрии и арифметизацию действительных чисел.

Нельзя обойти вниманием ошибочное утверждение Дойча [187] о том, что с появлением неевклидовых геометрий геометрия стала частью физики; как раз наоборот: до XIX века евклидова геометрия была единственной «физической» реальностью.

Как наука основания математики (о предпосылках сказано выше) появились на свет чуть более 100 лет назад. С одной стороны, это было связано с кризисом в математике, вызванным появлением *логических парадоксов*, или антиномий (Рассела – 1902 год, Кантора – 1899 год, Бурали-Форти – 1897 год), и *семантических парадоксов* (Ришара – 1905 год, Греллинга – 1908 год, поздние версии парадокса *лжеца*). А с другой стороны, в это время успешно развивался формально-логический язык, т. е. существовали предпосылки разрешения кризисной ситуации.

О парадоксах

Парадоксы лжеца, кучи, Протагора, апории Зенона известны с античных времен. Они отражают принципиальные трудности адекватно точного функционирования обычного языка. Появившиеся на рубеже XIX и XX веков в теории множеств и семантике языка парадоксы оказались для классической науки более опасными. Их разрешение виделось на путях уточнения используемых в науке языка и логики, аксиоматизации теорий (в том числе теории множеств), анализа и формализации методов рассуждений, отказа от самоприменимых понятий или актуальной бесконечности, введения понятия класса фон Нейманом, построения теории типов и т. д.

Исследование парадаксов мощно подвигло развитие всей математики в XX веке. Идея парадокса лжеца и диагональный канторовский метод легли в основу логики доказательства глубочайшей теоремы Геделя о неполноте.

При изучении феномена парадоксов важную роль играет их классификация. Простейшее разделение парадоксов на логические и семантические парадоксы предложил в 1926 году английский математик Фрэнк Рамсей (1904–1930), создавший интереснейшую комбинаторную теорию, носящую его имя.

В недавней работе М. М. Новоселова [389] рассмотрено восемь типов парадаксов, идущих от А. С. Есенина-Вольпина. Приведем соответствующую классификацию.

1. Парадоксы, *связанные с метаиндукцией* (к ним относится парадокс «Куча»).

2. Парадоксы *релевантности*, игнорирующие детали смысловых связей.

3. Парадоксы *отождествлений* (опирающиеся на независимость тождества от отождествлений).

4. *Семантические* парадоксы (признающие осмысленность отношения обозначения).

5. *Теоретико-множественные* парадоксы (они сводятся к предыдущим).

6. Парадоксы *актива-пассива* (в которых происходящее отождествляется с производным; сюда относятся антиномии Канта, связанные с необходимостью признания начала мира).

7. Парадоксы *модальностей* (допускающие дальнейшее деление: отождествление возможного с действительным, ошибка смещения целей, например, парадокс «Утренняя звезда»).

8. Парадоксы, возникающие из-за *смешения интуитивных понятий с четко определенными* абстракциями (они родственны семантическим парадоксам).

Автор отмечает, что классификация парадоксов тесно связана с различением логических ошибок, лежащих в основе самих парадоксов. Термин «парадокс» иногда употребляется в более широком смысле – для обозначения рассуждений, приводящих к результатам, противоречащим общепринятым мнениям (см., например, парадокс Сколема). Указано, что данная классификация парадоксов не является полной. Так, в ней не используется понятие абстрактной неразличимости, с которым связаны так называемые парадоксы *транзитивности*.

Новая классификация парадоксов предпринята А. А. Зенкиным в статье [220]. По его мнению, до сих пор нет удовлетворительного решения проблемы парадоксов. Отталкиваясь от парадокса лжеца, автор приходит к двум формулам:

(1) $(A \to \neg A) \& (\neg A \to A)$;

(2) $A \& \neg A$,

где A обозначает утверждение «Я – лжец». При этом, если из (1) формально и содержательно следует (2), то, по Зенкину, обратное, вообще говоря, неверно.

Им описан метод *автоматической* классификации произвольного множества объектов. Согласно этому методу, примененному к множеству парадоксов, были получены два устойчивых класса парадоксов K_1 и K_2. В первый класс попали парадоксы, изоморфные с точки зрения формы (1): парадокс лжеца, парадокс Рассела, парадокс Греллинга и некоторые другие. Автоматически сформированный класс K_1 основан на таких признаках, как *самоприменимость* и наличие *явного отрицания*.

Во второй класс попали парадоксы Кантора, Бурали-Форти, Ришара и ряд рассуждений, представляющих явные противоречия вида (2), причем формирование класса K_2 основано на признаках *самоприменимости* и наличия *явного противоречия*. В этом случае форма (1) не выводима из формы (2) ни формально, ни содержательно. Это дает автору основание заключить, что парадоксы из классов K_1 и K_2 имеют совершенно различную логическую природу.

Со своей стороны заметим, что в классической логике формулы (1) и (2) эквивалентны. Следовательно, в основе «автоматических» рассуждений А. А. Зенкина лежит неклассическая логика. Это фактически признает и сам автор, скажем, в следующей выдержке [220, с. 88]: «Как известно, классическая логика не налагает никаких ограничений на субъекты и предикаты высказываний, т. е. все, что угодно, может быть приписано в качестве предиката любому субъекту. В этом "произволе" и заключается причина универсальной применимости классической логики в любой области познавательной деятельности человека. С другой стороны, именно это несомненное достоинство свободы конструирования логических утверждений приводит в конечном счете к парадоксам».

Кроме того, А. А. Зенкин не признает актуальную бесконечность, тем самым отвергая всю канторовскую теорию множеств.

В статье «Преодолены ли в современной науке трудности, известные под названием "апорий Зенона"?», помещенной в книге [636, с. 214-234], С. А. Яновская дает историко-методологический анализ апорий Зенона. В частности, приводится аксиоматика Ширайши из 12 аксиом для точек – положений движущегося тела, связанных тремя бинарными отношениями «прежде», «после» и «неотличимость». Система Ширайши «неопределенной непрерывности» призвана разрешить «противоречия» между непрерывностью и дискретностью движения, выявленные Зеноном Элейским. С. А. Яновская строит простую числовую модель аксиоматики Ширайши, доказывающую непротиворечивость данной системы аксиом.

Главные направления в основаниях математики

Разные подходы к обоснованию математики, к избавлению от парадоксов и выходу из кризиса привели к следующим направлениям в основаниях математики – *логицизму*, *формализму*, *интуиционизму* и *теоретико-множественному направлению*. Охарактеризуем каждое из этих направлений.

Логицизм. Главный тезис логицизма – *математика выводится из логики*. Законы логики суть абсолютные истины (логический неоплатонизм). Значит, истинна и математика. Единственно верной считается классическая двузначная логика, которая должна быть формализована и аксиоматизирована. Создатели логицизма – Фреге, Пеано, Рассел, Уайтхед. Они стремились изложить логику строго аксиоматически и представить всю математику в логическом исчислении. Фреге опубликовал книги «Исчисление понятий» и «Основные законы арифметики». Пеано издал «Формуляр математики». Наконец, в 1913 году вышел из печати последний третий том грандиозного труда Рассела и Уайтхеда «Принципы математики», в основу которого положена очень сложная иерархическая теория типов. Однако им не удалось вывести из своих логических аксиом существование бесконечного множества. Огромной заслугой логицистов является создание начал математической логики. Недостатки программы логицизма: громоздкость изложения, нелогический характер некоторых аксиом (бесконечности, сводимости, выбора), отсутствие доказательства непротиворечивости логического исчисления (хотя конкретных противоречий не было обнаружено).

Интуиционизм. Это течение имеет ярко выраженную философско-психологическую часть. Так, математика рассматривается как определенного рода деятельность, а не как сумма математических знаний. В чисто математическом плане интуиционизм отождествляется с *конструктивизмом*. Французские математики Кронекер, Пуанкаре, Эмиль Борель, Рене Бэр, Анри Лебег критиковали Кантора за вольное обращение с бесконечными множествами, за применение сомнительных, с их точки зрения, средств типа аксиомы выбора. Основателем интуиционизма как отдельного направления в основаниях математики является Брауэр. Его последователь, голландский математик Аренд Гейтинг, разработал *интуиционистскую логику*, одновременно с российскими математиками В. И. Гливенко и А. Н. Колмогоровым. К интуиционизму примкнул и Г. Вейль.

Интуиционисты признают лишь конструктивные доказательства – доказательства, основанные на том или ином алгоритме. Для них нет теорем чистого существования. Если доказываешь существование определенного объекта, то будь добр, предъяви алгоритм его построения. Поэтому они не считают правомерным доказанное Кантором существование трансцендентных чисел. Существование – это «построяемость».

По-своему трактуются и *логические связки*. Истинность дизъюнкции двух предложений означает, что имеется процедура, позволяющая выяснить, какое из них (или оба) действительно истинно. Поэтому закон исключенного третьего нельзя применять в общем случае. Высказывание «Гипотеза *A* либо верна, либо неверна» не является истинным до тех пор, пока эту гипотезу не докажут или не опровергнут. Отрицание предложения истинно, если имеется алгоритм проверки ложности данного предложения. Поэтому не годится и метод от противного. К конечным множествам можно применять классическую логику, поскольку для них в принципе возможен перебор.

Интуиционисты ввели понятие *потенциальной бесконечности*. Скажем, натуральный ряд они воспринимают именно как потенциальную бесконечность: каким бы большим ни было натуральное число, можно указать еще большее следующее за ним натуральное число. Но они не рассматривают натуральный ряд как *актуальную* (саму по себе) *бесконечность*. Таким образом, интуиционистская математика содержит всю конечную математику, но отвергает почти всю бесконечную теоретико-множественную математику. Конструктивисты внесли громадный вклад в алгоритмическую математику. Большую роль в современной математике играют *гейтинговы алгебры* – обобщение интуиционистской алгебры высказываний и булевых алгебр, соответствующих классической логике высказываний.

Интересно отметить, что напрасно интуиционисты боялись закона исключенного третьего. В 1933 году Гедель доказал, что из непротиворечивости интуиционистской арифметики (среди логических аксиом нет закона исключенного третьего) следует и непротиворечивость классической арифметики (с законом исключенного третьего).

Конструктивизм представляет чисто математическую часть интуиционизма. В России конструктивистское направление возглавили

А. А. Марков (мл.) и Н. А. Шанин. См. [169, 298, 327, 328, 388, 514, Ч. IV].

Формализм. Это направление возникло в работах Давида Гильберта первой трети XX века. Гильберт и его коллеги завершили создание математической логики как самостоятельной математической дисциплины. Итогом стало издание в 1934 году двухтомника Гильберта и Бернайса «Основания математики» [141]. В ответ на нападки интуиционистов на канторовскую теорию множеств Гильберт выдвинул свою грандиозную программу обоснования математики. Голландский математик Лейтзен Брауэр утверждал, что нельзя применять законы классической логики к бесконечным множествам, тем самым ставя под сомнение всю теорию множеств. Гильберт отвечал, что «никто не может изгнать нас из рая, созданного Кантором».

Программа формализма Гильберта состояла в построении такой формальной аксиоматической системы, включающей аксиоматическую теорию множеств, чтобы финитными методами можно было доказать ее непротиворечивость и полноту. Рассуждения о формальной системе – это метаматематика. К метаматематике Гильберт предъявил требование *финитизма*: использовать только конструктивные методы, в частности оспариваемые интуиционистами законы логики (например, закон исключенного третьего) применять только к конечным множествам. Осуществление программы Гильберта означало бы создание универсального математического исчисления, о котором так мечтал Лейбниц. Однако теорема Геделя о неполноте (1931 год) развеяла надежды. Человеческий разум хоть и велик, но все же он не Господь Бог. (Подробнее в следующем параграфе.)

Теоретико-множественное направление в основаниях математики – это основания теории множеств. Созданная Кантором в последней трети XIX века теория множеств (см. [345]) была аксиоматизирована Цермело в 1908 году, что позволило избежать противоречий «наивной» теории множеств. В дальнейшем появилось много различных аксиоматик теории множеств [115, 214, 241, 514, Ч. II], содержащих или не содержащих аксиому выбора, *гипотезу континуума*, *аксиому Улама* (о существовании *измеримых* мощностей), *аксиому детерминированности* и т. п. Ту часть аксиоматической теории, которая содержится в любой аксиоматике теории множеств, давайте назовем *абсолютной теорией множеств* по аналогии с абсолютной геометрией – геометрией Евклида без пятого постулата. Непротиворечивость абсолютной теории множеств доказать невозможно (в рамках самой теории). Однако абсолютная теория множеств принимается всеми представителями данного направления.

Можно строить математику на базе только абсолютной теории множеств. Но без аксиомы выбора мы потеряем большую часть классического математического анализа, геометрии, алгебры и т. д. А с аксиомой выбора можно получить результаты, плохо согласующиеся с нашей интуицией, например «парадокс» Тарского: шар можно разбить на четыре части так, что, перемещая эти части в пространстве, можно собрать из них два точно таких же шара.

Возникает вопрос, не приводит ли присоединение аксиомы выбора к абсолютной теории множеств к противоречию, т. е. не противоречива ли аксиоматика Цермело-Френкеля [575]. Как было показано Геделем и американским математиком Полом Коэном [281], добавление аксиомы выбора или ее отрицания к абсолютной теории множеств не ведет к противоречию (при условии непротиворечивости самой абсолютной теории множеств). Они же доказали, что добавление гипотезы континуума либо ее отрицания к аксиоматике Цермело-Френкеля не приводит к противоречию (решение первой проблемы Гильберта [441]).

Со статьи Л. Заде 1965 года берет свое начало теория нечетких множеств [280], получившая существенное развитие и имеющая разнообразные применения в дискретной математике, информатике и теории принятия решений. Отметим только, что в теории нечетких множеств принадлежность элемента данному множеству определяется с вероятностью p, не обязательно равной 0 или 1, как это имеет место в обычной теории множеств.

К проблеме обоснования математики

Математика не нуждается во внешнем обосновании. Во-первых, математическое знание – самое надежное из всех теоретических знаний. Во-вторых, содержательная математическая практика не дает сбоев. В-третьих, математика чрезвычайно эффективна в приложениях.

Внутренние обосновательные проекты необходимы и плодотворны для развития самой математики. Они являются важнейшей частью методологии математики. Программы логицизма, интуиционизма, формализма и теоретико-множественного направления показали возможность самых разных подходов к пониманию основ математики и к обоснованию математики. Выявленные парадоксы явились не столько «моментами истины», сколько точками роста математического знания. Но это было сто лет назад! Где новые «сокрушающие математику» парадоксы?

Фактически дело внутреннего обоснования математики упирается в обоснование непротиворечивости натурального ряда чисел. Имеющиеся здесь взгляды варьируются от тезиса Кронекера о богоданности натуральных чисел до тех или иных концепций потенциальной завершенности-незавершенности натурального ряда [595, 596].

Хотя программа Гильберта обоснования математики не состоялась в полном своем объеме, тем не менее она начертала верный путь. Можно несколько усилить финитаризм Гильберта (Г. Генцен, П. С. Новиков) либо ограничиться фрагментами математики [203].

Литература: [7, 8, 24, 66, 73, 135, 136, 139, 141, 154, 169, 187, 203, 204, 220, 244, 280, 281, 298, 321, 327, 328, 345, 346, 348, 356, 388, 389, 407, 412, 419, 441, 489, 514, 518, 567, 575, 595, 596, 636].

Примечание: См. также литературу к Приложениям V и VI.

§ 13. Математика и логика

Чем хуже логика,
тем интереснее следствия.
Бертран Рассел

Мы уже высказали убежденность в том, что логика, точнее *классическая логика*, есть собственная часть математики, отмеченная печатью абсолютной истины. (Другие логики суть математические конструкции, имеющие свой смысл и применения. Но все они выражаются на языке классической логики.) С другой стороны, вся математика пронизана логикой, невозможна без логики. Логика – это канва и структура математического доказательства. Логика, пожалуй, является единственной универсальной линией, обеспечивающей общезначимость и связывающей воедино научное знание и различные умы, каждый из которых обладает своей (возможно, неповторимой) интуицией.

В человеческом познании Мира и самопознании можно выделить три интеллектуальных уровня, которые условимся называть Разумом, Наукой и Логикой. Мы отождествляем Разум с интеллектом и знанием, Науку – с точным (проверяемым, доказательным) знанием, Логику – с рассудком и формализацией. Мы рассматриваем следующие утверждения:

I. Разум шире Науки, ибо существуют «ненаучные» формы познания, например философская, художественная или религиозная.

II. Наука шире Логики, поскольку не каждый научный факт допускает адекватную формализацию.

Напомним, что в классической парадигме познания Науку характеризует *принцип математизации* (точного) знания. Логике же соответствует конструктивная (компьютерная) математика, искусственный интеллект. Разумеется, Наука разумна, а Логика научна. Заметим также, что утверждение II представляет собой некий неформальный аналог теоремы Геделя о неполноте.

Теорема Геделя о неполноте – самое крупное достижение логики в XX веке. Она явилась выдающимся интеллектуальным событием, вошла во многие монографии и учебники, стала классикой. Велика ее роль в логике и математике, философии и теории познания, психологии и информатике. Теореме Геделя посвящены многочисленные специальные статьи и книги (укажем работы [91], [408], [424], [551]).

Мечта Лейбница – создание идеального языка, в котором строго и адекватно выражалось бы все знание, и построение такой универсальной вычислительной машины, «говорящей» на этом языке, чтобы решение любой интеллектуальной проблемы сводилось к определенным «машинным» вычислениям. Заметим, что еще Платон утверждал, что всякое знание должно быть представлено в виде точных определений, которыми может пользоваться каждый. Все, что не может быть сформулировано в виде четких правил, что опирается на интуицию, мнения или традиции, бессмысленно. Идея мышления как процесса вычисления, «подсчитывания» была сформулирована также Гоббсом.

Лейбниц ввел двоичное счисление и идею универсальной характеристики, позволяющей координатизировать понятия натуральными числами, что предвосхитило нумерацию Геделя. Ранний Лейбниц был уверен в осуществимости своей мечты (но позднее признал безусловную роль бесконечности). Это означало бы тождественность Разума и Логики, возможность замены Разума искусственным интеллектом. Если придерживаться утверждений I и II, то следует признать, что человеческий интеллект неизмеримо шире, тоньше и многограннее любого искусственного интеллекта.

Тем не менее заманчивая и великая мечта Лейбница во многом претворена в жизнь – осуществлена настолько, насколько это возможно. Созданы и развиваются математическая логика, теория алгоритмов, искусственные языки программирования, современные компьютеры, компьютерная математика. Продуктивен подход к исследованию разума с помощью структур программирования, что находит практическое воплощение при развитии интеллекта учащихся в рамках когнитивной информатики. Говорят даже о «перевороте в сознании», состоящем в том, что открывается новый способ изучения мышления человека, по типу компьютерного программирования. Использование с помощью компьютера принципов кибернетики может способствовать глубинному исследованию структуры знания, что позволит лучше понимать процесс познания, природу нашего сознания.

Однако не следует преувеличивать автономные возможности вычислительных машин. Они четко очерчены: компьютер по своим возможностям находится между новичком и более подготовленным начинающим и не может продвинуться дальше этой границы, поскольку мышление любого новичка включает массу процедур, непосильных для компьютера.

Поэтому необходимо «сотрудничество» компьютера с человеком для создания робота с проблесками разума. Это интересная область науки, называемая *искусственным интеллектом*. Ее цель – создание эвристических программ, дающих возможность компьютеру, перерабатывающему информацию, проявлять разумность. Проектируя робота, никто не ожидает от него, что он будет воспроизводить любое разумное действие. Можно рассчитывать только на способность человека к формализации своего поведения.

Программа Гильберта представляет собой четко продуманный план работы по безупречному обоснованию всей математики. На пути ее реализации был усовершенствован язык *математической логики*, разработанный Булем, Шредером, Фреге, Расселом, Уайтхедом, Гильбертом и его последователями, возникла *метаматематика* (в известном смысле, как наука о математике), зародилась математическая *теория моделей*. Полная реализация программы Гильберта означала бы совпадение математики, стало быть, и Науки с Логикой. Однако грандиозная программа Гильберта в том финитном виде, в каком она была задумана самим Гильбертом, была обречена на неудачу. Это задолго до теоремы Геделя о неполноте отмечал Пуанкаре, указав на порочный круг: в число финитных средств неизбежно попадает метод математической индукции, который сам подлежит формализации и, заметим, тесно связан с бесконечностью.

Рассмотрим программу Гильберта чуть подробнее. Появившиеся на рубеже XIX и XX веков элементарные логические и теоретико-множественные *парадоксы* остро поставили проблему пересмотра оснований математики, обоснования непротиворечивости математики. Среди крупнейших математиков того времени возникли споры о надежности и возможности применения в математических рассуждениях тех или иных логических средств (закона исключенного третьего, метода от противного, аксиомы выбора). В результате зародились и возникли основные методологические направления в математике – *логицизм* (Фреге, Рассел, Уайтхед), *интуиционизм* (Брауэр, Вейль, Гейтинг), *формализм* (Гильберт, Бернайс), *теоретико-множественное направление* (Кантор, Цермело, Бурбаки). В математическом плане интуиционизм есть конструктивизм, развитый создателями теории алгоритмов и ЭВМ (Пост, Черч, Тьюринг, фон Нейман, А. А. Марков).

Гильберт и формалисты видели выход в эффективной аксиоматизации не только существующей математики, но и применяемой математиками логики. К началу XX века были содержательно аксиоматизированы основные числовые системы (Гамильтон, Грассман, Дедекинд, Кантор, Пеано), евклидова геометрия (Гильберт), теория множеств (Цермело). Формализм требует, чтобы изложение велось на строго формализованном языке математической логики. Таким языком служит язык *логики первого порядка*, т. е. логика предикатов, в которой кванторы связывают только предметные переменные. Этого мнения, называемого *тезисом Гильберта*, придерживаются многие логики и математики [514, Ч. I].

Все богатство математики должно быть представлено в виде формальных аксиоматических теорий (систем). Во второй половине XIX века произошла *арифметизация математики* (анализа, геометрии) – сведение классической математики к натуральным числам, то есть в известной степени осуществлена пифагорейская программа «Все есть натуральное число». Поэтому одним из первых шагов программы Гильберта явилась попытка построения внутренне непротиворечивой и адекватной (полной) формальной арифметики.

Формалисты представляют математику как своеобразную игру в формулы по четко определенным правилам. Напомним, что *формальная аксиоматическая теория* (или просто теория) предполагает наличие *языка*, *аксиом* и *правил вывода*. Язык состоит из *алфавита*, содержащего знаки предметных переменных и констант, предикатов и функций, скобки, *термов* и *формул*. Термы и формулы – это грамматика теории, т. е. четко определенные слова в данном алфавите, интуитивно обозначающие соответственно предметы и высказывания о них. Аксиомы и правила вывода можно назвать дедуктикой формальной системы. Формальный язык с грамматикой и дедуктикой образуют *синтаксис*. К синтаксису относятся понятия формальной выводимости и доказательства. Смысл и истинностное значение формул принадлежат *семантике*, связанной с синтаксисом посредством *интерпретаций* и *моделей*.

Естественным образом появилась метаматематика – наука о формальных аксиоматических системах, их свойствах. Важнейшими свойствами таких теорий являются непротиворечивость, полнота, разрешимость. Метаматематические рассуждения должны быть общепринятыми, *финитными*, алгоритмическими. Школой Гильберта были доказаны непротиворечивость, полнота и разрешимость исчисления высказываний, непротиворечивость и полнота чистой логики предикатов, полнота ряда формальных алгебраических теорий. Формалисты приступили к финитному доказательству непротиворечивости и полноты формальной арифметики. И здесь их ждало большое разочарование.

Теорема Геделя о неполноте. В 1931 году австрийский математик и логик Курт Гедель доказал свою знаменитую первую теорему о неполноте:

В любой непротиворечивой (ω-непротиворечивой) формальной аксиоматической системе S, содержащей формальную арифметику, существует неразрешимое высказывание.

Напомним, что высказывание – это замкнутая формула логики предикатов (она не содержит свободных переменных), теорема – доказуемая формула, а неразрешимым называется высказывание A, которое нельзя ни доказать, ни опровергнуть, то есть высказывание A и его отрицание $\neg A$ не являются теоремами в S. Противоречивые теории – в точности те, все формулы которых суть теоремы. Теория называется полной, если для любого ее высказывания доказуемо либо оно само, либо его отрицание. Сформулированная теорема Геделя утверждает, что такие достаточно богатые теории S не полны. Интересно заметить, что в S найдется недоказуемое высказывание, означающее непротиворечивость теории S. Для построения неразрешимого высказывания Гедель применил кодирование формул натуральными числами (геделева нумерация), позволившее рассуждать о высказываниях теории S (метатеория) как о натуральных числах (предметной теории S). Тем самым показано, что средствами теории S

невозможно доказать ее непротиворечивость (*вторая теорема Геделя о неполноте*, см. [514, Ч. IV]). Следовательно, финитная программа обоснования математики не выполнима. Но даже если бы программа Гильберта оказалась полностью выполнимой, то повседневная работа по гильбертовскому шаблону была бы слишком громоздкой и в своей практике математики продолжали бы пользоваться интуицией.

Пусть S – формальная арифметика и A – некоторое ее неразрешимое высказывание. Теория S служит формализацией содержательной теории натуральных чисел, имеющей стандартную модель – обычный натуральный ряд N. Высказывание A является вполне определенным утверждением о натуральных числах, которое либо истинно, либо ложно в N. Поэтому одно из высказываний A или $\neg A$ будет истинным недоказуемым высказыванием. Получаем существование недоказуемых высказываний о свойствах N, причем никакое расширение теории S положение дел не меняет. Из первой теоремы Геделя следует также, что множество всех истинных в N высказываний неразрешимо, то есть не существует алгоритма, позволяющего решить вопрос об истинности каждого высказывания формальной арифметики.

Чуть позже были доказаны *теорема Тарского о невыразимости истины* в S и *теорема Черча о неразрешимости* множества всех общезначимых формул логики предикатов. Общезначимость формулы данной теории означает ее истинность во всех моделях теории. Укажем другие фундаментальные результаты о взаимосвязи между синтаксисом и семантикой формальных систем. Во-первых, назовем *теорему Геделя* 1930 года *о полноте*, или адекватности: формула теории первого порядка является теоремой тогда и только тогда, когда она общезначима. Во-вторых, *обобщенная теорема о полноте* утверждает, что непротиворечивость формальной аксиоматической теории равносильна существованию модели этой теории. Отсюда выводится *теорема компактности*, впервые доказанная А. И. Мальцевым в 1936 году: множество высказываний некоторой формальной аксиоматической теории имеет модель тогда и только тогда, когда любое его конечное подмножество обладает моделью. Заметим, что в пользу приведенного выше тезиса Гильберта говорит следующий прекрасный результат Линдстрема [514, Ч. I]: логика первого порядка является единственной логикой, замкнутой относительно обычных логических связок и кванторов и удовлетворяющей теоремам компактности и Левенгейма-Сколема. А *теорема Левенгейма-Сколема* утверждает, что теория с бесконечной моделью имеет и счетную модель.

Поясним первую теорему Геделя о неполноте. В системе S строится высказывание A, говорящее о собственной недоказуемости в терминах геделевой нумерации, т. е. A обозначает высказывание «Это предложение недоказуемо». Здесь, как и в строгом оригинальном рассуждении Геделя, обыгрывается знаменитый *парадокс лжеца* в форме «Это предложение ложно» с заменой слова «ложно» на «недоказуемо». При любых интерпретациях непротиворечивой теории теоремы истинны. Поэтому высказывание A не может быть ложным. Значит, A – недоказуемая истина и, стало быть, неразрешимое высказывание.

Обоснование математики в гильбертовском смысле потерпело неудачу. Однако формализм Гильберта можно модифицировать. При построении математики как формальной системы Гильберт допускал только логику первого порядка в качестве предметной теории и только финитные методы в метатеории. Но можно пытаться доказать непротиворечивость математики, либо несколько усилив язык формальной теории, либо используя некоторые достаточно убедительные нефинитные средства в метаматематических рассуждениях. Так, Генцен доказал непротиворечивость формальной арифметики, применив трансфинитную индукцию по счетным ординалам (см. [348]). А П. С. Новиков строго обосновал непротиворечивость арифметики на расширенной конструктивистской основе, допуская бесконечные дизъюнкции и конъюнкции и трансфинитную индукцию в качестве вполне законных логических операций.

Интересна предпринятая Ю. Л. Ершовым и К. Ф. Самохваловым реабилитация программы Гильберта [203]. Его подход придает новый смысл программе Гильберта и ее реализации: «*Для всякой заинтересовавшей нас проблемы ищите систему с обычными правилами вывода, в которой эта проблема представима в виде осмысленной задачи, и затем ищите для такой системы финитное* *доказательство ее непротиворечивости в соответствии с прежним императивом программы Гильберта»*. Это определенная локализация гильбертовского глобализма.

А. Н. Паршин рассматривает геделеву нумерацию как определенную систему координат, придавая ей геометрический смысл и имея в виду ее вложение в p-адический континуум [408]. Это открывает новые возможности истолкования теоремы Геделя.

Теорема Геделя о неполноте ограничивает тотальную формализацию Науки, высвобождая энергию творчества. Она убедительно показывает несводимость мышления к логике, принципиальную неформализуемость Разума, необходимость интуиции.

Как подчеркивает А. Н. Паршин в своей глубокой работе [408], теорема Геделя есть фундаментальный философский факт, говорящий о каком-то глубинном свойстве мышления и указывающий на существование *подвижной* границы между формальным и интуитивным везде, в частности в самой математике, причем эта граница «устанавливается каждый раз *заново в каждом* новом акте познания». Интересно отметить, что зачастую акт обретения нового совершается мгновенно (именно так человек начинает уметь плавать и кататься на велосипеде). Кроме того, надо сказать, что в квантовой физике имеется методологически аналогичный результат – это теорема фон Неймана о невозможности введения скрытых параметров, которые позволили бы свести квантовые системы к системам классической механики.

Теорема Геделя о неполноте, сама будучи вершиной логической мысли, несет огромный жизнеутверждающий заряд – ценность постепенного логического освоения научного знания. Подчеркивая непреходящее значение творчества, она укрепляет веру в бесконечный прогресс рационального познания.

Значение логики

Попытаемся представить и четко сформулировать роль логики в человеческом познании окружающего мира. Для этого сначала нужно уточнить терминологию, относящуюся к категории разума. В параграфе 3 отмечалось, что в человеческом измерении понятия *разум* и *сознание* оказываются (или представляются нам) тождественными. Составляющие разума – это *рассудок*, *интеллектуальная интуиция* плюс совокупность некоторых «тонких» форм ментальной психики (к которым относятся вера, сомнение, воображение). *Логика* же является формой существования рассудка. Логическое мышление поддерживает тесно охватывающее его абстрактное мышление, которое и отличает человека от высших животных. Продуктивное логическое мышление может протекать в следующих общих формах: дедукция (выведение, логический вывод частного из общего), индукция (наведение, вывод общего, исходя из частных случаев) и абдукция (получение посылки на основе других посылок и заключения). В отличие от дедукции индукция и абдукция не являются строгими правилами вывода; это правдоподобные рассуждения, позволяющие получать новую, недостающую информацию, которую в дальнейшем необходимо строго обосновать.

Многие философы и ученые признают важнейшей характеристикой мышления его когнитивность, то есть познавательную активность и направленность. В то же время критикуется логоцентризм, сводящий все содержание мышления к логике. Фактически современная философия отвергает логоцентризм, выдвигая в гносеологии на первые позиции интуицию, различные формы субъективизма, психологизма, релятивизма и эмпиризма, те или иные деятельностные концепции и даже постмодернистские установки. В основаниях математики логоцентризм называется логицизмом. Надо признать, что он не оправдал себя: вся математика к логике не сводима.

Во втором параграфе говорилось о том, что истоками познания служат следующие данности, взятые в совокупности (а не одно какое-либо начало): априорности, очевидности, логика, интуиция, эмпирия и деятельность. Научное познание, в первую очередь, опирается на разум и руководствуется разумом. Опыт, практика, эксперимент поставляют исходные данные, дают пищу, материал для работы мышления. Интуиция, образное мышление, наглядные представления дают возможность открывать новое знание, выдвигать гипотезы, запечатлевать верные догадки. Однако ведущую роль играет абстрактное мышление. Логическое мышление и образное мышление – это реальность, отчасти отражаемая метафорой полушарного мышления. В обыденной жизни и научной деятельности задействованы оба вида мышления, которые переплетаются и дополняют друг друга.

Однако, как правило, у конкретных людей преобладает и главенствует один из них.

Еще раз подчеркнем, что абстрактное мышление, базирующееся на обычной логике, является главным типом мышления и ведущим способом познания в науке и философии. Известный финский логик и эпистемолог Яакко Хинтикка заключает [585]: «В итоге, логика – это нечто большее, нежели машина вывода. ... Говоря стратегически, логикой науки можно назвать обычную логику». Дедукция и аксиоматический метод зародились на основе обыденного логического мышления, а затем развивались в рамках математики и обычной содержательной логики. Аристотель вычленил простейшие основополагающие законы классической логики. Формализация и математизация (алгебраизация) логики происходила в XIX веке. К началу XX столетия сформировалась математическая логика. Из нее постепенно начали выделяться неклассические логики и исчисления: интуиционистская логика, многозначная логика, нечеткая логика и другие. Нужно отметить, что соответствующие логические исчисления составляют неотъемлемую часть современной математической логики. Но все они, конечно, излагаются на языке классической логики, их металогикой служит обычная двузначная логика. Заметим, что диалектическая логика, разработанная Гегелем как чисто философское учение, представителями диалектического материализма отождествлялась со всей теорией познания.

Логика не только упорядочивает мысли, не только завершает, формулирует и совершенствует теории, но – наряду с интуицией – способна открывать новые законы. В математике обобщение может протекать в формах: «понятие→когнитивная методика→более общее понятие», «теорема→метод→обобщенная теорема» или «прием→утверждение→общий метод». Обобщенная математическая реальность (общие понятия, методы, утверждения) зачастую возникает и раскрывается в результате кристаллизации (абстрагирования, уточнения, формализации) конкретного рассуждения или доказательства.

Соотношение *математического* и *логического* в науке и познании допускает разные трактовки. Все попытки логицистов свести математику к логике не удались. При нашем определении математики она должна содержать логику, точнее формальную логику. Многие с этим не согласятся, утверждая, что логика – это чистая форма, а математика содержательна, и ее первый хлеб – числа и фигуры, возникшие из насущной практики счета и измерений. Не будем спорить, ибо логика бывает разной. Мы же имеем в виду классическую двузначную логику, узнанную и развитую Аристотелем. Все неклассические логики основаны на аристотелевской логике.

Известный логик и философ Г. фон Вригт констатировал в 1991 году, что «логика расплавилась в разнообразных исследованиях математики».

А. С. Карпенко отмечает в [246], что вся логика разбита на следующие части.

1. Математическая (или символическая) логика.
2. Философская (или традиционная) логика.
3. Неклассические (нестандартные) логики. В том числе:

а) интуиционистская и суперинтуиционистская логика, включая марковский конструктивизм, широко распространенный за рубежом;

б) модальные и временные логики;

в) многозначные и нечеткие логики;

г) релевантные и паранепротиворечивые логики.

Автор указывает, что невозможно строго разграничить такие понятия, как философия логики или философская логика. Обсуждаются также вопросы оснований логики и компьютеризации логики.

Завершим обсуждение роли логики в познании следующими словами Н. Н. Непейводы: «Логика в многоуровневом мышлении является единственной рациональной альтернативой и единственным интеллектуальным противоядием против манипуляции умами (истинная религия выходит за рассматриваемую нами область, хотя справляется с данной задачей столь же хорошо)».

Литература: [91, 140, 141, 143, 144, 153, 154, 168. 202, 203, 220, 229, 246, 247, 251, 254, 262, 263,272, 273, 312, 322, 325-328, 340, 348, 381-384, 387, 388, 404, 408, 424, 436, 447,458, 490, 498, 514, 518, 526, 539, 547, 549, 551, 561, 572, 573, 584, 585, 599, 600, 613, 622].

§ 14. Архитектура математики

Идея выше факта.
Оноре де Бальзак

Большинство математиков в своей работе придерживаются обычной теории множеств, соответствующей системе Цермело-Френкеля. В 1937 году образовалась группа французских математиков под псевдонимом Бурбаки. Они наметили изложить всю математику строго аксиоматически на основе теории множеств. Бурбаки выпустили около 40 томов издания «Элементы математики». Начали с теории множеств. Затем последовали абстрактная алгебра, общая топология, теория функций действительного переменного, топологические векторные пространства, общая теория интегрирования.

Бурбаки определили математику как науку о математических структурах, все многообразие которых сводилось ими к трем фундаментальным типам структур: *алгебраической*, *порядковой* и *топологической*. Связь между ними показана в Приложении VII. Свою методологию они изложили в прекрасной статье «Архитектура математики» (см. [65]). Интересно и полезно заметить, что Жан Пиаже связывает основные типы математических структур с подобными, отвечающими им, умственными структурами и способностями человеческого интеллекта [421].

Подчеркнем, что понятие структуры является основной общенаучной и философской категорией, широко используемой в исследовании сложных систем. *Структурой* объекта называется совокупность устойчивых связей его элементов, позволяющих идентифицировать этот объект как вполне определенную целостность. Бурбаки сформулировали понятие математической структуры на основе аксиоматико-дедуктивного подхода.

Математической структурой называется произвольное непустое множество с заданной на нем системой операций и отношений [66]. Математические структуры «говорят» на языке теории множеств. В основе алгебраической структуры лежит понятие алгебраической операции, выражающей в абстрактном виде идею вычисления. Порядковая структура – это упорядоченное множество; отношение порядка на нем позволяет сравнивать элементы «по величине». Топологическая структура выражается в понятии топологического пространства, формализующего идеи непрерывности и предельного перехода.

Российский тополог А. В. Архангельский в статье [23] к указанным трем типам структур добавляет *структуры с мерой*, в которых находит свое выражение идея интегрирования (см. [64, 581]). Можно рассматривать также *структуры инцидентности*, часто встречающиеся в геометрии, комбинаторике и теории графов [7, 11, 139, 142, 200, 248, 582].

Итак, абстрактные математические моноструктуры можно классифицировать следующим образом:

1. Алгебраические структуры (алгебры).
2. Порядковые структуры (упорядоченные множества).
3. Топологические структуры (топологические пространства).
4. Пространства с мерой (и с системами мер).
5. Структуры инцидентности (геометрии, графы).

Понимание математической структуры по Бурбаки является зауженным. Оно заметно игнорирует качественную и конструктивную стороны математики. В бурбакистской классификации отсутствуют также комбинаторные и наглядно-геометрические структуры. По этому поводу французский математик Рене Том замечает, что «не нужно думать, что знание стандартных математических структур исчерпывает математику. Как раз наоборот: эти структуры представляют собой лишь наиболее поверхностные аспекты» [543].

Очень важно понимать диалектику содержательно-интуитивной и формально-логической сторон современной математики. Исходя из системного социокультурного подхода, В. А. Тестов [536, с. 25] предлагает под *математической структурой* понимать совокупность устойчивых связей, обеспечивающих целостность математического объекта. Эти определяющие связи могут быть заданы различными способами: формально-аксиоматически, конструктивно, описательно, наглядно-содержательно.

В связи с мощным развитием компьютеров и высоким уровнем математического формализма математики склоняются к тезису Гильберта о том, что языком современной математики все в большей и большей степени становится *язык логики предикатов первого порядка*.

Следует заметить, что принятие этого формализма приводит ко многим неопределенностям. Теории основных числовых систем оказываются некатегоричными. В любой арифметической теории неустранимо существуют неразрешимые предложения (теорема Геделя о неполноте). Имеют место результаты Геделя и Коэна о независимости континуум-гипотезы от канонической аксиоматики теории множеств Цермело-Френкеля. Существуют альтернативные аксиоматические теории множеств, в которых не выполняются многие теоремы классического анализа. Получается, что строго формально нельзя определить одно из фундаментальных понятий математики – континуум. Более того, и содержательными средствами не удается решить проблему континуума.

По Гильберту, «математика – наука о бесконечности». В 1979 году математики Парис и Харрингтон доказали, что в формальной арифметике понятие актуально бесконечного множества невыразимо (см. [336, с. 148]). Это означает невозможность строгой арифметизации анализа, стало быть, необходимо непосредственное рассмотрение содержательной математики, либо тот или иной тип аксиомы бесконечности, скажем, в рамках аксиоматической теории множеств. Тем не менее, понимая всю относительность математики, Вейль подчеркивал главное в ней – объективность [78].

Литература: [7, 11, 23, 64-66, 78, 139, 142, 248, 336, 421, 536, 543, 581, 582].

§15. Фундаментальные понятия, идеи и методы математики

Мои результаты мне давно известны,
я только не знаю, как я к ним приду.
Карл Гаусс

Каждая наука имеет свой понятийный аппарат, свои ключевые идеи, методы и конструкции. Исходные интуитивные (ставшие абстрактными) понятия математики - *число* и *геометрическая фигура*. В конце XIX века они были аксиоматизированы (Пеано и Гильберт). В настоящее время, на наш взгляд, можно выделить два ведущих понятия: **функция** и **доказательство**. Как уже было сказано, понятие функции отражает в математике категорию движения, а доказательство – причинно-следственные связи. Функции выражают содержание математики, а доказательства - ее логику.

По типу изучаемых функций можно провести классификацию математических дисциплин. Современная алгебра изучает *алгебраические операции*. Сигнатура рассматриваемой совокупности алгебраических операций и их свойства дают конкретные классы алгебраических структур (группы, кольца, решетки и т. д.). При этом важнейшую роль играют *гомоморфизмы* однотипных алгебр. Классический математический анализ исследует *числовые функции* и такие их важнейшие свойства, как непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость, измеримость. В известной *эрлангенской программе* (1872 год) Феликс Клейн определил геометрию как *науку о геометрических преобразованиях* (движения, аффинные или проективные преобразования и т. п.) и предложил классифицировать различные геометрии по виду группы их преобразований. Топология изучает *непрерывные* отображения, в частности гомеоморфизмы топологических пространств. Теория упорядоченных структур – *изотонные* (сохраняющие порядок) отображения. В теории категорий понятию функции соответствует обобщенное понятие *морфизма*.

В теоретико-множественной (читай: классической) математике первичными неопределяемыми понятиями служат *множество* и *отношение принадлежности* элемента множеству. Через них определяется и понятие функции. С понятием функции тесно связаны следующие важные понятия: образ, прообраз, частичная функция, отображение, инъективность, сюръективность, биективность. Но основным является понятие *композиции*, или *суперпозиции* функций, - это последовательное выполнение функций. В терминах (частичной) бинарной операции композиции отображений можно выразить многие свойства данного отображения, в частности его инъективность, сюръективность и биективность.

Фундаментальное понятие доказательства выражает суть дедуктивного характера математики. По Бурбаки, «математика – это доказательство». Строгое определение доказательства дает математическая логика (об этом говорилось выше). Существует специальный раздел математической логики – теория доказательств (у Аристотеля – система дедукции).

Любая математическая теория также имеет свои основные понятия. Интересно и полезно проследить историю их возникновения и развития. Возьмем теорию групп. Фундаментальное понятие *группы* формировалось более 100 лет. Неформально группу подстановок корней многочленов рассматривал еще Лагранж в 1771 году при попытке решения проблемы о разрешимости алгебраических уравнений в радикалах. Далее эти исследования были развиты итальянским математиком Паоло Руффини, норвежцем Нильсом Абелем и французом Эваристом Галуа. Именно Галуа в 1830 году ввел термин «группа», хотя и не дал строгого определения. Для представления конечных (мультипликативных) групп Кэли использовал таблицы умножения, называемые теперь *таблицами Кэли*, и доказал теорему о представлении любой конечной группы подстановками.

Большой вклад в формирование теоретико-групповых понятий внесли французский математик Камиль Жордан, немец Фердинанд Фробениус, норвежский математик Софус Ли во второй половине XIX века. Так, Ли дал современное определение для группы преобразований. Впервые абстрактное определение группы дано немецким математиком Генрихом Вебером в 1896 году. В самостоятельную алгебраическую дисциплину теория групп оформилась с выходом книги российского математика и знаменитого полярника О. Ю. Шмидта «Абстрактная теория групп» в 1916 году. В настоящее время теория групп является одним из ведущих разделов абстрактной математики, имеет многочисленные применения как в самой математике, так и в естествознании. См. Приложение IV.

Как уже было отмечено, понятие группы формализует общенаучное понятие симметрии. С каждой фигурой обычного трехмерного пространства ассоциирована *группа* всех ее *самосовмещений*, т. е. движений пространства, рассматриваемых с операцией композиции, при которых фигура отображается сама на себя. Чем богаче группа самосовмещений фигуры, чем большую мощность она имеет, тем совершеннее, симметричнее сама фигура. Так, квадрат симметричнее отрезка, а окружность симметричнее любого правильного многоугольника. Наряду с понятием симметрии существует и *идея симметрии*, которая может проявляться разнообразно: и наглядно-геометрически, и комбинаторно (симметрический перебор или симметрическая стратегия), и абстрактно-алгебраически. В последнем случае идея симметрии заключается в сопоставлении математическому объекту его группы автоморфизмов.

Далее рассмотрим понятия *топологического пространства* и *упорядоченного множества*, составляющие вместе с алгебраической структурой основные типы математических структур (по Бурбаки).

Топологические пространства тесно связаны с общим понятием *предела* и являются частью топологии, непрерывной математики. Центральной идей, формирующей топологию как математическую дисциплину, служит *идея непрерывности*.

Важнейший класс топологических пространств образуют *метрические пространства*, т. е. множества с заданной на них *метрикой* (расстоянием). Метрические пространства определены французом Морисом Фреше в 1906 году. В 1914 году немецкий математик Феликс Хаусдорф первым ввел и изучил понятие отделимого топологического пространства (хаусдорфова пространства). Он считается создателем *общей*, или *теоретико-множественной*, *топологии* – раздела математики, исследующего топологические пространства и их непрерывные отображения.

Общее определение топологического пространства было дано в начале 20-х годов XX века российским математиком П. С. Александровым (через семейство открытых множеств) и поляком Казимиром Куратовским (через оператор замыкания). П. С. Александров и П. С. Урысон являются основателями всемирно известной российской топологической школы. К основным топологическим понятиям относятся компактность, связность, так называемые аксиомы отделимости и счетности, непрерывное отображение и гомеоморфизм, размерность и ряд других.

Существуют причудливые метрические и топологические пространства. Если в определении метрики заменить аксиому треугольника более сильной (расстояние между любыми двумя точками не превосходит наибольшего из расстояний от этих точек до произвольной третьей точки пространства), то получим понятия *ультраметрики* и *ультраметрического пространства*. Легко привести примеры конечных ультраметрических пространств. Ультраметрическим пространством служит пространство p-адических чисел, введенных немецким математиком Куртом Гензелем в теории чисел. Нетрудно задать нетривиальную ультраметрику на множестве рациональных чисел. Первое из этих пространств полное, а второе нет. Любопытно, что в каждом ультраметрическом пространстве все треугольники равнобедренные (по большей стороне), а из двух пересекающихся шаров один обязательно вложен в другой. Отметим также, что сходимость p-адического ряда равносильна стремлению к нулю его общего члена.

А теперь рассмотрим пример «странного» топологического пространства. Возьмем множество всех натуральных чисел и объявим открытыми в нем пустое множество и множества, каждое из которых есть множество всех натуральных чисел, больших некоторого натурального числа или равных ему. В этом топологическом пространстве 1 – единственная замкнутая точка; каждый элемент имеет лишь конечное множество окрестностей; оно является T_0-пространством, т. е. для любых двух различных натуральных чисел найдется окрестность, содержащая ровно одно из них – большее (для меньшего числа такой окрестности нет). Интересно заметить, что любая точка построенного пространства является пределом стандартной последовательности $1, 2, \ldots, n, \ldots$ Подробнее см. наше Приложение VI.

Переходим к порядковой структуре (детали – в Приложении V). В теории упорядоченных множеств воплощается в чистом виде *идея сравнения объектов по величине*. Понятия *отношения порядка* и *упорядоченного множества* формулируются столь же естественно и просто, как и метрика или топологическое пространство. Бинарное отношение на множестве называют *порядком*, если оно рефлексивно (сравнимость с самим собой), транзитивно («транзитом» через второй элемент) и антисимметрично (двойное неравенство есть равенство). Множество с заданным на нем порядком называется упорядоченным множеством.

Основными понятиями, связанными с порядком, служат: наибольший и наименьший элементы, максимальный и минимальный элементы, точные грани, сравнимость, линейность (цепь), сечение, вполне упорядоченное множество, решетка, полная решетка, изотонное отображение, дополнение, дистрибутивная решетка, булева алгебра, упорядоченные группа, кольцо и поле. Имеет место *принцип двойственности*: если верно некоторое утверждение об упорядоченных множествах, то верно и двойственное утверждение, в котором исходный порядок заменен на обратный к нему порядок. Индуктивные рассуждения основаны на порядковой структуре. Доказательства, определения и построения по *трансфинитной индукции* (в частности, по обычной математической индукции) широко применяются в современной математике.

Конечные упорядоченные множества, как и конечные графы, играют важную роль в дискретной математике. Существует наглядное и продуктивное изображение конечных упорядоченных множеств *диаграммами Хассе*. Важно отметить, что имеются естественные взаимно однозначные соответствия между конечными упорядоченными множествами, конечными дистрибутивными решетками (их можно рассматривать чисто алгебраически) и конечными T_0-пространствами. Это показывает, что в конечном случае имеется единство (взаимоопределяемость) порядковой, алгебраической и топологической структур. (Можно обратиться к Приложению VII.)

В математике существует *порядковый подход* (идея упорядоченности), при котором акцентируется внимание на порядковой структуре изучаемых объектов, на возможности их упорядочивания, и свойства объектов выражаются в терминах отношения порядка. Отметим и *теоретико-решеточный способ* (метод) мышления, когда математический объект исследуется с помощью решетки его подобъектов.

Остановимся также на фундаментальном понятии *алгоритма.* На обычном языке алгоритмом называется четко прописанная процедура действий, приводящая к результату через конечное число шагов. Это интуитивное описание алгоритма. Любой алгоритм применим к целому классу задач. Вспомним *алгоритм Евклида* нахождения НОД двух любых целых чисел или *метод Гаусса* решения произвольных систем линейных уравнений. Не имея строгого определения алгоритма, нельзя доказать *алгоритмическую неразрешимость* (отсутствие соответствующего алгоритма) математической проблемы. В качестве примера рассмотрим десятую проблему Гильберта о существовании алгоритма, выясняющего разрешимость в целых числах любого диофантова уравнения. *Диофантово уравнение* – это алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами, т. е. приравненный к нулю многочлен от нескольких неизвестных с целыми коэффициентами. Отсутствие такого алгоритма доказал российский математик Ю. В. Матиясевич в 1970 году [343].

Строгие определения («уточнения») понятия алгоритма впервые дали американский математик Эмиль Пост и Тьюринг (*машина Тьюринга*) в 1936 году. Их конструкции заложили теоретическую основу ЭВМ. В дальнейшем свои уточнения понятия алгоритма предложили А. А. Марков (*нормальный алгоритм*), А. Н. Колмогоров и другие. Существует целый ряд уточнений понятия алгоритма; важную роль играют рекурсивные функции (разновидность *вычислимости*). Оказалось, что все известные уточнения понятия алгоритма эквивалентны между собой. Это свидетельствует в пользу *тезиса Черча*: класс функций, вычислимых с помощью алгоритма в интуитивном смысле, совпадает с классом частично рекурсивных функций. Относительно любого уточнения понятия алгоритма можно высказать аналогичный принцип. Тезис Черча нельзя доказать; это философское утверждение. Заметим, что в одну сторону тезис Черча не вызывает сомнений – ясно, что строгая алгоритмическая вычислимость является и вычислимостью в интуитивном смысле. Сейчас теория алгоритмов – развитая самостоятельная область математики, тесно связанная с математической логикой, с конструктивной математикой.

В современной математике часто встречается *понятие многообразия*, имеющего в разных дисциплинах различный смысл:

многообразие универсальных алгебр; многообразие в теории моделей; топологическое, аналитическое и дифференцируемое многообразия. *Многообразием универсальных алгебр* называется класс всех алгебр одной и той же сигнатуры, удовлетворяющих некоторой фиксированной системе тождеств. Отметим многообразия полугрупп, групп, абелевых групп, колец, решеток. По теореме Биркгофа (американский алгебраист Гаррет Биркгоф, один из основателей современной теории решеток) класс универсальных алгебр образует многообразие тогда и только тогда, когда он замкнут относительно взятия подалгебр, гомоморфных образов и произвольных прямых произведений. Отсюда следует, что класс всех полей не является многообразием. В теории универсальных алгебр изучаются также *квазимногообразия* - классы алгебр, задаваемые условными тождествами (квазитождествами).

Очень интересно, что к числу понятий Гильберт относил и удачные математические обозначения.

Основополагающие математические идеи

Координатизация (термин Германа Вейля) заключается в сопоставлении изучаемым реальным или математическим объектам чисел, систем чисел или «числоподобных» объектов (*координат* исследуемых объектов), над которыми можно выполнять некоторые операции, производить вычисления, позволяющие получать информацию об исходных объектах. В известной мере эта идея характеризует саму математику и место алгебры в ней. Примеры координатизации дают: пересчет и счет предметов; различные величины – длина отрезка, площадь фигуры, объем и вес реального тела, величина угла; тригонометрические функции как функции углов; числовая прямая; метод координат в аналитической геометрии; полярные и сферические координаты точки; алгебраическая геометрия и алгебраическая топология; конечные геометрии; группа автоморфизмов (симметрии) математического объекта. Напомним о существовании четырехэлементной аффинной плоскости и семиэлементной проективной плоскости, которые можно координатизировать при помощи двухэлементного поля.

Из попыток «измерить» или «выразить числом» различные объекты происходит расширение самого понятия числа. Координатизация в математике соответствует естественнонаучной методологии Галилея о «всеобщем измерении и измеримости». В полном согласии с Галилеем И. Р. Шафаревич в обзорной работе «Основные понятия алгебры» [606] провозглашает тезис: любые математические объекты могут быть «координатизированы», или «измерены».

С идеей координатизации тесно связана ***идея арифметизации*** математики. Она состоит в сведении той или иной математической дисциплины или даже всей классической математики к числовым системам. Построение системы действительных чисел на базе рациональных чисел и ее аксиоматизация (это непрерывное линейно упорядоченное поле) сделали действительные числа сугубо арифметическим (алгебраическим) объектом. Евклидова геометрия сведена Гильбертом к действительным числам. Можно пытаться арифметизировать и классический математический анализ, рассматривая действительные алгебры соответственно непрерывных, дифференцируемых, интегрируемых, измеримых и т. д. числовых функций. Во многом воплощенные идеи координатизации и арифметизации показывают ведущую роль алгебры в современной математике.

Идея линейности. Эта идея находит свое пристанище в *линейной алгебре*: системы линейных уравнений, матрицы, векторные пространства и линейные многообразия, линейные отображения. В дифференциальном исчислении и в дифференциальной геометрии идея линейности предполагает спрямление, или *линеаризацию*, кривых и поверхностей в малом с целью упрощения ситуации и возможности применения аппарата линейной алгебры.

Понятие и идея изоморфизма. Изоморфизм (или изоморфность) – одно из основополагающих понятий современной математики. Два однотипных математических объекта (или структуры) называются изоморфными, если существует взаимно однозначное отображение одного из них на другой, такое, что оно и обратное к нему сохраняют строение объектов, т. е. элементы, находящиеся в некотором отношении, переводятся в элементы, находящиеся в соответствующем отношении. Однотипность математических объектов означает, что они имеют одинаковую *сигнатуру*, или набор отношений. Изоморфизм топологических пространств называется гомеоморфизмом, метрических пространств – изометрией, дифференцируемых многообразий – диффеоморфизмом, упорядоченных множеств – порядковым изоморфизмом. Изоморфные множества (с пустой сигнатурой) – это множества одинаковой мощности.

Изоморфные объекты могут иметь различную природу элементов и отношений между ними, но они совершенно одинаково абстрактно устроены, служат копиями друг друга. Изоморфизм представляет собой «абстрактное равенство» однотипных объектов. Например, аддитивная группа классов вычетов по модулю n изоморфна мультипликативной группе комплексных корней n-й степени из 1.

Отношение изоморфности на любом классе однотипных математических объектов, будучи отношением эквивалентности, разбивает исходный класс объектов на классы изоморфности – классы попарно изоморфных объектов. Выбирая в каждом классе изоморфности по одному объекту, мы получаем полный абстрактный обзор данного класса математических объектов. Идея изоморфизма заключается в представлении или описании объектов данного класса *с точностью до изоморфизма*.

Для каждого класса объектов существует *проблема изоморфизма*: Изоморфны ли два произвольных объекта из данного класса? Как это выясняется? Для доказательства изоморфности двух объектов, как правило, строится конкретный изоморфизм между ними. Или устанавливается, что оба объекта изоморфны некоторому третьему объекту. Для проверки неизоморфности двух объектов достаточно указать абстрактное свойство, которым обладает один из объектов, но не обладает другой. Скажем, стереографическая проекция устанавливает гомеоморфность сферы с выколотой точкой и плоскости. Но сфера не гомеоморфна плоскости, поскольку она компактна, а плоскость не компактна.

Идея предельного перехода витала в воздухе со времен Архимеда. Ньютон и Лейбниц положили ее в основу дифференциального и интегрального исчисления – в виде понятия бесконечно малой величины. Коши строил математический анализ на основе теории пределов. Однако строгое обоснование идея предельного перехода получила вместе со строгим определением *предела функции* (Больцано, Вейерштрасс).

Идея двойственности. Мы уже отмечали принцип двойственности для упорядоченных множеств. Аналогичный принцип имеет место и в проективной геометрии, и в математической логике. Затронем понятие двойственности между разнородными математическими объектами, обычно геометрической и алгебраической природы. *Двойственность* (дуализм) – это эквивалентность или антиэквивалентность категорий соответствующих объектов. Назовем классические *двойственности Понтрягина*, *Стоуна*, *Гельфанда*, *Хьюитта*. Существует много различных теорий двойственности в алгебраической геометрии.

Мы также затрагивали фундаментальные идеи ***интегрирования***, ***симметрии***, ***непрерывности*** и ***упорядоченности***.

Важную роль в математике играют *идеи аппроксимации* и *интерполяции*. Аппроксимация (приближение) означает замену одних математических объектов другими, более просто устроенными объектами, например приближение иррациональных чисел рациональными. *Теорема Вейерштрасса* утверждает, что непрерывные числовые функции на отрезке аппроксимируются многочленами. Интерполяция (восстановление) означает точное или приближенное нахождение функции по отдельным известным ее значениям. Вспомним *интерполяционный многочлен Лагранжа*. Эти идеи находят широкое применение в вычислительной математике и ее приложениях.

Наряду с понятиями и идеями математика имеет свои методы установления истины и способы конструирования нового знания. Отметим, что термины *понятие*, *идея*, *метод*, *конструкция* не имеют четких определений; о них спорят, высказывают различные подходы. Мы употребляем эти термины на уровне обычных представлений.

Методы в математике

Методы исследования в математике можно разделить на два класса: *логические* и сугубо *математические*. К логическим методам относятся метод от противного, контрапозиция, перебор случаев (полная индукция), исключение случаев, правило силлогизма, метод минимального контрпримера, метод математической индукции (с натяжкой) и т. д. Рассмотрим некоторые важнейшие общематематические методы. Заметим, что зачастую между методами и идеями существует неразрывная связь. Например, идея координатизации в аналитической геометрии и метод координат или *идея функционального представления* и функциональный метод.

Начнем с ***функционального метода***. Он состоит в представлении данного математического объекта в виде «функционального» объекта, его элементами служат функции, над которыми естественным образом выполняются некоторые операции. Особенно плодотворно функциональный метод применяется в современной алгебре и абстрактном функциональном анализе. Вспомним *представление Кэли* групп группами подстановок, *представление Стоуна* булевых алгебр и булевых колец (данное американским математиком Маршаллом Стоуном) и *преобразование Гельфанда* для коммутативных банаховых алгебр. В первом из этих функциональных представлений групповая операция интерпретируется как композиция подстановок, а в двух других представлениях элементы алгебры «изображаются» непрерывными отображениями на пространстве максимальных идеалов этой алгебры со значениями, соответственно, в дискретной двухэлементной цепи или в поле комплексных чисел, над которыми алгебраические операции выполняются поточечно.

В случае абстрактных колец (или полуколец) возможны различные их функциональные представления как колец сечений соответствующих пучков – *пучковые представления*. В кольце сечений, сопоставляемом исследуемому кольцу, операции выполняются поточечно. В каждой точке базисного пространства сечения принимают значения в соответствующем слое – кольце. Слои, вообще говоря, не изоморфны между собой, но для успешных применений они должны быть устроены проще исходного кольца.

В качестве примера возьмем кольцо $R = \mathbf{Z}_{30} = \{0, 1, 2, \ldots, 29\}$ классов вычетов по модулю 30. Оно имеет три максимальных идеала $A = \{0, 2, 4, \ldots, 28\}$, $B = \{0, 3, 6, \ldots, 27\}$ и $C = \{0, 5, 10, \ldots, 25\}$. Соответствующие факторкольца суть $R/A \equiv \{0, 1\}$, $R/B \equiv \{0, 1, 2\}$ и $R/C \equiv \{0, 1, 2, 3, 4\}$ – поля классов вычетов по модулю 2, 3 и 5. Каждый элемент из R представляется как отображение трехэлементного дискретного топологического пространства $\{A, B, C\}$ в накрывающее пространство пучка, являющееся дизъюнктным объединением указанных полей, то есть тройкой элементов этих полей. Так, элементу $23 \in R$ соответствует тройка $(1, 2, 3)$ прямого произведения полей $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_3$

и $\mathbf{Z}_5$. Получаем канонический гомоморфизм α кольца R в кольцо $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_5$ с нулевым ядром $A \cap B \cap C$. Значит, α различным элементам сопоставляет различные тройки. А поскольку кольца $\mathbf{Z}_{30}$ и $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_5$ содержат равное число элементов – по 30, то α осуществляет кольцевой изоморфизм: $\mathbf{Z}_{30} \cong \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_5$. Этот результат справедлив для любого конечного множества попарно взаимно простых натуральных чисел m, n, …, p: $\mathbf{Z}_{mn\ldots p} \cong \mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n \times \ \times \mathbf{Z}_p$. Заметим, что сформулированный факт может быть интерпретирован как китайская теорема об остатках.

Функциональный подход позволяет более наглядно представлять элементы абстрактного объекта и операции над ними. Применительно, скажем, к кольцам он обосновывает необходимость изучения колец сечений пучков колец, а также их прообраза – колец непрерывных функций на топологических пространствах со значениями в том или ином топологическом кольце.

Метод координат. Осуществляет идею координатизации путем введения координат на плоскости или в пространстве. При этом не только точки получают свои числовые координаты, но и кривые и поверхности приобретают алгебраическую форму – они описываются уравнениями. Приводя алгебраические уравнения к каноническому виду, математики классифицируют различные кривые и поверхности, получают новую информацию о них. В широком смысле метод координат заключается в построении функтора A из данной категории геометрических или топологических объектов X в некоторую категорию алгебраических объектов $A(X)$. Выше был указан функтор $X \to C(X)$. В алгебраической топологии основополагающее значение имеют *группы гомотопий* и *гомологий* топологических многообразий.

Теоретико-модельный метод. Успешно применяется в абстрактной алгебре, в теории числовых систем, к упорядоченным структурам, в основаниях геометрии, в *нестандартном анализе.* Применительно к современной алгебре теория моделей называется также *метаматематикой алгебры.* Огромный вклад в создание и развитие теории моделей внесли А. Тарский, А. И. Мальцев, А. Робинсон, П. С. Новиков, Ю. Л. Ершов. Заметим, что основатель *нестандартного анализа* Абрахам Робинсон формализовал и обосновал лейбницевское понятие *бесконечно малой* величины, доказав существование *неархимедовых расширений* поля действительных чисел.

При метаматематическом подходе происходит формальная аксиоматизация данного класса K алгебраических систем. Если удается аксиоматизировать этот класс посредством конечного числа аксиом, выраженных на *языке первого порядка* исчисления предикатов (когда кванторы применяются только к предметным переменным, но не к предикатам), то к изучению алгебраических систем из K можно применить готовый арсенал теории моделей. В 1936 году А. И. Мальцев доказал *принцип локализации* (равносильный теореме Геделя о полноте и *принципу компактности* элементарных классов структур): если каждое конечное подмножество множества высказываний (замкнутых предложений) обладает моделью, то обладает моделью и само множество высказываний. Этот принцип применялся к кольцам, полям, группам. Например, он дает следующую алгебраическую теорему: если каждое конечно порожденное подкольцо кольца вкладывается в тело, то и само кольцо вкладывается в тело.

Теперь укажем несколько более частных методов. *Алгоритмические методы* основаны на применении того или иного алгоритма. Вычислительные, или *численные, методы* связаны с приближенными вычислениями: методы хорд и касательных, метод Штурма (его открыл швейцарский математик Жан Штурм), метод половинного деления, *итерация* (последовательное повторное вычисление функции), методы аппроксимации и интерполяции и т. п. При решении геометрических задач весьма полезен *метод геометрических преобразований* (движения, аффинные и проективные преобразования). В геометрии и в топологии эффективно применяется *метод триангуляции* – разбиение поверхности на (криволинейные) треугольники или разбиение *полиэдра* на замкнутые *симплексы*.

Рассмотрим подробнее следующие два метода.

Диагональный канторовский метод. Применялся Кантором для доказательства несчетности числовых и функциональных множеств. Покажем его работу на примере доказательства несчетности числового промежутка $[0, 1)$. Предположим, что это множество счетно, т. е. его элементы можно занумеровать натуральными числами: $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$. Целая часть этих чисел равна 0. Пусть a_{ij} – j-й десятичный знак (после запятой) числа r_i. Расположим десятичные записи чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ друг под другом в виде бесконечной матрицы и возьмем ее диагональ

$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}, \ldots$. Рассмотрим число $r = 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$, в котором для любого натурального n цифра a_n отлична от a_{nn} и $a_1 \neq 9$. Тогда $0 \leq r < 1$ и r отлично от всех занумерованных чисел. Полученное противоречие и доказывает несчетность континуума. Заметим, что этим методом доказывается и существование алгоритмически невычислимой функции.

Метод нумерации в математической логике. Все слова логико-математического языка нумеруются натуральными числами. Тем самым любое рассуждение о формальной математической теории (метарассуждение) становится утверждением о натуральных числах – номерах формул, содержащихся в рассуждении. Впервые метод арифметизации применил Курт Гедель в 1931 году для доказательства неполноты формальной арифметики.

Некоторые математические конструкции

Математические конструкции позволяют получать новые математические объекты из данных. К наиболее часто применяемым конструкциям относятся ***прямое произведение*** и ***факторизация***.

Пусть (A_i) – семейство однотипных математических структур, занумерованных элементами непустого индексного множества I. Образуем множество $\prod A_i$ всевозможных отображений $f\colon I \to \cup A_i$, таких, что $f(i) \in A_i$ для всех $i \in I$. Оно называется прямым произведением данного семейства множеств и не пусто по аксиоме выбора. Элементы прямого произведения можно мыслить как «строки» (a_i) с i-й координатой $a_i \in A_i$ для любого индекса i. Отношения и операции на множестве $\prod A_i$ определяются покоординатно (поточечно). Например, если ω есть n-арная алгебраическая операция из сигнатуры данного типа математических структур, то ω будет алгебраической операцией и на прямом произведении $\prod A_i$. Именно, для любых $f_1, f_2, \ldots, f_n$ из $\prod A_i$ берем

$$\omega(f_1, f_2, \ldots, f_n)(i) = \omega(f_1(i), f_2(i), \ldots, f_n(i)) \text{ для всех } i \in I.$$

В результате получается математическая структура указанного типа, называемая *прямым произведением семейства структур* (A_i). Если индексное множество конечно или счетно, то элементами соответствующего прямого произведения фактически служат конечные или бесконечные последовательности элементов из данных структур. Обобщением прямого произведения систем является конструкция *фильтрованного произведения* (в частности, *ультрапроизведения*) однотипных систем.

Процесс факторизации выглядит следующим образом. Если на непустом множестве A задано *отношение эквивалентности* ρ, т. е. рефлексивное, симметричное и транзитивное бинарное отношение, то возникает соответствующее *разбиение* A на *классы* эквивалентности $[a]_\rho = \{x \in A: \quad x\rho a\}$, которые образуют новое множество $A/\rho = \{[a]: a \in A\}$, называемое *фактормножеством* множества A по эквивалентности ρ.

Пусть теперь A – алгебраическая система. Отношение эквивалентности ρ на множестве A называется *конгруэнцией* на алгебраической системе A, если ρ стабильно относительно алгебраических операций системы A. Рассмотрим произвольную конгруэнцию ρ на A. Фактормножество A/ρ легко превращается в алгебраическую систему, однотипную A: для каждой n-арной операции ω и любой n-ки элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ полагаем

$$\omega([a_1]_\rho, [a_2]_\rho, \ldots, [a_n]_\rho) = [\omega(a_1, a_2, \ldots, a_n)]_\rho.$$

На A/ρ можно определить и соответствующие отношения (предикаты). Тем самым получаем *факторсистему* A/ρ. Отображение π: $A \to A/\rho$, $\pi(a) = [a]_\rho$ для любого $a \in A$, является гомоморфизмом алгебраических систем. Для алгебраических систем верны теорема о гомоморфизме и теоремы об изоморфизме (см., например, [321]). Важным примером служит факторизация кольца $\mathbf{Z}$ целых чисел по отношению сравнимости по модулю n, в результате чего получается кольцо $\mathbf{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ классов вычетов по модулю n.

Операции взятия прямого произведения и факторизации плодотворны при построении основных числовых систем на основе «предыдущих» систем – целых чисел из натуральных, рациональных чисел из целых, действительных чисел из рациональных, комплексных чисел из действительных.

Конструкции прямого произведения и факторсистемы позволяют получить *общую структурную теорему* для алгебраических систем. Вот ее формулировка. Пусть даны алгебраическая система A и семейство (ρ_i) конгруэнций на ней, пересечение которых есть ρ. Тогда факторсистема A/ρ изоморфна подсистеме прямого произведения $\prod A/\rho_i$. Если ρ – отношение равенства, то сама система A изоморфна *подпрямому произведению* факторсистем A/ρ_i. На этом пути иногда удается доказать, что система A разлагается в прямое произведение своих факторсистем, устроенных проще A, как в рассмотренном выше случае кольца классов вычетов по модулю 30. Данная теорема успешно применяется в теориях групп, колец и модулей, полугрупп и решеток, при построении пучковых представлений полуколец.

В ряде разделов алгебры и топологии, в функциональном анализе и дифференциальной геометрии, в теории множеств и теории моделей существенную роль играет конструкция *пучка*, или *расслоения*. В теории модулей над фиксированным кольцом широко применяется конструкция *расширения*. *Модуль*, говоря нестрого, – это векторное пространство над кольцом. Модуль C называется расширением модуля A при помощи модуля B, если в C выделен подмодуль, изоморфный A, фактормодуль по которому изоморфен B. Классы эквивалентных расширений модуля A при помощи модуля B относительно сложения Бэра образуют абелеву группу, изучаемую в гомологической алгебре.

В любой категории большое значение имеет рассмотрение не только факторобъектов, но и *подобъектов*. Так, в структурной теории колец находят применение различные радикалы. Известен целый ряд радикалов колец, например первичный радикал и радикал Джекобсона. Построена и общая теория радикалов в категориях. В теории колец и модулей используются также конструкции *колец частных*, *локализации*, *кручения*. Отметим еще понятия *периодической части* и *делимой части* произвольной абелевой группы. К числу основных математических конструкций относятся и *матрицы*, и *многочлены*, и *формальные степенные ряды*.

Литература: [4, 7, 8, 11, 15, 22, 24, 43, 48, 52, 55. 60, 64, 66, 86, 96, 130, 139-144, 153, 162, 168, 169, 179-181, 197, 200, 202, 205, 214, 224, 229, 240, 241, 244, 247, 248, 251, 260, 262, 263, 272, 273, 279-281, 289, 292, 293, 298, 308, 311, 315, 316, 318, 321, 322, 325, 326, 328, 340-343, 348, 377, 381, 383, 387, 388, 390, 396, 405, 415, 424, 441, 447, 457, 458, 489, 491, 498, 510, 514, 518, 525, 532, 533, 539, 551, 552, 560, 568-570, 573, 575, 581-583, 586, 593, 599, 606, 607, 609, 612, 613, 615, 620, 622, 625, 630].

§ 16. Многоликий мир теорем

Знание – сила!
Роджер Бэкон

Наряду с понятиями, идеями, методами и конструкциями основным результатом математического познания являются *теоремы* – доказанные факты о математических объектах. Теоремы можно классифицировать и *по предмету* (алгебраические, теоретико-числовые, геометрические и т. п.), и *по методам доказательства* (как логическим, так и специальным). Попытаемся всмотреться в методологические «лики» теорем.

Условно математические объекты разделяются на *абстрактные* (скажем, группа) и *конкретные* (аддитивная группа целых чисел). В идеале цель изучения данного класса математических объектов – их *полное описание*, т.е. перечисление с точностью до изоморфизма конкретных представителей этого класса объектов: в каждом классе изоморфности выбирается по одному конкретному объекту. Такое описание сводится к хорошо известным простейшим математическим объектам, «склеиваемым» с помощью определенных математических конструкций, или к *полной системе инвариантов* (координатизация).

Например, любая конечная абелева группа изоморфна прямому произведению нескольких примарных циклических групп (их порядки суть степени простых чисел). Если каждой конечной абелевой группе сопоставить набор порядков ее примарных сомножителей, то получим полную систему инвариантов для конечных абелевых групп. Произвольный конечный набор степеней простых чисел служит системой инвариантов некоторой конечной абелевой группы. Две конечные абелевы группы изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые системы инвариантов.

Полностью описаны циклические группы, конечные поля, простые поля, конечные булевы алгебры, конечномерные векторные пространства над данным телом. Усилиями интернационального «коллектива» алгебраистов разных поколений получена *классификационная теорема* о строении конечных простых групп (ее формулировка и доказательство занимают около 15 тысяч страниц). Напомним, что группа называется *простой*, если она имеет ровно две (тривиальные) нормальные подгруппы. Простыми являются циклические группы простого порядка. Примером некоммутативной простой группы служит группа всех четных подстановок пятой степени; она содержит 60 элементов. Названные теоремы – это *теоремы о строении* абстрактных алгебраических структур. Теоремы о строении представляют собой вершину математического познания, совершенный тип структурных теорем.

Структурные теоремы зачастую описывают математические объекты из некоторого класса «по модулю» его специальных подклассов. Так, любая абелева группа есть расширение периодической абелевой группы при помощи абелевой группы без кручения. Абелева группа называется *периодической*, если все ее элементы имеют конечный порядок, и *группой без кручения*, если в ней только нейтральный элемент имеет конечный порядок. В широком смысле структурные теоремы являются *теоремами об абстрактных свойствах* математических объектов.

В противоположном направлении выступают *теоремы абстрактной характеризации* (аксиоматизации) конкретных (уникальных) математических объектов или их классов.

В качестве примера укажем *систему Пеано* натуральных чисел, определяемую как алгебра $\langle N, ', 1\rangle$ с одной унарной операцией $'$ (взятие последующего числа) и выделенным элементом 1, удовлетворяющим трем естественным аксиомам: 1) число 1 не имеет «предшествующего» элемента; 2) операция $'$ инъективна; 3) аксиома индукции, утверждающая отсутствие собственных подалгебр в системе Пеано. Заметим, что в системе Пеано можно сразу определить отношение порядка, превращающее ее во вполне упорядоченное множество. Это позволяет доказать теорему об индуктивном построении функций на натуральном ряде, после чего вводятся операции сложения, умножения и возведения в степень над натуральными числами, доказывается изоморфность любых двух систем Пеано (категоричность содержательной аксиоматики Пеано).

Назовем также аксиоматизацию Гильберта евклидовой геометрии и *теорему Фробениуса* о строении ассоциативных конечномерных действительных алгебр с делением. Последняя показывает уникальность поля комплексных чисел и тела кватернионов «по модулю» системы действительных чисел, которая характеризуется как непрерывное линейно упорядоченное поле. Абстрактно *булеаны* – это полные атомные булевы алгебры (*теорема Стоуна*). Напомним, булеаном называется булева алгебра всех подмножеств некоторого множества (с операциями объединения, пересечения и дополнения).

Теоремы абстрактной характеризации входят в список *теорем характеризации* – теорем о характеристических свойствах объектов, необходимых и достаточных условиях, критериях. Скажем, для линейного оператора, действующего в конечномерном векторном пространстве, равносильны свойства инъективности, сюръективности и биективности. Каждое из этих свойств является характеристическим для того, чтобы данный линейный оператор был изоморфизмом. В свою очередь, теоремы характеризации входят в состав теорем об абстрактных свойствах математических объектов.

Далее, *теоремы существования* и *теоремы единственности* являются проявлениями *теорем множественности* (об объеме понятий). Теорема существования математических объектов с заданными свойствами утверждает существование хотя бы одного такого объекта. Теорема единственности означает, что существует не более одного объекта, удовлетворяющего определенным условиям: либо существует один-единственный с точностью до изоморфизма объект, либо подобных объектов нет (они заданы противоречивым множеством условий). Вспомним *теоремы существования и единственности* основных числовых систем, решения дифференциального уравнения, пополнения метрического пространства.

К теоремам существования относятся *теоремы чистого существования* (уже упоминавшееся доказательство Кантора существования трансцендентных чисел без конкретного их предъявления) и *теоремы о построении* моделей (конструктивное существование), примеров и контрпримеров (существование некоммутативного тела, неевклидовых геометрий).

Теоремы множественности часто указывают мощность множества математических объектов данного рода, рассматриваемых с точностью до изоморфизма. Назовем результаты о счетности множества конечных групп, континуальности булеана счетного множества, числе n-элементных упорядоченных множеств.

Разнообразные *теоремы координатизации* сопоставляют одним математическим объектам X другие $A(X)$; при этом исходные объекты X обычно имеют геометрическую или топологическую природу, а производные объекты $A(X)$ – арифметическую или алгебраическую природу. Данное соответствие должно быть *инвариантным*: изоморфным объектам X и Y отвечают изоморфные объекты $A(X)$ и $A(Y)$ (*теоремы инвариантности*). Примерами могут служить теория размерности и теория гомологий топологических пространств.

На следующем этапе исследований могут появиться *теоремы определяемости* и *теоремы функториальности*. Теорема функториальности устанавливает, что соответствие $X \to A(X)$ является функтором из категории исходных объектов в категорию производных объектов. Теорема определяемости объектов из данного класса K утверждает, что изоморфность объектов $A(X)$ и $A(Y)$ влечет изоморфность объектов X и Y из класса K.

Теоремы определяемости доказываются одним из трех способов: либо по данному изоморфизму $A(X) \cong A(Y)$ непосредственно строится изоморфизм $X \cong Y$, зачастую индуцирующий данный изоморфизм; либо по производному объекту $A(X)$ восстанавливается сам объект X (с точностью до изоморфизма); либо дело сводится к уже полученным результатам (через третьи объекты, известные классификации). Первыми двумя способами доказывается определяемость любого тихоновского пространства X топологическим кольцом $Cp(X)$ всех непрерывных действительнозначных функций на X с топологией поточечной сходимости (*теорема Нагаты*).

Более слабыми, но не менее важными и интересными, чем теоремы определяемости, являются *теоремы о сохранении* (*переносе*) *свойств* исходных объектов при изоморфизмах соответствующих производных объектов. Для примера возьмем тихоновские пространства. Пространства X и Y называются *t-эквивалентными*, если топологические пространства $Cp(X)$ и $Cp(Y)$ гомеоморфны, и *l-эквивалентными*, если топологические векторные пространства $Cp(X)$ и $Cp(Y)$ изоморфны (линейно гомеоморфны). Оказывается,

t-эквивалентность сохраняет свойство дискретности пространств: если X дискретно и Y t-эквивалентно ему, то и Y дискретно. Свойства локальной компактности и метризуемости не сохраняются при l-эквивалентности пространств.

К теоремам о сохранении свойств примыкают *теоремы о связи свойств* исходных и производных математических объектов. Например, конечность тихоновского пространства X равносильна нетеровости кольца непрерывных функций $C(X)$. *Нетеровость* кольца означает, что в нем не существует бесконечных строго возрастающих цепей идеалов.

Вершиной теорем координатизации служат *теоремы двойственности* – эквивалентности категории исходных объектов и категории производных объектов. Мы уже указывали двойственности Понтрягина, Стоуна, Гельфанда, Хьюитта, а также двойственности между конечными упорядоченными множествами, конечными дистрибутивными решетками и конечными T_0-пространствами. Отметим еще двойственность Нагаты между категорией всех тихоновских пространств X и их непрерывных отображений и категорией топологических колец вида $Cp(X)$ с непрерывными гомоморфизмами, сохраняющими 1.

Существуют различные теоремы представления абстрактных математических объектов в конкретных математических объектах: числовые, матричные, функциональные. В предыдущем параграфе мы отмечали значение пучковых представлений для колец и полуколец. Наряду с классическими теорией Стоуна и преобразованием Гельфанда имеются пучковые представления Гротендика, Даунса-Гоффмана, Ламбека, Малви, Голана. Заметим, что теоремы координатизации и теоремы представления иногда приводят к теоремам о строении (например, в случае конечных булевых алгебр).

Существенную роль в развитии математики играют *теоремы изоморфности* и, особенно, разнообразные *теоремы эквивалентности.* В первых из них решаются вопросы об условиях изоморфности математических объектов. Теоремы эквивалентности дают более грубую, нежели изоморфизм, классификацию математических объектов данного класса по некоторой системе инвариантов. Их можно считать разновидностью теорем координатизации. Теоремы эквивалентности часто встречаются в теории множеств, в общей алгебре и топологии, в алгебраической и дифференциальной геометрии (равномощность, Морита-эквивалентность, t-эквивалентность и l-эквивалентность, гомотопическая эквивалентность, бирациональная эквивалентность и т. д.).

Метаматематические теоремы содержат результаты о свойствах формальных аксиоматических теорий, описывающих математические структуры. Это теоремы о независимости аксиом, о выразимости математических теорий на том или ином логико-математическом языке (скажем, на языке логики первого порядка), о конечной аксиоматизируемости, категоричности, полноте и разрешимости формальных математических теорий. Они изучаются в теории моделей.

Поясним указанные термины. Понятие периодической абелевой группы не выразимо в логике первого порядка. Теории полных абелевых групп и абелевых групп без кручения аксиоматизируемы (выразимы) в логике первого порядка, но не являются конечно аксиоматизируемыми (не могут быть представлены конечным множеством аксиом, записанным на языке первого порядка). В строгом смысле категоричность означает изоморфизм любых двух моделей формальной теории. Но, по *теореме Левенгейма-Сколема*, всякая теория первого порядка, имеющая бесконечную модель (непротиворечивая), обладает и моделью любой бесконечной мощности, в частности счетной моделью. Поэтому всякая формализация теории действительных чисел в логике первого порядка не категорична: она имеет стандартную несчетную и счетную модели, кроме того, существует нестандартное расширение стандартной модели действительных чисел. Аналогично обстоит дело и с формальной арифметикой. Следовательно, имеет смысл говорить только о *категоричности в данной мощности* – изоморфности любых моделей теории, имеющих эту мощность.

Полнота непротиворечивой формальной теории означает, что для любого ее высказывания (т. е. замкнутой формулы) либо само высказывание, либо его отрицание является теоремой данной теории. Формальная теория называется *разрешимой*, если имеется алгоритм, выясняющий, является ли произвольное высказывание теории теоремой. Примером разрешимой теории служит исчисление высказываний. Примеры полных теорий: плотный линейный порядок без концов;

безатомные булевы алгебры; алгебраически замкнутые поля фиксированной характеристики. Эти результаты основаны на следующем *признаке полноты Лося-Воота*: если формальная теория не имеет конечных моделей и категорична в некоторой бесконечной мощности, то она полна.

Теоремами являются и математически оформленные *законы логики* (тавтологии, общезначимые формулы, правила вывода). Можно продолжить этот список более специальными видами теорем, скажем, *теоремами о вложении* и *расширении* однотипных математических структур.

Литература: [55, 62, 96, 102, 153, 197, 244, 383, 427, 428, 447, 458, 514, 541, 554].

§ 17. Типы математического мышления

Число, место и комбинация –
три взаимно перекрещивающиеся,
но отличные сферы мышления,
к которым можно отнести
все математические идеи.
Джеймс Сильвестр

Математикам хорошо известны общие типы мышления: логический и интуитивный, алгебраический и геометрический, аналитический и синтетический. Не вызывает сомнений существование комбинаторного, вычислительно-алгоритмического, топологического и порядкового стилей математического мышления.

В математике сосуществуют два ярко выраженных типа мышления – алгебраический и топологический (геометрический). Алгебраический тип мышления соответствует числовой, вычислительной, алгоритмической линии развития математической науки. Он ближе к формальной логике, аналитике и аксиоматике, чем к интуиции, ближе к количественному подходу в сравнении с топологическим, синтетическим направлением. Наоборот, топологический тип мышления ближе к образному мышлению, пространственным представлениям, наглядной интуиции. Как выяснили физиологи, за логическое, понятийное мышление «отвечает» левое полушарие головного мозга человека, а за интуитивное, образное мышление – правое полушарие. Логическое – это вербальное, интуитивное – визуальное. Само логическое мышление может носить как классический, так и конструктивистский характер.

Математические «пристрастия» мышления человека можно классифицировать также согласно архитектуре самой математики (см. § 14). Тогда наряду с алгебраическим и топологическим типами мышления следует выделить и порядковый тип мышления. Этот тип мышления отчетливо проявляется в теоретико-решеточном подходе к изучению математических объектов. Свойства математического объекта описываются в терминах решетки его подобъектов или решетки его естественных разбиений (конгруэнций). Такой подход особенно распространен и плодотворен в современной алгебре. Скажем, группы изучаются с помощью решетки своих подгрупп или решетки нормальных подгрупп.

Нужно отметить, что значимыми предпосылками формирования индивидуального типа (стиля) мышления математика выступают априорности, неявное знание и его личный математический опыт.

Остановимся на двух принципиально различных типах математического видения мира – классическом и неклассическом. Все досягаемое и наблюдаемое человеком, т. е. так или иначе ощущаемое Бытие и познаваемое сущее, будем называть Универсумом. Универсум содержит всю наличную действительность: физическую реальность (природа); человеческое общество (социум); человеческое сознание, включая идеальный мир знания и веру. Вопрос в том, является ли этот Универсум вполне определенной объективной данностью, данностью познаваемой и достаточно адекватно описываемой, или не является таковой. Классический подход подразумевает положительный ответ на него. Универсум – это мир, живущий и изменяющийся (развивающийся или деградирующий) по непреложным законам, которые должна открывать наука. Метафизически осмысленная и синтезированная совокупность таких законов превращается в научное мировоззрение, основные положения которого составляют научную картину Универсума. И Универсум как объект человеческого познания не допускает произвола и плюрализма мнений. При классическом видении мира Универсум возвышается, а субъект умаляется.

Неклассическое (тем более постнеклассическое) видение мира фактически пренебрегает «самостью» Универсума, делая его заложником «органов» познания субъекта. Субъект, то или иное сообщество людей конструирует и конституирует свой Универсум или его фрагменты. Упор делается на процедурах – программах и алгоритмах – познания. Получаются разные «миры», пригодные к употреблению в некоторых ограниченных ситуациях. Несколько огрубляя положение дел, можно сказать, что неклассический подход абсолютизирует субъективную сторону познания, а классический подход абсолютизирует объективную познаваемость Универсума.

Являются ли пространство, время, логика реальными (бытийными или идеальными) атрибутами Универсума? Классическая парадигма опирается на реалистические представления, согласно которым мы живем в однородном трехмерном пространстве, движемся в однонаправленном потоке событий, мыслим понятиями обычной двузначной логики. Геометрия нашего пространства евклидова, логика аристотелева, моделью времени служит числовая прямая.

Но в XIX веке были открыты неевклидовы геометрии, в XX веке – неклассические логики. Созданы различные теории времени. Если пространство, время и логика суть реальные атрибуты Универсума, то какова их подлинная «математика»? Неклассическая парадигма отрицает «наивный классицизм», приписывая пространству, времени и логике либо неклассические математические свойства, диктуемые успешностью их применений (скажем, в общей теории относительности и квантовой механике), либо плюралистическую неопределенность, либо роль удобных соглашений (конвенций), не имеющих онтологического статуса. Нам ближе классический образ Универсума, хорошо согласующийся с повседневной практикой, здравым смыслом и простотой восприятия.

В подтверждение нашей точки зрения приведем размышления А. Ю. Грязнова – автора содержательной статьи «Абсолютное пространство как идея чистого разума» [164]. Он отмечает, что И. Кант «интерпретирует созерцаемое пространство как априорную форму чувственности познающего объекта, а абсолютное пространство – как связанную с этой формой идею чистого разума, выступающую в качестве регулятивного принципа расширения в бесконечность чистого пространственного созерцания». Пространство Канта метрически совпадает с абсолютным пространством Ньютона. А геометрия воспринимаемых в своей протяженности вещей является евклидовой. Кант считает, что евклидова геометрия внутренне присуща разумным существам.

Развивая позиции Канта, А. Ю. Грязнов пишет, «что нельзя построить неевклидову геометрию, не используя евклидову интуицию пространства (как априорную форму чувственности), которая работает не только при построении геометрии Евклида, но и при построении неевклидовых геометрий». И далее: «Наивно полагать, что учение Канта об априорности наших представлений о пространстве и времени однозначно опровергаются развитием математики и физики в XIX-XX вв.» [164, с. 145].

Мы не будем затрагивать вопросы о методах и формах математического мышления. О них неплохо сказано в многочисленной методико-математической литературе. Отсылаем читателя к этим источникам. Понятию стиля математического мышления посвящен отдельный сборник работ [517].

Литература: [41, 44, 45, 110, 111, 155-157, 164, 195, 218, 266-268, 300, 314, 351-355, 376, 392, 399, 402, 418, 421, 427-429, 439, 440, 455,479-483, 487, 493, 500, 505, 507, 517, 520-522, 528, 529, 536, 576, 577, 589, 604, 605, 611, 618, 625, 626, 633].

Глава 4. Метафизика математики

Между духом и материей
посредничает математика.
Хуго Щтейнхаус

Вступление

Метафизика математики понимается как та часть философии науки и теории познания, в которой исследуются и решаются вопросы природы и статуса, гносеологических истоков, оснований и методологии математики.

Поскольку в переводе с греческого математика – это «учение», «наука», «учусь через размышление», то математика сама метафизична. Как и метафизика, математика есть теоретическое умозрение, и ее границы – границы этого умозрения [336, с. 75].

Аристотель в трактате «О душе» [15] различает физический, математический и метафизический виды познания. По Аристотелю, физика изучает состояния физических тел (материю сущего), математика изучает абстрактные свойства сущего (неотделимые от тел), а метафизика изучает сущее как таковое (абстрагированное и отделенное от любой телесности). В соответствии с этим можно выделить три типа абстракций:

1) минимальная качественная абстракция физической материи;

2) промежуточная количественная абстракция в математике;

3) максимальная абстракция метафизического сущего как такового.

И мы видим, что математика и метафизика изучают *абстрактные формы*, в то время как физика исследует *конкретную материю*.

В [250] утверждается, что отличие математики от метафизики состоит в том, что первая рассматривает отвлеченные, но неотделимые от тел свойства – *абстрактное* в собственном смысле слова, а вторая рассматривает отделенное от всего телесного сущее, т. е. *идеальное*.

Не будем спорить с тем, что понятие идеального является универсалией более высокого логико-категориального уровня по сравнению с понятием абстрактного. Казалось бы, также благодаря этому, метафизика и для математики служит метанаукой. Однако математика сама изучает идеальное – идеальные математические объекты, не только абстрагированные от материи, но и максимально отделенные от нее. Тем самым математика и метафизика, во-первых, изучают не просто абстрактные, но идеальные формы. Это роднит математику с метафизикой. Во-вторых, если математика имеет дело только с некоторыми идеальными сущностями (универсалиями количества, формы, структуры), то метафизика охватывает «своим взором» вообще все идеальные категории, все сущее. Математика, другие науки и наука в целом сами являются идеальными областями – конкретными объектами для метафизики. Именно поэтому метафизика по отношению к математике и выступает в качестве философской метанауки.

§ 18. Истина и математика

Самое непостижимое в этом мире –
то, что он постижим.
Альберт Эйнштейн

Геометрия есть
познание всего сущего.
Платон

Существуют представления, согласно которым математика не является ни истинной, ни ложной. Так происходит, например, при понимании математики как идеальной техники, создающей свои аппараты. Бессмысленно говорить об истинности или ложности того или иного математического аппарата: «Аппарат либо работает, либо не работает, а если работает, то либо продуктивно, либо плохо» [5]. Можно говорить лишь о правильности конкретных применений математики. Математика не дает истинных знаний, поскольку математические понятия, апараты и схемы нейтральны по отношению к истине.

Конечно, сами по себе понятия числа или группы не истинны и не ложны. Понятие истины касается лишь утверждений о математических объектах, высказываний об их свойствах и отношениях, связях с другими объектами. Математические истины делятся на априорные и доказательные. К априорным истинам можно отнести аподиктические очевидности, а к доказательным – теоремы.

Устоявшиеся и перепроверенные математические факты, такие, как теорема Евклида о бесконечности множества простых чисел, теорема Гаусса об алгебраической замкнутости поля комплексных чисел, теорема Кантора о несчетности множества действительных чисел или теорема Геделя о неполноте, представляют собой неопровержимые и непреложные вечные истины. В отличие от релятивистки понимаемых естественных наук справедливость теорем в математике не зависит от метода их обоснования. Большинство теорем (особенно ключевых) может быть доказано принципиально разными способами. Скажем, упомянутые теоремы Евклида и Гаусса имеют десятки различных доказательств.

Некоторые философы и математики утверждают, что все математические истины относительны. Да, при желании можно встать на ту точку зрения, что в строгом смысле нет абсолютно доказуемых истин, что любая научная истина, так или иначе, относительна.

Приблизительность математики отмечали Рассел и Вейль. Но даже Вейль, склонный к интуитивизму, признавал объективный характер математических теорем. В чем же заключается относительность и приблизительность математики?

Относительность знания означает его субъективность, ограниченность и условность. Полностью, на сто процентов избавиться от антропологического субъективизма невозможно. Никакая научная теория не является самодостаточной, ее функционирование ограничено рядом внесистемных предположений. Так, содержательная аксиоматика Пеано, рассматриваемая в контексте теории множеств, категорична, а формальная арифметика, использующая только язык первого порядка, имеет модели любой бесконечной мощности. Наконец, теоремы имеют вид импликации, когда из данных допущений, то есть условия теоремы выводится ее заключение. В этом смысле математическая истина условна. Только законы классической логики могут претендовать на абсолютную истинность. Математика же была, есть и будет наиболее доказательной наукой, дающей надежные и достоверные знания о структуре сущего.

Приблизительный характер математики в приложениях и вычислениях совершенно понятен. Математические модели более или менее адекватны исследуемому объекту, допускают разнообразные ответвления и уточнения, учитывающие все новые параметры. Нельзя говорить об абсолютной точности математических методов и моделей в применении к реальному миру. Численные результаты вычислений, используемых в практической деятельности, выражаются конечным образом – рациональными числами. На практике человек всегда имеет дело с десятичными приближениями и приближенными вычислениями. Мы не можем сразу предоставить число π со всеми его десятичными знаками, хотя оно математически строго определено. Но заметим, что создана компьютерная программа, позволяющая вычислять первый триллион десятичных знаков числа π.

Чистая математика приближенна в следующем смысле. Многие математические результаты «улучшаемы», то есть могут быть обобщены, упрощены, усилены, уточнены в дальнейшей математической деятельности. И это естественный процесс развития математики по пути красоты и целесообразности.

Отмеченные выше относительность, приблизительность и условность математических знаний не умаляют истинности математических теорем. Математическая истина убеждает, она принципиально и практически проверяема и перепроверяема сколько угодно раз. Истинность, достоверность и надежность математических фактов и методов подтверждается универсальностью и эффективностью приложений математики.

Применимость и эффективность математики

Применимость математики к окружающему миру означает познаваемость мира посредством математики. Проблема применимости математики имеет два аспекта – философский (теоретический) и прагматический (практический). *Философская проблема применимости математики* необходимо носит метафизический и объективистский характер. Это проблема о том, *почему* математика применима к реальности в принципе. Ее решение принадлежит эпистемологии и опирается только на те или иные фундаментальные онтологические принципы, на феноменологию, природу и специфику самой математики. Метафизическое решение проблемы применимости математики не зависит ни от истории математики, ни от математической деятельности человека.

Прагматическая проблема применимости математики неразрывно связана с человеческой деятельностью и, стало быть, имеет субъективистский характер. Она формулируется в следующем виде: *как, каким конкретно образом* математика приложима к действительности? Решение прагматической проблемы применимости математики относится к истории и методологии математики, методике ее приложений, отчасти и к гносеологии. Здесь важнейшую роль играет познающий субъект. Эту проблему можно расчленить на следующие вопросы: генезис математики в человеческом обществе; познание самой математики; математическое описание действительности.

Эффективность приложений математики трактуется как адекватность, как соответствие математических моделей описываемым ими реальным ситуациям. Теоретически проблема эффективности вторична по отношению к проблеме применимости. И она полностью решается в ходе решения философской и прагматической проблем применимости математики.

Из человеческой практики известно, что математика стала сразу достаточно успешно применяться в исследовании и описании самых разнообразных явлений окружающего мира. Почему такая применимость оказывается принципиально возможной? Почему мир математически познаваем? Простое решение данного вопроса, состоящее в том, что математика сама произошла из опыта, односторонне и нас не может удовлетворить.

Мы находим ответ на этот фундаментальный вопрос в метафизике. Будем опираться на следующие положения.

Во-первых, мы исходим из *принципа единства мира*, утверждающего, в частности, что нет непроницаемых границ между субъектом, объектом и знанием об объекте. Этот великий принцип берется нами в качестве главного постулата. Никакое обосновательное рассуждение невозможно без принятия некоторых допущений (первичных понятий, аксиом, очевидностей). На наш взгляд, такой философской аксиомой и служит принцип единства мира. Изгонять его на самый верх дедуктивной лестницы недальновидно и даже самонадеянно. Принципиальное единство мира – базовое положение, причем понятное, достаточно очевидное и реалистичное. Бытие (материи, общества, человека) и сознание (индивидуальное, общечеловеческое, любое) подчиняются одним и тем же всеобщим законам Мироздания. Законы диалектики тому пример. Заметим, что идея всеединства, т. е. единой основы и естественной взаимосвязи человеческого сознания (идеального) и абсолютного бытия (реального), является базовым элементом метафизики и гносеологии С. Л. Франкла [571].

Во-вторых, математика – наука о структуре сущего. Все имеет свою структуру. Структура – это, прежде всего, мера и форма. Измеряемость и измеримость связаны с *идеей координатизации*, относящейся к категории количества. Объектом изучения математики служат основополагающие философские категории количества и формы и самые разнообразные их проявления, взятые в наиболее общем и чистом виде. Там, где структура объекта выявлена, объект «измеряем», то есть могут быть получены его количественные и «формовые» характеристики, позволяющие включить объект в определенную систему «координат», – там можно (и нужно) рассчитывать на применение к нему математики. Заметим, что общей теории измерений, отражающей многообразные аспекты количественного метода в науке, посвящена монография К. Берки [37]. Обоснованием теории измерений занимался А. Лебег [302]. Р. Фейнман писал [559]: «Угадывание уравнения, по-видимому, очень хороший способ открывать новые законы. Это лишний раз доказывает, что математика дает глубокое описание природы, а всякая попытка выразить природу, опираясь на философские принципы или интуитивные механические аналогии, не приводит к серьезным результатам».

В-третьих, математика исследует объекты как «вещи в себе», анализирует проявления объекта, явление вещи, а не их изменчивое содержание и неуловимую сущность. Математическое описание объекта – это его видение сквозь призму «внешних» категорий формы и количества, улавливание поведения вещи по кибернетическому методу входа-выхода. Это рациональный, реалистичный и адекватный подход к познанию действительности, пресекающий возможные спекуляции по поводу окончательного понимания сути вещей.

Тем самым мы приходим к *принципу математизации знания*, который и означает безусловную применимость математики к точному знанию. Точное знание есть знание вполне определенное и общезначимое, допускающее обоснование, т. е. это истинное знание. Математика выступает как критерий научности: область знания научна, если к ней применима математика.

Математика обладает свойством общезначимости своего языка, что в целом присуще и всем точным наукам. Но математикам легче понимать друг друга. Благодаря логике люди разных национальностей также могут общаться. Классическая двузначная логика, как и другие точные ее разновидности, – составная часть математики. Представляется, что за счет универсального характера математических абстракций и другие разумные существа способны найти общий язык между собой – по крайней мере, математический. Разные народы Земли имеют в принципе одинаковую математику (в настоящее время унифицированную). А разумные существа разных миров должны иметь изоморфные математики, возможная главная проблема здесь – идентификация различных символик.

Слова «реальность», «действительность», «мир», «природа» мы употребляем в качестве синонимов. Они как бы подчеркивают свою смысловую объективность и материальность и чисто теоретически противопоставляются продуктам человеческого разума как чему-то субъективному, идеальному точно так же, как объект противоположен субъекту. На самом же деле есть один единый Мир, вмещающий все и вся и созвучный Бытию. Человек познает мир, в том числе себя и свое мышление. Мы можем говорить о знании, содержащемся в человеческом сознании, и мировой информации, заключенной во всеобщем Разуме. Наше знание объективнее нас, поскольку сопряжено с объективной реальностью.

С. Р. Когаловский видит причину применимости математики в следующем: «Фундаментальные математические концепции являются “отражениями”, моделями не самого “внешнего мира”, а способов его “отражения” (являющихся продуктами математической культуры), и в этом объяснение их универсальной приложимости» [267].

В своей статье [426], как раз посвященной проблеме применимости математики, профессор Х. Позер, анализируя математику и как абстракцию, и как конструкцию, останавливается на синтезе подходов Х. Райхенбаха и Л. Витгенштейна к правилам и действиям, определяющим методологию применимости математики. Такое решение проблемы является прагматическим.

Понимание математики как конструкции означает, что математические результаты (понятия, идеи, факты, построения) есть продукт интеллектуальной деятельности человеческого мышления, довольно свободно и произвольно выстраивающего математическую реальность. Думается, однако, что математики открывают математические абстракции, а не изобретают или придумывают их. Проведем аналогию с конструктором, собираемым ребенком. В конструкторе имеется много деталей, из которых можно собрать разные предметы. Обычно предлагаются и образцы для моделей. Можно собирать и другие предметы, и возможна своя последовательность сборки одного и того же предмета. Здесь нет жесткой детерминированности. В математике же собирается один канонический образец, но это может быть сделано по-разному.

Понятия и теоремы математики квазиэмпиричны: для математика число пять не менее объективно и реалистично, чем пять пальцев на руке, а понятие прямой линии не менее ощутимо, чем край стола или отвес. Более глубокий ум способен быстрее, мощнее и красивее провести доказательство той или иной теоремы. Но способ доказательства так же, как сама теорема обладает неким бытием, извлекаемым пытливым умом и предлагаемым вниманию коллег. Глубина разума отдельного человека определяется его познавательными качествами. Решение конкретной математической задачи происходит в процессе целенаправленного погружения в контекст задачи, конструктивной работы мышления. Эта конструктивная работа есть не что иное как сократовский диалог (называемый майевтикой) ума с самим собой. Череда вопросов и ответов на них позволяет выстраивать цепочку атомарных рассуждений, складывающихся в доказательство теоремы или в решение задачи.

Так схематично выглядит сознательный и целенаправленный математический процесс. Существует и подсознательное, интуитивное схватывание истины. Имеется множество свидетельств научных прозрений и аналогичных актов художественного творчества. В чем здесь дело? Почти мистический ответ дал в свое время Платон. Как известно, он выдвинул теорию «припоминания идей». Сегодня, т. е. на современном языке, ее можно сформулировать следующим образом. При напряженном размышлении подготовленного ума над проблемой происходит некий «прострел сознания», ясно и ярко высвечивающий решение вопроса. Этот прострел сознания и есть платоновское припоминание идей. Его можно интерпретировать и как ретрансляцию ответа мозгом при его настройке на соответствующую волну, т. е. при концентрации мыслей познающего субъекта. И это не миф и не мистика. Академик Н. П. Бехтерева, всю свою жизнь посвятившая исследованию человеческого мозга, не раз высказывала взгляды о ретранслирующей функции мозга. Мозг не создает мысли, он только инструмент индивидуального мышления, вплетенного во вселенскую паутину Информации (но не в Интернет). Синергетики (о синергетике речь пойдет ниже) рассматривают творческий процесс как динамическую систему, в которой озарение происходит на неустойчивой стадии ее развития как закономерный скачок, соответствующий точке бифуркации системы.

Напомним еще, что Платон [423] называл математику «срединной наукой», связывающей Мир вещей с Миром идей. Мы можем назвать это связью между материей и сознанием, субъектом и объектом, человеческим разумом и реальностью. В силу принципиального единства мира такая связь должна существовать. И именно математика выступает посредницей взаимосвязи человеческого разума и объективной реальности, которая есть все Бытие. Тем самым реальность познаваема с помощью математики.

Любая математическая конструкция, будь то новое понятие, объект или метод, есть факт, найденный (обнаруженный, открытый) математиком. И если решаемая задача четко сформулирована и важна, то этот факт будет переоткрыт и станет общеизвестным и общезначимым. В данной трактовке математические конструкции мало отличаются от математических абстракций, относящихся к кругу платоновских идей-эйдосов.

Материальный мир (реальность) и идеальный мир (сознание) суть две взаимодействующие стороны единого Мира, общего Бытия. Поэтому нет ничего удивительного в том, что реальные законы природы и их абстракты, схваченные и выраженные в понятиях и моделях, соответствуют друг другу. В силу универсальной структурности математики математические схемы принципиально совместимы с действительностью, допускают определенное наложение на реальные ситуации. А это позволяет математике более или менее адекватно и точно описывать реальность.

В Мироздании – как в сознании, так и в физическом мире – существуют необходимые и случайные явления, линейные и нелинейные процессы, сосуществуют причинность (детерминизм), относительность (релятивизм) и непредсказуемость, порядок и хаос, устойчивость и неустойчивость, обратимость и необратимость и т. д. В физическом мире – реальные вещи и явления, а в сознании – соответствующие категории и идеальные сущности. С точки зрения философии их сопоставлением и взаимосвязями занимается теория познания.

Мы далеки от конвенционализма, утверждающего, в частности, возможность и наличие общих понятий, не имеющих аналогов в Бытии. Например, существует категория времени, а в реальности времени якобы не предусмотрено. Такие понятия-соглашения по необходимости приобретают чисто субъективный и условный характер, поддерживают какую-нибудь научную теорию, удобную ее приверженцам, но не отображающую никакую реальность. Как было отмечено выше, все универсалии имеют свою определенную онтологию. В этом вопросе большинство математиков являются приверженцами платоновского реализма. Фундаменталистское направление в философии науки также отрицает концептуализм, поскольку за понятием видит не только обозначение общего свойства некоторого класса вещей, а признает стоящую за ними некую сущность, выражаемую данным понятием.

В голове человека нет ничего такого, что до этого нигде еще не было. Имеется лишь некая способность к воображению, связанному с субъективным мироощущением. Например, в свое время кому-то представился образ сфинкса, и древние египтяне изваяли его статую в Гизе. Поэтому у различных народов и возможны разные культуры. В детском конструкторе, коль известны части, в перспективе, в возможности известны и все вещи, которые из них можно собрать. Все возможное в Мире есть сущее, или существует уже в зародыше и способно к становлению, или присутствует в самой возможности. Человеческий мозг, скорее всего, есть ретранслятор некоторых информационно-энергетических потоков, улавливатель «тонкой материи». С другой стороны, вполне возможно, что в Природе есть нечто принципиально недоступное человеческому познанию.

Казалось бы, наука открывает неизведанное, техника изобретает несуществующее, искусство творит воображаемое, религия дает откровение. Здесь идет речь о научной, инженерно-конструкторской, художественной и религиозной формах сознания и познания мира. Да, наука открывает все новые истины, а религия неотделима от веры. Для многих ученых союз науки и религии был плодотворным. Вера задавала цели и подвигала науку к ним [336, с. 168]. Но что значит изобрести еще никогда не существовавшее и сотворить совершенно новый художественный образ?

Свой философский подход к обоснованию надежности и достоверности математических истин развивает В. Я. Перминов в [412]. Он исходит из априорного характера математических абстракций и праксеологического принципа, означающего, в частности, что «знание имеет только одно назначение – практическое» [336, с. 31].

Литература: [5, 37, 48, 60, 76, 78, 124, 213, 258, 259, 267, 302, 336, 337, 423, 426, 469, 571].

§ 19. Эстетика математики

Математика есть
прообраз красоты мира.
Вернер Гейзенберг

Многие мыслители восхищались красотой и совершенством математики. Триаду учительского девиза «Сеять разумное, доброе, вечное!» можно выразить категориями *истина*, *добро* и *красота*. Как понятия человеческого сознания они несут на себе определенный отпечаток относительности и субъективизма. Но мало кто сомневается, что это фундаментальные универсалии, отражающие основные лики Творца. Стало быть, *истина*, *добро* и *красота* имеют абсолютный и объективный характер и тесно взаимосвязаны между собой. Заметим, что постмодернистская философия отвергает эту триаду.

Поиском истины заняты *наука* и *искусство*, но делают это по-разному. Научное познание опирается на логику, факты и дает точное знание, а художественное познание есть сфера *прекрасного*, ассоциируется с интуицией и образным мышлением. Категории *добра* и *зла* относятся к *этике*, воплощаются в понятиях морали, совести, справедливости, права. Проявления истины и красоты этичны и целесообразны.

Современная научная картина мира базируется на *принципах математизации* и *красоты*. *Математика* – наука о *форме* и *количестве*, выражаемых на абстрактном символическом логико-математическом языке. *Эстетика* также исследует форму, но с точки зрения красоты и совершенства и иными выразительными средствами. Закономерная форма всегда прекрасна. Принцип математизации познания, так, как он сформулирован Галилеем, предполагает все математически измерить и провозглашает измеримость критерием научности. *Измерение* и *координатизация* позволяют отразить свойства и отношения изучаемого объекта количественно, обычно в виде численных функциональных зависимостей (таблиц, графиков, уравнений). Выявленные закономерности описываются на языке математических формул и правил их преобразования. *Принцип красоты* в науке – это *принцип эстетического отбора*, заключающийся в зарождении, выживании и развитии наиболее целесообразных, эффективных, совершенных понятий и теорий.

Из чего складывается понятие прекрасного? Признаками красоты в науке и жизни могут служить истинность, логичность, упорядоченность, соразмерность, гармоничность, структурность, конструктивность, концептуальность, абстрактность, общность, универсальность, краткость, простота, нетривиальность, новизна, оригинальность, неожиданность, историчность, целесообразность, соответствие объекта стереотипному представлению о нем. Математика является источником и носителем всех этих проявлений красоты и культуры.

Многие ученые и мыслители пытались, каждый по-своему, вывести общую формулу красоты. Приведем некоторые из них.

- Мера красоты = порядок/сложность (Г. Биркгоф).
- Красота = наглядность + неожиданность, а в свою очередь наглядность = простота + изоморфизм (В. Г. Болтянский).
- Эстетическая значимость равна отношению: необходимая сложность/минимальная программа (М. В. Волькенштейн).
- Красота тождественна целесообразности (И. Е. Ефремов).
- Математика есть изящное искусство (Я. Шатуновский).
- Красота = обобщенный стандарт + динамический элемент (Р. Х. Шакуров).

Как известно, большое внимание взаимосвязям математики и искусства уделяли А. В. Волошинов [113, 114], Б. В. Раушенбах [453] (в теории перспективы) и В. В. Налимов [377] (на основе теоретико-вероятностной формулы Байеса).

На наш взгляд, не может быть единой формулы красоты (как, впрочем, добра, зла, любви), но существует соответствующий принцип (или закономерность) эстетического отбора, служащий надежным критерием «эстетической целесообразности» (не обязательно мгновенного действия): узнавания прекрасного и отсеивания безобразного. Тем не менее все приведенные выше подходы или описания весьма полезны, поскольку отражают прямо или формально отдельные «прекрасные черты» математики.

Первая составляющая эстетики математики – ее *логика* и *язык*. «Сначала было слово». (Или ген?) И действительно, первой из наук возникла математика. Она сама служит общепризнанным языком науки. Степень математизации данной области знания есть показатель ее научности. Привлекательны строгость и стройность *дедукции*, ставшей общенаучным методом обоснования истины. Точные науки пользуются аксиоматическим методом построения своих теорий. Сформировался мощный язык математической логики, ставший теоретической основой компьютерной техники. Во многом осуществилась фантастическая идея Лейбница о создании универсальной вычислительной машины.

Вторая эстетическая составляющая математики связана с ее объектом: по Энгельсу, «математика изучает *пространственные формы* и *количественные отношения* окружающего мира». Здесь красота математики проявляется, прежде всего, в гармонии чисел и изяществе геометрических фигур. Вспомним хотя бы пифагорейское учение о натуральном числе как первооснове всего сущего или связь золотого сечения с числами Фибоначчи (см. [75, 612]). Высокий уровень абстракций и обобщений привносит свои элементы красоты в математику. Классические достижения математики так же вечны, как и великие произведения искусства. Так, фундаментальное явление симметрии исторически воплотилось в современном алгебраическом понятии группы [77].

Мы можем также любоваться парадоксальными картинами Морица Эшера (Эсхера) [303], математическими образами А. Т. Фоменко [569], изумительными фракталами, являющими собой прекрасные рисунки – реализации некоторых математических формул [405], поразительной компьютерной графикой, имеющей применения в абстрактной математике [217], неожиданными орнаментами и мозаиками Пенроуза [130].

К категории прекрасного, безусловно, относятся фундаментальные понятия, идеи, методы и конструкции математики. Так, общий и незаменимый в приложениях метод математического моделирования – еще один неисчерпаемый источник красоты. Здесь математика выступает в качестве «меры вещей». Напомним, что Декарт определял математику как «науку о порядке и мере». На этом основана универсальность и эффективность применений математики.

Красота математики проявляется и в перестановочности математических операций, в терминах которой формулируются основные свойства многих математических объектов. Назовем, например, законы дистрибутивности и законы де Моргана, аддитивность производной и интеграла, свойства предельного перехода.

Часто в качестве основы перестановочности операций выступают гомоморфизмы математических структур (см. параграф 4), играющие роль одной из таких операций.

Известный японский математик Горо Шимура, высказавший гипотезу – вместе с коллегой и другом Ютака Таниямой – о взаимосвязи между эллиптическими кривыми и модулярными формами и, тем самым, внесший существенный вклад в решение Великой теоремы Ферма, подчеркивает: «Многие математики занимаются своей наукой их эстетических соображений, и моя философия того, что такое хорошо, также происходит из моих эстетических соображений». Полистаем последнюю главу книги физика академика Е. Л. Фейнберга «Две культуры» [558], которую автор назвал «Интеллектуальная революция. На пути сближения двух культур». В этой книге философски осмысливаются взимоотношения искусства и науки, интуиции и логики, на которых основываются, соответственно, гуманитарное знание и естественные науки (как две равноправные культуры). Два подхода к познанию мира были обозначены еще в античности – это научная деятельность и творчество философов и художников, сохранившие и преумножившие свое духовное значение в дальнейшей жизни человечества. Слияния естественных и гуманитарных наук, конечно же, не произойдет. Однако естествознание и математика начинают осознавать необходимость в гуманитарном знании и что они сами являются человеческим фактором.

По Е. Л. Фейнбергу, причина сближения двух культур «лежит в самом росте математизированного знания – в компьютеризации (если выразить это одним словом), точнее, в том, что *стремительно возрастает доля интеллектуальной деятельности, которая может быть передана машине* и которую машина выполняет неизмеримо быстрее и надежнее, чем человек. В принципе так может быть охвачена вся формализуемая часть мыслительной деятельности человека. Совершенствование ЭВМ состоит в том, что машине передаются все более сложные формально-логические операции. *В результате все отчетливее выступают внелогические, подлинно творческие и целиком “человеческие” компоненты науки, которые ранее ... были в* *значительной степени заслонены огромным вкладом необходимой логической деятельности*».

Завершая главу, автор подчеркивает, что на рубеже тысячелетий произошла «интеллектуальная революция», выявившая «все возрастающую роль внелогического, интуитивного синтетического суждения в науке». Отмечается особое положение «чистой» математики, в которой подавляющее значение имеет логическое мышление, что «необходимо именно для поиска путей дальнейшего, все более существенного освобождения мыслительной деятельности от “грубого труда” в других областях знания...». Процесс гуманизации науки, «все более выявляющий роль внелогических компонентов в естественнонаучном и математизированном творчестве, идет одновременно с “обратным” процессом математизации в гуманитарной сфере там, где это возможно. При этом математизация, составляющая сущность прикладной математики, сама начинает использовать методы дискурсии, свойственные гуманитарным наукам, и потому меняет свой характер. Во всем этом и заложена объективная основа для развития взаимопонимания “двух культур”».

В работе В. Россмана [465] рассматривается проблема: как понимать знаменитое высказывание Ф. И. Достоевского «Красота спасет мир»? Автор раскрывает смысл этой фразы Федора Достоевского в рамках критической философии Иммануила Канта, в психоанализе Зигмунда Фрейда и в западной аналитической философии.

Содержанием критической философии у Канта являются три критики, последовательно отвечающие на вопросы: «Что мы можем знать?», «Что мы можем делать?» и «На что мы можем надеяться?». Третья критика представляет собой то единственное, что связывает добро и истину. Критика чистого разума приводит к метафизической необходимости веры и морали, выходящих за пределы разума. Третья критика подготавливает почву для другой добродетели – *надежды*.

Россман пишет: «В центре внимания третьей критики – учение о красоте и целесообразности в природе. Наиболее интригующий момент этой критики состоит в том, что Кант связывает понятие красоты с надеждой. Красота – и прежде всего наша способность замечать и получать удовольствие от красоты – дает нам основания надеяться, что мир устроен таким образом, что наши цели не чужды целям этого мира.

Красота определяется Кантом как «бесцельная цель». Эта «бесцельность» и дает человеку надежду. Красота спасает наш безнадежный и от всего изолированный мир субъективности, намекая на присутствие высшего существа, которое – человек может на это надеяться – обеспечивает гармонию между непознаваемым миром и познавательными способностями».

Задача философии психоанализа Фрейда – помощь людям в борьбе с демонами бессознательного и сексуального, которые терзают психику человека и лишают его разума. Имеется только два способа укрощения разрушающей человека сексуальности – ее подавление или ее сублимация в производство красоты. Фрейд выбирает второй путь – путь красоты как сублимации остаточной сексуальной энергии в творчество. Такая красота и спасает человека.

У Достоевского красота другая, хотя ее логика созвучна и Канту, и Фрейду. Красота у Достоевского и Канта открывает путь в другое измерение бытия и приводит к божественной любви первого и к моральному добру второго. Но красота у Достоевского связана с эросом, являющимся для него началом и разгадкой всего сущего.

Далее, автор замечает, что «чрезмерно разросшийся мир идей вытесняет и подавляет жизненный мир: в мире, переполненном идеальными сущностями, людям становится тесно и неуютно». Аналитическая философия ассоциирует этот переполненный идеями мир с магической бородой Платона, как и волосы библейского Самсона, заключающей в себе всю мощь метафизической философии. Важнейшей установкой аналитической философии, выраженной метафорически, является обрезание бороды Платона. Это обрезание Россман рассматривает как проявление некоей интеллектуальной эстетики, «**подвергающей корневые конструкции разума под редуцирующее лезвие бритвы. В этом плане красота способна спасти мир – для разума! – как раз потому, что она спасает от “внемировых” отвлекающих излишеств сам разум**». Но и без бороды, т. е. без идей и идеологии, жизнь невозможна.

Большое внимание красоте в математике уделяют и методисты [216, 481].

Литература: [51, 75, 77, 103, 113, 114, 130, 216, 217, 303, 335, 377, 405, 453, 465, 481, 491, 519, 550, 558, 569, 612, 617].

§ 20. Различные подходы к пониманию природы математики

Арифметику невозможно понять,
в нее приходится верить.
Мария Кунцевич

Он стал поэтом – для математика
у него не хватило фантазии.
Давид Гильберт

Уже на протяжении 2500 лет высказывается масса различных и зачастую взаимоисключающих взглядов математиков и философов на природу математики. Это показывает, что невозможно решить философские проблемы математики однозначно, раз и навсегда. Скажем, рассматривая смысл какого-либо важного понятия, видим, что за ним встает второй смысл, затем третий смысл и т. д. Приходится сознательно заострять и упрощать некоторые положения принципиального характера. Тем не менее такие попытки представляются полезными.

Рассмотрим вкратце некоторые философские подходы к пониманию математики. Сюда можно отнести и направления, сложившиеся в самих основаниях математики: логицизм, формализм, интуиционизм и конструктивизм, классическое, или теоретико-множественное, направление, включающее бурбакизм. Хорошо известны пифагореизм, учение Платона и неоплатоников, теория универсальной характеристики Готфрида Лейбница, гносеология Иммануила Канта, феноменология Эдмунда Гуссерля, диалектико-материалистическая теория отражения, аналитическая философия Людвига Витгенштейна, критический рационализм Карла Поппера, эмпиризм Имре Лакатоса, психологизм Жана Пиаже и другие теории, по-своему объясняющие природу математики. В последнее время стало модным социокультурное толкование математики.

Математика определяется и как квазиэмпирическая наука [317, с. 438], имеющая дело с гипотезами, всевозможными логическими и внематематическими допущениями. В. И. Арнольд считает, что математика – часть теоретической физики. Также имеет право на существование взгляд на математику как гуманитарную науку. Такого подхода придерживался известный математик-конструктивист

А. А. Марков, высказывавшийся в том духе, что теоремы скорее изображают нечто, чем открывают это.

Разумеется, подавляющее большинство специалистов-математиков и некоторые философы науки придерживаются фундаменталистских, то есть, как мы считаем, более реалистических и рациональных взглядов на природу современной математики. При этом математика представляется точной наукой, имеющей свой особый бытийный статус.

Многие великие философы и выдающиеся математики обращали свой взор на мировоззренческие проблемы математики, на роль математики в семействе наук, на взаимосвязи математики и философии, на статус и природу математики. Неоспоримый вклад в философию и методологию математики внесли древнегреческие и средневековые мыслители, Ньютон, Лейбниц, Декарт, Гоббс, Локк, Юм, Галилей и другие. Оригинальную философию познания выдвинул Кант. Вплоть до XIX века математика считалась «царицей наук» и главным инструментом познания природы. С конца XIX века большинство методологических вопросов математики решалось в рамках оснований математики (назовем математиков Фреге, Кантора, Пуанкаре, Рассела, Гильберта, Брауэра, Вейля, группу Бурбаки – см. § 7).

В XX веке философии математики большое внимание уделяли философы Эдмунд Гуссерль (в рамках своей феноменологии), Людвиг Витгенштейн (основатель аналитической философии), Карл Поппер (родоначальник философии критического рационализма), Имре Лакатос (автор теории контрпримеров, наглядно представленной в его книге [300]), психолог Жан Пиаже (создатель генетической эпистемологии).

Математика как наука начинается с древнегреческих мыслителей Фалеса и Пифагора, когда впервые в человеческой истории появляются и осознаются логический вывод, дедуктивное рассуждение, математическое доказательство. В философии *пифагореизма* обожествлялось понятие натурального числа, и все знание, так или иначе, сводилось к первому натуральному числу 1. Мир устроен гармонично и выразим арифметически. Учение Пифагора есть одно из проявлений *логического атомизма* – первой теории познания, в основе которой лежит признание первоэлемента или первоначала, будь то одна из стихий (вода, воздух, огонь или земля), мистический апейрон

Анаксимандра, загадочный атом Демокрита или вездесущая единица у Пифагора. В математике логический атомизм привел к введению первоначальных, или первичных, понятий. Философию логического атомизма развивал и отстаивал ранний Рассел [450].

Далее неминуемо возникает *герменевтический круг*, заключающийся в проблеме взаимодействия части и целого. В современном понимании это диалектика двух противоположных направлений познания – редукционизма и холизма. Напомним, что редукционизм есть принцип сведения объекта к «низшим» составляющим, к его частям и элементам. Холизм же схватывает объект целиком, рассматривает объект как единую принципиально неделимую сущность более высокого уровня, нежели его части, включает данный объект в новую систему еще более высокой иерархии.

Как пишет В. В. Мадер, «выход из этого круга свелся к следующему. Сначала на интуитивной эмпирико-сенсуалистической основе формируются наглядные эмпирические предпонятия. Затем выделяется структура целого и происходит восхождение на теоретический уровень. Первичные понятия на этом уровне определяются только своей ролью в описываемой системе, а их эмпирические прообразы (наглядные предпонятия) остаются вне теории. ... Гносеологический атомизм является таким образом доктриной, которая характеризует процесс формирования эмпирических предпонятий, на теоретическом же уровне ведущим принципом становится системный подход» [317, с. 21-22].

Платон и неоплатоники считают математику посредницей между Миром вещей и Миром идей. Математические понятия, как и любые другие универсалии, находятся в Мире идей. Математическая реальность существует и воплощается в человеческом сознании и окружающих нас вещах. Чувственные восприятия вещей, наблюдения и практическая деятельность человека служат лишь толчком к рефлексии, умозрительному постижению математики. Размышления настраивают сознание на определенную познавательную волну, а механизмом познания, открытия нового для человека знания, всегда и неизменно обитаемого в Мире идей, является знаменитый сократовский диалог, или майевтика.

Существует представление, согласно которому математика делится на «естественную» и «искусственную» [336, с. 73]. Первая – это объективная математика, открывающая и изучающая реальность, та, о которой мы говорили. «Искусственная» математика изобретается, «творится» математиками; она находится на обочине магистрального пути математики, принципиально не влияя на ее развитие. Такая математика не отвечает фундаментальному принципу познания – *принципу красоты*, или *целесообразности*.

Среди математиков, логиков и информатиков распространено также представление о принципиальном разделении математики на теоретическую (чистую) математику и прикладную математику. Так, Н. Н. Непейвода [383, § 0.2] пишет: «Чистая математика представляет собой уникальный агрегат из квазирелигии и спорта. Вера в существование математических понятий является квазирелигией, а способ оценки результатов скорее спортивный. ... В прикладной математике задача приходит из жизни, но в таком виде, что она не соответствует ни имеющемуся математическому аппарату, ни (чаще всего) тому, что хотел бы от нас тот, кто ее поставил. Поэтому прикладник *вынужден* ставить задачу себе в значительной степени сам. Именно по данной причине чистые и прикладные математики часто не понимают друг друга, хотя основываются на одной и той же науке».

Данная характеристика чистой и прикладной математики несколько лукава. Внешне ситуация так может выглядеть. Но, во-первых, современная математика имеет огромный внутренний потенциал, не зависящий от приложений. Собственная логика развития математики (особенно ощутимая начиная с XIX века) диктует постановку глубоких задач и вырабатывает методику их решения. Во-вторых, чисто математические результаты и методы образуют теоретическую базу прикладной математики. Прикладники, как правило, не изобретают новых математических структур, а интерпретируют предметную задачу в рамках подходящей уже существующей математической теории. На этом пути возможно возникновение новой математической модели, понимаемой как симбиоз данной прикладной проблемы, соотвествующего математического аппарата и конкретного способа интерпретации проблеменой ситуации в математике. В-третьих, чистые математики и прикладники зачастую не понимают друг друга только потому, что имеют одностороннее образование. Для успешной работы прикладные математики должны иметь фундаментальное математическое образование. А обучение математиков-профессионалов должно включать в себя навыки математического и компьютерного моделирования.

Далее, существует тенденция разделения теоретической (чистой, фундаментальной) математики на абстрактную и конкретную математики. Наиболее явственно это выражено в предисловии знаменитой книги «Конкретная математика. Основание информатики» [163] выдающихся математиков и информатиков Р. Грэхема, Д. Кнута и О. Паташника. Авторы как бы ставят абстрактную математику на место, унизительно называя ее «новой маткой». Они считают, что абстрактная математика слишком вознеслась в мир выхолощенных общих абстрактных идей. И ей необходимо противопоставить настоящую, действенную математику – КОНКРЕТНУЮ математику, являющуюся конгломератом КОНтинуальной и дисКРЕТНОЙ математики и воплощающую в жизнь методы комбинаторного анализа.

Безусловно, не все ветви абстрактной математики плодотворны или так же серьезны и важны, как, скажем, теория групп. Однако целесообразные математические абстракции и обобщения образуют фундамент современной математики, на котором, в конце концов, зиждутся и достижения комбинаторики и компьютерной математики. Следует заметить, что в математике и в математическом образовании сфера дискретной математики все более расширяется. Тем не менее говорить о включении математики в вычислительную науку столь же неправомерно, как и отождествлять информатику с компьютерной математикой.

Интересный подход к пониманию математики высказал А. Д. Александров в работе [5], представив математику как идеальную технику – науку о математических аппаратах, т. е. науку техническую. Он отмечал: «Как экспериментальная техника дополняет естественные органы человека аппаратами, позволяя проникнуть туда, куда эти органы не достигают, так математика дополняет естественную мыслительную способность человека своими аппаратами и позволяет строить теории других наук и решать задачи, не доступные ни воображению, ни непосредственному мышлению». Но, по мнению

А. Д. Александрова, нет оснований отказываться от определения математики как науки о возможных чистых структурах. Только надо помнить о том, что представления о допустимых абстракциях в математике исторически изменчивы.

Исследование природы математики в рамках аналитической методологии осуществил Е. И. Арепьев в книге «Аналитическая философия математики» [13] и статьях [12, 14]. Методологические подходы к философскому осмыслению математики делятся на *внешнее* и *внутреннее рассмотрение* свойств математики.

Внешнее рассмотрение заключается в узрении и описании специфических свойств математического знания в результате сопоставления и сравнительного анализа математики с другими областями знания. Оно может содержать «сравнение математических истин с выводами естественных наук, сравнение математики с естественным языком, логикой, шахматной или другой игрой и т. д.» [14, с. 79]. Например: «Основными отличительными чертами, свидетельствующими о различии сущностных основ математики и физики, выступают отсутствие в математическом знании эмпирического уровня исследования, различные степени абстрагирования, различные степени достоверности, абсолютности и универсальности» [14, с. 75]. С другой стороны, сходными с математикой и близкими к ней являются логика и естественный язык.

Внутреннее рассмотрение есть взгляд внутрь самой математики, включающий метаматематические рассуждения, логико-философский анализ математических теорий, исследование оснований и структуры математики. Полноценная методология математики подразумевает сочетание внутреннего рассмотрения с внешним. Как отмечает автор, такое комбинированное рассмотрение математики находится в русле аналитической философской традиции.

С точки зрения подразделения философского исследования математики на внешнее и внутреннее рассмотрение Е. И. Арепьев анализирует философско-математические концепции Г. Фреге, Б. Рассела, Л. Витгенштейна. На основе проведенного анализа он делает вывод о том, что внутреннее рассмотрение есть «тактическое» средство решения частных вопросов философского анализа математики. А внешнее рассмотрение автор считает общим методом построения концепции оснований математики, опирающимся на «стратегический» выбор исходных установок и ориентиров. Такимм образомм, Е. И. Арепьев скорее тяготеет к внешнему рассмотрению природы математики, стало быть, к социокультурной философии математики.

Интересно понимание Витгенштейном [107] природы математических истин. Он пишет: «Хотя мы никогда не сможем узнать, что такое результат вычисления, но все же каждое вычисление имеет вполне определенный результат. (Его знает Бог.) Эта математика, действительно, в высшей степени достоверна, – хотя мы обладаем лишь ее грубой копией». По Витгенштейну, природа математики объективна, а человек отыскивает (изобретает) ее грубую копию.

История развития математики убедительно показывает, что другой математики возникнуть не могло, иной математики и быть не может (многообразие обозначений, систем счисления в разных странах не существенно). Закономерно не только единое содержание математики, но и вполне закономерен исторический путь ее развития (со своими нюансами на Востоке и Западе). Различные определения и интерпретации одних и тех же математических объектов (скажем, содержательная и формальная аксиоматика натурального ряда или системы действительных чисел), неевклидовы и конечные геометрии, интуиционистская логика, нестандартный анализ или фракталы – все это математика, «рассуждающая» на языке (или метаязыке) обычной логики.

Литература: [5, 10, 12-14, 18, 23, 29, 30, 35, 39, 76, 78, 95, 107, 134, 135, 141, 151, 154, 158, 160, 163, 174, 187, 213, 228, 239, 270, 280, 286, 289, 292, 297, 306, 314, 317, 327, 333-338, 356, 366, 367, 371, 383, 407-415, 417-419, 421-426, 438, 442, 446, 449-451, 455, 466-469, 473, 490, 508, 525, 527, 534, 543, 545, 549, 559, 572, 595-597, 608, 632, 636].

§ 21. Место математики в научной картине мира

Великий архитектор Вселенной
все более представляется нам
чистым математиком.
Джеймс Джинс

Весь предшествующий опыт убеждает нас в том,
что природа представляет собой реализацию
простейших математически мыслимых элементов.
Альберт Эйнштейн

В шестом параграфе мы указали ряд принципов, характеризующих роль математики в научном познании мира. Теперь рассмотрим понятие научной картины мира.

Наиболее крупным блоком методологии выступает понятие *научной картины мира*, определяемой как особая обобщенная форма теоретического знания о мире, синтезирующая конкретные научные результаты или представления той или иной исторической эпохи в виде системы основополагающих методологических принципов. Картина же мира есть всеобъемлющее мировоззрение своего времени, позволяющее в принципе надеяться найти ответ на любой существенный вопрос. Таковыми можно считать глобальные философские системы, скажем, атомизм Демокрита, монадологию Лейбница или диалектический идеализм Гегеля.

В любой научной картине мира существенную роль играют не только основополагающие научные результаты и принципы, но и их интерпретация, метафизическое истолкование, опирающееся на эти принципы. Как совершенно справедливо констатирует Н. Н. Непейвода [384], «истолкование научных результатов является *неотъемлемой и важнейшей частью научной парадигмы*». Так называемые научные революции (по Куну) вызваны как появлением новых теоретических результатов, так и изменением истолкования устоявшихся научных фактов. В математике свершилось немало подобных революций (или кризисов), заметно, а то и в корне, меняющих методологические представления и установки на последующих этапах развития математической науки. Важнейшие кризисы в математике, ее метафизических основаниях вызваны следующими обстоятельствами:

1) теоремой о несоизмеримости диагонали квадрата и его стороны, доказанной в школе Пифагора;

2) открытием неевклидовых геометрий;

3) логическими и теоретико-множественными парадоксами рубежа XIX–XX веков;

4) теоремой Геделя о неполноте;

5) компьютеризацией вычислений и формальных преобразований.

Каждый из этих кризисов в математике вызвал пересмотр старых и появление новых методологических принципов не только в основаниях самой математики, но также в философии науки и в других областях знания. Так, теорема о существовании несоизмеримых отрезков, не согласующаяся с идеей гармонии и соразмерности у древних греков, привела к развитию ими элементарной геометрической алгебры. А в философском плане этот результат «четко провел различие между эмпирическим и теоретическим знанием. Он однозначно показал, что в мире идеальных сущностей нет места свободе мнений, любое высказывание должно быть обосновано».

Кратко охарактеризуем основные исторические этапы формирования и развития научной методологии.

Древнегреческая картина мира. Наука зарождалась в философских школах Фалеса, Пифагора, Платона, Аристотеля, Демокрита и других. Математика из свода предписываемых правил превратилась в дедуктивную науку. Успешно развивались геометрия, арифметика и алгебра, находившие практическое применение (Апполоний, Архимед, Птолемей). Аристотель создал «систему логики», заложив основы логики как науки. Пранаука постепенно приобретает черты науки, натурфилософии, которая носила чисто умозрительный, не экспериментальный характер. Происходит осознание упорядоченности и единства мира, его гармоничности. В философии идет поиск первоматерии, означающий *гносеологический атомизм*, частным случаем которого служит логический атомизм (см. [450]). Как заключает В. В. Мадер [317], «гносеологический атомизм является, таким образом, доктриной, которая характеризует процесс формирования эмпирических предпонятий, на теоретическом же уровне ведущим принципом становится системный подход».

Математика – ключ к постижению явлений природы и познанию абсолютных истин [258]. Пифагорейской школой создан дедуктивный, *материально-аксиоматический метод*, применимый во всех науках. Его вершина – «Начала Евклида». Евклидовы «Начала» и «Органон» Аристотеля оставались образцом подлинной научности на протяжении двух тысячелетий. Натурфилософия господствовала вплоть до XIX века.

Спекулятивно-умозрительные учения (метафизика) древних греков о первопричинах и началах бытия предвосхитили многие естественнонаучные теории XVIII–XX веков. Так в Древней Греции возникла первая научная, еще наивная, *натурфилософская картина мира*, опирающаяся на математику и логику. Методами познания мира служили наблюдение-созерцание и рассуждение-умозрение.

Методология эпохи Возрождения. В последующие полтора тысячелетия наука развивалась медленно и эволюционно, знания постепенно накапливались, господствовала богословская схоластика. И вот в середине второго тысячелетия нашей эры наступает время Ренессанса – возрождение древнегреческой натурфилософии на новой естественно-математической базе. На основе созданного Ньютоном и Лейбницем математического анализа (дифференциальное и интегральное исчисления) быстро развивается учение о движении материальных тел – механика. Классическая механика зиждется на трех законах Ньютона и законе тяготения Ньютона-Гука. «Бог мыслит и творит математически».

В XVII веке Галилео Галилей и Рене Декарт обогатили дедуктивный метод. Декарт считал, что исходные истины берутся не только из очевидных фактов (как аксиомы Евклида из наглядных истин о физическом пространстве), но также могут быть врожденными или добываются интуицией. В рамках натурфилософии вызрела естественнонаучная методология, выражаемая идеей Галилея о всеобщей измеримости и принципом математизации знания. Галилей обосновал необходимость *эксперимента*. Он отмечал три принципа научной методологии:

1) отказ от физического объяснения явлений и поиск их математического описания;

2) эксперимент, в том числе и мысленный, – реальная основа математического описания мира;

3) естествознание должно быть построено по образу и подобию математики.

Исходные истины (предметные аксиомы) ученые добывают в процессе наблюдений и экспериментов, а затем наука развивается дедуктивно. Так, из экспериментально установленного закона всемирного тяготения и предположения об однородности пространства можно логически вывести трехмерность пространства, в котором мы живем. Это время *механистической картины мира.*

Объектом исследований был макромир, а предметом – механическое движение, к которому должны сводиться все другие виды движения, изменения, развития. Механическое движение полностью описывается математическими формулами, по которым можно однозначно определить прошлое и будущее любой физической системы. Детерминизм, редукция, анализ, обратимость во времени и пространстве, поступательность развития, однородность, количественный подход – основополагающие характеристики механистической картины мира, возникшей и господствующей в эпоху Возрождения. Это период становления и расцвета классической науки, продолжавшийся до середины XIX века. Наука была практически единой, ее центром служила математика. Открытия XVIII и XIX веков в естествознании (назовем универсальный закон сохранения, термодинамику, электричество, дарвинизм), в философии, в математике и логике, в технике послужили началом дифференциации наук.

Релятивистский этап. Со второй половины XIX века до, условно, 1970 года преобладающим в научном познании становится релятивизм. Классическая наука подверглась критике и ревизии. Абсолютные и вечные истины в науке уступили место истинам относительным и условным. Методологические принципы детерминированности, однозначности и определенности, справедливые для физического макромира, противоречили результатам исследований микромира и космоса. Механика элементарных частиц потеснила ньютонову механику, оказавшуюся предельным частным случаем первой. Появились новейшие теории, законы, принципы и методы: второе начало термодинамики, общая теория относительности Эйнштейна, квантовая механика, статистическая физика, зависимость результатов опыта от наблюдателя, соотношение неопределенностей

Гейзенберга, принцип дополнительности Бора, вероятностный подход и т. д. Созданные в XIX веке необычные геометрии и алгебры, позднее теория относительности и квантовая физика вынудили математиков признать, что математика не открывает одни только абсолютные истины, что природа зиждется не на чисто математической основе. Отказ Галилея искать сущность явлений дополнился принципом релятивизма – относительности знаний. Например, в пределах Земли одинаково хорошо работают и евклидова геометрия, и геометрия Лобачевского. И на смену механицизму приходит *квантово-релятивистская картина мира*.

Разительные перемены происходили в математике и логике. Были открыты неевклидовы геометрии, булева арифметика и гипердействительные алгебраические системы. Математика аксиоматизировалась и формализовалась, логика математизировалась. Появившиеся на рубеже XIX и XX веков логические и теоретико-множественные парадоксы привели к созданию различных направлений в основаниях математики и соответствующих обосновательных программ (логицизм, формализм, интуиционизм и конструктивизм, бурбакизм). Некоторые философы математики стали даже утверждать, что имеется не одна единственная математика, а несколько различных математик. Тем не менее математика остается единой наукой, поскольку ее объект, предмет и дедуктивный характер в принципе не могут измениться.

В то время как естественнонаучные теории в корне менялись, классическая математика и новые разделы математики успешно применялись в естествознании. Еще раз приведем концептуальное высказывание знаменитого физика Поля Дирака: «Доверять математической схеме, даже если она, на первый взгляд, не связана с физикой… Следует не доверять всем физическим концепциям».

В качестве определенной философии и мировоззрения релятивизм привнес в науку и культуру многогранный человеческий аспект и размыл сциентическую доктрину, согласно которой наука является единственной надежной формой человеческого познания. Однако сам по себе релятивизм скорее отрицает, чем утверждает. Сомневаться во всем разумно лишь до некоторого предела. По сравнению с другими способами познания наука дает точное знание, то есть более глубокое, полное, адекватное, обоснованное и общезначимое знание. Большое влияние на смену механистической парадигмы оказала философия Канта и диалектика Гегеля. Универсальные законы диалектики послужили фундаментом и отправной точкой подлинной философии развития и самоорганизации, в которой снимаются однобокость механицизма и абсолютизация релятивизма. Как говорил А. Эйнштейн, «Господь не играет в кости».

Современная научная парадигма – синергетика. В последние два-три десятилетия быстро развивается молодая наука синергетика, в чем-то продолжающая традиции кибернетики. Если кибернетика есть учение об управлении, то синергетика – наука о самоорганизации развивающихся систем. Математической основой синергетики служит теория динамических систем. См. конец § 8.

Вслед за наивной натурфилософией и метафизикой древних греков, единой наукой Возрождения (эмпиризм Ф. Бэкона, рационализм Декарта, методология Ньютона и Галилея) и диалектикой Гегеля синергетика претендует на создание новой глобальной картины мира. И в Древней Греции, и в эпоху Возрождения в центре науки стояла математика. В настоящее время в синергетике диалектика начинает активно сотрудничать с математикой (чего, кстати, не произошло с кибернетикой). Это обстоятельство внушает определенный оптимизм по поводу новой интеграции естественных и гуманитарных наук. Тем самым, *синергетическая картина мира* представляет собой математически очерченный системный подход. И Наука – вместе с математикой и благодаря ее аппарату – снова сможет занять лидирующее положение в познании Мира.

Интересно заметить, что механистическая и релятивистская картины мира исходят, по сути дела, из одной науки – физики (механики, термодинамики, квантовой физики), не существующей, конечно, без математического аппарата. И в настоящее время естественные науки не утрачивают своего методологического значения (достаточно назвать расшифровку генома, компьютерную науку), но ведущую роль начинает играть математическое моделирование, учитывающее диалектический характер устройства мира и его познания.

Последнее высказывание поддерживает мысль В. А. Лекторского [307] о том, что интеграция наук о природе и наук о человеке означает только «принципиальное единство исследовательских методов».

Посмотрим теперь на основные этапы развития научной методологии с точки зрения приоритета в паре *субъект-объект*. В натурфилософской и механистической картинах мира главенствует *объект* познания (тезис). Как будто человек непосредственно и отчетливо видит удаленный предмет в ясный день. В релятивистской картине мира на первое место выдвигается *субъект* со своими «проблемами зрения» (антитезис). Туман; человек снова и снова всматривается в тот же предмет, напрягает зрение, достает бинокль, включает фонарик или надевает инфракрасные очки. Оказывается, как много зависит от «очков»: различим лишь изменчивый силуэт (но что же сам предмет, где истина?). Наконец, синергетическая картина мира обещает синтез, когда *объект* и *субъект* становятся равноправными партнерами. Человек признает самостийность предмета и стремится всесторонне его обозреть.

Подчеркнем, что любая научная методология должна включать в себя, во-первых, фундаментальные философские и общенаучные категории, служащие понятийной базой знания. Во-вторых, основополагающие принципы, такие, как законы диалектики или тезис о единстве мира. В-третьих, математику как общий язык и метод науки.

Кроме того, нужно иметь в виду общий методологический принцип дополнительности, состоящий в разумном сочетании двух подходов, именуемых «бритвой Оккама» и «призмой Менгера» (в частности, не надо быть буридановым ослом). Правило Оккама гласит, что сущности не следует множить без необходимости, т. е. надо стремиться к простоте, избегая надуманных вещей. А правило Менгера заключается в том, что кажущуюся простоту надо разлагать на скрывающиеся за ней сущности.

Литература: [100, 258, 307, 317, 384, 397, 450].

§ 22. Основные положения метафизики математики

Все исследуй,
давая разуму первое место.
Пифагор

Суммируя сказанное выше, сформулируем следующие основные положения естественной фундаменталистской метафизики математики, проясняющие феномен математики.

1. *Истоками математического познания* служат раскрытые во втором параграфе гносеологические основания: априоризм, очевидность, логика, интуиция, опыт и деятельность, взятые в совокупности и взаимосвязи.

2. *Объектом науки математики* являются фундаментальные категории количества и формы и всевозможные их проявления, рассматриваемые в наиболее общем и чистом виде. Математика – наука о структуре сущего. В этом заключается *суть* и *природа математики*.

3. *Предмет изучения математики* – математические структуры и математические модели действительности или различных областей знания о мире. Это содержание математики.

4. Непосредственную *математическую реальность* составляют числа и геометрические фигуры, которые опосредуют последующие математические структуры как абстракции более высокого логического уровня. Пифагорейский тезис «Все есть натуральное число» сменяется метафорическим положением «Все есть форма». В математике форма часто предстает в виде формулы. Фарадей отмечал, что формулы умнее тех, кто их открыл.

5. Математика имеет свою внутреннюю *онтологию*, включающую наличную математическую реальность. Понятия и факты математики квазиэмпиричны. Для математика число пять никак не менее значимо, объективно и реалистично, чем пять пальцев на руке, а понятие прямой говорит больше, чем край линейки или отвес. Математика открывает, а не изобретает истины.

6. *Дедукция* возникла в недрах математики и верно служит ее универсальным методом. Она становится общенаучным способом научного познания. В рамках дедукции вызрели *аксиоматический* и *гипотетико-дедуктивный* методы. На аксиоматическом языке

излагается современная математика, а гипотетико-дедуктивный метод распространился далеко за ее пределы.

7. *Логика* – составная часть математики. Рациональной опорой мышления и базой дедукции служит *классическая двузначная логика*, достаточно адекватно отражающая логику бытия и обыкновенную человеческую логику. Все другие системы логики (интуиционистская, трехзначная, модальная, нечеткая и т. п.) формируются, развиваются и излагаются в рамках классической логики. Кроме аналитических истин математика имеет собственные синтетические суждения, как содержательные, так и формализованные, о форме, количестве, структуре.

8. *Языком* (формой) *современной математики* является математическая логика; по большей части это логика предикатов первого порядка (тезис Гильберта). Формальная логика допускает машинное воплощение и, тем самым, является теоретической базой работы компьютера и программирования.

9. *Математика едина и единственна*. По Гуссерлю, ангелы обладали бы другими методами вычисления, но вряд ли пришли бы к другим теоремам. Математические рассуждения надежны и достоверны. Математические истины непреходящи. Важнейшим признаком истинности в математике выступает непротиворечивая математическая деятельность человека, фиксируемая математическим сообществом. Вспомним также следующие слова Д. Гильберта: «Единый характер математики обусловлен внутренним существом этой науки: ведь математика – основа всего точного естествознания».

10. *Математическое моделирование* являет собой основной прикладной метод исследования действительности. Понятие модели приобрело статус фундаментальной общенаучной и философской категории. Принцип математизации знания – ведущий в науке. Отметим, что математически окрашенная научная картина мира предполагает также принцип гармонии (целесообразности, красоты).

11. *Статус математики*, ее положение и роль в семействе наук заключается в следующем. Математика сама является самым точным языком и мощным универсальным инструментом науки в целом. Математика дает истинную методологию научного познания,

беспристрастно опирающуюся на «осязаемые», внешние категории формы и количества; она не позволяет спекулировать якобы доподлинным знанием о содержании, качестве и сущности вещей. Математика – «царица наук», «особь статья», она не относится ни к естественным, ни к социально-гуманитарным, ни к техническим наукам. Она, подобно философии, «парит над миром». В любой претендующей на научность общей картине мира математика должна занимать ведущее положение. Следовательно, математика представляет собой автономную и самостоятельную форму научного познания.

12. *Эффективность математики* в приложениях, помимо того, что диктуется ее объектом, предметом, методами и статусом, заключается также в характере математической истины. Математика дает *истину условного*, в отличие от законов классической логики как *истины абсолютной*. Теоремы имеют форму импликации $A \Rightarrow B$, где A есть конъюнкция условий теоремы, а B – ее заключение. Теорема $A \Rightarrow B$ тем сильнее, глубже и успешнее в применениях, чем логически слабее условия (допущения, посылки) A и сильнее заключение B. Как только в некоторой математической модели выполнены условия A теоремы $A \Rightarrow B$, так сразу можно заключить, что в этой модели истинно и утверждение B. С удовольствием приведем изречение известного сатирика Хенрика Ягодзиньского: «"Если…, то…" – если это не математика, то это шантаж».

13. *Математика как мера научности.* Знание научно в том и только в том случае, если оно выразимо на языке математики. Тем самым, к научному знанию применимы математические методы, оно допускает достаточно адекватное математическое моделирование.

14. *Математика и точные науки.* Математика – необходимый аппарат и общий метод точных наук. Она самодостаточна. Другие точные науки поставляют порой дополнительной пищу для математики, а иногда служат ее опытным полигоном. «Математика сама по себе давно не нуждается в естествознании и сама не претендует быть естествознанием» [213, с. 78]. Чем фундаментальнее естественная наука (такова, в первую очередь, физика), тем нужнее ей математика. Высказывание «Физика есть геометрия» (одна из возможных геометрий?!) гораздо ближе к истине, нежели обратное высказывание «Геометрия – это физика». У Евклида геометрия была физикой

квазиэмпирически ощущаемого пространства – пространства, окружающего и поглощающего нас. Существование нескольких геометрий, в равной степени непротиворечивых и в то же время логически несовместных, показывает, что геометрия не может быть включена в физику. По Эйнштейну, «среди всех наук Математика пользуется особым уважением; основанием этому служит то единственное обстоятельство, что ее положения абсолютно верны и неоспоримы, в то время как положения других наук до известной степени спорны и всегда существует опасность их опровержения новыми открытиями».

15. *Математика и искусство.* Искусство и математика суть неотъемлемые составляющие культуры. Но математика и искусство образуют в паре принципиальную гносеологическую оппозицию. Математическое открытие и художественное творчество каждое по-своему раскрывает тайны бытия. Первое гораздо ближе к рассудку и логике, второе – к интуиции и образности. Результаты математического познания выражаются на строгом общезначимом языке формул. Художественное познание отображается средствами наглядных образов и символов живописи, музыки, архитектуры, поэзии и т. д. Художественное познание гораздо более многозначно, чем научное.

Тем не менее математика и искусство не разделены непроходимой стеной, имеют точки пересечения, влияют друг на друга. В этих общих точках взаимодействуют истина и красота, как, например, в явлении симметрии или в понятии золотого сечения. И тогда рождается гармония, означающая добро в человеческом измерении. Художественное произведение обладает своей структурой, которая так или иначе может быть схвачена математикой. Основополагающие математические идеи и факты прекрасны и для своего открытия и установления часто требуют незаурядной фантазии, тонкого воображения, художественного стиля мышления.

16. *Математика и компьютер.* Математика служит теоретической базой информатики и дает ей пищу. Компьютер становится мощнейшим методом математического познания – как в самой математике (исследование конечных объектов, супериндукция), так и в ее приложениях (представление математических моделей, вычисления в них). Компьютерные вычисления и компьютерная

графика выполняют – применительно к математике – важнейшие эвристическую, проекционную, когнитивную и дидактическую функции.

17. *Красота математики* вытекает из ее природы. И заключается в фантастических свойствах чисел, в совершенстве геометрических фигур, в простоте плодотворных обобщений, в «скромном обаянии» законов логики, в четкости и мощи своих выразительных средств, в «тонкости чувств» – разборчивости методов, в широкой доступности (математического аппарата) и одновременно элитарности (духа математики).

18. *Специфика математики* включает в себя целый ряд характеристик: высочайший уровень абстрактности; максимальная доказательность и логичность; наибольшая истинность и критериальность; автономность, обособленность и независимость от других наук; универсальность; эффективность; необычайная красота фундаментальных понятий и результатов. Но главная ее особенность состоит в том, что *математика есть наука обо всех возможных мирах*.

19. Математику следует рассматривать как *стержень подлинного образования*, образования научного и мировоззренческого. Напомним, что исходный смысл термина «математика» в переводе с греческого языка означает «учусь через размышление». Точное знание, поставляемое математикой, гораздо менее других областей знания подвержено влиянию социума и временным переменам. В то же время математическое образование, как и всякое другое, естественным образом включено в культурологический процесс. Математика провозглашает главенство разума во всех общезначимых человеческих делах. Математика – самая честная и творческая из наук. Она воспитывает не только правдивость, критичность, самостоятельность, справедливость, благородство, трудолюбие и дисциплинированность, но и учит «свободному полету мысли», несмотря на заданность строгих логических правил. Как к учебной дисциплине к математике (школьной и вузовской) вполне применим социокультурный подход. И если подлинная философия науки математики носит фундаменталистский характер, то философия математического образования относится в равной степени и к социокультурной сфере.

20. *Дидактический аспект математики* можно выразить словами Н.И. Лобачевского: «В математике важнее всего способ преподавания». В большой степени это означает приоритет методов исследования и изложения материала в математике перед фактами, так как именно методы позволяют устанавливать и обосновывать факты и выводить одни математические предположения из других, а хорошая методика обучения математике закрепляет эти знания и умения в сознании человека. «Истинная доступность курса математики, то есть истинная возможность его освоения, достигается не посредством его обеднения и опрощения, а напротив – достижением "критической массы" его содержания и рождаемой ею возможностью осуществления многообразных форм поисково-исследовательской деятельности, "критической массы" ее многомерности и многоуровневости» [267, с. 83].

21. *Развитие математики* в человеческом обществе носит *диалектический характер.* Ограничимся словами А. Д. Александрова, которыми он завершает свою статью «Диалектика геометрии» [6]: «Наука, восходя к абстракциям и тем непосредственно удаляясь от действительности, обретает возможность проникать в нее глубже и разностороннее».

22. *Исторический путь математики* тесно связан с развитием двух главных линий математического познания – арифметико-алгебраической и геометрико-топологической. Эти линии постоянно пересекались и переплетались, порождая все новые интегрированные математические дисциплины (назовем тригонометрию, математический анализ, аналитическую и алгебраическую геометрию, геометрическую и топологическую алгебру, алгебраическую и дифференциальную топологию, аналитическую теорию чисел и т. д.). Новейшая классическая математика твердо и удобно расположилась на постаменте *теории множеств.* Параллельно шло совершенствование логических средств, математической символики и терминологии, что привело к созданию математической логики. Заметим, что историческое развитие математики заметно отличается от безупречной логической последовательности современного ее изложения, исторические этапы генезиса математики могут существенно отличаться от наведенного логического лоска. Однако общий исторический ход в математике и

индивидуальный процесс математической деятельности неизменно приводят к одним и тем же фундаментальным результатам. О достижениях математики XX века рекомендуем читателю книгу «Проблемы Гильберта» [441] и статью В. М. Тихомирова «О некоторых особенностях математики XX века» [540].

23. *Будущее математики* видится в дальнейшем развитии классических направлений, в открытии и создании новых математических структур, конструкций и моделей. В ближайшие десятилетия теоретико-множественная математика останется современной классикой – вплоть до возникновения новейшего фундамента, некоей сверхструктуры (ни теория категорий, ни теория нечетких множеств, ни нестандартный анализ, ни фракталы не стали таким фундаментом). Математика продолжит свой величавый традиционный путь, поскольку объект и предмет математического познания в принципе неизменны. Но заметно, и будет еще ощутимее, смещение фокуса ее интересов в сторону дискретной математики, что вызвано быстро растущими возможностями компьютеров и расширением применений математики. Прогнозируется создание суперкомпьютера, а это необходимо связано с дальнейшим совершенствованием формального математического языка, обогащением его выразительного потенциала. Однако ядро непрерывной математики, континуум сохранят свое фундаментальное значение, потому что они служат надежной теоретической базой построений и приложений современной математики. Будут развиваться и новые разделы, связанные с такими синергетическими понятиями, как бифуркация, динамический хаос, фрактал. Некоторые прогнозы относительно будущего математики сделаны в работе А. Г. Барабашева «Будущее математики» [30] на основе анализа возможностей научного прогнозирования: внутриматематического, социокультурного, историко-математического.

Литература: [6, 30, 98, 213, 267, 540].

Глава 5. Дидактика математики

Два основных достояния
человеческой природы –
это ум и рассуждения.
Плутарх

В самой математике
главные средства достигнуть истины –
индукция и аналогия.
Лаплас

Вступление

Математика продолжает играть доминирующую роль в науке, остается образцом и критерием научности. Соответственно этому она должна занимать подобающее место в образовании, как школьном, так и вузовском. Что здесь нужно знать и понимать? Каждому – знать азы элементарной математики и уметь логически мыслить. Современному специалисту – применительно к своей области – знать основы высшей математики, владеть математическим аппаратом и методами математического моделирования.

Еще П. П. Блонский, Д. Пойа, Ж. Дьедонне и Г. Фройденталь отмечали, что при обучении математике (помимо знаниевой составляющей) совершенно необходимо рассматривать математику как *метод научного познания*. Особенно актуально это звучит в рамках гуманитарно ориентированного образования и деятельностного подхода, которые достаточно успешно развивают многие российские методисты-математики.

Математика воспитывает такие гражданские качества человека, как самостоятельность, трудолюбие, честность, отзывчивость, открытость, критичность, ответственность. Математика служит стержнем школьного образования. Дает специалисту любой области методологию и методику предметного и научного исследования.

Известно, что однажды знаменитый английский философ Томас Гоббс, будучи уже в зрелом возрасте, обнаружил в библиотеке своего знакомого раскрытую книгу «Начала» Евклида. Его заинтересовала теорема Пифагора. Прочитав ее формулировку, он воскликнул: «Боже мой, это же неверно!». Но, разобрав доказательство до конца, он заметил: «А ведь так оно и есть». После этого случая Гоббс стал большим поклонником математики, всем рекомендовал ее как лучший способ убеждения. Ратовал за создание точного универсального языка, на котором можно было бы выражать свои мысли.

Н. Н. Непейвода [383] указывает строгие этические критерии, принятые в математическом сообществе: «Математику неприлично заниматься тем, что не допускает точной формулировки... Ему неприлично выдавать правдоподобное утверждение за доказанное... Ему нельзя утаивать открытое им доказательство, он обязан предоставить его на максимально широкое обсуждение... Если кто-то нашел ошибку в его доказательстве, математик не имеет права настаивать на своем... Если кто-то нашел опровергающий пример для доказанного им утверждения, математик даже не имеет права требовать, чтобы нашли еще и ошибку в его доказательстве...».

В современном образовании, особенно школьном, на передний план должны выходить *универсальные языки* общения, культуры и науки – обучение родному языку, математике, информатике (компьютерная грамотность) и иностранным языкам (в первую очередь английскому, на котором общаются люди всех стран). Математика является общенаучным методом и основой научной методологии, служит базисом математического моделирования и гипотетико-дедуктивного метода исследования. Математика, как никакой другой учебный предмет, развивает логическое и абстрактное мышление. Далее идут *фундаментальные научные дисциплины*: точные (физика, химия, биология, география) и гуманитарные (филология, история, право). На основе указанных наук могут успешно преподаваться все другие важные для жизни человека и общества предметы.

В наше время, когда заметно активизировались антинаучные силы, а в жизни и культуре стали господствовать постмодернистские установки и настроения, людям науки и образования просто необходимо возвысить свой голос в защиту и пользу логики, математики и метафизики. Научное мировоззрение и поиск истины должны снова стать важнейшей бытийной и путеводной ценностью для человека, общества и государства. А вопросы методологии математики нужно включать в образование будущего учителя математики.

§ 23. Математика и образование

Математическая безграмотность
губительнее костров инквизиции.
В. И. Арнольд

Жизнь украшается двумя вещами:
занятием математикой и ее преподаванием.
С .Д. Пуассон

Проблемы образования

Образовывать человека в чем-то – значит лепить его по соответствующему образу. Образовывать человека гуманитарно – значит возделывать духовную природу человека. Духовная природа человека заключается в разуме. Несколько слов о термине *гуманитарный*. По латыни *humanitas* означает природу человека. И в Древнем Риме этим словом обозначался курс обучения, включающий так называемые свободные искусства: арифметику, геометрию, астрономию, музыку и все то, что делает возможным обучение им – диалектику, состоящую из грамматики, риторики и логики. Все эти предметы вошли в состав гуманитарных наук в эпоху Возрождения. До середины XIX века все образование было гуманитарным, с математикой в качестве центральной дисциплины. Только во второй половине XIX века гуманитарными были названы науки, не относящиеся к естественным. Так произошел «трагический раскол культуры», если говорить словами Сноу – автора книги «Две культуры» [503].

В России чиновники, педагоги и методисты уже более 15 лет муссируют тему гуманизации и гуманитаризации образования и обучения, придавая этим принципам первостепенное значение в реформе (перестройке, модернизации) отечественного образования. Вопросам гуманизации и гуманитаризации математического образования посвящены многочисленные исследования (см., например, [255, 376]).

С точки зрения организации всей системы образования, включенной в демократические процессы, принципы гуманизации и гуманитаризации не вызывают сомнений. В эпоху демократизации и либерализации общественных отношений, понимаемых правильно – в духе главенства закона и разума в интересах самого общества и всех его слоев – идеи гуманизации и гуманитаризации образования совершенно естественны. Но что они означают на самом деле?

На наш взгляд, принцип гуманизации образования заключается в оптимальном учете интересов и возможностей каждой личности в плане индивидуального образования. Для способного человека образование должно быть доступным, профессионально качественным, нравственным и востребованным. Гарантом здесь должно быть правовое государство. С другой стороны, получающий образование человек имеет определенные моральные и правовые обязанности перед государством. Так понимаемая гуманизация образования есть, по сути дела, общественный договор между государством и человеком, обретший статус закона. Это подлинная гуманизация образования, неминуемо влекущая за собой гуманизацию самого государства и всего общества! К сожалению, нам до этого еще далеко.

На уровне дидактики идея гуманизации образования воплощается в принципе дифференциации обучения, состоящем, в частности, во введении профильного обучения в старших классах общеобразовательных школ, в открытии все большего числа специализированных школ (гимназий, лицеев, колледжей). Процесс дифференциации предполагает и встречное движение – интеграцию дисциплин. Поэтому актуально создание компактных общих курсов математики для студентов нематематических специальностей (гуманитарных, естественнонаучных, технических).

Гуманитаризация образования – это социокультурный процесс в обучении, включающий ознакомление учащихся (школьников и студентов) с важнейшими достижениями мировой культуры и искусства, популяризацию наук, расширение спектра и увеличение доли гуманитарных дисциплин в программах учебных заведений.

Во введении к [338] убедительно показано, что в общеобразовательной школе математика является гуманитарной дисциплиной, более того, служит стержнем школьного образования. Общий курс математики для гуманитариев также нужно рассматривать как один из основных.

Ю. М. Колягин [276, лекция 19] справедливо констатирует полный крах «демократической» реформы школы, проводимой в России в 90-е годы XX века Э. Д. Днепровым и его сторонниками. В результате этой прозападной реформы резко снизился уровень среднего образования, упал престиж профессии учителя, школа разделилась (для богатых и бедных). Реформа проходила под лозунгами гуманизации и гуманитаризации образования, которые оказались профанацией, декларациями «от лукавого». Сделаны ли из этого провала выводы? Конечно, сделаны! По данному пути предложено идти и высшей школе.

В сентябре 2003 году Россия подписала Болонскую декларацию о вхождении в единое общеевропейское образовательное пространство с последующим взаимным признанием вузовских дипломов (но Госдумой она пока не утверждена). Наше высшее образование должно быть выровнено под западную гребенку. Западное высшее образование имеет свои традиции, скажем, бакалавриат дает общепрофессиональное образование, а у нас ставка всегда (и сразу) делалась на фундаментальное профессиональное образование. Для России это потребует существенной перестройки высшей школы и может привести к дальнейшему снижению уровня нашего высшего профессионального образования.

В статье «Глобализация и образование» [556] Н. Н. Федотова, анализируя сильные и слабые стороны Болонского процесса, возможные последствия интеграции европейского образования, отмечает, что он регламентирует формальные аспекты, не уделяя должного внимания содержанию обучения и национальным традициям. Болонской конвенции вряд ли удастся преодолеть мультикультурализм существующих систем образования в Европе.

Процесс глобализации, ведущий к однополярному (американизированному) миру, – прямая дорога к мировому краху. Россия – мощная евроазиатская держава, которой самой судьбой предназначено вести конструктивный диалог как с Востоком, так и с Западом, быть посредницей между существующими цивилизациями.

Анализируя интеллектуальные вызовы математической логики и математики по отношению к современному обществу и цивилизации, Н. Н. Непейвода делает следующие принципиальные выводы [384]:

«1. Прямые пути являются путями в тупик.

2. Ни одна точная формализованная система ценностей и критериев не способна полностью охватить все случаи.

3. Если нечто кажется слишком заманчивым, то, скорее всего, это – ловушка Дьявола, поскольку на следующем уровне анализа все окажется не так.

4. Оптимизация – путь к смерти.

5. Критерий разума – понимание, а не успех».

Особенно актуальны эти методологические выводы для современного образования и научного познания. Автор указывает, что «роль математики в общем образовании… проявляется прежде всего в освоении мира идеальных сущностей и выработке понимания того, что с ними можно работать лишь логическими методами, и что без них никакое действительно глубокое прозрение невозможно». Отмечается, что традиционный курс математики лучше американизированного и французского, но и он плохо справляется со своим предназначением. Н. Н. Непейвода пишет: «…прагматический взгляд на математику как на основу естественных наук противоречит ее задачам в цикле общего образования. …Пора разорвать искусственную связку математики и физики. …Уж скорее в *общем* образовании нужно связывать математику с музыкой, эстетикой и лингвистикой». И далее: «В высшем образовании необходимо осознать роль логики как единственного связующего звена между естественными, гуманитарными и информационными знаниями». Автор считает, что информационные знания составляют третью интеллектуальную реальность наряду с общепризнанными сферами науки и культуры.

В одном из интервью [165] академик В. И. Арнольд отметил, что наше математическое образование пока остается одним из лучших в мире. Однако «всюду прошло “реформирование”, отучающее думать и уничтожающее математическую (да и иную) культуру, а мы пока еще сохранили лучший уровень. Боюсь, что и мы пойдем по этому всемирному пути уничтожения науки и культуры». «Уже Лев Толстой явно говорил, что всякое правительство автоматически начинает бороться против наук, и прежде всего против образования своего народа, опасаясь понимания народом своих поступков».

В. И. Арнольд подчеркивает, что главное в преподавании математики не зубрежка, а решение задач. Подобно знаменитому физическому минимуму Ландау, он предложил «Математический тривиум» [17], первоначально предназначенный для Физтеха. Но оказалось, что физтеховские математики умеют решать только 10 задач из предлагаемых ста задач. Поэтому предложенный тривиум был ими отвергнут.

Проблемы воспитания

Человек – существо разумное и одухотворенное. Именно в разуме и духовности заключается подлинная всеобщая природа человека. Воспитание призвано совершенствовать в человеке его природу. Каждый человек есть также организм биологический, создание единоличное, самобытное, своекорыстное, семейное, общественное, стало быть, индивидуальное и особенное. Целью гуманитарного образования как раз и является приведение этого личностного и особенного в человеке в гармоничное соответствие с его общей природой. В «Философской пропедевтике» [132] Гегель утверждает, что человеку дóлжно «поднять свое отдельное существо до своей всеобщей природы – образовать себя». А это возможно только на пути осознанного подчинения человека голосу разума, в рамках формирования духовной культуры и нравственности. Нравственность – это выбор разумного решения. Разумное – значит доказательное, истинное. Поэтому в современном образовании – как и на протяжении двух с половиной тысячелетий – основополагающую роль должны играть логика и математика.

Важнейшую роль в жизни и развитии общества и государства играет интеллектуальная элита. Она во многом формирует общественное мнение, моральные ценности, идеологию и мировоззрение целых сословий и отдельных людей. Интеллектуальная элита – это фундаментальный фактор народного образования: его продукт и его предпосылка. Интеллектуальная элита обязана стремиться во всем руководствоваться разумом, быть образцом высокой нравственности, нести людям «разумное, доброе, вечное».

Обществу очень важно, чтобы интеллектуальная элита идентифицировала себя и осознала свою ответственность перед страной. Для этого у нее есть мощный инструмент – **разум** ее членов, с помощью которого она может, во-первых, понять себя, свой статус и предназначение, во-вторых, правильно действовать. В своих действиях истинно интеллигентный человек руководствуется разумом: в противоречивом клубке инстинктов, интересов, настроений, помыслов, эмоций и даже убеждений он отдает предпочтение разумному началу, ищет разумное решение, выбирает разумный путь. Это бывает трудно – и по существу, и психологически. Разглядеть разумное помогает совесть. И здесь необходима духовность, крепость духа, сила воли, вера в разум. Именно **главенство разума**, руководство разума во всех делах служит отличительным – необходимым и достаточным – условием интеллектуальности элиты.

Рациональный анализ понятия культуры дал немецко-французский философ Альберт Швейцер (см. [610, с. 55]): «Культура слагается из господства разума над силами природы и господства разума над человеческими убеждениями и помыслами». При этом существенным и определяющим является второе слагаемое культуры, которое и называется духовной культурой: **духовная культура** – это господство разума над человеческими убеждениями и помыслами. Швейцер пишет, что разум «отнюдь не сухой, холодный рассудок, подавляющий многообразные побуждения нашей души, а совокупность всех функций нашего духа в их живом взаимодействии. В нем наше познание, наша воля ведут между собой таинственный диалог, определяющий нашу духовную сущность». Разум проявляется в мышлении. Далее Швейцер указывает, что помочь новому поколению «можно, только вновь наставляя на путь мышления» [610, с. 74]. По Гегелю: «Только мышление делает душу, которой наделены и животные, – духом». При таком естественном подходе к духовной культуре разум и духовность неотделимы друг от друга.

Существуют и другие воззрения на природу человека, его разум. Известный российский писатель и философ М. И. Веллер [80, с. 24] предлагает «энергетический» подход: «Разум – это способность при минимальных расходах собственной энергии организовывать и запускать процесс с вовлечением в него и преобразованием *принципиально не ограниченного* количества энергии окружающего Космоса... Суть человека – как можно больше чувствовать и как можно больше делать, для чего приходится как можно больше думать». Но и при таком понимании роль разума весьма велика и высока.

Воспитание есть всемерное развитие разумного начала в человеке. Оно складывается из двух вещей:

1) **развитие мышления;**

2) **воспитание потребности и воли следовать голосу разума.**

Ум человека укрепляет дух и совесть, а они в свою очередь помогают человеку встать и идти по пути истины. Найти верное решение, сделать правильный выбор, отличить добро от зла не всегда легко. Но надо всячески стремиться к этому, опираясь на рациональное мышление, логику и прислушиваясь к своей совести.

Образование и власть

Задача образования и воспитания – это формирование интеллекта, нацеленного на то, чтобы человек освоился в окружающем мире и развил себя. Народное образование – важнейшая функция государства. Нормальное государство обязано всесторонне поощрять гуманитарное образование, а интеллектуальная элита должна влиять на государство, делать его разумным. Конечно, государство не может бросить все на рынок или все строго регламентировать. Но через законы и их соблюдение государство обязано быть правовым, праведным, справедливым, в первую очередь к своему народу, т. е. социально справедливым. Ведь, в конечном счете, справедливость разумна, а несправедливость – нет.

Если же власти сознательно избирают не народный, а бюрократический или олигархический путь для страны, при котором происходит невиданное расслоение общества, обрекающее не одно поколение на несправедливость, если для разумного решения экономических проблем не хватает умения или воли власти, если рачительное отношение к человеческим и природным ресурсам (скажем, необходимость ренты) подвергается сомнению и очевидные шаги не предпринимаются, то и о разумности такой власти говорить не приходится. Если центральные СМИ нагнетают чувство тревожности, сиюминутности жизни (раньше пропагандировалась вера в завтрашний день), постмодернистские настроения, сугубо эгоистические интересы, низкопробные вкусы, одним словом – антикультуру, то разве можно назвать такую политику разумной, отнести ее представителей к интеллектуальной элите? Если некоторые продвинутые умы снисходительно поучают нас, что власть и нравственность несовместимы, то какую же школу разума они закончили и какую предлагают нам? Если в чьих-то головах власть и нравственность несовместимы, то это положение еще не есть закон всемирно исторического значения, а просто является недоработкой воспитания.

Существует угроза неконтролируемого взаимодействия причины и цели, что может привести к гибели человечества [206]. И действительно, человек постоянно совершенствует средства массового уничтожения; стремительно ухудшается экология планеты; представляют большую опасность для жизни растущая наркомания, новые не известные медицине болезни, тотальная компьютеризация, духовное обнищание масс и элит. Поэтому не столь уж бессмысленным выглядит известное заявление А. Кестлера о том, что биологический вид Homo Sapiens в целом есть ошибка эволюции.

В идеале, в разумном государстве власть и интеллектуальная элита не противостоят друг другу, а гармонично взаимодействуют во благо всего общества. Основой такой гармонии может и должно стать подлинно гуманитарное образование, которое одно способно разрешить назревшие мировые дилеммы «Личность и цивилизация», «Богатство и нищета», «Государство и насилие», «Истина и интерес». В последние годы остро встала проблема терроризма, особенно международного терроризма. Эта проблема тесно связана с указанными дилеммами и требует очень взвешенного, разумного подхода. Мы знаем, что существует и государственный терроризм, применяемый как по отношению к своему народу, так и к другим «неугодным» государствам. И только разум, индивидуальный и совокупный, способен если не разрешить, то, по крайней мере, сгладить имеющиеся противоречия. В любом затянувшемся конфликте между богатым и бедным, сильным и слабым, умным и не очень большую вину несет первый, ибо у него больше возможностей для разумного решения вопроса и быстрейшего выхода из кризиса.

В разделе «Проблемы национальной безопасности» журнала «Философские науки» (в первых трех номерах за 2006 год) помещена больша статья О.Н. Смолина [501]. В ней автор рассматривает образование и науку в качестве важнейших факторов и основы модернизации и обеспечения национальной безопасности страны. Но успешному реформированию страны мешают существующие противоречия в образовательной и научно-инновационной политике постсоветской России – в работе названо и проанализировано семь таких парадоксов. Похоже, что власти в России «не видят дальше своего носа», правительство «наступает на одни и те же грабли» ошибок, властная и олигархическая элиты цивилизационно необучаемы.

Единственным шансом спасения страны О. Н. Смолин считает «путь опережающей модернизации», движущей силой которой могут успешно выступить образовательная и научно-инновационная политика. Одним из главных условий опережающего развития является отказ от революционной организационно-управленческой практики в образовании и науке; «сохранение накопленного потенциала в данном случае важнее реформирования». Тем самым, модернизация России настоятельно требует изменения курса во внутренней политике страны.

В октябре 2005 года в Государственной Думе РФ прошла конференция по проблемам современного отечественного образования. Проведённое на ней сплошное анкетирование участников конференции, являющихся экспертами по образованию, позволяет уверенно сделать следующие выводы [282]: 1. Политика нашего правительства в области образования неудовлетворительна, а сама система образования не выполняет своих функций. 2. Модернизация образования вредит народному образованию, в сфере образования наблюдаются регресс и нарастание энтропии. 3. Интересы и законные права родителей учащихся на практике не реализуются.

Общее математическое образование

В современном обществе математика играет все большую роль. Математика есть универсальный язык науки и мощный метод научного исследования. Математика – это и самая безупречная логика, и объективная доказательность, и наиболее совершенный способ мышления. История математики являет собой грандиозное свидетельство интеллектуального развития человечества за последние тысячелетия. По словам М. В. Ломоносова, «математику уже затем учить надо, что она ум в порядок приводит». Это относится и к представителям гуманитарных профессий.

В 1988 году Рональд Рейган в докладе «Нация в опасности», адресованном американскому Конгрессу, говорил: «Кичась своей демократичностью, Америка позволила старшеклассникам называть, по своему выбору, три главных, с их точки зрения, учебных предмета, по которым они хотели бы быть аттестованными. Разумеется, лишь

10-12% молодых людей пожелали видеть среди этих трех предметов математику. И результат не замедлил сказаться: за десятилетие с лишним эта демократичность привела к тому, что молодые юристы стали хуже логически мыслить, молодые врачи стали хуже лечить, чем их более зрелые коллеги в бытность их в том же возрасте, вновь испеченные экономисты стали хуже понимать законы рынка». Президентом была поставлена задача резкого улучшения математического образования в США, и на решение этой задачи срочно было выделено 5 миллиардов долларов.

С 50-х до 90-х годов XX века образование в СССР было лучшим в мире, что позволило стране достичь крупных успехов в науке и технике, и это несмотря на тогдашнюю деградирующую в целом партийно-политическую систему. В настоящее время России необходимо возрождение общего школьного образования и развитие высшего образования, что невозможно без модернизации математического образования, как в обычной школе, так и в вузе любого профиля. Отметим, что и как учебный предмет математика является стержнем гуманитарного образования [376].

Одной из важнейших особенностей российского образования было повышенное внимание к математике и ее преподаванию, которое в современном информационном мире должно лишь усиливаться.

Математика для гуманитариев

Математика стала неотъемлемой составной частью высшего профессионального образования будущих психологов, юристов, историков, филологов, учителей нематематических дисциплин. Обучение математике студентов-гуманитариев преследует три главных цели:

1) общенаучную, представляющую математику как важнейшую форму научного познания и необходимый элемент мировой культуры;

2) развитие логического мышления, столь значимого для любого современного специалиста;

3) профессиональную, где математика выступает в качестве инструмента работы и исследований конкретного специалиста.

Пусть лучше гуманитарий не знает физики, чем не понимает красоту математических абстракций и построений.

Существуют разнообразные подходы к обучению математике студентов гуманитарных специальностей – от самых упрощенных курсов, состоящих из разрозненных рассказов или «сказок» о математике, до весьма серьезных курсов, преподаваемых гуманитариям так же, как и будущим математикам-профессионалам. Нужно иметь чувство меры, искать «золотую середину». Для этого требуется выделить инвариантное ядро предлагаемого гуманитариям общего курса математики, которое отвечало бы целям и функциям обучения математике. Мы выделяем два раздела – «Дискретная математика» и «Математические модели», которые должны обязательно входить в ядро курса математики для гуманитариев. Отдельные вопросы общего курса и полнота соответствующего материала, методика их изложения могут варьироваться с учетом количества часов, отводимых на изучение математики, конкретной специальности и уровня подготовки студентов-гуманитариев.

Разумеется, гуманитариям нужны и другие курсы или спецкурсы, тесно связанные с математикой. Так, например, социальным психологам и политологам необходимо знание элементов математической статистики, поскольку они широко пользуются методами группового анкетирования и репрезентативного опроса. А, скажем, будущим историкам или юристам курс математической статистики не обязателен.

Примерная программа общего курса математики

Предисловие. Что такое математика? Объект, предмет, природа, специфика, статус, методы математики. Математика как особая форма мышления и научного познания.

Раздел 1. ***Дискретная математика***

1. **Множества, числа и функции.** Понятие множества. Отношения принадлежности и включения. Пустое и универсальное множества. Диаграммы Эйлера-Венна. Развитие понятия числа. Основные числовые множества. Числовая прямая. Операции над множествами и их важнейшие свойства. Прямое произведение множеств. Координатная плоскость. Правило суммы для двух и трех конечных множеств. Мощность множества. Понятие функции. График функции. Композиция функций. Элементарные функции.

2. **Комбинаторика.** Правило произведения. Размещения, перестановки и сочетания. Свойства сочетаний. Метод 0-1-кодирования.

3. **Вероятность.** Определение классической вероятности. Понятия статистической и геометрической вероятности. Сумма и произведение вероятностей. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Схема Бернулли. Понятие дискретной случайной величины. Ее математическое ожидание и дисперсия.

4. **Графы.** Исходные понятия теории графов. Применения.

5. **Логика высказываний.** Высказывания и логические операции над ними. Формулы логики высказываний и таблицы истинности. Логическое равенство формул логики высказываний. Логическое следование и правила вывода. Законы логики. Проверка правильности рассуждений. Совершенные дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы; применение к анализу контактных схем.

Раздел 2. *Математические модели*

1. **Понятие модели.** Примеры математических моделей. Одномерные и многомерные модели, дискретные и непрерывные модели, жесткие и мягкие модели. Метод математического моделирования.

2. **Модели динамики популяции.** Жесткая (грубая) модель Мальтуса. Логистическая модель. Экспоненциальная модель с отловом. Логистическая модель с отловом. Мягкая логистическая модель с отловом.

3. **Модели конфликта.** Модель Ланкастера военного конфликта. Модель Лотка-Вольтерра борьбы за существование.

4. **Метод выпуклого анализа.** Системы линейных уравнений и линейных неравенств. Задача о встрече. Производственная и транспортная задачи. Задача о диете.

5. **Игры.** Простейшие матричные задачи.

Прокомментируем предложенную программу. По сравнению с непрерывной математикой дискретная математика стала занимать все большее место как в самой математике, так особенно в ее приложениях. Это обусловлено современным процессом компьютеризации, развитием информационных технологий. Человек в своей практической деятельности всегда имеет дело с конечными объектами: словами (конечными последовательностями символов), обозримыми рациональными числами, алгоритмами. Значения иррациональных величин заменяются приближенными рациональными значениями.

Вычисления даже по самым совершенным формулам проводятся по модулю рациональности. Непрерывная (бесконечная) математика остается фундаментом современной математики. Однако любая непрерывная процедура имеет дискретные аналоги, которые поддаются программированию и компьютерной обработке. Для применений математики достаточно знания дискретной математики и информатики. Поэтому инвариантное ядро общего курса математики для нематематиков должно содержать в первую очередь элементы дискретной математики. В разделе 1 указан тот минимум тем дискретной математики, который нам представляется обязательным для изучения.

Метод математического моделирования – универсальный способ применений математики, важнейший инструмент научного познания и описания реальности. В то время как линейное программирование (выпуклый анализ) и теория игр являются классикой прикладной математики, модели динамики популяции и модели конфликта можно заменить в программе курса другими моделями, более подходящими для той или иной специальности. В пункте 1 раздела 2 желательно привести простые примеры непрерывных моделей, использующие начала математического анализа (элементы дифференциального и интегрального исчислений).

Методика обучения гуманитариев математике

Г. И. Саранцев [480] вычленил и проанализировал 11 функций обучения математике: образовательную, воспитательную, развивающую, эвристическую, эстетическую, прогностическую, практическую, контрольно-оценочную, информационную, корректирующую и интегрирующую. В предисловии к книге [338] ее редактор Г. Д. Глейзер отмечает, что математическое образование важно со следующих точек зрения: логической, познавательной, прикладной, исторической и философской.

По данной проблематике в рамках вузовской методики обучения математике достаточно активно публикуются статьи и книги, пишутся диссертации. Однако до создания приемлемой методики обучения математике гуманитариев, отвечающей запросам времени, еще очень далеко.

Выделим основные методические аспекты обучения математике студентов гуманитарных специальностей.

1. Курс математики не нужно примитизировать, излагая и объясняя материал «на пальцах». Математика – дисциплина серьезная.

2. Не следует вдаваться во второстепенные детали, копаться в профессионально-математических тонкостях и логических изысках. «Лучше меньше, да лучше».

3. Необходима мотивировка основных понятий, фактов, методов и теорий. Важна методологическая, историко-генетическая и практическая подоплека изучаемой математической реальности, что всегда вызывает большой интерес у студентов. Поэтому так полезны историко-математические и философские экскурсы, выполняющие социокультурную функцию.

4. Формулировки математических понятий и фактов должны быть достаточно строгими. Нужно разъяснить студентам, что первичные понятия (множество, высказывание, вероятность) допускают лишь определенные описания, позволяющие их узнавать и отличать. Точно так же, как аксиомы в математике не доказываются, первичные понятия строго не определяются (по своему статусу).

5. Предлагаемые студентам рассуждения должны быть интуитивно убедительны для них. Объяснять достоверность математических фактов полезно на модельных примерах, т. е. на типичных примерах общего характера. Доказывать все формулируемые утверждения вовсе не обязательно. Но если мы беремся доказывать теорему, то это желательно сделать, по возможности, логически четко.

6. Работу алгоритмов и математических методов достаточно показать на модельных примерах. Так, метод (алгоритм) Гаусса решения систем линейных уравнений следует демонстрировать на характерных примерах.

7. Трудно переоценить роль принципа наглядности, образности. Изложение теоретического материала нужно сопровождать наглядными иллюстрациями и интуитивными образами: геометрическими фигурами, чертежами, диаграммами, таблицами; графами. Использовать компьютерную графику.

8. При подборе примеров, задач и упражнений весьма желательно учитывать принцип профессиональной направленности обучения

математике студентов конкретной специальности. Скажем, будущих юристов надо учить решать задачи на выявление логических противоречий, они должны владеть методами проверки рассуждений на логическую правильность.

9. Особое внимание необходимо уделить понятию математической модели и методу математического моделирования. Определение модели требует выделения и разделения понятий объекта и его модели. Модель выступает как аналог, двойник, копия, заменитель, образ, изображение, описание данного объекта. А объект служит прототипом, прообразом, оригиналом для своей модели. См. §5.

10. Следует иметь в виду и связь общего курса математики с другими дисциплинами, например с традиционной логикой и информатикой. Было бы идеальным практические занятия, связанные с математическими моделями, проводить в компьютерных классах. Необходимые внутримодельные расчеты должны производить сами студенты на основе тех или иных компьютерных программ, скажем, табличного процессора Excel.

Литература: [17, 80, 81, 94, 132, 173, 206, 229, 230, 249, 255, 276, 282, 287, 331, 338, 376, 384, 463, 474, 480, 499, 501, 503, 610].

§ 24. Традиции и новации

На основе прошлого познаем будущее,
на основе ясного познаем скрытое.
Мо-Цзы

В геометрии нет царских путей.
Евклид

Общие замечания

Дополним приписываемое Евклиду изречение. Нет царских путей в геометрии как науке, в познании и обучении геометрии. Но, конечно, геометрия (читай: математика) сама является царским путем в научном познании.

Рассмотрим ряд философских аспектов дидактики и методики преподавания математики. **Дидактика** (от слова *поучительный*) математики есть теория образования и обучения математике. Сразу подчеркнем, что под методикой преподавания математики мы понимаем, прежде всего, *методику изложения* и *преподнесения* материала. Само слово **методика** расшифровывается нами как Метод и К°. Это означает, что в методике все вращается (и все крутятся) вокруг методов рассуждений, доказательств и построений, приемов введения новых понятий и идей, способов изложения, методологических подходов. Как говорил Н. И. Лобачевский, «в математике всего важнее способ преподавания». В строгом смысле никакая методика обучения предмету (как и философия) не является наукой, а представляет собой сплав педагогического опыта (индивидуального и/или коллективного), интуиции и искусства, облеченный в научную форму.

Дидактика математики включает в себя методику математики, как, в известном смысле, теория включает практику. Методика – это прикладная дидактика. Наверное, докторские методические диссертации (математика) должны соответствовать уровню дидактики математики, в них строятся и обосновываются новые методические системы и решаются крупные теоретические проблемы обучения математике. За последние 20 лет защищены десятки докторских диссертаций по теории и методике обучения и воспитания математике. Они строятся по единому шаблону, наукообразны, многословны, написаны на «птичьем языке» [462], в авторефератах нет ссылок на источники. Среди них немногие выделяются своей логикой и содержанием. В книге Г. И. Саранцева [479] приведены характерные примеры.

Методические кандидатские диссертации решают более узкие, прагматические, практически направленные вопросы, связанные с конкретной методикой решения и исследования различных тематических задач или методикой изучения и формирования тех или иных ключевых понятий. Они не обязаны содержать так называемые «методические теоремы» (термин Г. И. Саранцева), но должны четко и обоснованно представить алгоритмы организации более продуктивного обучения тому или иному разделу математики. Здесь важны конкретные работы, практически полезные и научно обоснованные. Скажем, при обучении в профильных классах, особенно в работе с одаренными школьниками, преподаватель хоть немного, но должен быть задачным композитором. Таковым является энтузиаст своего дела доцент А. Ю. Эвнин из Южно-Уральского госуниверситета.

В педагогической и методической сферах продолжает процветать кампанейщина. Прошла волна гуманитаризации и гуманизации математического образования в нашей стране. Ей на смену уже накатывал поток инновационных технологий, грозивший смести и классическую классно-урочную систему обучения, и традиционные ЗУНы. Ученые методисты соревнуются в определениях понятия технологии, придумав уже более 50 толкований. Эти определения имеют только одно общее свойство – возможность повторить испытание. Подобная «инженерия» бесполезна и даже контрпродуктивна. На наш взгляд, термины «технология» и «методика» в применении к математике синонимичны.

В последние годы методисты подняли знамя компетентностного подхода, некритически заимствованного у Запада. Все образование и обучение разложены на отдельные «компетентности», без которых, оказывается, и шагу ступить нельзя. Но ведь компетентность означает просто быть специалистом, профессионалом в своем деле.

Некоторые ученые от методики начали пропагандировать необходимость модного синергетического подхода в методической науке, плохо (вообще не) понимая, что это такое.

Снова востребован принцип фундаментализации при изучении математики, соединение образования с наукой. Зазвучала дельная идея профильного обучения в школе. Главное, чтобы не заболтать эти основополагающие линии в отечественном образовании.

Многие кампании в педагогике сопровождаются бумом защит надуманных и слабеньких диссертаций, не имеющих к настоящей науке и реальной учебной практике никакого отношения. В журнале «Философские науки» имеется рубрика «Философия образования», в которой печатаются аналитические материалы, касающиеся современного состояния и перспектив образования в России и мире. Статья В. М. Розина [461] посвящена проблемам педагогики. В ней показано, что педагогика испытывает нарастающий кризис, усугубляемый «выходом на сцену множества педагогических практик». И далее: «Переходность эпохи ставит педагогику в чрезвычайно сложную ситуацию, поскольку становится невозможным понять, кого школа должна формировать, каковы идеалы образованного человека; как следствие – затруднения и колебания в определении целей и содержания образования. Не означает ли сказанное, что до сих пор мало осмыслены в ближайшей перспективе большие педагогические программы реформирования образования?».

А как обстоят дела с математическим образованием в действительности?

Г. В. Дорофеев и Т. Н. Миракова [358] не без оснований утверждают, «что традиционное математическое образование не оправдывает надежд на развитие и воспитание человека, способного к практическому применению полученных знаний, к использованию их в непредвиденных ситуациях». И предлагают программу «коррекционного» спецкурса «Технология гуманитарно ориентированного обучения математике в школе и ее реализация в современных учебниках» для будущих учителей математики в объеме 72 аудиторных часов.

Н. Х. Розов [462, 464] приходит к выводу, что в школьной математике необходимы существенные изменения, касающиеся содержания предмета, методики и форм обучения. Современная математика шагнула далеко вперед, а в школе изучается математика XVIII века. В частности, в [464] отмечено, что «в разряд общеобразовательных уверенно можно отнести такие понятия, как бифуркация, фрактал, хаос… С этими понятиями работают и физики, и социологи, и биологи, и философы. И школьный курс математики обязан знакомить молодежь с этими понятиями, хотя бы в описательно-наглядном плане». Н. Х. Розов резко критикует искусственную «математику вступительных экзаменов».

В качестве иллюстрации приведем одну ***тестовую задачу***, предлагавшуюся московским школьникам в 2004 году:

Маша живет от школы на расстоянии 2 км, а ее одноклассник Ваня – на расстоянии 5 км. На каком расстоянии друг от друга живут Маша и Ваня?

Подавляющее большинство школьников не решили эту задачу, потому что они приучены к задачам с однозначным ответом. Даже академик В. А. Садовничий возмущался ее формулировкой, указывая на континуум решений. Но задача-то естественная; подобные проблемы встречаются в реальной жизни. Если чуть-чуть творчески подойти к данной задаче, то ответ становится очевидным: множеством решений (в км) служит числовой отрезок [3; 7]. Можно также изобразить ситуацию геометрически, нарисовав две концентрические окружности радиусов 2 см и 5 см с центром в «школе». И все увидеть!

Несколько лучше складывается ситуация с высшим математическим образованием. Но там свои проблемы. Например, платное обучение необучаемых студентов. Хотя система образования консервативна (за счет чего еще держится), тем не менее, разумные новации нужны. Эти новации касаются компьютерных вычислений и графики, новых форм организации самостоятельной и исследовательской работы студентов, разработки электронных учебников, структуры и организации современной лекции и т. д. На аудиторных занятиях главное – мотивированно заинтересовать студентов и довести материал до понимания.

Но новации «инновациям» рознь. Хорошо, что в учебный процесс внедряются информационные технологии. Однако и здесь необходимы чувство меры и понимание того, что, где и как можно и нужно внедрять. Скажем, проведение лекции в виде презентации, т. е. чередования на экране слайдов, непрофессионально, совершенно непродуктивно и бессмысленно. Математические дисциплины так «читать» нельзя. Наши основные ТСО – мел, доска и тряпка. На аудиторных занятиях по математике целесообразны лишь отдельные мультимедийные вкрапления, актуализирующие, например, восприятие сложных геометрических объектов, их построение и преобразования «в движении».

Мало кто из методистов-математиков приближается к научно-методическому уровню профессоров Г. В. Дорофеева (см. его прекрасную книгу [188]) и С. Р. Когаловского [266-268]. Явно не достает добротных современных школьных учебников по математике. Выделяется цикл учебников по алгебре профессора А. Г. Мордковича [369, 370], по праву получившего за созданный им удивительный учебно-методический комплекс премию Президента России.

Важно понимать, что методика обучения математике еще не стала настоящей наукой. Некоторые известные методисты, скажем, В. А. Гусев, считают, что рано говорить о теории обучения математике. Он также поднимает проблему о роли психологии в методике обучения математике [171], отмечая в своих докладах, что математики-методисты не знают психологию, а психологи не понимают математику. Сначала должны сформироваться четкий категориальный аппарат науки и ее методология. Первые попытки делаются, так, Г. И. Саранцев выпустил монографию «Методология методики обучения математике» [479].

Накопленный поколениями опыт есть лучшая методическая наука. Главное в нем – *реализм* (здравый смысл, исправление ошибок, совершенствование языка). Но мы тоже – поколение, и должны сказать свое слово. Возможно, это слово – в понимании глубинных смыслов, но никак не в инноватике. *Разумный консерватизм* является фундаментальным и охранным принципом образования и обучения. Он делает возможным эволюционное развитие общества, гармоничное разрешение дилемм «Личность-Цивилизация» и «Потребление-Самоограничение». Если какая-то система в целом хорошо работает, то ее не надо реформировать, а следует только обновить устаревшие детали. Принцип умеренного консерватизма означает приоритет традиций, опыта, устоявшихся сбалансированных подходов, а также осторожность, продуманность, просчитывание наперед при введении новшеств. Обновление необходимо, но не ради зуда новаций, а ради естественного совершенствования сущего. Сторонники резких перемен наивны или самонадеянны, амбициозны или корыстны; они, в конце концов, догматичны, поскольку призывают руководствоваться лукавым штампом: «Если не добьемся кардинальных изменений, то будет хуже». Нет нужды улучшать хорошее, но надо хорошо делать свое дело, решать действительно насущные задачи.

Двадцатое столетие дало великолепные образцы изложения и преподавания математики, о которых следует помнить. Не зная их, мы порой и изобретаем «хорошо забытое старое». Достаточно назвать книги, доклады и лекции Н. Н. Лузина [315], Г. М. Фихтенгольца [568], П. С. Александрова [8], А. Г. Куроша [293], Н. В. Ефимова [205], А Я. Хинчина [586, 588]. Эти крупные русские ученые умело беседуют со своими читателями и слушателями, естественно вовлекая их в прекрасный мир математики. Конечно, можно назвать и многих зарубежных изумительных авторов-математиков, таких, как Вейль, Клейн, Курант, Линдон, Энгелькинг и т. д. Современные монографии и учебники по математике написаны более лаконично и формально, но многие из них привлекают отточенностью формулировок и совершенством символики.

Пути обучения математике

Существуют различные пути обучения математике, исходящие из тех или иных дидактических и психолого-педагогических принципов и опирающиеся на подходящие теории и модели в образовании и обучении. В дидактике, педагогике и психологии разработаны самые разнообразные системы и теории обучения, образования и воспитания человека (на разных этапах его совершенствования). Обучение развивающее, проблемное, гуманитарно-ориентированное, личностно-ориентированное, историко-генетическое, генетико-концентрическое, концентрированное (погружение), поэтапное, непрерывное, технологическое, междисциплинарное, дистанционное и т. п. Образовательные подходы: знаниевый (ЗУНы), деятельностный и социокультурный. Модели воспитания и образования: авторитарные (скажем, при тоталитарных режимах), гуманистические (например, педагогика ненасилия Л. Н. Толстого), индивидуалистские (американский стиль), коллективистские (вспомним А. С. Макаренко и В. А. Сухомлинского), сотрудничества (можно назвать школу М. П. Щетинина) и т. д.

Действенное и успешное обучение математике предполагает следование определенным принципам, применяемым на соответствующих этапах процесса обучения. В арсенале дидактики и методики имеются такие принципы обучения, как наглядность и абстрактность, доступность, научность и фундаментальность, дифференциация и интеграция, систематичность и последовательность, цикличность и восхождение по спирали, «повторение – мать учения», целеполагание, отбор содержания, преемственность, пропедевтика и генерализация знаний, внутрипредметные и междисциплинарные связи, мотивация учения, первенство методологии, практическая и профессиональная направленность, активность познания, эстетичность, взаимосвязь непрерывного и дискретного, моделирование, предметность, развитие и воспитание, креативность. В различных методических системах обучения выделяются и обосновываются, ставятся во главу угла некоторые ведущие принципы, согласно которым вырабатываются конкретные методики и модели обучения.

Перечислим исследования и книги некоторых российских методистов-математиков: [27, 28, 145-147, 150, 161, 170-172, 178, 188, 189, 201, 208, 216, 225, 226, 266-268, 277, 285, 351-353, 358, 368, 376, 392, 398, 399, 402, 420, 439, 440, 460, 462-464, 479-481, 487, 500, 505, 507, 520-522, 536-538, 576, 626, 633].

Чуть подробнее остановимся на одном интересном и глубоком пути обучения математике школьников – *онтогенетическом подходе*, развиваемом С. Р. Когаловским [266-268]. При обучении учащихся важнейшую роль должны играть *допонятийные* и *внепонятийные* формы мышления. Соответственно этому *объектом* математики (в методическом плане) являются «обыденные, размытые, диффузные пространственные формы и количественные отношения». При этом *предметом* математики как учебной дисциплины становятся «идеальные математические объекты и формально-логические средства их исследования» [267, с. 81], выступающие в качестве объекта математики в традиционной педагогике математики. Процесс обучения математике превращается в движение от объекта к предмету, от нечетких и неясных представлений к идеальным понятиям и моделям. Такой путь научения должен опираться на психологию, следовать психологическим законам развития интеллекта, отвечать целям развивающего обучения. По Когаловскому, онтогенетический подход предполагает активное использование триад *нестрогое* *понятие→моделирование→строгое понятие* и *метод→учебная задача→поиск*. Именно на этом пути возможна и продуктивна Большая Логика (читай: диалектика), «настраивающая на восхождение к теоретическому уровню мышления». Применение онтогенетического подхода успешно продемонстрировано С. Р. Когаловским и его соавторами на примере формирования понятия предела у учащихся в книге [268].

В связи с гносеологической ролью допонятийных и внепонятийных формы мышления отметим значение *неявного знания*, теорию которого развил М. Полани [430].

Далее обсудим некоторые интуитивно ясные исходные положения методики обучения высшей математике, которые хорошо согласуются со здравым смыслом и опытом повседневной работы.

Традиционность подходов и определений

Фундаментальные математические понятия (функции, производной, определителя, группы) имеют устоявшиеся определения. В процессе историко-генетического и внутренне-логического развития данного математического понятия выкристаллизовываются обозначающий его термин и основные определения. Из основных определений, если их несколько, в литературе закрепляется одно ведущее методически обусловленное определение. Такой отбор может быть вызван эстетическими соображениями (простота, логичность, наглядность, эффективность). В результате получается классическое определение понятия. На наш взгляд, определения, эквивалентные классическому варианту, желательно преподносить как теоремы характеризации.

Представляется совершенно очевидным, что в вузовском курсе математики важнейшие понятия должны определяться классически, а начала соответствующих теорий следует излагать традиционно. В противном случае будут принципиальные ошибки и бесполезная потеря времени, появится новое поколение недоучек. Методические эксперименты можно ставить только на устойчивом фундаменте традиционных знаний.

Скажем, производную функции в точке необходимо вводить как предел отношения приращения функции к приращению аргумента в данной точке. И правила дифференцирования должны доказываться на основе этого классического определения. Другие подходы к изложению основ дифференциального исчисления для первокурсников методически ущербны. Нестандартный математический анализ может успешно изучаться лишь на базе классического математического анализа. Изучение аналитической геометрии нельзя начинать с определения векторного пространства. В общей алгебре (мультипликативную) группу следует определять как полугруппу с единицей, все элементы которой обратимы. Конечно, группу можно определить более осязаемо, как группу преобразований множества, но этот эквивалентный подход лучше сформулировать в виде теоремы Кэли.

Естественность и разнообразие методов

После того как традиционный подход осуществлен и самые начала математики студентами усвоены, вполне возможно и даже желательно разнообразить арсенал методических приемов преподавания и естественных методов доказательства последующих теорем. Здесь пригодятся общие идеи и абстракции более высокого логического уровня. Так, ниже на основе теоремы о гомоморфизмах для векторных пространств мы докажем несколько других теорем линейной алгебры и покажем действенность порядкового подхода при (повторном) анализе ряда классических математических понятий. Наиболее значимые теоремы полезно доказать двумя способами – стандартно и обобщенно. Оба доказательства должны быть естественными: первое – в рамках традиционного подхода, а второе – в качестве приложения общих идей. Приложение III содержит теоретико-групповые доказательства важнейших теорем элементарной теории чисел. Заметим, что основные теоремы мы сначала поясняем «на пальцах», а затем уже строго доказываем. Эффективным организационно-методическим способом обучения является выдача студентам для предварительного ознакомления текста одной или нескольких очередных лекций, а также широкое использование электронных учебных пособий.

Нетрадиционные подходы и нестандартные методики можно успешно реализовать в научных кружках, на факультативных занятиях, при выполнении курсовых и дипломных работ.

Прочность знаний и автоматизм навыков

За последнее десятилетие заметно снизился уровень математических знаний у выпускников средних школ. В то же время резко выросло число диссертаций по методике обучения математике. Разумеется, это противоречие имеет свои как объективные, так и субъективные причины. Один из факторов – слабые и необоснованные инновационные методики. Передовые методисты отбросили некогда любимые ими ЗУНы и, минуя их, стали рассуждать о самостоятельном добывании знаний, развитии творческого мышления, деятельностном подходе. Без прочных знаний основ математики и элементарных навыков оперирования невозможно постигнуть высшую математику. Определенный минимум формул и правил, включая таблицу умножения, необходимо вызубрить, знать наизусть. В пользу автоматизма простейших действий известный английский математик и логик А. Уайтхед высказался так: «Это ошибочный трюизм, что необходимо развивать привычку думать над тем, что мы собираемся делать; как раз наоборот. Цивилизация продвигается вперед, увеличивая число важных операций, которые мы можем совершить, не размышляя о них. Размышления должны производиться лишь в решающие моменты». Подчеркнем важность знания наизусть основополагающих математических формул и методов их доказательства. Необходимо прочное запоминание начал и доведение до автоматизма простейших действий. В процессе овладения учащимися учебной дисциплиной вопрос *как* делать что-либо не менее важен, чем *почему* так следует делать. Самые элементарные математические действия (простые вычисления, операции, преобразования) надо учиться выполнять не задумываясь, автоматически. Для этого требуются твердое знание определенного минимума формул и регулярные упражнения. Учить человека мыслить и самостоятельно добывать знания можно только на фундаменте «пресловутых» умений и навыков, на основе опыта и традиций.

Тестовый контроль

Тестирование – важный инструмент проверки знаний и умений учащихся. Однако обычные тесты не контролируют понимание материала. Необходимы элементарные тесты на понимание. Приведем один такой тест, который мы апробировали в нескольких педвузах (результаты оказались не очень утешительными).

1. Что такое π?

2. Как вычислить число e с точностью 0,01?

3. Выведите формулу площади прямоугольного треугольника с катетами a и b с помощью интегрирования.

4. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, наугад вынимаются 2 шара. Какова вероятность того, что они окажутся разного цвета?

5. Докажите, что $\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}$.

6. Решите уравнение $1+x^2=\cos x$.

7. Чему равно число всех делителей числа 2006?

8. Если (a_n) – сходящаяся числовая последовательность, то что можно сказать о сходимости последовательности $a_1, 2a_2, a_3, 2a_4, \ldots$?

9. Через сколько лет удвоится сумма вклада в банке при ежегодном приросте в 10%?

10. Тело массой 1 кг содержит 99% воды. Какой стала масса тела после того, как в нем в результате испарения осталось 98% воды?

Учить думать, а не нажимать на кнопки

Как восклицал Декарт, «я мыслю, следовательно, существую». В. И. Арнольд отмечает, что современному преподаванию вредят излишняя формализация и американизация. Формализация в обучении заключается в акценте на изучение, прежде всего, формальных свойств объектов и операций над ними. Так, на вопрос «Чему равно 2+3?» западные ученики обычно отвечают: «2+3 = 3+2», а не «2+3 = 5». Они, как правило, очень плохо считают (а зачем, когда есть калькулятор и компьютер). Американизация означает, что учить следует только тому, что нужно для практики и компьютеризации. Погоня за практикой («паровозная математика») гибельна для науки. В школе вредна также сплошная алгебраизация арифметических задач, поскольку она не учит мыслить. Необходимо будить мысль учащегося, по возможности следуя по пути научного открытия, двигаясь от конкретного и интуитивного к общему и абстрактному.

Первичность интуитивного подхода

Обратимся к статье Мориса Клайна «Логика против педагогики» [257]. Клайн понимает интуитивный подход в преподавании как некий непосредственный охват идеи, понятия или доказательства. В основе интуиции, по-видимому, лежат чувства. Поэтому полезными оказываются *наглядные изображения* и *эвристические соображения* (например, 3+4 = 4+3 влечет $a+b = b+a$). Феликс Клейн замечает: «Для меня непостижимо, как можно проследить геометрическое доказательство чисто логически, не имея перед собой чертеж». Логика рассуждает и критикует, а интуиция открывает. По Адамару, «логика просто освещает завоевания интуиции».

Клайн уверен, что доказательство должно лишь убедить ученика. Не учитель должен быть удовлетворен, а ученик. Не существует строгих окончательных доказательств. Разумная педагогика требует идти на компромисс. «Математика столь же совершенна, как и человек, а люди несовершенны» (Пуанкаре). Имеет глубокий смысл приведенное выше психолого-педагогическое наблюдение А. Уайтхеда о важной роли операционных навыков и экономии мышления.

Стремление к красоте

«Сеять разумное, доброе, вечное» – профессиональный девиз учительства, напоминающий клятву Гиппократа у врачей. Разумное – это истина, доброе – этика, вечное – красота. Истина, Добро и Красота образуют триаду, «правящую миром». Первенство в этой триаде, на наш взгляд, принадлежит Красоте. В конечном счете, истинное, в том числе логическое, входит в понимание эстетического. В принципе истина эстетически привлекательна, ложь противна. Красота выше, обширнее и глубже истины. В то же самое время красота наглядна и интуитивно осязаема. Этические категории добра и зла, соответствующие понятиям истины и лжи, могут трактоваться как проявления красоты и антикрасоты.

Красота, целесообразность, совершенство, гармония – почти синонимы. В математике категория прекрасного, красота воплощаются в понятиях и идеях, методах и доказательствах, конструкциях и теориях.

Согласно принципу эстетического отбора выживают, остаются, входят в математическую классику только целесообразные и совершенные понятия. Все второстепенное со временем отмирает. Фундаментальные понятия, оригинальные идеи, универсальные методы, нестандартные подходы, совершенные теории – это красиво! Разумное обобщение часто приводит к упрощению, что также привлекательно и эффективно. Вспомним *теорему Гильберта о базисе*, с которой некоторые алгебраисты связывают возникновение абстрактной алгебры, или *теорему о дефекте и ранге линейного отображения*, из которой легко выводится ряд важных результатов линейной алгебры. (См. § 19.)

Излагаемое математическое знание должно быть эстетически оформлено, преподноситься учащимся логически последовательно, системно, доказательно и привлекательно. От метаязыка, на котором излагается математика, требуется образность и четкость, отсутствие двусмысленности. Весьма желательно, чтобы математические термины и обозначения отражали содержание материала. Каждый преподаватель математики в своей учебно-методической работе обязан искать меру между интуитивным и абстрактным, индуктивным и дедуктивным, анализом и синтезом, логикой и педагогикой.

Литература: [8, 27, 28, 145-147, 150, 161, 170-172, 176-178, 188, 189, 196, 201, 205, 208, 209, 216, 225, 226, 257, 266-268, 277, 285, 293, 315, 316, 338, 344, 351-355, 358, 368-370, 376, 392, 395, 398, 399, 402, 420, 430, 439, 440, 460-464, 479-481, 486, 487, 500, 505, 507, 520-522, 536-538, 568, 576, 577, 586-588, 626, 633].

§ 25. Конкретная методика

Тот, кто обращаясь к старому,
способен открывать новое,
достоин быть учителем.
Конфуций

Теории приходят и уходят,
а примеры остаются.
И. М Гельфанд

Рассмотрим некоторые конкретные методико-математические аспекты и темы.

Абстрактные понятия и их интуитивные прообразы

При изучении математических понятий и теорий психологически важна их мотивировка: конкретно-историческая (генезис понятия), внутренне-логическая, прикладная, философская. Каждое значимое научное понятие имеет реальные прототипы (вещи и явления действительности), на основе которых формируется *интуитивное* (образное, наглядное) понятие, или предпонятие, – прообраз данного *абстрактного* понятия. Возникает вопрос об их адекватности.

Отвечая на этот вопрос, выделим следующие моменты.

1. Математические модели позволяют более или менее адекватно выражать интуитивные понятия, о чем свидетельствует эффективность математики в приложениях.

2. Невозможно полное соответствие между математическими понятиями и их интуитивными прообразами. Как нельзя с абсолютной достоверностью описать обычным языком все многообразие мира, так и математическая действительность не может быть полно и строго отражена в формальном логико-математическом языке (вспомним теорему Геделя о неполноте и теорему Тарского о невыразимости истины).

3. Равносильность соответствующих абстрактного и интуитивного понятий нельзя строго доказать. Она не является научным фактом, в лучшем случае постулируется как правдоподобный, достаточно убедительный *методологический тезис* (напомним тезис Черча о равнообъемности интуитивного понятия алгоритма и его уточнений). При обучении новым понятиям полезно акцентировать внимание учащихся на соотношениях между интуитивным и абстрактным.

Рассмотрим понятие непрерывной функции. Классическое определение на «языке ε-δ» непрерывности числовой функции дал Больцано. Интуитивное понятие непрерывной функции ассоциируется с линией, проведенной без отрыва на координатной плоскости вдоль оси абсцисс. Как согласуются эти понятия? Можно высказать тезис об их адекватности (назовем его *тезисом Больцано*). Весьма правдоподобно, что все интуитивно непрерывные числовые функции и ε-δ непрерывны. Однако в обратную сторону тезис Больцано представляется малоубедительным – достаточно вспомнить о существовании непрерывных, нигде не дифференцируемых (не гладких) числовых функций.

4. Применение строгих дедуктивных рассуждений и методов к интуитивным понятиям может повлечь за собой недоразумения и противоречия, как в случае теоретико-множественных и логических парадоксов. В известном парадоксе «Куча» говорится о том, сколько зерен образует кучу. Одно зернышко кучи не образует, а, скажем, 10000 зерен составляют кучу. Достаточно ясно, что если к «не куче» добавить одно зернышко, то снова получим «не кучу». Воспользовавшись методом математической индукции, заключаем, что куч вообще не бывает. Получаем видимое противоречие. Однако у нас нет строгого определения кучи (например, куча начинается с 1111 зерен). Поэтому и применять строгие рассуждения к интуитивному понятию кучи нельзя.

5. Лучше усвоить математическое понятие позволяют *модельные примеры* (подробности см. далее) – его конкретные осязаемые модели, отражающие существенные свойства данного понятия. Модельные примеры развивают математическую интуицию, являются путеводителем в научных исследованиях. Обычные плоскость и пространство служат надежной основой для изучения произвольных конечномерных (и не только) действительных евклидовых пространств. Здесь, а также в абстрактной топологии, широко используется образный *геометрический язык*, привычные геометрические термины и обозначения.

О доказательствах

Дадим простую методическую классификацию доказательств, встречающихся в курсах высшей и элементарной математики.

1. Доказательства *«по определению»*. Речь идет о доказательствах, опирающихся только на правильное понимание определений рассматриваемых понятий, прямые ссылки на известные, ранее доказанные факты или аксиомы и элементарные логико-математические рассуждения (метод от противного, перебор случаев, математическая индукция и т. п.). Очень многие теоремы вузовских курсов математики можно доказать по определению. Так доказываются различные свойства понятий, исходные и некоторые основополагающие результаты.

2. Доказательства, основанные *на стандартных методах и алгоритмах*. Назовем такие универсальные методы, как алгоритм Евклида нахождения НОД, метод Гаусса приведения матрицы к ступенчатому виду, *метод половинного деления*, применяемый еще Больцано. Каждый из них является не только практическим способом нахождения или вычисления соответствующих величин, но и мощным теоретическим методом. Алгоритм Евклида применяется и к целым числам, и к многочленам, и в теории колец. Методом Гаусса можно доказать целый ряд теорем линейной алгебры (см. [174]). Метод половинного деления (совместно с принципом Кантора о вложенных отрезках) позволяет доказать компактность и связность числовых отрезков, теоремы Больцано и Вейерштрасса о свойствах непрерывных функций на отрезке, применяется в приближенных вычислениях.

3. *«Идейные»* доказательства, искусственные приемы. В них обязательно присутствует «изюминка», оригинальная идея, нестандартный прием или вводятся вспомогательные объекты. При освоении «идейных» доказательств важно выпукло показать сами идеи, их красоту, эффективность и оригинальность. Новые для данной ситуации идеи в дальнейшем могут трансформироваться в стандартные методы рассуждений в соответствующем разделе математики. В качестве примеров отметим доказательство Евклида бесконечности множества простых чисел, теоретико-групповой вывод сравнений Эйлера и Вильсона, теоремы о неподвижной точке, доказательство Кантора существования трансцендентных чисел.

Надо учить старшеклассников и студентов самостоятельно проводить стандартные доказательства (первых двух видов). Для этого от учащихся требуется владение основными понятиями и фактами, элементарная логико-математическая культура и психологическая нацеленность, готовность «доказывать».

О необходимости вводных курсов

Начинать основные курсы математики (алгебру, геометрию, математический анализ) в педвузе полезно с вводных, переходных курсов. Аргументами в пользу пропедевтического курса алгебры служат недостаточная математическая подготовка первокурсников; существенный отрыв высшей алгебры от школьной алгебры; абстрактность понятий высшей алгебры; целесообразность предварительного знакомства со всем курсом алгебры, включая теорию чисел и числовые системы. Цель вводного курса – связать школьную математику с вузовским материалом: кратко повторить и систематизировать арифметику и элементарную алгебру; рассмотреть первый концентр высшей алгебры; дать мотивировки и перспективу дальнейшего изучения алгебры и теории чисел.

В школьных арифметике и алгебре присутствуют три основные линии изложения: развитие понятия числа, решение уравнений (в том числе алгебраических), тождественные преобразования числовых и буквенных выражений. Они продолжаются и во вводном курсе алгебры, состоящем из двух частей: «Основные системы чисел» и «Алгебраические уравнения». Первая часть содержит следующие темы: системы натуральных, целых, рациональных и действительных чисел; числовые группы, кольца и поля; арифметика целых чисел; комплексные числа. Во вторую часть входят темы: многочлены от одного неизвестного с числовыми коэффициентами; уравнения второй и третьей степени; системы линейных уравнений с двумя и с тремя неизвестными, метод Гаусса.

Формирование понятия изоморфизма

Понятие изоморфизма в математике трудно переоценить. Весьма плодотворна и идея изоморфизма (см. § 15). Кажущаяся простота и прозрачность понятия изоморфизма обманчива. Поэтому важна задача его правильного и последовательного формирования.

Сначала отметим следующие *методологические аспекты.*

1. В философском плане понятие изоморфизма означает равенство или тождество по некоторому параметру, одинаковость, подобие.

2. Термин «изоморфизм» употребляется двояко: как биекция между двумя однотипными математическими объектами, сохраняющая их структуру (в обе стороны), и как изоморфность – отношение эквивалентности.

3. Исторически строго математическое понятие изоморфизма появилось в алгебре, что ознаменовало рождение абстрактной алгебры.

4. В соответствии с тремя фундаментальными типами математических структур получаются понятия алгебраического изоморфизма, порядкового изоморфизма и гомеоморфизма.

5. Конкретные объекты могут быть изоморфны в одном смысле, но не изоморфны в другом, более сильном смысле. Например, линейный гомеоморфизм евклидовых пространств не обязан быть изометрией.

6. Понятие изоморфизма естественным образом приводит к понятию морфизма: гомоморфизма, изотонного и непрерывного отображений. Подчеркнем, что биективные алгебраические гомоморфизмы являются изоморфизмами, что, вообще говоря, неверно для порядковых и топологических морфизмов. Однако любая изотонная биекция конечного упорядоченного множества на себя является порядковым изоморфизмом, а непрерывные биекции компактного топологического пространства на хаусдорфово пространство суть гомеоморфизмы.

Может быть принята следующая *методическая схема изучения понятия изоморфизма в алгебре*, единая для векторных пространств, групп, колец и решеток.

1. Определение. Методологический и исторический экскурсы.

2. Примеры и контрпримеры. Так, для натуральных чисел $m \neq n$ кольца $m\mathbf{Z}$ и $n\mathbf{Z}$ не изоморфны, хотя они аддитивно изоморфны и могут быть мультипликативно изоморфны (если m и n имеют одинаковый мультипликативный тип).

3. Внешние, связанные с композицией свойства изоморфизмов.

4. Сохранение при изоморфизме всех абстрактных свойств и несохранение «природного своеобразия». Например, изоморфный группе группоид сам является группой.

5. Описания с точностью до изоморфизма, теоремы о строении (для конечномерных векторных пространств, циклических групп, простых полей, числовых систем).

6. Теорема о гомоморфизмах. Теоремы об изоморфизмах.

7. Применения. Новые примеры. Итоги.

Отождествление в математике

Понятие *тождества* относится к фундаментальным философским и общенаучным категориям. *Отождествление* является необходимым логико-диалектическим приемом научного познания и основополагающим элементом формализации знания. Категория тождества близка к понятиям *равенства* и *изоморфизма*. Как и равенство, тождество вещей есть отношение эквивалентности на произвольном классе вещей, удовлетворяющее правилу подстановки: при тождественных преобразованиях любое выражение может быть заменено тождественным ему выражением. Поэтому отношение тождественности – это отношение «конгруэнтности», что, вообще говоря, неверно для отношения изоморфности объектов. Тем самым, по своему объему (по силе) эти понятия располагаются в следующем порядке:

$$\text{равенство} \subset \text{тождество} \subset \text{изоморфизм}.$$

В математических построениях и рассуждениях важную роль играет процедура отождествления. Сама возможность отождествления математических объектов базируется на идее изоморфизма. Но изоморфизма не произвольного, а изоморфизма естественного, *канонического*. Необходимость отождествления возникает при определении и построении новых математических объектов B на основе известных объектов A. Такие построения имеют место, например, в теории числовых систем.

Рассмотрим две основные ситуации отождествления. Сопроводим их примерами и теоремами, обосновывающими корректность процедур отождествления.

I. Новый объект B строится как *расширение* данного объекта A. При этом объект A должен вкладываться в B в качестве подобъекта, что предполагает «правильное» отождествление объекта A с соответствующим подобъектом объекта B.

В качестве примера укажем определение системы комплексных чисел как множества $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ упорядоченных пар действительных чисел с подобающим образом заданными операциями сложения и умножения пар. После доказательства того, что система $\mathbf{C}$ является полем, и возникает потребность отождествления: $(a, 0) \equiv a$ для любого $a\in \mathbf{R}$. Она обусловлена как идеей расширения понятия числа, так и геометрической интерпретацией комплексных чисел – выходом с числовой прямой на координатную плоскость.

Мы имеем естественное изоморфное вложение $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ поля $\mathbf{R}$ в поле $\mathbf{C}$, $f(a) = (a, 0)$ для всех $a\in \mathbf{R}$. Соответствующее отождествление позволяет считать, что $\mathbf{R}$ есть подполе поля $\mathbf{C}$ в силу следующей теоремы.

Теорема 1. *Если $f\colon A \to B$ – изоморфное вложение однотипных алгебраических систем, то алгебраическая система $S = A\cup(B\setminus f(A))$ канонически изоморфна B и содержит A в качестве подсистемы.*

На системе S операции и отношения определяются очевидным образом. В случае $A = \mathbf{R}$ и $B = \mathbf{C}$ имеем $S = \mathbf{R}\cup\{(a, b)\colon\ a, b\in \mathbf{R},\ b \neq 0\} \equiv \mathbf{C}$ и, скажем, $r+(a, b) = (r+a, b)$ при любых $r, a, b\in \mathbf{R}$. Отождествляемые элементы и объекты становятся равными. При этом получаем представление комплексных чисел в обычной алгебраической форме:

$$(a, b) = (a, 0)+(0, b) = (a, 0)+(b, 0)(0, 1) = a+bi,$$

где $i = (0, 1)$ – мнимая единица, поскольку $i^2 = -1$.

II. Другая принципиально значимая ситуация возникает, когда новый объект B получается *факторизацией* исходного объекта A – при подходящем «склеивании» элементов объекта A.

Характерным примером служит отождествление целых чисел, имеющих одинаковый остаток при делении на данное натуральное число n. Соответствующее отношение есть отношение сравнимости $\equiv_n$ целых чисел по модулю n, которое является конгруэнцией на кольце $\mathbf{Z}$ целых чисел. Кольцо $\mathbf{Z}_n = \{[0], [1], \ldots, [n\text{-}1]\}$ классов вычетов по модулю n определяется как факторкольцо $\mathbf{Z}/\equiv_n = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Теорема 2 (*теорема о гомоморфизме* [321]). *Пусть $f: A \to B$ – сильный гомоморфизм алгебраической системы на однотипную систему B. Тогда отношение ρ равнообразности отображения f является конгруэнцией на A и система B канонически изоморфна факторсистеме A/ρ.*

Канонический изоморфизм g системы A/ρ на систему B должен удовлетворять равенству $g\circ\pi = f$, где π: $A \to A/\rho$, $\pi(a) = [a]_\rho$ для всех $a \in A$, – естественный эпиморфизм. Такой изоморфизм единственен и корректно задается формулой: $g([a]_\rho) = f(a)$ для любого $a \in A$.

Возвращаясь к отношению сравнимости $\equiv_n$, рассмотрим алгебру остатков $B = \{0, 1, \ldots, n\text{-}1\}$ с операциями сложения и умножения остатков по модулю n. Поскольку $\equiv_n$ – конгруэнция на кольце $\mathbf{Z}$, то отображение $f: A \to B$, $f(m)$ равно остатку от деления произвольного целого числа m на n, является гомоморфизмом кольца $\mathbf{Z}$ на алгебру остатков B. По теореме 2 алгебра B канонически изоморфна кольцу $\mathbf{Z}_n$. Поэтому можно отождествлять классы $[r] \in \mathbf{Z}_n$ с самими остатками r ($r = 0, 1, \ldots, n\text{-}1$).

С помощью теорем 2 и 1 доказывается существование поля разложения любого многочлена $\varphi(x)$ положительной степени над произвольным полем, в частности выясняется строение конечных полей. Например, исходя из кольцевого эпиморфизма $f: \mathbf{R}[x] \to \mathbf{C}$, $f(\varphi(x)) = \varphi(i)$ для любых $\varphi(x) \in \mathbf{R}[x]$, получается изоморфизм $\mathbf{C} \cong \mathbf{R}[x]/(x^2+1)$. Или, скажем, фактор-группа $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ аддитивной группы действительных чисел канонически изоморфна мультипликативной группе всех комплексных чисел с модулем 1: $r+\mathbf{Z} \to \cos 2\pi r + i\cdot\sin 2\pi r$ (при любом $r \in \mathbf{R}$).

Приведенные теоремы обосновывают корректность отождествления в стандартных случаях. Помимо теоремы 2 ситуация отождествления возникает в различных теоремах об изоморфизмах алгебраических систем (см. [321, пункты 2.3, 2.4 и 8.2]). Метод отождествления широко применяется в геометрии, математическом анализе, топологии, дискретной математике.

Модельные примеры

Необходимо различать *математические модели*, скажем, в естествознании и в самой математике. Математическая модель реального явления – это идеализированный образ данного явления (как прообраза), выраженный на языке математики, например законы (формулы) Кеплера движения планет вокруг Солнца. Такие модели получаются на пути *абстрагирования*. *Метод моделирования* широко применяется в естественных, технических, а также в социальных науках. Заметим, что обычно между реальным явлением и его математической моделью стоит предметная модель (физическая, химическая, биологическая, социальная и т. д.). На схеме, приведенной на следующей странице, слово «измерения» означает экспериментальное нахождение количественных соотношений между параметрами (величинами) изучаемого явления, тем самым задается *координатизация* ситуации. Под «вычислениями» подразумеваются любые математические преобразования, производимые в модели.

Моделью аксиоматической теории в математике называется конкретная математическая структура (объект), удовлетворяющая всем

аксиомам этой теории; они появляются в процессе *конкретизации*, при интерпретации аксиоматических теорий. Так, аддитивная группа **Z** целых чисел является моделью теории групп. Изучением свойств классов моделей формальных аксиоматических теорий занимается *теория моделей* как составная часть современной математической логики. Математическое познание движется, как правило, от имеющих нечто общее конкретных математических объектов к созданию соответствующих теорий. Поэтому конкретная модель может выступать и как образ, и как прообраз математической теории.

Мы рассматриваем модели математических теорий. Дадим три определения-пояснения понятия *модельного примера* – философское, методическое и математическое.

При **философском подходе** под модельным примером абстракции понимается любая вещь, так или иначе представляющая, реализующая абстракцию более высокого логического уровня (чем сама вещь). Например, аддитивная группа $\mathbf{Z}_3$ есть модельный пример множества аддитивных групп $\mathbf{Z}_n$ классов вычетов по модулю n, группы $\mathbf{Z}_n$ суть модельные примеры циклических групп, которые в свою очередь являются модельными примерами теории абелевых групп. Можно говорить об иерархии модельных примеров.

Методическое определение: модельным примером абстракции (понятия, теории) называется ее конкретная модель, отражающая более или менее полно всю совокупность существенных свойств данной абстракции. Тем самым, модельные примеры – это не любые примеры, а образцы, «супермодели на подиуме» математической действительности, благодаря которым можно воспроизвести саму абстракцию. Одноэлементные математические объекты (скажем, нулевое векторное пространство) не являются модельными примерами подходящих математических теорий.

При **математическом понимании** модельный пример математической теории – это такая ее модель, исходя из которой с помощью известных математических конструкций (взятие подобъектов, факторобъектов, прямых произведений и т. п.) можно получить все модели данной теории с точностью до изоморфизма. Приведенные определения последовательно уточняют понятие модельного примера в математике.

Постараемся теперь объяснить суть дела на некоторых важнейших модельных примерах.

1. *Координатные прямая* ***R****, плоскость* $\mathbf{R}^2$ и *пространство* $\mathbf{R}^3$. При рассмотрении произвольных векторных и евклидовых пространств И. М. Глазман, один из авторов известной книги «Конечномерный линейный анализ в задачах», вопрошал: «А как это выглядит в двумерном случае?», т. е. в пространстве $\mathbf{R}^2$. Конечно, пространство $\mathbf{R}^3$ адекватнее и тоньше отражает понятие векторного пространства, чем $\mathbf{R}$ или $\mathbf{R}^2$. Значимость обращения к обычному пространству $\mathbf{R}^3$ отмечал

Ю. И. Манин. В курсе линейной алгебры доказывается простая, но фундаментальная *теорема о строении*: любое конечномерное векторное пространство V над полем P изоморфно арифметическому пространству P^n, где n – размерность V. Подобный результат справедлив и для конечномерных евклидовых пространств. Это означает, что пространства $\mathbf{R}^n$, особенно при $n = 2$ или 3, служат основными модельными примерами в линейной алгебре, многомерной евклидовой геометрии и функциональном анализе.

2. *Группа S_n подстановок n-й степени.* По *теореме Кэли* всякая n-элементная группа изоморфна некоторой подгруппе группы S_n. Теорема Кэли легко обобщается на бесконечные группы и на полугруппы. При этом элементы абстрактной группы G представляются преобразованиями (взаимно однозначными отображениями на себя) множества G, рассматриваемыми относительно операции композиции (последовательного выполнения преобразований). Наглядными примерами групп являются *группы самосовмещений* (симметрии) простейших геометрических фигур.

3. *Булеаны.* Булеан $B(M)$ – это булева алгебра всех подмножеств непустого множества M, взятая с операциями объединения, пересечения и дополнения. Пусть B – произвольная булева алгебра с бинарными операциями + и · и с унарной операцией $'$. *Теорема Стоуна* утверждает, что B изоморфна подалгебре булеана $B(M)$, где в качестве M можно брать множество всех максимальных идеалов в B. Элементы и операции в B интерпретируются соответственно как подмножества в M и теоретико-множественные операции над ними. Скажем, равенство $ab = 0$ в алгебре B означает, что соответствующие множества не пересекаются. Естественным образом в B определяется отношение порядка: $a \leq b$ означает $a + b = b$ (равносильно, $ab = a$), интерпретируемое как отношение включения $\subseteq$ подмножеств множества B. После этого становится ясно, что для булевых алгебр имеют место (например) следующие соотношения:

$$ab = 0 \Leftrightarrow a \leq b' \Leftrightarrow a' + b' = 1 \Leftrightarrow b \leq a'.$$

4. *Кольца и полукольца функций.* Для данных непустого множества X и полукольца S рассмотрим полукольцо S^X всевозможных отображений $X \to S$ с поточечно определенными операциями сложения и умножения отображений. Если S – полукольцо без делителей нуля, то

равенство $fg=0$ в полукольце функций S^X означает, что $f(x)=0$ или $g(x)=0$ для каждого $x \in X$. Знакомая картина получается в случае $\mathbf{R}^X$ для числовых промежутков X, когда функции изображаются графиками. В теории *пучковых* (*функциональных*) *представлений* абстрактное полукольцо S представляется как полукольцо сечений соответствующего пучка полуколец-слоев S_x, индексированных точками базисного пространства X. Слои должны быть устроены проще исходного полукольца S. На этом пути получается и указанная теорема Стоуна (все S_x изоморфны двухэлементной цепи), и, скажем, разложение кольца классов вычетов $\mathbf{Z}_{70}$ в прямое произведение полей $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_5$ и $\mathbf{Z}_7$.

5. *Упорядоченное множество* $\mathbf{N}_0$ *неотрицательных целых чисел с отношением порядка «делит»* $|$. Это пример полной атомной дистрибутивной решетки с условием минимальности с наименьшим элементом 1 и наибольшим элементом 0. Наряду с числовой прямой $\mathbf{R}$ и булеанами, $\mathbf{N}_0$ – один из важнейших модельных примеров в теории упорядоченных множеств и решеток. Его непустыми конечными подмножествами исчерпываются с точностью до изоморфизма все конечные упорядоченные множества. Заметим, что конечные упорядоченные множества удобно изображать *диаграммами Хассе*.

6. *Свободные алгебры*. Играют существенную роль в универсальной алгебре. Класс K всевозможных алгебр одинаковой сигнатуры (однотипных), удовлетворяющих некоторому множеству тождеств, называется многообразием. Свободные алгебры многообразия K – это алгебры из K, обладающие свободной системой образующих. Свободные образующие не связаны никакими соотношениями, которые не вытекают из тождеств данного многообразия. Точнее, алгебра A из K называется свободной алгеброй многообразия K, если в A существует множество X (свободных) образующих, такое, что любое отображение X в произвольную алгебру $B \in K$ продолжается до гомоморфизма $A \to B$. Всякое многообразие имеет свободные алгебры с множеством свободных образующих любой мощности. Более того, любая алгебра многообразия алгебр является гомоморфным образом (факторалгеброй) некоторой свободной алгебры этого многообразия. Многие важнейшие алгебраические структуры (полугруппы, группы, кольца, решетки, модули, полукольца) образуют так называемые *многообразия*, и, значит,

имеют свободные объекты. Например, свободной полугруппой с множеством X свободных образующих служит полугруппа слов в алфавите X с операцией приписывания слов. А свободные абелевы группы представляют собой (с точностью до изоморфизма) прямые суммы аддитивной группы $\mathbf{Z}$ целых чисел.

7. *Компакты* в теории тихоновских пространств. Тихоновские пространства характеризуются с точностью до гомеоморфизма как подпространства прямых произведений числовой прямой $\mathbf{R}$ (или числового отрезка [0; 1]), рассматриваемой с обычной топологией. Для любого тихоновского пространства X существует универсальная компактификация βX – компактификация Стоуна-Чеха пространства X. Напомним, что компактификацией X называется любой компакт, плотно содержащий X в качестве подпространства. Пространство βX можно определить как компактификацию X, для которой любая ограниченная непрерывная функция $X \to \mathbf{R}$ продолжается до непрерывной функции $\beta X \to \mathbf{R}$. Среди всех компактификаций тихоновского пространства X стоун-чеховская компактификация βX обладает свойством универсальности: любая компактификация пространства X есть непрерывный образ βX над X. Мы видим, что компакты (в частности, отрезок [0; 1]) и числовая прямая $\mathbf{R}$ служат модельными примерами в общей топологии, по крайней мере, в классе тихоновских пространств.

Приведенные модельные (образцовые) примеры показывают, что они могут выступать *заменителями* соответствующих абстракций при работе с общими понятиями, по крайней мере, на уровне правдоподобных рассуждений. Модельные примеры «осязаемы», более конструктивны и наглядны, значит, и более доступны, нежели изучаемые абстракции. Они дают пищу интуиции, нередко предвосхищают общий результат и даже способ его доказательства. Булеаны, являясь модельными примерами булевых алгебр, хорошо иллюстрируют «кухню» теории булевых алгебр: элементы абстрактных булевых алгебр можно представить себе как подмножества некоторого множества с соответствующими операциями над ними (по теореме Стоуна).

Многие доказательства алгоритмического характера можно проводить (фактически без потери общности) на конкретных примерах, в частности при применении метода Гаусса и алгоритма Евклида.

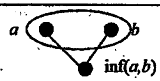
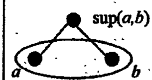
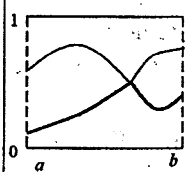
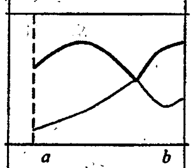
Модельные примеры естественным путем возникают в различных теориях представлений при реализации абстрактных математических объектов в виде конкретных объектов, особенно в современной алгебре, функциональном анализе, алгебраической геометрии. Наиболее часто они встречаются при функциональных представлениях (примеры 1–4).

Остановимся на взаимосвязи математической теории с ее модельными примерами. Выделение и анализ различных математических объектов, имеющих общую *схему* (по терминологии М. М. Постникова), приводит к осознанию этого единства, а затем к возникновению, синтезу нового математического понятия и развитию соответствующей теории. Переход от конкретных примеров к теории – это процесс абстрагирования. И ему соответствует дидактический принцип абстрактности, заключающийся в выяснении значения, пользы и применения общих понятий, развитой теории, дедукции, разумных обобщений и аналогий. Обратный переход от теории к моделям выдвигает принцип наглядности в обучении, когда абстракция изучается посредством своих конкретных представителей – модельных примеров. При этом уже известные математические объекты и приобретенная через них интуиция, знакомые образы и ассоциации, врожденные ориентиры способствуют более быстрому, глубокому и надежному изучению теории.

Укажем естественные положения, вытекающие из сказанного. Во-первых, напрашивается простой *дидактический вывод*: для понимания современной математики надо хорошо изучить основные конкретные математические объекты (натуральный ряд, числовую прямую, трехмерное евклидово пространство, проективную плоскость, основы делимости целых чисел и т. д.). *Другой вывод*: хотя основные математические объекты в каждой математической дисциплине известны, более продуманный, обоснованный и тщательный их отбор осуществим на базе понятия модельного примера при анализе фундаментальных теорем строения, представления и двойственности.

Необходимость изучения порядковой структуры

Рассмотрим понятие упорядоченного множества и его важнейшие модельные примеры, которые полезно предъявлять одновременно, в совокупности. См. также Приложение V.

Упорядоченное множество $\langle X, \leq \rangle$	Наименьший элемент	Наибольший элемент	inf	sup
Цепь $\langle \mathbf{R}, \leq \rangle$	-	-	min	max
Булеан $\langle \mathbf{B}(M), \subseteq \rangle$	$\varnothing$	M	$\cap$	$\cup$
Решетка натуральных чисел $\langle \mathbf{N}, \mid \rangle$	1	-	НОД	НОК
Решетка подпространств векторного пространства V	$\{0\}$	V	$\cap$	Σ
Диаграмма Хассе				
Решетка функций $[0, 1]^{[a,b]}$ с поточечным отношением порядка	константа 0	константа 1		

Эти примеры являются модельными для порядковой структуры. Действительно, помимо отмеченного в примерах 3 и 5, справедливы следующие утверждения. Любое упорядоченное множество X (порядково) изоморфно некоторому подмножеству (с индуцированным порядком) булеана $B(X)$ с сохранением всех имеющихся в X точных верхних граней (либо точных нижних граней). Произвольная счетная цепь изоморфна подцепи в $\langle Q, \leq \rangle$.

Мы видим, что в основополагающих моделях теории упорядоченных множеств, приведенных в таблице, операции inf и sup дают (интерпретируются как) классические математические операции. Они показывают универсальность и в то же время наглядность порядкового языка, принятых в теории упорядоченных множеств терминологии и обозначений.

По сравнению с алгебраическим и топологическим типами структур в педвузовском курсе математики на изучение порядковой структуры уделяется мало времени. Что следует, на наш взгляд, знать преподавателю математики об упорядоченных структурах?

Во-первых, *исходные порядковые понятия*, включая точные грани, виды упорядоченных множеств, решетки, булевы алгебры, упорядоченные группы, кольца и поля.

Во-вторых, *модельные примеры*: цепь действительных чисел с обычным порядком, булеаны, решетка натуральных чисел с отношением делимости. Эти примеры хорошо иллюстрируют обобщающий характер порядкового подхода. Полезно дать представление конечных упорядоченных множеств диаграммами Хассе, что особенно важно в дискретной математике. Надо знать, что алгебры высказываний, множеств и событий являются булевыми алгебрами, а множество всех действительнозначных функций на произвольном множестве образует дистрибутивную решетку с поточечно определенным отношением порядка.

В-третьих, определенный *минимум фактов*: простейшие свойства различных упорядоченных структур, принцип двойственности, эквивалентность порядкового и алгебраического понятий решетки, теорема Стоуна о строении конечных булевых алгебр, теорема Тарского о неподвижной точке, лемма Кенига, формулировки леммы Цорна и теорем Цермело и Гельдера, порядковые свойства основных числовых систем.

При обучении студентов математике желательно систематически использовать порядковый язык, применять сведения об упорядоченных структурах. Наглядность порядковых понятий и интерпретаций способствует усвоению абстрактного материала. Отметим также, что упорядоченные структуры дают богатый материал для спецкурсов, курсовых и выпускных работ, для исследований.

Абстрактность и наглядность

При обучении высшей математике одними из основных являются принципы наглядности и абстрактности. *Принцип наглядности* заключается в ориентации преподавания на знакомые и понятные образы, доступные ассоциации и аналогии, очевидные идеи и простые методы, подходящую терминологию. *Принцип абстрактности* понимается нами как необходимость и полезность абстракций и обобщений достаточно высокого уровня при изложении и усвоении современной математики. Наглядность наблюдаема, абстрактность умозрительна. Каждый преподаватель ищет свою меру между абстрактностью и наглядностью. В предыдущем пункте мы могли видеть, как принципы абстрактности и наглядности проявляются в порядковой структуре.

Рассмотрим еще две конкретные темы, одна из которых касается методики преподавания линейной алгебры, а вторая – изучения теории определителей.

I. Элементы линейной алгебры. При изложении линейной алгебры преподавателю нужно учитывать следующие аспекты.

1. **Мотивация.** Решение и исследование СЛУ – это задача и основа линейной алгебры. Теория векторных пространств – абстрактный вариант для ее решения, применения к СЛУ. Метод Гаусса решения СЛУ (последовательное исключение неизвестных), служащий основополагающим математическим методом, фактически приводит к операциям над строками уравнения СЛУ, то есть к изучению арифметического n-мерного векторного пространства $\mathbf{R}^n$. Естественно возникают понятия матрицы и ранга системы векторов-строк, векторная и матричная записи СЛУ. Теория определителей дает правило Крамера для решения определенных СЛУ. Заметим, что метод Гаусса хорошо работает и как теоретический метод доказательства теорем линейной алгебры [1].

2. **Модельные примеры.** Структурная теорема о конечномерных векторных пространствах утверждает, что любое n-мерное векторное пространство над полем $\mathbf{R}$ изоморфно пространству $\mathbf{R}^n$. При изучении векторных пространств полезно регулярно обращаться к наглядным

геометрическим примерам – обычным координатным плоскости $\mathbf{R}^2$ и пространству $\mathbf{R}^3$.

3. **Идея изоморфизма.** Она опирается на отмеченную выше структурную теорему и тот факт, что при изоморфизме векторных пространств сохраняются все их алгебраические свойства. Идея изоморфизма представляет собой мостик между абстрактным и конкретным, давая возможность переносить результаты об арифметическом пространстве $\mathbf{R}^n$, скажем, теорему об инвариантности ранга системы векторов, на произвольные конечномерные векторные пространства.

4. **Идея абстрактности.** Роль развитой теории, общих понятий и приемов будет продемонстрирована нами в следующем параграфе.

5. **Сочетание наглядности и абстрактности.** Этот подход может быть реализован разными способами. Важные теоремы о СЛУ и матрицах могут быть доказаны непосредственно и с помощью теории векторных пространств. Линейные многообразия в $\mathbf{R}^n$ – это в точности множества решений тех или иных СЛУ с n неизвестными. Линейные отображения $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ также тесно связаны с СЛУ.

6. **Приложение к школьной математике.** Имеется в виду решение СЛУ с двумя и с тремя неизвестными, уравнение прямой на плоскости, взаимное расположение прямых на плоскости и в пространстве. Особенно действенен метод евклидовых пространств в элементарной геометрии.

7. **Историко-философские аспекты.** Весьма желательно кратко проследить историческое и логическое развитие линейной алгебры. Показать значение линейной алгебры в современной математике, роль фундаментальной идеи *линейности.*

Итак, идеи 1 и 2, а также в известной мере 5-7 составляют принцип наглядности в преподавании линейной алгебры. Идеи 3, 4 и частично 5-7 относятся к принципу абстрактности.

Применение принципа абстрактности

Рассматриваются конечномерные векторные пространства над $\mathbf{R}$. Пусть U, V, W – векторные пространства. Сформулируем ряд основных теорем линейной алгебры.

(1) Теорема о дефекте и ранге линейного отображения.
Для любого линейного отображения $f\colon V \to W$

$$\dim V = \dim Ker f + \dim Im f.$$

(2) Размерность факторпространства.

Если U – подпространство V, то $\dim V/U = \dim V - \dim U$.

(3) Размерность прямого произведения пространств.

$$\dim (V \times W) = \dim V + \dim W.$$

(4) Формула Грассмана.

Если U и V – подпространства в W, то

$$\dim (U + V) + \dim (U \cap V) = \dim U + \dim V.$$

(5) Теорема о фундаментальной системе решений.

Размерность подпространства решений однородной СЛУ с n неизвестными равна $n-s$, где s – столбцовый ранг матрицы СЛУ.

(6) Теорема о равенстве строчечного и столбцового рангов матрицы. *Строчечный и столбцовы ранги любой матрицы совпадают.*

Выведем из теоремы (1) остальные из перечисленных теорем. Сначала сделаем несколько замечаний. Теорема (1) – это, по существу, теорема о гомоморфизмах для векторных пространств. Теоремы же (2) – (6) носят «статический» характер. Их вывод из (1) основывается на нахождении соответствующего линейного отображения. Доказательство самой теоремы (1) проводится стандартно.

Именно, берутся базисы $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ в ядре $Ker f = \{\alpha \in V : f(\alpha) = 0\}$ и $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ в образе гомоморфизма $Im f = f(V)$. Выбираются прообразы $\beta_1 \in f^{-1}(\gamma_1), \ldots, \beta_m \in f^{-1}(\gamma_m)$. И непосредственно проверяется, что система $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_m$ образует базис пространства V.

Вывод (2). Рассмотрим линейное отображение $f : V \to V/U$, заданное формулой $f(\alpha) = \alpha + U$ для всех $\alpha \in V$. Остается заметить, что $Ker f = U$ и $Im f = V/U$, а затем применить (1).

Вывод (3). Возьмем линейное отображение $f : V \times W \to W$ – проектирование на W; $f((\alpha, \beta)) = \beta$ для любых $\alpha \in V$ и $\beta \in W$. Тогда $Ker f = V \times \{0\} \cong V$ и $Im f = W$.

Вывод (4). Определим отображение $f : U \times V \to U + V$, положив $f((\alpha, \beta)) = \alpha - \beta$ при любых $\alpha \in U$ и $\beta \in V$. Легко видеть, что f – линейное отображение на пространство $U+V$, ядро которого $\{(\alpha, \beta) : \alpha = \beta \in U \cap V\}$ изоморфно $U \cap V$. Остается воспользоваться теоремами (3) и (1).

Вывод (5). Пусть дана однородная СЛУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Пусть $A = (a_{ij})_{m\times n}$ – матрица этой СЛУ, s – столбцовый ранг A и $U \subseteq \mathbf{R}^n$– подпространство решений данной системы. Матрица A задает линейное отображение $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m, f(X) = AX$ для каждого столбца $X = (x_1, \dots, x_n)'$ значений неизвестных. Ясно, что $Ker\, f = U$ и $Im\, f$ есть линейная оболочка системы столбцов матрицы A. Следовательно, по (1) $n = dim\, \mathbf{R}^n = dim\, U + s$. Откуда $dim\, U = n - s$.

Доказательство (6). Пусть $A = (a_{ij})$ – произвольная матрица размера m на n с коэффициентами из $\mathbf{R}$, r – ее строчечный ранг и s – столбцовый ранг. Рассмотрим подпространство U всех решений однородной СЛУ с матрицей A. В силу (5) $dim\ U = n - s$. С другой стороны, U является ортогональным дополнением линейной оболочки строк матрицы A в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$. Теория евклидовых пространств дает равенства: $\mathbf{R}^n = U \oplus U^{\perp}$ и $U^{\perp}$ равно линейной оболочке системы строк матрицы A. Поэтому $dim\ U^{\perp} = r$. В силу (4) $n = dim\ U + r$. Значит, $r = n - dim\ U = s$.

Иллюстрация принципа наглядности

Матрицы, ступенчатые матрицы, приведение матрицы к ступенчатому виду – вещи конструктивные и сами по себе наглядные.

Метод Гаусса, или метод последовательного исключения неизвестных, – это универсальный практический метод решения произвольных систем линейных уравнений (СЛУ). По своему значению и эффективности его можно сравнить разве только со знаменитым алгоритмом Евклида – методом нахождения НОД для целых чисел и многочленов. Будем рассматривать СЛУ и матрицы с действительными коэффициентами. Суть метода Гаусса заключается в *приведении* произвольной матрицы к *ступенчатому виду* при помощи элементарных преобразований ее строк:

1) прибавление к некоторой строке любой другой;

2) умножение любой строки на действительное число, отличное от нуля;

3) вычеркивание или приписывание нулевой строки.

Заметим, что при помощи первого и второго преобразований, примененных несколько раз, можно переставить строки. Скажем, надо поменять местами строки A_i и A_j. Прибавим к i-й строке j-ю:

$$A_i := A_i + A_j,\ A_j := A_j.$$

Прибавим к j-й строке i-ю строку, умноженную на -1:

$$A_i := A_i + A_j,\ A_j := -A_i.$$

Прибавим к i-й строке j-ю и умножим j-ю строку на -1:

$$A_i := A_j,\ A_j := A_i.$$

Наряду с элементарными преобразованиями строк можно использовать элементарные преобразования столбцов. Будем пользоваться теми и другими преобразованиями, как удобнее.

Сначала отметим широкое практическое применение метода Гаусса. Во-первых, это универсальный метод решения систем линейных уравнений – метод исключения неизвестных. Здесь к ступенчатому виду приводится расширенная матрица СЛУ. Во-вторых, способ нахождения ранга матрицы или системы векторов (приводим матрицу к ступенчатому виду, сколько останется строк – таков ранг матрицы). Кроме того, метод Гаусса можно использовать при нахождении обратной матрицы. Можно рассматривать его как способ вычисления определителей (сведением к треугольному виду).

Помимо широкого практического применения метод Гаусса с успехом может быть применен при доказательстве многих теорем линейной алгебры.

Сначала обосновывается, что элементарные преобразования над уравнениями системы линейных уравнений приводят к эквивалентной системе, т. е. не меняют множества ее решений. Далее показывается, что любую систему линейных уравнений с помощью конечного числа линейных преобразований можно привести к ступенчатому виду. И мы можем проводить анализ системы линейных уравнений: является ли система совместной или несовместной, определенной или неопределенной.

Как следствие, доказывается:

Теорема 1 (***о существовании ненулевых решений однородной СЛУ***). *Однородная система линейных уравнений, в которой число неизвестных больше числа уравнений, имеет ненулевое решение.*

Доказательство. Приводим систему линейных уравнений к ступенчатому виду при помощи элементарных преобразований. При этом мы не могли получить уравнение вида:

$$0x_1 + \ldots + 0x_n = b,\ b \neq 0. \qquad (*)$$

Хотя, возможно, мы получали нулевые уравнения. Поэтому число уравнений в ступенчатой СЛУ меньше либо равно числу уравнений изначальной СЛУ. А, значит, в ступенчатой СЛУ число уравнений меньше числа неизвестных. Выражая свободные неизвестные через главные, убеждаемся, что СЛУ имеет бесконечно много ненулевых решений.

Вводим понятия строчечного (и столбцового) ранга матрицы как максимального числа линейно независимых строк (столбцов), рассматриваемых как векторы.

Легко проверяется, что линейные преобразования над строками и столбцами не меняют ни строчечный, ни столбцовый ранг матрицы. После чего «наглядно» доказывается (сравните это доказательство с приведенным выше более абстрактным доказательством)

Теорема 2. *Строчечный и столбцовый ранги матрицы равны.*

Доказательство. Приведем матрицу к ступенчатому виду. Строчечный ранг матрицы равен числу ненулевых строк, скажем r. Столбцы можно рассматривать как r-мерные вектора, а потому столбцовый ранг не превосходит r – строчечный ранг. Транспонируем матрицу. Для нее столбцовый ранг также не превышает строчечный. Значит, столбцовый и строчечные ранги равны.

Теорема 3 (*Кронекера-Капелли*). *Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы равен рангу расширенной матрицы.*

Доказательство. *Необходимость.* Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду. Так как СЛУ совместна, то мы не можем получить уравнения типа (*). Следовательно, число (ненулевых) строк в полученных ступенчатых расширенной матрице и основной матрице системы одно и то же.

Достаточность. Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду. Так как ранги основной и расширенной матриц системы равны, то число ненулевых строк в основной матрице равно числу строк в расширенной матрице системы. Следовательно, у нас нет уравнения типа (*), значит, СЛУ совместна.

Теорема 4. *Если система линейных уравнений совместна, то данное уравнение от этих же неизвестных является ее следствием тогда и только тогда, когда оно представимо в виде линейной комбинации уравнений системы.*

Доказательство. *Необходимость.* Приписав новое уравнение к рассматриваемой совместной системе m линейных уравнений, имеющей ранг r, получим равносильную систему из $m+1$ уравнения. Приведем полученную систему к ступенчатой системе. Первые ее r уравнений получаются из уравнений начальной СЛУ, а последнее уравнение окажется нулевым. Но это нулевое уравнение получается (в конце концов) прибавлением к новому уравнению некоторой линейной комбинации m исходных уравнений. Обратная импликация очевидна.

Теорема 5 (***о фундаментальной системе решений***). *Если ранг r основной матрицы однородной СЛУ меньше числа ее переменных n, то СЛУ имеет фундаментальную систему решений, состоящую из n-r решений.*

Доказательство. Приведем СЛУ к ступенчатому виду. Получим r ненулевых строк. Будем придавать свободным неизвестным поочередно значение 1, а остальным – 0. Получим матрицу решений из n-r строк. Строки линейно независимы, и любое другое решение СЛУ является линейной комбинацией этих решений.

Теорема 6. *Квадратная матрица является невырожденной тогда и только тогда, когда ее строки (столбцы) линейно независимы.*

Доказательство. Пусть дана квадратная матрица порядка m. С помощью элементарных преобразований строк она приводится к треугольному виду. Элементарные преобразования сохраняют как ранг, так и невырожденность матрицы. Остается заметить, что определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов.

Теорема 7 (***о ранге матрицы***). *Ранг матрицы равен максимальному порядку ее миноров, отличных от нуля.*

Доказательство. Рассмотрим частный случай, когда все m строк матрицы A линейно независимы. Приводим матрицу A к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований типа 1) и 2). Затем переставляем столбцы так, чтобы получилась трапецеидальная матрица B. При этом ранг матрицы не меняется. Беря в матрице B первые m столбцов, получаем невырожденную треугольную матрицу порядка m.

Пусть теперь A – произвольная матрица и r — максимальный порядок ее ненулевого минора. Можно считать, что этот минор расположен в r первых строках матрицы, которые необходимо будут линейно независимыми по теореме 6. Остальные строки матрицы A являются линейными комбинациями первых r строк. Если это не так, добавим к r первым строкам еще одну строку матрицы, не являющуюся их линейной комбинацией. Тогда (по первому случаю) найдется минор порядка $r+1$, отличный от нуля, что невозможно.

В заключение заметим, что все сказанное справедливо для конечномерных векторных пространств и СЛУ над произвольным полем P вместо $\mathbf{R}$. Линейная алгебра излагается в известных учебниках А. И. Мальцева, И. М. Гельфанда, А. И. Кострикина, Л. Я. Куликова, А. В. Архангельского, С. Ленга, Г. Стренга и других.

II. Изложение темы «Определители». Хорошо известны три определения понятия определителя числовой квадратной матрицы: обычное (сумма произведений элементов матрицы по подстановкам индексов), индуктивное (через разложение по строке или столбцу) и аксиоматическое (как знакопеременная полилинейная функция столбцов или строк). Каждое из них имеет свои преимущества и недостатки. Классическое определение определителя n-го порядка конструктивно, позволяет легко доказать исходные свойства определителей, но при $n \geq 4$ малопригодно для вычислений. Индуктивное определение также конструктивно, более эффективно для вычислений, но при таком подходе усложняются доказательства основных свойств. Наконец, аксиоматическое определение не конструктивно, требует доказательства теоремы существования и единственности, но хорошо работает при выведении ряда общих свойств определителей.

Можно предложить следующую схему изучения определителей.

1. Традиционное введение определителей.

2. Доказательства по определению нескольких простейших свойств определителей и разложения определителя по строке.

3. Формальное выведение из этих свойств других основных свойств определителей.

4. Общая лемма и теорема об определителе произведения матриц.

5. Эквивалентность обычного, индуктивного и аксиоматического определений.

6. Приложение определителей: правило Крамера, условия обратимости матрицы, формула для обратной матрицы.

Рассмотрим подробнее реализацию данной схемы.

Определители естественным образом возникают при решении систем линейных уравнений с числовыми коэффициентами методом последовательного исключения неизвестных. При решении систем линейных уравнений с двумя и с тремя неизвестными появляются определители второго и третьего порядка. При этом получаются разложение определителя третьего порядка по строке и правило Крамера. Определитель третьего порядка определяется стандартно как выражение (число) от своих элементов, записываемое (вычисляемое) с помощью простого мнемонического правила. Здесь, как в зародыше, заложена вся стройная теория определителей.

Напомним классическое определение. Пусть $A = (a_{ij})$ – произвольная квадратная матрица n-го порядка с действительными коэффициентами a_{ij}. (Вместо поля **R** действительных чисел может быть взято любое поле.) *Определителем матрицы* A называется число $D(A)$, равное сумме $n!$ всевозможных произведений $a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \ldots \cdot a_{ni_n}$ элементов матрицы A, взятых по одному из каждой ее строки и каждого столбца, со знаками $s(\alpha)$ перестановок их индексов $\alpha = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$:

$$D(A) = \sum_{\alpha=(i_1,i_2,\ldots,i_n)} s(\alpha) a_{1i_1} a_{2i_2} \cdot \ldots \cdot a_{ni_n}.$$

Такой определитель называется определителем n-го порядка. При фиксированном натуральном n определитель n-го порядка удобно считать матричным отображением D: $M_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ или функцией $D(A_1, \ldots, A_n)$ от n n-мерных столбцов.

На основе определения непосредственно доказываются следующие **исходные свойства** определителей.

1. $D(A^t) = D(A)$, т. е. определитель транспонированной матрицы равен определителю самой матрицы.

2. $D(A_1, ..., rA_i, ..., A_n) = rD(A_1, ..., A_i, ..., A_n)$.

3. $D(A_1, ..., A_i+B_i, ..., A_n) = D(A_1, ..., A_i, ..., A_n) + D(A_1, ..., B_i, ..., A_n)$.

4. $D(A_1, ..., A_i, ..., A_i, ..., A_n) = 0$.

5. Определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов, в частности $D(E)=1$.

Теорема 1. *Для любой квадратной матрицы* $A=(a_{ij})$ *n-го порядка имеет место разложение ее определителя по i-й строке:*

$$D(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}.$$

Из свойств 1-5 легко выводятся **дальнейшие свойства** определителей.

6. $D(A_1, ..., A_j, ..., A_i, ..., A_n) = -D(A_1, ..., A_i, ..., A_j, ..., A_n)$ *при* $i < j$.

7. $D(A_1, ..., A_i+rA_j, ..., A_n) = D(A_1, ..., A_i, ..., A_n)$ *при* $j \neq i$.

8. $D(A_1, ..., \sum_{k=1}^{m} r_k B_k, ..., A_n) = \sum_{k=1}^{m} r_k D(A_1, ..., B_k, ..., A_n)$.

9. Если столбцы (строки) квадратной матрицы линейно зависимы, то ее определитель равен нулю.

10. **Правило вычисления определителей:** *с учетом свойств 6 и 7 определитель приводится к треугольному виду, а затем применяется свойство 5.*

Свойство 1 позволяет в сформулированных выше утверждениях говорить о строках матрицы вместо столбцов.

Теперь мы приведем одну абстрактную лемму, которую применим к доказательству двух важных теорем. В этом месте мы придерживаемся общего подхода Ленга к теории определителей [308, глава XIII, § 4]. Полностью же подобное изложение методически неприемлемо для первоначального изучения средними студентами. Однако использование в преподавании отдельных приемов доказательства свойств определителей из [308] вполне оправдано.

Лемма. *Пусть даны матрица* $A=(a_{ij})$ *n-го порядка и n-мерные столбцы* $B_1, ..., B_n$. *Положим* $C_i = a_{i1}B_1 + ... + a_{in}B_n$ *для* $i = 1, ..., n$. *Тогда*

$$D(C_1, ..., C_n) = D(A)D(B_1, ..., B_n).$$

Доказательство. Имеем

$D(C_1, ..., C_n) = D(a_{11}B_1+...+a_{1n}B_n, ..., a_{n1}B_1+...+a_{nn}B_n)$ = по свойству 8 =

$$= \sum_{a=(i_1,\dots,i_n)} a_{1i_1} \cdot \ldots \cdot a_{ni_n} D(B_{i_1},\dots,B_{i_n}) = \text{по свойству } 6 =$$

$$= \sum_{a=(i_1,\dots,i_n)} a_{1i_1} \cdot \ldots \cdot a_{ni_n} s(a) D(B_1,\dots,B_n) = D(A)D(B_1,\dots,B_n).$$

Теорема 2. $D(AB) = D(A)D(B)$ *для любых двух квадратных матриц n-го порядка A и B.*

Доказательство. Возьмем матрицу AB и единичные n-мерные столбцы $E_1=(1, 0, \dots, 0)^t$, $E_2=(0, 1, \dots, 0)^t$, …, $E_n=(0, 0, \dots, 1)^t$. Положим

$$E^*=(E_1, E_2, \dots, E_n)^t \text{ и } (C_1, C_2, \dots, C_n)^t=(AB)E^*.$$

Тогда по лемме

$$D(C_1, \dots, C_n) = D(AB)D(E_1, \dots, E_n) = D(AB)D(E) = D(AB).$$

С другой стороны, учитывая формальную ассоциативность $(AB)E^*=A(BE^*)$ и дважды применяя лемму, получаем

$$D(C_1, \dots, C_n) = D(A)D(BE^*) = D(A)\, D(B)\, D(E_1, \dots, E_n) = D(A)D(B).$$

Далее покажем, что три данные выше определения определителя равносильны. Из теоремы 1 следует эквивалентность обычного и индуктивного определений. Свойства 2-5 означают, что определитель n-го порядка D является знакопеременной полилинейной функций от n n-мерных столбцов, причем $D(E_1, \dots, E_n)=1$.

Теорема 3. *Любая знакопеременная полилинейная функция F от n n-мерных столбцов, для которой $F(E_1, \dots, E_n)=1$, совпадает с D.*

Доказательство. Поскольку в доказательстве леммы используются лишь свойства 6 и 8 определителя D, вытекающие из свойств 2-4, то имеем

$$F(C_1, \dots, C_n) = D(A)F(B_1, \dots, B_n).$$

Пусть $A_1, \dots, A_n$ – произвольные n-мерные столбцы и $A = (A_1 \dots A_n)^t$. В качестве B_i возьмем единичные n-мерные столбцы E_i ($i=1, \dots, n$). Тогда

$$F(A_1, \dots, A_n) = D(A)F(E_1, \dots, E_n) = D(A) = D(A^t) = D(A_1, \dots, A_n).$$

Тем самым получаем абстрактную характеризацию понятия определителя, означающую, в частности, уникальность этого математического объекта.

Рассмотрим, наконец, некоторые важнейшие применения определителей. Следующие теоремы 4-6 доказываются только на основе свойств определителей и теорем 1 и 2.

Теорема 4 (***правило Крамера***). *Пусть система n линейных уравнений с n неизвестными записана в матричной форме $AX=B$, и $(c_1, \ldots, c_n)$ – решение этой системы. Тогда для каждого $i=1,\ldots, n$ справедливо равенство $c_i \cdot D(A) = D(A^i)$, где матрица A^i получена из матрицы A заменой i-го столбца столбцом B свободных членов. Поэтому в случае $D(A) \neq 0$ единственное решение системы $AX=B$ вычисляется по формуле*

$$x_i = D(A^i)/D(A) \text{ для всех } i=1, \ldots, n.$$

Теорема 5 (***критерии вырожденности матрицы***). *Для любой квадратной матрицы A равносильны следующие условия:*

1) A – вырожденная матрица, т. е. $D(A) = 0$;

2) матрица A необратима;

3) строки (и/или столбцы) матрицы A линейно зависимы.

По закону контрапозиции получаем необходимые и достаточные условия невырожденности произвольной квадратной матрицы.

Теорема 6 (***формула для обратной матрицы***). *Для любой невырожденной квадратной матрицы $A=(a_{ij})$ n-го порядка*

$$A^{-1} = (A_{ij}/D(A))^t,$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A.

Важность эквивалентных определений

В научном фольклоре математику, следуя Давиду Гильберту, иногда определяют как искусство видеть единое в разном, называть различные вещи одинаково. Имя общего качества есть термин отвечающего ему понятия. Так возникают понятия в математике. С другой стороны, математики преуспели в нахождении «многого в одном», проявляемого в многообразии характеристических свойств (иными словами, необходимых и достаточных условий, критериев, равносильностей, характеризаций) рассматриваемого математического явления – будь то утверждение, определение или конструкция. Современная математика изобилует разнообразными теоремами характеризации и эквивалентными определениями своих понятий.

Всестороннее овладение математическим понятием предполагает:

1) формирование соответствующего предпонятия, включая наглядное представление, интуитивный прообраз, аналогии и ассоциации;

2) знание формального определения понятия, позволяющее узнавать его проявления;

3) знакомство и навыки работы с основополагающими примерами;

4) скрупулезный логический анализ данного понятия;

5) понимание его места в системе понятий и структуре изучаемого раздела математики;

6) умение применять понятие;

7) связанные с ним исторические и методологические аспекты.

Обсудим вкратце пункт 4). Логический анализ математического понятия – это, прежде всего, анализ наличествующего определения. Всякое определение есть конъюнкция условий (свойств). Желательно, чтобы эти условия были «атомарными» и независимыми в совокупности. Независимые условия существенны для данного понятия, т. е. нарушение любого из них выводит за рамки понятия, что можно подкрепить контрпримерами. Практически для каждого понятия существуют различные полные наборы необходимых условий, дающие эквивалентные определения понятия и высвечивающие его с самых разных сторон. Эквивалентность различных определений конкретного понятия удобно и поучительно оформить в виде отдельной теоремы.

Мы подошли к формулировке важного методического тезиса:

для эффективного усвоения математического понятия полезно провести тщательный логический анализ данного понятия, включая выявление и доказательство эквивалентности его характеристических свойств (определений).

В первую очередь это касается основных математических понятий. Возможности и значение такого подхода продемонстрируем на примере понятий НОД и НОК. Заметим, что различные формы принципа математической индукции рассмотрены нами в Приложении I.

НОД и НОК. Изучение НОД и НОК базируется на свойствах отношения делимости целых чисел, включая теорему о делении с остатком (см. Приложение II).

Анализ понятия НОД начнем с двух традиционных определений НОД нескольких целых чисел, которые можно назвать **непосредственным** и **абстрактным** соответственно.

Определение 1. *НОД* целых чисел $a_1, \ldots, a_n$ ($n \in \mathbf{N}$) называется наибольший по величине общий делитель этих чисел.

Определение 2. *НОД* целых чисел $a_1, \ldots, a_n$ называется общий делитель этих чисел, делящийся на любой их общий делитель.

Посмотрим, чем отличаются приведенные определения. Из определения 1 видно, что НОД($a_1, \ldots, a_n$) существует тогда и только тогда, когда среди чисел a_i есть хотя бы одно ненулевое. Доопределив НОД(0, ...,0) = 0, получим: при определении 1 каждое конечное семейство целых чисел имеет однозначно определенный НОД. Из определения 2 прямо не следует существование НОД, он определен с точностью до знака, но НОД нулей равен 0. Можно дополнить определение 2 требованием неотрицательности НОД. Уточненные таким образом определения 1 и 2 будут уже эквивалентными.

Для нахождения d=НОД(a, b) произвольных целых чисел a и $b \neq 0$ в смысле определения 1 применяется классический алгоритм Евклида. Рассмотрение схемы алгоритма Евклида (Приложение II), примененного к числам a и b, показывает, что, во-первых, d равен последнему отличному от 0 остатку r_n этой схемы, во-вторых, d делится на любой общий делитель данных чисел, т. е. удовлетворяет определению 2, в-третьих, d линейно выражается через a и b, т. е. имеет вид $ax+by$. Здесь применяются следующие свойства НОД:

1) НОД($ab+c$, c)=НОД(a, c); 2) НОД(ab, a)=$|a|$ при ненулевом a.

Действительно, двигаясь по схеме алгоритма Евклида сверху вниз, получаем:

НОД(a, b)= по свойству 1) =НОД(b, r_1)= по 1) =НОД(r_1, r_2)= ...
=НОД(r_{n-2}, r_{n-1})= по 1) =НОД(r_{n-1}, r_n)= по 2) =r_n.

Аналогично проверяются два оставшиеся утверждения.

Очевидно, что для любых целых чисел a, b и c пары чисел НОД(a, b), c и a, НОД(b, c) имеют одни и те же общие делители. Поэтому коммутативная бинарная операция НОД(,) на множестве $\mathbf{Z}$ целых чисел ассоциативна, откуда следует эквивалентность «дополненных» определений 1 и 2.

Сказанное позволяет говорить об **алгоритмическом определении** НОД конечного семейства целых чисел, сводящемся к последовательному применению алгоритма Евклида (считаем, что алгоритм Евклида перерабатывает пару нулей в 0).

Можно дать ряд определений НОД($a_1, \ldots, a_n$) через его **линейную представимость** $a_1x_1+\ldots+a_nx_n$. В результате приходим к утверждению:

Теорема 1. *Для любых целых чисел $a_1, \ldots, a_n$ и произвольного натурального числа d равносильны следующие условия:*

(1) d есть НОД($a_1, \ldots, a_n$) в смысле определения 1;

(2) d есть НОД($a_1, \ldots, a_n$) в смысле определения 2;

(3) d удовлетворяет алгоритмическому определению НОД чисел $a_1, \ldots, a_n$;

(4) d – линейно представимый общий делитель чисел $a_1, \ldots, a_n$;

(5) d – наименьшее натуральное число вида $a_1x_1+\ldots+a_nx_n$ ($x_i\in \mathbf{Z}$);

(6) d линейно представимо через $a_1, \ldots, a_n$ и делит любое число вида $a_1x_1+\ldots+a_nx_n$ ($x_i\in \mathbf{Z}$).

Доказательство. Фактически мы уже обосновали эквивалентность условий (1)-(3) и импликацию (1)⇒(4). Если верно (4), то d делится на любой общий делитель чисел $a_1, \ldots, a_n$, т. е. удовлетворяет (2). Ясно, что (4)⇒(6)⇒(5). Теперь достаточно доказать импликацию (5)⇒(4). Пусть выполнено условие (5) и i – одно из чисел $1, \ldots, n$. Разделим a_i на $d=a_1x_1+\ldots+a_nx_n$ с остатком: $a_i=dq+r$ при $0\le r<d$. Тогда число

$$r = a_i-dq = a_1(-x_1q)+\ldots+a_i(1-x_iq)+\ldots+a_n(-x_nq)$$

линейно представимо через $a_1, \ldots, a_n$ и, стало быть, равно 0. Значит, d является общим делителем данных чисел.

Условия теоремы 1 имеют смысл только для чисел a_i, одновременно не равных 0.

Исходя из канонических разложений натуральных чисел на простые множители, легко дать прямое, **«формульное», определение** НОД нескольких ненулевых целых чисел. Для двух натуральных чисел имеем:

$$\text{НОД}(a, b) = \prod_{p-\text{простое}} p^{\min(O_p(a),O_p(b))},$$

где $O_p(a)$ – порядок простого числа p в a, т. е. наибольший показатель k, для которого p^k делит a.

Наконец, укажем одно **аксиоматическое определение** НОД двух целых чисел. *НОД* есть бинарная алгебраическая операция $\bullet$ на естественно упорядоченном кольце $\mathbf{Z}$, удовлетворяющая тождествам $(ab+c)\bullet a = a\bullet c$ и $(ab)\bullet a = /a/$. В самом деле, в силу свойств 1) и 2) по схеме алгоритма Евклида получаем, что $a\bullet b$ равно обычному НОД(a, b).

Заметим, что во всех приведенных определениях НОД, кроме алгоритмического и аксиоматического, можно брать и бесконечные семейства целых чисел (см. пункт 5).

Исходные определения НОК двойственны (по делимости и естественному порядку) определениям 1 и 2 для НОД.

Определение 3. *НОК* целых чисел $a_1, \ldots, a_n$ ($n\in\mathbf{N}$) называется наименьшее по величине их общее кратное.

Определение 4. *НОК* целых чисел $a_1, \ldots, a_n$ называется общее кратное этих чисел, делящее любое их общее кратное.

Теорема 2. *Для любых ненулевых целых чисел $a_1, \ldots, a_n$ и произвольного натурального числа k равносильны следующие условия:*

(1) k есть НОК($a_1, \ldots, a_n$) в смысле определения 3;

(2) k есть НОК($a_1, \ldots, a_n$) в смысле определения 4;

(3) $k\mathbf{Z}=\cap a_i\mathbf{Z}$;

(4) k определяется индуктивно как НОК(a_1, НОК($a_2, \ldots, a_n$)) с учетом формулы НОК для двух целых чисел.

Для любых ненулевых целых чисел a и b справедлива формула:

$$\text{НОК}(a, b) = |ab|/\text{НОД}(a, b).$$

Заметим, что при прямом доказательстве этой формулы (без применения основной теоремы арифметики) используются свойства взаимно простых чисел. Именно, линейная представимость 1 через a и b как критерий их взаимной простоты, на основании которого легко доказывается следующее важнейшее свойство делимости: если $b|ac$ и НОД(b, a)=1, то $b|c$.

Как и НОД, НОК двух натуральных чисел вычисляется по формуле:

$$\text{НОК}(a, b) = \prod_{p-\text{простое}} p^{\max(O_p(a), O_p(b))}.$$

Что нужно знать о действительных числах

Действительные числа служат основой математики и ее приложений. Задачи на свойства действительных чисел хорошо развивают логико-математическое мышление студентов и школьников. Какие же их исходные свойства (аксиомы) обычно выделяются? Требуется, чтобы система **R** действительных чисел удовлетворяла естественным алгебраическим и порядковым свойствам, т. е. **R** должно быть линейно упорядоченным полем.

Как и всякое линейно упорядоченное поле, **R** содержит линейно упорядоченное поле **Q** рациональных чисел в качестве подсистемы. Посмотрим, что еще надо требовать от **R**, чтобы действительные числа обладали, например, следующими элементарными свойствами.

Свойство 1. *Между любыми двумя различными действительными числами лежит хотя бы одно рациональное число, т. е.* ***Q*** *плотно в* ***R***.

Свойство 2. *Между любыми двумя различными действительными числами существует иррациональное число, т. е.* $\boldsymbol{R}\backslash\boldsymbol{Q}$ *плотно в* ***R***.

Отметим, что линейно упорядоченные поля *плотны* (*в себе*): если $a< b$, то $a<(a+b)/2< b$. Разберем сначала свойство 1. Предположим, что оно выполнено. В **R** для любого $r>0$ найдется положительное рациональное число $q< r$. Рациональные числа суть отношения целых чисел. Поэтому $q = m/n$ для некоторых натуральных m и n. Откуда $1/n< r$. Далее берем произвольное $b>0$. По доказанному существует натуральное число n, удовлетворяющее неравенству $1/n <1/b$, равносильному неравенству $b<n$. Но тогда, как легко видеть, на линейно упорядоченном поле **R** должна выполняться и

Аксиома Архимеда (*III век до Р.Х.*). *Для любых $a>0$ и b существует такое натуральное число n, что $b< na$.*

Обратно, из аксиомы Архимеда можно вывести свойство 1. Точнее, имеет место утверждение:

Теорема 1. *Для произвольного линейно упорядоченного поля P эквивалентны следующие условия:*

1) *P архимедово, т. е. удовлетворяет аксиоме Архимеда;*
2) *в P для любого $x>0$ найдется натуральное n, такое, что $1/n< x$;*
3) ***Q*** *плотно в P.*

Эта теорема доказывается в курсе «Числовые системы». Заметим только, что при доказательстве импликации 1)⇒3) неявно используется принцип математической индукции.

Из свойства 1 немедленно следует плотность множества $\mathbf{Q}+r$ в $\mathbf{R}$ при любом действительном r. Поэтому для обоснования свойства 2 достаточно иметь хотя бы одно иррациональное число. Иррациональные числа были открыты пифагорейцами в IV веке до Р.Х. в рамках учения о соизмеримости отрезков. Древние греки развили геометрическую алгебру, в которой числа отождествлялись с отрезками, в частности число $\sqrt{2}$ означает диагональ квадрата с единичной стороной и, стало быть, оно для них существует. В дальнейшем на этом пути возникло понятие числовой прямой.

Теорема 2. $\sqrt{2}$ – *иррациональное число.*

Тот факт, что квадрат рационального числа не равен 2, доказывается в школе. Нетрудно доказать существование иррациональных чисел (и свойства 1, 2) при определении действительных чисел как бесконечных десятичных дробей, которые естественным образом изображаются точками числовой прямой.

Приведем доказательство свойства 2, не зависимое от аксиомы Архимеда. Предполагаем только, что $\mathbf{R}$ – линейно упорядоченное поле с положительным элементом $\sqrt{2}$. Имеем $1<\sqrt{2}<2$. Допустим от противного, что между числами $a<b$ в $\mathbf{R}$ нет иррациональных чисел. Тогда все элементы интервала (a, b) – рациональные числа. В силу плотности $\mathbf{R}$ выберем в этом промежутке рациональные числа $p<q$. Отрезки $[0, q\text{-}p]$, $[0, 1]$ и $[1, 2]$ также сплошь состоят из рациональных чисел (почему?), что противоречит теореме 2.

Чисто логически доказывается (как?) существование положительного иррационального числа, которое в иррациональной степени $\sqrt{2}$ является рациональным числом.

Замечание. Свойства 1 и 2 – одни из важнейших свойств действительных чисел. И учитель математики должен уметь доказывать их строго и доступно для учащихся. Автор попросил некоторых студентов и преподавателей матфака дать свои доказательства свойств 1 и 2. Ответы показали, что далеко не все студенты могут правильно вскрыть простейшую арифметическую структуру **R**. Зачем же тогда им изучать меру Лебега или проективную геометрию?

Вернемся к вопросу о существовании иррациональных чисел. Существование натуральных корней из положительных чисел обеспечивается тем или иным свойством непрерывности (или полноты) системы **R**.

Теорема 3. *Для всякого линейно упорядоченного поля P эквивалентны следующие свойства:*

1) P непрерывно по Вейерштрассу, т. е. любое ограниченное сверху непустое подмножество в P обладает точной верхней гранью;

2) P полно по Дедекинду, т. е. каждое сечение P имеет единственный рубеж;

3) P архимедово, и любая последовательность вложенных отрезков в нем имеет непустое пересечение (полнота по Кантору);

4) P архимедово, и все фундаментальные последовательности в P являются сходящимися (подход Кантора).

Линейно упорядоченное поле называется *непрерывным*, если оно обладает одним из эквивалентных свойств теоремы 3. Система **R** стандартно определяется как непрерывное линейно упорядоченное поле. Такая содержательная аксиоматическая теория действительных чисел категорична и непротиворечива (если непротиворечива теория натуральных чисел). См. Приложение V.

Теорема 4. *Все положительные элементы линейно упорядоченного поля* ***R*** *являются квадратами, любой многочлен нечетной степени из* ***R**[x]* *имеет корень в* ***R*** *и каждое линейно упорядоченное алгебраическое расширение* ***R*** *совпадает с* ***R***.

Литература: [8, 86-88, 92, 96, 102, 308, 321].

§ 26. Воспитание интереса к математике

Решение задач является
наиболее характерной и специфической
разновидностью свободного мышления.
Уильям Джеймс

Прежде чем решать задачу,
подумай, что делать с ее решением.
Дьердь Пойа

Развитие творческих способностей

Что требуется для развития творческих способностей человека? Отправляясь от способностей, раскрутим логическую спираль в обратную сторону. Развитие творческих способностей человека предполагает его *интерес* к предмету. Устойчивый интерес невозможен без *понимания*. Понимание, в свою очередь, основывается на психологических мотивировках и установках, интуиции, эмоциональном фоне, на той *околопредметной ауре*, которую необходимо создать. В математике на этот фон способны существенно воздействовать *практика* (опыт) *решения* разнообразных *задач* и *исторические* и *философские элементы знания*. О философских и исторических аспектах математики мы уже говорили.

Любой вид человеческой деятельности есть череда вопросов и ответов, проблем и поисков их решения, новых задач и открытий. Математика – это сплошь задачи: простенькие примеры и «многоступенчатые» вычисления, наглядные построения и хитроумные абстракции, метод Горнера и компьютерная алгебра, элементарная теорема Безу и Великая теорема Ферма, длительные наблюдения и мгновенные интуитивные прозрения, очевидные замечания и открытые, нерешенные проблемы. Индивидуальный путь математика – это решение одной многозвенной задачи, образно представляющее собой кривую линию (дорогу) со своими всплесками и ямами, вершинами и ухабами, самопересечениями и перегибами, непрерывными кусками и разрывами, гладкими участками и флуктуациями, тупиками и возвратами, но линию, устремленную в будущее, покуда мыслит человек!

Математические задачи, встречающиеся на протяжении жизни математику (преподавателю, исследователю), условно делятся на *элементарные задачи* (школьные и олимпиадные), *учебные задачи* по высшей математике (обучающие и исследовательские) и *научно-исследовательские* задачи. Очень важно начать решать и учиться решать задачи самостоятельно – «для того чтобы научиться плавать, надо самому оказаться в воде». Это согласуется с важнейшим правилом личности «Познай самого себя». Не будем забывать и другое правило, особенно важное для исследователя, – «Сомневайся во всем!».

Интерес к математике у учащегося скорее (и на самом деле) проявляется, если он участвует в математических состязаниях: кружках, олимпиадах, конкурсах, турнирах, матбоях, и/или самостоятельно, дополнительно к учебной программе занимается математикой, решая трудные или необычные задачи, читая различные научные, популярные или занимательные книги по математике.

Нестандартные математические задачи

При обучении математике особую функцию выполняют так называемые *нестандартные задачи* – задачи с изюминкой, требующие нетривиального подхода. Решение подобных задач не только вызывает неподдельный интерес к математике, но и приводит к более глубокому пониманию математики, овладению ей. Как уже было сказано, *интерес* к предмету и *понимание* предмета человеком психологически тесно связаны между собой.

Приведем несколько *задач олимпиадного характера*, которые запоминаются на всю жизнь. Это *чисто логические* задачи, для решения которых не требуются особые математические знания, но только рассуждения, правильное понимание условий задачи или умение «увидеть» существо дела.

1. *Задача Рамсея.* Докажите, что среди любых шести человек найдутся трое либо попарно знакомых друг с другом, либо попарно не знакомых.

2. Зеленая школьная доска испачкана мелом. Убедитесь, что на ней существуют две точки одного цвета (белые или зеленые), расстояние между которыми равно 10 см.

3. Плоскость раскрашена в три цвета. Докажите, что на ней найдутся две точки одного цвета, расположенные на расстоянии 10 см.

4. Из первых 200 натуральных чисел произвольно выбрали 101 число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два числа, одно из которых делится на другое.

5. Числа 1, 2, 3, ..., 101 выписаны в ряд в некотором порядке. Покажите, что из этого ряда можно вычеркнуть 90 чисел так, чтобы оставшиеся 11 чисел были расположены либо в порядке возрастания, либо в порядке убывания.

6. *Задача Баше о гирях.* Имеется четыре камня, каждый весом в целое число килограммов. Известно, что с помощью этих камней на чашечных весах можно взвешивать грузы в 1, 2, 3, ..., 40 кг. Найдите вес каждого из камней.

7. Из пяти одинаковых на вид монет три настоящих и две фальшивых, причем одна из фальшивых монет легче настоящей монеты, а другая – тяжелее. Как за три взвешивания на чашечных весах (без гирь) определить фальшивые монеты?

8. Имеется восемь монет, неотличимых по виду. Известно, что одна из них легче или тяжелее остальных абсолютно одинаковых монет. Как за три взвешивания на чашечных весах найти фальшивую монету?

9. Даны два разных по емкости сосуда. Можно наливать воду из крана и сливать воду. Можно ли определить, что больше по емкости – треть большего сосуда или половина меньшего сосуда?

10. Докажите, что квадрат можно разрезать на шесть квадратов.

11. На танцы пришли 15 девушек и 15 юношей. Каждый юноша знаком с двумя девушками, а каждая девушка – с двумя юношами. Покажите, что собравшихся можно разбить на 15 смешанных пар так, чтобы в каждой паре юноша и девушка были знакомы.

12. На плоскости отмечено $2n$ точек. Всегда ли можно провести прямую на данной плоскости, по каждую сторону от которой находится по n точек?

13. *Задача о трех точках* (эта элементарная задача оставалась гипотезой несколько десятилетий, пока не было найдено ее сравнительно простое решение, см. [491, Приложение 6]). На плоскости отмечено конечное число точек, не лежащих на одной прямой. Некоторые пары точек соединены прямыми линиями, в результате чего получается так называемая *конфигурация*, состоящая из данных точек и

прямых. Докажите существование прямой из любой конфигурации, содержащей ровно две отмеченные точки.

14. В кучке 21 спичка. Играют двое. За один ход разрешается брать из кучки от одной до четырех спичек. Проигрывает тот, кому нечего взять. Выиграет ли начинающий игрок при правильной игре?

15. В ряд выложено 2006 монет. Каждый из двух игроков берет по очереди одну или две рядом лежащие монеты. Проигрывает тот, кому нечего брать. Кто выиграет при правильной игре – начинающий или второй игрок?

16. *Игра Ним.* Два игрока по очереди берут несколько спичек из расположенных перед ними кучек. При этом каждый раз можно взять любое (ненулевое) число спичек из какой-то одной кучки. По условию выигрывает игрок, берущий последнюю спичку. Как игрокам выстроить правильную стратегию игры? См. [43, с. 72].

17. Имеется несколько сосудов, среди которых есть два сосуда разной формы и два сосуда разного цвета. Докажите, что среди них найдутся два сосуда одновременно и разной формы и разного цвета.

18. Трем мудрецам вымызали лица грязью, пока они спали. Когда мудрецы проснулись, то начали смеяться друг над другом. Наконец, один мудрец перестал смеяться, поняв, что его лицо тоже грязное. Как он догадался об этом?

19. Дед Боря знает произведение двух кем-то задуманных натуральных чисел, а дядя Вова знает их сумму. Между ними состоялся честный диалог. Дядя: «Борис, ты знаешь задуманные числа? Я не знаю». Дед: «Нет, не знаю». Дядя: «Теперь я знаю эти числа!». Дед: «Ну, Вова, тогда и я знаю!». Назовите задуманные числа. Что это за числа, если всем известно, что они не равны 1?

20. Сто членов братства логиков схвачены и рассажены в отдельные камеры тюрьмы. Их в произвольном порядке вызывают по одному в комнату, в которой каждый из узников может либо включить, либо выключить, либо не трогать находящуюся там лампу. Если кто-то из логиков вдруг понимает, что все они уже побывали в контрольной комнате, и сообщает об этом тюремщику, то их освобождают; в противном случае им грозит пожизненное заключение. На любой момент времени каждый узник может быть уверен, что его обязательно вызовут в данную комнату. Но вначале их собирают вместе и дают

возможность обсудить ситуацию. Как логикам выбрать правильную стратегию, чтобы оказаться на свободе?

Заметим, что задачи 1, 2, 4-6, 10, 11, 14, 15, 18-20 можно обобщить. Как именно?

А вот задача, которая произвела в пятом классе на будущего академика В. И. Арнольда неизгладимое впечатление (см. [165, с. 5]):

«Из города *А* в город *Б* и из города *Б* в город *А* на рассвете одновременно вышли две старушки. В 12 часов они встретились. Потом продолжили свой путь. Одна пришла в конечный пункт в 4 часа дня, а другая – в 9 вечера. В каком часу рассвело в этот день?».

Перечислим некоторые *тестовые учебно-исследовательские задачи.*

1) Пусть группа обладает единственным элементом второго порядка. Докажите, что этот элемент перестановочен с каждым элементом группы.

2) Установите изоморфизм между мультипликативными полугруппами всех натуральных чисел и всех нечетных натуральных чисел. Опишите все такие изоморфизмы.

3) Могут ли быть изоморфны аддитивная и мультипликативная группы одного и того же тела?

4) Покажите, что мультипликативная группа бесконечного поля не является циклической группой.

5) Докажите, что любая конечная полугруппа имеет идемпотентный элемент e ($e^2=e$).

6) Перечислите (с точностью до изоморфизма) все группы, содержащие не более семи элементов.

7) Исследуйте циклические группы. Опишите все их подгруппы, факторгруппы, гомоморфизмы между ними, прямые произведения двух циклических групп. В частности, является ли аддитивная группа $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ циклической? См. Приложение IV.

8) Покажите, что всякое конечное кольцо без (ненулевых) делителей нуля является телом.

9) Когда кольцо $\mathbf{Z}_n$ классов вычетов по модулю n имеет: делители нуля; нильпотентный элемент a ($a^m=0$ для некоторого натурального числа m); идемпотентный элемент?

10) Докажите, что любой ненулевой гомоморфизм поля всех действительных чисел в себя является тождественным отображением.

11) Проверьте, что произвольное отображение единичного отрезка в себя, непрерывное или сохраняющее порядок, имеет хотя бы одну неподвижную точку.

12) Докажите, что элементарные тригонометрические функции не являются многочленами.

13) Пусть взаимно однозначное отображение плоскости на себя (преобразование плоскости) переводит каждую прямую в прямую (сохраняет коллинеарность точек). Докажите, что обратное к нему преобразование также отображает прямые линии на прямые линии.

14) Решите *задачу о кенигсбергских мостах*, положившую начало теории графов. См. книгу Харари [582, глава 1].

15) Установите связь между конечными аффинными и конечными проективными плоскостями. См. книгу Хартсхорна ([13, глава I] из списка литературы Приложения VII).

Самостоятельное обдумывание и решение данных задач может вылиться в серьезное увлечение математикой, теми или иными ее областями.

Занимательная логика Смаллиана

В главе 16, пункты 264)-268), своей замечательной книги [496] известный американский логик и популяризатор науки Рэймонд Смаллиан искусно моделирует знаменитые теоремы Геделя о неполноте и Тарского о невыразимости истины на примере построенных им *геделевых островов*. См. § 13.

Рассмотрим данную ситуацию подробнее. Мы дерзнем называть любой геделев остров Смаллианией. Итак, в некоей прекрасной стране *Смаллиании* живут смаллиане, что неудивительно. Каждый смаллианин является либо *рыцарем*, говорящим только правду, либо *лжецом*, постоянно лгущим (что удивительно). Рыцарей, имеющих особые заслуги перед страной, называют *признанными* рыцарями. Среди лжецов выделяются *отъявленные* лжецы.

Смаллианам разрешено объединяться в различные санкционированные властью клубы. Парламент страны обсуждает, принимая или отменяя, важные законы, касающиеся статуса клубов.

Мы предполагаем, что в Смаллиании имеются: хотя бы один рыцарь, хотя бы один лжец и хотя бы один клуб. В принципе одни и те же смаллиане могут образовать несколько клубов. Возможны и пустые (фиктивные) клубы. Таким образом, Смаллиания есть некоторое множество M рыцарей и лжецов A с заданным семейством S выделенных подмножеств K.

Среди смаллиан наиболее популярны следующие законодательные акты.

ЗАКОНЫ

Закон **Р**: все признанные рыцари составляют клуб.

Закон **Л**: существует клуб отъявленных лжецов.

Закон **Г**: для любого клуба K найдется смаллианин утверждающий, что он является членом этого клуба – A: «$A \in$ K».

Закон **Г^**: для любого клуба K найдется смаллианин A, утверждающий, что он не является членом этого клуба – A: «$A \notin$ K».

Закон **Д**: все смаллиане, не состоящие членами какого-либо одного клуба K, должны образовать свой клуб ¬K.

Закон **2Г**: для любых клубов K_1 и K_2 существуют такие смаллиане A и B, что A: «$B \in K_1$» и B: «$A \in K_2$».

Прежде чем сформулировать еще один закон **Н**, Смаллиан вводит новые понятия. Предположим, что в Смаллиании принято *именование*: каждый клуб K носит имя ровно одного из смаллиан A_K, а у каждого смаллианина A есть единственный клуб K_A, носящий его имя. Тем самым, между клубами и смаллианами устанавливается вполне определенное взаимно однозначное соответствие. Ясно, что наименование в (конечной) Смаллиании существует тогда и только тогда, когда численность n смаллиан равна числу ее клубов; тогда число всевозможных именований равно n!. Смаллианин, состоящий членом клуба, названного в его честь, называется *номинабельным* ($A \in K_A$); в противном случае – *неноминабельным* ($A \notin K_A$). Смаллианин A называется *другом* смаллианину B, если A утверждает, что B – номинабельный, т. е. A: «$B \in K_B$».

Закон **Н**: Для любого клуба K_1 существует такой клуб K_2, что для каждого $B \in K_2$ найдется $A \in K_1$, являющийся другом B, и для каждого $B \notin K_2$ найдется $A \notin K_1$, являющийся другом B.

Мы позволим себе сформулировать соответствующий «метазакон»

МН: В Смаллиании существует именование, при котором имеет место закон **Н**.

Для произвольной Смаллиании S существует *дуальная* Смаллиания $S^{\wedge}$, население которой такое же, что и в S, а клубами являются в точности дополнения ¬К до клубов К в S. Очевидно, что равенство $S = S^{\wedge}$ равносильно выполнению в S (или в $S^{\wedge}$) закона **Д**. Ясно также, что для любых жителей A, B и клуба К из S справедливы соотношения:

$$B \in \text{К} \Leftrightarrow B \notin \neg\text{К} \text{ и } A\text{: «}B \in \text{К»} \Leftrightarrow A\text{: «}B \notin \neg\text{К»}.$$

Закон $\mathbf{З}^{\wedge}$ назовем *дуальным* к закону **З**, если он получается из **З** взаимной заменой знаков принадлежности $\in$ и $\notin$ друг на друга. Имеем $\mathbf{З}^{\wedge\wedge} = \mathbf{З}$, а также $S^{\wedge\wedge} = S$. Например, законы **Г** и $\mathbf{Г}^{\wedge}$ дуальны друг к другу. Произвольный закон назовем *общезначимым* (общепризнанным), если он выполняется в любой Смаллиании.

Почти очевидно следующее утверждение:

Лемма. *Закон **З** выполняется в S тогда и только тогда, когда в $S^{\wedge}$ выполняется дуальный закон $\mathbf{З}^{\wedge}$.*

Из леммы сразу следует важное положение:

Принцип двойственности. *Общезначимость всякого закона эквивалентна общезначимости дуального к нему закона.*

Так, из общезначимости закона $\mathbf{Г\&Д} \Rightarrow \mathbf{Г}^{\wedge}$ вытекает общезначимость закона $\mathbf{Г}^{\wedge}\mathbf{\&Д} \Rightarrow \mathbf{Г}$.

Обсудим смыслы и логико-правовые связи перечисленных законодательных инициатив. Законы **Г** и **2Г** называются соответственно *геделевым* и *дважды геделевым* условиями.

Перед смаллианами и перед нашими читателями стоят следующие задачи, в которых идет речь о произвольной Смаллиании.

ЗАДАЧИ

1. Докажите, что выполнение закона **Г** равносильно тому, что множество всех лжецов не составляет клуб.

2. Покажите, что выполнение закона $\mathbf{Г}^{\wedge}$ равносильно тому, что множество всех рыцарей не является клубом.

3. Из суммарного закона **Г&Д** следует, что все рыцари клуб не образуют.

4. Конъюнкция **Г&Л** влечет существование неотъявленного лжеца.

5. Покажите, что одновременное соблюдение законов **Г**, **Д** и **Р** непременно влечет существование непризнанного рыцаря.

6. Убедитесь, что из **Г** следует **2Г**. Верно ли обратное утверждение?

7. Докажите, что условие **2Г** равносильно выполнению одного из условий **Г** или **Г^**: **2Г** $\Leftrightarrow$ (**Г**$\vee$**Г^**).

8. Проверьте, что принятие законов **2Г** и **Д** должно повлечь и принятие законов **Г** и **Г^**.

9. Покажите, что при любом именовании в Смаллиании множество всех неноминабельных смаллиан клуб не образует.

10. Докажите, что **МН** влечет **Г**.

Самостоятельно подумав над этими логическими упражнениями, можете сверить свои рассуждения с приведенными ниже решениями.

Решение задач

1. Смысл закона **Г** в том, что какой бы клуб К в Смаллиании мы не взяли, в нем состоит рыцарь либо вне К есть лжец. Поэтому при выполнении **Г** все лжецы не могут образовать клуб. Обратно, если не выполняется условие **Г**, то существует клуб К, в котором нет рыцарей и вне которого нет лжецов. Такой клуб К и будет клубом всех лжецов.

2. Закон **Г^** означает, что в любом клубе есть лжец либо вне этого клуба есть рыцарь. Поэтому эта задача вытекает из задачи 1 по лемме.

3. Следует из задачи 2.

4. Пусть подписан закон **Г&Л**. По задаче 1 все лжецы клуб не образуют, но из их состава сформирован клуб **Л** отъявленных лжецов. Стало быть, в Смаллиании существует неотъявленный лжец.

5. Предположим, что действует суммарный закон **Г&Д&Р**. На основании задачи 2 заключаем, что множество всех рыцарей не составляет клуб, хотя включает в себя клуб **Р** признанных рыцарей. Следовательно, найдется непризнанный рыцарь.

6. Для доказательства импликации **Г** $\Rightarrow$ **2Г** нужно перебрать все принципиальные случаи для клубов $К_1$ и $К_2$ с точки зрения их

соотношения и вхождения в них рыцарей и лжецов. Мы можем пользоваться тем, что все лжецы клуб не образуют (задача 1).

1) Если $A \in K_1 \cap K_2$ и A – рыцарь, то достаточно взять $A = B$.

2) Если $A \notin K_1 \cup K_2$ и A – лжец, то достаточно взять $A = B$.

Поэтому можно считать, что в $K_1 \cap K_2$ нет рыцарей, в вне $K_1 \cup K_2$ нет лжецов.

3) В $K_1 \cap K_2$ входит лжец A и вне K_1 находится некий рыцарь B. Такая пара смаллиан A, B удовлетворяет условию **2Г** для клубов K_1 и K_2.

4) В $K_1 \cap K_2$ входит лжец A и существует рыцарь B в K_1/K_2. В этом случае подходит пара B, A.

5) $K_1 \cap K_2 = \varnothing$ и вне $K_1 \cup K_2$ могут быть только рыцари. Если в K_1 и в K_2 имеется по лжецу или по рыцарю, то в этом случае получаем **2Г**. А если в один из клубов K_1 или K_2 входят рыцарь и лжец, то тоже все ясно.

6) $K_1 \cap K_2 = \varnothing$ и, скажем, K_1 состоит из одних лжецов. В силу 5) можно считать, что в K_2 состоят только рыцари и вне $K_1 \cup K_2$ – одни рыцари. Но тогда клуб K_1 представляет собой множество всех лжецов; противоречие.

Мы просмотрели всевозможные случаи – это случаи 1)-5), и в каждом из них выполняется закон **2Г**. Искомая импликация доказана.

Неверно, что **2Г** влечет **Г**. Действительно, рассмотрим модель Смаллиании, в которой имеется всего один клуб К всех лжецов. В силу 1 закон **Г** не ратифицирован. Но зато выполняется закон **2Г**. Для клубов К и К возьмем произвольно рыцаря A и лжеца B. Тогда A скажет, что «$B \in$ К», а B укажет, что «$A \in$ К».

7. В силу задачи 6 **Г** $\Rightarrow$ **2Г**. Аналогично доказывается импликация **Г^** $\Rightarrow$ **2Г**. Только в случае 6) имеем: *a*) вне $K_1 \cup K_2$ существует рыцарь A – тогда, беря $B \in K_1$, получим, что A: «$B \in K_1$» и B: «$A \in K_2$» либо *b*) вне $K_1 \cup K_2$ нет смаллиан – тогда получаем клуб всех рыцарей K_2, что противоречит задаче 2.

Обратно, пусть выполнен закон **2Г**, но не выполнены законы **Г** и **Г^**. Задачи 1 и 2 показывают, что существуют клубы K_1 всех лжецов и K_2 всех рыцарей. По условию **2Г** найдутся смаллиане A и B, такие, что A: «B – лжец» и B: «A – рыцарь». Откуда получаем противоречие: A – рыцарь $\Leftrightarrow$ A – лжец.

8. Покажем, что $2Г\&Д \Rightarrow Г\&Г^{\wedge}$. Достаточно проверить импликацию $2Г\&Д \Rightarrow Г$. Предположим от противного, что выполнены законы **2Г** и **Д**, но не выполнен закон **Г**. Тогда множество всех лжецов образует клуб К. В силу **Д** и все рыцари составляют свой клуб ¬К. По закону **2Г** для клубов К и ¬К найдутся смаллиане A и B, утверждающие соответственно, что «$B \in$ К» и «$A \in \neg$К». Значит, A говорит, что «B – лжец», а B говорит, что «A – рыцарь». Наконец, если A – действительно рыцарь, то лжец B говорит правду, что невозможно. Если же A – лжец, то B – рыцарь и, стало быть, A – рыцарь, что также невозможно. Задача решена.

9. Предположим от противного, что в некоторой Смаллиании существует именование, при котором множество К всех неноминабельных смаллиан является клубом. Получаем $К = \{A\colon A \notin К_A\}$. Пусть $X = A_К$. Тогда $К = К_X$ и, как легко видеть, $X \in К \Leftrightarrow X \in К$, что невозможно. Здесь мы имеем аналог знаменитых парадокса «Лжеца», антиномии Рассела и диагонального канторовского метода.

10. Пусть в Смаллиании действует закон **Н** относительно некоторого именования. Снова от противного допустим, что не выполняется закон **Г**, т. е. существует клуб Т, объединяющий всех лжецов. По определению **Н** для него существует клуб К со свойством:

$$(\forall B \in К)(\exists A \in Т)(A\colon «B \in К_B»)\&(\forall B \notin К)(\exists A \notin Т)(A\colon «B \in К_B»).$$

Из первой части конъюнкции следует, что $(\forall B \in К)\ B \notin К_B$, а вторая часть конъюнкции влечет $(\forall B \notin К)\ B \in К_B$. Значит, $К = \{B\colon B \notin К_B\}$, что противоречит предыдущей задаче.

Упражнение 1. Сформулируйте дуальные задачам 6-8 предложения. Верны ли они?

Упражнение 2. Покажите, что условия **Г** и $Г^{\wedge}$ логически независимы.

Упражнение 3. Докажите, что $2Г^{\wedge} \Leftrightarrow 2Г$.

Упражнение 4. Влечет ли условие **МН** условие $Г^{\wedge}$?

Замечание. Р. Смаллиан дает решение задач 1, 3-5 и 10. В то же время он (лукаво) замечает, что условия **Г** и **2Г** логически независимы, и предлагает читателю это доказать; см. [496, пункт 268 а)]. Задачи 6-8 показывают, что эти законы тесно связаны между собой. Более того, задачу 7 можно усилить в двух направлениях, введя два понятия *n-геделевости.*

Далее, при фиксированном именовании в Смаллиании ***S*** дуальный к **H** закон **H**$^\wedge$ запишется так:

$$(\forall K_1\exists K_2\forall B\in K_2\exists A\in K_1)(A\text{: «}B\notin K_B\text{»})\&(\forall K_1\exists K_2\forall B\notin K_2\exists A\notin K_1)(A\text{: }B\notin K_B\text{»}).$$

Скажем, что Смаллиания удовлетворяет закону **МН**$^\wedge$, если для нее существует именование, относительно которого выполняется закон **Н**$^\wedge$. Для данного именования в Смаллиании ***S*** определим соответствующее именование в Смаллиании ***S***$^\wedge$: имя каждого клуба К из ***S*** переносится на клуб ¬К из ***S***$^\wedge$. Тогда в силу леммы получаем такое

Следствие 1. ***S*** *удовлетворяет* ***МН*** $\Leftrightarrow$ ***S***$^\wedge$ *удовлетворяет* ***МН***$^\wedge$.

Следствие 2. *Закон* ***МН***$^\wedge$ *всегда влечет закон* **Г**$^\wedge$.

Для доказательства этого следствия достаточно воспользоваться задачей 10 и принципом двойственности.

Для любого натурального числа *n* сформулируем для Смаллиании такие законы:

Закон ***n*Г**: для любых клубов $K_1, K_2,\ldots, K_n$ существуют такие смаллиане $A_1, A_2,\ldots, A_n$, что

$$A_1\text{: «}A_2\in K_1\text{»}, A_2\text{: «}A_3\in K_2\text{»}, \ldots, A_{n-1}\text{: «}A_n\in K_{n-1}\text{»}, A_n\text{: «}A_1\in K_n\text{»}.$$

Закон ***n*Г**$^\wedge$: для любых клубов $K_1, K_2,\ldots, K_n$ существуют такие смаллиане $A_1, A_2,\ldots, A_n$, что

$$A_1\text{: «}A_2\notin K_1\text{»}, A_2\text{: «}A_3\notin K_2\text{»}, \ldots, A_n\text{: «}A_1\notin K_n\text{»}.$$

Теорема 1. *Имеют место следующие утверждения:*

Н) ***n*Г** $\Leftrightarrow$ **Г** *при любом нечетном n;*

Ч) ***n*Г** $\Leftrightarrow$ **Г** $\vee$ **Г**$^\wedge$ *при любом четном n.*

Доказательство. В утверждении Ч) случай *n*=2 доказан в задачах 6 и 7. Импликация **Г** $\Rightarrow$ ***n*Г** для произвольного натурального числа *n* доказывается индукцией по *n*. При индуктивном переходе рассматривается перебор случаев, как и при решении задачи 6.

Докажем импликацию ***n*Г** $\Rightarrow$ **Г** при нечетном *n*=2*m*+1. Предположим от противного, что выполнено условие ***n*Г** и существует клуб К, совпадающий с множеством всех лжецов (см. задачу 1). Беря клуб К n раз, выберем смаллиан $A_1, A_2, \ldots, A_n$, последовательно утверждающих, что

$$A_1: «A_2 \in К», A_2: «A_3 \in К», \ldots, A_{2m}: «A_{2m+1} \in К», A_{2m+1}: «A_1 \in К».$$

Получаем противоречие: A_1 – рыцарь $\Leftrightarrow A_1$ – лжец. В самом деле, если A_1 – рыцарь, то A_2 – лжец, A_3 – рыцарь, ..., A_{2m} – лжец, A_{2m+1} – снова рыцарь, значит, A_1 – лжец. Если же A_1 – лжец, то A_2 – рыцарь, ..., A_{2m+1} – опять лжец, поэтому A_1 – рыцарь.

Наконец, пусть дано четное натуральное число $2m$. Докажем, что $\mathbf{2m\Gamma \Rightarrow \Gamma \vee \Gamma^{\wedge}}$. По контрапозиции достаточно показать, что одновременное отрицание законов $\mathbf{\Gamma}$ и $\mathbf{\Gamma^{\wedge}}$ влечет отрицание $\mathbf{2m\Gamma}$. В силу задач 1 и 2 отрицание $\mathbf{\Gamma}$ и $\mathbf{\Gamma^{\wedge}}$ означает, что в Смаллиании существуют клубы Л всех лжецов и Р всех рыцарей. Полагаем $К_1 = К_2 = \ldots = К_{2m-1} = Р$ и $К_{2m} = Л$. Предположим, что для этих клубов найдутся смаллиане $A_1, A_2, \ldots, A_{2m}$, для которых

$$A_1: «A_2 \in Р», A_2: «A_3 \in Р», \ldots, A_{2m-1}: «A_{2m} \in Р», A_{2m}: «A_1 \in Л».$$

Тогда, если A_1 – рыцарь, то A_2 – рыцарь, ..., A_{2m} – рыцарь и A_1 – лжец; противоречие. Если же A_1 – лжец, то A_2 – лжец и т. д., A_{2m} – лжец, значит, A_1 – рыцарь; снова противоречие. Получили отрицание закона $\mathbf{2m\Gamma}$.

Упражнение 5. Самостоятельно докажите импликацию $\mathbf{\Gamma \Rightarrow n\Gamma}$.

Теорема 2. *Справедливы следующие предложения:*

Н) $\mathbf{n\Gamma^{\wedge} \Leftrightarrow \Gamma^{\wedge}}$ *при любом нечетном n;*

Ч) $\mathbf{n\Gamma^{\wedge} \Leftrightarrow \Gamma \vee \Gamma^{\wedge}}$ *при любом четном n.*

Упражнение 6. Докажите теорему 2 (воспользуйтесь принципом двойственности).

Следствие 3. *Для любых четных m и n имеем* $\mathbf{m\Gamma \Leftrightarrow n\Gamma^{\wedge}}$.

Смаллиан придумал также три модели геделевых островов, удовлетворяющих тем или иным законам. Напомним, что мы геделевы острова называем страной Смаллианией. Рассмотрим некоторые возможные модели Смаллиании.

Пример 1 (Р. Смаллиана). В Смаллиании S четыре жителя: признанный рыцарь $Р_п$, непризнанный рыцарь Р, отъявленный лжец $Л_о$ и неотъявленный лжец Л. Они состоят в четырех клубах: $К = \{Р_п\}$, $\neg К = \{Р, Л, Л_о\}$, $Т = \{Л_о\}$ и $\neg Т = \{Р_п, Р, Л\}$. Это минимальная (по числу жителей) модель, в которой действуют законы **Р**, **Л**, **Г** и **Д**. В силу сказанного выше выполняются также все законы ***п*Г** и ***п*Г$^\wedge$**.

Пример 2. Пусть S = {$Р_п$, Л, $Л_о$} с тремя клубами {$Р_п$), {$Л_о$} и {$Р_п$, $Л_о$}. В данной Смалиании верны законы **Р**, **Л**, **Г**, **2Г**, неверны законы **Г$^\wedge$** и **Д** и отсутствуют непризнанные рыцари. Рассмотрим следующее именование в S: клубу {$Р_п$) дадим имя $Л_о$, {$Л_о$} – имя $Р_п$ и {$Р_п$, $Л_о$} – имя Л. Непосредственно проверяется, что для этого именования в S справедлив закон **Н**. Значит, в Смалиании S выполняется и **МН**. Поэтому **МН** не влечет **Г$^\wedge$**.

Пример 3. Рассмотрим Смаллианию S = {$Р_п$, Р, $Л_о$} с тремя клубами {$Р_п$), {$Л_о$} и {$Р_п$, $Л_о$}. Очевидно, справедливы законы **Р**, **Л**, **Г$^\wedge$**, **2Г**, но неверны законы **Г** и **Д**. Здесь нет неотъявленных лжецов и неверен закон **МН**.

Пример 4. Пусть S = {$Р_п$, $Л_о$} с двумя клубами К = {$Р_п$) и ¬К= {$Л_о$}. Ясно, что в такой Смаллиании S неукоснительно выполняются законы **Р**, **Л** и **Д**, но отклонены законы **Г** и **Г$^\wedge$**. В этой модели нет непризнанных рыцарей и неотъявленных лжецов.

Пример 5. Рассмотрим Смаллианию S = {Р, Л} с двумя клубами: пустым ∅ и S = {Р, Л}. В ней существует два именования. Она удовлетворяет законам **Г**, **Г$^\wedge$** и **Д**. Но при любом именовании не удовлетворяет **Н**. Действительно, взяв $К_1$ = ∅ и произвольный клуб $К_2$, мы видим, что при любом B не найдется никакого A в $К_1$. Следовательно, конъюнкция **Г&Г$^\wedge$&Д** не влечет ни **МН**, ни **МН$^\wedge$**.

Отметим, что в модели Смаллиании 4 не имеют места законы **МН** и **МН$^\wedge$** в силу задачи 10 и следствия 2.

Упражнение 7. Верны ли в Смаллиании из примера 1 законы **МН** и **МН$^\wedge$**? Выполняется ли в примерах 2 и 3 закон **МН$^\wedge$**?

Упражнение 8. Постарайтесь сформулировать новые задачи, т. е. продвиньте «теорию Смаллиании» дальше.

Приведем теперь «стандартную» интерпретацию Смаллиании с ее законами, которая и послужила Р. Смаллиану научной основой для введения геделевых островов с целью популяризации достижений математической логики.

Рассмотрим формальную арифметику, т. е. формальную аксиоматическую теорию натуральных чисел. Пусть S – множество всех высказываний, т. е. замкнутых формул формальной арифметики. Всякое высказывание либо истинно, либо ложно в стандартной модели **N** натурального ряда. Каждому высказыванию $A \in$ S сопоставлено натуральное число – его геделев номер, или просто *номер* $n(A)$. Множество К высказываний называется *определимым*, если множество $n(К) = \{n(A)\colon A \in К\}$ всех номеров этих высказываний определяется некоторой формулой $F(x)$ формальной арифметики: $n(К) = \{n \in \mathbf{N}\colon F(n)$ истинно в стандартной модели$\}$. Определимые множества К также допускают геделеву нумерацию натуральными числами: если n – номер К, то пишем $К = К_n$.

В результате получаем Смаллианию **S** с населением S и определимыми множествами в качестве клубов. Истинные высказывания – это рыцари, ложные высказывания – лжецы. Теоремы (доказуемые высказывания) формальной арифметики суть признанные рыцари, а противоречия (отрицания которых доказуемы) – отъявленные лжецы. Можно доказать, что множество всех теорем и множество всех противоречий – определимые множества. Дополнения до определимых множеств сами определимы. Значит, в **S** справедливы законы **Р**, **Л** и **Д**.

Выражение A: «$B \in К$» означает (на языке номеров): $n(B) \in n(К)$ в случае истинности высказывания A и $n(B) \notin n(К)$ в случае ложности A, т. е. фактически высказывание A равносильно тому (говорит о том), что $B \in К$. Номинабельность A означает, что $A \in К_{n(A)}$, или $n(A) \in n(К_{n(A)})$. A есть друг B переводится так: истинность A равносильна принадлежности $n(B) \in n(К_{n(B)})$. Для любого натурального n высказывание «$n \in К_n$» имеет свой номер, который обозначим n^*.

Покажем, что в **S** выполняется закон **Н** относительно геделевой нумерации (именования). Возьмем произвольное выразимое множество $К_1$ и рассмотрим множество высказываний $К_2 = \{B \in S\colon n(B)^* \in n(К_1)\}$. Можно проверить, что $К_2$ – определимое множество (клуб). Тогда для любого $B \in К_2$ в $К_1$ существует высказывание $A \equiv$ «$n(B) \in n(К_{n(B)})$», утверждающее, что $B \in К_{n(B)}$. А для любого $B \notin К_2$ высказывание $A \equiv$ «$n(B) \in n(К_{n(B)})$» не принадлежит $К_1$, поскольку $n(B)^* \in n(К_1)$.

Следовательно, на основании задачи 10 в **S** выполняется геделев закон **Г**, утверждающий в силу задач 1 и 2 и закона **Д**, что множество всех истинных высказываний формальной арифметики неопределимо. Это есть теорема Тарского о невыразимости арифметической истины.

Далее, из задачи 5 вытекает, что в арифметической системе S существует недоказуемое истинное высказывание. Такое высказывание *неразрешимо*, т. е. ни оно само, ни его отрицание не является теоремой. А это одна из форм знаменитой теоремы Геделя о неполноте всякой формальной системы, содержащей арифметику.

Упражнение 9. Укажите конкретное неразрешимое высказывание в «арифметической» Смаллиании S.

Заметим, что материал этого пункта можно использовать на факультативных занятиях по математике в профильных классах. Отметим, что теоремы 1 и 2 можно интерпретировать и применить в теории формальных систем в духе самого Смаллиана [498, главы I-III, дополнение].

Литература: [28, 43, 126-130, 137, 274, 299, 372, 485, 496-498, 505, 582, 624].

ПРИЛОЖЕНИЕ
Избранные вопросы математики

Почто, о боги, в этом мире
Должно быть дважды два четыре?
Александр Поп

Пролог

В данном приложении приведено восемь математических очерков. В них в научно-популярной форме изложены важнейшие темы, знание которых необходимо, по крайней мере, весьма желательно, современному преподавателю математики и специалисту-математику. Лишь темы III и VII несколько выпадают из этого ряда. Зато они имеют существенное методологическое значение, показывая путь абстрагирования и обобщения (III) и выявляя единство трех основных типов математических структур (VII).

Очерк I посвящен теории натуральных чисел. Мы доказываем возможность прямого определения отношения порядка в любой системе Пеано. Особое внимание уделено различным принципам индукции.

В очерке II дан обзор классической теории делимости.

В очерке III изложено обобщение делимости натуральных чисел на абстрактные полугруппы, называемые целыми (или коническими).

В очерке IV рассмотрены свойства циклических групп и показано их применение к элементарной теории чисел. Приведена система задач и упражнений, которые можно использовать в учебном процессе.

Очерк V содержит материал об упорядоченных множествах.

В очерке VI вводятся метрические и топологические пространства, изучаются их основополагающие свойства. Указаны экзотические метрики и топологии, имеющие, однако, полезные применения.

Тем самым, темы III и IV раскрывают алгебраический тип математических структур, тема V – порядковый тип, а тема VI – топологический тип структур. Основные числовые системы, состоящие из действительных чисел, служат примерами линейно упорядоченных алгебраических структур.

В очерке VII показана взаимосвязь алгебраического, порядкового и топологического типов математических структур в классе конечных объектов. А также рассматриваются решеточно-значные меры на конечных множествах, что позволяет увязать первые три типа структур с пространствми с такой мерой.

Наконец, в очерке VIII приведены некоторые классические математические модели реальности.

Каждый из восьми очерков имеет свой список литературы.

I. Натуральный ряд

Бог создал натуральные числа,
все остальное – творение человека.
Леопольд Кронекер

Введение

Число и геометрическая фигура – исходные абстракции, та идеальная квазиэмпирическая реальность, которая вместе с их обобщениями составляет предмет математики. Сначала возникли натуральные числа 1, 2, 3, ..., служащие для пересчета и счета вещей, для измерения различных величин. Другие числовые системы можно построить на основе натуральных чисел. Действительно, «теория пар» Гамильтона (1953 год) позволяет строить целые числа, исходя из натуральных, а рациональные числа – на основе целых чисел. Грассман определил систему целых чисел как двусторонний натуральный ряд. Кантор показал (1870 год), что действительные числа можно определить как классы попарно эквивалентных фундаментальных последовательностей рациональных чисел. Действительные числа строятся также методом сечений Дедекинда или как бесконечные десятичные дроби [12]. Далее методом удвоения вводятся комплексные числа (Гаусс), кватернионы (Гамильтон) и октавы (числа Кэли). Расширение понятия числа – магистральный путь развития математики, начиная с пифагорейского учения «Все есть натуральное число» вплоть до гипердействительных и p–адических чисел [20]. Это привело, в частности, к расцвету современной алгебры.

Во второй половине XIX века были предприняты попытки строго определить сами натуральные числа, создать теорию натурального ряда. Дело в том, что на числовой основе можно построить всю классическую математику – *арифметизировать* математику. Математика – точная дедуктивная наука, в которой одни положения (теоремы) выводятся из других (в конечном счете, из аксиом). Поэтому построение должно начинаться с обоснования натуральных чисел. Такое обоснование дает аксиоматический метод. Необходимость аксиоматизации основ математики подтвердилась на рубеже XIX–XX веков в связи с обнаружением противоречий (парадоксов, антиномий) в теории множеств, вызванных ничем не ограниченным употреблением общих понятий.

В 1861 году Грассман ввел индуктивные определения операций сложения и умножения натуральных чисел, исходя из операции ' «взятия следующего числа», и доказал их основные свойства. В 1889-1891 годах Пеано дал следующее *индуктивное определение* натуральных чисел: 1) 1 – натуральное число; 2) если n – натуральное число, то n' – натуральное число; 3) любое натуральное число может быть получено применением пунктов 1) и 2); 4) $n' \neq 1$ для каждого натурального числа n; 5) $m' = n' \Leftrightarrow m = n$ для любых натуральных чисел m и n. (См. первоисточник: *Peano G*. Sul concetto di numero// Rivista di matematic. 1891. 1, 87-102, 256-267.)

В результате *натуральный ряд* предстает как последовательность попарно различных элементов (натуральных чисел):

$$1, 1', 1'', 1''', 1'''', \cdots.$$

Данное определение носит конструктивный характер: все натуральные числа порождаются 1 при последовательном применении операции '. Это порядковый, а не количественный подход к натуральным числам (есть их упорядоченность – пересчет, но пока нет счета – операций над натуральными числами).

Индуктивное определение натуральных чисел математически описывает натуральный ряд как известный, реально существующий объект. Модификацией постулатов 1)–5) получается *аксиоматическое определение* натуральных чисел (аксиоматика Пеано). В нем наряду с *аксиомами* имеются *первичные* (неопределяемые) *понятия*, математическая суть которых выражена в аксиомах. Любая модель аксиоматики Пеано может быть названа натуральным рядом.

Данную ситуацию полезно сравнить с евклидовой геометрией. В «Началах» Евклида геометрия предстает перед нами как «физическая математика», описывающая реальное пространство. Аксиоматика Евклида – это пример так называемой материальной аксиоматики. Строгая аксиоматическая теория евклидовой геометрии была впервые построена Гильбертом в 1899 году.

Возвращаясь к самому началу, заметим, что аксиоматические теории Пеано и Гильберта, относящиеся к основаниям математики, как раз и описывают фундаментальные понятия натурального числа и геометрической фигуры.

Мы принимаем следующий план изложения:

1. Аксиоматика Пеано.
2. Упорядочение системы Пеано.
3. Индуктивное определение операций.
4. Связи операций с порядком.
5. Конечные множества.
6. Формы математической индукции.
7. Другие подходы к определению натурального ряда.
8. Разное.

1. Аксиоматика Пеано

Для определения системы Пеано необходимо задать первичные термины и аксиомы. При этом мы будем опираться на элементарные теоретико-множественные понятия (множество, элемент, подмножество, отображение и т. д.) и пользоваться обычной логикой.

Первичные понятия: «множество N», «отображение $'$ из N в N», «элемент 1 из N». Таким образом, на множестве N задана операция $'$ и выделен элемент 1. В результате получается алгебраическая система $\langle N, ', 1\rangle$.

Определение 1. Система $\langle N, ', 1\rangle$ называется *системой Пеано* (см. [23, с. 78]), если она удовлетворяет следующим трем аксиомам:

P1. $n' \neq 1$ для каждого $n \in N$.

P2. $m' = n' \Rightarrow m = n$ для любых $m, n \in N$.

P3. Для любого подмножества M в N: если 1) $1 \in M$ и 2) $n \in M \Rightarrow n' \in M$ для каждого $n \in N$, то $M = N$.

Натуральным рядом называется всякая конкретная система Пеано, т. е. модель аксиоматической теории Пеано. Элементы из N называются *натуральными числами*, а само N – множеством (всех) натуральных чисел. Интуитивно 1 – «первое» натуральное число, а операция $'$ означает «взятие следующего числа» $n' = n + 1$. Аксиома P1 утверждает, что у 1 нет «предшествующего элемента». Аксиома P2 показывает, что отображение $' : N \to N$ переводит неравные числа в неравные. Аксиома P3 – это *аксиома индукции*, алгебраический смысл которой состоит в том, что система Пеано не имеет собственных подсистем.

Несколько слов о свойствах аксиоматики Пеано. Мы предполагаем ее *непротиворечивость*: существует хотя бы один натуральный ряд. Можно доказать, что аксиоматика Пеано *категорична*, т. е. любые два натуральных ряда изоморфны. Аксиомы P1–P3 логически *независимы*, т. е. ни одна из них не вытекает из остальных. Для доказательства независимости этих аксиом строятся соответствующие примеры, в каждом из которых выполняются ровно две из трех аксиом.

Примеры. 1. Пусть $N = \{1\}$ и $1' = 1$. Система $\langle N, ', 1\rangle$ удовлетворяет аксиомам P2 и P3, но в ней не выполняется аксиома P1.

2. Положим $N = \{1, a\}$ и $1' = a = a'$. Такая система удовлетворяет аксиомам P1 и P3, но не удовлетворяет аксиоме P2.

3. Возьмем некоторый натуральный ряд $\langle N_1, ', 1\rangle$ и объект $p \notin N_1$. Рассмотрим множество $N = N_1 \cup \{p\}$, на которое распространим операцию $'$, положив $p' = p$. Полученная система $\langle N, ', 1\rangle$ удовлетворяет аксиомам P1 и P2, но при $M = N_1 \neq N$ выполняются условия 1) и 2) аксиомы P3.

Введем еще одно понятие. Система $\langle N, ', 1\rangle$ называется *индукционной системой* [4], если она удовлетворяет аксиоме индукции P3. Любая система Пеано, системы из примеров 1 и 2 являются индукционными системами, а система из примера 3 не является индукционной. Индукционные системы – это в точности системы $\langle N, ', 1\rangle$, порожденные элементом 1.

Из аксиом Пеано легко выводятся следующие свойства системы Пеано:

1°. *$n' \neq n$ для любого $n \in N$.*

2°. *Для каждого $n \neq 1$ из N существует единственный элемент $k \in N$, такой, что $n = k'$.*

Замечание. В силу свойства 1 и аксиомы P2 для каждого натурального числа $n \neq 1$ существует единственное m, такое, что $m' = n$. Обозначив его $`n$, получим $(`n)' = n$. Всегда $`(n') = n$.

Упражнение. Существует ли индукционная система, которая не удовлетворяет ни аксиоме P1, ни аксиоме P2?

2. Упорядочение системы Пеано

Система Пеано имеет порядковую природу. Поэтому на произвольной системе Пеано $\langle N, ', 1\rangle$ сразу определим отношение порядка, следуя [2, 3]. Отметим, что обычно сначала вводятся операции сложения и умножения натуральных чисел, а затем отношение порядка определяется через операцию сложения [23]: $m<n$ означает, что $n=m+k$ для некоторого $k\in N$.

Нам потребуются понятия отрезка и луча в N. *Начальным отрезком*, или просто *отрезком*, натуральных чисел называется произвольное множество $A\subseteq \mathrm{N}$, содержащее 1 и удовлетворяющее условию

$$(\forall n\in \mathrm{N})(n'\in A\Rightarrow n\in A).$$

Лучом натуральных чисел назовем всякое множество $A\subseteq \mathrm{N}$ со свойством

$$(\forall n\in \mathrm{N})(n\in A\Rightarrow n'\in A).$$

Например, $\{1\}$, N – отрезки, а $\varnothing$, N и $\mathrm{N}\backslash\{1\}$ – лучи. Если луч A содержит 1, то A =N по Р3.

Очевидно, что пересечение любого непустого семейства отрезков (лучей) в N также является отрезком (лучом). Поэтому для произвольного $n\in N$ существуют наименьший отрезок $[1, n]$ и наименьший луч $[n, \infty)$, содержащие натуральное число n. Интуитивно $[1, n]$ есть множество натуральных чисел от 1 до n.

Определение 2. *Для любых m, $n\in N$ пусть*

$$m\le n \text{ означает, что } [1, m]\subseteq[1, n].$$

Получили бинарное отношение $\le$ на множестве N, обладающее свойствами *рефлексивности* ($n\le n$ для всех $n\in N$) и *транзитивности* ($k\le m,\quad m\le n\ \Rightarrow\ k\le n$). Будет показано, что отношение $\le$ на N *антисимметрично* ($m\le n\ \&\ n\le m\Rightarrow m=n$) и *линейно* ($m\le n$ или $n\le m$ для любых $m, n\in N$).

Напомним, что бинарное отношение на непустом множестве X называется *отношением порядка*, если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично (см. Приложение V). А само множество X с заданным на нем отношением порядка называется *упорядоченным множеством*; при этом, если отношение порядка на X линейно, то X называется *линейно упорядоченным множеством* (или *цепью*). *Сечением* линейно упорядоченного множества $\langle X, \le\rangle$ называется пара (A, B) его непустых подмножеств, таких, что $A\cup B=X$ и $a<b$ для любых $a\in A$ и $b\in B$. Запись $a<b$ означает, конечно, что $a\le b$ и $a\ne b$. Линейно

упорядоченное множество называется *дискретным*, если для всякого его сечения (A, B) множество A обладает наибольшим элементом, а множество B – наименьшим (такое сечение (A, B) называется *скачком*). Наконец, упорядоченное множество называется *вполне упорядоченным*, если каждое его непустое подмножество имеет наименьший элемент.

Покажем, что $\langle \mathbf{N}, \leq \rangle$ - дискретное вполне упорядоченное множество.

Для этого докажем следующую цепочку ***свойств отрезков***.

Запись $m < n$ означает, что $m \leq n$ и $m \neq n$. Например, $n \langle n'$ по предложению 2. Будем писать $A \dot{\cup} B = X$, если $A \cup B = X$ и $A \cap B = \varnothing$.

O1. $[1, n] \cup \{n'\} = [1, n']$ *для любого* $n \in \mathbf{N}$.

O2. $[n, \infty) = [n', \infty) \cup \{n\}$ *для любого* $n \in \mathbf{N}$.

O3. $[1, n) \cup [n', \infty) = \mathbf{N}$ *для каждого* $n \in \mathbf{N}$.

O4. *Для любых m, $n \in \mathbf{N}$ выполняется ровно одно из соотношений:* $[1, m] \subset [1, n]$, $m = n$ *или* $[1, n] \subset [1, m]$.

O5. $\{k \in N : n \leq k \leq n'\} = \{n, n'\}$*для каждого* $n \in \mathbf{N}$.

O6. $[1, n] = \{k \in \mathbf{N} : k \leq n\}$ и $[n, \infty) = \{k \in \mathbf{N} : n \leq k\}$ *для любого* $n \in \mathbf{N}$.

O7. *Всякий отрезок в N, отличный от N, имеет вид $[1, n]$ для некоторого однозначно определенного числа $n \in N$.*

O8. *Всякий непустой луч в N имеет вид $[n, \infty)$ для некоторого единственного $n \in N$.*

Доказательство свойств O1–O8

O1. Поскольку $[1, n] \subseteq [1, n']$ и $[1, n] \cup \{n'\}$ есть отрезок при $n \in \mathbf{N}$, то $[1, n] \cup \{n'\} = [1, n']$. Индукцией по n покажем, что $n' \notin [1, n]$. В силу P1 имеем $1' \notin \{1\} = [1, 1]$. Предположим, что $n' \notin [1, n]$. Если бы $n'' \in [1, n']$, то, учитывая $n'' \neq n'$, получили бы $n'' \in [1, n]$ и, следовательно, $n' \in [1, n]$: противоречие.

O2. Так как $[n', \infty) \subseteq [n, \infty)$ и $[n', \infty) \cup \{n\}$ – луч, то $[n, \infty) = [n', \infty) \cup \{n\}$. По предложению 3б) и свойству O1 $\mathbf{N} \setminus [1, n]$ – луч, содержащий n'. Поэтому $[n', \infty) \subseteq \mathbf{N} \setminus [1, n]$, то есть $[1, n] \cap [n', \infty) = \varnothing$. Значит, $n \notin [n', \infty)$.

O3. Доказательство проведем индукцией по n. По P3 получаем $[1, 1] \cup [1', \infty) = \mathbf{N}$, причем $1 \notin [1', \infty)$ в силу O2. Предположим, что $[1, n]$

$\dot\cup [n', \infty) = \mathbf{N}$. По О1 и О2 имеем $[1, n'] = [1, n] \dot\cup \{n'\}$ и $[n'', \infty) = [n', \infty) \setminus \{n'\}$. Откуда $[1, n'] \dot\cup [n'', \infty) = \mathbf{N}$.

О4. Пусть даны $m \neq n$ из $\mathbf{N}$. Требуется доказать, что либо $[1, m] \subset [1, n]$, либо $[1, n] \subset [1, m]$. По О3 имеем $[1, n] \dot\cup [n', \infty) = \mathbf{N}$. Поэтому либо $m \in [1, n]$, либо $m \in [n', \infty)$.

Пусть $m \in [1, n]$. Поскольку $m \neq n$, то существует $`n$. По О1 имеем $[1, n] = [1, `n] \dot\cup \{n\}$, то есть $m \in [1, `n]$ и $[1, m] \subseteq [1, `n] \subset [1, n]$.

Пусть теперь $m \in [n', \infty)$. Тогда существует $`m$ и $[m, \infty) \subseteq [n', \infty)$. Откуда $[1, n] \subseteq [1, `m] \subset [1, m]$ в силу О3 и О1.

О5. Вытекает из О1 и О4.

О6. Действительно,

$$\{k \in \mathbf{N} : k \leq n\} = \{k \in \mathbf{N} : [1, k] \subseteq [1, n]\} = \{k \in \mathbf{N} : k \in [1, n]\} = [1, n]$$

Второе равенство вытекает из первого на основании О3 и О4.

О7. Рассмотрим отрезок $A \neq \mathbf{N}$. Существует $n \in A$, такое, что $n' \notin A$. Поэтому $[1, n] \subseteq A$. Предположим, что нашлось $m \in A \setminus [1, n]$. Тогда по О4 и О1 $[1, n] \subset [1, m]$ и $[1, n'] \subseteq [1, m] \subseteq A$, что противоречит $n' \notin A$. Значит, $A \setminus [1, n] = \varnothing$, и $A = [1, n]$. Единственность n следует из О4.

Свойство О8 вытекает из свойств О7 и О3.

Свойство О4 показывает, что $\langle \mathbf{N}, \leq \rangle$ – линейно упорядоченное множество с наименьшим элементом 1.

Теорема 1. *Если $\langle N, ', 1 \rangle$ – система Пеано, то $\langle N, \leq \rangle$ – дискретное вполне упорядоченное множество с наименьшим элементом 1, но без наибольшего элемента.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное сечение (A, B) в N. Ясно, что A – собственный отрезок в N. По свойству О7 $A = [1, n]$ для некоторого $n \in \mathbf{N}$. В силу О3 $B = [n', \infty)$. Тогда по О6 множество A обладает наибольшим элементом n, а множество B имеет наименьший элемент n'.

Наконец, возьмем непустое подмножество C в N. Если $1 \in C$, то C обладает наименьшим элементом. Пусть $1 \notin C$. Положим $B = \{n \in \mathbf{N} : m \leq n \text{ для некоторого } m \in C\}$ и $A = \mathbf{N} \setminus B$. В результате получаем сечение (A, B) дискретно упорядоченного множества $\langle \mathbf{N}, \leq \rangle$. Поэтому множество B, а вместе с ним и C имеют наименьший элемент. Теорема доказана.

Упражнения. 1. Докажите следующие свойства системы Пеано N: $n < n'$; $m < n \Leftrightarrow m \leq' n \Leftrightarrow m' \leq n$; $m \leq n \Leftrightarrow m < n'$ (для любых $m, n \in N$).

2. Покажите, что всякое дискретное упорядоченное множество с наименьшим элементом является вполне упорядоченным.

3. Докажите, что на любой системе Пеано всякий линейный порядок ρ с условием $n\rho n'$ при любых n совпадает с отношением порядка $\leq$ из определения 2.

4. Как связаны между собой отрезки и лучи в N?

5. Убедитесь, что всякое дискретно упорядоченное множество с наименьшим элементом вполне упорядоченно.

6. Дайте описание всех дискретно упорядоченных множеств.

7. Покажите, что утверждение теоремы 1 может быть принято за определение натурального ряда как упорядоченного множества.

3. Индуктивное определение операций

Теорема 1 позволяет проводить *индуктивное построение* функций на системе Пеано по заданным начальному условию и рекуррентным соотношениям. Точнее, справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть $\langle N, ', 1\rangle$ – произвольная система Пеано, X – некоторое множество и $x_0 \in X$. Тогда существует и единственна функция $f: N \to X$, удовлетворяющая условиям:*

1) $f(1) = x_0$;

2) *для каждого $n \neq 1$ из N значение $f(n)$ однозначно определяется по некоторому закону значениями $f(k)$ при $k < n$.*

Схема доказательства. Сначала строятся функции f_n на отрезках $[1, n]$, удовлетворяющие соотношениям 1) и 2) теоремы 2. Единственность функций f_n вытекает из полной упорядоченности N. Рассмотрим множество $M = \{n \in N: f_n \text{ существует}\}$. Функция f_1: $[1, 1] \to X$ определена равенством $f_1(1) = x_0$. Если функция f_n: $[1, n] \to X$ существует, то существует и функция $f_{n'}$: $[1, n'] \to X$, равная f_n на $[1, n]$ и принимающая на элементе n' значение, предписанное условием 2). Полагая $f(n) = f_n(n)$ для всех $n \in N$, получаем искомую функцию.

Теорема 2' [23]. *Пусть даны произвольное множество X, элемент $x_0 \in X$ и некоторая функция $g: X \times N \to X$. Тогда существует единственная функция $f: N \to X$, удовлетворяющая двум условиям:*

1) $f(1)=x_0$;

2) $f(n')=g(f(n),n)$ *для каждого* $n\in N$.

Теорема 2 является частным случаем общей теоремы о построениях по индукции на упорядоченных множествах с условием минимальности (см. [10], с. 26–27), а теорема 2' есть некоторая конкретизация теоремы 2.

Перейдем к понятию гомоморфизма системы $\langle N, ', 1\rangle$ в систему $\langle N_1, ', 1\rangle$ (операции и выделенные элементы в однотипных системах обозначаются одинаково). Отображение $f: N \to N_1$ называется *гомоморфизмом*, если оно сохраняет операции, т. е. $f(n')=f(n)'$ для любого $n \in N$ и $f(1)=1$. Гомоморфизм f, являющийся взаимно однозначным отображением N на N_1, называется *изоморфизмом*. При этом обратное отображение $f^{-1}: N_1 \to N$ также является изоморфизмом. Две системы называются *изоморфными*, если существует изоморфизм одной из них на другую. Изоморфные системы обладают одинаковыми абстрактными свойствами, служат копиями друг друга.

Из теоремы 2 непосредственно следует

Теорема 3. *Для любой системы Пеано* $\langle N, ', 1\rangle$ *и произвольной системы* $\langle N_1, ', 1\rangle$ *существует единственный гомоморфизм* $f: N \to N_1$.

В частности, только тождественное отображение служит гомоморфизмом любой системы Пеано в себя.

Пусть даны две системы Пеано: $\langle N, ', 1\rangle$ и $\langle N_1, ', 1\rangle$. По теореме 3 существуют гомоморфизмы $f: N \to N_1$ и $g: N_1 \to N$. Их композиции $g\circ f: N \to N$ и $f\circ g: N_1 \to N_1$ являются тождественными отображениями. Поэтому $g=f^{-1}$ и гомоморфизмы f и g суть изоморфизмы. И мы получаем категоричность аксиоматики Пеано:

Теорема 4. *Любые две системы Пеано изоморфны.*

Заметим, что эта теорема сразу вытекает и из теоремы 2'. В самом деле, если $\langle \mathbf{N}, 1, ' \rangle$ и $\langle N, 1, ' \rangle$ – системы Пеано, то при $X=N$, $x_0=1$ и $g(x, n)=x'$ получаем изоморфизм f данных систем.

Итак, с точностью до изоморфизма имеется одна-единственная система Пеано, которую будем обозначать далее через **N** (в этом качестве может быть выбран любой натуральный ряд). Элементы из **N** можно обозначать привычным образом (в десятичной системе счисления):

$$1, 2 = 1', 3 = 2' = 1'', 4 = 3' = 1''', \ldots, 100 = 99', 101 = 100', \ldots .$$

Если существует гомоморфизм одной системы на другую, то вторая система называется *гомоморфным образом* первой. Применяя теорему 3, получаем следующую характеризацию индукционных систем.

Теорема 5. *Индукционные системы – это в точности гомоморфные образы системы* **N**.

Построим по индукции бинарные операции сложения и умножения натуральных чисел. Бинарная операция на **N** – это функция от двух аргументов, пробегающих множество **N**, и принимающая значения в **N**.

Фиксируем произвольное натуральное число $m \in \mathbf{N}$. Функцию f_m: $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ задаем соотношениями: 1) $f_m(1)=m'$ и 2) $f_m(n') = f_m(n)'$. Функция f_m существует и единственна по теореме 2.

Теперь для любых $m, n \in$ **N** полагаем $m + n = f_m(n)$.

Теорема 6. *В* **N** *существует однозначно определенная бинарная операция* +, *называемая сложением, которая удовлетворяет соотношениям:*

1) $m + 1 = m'$ *для всех* $m \in$ **N**;

2) $m + n' = (m + n)'$ *для всех* $m, n \in$ **N**.

Аналогично, для каждого $m \in \mathbf{N}$ определяется функция g_m: $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$, удовлетворяющая условиям: $g_m(1) = m$ и $g_m(n') = g_m(n) + m$. Тогда полагаем $m \cdot n = g_m(n)$ для любых $m, n \in$ **N**.

Теорема 7. *В* **N** *существует единственная бинарная операция* $\cdot$, *называемая умножением, которая обладает следующими свойствами:*

1) $m \cdot 1 = m$ *для любого* $m \in$ **N**;

2) $m \cdot n' = m \cdot n + m$ *для любых* $m, n \in$ **N**.

Для операций сложения и умножения в **N** тождественно выполняются следующие свойства:

1. $(k + m) + n = k + (m + n)$, $(k \cdot m) \cdot n = k \cdot (m \cdot n)$ (*ассоциативность операций*).

2. $m + n = n + m$, $m \cdot n = n \cdot m$ (*коммутативность операций*).

3. $(k + m) \cdot n = k \cdot n + m \cdot n$ (*дистрибутивность умножения относительно сложения*).

4. $k+m = k+n \Rightarrow m = n$, $k \cdot m = k \cdot n \Rightarrow m = n$ (*законы сократимости*).

Упражнения. 1. Проверьте равенства $3+4=7$ и $3\cdot4=12$.

2. Докажите по индукции свойства 1–4.

3. Определите по индукции ряд чисел Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ⋯.

4. Определите в **N** бинарную операцию возведения в степень m^n и докажите ее основные свойства.

5. Покажите, что гомоморфизм $f: N \to N_1$ систем Пеано сохраняет операции сложения и умножения, т. е. $f(m+n)=f(m)+f(n)$ и $f(m\cdot n)=f(m)\cdot f(n)$ для любых $m, n\in N$.

6. Если для системы $\langle N, ', 1\rangle$ выполняется заключение теоремы 3, то она изоморфна **N**. Докажите.

4. Связь операций с порядком

Рассмотрим связи между операциями сложения и умножения и отношением порядка в **N**. Имеют место утверждения:

C1. $(\forall m, k\in \mathrm{N})\, m<m+k$.

C2. $(\forall m, n\in \mathrm{N})\,(m<n \Leftrightarrow (\exists k\in \mathrm{N})\,(m+k=n))$.

C3. $(\forall m, n, k\in \mathrm{N})\,(m<n \Leftrightarrow m+k<n+k)$.

C4. $(\forall m, n, k\in \mathrm{N})\,(m<n \Leftrightarrow m\cdot k<n\cdot k)$.

Свойство C1 легко получается индукцией по k.

Доказательство C2. Рассмотрим множества $B=\{m+k : k\in \mathrm{N}\}$ и $M=[1,m]\cup B$ для фиксированного $m\in\mathrm{N}$. В силу C1 $[1,m]\cap B=\varnothing$. Очевидно $1\in M$. Пусть $n\in M$. Если $n<m$, то $n'\le m$ и $n'\in[1,m]\subseteq M$ (см. свойства O4 и O5). А если $n=m$, то $n'=m+1\in B\subseteq M$. Если же $n\in B$, то есть $n=m+k$ при некотором $k\in\mathrm{N}$; то $n'=m+k'\in B\subseteq M$. Следовательно, $M=\mathrm{N}$ по P3. Откуда по O4 $B=\{n : m<n\}$, что и дает C2.

Свойства C3 и C4 вытекают из C2.

Выделим утверждение C2:

$$m<n \Leftrightarrow \exists k\in \mathrm{N}\,(n=m+k). \qquad (*)$$

На натуральном ряде **N** отношение строгого порядка < можно определить и индуктивно [7, с. 26]:

(1) $n<n'$;

(2) $m<n \Rightarrow m<n'$;

(3) отношение $<$ является наименьшим бинарным отношением на $\mathbf{N}$, удовлетворяющим условиям (1) и (2).

Покажем, что индуктивное определение порядка на натуральном ряде $\mathbf{N}$ эквивалентно определению 2, т. е. ($\ast$).

Теорема 8. *На $\mathbf{N}$ существует единственное отношение порядка, обладающее свойствами (1) и (2).*

Доказательство. Введенное выше отношение порядка $\leq$ на $\mathbf{N}$ обладает свойствами (1) и (2) на основании упражнения 1 пункта 2. Возьмем произвольное бинарное отношение ρ на $\mathbf{N}$, обладающее свойствами (1) и (2). Проверим, что наше отношение $<$ включено в отношение ρ. Предположим от противного, что существует пара чисел $m<n$, не находящихся в отношении ρ. В силу теоремы 1 можно выбрать подобную пару чисел $m<n$ с наименьшим возможным значением n. Снова по указанному упражнению имеем $m\leq{}'n$. Если $m={}'n$, то $n=m'$ и $m\rho n$ по (1), что противоречит допущению. Если же $m<{}'n$, то в силу сделанного выбора $m\rho{}'n$. Откуда по (2) опять получаем $m\rho n$.

Упражнения. 1. Докажите свойство Архимеда: для любых $m, n\in \mathbf{N}$ найдется такое $k\in \mathbf{N}$, что $m<k\cdot n$.

2. Сформулируйте и докажите теорему о делении с остатком для натурального ряда чисел (см. Приложение II).

3. Установите следующие соотношения: $m<n \Leftrightarrow m^k<n^k$; $m<n \Leftrightarrow k^m<k^n$ при $k\neq 1$.

5. Конечные множества

Конечность произвольного множества X ассоциируется с возможностью нумерации (пересчета) всех его элементов натуральными числами, не превосходящими некоторого $n\in \mathbf{N}$. Это значит, что $X=\{f(1), f(2),\ldots,f(n)\}$ для подходящего взаимно однозначного отображения f отрезка $[1, n]$ на множество X. Множество называется *n-элементным*, если оно равномощно отрезку $[1, n]$ для данного натурального числа n. Напомним, что два множества называются *равномощными*, если существует взаимно однозначное отображение одного из них на другое. Пустое множество $\varnothing$ имеет 0 элементов.

Дедекинд дал другое определение конечности, также согласующееся с нашей интуицией. Множество X называется *конечным*, если X не равномощно никакому своему собственному подмножеству (т. е. подмножеству, отличному от X). Множество, равномощное некоторому своему собственному подмножеству, называется *бесконечным*. Тем самым, все множества подразделяются на конечные и бесконечные. Скажем, множества $[1,1]=\{1\}$, $[1,2]=\{1,2\}$ и $[1,3]=\{1,2,3\}$ конечны, а множество **N** бесконечно, так как операция ' отображает **N** на собственное подмножество $\mathbf{N}\setminus\{1\}$. Индукцией по n нетрудно доказать, что любой отрезок $[1, n]$, $n\in \mathbf{N}$, является конечным множеством.

Теорема 9. *Непустое множество конечно тогда и только тогда, когда оно n-элементно для некоторого (единственного) числа* $n\in \mathbf{N}$.

Операции сложения и умножения в **N** применяются к парам натуральных чисел. Но мы знаем, что можно складывать и умножать и несколько (конечное семейство) натуральных чисел. Для того чтобы это строго сформулировать, определим понятия конечной и бесконечной последовательности элементов данного множества X. *Конечной*, точнее, *n-элементной последовательностью* в X называется произвольное отображение g: $[1, n]\to X$, где n – некоторое натуральное число. Такая последовательность обозначается a_1, $a_2,\ldots$, a_n или $(a_i)_{i\leq n}$, если $a_i = g(i)$ для любого $i\in[1, n]$. *Бесконечной последовательностью* в X называется любое отображение $g\colon \mathbf{N}\to X$. Обычно последовательность g обозначается (a_n), где $a_n = g(n)$ для всех $n\in\mathbf{N}$.

Возьмем произвольную бесконечную последовательность (a_n) в $\mathbf{N}_0$. Построим по индукции «функцию суммирования» f для элементов этой последовательности, задав ее соотношениями (см. теорему 2): 1) $f(1) = a_1$; 2) $f(n') = f(n) + a_n$. Существует стандартное обозначение: $f(n)=\sum_{i=1}^{n}a_i$ $(n\in \mathbf{N})$. Тогда *суммой* конечной последовательности a_1, $a_2,\ldots$, a_m элементов из **N** называется значение $f(m)$ функции «суммирования» для бесконечной последовательности $a_1, a_2, \ldots a_m, 1, 1, 1,\ldots$. Аналогично определяется *произведение* конечной последовательности чисел.

Отметим, что для конечных сумм и произведений натуральных чисел можно доказать свойства коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности и т. п. (см. [23], пункт 3.4).

Упражнения. 1. Докажите, что равномощность отрезков $[1, m]$ и $[1, n]$ влечет $m = n$ для любых m, $n \in$ **N**. Выведите отсюда конечность отрезков в **N**, отличных от **N**.

2. Покажите, что каждый непустой луч в **N** бесконечен.

3. Проверьте, что сумма натуральных чисел a_1, a_2, a_3 и a_4 не зависит от расстановки скобок.

4. Определите произведение конечной последовательности натуральных чисел.

5. Проверьте, что подмножества конечных множеств сами конечны, а надмножества бесконечных множеств бесконечны.

6. Попытайтесь доказать теорему 9. Заметим, что доказательство необходимости требует привлечения того или иного варианта аксиомы выбора.

7. Докажите, что класс всевозможных конечных множеств совпадает с наименьшим классом множеств, содержащим пустое множество $\varnothing$, все одноэлементные множества $\{a\}$ и замкнутым относительно операции объединения двух множеств [18, с. 115]. Четко определите пустое и одноэлементное множества.

6. Формы математической индукции

В данном пункте мы рассмотрим некоторые формы принципа математической индукции, справедливые на натуральном ряде **N**. Простая переформулировка аксиомы P2 дает обычный

Принцип математической индукции (ПМИ). *Для каждого свойства P натуральных чисел, если свойством P обладает 1 (т.е. P(1)) и P(n) влечет P(n+1) для любого n∈N, то свойством P обладают все натуральные числа:*

$$(P(1)\ \&\ \forall n \in N\ (P(n) \Rightarrow P(n+1))) \Rightarrow \forall n \in N\ P(n).$$

Принцип математической индукции, называемый в математическом фольклоре «принципом домино», зависит только от структуры **N**. Интуитивно он вполне очевиден. Действительно, пусть $P(1)$ и $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ при любом натуральном n, т. е. имеем $P(1)$ и бесконечную цепочку импликаций $P(1) \Rightarrow P(2)$, $P(2) \Rightarrow P(3)$, …, $P(1000) \Rightarrow P(1001)$, …. Отсюда по логическому правилу отделения (MP) последовательно получаем: $P(2)$, $P(3)$, …, $P(1001)$ и т. д. Значит, свойство P справедливо для каждого натурального числа.

В теореме 1 содержится хорошо известный

Принцип наименьшего элемента (ПНЭ). *Любое непустое множество натуральных чисел имеет наименьший элемент.*

Переформулировкой ПНЭ служит так называемая вторая форма индукции.

Вторая форма ПМИ. *Для любого свойства P натуральных чисел*

$$(P(1)\ \&\ \forall n{\neq}1\ ((\forall m{<}n\ P(m)) \Rightarrow P(n))) \Rightarrow \forall n\ P(n).$$

Частным случаем ПНЭ служит

Конечный ПНЭ (КПНЭ). *Любое ограниченное непустое множество натуральных чисел имеет наименьшее число.*

Дуальный КПНЭ. *Во всяком ограниченном непустом множестве натуральных чисел есть наибольшее число.*

Доказательство. Пусть дано непустое подмножество A в $\mathbf{N}$, ограниченное сверху. Множество B всех верхних граней множества A непусто. По теореме 1 множество обладает наименьшим числом b. Покажем, что это число b и будет наибольшим элементом в A. Достаточно убедиться, что $b \in A$. Предположим, что b не лежит в A. Значит, $a < b$ для всех $a \in A$, т. е. $a \leq {}'b$ для любого $a \in A$ по упражнению 1 пункта II. Поэтому $'b \in B$, что невозможно.

Приведем еще два аналогичных принципа (см. [22, §5]):

П1. *Каждое ограниченное непустое множество натуральных чисел конечно.*

П2. *Каждое множество натуральных чисел, имеющее наибольший (максимальный) элемент, конечно.*

Принцип индукции можно выразить и в таком абстрактном виде:

Принцип конечной цепи. *Любая конечная цепь имеет наименьший (эквивалентно, наибольший) элемент.*

Из сказанного выше следует, что система $\langle \mathbf{N}, \leq \rangle$ является бесконечным вполне упорядоченным множеством, в котором выполняется дуальный КПНЭ. В силу следующего факта это позволяет дать абстрактную порядковую характеризацию натурального ряда чисел, выступающую иногда в качестве определения $\mathbf{N}$ (см. [5], а также Приложение V).

Теорема 10. *Любое вполне упорядоченное множество* $\langle X, \leq\rangle$ *без наибольшего элемента, каждое ограниченное непустое подмножество которого имеет наибольший элемент, изоморфно* $\langle N, \leq\rangle$.

В самом деле, пусть дано некоторое упорядоченное множество X, удовлетворяющее условию теоремы, и x_1 – его наименьший элемент. Каждый элемент x из X имеет (непосредственно) следующий элемент, а также предшествующий элемент при $x \neq x_1$. Обозначим через x_2 элемент из X, следующий за x_1, через x_3 – следующий за x_2, и т. д. В результате получим подмножество $A = \{x_n: n \in \mathbf{N}\}$ «первых» элементов в X, порядково изоморфное $\mathbf{N}$. Так как A не обладает наибольшим элементом, то $X = A$.

Отметим, что ПМИ является частным случаем *трансфинитной индукции*, протекающей на вполне упорядоченных множествах, обобщением которой, в свою очередь, служит так называемая *нетерова индукция*, базирующаяся на упорядоченных множествах с условием минимальности.

Упражнения. 1. Докажите принципы П1 и П2.

2. Докажите, что любая конечная цепь изоморфна некоторому отрезку $[1, n]$ с естественным порядком на нем.

3. Дайте строгое (индуктивное) доказательство теоремы 10.

7. Другие подходы к определению натурального ряда

Натуральные числа являются первичным материалом, из которого можно построить всю классическую математику. Такая возможность, называемая *арифметизацией математики*, была осуществлена во второй половине XIX века Больцано, Грассманом, Гамильтоном, Вейерштрассом, Кантором, Мерэ, Дедекиндом, Гильбертом и др. Содержательная арифметизация математики базируется на теории множеств и обычной логике. Если к тому же учесть тенденцию к *математизации науки*, то «близким сердцу» становится знаменитый пифагорейский тезис: «Все есть натуральное число».

Натуральный ряд чисел настолько укоренен в общечеловеческой практике, что натуральные числа, будучи идеальными математическими объектами, обрели (наряду с наглядными геометрическими фигурами) независимый онтологический статус, не требующий специального опредмечивания понятия *натуральное число*. Сказанное и позволило

Кронекеру заявить, что Господь Бог создал натуральные числа, а все остальное – дело рук человеческих.

Следуя Кронекеру, можно считать натуральные числа данными, а их простейшие свойства – интуитивно ясными. Исходя из этого положения (или предположения), достоверность которого обосновывается материальной и интеллектуальной деятельностью человечества, развиваются и строятся арифметика натуральных чисел и теория чисел. Такой подход к теории натуральных чисел мы называем *содержательно-интуитивным*. Натуральные числа популярно представлены в книгах [11] и [14].

При *конструктивном* способе натуральные числа определяются как слова в алфавите с одной-единственной буквой, скажем, с «вертикальной черточкой».

Содержательно-аксиоматическое задание натуральных чисел допускает разные аксиоматические определения натурального ряда на языке содержательной теории множеств.

Наконец, *формально-аксиоматическая* теория натуральных чисел предстает в виде формальной аксиоматической системы, в которой формализован и предметный язык, и логика доказательств. При этом натуральный ряд определяется как модель формальной теории.

Рассмотрим подробнее указанные способы определения и построения теории натуральных чисел.

Содержательно-интуитивный подход. Предполагается известным множество (совокупность) **N** всех натуральных чисел с заданными на нём операциями сложения и умножения и отношением порядка, которые удовлетворяют естественным исходным условиям типа коммутативности операций и линейности порядка. Можно пользоваться наивным понятием множества. Наименьшее число 1 путем многократного прибавления 1 порождает все натуральные числа, т. е. любое натуральное число конечно достижимо [15, с. 76]. Заметим, что довольно часто к натуральным числам причисляется и число 0.

Понятия конечного множества и конечной процедуры («многократно», «конечное число раз», «несколько шагов») считаются интуитивно ясными, понятными. Конечность непустого множества *A* означает возможность перенумеровать его ограниченным набором натуральных чисел, точнее, существование взаимно однозначного соответствия между A и некоторым отрезком $[1, n] = \{x \in \mathbf{N}: x \leq n\}$ натурального ряда. Для любых натуральных чисел m, n имеем:

$m < n \Leftrightarrow n$ получается из m последовательным прибавлением 1 к m конечное число раз $\Leftrightarrow n = m+k$ для некоторого натурального числа k. Говоря более строго, мы исходим здесь из следующего *индуктивного* понимания природы натуральных чисел (см. [7, с. 25]):

1) 1 есть натуральное число;

2) если n – натуральное число, то и $n+1$ – натуральное число;

3) никаких других натуральных чисел нет, иными словами, всякое натуральное число получается применением только пунктов 1) и 2).

Натуральный ряд $\mathbf{N} = \{1, 1+1, 1+1+1, \ldots, 1+1+\ldots+1, \ldots\}$ выступает как единственный, уникальный в своем роде объект. В десятичной системе счисления получаем все натуральные числа: 1, 2, 3, …, 2005, …, n, $n+1$, …. На основе указанных выше фактов (проистекающих из практики счета, пересчета и вычислений, наблюдений) успешно становится и развивается полнокровная содержательная теория натуральных чисел. В качестве важнейшей иллюстрации рассмотрим принцип математической индукции ПМИ и связанные с ним равносильные (взаимовыводимые) утверждения.

Докажем, что ПМИ влечет ПНЭ. Пусть дано непустое подмножество A в $\mathbf{N}$. Предположим от противного, что в A нет наименьшего элемента. Тогда $1 \in B = \mathbf{N} \setminus A$. Рассмотрим следующее свойство P натуральных чисел: $P(n)$ означает, что отрезок $[1, n]$ целиком содержится в B. Имеем P(1) и $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ для любого натурального n. В силу ПМИ заключаем, что $B=\mathbf{N}$, а это ведет к пустоте A.

В свою очередь покажем, как из ПНЭ следует ПМИ. Возьмем свойство P, удовлетворяющее условиям ПМИ, и рассмотрим множество A всех тех натуральных чисел, которые обладают свойством P. Нужно убедиться, что $A = \mathbf{N}$. В противном случае непустое множество $B = \mathbf{N} \setminus A$ по ПНЭ имеет наименьшее число $m \neq 1$. Тогда число $n = m-1$ обладает свойством P, а число $n+1 = m$ им не обладает, что невозможно.

Легко показать, что ПНЭ равносилен как своему конечному случаю КПНЭ, так и дуальному КПНЭ (см. [8, с. 41]), а также каждому из принципов П1 и П2.

Указанные интуитивные допущения и содержательные рассуждения показывают нам неразрывную связь фундаментального понятия *конечное* с натуральными числами, в частности с различными формами математической индукции (МИ). Все потенциально заканчивающиеся, конечные математические процедуры, процессы суть проявления метода МИ. Так, определение произведения нескольких чисел базируется на МИ, поскольку опирается на понятие конечной последовательности чисел. Методом МИ обосновываются и свойства натуральных чисел, не превосходящих данного натурального числа. Процесс МИ относится к области конечного и потенциально бесконечного, а ПМИ – к миру актуально бесконечного.

Конструктивный способ. Индуктивный способ определения натуральных чисел подсказывает следующее их конструктивное (генетическое) задание. Зафиксируем некоторый символ, например, черточку «|», и будем последовательно выписывать слова в соответствующем однобуквенном алфавите { | }:

$$|,\ ||,\ |||,\ ||||,\ \ldots .$$

К каждому такому слову можно добавить справа одну черточку и получить следующее в алфавитном порядке слово. Эти слова и являются конструктивно заданными натуральными числами. Их можно изображать материально как последовательности карандашных черточек на листе бумаги, или в виде зарубок на деревянной доске, или наборами детских палочек, даже звуками или жестами.

Будем обозначать наши числа-слова малыми греческими буквами. Слова α и β можно складывать, умножать и сравнивать по величине. Их суммой называется слово $\alpha\beta$, полученное приписыванием справа к слову α слова β. Скажем, если α есть ||| и β есть |||||, то их сумма есть слово ||||||||. Произведением слов α и β называется слово, полученное последовательным выписыванием α столько раз, сколько букв-черточек содержит слово β. Наконец, пишем $\alpha<\beta$, если $\beta=\alpha\gamma$ для некоторого слова γ.

Данная «лингвистическая» конструкция натурального ряда обладает всеми подобающими свойствами, т. е. служит моделью любой аксиоматической теории натуральных чисел.

Содержательная аксиоматика. Система Пеано дает содержательное определение натурального ряда, поскольку данная аксиоматика формулируется на основе заранее предполагаемой элементарной теории множеств. В аксиоме индукции Р3 допускаются любые подмножества M. Фактически аксиома Р3 есть форма ПМИ, в которой терм n+1 означает n', а свойства P заменяются их множествами истинности. При аксиоматическом подходе не допускаются никакие умозаключения о числах, связанные с понятием конечного (как это делается в содержательно-интуитивных рассуждениях, свободно оперирующих понятием конечной достижимости натуральных чисел), пока оно строго не определено. Например, до тех пор, пока не введено понятие конечной последовательности, нельзя определять отношение $m< n$ как существование в N конечной последовательности таких чисел $a_1=m, a_2,\ldots, a_k=n$, что $a_{i+1}=a_i'$ при любых $i=1, 2,\ldots, k-1$.

Итак, аксиоматика натурального ряда дана. Как же дальше развивается теория натуральных чисел? Можно действовать по-разному. Скажем, вначале индуктивно определить и построить операции сложения и умножения в системе Пеано, причем непосредственно [20, гл. III], либо на базе общего индуктивного построения [23, гл. 3]. А затем определить отношение порядка на N соотношением (∗). Отметим, что в рассуждениях методом МИ нужно различать доказательства по индукции, индуктивные определения и индуктивные построения. В аксиоматике Пеано явственно проглядывает порядковая структура натурального ряда, но не арифметическая.

Далее доказывается теорема об индуктивных построениях функций на N, с помощью которой задаются операции сложения и умножения натуральных чисел. Доказывается категоричность содержательной аксиоматики Пеано. См. [1, 6, 9, 12, 21, 23]. Нередко рассматриваются модификации системы Пеано, сразу включающие в себя операции сложения и умножения, а то и отношение порядка [5, 9, 13, 19].

Как отмечалось выше, можно дать порядковое определение натурального ряда. Будем исходить из понятия вполне упорядоченного множества. Пусть $\langle X, \leq\rangle$ – вполне упорядоченное множество без наибольшего элемента, наименьший элемент которого обозначим единицей 1. Для каждого x из X существует следующий элемент x'.

Теорема 11. *Для любого вполне упорядоченного множества X без наибольшего элемента эквивалентны следующие условия:*

1) в X выполняется ПМИ;

2) *X удовлетворяет дуальному КПНЭ;*

3) *всякое ограниченное непустое подмножество в X конечно;*

4) *всякое подмножество в X, обладающее наибольшим элементом, конечно;*

5) *любой элемент ≠ 1 в X имеет предшествующий элемент;*

6) *X дискретно.*

Эту теорему нетрудно доказать по прямому циклу.

Итак, в порядковых терминах *натуральным рядом* можно назвать вполне упорядоченное множество без наибольшего элемента, удовлетворяющее некоторому (любому) из эквивалентных условий теоремы 11. Так определенный натуральный ряд является системой Пеано. Поэтому порядковая теория натуральных чисел категорична.

Возможен и другой подход, когда в качестве X рассматривается произвольное линейно упорядоченное множество с наименьшим элементом 1, для каждого элемента которого существует следующий элемент, а для каждого элемента ≠1 – предшествующий. Тогда имеет место

Теорема 12. *Для X эквивалентны следующие утверждения:*

1) *в X выполняется ПМИ;*

2) *X удовлетворяет ПНЭ;*

3) *X удовлетворяет дуальному КПНЭ;*

4) *всякое ограниченное непустое подмножество в X конечно;*

5) *X дискретно;*

6) *X порядково изоморфно N.*

Подчеркнем, что в теоремах 11 и 12 содержится ряд порядковых аналогов МИ.

Формальная аксиоматика. *Формальная арифметика* – это формальная аксиоматическая теория, выраженная на языке логики первого порядка с равенством [17, гл. 3]. Формальная арифметика имеет одну предметную константу 1 и три функциональные буквы, которые будем обозначать привычным образом: одноместный символ ' и два двухместных символа + и ·. Предполагается наличие двухместного предиката равенства =, удовлетворяющего обычным свойствам рефлексивности, симметричности, транзитивности и подстановки. Предметные переменные обозначим x, y, z и т. д. Термы записываются так: 1, 1',..., x', $x+y$, $x \cdot y$ и т. п. Атомарные формулы имеют вид $s=t$, где s, t – произвольные термы.

Следующие выражения являются аксиомами формальной арифметики:

1. $x' \neq 1$.
2. $x'=y' \rightarrow x=y$.
3. $x+1 = x'$
4. $x+y' = (x=y)'$.
5. $x \cdot 1 = x$.
6. $x \cdot y' = (x \cdot y)+x$.
7. $(P(1)\ \&\ \forall x(P(x) \rightarrow \mathrm{P}(x'))) \rightarrow \forall x P(x)$ для всякой формулы $P(x)$.

Следует заметить, что аксиомы 1-6 суть конкретные формулы, а аксиома 7 фактически является аксиомной схемой, представляющей собой счетный набор конкретных аксиом – по аксиоме для каждой формально-арифметической формулы $P(x)$. Формальная теория натуральных чисел строится средствами логики предикатов первого порядка. Заметим, что формальная аксиоматика не может быть ограничена аксиомами 1, 2 и 7, как содержательная аксиоматика Пеано, поскольку в ней невозможно выразить операции сложения и умножения.

Рассуждения о свойствах самой формальной арифметики принадлежат сфере метаматематики. Натуральным рядом называется любая модель формальной арифметики. Формальная арифметика уже не категорична. В предположении ее непротиворечивости наряду со стандартной моделью **N** существуют натуральные ряды любой бесконечной мощности, и даже счетные нестандартные модели. Это можно пояснить тем, что, в отличие от ПМИ и аксиомы Пеано Р3, аксиома индукции 7 допускает только свойства P, выразимые в сигнатуре $\langle =, +, \cdot, ', 1 \rangle$ на формальном языке первого порядка (подробнее см. [15, § 6.13]). По классической теореме Геделя о неполноте формальная арифметика не является также и полной.

Модель Сколема служит примером счетного нестандартного натурального ряда. Возьмем системы $\mathbf{Z}$ целых чисел и $\mathbf{Q}^+$ положительных рациональных чисел с обычными операциями сложения и умножения и обычным порядком. На их прямом произведении $\mathbf{Q}^+ \times \mathbf{Z}$ зададим покоординатные операции сложения и умножения и лексикографический порядок: $(q, z) < (q_1, z_1)$ означает, что $q < q_1$ либо

$z< z_1$ при $q=q_1$. В результате имеем линейно упорядоченное полукольцо без нуля. Добавим к нему стандартный натуральный ряд **N**. В системе $N=\mathbf{N}\cup(\mathbf{Q}^+\times\mathbf{Z})$ сложение, умножение и порядок на **N** и на $\mathbf{Q}^+\times\mathbf{Z}$ даны выше и для любых $n\in\mathbf{N}$, $q\in\mathbf{Q}^+$, $z\in\mathbf{Z}$: $n<(q, z)$, $n+(q, z) = (q, z+n)$ и $n\cdot(q, z)=(q, z\cdot n)$, причем операции предполагаются коммутативными. Заметим, что сложение и порядок в N связаны соотношением (✱). Система $\langle N, +, \cdot\rangle$ служит счетной моделью формальной арифметики, не изоморфной **N**.

Отметим также, что ультрастепень системы **N** по любому ультрафильтру счетного индексного множества, содержащему все коконечные подмножества, имеет мощность континуума и элементарно эквивалентна **N**, т. е. в этих алгебраических системах истинны одни и те же предложения формальной арифметики [16, с. 205, 220-221].

Упражнения. 1. Непосредственно, на интуитивном уровне докажите, что ПНЭ равносилен каждому из следующих предложений: КПНЭ, дуальный КПНЭ, П1, П2.

2. Докажите теоремы 10 и 11.

3. Подробно разберите пример Сколема.

8. Разное

В этом заключительном пункте рассмотрим структурные алгебраические системы **N**, касающиеся строения ее конгруэнций и аддитивных подполугрупп.

Конгруэнции на N

Пусть даны однотипные алгебры $\langle N, ', 1\rangle$ и $\langle N_1, ', 1\rangle$. Рассмотрим их гомоморфизм $f: N\to N_1$. Отображение f порождает отношение равнообразности ~ на N: $m\sim n \Leftrightarrow f(m)=f(n)$. Бинарное отношение ~ является отношением *эквивалентности* на N, т. е. рефлексивно, *симметрично* ($m\sim n\Rightarrow n\sim m$) и транзитивно. Причем, если $m\sim n$ для $m, n\in N$, то и $m'\sim n'$, поскольку $f(m')=f(m)'=f(n)'=f(n')$ в силу гомоморфности f. И мы приходим к понятию конгруэнции.

Произвольное отношение эквивалентности ~ на N называется *конгруэнцией* на системе $\langle N, ', 1\rangle$, если $m\sim n\Rightarrow m'\sim n'$ для любых $m, n\in$ N.

Зафиксируем некоторую конгруэнцию ~ на системе $\langle N, ', 1\rangle$. Отношение ~ индуцирует разбиение множества N на попарно не пересекающиеся классы $\tilde{n} = \{m \in N : m \sim n\}$ эквивалентных элементов. Заметим, что $\tilde{m} = \tilde{n} \Leftrightarrow m \sim n$ при любых $m, n \in N$. Эти классы как элементы образуют фактор-множество $N/\sim$ множества N по отношению эквивалентности $\sim$. Для любого $n \in N$ положим $(\tilde{n})' = \tilde{n'}$. Тогда получим систему $\langle N/\sim, ', 1\rangle$, где $1 \equiv \tilde{1}$, и канонический гомоморфизм $f: N \to N/\sim$, $f(n) = \tilde{n}$ для всех $n \in N$. Система $\langle N/\sim, ', 1\rangle$ называется *фактор-системой* исходной системы по конгруэнции $\sim$ и является ее гомоморфным образом. Соответствующее отношение равнообразности совпадает с отношением $\sim$.

Опишем все конгруэнции на натуральном ряде **N**. В силу теорем 3 и 5 конгруэнции на **N** тесно связаны с индукционными системами. Именно, каждая индукционная система изоморфна факторсистеме системы **N** по некоторой однозначно определенной конгруэнции. Поэтому описание всех конгруэнций на **N** фактически дает и описание всех индукционных систем с точностью до изоморфизма.

Приведем примеры конгруэнций на **N**:

1. Отношение равенства =.

2. Отношение равноостаточности при делении на данное натуральное число n. При $n=1$ получаем несобственную конгруэнцию, отождествляющую любые два натуральных числа.

3. Фиксируем $m, n \in \mathbf{N}$ и для любых $a, b \in \mathbf{N}$ пусть $a\rho(m, n)b$ означает, что $a = b < m$ или a и b имеют равные остатки от деления на n при $m \leq a$ и $m \leq b$. В частности, $\rho(1, n)$ – это отношение равноостаточности при делении на n.

Теорема 13. *Отношение равенства и отношения* $\rho(m, n)$ *исчерпывают множество всех конгруэнций на натуральном ряде* **N**.

Аддитивные полугруппы натуральных чисел

Аддитивной полугруппой натуральных чисел называется непустое подмножество A в **N**, замкнутое относительно операции сложения: $m, n \in A \Rightarrow m+n \in A$ для любых $m, n \in \mathbf{N}$. Выясним строение таких множеств.

Пусть A – аддитивная полугруппа в **N**. Множество $X \subseteq A$ называется *системой образующих* полугруппы A, если каждый элемент из A является суммой некоторой конечной последовательности элементов в X. Если A обладает конечной системой образующих, то A называется *конечнопорожденной* полугруппой. Всякая конечнопорожденная полугруппа A имеет минимальную систему образующих, в которой ни один элемент аддитивно не выражается через остальные. В A существует *стандартная* система образующих, получаемая следующим образом: пусть a_1 – наименьшее натуральное число из A; a_2 – наименьшее число множества, полученного вычеркиванием из A всех чисел, делящихся на a_1 (если это множество не пусто); и т. д. Можно показать, что стандартная система образующих полугруппы A конечна, т. е. последовательность a_1, a_2, a_3, ... обрывается на каком-то n-м шаге. В результате получаем в A систему образующих $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, содержащуюся, как легко видеть, в любой системе образующих полугруппы A.

Теорема 14. *Любая аддитивная полугруппа A в* **N** *обладает следующими свойствами:*

1) *A – конечнопорожденная полугруппа, каждая система образующих которой содержит стандартную систему образующих $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$;*

2) *начиная с некоторого $n_0 \in A$ полугруппа A представляет собой арифметическую прогрессию с разностью d, где d есть НОД чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $A \cap [n_0, \infty) = \{n_0, n_0+d, n_0+2d, \ldots\}$.*

Например, если аддитивная полугруппа A порождается числами 6 и 8, то $n_0=12=6+6$, $d=2$ и $A=\{6, 8, 12, 14, 16, \ldots\}$.

Упражнения. 1. Покажите, что любой гомоморфный образ произвольной системы $\langle N, ', 1\rangle$ изоморфен некоторой фактор-системе этой системы (это теорема о гомоморфизмах).

2. Найдите аддитивную полугруппу в **N** с минимальной системой образующих из 6 элементов.

3. Чему равна аддитивная полугруппа в **N**, порожденная числами 5 и 7?

4. Постарайтесь доказать теоремы 13 и 14.

5. На основе теоремы 13 опишите с точностью до изоморфизма все *циклические полугруппы*, т. е. полугруппы, каждый элемент которых есть натуральная степень одного элемента, называемого образующим элементом соответствующей полугруппы.

Литература

1. *Арнольд И.В.* Теоретическая арифметика. – М.: Учпедгиз, 1939.

2. *Вечтомов Е.М.* Прямой способ введения отношения порядка в системе Пеано // Математический вестник педвузов Волго-Вятского региона. 1998. Вып. 1. – С. 6-14.

3. *Вечтомов Е.М.* Математические очерки: Учебно-методическое пособие. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2004.

4. *Генкин Л.* О математической индукции. – М.: ГИФМЛ, 1962.

5. *Гонин Е.Г.* Теоретическая арифметика. – М.: Учпедгиз, 1959.

6. *Демидов И.Т.* Основания арифметики. – М.: Изд-во Мин-ва просвещения РСФСР, 1963.

7. *Клини С.* Введение в метаматематику. – М.: ИЛ, 1957.

8. *Когаловский С.Р., Шмелева Е.А., Герасимова О.В.* Путь к понятию. – Иваново, 1998.

9. *Куликов Л.Я.* Алгебра и теории чисел. – М.: Высш. шк., 1979.

10. *Курош А.Г.* Лекции по общей алгебре. – М.: Наука, 1973.

11. *Ларин С.В.* Что такое натуральные числа?: Кн. для учащихся. – М.: Просвещение, 1996.

12. *Ларин С.В.* Числовые системы. – М.: «Академия», 2001.

13. *Ляпин Е.С., Евсеев А.Е.* Алгебра и теория чисел. Ч. 1. – М.: Просвещение, 1974.

14. *Мадер В.В.* Тайны натурального ряда. – М.: Просвещение, 1994.

15. *Мадер В.В.* Введение в методологию математики. – М.: Интерпракс, 1995.

16. *Мальцев А.И.* Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970.

17. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. – М.: Наука, 1971.

18. *Непейвода Н.Н.* Прикладная логика. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 2000.

19. *Нечаев В.И.* Числовые системы. – М.: Просвещение, 1975.

20. *Понтрягин Л.С.* Обобщения чисел. – М.: Наука, 1986 (Библиотечка «Квант»).

21. *Проскуряков И.В.* Числа и многочлены. – М.: АПН РСФСР, 1947.

22. *Тестов В.А.* Порядковые структуры в алгебре и теории чисел. – М., 1997.

23. *Феферман С.* Числовые системы. – М.: Наука, 1971.

II. Основы теории делимости

Элементарную теорию чисел
следует считать наилучшим предметом
для первоначального математического образования.
Годфри Харди

Введение

Работа представляет собой очерк основных понятий и фактов теории делимости. *Делимость* – фундаментальное понятие алгебры и теории чисел. Особенно важную роль делимость играет в числовых кольцах. *Числовым кольцом* называется множество комплексных чисел, содержащее единицу 1 и замкнутое относительно арифметических операций сложения, вычитания и умножения. Если числовое кольцо является полем, т. е. каждый его элемент делится на каждый ненулевой элемент, то в нем теория делимости тривиальна.

Числовые кольца редко бывают *факториальными* (*гауссовыми*), т. е. кольцами, в которых выполняется основная теорема арифметики [1, 4, 8, 11-13]. По идее немецкого математика Э. Куммера, в ряде случаев единственность разложения на неприводимые множители удается восстановить за счет добавления *идеальных чисел* (*дивизоров*); для таких колец существует теория дивизоров. К ним относятся *дедекиндовы кольца*, названные так по имени другого немецкого математика Р. Дедекинда, определившего понятие идеала кольца и развившего теорию дивизоров числовых колец на основе теории идеалов (вторая половина XIX века). В качестве идеальных чисел у Дедекинда выступали неглавные идеалы кольца. См. [1, 2, 11].

В первой половине XIX века в трудах К. Гаусса [5] была создана *теория сравнений*, развивающая и обогащающая понятие делимости [1, 8, 11, 13].

Отношение делимости в кольцах определяется мультипликативно, через одну операцию умножения. Однако многие свойства делимости в кольцах выражаются с привлечением и операции сложения и возможности сравнивать элементы кольца по величине (абсолютная величина целого числа, степень многочлена, норма комплексного числа).

В самом общем и чистом виде делимость можно изучать в группоидах. Наиболее приспособленными для этого являются *целые полугруппы* [3, 7, 9, Приложение III].

1. Делимость целых чисел

Впервые свойства делимости изучались в кольце **Z** целых рациональных чисел (для натуральных чисел). Напомним основополагающие факты о делимости целых чисел.

Теорема о делении с остатком. *Для любого целого числа a и любого ненулевого целого числа b существуют однозначно определенные целые числа q и r, такие, что $a = bq + r$ и $0 \le r < |b|$.*

При этом *a делится* (*нацело*) на b, т. е. $a = bq$ для некоторого целого числа q, тогда и только тогда, когда остаток r от деления a на b равен 0; говорят также, что *a кратно b, b – делитель a* или *b делит a* ($b \mid a$).

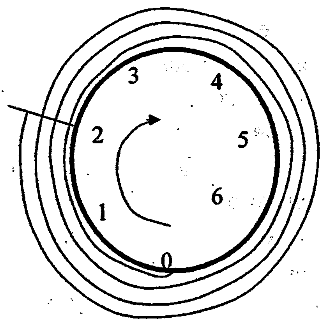
Проиллюстрируем эту теорему на числах a и b с $|a| = 23$ и $|b| = 7$. Имеем следующие случаи:

1) $23 = 7 \cdot 3 + 2$,

2) $-23 = 7 \cdot (-4) + 5$,

3) $23 = (-7)(-3) + 2$,

4) $-23 = (-7)(-4) + 5$.



Случаи 3) и 4) получаются из 1) и 2) соответственно. Для наглядности возьмем окружность длины 7 и разделим ее на 7 равных частей. Точки деления обозначим по часовой стрелке числами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 – это всевозможные остатки при делении на 7. Затем берем отрезок длины 23, закрепляем один его конец в точке окружности с риской 0 и наматываем этот отрезок на окружность по часовой стрелке. Тогда другой конец отрезка укажет число 2 – остаток, а число 3 полных оборотов есть неполное частное от деления 23 на 7 (случай 1)). При делении –23 на 7 наматываем отрезок против часовой стрелки – в результате получаем случай 2).

Элементарные свойства отношения делимости приведены в § 2.

На возможности деления с остатком базируется **алгоритм Евклида** нахождения наибольшего общего делителя (НОД) двух целых чисел. Именно, пусть даны целые числа a и $b \neq 0$. Будем выполнять последовательно деления с остатком:

схема алгоритма Евклида

$$\begin{aligned}
&a = bq_1 + r_1,\ 0 < r_1 < |b| \\
&b = r_1q_2 + r_2,\ 0 < r_2 < r_1 \\
&r_1 = r_2q_3 + r_3,\ 0 < r_3 < r_2 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n,\ 0 < r_n < r_{n-1} \\
&r_{n-1} = r_nq_{n+1}.
\end{aligned}$$

Поскольку натуральные остатки строго убывают, то через конечное число делений (на n-м шаге, $n < |b|$) мы получим последний ненулевой остаток r_n; в случае $r_1 = 0$ имеем НОД$(a, b) = |b|$. С помощью этой схемы легко доказывается

Теорема об НОД. *НОД$(a, b) = r_n$.*

Замечание 1. НОД целых чисел a и b можно определить двумя способами. Как наибольший по величине общий делитель этих чисел (тогда НОД не существует только для $a = b = 0$). Или как общий делитель чисел a и b, делящийся на любой их общий делитель (при этом НОД определен с точностью до знака и НОД$(0, 0) = 0$). Второе определение более общее, поскольку его можно дать для элементов произвольного группоида. Схема алгоритма Евклида показывает: если рассматривать только натуральные делители, то для любых двух целых чисел, одновременно не равных 0, оба определения НОД равносильны (дают один и тот же результат). Вопросы читателю. Верно ли это утверждение для любого непустого (возможно, бесконечного) семейства целых чисел? Как обстоит дело с наименьшим общим кратным (НОК) целых чисел?

Линейное представление НОД. *НОД$(a, b) = au + bv$ для подходящих целых чисел u, v. Причем, если числа a и b не делятся друг на друга, то числа u, v можно выбрать единственным образом так, чтобы $|u| < |b/d|$, $|v| < |a/d|$ при $d =$ НОД(a, b).*

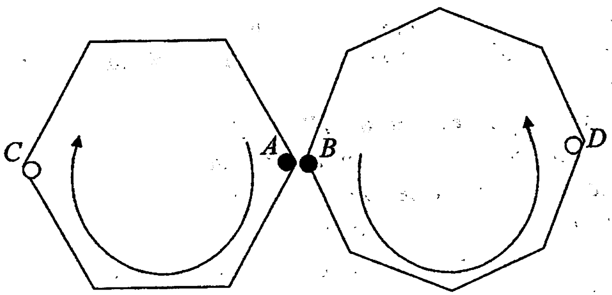
Линейное представление НОД$(a, b) = r_n$ можно получить из схемы алгоритма Евклида, двигаясь по ней снизу вверх. Другой подход дает следующее утверждение: *наименьшее натуральное число вида* $ax + by$, $x, y \in \mathbf{Z}$, *является* НОД(a, b) (*при* $a^2 + b^2 \neq 0$).

В качестве иллюстрации применим алгоритм Евклида к числам $a = 120$ и $b = -33$: $120 = (-3)(-33) + 21$, $-33 = 21\cdot(-2) + 9$, $21 = 9\cdot 2 + 3$, $9 = 3\cdot 3$. Значит, НОД$(120, -33) = 3$. Для нахождения линейного представления НОД будем последовательно выражать 3, начиная с предпоследнего равенства:

$$3 = 21 + (-2)\cdot 9 = 21 + (-2)\cdot(-33 + 2\cdot 21) = (-2)(-33) + (-3)\cdot 21 =$$
$$= (-2)(-33) + (-3)(120 + 3\cdot(-33)) = 120\cdot(-3) + (-33)(-11).$$

Рассмотрим теперь наглядную интерпретацию НОД и НОК двух натуральных чисел $a < b$. Возьмем правильные a-угольник и b-угольник, которые можно вписать в окружность единичного радиуса. Расположим их рядом на горизонтальной прямой (a-угольник левее) так, чтобы они касались друг друга вершинами A и B соответственно. Из этого положения начнем вращать многоугольники вокруг их центров: a-угольник – по часовой стрелке, b-угольник – против часовой стрелки. Сначала совершим один полный оборот, вращая многоугольники с одинаковой по величине угловой скоростью. При этом число касаний многоугольников, не считая исходного, равно НОД(a, b). Далее будем вращать многоугольники таким образом, чтобы они последовательно касались соседними вершинами (скорость вращения a-угольника в b/a раз больше скорости вращения b-угольника).

Вращение завершим, как только вершины A и B вернутся в первоначальное положение. Если при этом a-угольник совершил m полных оборотов, а b-угольник – n оборотов, то общее число $am = bn$ касаний вершин равно НОК(a, b). Заметим также, что $a/n = b/m =$ НОД(a, b).



На рисунке показаны правильные шестиугольник и восьмиугольник. При их вращении на 360° с равными скоростями многоугольники коснутся дважды – вершинами C и D, A и B. Если же вращать шестиугольник в $8/6 = 4/3$ раза быстрее восьмиугольника, то вершины A и B снова совпадут при 24-м касании многоугольников, шестиугольник сделает 4 полных оборота, а восьмиугольник – 3 полных оборота.

Критерий взаимной простоты. *Целые числа a и b взаимно просты тогда и только тогда, когда $au + bv = 1$ для некоторых целых чисел u, v.*

Этот критерий позволяет легко доказать основные свойства *взаимно простых чисел* (т. е. чисел, НОД которых 1). Отметим два из них:

1) *если произведение целых чисел a и b делится на целое число d, взаимно простое с a, то b делится на d;*

2) *целое число, делящееся на каждое из двух взаимно простых между собой чисел, делится и на их произведение.*

С помощью 1) выводится:

Формула для НОК. *НОД$(a, b)\cdot$НОК$(a, b) = ab$. Значит, если числа a и b не равны 0 одновременно, то НОК$(a, b) = ab/$НОД(a, b).*

Так, НОК$(120, -33) = 120\cdot(-33)/3 = -1320$ или 1320.

Далее определяются *простые* (имеют ровно 2 натуральных делителя) и *составные* числа. Все целые числа разбиваются на 4 класса: простые числа и противоположные им; составные и противоположные им; 1 и –1; 0.

Существование простых делителей. *Наименьший отличный от 1 натуральный делитель p целого числа a, $|a| > 1$, является простым числом. Причем, если $|a| \neq p$, то $p^2 \leq |a|$.*

Этот результат позволяет автоматически составить список всех простых чисел, не превосходящих данного натурального числа (*решето Эратосфена*).

Характеризации (критерии) простого числа. *Для любого натурального числа $p \neq 1$ эквивалентны следующие свойства:*

(1) p – простое;

(2) если произведение двух целых чисел делится на р, то хотя бы одно из них делится на р;

(3) каждое целое число либо делится на р, либо взаимно просто с ним;

(4) кольцо $\mathbf{Z}_p$ классов вычетов по модулю р является полем;

(5) число (р-1)! + 1 делится на р (критерий Вильсона).

Теорема Евклида. *Простых чисел бесконечно много.*

Имеем ряд простых чисел $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$, $p_6 = 13$, $p_7 = 17$, $p_8 = 19$, $p_9 = 23$, $p_{10} = 29$,... . Возьмем первые n простых чисел и рассмотрим число $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. Существует наименьший простой делитель p числа a, он не равен ни одному из первых n простых чисел. Например, при $n = 1$ имеем $p = a = 3$, при $n = 2$ имеем $p = a = 2\cdot3 + 1 = 7$, при $n = 3$ имеем $p = a = 2\cdot3\cdot5 + 1 = 31 = p_{11}$, при $n = 4$ снова имеем простое число $a = 211$. А когда появляется первое составное число a?

Характеризация (2) позволяет доказать единственность в следующей теореме, известной еще древним грекам.

Основная теорема арифметики. *Всякое натуральное число $a \neq 1$ разлагается в произведение $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ простых чисел, причем однозначно с точностью до порядка сомножителей p_i (это верно и для отрицательных целых чисел, отличных от –1, только надо взять множитель -1).*

Пусть p – фиксированное простое число и a – произвольное ненулевое целое число. Неотрицательное целое число $k = 0_p(a)$ называется *р-показателем числа а*, если a делится на p^k, но не делится на p^{k+1}, т. е. $a = p^k q$ для некоторого целого числа q, не кратного p. Положим также $0_p(0) = \infty$. В результате получаем функцию 0_p: $\mathbf{Z} \to \mathbf{N} \cup \{0, \infty\}$, обладающую свойствами:

$$0_p(ab) = 0_p(a) + 0_p(b) \text{ и } 0_p(a + b) \geq min(0_p(a), 0_p(b))$$

для всех целых чисел a, b. Основная теорема арифметики принимает вид

$$a = \prod_{p-\text{простое}} p^{0_p(a)} \text{ для любого натурального } a.$$

Зная канонические разложения натуральных чисел a и b на простые множители, легко найти канонические разложения их НОД и НОК:

$$\text{НОД}(a, b) = \prod_{p-\text{простое}} p^{\min(O_p(a), O_p(b))} \text{ и } \text{НОК}(a, b) = \prod_{p-\text{простое}} p^{\max(O_p(a), O_p(b))}.$$

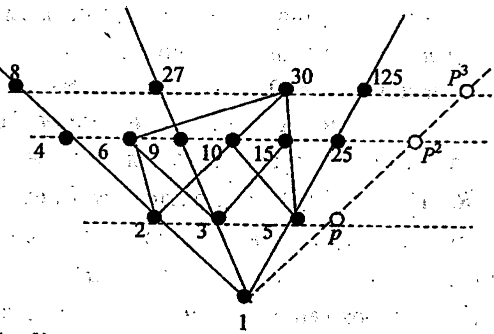
Например, для $a = 5500$ и $b = 3300$ имеем разложения

$$a = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^3 \cdot 7^0 \cdot 11^1 \cdot 13^0 \cdot \ldots = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 11 \text{ и } b = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11,$$

откуда $O_2(a) = 2$, $O_5(a) = 3$, $O_{11}(a) = 1$ и $O_p(a) = 0$ при других простых p, НОД$(5500, 3300) = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 11 = 1100$ и НОК$(5500, 3300) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 11 = 16500$.

Замечание 2. Множество **N** натуральных чисел с отношением «делит» является упорядоченным множеством с наименьшим элементом 1. Более того, $\langle \mathbf{N}, | \rangle$ есть полная снизу атомная дистрибутивная решетка с условием минимальности (см. [3]).

Атомами в ней служат простые числа. Добавив 0 к **N**, получим полную атомную дистрибутивную решетку $\langle \mathbf{N}_0, | \rangle$ с наибольшим элементом 0, не содержащую коатомов. В $\mathbf{N}_0$ только числа 1 и 0 обладают дополнениями.



Для любых элементов a, b решетки $\mathbf{N}_0$ $\inf(a, b) = \text{НОД}(a, b)$ и $\sup(a, b) = \text{НОК}(a, b)$.

Утверждение. *Если для взаимно простых натуральных чисел a, b и натуральных чисел c, n верно равенство $ab = c^n$, то $a = d^n$ для некоторого натурального d.*

Это утверждение вытекает из основной теоремы арифметики. Оно не обязано выполняться в подполугруппах мультипликативной полугруппы **N** всех натуральных чисел. Например, в полугруппе $\mathbf{N} \setminus \{2\}$ $4 \cdot 9 = 36 = 6^2$ и НОД$(4, 9) = 1$, но 4 не является квадратом никакого элемента полугруппы.

Аналогичная элементарная классическая теория делимости имеет место в некоторых других числовых кольцах и в кольце $P[x]$ многочленов от одного неизвестного x с коэффициентом из произвольного поля P; это *евклидовы кольца* [13].

К основам делимости принадлежит и *отношение сравнимости* целых чисел по данному модулю. Целые числа a и b называются *сравнимыми по модулю натурального числа* n ($a \equiv b (\bmod n)$), если $a-b$ делится на n. Принципиальным является тот факт, что сравнение $a \equiv b(mod\, n)$ эквивалентно равенству $\bar{a} = \bar{b}$ в кольце $\mathbf{Z}_n$ классов вычетов по модулю n. Отношение сравнимости по модулю n обладает рядом важных свойств, применяемых, в частности, при установлении признаков делимости на n. Можно назвать также малую теорему Ферма, сравнения Эйлера и Вильсона, китайскую теорему об остатках, квадратичный закон взаимности, решение диофантовых уравнений, теорию p-адических чисел.

2. Делимость в целостных кольцах

Начнем с определений. *Целостным кольцом* (или *областью целостности*) называется любое коммутативное кольцо с $1 \neq 0$ без делителей нуля ($ab=0$ влечет $a=0$ или $b=0$).

Пусть далее R - целостное кольцо. Непустое подмножество I в R называется *идеалом* кольца R, если $a + b \in I$ и $ar \in I$ для любых $a, b \in I$ и $r \in R$. Идеал $I \neq R$ называется *собственным* (эквивалентно, $1 \notin I$). Собственный идеал I в R называется *простым, если* $ab \in I$ влечет $a \in I$ или $b \in I$ для всех $a, b \in R$. Идеал $aR = \{ar\colon r \in R\}$ называется *главным идеалом*, порожденным элементом $a \in R$. Если каждый идеал в R является главным, то R называется *кольцом главных идеалов*. Элемент $a \in R$ называется *обратимым*, если $ab = 1$ для некоторого $b \in R$, называемого *обратным* к a и обозначаемого a^{-1}. Обратимые элементы кольца R относительно умножения образуют группу - мультипликативную группу кольца R.

Пусть $a, b \in R$. Элемент b называется *делителем* элемента a в R, если существует такой элемент $c \in R$, что $a = bc$; в обозначениях, $b|a$. Итак,

$$b|a \quad \text{означает} \quad \exists\, c \in R\ a = bc. \qquad (1)$$

Говорят также, что a делится на b или a кратно b. Элемент c называется *частным* от деления a на b. В результате на кольце R получаем бинарное отношение «делит» |, обладающее следующими свойствами (для любых $a, b, d, r, s \in R$):

1. $a|a$ (рефлексивность).

2. $d|b$, $b|a \Rightarrow d|a$ (транзитивность).

3. 0 – единственный элемент в R, делящийся на любой его элемент.

4. Обратимые элементы – это в точности делители всех элементов из R.

5. $b|a \Rightarrow br|ar$ (при $r \neq 0$ верно и обратное) и $b|ar$.

6. Если в формуле (1) $b \neq 0$, то частное c определено однозначно (выполняются обычные свойства частных $c = a/b$).

7. $a|b$, $b|a \Leftrightarrow a = bu$ для некоторого обратимого элемента $u \in R$; такие элементы a и b называются *ассоциированными* $(a \sim b)$.

8. $b|a \Leftrightarrow aR \subseteq bR$, откуда $a \sim b \Leftrightarrow aR = bR$.

9. $d|a$, $d|b \Rightarrow d|(ar + bs)$.

10. $aR + bR = dR \Leftrightarrow d$ есть НОД(a, b), т. е. d делит элементы a и b и делится на любой их общий делитель.

11. $aR \cap bR = kR \Leftrightarrow k =$ НОК(a, b), т. е. k делится на a и b и делит любое их общее кратное.

Здесь $aR + bR = \{ar + bs\colon\ r, s \in R\}$. Если для любых $a, b \in R$ идеал $aR + bR$ является главным, то кольцо R называется *кольцом Безу*. Кольца Безу – это такие кольца, в которых любые два элемента a и b имеют НОД, представимый в виде $ar + bs$ (в них верна теорема о линейном представлении НОД). Кольцо R называется *нетеровым*, если каждый его идеал конечно порожден. Кольца главных идеалов – это в точности нетеровы кольца Безу.

С отношением делимости на кольце тесно связано отношение сравнимости по модулю идеала. Пусть в кольце R выделен идеал I. Элементы a и b кольца R называются *сравнимыми по модулю идеала* I, если $a - b \in I$. Тем самым, на R возникает отношение сравнимости, обобщающее сравнимость целых чисел по модулю n и являющееся конгруэнцией на кольце R.

3. Евклидовы кольца

Целостное кольцо R называется *евклидовым*, если существует такая функция $\varphi\colon R\backslash\{0\} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, что для любых a и $b \neq 0$ из R найдутся $q, r \in R$, для которых

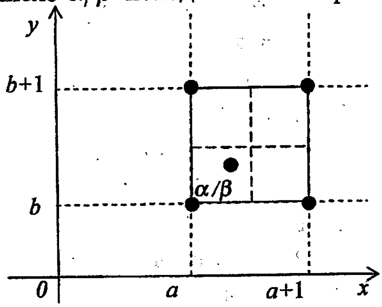
$$a = bq + r,\ \ r = 0\ \text{ или }\ \varphi(r) < \varphi(b). \qquad (2)$$

Примеры

1. Кольцо $\mathbf{Z}$ с $\varphi = |\;|$.

2. Кольцо $P[x]$, P – поле, с $\varphi = \deg$ ($\deg f$ – степень ненулевого многочлена $f \in P[x]$).

3. Кольцо $\mathbf{Z}[i]$ целых гауссовых чисел $\alpha = a + bi$ ($a, b \in \mathbf{Z}$). Здесь $\varphi(\alpha) = n(\alpha) = a^2 + b^2$ – норма комплексного числа α. В кольцах многочленов $P[x]$ для любых a и $b \neq 0$ (неполное) частное q и остаток r (см. (2)) находятся однозначно. Заметим, что в классе целостных колец это единственные кольца с однозначным делением с остатком. В кольце $\mathbf{Z}$ в качестве r можно взять и число $r - |b| < 0$. В кольце $\mathbf{Z}[i]$ пары (q, r) могут принимать от 1 до 4 значений. Возьмем α и $\beta \neq 0$ в $\mathbf{Z}[i]$ и рассмотрим их частное $\alpha/\beta \in \mathbf{Q}[i]$. Число α/β попадает в некоторый единичный квадрат (возможно, на его границу) координатной плоскости с целочисленными вершинами (a, b), $(a, b+1)$, $(a+1, b+1)$ и $(a+1, b)$, где $a, b \in \mathbf{Z}$. Расстояние $|\alpha/\beta - q| = \sqrt{n(\alpha/\beta - q)}$ от этого числа хотя бы до одного из чисел $q = x + yi$ ($x = a$ или $a + 1$, $y = b$ или $b + 1$) не превосходит $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$. Обозначим $r = \alpha - \beta q \in \mathbf{Z}[i]$.



Учитывая свойство мультипликативности нормы комплексных чисел, получаем $n(r) = n((\alpha/\beta - q)\beta) = n(\alpha/\beta - q)n(\beta) < n(\beta)$. Это и означает евклидовость кольца целых гауссовых чисел. Если α/β оказывается в центре квадрата, т. е. $\alpha/\beta = (a+\frac{1}{2}) + (b+\frac{1}{2})i$, то в качестве q можно взять любое из четырех указанных чисел.

4. Пример кольца главных идеалов, не являющегося евклидовым. Таково числовое кольцо $\{\dfrac{a + b\sqrt{-19}}{2}$: a, b – целые числа одинаковой четности$\}$ [10].

Теорема 1. *Любое евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.*

Доказательство имеется в [4, 8, 9, 11].

4. Факториальные кольца

Пусть p – ненулевой необратимый элемент целостного кольца R. Элемент p называется *простым*, если $p|ab$ влечет $p|a$ или $p|b$ для любых $a, b\in$ R. Легко видеть, что простота элемента p равносильна простоте идеала pR кольца R. Элемент p называется *неприводимым*, если его делителями являются лишь обратимые элементы и ассоциированные с p элементы ($p=ab$ влечет обратимость a или b). Простые элементы неприводимы; обратное верно далеко не всегда.

Целостное кольцо R называется *факториальным*, если любой его ненулевой необратимый элемент a разлагается в произведение неприводимых элементов из R, причем однозначно с точностью до ассоциированности и порядка сомножителей. Для элемента a можно записать *каноническое разложение* $a=u\,p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{k_n}$, где u – обратимый элемент, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – попарно не ассоциированные неприводимые элементы, $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbf{N}$.

Замечание 3. Мультипликативно факториальные кольца очень похожи на кольцо обычных целых чисел. Отношение ассоциированности ~ является конгруэнцией на мультипликативной полугруппе R^* всех ненулевых элементов целостного кольца R, а соответствующая фактор-полугруппа будет целой полугруппой. Если кольцо R факториально, то фактор-полугруппа $R^*/\sim$ является гауссовой целой полугруппой (см. [3, 9]). В факториальных кольцах НОД и НОК нескольких элементов находятся стандартно по их каноническим разложениям, а все неприводимые элементы являются простыми.

Теорема 2. *Каждое кольцо главных идеалов факториально.*

Теорема 3. *Кольцо многочленов от одного или нескольких неизвестных над факториальным кольцом факториально.*

Доказательства теорем 2 и 3 можно найти в учебниках [8, 9]. Из теорем 1 и 2 следует факториальность евклидовых колец.

Теорема 4. *Для любого целостного кольца R эквивалентны следующие условия:*

1) любые два элемента в R имеют НОД;

2) любые два элемента кольца R обладают НОК.

Эта теорема вытекает из справедливости аналогичного утверждения для целых полугрупп и замечания 3.

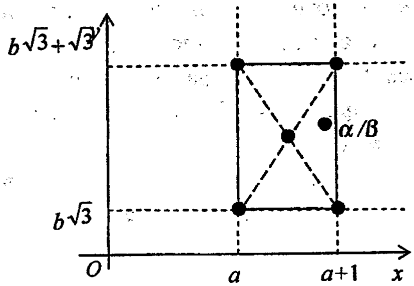
Пример 5. Кольцо многочленов $\mathbf{Z}[x]$ факториально. Его идеал $2\mathbf{Z}[x]+x\mathbf{Z}[x]$, состоящий из всех целочисленных многочленов с четным свободным членом, не является главным. Получили факториальное кольцо, не являющееся кольцом Безу.

Пример 6. Кольцо всех аналитических функций на комплексной плоскости является кольцом Безу, но не факториально.

Пример 7. Рассмотрим кольцо $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}] = \{a+b\sqrt{3}i\colon\ a, b\in \mathbf{Z}\}$. Норма элемента $\alpha=a+b\sqrt{3}i$ равна $n(\alpha)=a^2+3b^2$. Норма обратимых элементов равна 1, что возможно только при $a=1$ или -1 и $b=0$. Значит, 1 и -1 – единственные обратимые элементы кольца $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$. Поэтому в $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$ ассоциированность элементов α и β означает, что $\alpha=\beta$ или $\alpha=-\beta$. Возьмем разложения $4=2\cdot 2=(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)$. Элементы 2, $1+\sqrt{3}i$ и $1-\sqrt{3}i$ неприводимы в $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$, не ассоциированы друг с другом и не являются простыми элементами. Следовательно, кольцо $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$ не факториально и, стало быть, не евклидово, но в нем каждый ненулевой необратимый элемент разлагается в произведение конечного числа неприводимых элементов. Именно эту систему чисел использовал Л. Эйлер в 1768 году при своем оригинальном, но не совсем корректном доказательстве *Великой теоремы Ферма* (для любого целого $n>2$ уравнение $x^n+y^n=z^n$ неразрешимо в натуральных числах) для показателя $n=3$, предвосхитив тем самым создание теории алгебраических чисел (см. [11, 14]).

Расширенное числовое кольцо $R=\{\dfrac{a+b\sqrt{3}i}{2}\colon a$ и b – целые числа одинаковой четности$\}$ оказывается евклидовым. Действительно,

возьмем в R любые числа α и $\beta\neq 0$. Число α/β (как и в примере 3) находится в каком-то прямоугольнике с вершинами $(a, b\sqrt{3})$, $(a, b\sqrt{3}+\sqrt{3})$, $(a+1, b\sqrt{3}+\sqrt{3})$



и $(a+1, b\sqrt{3})$, где $a, b \in \mathbf{Z}$. Заметим, что центр $\frac{(2a+1)+(2b+1)\sqrt{3}i}{2} \in R$ этого прямоугольника является единственной его точкой, находящейся от каждой из четырех вершин на расстоянии ровно 1. Расстояние от точки α/β до одной из пяти указанных точек <1 (точнее, $\leq \frac{\sqrt{3}}{3}$). Доказательство евклидовости R завершается так же, как в примере 3. Поэтому кольцо R факториально. И разложения $4=2\cdot 2$ и $4=(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)$ в R на простые элементы совпадают с точностью до ассоциированности. В самом деле, кроме чисел 1 и -1 единичную норму в R имеют еще четыре числа $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$, $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ и $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$. Они составляют множество всех обратимых элементов кольца R. Поскольку

$$2=\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)(1+\sqrt{3}i)=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)(1-\sqrt{3}i),$$

то числа 2, $1+\sqrt{3}i$ и $1-\sqrt{3}i$ попарно ассоциированы в R.

Замечание 4. Для доказательства неразрешимости уравнения $x^3+y^3=z^3$ (теорема Ферма для показателя 3) в натуральных числах Эйлер использовал равенство $a^2+3b^2=(a+b\sqrt{3}i)(a-b\sqrt{3}i)$ с целыми числами a и b. Эйлер считал, что если число a^2+3b^2 есть куб натурального числа, то и сомножители должны быть кубами чисел из $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$, т. е. он применил к кольцу $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$ аналог утверждения § 1, являющегося следствием факториальности кольца $\mathbf{Z}$. Но кольцо $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$ не факториально. Для восстановления однозначности разложения (и спасения доказательства Эйлера) к кольцу $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$ надо присоединить числа вида $\frac{a+b\sqrt{3}i}{2}$ с нечетными $a, b \in \mathbf{Z}$, т. е. перейти к факториальному кольцу R из примера 7. Подробности см. в [11].

5. Кольца целых алгебраических чисел

Любое числовое поле содержит поле $\mathbf{Q}$ рациональных чисел и является векторным пространством над $\mathbf{Q}$.

Пусть P – произвольное числовое поле, имеющее конечный базис как векторное пространство над $\mathbf{Q}$. Каждый элемент из P является *алгебраическим числом,* т. е. служит корнем некоторого ненулевого многочлена с целыми рациональными коэффициентами. Комплексное число, являющееся корнем многочлена из $\mathbf{Z}[x]$ со старшим коэффициентом 1, называется *целым алгебраическим числом.* Множество R всех целых алгебраических чисел, содержащихся в P, образует подкольцо поля P и называется *кольцом целых алгебраических чисел* (поля P). Например, $\mathbf{Z}$ есть кольцо целых алгебраических чисел поля $\mathbf{Q}$, а кольцо R из примера 7 является таковым для поля $\mathbf{Q}(\sqrt{-3}) = \{p + q\sqrt{3}\, i: p, q \in \mathbf{Q}\}$.

Произведением идеалов A и B коммутативного кольца R называется множество AB всевозможных конечных сумм элементов вида ab, где $a \in A$ и $b \in B$. Произведение AB также является идеалом в R. Аналогично определяется произведение нескольких идеалов. Целостное кольцо называется *дедекиндовым,* если любой его ненулевой собственный идеал I является произведением конечного семейства простых идеалов; можно показать, что это семейство простых идеалов определяется идеалом I однозначно с точностью до порядка сомножителей. См. [9]. Всякое кольцо R главных идеалов дедекиндово: если $a = p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ – разложение на простые множители в R, то $aR = (p_1R)(p_2R) \cdot \ldots \cdot (p_nR)$ – произведение простых идеалов. Характеризация дедекиндовых колец имеется в [9]. Более широкий класс колец образуют (целостные) *кольца, допускающие теорию дивизоров* (см. [2, 11]). Этому классу принадлежат, в частности, факториальные кольца. Кольцо с теорией дивизоров тогда и только тогда факториально, когда все дивизоры главные.

Теорема 5. *Кольца целых алгебраических чисел дедекиндовы.*

По поводу доказательства см. [1, 2, 9 или 11].

Пример 8. Кольцо R целых алгебраических чисел поля $\mathbf{Q}(\sqrt{-5})$, равное $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{5}\, i: a, b \in \mathbf{Z}\}$, дедекиндово по теореме 5, но не факториально. Имеются существенно различные разложения числа 6 на неприводимые множители: $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{5}\, i)(1 - \sqrt{5}\, i)$. Обратимыми в R являются только 1 и –1. Если перейти к идеалам кольца R, то получим $2R = PP$, $3R = Q_1Q_2$, $(1 + \sqrt{5}\, i)R = PQ_1$ и $(1 - \sqrt{5}\, i)R = PQ_2$ для простых идеалов $P = 2R + (1 + \sqrt{5}\, i)R$, $Q_1 = 3R + (1 + \sqrt{5}\, i)R$ и $Q_2 = 3R + (1 - \sqrt{5}\, i)R$. Простые идеалы (дивизоры) P, Q_1 и Q_2 кольца R, играющие роль «идеальных чисел», восстанавливают однозначность разложения элемента 6, отождествляемого с главным идеалом $6R$, на неприводимые (простые) множители. См. [4].

Пример 9. Пусть α – трасцендентное число, т. е. комплексное число, не являющееся корнем никакого ненулевого целочисленного многочлена (например, e или π). Образуем числовое кольцо $\mathbf{Z}[\alpha]$, порожденное α. Его элементами служат всевозможные многочлены от α с целыми коэффициентами. Поэтому кольцо $\mathbf{Z}[\alpha]$ изоморфно кольцу $\mathbf{Z}[x]$. Оно факториально, но не является дедекиндовым.

Литература

1. *Айерлэнд К., Роузен М.* Классическое введение в современную теорию чисел. – М.: Мир, 1987.

2. *Боревич З.И., Шафаревич И.Р.* Теория чисел. – М.: Наука, 1985.

3. *Вечтомов Е.М.* Элементарная делимость в целых полугруппах// Математический вестник педвузов Волго-Вятского региона. 2000. Вып. 2. – С. 10-24.

4. *Винберг Э.Б.* Курс алгебры. – М.: Факториал, 1999.

5. *Гаусс К.Ф.* Труды по теории чисел / Под ред. И.М. Виноградова. – М.: Изд-во АН СССР, 1959.

6. *Калужнин Л.А.* Введение в общую алгебру. – М.: Наука, 1973.

7. *Кон П.* Свободные кольца и их связи. – М.: Мир, 1975.

8. *Куликов Л.Я.* Алгебра и теория чисел. – М.: Высш. шк., 1979.

9. *Курош А. Г.* Лекции по общей алгебре. – М.: Наука, 1973.

10. *Лемлейн В.Г.* О евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов/ Доклады АН СССР. 1954. Т. 97. № 4. – С. 585-587.

11. *Постников М. М.* Введение в теорию алгебраических чисел. – М.: Наука, 1982.

12. *Радемахер Г., Теплиц О.* Числа и фигуры. – М.: Наука, 1966.

13. *Родосский К. А.* Алгоритм Евклида. – М.: Наука, 1988.

14. *Эдвардс Г.* Последняя теорема Ферма. – М.: Мир, 1980.

III. Абстрактная делимость

Эврика!
Архимед

Введение

Понятие делимости (натуральных чисел, целых гауссовых чисел, многочленов) – одно из важнейших понятий арифметики, теории чисел и алгебры. В педвузах и в госуниверситетах студенты математических специальностей изучают делимость целых рациональных чисел и делимость многочленов над произвольным полем. Это во многом параллельные теории, являющиеся, по сути дела, теорией делимости в евклидовых кольцах (см. [9], [12]-[14]). В евклидовых кольцах имеет место теорема о делении с остатком и основанный на ней алгоритм Евклида нахождения НОД двух элементов (известные еще в IV веке до Р. Х.). Отсюда выводится основная теорема арифметики – теорема об однозначном разложении элементов на неприводимые множители. Целостные кольца, в которых справедлива основная теорема арифметики, называются факториальными, или гауссовыми (однозначность разложения впервые доказал Карл Гаусс в 1801 году). Между классом евклидовых колец и классом факториальных колец строго лежит класс колец главных идеалов.

Интересно сравнить нюансы делимости в кольцах из этих трех классов колец. В любом факториальном кольце НОД и НОК нескольких элементов определяются их разложениями на неприводимые множители, т. е. чисто мультипликативной структурой кольца. В то же время в кольцах главных идеалов имеет место линейное представление НОД, что не обязано выполняться в произвольном факториальном кольце. В линейном представлении НОД наряду с операцией умножения фигурирует и сложение. В евклидовых же кольцах при делении с остатком используются обе кольцевые операции, а также евклидова норма элементов. В результате такого движения ситуация, обогащаясь, теряет как в общности, так и в «чистоте замысла», поскольку отношение делимости элементов определяется только через умножение. В этом очерке исследуется отношение делимости в наиболее общем и чистом виде. На наш взгляд, естественной математической средой для этого служит класс целых полугрупп – такой подход мы начали рассматривать в статье [4], следуя книгам [9] и [12], а затем в [5, 6]. Разумеется, существуют и другие общие теории делимости. Например, изучается делимость в упорядоченных группоидах (см. [14]), но в них кроме умножения независимо постулируется и отношение порядка. Изучается также делимость в некоммутативных кольцах [9].

Мы придерживаемся следующих методологических положений:

1) отношение делимости — полугрупповое понятие;

2) свойства делимости целесообразно и методически полезно анализировать именно в целых полугруппах, являющихся достаточно простыми алгебраическими объектами;

3) на примере целых полугрупп можно хорошо иллюстрировать такие важные вещи, как изоморфизм и задание алгебраического объекта образующими и определяющими соотношениями.

1. Определения

Начнем с определения исходного понятия целой полугруппы. Сначала напомним, что *полугруппа* – это ассоциативный группоид, а *группоидом* называется непустое множество с заданной на нем одной бинарной операцией. Будем пользоваться мультипликативными обозначениями.

Целой полугруппой (называемой еще конической) называется группоид A, удовлетворяющий следующим условиям:

1) ассоциативность: $(ab)c = a(bc)$ для всех $a, b, c \in A$;

2) коммутативность: $ab = ba$ для любых $a, b \in A$;

3) существование единичного элемента $1 \in A$: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ для каждого a из A;

4) сократимость: $ac = bc \Rightarrow a = b$ при любых $a, b, c \in A$;

5) отсутствие в A обратимых элементов, отличных от 1, т. е. имеет место квазитождество $ab = 1 \Rightarrow a = 1$.

Дадим определение делимости элементов в произвольном группоиде A.

Элемент $b \in A$ называется *делителем* элемента $a \in A$, если найдется такой элемент $c \in A$, что $a = bc$. Синонимы: *b делит a* – в обозначениях «$b|a$»; *a делится на b* – в обозначениях «$a \vdots b$»; *a – кратное b* или *a кратно b*.

В результате на любом группоиде A возникает бинарное *отношение делимости* $|$:

$b|a$ означает $(\exists c\in A)\ a = bc$.

На самом деле это отношение левой делимости; аналогично определяется делимость справа.

Что мы хотим от группоида A, чтобы отношение «делит» $|$ обладало естественными, в том числе порядковыми, свойствами, позволяющими создать стройную элементарную теорию делимости, похожую на делимость натуральных чисел?

Во-первых, мы не хотим путаницы от наличия двух делимостей – левой и правой. А это обеспечивается условием коммутативности данного группоида. Во-вторых, хотелось бы, чтобы отношение $|$ было транзитивным. Что, в свою очередь, вытекает из ассоциативности операции в A. В-третьих, существование единицы 1 в группоиде A обеспечивает рефлексивность отношения делимости, а также делимость на 1 всех элементов в A. Далее, требование единственности частного c при делении произвольных элементов в A равносильно условию сократимости. Наконец, при выполнении всех предыдущих условий условие 5) эквивалентно антисимметричности отношения $|$.

Выскажем еще одно соображение в пользу условия 5). Пусть группоид A удовлетворяет условиям 1)–4). Элементы $a, b\in A$ называются *ассоциированными* – в обозначениях «a~b», если они делят друг друга: $b|a$ и $a|b$. Ассоциированные элементы ведут себя совершенно одинаково относительно делимости – они делят одни и те же элементы и делятся на одни и те же элементы полугруппы A. В частности, ассоциированные с 1 элементы – это в точности обратимые элементы из A; они служат делителями каждого элемента полугруппы A. Отношение ассоциированности является конгруэнцией на полугруппе A. Соответствующая факторполугруппа $A/\sim$ будет уже целой полугруппой – «скелетом делимости» полугруппы A.

Подчеркнем, что мы акцентируем внимание на самом отношении делимости, хотя в современной теории чисел важное место занимает изучение групп обратимых элементов полугрупп со свойствами 2)–4), теория идеалов и теория дивизоров колец алгебраических чисел [2].

Далее всюду A – целая полугруппа.

Система $\langle A, |\rangle$ является упорядоченным множеством с наименьшим элементом 1. Если $b|a$, то обозначим через a/b *частное* от деления a на b; имеем $b(a/b) = a$.

Элемент $a \neq 1$ из A называется:

неприводимым, если $a=bc \Rightarrow (a=b$ или $a=c)$;

простым, если $a \mid bc \Rightarrow (a \mid b$ или $a \mid c)$;

разложимым, если a является произведением нескольких неприводимых элементов из A;

однозначно разложимым, если a разложим и любые два его разложения на неприводимые множители совпадают с точностью до порядка следования сомножителей.

Неприводимые элементы можно также определить как элементы, имеющие ровно по два делителя, или как атомы упорядоченного множества $\langle A, |\rangle$. Неприводимые элементы однозначно разложимы, а простые элементы неприводимы.

Полугруппа A называется:

разложимой, если каждый ее неединичный элемент разложим;

гауссовой, если любой ее неединичный элемент однозначно разложим.

Гауссовы полугруппы – это целые полугруппы, удовлетворяющие основной теореме арифметики. Заметим, что в [11] не требуется соблюдения условия 5). Важный класс разложимых полугрупп образуют подполугруппы с 1 гауссовой полугруппы **N** всех натуральных чисел по умножению.

Наибольшим общим делителем – сокращенно НОД – конечного семейства элементов $a_1, a_2, ..., a_n \in A$ называется элемент из A, обозначаемый $(a_1, a_2, ..., a_n)$, который делит все эти элементы (т. е. является их общим делителем) и делится на любой их общий делитель. Двойственным образом определяется *наименьшее общее кратное* – НОК – элементов $a_1, a_2, ..., a_n$, которое обозначается $[a_1, a_2, ..., a_n]$.

Ясно, что $(a_1, a_2, ..., a_n) = \inf(a_1, a_2, ..., a_n)$ и $[a_1, a_2, ..., a_n] = \sup(a_1, a_2, ..., a_n)$ в упорядоченном множестве $\langle A, |\rangle$. Каждое из равенств понимается так, что если существует одна из частей равенства, то существует и другая часть, причем она равна первой. Такие равенства будем называть *условными*.

Полугруппа A называется *арифметической*, если любые два ее элемента имеют НОД.

Гауссовы полугруппы суть арифметические, и в них неприводимые элементы – простые.

Завершая параграф, рассмотрим примеры.

Пример 1. Возьмем мультипликативную полугруппу $A = \mathbf{N}\setminus\{2\}$. В ней неприводимые элементы совпадают с числами 4, 8, p, $2p$, где p – произвольное нечетное простое число. Простых элементов в полугруппе A нет. Элементы 4 и 6 обладают НОД=1, но не имеют НОК, поскольку множество их общих кратных {24, 36, 48, 60, ...} не имеет наименьшего элемента относительно делимости |. Множество общих делителей элементов 12 и 24 в A равно {1, 3, 4} и не имеет наибольшего элемента по отношению «делит», стало быть, не существует (12, 24). Поэтому разложимая полугруппа A не является арифметической, а значит, и гауссовой. Скажем, элемент 36 разлагается на неприводимые множители двумя существенно разными способами: $36=3\cdot3\cdot4=6\cdot6$.

Заметим, что в [1, с. 23] приведена мультипликативная полугруппа всех натуральных чисел вида $4k+1$, которая также не является арифметической (почему?). Д. В. Аносов назвал такую ситуацию «пародией на арифметику»; добавим – на классическую арифметику.

Пример 2. Мультипликативная полугруппа $A=(0, 1]$ положительных действительных чисел ≤ 1 является арифметической полугруппой, не имеющей неприводимых элементов. В ней $b|a \Leftrightarrow a\leq b$.

Прямое произведение полугрупп из примеров 1 и 2 не является ни разложимой, ни арифметической полугруппой.

2. Свойства делимости

Перечислим сначала **простейшие свойства делимости** в произвольной целой полугруппе A (сравните с Приложением II).

1) $1|a$.

2) $a|a$ (*рефлексивность*).

3) $a\sim b \Leftrightarrow a=b$ (*антисимметричность*).

4) $a|b$ & $b|c \Rightarrow a|c$ (*транзитивность*).

5) $a|b \Rightarrow a|bc$.

6) $a|b \Leftrightarrow ac|bc$.

7) $p\neq1$ *неприводим* $\Leftrightarrow \forall a$ ((p,a)=1 *или* $p|a$).

8) *Любой простой элемент неприводим.*

Свойства НОД и НОК

1. *НОД и НОК нескольких элементов определены однозначно, если существуют.*

2. $b|a \Leftrightarrow (a,b)= b \Leftrightarrow [a,b]=a$. *В частности:* $(a,a)= [a,a]=a$, $(1,a)= 1$, $[1,a]=a$.

3. $(a,b)=(b,a)$, $[a,b]=[b,a]$ (*условная коммутативность*).

4. $((a,b), c)=(a, (b,c))$, $[[a,b], c]=[a, [b,c]]$ (*условная ассоциативность*).

5. *Если* $(a,b) \neq 1$, *то* a *и* b *имеют общий делитель* $\neq 1$.

6. $(a,b)=1$ & $c|a \Rightarrow (c,b)=1$.

7. *Существование* (a,b) *влечет* $(a/(a,b), b/(a,b))=1$.

8. *Существование* $[a,b]$ *влечет существование* (a,b) *и равенство* $(a,b)\cdot[a,b]=ab$.

9. *Существование* (ac,bc) *влечет существование* (a,b) *и равенство* $(ac,bc) = (a,b)c$. *Аналогично для НОК.*

10. *Существование* (a,b) *и существование* $(ac/(a,b), bc/(a,b))$ *для любого* c *влекут существование* $[a,b]$.

Доказательство свойств НОД и НОК

Свойство 1 вытекает из антисимметричности отношения $|$.

Свойства 2, 3, 5-7 доказываются «по определению».

Свойства 4 и 9 доказаны в [12], с. 84-85.

Остается доказать свойства 8 и 10.

Свойство 8. Пусть $[a,b]=k$. Тогда $k=as=bt$ и $ab=kd$ для некоторых $s,t,d \in A$. Откуда $b=ds$ и $a=dt$, т. е. d – общий делитель a и b. Возьмем произвольный общий делитель c элементов a и b. Имеем $a=cx$ и $b=cy$ для подходящих $x,y \in A$. Далее получаем $bx=cyx=ay$ – общее кратное a и b, т. е. $bx=ay=kz=asz=btz$ для некоторого $z \in A$. Поэтому $x=tz$ и $y=sz$. Значит, $dt=a=cx=ctz$, стало быть, $d=cz$ и $c \mid d$. Следовательно, $d=(a,b)$ и $(a,b)\cdot[a,b]=dk=ab$.

Свойство 10. Предположим, что выполнено условие свойства 10 и $(a,b)=d$. Тогда $a=ds$ и $b=dt$ для соответствующих $s,t \in A$. По свойству 7 $(s,t)=1$. Элемент $k=std=at=bs$ служит общим кратным a и b. Рассмотрим произвольное общее кратное l элементов a и b: $l=ax=by=dsx=dty$ для некоторых $x,y \in A$. Тогда $sx=ty$. По условию существует (sx,tx). По свойству 9 $x=(s,t)x=(sx,tx)=(ty,tx)=t(x,y)$. Откуда $l=ax=at(x,y)=k(x,y)$, т.е. $k\mid l$. Значит, $k=[a,b]$.

Предложение 1. *Для любой целой полугруппы A эквивалентны следующие условия:*

а) существование (a,b) влечет существование (ac,bc) для всех c;

б) $(a,b)=1$ влечет существование (ac,bc) для каждого c;

в) существование (a,b) влечет существование $[a,b]$;

г) $(a,b)=1$ влечет существование $[a,b]$;

д) $(a,b)=1$ & $b|ac \Rightarrow b|c$;

е) $(a,b)=1 \Rightarrow (a,bc)=(a,c)$;

ж) $(a,b)=1$ & $a|c$ & $b|c \Rightarrow ab|c$.

При этом каждое из условий а) – ж) влечет условие

з) $(a,b)=1=(a,c) \Rightarrow (a,bc)=1$.

Доказательство. Эквивалентность условий *а)–ж)* докажем почти по циклу: *а) $\Rightarrow$ б) $\Rightarrow$ в) $\Rightarrow$ г) $\Rightarrow$ д) $\Rightarrow$ е) $\Rightarrow$ ж) $\Rightarrow$ д) $\Rightarrow$ а).*

Импликации *а) $\Rightarrow$ б)* и *в) $\Rightarrow$ г)* очевидны, а *б) $\Rightarrow$ в)* по свойству 10.

г) $\Rightarrow$ д). Пусть $(a,b)=1$ и $b|ac$. По свойству 8 $[a,b]=ab$. Поскольку ac – общее кратное a и b, то $ab|ac$, откуда $b|c$.

д) $\Rightarrow$ е). Пусть $(a,b)=1$. Покажем, что пары элементов a, bc и a, c имеют одни и те же общие делители. Ясно, что любой общий делитель a, c будет и общим делителем a, bc. Обратно, возьмем общий делитель d элементов a, bc. Тогда $(d,b)=1$ и $d|c$ в силу *д)*.

е) $\Rightarrow$ ж). Пусть снова $(a,b)=1$ и $a|c$, $b|c$. Элемент a служит общим делителем a и $b(c/b)=c$. По условию *е)* имеем $a|(c/b)$, т. е. $c/b=ax$ для некоторого $x\in A$. Но тогда $c=abx$ и $ab|c$.

ж) $\Rightarrow$ д). Предположим, что $(a,b)=1$ и $b|ac$. Так как $a|ac$, то по условию *ж)* $ab|ac$, т. е. $b|c$.

д) $\Rightarrow$ а). Пусть $d=(a,b)$ и выполнено условие *д)*. Возьмем $c\in A$ и покажем, что dc является НОД элементов ac и bc. Очевидно, что dc – общий делитель элементов ac и bc. Рассмотрим произвольный общий делитель l элементов ac и bc: $ac=lx$ и $bc=ly$ $(x,y\in A)$. Тогда $acly=bclx$, откуда $ay=bx$. Далее $b\mid ay$ и $(b/d)\mid(a/d)y$. Так как $(a/d,b/d)=1$, то $(b/d)\mid y$ в силу *д)*. Для некоторого $z\in A$ имеем

$y=(b/d)z$, $bc=ly=lz(b/d)$ и $cd=lz$, т. е. $l\,|\,cd$. Следовательно, $cd=(ac,bc)$.

Наконец, *ж)* $\Rightarrow$ *з)*. Пусть $(a,b)=(a,c)=1$ и d – общий делитель элементов a и bc. В силу *д)* $d|c$. Значит, $d|1$, т. е. $d=1$. Следовательно, $(a,bc)=1$.

Предложение 2[12]. *Если в целой полугруппе выполнено условие з), то все ее неприводимые элементы являются простыми.*

Предложение 3. *Любой элемент целой полугруппы, являющийся произведением нескольких простых элементов, однозначно разложим.*

Доказательство совершенно аналогично классическому доказательству единственности разложения натуральных чисел на простые множители.

Целая полугруппа A называется *полугруппой с условием минимальности*, если упорядоченное множество $\langle A;\ |\rangle$ удовлетворяет условию минимальности: в A не существует бесконечных убывающих цепочек делителей.

Предложение 4. *Всякая полугруппа с условием минимальности является разложимой.*

Доказательство подобно стандартному доказательству существования в основной теореме арифметики для натуральных чисел. См. также доказательство леммы Кёнига [15, с. 53].

Пример 3. Пусть A – мультипликативная полугруппа всех непрерывных неотрицательных функций на единичном отрезке [0,1], равных 0 в точке 0 и имеющих лишь конечное число нулей, с присоединенной функцией-константой 1. Любые два элемента f и g целой полугруппы A, отличные от 1, обладают общим делителем $(f+g)^{1/2}\neq 1$. Поэтому в A выполняется условие б) предложения 1, следовательно, и остальные условия этого предложения. Однако полугруппа A не является арифметической. Отметим, что элементарная делимость в мультипликативных полугруппах $C(X,\mathbf{R}^+)$ всех непрерывных неотрицательных функций, заданных на топологическом пространстве X, существенно отличается от делимости в целых полугруппах (см. [3], § 1).

3. Арифметические и гауссовы полугруппы

Теорема 1. *Всякая арифметическая полугруппа A обладает следующими свойствами:*

(1) *любые два элемента в A имеют НОК (это характеристическое свойство арифметических полугрупп в силу свойства 7);*

(2) *любой неприводимый элемент в A является простым;*

(3) *справедливы утверждения д), е), ж) и з) предложения 1;*

(4) *выполняются законы дистрибутивности*

$(a, [b,c]) = [(a,b), (a,c)]$ *и* $[a, (b,c)] = ([a,b], [a,c])$;

(5). $\langle A, | \rangle$ – *дистрибутивная решетка с наименьшим элементом* $\dot{1}$.

Следствие. *Арифметичность целой полугруппы A равносильна тому, что упорядоченное множество $\langle A, | \rangle$ является решеткой.*

Доказательство теоремы 1. Свойство (1) вытекает из свойства 10. Свойство (2) очевидно в силу предложения 1. Свойство (4) доказано в [4]. Наконец, свойство (5) следует из свойств (1) и (4).

Теорема 2. *Для любой целой полугруппы A эквивалентны следующие условия:*

1^0. *A – гауссова полугруппа.*

2^0. *A – разложимая арифметическая полугруппа.*

3^0. *A – разложимая полугруппа, любые два элемента которой имеют НОК.*

4^0. *A – разложимая полугруппа, неприводимые элементы которой просты.*

5^0. $\langle A, | \rangle$ – *(дистрибутивная) решетка с условием минимальности.*

Доказательство. Ясно, что $1^0 \Rightarrow 2^0$. Импликация $2^0 \Rightarrow 3^0$ вытекает из свойства 7. В силу свойства 8 и предложений 1 и 2 имеет место импликация $3^0 \Rightarrow 4^0$. Из предложения 3 и условия 4^0 следует, что A гауссова, а в любой гауссовой полугруппе каждый элемент имеет конечное число делителей, связанное с кратностями его простых множителей. Применяя теорему 1, получаем $4^0 \Rightarrow 5^0$. Если верно 5^0, то следствие теоремы 1, условие (2) теоремы 1 и предложения 4 и 3 дают утверждение 1^0.

Несколько иными комбинациями свойств характеризуются гауссовы полугруппы в [12].

4. Условия разложимости

Будем считать, что полугруппа A имеет неединичный элемент.

Системой образующих полугруппы A называется ее непустое подмножество P, такое, что любой неединичный элемент из A является произведением нескольких элементов из P (возможно, с повторениями).

Предложение 5. *Целая полугруппа A разложима тогда и только тогда, когда она обладает минимальной системой образующих.*

Действительно, множество всех неприводимых элементов разложимой полугруппы служит ее минимальной системой образующих. Обратно, если A обладает минимальной системой образующих P, то все элементы из P неприводимы, и A – разложимая полугруппа.

Разложимыми полугруппами являются полугруппы с условием минимальности (предложение 4). Введем еще ряд усилений разложимости.

Разложимая полугруппа A называется:

полугруппой с факторизацией, если длины разложений на неприводимые элементы каждого ее элемента ограничены сверху;

квазигауссовой, если для каждого неединичного элемента из A длины его разложений на неприводимые множители равны.

Целую полугруппу назовем *псевдогауссовой*, если множество делителей любого ее элемента конечно.

Предложение 6. *Всякая полугруппа с факторизацией удовлетворяет условию минимальности.*

Очевидно, что как псевдогауссовы, так и квазигауссовы полугруппы являются полугруппами с факторизацией. Ясно также, что гауссовы полугруппы псевдогауссовы и квазигауссовы.

Приведенные классы целых полугрупп (разложимые, с условием минимальности, с факторизацией, псевдогауссовы, квазигауссовы, гауссовы) отличны друг от друга. Чтобы убедиться в этом, построим соответствующие примеры полугрупп, задавая их *образующими элементами и определяющими соотношениями.*

Пример 4. Пусть полугруппа A имеет счетную систему образующих $a_1, a_2,\ldots, a_n,\ldots$, которые связаны соотношениями $a_n^2 = a_{n+1}^3$, где $n\in \mathbf{N}$. Элементы из A приводятся к следующему каноническому виду:

$$a_1^m \cdot a_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{k_n} \ (m = 0, 1, 2, \ldots \ k_i = 0, 1, 2).$$

Разложимая полугруппа A не удовлетворяет условию минимальности, ибо $a_1^2 \vdots a_2^2 \vdots \ldots \vdots a_n^2 \vdots a_{n+1}^2 \vdots \ldots$.

Пример 5. Рассмотрим целую полугруппу, заданную образующими $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и определяющими соотношениями

$$a_1^2 = a_2^3 = \ldots = a_n^{n+1} = \ldots.$$

Такая полугруппа удовлетворяет условия минимальности, но не является полугруппой с факторизацией. Канонический вид ее элементов таков:

$$a_1^m \cdot a_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{k_n} \ (m = 0, 1, 2, \ldots \ k_i = 0, 1, \ldots i).$$

Пример 6. Возьмем целую полугруппу, образующие $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ которой связаны соотношениями $a_1^3 = a_2^2 = a_3^3 = a_4^2 = \ldots$. Это полугруппа с факторизацией, не являющаяся ни псевдогауссовой, ни квазигаусовой. Канонический вид ее элементов:

$a_1^m \cdot a_2^{k_2} \cdot a_3^{k_3} \cdot \ldots \cdot a_n^{k_n}$ ($k_i = 0{,}1$ при четном i и $k_i = 0, 1, 2$ при нечетном i).

Пример 7. Целая полугруппа с двумя образующими a и b и одним определяющим соотношением $a^2 = b^2$ – это псевдогауссова и квазигауссова полугруппа, не являющаяся гауссовой. Заметим, что полугруппа из примера 1 псевдогауссова, но не квазигауссова.

Пример 8. Пусть целая полугруппа задается образующими a_n, $n \in \mathbf{N}$, и определяющими соотношениями $a_n^2 = a_1^2 \ (n \geq 2)$. Получаем квазигауссовую полугруппу, не являющуюся псевдогауссовой. Ее элементы имеют канонический вид $a_1^m \cdot a_2^{k_2} \cdot a_3^{k_3} \cdot \ldots \cdot a_n^{k_n}$ ($k_i = 0, 1$).

Сформулируем два результата о псевдогауссовых полугруппах.

Предложение 7. *Для любой целой полугруппы A эквивалентны следующие утверждения:*

1) *A – псевдогауссова полугруппа;*

2) *каждый неединичный элемент полугруппы A имеет лишь конечное число разложений на неединичные множители;*

3) *A разложима, и каждый ее элемент имеет конечное множество неприводимых делителей;*

4) *A разложима, и каждый ее неединичный элемент имеет лишь конечное число разложений на неприводимые множители.*

Полугруппа называется *конечнопорожденной*, если она обладает конечной системой образующих.

Теорема 3. *Всякая конечнопорожденная целая полугруппа псевдогауссова.*

Доказательство. Пусть дана конечнопорожденная целая полугруппа A. Она обладает минимальной системой образующих a_1, $a_2, \ldots, a_n$. По предложению 5 полугруппа A разложима и $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ – множество всех ее неприводимых элементов. Возьмем в A произвольный неединичный элемент a и рассмотрим его «каноническое» разложение $a = a_1^{k_1} \cdot a_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{k_n}$ (k_i – неотрицательные целые числа). Покажем, что множество разложений a на неприводимые множители конечно. Отсюда уже следует псевдогауссовость A.

Предположим от противного, что элемент a имеет счетное множество разложений на неприводимые множители:

$$(*)\ a = a_1^{k_{i1}} \cdot a_2^{k_{i2}} \cdot \ldots \cdot a_n^{k_{in}} \ (k_{ij} \geq 0,\ i \in \mathbf{N}).$$

Найдется такой индекс $j\,(1 \leq j \leq n)$, что показатели k_{ij} принимают сколь угодно большие значения. Перенумеровав образующие, можно считать, что $k_1 < k_{11} < k_{21} < \ldots < k_{i1} < \ldots$ в системе (*). Наборы показателей $(k_{i2}, \ldots, k_{in}), i \in \mathbf{N}$, попарно различны. Поэтому существует номер $j\,(2 \leq j \leq n)$, для которого показатели k_{ij} не ограничены сверху. Как и выше, считаем, что в системе (*) $k_2 < k_{12} < k_{22} < \ldots < k_{i2} < \ldots$. Рассуждая далее аналогичным образом, получаем при некотором i равенство (*), в котором $k_{ij} > k_j$ для всех $j = 1, 2, \ldots, n$, что противоречит равенству $a = a_1^{k_1} \cdot a_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{k_n}$.

Теорема 4. *Любая конечнопорожденная целая полугруппа может быть задана конечным числом определяющих соотношений.*

Этот результат вытекает из одной теоремы Диксона [8, теорема 9.18].

5. Изоморфизм

Группоиды A и A' называются *изоморфными*, если существует такое взаимно однозначное отображение f группоида A на группоид A', что $f(ab) = f(a) \cdot f(b)$ для любых $a, b \in A$. (Если при этом отображение f не обязательно биективно, то получаем понятие *гомоморфности.*) Если обозначить $f(a) = a'$, то получим $(ab)' = a'\cdot b'$ для всех a, $b\in A$. Соответствие $a \leftrightarrow a'$ показывает, что группоид A' служит копией группоида A. Само отображение f называется изоморфизмом A на A'. Обратное отображение f^{-1}: $A' \to A$ также является изоморфизмом. Композиция (последовательное выполнение) изоморфизмов $f: A \to B$ и g: $B \to C$ – снова изоморфизм gof: $A \to C$. Кроме того, для любого группоида существует тождественный изоморфизм. Следовательно, отношение изоморфности $\cong$ является отношением эквивалентности на классе всевозможных группоидов.

Изоморфизм группоидов сохраняет все их алгебраические свойства, т. е. свойства, выражаемые на языке одной только операции (умножения) в группоидах. Так, группоид, изоморфный полугруппе, будет полугруппой, а изоморфный целой полугруппе сам является целой полугруппой.

Замечание. Рассмотрим аддитивную полугруппу $\mathbf{N}_0$ всех неотрицательных целых чисел. Она изоморфна мультипликативной гауссовой полугруппе (a), порожденной одним элементом $a \neq 1$. В самом деле, биекция $f: \mathbf{N}_0 \to (a)$, $f(k) = a^k$, удовлетворяет условию $f(m+n) = f(m)\cdot f(n)$ при любых m, $n\in \mathbf{N}_0$. Хотя операции обозначены по-разному, это не меняет сути дела. Поэтому, как и для полугруппы $\mathbf{N}_0$ (теорема 11 из очерка 1), любая подполугруппа в (a) конечно порождена.

Предложение 8. *Две гауссовы полугруппы изоморфны тогда и только тогда, когда множества их неприводимых элементов равномощны, т. е. между ними существует биективное соответствие.*

Следствие. *Гауссовы полугруппы A и B изоморфны в том и только в том случае, когда изоморфны упорядоченные множества $\langle A, |\rangle$ и $\langle B, |\rangle$.*

Вопрос об изоморфности двух полугрупп решается, в общих чертах, следующим образом. Если полугруппы изоморфны, то, как правило, строится конкретный изоморфизм одной полугруппы на другую. Для доказательства неизоморфности двух полугрупп ищется такое алгебраическое свойство, которое выполняется в одной из данных полугрупп, но не выполняется в другой.

Например, мультипликативная полугруппа всех нечетных натуральных чисел изоморфна $\mathbf{N}$: соответствие $3\to2$, $5\to3$, $7\to5,\ldots$, $p_{n+1}\to p_n,\ldots$ – естественным образом продолжается до требуемого изоморфизма. Но, скажем, разложимая полугруппа из примера 1 не изоморфна N, так как не является арифметической.

Исследуем на изоморфность еще несколько типов мультипликативных полугрупп натуральных чисел.

I. Полугруппы $N\backslash\{p\}$ и $N\backslash\{q\}$ изоморфны для любых простых чисел p и q.

II. Обозначим через nN полугруппу всех натуральных чисел, кратных данному n, с присоединенной 1. Полугруппы mN и nN изоморфны тогда и только тогда, когда $m=n$.

III. Для данного натурального n пусть N(n) – полугруппа всех натуральных чисел $\geq n$ с присоединенной 1. Такие полугруппы N(m) и N(n) изоморфны тогда и только тогда, когда числа m и n обладают одинаковым мультипликативным строением, т.е. их канонические разложения на простые множители имеют равные системы показателей (при расположении в неубывающем порядке). Например, N(12)$\cong$N(18), но N(12) и N(24) не изоморфны.

6. Упражнения

В заключение приведем систему задач и упражнений на тему абстрактной делимости.

1. Проверьте, что аксиомы 1)-5) в определении целой полугруппы обеспечивают выполнение соответствующих свойств делимости в группоидах (см. § 1).

2. Какими порядковыми свойствами обладает отношение делимости в мультипликативной полугруппе всех целых чисел?

3. Докажите простейшие свойства делимости 1)-8).

4. Проверьте недоказанные в работе свойства НОД и НОК.

5. Покажите, что в целых полугруппах справедливы следующие свойства частных: $a/1 = a$, $a/a = 1$, $a/b = c \Leftrightarrow a/c = b$, $k(a/b) = ka/b$, $ac/bc = a/b$, $(a/b)(c/d) = ac/bd$, $(a/b)/c = a/bc$, $a/(b/c) = ac/b$.

6. Убедитесь, что условие *д)* предложения 1 влечет условие *и)*: из существования $[a,b]$ следует существование $[ac,bc]$ для всех $c\in A$.

7. Докажите, что условие *и)* из упражнения 6 не влечет *d)*.

8. Проверьте, что в полугруппе из примера 1 любые два элемента, ни один из которых не делится на другой, не имеют НОК.

9. Влечет ли условие *з)* условие *а)*?

10. Докажите предложение 2.

11. Постройте пример целой полугруппы, в которой не выполняется условие *з)*, но все неприводимые элементы простые.

12. Докажите самостоятельно свойство (4) теоремы 1.

13. Почему гауссовы полугруппы являются арифметическими?

14. Найдите в примере 3 два элемента, не имеющих НОД.

15. Покажите, что всякая целая полугруппа обладает не более одной минимальной системой образующих.

16. Докажите предложение 6 (методом от противного).

17. Приведите свои версии примеров 4-8.

18. Докажите предложение 7 (по циклу).

19. Целые полугруппы A и B назовем *у-изоморфными*, если изоморфны их упорядоченные множества делимости. Сохраняются ли при у-изоморфизме следующие свойства целых полугрупп: арифметичность, разложимость, гауссовость?

20. Исследуйте вопрос: следует ли изоморфность целых полугрупп из их у-изоморфности?

21. Целую полугруппу назовем *атомной*, если любой ее неединичный элемент делится на некоторый неприводимый элемент. Разложимые полугруппы атомны. Приведите пример атомной полугруппы, не являющейся разложимой.

22. Дайте обоснование предложению 8 и его следствию.

23. Проверьте утверждения I-III об изоморфности полугрупп.

24. Для фиксированного натурального числа n обозначим через $n\mathbf{N}+1$ соответствующую мультипликативную полугруппу. Когда полугруппы $m\mathbf{N}+1$ и $n\mathbf{N}+1$ изоморфны?

25. Когда прямое произведение полугрупп является целой полугруппой?

26. Обязан ли гомоморфный образ целой полугруппы также быть целой полугруппой?

27. Докажите, что произвольное прямое произведение целых полугрупп является арифметической полугруппой тогда и только тогда, когда все сомножители суть арифметические полугруппы.

28. Покажите, что прямое произведение семейства нетривиальных целых полугрупп является разложимой (гауссовой) полугруппой тогда и только тогда, когда это семейство конечно и все сомножители суть разложимые (соответственно, гауссовы) полугруппы.

29. Покажите, что всякая коммутативная полугруппа с единицей является гомоморфным образом некоторой гауссовой полугруппы.

30. Коммутативная полугруппа A с 1 называется *свободной*, если она обладает такой системой образующих X (называемой *системой свободных образующих*), что любое отображение множества X в произвольную коммутативную полугруппу B с 1 продолжается до гомоморфизма полугрупп $A \to B$. Докажите, что гауссовы полугруппы – это в точности свободные полугруппы (в классе коммутативных полугрупп с 1).

31. Какие из следующих свойств целых полугрупп сохраняются при переходе к целым гомоморфным образам: арифметичность, гауссовость, разложимость, атомность?

32. Докажите, что любая подполугруппа целой полугруппы, содержащая 1, сама является целой полугруппой. Верно ли аналогичное утверждение для арифметических полугрупп, разложимых полугрупп, гауссовых полугрупп, атомных полугрупп, конечнопорожденных целых полугрупп?

33. Обязаны ли идеалы конечнопорожденной целой полугруппы порождаться конечным числом элементов (как идеалы)? Напомним, что подмножество J коммутативной полугруппы A называется *идеалом* в A, если $ab \in J$ для любых $a \in A$ и $b \in J$.

34. Покажите, что класс всех целых полугрупп с нульарной операцией (выделенным элементом) 1 образует квазимногообразие, но не многообразие.

35. Придумайте свои вопросы и задачи по теме делимости.

Литература

1. *Аносов Д.В.* Взгляд на математику и нечто из нее. – М.: МЦНМО, 2000 (Библиотека «Математическое просвещение»).

2. *Боревич З.И., Шафаревич И.Р.* Теория чисел. – М.: Наука, 1985.

3. *Варанкина В.И., Вечтомов Е.М., Семенова И.А.* Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы, конгруэнции // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4. № 2. – С. 493-510.

4. *Вечтомов Е.М.* Арифметические полугруппы // Материалы Всерос. науч. конф. – Киров: Изд-во ВятГПУ, 1996. – С. 135-137.

5. *Вечтомов Е.М.* Две соросовские лекции по математике. – Киров: Изд-во ВятГПУ, 1999.

6. *Вечтомов Е.М.* Элементарная делимость в целых полугруппах// Математический вестник педвузов Волго-Вятского региона. 2000. Вып. 2. – С. 10-24.

7. *Калужнин Л.А.* Введение в общую алгебру. – М.: Наука, 1973.

8. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп. Т. 2. – М.: Мир, 1972.

9. *Кон П.* Свободные кольца и их связи. – М.: Мир, 1975.

10. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. – М.: Наука, 1977.

11. *Куликов Л.Я.* Алгебра и теория чисел. – М.: Высш. шк., 1979.

12. *Курош А.Г.* Лекции по общей алгебре. – М.: Наука, 1973.

13. *Родосский К.А.* Алгоритм Евклида. – М.: Наука, 1988.

14. *Тестов В.А.* Об аналоге основной теоремы арифметики в упорядоченных группоидах// Математические заметки. 1997. Т. 62. № 6. – С. 910-915.

15. *Уилсон Р.* Введение в теорию графов. – М.: Мир, 1977.

IV. Циклические группы и целые числа

Алгебра щедра –
зачастую она дает больше,
чем у нее спрашивают.
Даламбер

Введение

Цель данного сюжета (см. [3]) – показать взаимодействие, в том числе и в процессе обучения математике, таких фундаментальных математических понятий, как *группа* и *число*. Абстракции числа и группы отражают и формализуют общенаучные и философские категории *количества* и *симметрии*.

В общих чертах взаимосвязи групп и чисел таковы. Целые, рациональные, действительные и комплексные числа доставляют важные исходные примеры групп. На их основе вырабатываются аддитивная и мультипликативная терминологии для групп. В линейной алгебре рассматриваются векторные пространства, в частности n-мерные арифметические пространства, являющиеся абелевыми группами по сложению. *Циклических группы* образуют простейший, но основополагающий класс групп. В начале этой темы вводятся важнейшие в теории групп понятия *порядка элемента* группы и *циклической подгруппы*. Для доказательства их свойств необходимы некоторые элементарные факты о делимости целых чисел (теорема о делении с остатком, линейное представление НОД, простые числа).

В методическом плане описание циклических групп полезно получить двумя способами – непосредственно и с помощью *теоремы о гомоморфизмах групп*. Это дает простой и достаточно редкий пример *структурных теорем*, являющихся в современной алгебре желанной целью. Кроме абстрактного описания существуют три основные модели циклической группы n-го порядка: аддитивная группа классов вычетов по модулю n; мультипликативная группа комплексных корней n-й степени из 1; группа поворотов правильного n-угольника. Далее дается описание образующих элементов, подгрупп, факторгрупп, прямых произведений и гомоморфизмов циклических групп. В частности, доказывается существование и единственность подгруппы данного порядка конечной циклической группы, делящего порядок самой группы.

При изучении колец и полей, теории многочленов рассматриваются аддитивная и мультипликативная группы кольца.

В теории чисел находят применение свойства групп. Для целого ряда теоретико-числовых теорем методически оправданно и полезно наряду с прямыми «числовыми» доказательствами приводить и теоретико-групповые рассуждения. К ним относятся теоремы Эйлера и Вильсона, китайская теорема об остатках, свойство мультипликативности функции Эйлера, тождество Гаусса, существование первообразных корней по простому модулю. Групповая структура встречается при изучении числовых систем; вспомним хотя бы группу кватернионных единиц.

Рекомендуем читателю познакомиться с работами [1, 4-11], полезными для дальнейшего знакомства с темой.

В первом параграфе излагаются основные свойства циклических групп. Второй параграф посвящен применениям групп в теории чисел. Третий параграф содержит систему упражнений.

1. Основные свойства циклических групп

Для абстрактных групп будем использовать мультипликативные обозначения.

Пусть A – группа и a – ее элемент. Множество

$$(a) = \{a^k: k - \text{целое число}\}$$

целых степеней элемента a образует подгруппу группы A, называемую *циклической подгруппой, порожденной элементом a*. Действительно, для любых целых k и m имеем $a^k \cdot a^m = a^{k+m}$ и $(a^k)^{-1} = a^{-k}$.

Подгруппа (a) либо конечна, либо бесконечна. В первом случае $a^k = a^m$ для некоторых целых чисел $k < m$. Тогда $a^{m-k}=1$ при натуральном показателе $m-k$. И существует наименьшее натуральное число n с этим свойством ($a^n = 1$), называемое *порядком элемента a*. Степени $1 = a^0$, a, $a^2,\ldots, a^{n-1}$ попарно различны. Возьмем в (a) произвольный элемент a^t. Разделим t на n с остатком: $t = nq + r$, r принимает одно из значений 0, $1,\ldots, n-1$. Получаем $a^t = (a^n)^q \cdot a^r = 1^q \cdot a^r = a^r$. Итак, если a имеет (конечный) порядок n, то циклическая подгруппа (a) сама имеет порядок n:

$$(a) = \{1, a, a^2,\ldots, a^{n-1}\}.$$

Следовательно, в случае бесконечной подгруппы (a) все целые степени элемента a различны между собой и

$$(a) = \{\ldots, a^{-2}, a^{-1}, 1, a, a^2, a^3, \ldots\}.$$

В этом случае говорят, что элемент a имеет *бесконечный порядок*.

Группа A называется *циклической*, если $A = (a)$ для подходящего элемента $a \in A$, называемого *образующим* группы A. Циклические группы абелевы (коммутативны). Ясно, что в бесконечной циклической группе (a) существует еще только один образующий элемент a^{-1}. Из сказанного следует также, что любые две бесконечные циклические группы изоморфны между собой, а конечные циклические группы порядка m и n соответственно изоморфны тогда и только тогда, когда $m = n$.

Теорема 1. *Для любого элемента a конечной группы A выполняются следующие свойства:*

1) элемент a имеет конечный порядок n, являющийся делителем порядка группы A;

2) $a^k = 1$ тогда и только тогда, когда n делит k.

Доказательство. Свойство 1) вытекает из вышесказанного и *теоремы Лагранжа*: *порядок любой подгруппы конечной группы делит порядок самой группы*. Очевидно, что если порядок n элемента a делит целое число k, то $a^k = 1$. Обратно, пусть $a^k = 1$ для целого числа k. Разделим k на n с остатком: $k = nq + r$ и $0 \le r \le n - 1$. Как и выше, получаем $a^r = a^k = 1$, откуда по определению порядка элемента $r = 0$, т. е. n делит k.

Проведенный анализ показывает, что справедлива следующая *структурная теорема*, дающая полное описание циклических групп.

Теорема 2. *Любая бесконечная циклическая группа изоморфна как аддитивной группе* $\mathbf{Z}$ *всех целых чисел, так и мультипликативной числовой группе $\{2^k: k \in \mathbf{Z}\}$.*

Любая конечная циклическая группа n-го порядка изоморфна каждой из следующих групп:

аддитивной группе $\mathbf{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \ldots, \overline{n-1}\}$ *классов вычетов целых чисел по модулю n;*

мультипликативной группе $\{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}\}$ всевозможных комплексных корней n-й степени из 1, где $\varepsilon = \cos 2\pi/n + i \cdot \sin 2\pi/n$;

группе поворотов правильного n-угольника вокруг центра по часовой стрелке на углы, кратные $2\pi/n$.

Найдем все образующие циклической группы n-го порядка. Напомним, что число чисел 0, 1, ..., $n-1$, взаимно простых с n, является значением $\varphi(n)$ функции Эйлера φ.

Теорема 3. *Элемент a^k циклической группы (a) n-го порядка служит ее образующим в том и только в том случае, когда числа k и n взаимно просты. Значит, число образующих циклической группы n-го порядка равно $\varphi(n)$.*

Доказательство. Пусть a^k, $k\in \mathbf{Z}$, – какой-либо образующий циклической группы (a) n-го порядка. Тогда $(a^k)^m = a$ для соответствующего целого числа m, т. е. $a^{km-1} = 1$. Откуда $km-1 = nq$ для некоторого $q\in \mathbf{Z}$ по свойству 2) теоремы 1. А это влечет взаимную простоту чисел k и n. Обратно, пусть числа k, n взаимно просты. Тогда в силу линейной представимости НОД $1 = kx + ny$ для некоторых $x, y\in \mathbf{Z}$. Поэтому $a = a^{kx+ny} = (a^k)^x\cdot(a^n)^y = (a^k)^x\cdot 1^y = (a^k)^x$. Тем самым показано, что любой элемент циклической группы (a), являясь целой степенью a, является и целой степенью элемента a^k. Значит, a^k – образующий элемент данной циклической группы.

Выясним теперь строение подгрупп и факторгрупп произвольной циклической группы.

Теорема 4. *Всякая подгруппа циклической группы есть циклическая группа. Для любого натурального делителя d порядка n конечной циклической группы в ней существует единственная подгруппа порядка d.*

Доказательство. Пусть даны циклическая группа $A = (a)$ и ее подгруппа B. Если $B = \{1\}$ – единичная подгруппа, то $B = (1)$. Будем считать, что в B содержится элемент $a^k \neq 1$. Поскольку и $a^{-k}\in B$, то B содержит степень a с натуральным показателем $|k|$. Возьмем наименьшее натуральное число m, для которого $a^m\in B$. Тогда $B = (a^m)$ – циклическая группа. В самом деле, $(a^m)\subseteq B$. Если же $a^k\in B$, то, разделив k на m с остатком $k = md + r$, $r = 0, 1,.., m-1$, будем иметь $a^r = a^k\cdot(a^m)^{-d}\in B$, что возможно только при $r = 0$. Значит, $a^k = (a^m)^d\in (a^m)$. Поэтому и $B\subseteq (a^m)$.

Рассмотрим подробнее циклическую группу (a) n-го порядка. Пусть, как и выше, ее неединичная подгруппа B порождается элементом

a^m. Взяв n вместо k, получим $n = md$ и $B = \{1, a^m, a^{2m},..., a^{(d-1)m}\}$ – циклическая группа порядка $d = n/m$.

Зафиксируем произвольный натуральный делитель d числа n. При $m = n/d$ предыдущая группа B служит циклической подгруппой в (a) и имеет порядок d. Единственность подгруппы порядка d в (a) вытекает из уже проведенных рассуждений (каким образом?).

Теорема 5. *Гомоморфные образы, в частности факторгруппы любой циклической группы, суть циклические группы.*

Доказательство. Пусть $A = (a)$ – циклическая группа и B – ее гомоморфный образ. Последнее означает, что существует гомоморфизм f группы A на группу B. Легко видеть, что группа B порождается элементом $f(a)$: каждый элемент из B имеет вид $f(a^k) = f(a)^k$, т. е. $B = (f(a))$.

Факторгруппы $A/B = \{aB: a\in A\}$ произвольной абелевой группы A однозначно определяются ее подгруппами B. По теореме о гомоморфизмах гомоморфные образы данной группы исчерпываются с точностью до изоморфизма факторгруппами этой группы по ядрам соответствующих гомоморфизмов. Значит, порядок любого гомоморфного образа произвольной конечной группы делит порядок самой группы.

Получим теперь описание циклических групп, основанное на теореме о гомоморфизмах групп. Возьмем произвольную циклическую группу $A = (a)$ и рассмотрим отображение f: $\mathbf{Z} \to A$, заданное формулой $f(k) = a^k$ для всех целых k. Получаем гомоморфизм f аддитивной группы $\mathbf{Z}$ на мультипликативную группу A. По теореме о гомоморфизмах группа A изоморфна факторгруппе циклической группы $\mathbf{Z}$ по подгруппе, равной по теореме 4 подгруппе $n\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Z}$ для некоторого неотрицательного целого числа n: $A \cong \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Если $n = 0$, то $A \cong \mathbf{Z}$. А если $n > 0$, то $A \cong \mathbf{Z}_n$ – аддитивной группе классов вычетов целых чисел по модулю n.

Определим далее понятие прямого произведения групп. Возьмем мультипликативно записанные группы A и B. На прямом произведении $A \times B = \{(a, b): a\in A, b\in B\}$ этих множеств зададим покоординатную операцию умножения пар: $(a, b)\cdot(c, d) = (ac, bd)$. Очевидно, что введенная операция ассоциативна, пара $(1, 1)$ служит единичным элементом, а пара (a^{-1}, b^{-1}) есть элемент, обратный паре (a, b). В результате получаем группу $<A \times B, \cdot>$, называемую *прямым произведением групп* A и B.

Теорема 6. *Для того чтобы прямое произведение двух конечных циклических групп порядков m и n было циклической группой, необходимо и достаточно, чтобы числа m и n были взаимно простыми.*

Доказательство. Пусть даны циклические группы (a) и (b) порядков m и n соответственно. Докажем сначала *необходимость*. Предположим, что $(a)\times(b)$ – циклическая группа с образующим (a^s, b^t). Тогда $(a^s, b^t)^i = (a, 1)$ и $(a^s, b^t)^j = (1, b)$ для некоторых целых чисел i, j. Имеем равенства $a^{si} = a$, $b^{ti} = 1$, $a^{sj} = 1$ и $b^{tj} = b$. Откуда по пункту 2) теоремы 1 числа $si-1$ и sj кратны m, а числа ti и $tj-1$ кратны n. Если бы числа m, n не были взаимно простыми, то у них нашелся бы общий простой делитель p. Но тогда числа $si-1$, sj и $tj-1$ также делятся на p, и последовательно получаем: s не делится на p, j кратно p и 1 делится на p, что невозможно. Следовательно, НОД$(m, n) = 1$.

Достаточность. Пусть m и n – взаимно простые числа. Тогда $mu + nv = 1$ для некоторых целых чисел u, v. Покажем, что элемент (a, b) является образующим группы $(a)\times(b)$. Так как

$$(a^x, b^y) = (a, 1)^x \cdot (1, b)^y \text{ при любых целых } x \text{ и } y,$$

то достаточно убедиться, что элементы $(a, 1)$ и $(1, b)$ являются целыми степенями (a, b). Учитывая равенство $mu + nv = 1$, получаем

$$(a, b)^{nv} = (a^{1-mu}, b^{nv}) = (a, 1) \text{ и } (a, b)^{mu} = (a^{mu}, b^{1-nv}) = (1, b).$$

В силу теоремы 2 теорема 6 имеет следующую *аддитивную форму*:

$$\mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n \cong \mathbf{Z}_{mn} \Leftrightarrow \text{НОД}(m, n) = 1.$$

Теорема 7. *Существует ровно d = НОД(m, n) гомоморфизмов циклической группы m-го порядка в циклическую группу n-го порядка. Каждый такой гомоморфизм определяется переводом зафиксированного образующего первой группы в один из элементов подгруппы порядка d второй группы.*

Данную теорему можно вывести из теоремы 4.

Возьмем мультипликативную группу $\mathbf{Z}_n^*$ всех обратимых элементов кольца $\mathbf{Z}_n$. Заметим, что равенство $\bar{a} = \bar{b}$ в кольце $\mathbf{Z}_n$ эквивалентно сравнению $a \equiv b \pmod n$.

Теорема 8. *Порядок группы $\mathbf{Z}_n^*$ равен $\varphi(n)$.*

Доказательство. Достаточно показать, что обратимость класса вычетов $\bar{a}$ в кольце $\mathbf{Z}_n$ равносильна взаимной простоте чисел a и n. Если $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{1}$, то $ab\equiv 1 \pmod n$, откуда и следует взаимная простота чисел a и n. Если же a и n взаимно просты, то $ab+nc=1$ для некоторых целых чисел b, c. Переходя к классам вычетов по модулю n, получаем

$$\bar{1}=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{n}\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{0}\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\bar{b}.$$

2. Применения групп к числам

Рассмотрим применения групп к доказательству некоторых важнейших теорем элементарной теории чисел.

Теорема 9 (*теорема Эйлера*). *Для любых взаимно простых целого числа a и натурального числа n выполняется сравнение*

$$a^{\varphi(n)}\equiv 1 \pmod n.$$

Доказательство вытекает из теорем 1 и 8.

В качестве следствия получается *малая теорема Ферма*: для любых простого числа p и целого числа a, не делящегося на p, имеем

$$a^{p-1}\equiv 1 \pmod p.$$

Из вышесказанного следует алгебраический *критерий простоты натурального числа n*: n – простое $\Leftrightarrow$ кольцо $\mathbf{Z}_n$ – поле. Другую характеризацию дает

Теорема 10 (*теорема Вильсона*). *Натуральное число $n\neq 1$ является простым тогда и только тогда, когда справедливо следующее сравнение:*

$$(n-1)!+1\equiv 0 \pmod n.$$

Доказательство. Очевидно, что для составного числа n данное сравнение неверно. При $n=2$ сравнение верно. Пусть дано нечетное простое число n. В группе $\mathbf{Z}_n^*=\{\bar{1},\ \bar{2},\ \ldots,\ \overline{n-1}\}$ только последний элемент имеет порядок 2. Поэтому все нееденичные элементы, кроме $\overline{n-1}$, разбиваются на пары взаимно обратных элементов. Следовательно, перемножая все элементы этой абелевой группы, мы получим $\overline{n-1}=-\bar{1}$. Переходя от классов вычетов по модулю n к целым числам, будем иметь требуемое сравнение.

Теорема 11 (*тождество Гаусса*). *Любое натуральное число n равно сумме $\varphi(1)+\ldots+\varphi(d)+\ldots+\varphi(n)$, взятой по всем натуральным делителям d числа n.*

Доказательство. Рассмотрим циклическую группу A порядка n. Каждый ее элемент имеет порядок d, делящий n (теорема 1), и порождает единственную циклическую подгруппу B в A порядка d (теорема 4). Поэтому все элементы порядка d лежат в B и служат ее образующими, число которых равно $\varphi(d)$ по теореме 3. Остается заметить, что для любого натурального делителя d числа n в группе A существует хотя бы один элемент порядка d (снова теорема 4).

Сейчас мы немного отступим от характера этого параграфа, применив теоретико-числовую теорему 11 к доказательству следующего важного общеалгебраического результата.

Теорема 12. *Мультипликативная группа любого конечного поля является циклической.*

Доказательство. Пусть A – мультипликативная группа конечного поля P, содержащая n элементов. Надо показать, что в A найдется элемент n-го порядка. Для любого натурального делителя d числа n через $\psi(d)$ обозначим число всех элементов группы A, имеющих порядок d. Учитывая теорему 1, заключаем: $n = \psi(1) + \ldots + \psi(d) + \ldots + \psi(n)$, где суммирование ведется по всем натуральным делителям d числа n.

Возьмем такое число d и произвольный элемент $a \in A$ порядка d, если он найдется. Элемент a порождает циклическую подгруппу B порядка d в A, каждый элемент которой удовлетворяет равенству $x^d = 1$ (см. теорему 1). Хорошо известно, что уравнение $x^d = 1$ имеет в поле P не более d решений. Поэтому все элементы порядка d из A лежат в B – их $\varphi(d)$ по теореме 3. Значит, $\psi(d)$ равно $\varphi(d)$ или 0. Сопоставление полученных неравенств $\psi(d) \leq \varphi(d)$ с равенством $\sum\psi(d) = n$ и тождеством Гаусса показывает, что $\psi(d) = \varphi(d)$ для любого натурального делителя d числа n. Так, $\psi(n) = \varphi(n)$, что и означает существование в A элемента порядка n.

В частности, мультипликативная группа поля $\mathbf{Z}_p$, p – простое число, есть циклическая группа порядка p–1. Напомним, что целое число a, взаимно простое с натуральным числом n, называется *первообразным корнем по модулю n*, если $\varphi(n)$ является наименьшим натуральным показателем k, для которого верно сравнение $a^k \equiv 1 \pmod n$. Теорема 8 показывает, что существование первообразного корня по модулю n эквивалентно цикличности мультипликативной группы $\mathbf{Z}_n^*$. Вот полный список модулей n, по которым существуют первообразные корни: 2, 4, 8, p^k и $2p^k$, где p пробегает множество все нечетных простых чисел, а k – натуральных.

Итак, теоремы 12 и 3 дают следующий результат:

Теорема 13. *По любому простому модулю p существует ровно φ(p-1) первообразных корней (с точностью до сравнимости по модулю p).*

Далее докажем теорему о *мультипликативности функции Эйлера* и китайскую теорему об остатках.

Теорема 14. $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ *для любых взаимно простых натуральных чисел m и n.*

Доказательство проводится в одну строчку:

$$\varphi(mn)=|\mathbf{Z}_{mn}^*|=|(\mathbf{Z}_m\times\mathbf{Z}_n)^*|=|\mathbf{Z}_m^*\times\mathbf{Z}_n^*|=|\mathbf{Z}_m^*|\cdot|\mathbf{Z}_n^*|=\varphi(m)\varphi(n).$$

Здесь мы применили теорему 8 и аддитивную форму теоремы 6. Конечно же, необходимо понимание прямого произведения колец, определение которого вполне аналогично определению прямого произведения групп. Знак $|\,|$ обозначает число элементов соответствующего конечного множества.

Теорема 15 (*китайская теорема об остатках*). *Если m, n – взаимно простые натуральные числа, то для любых целых чисел a и b найдется целое число, сравнимое с числом a по модулю m и сравнимое с числом b по модулю n.*

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы. Требуется доказать разрешимость системы двух сравнений $x \equiv a \pmod m$ и $x \equiv b \pmod n$. Рассмотрим элемент $(\bar{a}, \bar{b})$ аддитивной группы $\mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n$. По теореме 6 эта группа является циклической с образующим $(\bar{1}, \bar{1})$. Поэтому $(\bar{a}, \bar{b}) = k(\bar{1}, \bar{1}) = (\bar{k}, \bar{k})$ для некоторого неотрицательного целого числа $k < mn$. Остается перейти к сравнениям по модулям m и n соответственно.

3. Упражнения

1. Какие из следующих групп являются циклическими? И почему? Какие из них изоморфны?

Группы $\mathbf{Z}_5^*, \mathbf{Z}_6^*, \mathbf{Z}_7^*, \mathbf{Z}_8^*, \mathbf{Z}_9, \mathbf{Z}_{10}^*, \mathbf{Z}_{12}^*$.

Прямое произведение групп $\mathbf{Z}_6$ и $\mathbf{Z}_{15}$, $\mathbf{Z}_7$ и $\mathbf{Z}_{16}$, $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Z}_n$.

Аддитивная группа $\mathbf{Q}$ всех рациональных чисел.

Мультипликативная группа всех положительных рациональных чисел.

Группа подстановок третьей степени.

Группа кватернионных единиц.

2. Найдите порядки элементов перечисленных в упр. 1 групп.

3. Найдите подгруппы и факторгруппы этих групп.

4. Что представляют собой аддитивная и мультипликативная группы кольца всех квадратных матриц с элементами из кольца $\mathbf{Z}_n$? Сначала рассмотрите случаи n = 2, 3, 4, 5.

5. Почему конечная группа простого порядка является циклической?

6. Докажите, что мультипликативная группа бесконечного поля не может быть циклической (см. [2], лемма 2).

7. Докажите, что аддитивная группа и мультипликативная группа одного и того же поля не изоморфны друг другу.

8. Дайте строгое обоснование единственности подгруппы порядка d в теореме 4 (конец доказательства).

9. Чему равно произведение всех элементов циклической группы порядка n? Какой отсюда можно сделать вывод для циклических групп четного порядка?

10. Чему равно произведение всех образующих циклической группы n-го порядка?

11. Найдите квадрат произведения всех элементов конечной абелевой группы.

12. Какие циклические группы имеют ровно две факторгруппы?

13. Сколько факторгрупп имеет конечная (бесконечная) циклическая группа?

14. Покажите, что для любого элемента a конечной группы n-го порядка $a^n = 1$.

15. Пусть элементы a, b некоторой группы имеют конечные порядки m и n. Докажите, что в случае $ab = ba$ элемент ab имеет конечный порядок, равный НОК(m, n). Верно ли это в общем случае?

16. Пусть a, b, c – элементы произвольной группы. Проверьте, что следующие пары элементов имеют одинаковые порядки: a и a^{-1}; ab и ba; aba^{-1} и b; abc и bca. Всегда ли это верно для элементов abc и acb?

17. Если в группе все неединичные элементы имеют порядок 2, то она абелева. Докажите.

18. Если в группе существует единственный элемент порядка 2, то он коммутирует с каждым элементом данной группы. Докажите.

19. Покажите, что любая конечная группа четного порядка содержит элемент порядка 2.

20. Заметим, что по *теореме Коши* для каждого простого делителя p порядка произвольной конечной группы в ней существует элемент порядка p. Попытайтесь доказать теорему Коши для конечных абелевых групп.

21. В любой конечной группе нечетного порядка каждый элемент служит квадратом некоторого однозначно определенного ее элемента. В чем здесь дело?

22. Дайте другое доказательство достаточности в теореме 6, рассмотрев естественный гомоморфизм аддитивной группы $\mathbf{Z}_{mn}$ в прямое произведение аддитивных групп $\mathbf{Z}_m$ и $\mathbf{Z}_n$.

23. Обобщите теорему 6 на несколько сомножителей.

24. Выведите теорему 7 из теоремы 4.

25. Восстановите детали в доказательстве теоремы 14.

26. Изоморфны ли группы $\mathbf{Z}_{12} \times \mathbf{Z}_{72}$ и $\mathbf{Z}_{18} \times \mathbf{Z}_{48}$?

27. Опишите все групповые гомоморфизмы $\mathbf{Z}$ в $\mathbf{Z}_n$, и наоборот.

28. Рассмотрим множество всех гомоморфизмов группы $\mathbf{Z}_m$ в группу $\mathbf{Z}_n$. На нем определяется групповая операция поточечного сложения. Каким образом? Исследуйте получившуюся группу.

29. Что представляет собой группа всех автоморфизмов (изоморфизмов на себя) группы $\mathbf{Z}_n$, рассматриваемых с операцией композиции? Аналогичный вопрос для группы $\mathbf{Z}$.

30. В каком еще виде можно сформулировать малую теорему Ферма?

31. Установите сравнение $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod p$ для любых простого числа p и целых чисел a, b.

32. Исходя из предыдущего сравнения, докажите малую теорему Ферма.

33. Имеет ли место теорема, обратная малой теореме Ферма?

34. Докажите, что справедливы следующие характеризации простоты натурального числа $p > 1$: a) $p \mid ab$ влечет $p \mid a$ или $p \mid b$ для любых целых чисел a, b; b) кольцо $\mathbf{Z}_p$ является полем.

35. Найдите все первообразные корни 24-й степени из 1.

36. Как формулируется китайская теорема об остатках для нескольких модулей? Докажите ее.

37. Верна ли китайская теорема об остатках для бесконечного множества модулей?

38. Сформулируйте и докажите теорему, обратную китайской теореме об остатках.

39. Выведите из китайской теоремы об остатках достаточность в теореме 6.

Литература

1. *Алексеев В.Б.* Теорема Абеля в задачах и решениях. – М.: Наука, 1976.
2. *Вечтомов Е.М.* О свойствах полутел // Математический вестник педвузов Волго-Вятского региона. 2001. Вып. 3. – С. 11-20.
3. *Вечтомов Е.М., Ковязина Е.М.* Циклические группы и числа// Математический вестник педвузов Волго-Вятского региона. 2001. Вып. 3. – С. 79-87.
4. *Гроссман И., Магнус В.* Группы и их графы. – М.: Мир, 1971.
5. *Калужнин Л.А.* Введение в общую алгебру. – М.: Наука, 1973.
6. *Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.* Основы теории групп. – М.: Наука, 1982.
7. *Ляпин Е.С., Айзенштат А.Я., Лесохин М.М.* Упражнения по теории групп. – М.: Наука, 1967.
8. *Начала теории групп*: Методическая разработка / Авт.-сост.: Е. М. Вечтомов, В. П. Матвеев. – Киров: КГПИ, 1990.
9. *Никулин В.В., Шафаревич И.Р.* Геометрии и группы. – М.: Наука, 1983.
10. *Сборник задач по алгебре* / Под ред. А.И. Кострикина. – М.: Наука, 1987.
11. *Серр Ж.-П.* Курс арифметики. – М.: Мир, 1972.

V. Упорядоченные множества

Никто не может изгнать нас из рая,
который создал нам Кантор.
Давид Гильберт

В этом приложении будет рассмотрена порядковая структура. Сразу отметим, что первоначально с упорядоченными множествами и решетками можно познакомиться по работам [4, 6, 17, 19, 27, 36]. Основные книги - это [5, 8, 16, 20, 21, 24, 25, 27, 38, 42].

1. Конечные упорядоченные множества

Определение 1. *Упорядоченным множеством* называется непустое множество X вместе с заданным на нем бинарным *отношением порядка* $\le$, которое по определению:

1) рефлексивно: $a \le a$;

2) транзитивно: $a \le b \le c \Rightarrow a \le c$;

3) антисимметрично: $a \le b \le a \Rightarrow a = b$ (для любых $a, b, c \in X$).

Элементы a и b упорядоченного множества называются *сравнимыми*, если $a < b$, $a = b$ или $b < a$, и *несравнимыми* в противном случае. Знаки $<$, $\ge$ и $>$ имеют обычный смысл. Упорядоченное множество $\langle X, \ge\rangle$ *двойственно* к упорядоченному множеству $\langle X, \le\rangle$, которое в свою очередь двойственно к $\langle X, \ge\rangle$.

Определение 2. Упорядоченное множество называется *линейно упорядоченным*, или *цепью*, если любые два его элемента сравнимы. Если любые два элемента упорядоченного множества несравнимы, то оно называется *антицепью*.

Примером цепи служит множество $\mathbf{R}$ всех действительных чисел с обычным порядком или любое его непустое подмножество с индуцированным порядком. Этот и другие важнейшие примеры упорядоченных множеств приведены в таблице на с. 282: булеан $\mathbf{B}(X)$, $\langle \mathbf{N}, |\rangle$, упорядоченные множества подпространств векторного пространства и числовых функций $[0, 1]^{[a,b]}$.

Определим некоторые исходные понятия теории упорядоченных множеств.

Пусть $\langle X, \le\rangle$ – произвольное упорядоченное множество. Элемент $a \in X$ называется *наибольшим* (*наименьшим*), если $x \le a$ ($a \le x$) для всех элементов $x \in X$. Элемент $a \in X$ называется *максимальным* (*минимальным*), когда в X нет элементов $x > a$ $(x < a)$.

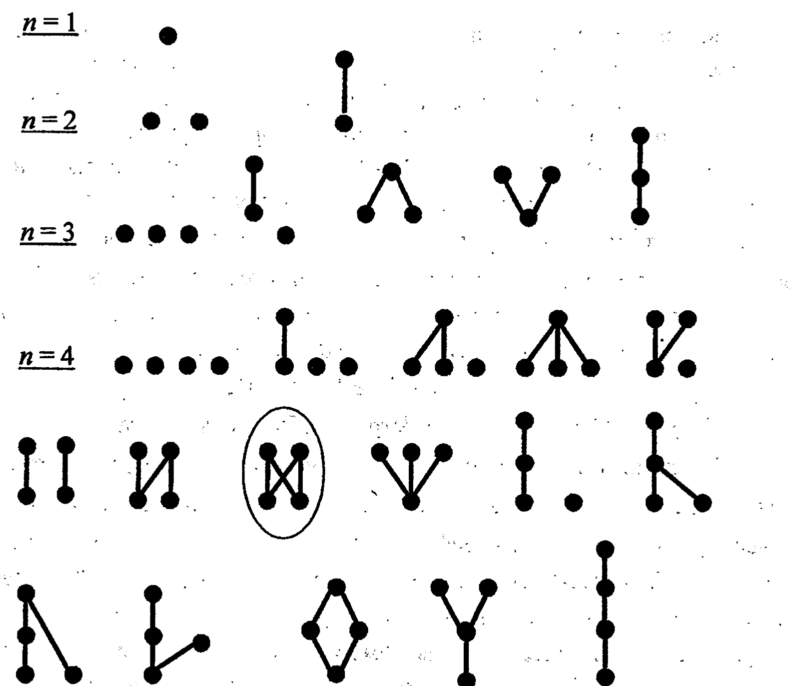
Возьмем непустое подмножество Y в X. Элемент $x \in X$ называется *верхней гранью* (*нижней гранью*) множества Y, если $y \leq x$ $(x \leq y)$ для любого $y \in Y$. Если множество всех верхних граней множества Y непусто и имеет наименьший элемент, то этот элемент называется *точной верхней гранью* множества Y и обозначается $\sup Y$. *Двойственным* образом определяется понятие *точной нижней грани* $\inf Y$.

Определение 3. Отображение $f\colon X \to Y$ упорядоченных множеств называется *изотонным*, если $a \leq b$ влечет $f(a) \leq f(b)$ для любых $a, b \in X$. Изотонная биекция $f\colon X \to Y$ упорядоченных множеств называется их (*порядковым*) *изоморфизмом*, если обратное отображение f^{-1} также изотонно. Упорядоченные множества, между которыми существует изоморфизм, называются (*порядково*) *изоморфными*.

Говорят, что элемент $b \in X$ *покрывает* элемент $a \in X$, если $a < b$ и в X нет элементов x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$ (находящихся между a и b).

Диаграмму Хассе любого конечного упорядоченного множества X можно построить следующим образом. Берем в X множество X_1 всех минимальных элементов и изображаем их точками, расположенными горизонтально (это первый уровень). Затем в упорядоченном множестве $X \setminus X_1$ снова рассматриваем множество X_2 всевозможных минимальных элементов, помещая их на второй горизонтальный уровень над первым. Далее повторяем процедуру: берем упорядоченное множество $X \setminus (X_1 \cup X_2)$ и т. д. В результате упорядоченное множество X разбивается на уровни $X_1, X_2, \ldots, X_n$, являющиеся антицепями. Если элемент a покрыт элементом b, то соединяем их отрезком, идущим вверх. Элемент $a \in X$ находится на k-м уровне $(2 \leq k \leq n)$ тогда и только тогда, когда начинающиеся с a убывающие цепи в X имеют наибольшую длину $k-1$ (т. е. самая длинная ломаная с наибольшим элементом a имеет $k-1$ звено). Элементы последнего уровня X_n максимальны, но не обязаны исчерпывать множество всех максимальных элементов в X.

Построим диаграммы Хассе упорядоченных множеств, имеющих $n \leq 4$ элементов.



Длиной конечной цепи X называется число $|X|-1$ ее элементов, уменьшенное на 1. *Длиной* $l(X)$ конечного упорядоченного множества X называется наибольшая из длин его цепей. Наибольшее число элементов антицепей конечного упорядоченного множества X называется его *шириной* $w(X)$.

Теорема 1. *Для любого конечного упорядоченного множества X справедливо неравенство $|X| \leq (l(X)+1)\cdot w(X)$.*

Доказательство. Рассмотрим диаграмму Хассе конечного упорядоченного множества X. Ясно, что число уровней диаграммы равно $l(X)+1$. Каждый уровень является антицепью в X, поэтому число его элементов не превосходит ширины $w(X)$. Поскольку различные уровни как множества попарно не пересекаются, то получаем искомое неравенство.

Применим эту теорему к решению одной задачи XIII Московской математической олимпиады.

Задача. Пусть числа 1, 2, 3, ..., 101 выписаны в ряд в произвольном порядке. Докажите, что в данной последовательности можно вычеркнуть 90 чисел так, чтобы оставшиеся 11 чисел были расположены в порядке возрастания либо в порядке убывания.

Решение. На множестве $X = \{1, 2, 3, \ldots, 101\}$ введем новый порядок, соответствующий данному расположению чисел. Положим m n в том и только том случае, когда $m < n$ и m расположено раньше n. В результате получим упорядоченное множество $\langle X, \leq\rangle$. В нем возрастающие подпоследовательности служат цепями, а убывающие подпоследовательности – антицепями. По теореме 1

$$(l(X)+1)\cdot w(X) \geq |X| = 101,$$

откуда $l(X)+1 \geq 11$ или $w(X) \geq 11$. Что и требовалось доказать.

Упражнения. 1. Если $\langle X, \leq\rangle$ – упорядоченное множество, то отношение $<$ на X транзитивно и *антирефлексивно*: для любого $a \in X$ неверно, что $a < a$. Антирефлексивное транзитивное отношение на множестве X называется отношением *строгого порядка* на X. Обратно, если $<$ – произвольный строгий порядок на множестве X, то $\langle X, \leq\rangle$ – упорядоченное множество. Тем самым между порядками и строгими порядками на любом множестве X существует естественное взаимно однозначное соответствие. Докажите эти утверждения.

2. В терминах разбиений множества опишите все симметричные транзитивные отношения на произвольном непустом множестве.

3. Докажите **принцип двойственности** для упорядоченных множеств: если некоторое предложение об упорядоченных множествах верно для всех упорядоченных множеств, то верно и *двойственное предложение*, получающееся из данного заменой отношения $\leq$ на отношение $\geq$ (и обратно). Приведите примеры двойственных понятий и двойственных теорем.

4. Покажите, что любой порядок $\leq$ на конечном множестве X является пересечением нескольких линейных порядков. Наименьшее число таких линейных порядков называется *размерностью* упорядоченного множества $\langle X, \leq\rangle$. Отметим, что для любого натурального числа n существует конечное упорядоченное множество размерности n [22, пункт 10.4]. Например, можно взять булеан n-элементного множества.

5. Сколько различных отношений порядка можно задать на n-элементном множестве при $n \leq 4$?

Замечание (см. [5]). С точностью до порядкового изоморфизма существуют 63 пятиэлементных упорядоченных множества (нарисуйте их диаграммы), 318 – шестиэлементных, 2045 – семиэлементных. Число упорядочений n-элементного множества равно 3 при n=2, 19 при n=3, 219 при n=4, 4321 при n=5, 130023 при n=6, 6129859 при n=7.

2. Упорядоченные множества с условием минимальности

Говорят, что упорядоченное множество X удовлетворяет *условию минимальности*, если каждое его непустое подмножество Y имеет хотя бы один минимальный элемент.

Определение 4. Линейно упорядоченное множество с условием минимальности называется *вполне упорядоченным множеством*.

Хорошо известны следующие характеризации произвольного упорядоченного множества с условием минимальности X (см. [27]):

1) в X нет бесконечных строго убывающих цепей;

2) X обладает принципом *нетеровой индукции*: для всякого свойства P элементов множества X, если им обладают все минимальные элементы из X и из выполнения P для всех элементов, меньших произвольного $x \in X$, следует выполнение P для x, то свойством P обладают все элементы множества X.

Условие индуктивности 2) обобщает как математическую индукцию на натуральном ряде **N**, так и трансфинитную индукцию на произвольном вполне упорядоченном множестве.

Любое непустое подмножество упорядоченного множества с условием минимальности само обладает условием минимальности относительно индуцированного порядка. Каждый элемент упорядоченного множества с условием минимальности больше некоторого его минимального элемента или равен ему.

Пусть $(X_i)_{i \in I}$ – непустое семейство упорядоченных множеств, в которых порядок обозначен обычно $\leq$. *Прямым произведением* этого семейства упорядоченных множеств называется упорядоченное множество $\prod_{i \in I} X_i = \{(x_i) \mid x_i \in X_i\}$ с поточечным отношением порядка: $(x_i) \leq (y_i)$ означает, что $x_i \leq y_i$ для всех $i \in I$.

Предложение 1. *Прямое произведение семейства $(X_i)_{i \in I}$ упорядоченных множеств является упорядоченным множеством с условием минимальности тогда и только тогда, когда все X_i удовлетворяют условию минимальности, причем почти все из них являются антицепями.*

Доказательство. Пусть X – прямое произведение данного семейства упорядоченных множеств. Ясно, что если X есть упорядоченное множество с условием минимальности, то и любой его сомножитель обладает этим же свойством. Если же среди X_i бесконечно много неантицепей, то каждое из них содержит двухэлементную цепь, прямое произведение которых не может быть упорядоченным множеством с условием минимальности. Поэтому достаточно показать, что прямое произведение двух упорядоченных множеств с условием минимальности X и Y само удовлетворяет условию минимальности. Для этого возьмем убывающую цепь элементов (x_n, y_n) в произведении $X \times Y$. Цепи (x_n) в X и (y_n) в Y обрываются, следовательно, обрывается и цепь $((x_n; y_n))$.

Мы хотим обобщить одну теорему Диксона [18, с. 164]. Для этого дадим следующее определение.

Определение 5. Упорядоченное множество с условием минимальности назовем упорядоченным множеством с *конечным условием минимальности*, если любое его непустое подмножество имеет лишь конечное число минимальных элементов.

Всякое непустое подмножество упорядоченного множества с конечным условием минимальности также удовлетворяет конечному условию минимальности.

Предложение 2. *Для произвольного упорядоченного множества X равносильны следующие утверждения:*

1) X обладает конечным условием минимальности;

2) X – упорядоченное множество с условием минимальности, не имеющее бесконечных антицепей;

3) любое бесконечное множество в X содержит бесконечную строго возрастающую цепь.

Доказательство. Очевидно, что утверждения 1) и 2) эквивалентны, а условие 3) влечет 2). Пусть X удовлетворяет утверждению 1). Возьмём в X бесконечное множество Y. Оно содержит только конечное множество минимальных элементов $x_1,\ldots,x_k$, и любой другой его элемент больше одного из них. Поэтому в Y существует бесконечно много элементов, больших одного из этих минимальных, скажем, x_1. Повторяя с новым бесконечным множеством аналогичное рассуждение, получим элемент $y_1 \in Y$, больший x_1. Продолжая данный процесс неограниченно, мы и получим в Y бесконечную строго возрастающую последовательность элементов.

Заметим, что приведенные рассуждения представляют собой метод Кенига, примененный им при доказательстве знаменитой леммы Кенига, один из вариантов которой может быть сформулирован так:

Лемма Кенига. *Если в упорядоченном множестве нет бесконечных цепей и нет бесконечных антицепей, то оно конечно.*

Отметим также, что доказательство эквивалентности утверждений 2) и 3) приписывается Капланскому [5, с. 237, упр. 7].

Теорема 2. *Прямое произведение любого непустого семейства неодноэлементных упорядоченных множеств есть упорядоченное множество с конечным условием минимальности тогда и только тогда, когда это семейство конечно, а все сомножители также обладают конечным условием минимальности.*

Доказательство. В силу предложений 1 и 2 достаточно показать, что прямое произведение двух упорядоченных множеств X и Y с конечным условием минимальности не содержит бесконечных антицепей. Предположим от противного, что в $X \times Y$ существует счетная антицепь A. Множество первых координат элементов из A (как и множество их вторых координат) бесконечно – в противном случае получили бы бесконечное множество пар с одной и той же первой координатой, что дало бы бесконечную антицепь соответствующих вторых координат в Y. По предложению 2, среди первых координат элементов-пар из A существует бесконечная цепь $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$.

Далее рассмотрим соответствующее множество $\{(x_n, y_n)\}$ в A. Как и выше, среди бесконечного множества элементов y_n найдется бесконечная строго возрастающая подпоследовательность. В результате получим в A сравнимые элементы. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Следствие 1 (теорема Диксона). *Прямое произведение конечного числа цепей неотрицательных целых чисел есть упорядоченное множество с конечным условием минимальности.*

Замечание. В силу принципа двойственности все сказанное здесь верно и для упорядоченных множеств с соответствующими условиями максимальности. Упорядоченные множества, в которых одновременно выполняются условия минимальности и максимальности, – это те и только те упорядоченные множества, в которых все цепи конечны. Поэтому в силу леммы Кенига получаем, что *всякое упорядоченное множество, одновременно удовлетворяющее конечным условиям минимальности и максимальности, конечно.*

Следствие 2. *Прямое произведение конечного числа цепей не содержит бесконечных антицепей тогда и только тогда, когда все эти цепи либо одновременно удовлетворяют условию минимальности (т. е. являются вполне упорядоченными множествами), либо одновременно удовлетворяют условию максимальности.*

3. Упорядоченные множества с диаграммой Хассе

Рассматриваются характеристические свойства упорядоченных множеств, имеющих диаграмму Хассе. Указано, относительно каких операций замкнут класс всех упорядоченных множеств с диаграммой Хассе.

Определение 6. Скажем, что упорядоченное множество X *имеет диаграмму Хассе* (или *с диаграммой Хассе*), если в нем строгий порядок $<$ определяется *отношением покрытия*: для любых a, b из X $a< b$ тогда и только тогда, когда в X существует конечная последовательность элементов $x_0 = a$, x_1, …, $x_n = b$, такая, что x_{i+1} покрывает x_i для каждого $i= 0, 1, \ldots, n$-1. При этом будем говорить, что *а подчинено b*.

Далее, *замкнутым интервалом* упорядоченного множества X называется множество $\{x \in X\colon a \leq x \leq b\}$ при $a \leq b$. Локально конечные упорядоченные множества имеют диаграмму Хассе. Только одноэлементные упорядоченные множества являются цепями и антицепями одновременно.

Выше диаграмма Хассе конечных упорядоченных множеств строилась вверх, исходя их минимальных элементов. Но для конечного упорядоченного множества диаграмму Хассе можно построить и двойственным образом (вниз), отправляясь от максимальных элементов. В конечном упорядоченном множестве X любой элемент $\leq$ некоторого максимального элемента и $\geq$ некоторого минимального элемента. Значит, каждый элемент в X, не являющийся ни минимальным, ни максимальным, лежит между подходящими минимальным и максимальным элементами из X. Для бесконечного упорядоченного множества с диаграммой Хассе это, вообще говоря, неверно. Например, цепь $\mathbf{Z}$ всех целых чисел с естественным отношением порядка имеет диаграмму Хассе, но в ней нет наименьшего и наибольшего элементов. Как же строить диаграмму Хассе для таких X?

Пусть X – произвольное упорядоченное множество с диаграммой Хассе. Возьмем в X какую-нибудь максимальную антицепь X_0, существование которой обеспечивает лемма Цорна. Для каждого элемента $a \in X \backslash X_0$ существует элемент $b \in X_0$, такой, что a подчинено b либо b подчинено a. Элементы из X, большие (меньшие) некоторых элементов из X_0, образуют упорядоченное множество X^+ (соответственно, X^-). Одно (или оба) из этих множеств может быть пустым. Если $X^- = \varnothing$, то X имеет диаграмму Хассе, строящуюся вверх относительно множества X_0 минимальных элементов. Если же $X^+ = \varnothing$, то X обладает диаграммой Хассе, строящейся вниз с множеством X_0 максимальных элементов.

Теперь предположим, что оба множества X^- и X^+ непусты. Тогда X разбивается на три класса X^-, X_0, X^+. Действительно, множества X^- и X^+ не пересекаются – в противном случае нашлись бы элементы $a \in X$ и $b, c \in X_0$, для которых $b < a < c$, откуда следовала бы сравнимость различных элементов b и c из X_0, что невозможно. Но возможно, что некоторый элемент из X^- напрямую покрывается элементом из X^+. Упорядоченное множество X^+ распадается на уровни $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, множество которых конечно или бесконечно. А упорядоченное множество X^- двойственным образом распадается на уровни $X_{-1}, X_{-2}, \ldots, X_{-m}, \ldots$.

Пример. Диаграмма Хассе конечного упорядоченного множества может быть построена различными способами. Возьмем упорядоченное множество $X = \{a, b, c, d, e, f\}$, в котором $a < e \leq f$, $b < e$ и $c < f$. Первый способ рассмотрен нами вначале – начинаем с множества минимальных элементов $X_1 = \{a, b, c, d\}$, затем находим $X_2 = \{e\}$ и $X_3 = \{f\}$ (см. рис. 1).

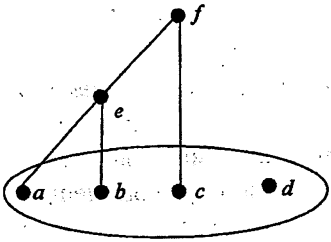


Рис. 1

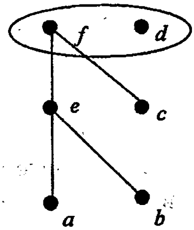


Рис. 2

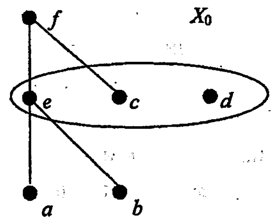


Рис. 3

Двойственный способ дает множество максимальных элементов $\{d, f\}$ и более низкие уровни $\{c, e\}$, $\{a, b\}$ (рис. 2). Наконец, беря максимальную антицепь $X_0 = \{c, d, e\}$, получаем $X_1 = \{f\}$ и $X_{-1} = \{a, b\}$ (рис. 3).

В X существует еще две максимальных антицепи: $\{a, b, c, d\}$ и $\{d, f\}$, но начиная с них мы получим уже рассмотренные диаграммы Хассе (рис. 1 и 2). Для конечных упорядоченных множеств первые два способа построения диаграмм Хассе являются частными случаями третьего способа, когда мы начинаем с максимальных антицепей – множества всех минимальных элементов или множества всех максимальных элементов соответственно.

Непустое подмножество упорядоченного множества X называется *ограниченным сверху* (*ограниченным снизу*), если оно имеет в X верхнюю грань (соответственно, нижнюю грань), и просто *ограниченным*, если оно ограничено и сверху, и снизу. Если $a < b$ – покрытие в цепи X, то элемент a называют *предшествующим* элементу b, в свою очередь элемент b называют *последующим* за a.

Рассмотрим теперь понятие сечения. Теория сечений была создана Дедекиндом для построения действительных чисел как сечений цепи **Q**. *Сечением* (A, B) (обозначается также $A \mid B$) цепи X называется разбиение X на два класса A и B ($A \cap B = \varnothing$ и $A \cup B = X$), при котором $a < b$ для любых $a \in A$ и $b \in B$. При этом множество A называется *нижним классом* сечения (A, B), а B – *верхним классом*. Элемент c цепи X называется *рубежом*, или *границей*, ее сечения (A, B), если $a \le c \le b$ при любых $a \in A$ и $b \in B$. Сечения могут иметь 0, 1 или 2 рубежа.

Сечение (A, B) цепи X, не имеющее ни одного рубежа, называется *щелью*: в нижнем классе A нет наибольшего элемента, а в верхнем классе B нет наименьшего элемента. Сечение (A, B) называется *дедекиндовым*, если оно имеет ровно один рубеж: либо в A существует наибольший элемент, либо в B – наименьший. Сечение (A, B) с двумя рубежами называется *скачком*: A обладает наибольшим элементом и B обладает наименьшим элементом.

Определение 7. Цепь X называется *дискретным упорядоченным множеством*, если любое сечение в X является скачком.

Очевидно, в произвольном дискретном упорядоченном множестве любой ненаибольший элемент имеет последующий элемент, а любой ненаименьший элемент обладает предыдущим элементом. Непустые подмножества цепи $\mathbf{Z}$ дискретны. С точностью до порядкового изоморфизма ими исчерпываются все дискретные упорядоченные множества (теорема из пункта 4).

Предложение 3. *Произвольная цепь имеет диаграмму Хассе тогда и только тогда, когда она дискретна.*

Доказательство. Достаточность вытекает из только что сказанного. Пусть цепь X имеет диаграмму Хассе. Возьмем в X произвольное сечение (A, B). Если оно не является скачком, то никакой элемент из A не подчинен никакому элементу из B; противоречие.

Из определений и леммы 1 вытекает, что для упорядоченных множеств свойство иметь диаграмму Хассе и свойство дискретности *наследственны*, т. е. сохраняются при переходе к непустым подмножествам.

Теорема 3. *Для любого упорядоченного множества $\langle X, \leq \rangle$ эквивалентны следующие условия:*

1) *X имеет диаграмму Хассе;*
2) *X обладает диаграммой Хассе, построенной (как и выше) на основе произвольной максимальной антицепи;*
3) *каждая цепь в X имеет диаграмму Хассе;*
4) *все цепи в X дискретны;*
5) *все ограниченные цепи в X конечны.*

Доказательство. Импликация $1) \Rightarrow 2)$ обоснована выше. Поскольку свойство иметь диаграмму Хассе наследственно, то получаем импликацию 2) $\Rightarrow$ 3). По лемме 2 условия 3) и 4) эквивалентны. Лемма 1 дает импликацию 4) $\Rightarrow$ 5).

Наконец, пусть X удовлетворяет условию 5). Возьмем в X элементы $a < b$. Если они не образуют покрытие, то между элементами a и b существует элемент c_1. Если хотя бы одно из звеньев цепочки $a < c_1 < b$ не является покрытием, то в нее можно добавить новый элемент c_2. Продолжая этот процесс, мы через конечное число шагов получим цепочку покрытий, так как в противном случае получили бы бесконечную ограниченную цепь (c_n) в X, что противоречило бы условию. Следовательно, элемент a подчинен элементу b, что завершает доказательство теоремы.

Отображение f: $X \to Y$ упорядоченных множеств назовем *строго изотонным*, если $a \leq b$ равносильно $f(a) \leq f(b)$ для любых $a, b \in X$. Замкнутость некоторого класса K упорядоченных множеств относительно изотонных (или строго изотонных) отображений означает, что если $X \in K$ и существует изотонное отображение X на упорядоченное множество Y, то и $Y \in K$. Легко видеть, что класс упорядоченных множеств с диаграммой Хассе замкнут относительно строго изотонных отображений, но не замкнут относительно произвольных изотонных отображений (так, всякая несчетная антицепь взаимно однозначно и, очевидно, изотонно отображается на любую цепь этой же мощности).

Прямое произведение семейства упорядоченных множеств определяется стандартно. В [13] дано необходимое и достаточное условие, при котором прямое произведение непустого семейства упорядоченных множеств обладает конечным условием минимальности. Прямое произведение любого семейства антицепей снова является антицепью.

Предложение 4. *Прямое произведение непустого семейства (X_i) упорядоченных множеств имеет диаграмму Хассе тогда и только тогда, когда все X_i имеют диаграмму Хассе и почти все из них (кроме конечного числа) являются антицепями.*

Доказательство. Пусть прямое произведение X непустого семейства упорядоченных множеств X_i имеет диаграмму Хассе. Каждое X_i имеет диаграмму Хассе, ибо оно изоморфно подмножеству в X, в котором все координаты, кроме i-й, фиксированы. Предположим от противного, что существует бесконечно много X_i, не являющихся антицепями. Тогда выберем в каждом таком X_i пару $a_i < b_i$, а в каждой антицепи X_i – элемент $a_i = b_i$. Получаем $(a_i) < (b_i)$ в X, но элемент (a_i) не подчинен элементу (b_i).

Прямое произведение упорядоченного множества с диаграммой Хассе на любую антицепь имеет диаграмму Хассе. Поэтому для доказательства достаточности надо только показать, что прямое произведение двух упорядоченных множеств с диаграммой Хассе имеет диаграмму Хассе. Пусть X, Y – произвольные упорядоченные множества с диаграммой Хассе и $(a, b) < (c, d)$ в их прямом произведении $X{\times}Y$. Если, скажем, $a = c$, то подчинение $b < d$ в Y индуцирует подчинение $(a, b) < (a, d)$ в $X{\times}Y$. Поэтому можно считать, что существуют цепочки покрытий $a < a_1 < \ldots < a_{m-1} < c$ и $b < b_1 < \ldots < b_{n-1} < d$ в X и в Y соответственно. Но тогда цепочка

$$(a, b) < (a_1, b) <\ldots < (a_{m-1}, b) < (c, b) < (c, b_1) < \ldots (c, b_{n-1}) < (c, d)$$

определяет подчинение $(a, b) < (c, d)$ в $X{\times}Y$. Предложение доказано.

Из сказанного выше и предыдущего предложения следует

Теорема 4. *Класс всевозможных упорядоченных множеств с диаграммой Хассе наследственен, замкнут относительно строго изотонных отображений и замкнут относительно конечных прямых произведений.*

Заметим также, что класс всех дискретных упорядоченных множеств наследственен, замкнут относительно изотонных отображений и замкнут относительно лексикографического умножения на конечные цепи.

4. Линейно упорядоченные множества

Дадим обзор исходных понятий теории линейно упорядоченных множеств, называемых также цепями. Цепи образуют, казалось бы, простейший класс упорядоченных множеств. Но цепи сами устроены достаточно сложно, имеют тонкие свойства, выражаемые, скажем, через понятие сечения. Они играют важнейшую роль в упорядоченных множествах. Так, через цепи определяются такие характеристики упорядоченных множеств, как длина и размерность. Понятие цепи позволяет определить основные числовые системы как чисто порядковые структуры. Существенно используются разные виды цепей в теории множеств, в современной алгебре, в общей топологии, в функциональном анализе, в математической логике, в дискретной математике [1-3, 5-8, 11, 14-17, 20, 21, 25, 28, 33, 34, 37, 40].

Цель данной работы – обратить внимание преподавателей и студентов на этот важный и интересный раздел современной математики. Мы приводим целый ряд основных результатов о цепях и их свойствах. В частности, цепи рассматриваются как топологические пространства с интервальной топологией.

Мы приводим небольшой список литературы, поскольку обширнейшая библиография содержится в обзорах [14, 26] и сборниках обзоров [29-32], которые при желании можно найти в библиотеках. Для лучшего понимания материала цепи полезно наглядно представлять себе и изображать как подмножества горизонтальной числовой прямой.

Основные понятия

Пусть X – произвольная цепь. Если $a<b$ в X и не существует элемента $c \in X$ с условием $a<c<b$, то соотношение $a<b$ называется *покрытием*, элемент a – *предыдущим* для b и b – *последующим* за a. Элемент цепи, у которого нет предыдущего элемента, называется *предельным*. Цепь называется *плотной*, если в ней нет покрытий; в плотных цепях между любыми элементами $a<b$ лежит бесконечно много элементов. Подмножество A цепи X называется *плотным в X*, если между любыми элементами $a<b$ из X обязательно найдется элемент из A. Цепь называется *полной сверху* (*полной снизу*), если всякое ее непустое подмножество имеет sup (соответственно, inf). *Полные* цепи суть цепи, полные сверху и снизу одновременно. Цепь называется *условно полной сверху*, если всякое ее непустое ограниченное сверху множество имеет sup. Двойственным образом определяется понятие *условно полной снизу* цепи, а также понятие *условно полной* цепи.

Упражнение 6. Докажите, что произвольная цепь полна тогда и только тогда, когда она полна сверху и имеет наименьший элемент. Сформулируйте двойственное утверждение.

Упражнения. 7. Докажите, что понятия условно полной сверху цепи, условно полной снизу цепи и условно полной цепи равносильны.

8. Проверьте, что любая цепь является дистрибутивной решеткой.

9. Убедитесь, что изотонная биекция одной цепи на другую есть изоморфизм данных цепей.

Сформулируем теперь три классических результата.

Теорема 5. *Всякое упорядоченное множество можно линейно доупорядочить, вообще говоря, различными способами. При этом исходный порядок равен пересечению содержащих его линейных порядков.*

Данная теорема доказывает существование у каждого упорядоченного множества X *размерности*, определяемой как наименьшая из мощностей множеств линейных порядков на X, дающих в пересечении исходный порядок.

Теорема 6. *Любая счетная плотная цепь изоморфна либо цепи Q всех рациональных чисел (если в ней нет ни наименьшего, ни наибольшего элементов), либо цепи всех неотрицательных рациональных чисел (если она имеет наименьший элемент, но не имеет наибольшего элемента), либо цепи всех неположительных рациональных чисел (если имеет наибольший, но не имеет наименьшего элемента), либо цепи всех рациональных чисел отрезка $[0, 1]$ (если обладает наименьшим и наибольшим элементами).*

Следствие 1. *Всякая счетная цепь изоморфно вкладывается в цепь Q.*

Следствие 2. *Каждая бесконечная плотная цепь содержит подцепь, изоморфную Q.*

Из теоремы 2 по признаку полноты Воота вытекает следующая теоретико-модельная

Теорема 7. *Теория первого порядка плотных цепей без наименьшего и наибольшего элементов полна, т. е. любая замкнутая формула данной теории либо сама доказуема, либо доказуемо ее отрицание.*

Упражнение 10. Для любой цепи X справедливы следующие утверждения: плотность X равносильна отсутствию скачков в ней; условная полнота X эквивалентна отсутствию щелей в X. Проверьте.

Для цепей (в целом, для решеток) имеет место *теорема Тарского-Дэвиса* (1955 год).

Теорема 8. *Для того чтобы цепь была полной, необходимо и достаточно, чтобы любое изотонное отображение данной цепи в себя имело неподвижную точку.*

Примеры и свойства порядковых понятий изложены в [5-7, 10, 15, 16, 19-22, 24, 25, 27, 28, 36, 37]. Теорема 5 впервые доказана Шпильрайном в 1930 году; доказывается на основе аксиомы выбора [42]. Теорема 6 принадлежит Кантору; ее доказательство можно найти в [5, с. 262], [20, с. 222], а также в [17]. Доказательство теоремы 7, впервые доказанной Ленгфордом, содержится, например, в [23], теорема 4.1.3. Доказательство теоремы 8 имеется в [27, теорема 3 из § 3 и теорема 15 из § 4].

Вполне упорядоченные множества

Важнейший класс цепей образуют вполне упорядоченные множества. Они играют основополагающую роль в теории кардинальных и ординальных чисел, на их базе проводятся доказательства, определения и построения по трансфинитной индукции.

Цепь **N** всех натуральных чисел и конечные цепи дают примеры вполне упорядоченных множеств. Любое непустое подмножество вполне упорядоченного множества вполне упорядочено. Ясно также, что произвольное вполне упорядоченное множество условно полно.

Упражнения. 11. Найдите два других полных порядка на **N**.

12. Докажите, что цепь является вполне упорядоченным множеством тогда и только тогда, когда в ней нет бесконечных (строго) убывающих последовательностей.

13. Докажите, что бесконечное вполне упорядоченное множество, имеющее единственный предельный элемент (наименьший), изоморфно цепи **N**.

Из *аксиомы выбора* (Цермело, 1904 год) выводится следующая

Теорема 9 (*теорема Цермело*, 1904 год). *Всякое непустое множество можно вполне упорядочить.*

Ясно, что и из теоремы Цермело следует аксиома выбора. Имеется много разнообразных утверждений, эквивалентных аксиоме выбора. Из них, наряду с самой аксиомой выбора и теоремой Цермело, наиболее часто встречаются и применяются в математике следующие два предложения.

Теорема 10 (*принцип максимальности Хаусдорфа*, 1914 год [34]). *Любая цепь произвольного упорядоченного множества содержится в некоторой его максимальной цепи.*

Теорема 11 (*лемма Цорна*, 1935 год). *Если в упорядоченном множестве каждая цепь ограничена сверху, то оно имеет максимальный элемент.*

Подцепь Y цепи X называется *конфинальной* в X, если для любого $x \in X$ существует такой $y \in Y$, что $x \leq y$. В теории упорядоченных множеств бывает полезно следующее утверждение (например, при доказательстве достаточности в теореме 4), также вытекающее из аксиомы выбора.

Теорема 12. *Всякая цепь содержит конфинальное вполне упорядоченное подмножество.*

Начальным интервалом цепи X называется множество $\{x \in X: x < a\}$, где a – некоторый элемент из X. Имеет место *теорема о сравнении вполне упорядоченных множеств.*

Теорема 13. *Для любых вполне упорядоченных множеств X и Y выполняется одно и только одно из следующих утверждений:*

1) *X и Y изоморфны;*
2) *X изоморфно начальному интервалу множества Y;*
3) *Y изоморфно начальному интервалу множества X.*

Тот факт, что осуществляется один из указанных случаев, доказывается по трансфинитной индукции. А тот факт, что одновременно никакие два из этих трех случаев не выполняются, вытекает из следующего утверждения:

Упражнение 14. Если f – произвольное изоморфное отображение вполне упорядоченного множества X в себя, то $x \leq f(x)$ для всех $x \in X$.

Элементы вполне упорядоченных множеств называют *трансфинитами* и/или ординалами, а также трансфинитными или ординальными числами. Теоремы 9 и 13 позволяют развить теорию *мощностей* (кардиналов) множеств.

Формулировку аксиомы выбора и доказательства теорем 9-13 можно найти в [27]. Теория кардинальных и порядковых чисел излагается в [1, 2, 7, 8, 17, 20, 21, 27, 34].

Линейно упорядоченные пространства

Зададим интервальную топологию на произвольной цепи X. Для этого наряду с начальными интервалами в X определяются *финальные* *интервалы* – это множества $\{x \in X\colon a < x\}$, $a \in X$, и *открытые интервалы* $(a, b) = \{x \in X\colon a < x < b\}$ с концами $a \le b$ из X.

Определение 8. Пусть $\langle X, \le\rangle$ – цепь. Открытые, начальные и финальные интервалы и X образуют базу топологии на X, называемой *интервальной топологией*. Множество X с интервальной топологией на нем называется *линейно упорядоченным пространством*.

Теорема 14. *Любое линейно упорядоченное пространство (хаусдорфово) наследственно нормально.*

Теорема 15. *Компактность линейно упорядоченного пространства X эквивалентна полноте цепи X.*

Следствие 1. *Условная полнота произвольной цепи эквивалентна компактности всех ее отрезков.*

Следствие 2. *Вполне упорядоченное множество компактно в интервальной топологии тогда и только тогда, когда оно обладает наибольшим элементом.*

Напомним, что элементы $a \le b$ цепи X определяют *отрезок* $[a, b] = \{x \in X\colon a \le x \le b\}$ в X с концами a и b. Очевидно, что пересечение любых двух пересекающихся отрезков цепи также является отрезком.

Теорема 16. *Связность линейно упорядоченного пространства X равносильна тому, что цепь X плотна и условно полна.*

Упражнение 15. Покажите, что для дискретности линейно упорядоченного пространства X необходимо и достаточно, чтобы каждый ненаименьший элемент цепи X имел предыдущий элемент, а каждый ненаибольший ее элемент имел последующий элемент.

Топологическое пространство называется *сепарабельным*, если оно обладает счетным всюду плотным подмножеством.

Упражнение 16. Сепарабельность линейно упорядоченного пространства X эквивалентна существованию в цепи X счетного плотного в X подмножества. Докажите. Такую цепь также будем называть *сепарабельной*.

Упражнение 17. Докажите, что топология подпространства Y линейно упорядоченного пространства, вообще говоря, сильнее интервальной топологии цепи Y. Приведите соответствующий пример.

Интервальная топология такая же естественная, как и метрическая. Разнообразные факты о линейно упорядоченных пространствах содержатся в задачах к главам книги [37]. Доказательство теоремы 14

(Биркгоф, 1948 год) имеется в [1, с. 183] и в [5, с. 315]. Теорема 15 (Кёниг, Хаар, 1910 год) приведена с доказательством в [1, с. 248] и в [5, с. 315]. Доказательство теоремы 16 можно найти в [5, с. 316].

Дискретные цепи

Выясним строение дискретных цепей.

Дискретные цепи удовлетворяют достаточному условию упражнения 10 и как линейно упорядоченные пространства также дискретны. Однако, если взять цепь, состоящую из нескольких расположенных друг за другом экземпляров цепи **Z**, то получим недискретную цепь, удовлетворяющую указанному достаточному условию.

Теорема 17. *Каждая дискретная цепь X изоморфна одной из следующих подцепей цепи **Z** целых чисел:*

отрезку $\{1, 2, ..., n\}$, когда X конечно или имеет наименьший и наибольший элементы;

*натуральному ряду **N**, когда X обладает наименьшим элементом, но не имеет наибольшего элемента;*

упорядоченному множеству всех отрицательных целых чисел, когда X обладает наибольшим элементом, но не имеет наименьшего элемента;

*самой цепи **Z**, когда X не имеет ни наименьшего, ни наибольшего элементов.*

Доказательство. Предположим сначала, что дискретная цепь X имеет наименьший элемент a_1. Если X не одноэлементна, то для a_1 существует последующий элемент a_2. Продолжая процесс, получим цепочку A покрытий $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$. Если X конечно и имеет n элементов, то эта цепочка обрывается на n-м месте и, стало быть, цепь X изоморфна отрезку $\{1, 2, \ldots, n\}$ натуральных чисел. Если X бесконечна, то A изоморфна **N**. Легко видеть, что X совпадает с цепочкой A: в самом деле, если множество $B = X \setminus A$ непусто, то получаем скачок (A, B), откуда следует, что цепь A имеет наибольший элемент, что невозможно.

Случай, когда цепь X имеет наибольший элемент, но не имеет наименьшего элемента, двойственен только что рассмотренному случаю: X изоморфна цепи всех отрицательных целых чисел.

Наконец, если цепь X не имеет ни наименьшего, ни наибольшего элементов, то начиная с любого ее элемента a_0, мы получим (как и выше) цепочку $\ldots < a_{-m} < \ldots < a_{-2} < a_{-1} < a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$, совпадающую с X и изоморфную $\mathbf{Z}$.

Упражнение 18. Докажите, что цепь дискретна тогда и только тогда, когда между любыми ее элементами $a < b$ существует конечная цепь с концами a и b, каждая пара соседних элементов которой есть покрытие.

Непрерывные цепи

Понятие непрерывности числовой прямой может быть выражено по-разному. Рассмотрим соответствующие подходы.

Цепь называется *полной по Дедекинду*, если все ее сечения дедекиндовы. Цепь называется *непрерывной по Вейерштрассу*, если она условно полна и плотна.

Далее, непустое множество S отрезков цепи назовем *центрированным*, если пересечение любых двух из них снова принадлежит S. Например, каждое непустое множество вложенных друг в друга отрезков произвольной цепи будет центрированным. Скажем, что цепь удовлетворяет *принципу Кантора*, если любое центрированное множество ее отрезков имеет непустое пересечение (общую точку). Плотную цепь, удовлетворяющую принципу Кантора, назовем *непрерывной по Кантору*.

Теорема 18. *Для произвольной цепи X эквивалентны следующие условия:*

1) *X непрерывна по Вейерштрассу;*
2) *X полна по Дедекинду;*
3) *X непрерывна по Кантору;*
4) *линейно упорядоченное пространство X связно;*
5) *цепь X плотна, и все отрезки в X компактны.*

Доказательство. Эквивалентность условий 1), 4) и 5) отмечена в теореме 12 и следствии 1 теоремы 11. Поэтому достаточно доказать цепочку импликаций 1) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 1).

1)$\Rightarrow$3). Пусть цепь X непрерывна по Вейерштрассу и S – некоторое центрированное множество ее отрезков. Множество A всех левых концов отрезков из S ограничено сверху правым концом каждого такого отрезка. Получаем, что $\sup A$ принадлежит любому отрезку из S.

3)$\Rightarrow$2). Пусть цепь X непрерывна по Кантору и (A, B) – произвольное сечение X. Рассмотрим множество всевозможных отрезков

$[a, b]$, где $a \in A$ и $b \in B$. Оно центрированное. Значит, существует элемент $c \in X$, лежащий в каждом из наших отрезков. Очевидно, c есть рубеж сечения (A, B).

2)⇒1). Пусть цепь X полна по Дедекинду и Y – какое-то непустое ограниченное сверху подмножество X. Возьмем множество B всех верхних граней множества Y и положим $A = X \backslash B$. Сечение (A, B) имеет единственный рубеж, являющийся $\sup A$.

Определение 9. Цепь, удовлетворяющую одному из эквивалентных условий предыдущей теоремы, назовем просто *непрерывной.*

Теорема 19. *Всякую цепь можно вложить в непрерывную цепь с сохранением всех имеющихся в ней точных граней (inf и sup).*

Теорема 20. *Всякая сепарабельная непрерывная цепь без наименьшего и наибольшего элементов изоморфна цепи* $\boldsymbol{R}$.

Следствие. *Любая сепарабельная цепь изоморфно вкладывается в цепь* $\boldsymbol{R}$.

Упражнение 19. Опишите с точностью до изоморфизма все сепарабельные непрерывные цепи.

Покажем, что в теореме 20 условие сепарабельности существенно. Для этого возьмем декартов квадрат $\mathbf{R}^2$ числовой прямой с лексикографическим порядком: $(a; b) < (c; d)$ означает, что $a < c$ или $b < d$ в случае $a = c$. Полученная цепь непрерывна, не имеет наименьшего и наибольшего элементов, но не сепарабельна.

Упражнение 20. Докажите, что лексикографическое произведение двух непрерывных цепей снова будет непрерывной цепью.

Теорема 19 доказана еще Дедекиндом в 1881 году (см. [20, с. 218]). Доказательство теоремы 20 имеется в [1, с. 56] (см. также [17]).

Приложение к числовым системам

Классические числовые объекты **N**, **Z**, **Q** и **R** мы хорошо знаем интуитивно (**N**), содержательно (скажем, **R** как множество бесконечных десятичных дробей, см. [7]) или аксиоматически. Для **N** существует аксиоматика Пеано. Системы **Z** и **Q** – это минимальные кольцо и поле, содержащие в качестве подсистем **N** и **Z** соответственно. В теории числовых систем **R** обычно определяется как непрерывное линейно упорядоченное поле.

Оказывается, основные числовые системы можно определить только на порядковой основе: как цепи с дополнительными свойствами. С учетом теорем 17, 6 и 20 (соответственно) получаются следующие определения.

Определение 10. *Системой N натуральных чисел* называется (любая) дискретная цепь, имеющая наименьший элемент, но не имеющая наибольшего элемента.

Определение 11. *Системой Z целых чисел* называется дискретная цепь без наименьшего и наибольшего элементов.

Определение 12. *Системой Q рациональных чисел* называется счетная плотная цепь без наименьшего и наибольшего элементов.

Определение 13. *Системой R действительных чисел* называется сепарабельная непрерывная цепь, не имеющая ни наименьшего, ни наибольшего элемента.

Замечание. Отправляясь от этих «цепных» определений, на **N**, **Z**, **Q** и **R** можно ввести арифметические операции и развить их стандартную теорию. На **N** операции сложения и умножения определяются индуктивно. А **Z** идентифицируется как «двусторонний натуральный ряд». Далее, **Q** отождествляется с линейно упорядоченным полем частных полученного кольца **Z**, а **R** – с линейно упорядоченным полем сечений **Q**.

В заключение сформулируем еще несколько предложений.

Упражнение 21. Докажите, что для бесконечного упорядоченного множества X равносильны условия:

1) X изоморфно **N**;

2) X – вполне упорядоченное множество, каждое ограниченное сверху подмножество которого конечно;

3) X – вполне упорядоченное множество, каждое ограниченное сверху подмножество которого имеет наибольший элемент.

См. также Приложение I.

Упражнение 22. Убедитесь в том, что цепь изоморфна **Z** тогда и только тогда, когда все ее финальные интервалы изоморфны **N**, а все начальные интервалы антиизоморфны **N**.

Упражнение 23. Почему каждый открытый интервал цепи **Q** изоморфен **Q**?

Упражнение 24. Докажите, что для цепи X без наименьшего и наибольшего элементов эквивалентны утверждения:

1) X изоморфна $\mathbf{R}$;

2) X плотна, сепарабельна, и любая последовательность вложенных отрезков в X имеет непустое пересечение.

Упражнение 25. Докажите, что линейно упорядоченное поле P изоморфно полю $\mathbf{R}$ с обычным порядком тогда и только тогда, когда P архимедово и все фундаментальные последовательности в нем являются сходящимися.

4. Решетки

Порядковое и алгебраическое определения решетки

Определение 14. Упорядоченное множество, в котором любые два элемента имеют точные нижнюю и верхнюю грани, называется *решеткой*.

На любой решетке L зададим бинарные операции сложения $+$ и умножения $\cdot$ формулами:

$$a+b = \sup(a, b) \text{ и } ab = a\cdot b = \inf(a, b). \qquad (*)$$

Получаем алгебру $\langle L, +, \cdot\rangle$, в которой выполняются следующие четыре пары тождеств:

1) $a+b = b+a$, $ab = ba$ (коммутативность операций);
2) $(a+b)+c = a+(b+c)$, $(ab)c = a(bc)$ (ассоциативность);
3) $a+a = a$, $aa = a$ (идемпотентность);
4) $a+ab = a$, $a(a+b) = a$ (законы поглощения).

Упражнение 26. Докажите, что полученная алгебра $\langle L, +, \cdot\rangle$ действительно обладает свойствами 1)-4).

Определение 15. Алгебра $\langle L, +, \cdot\rangle$ с двумя бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, удовлетворяющими условиям 1)-4) как аксиомам, называется *решеткой*.

Определение 14 является порядковым определением решетки, а определение 15 – алгебраическим.

Пусть дана решетка $\langle L, +, \cdot\rangle$ в алгебраическом смысле. Введем на L бинарное отношение $\le$ по формуле:

$$a \le b \text{ означает } a+b = b \text{ (эквивалентно, } ab = a\text{)}. \quad (**)$$

Упражнение 27. Проверьте, что введенное отношение $\le$ является порядком на L, причем, $\sup(a, b) = a+b$ и $\inf(a, b) = ab$ для любых $a, b \in L$. Следовательно, определение (✱✱) превращает решетку $\langle L, +, \cdot \rangle$ в решетку $\langle L, \le \rangle$ в порядковом смысле.

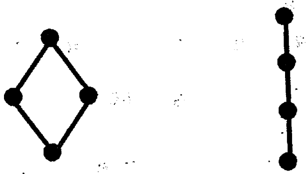
Упражнение 28. Покажите, что переходы (✱) и (✱✱) осуществляют взаимно однозначное соответствие между решетками в смысле определений 14 и 15 (на любом множестве L).

Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что любая решетка есть алгебраическая система $\langle L, +, \cdot, \rangle$, обладающая как порядком $\le$, так и операциями $+$ и $\cdot$, которые связаны соотношениями (✱), (✱✱) и 1)-4).

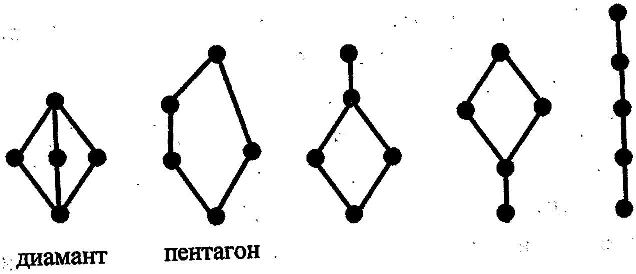
Если из m-элементной решетки ($m \ge 3$) выбросить наименьший и наибольший элементы, то получим (m-2)-элементное упорядоченное множество. Таким образом можно построить все конечные решетки.

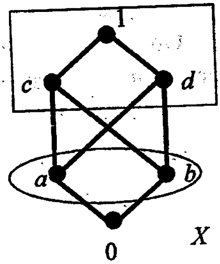
Приведем диаграммы Хассе всех решеток мощности $m = 4$ и 5. (При $m \le 3$ получаем одно-, двух- и трехэлементные цепи.)

<u>$m = 4$</u>



<u>$m = 5$</u>





Шестиэлементные решетки получаются из четырехэлементных упорядоченных множеств добавлением «новых» наименьшего и наибольшего элементов. При этом мы имеем 15 решеток из 16 «возможных». Дело в том, что выделенное на с. 393 четырехэлементное множество дает изображенное справа упорядоченное множество X, не являющееся решеткой. Его элементы a, b не обладают точной верхней гранью в X, так как множество их верхних граней $\{c, d, 1\}$ не имеет наименьшего элемента.

Упражнения. 29. Постройте диаграммы Хассе всех 15 шестиэлементных решеток.

30. Докажите, что в решетках неравенства можно почленно складывать и умножать: $a \le b$ и $c \le d$ влекут $a+c \le b+d$ и $ac \le bd$.

31. Убедитесь, что в любой решетке выполняется тождество

$$(ab+ac)(ab+bc) = ab.$$

32. Покажите, что в произвольной решетке верны неравенства

$$ab+ac \le a(ab+c) \le a(b+c).$$

33. Наименьший элемент решетки обычно называется *нулем* и обозначается 0, а наибольший элемент решетки часто называется *единицей* и обозначается 1. Докажите, что нулевой элемент 0 (единичный элемент 1) произвольной решетки, если он существует, определяется любым из тождеств $0a = 0$, $0+a = a$ (соответственно: $1a = a$, $1+a = 1$).

Как и для любых однотипных алгебр, для решеток естественным образом определяются понятия подрешетки, конгруэнции, факторрешетки, гомоморфизма и прямого произведения.

Полные решетки и неподвижные точки

Определение 16. *Полной решеткой* называется упорядоченное множество, в котором любое непустое подмножество имеет точные верхнюю и нижнюю грани.

Любая полная решетка L является решеткой с $0 = \inf L$ и $1 = \sup L$.

Укажем основные **примеры** полных решеток:

1) числовые отрезки $[r, s]$, где $r, s \in \mathbf{R}$ и $r < s$;

2) булеаны $\mathbf{B}(M)$ для произвольных множеств M;

3) конечные решетки;

4) решетка $\langle \mathbf{N}_0; | \rangle$ всех неотрицательных целых чисел с отношением делимости $|$;

5) решетка всех подалгебр любой алгебры относительно $\subseteq$;

6) решетка всевозможных конгруэнций на произвольной алгебре с отношением включения;

7) решетка всех открытых (замкнутых) множеств произвольного топологического пространства.

Говорят, что отображение $f\colon X \to X$ множества X в себя имеет *неподвижную точку* $x_0 \in X$, если $f(x_0) = x_0$. В теории упорядоченных множеств изучаются неподвижные точки изотонных отображений упорядоченных множеств и решеток. В дополнение к теореме 8 докажем *теорему Тарского о неподвижной точке*:

Теорема 21. *Всякое изотонное отображение f любой полной решетки L в себя имеет хотя бы одну неподвижную точку.*

Доказательство. Рассмотрим в L подмножество

$$A = \{x \in L\colon x \le f(x)\}.$$

Положим $x_0 = \sup A$. Поскольку $0 \in A$, то $\sup A$ существует. Покажем, что $f(x_0) = x_0$. Так как $x \le x_0$ для всех $x \in A$, то и $x \le f(x) \le f(x_0)$ для всех $x \in A$. Поэтому $f(x_0)$ – верхняя грань множества A, и $x_0 \le f(x_0)$. Откуда $f(x_0) \le f(f(x_0))$, т. е. $f(x_0) \in A$. Значит, и $f(x_0) \le x_0$.

Заметим, что x_0 является наименьшей неподвижной точкой отображения f. Наибольшая неподвижная точка x_1 отображения f получается двойственным способом:

$$x_1 = \inf B \quad \text{для } B = \{x \in L\colon x \ge f(x)\}.$$

Множество $F(f)$ всех неподвижных точек отображения f совпадает с пересечением $A \cap B$.

Упражнение 34. Покажите, что множество $F(f)$ не обязано быть подрешеткой решетки L.

Отметим также, что для решеток верна теорема, обратная теореме Тарского (Дэвис, 1955 год).

Упражнение 35. В классе упорядоченных множеств теорема Дэвиса неверна. Приведите соответствующий пример.

Теорема 22 (С. Р. Когаловский, 1982 год). *Для того чтобы подмножество F полной решетки L было множеством всех неподвижных точек некоторого изотонного отображения $f\colon L \to L$, т. е. $F = F(f)$, необходимо и достаточно, чтобы F было полной решеткой относительно индуцированного порядка.*

Подчеркнем, что теоремы о неподвижных точках занимают важное место в современной математике (см. [35]).

Упражнение 36. Докажите, что любое непрерывное отображение числового отрезка в себя имеет неподвижную точку. Это частный случай знаменитой теоремы Брауэра.

Дистрибутивные решетки

Определение 17. Решетка называется *дистрибутивной*, если в ней выполняется тождество $a(b+c) = ab+ac$.

Класс всех дистрибутивных решеток, как и класс всех решеток, образует многообразие алгеб с двумя бинарными операциями. Более широкое многообразие образуют *модулярные* решетки, в которых выполняется модулярное тождество (вместо дистрибутивного тождества) $a(ab+c) = ab+ac$.

Теорема 23. *Произвольная решетка дистрибутивна тогда и только тогда, когда любая ее подрешетка не изоморфна ни пентагону, ни диаманту.*

Наряду с этой характеризацией существуют другие полезные **критерии** дистрибутивности произвольной решетки:

1. Дистрибутивность решетки эквивалентна выполнению в ней двойственного дистрибутивного закона: $(a+b)(a+c) = a+bc$.

2. Решетка дистрибутивна тогда и только тогда, когда для любых ее элементов a, b и c имеем: $a+b = a+c$ и $ab = ac$ влекут $b = c$.

3. Дистрибутивность решетки равносильна выполнению в ней тождества: $(a+b)(a+c)(b+c) = abc$.

Покажем, например, что дистрибутивная решетка L удовлетворяет свойству 2. Пусть $a+b = a+c$ и $ab = ac$ для некоторых a, b, c из L. Тогда

$$b = b(a+b) = b(a+c) = ab+bc = ac+bc = c(a+b) = c(a+c) = c.$$

Упражнение 37. Докажите критерии дистрибутивности 1-3.

Сформулируем важные понятия идеала и фильтра решетки.

Непустое подмножество I решетки L называется ее *идеалом*, если I замкнуто относительно операции сложения ($a, b \in I \Rightarrow a+b \in I$) и выдерживает умножение на элементы решетки ($a \in I, b \in L \Rightarrow ab \in I$). Второе условие означает, что вместе с каждым своим элементом a идеал должен содержать и все меньшие a элементы решетки. Идеал

$$aL = (a] = \{x \in L: x \leq a\}$$

решетки L называется *главным идеалом* в L, порожденным элементом $a \in L$.

Дуальным образом определяется фильтр. Непустое подмножество F решетки L называется ее *фильтром*, если оно замкнуто относительно операции умножения ($a, b \in F \Rightarrow ab \in F$) и выдерживает прибавление элементов решетки ($a \in F, b \in L \Rightarrow a+b \in F$). Последнее условие означает, что вместе с каждым своим элементом a фильтр содержит и все большие a элементы решетки. Фильтр решетки L

$$[a) = \{x \in L: x \geq a\}, a \in L,$$

называется *главным фильтром* в L, порожденным элементом a.

Предположим, что ρ – такая конгруэнция на решетке L, что факторрешетка L/ρ имеет нуль. Прообраз нуля при каноническом гомоморфизме $L \to L/\rho$ называется *ядерным идеалом* решетки L. Двойственным образом определяется *ядерный фильтр* решетки.

Упражнение 38. Дайте определение ядерного фильтра. Докажите, что ядерный идеал (ядерный фильтр) любой решетки является ее идеалом (соответственно, фильтром).

Теорема 24. *Дистрибутивность произвольной решетки L эквивалентна тому, что любой ее идеал (равносильно, фильтр) является ядерным идеалом (соответственно, ядерным фильтром) некоторой конгруэнции на L.*

Собственный идеал I (фильтр F) решетки L называется *простым*, если $ab \in I$ влечет $a \in I$ или $b \in I$ (из $a+b \in F$ следует $a \in F$ или $b \in F$). Напомним, что подмножество множества L называется собственным, если оно не совпадает с самим L.

Обозначим через $\mathbf{D} = \{0, 1\}$ двухэлементную цепь.

Упражнение 39. Покажите, что для любого подмножества I произвольной решетки L равносильны следующие свойства:

1) I – простой идеал решетки L;
2) I – идеал, а $L \setminus I$ – фильтр решетки L;
3) $L \setminus I$ – простой фильтр в L;
4) I есть прообраз нуля 0 при гомоморфизме L на $\mathbf{D}$;
5) $L \setminus I$ – прообраз 1 при гомоморфизме L на $\mathbf{D}$.

Важнейшим свойством дистрибутивных решеток является тот факт, что в них простые идеалы разделяют элементы.

Предложение 5. *В произвольной дистрибутивной решетке L для любых идеала I и фильтра F, не пересекающегося с I, существует простой идеал P, для которого $I \subseteq P$ и $P \cap F = \varnothing$. При этом простой фильтр $L \setminus P$ содержит фильтр F и не пересекается с идеалом I.*

Доказательство. Рассмотрим множество M всех тех идеалов J дистрибутивной решетки L, которые содержат данный идеал I и не пересекаются с данным фильтром F. Получаем упорядоченное множество $\langle, \subseteq \rangle$, замкнутое относительно объединений цепей идеалов. По лемме Цорна в M существует максимальный элемент P. Докажем, что идеал P – простой. Для этого достаточно показать, что ab не лежит в P при любых $a, b \notin P$. Пусть $a, b \in L \setminus P$. Тогда идеалы $aL+P$ и $bL+P$ строго содержат P. В силу максимальности идеала P они пересекаются с фильтром F. Поэтому $ax+p$, $by+q \in F$ при некоторых $x, y \in L$ и $p, q \in P$. Значит, F содержит и произведение этих элементов

$$(ax+p)(by+q) = abxy+axq+pbx+pq.$$

Поскольку все слагаемые правой части этого равенства – кроме первого слагаемого $abxy$ – принадлежат идеалу P, а сумма не принадлежит P, то $abxy \notin P$, откуда и $ab \notin P$. В силу упражнения 39 предложение доказано.

Из этого предложения следует ряд теорем о дистрибутивных решетках принципиального характера. Так, сразу получается импликация 2) $\Rightarrow$ 1) упражнения 39.

Максимальный идеал решетки – это максимальный элемент упорядоченного множества всех собственных идеалов данной решетки, рассматриваемого с отношением включения $\subseteq$.

Теорема 25. *Любой собственный идеал дистрибутивной решетки с 1 содержится в некотором ее максимальном идеале.*

Теорема 26. *Всякий максимальный идеал дистрибутивной решетки с 1 является простым.*

Теорема 27. *Если в дистрибутивной решетке L неверно, что $a \leq b$, то в L найдется такой простой идеал P, что $b \in P$, но $a \notin P$.*

Действительно, идеал $(b]$ не пересекается с фильтром $[a)$. Остается применить предложение 5. Теорема 27 как раз и утверждает, что различные элементы дистрибутивной решетки разделяются простыми идеалами этой решетки.

Теорема 28. *Любая дистрибутивная решетка L изоморфна подрешетке прямого произведения двухэлементных цепей $\mathbf{D}$.*

Доказательство. Пусть $S = \operatorname{Spec} L$ – множество всех простых идеалов дистрибутивной решетки L. Зададим отображение $f\colon L \to \mathrm{D}^{|S|}$ решетки L в прямое произведение $|S|$ экземпляров цепи $\mathbf{D}$ формулой:

$$f(a)(P) = \begin{cases} 0, \text{ если } a \in P \\ 1, \text{ если } a \notin P \end{cases} \quad \text{для любых } a \in L \text{ и } P \in S.$$

В силу теоремы 27 получаем искомое изоморфное вложение f.

Замечание. «Строка» $f(a)$, $a \in L$, является характеристической функцией подмножества $\{P \in S\colon a \notin P\}$ множества S. Поэтому теорема 28 утверждает (Г. Биркгоф), что произвольная дистрибутивная решетка изоморфна подрешетке булеана $\mathbf{B}(S)$. Отображение

$$f_P\colon L \to \mathbf{D},\ f_P(a) = f(a)(P) \text{ для всех } a \in L,$$

является решеточным гомоморфизмом, называемым *характером* дистрибутивной решетки L, отвечающим ее простому идеалу P.

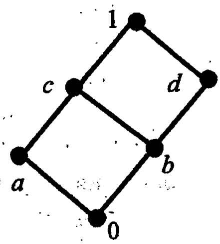


Иллюстрация. Продемонстрируем применение теоремы 28 на примере следующей шестиэлементной дистрибутивной решетки L. В конечной решетке все идеалы главные. Легко видеть, что L имеет три простых идеала $P = (a]$, $M = (c]$, $N = (d]$, причем идеалы M и N являются максимальными. Обозначим $S = \{P, M, N\}$. Тогда

$$f\colon L \to \mathbf{D}^S \equiv \mathbf{D} \times \mathbf{D} \times \mathbf{D},$$

именно, $f(0) \equiv (0, 0, 0)$, $f(a) \equiv (0, 0, 1)$, $f(b) \equiv (1, 0, 0)$, $f(c) \equiv (1, 0, 1)$, $f(d) \equiv (1, 1, 0)$ и $f(1) \equiv (1, 1, 1)$. Кроме того, решетка L служит прямым произведением $\mathbf{D}$ на трехэлементную цепь $\mathbf{C}_3 = \{0, \alpha, 1\}$, точнее, $L \cong \mathbf{D} \times \mathbf{C}_3$ при естественном изоморфизме: $0 \to (0, 0)$, $a \to (1, 0)$, $b \to (0, \alpha)$, $c \to (1, \alpha)$, $d \to (0, 1)$ и $1 \to (1, 1)$.

Решетка с 0 и 1 называется *ограниченной*. Если в ограниченной решетке $a+b = 1$ и $ab = 0$, то элементы a и b называются *дополнениями* друг друга. Как следует из критерия 2 дистрибутивности, в ограниченных дистрибутивных решетках каждый элемент имеет не более одного дополнения. В частности, поэтому диамант и пентагон не дистрибутивны.

Упражнение 40. Дайте пример ограниченной модулярной решетки, в которой существует элемент с бесконечным множеством дополнений.

Ненулевой элемент p решетки L с 0 называется ее *атомом*, если $(p] = \{0, p\}$. Атомы решетки L с 0 – это в точности минимальные элементы упорядоченного множества $L \setminus \{0\}$ с индуцированным порядком. Решетка с 0 называется *атомной*, если для любого ее ненулевого элемента a существует атом $\geq a$. Очевидно, что конечные решетки атомны.

Упражнение 41. Пусть p – ненулевой элемент решетки L с 0. Докажите, что p есть атом $L \Leftrightarrow pa = 0$ или $pa = p$ для всех $a \in L$.

Упражнение 42. Приведите пример ограниченной дистрибутивной решетки, не имеющей атомов.

Дистрибутивным решеткам посвящены части известных книг [5], [16], [27].

Булевы решетки

Определение 18. Ограниченная дистрибутивная решетка с $1 \neq 0$, в которой каждый элемент имеет дополнение, называется *булевой решеткой*.

Примеры. 1. Пусть M – произвольное непустое множество. Тогда булеан есть булева решетка с операциями $\cup$ и $\cap$ и порядком $\subseteq$, причем дополнением любого элемента $A \in M$, т. е. подмножества A множества M, служит его теоретико-множественное дополнение $M \setminus A$. Булеан $\mathbf{B}(M)$ изоморфен прямому произведению $\mathbf{D}^M$ $|M|$ экземпляров цепи $\mathbf{D}$.

2. Рассмотрим множество B всех конечных множеств натуральных чисел и дополнений до них в $\mathbf{N}$ (коконечных множеств). Относительно включения множеств $\subseteq$ множество B будет счетной булевой решеткой – подрешеткой булеана $\mathbf{B}(\mathbf{N})$.

3. Если $\langle X, \mu \rangle$ – пространство с вещественной мерой, то множество всех μ-измеримых множеств в X является булевой решеткой – подрешеткой булеана $\mathbf{B}(X)$.

4. Рассмотрим алгебру (пропозициональных) высказываний A с операциями дизъюнкции, конъюнкции и отрицания. Ее элементами

служат формулы логики высказываний. Отношение $\equiv$ равносильности высказываний является конгруэнцией на алгебре A. Соответствующая факторалгебра $A/\equiv$, называемая *алгеброй Линденбаума*, является булевой решеткой. В ней $[P]\le[Q]$ означает, что $P\to Q$ – тавтология, т. е. $P\to Q\equiv 1$ (истина). Дополнением к $[P]$ будет класс $[\rceil P]$ отрицания высказывния P.

Пусть L – произвольная булева решетка. Каждый ее элемент a обладает единственным дополнением, которое будем обозначать $a^\bullet$. Булевы решетки обладают следующими **свойствами:**

(1) $0^\bullet = 1$, $1^\bullet = 0$.

(2) $a^{\bullet\bullet} = a$.

(3) $a\le b \Leftrightarrow b^\bullet \le a^\bullet \Leftrightarrow a^\bullet+b = 1 \Leftrightarrow ab^\bullet = 0$.

(4) $(a+b)^\bullet = a^\bullet b^\bullet$, $(ab)^\bullet = a^\bullet+b^\bullet$ (законы де Моргана).

(5) $a+a^\bullet = 1$, $aa^\bullet = 0$.

Упражнение 43. Проверьте эти свойства.

Теорема 29 (см. [16, глава II] и [27, § 7]). *Для любой дистрибутивной решетки L с $1\ne 0$ эквивалентны следующие утверждения:*

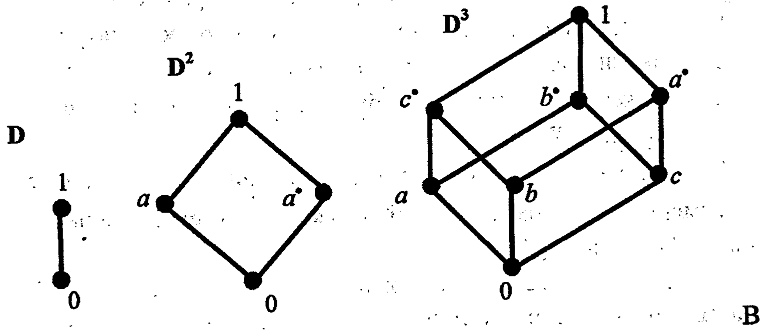
1) L булева;

2) все простые идеалы решетки L максимальны;

3) всякий идеал решетки L является ядерным идеалом ровно одной конгруэнции на L;

4) любые две конгруэнции на решетке L перестановочны.

Изобразим диаграммы Хассе трех первых (по мощности) булевых решеток:



решетке $\mathbf{D}^2$ элементы a и $a^\bullet$ являются атомами. Атомы a, b, c решетки $\mathbf{D}^3$ располагаются на втором уровне диаграммы, а их дополнения $a^\bullet$, $b^\bullet$, $c^\bullet$ – на третьем уровне.

Булевой алгеброй называется алгебра $\langle L, +, \cdot, ^\bullet, 0, 1\rangle$ с двумя бинарными операциями $+$, $\cdot$, унарной операцией $^\bullet$ и константами 0, 1, такими, что: во-первых, $\langle L, +, \cdot\rangle$ – дистрибутивная решетка с нулем 0 и единицей 1; во-вторых, имеет место (5). Фактически булевы алгебры и булевы решетки представляют собой одни и те же математические объекты. Только булевы решетки не образуют многообразие, а булевы алгебры образуют.

Можно также определить булевы алгебры как кольца. Именно, кольцо с ненулевой единицей 1 называется *булевым*, если оно удовлетворяет тождеству идемпотентности $xx = x$.

Упражнение 44. Докажите, что любое булево кольцо коммутативно и имеет характеристику 2 ($x+x = 0$ тождественно).

(*) Пусть L – булева алгебра. Определим в L новую операцию сложения: $a\oplus b = a^\bullet b+ab^\bullet$. А операцию умножения сохраним. В результате получим булево кольцо $\langle L, \oplus, \cdot\rangle$.

(**) Обратно, пусть дано булево кольцо $\langle L, \oplus, \cdot\rangle$. Оно имеет нулевой элемент 0 и единицу 1. Операции сложения $+$ и «дополнения» $^\bullet$ на L определяются следующим образом: $a+b = a\oplus b\oplus ab$ и $a^\bullet = a+1$. И мы получаем булеву алгебру $\langle L, +, \cdot, ^\bullet, 0, 1\rangle$.

Теорема 30. *Переходы (*) и (**) осуществляют взаимно однозначное соответствие между классом всех булевых алгебр и классом всевозможных булевых колец.*

Докажем далее *теорему Стоуна* о строении конечных булевых решеток.

Теорема 31. *Любая конечная булева решетка L изоморфна булеану B(A), где A – множество всех ее атомов.*

Доказательство. Пусть A – множество всех атомов конечной булевой решетки L. Установим изоморфизм между решетками L и $\mathbf{B}(A)$, сопоставив каждому элементу $x\in L$ подмножество в A: $f(x)=\{a\in A: a\leq x\}$. Сразу заметим, что $f(0) = \varnothing$ и $f(1) = A$. Покажем, что f является биекцией L на $\mathbf{B}(A)$. Возьмем в L элементы $x \neq y$. Тогда одно из соотношений $x \leq y$

или $y \leq x$ неверно. Можно считать, что неверно $x \leq y$. По свойству (3) булевых решеток $xy^{*} \neq 0$. В силу атомности конечной решетки L в ней найдется такой атом a, что $a \leq xy^{*}$. Имеем $a \leq x$ и $a \leq y^{*}$, откуда $a \in f(x)$ и $ay = ay^{*}y = a0 = 0$. Последнее означает, что $a \notin f(y)$. Поэтому $f(x) \neq f(y)$. Инъективность отображения f доказана.

Для проверки сюръективности f возьмем произвольное непустое множество $B = \{a_1, \ldots, a_k\}$ атомов решетки L. Нужно найти элемент $b \in L$, для которого $f(b) = B$. Положим $b = a_1 + \ldots + a_k$. Ясно, что $B \subseteq f(b)$. Если $a \in f(b)$, т. е. $a \leq b$, то $a = a(a_1 + \ldots + a_k) = aa_1 + \ldots + aa_k$. Отсюда следует, что атом a сопадает с одним из атомов a_i, иначе $aa_1 + \ldots + aa_k = 0$. Поэтому и $f(b) \subseteq B$, т. е. $f(b) = B$.

Наконец, если $x \leq y$, то $f(x) \subseteq f(y)$ по определению отображения f. И если $f(x) \subseteq f(y)$ для $x, y \in L$, то по доказанному $x = \sum f(x) \leq \sum f(y) = y$. Следовательно, f является (порядковым) изоморфизмом решеток L и $\mathbf{B}(A)$, что завершает доказательство теоремы.

Замечание. Из теоремы 31 следует, что любая конечная булева решетка имеет 2^n элементов, где n – число ее атомов. Эта теорема – с точностью до изоморфизма – описывает также конечные булевы алгебры и конечные булевы кольца. Именно, конечные булевы алгебры исчерпываются булеанами $\langle \mathbf{B}(A), \cup, \cap, ', \varnothing, A \rangle$ всевозможных непустых конечных множеств A. Конечные же булевы кольца имеют вид $\langle \mathbf{B}(A), \oplus, \cap \rangle$, где A – непустое конечное множество и $\oplus$ обозначает операцию симметрической разности: $B \oplus C = (B \cup C) \setminus (B \cap C)$ при $B, C \subseteq A$.

Теорема 32 (*решеточная характеризация булеанов*). *Булева решетка L изоморфна булеану* $\mathbf{B}(A)$ *(равносильно,* $\mathbf{D}^A$*) для некоторого непустого множества A тогда и только тогда, когда L полна и атомна.*

Теория булевых решеток и булевых алгебр излагается в монографиях [5], [16], [25], [27], [39]. Булевы кольца рассматриваются в специальной книге Абиана [38] и больших статьях Стоуна [40] и [41].

Литература

1. *Александров П.С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.: Наука, 1977.

2. *Архангельский А.В.* Канторовская теория множеств. – М.: Изд-во МГУ, 1988.

3. *Архангельский А.В., Пономарев В.И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях. – М.: Наука, 1974.

4. *Беран Л.* Упорядоченные множества. – М.: Наука, 1981.

5. *Биркгоф Г.* Теория решеток. – М.: Наука, 1984.

6. *Биркгоф Г., Барти Т.* Современная прикладная алгебра. – М.: Мир, 1976.

7. *Брудно А.Л.* Теория функций действительного переменного. Избранные главы. – М.: Наука, 1971.

8. *Бурбаки Н.* Теория множеств. – М.: Мир, 1965.

9. *Варанкина В.И., Вечтомов Е.М.* Линейно упорядоченные множества // Математический вестник педвузов Волго-Вятского региона. 2002. Вып. 4. – С. 16-27.

10. *Вечтомов Е.М.* Теория решеток. – Киров: Изд-во КГПИ, 1995.

11. *Вечтомов Е.М.* Дистрибутивные решетки, функционально представимые цепями // Фундаментальная и прикладная математика (МГУ). 1996. Т. 2. №1. – С. 93-102.

12. *Вечтомов Е.М.* Упорядоченные множества с диаграммой Хассе // Вестник ВятГГУ. 2002. №6. – С. 13-15.

13. *Вечтомов Е.М., Варанкина В.И.* Упорядоченные множества с конечным условием минимальности // Вестник ВятГПУ. 2000. № 3-4. – С. 11-12.

14. *Глухов М.М., Стеллецкий И.В., Фофанова Т.С.* Теория структур // Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. 1968. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1970. – С. 101-154.

15. *Гонин Е.Г.* Теоретическая арифметика. – М.: Учпедгиз, 1959.

16. *Гретцер Г.* Общая теория решеток. – М.: Мир, 1982.

17. *Гордон Е.И, Полотовский Г.М.* Мощность бесконечных множеств: Учебное пособие. – Н. Новгород: Нижегород. гос. ун-т, 1998.

18. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп. Т. 2. – М.: Мир, 1972.

19. *Коробков С.С.* Введение в теорию решеток: Учебное пособие по спецкурсу. – Екатеринбург: Урал. гос. пед. ун-т, 1996.

20. *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. – М.: Мир, 1970.

21. *Общая алгебра* / Под общ. ред. Л.А. Скорнякова. – М.: Наука, 1990. – Т.1; 1991. – Т.2.

22. *Оре О.* Теория графов. – М.: Наука, 1980.

23. *Робинсон А.* Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры. – М.: Наука, 1967.

24. *Салий В.Н.* Лекции по теории решеток. – Саратов: Саратов. гос. ун-т, 1970.

25. *Сикорский Р.* Булевы алгебры. – М.: Мир, 1969.

26. *Скорняков Л.А.* Теория структур // Итоги науки. Алгебра. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1966. – С. 237-274.

27. *Скорняков Л.А.* Элементы теории структур. – М.: Наука, 1982.

28. *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика. – М.: Мир, 1990.

29. *Упорядоченные множества и решетки*: Межвуз. науч. сб. – Вып. 3. – Саратов: Саратов. гос. ун-т, 1975.

30. *Упорядоченные множества и решетки*: Межвуз. науч. сб. – Вып. 7. – Саратов: Саратов. гос. ун-т, 1983.

31. *Упорядоченные множества и решетки.* – Братислава: Univerzita Komenskeho, 1985 (на русском языке).

32. *Упорядоченные множества и решетки. II.* – Братислава: Univerzita Komenskeho, 1988 (на русском языке).

33. *Феферман С.* Числовые системы. – М.: Наука, 1971.

34. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. – М.; Л.: ОНТИ, 1937.

35. *Шашкин Ю.А.* Неподвижные точки. – М.: Наука, 1989.

36. *Шрейдер Ю.А.* Равенство, сходство, порядок. – М.: Наука, 1971.

37. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986.

38. *Abian A.* Boolean rings. – Boston: Branded Press, 1976.

39. *Stone M.* The theory of representations the Boolean algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1936. V. 40. – P. 37-111/

40. *Stone M.* Applications of the theory of Boolean rings to general topology // Trans. Amer. Math. Soc. 1937. V. 41. № 3. – P. 375-481.

41. *Stone M.* Algebraic characterization of special Boolean rings // Fund. Math. 1937. V. 29. – P. 223-303.

42. *Rosenstein J.G.* Linear orderings. – New York: Academic Press, 1982.

VI. Метрика и топология

Семь раз отмерь –
один отрежь.
Русская пословица

Введение

Мы напомним и проанализируем фундаментальные понятия метрического и топологического пространства. Абстрактные метрические пространства были введены в математику французом Морисом Фреше в 1906 году. К тому времени был накоплен значительный математический материал, связанный с классическим анализом и геометрией. Немецкие математики Карл Вейерштрасс, Георг Кантор и Рихард Дедекинд создали строгие основания математического анализа. На этой почве возникла и стала активно развиваться теория функций действительного переменного (французские математики Эмиль Борель, Рене Бэр, Анри Лебег). Кантор построил теорию множеств, которая в качестве четкого универсального языка как нельзя лучше оказалась приспособленной для определения и изучения абстрактных математических структур.

Немецкий математик Феликс Хаусдорф в 1914 году в своей книге «Теория множеств» (см. перевод [13]) впервые ввел в рассмотрение понятие отделимого топологического пространства. Отделимые пространства в дальнейшем получили название хаусдорфовых пространств. Тем самым было положено начало новой математической науке – общей топологии. По-видимому, сам термин «общая топология» впервые использовал в 1937 году американский математик Маршалл Стоун (в названии своего знаменитого труда [17]). Впервые общее определение топологического пространства дано в 1922 году польским математиком Казимиром Куратовским с помощью оператора замыкания. В 1925 году создатель московской топологической школы Павел Сергеевич Александров дал определение топологического пространства через открытые множества, а в 1927 году польский математик Вацлав Серпинский – через замкнутые множества. Общее понятие топологического пространства лежит в основе современной топологии и математики в целом. Топологические пространства образуют один из трех типов фундаментальных структур математики (наряду с алгебраическими и порядковыми структурами); такой подход исповедовала знаменитая группа французских математиков, объединенная под именем Никола Бурбаки. См. их прекрасную методологическую статью «Архитектура математики» [5, с. 245-259], впервые опубликованную в 1948 году.

1. Метрические пространства

Метрическое пространство (термин Хаусдорфа) – это множество с заданной на нем метрикой. Понятие метрики аксиоматизирует понятие расстояния между точками обычного трехмерного пространства.

Определение 1. *Метрическим пространством* называется произвольная пара $\langle X, \rho\rangle$, состоящая из множества X и отображения $\rho: X\times X \to \mathbf{R}^+$, сопоставляющего каждой упорядоченной паре (x, y) элементов множества X неотрицательное действительное число $\rho(x, y)$ так, что выполняются следующие три аксиомы $(\forall x, y, z\in X)$:

1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ – *аксиома тождества*;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ – *симметричность*;

3) $\rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z)$ – *неравенство треугольника*.

В теории метрических пространств используется геометрическая терминология, хорошо согласующаяся с нашими наглядными представлениями и ассоциациями. Для метрического пространства $\langle X, \rho\rangle$ элементы $x\in X$ называются *точками* этого пространства, отображение ρ – *метрикой* пространства, а число $\rho(x, y)$ – расстоянием между его точками x и y.

Упражнение 1. Если в определении 1 аксиому тождества заменить более слабым тождеством $\rho(x, x) = 0$, то получим понятие *псевдометрического пространства*. Докажите, что на псевдометрическом пространстве $\langle X, \rho\rangle$ отношение «близости» ~ между его точками x и y, означающее $\rho(x, y) = 0$, является эквивалентностью на X, причем фактормножество $X/\sim$ естественным образом наделяется структурой метрического пространства.

Примеры. 1. $\langle \mathbf{R}, \rho\rangle$, где $\rho(x, y) = |x-y|$.

2. $\langle \mathbf{R}^n, \rho\rangle$, где $\rho(x, y) = ((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2)^{1/2}$ для $x = (x_1, x_2,\ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2,\ldots, y_n)$.

3. $\langle C, \rho \rangle$, где C – множество всех непрерывных действительнозначных функций, определенных на единичном отрезке $[0, 1]$, и $\rho(f, g) = \int_0^1 fg dx$ при любых $f, g \in C$.

4. $\langle X, \rho \rangle$ для произвольного непустого множества X и тривиальной метрики ρ:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ если } x = y \\ 1, \text{ если } x \neq y. \end{cases}$$

5. Пусть X – множество всех слов в непустом алфавите A. Расстоянием $\rho(u, v)$ между словами $u, v \in X$ называется число мест, на которых в словах u и v стоят разные буквы из A. Например, если $A = \{a, b, c\}$, $u = bbaccab$, $v = abcca$, то $\rho(u, v) = 5$. Получаем метрическое пространство $\langle X, \rho \rangle$, метрика которого называется *расстоянием Хемминга*. Это понятие играет важную роль в теории кодирования.

Упражнение 2. Покажите, что аксиомы метрического пространства 1)-3) независимы друг от друга. Для этого постройте три примера-модели $\langle X, \rho \rangle$, в каждом из которых выполняются ровно две аксиомы из трех.

Упражнение 3. Попытайтесь в произвольном метрическом пространстве ввести понятие отрезка с концами в двух данных точках, а также определить прямую линию.

Рассмотрим теперь иную аксиоматику метрических пространств [10].

Будем считать, что для пары $\langle X, \rho \rangle$, где $\rho: X \times X \to \mathbf{R}$, наряду с условием 1) выполняется модифицированное неравенство треугольника

4) $\rho(y, z) \leq \rho(x, y) + \rho(x, z)$.

Ясно, что условие 4) вытекает из определения 1. Покажем, что из условий 1) и 4) следует неотрицательность и симметричность отображения ρ. При $y = z$ из 4) и 1) следует $2\rho(x, y) \geq \rho(y, y) = 0$, т. е. всегда $\rho(x, y) \geq 0$. А при $x = z$ из 4) и 1) получаем $\rho(y, x) \leq \rho(x, y)$ для любых $x, y \in X$, что и дает аксиому 2).

В некоторых разделах современной математики (теория чисел, p-адический анализ) важную роль играют ультраметрические пространства.

Определение 2. Метрическое пространство $\langle X, \rho\rangle$ называется *ультраметрическим*, если аксиома 3) заменена более сильным условием

5) $\rho(x, z) \le \max(\rho(x, y), \rho(y, z))$.

Метрика ρ на множестве X, удовлетворяющая аксиоме 5), называется *ультраметрикой*.

Пример 6. Пусть p – фиксированное простое число и метрика ρ на $\mathbf{Q}$ определена следующим образом. Каждое рациональное число a можно однозначно записать в виде $a = p^k b$, где k – целое число, числитель и знаменатель несократимой дроби b не делятся на p. Для числа a определяется p-адическая норма $\nu(a) = 1/p^k$. Тогда на $\mathbf{Q}$ получаем соответствующую *p-адическую метрику* $\rho(x, y) = \nu(x, y)$.

Упражнение 4. Убедитесь, что p-адическая метрика на $\mathbf{Q}$ является ультраметрикой.

Напомним понятия открытого и замкнутого шаров в произвольном метрическом пространстве $\langle X, \rho\rangle$. Множество $U_r(x_0) = \{x\in X\colon \rho(x, x_0) < r\}$, $r > 0$, называется *открытым шаром* пространства $\langle X, \rho\rangle$ с центром в точке x_0 и радиусом r. Если в определении открытого шара строгое неравенство заменить нестрогим, то получим определение *замкнутого шара* $V_r(x_0)$.

Ультраметрические пространства обладают многими необычными геометрическими свойствами.

Теорема 1. *Для произвольного метрического пространства* $\langle X, \rho\rangle$ *эквивалентны следующие утверждения:*

(*1*) ρ – *ультраметрика*;

(*2*) *любой треугольник в* X *является равнобедренным по большей стороне*;

(*3*) *если два шара в* X *пересекаются, то один из них содержится в другом.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $\langle X, \rho\rangle$ – ультраметрическое пространство. *Треугольником* называется любое семейство из трех точек x, y, z пространства X. Точки могут и совпадать, тогда треугольник будет вырожденным. Рассмотрим расстояния между этими точками: $\rho(x, y)$, $\rho(x, z)$ и $\rho(y, z)$. Можно предположить для определенности, что число $\rho(x, z)$ не меньше каждого из остальных двух чисел. Тогда из неравенства 5) следует, что одно из расстояний $\rho(x, y)$ или $\rho(y, z)$ равно

$\rho(x, z)$. Значит, две большие «стороны» данного треугольника равны между собой «по длине».

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть выполнено условие и шары $U_r(x_0)$ и $U_s(y_0)$, $r \leq s$, имеют общую точку z. Покажем, что $U_r(x_0) \subseteq U_s(y_0)$. Имеем $\rho(x_0, z) < r$ и $\rho(y_0, z) < s$, откуда $\rho(x_0, y_0) < s$ в силу 2) и 5). Предположим от противного, что нашлась точка $x \in U_r(x_0) \backslash U_s(y_0)$. Это значит, что $\rho(x, x_0) < r$, но $\rho(x, y_0) \geq s \geq r$. Тогда в треугольнике, образованном точками x_0, y_0 и x, длина $\rho(x, y_0)$ больше длин других его сторон, что противоречит утверждению (2).

(3) $\Rightarrow$ (1). Пусть верно утверждение (3), но для некоторых точек x, y, $z \in X$ не выполняется неравенство 5). Это означает, что $\rho(x, z) > \rho(x, y)$ и $\rho(x, z) > \rho(y, z)$. Положим $\rho(x, z) = r$. Шары $U_r(x)$ и $U_r(z)$ имеют общую точку y, поэтому один из них содержится в другом. Но тогда $\rho(x, z) < r$, что невозможно.

Упражнение 5. В утверждении (3) теоремы 1 мы рассматривали открытые шары. Докажите, что в этом утверждении можно брать любые шары: оба замкнутых; один открытый, а другой замкнутый.

Замечание 1. Относительно p-адической нормы кольцо целых p-адических чисел компактно, а поле всех p-адических чисел локально компактно. В них сходимость числового ряда равносильна стремлению общего члена ряда к нулю. См. [4].

Рассмотрим теперь понятие непрерывного отображения метрических пространств.

Определение 3. Отображение f: $\langle X, \rho\rangle \to \langle Y, \sigma\rangle$ метрических пространств называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\rho(x, x_0) < \delta$ влечет $\sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ для любых $x \in X$. Если отображение f непрерывно во всех точках пространства X, то его называют просто *непрерывным отображением*. Отображение f: $\langle X, \rho\rangle \to \langle Y, \sigma\rangle$ называется *равномерно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\rho(x, y) < \delta$ влечет $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$ для всех $x, y \in X$.

Ясно, что равномерно непрерывные отображения непрерывны.

Определение 4. Последовательность (x_n) точек x_n метрического пространства $\langle X, \rho\rangle$ называется *сходящейся к точке* x_0, если $\rho(x_n, x_0) \to 0$

при $n \to \infty$. При этом точка x_0 называется *пределом* последовательности (x_n).

Легко видеть, что никакая последовательность точек метрического пространства не может иметь более одного предела (а все-таки почему?).

Упражнение 6. Докажите, что отображение $f: X \to Y$ метрических пространств непрерывно в точке $x_0 \in X$, если и только если для любой сходящейся к x_0 последовательности (x_n) в X последовательность $(f(x_n))$ сходится к $f(x_0)$ в Y.

Подмножество метрического пространства называется *открытым*, если оно является объединением некоторого семейства открытых шаров этого пространства. Дополнения до открытых множеств называются *замкнутыми* множествами.

Упражнение 7. Убедитесь, что объединение любого семейства открытых множеств и пересечение всякого конечного семейства открытых множеств метрического пространства открыты. Верны ли аналогичные утверждения для замкнутых множеств?

Упражнение 8. Если для метрического пространства $\langle X, \rho \rangle$ положить $\sigma(x, y) = \min(\rho(x, y), 1)$ при любых $x, y \in X$, то получим ограниченное метрическое пространство $\langle X, \sigma \rangle$, открытые множества которого будут совпадать с открытыми множествами исходного пространства $\langle X, \rho \rangle$. Докажите.

Упражнение 9. Проверьте, что отображение $f: \langle X, \rho \rangle \to \langle Y, \sigma \rangle$ метрических пространств непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз $f^{-1}(U)$ любого открытого множества U в Y есть открытое множество в X.

Упражнение 10. Докажите, что для замкнутости подмножества A метрического пространства X необходимо и достаточно, чтобы предел всякой сходящейся последовательности точек $x_n \in A$ также принадлежал A.

Пусть дана непрерывная функция $f: \langle X, \rho \rangle \to \mathbf{R}$ абстрактного метрического пространства X в $\mathbf{R}$ с обычной метрикой. Множество $Z(f) = \{x \in X: f(x) = 0\}$ называется *нуль-множеством функции* f. *Нуль-множеством* на X называется нуль-множество любой непрерывной действительно-значной функции, определенной на метрическом пространстве X. Дополнения до нуль-множеств называются *конуль-*

множествами. Очевидно, нуль-множества на X являются замкнутыми множествами. Оказывается, что для метрических пространств верно и обратное.

Теорема 2. *Любое замкнутое множество произвольного метрического пространства $\langle X, \rho\rangle$ является нуль-множеством на X.*

Доказательство. Пусть дано непустое замкнутое подмножество A метрического пространства X. Зададим на X функцию расстояния d до множества A следующим образом: $d(x) = \inf(\rho(x, a)\colon a \in A)$. Докажем, что функция $d\colon X \to \mathbf{R}$ равномерно непрерывна и $A = Z(d)$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и возьмем точки $x, y \in X$, для которых $\rho(x, y) < \delta = \varepsilon$. Рассмотрим неравенство 3) для произвольной точки $z \in X$. Переходя в левой части неравенства к точной нижней грани по z, получим $d(x) \le \rho(x, y) + \rho(y, z)$. А затем, переходя в правой части к точной нижней грани по z, получим $d(x) \le \rho(x, y) + d(y)$. Аналогично, с учетом симметричности метрики ρ получаем $d(y) \le \rho(x, y) + d(x)$. Следовательно, $|d(x) - d(y)| \le \rho(x, y) < \varepsilon$. Это доказывает равномерную непрерывность, а значит, и непрерывность функции d.

Наконец, проверим равенство $A = Z(d)$. Ясно, что $A \subseteq Z(d)$. Пусть $d(x) = 0$. Существует такая последовательность точек $a_n \in A$, что $\rho(a_n, x) < 1/2^n$. Значит, $(a_n) \to x$ при $n \to \infty$. Поскольку A замкнуто, то $x \in A$ на основании упражнения 8. Стало быть, и $Z(d) \subseteq A$.

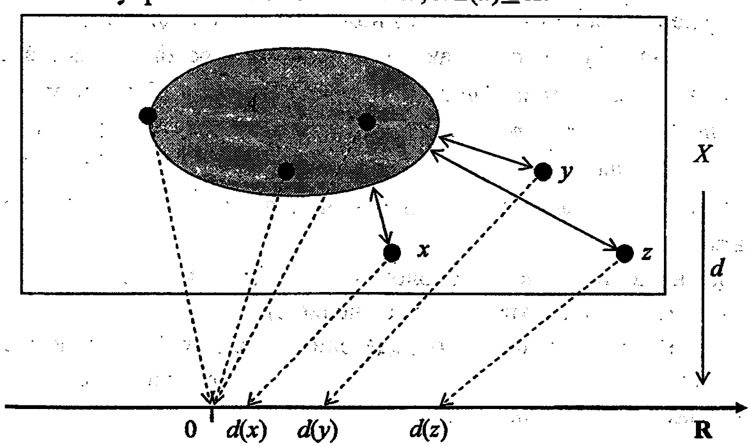


Рис. 1

Упражнение 11. Докажите, что для любых двух непересекающихся замкнутых множеств A и B произвольного метрического пространства X существует непрерывная функция f: $X \to [0, 1]$, для которой $A = Z(f)$ и $B = Z(1-f)$. Такое свойство метрических пространств называется *совершенной нормальностью*.

Заметим, что многое из отмеченного выше справедливо и для псевдометрических пространств (см. [8]). Основы теории метрических пространств изложены в великолепном университетском учебнике [9]. В нем приведены критерии полноты и компактности для метрических пространств, принцип сжимающих отображений и т. д.

2. Топологические пространства

Начала общей, или теоретико-множественной, топологии содержатся в книгах [1-3, 8-15]. Дадим наиболее употребительное классическое определение топологических пространств, впервые предложенное П. С. Александровым.

Определение 5. *Топологическим пространством* называется пара $\langle X, \tau\rangle$, где τ – множество подмножеств множества X, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) $\varnothing, X \in \tau$;

(2) объединение любого непустого семейства множеств из τ принадлежит τ;

(3) пересечение любых двух множеств из τ принадлежит τ.

Условия (1)-(3) суть аксиомы топологического пространства, множество τ называется *топологией* на X. Множества $U \in \tau$ называются *открытыми множествами*, а их дополнения $X \setminus U$ называются *замкнутыми множествами* топологического пространства $\langle X, \tau\rangle$. В обозначении топологического пространства символ τ часто будем убирать.

Важнейший класс топологических пространств составляют метрические пространства (см. упражнение 6).

Приведем теперь первое определение топологических пространств, предложенное Куратовским, который положил в основу определения понятие замыкания множества.

Определение 6. *Топологическим пространством* называется множество X с заданным на множестве $\mathbf{B}(X)$ всех его подмножеств *оператором замыкания* [ ], обладающим следующими свойствами:

i) $A \subseteq [A]$ для любого $A \subseteq X$;

ii) $[A] \subseteq [[A]]$;

iii) $[A \cup B] = [A] \cup [B]$;

iv) $[\varnothing] = \varnothing$.

Теорема 3. *Определения 5 и 6 топологического пространства эквивалентны.*

Доказательство. Пусть дано топологическое пространство $\langle X, \tau \rangle$ в смысле определения 5. Зададим на $\mathbf{B}(X)$ оператор замыкания [ ] следующим образом. Для любого $A \in \mathbf{B}(X)$ положим

$$[A] = \cap \{B \subseteq X: A \subseteq B \text{ и } B \text{ замкнуто в } \langle X, \tau \rangle\}. \quad \text{(I)}$$

Множество $[A]$ называется *замыканием множества* A в топологическом пространстве $\langle X, \tau \rangle$. Легко проверяются все свойства *i)*-*iv)* определения 6.

Обратно, рассмотрим топологическое пространство $\langle X, [\ ] \rangle$ в смысле определения 6. Множество $B \subseteq X$ называется замкнутым, если $[B] = B$. Определим на X соответствующую топологию:

$$\tau = \{A \subseteq X: X \setminus A \text{ замкнуто}\}. \quad \text{(II)}$$

Нетрудно убедиться, что множество $\tau \subseteq \mathbf{B}(X)$ удовлетворяет аксиомам (1)-(3) определения 5.

Нужно еще проверить, что для произвольного множества X отображения (переходы) (I) и (II) взаимно обратны. Для любого $A \subseteq X$ имеем:

$$A \in \tau \Rightarrow\text{(I)}\Rightarrow [X \setminus A] = X \setminus A \Rightarrow\text{(II)}\Rightarrow A \in \tau.$$

Упражнение 12. Восполните детали в доказательстве теоремы 3.

Упражнение 13. Дайте определение топологического пространства через замкнутые множества.

Замечание 2. Помимо указанных трех определений топологических пространств существуют и другие эквивалентные определения. Они базируются на следующих понятиях: предельная точка, внутренность, граница, нарост, сходимость направленности, окрестность точки, окрестность множества, открытая база, отношение близости и т. д.

Рассмотрим теперь основные условия отделимости, накладываемые на топологические пространства, в порядке их усиления:

T_0-пространства $\supset$ T_1-пространства $\supset$ хаусдорфовы пространства $\supset$

$\supset$ регулярные пространства $\supset$ тихоновские пространства $\supset$

$\supset$ нормальные пространства $\supset$ совершенно нормальные пространства.

Определение 7. Топологическое пространство X называется:

T_0-пространством (или *колмогоровским*, поскольку введено в математику А. Н. Колмогоровым, 1935 году), если для любых его различных точек x и y найдется открытое множество U в X, содержащее ровно одну их них: $x\in U, y\notin U$ или $y\in U, x\notin U$;

T_1-пространством, если для любых его различных точек x и y найдется открытое множество в X, содержащее x и не содержащее y;

хаусдорфовым (или *T_2-пространством*), если для любых его различных точек x и y найдутся такие непересекающиеся открытые множества U и V в X, что $x\in U$ и $y\in V$;

регулярным (или *T_3-пространством*), если оно является T_1-пространством и для любых его точки x и не содержащего ее замкнутого множества B найдутся такие непересекающиеся открытые множества U и V в X, что $x\in U$ и $B\subseteq V$;

тихоновским (*вполне регулярным*, или *$T_{3,5}$-пространством*), если оно является T_1-пространством и для любых точки x и не содержащего ее замкнутого множества B в X существует непрерывная функция $f: X\to \mathbf{R}$, для которой $f(x) = 1$ и $f(B) = \{0\}$;

нормальным (или *T_4-пространством*), если оно является T_1-пространством и для любых его непересекающихся замкнутых множеств A и B существуют такие непересекающиеся открытые множества U и V в X, что $A\subseteq U$ и $B\subseteq V$;

совершенно нормальным, если оно является T_1-пространством и для любых его непересекающихся замкнутых множеств A и B существует такая непрерывная функция $f: X\to \mathbf{R}$, что $A = Z(f)$ и $B = Z(1-f)$.

Заметим, что открытое множество, содержащее данную точку или данное множество, называется *окрестностью* этой точки или этого множества. В терминах окрестностей можно переформулировать пять из семи сформулированных выше условий отделимости. Что получилось?

Большая лемма Урысона (см., например, [8, с. 157]) утверждает, что во всяком нормальном (здесь условие T_1 можно не требовать) пространстве для любых его непересекающихся замкнутых множеств A и B существует непрерывная функция $f: X \to [0, 1]$, для которой $A \subseteq Z(f)$ и $B \subseteq Z(1-f)$.

Упражнение 14. Докажите, что действительно в определении 7 аксиомы отделимости расположены по мере их усиления (с учетом большой леммы Урысона). Изобразите свойства отделимости на диаграммах Эйлера-Венна.

Базой топологического пространства X называется всякое множество σ его открытых множеств, такое, что любое открытое множество в X является объединением некоторых множеств из σ.

Упражнение 15. Убедитесь, что для произвольного T_1-пространства условие тихоновости равносильно тому, что все его конуль-множества составляют базу.

Определение 8. Топологическое пространство X называется *компактным*, если из любого его открытого покрытия можно извлечь конечное подпокрытие. *Открытым покрытием* пространства X называется любое семейство его открытых множеств, объединение которого совпадает со всем X, а подпокрытие семейства множеств – это подсемейство данного семейства.

Общее понятие компактности впервые сформулировал П. С. Александров в 1922 году, ему посвящена одна из первых монографий в мире по общей топологии [2], сданная в печать в 1923 году, но опубликованная только в 1929 году.

Множество A топологического пространства $\langle X, \tau \rangle$, рассматриваемое с индуцированной топологией, состоящей из всевозможных множеств вида $A \cap U$, где $U \in \tau$, называется *подпространством* в X.

Важнейшие понятия *факторпространства* и *тихоновского произведения* топологических пространств мы здесь вводить не будем.

Упражнение 16. Покажите, что любое замкнутое множество компактного пространства является компактным подпространством. А любое компактное подпространство компактного хаусдорфова пространства X есть замкнутое множество в X.

В качестве иллюстрации докажем следующий результат.

Теорема 4. *Любое компактное хаусдорфово пространство нормально.*

Доказательство. Возьмем в X произвольные непересекающиеся замкнутые множества A и B. В силу предыдущего упражнения подпространства A и B компактны. Фиксируем точку $a\in A$. Для произвольной точки $b\in B$ существуют непересекающиеся открытые окрестности U_b и V_b точек a и b соответственно. Множества $B\cap V_b$ образуют открытое покрытие компактного пространства B (с индуцированной топологией подпространства). Поэтому $B\subseteq V=V_b\cup V_c\cup\ldots\cup V_d$ для конечного числа точек $b, c, \ldots, d\in B$. Открытое множество $U_b\cap U_c\cap\ldots\cap U_d$ содержит a и не пересекается с V (рис. 2).

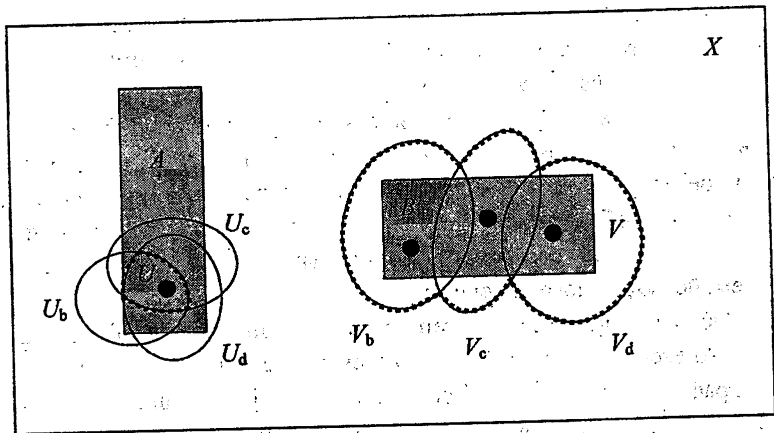


Рис. 2

Итак, произвольно выбранная точка $a\in A$ и множество B обладают непересекающимися открытыми окрестностями U_a и V_a. Объединение множеств U_a, $a\in A$, содержит компактное подпространство A. Поэтому $A\subseteq U=U_a\cup U_x\cup\ldots\cup U_z$ для конечного числа точек $a, x, \ldots, z\in A$. Открытое множество $V=V_a\cap V_x\cap\ldots\cap V_z$ содержит B и не пересекается с открытой окрестностью U множества A (рис. 3), что завершает доказательство теоремы.

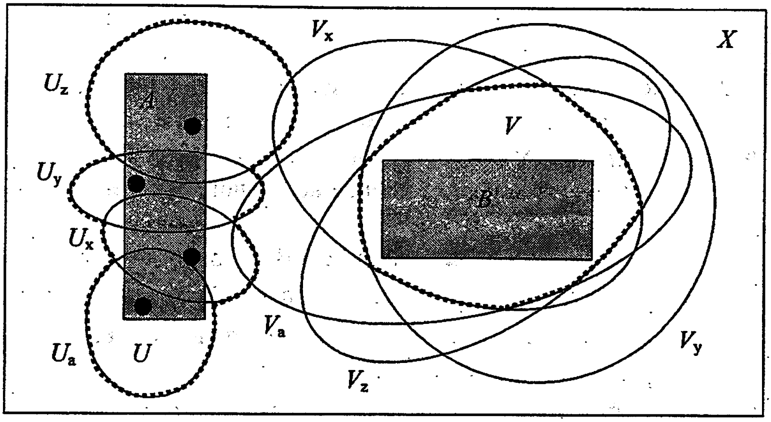


Рис. 3

Топологическое пространство $\langle X, \tau \rangle$ называется *метризуемым*, если на X можно ввести метрику, относительно которой множество открытых множеств совпадает с топологией τ. Заметим, что открытые шары произвольного метрического пространства образуют базу соответствующего (метризуемого) топологического пространства.

Переходим к другим примерам топологических пространств.

Примеры 7. Пусть X – *антидискретное* топологическое пространство, т. е. его топология $\tau = \{\varnothing, X\}$. Если мощность X не меньше 2, то такое X не является T_0-пространством.

8. Возьмем $X = \{0, 1\}$ с топологией $\tau = \{\varnothing, \{0\}, X\}$. Полученное T_0-пространство называется *связным двоеточием* и не является T_1-пространством.

9. Рассмотрим любое бесконечное множество X в точности с *коконечными* открытыми множествами, представляющими собой дополнения в X до конечных множеств (такая топология называется *топологией Фреше*). Получаем нехаусдорфово T_1-пространство.

10. На единичном отрезке $[0, 1]$ рассмотрим расширение естественной топологии, порожденное добавлением замкнутого множества $\{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$. Это топологическое пространство хаусдорфово, но не регулярно.

11. Существуют регулярные пространства, не являющиеся тихоновскими (см. [14, пример 2.4.21]). Указанный пример достаточно сложен.

12. Тихоновское произведение двух стрелок Александрова (см. пример 13), будучи тихоновским пространством, не является нормальным. Примером ненормального тихоновского пространства служит также тихоновское произведение несчетного множества прямых **R** [3, глава II, задача 392].

13. *Лексикографический квадрат.* На прямом произведении $(0, 1)\times(0, 1)$ топология порождена лексикографическим порядком: $M=(a, b)<(c, d)=N$ означает, что $a<c$ или $b<d$ при $a=c$. Базу этой топологии образуют всевозможные интервалы (M, N), $M<N$. Получаем пример нормального пространства, не являющегося совершенно нормальным. Лексикографический квадрат является даже *наследственно нормальным* пространством [14, с. 183], т. е. все его подпространства нормальны.

14. *Стрелка Александрова.* Пусть на $[0, 1)$ задана топология, открытую базу которой образуют всевозможные полуотрезки $[a, b)$, где $0\leq a<b\leq 1$. Данное топологическое пространство совершенно нормально, но неметризуемо. См., например, [3, глава II, задача 104].

15. Топологическое пространство X с топологией **B**(X) называется *дискретным*. В таких пространствах все подмножества *открыто-замкнуты*, т. е. являются одновременно открытыми и замкнутыми. Напомним, что топологическое пространство называется *связным*, если в нем нет непустых собственных открыто-замкнутых множеств. Поэтому дискретные пространства мощности большей 1 несвязны.

Замечание 3. Пространства из примеров 7-9 компактны и связны. Пространства 10-14 некомпактны и связны. Дискретное пространство компактно тогда и только тогда, когда оно конечно.

Наряду с условиями отделимости важную роль в общей топологии играют так называемые аксиомы счетности.

Определение 9. Говорят, что топологическое пространство X удовлетворяет:

первой аксиоме счетности, если для каждой точки $x\in X$ существует такое счетное семейство (U_n) ее (открытых) окрестностей, что любая окрестность точки x целиком содержит какую-либо из окрестностей U_n;

второй аксиоме счетности, если X обладает счетной базой.

Упражнение 17. Покажите, что вторая аксиома счетности сильнее первой аксиомы счетности. Что это означает?

Упражнение 18. Какие из примеров пространств 6-14 удовлетворяют первой, второй аксиоме счетности?

Определение 10. Отображение f: $X \to Y$ топологических пространств называется *непрерывным*, если прообраз $f^{-1}(U)$ любого открытого множества U в Y есть открытое множество в X. Взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение f: $X \to Y$ топологических пространств называется их *гомеоморфизмом* (X на Y), а сами пространства – *гомеоморфными* ($X \approx Y$).

Непрерывность отображения топологических пространств обобщает понятие непрерывности отображений метрических пространств. А гомеоморфность двух топологических пространств обобщает понятие изометрии метрических пространств. *Изометрией* двух метрических пространств называется их взаимно однозначное соответствие, сохраняющее метрику, т. е. расстояния между точками.

Упражнение 19. Приведите примеры двух гомеоморфных метрических пространств, между которыми не существует изометрии.

Отметим, что гомеоморфные пространства обладают абсолютно одинаковыми абстрактными топологическими свойствами. Поэтому компактное пространство [0, 1] не гомеоморфно некомпактному пространству (0, 1); здесь пространства берутся с естественной топологией. Компактные пространства [0, 1] и окружность также не гомеоморфны (почему?). А если из окружности выбросить одну точку, то получим некомпактное пространство, гомеоморфное интервалу (0, 1).

Упражнение 20. Покажите, что непрерывные отображения топологических пространств сохраняют свойства компактности и связности, но не обязаны сохранять свойства отделимости. Как это нужно понимать?

Упражнение 21. Докажите, что взаимно однозначное непрерывное отображение компактного хаусдорфова пространства на хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом этих пространств.

Рассмотрим еще несколько условий отделимости топологических пространств, как слабых, так и сильных. *Замыканием точки* x топологического пространства X называется множество $[x] = [\{x\}]$ – наименьшее замкнутое множество в X, содержащее точку x. Точку назовем *замкнутой*, если замкнуто соответствующее одноточечное множество. Непустое замкнутое подмножество пространства X называется *неприводимым*, если его нельзя представить в виде объединения двух собственных замкнутых подмножеств. Подмножество A пространства называется (всюду) *плотным в* X, если $[A] = X$. Ясно, что для любой точки x произвольного топологического пространства X множество $[x]$ неприводимо и $\{x\}$ плотно в подпространстве $[x]$.

Топологическое пространство X называется:

T_D-пространством, если нарост $[x]\setminus\{x\}$ любой его точки есть замкнутое множество;

неприводимым, если оно неприводимо как свое подмножество;

нетеровым, когда в нем любая возрастающая цепочка открытых множеств обрывается;

трезвым, если оно является T_0-пространством и любое неприводимое множество в X имеет вид $[x]$;

симметричным, если пересечение любого семейства его открытых множеств также открыто.

Отметим, что указанные «экзотические» пространства (экзотические в сравнении, скажем, с метрическими пространствами) играют важную роль в коммутативной алгебре, применяются в спектральной теории колец [6].

Упражнение 22. Докажите следующие простые утверждения. T_D-пространства занимают строго промежуточное положение между классами T_0-пространств и T_1-пространств. T_0-пространства (T_1-пространства) однозначно характеризуются тем, что в них замыкания различных точек различны (соответственно, все точки замкнуты). Конечные T_0-пространства являются трезвыми T_D-пространствами. Всякое непустое компактное T_0-пространство обладает хотя бы одной замкнутой точкой. Замкнутые множества симметрического пространства X образуют топологию на множестве X, которую можно назвать двойственной к исходной топологии.

Упражнение 23 [6, с. 135]. Для любого непустого топологического пространства X равносильны следующие условия:

1) X неприводимо;

2) каждое непустое открытое множество пространства X плотно в пространстве X;

3) открытые множества пространства X связны.

Упражнение 24 [6, с. 139]. Произвольное топологическое пространство нетерово тогда и только тогда, когда компактны все его открытые множества.

Примеры. 16. Возьмем топологическое пространство $\mathbf{N}$ всех натуральных чисел, топологию которого составляют начальные отрезки $[1, n]$, $n\in \mathbf{N}$. Замыкания $[n] = \{n, n+1, n+2,\ldots\}$, $n\in \mathbf{N}$, дают все непустые замкнутые множества пространства $\mathbf{N}$. Полученное пространство является неприводимым трезвым T_D-пространством с плотным одноэлементным множеством $\{1\}$. Оно не компактно, не нетерово, не является T_1-пространством.

17. Предыдущее пространство симметрично. Рассмотрим двойственное пространство $\mathbf{N}^*$. Оно будет компактным нетеровым неприводимым трезвым T_D-пространством с единственной замкнутой точкой 1.

18. Обозначим через Spec R пространство всех простых идеалов коммутативного кольца R с 1, наделенное стоуновской топологией (называемой еще топологией Зариского, или спектральной топологией). Оно называется *простым спектром кольца* R и является компактным T_0-пространством. На топологическом языке простого спектра выражаются различные алгебраические свойства колец. Например, простой спектр нетерова кольца является нетеровым пространством. Неприводимость Spec R для редуцированного кольца R эквивалентна целостности R. А хаусдорфовость Spec R равносильна регулярности кольца R. См. [5, гл. II, § 4].

Упражнение 25. Разберитесь в материале предыдущего примера.

Замечание 4. М. Кокстер [16] дал топологическую характеризацию пространств Spec R – это в точности компактные трезвые пространства, в которых компактные открытые множества образуют базу и замкнуты относительно конечных пересечений. Там же показано, что максимальные спектры коммутативных колец с 1 описываются как компактные T_1-пространства.

Теперь укажем некоторые условия несвязности, относящиеся к сильным свойствам отделимости.

Топологическое пространство X называется:

вполне несвязным, если для любых его различных точек существует открыто-замкнутое множество в X, содержащее ровно одну из этих точек;

нульмерным, когда X есть T_1-пространство и его открыто-замкнутые множества образуют базу;

сильно нульмерным, когда X есть T_1-пространство и для любых его непересекающихся нуль-множеств A и B существует открыто-замкнутое множество U в X, разделяющее эти множества: $A \subseteq U$ и $B \cap U = \varnothing$;

экстремально несвязным, если замыкание любого его открытого множества открыто;

P-пространством, если оно тихоновское и пересечения счетных семейств открытых множеств в X суть открытые множества.

Очевидно, что сильно нульмерные пространства, хаусдорфовы экстремально несвязные пространства и P-пространства нульмерны, а нульмерные пространства вполне несвязны. Существуют вполне несвязные, но не нульмерные пространства, а также нульмерные, но не сильно нульмерные пространства. См. [3, 14].

Упражнение 26. Приведите пример несвязного пространства, не являющегося вполне несвязным.

Упражнение 27. Докажите, что в экстремально несвязных пространствах замыкания непересекающихся открытых множеств не пересекаются. Верно ли обратное?

Упражнение 28. Покажите, что компактные P-пространства конечны.

Упражнение 29. Докажите, что P-пространства сильно нульмерны. Для этого выясните, что представляют собой нуль-множества P-пространств.

Упражнение 30. Проверьте, что компактные нульмерные пространства сильно нульмерны.

Примеры. 19. Пространство $\mathbf{Q}$ всех рациональных чисел с интервальной топологией (индуцированной $\mathbf{R}$) нульмерно.

20. *Максимальным спектром* Max B булевой алгебры B называется пространство всех ее максимальных идеалов со стоуновской топологией. Максимальный спектр булевой алгебры является компактным нульмерным пространством. Причем пространство Max B экстремально несвязно тогда и только тогда, когда булева алгебра B полна. Это составная часть теории М. Стоуна о строении булевых алгебр и колец [17].

21. Пусть $X=Y\cup\{p\}$, где Y – дискретное топологическое пространство несчетной мощности и $p\notin Y$. Окрестностями точки p пространства X объявляются всевозможные множества $U\subseteq X$, дополнения $X\setminus U$ до которых не более чем счетны. В результате получается P-пространство X с единственной неизолированной точкой p (т. е. одноточечное множество $\{p\}$ не является открытым множеством). Оно не экстремально несвязно. Почему?

Замечание 5. Ряд пространств с необычными (непривычными) свойствами возник в теории колец непрерывных функций (см. [15, 17, 18]). Это и P-пространства, и F-пространства, и экстремально несвязные пространства. Они обладают тонкими топологическими свойствами, выполняют роль важных примеров и контрпримеров, служат существенными элементами различных общетопологических теорий и математических построений.

Литература

1. *Александров П.С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.: Наука, 1977.

2. *Александров П.С., Урысон П.С.* Мемуар о компактных топологических пространствах. – М.: Наука, 1971 (третье издание).

3. *Архангельский А.В., Пономарев В.И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях. – М.: Наука, 1974.

4. *Боревич З.И., Шафаревич И.Р.* Теория чисел. – М.: Наука, 1985 (третье издание).

5. *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1963.

6. *Бурбаки Н.* Коммутативная алгебра. – М.: Мир, 1971.

7. *Вечтомов Е.М.* Математические очерки. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2004.

8. *Келли Д.* Общая топология. – М.: Мир, 1981 (второе издание).

9. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989 (шестое издание).

10. *Косневски Ч.* Начальный курс алгебраической топологии. – М.: Мир, 1983.

11. *Куратовский К.* Топология: В 2 т. – М.: Мир, 1966. – Т. 1; 1969. – Т. 2.

12. *Стинрод Н., Чинн У.* Первые понятия топологии. – М.: Мир, 1967.

13. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. – М.: ОНТИ, 1937.

14. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986.

15. *Gillman L., Jerison M.* Rings of continuous functions. – N. Y.: Springer-Verlag, 1976.

16. *Hochster M.* Prime ideal structure in commutative ring // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 142, № 8. – P. 43-60.

17. *Stone M.* Applications of the theory of Boolean rings to general topology // Trans. Amer. Math. Soc. 1937.V. 41, № 3. – P. 375-481.

18. *Vechtomov E.M.* Rings of continuous functions with values in topological division ring // J. Math. Sciences (USA). 1996. V. 78, № 6. – P. 702-753.

VII. Взаимосвязь основных математических структур

Мир идей не открывается нам сразу.
Мы должны снова и снова воссоздавать
его в нашем сознании.
Ренэ Том

Математика обладает способностью
открывать в окружающих нас вещах
новые стороны и неожиданным образом
расширять наши представления.
П. С. Александров

Существует тесная взаимосвязь трех типов фундаментальных математических структур: алгебраического, порядкового, топологического, пространств с мерой и графов. Рассмотрим такие связи, главным образом, для конечных объектов.

Пусть X – произвольное *топологическое пространство* с *топологией* τ, являющейся по определению множеством всех открытых подмножеств пространства X (см. Приложение VI). Относительно отношения включения $\subseteq$ топология τ представляет собой полную *дистрибутивную решетку* (Приложение V). Определим на топологическом пространстве X также *квазипорядок* ρ:

$$x\rho y \text{ означает } [x] \subseteq [y] \text{ для любых } x, y \in X,$$

где $[x]$ – это замыкание в X одноточечного множества $\{x\}$. Бинарное отношение ρ на X рефлексивно и транзитивно, т. е. является квазипорядком. Имеем $[x]=\{z\in X: z\rho x\}$ при любом $x\in X$.

Обратно, возьмем *квазиупорядоченное множество* X относительно квазипорядка ρ на нем. Подмножество Y в X называется его ρ-*идеалом* (ρ-*фильтром*), если $x\in X$, $y\in Y$ и $x\rho\, y$ ($y\rho\, x$) влекут $x\in Y$. Множество J всех ρ-идеалов и множество F всех ρ-фильтров в X служат топологиями на X, превращающими X в дуальные симметрические пространства. Топологическое пространство мы назвали *симметрическим*, если всевозможные пересечения его открытых множеств также открыты. Для полученного симметрического пространства X с топологией J равносильны включения $[x] \subseteq [y]$ и $x^0 \supseteq y^0$, где через z^0 обозначается наименьшая открытая окрестность точки z из X.

Напомним, что топологическое пространство X называется T_0-*пространством*, если для любых двух его различных точек найдется открытое множество в X, содержащее ровно одну их этих точек, что равносильно соотношению:

$$[x]=[y] \text{ влечет } x=y \text{ для любых } x, y\in X.$$

Теорема 1 (П. С. Александров, 1935 год; см. [6, теоремы 56 и 57]). *На любом множестве X существует взаимно однозначное соответствие между симметрическими топологиями и квазипорядками, задаваемое отображениями ρ и J. При этом симметрическим T_0-пространствам $\langle X, \tau\rangle$ отвечают упорядоченные множества $\langle X, \leq\rangle$.*

Рассмотрим далее категорию T всевозможных симметрических пространств $\langle X, \tau\rangle$ с непрерывными отображениями в качестве морфизмов и категорию K всех квазиупорядоченных множеств $\langle X, \rho\rangle$ с гомоморфизмами, т. е. отображениями, сохраняющими отношение квазипорядка. Любое отображение f: $X \to Y$ будет морфизмом (непрерывным отображением) в категории T тогда и только тогда, когда оно будет морфизмом (гомоморфизмом) в категории K для соответствующих объектов X и Y. В силу теоремы 1 имеет место:

Теорема 2. *Категории T и K изоморфны между собой. В частности, изоморфны и их полные подкатегории, объектами которых являются симметрические T_0-пространства и упорядоченные множества соответственно.*

Пусть теперь $\langle A, +, \cdot, \leq, 0, 1\rangle$ – дистрибутивная решетка.

Элемент $a\in A$ называется:

неразложимым (в сумму), если $a\neq 0$ и для любых b, $c\in A$ равенство $a = b+c$ влечет $b = a$ или $c = a$;

простым (неразложимым в произведение), если $a\neq 1$ и из $a = bc$ следует, что $b = a$ или $c = a$ при любых b, $c\in A$.

В случае решетки $L(X)$ всех замкнутых множеств топологического пространства X неразложимыми элементами будут замыкания $[x]$ точек x из X. Если для T_0-пространства X верно обратное, то X называется *трезвым* пространством. Поэтому по решетке $L(X)$ замкнутых множеств трезвого пространства X легко восстанавливается само пространство X. Заметим, что все конечные T_0-пространства трезвые.

Лемма 1. *Трезвые пространства X и Y гомеоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их решетки $L(X)$ и $L(Y)$ замкнутых (открытых) множеств.*

Покажем, как по конечной дистрибутивной решетке A с $1 \neq 0$ найти такое упорядоченное множество X, чтобы решетка J всех *порядковых идеалов* ($\leq$-идеалов) в X была изоморфна A. В качестве X возьмем множество всех неразложимых элементов решетки A. Оно не пусто, поскольку содержит атомы решетки A. Будем рассматривать X как упорядоченное подмножество в A с индуцированным порядком. Тогда легко усмотреть справедливость следующего утверждения:

Лемма 2. *Для любого $a \in A$ эквивалентны условия:*

1) $a \in X$;

2) *порядковый идеал* $\{x \in X: x \leq a\}$ *в* X *главный;*

3) *фильтр* $B = [a) = \{b \in A: b \geq a\}$ *решетки* A *простой.*

Заметим, что система $J = J(X)$ всех порядковых идеалов произвольного упорядоченного множества X является множеством всех замкнутых множеств соответствующего T_0-пространства X.

Теперь можно установить изоморфность решеток A и J (см. [5, с. 161-162] или [2, § 12]), т. е. доказать знаменитую теорему Биркгофа.

Теорема 3 (Г. Биркгоф, 1933 год). *Любая конечная дистрибутивная решетка A изоморфна решетке J всех порядковых идеалов некоторого конечного упорядоченного множества X, определенного однозначно с точностью до порядкового изоморфизма.*

Доказательство. Можно считать конечную дистрибутивную решетку A неодноэлементной. Пусть, как и выше, X есть упорядоченное множество (относительно порядка в A) всех неразложимых элементов этой решетки, а J – дистрибутивная решетка всевозможных порядковых идеалов в X. Построим между решетками A и $J(X)$ изоморфизм, положив

$$f(a)=\{x \in X: x \leq a\} \in J(X),\ a \in A.$$

Для доказательства изоморфности отображения f проверим его биективность.

Сначала докажем инъективность f, взяв в A произвольные неравные друг другу элементы a, b. Можно предположить, что a не меньше b, и рассмотреть фильтр $B = [a)$. По предложению 5 Приложения V фильтр B лежит в некотором простом фильтре $C = [c)$, не содержащем элемент b. Такой элемент $c\in X$ по лемме 2. Значит, $c\in f(a)\setminus f(b)$ в силу определения f.

Докажем сюрьективность f. Для этого возьмем произвольный порядковый идеал $I\in J(X)$ и найдем для него такой элемент $a\in A$, чтобы $I=f(a)$. Если I – пустое множество, то $I=f(0)$. В противном случае полагаем

$$a=\sum I=x_1+x_2+...+x_n, \text{ где } I=\{x_1, x_2,.., x_n\}.$$

Ясно, что $I\subseteq f(a)$. Обратно, пусть $x\in f(a)$. Тогда в силу дистрибутивности

$$x=xa=xx_1+xx_2+...+xx_n.$$

Откуда $x=xx_k$ для подходящего индекса $k=1, 2, ..., n$ на основании неразложимости элемента x. Поэтому $x\leq x_k$. А так как I – порядковый идеал, то $x\in I$. Значит, и $f(a)\subseteq I$. И биективность f доказана.

Ясно, что $a\leq b$ влечет $f(a)\leq f(b)$ при любых $a, b\in A$. Обратно, пусть $f(a)\leq f(b)$. Тогда, по только что доказанному, $a=\sum f(a)\leq \sum f(b)=b$. Поэтому биекция f осуществляет искомый изоморфизм решеток $A\cong J(X)$.

Единственность (с точностью до порядкового изоморфизма) упорядоченного множества X, для которого $A\cong J(X)$, вытекает из леммы 1. Теорема доказана.

Для данной конечной дистрибутивной решетки A с $1\neq 0$ построим соответствующее упорядоченное множество X несколько иным способом. Пусть $Spec\,A$ – упорядоченное по включению множество всех простых идеалов решетки A. Следующее утверждение почти очевидно.

Лемма 3. *В решетке A соответствие между множеством всех простых (множеством всех неразложимых) элементов a и множеством $Spec\,A$ простых идеалов $(a]$ (всех простых фильтров $[a)$) взаимно однозначно.*

Теорема 4. *Упорядоченные множества (с индуцированным порядком) всех неразложимых элементов и всех простых элементов любой неодноэлементной конечной дистрибутивной решетки A порядково изоморфны.*

Доказательство. В любой решетке переход к дополнению осуществляет биекцию между множествами ее простых идеалов и простых фильтров. В конечной решетке все идеалы и фильтры главные.

Поэтому в силу леммы 3 между множеством X всех неразложимых элементов решетки A и множеством Y всех ее простых элементов существует естественное взаимно однозначное соответствие:

каждому $x\in X$ отвечает $y\in Y$, для которого $(y] = A\setminus[x)$.

Это соответствие является изоморфизмом упорядоченных множеств X и Y. В самом деле, соотношение $x_1\leq x_2$ в X равносильно включению простых фильтров $[x_1)\supseteq[x_2)$, которое равносильно включению простых идеалов $(y_1] = A\setminus[x_1)\subseteq A\setminus[x_2) = (y_2]$ для их набольших элементов $y_1, y_2\in Y$, а это, в свою очередь, означает, что $y_1\leq y_2$. Теорема доказана.

Из теорем 3 и 4 вытекает:

Теорема 5. *Всякая конечная дистрибутивная решетка A изоморфна решетке $J(Spec\ A)$ всех порядковых идеалов упорядоченного множества простых идеалов в A.*

Наконец, пусть дан гомоморфизм $f\colon X\to Y$ квазиупорядоченных множеств. Рассмотрим решетки $J(X)$ и $J(Y)$ всех ρ-идеалов для X и Y. Тогда отображение $f^1\colon J(Y)\to J(X), f^{-1}(U)\in J(X)$ для каждого ρ-идеала U квазиупорядоченного множества Y является решеточным гомоморфизмом, сохраняющим все точные грани.

Укажем обратное соответствие для конечных дистрибутивных решеток A и B. Возьмем произвольный решеточный гомоморфизм $\alpha\colon B\to A$, сохраняющий 0 и 1. По теореме 5 фактически мы имеем решеточный гомоморфизм $\alpha\colon J(Spec\ B)\to J(Spec\ A)$. Для каждого $P\in Spec\ A$ полагаем:

$f(P)$ есть наибольший элемент в $\alpha^{-1}(\{Q\in Spec\ A\colon Q$ не содержит $P\})$.

Получаем изотонное отображение $f\colon Spec\ A\to Spec\ B$, порождающее исходный гомоморфизм: $\alpha = f^1$.

Заметим также, что множество $Spec\ A$ с топологией $J(Spec\ A)$ называется *стоуновским* пространством произвольной дистрибутивной решетки A, по которому восстанавливается сама решетка A, если она конечна. С точностью до гомеоморфизма стоуновские пространства конечных дистрибутивных решеток – это в точности конечные T_0-пространства.

Суммируя сказанное о конечных структурах, получаем желаемый результат о взаимосвязи трех основных видов математических структур. См. также [1, 2, 4].

Теорема 6. *Следующие категории попарно эквивалентны или антиэквивалентны:*

(1) категория конечных дистрибутивных решеток и их гомоморфизмов, сохраняющих 0 и 1;

(2) категория конечных упорядоченных множеств с изотонными отображениями;

(3) категория конечных T_0-пространств с непрерывными отображениями.

Проследим указанные взаимосвязи на конкретном примере.

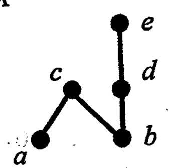
Иллюстрация

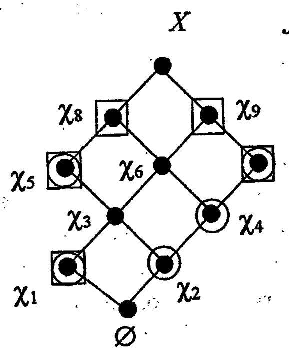
Рассмотрим связное пятиэлементное упорядоченное множество $X=\{a, b, c, d, e\}$ со следующим отношением порядка: $a\leq c$, $b\leq c$, $b\leq d\leq e$ (рефлексивность и $b\leq e$ предполагаются). Найдем его решетку порядковых идеалов $J(X)$ относительно включения $\subseteq$. Получаем следующие 11 порядковых идеалов нашего упорядоченного множества X: $\varnothing$, $\chi_1=\{a\}$, $\chi_2=\{b\}$, $\chi_3=\{a, b\}$, $\chi_4=\{b, d\}$, $\chi_5=\{a, b, c\}$, $\chi_6=\{a, b, d\}$, $\chi_7=\{b, d, e\}$, $\chi_8=\{a, b, c, d\}$, $\chi_9=\{a, b, d, e\}$ и $\{a, b, c, d, e\}=X$. Совокупность этих подмножеств множества X образует топологию, превращая X в пятиэлементное T_0-пространство $\langle X, J(X)\rangle$.

Рассмотрим диаграммы Хассе упорядоченного множества X и дистрибутивной решетки $J(X)$.

$J(X)$

X





Далее ищем неразложимые и простые элементы решетки $J(X)$. На диаграмме видно, что неразложимыми элементами, которые мы отмечаем кружочками, будут в точности χ_1, χ_2, χ_4, χ_5, χ_7. А простые элементы, помеченные квадратиками, – это χ_1, χ_5, χ_7, χ_8 и χ_9. Элементы χ_1, χ_5, χ_7 одновременно являются неразложимыми и простыми.

Очевидно, что относительно решеточного порядка упорядоченное множество простых элементов дистрибутивной решетки $J(X)$ (порядково) изоморфно X:

$$\chi_1 \to b,\ \chi_5 \to d,\ \chi_7 \to a,\ \chi_8 \to e,\ \chi_9 \to c. \qquad (1)$$

Упорядоченное множество неразложимых элементов решетки $J(X)$ также изоморфно X:

$$\chi_1 \to a,\ \chi_2 \to b,\ \chi_4 \to d,\ \chi_5 \to c,\ \chi_7 \to e. \qquad (2)$$

Посмотрим теперь на $J(X)$ как на абстрактную одиннадцатиэлементную дистрибутивную решетку A с $0 \equiv \varnothing$ и $1 \equiv X$. Обозначения остальных элементов A сохраним такими же, как и на диаграмме. Найдем все простые идеалы и простые фильтры этой решетки. Легко усмотреть, что простые идеалы совпадают с (главными) идеалами, порожденными каждым из простых элементов A. Простыми же фильтрами служат фильтры, порожденные неразложимыми элементами. Возьмем, к примеру, простой идеал $\{0, \chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_5\}$, порожденный простым элементом χ_5. Его теоретико-множественным дополнением в A служит шестиэлементный простой фильтр, порожденный неразложимым элементом χ_4. В решетке A существуют еще четыре аналогичных пары: простой элемент$\to$неразложимый элемент. Соответствие основывается на отображениях (1) и (2):

$$\chi_1 \to b \leftarrow \chi_2,\ \chi_5 \to d \leftarrow \chi_4,\ \chi_7 \to a \leftarrow \chi_1,\ \chi_8 \to e \leftarrow \chi_7 \text{ и } \chi_9 \to c \leftarrow \chi_5.$$

Меры на конечных множествах

Мерой на множестве X со значениями в ограниченной решетке L назовем любое отображение μ: $\mathbf{B}(X) \to L$, такое, что $\mu(\varnothing) = 0$, $\mu(X) = 1$ и $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ для всех $A, B \subseteq X$. *Пространство с мерой* – это пара $\langle X, \mu \rangle$, где μ есть мера на множестве X.

Пусть $\langle X, \leq \rangle$ – конечное упорядоченное множество. Каждому порядковому идеалу в X поставим в соответствие сам этот идеал, рассматриваемый как элемент решетки $L = J(X)$. Продолжим это соответствие до сюръективного отображения μ: $\mathbf{B}(X) \to L$. Мы знаем, что $J(X)$ является множеством всех замкнутых множеств

T_0-пространства X, дуального к $\langle X, J(X)\rangle$. Поэтому элементы $\mu(\{x\})$, $x\in X$, – это в точности неразложимые элементы решетки $J(X)$. Для любого $A\subseteq X$ полагаем:

$$\mu(A) = [A]\in J(X) = L,$$

где $[A]$ – замыкание множества A в пространстве X. Поскольку $[A\cup B] = [A]\cup[B]$, то μ: $\mathbf{B}(X)\to L$ есть мера на множестве X.

Полученная мера μ *разделяет точки множества* X, т. е. $\mu(\{x\})\neq\mu(\{y\})$, если $x\neq y$ в X. Действительно, для различных точек x, y T_0-пространства X имеем $[x]\neq[y]$, откуда $\mu(\{x\})\neq\mu(\{y\})$. Ясно, что $\mu(A) = 0$ только при пустом $A\in\mathbf{B}(X)$. Кроме того, $\mu(\{x\}) = [x] = \{x\}$ для минимальных элементов x упорядоченного множества X.

Возьмем теперь произвольное непустое конечное множество X и меру μ на X, отображающую $\mathbf{B}(X)$ на (конечную) дистрибутивную решетку L. Предположим, что мера μ разделяет точки множества X и множество значений $\mu(\{x\})$, $x\in X$, совпадает с множеством всех неразложимых элементов решетки L. Такие меры μ будем называть *специальными мерами*.

Для каждого $a\in L$ определим множество $X_a\subseteq X$:

$$X_a = \cup\mu^{-1}(a) = \cup\{A\in\mathbf{B}(X)\colon \mu(A) = a\}.$$

Тем самым, X_a есть наибольшее подмножество в X, на котором мера μ принимает значение a. Покажем, что множество $\{X_a\colon a\in L\}$ замкнуто относительно операций пересечения и объединения, точнее, $X_a\cap X_b = X_{ab}$ и $X_a\cup X_b = X_{a+b}$ при любых $a, b\in L$. Сначала докажем лемму.

Лемма 4. *Для любых $A\subseteq X$ и $a\in L$ справедливо соотношение:*

$$A\subseteq X_a \Leftrightarrow \mu(A)\leq a.$$

Доказательство. Если $A\subseteq X_a$, то $A\cup X_a = X_a$, откуда $\mu(A)+\mu(X_a) = \mu(X_a) = a$. Поэтому $\mu(A)\leq a$. Обратно, пусть $\mu(A)\leq a$. Тогда $\mu(A\cup X_a) = \mu(A)+\mu(X_a) = \mu(A)+a = a$. Значит, $A\cup X_a = X_a$ и $A\subseteq X_a$.

Для $a, b\in L$ имеем:

$$X_a\subseteq X_b \Leftrightarrow X_a\cup X_b = X_b \Leftrightarrow \mu(X_a)+\mu(X_b) = \mu(X_b) \Leftrightarrow \mu(X_a)\leq\mu(X_b) \Leftrightarrow a\leq b.$$

Поэтому $X_a \cap X_b \supseteq X_{ab}$ и $X_a \cup X_b \subseteq X_{a+b}$. С другой стороны, по лемме 4 $\mu(X_a \cap X_b) \le \mu(X_a) = a$ и $\mu(X_a \cap X_b) \le \mu(X_b) = b$, значит, $\mu(X_a \cap X_b) \le ab$, откуда $X_a \cap X_b \subseteq X_{ab}$. Остается проверить включение $X_a \cup X_b \supseteq X_{a+b}$. Берем $x \in X_{a+b}$. Тогда $p = \mu(\{x\}) \le a+b$, и $p = p(a+b) = pa+pb$. Поскольку элемент $p \in L$ неразложим, то $p = pa$ или $p = pb$, т. е. $p \le a$ или $p \le b$. Поэтому $X_p \subseteq X_a$ или $X_p \subseteq X_b$. Стало быть, $x \in X_p \subseteq X_a \cup X_b$.

Следовательно, множество $\{X_a\colon a \in L\}$ является подрешеткой булеана $\mathbf{B}(X)$, изоморфной решетке L при соответствии $X_a \leftrightarrow a$.

Зададим на множестве X отношение порядка по формуле:

$$x \le y \Leftrightarrow \mu(\{x\}) \le \mu(\{y\}) \text{ для любых } x, y \in X.$$

Очевидно, что $\langle X, \le \rangle$ – упорядоченное множество. Покажем, что порядковыми идеалами в X служат множества вида X_a и только они. На основании леммы 4 заключаем, что

$$X_a = \{x \in X\colon \mu(\{x\}) \le a\},\ a \in L.$$

Поэтому X_a является порядковым идеалом упорядоченного множества X. Обратно, рассмотрим произвольный порядковый идеал J в X. Докажем равенство $J = X_a$ при $a = \mu(J) \in L$. Для любого $x \in X$ верно равенство $X_{\mu(\{x\})} = \{y \in X\colon \mu(\{y\}) \le \mu(\{x\})\} = (x]$. Кроме того, имеем

$$\mu(J) = \Sigma\{\mu(\{x\})\colon x \in J\}.$$

Следовательно,

$$J = \cup\{X_{\mu(\{x\})}\colon x \in J\} = X_{\mu(J)} = X_a.$$

Таким образом, доказан следующий результат:

Предложение 1. *Для любого непустого конечного множества X существует взаимно однозначное соответствие между множеством всевозможных упорядочений X и множеством всех специальных мер на нем.*

Далее пусть даны пространства с мерой $\langle X, \mu \rangle$ и $\langle Y, \nu \rangle$, где $\mu\colon \mathbf{B}(X) \to L$ и $\nu\colon \mathbf{B}(Y) \to T$ для соответствующих ограниченных решеток L и T. *Морфизмом* пространства $\langle X, \mu \rangle$ в пространство $\langle Y, \nu \rangle$ называется пара отображений $f\colon X \to Y$ и $\alpha\colon T \to L$, таких, что α – решеточный гомоморфизм, сохраняющий 0 и 1, и для всех $Z \subseteq Y$ выполняется равенство $\mu(f^{1}(Z)) = \alpha(\nu(Z))$. Очевидным образом определяется композиция морфизмов. В результате получается категория пространств с мерой. Рассмотрим ее подкатегорию M, объектами которой являются всевозможные конечные пространства $\langle X, \mu\rangle$ со специальной мерой.

Предложение 2. *Категория M эквивалентна категории всех конечных упорядоченных множеств с изотонными отображениями.*

Вместо специальной меры μ: $\mathbf{B}(X) \to L$ на конечном множестве X можно рассмотреть систему $\mathbf{D}$-значных мер на X, где $\mathbf{D} = \{0, 1\}$ – фиксированная двухэлементная цепь. Именно, для каждого $x\in X$ определим меру μ_x: $\mathbf{B}(X) \to \mathbf{D}$ следующим образом:

$$\mu_x(A) = \begin{cases} 1, \textit{если}\, \mu(A) \geq \mu(\{x\}) \\ 0 - \textit{в противном случае} \end{cases} \quad \text{для всех } A\in \mathbf{B}(X).$$

Семейство мер $(\mu_x)_{x\in X}$ разделяет точки множества X. Возьмем различные точки $x, y\in X$. Имеем $\mu(\{x\}) \neq \mu(\{y\})$, скажем, не выпоняется неравенство $\mu(\{x\}) \leq \mu(\{y\})$. Тогда $\mu_x(\{x\}) = 1 \neq 0 = \mu_x(\{y\})$. Кроме того, $\mu_x \neq \mu_y$. Действительно, если элементы $\mu(\{x\})$ и $\mu(\{y\})$ решетки $\mu(\mathbf{B}(X))$ несравнимы, то $\mu_x(\{x\}) = 1 \neq 0 = \mu_y(\{x\})$. Если же элементы $\mu(\{x\})$ и $\mu(\{y\})$ сравнимы, то $\mu_y(\{x\}) = 0 \neq 1 = \mu_x(\{x\})$ в случае $\mu(\{x\}) < \mu(\{y\})$ и $\mu_y(\{y\}) = 1 \neq 0 = \mu_x(\{y\})$ в случае $\mu(\{y\}) < \mu(\{x\})$.

Какими еще свойствами обладает семейство мер $(\mu_x)_{x\in X}$, соответствующее специальной мере μ на X? Для решения этого вопроса перенумеруем элементы множества X: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Для $k = 1, 2, \ldots, n$ обозначим $\mu_k = \mu_{x_k}$. Зададим отображение φ: $\mathbf{B}(X) \to \mathbf{D}^n$ формулой:

$$\varphi(A) = (\mu_1(A), \mu_2(A), \ldots, \mu_n(A)) \text{ при } A \subseteq X.$$

Образ $\mathrm{Im}\,\varphi$ отображения φ является подрешеткой булевой решетки $\mathbf{D}^n$. Заметим, что n-ки $\varphi(\{x\})$, $x\in X$, – ненулевые в силу теоремы 27 и упражнения 39 Приложения V, а также леммы 3. Они порождают полурешетку $\langle \mathrm{Im}\,\varphi\backslash\{0\}, +\rangle$ и образуют множество всех неразложимых элементов дистрибутивной решетки $\mathrm{Im}\,\varphi = \varphi(\mathbf{B}(X))$. При этом решетка $\mathrm{Im}\,\varphi$ изоморфна подрешетке $\{X_a\colon a\in L\}$ булеана $\mathbf{B}(X)$, которая, в свою очередь изоморфна L. Поэтому решетки $\mathrm{Im}\,\varphi$ и L канонически изоморфны. И, фактически, пространства с мерой $\langle X, \varphi\rangle$ и $\langle X, \mu\rangle$ изоморфны между собой.

Обратно. Пусть на n-элементном множестве X заданы попарно различные $\mathbf{D}$-значные меры $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$. Как и выше, определим отображение φ: $\mathbf{B}(X) \to \mathbf{D}^n$. Такое φ осуществляет $\cup$-гомоморфизм булеана $\mathbf{B}(X)$ на верхнюю подполурешетку $L = \mathrm{Im}\,\varphi$ в $\mathbf{D}^n$. Ясно, что в L любой элемент $a \neq 0 \equiv (0, 0, \dots, 0)$ является суммой элементов вида $\varphi(\{x\})$, $x\in X$. Предположим, что система мер $(\mu_k) = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ удовлетворяет следующим условиям:

1) система (μ_k) разделяет точки множества X, т. е. для любых различных элементов $x, y\in X$ существует такой номер $1\leq k\leq n$, что $\mu_k(\{x\}) \neq \mu_k(\{y\})$;

2) для любых $x, y\in X$ найдется множество $A \subseteq X$, для которого $\mu_k(\{x\})\cdot\mu_k(\{y\}) = \mu_k(\{A\})$ при всех $k = 1, 2, \dots, n$.

Условие 2) обеспечивает то, что полурешетка $L = \mathrm{Im}\,\varphi$ является подрешеткой булевой решетки $\mathbf{D}^n$.

Систему $\mathbf{D}$-значных мер $(\mu_k) = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ на n-элементном множестве X назовем *согласованной*, если она удовлетворяет условиям 1) и 2) и множество элементов $\varphi(\{x\})$, $x\in X$, совпадает с множеством всех неразложимых элементов решетки $\mathrm{Im}\,\varphi$.

Предложение 3. *Для любого конечного множества X соответствие $\mu \leftrightarrow (\mu_k)$ между специальными мерами μ на X и согласованными системами $\{0, 1\}$-значных мер (μ_k) на X взаимно однозначно (с точностью до соответствующих изоморфизмов).*

Упражнения

1. Подробно докажите теоремы 1 и 2.

2. Проверьте справедливость лемм 1-3.

3. Сформулируйте утверждение, двойственное лемме 2. Верно ли оно?

4. Обозначим через $\mathbf{C}_n$ n-элементную цепь. Ясно, что $J(\mathbf{C}_n) \cong \mathbf{C}_{n+1}$. Пусть упорядоченное множество $X=\mathbf{C}_m\cup\mathbf{C}_n$ есть несвязное объединение цепей. Что представляет собой решетка $J(X)$?

5. Покажите, что для несвязного объединения U двух конечных упорядоченных множеств X и Y выполняется равенство $J(U)=J(X)\times J(Y)$, т. е. решетка $J(U)$ разложима. Верно ли обратное утверждение?

6. Какие решетки $J(X)$ имеют: антицепи X; булеаны X; произвольные цепи X?

7. Как связаны решетки $J(X)$ и $J(Y)$ двойственных друг другу упорядоченных множеств X и Y?

8. Найдите неразложимые и простые элементы восьмиэлементной булевой решетки.

9. Постройте все топологии на четырехэлементном множестве.

10. Докажите, что множества X со строгим отношением порядка – это в точности *транзитивные простые ориентированные графы* X. Напомним, что ориентированный граф называется простым, если в нем нет петель и любые две его различные вершины могут быть соединены только одной дугой (направленным ребром). Транзитивность ориентированного графа Γ означает, что существование в Γ дуг $A \to B$ и $B \to C$ влечет существование дуги $A \to C$.

11. Пусть μ – произвольная мера, отображающая булеан $\mathbf{B}(X)$ конечного множества X на дистрибутивную решетку L. Докажите, что $X_a \cap X_b = X_{ab}$ при любых $a, b \in L$.

12. Предположим, что мера μ такова же, что и в предыдущем упражнении. Покажите, что $X_a \cup X_b = X_{\mu(\{x\})}$ влечет $X_a = X_{\mu(\{x\})}$ или $X_b = X_{\mu(\{x\})}$ для любых $x \in X$ и $a, b \in L$.

13. Дайте определение изоморфизма для пространств с мерой.

14. Проверьте, что композиция морфизмов пространств с мерой также является морфизмом.

15. Докажите предложение 2.

16. Убедитесь, что определенные выше $\mathbf{D}$-значные отображения μ_x действительно являются мерами на X.

17. Как связаны меры μ_x с решеточными гомоморфизмами $L \to \mathbf{D}$?

18. Определите понятие изоморфизма систем $\mathbf{D}$-значных мер на множествах X и Y. А что следует понимать под их морфизмом?

19. Можно ли в определении согласованной системы мер (μ_k) на n-элементном множестве брать $m \neq n$ мер?

20. Докажите предложение 3.

21. Сформулируйте аналог предложения 2 для пространств с **D**-значными системами с **D**-значных мер. Докажите полученное утверждение.

Литература

1. *Биркгоф Г.* Теория решеток. – М.: Наука, 1984.

2. *Вечтомов Е.М.* Теория решеток. – Киров: Изд-во КГПИ, 1995.

3. *Гретцер Г.* Общая теория решеток. – М.: Мир, 1982.

4. *Джонстон П.Т.* Теория топосов. – М.: Наука, 1986.

5. *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика. – М.: Мир, 1990.

6. *Stone M.* Applications of the theory of Boolean rings to general topology // Trans. Amer. Math. Soc. 1937. V. 41. № 3. – P. 375-481.

Дополнение

Добавим к сказанному, что существуют самые разнообразные связи между различными математическими структурами, как абстрактными, так и конкретными, – связи формальные и связи содержательные.

Укажем ряд работ, в том числе книги [1, 7-12, 14, 15] из популярной серии «Современная математика», в которых прослежены такие связи.

(1) *Бахман Ф., Шмидт Э.* n-угольники. – М.: Мир, 1973.

(2) *Вечтомов Е.М.* Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами функций на них // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Геометрия. Топология. 1990. Т. 28. – С. 3-46.

(3) *Вечтомов Е.М.* Кольца непрерывных функций на топологических пространствах. – М.: МПГУ, 1992.

(4) *Вечтомов Е.М.* Функциональные представления колец. – М.: МПГУ, 1993.

(5) *Вечтомов Е.М.* Полукольца непрерывных отображений// Вестник ВятГГУ. 2004. № 10. – С. 57-64 (грант РФФИ № 03-01-07005).

(6) *Владимиров Д.А.* Булевы алгебры. – М.: Наука, 1969.

(7) *Гроссман И., Магнус В.* Группы и их графы. – М.: Мир, 1971.

(8) *Коблиц Н.* p-адические числа, p-адический анализ и дзета-функции. – М.: Мир, 1982.

(9) *Косневски Ч.* Начальный курс алгебраической топологии. – М.: Мир, 1983.

(10) *Милнор Дж., Уоллес А.* Дифференциальная топология. Начальный курс. – М.: Мир, 1972.

(11) *Рид М.* Алгебраическая геометрия для всех. – М.: Мир, 1991.

(12) *Рингель Г.* Теорема о раскраске карт. – М.: Мир, 1977.

(13) *Хартсхорн Р.* Алгебраическая геометрия. – М.: Мир, 1981.

(14) *Хартсхорн Р.* Основы проективной геометрии. – М.: Мир, 1970.

(15) *Шоке Г.* Геометрия. – М.: Мир, 1970.

(16) *Vechtomov E.M.* Rings of continuous functions. Algebraic aspects // J. Math. Sciences (USA). 1994. V. 71, № 2. – P. 2364-2408.

(17) *Vechtomov E.M.* Rings and sheaves // J. Math. Sciences (USA). 1995. V. 74, № 1. – P. 749-798.

(18) *Vechtomov E.M.* Rings of continuous functions with values in topological division ring // J. Math. Sciences (USA). 1996. V. 78, № 6. – P. 702-753.

VIII. Некоторые классические модели

Учить абстрактному,
не изучив конкретного, –
непростительный грех.
З. А. Мелзяк

1. Модели динамики популяции

Несколько обобщим известную мягкую логистическую модель с отловом, добавив в нее новый параметр d, характеризующий постоянный отлов, не зависящий от периода времени. Методически эта обобщенная модель с четырьмя параметрами удобна тем, что ее частными случаями служат все основные модели динамики популяции: жесткая модель Мальтуса, логистическая модель, экспоненциальная модель с отловом, логистическая модель с отловом и уже названная мягкая логистическая модель с отловом.

Итак, рассмотрим дискретный вариант мягкой логистической модели с двойным отловом:

$$x_{n+1} = (a - bx_n)x_n - cx_n - d, \qquad (1)$$

где x_n – биомасса (численность) популяции в n-й период (или момент) времени, n – неотрицательное целое число, a – коэффициент прироста популяции, b – коэффициент естественной убыли популяции, cx_n – так называемый отлов, линейно зависящий от текущей биомассы с коэффициентом пропорциональности c, коэффициент d охарактеризован выше. Все коэффициенты (параметры) a, b, c, d – фиксированные для конкретной модели (1) неотрицательные действительные числа.

При $b=c=d=0$ получаем модель Мальтуса роста народонаселения

$$x_{n+1} = ax_n, \text{ или } x_n = a^n x_0, \qquad (2)$$

где $a>1$ и x_0 – численность населения данной страны в начальный период времени, или в начальной точке отсчета. Ежегодный k-процентный прирост населения дает значение $a = 1+k/100$.

При $c=d=0$ из (1) получаем хорошо известную более мягкую логистическую модель роста населения

$$x_{n+1} = (a - bx_n)x_n; \qquad (3)$$

здесь постоянный коэффициент прироста населения заменяется переменным множителем, линейно зависящим от x_n. Интересно отметить, что по разным оценкам (при различных подходах к адекватным значениям параметров a и b) модель (3) дает стационарное значение населения Земли в пределах от 16 до 20 миллиардов человек.

Далее, взяв b=c=0, получаем экспоненциальную модель с отловом

$$x_{n+1} = ax_n - d. \qquad (4)$$

Если c=0, то приходим к логистической модели с отловом

$$x_{n+1} = (a - bx_n)x_n - d. \qquad (5)$$

Наконец, положив в формуле (1) d=0, получим мягкую логистическую модель с отловом:

$$x_{n+1} = (a - bx_n)x_n - cx_n. \qquad (6)$$

Проведем краткий анализ обобщенной модели (1). Это одномерная дискретная мягкая модель, зависящая от величины четырех параметров. Обычно величина a чуть больше 1, b, c – немного больше 0, d и x_n измеряются в условных единицах, скажем, в миллионах человек. Найдем стационарные значения x_n, т. е. такие, что $x_{n+1}=x_n$. Для этого обозначим общее значение $x:=x_{n+1}=x_n$, и подставим его в формулу (1):

$$x = (a - bx)x - cx - d, \text{ или } bx^2 - (a\text{-}c\text{-}1)x + d = 0. \qquad (7)$$

По формуле Виета получаем два решения уравнения (7):

$$x_{(1),(2)} = 1/2b(a\text{-}c\text{-}1 \pm ((a\text{-}c\text{-}1)^2 - 4bd)^{1/2}), \qquad (8)$$

причем $x_{(1)}>x_{(2)}$ в случае, когда дискриминант $D = (a\text{-}c\text{-}1)^2 - 4bd > 0$. В этом случае стационарные значения $x_{(1)}$ и $x_{(2)}$ характеризуют соответственно устойчивый и неустойчивый уровни поведения модели (1). Случай $D<0$ – вырожденный, не имеющий стационарных значений.

Рассмотрим отдельно случай $D = 0$. Тогда получаем критическое значение постоянного отлова и критическое стационарное значение

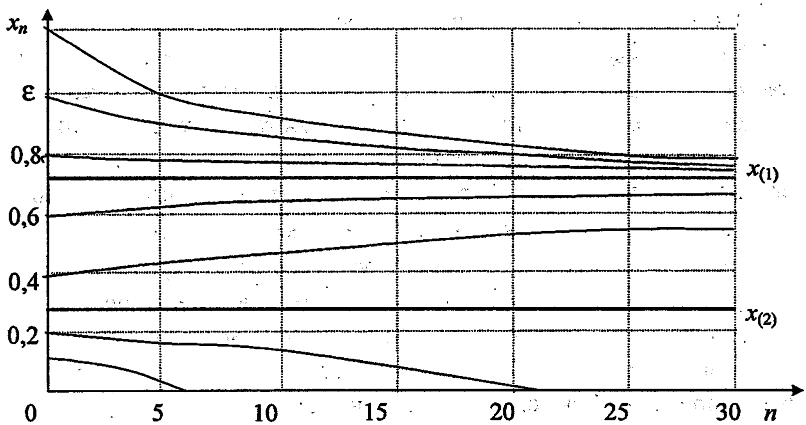
$$d_{кр} = (a\text{-}c\text{-}1)^2/4b \text{ и } x_{кр} = x_{(1)}=x_{(2)}= (a\text{-}c\text{-}1)/2b. \qquad (9)$$

Возьмем конкретные значения параметров: a=1,15; b=0,1; c=0,05 и d=0,02. Пусть условная единица ε=100 миллионов человек. Тогда получаем

$$x_{n+1} = (a - bx_n)x_n - cx_n - d = - 0{,}1x_nx_n + 1{,}1\, x_n - 0{,}02. \qquad (10)$$

По формуле (8) вычисляем устойчивое и неустойчивое стационарные значения $x_{(1)}$≈0,724ε=72,4 млн. человек и $x_{(2)}$≈0,276ε=27,6 млн. человек. Составим таблицу значений x_n для n = 5, 10, 15, 20, 25, 30 при начальных условиях x_0 = 0,1; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1; 1,2, вычисляя их по формуле (10) с точностью до 0, 001. В этой таблице N – это номер n, при котором величина x_n впервые достигает нуля или соответствующих стационарных значений с точностью до 0,001. Таблица значений составлена с помощью программы Excel.

x_0	x_5	x_{10}	x_{15}	x_{20}	x_{25}	x_{30}	N
0,1	0,018	0	0	0	0	0	6
0,2	0,172	0,139	0,092	0,024	0	0	22
0,4	0,425	0,448	0,472	0,497	0,522	0,546	204
0,6	0,623	0,639	0,654	0,666	0,677	0,685	161
0,8	0,779	0,767	0,757	0,750	0,744	0,740	93
$\varepsilon \equiv 1$	0,905	0,856	0,823	0,799	0,781	0,768	114
1,2	1,007	0,921	0,867	0,830	0,804	0,785	120



Из приведенной таблицы и траекторий кривых, описывающих процесс изменения величины x_n в зависимости от начальных нестационарных значений x_0, видим, что возможны три случая:

1) при $x_0 < x_{(2)}$ существует момент времени N, при котором x_N =0 (или отрицательно);

2) при $x_{(2)} < x_0 < x_{(1)}$ с ростом n величина x_n, монотонно возрастая, стремится к устойчивому стационарному уровню $x_{(1)}$;

3) при $x_0 > x_{(1)}$ с ростом n величина x_n, монотонно убывая, также стремится к значению $x_{(1)}$.

Далее, при указанных значениях параметров a=1,15, b=0,1 и c=0,05, вычислим по формулам (9) критическое значение фиксированной убыли населения и критическое стационарное значение численности населения (некоторой страны): $d_{кр}$ = 0,01/0,4 = 0,025 у.е. = 0,025ε = 2,5 млн. человек и $x_{кр}$ = 0,1/0,2 = 0,5 у.е. = 50 млн. человек. При полученном значении $d_{кр}$ стационарная величина $x_{кр}$ = 50 млн. человек является в определенном смысле оптимальным значением «снизу» – численность населения x будет монотонно убывать до $x_{кр}$ в случае $x > x_{кр}$. Но даже при малом отклонении $x < x_{кр}$, которое может быть вызвано внемодельными факторами, наступает катастрофа – через обозримое время население вымирает. Поэтому такое состояние неустойчиво и, в терминологии В. И. Арнольда [1], есть «оптимизация как путь к катастрофе».

Перечислим возможные интерпретации модели (1).

I. Пусть x_n – численность работающего населения в данной стране в n-й период времени. Как и выше, параметры a и b характеризуют естественный прирост и естественную убыль работающего населения. Коэффициент c соответствует смертности работающего населения от стрессов в переходный период развития страны. А величина d может означать постоянный призыв в армию работающей молодежи. Условная единица ε измеряется в миллионах человек, скажем, ε = 60 млн. человек.

II. Предположим, что x_n – это биомасса рыбы в пруду в n-м сезоне (в тоннах). Коэффициенты a и b описывают естественные прирост и мор рыбы в водоеме. Величина cx_n – это планируемый сезонный вылов рыбы (квота отлова), разводимой в данном пруду, а величина d есть несанкционированный вылов рыбы (браконьерство).

III. Возьмем финансово-экономическую интерпретацию, в которой x_n означает доход (или капитал) фирмы в n-м году, коэффициент a характеризует ее рентабельность (рост производительности труда), коэффициент b учитывает конкуренцию, величина cx_n показывает налоги, ежегодно уплачиваемые фирмой, и d

есть платежи фирмы за аренду, не меняющиеся в течение ряда лет. Здесь условной единицей может служить, например, ε=1 млн. долларов.

2. Модели конфликтов

Модель Ланкастера военного конфликта. Это простейшая жесткая модель войны двух вражеских армий численностью x и y человек соответственно. Сами противоборствующие армии также будем обозначать буквами x и y. Текущее состояние модели описывается точкой $M(x; y)$ положительной четверти координатной плоскости. Поэтому модель Ланкастера двумерна. *Дискретная модель Ланкастера* имеет вид

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - by_n \\ y_{n+1} = y_n - ax_n, \end{cases} \qquad (1)$$

где x_n, y_n – численности армий x, y в n-й период (n-ю единицу времени), военных действий, фиксированные коэффициенты $a > 0$ и $b > 0$ характеризуют мощность вооружения армий x и y соответственно. Считается, что за единицу времени один солдат армии x уничтожает a солдат армии y и один солдат армии y уничтожает b солдат первой армии. Время протекания военного конфликта разбивается на одинаковые по продолжительности периоды (минуты, часы, дни, годы и т. п.).

В самом начале войны состояние модели определяется точкой $M(x_0; y_0)$, задающей так называемые *начальные условия*. Подставляя значение n=0 в систему (1), находим точку $M(x_1; y_1)$. Затем последовательно находим точки $M(x_2; y_2)$, $M(x_3; y_3)$ и т. д. В результате получаем (дискретную) *траекторию конфликта*. Предполагается, что война заканчивается, если в некоторый период времени n наблюдается один из следующих случаев (берется наименьшее из таких значение n).

1. $x_n > 0$ и $y_n \leq 0$, т. е. кривая конфликта пересечет луч $0X$, означая победу армии x.

2. $x_n \leq 0$ и $y_n > 0$, т. е. кривая конфликта пересечет луч $0Y$, что приносит победу армии y.

3. $x_n \leq 0$ и $y_n \leq 0$ – взаимное истребление армий противников (фактически траектория конфликта заканчивается в начале координат, а чисто теоретически – неограниченно стремится к этой точке).

Уравновешенность потерь характеризует одинаковую силу армий. *Условие равновесия* определяется равенством отношений $x_{n+1}/y_{n+1} = x_n/y_n$. Оно в силу (1) эквивалентно равенству

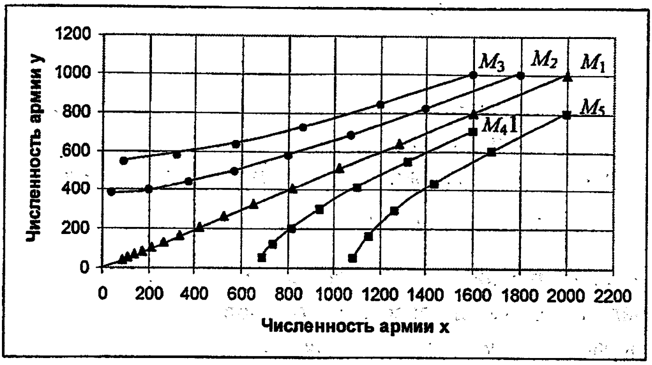
$$\frac{x_n - by_n}{y_n - ax_n} = \frac{x_n}{y_n}, \qquad (2)$$

которое в свою очередь эквивалентно соотношению $ax_n^2 = by_n^2$. Легко видеть, что выполнение равенства (2) для некоторого неотрицательного целого числа n влечет его выполнение для всех n. Поэтому условие равновесия определяется равенством $ax_0^2 = by_0^2$, т. е. соотношением

$$y_0 = \sqrt{\frac{a}{b}}x_0. \qquad (3)$$

Возьмем прямую OL, заданную уравнением $y = \sqrt{\frac{a}{b}}x$. Она разбивает первую четверть координатной плоскости на верхнюю и нижнюю части. Если точка $M(x_0;\ y_0)$, соответствующая начальному состоянию модели, находится в верхней части, что равносильно неравенству $y_0 > \sqrt{\frac{a}{b}}x_0$, то получим случай 2, т. е. победу армии y за конечное время. Если же $M(x_0; y_0)$ принадлежит нижней части четверти, или $y_0 < \sqrt{\frac{a}{b}}x_0$, то приходим к случаю 1, т. е. к победе армии x. Поэтому прямую OL называют *разделяющей прямой* для модели Ланкастера. Выполнение равенства (3) показывает, что начальная точка $M(x_0;y_0)$ находится на разделяющей прямой, что соответствует случаю 3.

Проиллюстрируем сказанное на конкретных случаях при $a = 0{,}1$ и $b = 0{,}4$. Зададим пять вариантов начальных условий точками: $M_1 = M(2000;\ 1000)$, $M_2 = M(1800;\ 1000)$, $M_3 = M(1600;\ 1000)$, $M_4 = M(1600;\ 700)$ и $M_5 = M(2000;\ 800)$. Разделяющая прямая $y = 0{,}5x$ здесь общая. Пользуясь Excel, находим координаты нескольких первых точек каждой из пяти траекторий конфликта, изображаем эти точки на координатной плоскости и соединяем их линиями. В результате получаем следующий графический рисунок.



Обозначим $k=\sqrt{\frac{a}{b}}>0$. Откуда $k^2=a/b$. Следовательно, для уравновешивания численности армий ($y=kx$) необходимо и достаточно, чтобы вооруженность армии x отличалась от вооруженности армии y в k^2 раз. Скажем, если армия y вдвое численно превосходит армию x, то для удержания равновесной ситуации армия x должна превосходить армию y в вооружении в четыре раза. И наоборот, если армия x вооружена в девять раз лучше армии y, то численность армии y должна втрое превосходить численность армии x. Стало быть, в модели Ланкастера превосходство армии в численности важнее ее превосходства в вооружении. Эта модель применима ко многим прошлым войнам, но в условиях использования современного оружия массового уничтожения она не работает.

Для обоснования того, что война завершится за конечное время и мы получим один из сценариев 1-3, можно проанализировать соответствующую непрерывную модель Ланкастера. Она имеет дифференциальный вид:

$$\begin{cases} x'=-by, \\ y'=-ax, \end{cases} \qquad (4)$$

где a и b означают то же, что и в дискретной модели (1), $x=x(t)$ и $y=y(t)$ – численности армий как функции непрерывно текущего времени t. Производные $x'=dx/dt$ и $y'=dy/dt$ выражают скорость убывания численности армий x и y из-за потерь. При выборе малой единицы времени приблизительно получаем $x'=x_{n+1}-x_n$ и $y'=y_{n+1}-y_n$. Значит, дискретная (1) и непрерывная (4) модели Ланкастера согласованы друг с другом.

Решим систему (4). Имеем $dx/by = -dt = dy/ax$, или $axdx = bydy$. Переходя к неопределенным интегралам, находим решение данной системы дифференциальных уравнений: $ax^2 - by^2 = C$ (const). Придавая C ненулевые действительные значения, получаем семейство гипербол, разделенное прямой $y=\sqrt{\frac{a}{b}}x$ (C=0). При C> 0 гиперболы располагаются под разделяющей прямой OL и пересекают ось абсцисс. А при C< 0 они находятся над прямой OL и пересекают ось ординат.

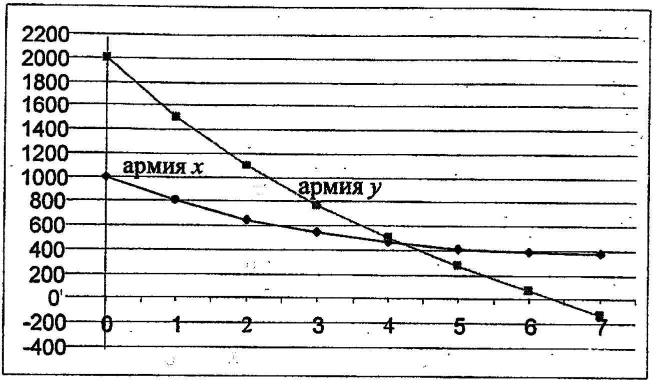
Теперь рассмотрим случаи 1-3 для конкретных начальных условий $x_0 = 1000$, $y_0 = 2000$ при фиксированном значении $b = 0,1$. А параметру a будем придавать последовательно значения 0,5, 0,3 и 0,4. С помощью Excel построим таблицы и соответствующие графики течения военного конфликта вплоть до его окончания ввиду полного истребления одной из армий. По оси абсцисс откладывается время, по оси ординат – численность армий.

Случай 1

Берутся $a = 0,5$ и $b = 0,1$. Поскольку $y_0 = 2000 < \sqrt{5}\cdot 1000 = \sqrt{\frac{a}{b}}x_0$, то победит армия x.

n	x_n	y_n
0	1000	2000
1	800	1500
2	650	1100
3	540	775
4	462,5	505
5	412	273,75
6	384,625	67,75
7	377,85	-124,563

Из приведенной таблицы видим, что на 7-м этапе ведения войны армия y уничтожена, а в армии x осталось примерно 380 человек.

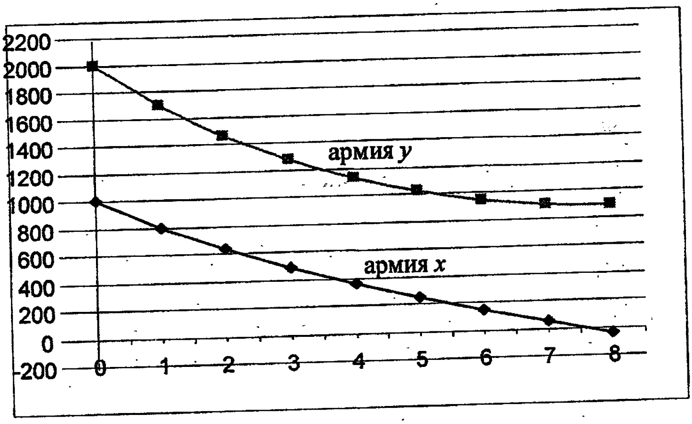


Случай 2

Полагаем $a = 0{,}3$ и $b = 0{,}1$. Имеем $y_0 = 2000 > \sqrt{3}\cdot 1000 = \sqrt{\frac{a}{b}}x_0$. Поэтому побеждает армия y.

n	x_n	y_n
0	1000	2000
1	800	1700
2	630	1460
3	484	1271
4	356,9	1125,8
5	244,32	1018,73
6	142,447	945,434
7	47,9036	902,6999
8	-42,3664	888,3288

Из таблицы видно, что на 8-м этапе ведения войны армия x истреблена, а в армии y осталось еще около 900 человек из первоначальных 2000.

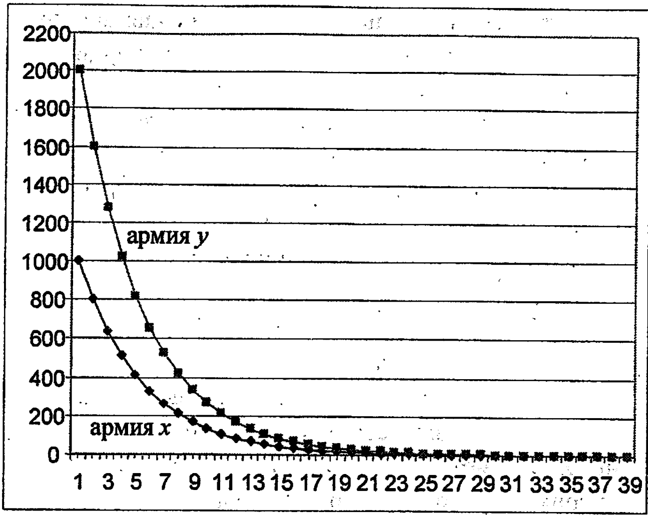


Случай 3

Предполагается, что $a = 0,4$ и $b = 0,1$. Здесь выполняется равенство $y_0 = \sqrt{\frac{a}{b}}x_0$. Поэтому в войне армии уничтожают друг друга.

n	x_n	y_n
0	1000	2000
1	800	1600
2	640	1280
3	512	1024
4	409,6	819,2
5	327,68	655,36
6	262,144	524,288
...	...	...
37	0,324519	0,649037
38	0,259615	0,51923
39	0,207692	0,415384

При $n = 39$ фактически в каждой из армий не осталось ни одного человека.



Модель Лотка-Вольтерра борьбы за существование. Здесь рассматривается модель взаимодействия двух популяций, одну из которых условно называют жертвой – обозначим ее x, а другую – хищником y. Возможны следующие интерпретации:

x – обороняющаяся армия, y – агрессивная армия;

x – трудовой народ, y – разного рода вымогатели;

x – караси в пруду, y – щуки в этом же водоеме.

Через x и y будем обозначать численность (биомассу) популяций жертв и хищников соответственно. Для удобства обычно используется терминология последней интерпретации – караси x и щуки y.

Двумерная жесткая дискретная модель Лотка-Вольтерра определяется следующей системой рекуррентных соотношений:

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n - cx_n y_n \\ y_{n+1} = by_n + dx_n y_n, \end{cases} \qquad (5)$$

где x_n и y_n – численности карасей и щук данного водоема в n-м сезоне, выраженные в условных единицах (у. е.); $a > 1$ – скорость естественного прироста карасей в отсутствие щук; $0 < b < 1$ – скорость естественного вымирания щук, лишенных пищи, т. е. карасей; коэффициент c характеризует вероятность гибели карася при встрече с щукой; d –

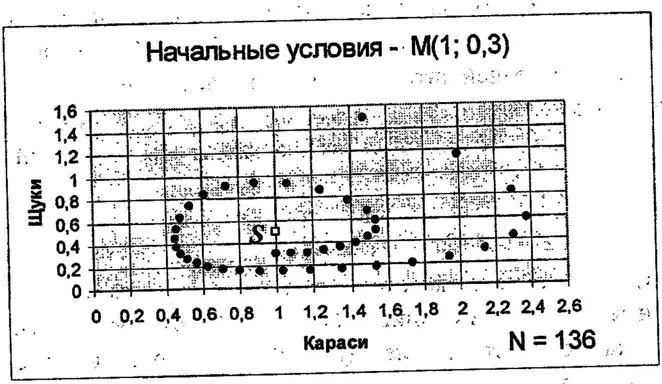
вероятность роста популяции щук за счет поедания карасей. При этом величины cx_ny_n и dx_ny_n из формул (5) прямо пропорциональны числу возможных контактов карась-щука, т. е. значению x_ny_n.

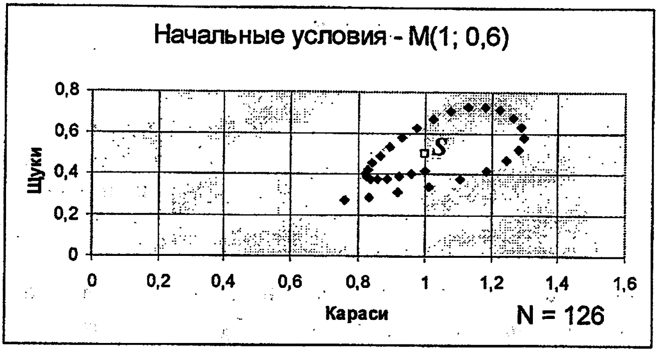
Найдем условие *стационарности* модели Лотке-Вольтерра, которое заключается в сохранении численности карасей и численности щук при переходе к новому сезону: $x_{n+1} = x_n$ и $y_{n+1} = y_n$. Исходя из этого, из системы (5) имеем $dx_n = 1\text{-}b$ и $cy_n = a\text{-}1$. Поэтому численности карасей и щук водоема в стационарном состоянии удовлетворяют равенствам

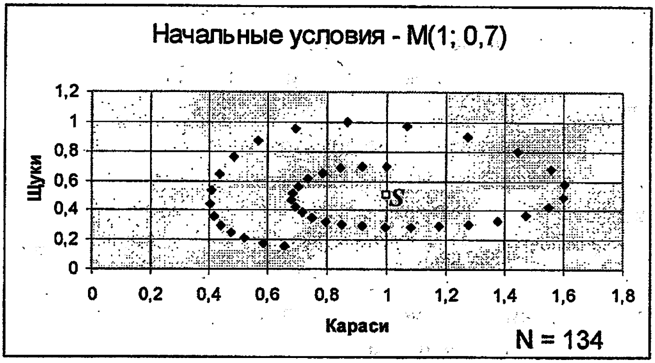
$$x_0 = \frac{1-b}{d},\ y_0 = \frac{a-1}{c}. \qquad (6)$$

Модель Лотке-Вольтерра является жесткой моделью борьбы (карасей и щук) за существование, поскольку учитывает только противостояние антагонистических популяций, зависящее от четырех фиксированных параметров (констант) a, b, c и d, но не обращает внимания на конкуренцию щук за пищу, вылов рыбы и т. п.

Рассмотрим поведение модели (5) на конкретном примере: $a = 1{,}2$, $b = 0{,}7$, $c = 0{,}4$ и $d = 0{,}3$. И будем считать, что общая 1 у. е. соответствует 1000 особям. По формуле (6) находим начальные значения в стационарном состоянии: $x_0 = 1$ и $y_0 = 0{,}5$. Положим $S = M(1; 0{,}5)$. С помощью Excel графически изобразим три случая с $n = 40$ первыми точками с начальными условиями $M(1; 0{,}3)$, $M(1; 0{,}6)$ и $M(1; 0{,}7)$ соответственно. Через N обозначим номер сезона, в котором все караси будут съедены.







Литература

1. *Арнольд В.И.* «Жесткие» и «мягкие» математические модели. – М.: МЦНМО, 2000.

2. *Плотинский Ю.М.* Математическое моделирование динамики социальных процессов. – М.: МГУ, 1992.

Заключение

Я знаю, что ничего не знаю.
Сократ

У людей, усвоивших
великие принципы математики,
одним органом чувств больше,
чем у простых смертных.
Чарльз Дарвин

За пределами книги осталось много чего интересного как по объективной причине «невозможности объять необъятное», так и по субъективной причине ограниченности автора, его знаний и понимания сути вещей. Работа написана с точки зрения математика и вузовского преподавателя математики, решившего пофилософствовать по поводу математики. Мы свободно высказали свои взгляды на природу, специфику, статус и феномен математики. Изложенная позиция не лишена доли радикализма, определенного полемического запала и неизбежных изъянов. Нас, в первую очередь, интересовала онтология математики и соответствующие философско-математические положения.

Занятия математикой, анализ историко-математической литературы и источников по философии математики, размышления об основах математики и написание этой книги сделали для нас вполне очевидными следующие выводы.

Математика проста и строга, поэтому и мысли о ней должны быть достаточно просты и ясны. Они необходимо носят метафизический характер, могут иметь философско-религиозный оттенок. «Бритва Оккама» проста и остра, но справедлива. Как заметил нобелевский лауреат по физике Р. Фейнман, «истина всегда оказывается проще, чем можно было предположить». Однако мы помнили и о «призме Менгера» – философском принципе, согласно которому за любой кажущейся простотой нужно стремиться увидеть скрытые сущности.

Математика не могла не возникнуть. Она появилась, развивалась и стала именно такой, какой и должна была стать в любой разумной цивилизации. Всякий же разум базируется на классической логике.

Формальная логика – составная часть математики. Мир есть единый логически непротиворечивый организм. Мышление отдельных людей зачастую противоречиво. Совокупное мышление человечества вполне способно исправлять ошибки конкретных людей. В становлении правильного мышления и адекватного познания мира человеку помогает математика. Помогает, как ничто другое!

Математические истины вечны и прекрасны, как и шедевры мирового искусства. Математика есть мера научности. Область знания можно назвать строго научной только тогда, когда к ней применима математика.

Мера, структура и форма – главные категории методологии математики и научного познания. Поскольку эти категории вездесущи и универсальны, то и математика является универсальной наукой, эффективной в приложениях и полезной в жизни.

Математика несравнимо важнее и нужнее для других наук, чем они для нее. Чистая математика не зависит от физики, химии или информатики, а они без нее не могут существовать. Несколько сузив крылатый тезис Луи Пастера, заметим: нет прикладной математики, есть только приложения математики. Нужно понимать (и помнить) также, что фундаментальная математика – не коммерческая наука, но ее возможности в приложениях постине безграничны.

В сонме наук математика наиболее автономна, беспристрастна и объективна. Математика – язык и метод науки. Поэтому и как учебная дисциплина математика имеет наибольший дидактический и воспитательный потенциал, должна быть стержнем всего современного образования. На самом деле необходима не гуманитаризация естественно-математического образования, а напротив, - привнесение духа математики в обучение всем наукам. Говоря о математическом (как и любом другом) образовании, нужно иметь в виду целостное пространство культуры. Философия математического образования предполагает равноправие обеих доктрин – фундаменталистской и социокультурной.

Фундаментализм в философии науки, особенно в философии математики, выполняет функцию катарсиса человеческого сознания, очищает и освобождает сознание и мышление от ила наслоений, ненужных усложнений, бессмысленности искусственных новаций.

Библиографический список

1. *Абрамова Н. Т.* Несловесное мышление. – М.: ИФРАН, 2002.
2. *Авалиани С. Ш.* Трансформация метафизики // Вопросы философии. 2005. № 11. – С. 48-53.
3. *Адамар Ж.* Исследование психологии процесса изобретения в области математики. – М.: Сов. радио, 1970.
4. *Акритас А.* Основы компьютерной алгебры с приложениями. – М.: Мир, 1994.
5. *Александров А. Д.* Математика и диалектика // Математика в школе. 1972. № 1 – С. 3-9; № 2. – С. 4-10.
6. *Александров А. Д.* Диалектика геометрии // Математика в школе. 1986. № 1. – С. 12-19.
7. *Александров А. Д.* Основания геометрии: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука, 1987.
8. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.: Наука, 1977.
9. *Александрова Н. В.* Математические термины: Справочник. – М.: Высш. шк., 1978.
10. *Аносов Д. В.* Взгляд на математику и нечто из нее. – М.: МЦНМО, 2000.
11. *Аргунов Б. И., Скорняков Л. А.* Конфигурационные теоремы. – М.: Наука, 1957.
12. *Арепьев Е. И.* Аналитическая традиция: методология науки и сравнительный анализ свойств математики // Философские науки. 2003. № 4. – С. 64-77.
13. *Арепьев Е. И.* Аналитическая философия математики. – Курск: Изд-во Курск. гос. пед. ун-та, 2003.
14. *Арепьев Е. И.* Методологические принципы аналитического истолкования природы математики // Философские науки. 2004. № 10. – С. 78-92.
15. *Аристотель.* Сочинения: В 4 т. Т. 1. – М.: Мысль, 1975.
16. *Арнольд В. И.* Теория катастроф. – М.: Наука, 1990.
17. *Арнольд В. И.* Математический тривиум // Успехи математических наук. 1991. Т. 46. Вып. 1. – С. 225-232; Ч. II. 1993. Т. 48. Вып. 1. – С. 211-222.
18. *Арнольд В. И.* Для чего мы изучаем математику? // Квант. 1993. № 1-2. – С. 5-15.
19. *Арнольд В. И.* О преподавании математики // Успехи математических наук. 1998. Т. 53. Вып. 1. – С. 229-234.

20. *Арнольд В. И.* Филдсовская медаль – воспитаннику московской математической школы // Математическое просвещение (третья серия). 1999. Вып. 3. – С. 7-20.

21. *Арнольд В. И.* Антинаучная революция и математика // Вестник РАН. 1999. Т. 69. № 6. – С. 553-558.

22. *Артин Э.* Геометрическая алгебра. – М.: Наука, 1969.

23. *Архангельский А. В.* О сущности математики и фундаментальных математических структурах // История и методология естественных наук. Математика, механика: Сб. Вып. XXXII. – М., 1986.– С. 14-29.

24. *Архангельский А. В.* Канторовская теория множеств. – М.: Изд-во МГУ, 1988.

25. *Архангельский С. И.* Некоторые проблемы обучения в высшей школе. – М.: Знание, 1978.

26. *Асмус В. Ф.* Проблема интуиции в философии и математике. – М., 1965.

27. *Афанасьев В. В. и др.* Подготовка учителя математики: Инновационные подходы: Учеб. пособие / В. В. Афанасьев, Ю. П. Поваренков, Е. И. Смирнов, В. Д. Шадриков; Под ред. В. Д. Шадрикова. – М.: Гардарики, 2002.

28. *Балк М. Б., Балк Г. Д.* Математика после уроков. – М.: Просвещение, 1971.

29. *Барабашев А. Г.* Диалектика развития математического знания. – М.: Изд-во МГУ, 1983.

30. *Барабашев А. Г.* Будущее математики. Методологические аспекты прогнозирования. – М.: Изд-во МГУ, 1991.

31. *Баранцев Р. В.* Имманентные проблемы синергетики // Вопросы философии. 2002. № 9. – С. 91-101.

32. *Башмакова И. Г.* Основные этапы развития алгебры // История и методология естественных наук. Вып. XXXII. Математика, механика: Сб. – М.: Изд-во МГУ, 1986. – С. 50-65.

33. *Башмакова И. Г., Славутин Е. И.* История диофантова анализа от Диофанта до Ферма. – М.: Наука, 1984.

34. *Белл Э. Т.* Творцы математики. – М.: Просвещение, 1979.

35. *Беляев Е. А., Перминов В. Я.* Философские и методологические проблемы математики. – М.: Изд-во МГУ, 1981.

36. *Берже М.* Геометрия: В 2 т. – М.: Мир, 1984.

37. *Берка К.* Измерения. Понятия, теории, проблемы. – М.: Прогресс, 1987.

38. *Беркли Дж.* Трактат о началах человеческого знания. – СПб., 1905.

39. *Бесконечность в математике: философские и исторические аспекты* / Под ред. А. Г. Барабашева. – М.: Янус-К, 1997.

40. *Бетяев С. К.* Прогностика: первые шаги науки // Вопросы философии. 2003. № 4. – С. 3-13.

41. *Библер В. С.* Мышление как творчество (Введение в логику мысленного диалога). – М.: Политиздат, 1975.

42. *Библер В. С.* От наукоучения – к логике культуры. – М.: Политиздат, 1990.

43. *Биркгоф Г., Барти Т.* Современная прикладная алгебра. – М.: Мир, 1976.

44. *Биркгофф Г.* Математика и психология. – М.: Сов. радио, 1977.

45. *Бирюков Б. В.* Жар холодных чисел и пафос бесстрастной логики. Формализация мышления от античных времен до эпохи кибернетики. – М.: Знание, 1985.

46. *Бирюков Б. В., Кузичева З. А.* Из истории становления логико-математического конструктивизма // Вопросы философии. 2004. № 12. – С. 89-102.

47. *Блауберг И. В.* Проблема целостности и проблемный подход. – М.: Эдиториал УРСС, 1997.

48. *Блехман И. И. и др.* Прикладная математика. Логика и особенности прикладной математики / И. И. Блехман, А. Д. Мышкис, В. Г. Пановко. – М., 1983.

49. *Боголюбов А.Н.* Математики. Механики: Библиографический справочник. - Киев: Наук. думка, 1983.

50. *Богоявленская Д. Б.* Психология творческих способностей. – М.: Академия, 2002.

51. *Болтянский В. Г., Савин А. П.* Беседы о математике. Кн. 1. Дискретные объекты. – М.: ФИМА, МЦНМО, 2002.

52. *Борель Э.* Вероятность и достоверность. – М.: Наука, 1969.

53. *Бородин А. И.* Из истории арифметики. – Киев: Вища шк., 1986.

54. *Бородин А. И., Бугай А. С.* Выдающиеся математики. – Киев: Родяньска шк., 1987.

55. *Бредон Г.* Теория пучков. – М.: Наука, 1988.

56. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1986.

57. *Бросова Н. З.* Судьба метафизики и судьба человека // Вопросы философии. 2005. № 9. – С. 54-65.

58. *Брунер Дж.* Психология познания. – М.: Прогресс, 1977.

59. *Брушлинский А. В.* Психология мышления и кибернетика. – М.: Мысль, 1970.

60. *Будущее прикладной математики.* Лекции для молодых исследователей / Под ред. С. С. Малинецкого. – М.: Едиториал УРСС, 2005.

61. *Бузгалин А. В.* Постмодернизм устарел... (Закат неолиберализма чреват угрозой «протоимперии») // Вопросы философии. 2004. № 2. – С. 3-15.

62. *Букур И., Деляну А.* Введение в теорию категорий и функторов. – М.: Мир, 1972.

63. *Булавка Л. А., Бузгалин А. В.* Бахтин: диалектика диалога versus метафизика постмодернизма // Вопросы философии. 2000. № 1. – С. 119-131.

64. *Бурбаки Н.* Интегрирование: Меры, интегрирование мер. – М.: Наука, 1967.

65. *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. – М.: ИЛ, 1963.

66. *Бурбаки Н.* Теория множеств. – М.: Мир, 1965.

67. *Бургин М. С.* Подходы к понятию актуальной бесконечности в математике // В кн. [39]. – С. 97-107.

68. *Бурова И. Н.* Развитие проблемы бесконечности в истории науки. – М.: Наука, 1987.

69. *Бэкон Ф.* Новый Органон // *Бэкон Ф.* Сочинения: В 2 т. Т. 2. – М.: Мысль, 1972.

70. *Бюлер В.* Гаусс. Биографическое исследование. – М.: Наука, 1989.

71. *Ван дер Варден Б. Л.* Пробуждающаяся наука. – М.: Физматгиз, 1959.

72. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М.* Форма и формулы // Материалы Всероссийской научной конференции. Ч. 1. – Саранск: Изд-во Мордов. гос. пед. ин-та, 2002. – С. 139-144.

73. *Васильев В. В.* Мозг и сознание: выходы из лабиринта // Вопросы философии. 2006. № 1. – С. 67-79.

74. *Васильев Н. А.* Воображаемая логика. Избранные труды. – М.: Наука, 1989.

75. *Васютинский Н. А.* Золотая пропорция. – М.: Мол. гвардия, 1990.

76. *Вейль Г.* О философии математики. – М.; Л.: ГТТИ, 1934.

77. *Вейль Г.* Симметрия. – М.: Наука, 1968.

78. *Вейль Г.* Математическое мышление. – М.: Наука, 1989.

79. *Вейль Г.* Пространство. Время. Материя. – М.: Янус, 1996.

80. *Веллер М.* Кассандра. – СПб.: Фолио, 2002.

81. *Веллер М.* Все о жизни. – СПб.: Фолио, 2005.

82. *Вернадский В. И.* Избранные труды по истории науки. – М., 1981.

83. *Вернадский В. И.* Переписка с математиками. – М.: Изд-во мехмата МГУ, 1996.

84. *Вернадский В. И.* О науке. Т. 1. Научное знание. Научное творчество. Научная мысль. – Дубна: Феникс, 1997.

85. *Вертгеймер М.* Продуктивное мышление. – М.: Прогресс, 1987.

86. *Вечтомов Е. М.* Функциональные представления колец: Монография. – М.: МПГУ, 1993.

87. *Вечтомов Е. М.* О курсе линейной алгебры. Абстрактность и наглядность // Математический вестник педвузов Волго-Вятского региона. – 1998. Вып. 1. – С. 38-43.

88. *Вечтомов Е. М.* Модельные примеры в обучении современной математике // Вестник ВятГПУ. 2001. № 5. –С. 79-82.

89. *Вечтомов Е. М.* Философские категории и математика // Сознание – Мировоззрение – Мышление: Сб. научных статей. Вып. 7. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2002. – С. 59-69.

90. *Вечтомов Е. М.* Научное познание и математика // Вестник ВятГГУ. 2002. № 7. – С. 8-11.

91. *Вечтомов Е. М.* Теорема Геделя о неполноте и научное познание // Вестник ВятГГУ. Информатика. № 2. 2003. – С. 6-8.

92. *Вечтомов Е. М.* Подходы – традиционные, методы – естественные // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2003. Вып. 5. – С. 88-95.

93. *Вечтомов Е. М.* Единство математики // Вестник ВятГГУ. 2003. № 8. – С. 13-15.

94. *Вечтомов Е. М.* Интеллектуальная элита и гуманитарное образование // Интеллектуальная элита России XX века: столица и провинция: М-лы межрегион. науч. конф. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2003. – С. 31-37.

95. *Вечтомов Е. М.* Философия математики: Монография. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2004.

96. *Вечтомов Е. М.* Математические очерки: Учебно-методическое пособие. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2004.

97. *Вечтомов Е. М.* Какая философия познания соответствует природе математики? // Вестник ВятГГУ. 2004. № 11. – С. 10-16.

98. *Вечтомов Е. М.* Гносеологические основы математики, или о природе математики // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2005. Вып. 7. – С. 5-22.

99. *Вечтомов Е. М.* Проблема применимости и эффективности математики // Вестник ВятГГУ. 2005. № 12. – С. 10-15.

100. *Вечтомов Е. М.* Математика и научная картина мира // Сб. статей Всесоюзной научно-практич. конф. Т. 2. – М.; Коряжма: Старая Вятка, 2005. – С. 91-101.

101. *Вечтомов Е. М., Клековкин Г. А.* Математическое познание: от модели к модели // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2003. Вып. 5. – С. 3-16.

102. *Вечтомов Е. М., Ковязина Е. М.* Метод Гаусса как теоретический метод в линейной алгебре // Математический вестник педвузов Волго-Вятского региона. 2000. Вып. 2. – С. 95-99.

103. *Вигнер Е.* Этюды о симметрии. – М.: Мир, 1971.

104. *Вилейтнер Г.* История математики от Декарта до середины XIX века. – М.: Физматгиз, 1960.

105. *Винер Н.* Кибернетика, или управление и связь в животном и машине. – М.: Сов. радио, 1968.

106. *Витгенштейн Л.* Логико-философский трактат. – М.: ИЛ, 1958.

107. *Витгенштейн Л.* Философские работы: В 2 ч. – М., 1994.

108. *Владимиров Ю. С.* Метафизика. – М.: Бином: Лаборатория знаний, 2002.

109. *Войтов А. Г.* История и философия науки: Учеб. пособие для аспирантов. – М.: Дашков и К°, 2006.

110. *Войцехович В. Э.* Господствующие стили математического мышления // В кн. [517]. – С. 495-505.

111. *Войшвилло Е. К.* Понятие как форма мышления: логико-гносеологический анализ. – М.: Изд-во МГУ, 1989.

112. *Волович М. В.* Математика без перегрузок. – М.: Педагогика, 1991.

113. *Волошинов А. В.* Математика и искусство. – М.: Просвещение, 1992.

114. *Волошинов А. В.* Пифагор: союз истины, добра и красоты. – М.: Просвещение, 1993.

115. *Вопенка П.* Математика в альтернативной теории множеств. – М.: Мир, 1983.

116. *Воронцов В. В.* Симфония разума. – М.: Молодая гвардия, 1977.

117. *Вригт фон Г. Х.* Логико-философские исследования. – М.: Прогресс, 1986.

118. *Всемирная энциклопедия: Философия* / Гл. науч. ред и сост. А. А. Грицанов. – М.: АСТ; Мн: Харверст: Современный литератор, 2001.

119. *Всероссийская конференция «Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков»*, Дубна, сентябрь 2000. – М.: МЦНМО, 2000.

120. *Выгодский М. Я.* Арифметика и алгебра в древнем мире. – М.: Наука, 1967.

121. *Выгодский М. Я.* Справочник по высшей математике. – М.: Наука, 1977.

122. *Выгодский М. Я.* Справочник по элементарной математике. – Ростов-н/Д: Феникс, 1995.

123. *Выготский Л.С.* Педагогическая психология. – М.: Педагогика, 1991.

124. *Гадамер Х.-Г.* Истина и метод. – М., 1988.

125. *Гайденко П. П.* Научная рациональность и философский разум. – М.: Прогресс-Традиция, 2003.

126. *Галкин Е. В.* Нестандартные задачи по математике: Задачи логического характера: Кн. для учащихся 5-11 кл. – М.: Просвещение, 1996.

127. *Гальперин Г. А., Толпыго А. К.* Московские математические олимпиады. – М.: Просвещение, 1986.

128. *Гарднер М.* Математические головоломки и развлечения. – М.: Мир, 1971.

129. *Гарднер М.* Есть идея! – М.: Мир, 1982.

130. *Гарднер М.* От мозаик Пенроуза к надежным шифрам. – М.: Мир, 1993.

131. *Гастев Ю. А.* Гомоморфизмы и модели. – М.: Наука, 1975.

132. *Гегель Г. В.* Работы разных лет. Т. 2. – М.: Мысль, 1973.

133. *Гегель Г. В. Ф.* Наука логики. – М.: Мысль, 1974.

134. *Гейзенберг В.* Физика и философия. Часть и целое. – М.: Наука, 1989.

135. *Гейтинг А.* Интуиционизм. Введение. – М.: Мир, 1965.

136. *Гейтинг А.* Тридцать лет спустя // В кн. [340]. – С. 224-228.

137. *Генкин С. А. и др.* Ленинградские математические кружки / С. А. Генкин, И. В. Итенберг, Д. В. Фомин. – Киров: АСА, 1994.

138. *Герменевтика: история и современность.* – М.: Мысль, 1985.

139. *Гильберт Д.* Основания геометрии. – М.; Л.: ОГИЗ-Гостехиздат, 1948.

140. *Гильберт Д., Аккерман В.* Основы теоретической логики. – М.: ИЛ, 1947.

141. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики: В 2 т. – М.: Наука, 1979, 1982.

142. *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1951.

143. *Гладкий А. В.* Математическая логика. – М.: Изд-во РГГУ, 1998.

144. *Гладкий А. В.* Введение в современную логику. – М.: МЦНМО, 2001.

145. *Глейзер Г. И.* История математики в школе. IV-VI классы. – М.: Просвещение, 1981.

146. *Глейзер Г. И.* История математики в школе. VII-VIII классы. – М.: Просвещение, 1982.

147. *Глейзер Г. И.* История математики в школе. IX-X классы. – М.: Просвещение, 1983.

148. *Гнеденко Б. В.* Очерки по истории математики в России. – М.: ОГИЗ, 1946.

149. *Гнеденко Б. В.* Математическое образование в вузах. – М.: Высш. шк., 1981.

150. *Гнеденко Б. В.* Формирование мировоззрения учащихся в процессе обучения математике. – М.: Просвещение, 1982.

151. *Гнеденко Б. В.* Математика и математическое образование в современном мире. – М.: Просвещение, 1985.

152. *Гнеденко Б. В.* Введение в специальность математика. – М.: Наука, 1991.

153. *Голдблатт Р.* Топосы. Категорный анализ логики. – М.: Мир, 1983.

154. *Гончаров С. С. и др.* Введение в логику и методологию науки / С. С. Гончаров, Ю. Л. Ершов, К. Ф. Самохвалов. – М.: Интерпракс, 1994.

155. *Горский Д. П.* Определение. – М., 1974.

156. *Горский Д. П.* Обобщение и познание. – М., 1985.

157. *Готт* В. С., *Землянский Ф. М.* Диалектика развития понятийной формы мышления. – М., 1981.

158. *Григорян А. А.* Закономерности и парадоксы развития теории вероятностей. Философско-методологический анализ. – М.: Едиториал УРСС, 2004.

159. *Громыко Н. В.* Интернет и постмодернизм – их значение для современного образования // Вопросы философии. 2002. № 2. – С. 175-180.

160. *Гротендик А.* Урожаи и посевы. Размышления о прошлом математики. Прелюдия в 4 частях. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 1995.

161. *Груденов Я. И.* Психолого-дидактические основы методики обучения математике. – М.: Педагогика, 1987.

162. *Грэхем Р.* Начала теории Рамсея. – М.: Мир, 1984.

163. *Грэхем Р.*. Конкретная математика. Основание информатики / Р. Грехем, Д. Кнут, О. Паташник. – М.: Мир, 1998.

164. *Грязнов А. Ю.* Абсолютное пространство как идея чистого разума // Вопросы философии. 2004. № 2. – С. 127-147.

165. *Губарев В.* Академик В. И. Арнольд: Путешествие в Хаосе (интервью) // Наука и жизнь. 2000. № 12. – С. 2-10.

166. *Губин В. Б.* О физике, математике и методологии. – М.: ПАИМС, 2003.

167. *Губин В. Б.* Синергетика как новый пирог для «постнеклассических ученых» или отзыв на автореферат докторской диссертации // Философские науки. 2003. № 2. – С. 121-155.

168. *Гудстейн Р. Л.* Математическая логика. – М.: ИЛ, 1961.

169. *Гудстейн Р. Л.* Рекурсивный математический анализ. – М.: Наука, 1970.

170. *Гусев В. А.* Как помочь ученику полюбить математику? – М.: Авангард, 1994.

171. *Гусев В. А.* Психолого-педагогические основы обучения математике. – М.: Вербум-М, 2003.

172. *Гусев В. А., Мордкович А. Г.* Математика: Справ. м-лы: Кн. для учащихся. – М.: Просвещение, 1988.

173. *Гусинский Э. Н., Турчанинова Ю. И.* Введение в философию образования. – М.: Логос, 2001.

174. *Гуссерль Э.* Идеи к чистой феноменологии и феноменологической философии. – М., 1999.

175. *Даан-Дальмедико А., Пейффер Ж.* Пути и лабиринты: Очерки по истории математики. – М.: Мир, 1986.

176. *Давыдов В. В.* Теория развивающего обучения: Монография. – М.: Интор, 1997.

177. *Давыдов В. В., Варданян А. У.* Учебная деятельность и моделирование. – Ереван, 1981.

178. *Далингер В. А.* Обучение учащихся доказательству теорем: Учеб. пособие. – Омск: Изд-во ОмГПУ, 2002.

179. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. – М.: ИЛ, 1962.

180. *Дедекинд Р.* Что такое числа и для чего они служат. – Казань, 1905.

181. *Дедекинд Р.* Непрерывность и иррациональные числа. – Одесса, 1911.

182. *Декарт Р.* Сочинения: В 2 т. – М.: Мысль, 1989.

183. *Деннет Д.* Постмодернизм и истина. Почему нам важно понимать это правильно // Вопросы философии. 2001. № 8. – С. 93-100.

184. *Депман И. Я.* История арифметики. – М.: Просвещение, 1965.

185. *Дерри Д.* Фундаментализм и антифундаментализм // Вопросы философии. 2002. № 6. – С. 89-95.

186. *Джемс У.* Психология. – М.: Педагогика, 1991.

187. *Дойч Д.* Структура реальности. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.

188. *Дорофеев Г. В.* Математика для каждого / Предисл. Л. Д. Кудрявцева. – М.: Аякс, 1999.

189. *Дорофеев Г. В. и др.* Пособие по математике для поступающих в вузы: Избранные вопросы элементарной математики / Г. В. Дорофеев, М. К. Потапов, Н. Х. Розов. – М.: Наука, 1970.

190. *Дротянко Л. Г.* Социокультурная детерминация фундаментальных и прикладных наук // Вопросы философии. 2000. № 1. – С. 91-101.

191. *Друянов Л. А.* Законы природы и их познание. – М.: Просвещение, 1982.

192. *Дрюк М. А.* Синергетика: позитивное знание и философский импрессионизм // Вопросы философии. 2004. № 10. – С. 102-113.

193. *Дубровский Д. И.* Постмодернистская мода // Вопросы философии. 2001. № 8. – С. 42-55.

194. *Душенко К. В.* Большая книга афоризмов. – М.: Эксмо, 2003.

195. *Дьедонне Ж.* Абстракция в математике и эволюция алгебры // В кн. [440]. – С. 41-53.

196. *Дьяченко В. К.* Сотрудничество в обучении: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1991.

197. *Дэвис М.* Прикладной нестандартный анализ. – М.: Мир, 1980.

198. *Евлампиев И. И.* История русской метафизики в XIX-XX веках. Русская философия в поисках Абсолюта. – СПб., 2000.

199. *Евлампиев И.И.* Неклассическая метафизика или конец метафизики? Европейская философия на распутье // Вопросы философии. 2003. № 5. – С. 159-171.

200. *Елисеев Е. М.* Проективная геометрия. – Арзамас: Изд-во АГПИ, 2003.

201. *Епишева О. Б.* Общая методика преподавания математики в школе. – Тобольск: Изд-во Тобол. гос. пед. ин-та, 1997.

202. *Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.* Математическая логика. – М.: Наука, 1979.

203. *Ершов Ю. Л., Самохвалов К. Ф.* О новом подходе к методологии математики // В кн. [211]. – С. 85-106.

204. *Есенин-Вольпин А. С.* Об антитрадиционной (ультраинтуиционистской) программе оснований математики в естественно-научном мышлении // Вопросы философии. 1996. № 8. – С. 100-136.

205. *Ефимов Н. В.* Высшая геометрия. – М.: Наука, 1978 (издание шестое).

206. *Жданов Г. Б.* Информация и сознание // Вопросы философии. 2000. № 8. – С. 97-104.

207. *Жмудь Л. Я.* Пифогор и его школа (ок. 530-ок. 430 гг. до н. э.). – Л.: Наука. Ленинградское отделение, 1990.

208. *Жохов А. Л.* Мировоззренческое направленное обучение математике в общеобразовательной и профессиональной школе (теоретический аспект): Монография. – М.: Изд. центр АПО, 1999.

209. *Загвязинский В. И.* Теория обучения. Современная интерпретация. – М.: Изд. центр «Академия», 2001.

210. *Закономерности развития современной математики* / Сб. статей. – М.: Наука, 1978.

211. *Закономерности развития современной математики.* Методологические аспекты / Под ред. М. И. Панова. – М.: Наука, 1987.

212. *Захаров В. Д.* Метафизика в науках о природе // Вопросы философии. 1999. № 3. – С. 97-111.

213. *Захаров В. Д.* Физика как философия природы. – М.: Едиториал УРСС, 2005.

214. *Захаров В. К.* Локальная теория множеств // Математические заметки. 2005. Т. 77. № 2. – С. 194-212.

215. *Зельдович Я. Б., Яглом И. М.* Высшая математика для начинающих физиков и техников. – М.: Наука, 1982.

216. *Зенкевич И. Г.* Эстетика урока математики. – М.: Просвещение, 1981.

217. *Зенкин А. А.* Когнитивная компьютерная графика. Применения в теории натуральных чисел. – М.: Наука, 1991.

218. *Зенкин А. А.* Метод супериндукции: логическая акупунктура математической бесконечности // В кн. [39]. – С. 151-168.

219. *Зенкин А. А.* Ошибка Георга Кантора // Вопросы философии. 2000. № 2. – С. 165-168.

220. *Зенкин А. А.* Новый подход к анализу проблемы парадоксов // Вопросы философии. 2000. № 10. – С. 79-90.

221. *Зенкин А. А.* Infinitum Actu Non Datur // Вопросы философии. 2001. № 9. – С. 157-169.

222. *Зимняя И. А.* Педагогическая психология: Учебник для вузов. – М.: Логос, 1999.

223. *Зинченко В. П.* Образ и деятельность. – М.: Ин-т прикладной психологии; Воронеж: НПО «МЭДОК», 1997.

224. *Иванов О. А.* Избранные главы элементарной математики. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 1995.

225. *Иванова Т. А.* Гуманитаризация общего математического образования: Монография. – Н. Новгород: Изд-во НГПУ, 1998.

226. *Иванова Т. А. и др.* Теоретические основы обучения математике в средней школе: Учеб. пособие / Т. А. Иванова, Е. Н. Перевощикова, Т. П. Григорьева, Л. И. Кузнецова; Под ред. Т. А. Ивановой. – Н. Новгород: Изд-во НГПУ, 2003.

227. *Ивин А. А.* Современная философия науки. – М.: Высш. шк., 2005.

228. *Ившин В.В.* Математика и философия. – Пермь: Изд-во Перм. гос. ун-та, 1999.

229. *Игошин В. И.* Логика с элементами математической логики. (Лекции для студентов гуманитарных специальностей). – Саратов: Научная книга, 2004.

230. *Икеда Д., Садовничий В.* На рубеже веков. Диалоги об образовании и воспитании. – М., 2004.

231. *Ильенков Е. В.* Диалектическая логика. – М.: Прогресс, 1977.

232. *Ильин И. П.* Постструктурализм. Деконструктивизм. Постмодернизм. – М., 1996.

233. *Ильин И. П.* Постмодернизм от истоков до конца столетия: эволюция научного мифа. – М., 1998.

234. *Инфельд Л.* Эварист Галуа (избранник богов). – М.: Молодая гвардия, 1960.

235. *История математики с древнейших времен до начала XIX столетия:* В 3 т. – М.: Наука, 1970-1972.

236. *История математики XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей* / Под ред. А. Н. Колмогорова, А. П. Юшкевича. – М.: Наука, 1978.

237. *История отечественной математики:* В 4 т. – Киев: Наук. думка, 1966-1970.

238. *Ительсон Л. Б.* Психологические основы обучения. – М.: Знание, 1978.

239. *Каганов М. И., Любарский Р. Я.* Абстракция в математике и физике. – М.: Физматлит, 2005.

240. *Калинин С. И.* Средние величины степенного типа. Неравенства Коши и Ки Фана: Учеб. пособие по спецкурсу. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2002.

241. *Кановей В. Г.* Аксиома выбора и аксиома детерминированности. – М.: Наука, 1984.

242. *Кант И.* Критика чистого разума // Сочинения: В 6 т. Т. 3. – М.: Мысль, 1964.

243. *Кант И.* Метафизические начала естествознания // Сочинения: В 6 т. Т. 6. – М.: Мысль, 1966.

244. *Кантор Г.* Труды по теории множеств. – М.: Наука, 1985.

245. *Капица С.П. и др.* Синергетика и прогнозы будущего / С. П. Капица, С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий. – М.: Едиториал УРСС, 2003.

246. *Карпенко А. С.* Современные исследования в философской логике // Вопросы философии. 2003. № 9. – С. 54-75.

247. *Карри Х.* Основания математической логики. – М.: Мир, 1969.

248. *Картеси Ф.* Введение в конечные геометрии. – М.: Наука, 1980.

249. *Касьян А. А.* Контекст образования: наука и мировоззрения – Н. Новгород: Изд-во НГПУ, 1996.

250. *Катречко С. Л.* Как возможна метафизика? // Вопросы философии. 2005. № 9. – С. 83-94.

251. *Кац М., Улам С.* Математика и логика. Ретроспектива и перспективы. – М.: Мир, 1971.

252. *Кацивели Г. К.* Математика и действительность // Историко-математические исследования. 1975. Вып. 20. – С. 11-27. (Заметим, что этим псевдонимом воспользовался известный математик Г. Е. Шилов.)

253. *Кедровский О. И.* Методологические проблемы развития математического познания. – Киев: Вища шк., 1977.

254. *Кейслер Г., Чэн Ч.Ч.* Теория моделей. – М.: Мир, 1977.

255. *Кириллин В. А.* Страницы истории науки и техники. – М.: Наука, 1986.

256. *Киселев Г. С.* Постмодерн и христианство // Вопросы философии. 2001. № 12. – С. 3-15.

257. *Клайн М.* Логика против педагогики // Сб. научно-методических статей по математике. – Вып. 3. – М., 1973. – С. 46-61.

258. *Клайн М.* Математика. Утрата определенности. – М.: Мир, 1984.

259. *Клайн М.* Математика. Поиск истины. – М.: Мир, 1988.

260. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей: В 2 т. – М.: Наука, 1987.

261. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. – М.: Наука, 1989.

262. *Клини С. К.* Введение в метаматематику. – М.: ИЛ, 1957.

263. *Клини С. К.* Математическая логика. – М.: Мир, 1973.

264. *Кнабе Г. С.* Местоимения постмодерна (обзор некоторых событий, фактов и текстов) // Сквозь границы: Культурологический альманах. Вып. 3. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2004. – С. 111-143.

265. *Князева Е. Н., Курдюмов С. П.* Основания синергетики. Режимы с обострением, самоорганизация, темпомиры. – М.: Алетейя, 2002.

266. *Когаловский С. Р.* О «высших» и «низших» формах мышления в обучении математике. – Шуя: Изд-во Шуйского гос. пед. ун-та, 2005.

267. *Когаловский С. Р.* Поиски метода и методы поиска (онтогенетический подход к обучению математике): Монография. – Шуя: Изд-во Шуйского гос. пед. ун-та, 2005.

268. *Когаловский С. Р. и др.* Путь к понятию (От интуитивных представлений к строгому понятию) / С. Р. Когаловский, Е. А. Шмелева, О. В. Герасимова. – Иваново, 1998.

269. *Колесников М. С.* Лобачевский. – М.: Молодая гвардия, 1965.

270. *Колмогоров А. Н.* Математика – наука и профессия. – М.: Наука, 1988.

271. *Колмогоров А. Н.* Математика в ее историческом развитии. – М.: Наука, 1991.

272. *Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г.* Введение в математическую логику. – М.: Изд-во МГУ, 1982.

273. *Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г.* Математическая логика. Дополнительные главы: Учеб. пособие. – М.: Изд-во МГУ, 1984.

274. *Колмогоров Н. А и др.* Сборник задач для подготовки учащихся средних школ к математическим олимпиадам / Н. А. Колмогоров, Ф. Ф. Нагибин, В. В. Чудиновских. – Горький: Волго-Вятское кн. изд., 1968.

275. *Кольман Э.* История математики в древности. – М.: ГИФМЛ, 1961.

276. *Колягин Ю. М.* Русская школа и математическое образование. – М.: Просвещение, 2001.

277. *Колягин Ю. М., Оганесян В. А.* Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. – М.: Просвещение, 1977.

278. *Копнин П. В.* Диалектика как логика и теория познания. – М.: Наука, 1973.

279. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984.

280. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств. – М.: Радио и связь, 1982.

281. *Коэн П. Дж.* Теория множеств и континуум-гипотеза. – М.: Мир, 1969.

282. *Краткий отчет о социологическом исследовании, посвященном современному состоянию отечественного образования* // Философские науки. 2006. № 1. – С. 153-155.

283. *Кричевец А. Н.* Кризис математических наук и математического образования: эпистемологический подход // Вопросы философии. 2004. № 11. – С. 103-115.

284. *Кругляков Э.* Почему опасна лженаука // Наука и жизнь. 2002. № 3. – С. 2-5.

285. *Крутецкий В. А.* Психология математических способностей школьников: Монография. – М.: Просвещение, 1968.

286. *Кудрявцев Л. Д.* Современная математика и ее преподавание: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука, 1985.

287. *Кудрявцев Л. Д.* Среднее образование. Проблемы. Раздумья. – М.: МГУП, 2003.

288. *Кузнецов В. И. и др.* Естествознание / В. И. Кузнецов, Г. М. Илдис, В. Н. Гутина. – М.: АГАР, 1996.

289. *Кук Д.*, Бейз Г. Компьютерная математика. – М.: Наука, 1990.

290. *Кулаков Ю. И.* Синтез науки и религии // Вопросы философии. 1999. № 2. – С. 142-153.

291. *Кун Т.* Структура научных революций. – М.: Прогресс, 1975.

292. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? – М.: Просвещение, 1967.

293. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1968 (издание девятое).

294. *Кутателадзе С. С.* Наука, псевдонаука и лженаука: препринт. – Новосибирск: Ин-т мат. СО РАН, 2004. № 137. – С. 1-25.

295. *Кутырев В. А.* Оправдание бытия (явление нигитологии и его критика) // Вопросы философии. 2000. № 5. – С. 15-32.

296. *Кутырев В. А.* Философия иного, или Небытийный смысл трансмодернизма // Вопросы философии. 2005. – № 7. С. 21-33. № 12. С. 3-19.

297. *Кутюра Л.* Философские принципы математики. – СПб., 1913.

298. *Кушнер Б. А.* Лекции по конструктивному математическому анализу. – М.: Наука, 1973.

299. *Кэрролл Л.* История с узелками. – М.: Мир, 1985.

300. *Лакатос И.* Доказательства и опровержения. – М.: Наука, 1967.

301. *Лакатос И.* Фальсификация и методология научно-исследовательских программ. – М.: Медиум, 1995.

302. *Лебег А.* Об измерении величин. – М.: Гос. уч.-пед. изд. Мин. прос. РСФСР, 1960.

303. *Левитин К. Е.* Геометрическая рапсодия. – М.: ИД «Камерон», 2004.

304. *Лейбниц Г. В.* Сочинения: В 4 т. – М.: Мысль, 1984-1989.

305. *Лекторский В. А.* Теория познания (гносеология, эпистемология) // Вопросы философии. 1999. № 8. – С. 72-80.

306. *Лекторский В. А.* Эпистемология классическая и неклассическая. – М.: Эдиториал УРСС, 2001.

307. *Лекторский В. А.* Возможна ли интегргация естественных наук и наук о человеке? // Вопросы философии. 2004. № 3. – С. 44-49.

308. *Ленг С.* Алгебра. – М.: Мир, 1968.

309. *Леонтьев А. А.* Основы психолингвистики. – М.: Смысл, 1997.

310. *Ливанова А. М.* Три судьбы. – М.: Знание, 1975.

311. *Лидл Р., Нидеррайтер Г.* Конечные поля: В 2 т. – М.: Мир, 1988.

312. *Линдон Р.* Заметки по логике. – М.: Мир, 1968.

313. *Логика научного познания.* – М.: 1987.

314. *Лосев А. Ф.* Диалектические основы математики // Хаос и структура. – М.: Мысль, 1997. – С. 18-608.

315. *Лузин Н. Н.* Теория функций действительного переменного. Общая часть: Учеб. пособие для педвузов. – М.: Гос. уч.-пед. изд. Наркомпроса РСФСР, 1940.

316. *Любецкий В. А.* Основные понятия школьной математики. – М.: Просвещение, 1987.

317. *Мадер В. В.* Введение в методологию математики. – М.: Интерпракс, 1995.

318. *Малаховский В. С.* Введение в математику: Учеб. издание – Калининград: Янтарный сказ, 1998.

319. *Малаховский В. С.* Избранные главы истории математики. – Калининград: Янтарный сказ, 2002.

320. *Малых А. Е., Алябьева В. Г.* К вопросу о возникновении конечных проективных геометрий // История и методология естественных наук. Вып. XXXV. Математика, механика: Сб. – М.: Изд-во МГУ, 1980. – С. 57-66.

321. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970.

322. *Мальцев А. И.* Алгоритмы и рекурсивные функции. – М.: Наука, 1986.

323. *Мамардашвили М. К.* Как я понимаю философию. – М.: Прогресс, 1990.

324. *Мамчур Е.* А. Идеалы единства и простоты в научном познании // Вопросы философии. 2003. № 12. – С. 100-112.

325. *Манин Ю. И.* Доказуемое и недоказуемое. – М.: Сов. радио, 1980.

326. *Манин Ю. И.* Вычислимое и невычислимое. – М.: Сов. радио, 1980.

327. *Марков А. А.* О логике конструктивной математики. – М.: Знание, 1972. № 8.

328. *Марков А. А., Нагорный Н. М.* Теория алгорифмов. – М.: Наука, 1984.

329. *Марков С. Н.* Курс истории математики. – Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 1995.

330. *Маркова Л. А.* От математического естествознания к науке о хаосе // Вопросы философии. 2003. № 7. – С. 78-91.

331. *Математика в образовании и воспитании* / Сост. В. Б. Филиппов. – М.: ФАЗИС, 2000.

332. *Математика в понятиях, определениях и терминах*: В 2 ч. – М.: Просвещение, 1978, 1982.

333. *Математика в современном мире.* – М.: Мир, 1967.

334. *Математика, ее содержание, методы и значение:* В 3 т. – М.: Изд-во АН СССР, 1956.

335. *Математика и искусство*: Труды Международной конференции. – М., 1997.

336. *Математика и практика; Математика и культура*: Сб. статей. – М.: «Самообразование» и МФ «Семигор», 2000.

337. *Математика и практика; Математика и культура.* № 3: Сб. статей. – М.: НОУ «Луч», 2003.

338. *Математика: Хрестоматия по истории, методологии, дидактике* / Сост. Г. Д. Глейзер. – М.: УРАО, 2001.

339. *Математики о математике.* – М.: Наука, 1982.

340. *Математическая логика и ее применения.* – М.: Мир, 1965.

341. *Математическая энциклопедия*: В 5 т. – М.: Сов. энцикл., 1977-1985.

342. *Математический энциклопедический словарь.* – М.: Сов. энцикл., 1988.

343. *Матиясевич Ю. В.* Десятая проблема Гильберта. – М.: Физматлит, 1993.

344. *Махмутов М. И.* Проблемное обучение. – М.: Педагогика, 1973.

345. *Медведев Ф. А.* Развитие теории множеств в XIX веке. – М.: Наука, 1965.

346. *Медведев Ф. А.* Ранняя история аксиомы выбора. – М.: Наука, 1982.

347. *Мельников Ю. Б.* Математическое моделирование: структура, алгебра моделей, обучение построению математических моделей: Монография. – Екатеринбург: Урал. изд-во, 2004.

348. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. – М.: Наука, 1971.

349. *Менский М. Б.* Квантовая механика, сознание и мост между двумя культурами // Вопросы философии. 2004. № 6. – С. 64-74.

350. *Менчинская Н. А.* Проблемы учения и умственного развития школьников: Монография. – М.: Педагогика, 1989.

351. *Метельский Н. В.* Психолого-педагогические основы дидактики математики. – Минск: Вышейш. шк., 1977.

352. *Метельский Н. В.* Дидактика математики: Общая методика и ее проблемы. Учеб. пособие для вузов. – Минск: Изд-во БГУ, 1982.

353. *Метельский Н. В.* Пути совершенствования обучения математике: Монография. – Минск: Изд-во БГУ, 1990.

354. *Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика* / Сост. Р. С. Черкасов, А. А. Столяр. – М.: Просвещение, 1985.

355. *Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика* / Сост. В. И. Мишин. – М.: Просвещение, 1987.

356. *Методологический анализ оснований математики* / Под ред. М. И. Панова. – М.: Наука, 1988.

357. *Микешина Л. А.* Философия науки: Учеб. пособие. – М.: Прогресс-Традиция, 2005.

358. *Миракова Т. Н., Дорофеев Г. В.* Программа спецкурса для физико-математических факультетов пединститутов // Математика в школе. 2005. № 5. – С. 55-63.

359. *Миронов В. В.* Коммуникационное пространство как фактор трансформации современной культуры и философии // Вопросы философии. 2006. № 2. – С. 27-43.

360. *Михайлов Ф. Т.* Образование и власть // Вопросы философии. 2003. № 4. – С. 31-47.

361. *Моисеев Н. Н.* Экология человечества глазами математика. – М., 1988.

362. *Моисеев Н. Н.* Современный рационализм. – М., 1995.

363. *Моисеев Н. Н.* Быть или не быть… человечеству? – М.: Наука, 1999.

364. *Моисеев Н. Н.* Логика динамических систем и развитие природы и общества // Вопросы философии. 1999. № 4. – С. 3-10.

365. *Молодший В. Н.* Основы учения о числе в XVIII веке: Пособ. для учителей. – М.: Гос. уч.-пед. изд. Мин. прос. РСФСР, 1953.

366. *Молодший В. Н.* Очерки по философским вопросам математики. – М.: Просвещение, 1969.

367. *Морделл Л.* Размышления математика. – М.: Знание, 1971.

368. *Мордкович А. Г.* Беседы с учителями математики: Кн. для учителя. – М.: Школа-пресс, 1995.

369. *Мордкович А.Г.* Алгебра. 7 кл.: В 2-х ч. 8 кл.: В 2-х ч. 9 кл.: В 2-х ч. – М.: Мнемозина, 2003.

370. *Мордкович А. Г.* Алгебра и начала анализа. 10-11 кл.: В 2 ч. – М.: Мнемозина, 2003.

371. *Мордухай-Болтовский Д. Д.* Философия. Психология. Математика. – М.: Серебряные нити, 1998.

372. *Морозова Е. А. и др.* Международные математические олимпиады / Е. А. Морозова, И. С. Петраков, В. А. Скворцов. – М.: Просвещение, 1976.

373. *Мышкис А. Д.* О преподавании математики прикладникам // Математика в высшем образовании. 2003. № 1. С. 37-52.

374. *Мясникова Л. А.* Экономика постмодерна и отношения собственности // Вопросы философии. 2002. № 7. – С. 5-16.

375. *Назарова О. А.* Онтологическая гносеология С. Франкла как основа самооправдания метафизики // Философские науки. 2006. № 3. – С. 41-49.

376. *Назиев А. Х.* Гуманитарно ориентированное преподавание математики в общеобразовательной школе: Монография. – Рязань: Изд-во РИРО, 1999.

377. *Налимов В. В.* Вероятностная модель языка. О соотношении естественных и искусственных языков. – М.: Наука, 1974.

378. *На путях обновления школьного курса математики:* Сб. статей и материалов: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1978.

379. *Начала Евклида.* Кн. I-VI. – М.; Л.: ОГИЗ-Гостехиздат, 1948.

380. *Нейгебауэр О.* Точные науки в древности. – М.: Наука, 1968.

381. *Ненашев М. И.* Введение в логику: Учеб. пособие. – М.: Гардарики, 2004.

382. *Непейвода В. В.* О формализации неформализуемых понятий: автопродуктивные системы теорий // Семиотика и информатика. 1985. Вып. 25. – С. 46-93.

383. *Непейвода В. В.* Прикладная логика. – Новосибирск: Изд-во Новосибир. гос. ун-та, 2000.

384. *Непейвода В. В.* Вызовы логики и математики XX в. и «ответ» на них цивилизации // Вопросы философии. 2005. № 8. – С. 118-128.

385. *Никифоров А. Л.* Философия науки: история и методология. – М., 1998.

386. *Николис Г., Пригожин И.* Познание сложного. – М., 1990.

387. *Новиков П. С.* Элементы математической логики. – М.: Наука, 1973.

388. *Новиков П. С.* Конструктивная математическая логика с точки зрения классической. – М.: Наука, 1977.

389. *Новоселов М. М.* Абстракция множества и парадокс Рассела // Вопросы философии. 2003. № 7. – С. 67-77.

390. *Ноден П., Китте К.* Алгебраическая алгоритмика (с упражнениями и решениями). – М.: Мир, 1999.

391. *Образование, которое мы можем потерять:* Сб. / Под общ. ред. В. А. Садовничего. – М.: МГУ им. М. В. Ломоносова; Ин-т компьютерных исследований, 2002.

392. *Оганесян В. А. и др.* Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика / В. А. Оганесян, Ю. М. Колягин, Г. Л. Луканкин, В. Я. Саннинский. – М.: Просвещение, 1980.

393. *Одинец В. П.* Зарисовки по истории математики. – Сыктывкар: Изд-во Коми гос. пед. ин-та, 2005.

394. *Ойзерман Т. И.* Философия как история философии. – СПб.: Алетейя, 1999.

395. *Оконь В.* Введение в общую дидактику. – М.: Высш. шк., 1990.

396. *Окстоби Дж.* Мера и категория. – М.: Мир, 1974.

397. *Окулов С. М.* Научная картина мира (исторический экскурс) // Вестник ВятГГУ. 2003. № 9. – С. 21-26.

398. *Окулов С. М.* Развитие интеллекта школьника как принцип организации синергетической среды обучения информатике: Автореф. дис. д-ра пед. наук по специальности 13.00.02 – теория и методика обучения и воспитания (информатика). – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2004.

399. *Окулов С. М.* Информатика: Развитие интеллекта школьников. – М.: БИНОМ: Лаборатория знаний, 2005.

400. *Окулов С. М., Юлов В. Ф.* О скрытых сдвигах в философских основаниях современных педагогических инноваций // Вестник ВятГГУ. 2005. № 13. – С. 18-22.

401. *Оленьев В. В., Федотов А. П.* Глобалистика на пороге XXI века // Вопросы философии. 2003. № 4. – С. 18-30.

402. *Осинская В. Н.* Формирование умственной культуры учащихся в процессе обучения математике: Кн. для учителя. – Киев: Радяньска шк., 1989.

403. *Очерки по истории математики* / Под ред. Б. В. Гнеденко. – М.: Изд-во МГУ, 1997.

404. *Павлов К. А.* Существует ли неискуственный интеллект? // Вопросы философии. 2005. № 4. – С. 76-85.

405. *Пайтген Х. О., Рихтер П. Х.* Красота фракталов. Образцы комплексных динамических систем. – М.: Мир, 1993.

406. *Панарин А. С.* Постмодернизм и глобализация: проект освобождения собственников от социальных и национальных обязательств // Вопросы философии. 2003. № 6. – С. 16-36.

407. *Панов М. И.* Методологические проблемы интуиционистской математики. – М.: Наука, 1084.

408. *Паршин А. Н.* Размышления над теоремой Геделя // Вопросы философии. 2000. № 6. – С. 92-109.

409. *Паршин А. Н.* Дополнительность и симметрия // Вопросы философии. 2001. № 4. – С. 84-104.

410. *Паршин А. Н.* Путь. Математика и другие миры. – М.: Добросвет, 2002.

411. *Перминов В. Я.* Ложные претензии социокультурной философии науки // В кн. [517]. – С. 235-253.

412. *Перминов В. Я.* Философия и основания математики. – М.: Прогресс-Традиция, 2001.

413. *Перминов В. Я.* Развитие представлений о надежности математического доказательства. – М.: Едиториал УРСС, 2004.

414. *Перминов В. Я.* Априорность математики // Вопросы философии. 2005. № 3. – С. 103-117.

415. *Петер Р.* Игра с бесконечностью. – М.: Просвещение, 1968.

416. *Петров Ю. А.* Логическая функция категорий диалектики. – М.: Наука, 1972.

417. *Петров Ю. А.* Философские проблемы математики. – М.: Знание, 1973.

418. *Петров Ю. А.* Диалектика научных абстракций в математическом познании. – М.: Изд-во МГУ, 1986.

419. *Петросян В. К.* Общий кризис теоретико-множественной математики и пути его преодоления. – М., 1997.

420. *Пехлецкий И. Д.* Структурно-количественный анализ как аппарат дидактических исследований (педагогико-математический аспект): Дис. … д-ра пед. наук. – Пермь: Перм. гос. пед. ин-т, 1988.

421. *Пиаже Ж.* Структуры математические и операторные структуры мышления // В кн. [440]. – С. 10-30.

422. *Пиаже Ж.* Избранные психологические труды. – М.: Просвещение, 1969.

423. *Платон.* Сочинения: В 4 т. – М.: Мысль, 1990-1995.

424. *Подниекс К. М.* Вокруг теоремы Геделя. – Рига, 1981.

425. *Подниекс К. М.* Платонизм, интуиция и природа математики. – Рига, 1988.

426. *Позер Х.* Математика и Книга Природы. Проблема применимости математики к реальности // Эпистемология и философия науки. 2004. № 1. – С. 34-52.

427. *Пойа Д.* Математика и правдоподобные рассуждения. – М.: Наука, 1975.

428. *Пойа Д.* Математическое открытие. – М.: Наука, 1976.

429. *Пойа Д.* Как решать задачу. – Львов: Квантор, 1991.

430. *Полани М.* Личностное знание. – М., 1985.

431. *Полякова Т. С.* История математического образования в России. – М.: Изд-во МГУ, 2002.

432. *Полякова Т. С.* Двухвековой юбилей высшего математического образования в России // Математика в высшем образовании. 2003. № 1. – С. 117-124.

433. *Пономарев Я. А.* Психология творения. – М.: Моск. психол.-соц. ин-т; Воронеж: НПО «МЭДОК», 1999.

434. *Попов В. А.* Новые основы дифференциального исчисления: Учеб. пособие для спецкурсов. – Сыктывкар: ПОЛИГРАФ-СЕРВИС, 2002.

435. *Попов Ю. П., Пухначев Ю. В.* Математика в образах. – М.: Знание, 1989.

436. *Поппер К.* Логика и рост научного знания. – М.: Прогресс, 1983.

437. *Порус В. Н.* Является ли наука самоорганизующейся системой? // Вопросы философии. 2006. № 1. – С. 95-108.

438. *Постников М. М.* Является ли математика наукой? // Математическое образование. 1997. № 2. – С. 83-88.

439. *Потоцкий М. В.* Преподавание высшей математики в педагогическом институте: Из опыта работы. – М.: Просвещение, 1975.

440. *Преподавание математики*: Пособие для учителей. – М.: Учпедгиз, 1960.

441. *Проблемы Гильберта* / Под общ. ред. П. С. Александрова. – М.: Наука, 1969.

442. *Проблемы философии и методологии современного естествознания.* – М.: Наука, 1973.

443. *Пригожин И., Стенгерс И.* Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой. – М.: Едиториал УРСС, 2003.

444. *Пружинин Б. И.* Ratio serviens? // Вопросы философии. 2004. № 12. – С. 41-55.

445. *Прытков В. П.* Оправдание синергетики // Вопросы философии. 2001. № 4. – С. 146-149.

446. *Пуанкаре А.* О науке. – М.: Наука, 1983.

447. *Расева Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики. – М.: Наука, 1972.

448. *Рассел Б.* История западной философии. – М., 1959.

449. *Рассел Б.* Введение в математическую философию. – М.: Гнозис, 1998.

450. *Рассел Б.* Философия логического атомизма. – Томск: Изд-во Томского гос. ун-та, 1999.

451. *Рассел Б.* Человеческое познание: его сфера и границы. – М.: Терра-Книжный клуб: Республика, 2000.

452. *Рассказы о математике и математиках* / Сост. С. М. Львовский. – М.: МЦНМО, 2000.

453. *Раушенбах Б. В.* Системы перспективы в изобразительном искусстве: Общая теория перспективы. – М.: Наука, 1986.

454. *Реале Дж., Антисери Д.* Западная философия от истоков до наших дней: В 3 т. – СПб.: ТОО ТК «Петрополис», 1994-1996.

455. *Реньи А.* Трилогия о математике. – М.: Мир, 1980.

456. *Рид К.* Гильберт. – М.: Наука, 1977.

457. *Рингель Г.* Теорема о раскраске карт. – М.: Мир, 1977.

458. *Робинсон А.* Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры. – М.: Наука, 1967.

459. *Ровинский Р. Е.* Синергетика и процессы развития сложных систем // Вопросы философии. 2006. № 2. – С. 162-169.

460. *Родионов М. А.* Мотивация учения математике и пути ее формирования. – Саранск: Изд-во Мордов. гос. пед. ин-та, 2001.

461. *Розин В. М.* Педагогика в ситуации перехода. Опыт гуманитарного исследования и преподавания // Философские науки. 2006. № 2. – С. 95-101; № 3. – С. 88-107.

462. *Розов Н. Х.* Что и как преподавать? Вечные вопросы курса школьной математики // Материалы Всероссийской научной конференции. – Саранск: Изд-во Мордов. гос. пед. ин-та, 1998. – С. 177-181.

463. *Розов Н. Х.* Гуманитарная математика // Математика в высшем образовании. 2003. № 1. – С. 53-62.

464. *Розов Н. Х.* Проблема размещения новых понятий и объектов в школьном курсе математики // Материалы Всероссийской научно-практической конференции. – Н. Новгород: Изд-во Нижегород. гос. пед. ун-та, 2005. – С. 56-64.

465. *Россман В.* Разум под лезвием красоты // Вопросы философии. 1999. № 12. – С. 52-62.

466. *Рузавин Г. И.* О природе математического знания. – М.: Мысль, 1968.

467. *Рузавин Г. И.* Философские проблемы оснований математики. – М.: Наука, 1983.

468. *Рузавин Г. И.* Новый структурный подход к математике и некоторые проблемы ее методологии // В кн. [211]. – С. 155-169.

469. *Русанов В. В., Росляков Г. С.* История и методология прикладной математики: Учеб. пособие. – М.: Изд-во ф-та ВМК МГУ, 2004.

470. *Рыбников К. А.* Очерк истории теории графов // История и методология естественных наук. Вып. XXXVI, Математика, механика: Сб. – М.: Изд-во МГУ, 1986. – С. 109-122.

471. *Рыбников К. А.* Возникновение и развитие математической науки: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1987.

472. *Рыбников К. А.* История математики. – М.: Изд-во МГУ, 1994.

473. *Рыбников К. А.* Введение в методологию математики: Тезисы лекций. – М.: Изд-во МГУ, 1994-1995.

474. *Садовничий В. А.* Математическое образование: настоящее и будущее: Доклад на Всерос. конф. «Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков», г. Дубна, 19 сентября 2000 г. – М.: МЦНМО, 2000.

475. *Садовничий В. А.* Знание и мудрость в глобализирующемся мире // Вопросы философии. 2006. № 2. – С. 3-15.

476. *Садовничий В. А.* Задачи студенческих математических олимпиад / В. А. Садовничий, А. А. Григорян, С. В. Конягин. – М.: Изд-во МГУ, 1987.

477. *Саломаа А.* Жемчужины теории формальных языков. – М.: Мир, 1986.

478. *Самсонов А. Л.* На пути к ноосфере // Вопросы философии. 2000. № 7. – С. 53-61.

479. *Саранцев Г. И.* Методология методики обучения математике. – Саранск: «Красный Октябрь», 2001.

480. *Саранцев Г. И.* Методика обучения математике в средней школе. – М.: Просвещение, 2002.

481. *Саранцев Г. И.* Эстетическая мотивация в обучении математике: Монография. – Саранск: ПО РАО: Мордов. гос. пед. ин-т, 2003.

482. *Сауров Ю. А.* Основы методологии методики обучения физике: Монография. – Киров: Изд-во Киров. ИУУ, 2003.

483. *Сафуанов И. С.* Теория и практика преподавания математических дисциплин в педагогических институтах. – Уфа: Магрифат, 1999.

484. *Сачков Ю. В.* Вероятность как загадка бытия и познания // Вопросы философии. 2006. № 1. – С. 80-94.

485. *Сборник московских математических олимпиад* / Под ред. В. Г. Болтянского. – М.: Просвещение, 1965.

486. *Селевко Г. К.* Современные образовательные технологии. – М.: Народное образование, 1998.

487. *Сеногноева Н. А.* Обучающие тесты: Инновационная педагогическая технология: Монография. – Нижний Тагил: Изд-во НГСПА, 2005.

488. *Серебряников О. Ф.* Эвристические принципы и логическое мышление. – М., 1979.

489. *Серпинский В. О.* О теории множеств. – М.: Просвещение, 1966.

490. *Сидоренко Е. А.* Логика. Парадоксы. Возможные миры (размышления о мышлении в девяти очерках). – М.: УРСС, 2002.

491. *Сингх С.* Великая проблема Ферма. – М.: МЦНМО, 2000.

492. *Синергетике – 30 лет.* Интервью с профессором Г. Хакеном // Вопросы философии. 2000. № 3. – С. 53-61.

493. *Синергетическая парадигма.* Когнитивно-коммуникативные стратегии современного научного познания / Под. ред. Л. П. Киященко. – М., 2004.

494. *Синергетическая парадигма.* Человек и общество в условиях нестабильности. – М.: Прогресс-Традиция, 2003.

495. *Славин А. В.* Наглядный образ в структуре познания. – М.: ИПЛ, 1971.

496. *Смаллиан Р.* Как же называется эта книга? – М.: Мир, 1981.

497. *Смаллиан Р.* Принцесса или тигр? – М.: Мир, 1985.

498. *Смальян Р.* Теория формальных систем. – М.: Наука, 1981.

499. *Смирнов В. И.* Учитель и книга. – М.: Логос, 2002.

500. *Смирнов Е. И.* Технология наглядно-модельного обучения математике. – Ярославль: Изд-во Ярослав. гос. пед. ун-та, 1998.

501. *Смолин О. Н.* Социально-философские основания стратегии модернизации России: роль образования и науки // Философские науки. 2006. № 1. – С. 5-27; № 2. – С. 5-25; № 3. – С. 5-14.

502. *Смышляев В. К.* О математике и математиках. Очерки. – Йошкар-Ола: Марийское кн. изд-во, 1977.

503. *Сноу Ч. П.* Две культуры. – М.: Прогресс, 1973.

504. *Соболева М. Е.* Возможна ли метафизика в эпоху постмодерна? К концепции трансцендентального прагматизма Карла-Отто Апеля // Вопросы философии. 2002. № 7. – С. 143-154.

505. *Совертков П. И.* Занимательное компьютерное моделирование в элементарной математике. – М.: Гелиос АРВ, 2004.

506. *Современная философия науки:* знание, рациональность, ценности в трудах мыслителей Запада: Учебная хрестоматия. – М.: Логос, 1996.

507. *Современные проблемы методики преподавания математики.* – М.: Просвещение, 1985.

508. *Современные философские проблемы естественных, технических и социально-гуманитарных наук*: Учебник для аспирантов и соискат. уч. степ. кандидата наук / Под общ. ред. В. В. Миронова. – М.: Гардарики, 2006.

509. *Сойер У.* Прелюдия к математике. – М.: Просвещение, 1972.

510. *Сойер У.* Путь в современную математику. – М.: Мир, 1972.

511. *Сокулер З. А.* Знание и власть: наука в обществе модерна. – СПб.: РХГИ, 2001.

512. *Сосинский А. Б.* Умер ли Никола Бурбаки? // Математическое просвещение (третья серия). – 1998. Вып. 2. – С. 4-13.

513. *Сошинский С. А.* Чудо в системе мироздания // Вопросы философии. 2001. № 9. – С. 82-97.

514. *Справочная книга по математической логике:* В 4 ч. – М.: Наука, 1982-1983.

515. *Степин В. С.* Саморазвивающиеся системы и постнеклассическая рациональность // Вопросы философии. –2003. № 8. – С. 5-17.

516. *Степин В. С. и др.* Философия науки и техники / В. С. Степин, В. Г. Горохов, М. А. Розов. – М., 1996.

517. *Стили в математике: социокультурная философия математики* / Под ред. А. Г. Барабашева. – СПб.: РХГИ, 1999.

518. *Столл Р.* Множества. Логика. Аксиоматические теории. – М.: Просвещение, 1968.

519. *Столович Л. Н.* Философия красоты. – М.: Политиздат, 1978.

520. *Столяр А. А.* Логические проблемы преподавания математики. – Минск: Высш. шк., 1965.

521. *Столяр А. А.* Педагогика математики. – Минск: Вышэйш. шк., 1969.

522. *Столяр А. А.* Логическое введение в математику. – Минск: Вышэйш. шк., 1971.

523. *Стройк Д. Я.* Краткий очерк истории математики. – М.: Наука, 1984.

524. *Структура и развитие науки.* – М., 1978.

525. *Стюарт Я.* Концепции современной математики. – Минск: Вышэйш. шк., 1980.

526. *Стяжкин Н. И.* Формирование математической логики. – М.: Наука, 1967.

527. *Султанова Л. Б.* Роль неявных предпосылок в историческом обосновании математического знания // Вопросы философии. – 2004. № 4. –С. 102-115.

528. *Суходольский Г. В.* Введение в математико-психологическую теорию деятельности. – СПб., 1998.

529. *Сухотин А. К.* Философия математики: Учебное пособие [Электронный ресурс] / http://ou.tsu.ru/hischool/filmatem/. 2003.

530. *Тарасенко В. В.* Метафизика фрактала // В кн. [517]. – С. 421-437.

531. *Тарасов Б. Н.* Паскаль. – М.: Молодая гвардия, 1982.

532. *Тарасов Л. В.* Этот удивительно симметричный мир: Пособ. для учащихся. – М.: Просвещение, 1982.

533. *Тарасов Л. В.* Мир, построенный на вероятности: Кн. для учащихся. – М.: Просвещение, 1984.

534. *Тарский А.* Введение в логику и методологию дедуктивных наук. – М.: ИЛ, 1948.

535. *Тейяр де Шарден П.* Феномен человека. – М., 1987.

536. *Тестов В. А.* Стратегия обучения математике. – М.: Технологич. школа бизнеса, 1999.

537. *Тестов В. А.* «Социокультурные истоки» в контексте развития новой образовательной парадигмы. – М.: Изд. дом «Истоки», 2005.

538. *Тестов В. А.* Модернизация математического образования: противоречия и перспективы // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2006. Вып. 8. – С. 207-213.

539. *Тимофеева И. Л.* Математическая логика. Курс лекций: В 2 ч.: Учеб. пособие. – М.: Прометей, 2003.

540. *Тихомиров В. М.* О некоторых особенностях математики XX века // Историко-математические исследования. Вторая серия. 1999. Вып. 3 (38). – С. 178-197.

541. *Тихомиров В. М., Успенский В. В.* Десять доказательств основной теоремы алгебры // Математическое просвещение (третья серия). 1997. Вып. 1. – С. 50-70.

542. *Толстой Л. Н.* Круг чтения: Избранные, собранные и расположенные на каждый день Л. Толстым мысли многих писателей об истине, жизни и поведении: В 2 т. – М.: Политиздат, 1991.

543. *Том Р.* Современная математика – существует ли она? // Математика в школе. 1975. № 1. –С. 89-93.

544. *Томпсон М.* Философия науки. – М.: ФАИР-ПРЕСС, 2003.

545. *Тростников В. Н.* Мысли перед рассветом. – Париж: YMCA-PRESS, 1980.

546. *Трубецков Д. И.* Введение в синергетику. Хаос и структуры. – М.: Едиториал УРСС, 2004.

547. *Тьюринг А.* Может ли машина мыслить? – М.: ГИФМЛ, 1960.

548. *Тяпкин А. А., Шибанов А. С.* Пуанкаре. – М.: Мол. гвардия, 1982.

549. *Уайтхед А.* Избранные работы по философии. – М.: Прогресс, 1990.

550. *Узоры симметрии.* – М.: Мир, 1980.

551. *Успенский В. А.* Теорема Геделя о неполноте. – М.: Наука, 1982.

552. *Успенский В. А.* Что такое нестандартный анализ? – М.: Наука, 1987.

553. *Успенский В. А.* Семь размышлений на темы философии математики // В кн. [211]. – С. 106-155.

554. *Успенский В. А.* Что такое аксиоматический метод? – Ижевск: Науч.-изд. центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.

555. *Федотов А. П.* Глобалистика: Начала науки о современном мире: Курс лекций. – М.: Аспект Пресс, 2002.

556. *Федотова Н. Н.* Глобализация и образование // Философские науки. 2003. № 4. – С. 5-24.

557. *Фейерабенд П.* Избранные труды по методологии науки. – М.: Прогресс, 1986.

558. *Фейнберг Е. Л.* Две культуры. Интуиция и логика в искусстве и науке. – Фрязино: Век 2, 2004.

559. *Фейнман Р.* Характер физических законов. – М.: Наука, 1987.

560. *Феликс Л.* Элементарная математика в современном изложении. – М.: Просвещение, 1967.

561. *Философия. Логика. Язык* / Общ. ред. А. П. Горского, В. В. Петрова. – М.: Прогресс, 1987.

562. *Философская энциклопедия:* В 5 т. – М.: Сов. Энцикл., 1960-1970.

563. *Философские проблемы естествознания* / Под ред. С. Т. Мелюхина. – М.: Высш. шк., 1985.

564. *Философский энциклопедический словарь.* – М., 2004.

565. *Философско-методологические вопросы математики.* Основная советская литература (1959-1981 гг.). – М.: АН СССР, 1981.

566. *Философы педагогам: Формирование научного мировоззрения в процессе преподавания естественных и математических дисциплин в средней школе.* – М.: Прогресс, 1976.

567. *Финн В. К.* Неологицизм – философия обоснованного знания // Вопросы философии. 1996. № 8. – С. 89-99.

568. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. – М.: Наука, 1966 (издание шестое).

569. *Фоменко А. Т.* Наглядная геометрия и топология. Математические образы в реальном мире. – М.: Изд-во МГУ, 1992.

570. *Фор Р и др.:* Современная математика / Р. Фор, А. Кофман, М. Дени-Папен. – М.: Мир, 1966.

571. *Франкл С. Л.* Предмет знания. Душа человека. – СПб., 1995.

572. *Фреге Г.* Основоположения арифметики. – М., 2000.

573. *Фрейденталь Г.* Язык логики. – М.: Наука, 1969.

574. *Фрейденталь Г.* Математика в науке и вокруг нас. – М.: Мир, 1977.

575. *Френкель А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. – М.: Мир, 1966.

576. *Фридман Л. М.* Психолого-педагогические основы обучения математике в школе. – М.: Просвещение, 1983.

577. *Фройденталь Г.* Математика как педагогическая задача: В 2 ч. – М.: Просвещение, 1982, 1983.

578. *Хайтун С. Д.* Эволюция Вселенной // Вопросы философии. 2004. № 10. – С. 74-92.

579. *Хакен Г.* Синергетика. – М.: Мир, 1980.

580. *Хакен Г.* Тайны природы. Синергетика: учение о взаимодействии. – М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

581. *Халмош П. Р.* Теория меры. – М.: ИЛ, 1953.

582. *Харари Ф.* Теория графов. – М.: Мир, 1973.

583. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. – М.; Л.: Гостехиздат, 1937.

584. *Хинтикка Я.* Логико-эпистемологические исследования. – М., 1980.

585. *Хинтикка Я.* Действительно ли логика – ключ ко всякому хорошему рассуждению? // Вопросы философии. 2000. № 11. – С. 105-125.

586. *Хинчин А. Я.* Три жемчужины теории чисел. – М.; Л.: ОГИЗ, 1948.

587. *Хинчин А. Я.* Педагогические статьи. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1963.

588. *Хинчин А. Я.* Восемь лекций по математическому анализу. – М.: Наука, 1977 (издание четвертое).

589. *Холодная М. А.* Психология интеллекта: Парадоксы исследования. – М.: РАН, 1997.

590. *Хорган Д.* Конец науки. Взгляд на ограниченность знания на закате Века Науки. – СПб.: Амфора, 2001.

591. *Хрестоматия по истории математики. Арифметика и алгебра. Теория чисел. Геометрия* / Под ред. А. П. Юшкевича. – М.: Просвещение, 1976.

592. *Хрестоматия по истории математики. Математический анализ. Теория вероятностей* / Под ред. А. П. Юшкевича. – М.: Просвещение, 1977.

593. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ: В 2 т. – М.: Наука, 1975.

594. *Цыпкин А. Г.* Справочник по математике для средних учебных заведений. – М.: Наука, 1983.

595. *Черепанов* С. К. Основания и парадоксы: Новый подход к решению проблем логического обоснования математики. – Красноярск, 1995.

596. *Черепанов* С. К. Обоснование математики: новый взгляд на проблему [Электрон. ресурс]/ http://www.portalus.ru/modelus/philosophy/. 2005.

597. *Чернавский Д. С.* Синергетика и информация. Динамическая теория информации. – М.: Едиториал УРСС, 2004.

598. *Чернавский Д. С., Чернавская Н. М.* К онтологии научного творчества. Синергетический подход // Эпистемология и философия науки. 2004. № 1. – С. 114-130.

599. *Черч А.* Введение в математическую логику. – М.: ИЛ, 1960.

600. *Черч А.* Математика и логика // В кн. [340]. – С. 209-215

601. *Чжао Юань-жень.* Модели в лингвистике и модели вообще // В кн. [340]. – С. 281-292.

602. *Чижов Е. Б.* Введение в философию математических пространств. – М.: Едиториал УРСС, 2004.

603. *Чудинов В. А.* Атомистические концепции в современном естествознании. – М.: Наука, 1986.

604. *Шалютин С. М.* Содержательные и формальные аспекты познавательного процесса // Диалектика познания и современная наука. – М.: Мысль, 1973.

605. *Шапиро С. И.* От алгоритмов – к суждениям (Эксперименты по обучению элементам математического мышления). – М.: Сов. радио, 1973.

606. *Шафаревич И. Р.* Основные понятия алгебры / Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 11. (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР.) – М., 1986.

607. *Шафаревич И. Р.* Основы алгебраической геометрии: В 2 т. – М.: Наука, 1988.

608. *Шафаревич И. Р.* О некоторых тенденциях развития математики // Москва. 1990. № 12. – С. 3-6.

609. *Шафаревич И. Р.* Избранные главы алгебры // Математическое образование. Журнал Фонда математического образования и просвещения. – М., 1997. № 1-3; 1998. № 1-4.

610. *Швейцер А.* Благоговение перед жизнью. – М.: Прогресс, 1992.

611. *Швырев В. С.* Теоретическое и эмпирическое в научном познании. – М.: Наука, 1978.

612. *Шевелев И. Ш. и др.* Золотое сечение: Три взгляда на природу гармонии / И. Ш. Шевелев, М. А. Марутаев, И. Л. Шмелев. - М.: Стройиздат, 1990.

613. *Шенфилд Дж.* Математическая логика. – М.: Наука, 1975.

614. *Шрамко Я.* Ошибка Георга Кантора? // Вопросы философии. 2001. № 9. – С. 154-156.

615. *Шрейдер Ю. А.* Равенство, сходство, порядок. – М.: Наука, 1971.

616. *Шрейдер Ю. А., Шаров А. А.* Системы и модели. – М.: Радио и связь, 1982.

617. *Шубников А. В., Копцик В. А.* Симметрия в науке и искусстве. – М.: Наука, 1972.

618. *Шумилин А. Т.* Проблемы структуры и содержания процесса познания. – М.: Изд-во МГУ, 1969.

619. *Щедровицкий Г. П.* Философия. Наука. Методология. – М., 1997.

620. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ: Теория и приложения. – М.: Мир, 1969.

621. *Эйнштейн А.* О науке. Собрание научных трудов: В 4 т. Т. 4. – М., 1967.

622. *Энгелер Э.* Метаматематика элементарной математики. – М.: Мир, 1987.

623. *Эндрю А.* Искусственный интеллект. – М.: Мир, 1985.

624. *Энциклопедический словарь юного математика.* – М.: Педагогика, 1989.

625. *Энциклопедия элементарной математики:* В 5 кн. – М.; Л.: Гостехиздат. – М.: Наука, 1951-1966.

626. *Эрдниев П. М., Эрдниев Б. П.* Обучение математике в школе. Укрупнение дидактических единиц: Книга для учителя. – М.: Столетие, 1996.

627. *Юлов В. Ф.* Мышление в контексте сознания. – М.: Академический проект, 2005.

628. *Юшкевич А. П.* История математики в средние века. – М.: Физматгиз, 1961.

629. *Юшкевич А. П.* История математики в России до 1917 г. – М.: Наука, 1968.

630. *Яглом И. М.* Булева структура и ее модели. – М.: Сов. радио, 1980.

631. *Яглом И. М.* Математические структуры и математическое моделирование. – М.: Радио и связь, 1980.

632. *Яглом И. М.* Что такое математика // Квант. 1992. № 9. – С. 2-8.

633. *Якиманская И. С.* Развитие пространственного мышления школьников. – М.: Педагогика, 1980.

634. *Яковлев В. А.* Бинарность ценностных ориентаций науки // Вопросы философии. 2001. № 12. – С. 77-86.

635. *Яковлева Л. Е.* От феноменологии Гуссерля к метафизическому реализму Х. Субиди // Вопросы философии. 2002. № 5. – С. 153-156.

636. *Яновская С. А.* Методологические проблемы науки. – М.: Мысль, 1972.

Примечание. Рекомендуем читателям также следующие периодические издания:

сборники «Историко-математические исследования» (обе серии), «История и методология естественных наук. Математика. Механика», «Сборник научно-методических статей по математике», «Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона» и др.;

журналы «Квант», «Математика в школе», «Математическое просвещение» (все три серии), «Математическое образование» (журнал Фонда математического образования и просвещения, выходит с 1997 года), «American Mathematical Monthly», «Вопросы философии», новые журналы «Математика в высшем образовании» (Нижний Новгород) и «Математика в образовании» (Чебоксары), газету «Математика».

Полезно знать различные математические и философские энциклопедии и словари [118, 341, 342, 562, 564, 624, 625], справочники [9, 49, 54, 56, 121, 122, 172, 279, 300, 332, 514, 594], хрестоматии [338, 591, 592].

Иметь в виду научно-популярную литературу, включающую биографии знаменитых ученых и их открытия [34, 70, 234, 269, 310, 339, 415, 435, 455-457, 531, 548, 554], серии «Жизнь замечательных людей», «Жизнь замечательных идей» «Популярные лекции по математике», выпуски библиотечки «Квант», «Мир знаний» и т. д.;

труды корифеев науки [15, 16, 38, 69, 84, 105, 106, 133, 139, 141, 174, 182, 186, 242, 244, 281, 302, 304, 321, 343, 379, 423, 446, 451, 535, 547, 549, 572, 621];

материалы методико-математических и методологических конференций, скажем, [72, 100, 119, 462, 464];

литературу по занимательной математике [126-130, 299, 303, 496, 497];

сборники олимпиадных задач, например [127, 137, 274, 372, 485].

Научное издание

Вечтомов Евгений Михайлович

Метафизика математики

Редактор: ***О. Коробкова***
Технический редактор: ***В. Варанкина***
Дизайн обложки: ***П. Горев***
Подписано в печать 15.05.2006 г. Формат 60×84 1/16
Бумага типографская. Усл. печ. л. 26,7
Тираж 300. Заказ 165

Издательство Вятского государственного гуманитарного университета
610002, г. Киров, ул. Красноармейская, 26

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии ООО «Лобань»
610046, г. Киров, ул. Ленина, 198

Евгений Михайлович Вечтомов,

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой высшей математики
Вятского государственного гуманитарного университета,
академик РАЕН, член-корреспондент РАЕ,
член Московского математического общества,
четырежды соросовский профессор.

Е. М. Вечтомов - известный в стране и за рубежом
специалист по теории колец функций,
руководитель научной школы
по функциональной алгебре и теории полуколец.
Является автором 230 научных, методических
и философских работ по математике,
среди которых 4 монографии, 6 научных обзоров
и 10 учебных пособий.