

ТОМАС МАК
МАТЕМАТИКА РИСКОВОГО СТРАХОВАНИЯ

Страховой бизнес предполагает систематический и всесторонний анализ принимаемых на страхование рисков. Только грамотное применение специальных средств и инструментов анализа рисков позволяет предложить клиенту «надежную защиту за подходящую цену».

Доктор Томас Мак занимает должность главного актуария в Мюнхенском перестраховочном обществе и широко известен за пределами компании благодаря своим многочисленным публикациям.

В своей книге Томас Мак обобщает и систематизирует результаты, достигнутые в математике рискового страхования, и закрывает многие из имеющихся пробелов. «Математика рискового страхования» является надежным научным и практическим руководством для широкого круга заинтересованных лиц.

Мюнхенское перестраховочное общество всегда стремилось содействовать развитию теории и практики страхования и перестрахования полезными публикациями. Издание настоящей книги подтверждает это в очередной раз. Мы убеждены, что «Математика рискового страхования» будет хорошо принята всеми, кто ждет от учебника не только теоретических сведений, но и конкретной поддержки в решении практических задач страховой математики.

Ханс-Юрген Шинцлер,
Мюнхенское перестраховочное общество

Доктор Томас Мак — один из руководителей немецкой ASTIN-группы и член международного ASTIN-комитета, а также почетный член Лондонского института актуариев и член-корреспондент Швейцарского общества актуариев. Он читает лекции по математике рискового страхования в двух мюнхенских университетах. Имеет многочисленные публикации по страховой математике, преимущественно в «ASTIN Bulletin» и «Insurance: Mathematics & Economics». Две из его работ удостоены премий Американского общества актуариев.



ТОМАС
МАК

МАТЕМАТИКА РИСКОВОГО СТРАХОВАНИЯ

ТОМАС
МАК
МАТЕМАТИКА
РИСКОВОГО
СТРАХОВАНИЯ



Посетите наш
интернет-магазин
www.olbuss.ru



Т О М А С
МАК
МАТЕМАТИКА
РИСКОВОГО
СТРАХОВАНИЯ

DEUTSCHE GESELLSCHAFT
FÜR VERSICHERUNGSMATHEMATIK



THOMAS
MACK

SCHADENVERSICHERUNGSMATHEMATIK

2., überarbeitete Auflage



ТОМАС
МАК

МАТЕМАТИКА РИСКОВОГО СТРАХОВАНИЯ



«ОЛИМП—БИЗНЕС»
МОСКВА, 2005

УДК 368:519
ББК 22.1+65.271
М15

Перевела с немецкого, научный консультант
Е. Курносова

Мак Томас

М15 Математика рискованного страхования / Пер. с нем. — М.: ЗАО «Олимп—
Бизнес», 2005. — 432 с.: ил.
ISBN 5-901028-94-5 (рус.)

Книга известного в мире немецкого специалиста в широком объеме дает сведения, необходимые для актуарной деятельности в сфере рискованного страхования. Обсуждены подходы к моделированию основных характеристик страхового риска, отбору тарифных факторов, построению однородных классов рисков, расчету страховых премий в условиях многократной классификации рисков. Даны обзор, теоретико-вероятностное обоснование, вывод формул оценки точности и рекомендации по практическому применению большинства известных методов резервирования «позднего» убытка, предложены детализации базовых методов, позволяющие увеличить точность расчета. Изложены и прокомментированы принципы расчета франшизных скидок, а также перестраховочных премий для различных форм непропорционального перестрахования. Исследованы возможности оптимизации выбора формы деления риска и объема передаваемого риска.

Материал рассчитан на специалистов, знакомых с основами теории вероятностей и математической статистики (в особенности теории максимума правдоподобия и регрессионного анализа). Книга может использоваться в качестве учебного пособия для студентов математических и экономических специальностей, интересующихся страховой математикой, а также в качестве практического руководства действующему страховому актуарию.

УДК 368:519
ББК 22.1+65.271

Охраняется Законом РФ об авторском праве. Воспроизведение всей книги или ее части в любом виде воспрещается без письменного разрешения издателя.

ISBN 5-901028-94-5 (рус.)
ISBN 0178-8116 (нем.)
ISBN 3-88487-957-X (нем.)
ISBN 3-88487-582-5 (1. Auflage, 1997) (нем.)

© Verlag Versicherungswirtschaft
Karlsruhe 2002 Herstellung Konrad
Triltsch, Print und digitale Medien
GmbH, Ochsenfurt-Hohestadt.
© ЗАО «Олимп—Бизнес»,
перевод на рус.яз.,
оформление, 2005
Все права защищены.

Содержание

Указатель рисунков	x
Указатель таблиц	xii
Настольная книга актуария	xiii
Об авторе	2
Вступительное слово	3
Предисловие	4
Предисловие автора к русскому изданию	6
Обзор содержания	7
Способы обозначений	10

Часть первая. ОСНОВЫ

1.1. Обзор; общие принципы построения моделей	13
1.2. Основные принципы страхования	14
1.2.1. Обзор	—
1.2.2. Коллективный баланс и технический страховой риск	15
1.2.3. Основные принципы расчета премий: рискованная надбавка	20
1.2.4. Влияние рискованной надбавки на политику формирования портфеля	24
1.2.5. Вывод	26
1.3. Индивидуальная модель для совокупного убытка риска и группы рисков	27
1.3.1. Постановка проблемы и обзор	—
1.3.2. Моделирование зависимости дисперсии от объема	29
1.3.3. Моделирование совокупного убытка риска и группы рисков с помощью гамма-распределения	35
1.3.4. Моделирование совокупного убытка риска и группы рисков с помощью обратного гауссовского распределения	39
1.3.5. Логнормальное распределение как модель для совокупного убытка группы рисков	41
1.3.6. Моделирование зависимости между математическим ожиданием и дисперсией нескольких групп рисков	44
1.3.7. Моделирование совокупного убытка группы рисков с помощью модифицированного распределения Пуассона	48
1.3.8. Вывод и таблица моделей распределения	53
1.4. Коллективная модель для числа убытков, размера убытка и совокупного убытка портфеля рисков	55

1.4.1. Постановка проблемы и обзор	55
1.4.2. Моделирование числа убытков	61
1.4.3. Моделирование размера убытка в отдельном страховом случае и таблица моделей распределения	68
А. Важные модели распределения	—
Б. Оценка параметров	80
1.4.4. Распределение совокупного убытка	86
1.4.5. Вывод	93
1.5. Вывод и дополнения	95

Часть вторая. ИСЧИСЛЕНИЕ ТАРИФОВ

2.1. Обзор	99
2.2. Построение классов значений фактора риска	100
2.2.1. Постановка проблемы и обзор	—
2.2.2. Агломеративный кластер-метод на основе критерия равенства математических ожиданий	101
2.2.3. Агломеративный кластер-метод с максимизацией функции правдоподобия	105
2.2.4. Метод смешанного распределения	110
2.2.5. Построение классов при наличии нескольких факторов риска	114
2.2.6. Вывод и указания к применению методов	118
2.3. Выбор тарифных факторов	119
2.3.1. Постановка проблемы и обзор	—
2.3.2. Схема пошагового отбора	121
2.3.3. Выбор тарифных факторов с помощью дисперсионного анализа	122
2.3.4. Выбор значений фактора с помощью дихотомических переменных	125
2.3.5. Выбор тарифных факторов с помощью метода отношения правдоподобий	127
2.3.6. Выбор тарифных факторов с помощью перекрестной параметризации при наличии наблюдений за один год	129
2.3.7. Выбор тарифных факторов при наличии наблюдений за один год с помощью дополнительной информации	132
2.3.8. Вывод и указания к применению	135
2.4. Методы выравнивания при многократной классификации рисков	137
2.4.1. Постановка проблемы и обзор	—
2.4.2. Тарификация с помощью маргинальных средних	140
2.4.3. Метод Бейли—Саймона и метод маргинальных сумм	141

2.4.4. Метод на основе модифицированного распределения Пуассона и построение критерия согласия	143
2.4.5. Метод на основе гамма распределения и оценка точности потребной премии	147
2.4.6. Метод на основе логнормального распределения и метод наименьших квадратов	152
2.4.7. Метод на основе обратного гауссовского распределения и факторизация параметра формы при наличии наблюдений за несколько лет	157
2.4.8. Детализация методов при наличии информации о числе убытков	159
2.4.9. Вывод и унификация методов с помощью обобщенной линейной модели; указания к применению	163
2.5. Доверительные методы для моделирования сходства рисков и групп рисков	167
2.5.1. Постановка проблемы и обзор	—
2.5.2. Доверительная модель Пуассон-гамма и построение системы бонус-малус	168
2.5.3. Не зависящие от распределения доверительные методы	175
2.5.4. Доверительные модели Бюльмана и Бюльмана—Штрауба	178
2.5.5. Вывод и указания к применению	188
2.6. Вывод и замечания по проблеме больших убытков	190

Часть третья. РЕЗЕРВИРОВАНИЕ

3.1. Постановка проблемы и обзор	195
3.1.1. Причины долгого развития убытка	—
3.1.2. Роль резерва позднего убытка	196
3.1.3. Суть математических методов	—
3.1.4. Треугольник развития	197
3.1.5. Виды данных: оплаченные или произошедшие убытки?	198
3.1.6. Значение выбора портфеля	200
3.1.7. Инфляция, мера объема, независимость лет событий	—
3.1.8. Значение и расчет точности оценки резерва	201
3.1.9. Обзор методов	204
3.2. Не зависящие от распределения методы	—
3.2.1. Обзор	—
3.2.2. Метод на основе независимости нормированных приращений убытка от года события	205
3.2.3. Доверительный метод по отношению к годам событий	208

3.2.4. Метод цепной лестницы	216
3.2.5. Чувствительность и точность метода цепной лестницы	219
3.2.6. Проверка предположений модели цепной лестницы и сокращение числа параметров	227
3.2.7. Проверка некоррелированности лет развития	233
3.2.8. Вывод и указания к применению	235
3.3. Методы с перекрестной параметризацией	239
3.3.1. Введение и обзор	—
3.3.2. Вывод метода цепной лестницы из метода, основанного на модифицированном распределении Пуассона	242
3.3.3. Метод на основе гамма-распределения	249
3.3.4. Резервирование с помощью метода наименьших квадратов	251
3.3.5. Метод на основе обратного гауссовского распределения	257
3.3.6. Вывод и указания к применению	259
3.4. Модификации предыдущих методов	261
3.4.1. Обзор	—
3.4.2. Отделение эффектов календарных лет	—
3.4.3. Разделение числа убытков и размера убытка; лаг-распределение	265
3.4.4. Разделение IBNR- и IBNER-убытков	270
3.4.5. Метод на основе данных по отдельным убыткам	275
3.4.6. Вывод и указания к применению	281
3.5. Вывод	282

Часть четвертая. ДЕЛЕНИЕ РИСКА

4.1. Постановка проблемы, обзор, причины и формы	285
4.1.1. Постановка проблемы и обзор	—
4.1.2. Причины и формы деления риска между страховой компанией и страхователем	286
4.1.3. Причины и формы деления риска между страховщиком и перестраховщиком: перестрахование	288
4.2. Влияние деления риска на основные случайные величины	292
4.2.1. Постановка проблемы; пропорциональное деление риска	—
4.2.2. Непропорциональное деление риска: число убытков	295
4.2.3. Непропорциональное деление риска: размер убытка	297
4.2.4. Непропорциональное деление риска: совокупный убыток	300
4.2.5. Эффект освобождения	304
4.2.6. Вывод	309

4.3. Исчисление премий при делении риска	310
4.3.1. Обзор	—
4.3.2. Исчисление премий в случае вычитаемой франшизы	311
4.3.3. Исчисление премий при перестраховании эксцедента убытка	316
4.3.4. Исчисление премий при годовой франшизе и перестраховании «Stop Loss»	327
4.3.5. Заключение и дополнения	333
4.4. Выбор формы и объема деления риска	335
4.4.1. Постановка проблемы и обзор	—
4.4.2. Модели оценки привлекательности деления риска	336
4.4.3. Односторонняя оптимизация при заданных транзакционных расходах	340
4.4.4. Дифференциация собственного удержания	346
4.4.5. Субоптимальное и оптимальное по Парето деление риска	351
4.4.6. Вывод	355
4.5. Вывод: деление риска как важная часть рисковой политики	357

ПРИЛОЖЕНИЕ. Типовые задачи квалификационного экзамена по математике рискового страхования в Немецком обществе актуариев	359
Предметный указатель	409

Указатель рисунков

1.3.2.1. Зависимость дисперсии ставки убытка от объема в огневом страховании промышленных предприятий	33
1.3.3.1. Плотности гамма-распределений с математическим ожиданием 1	36
1.3.4.1. Плотности обратных гауссовских распределений с математическим ожиданием 1	39
1.3.5.1. Плотности логнормальных распределений с математическим ожиданием 1	42
1.3.5.2. Зависимость квадрата коэффициента вариации логнормального распределения от объема	43
1.3.6.1. Зависимость математического ожидания и дисперсии в огневом страховании промышленных предприятий	46
1.3.7.1. Модифицированные распределения Пуассона с математическим ожиданием 1 (без вероятности в 0)	51
1.3.8.1. Плотности с одинаковым математическим ожиданием 1 и коэффициентом вариации 5	54
1.3.8.2. Плотности с одинаковым математическим ожиданием 1 и коэффициентом вариации 1	—
1.3.8.3. Плотности с одинаковым математическим ожиданием 1 и коэффициентом вариации 0,2	55
1.4.3.2. Концентрация убытков к таблице 1.4.3.1 (огневое страхование)	70
1.4.3.3. Концентрация убытков (страхование гражданской ответственности)	—
1.4.3.5. Уклон к графику 1.4.3.2	72
1.4.3.6. Логнормальное распределение к графику 1.4.3.2 (параметры $\mu = 1.61$ и $\sigma = 1.96$)	75
1.4.3.8. Плотности распределений размера убытка с $E(X) = 1$ и $Vko(X) = 5$	80
3.2.8.1. Развитие уровня выплат	237
3.2.8.2. Развитие относительного уровня выплат	—
4.2.5.1. Пример функции эффекта освобождения	305

4.2.5.2. Графическая интерпретация первого момента первичного и вторичного рисков	307
4.2.5.3. Графическая интерпретация второго момента первичного и вторичного рисков. Нанесенные значения получаются умножением площадей на $2E(x)$	308
4.3.2.1. Эффект освобождения при логнормальном распределении	313

Указатель таблиц

1.3.8.4. Модели распределения совокупного убытка группы рисков в рамках индивидуальной модели	56
1.4.2.1. Динамика годового числа убытков в огневом страховании	63
1.4.2.2. Модели распределения числа убытков	65
1.4.3.1. Распределение размера убытка в огневом страховании	69
1.4.3.4. Дополнение к таблице 1.4.3.1	71
1.4.3.7. Модели распределения размера убытка	79
1.4.3.9. Подгонка распределений в области больших убытков	85
1.4.3.10. Подгонка распределений во всем диапазоне размеров убытков	86
2.2.5.1. Пример к задаче классификации при наличии двух факторов риска	115
2.4.1.1. Схема с маргинальными множителями в случае двукратной классификации тарифов	138
2.4.1.2. Маргинальные множители шведского тарифа автострахования	139
2.4.2.1. Пример двукратной классификации рисков страхования автогражданской ответственности	140
2.4.6.1. Матрица плана при перекрестной параметризации	155
2.5.1.1. Свойства условного математического ожидания	169
2.5.2.1. Распределение числа убытков в автостраховании I	170
2.5.2.2. Распределение числа убытков в автостраховании II	172
2.5.4.1. Расчет доверительных оценок	188
3.1.4.1. Треугольник развития	197
3.1.5.1. Кумулятивный треугольник развития произошедших убытков	199
3.1.5.2. Кумулятивный треугольник развития оплаченных убытков	—
3.3.4.1. Матрица плана при перекрестной параметризации	253
4.1.3.1. Основные формы перестрахования	290
4.2.3.1. Неполные функции моментов	299

Настольная книга актуария

Предлагаемая вашему вниманию книга известного немецкого математика Томаса Мака — по сути первая фундаментальная работа в области математики рискованного страхования, публикуемая в России. Появление такой книги, несомненно, будет событием в среде российских актуариев.

Сегодня актуарное сообщество России не просто готово к восприятию сугубо практического учебника по математике рискованного страхования — оно ощущает в нем необходимость. Рисковые виды страхования начинают играть в России все более значимую роль, требуя от актуария совершенствования навыков обработки и анализа страховой статистической информации. Несмотря на высокий уровень общего математического образования в России, для решения практических задач рискованной математики необходима глубокая специализированная подготовка. Базовые теоретические сведения, черпаемые из имеющихся в России источников по этой тематике, уже далеко не достаточны при достигнутом объеме и качестве страховой статистики. На этом фоне представляется очевидной потребность внимательно изучить и использовать опыт и традиции развитых страховых школ, в частности, Западной Европы.

Автор книги доктор Томас Мак — действующий актуарий и признанный авторитет западноевропейской актуарной науки. За свою более чем 30-летнюю практическую деятельность он опубликовал ряд книг и статей по насущным проблемам страховой математики, постоянно выступает с лекциями в европейских университетах и на международных форумах страховых математиков.

Главные достоинства его книги «Математика рискованного страхования» — систематизированное изложение на строгом математическом языке и в то же время ярко выраженный прикладной характер. Это сочетание отличает ее от большинства известных работ по теории риска и актуарных расчетов: труды высокого математического уровня, как правило, представляют больше научный, чем практический интерес, а приближенные к практике обычно популяризованы и ограничиваются элементарным математическим аппаратом. Тем более, немногие работы в этой области могут претендовать на широту рассматриваемого круга вопросов и целостность материала.

Книга Томаса Мака «Математика рискованного страхования» может быть рекомендована не только в качестве учебника для профессиональной подготовки актуария в области рискованных видов, но и в качестве методического пособия действующим актуариям страховых компаний. Некоторые результаты, освещенные в книге (например, теоретико-вероятностное обоснование метода цепной лестницы), ранее не приводились в литературе по страховой математике — они получены автором впервые. Не имеющая аналогов даже в западной литературе, книга пользуется высокой популярностью в Европе и приобрела славу «настольной книги» актуария. Вышедшая в 1996 году она разошлась

большим тиражом и в 2004 году появилось ее второе издание, планируется перевод на английский язык.

Компания «Росгосстрах» гордится почетным правом перевода и содействия выпуску этой замечательной работы в России. Менеджмент компании, занимающей сегодня лидирующие позиции на российском страховом рынке, в числе приоритетных направлений своей деятельности видит поддержание и развитие актуарной науки. Елена Курносова, выступившая переводчиком фундаментального труда, не первый год работает в актуарной службе компании и прекрасно ориентируется в рынке актуарных услуг страны, проблемах актуарного сообщества. Стажировка за рубежом в одной из старейших и крупнейших компаний мира позволили ей сравнить российский страховой рынок с развитыми европейскими с точки зрения потребностей актуариев, возможностей и потенциальных преимуществ, которые предоставляет страховой компании активное использование результатов актуарной деятельности. Как и во многом другом, Россия вынуждена догонять развитые страны и в страховом бизнесе вообще, и в прикладной актуарной науке в частности. И этот процесс невозможен без издания подобных фундаментальных трудов коллег с развитых рынков, в свое время испытывавших абсолютно те же проблемы при решении подобных задач.

Стоит отметить, что проявленная ведущим сотрудником Актуарного Центра инициатива перевода и издания в России популярного немецкого учебника по рисковой математике была активно поддержана руководством компании. Изданием книги «Математика рискового страхования» на русском языке «Росгосстрах» надеется способствовать дальнейшему становлению цивилизованного страхового рынка в России, и это лишь один из многих шагов крупнейшей страховой системы страны в данном направлении.

Геннадий Гальперин
Исполнительный директор
ОАО «Росгосстрах»
Москва, январь 2005 г.

Христе,
а также
Мириам,
Христине,
Константину

Об авторе

Доктор Томас Мак выпускник математического факультета Мюнхенского университета им. Людвига Максимилиана, докторскую диссертацию защитил в Мангеймском университете. С 1974 года работает актуарием в Мюнхенском перестраховочном обществе в различных областях страхования не-жизни, а с 1993 года занимает должность главного актуария в области не-жизни. Является одним из руководителей немецкой ASTIN-группы и членом международного ASTIN-комитета, а также почетным членом Лондонского института актуариев и членом-корреспондентом Швейцарского общества актуариев. Читает лекции по математике рискованного страхования в двух мюнхенских университетах. Имеет многочисленные публикации по страховой математике, преимущественно в «ASTIN-Bulletin» и «Insurance: Mathematics & Economics». Две из его работ удостоены премий Американского общества актуариев.

Вступительное слово

Страховой бизнес предполагает постоянный комплексный анализ принимаемых на страхование рисков. Только грамотное применение специальных средств и инструментов анализа рисков позволяет гарантировать клиенту защиту и выживать в условиях конкуренции.

Доктор Томас Мак занимает должность главного актуария в Мюнхенском перестраховочном обществе и широко известен за пределами компании благодаря своим многочисленным публикациям. В настоящей книге он обобщает и систематизирует результаты, достигнутые в математике рискованного страхования, и закрывает многие из имеющихся пробелов. Книга Томаса Мака «Математика рискованного страхования» — надежное научное и практическое руководство для широкого круга заинтересованных лиц.

Мюнхенское перестраховочное общество всегда стремилось содействовать развитию теории и практики страхования и перестрахования полезными публикациями. Издание настоящей книги подтверждает это в очередной раз. Мы убеждены, что «Математика рискованного страхования» будет хорошо принята всеми, кто ждет от учебника не только теоретических сведений, но и конкретной поддержки в решении практических задач страховой математики.

Ханс-Юрген Шинцлер,
Мюнхенское перестраховочное общество,
Мюнхен, сентябрь 1996 г.,

Предисловие

Разрабатывая совместно с профессором Хельтеном (в 1989 году) программу первого экзамена по математике рискованного страхования в Немецком обществе страховых математиков, я столкнулся с проблемой отсутствия учебника, необходимого для подготовки участников и содержащего в той или иной мере все, что важно знать математику для работы в сфере рискованного страхования. В существовавших учебниках по теории риска либо совсем не рассматривались многие важные практические задачи, либо им уделялось недостаточное внимание. В связи с этим и под влиянием профессора Хельтена я решил попытаться сам написать такой учебник.

Первые наброски отдельных глав возникли еще в 1989 году, и тогда я не ожидал, что приведение текста к окончательному виду займет целых 6 лет. Принимая в расчет интересную работу в Мюнхенском перестраховочном обществе (позволившую в реальности соприкоснуться со всеми обсуждаемыми в книге задачами), а также большую семью, я осознавал невозможность быстрой реализации моего проекта. Но основная причина столь долгой работы над книгой заключалась в другом.

Я не намеревался издавать сборник отдельных методов, а хотел представить математику рискованного страхования как единое целое. В процессе работы над книгой я сталкивался с многочисленными пробелами и неясностями, которые предстояло восполнить и прояснить. Это потребовало дополнительного времени. Некоторые полученные результаты я сначала публиковал в специальной литературе, что, разумеется, также занимало время. Новый импульс мне дало основание Немецкого общества актуариев, вступление в которое предусматривало сдачу экзамена по математике рискованного страхования.

В настоящей книге, на мой взгляд, достигнуты обе поставленные цели: во-первых, развить основные и специальные знания, требуемые для решения практических задач математики рискованного страхования, и во-вторых, представить математику рискованного страхования как самостоятельную прикладную область теории вероятностей и математической статистики (в особенности, теории максимума правдоподобия). Книга состоит из четырех примерно одинаковых по размеру частей: основы, исчисление тарифов, резервирование, деление риска. Темы, подробно освещенные в имеющейся литературе (теория доверительности, распределение совокупного убытка), мною изложены кратко. Вопросы, по моему опыту, не имеющие большого практического значения (например, теория разорения), не затронуты вовсе. Подобная оценка значимости тем, конечно, субъективна. Все приводимые в тексте высказывания или утверждения, разумеется, тоже передают исключительно мое мнение, не обязательно совпадающее со взглядами Мюнхенского перестраховочного общества, Немецкого общества актуариев или Немецкого общества страховых математиков.

Книга предполагает знакомство с теорией вероятностей и математической статистикой, но в целом выдержана на элементарном уровне. Читателю особенно пригодятся знания теории максимума правдоподобия, теории условного математического ожидания и метода наименьших квадратов (регрессионный анализ). В то же время изложение не ограничивается одной математикой, а дополнено словесными комментариями. Это позволяет облегчить понимание и придает книге практический характер. Я охотно привел бы больше числовых примеров из практики, но в таком случае значительно увеличился бы объем текста. Надеюсь, этот недостаток, по крайней мере частично, компенсируется многочисленными ссылками на публикации о применении рассматриваемых методов.

Как автору мне бы очень хотелось, чтобы книга пробудила интерес к математике рискованного страхования у многих математиков и тем самым способствовала дальнейшему развитию этой увлекательнейшей области.

Томас Мак
Мюнхен, июнь 1996 г.

Предисловие автора к русскому изданию

После появления в 1997 году моей книги «Математика рискованного страхования» в немецкоговорящей среде ко мне сразу стали поступать вопросы о перспективах перевода, например, на английский язык — интерес к практически ориентированному учебнику был высок во многих европейских странах. Зная, как много усилий требует одно только редактирование текста, я не был готов сам взяться за перевод — во всяком случае совместить его с моей обычной деятельностью в Мюнхенском перестраховочном обществе.

В 2001 году по чистой случайности состоялось мое знакомство с г-жой Еленой Курносовой, проходившей научную стажировку по актуарной тематике на математическом факультете Мюнхенского университета. Г-жа Курносова отлично говорила по-немецки и могла свободно читать мою книгу. Она попросила моего разрешения на перевод «Математики рискованного страхования» на русский язык, выразив уверенность в востребованности подобного материала в России. Я с радостью воспринял это предложение — человек с математическим образованием, стажем работы в страховании и владеющий обоими языками виделся мне наилучшей кандидатурой переводчика моей книги.

Такова история возникновения российского издания, которое сейчас перед вами. Оно отличается от немецкого оригинала только наличием приложения с задачами, предлагаемыми мною начиная с 1997 года на письменных вступительных экзаменах в Немецкое общество актуариев. Некоторые задачи затрагивают материал, разбираемый на предшествующих экзамену семинарах и не освещенный в книге. Читателю в освоении этих тем помогут прилагаемые образцы решений.

Я был бы очень рад, если бы настоящая книга способствовала привлечению российских математиков к рисковому страхованию и тем стимулировала дальнейший расцвет теоретической и практической актуарной математики.

Томас Мак
Мюнхен, декабрь 2004

Обзор содержания

Часть 1 «Основы» начинается с обсуждения основных принципов страхования: коллективного баланса и рискованной надбавки — дискуссии вокруг обоих понятий не прекращаются по сегодняшний день. В разделе 1.2.2 дается определение коллективного баланса без привлечения понятия премии. В разделе 1.2.3 формула для расчета требуемой совокупной рискованной надбавки выводится из условия, что доходность от вложения гарантийного капитала должна превышать безрисковую ставку. Далее обосновывается корректность принципа ковариации для деления совокупной рискованной надбавки между отдельными полисами — этот подход в литературе по теории риска мне встретился только у К. Борха (K. Borch), в то время как в теории финансов аналогичный способ (CAPM) очень популярен.

Затем рассматриваются индивидуальная и коллективная модели риска, постоянно используемые в дальнейшем. Как свидетельствует история, своим успехом математика рискованного страхования обязана коллективной модели. Индивидуальная модель почти не играет роли в литературе по рисковому страхованию. Однако при работе над книгой я убедился, что многие привычные для практика алгоритмы расчета тарифов и резервов могут быть обоснованы в рамках специальной модификации индивидуальной модели, подробно описанной в главе 1.3. Она не учитывает явного вероятностного превосходства нулевого убытка и поэтому является только аппроксимацией модели, известной из страхования жизни. Но именно эта форма индивидуальной модели имеет наибольшее значение для рискованного страхования, предоставляя, в частности, возможность использования обобщенных линейных моделей.

В разделе 1.3.7 потребовалось сконструировать непрерывную форму распределения Пуассона. Побудившие к этому причины изложены в разделе 1.3.6. Полученная модель подводит стохастический базис под метод маргинальных сумм (разделы 2.4.3 и 2.4.4) и метод цепной лестницы (раздел 3.3.2). Построение такого «модифицированного» распределения Пуассона позволило избежать привлечения теории квази-правдоподобия.

Изложение коллективной модели в главе 1.4 более или менее стандартно. Здесь приводятся реальные числовые примеры, подтверждающие практическую бесполезность распространенных в страховой литературе распределений числа и размера убытков, таких как распределение Пуассона, нормальное и экспоненциальное распределения. В разделе 1.4.3 с помощью детального анализа плотности распределения сделана попытка выделить круг потенциальных моделей распределения размера убытка; в разделе 1.4.3 кратко обсуждаются различные методы оценки параметров распределений; в разделе 1.4.4, посвященном распределению совокупного убытка, изложены метод дискретизации и доказательство рекурсивной формулы Пейнджера (Panjer).

Часть 2 «Исчисление тарифов» начинается с обзора методов классификации рисков. Эта задача практически не рассматривается в литературе по страховой математике, так как считается стандартной задачей кластер-анализа. Тем не менее в страховании у нее есть особенности, на которые следует обратить внимание. Так, вероятностная природа убытков позволяет использовать статистические методы, в частности критерий равенства средних. В разделе 2.2.2 демонстрируется возможность применения t -критерия после логарифмирования данных.

Задача выбора тарифных факторов из множества факторов риска (см. главу 2.3) решается в рамках многомерной статистики, поэтому нами обсуждается кратко и с упором на методы, не являющиеся чистой копией стандартных. Как и в главе 2.2, здесь удается обосновать методы с помощью индивидуальной модели, разработанной в главе 1.3.

В части 2 основное внимание уделено методам выравнивания (см. главу 2.4), значение которых со времен классических работ Бейли (Bailey) и Саймона (Simon) ничуть не уменьшилось. Тем более удивительно, что на практике и спустя 30 лет применяются в основном детерминированные методы (метод Бейли–Саймона, метод маргинальных сумм). После краткого представления детерминированных методов устанавливается их связь с индивидуальной моделью, введенной в главе 1.3. Это позволяет получить множество интересных сведений. Попытка подвести стохастическую базу под классические методы выравнивания как раз и привела меня к разработке представленной в главе 1.3 формы индивидуальной модели. Глава заканчивается описанием метода выравнивания с разделением числа и размеров убытков и переносом рассмотренных методов в класс обобщенных линейных моделей.

В последней главе части 2 кратко обсуждено применение теории доверительности. Эта тема широко освещена в литературе по страховой математике, поэтому здесь рассмотрена только байесовская Пуассон-гамма-модель с целью построения таблицы бонус-малус, а также не зависящие от вида распределения модели Бюльмана и Бюльмана–Штрауба (Bühlmann, Straub).

Часть 3 «Резервирование» относится преимущественно к видам страхования с долгим развитием убытка (главным образом, к страхованию гражданской ответственности). Тем не менее я счел нужным изложить эту тему в таком же объеме, как расчет тарифов и деление риска. Поводом для этого послужил известный факт, что в Северной Америке уже сейчас требуется актуарное обоснование резервов по страхованию гражданской ответственности. Рано или поздно то же произойдет и в Европе. До недавнего времени при расчете резерва убытков применялись только нестохастические методы. Появление коммерческого статистически ориентированного программного обеспечения (ICRFS) существенно повысило интерес к стохастическим методам.

Я старался привести вероятностное обоснование для важнейших и наиболее распространенных на практике методов. В этом мне снова помогли индивидуальные модели из главы 1.3. Но главное — мне удалось поставить на стохастическую основу популярный, но сильно критикуемый именитыми теоретиками метод цепной лестницы и тем доказать несостоятельность этой критики. Подробное обоснование метода цепной лестницы приводится в гла-

ве 3.2. Там же рассматривается и самый простой — аддитивный метод резервирования. В главе 3.3 представлены методы, основанные на индивидуальной модели, к числу которых принадлежит базовая модель упомянутого программного обеспечения. В главе 3.4 обсуждается возможность усовершенствования рассмотренных ранее методов. В разделе 3.4.5 изложен метод, использующий данные о развитии отдельных убытков. Этот метод изначально предусматривался для решения специальной проблемы, возникающей при тарификации договоров перестрахования эксцедента убытка.

Часть 4 «Деление риска» во многом стандартна. Поскольку пропорциональное деление риска с математической точки зрения не представляет проблем, внимание концентрируется на непропорциональном делении риска и его основных формах: вычитаемой франшизе и перестраховании эксцедента убытка. В главе 4.2 закладывается технический фундамент, на котором в главе 4.3 строится расчет премий. В главе 4.4 на примере перестрахования разбирается задача выбора формы и объема деления риска. Сначала в разделе 4.4.2 показывается, что за счет перестрахования высвобождается часть рискованной надбавки, достаточная для покрытия связанных с перестрахованием транзакционных расходов. Далее делается вывод о наличии принципиально неустранимых пробелов в информации о распределении убытков и издержках, что не позволяет в реальных условиях определить оптимальную форму перестрахования. Тем не менее рассматриваемые идеализированные ситуации дают хорошее представление о сути технических рисков и подводят теоретическую базу под многие используемые на практике формы деления риска.

Каждая часть и каждая глава начинаются с обзора содержания и постановки проблем и заканчиваются выводами с дополнительными замечаниями. В выводах также даются ссылки на соответствующие публикации. В список литературы включены только публикации, упоминаемые в тексте, а не вся литература, относящаяся к рассматриваемым темам. В частности, я сам, несомненно, извлек пользу из многих работ и книг, не указанных в перечне.

Способы обозначений

Хотелось бы обратить внимание читателя на следующие особенности изложения и способы обозначений.

Текст разделен на части (пронумерованы одной цифрой), главы (двумя цифрами) и разделы (тремя цифрами). Для облегчения поиска разделов на каждой странице напротив номера страницы указан номер текущего раздела.

Некоторые результаты сформулированы в виде *теорем*. Это вовсе не обязательно означает важность утверждения. В ряде случаев таким образом просто отделяется громоздкий вывод результата от остального материала. Конец доказательства обозначен у правого поля значком ■.

Курсивный шрифт некоторых слов и заголовков призван облегчить пользование предметным указателем. Ссылки на таблицы и рисунки тоже напечатаны курсивом для удобства поиска относящегося к ним текста. Таблицы и рисунки внутри каждого раздела имеют общую порядковую нумерацию четырьмя цифрами.

Для написания формул действуют обычные правила.

Случайные переменные обозначаются заглавными буквами, а их реализации — соответствующими маленькими буквами. Оценки параметров или случайных величин отмечаются крышкой (^) над буквой.

В качестве индексов используются буквы i, j, k, l, m, n ; как правило, они пробегает значения до I, J, K, L, M, N ; последние, за исключением числа убытков N , не являются случайными величинами. Знак «+» на месте индекса означает суммирование по этому индексу.

В тексте приняты следующие обозначения:

P — оператор вероятности,
 E — оператор математического ожидания,
 Var — оператор дисперсии,
 Cov — оператор ковариации,
 Sta — оператор стандартного отклонения,
 Vko — коэффициент вариации.

ЧАСТЬ 1

ОСНОВЫ

Содержание первой части

1.1. Обзор; общие принципы построения моделей	13
1.2. Основные принципы страхования	14
1.2.1. Обзор	14
1.2.2. Коллективный баланс и технический страховой риск	15
1.2.3. Основные принципы расчета премий: рисковая надбавка	20
1.2.4. Влияние рисковой надбавки на политику формирования портфеля	24
1.2.5. Вывод	26
1.3. Индивидуальная модель для совокупного убытка риска и группы рисков	27
1.3.1. Постановка проблемы и обзор	27
1.3.2. Моделирование зависимости дисперсии от объема	29
1.3.3. Моделирование совокупного убытка риска и группы рисков с помощью гамма-распределения	35
1.3.4. Моделирование совокупного убытка риска и группы рисков с помощью обратного гауссовского распределения	39
1.3.5. Логнормальное распределение как модель для совокупного убытка группы рисков ...	41
1.3.6. Моделирование зависимости между математическим ожиданием и дисперсией нескольких групп рисков	44
1.3.7. Моделирование совокупного убытка группы рисков с помощью модифицированного распределения Пуассона	48
1.3.8. Вывод и таблица моделей распределения	53
1.4. Коллективная модель для числа убытков, размера убытка и совокупного убытка портфеля рисков	55
1.4.1. Постановка проблемы и обзор	55
1.4.2. Моделирование числа убытков	61
1.4.3. Моделирование размера убытка в отдельном страховом случае и таблица моделей распределения	68
А. Важные модели распределения	68
Б. Оценка параметров	80
1.4.4. Распределение совокупного убытка	86
1.4.5. Вывод	93
1.5. Вывод и дополнения	95

1.1. Обзор; общие принципы построения моделей

Основное содержание первой части — описание и обоснование моделей распределения, сопровождающих нас на протяжении всей книги. Следует различать две группы моделей: индивидуальные и коллективные. В *индивидуальной модели* распределение совокупного годового убытка группы рисков получается в результате свертки распределений годовых совокупных убытков отдельных рисков. В рисковом страховании узнать распределение убытка отдельного риска практически невозможно, поэтому индивидуальная модель имеет смысл только для однородных групп рисков. Она особенно важна для моделирования математических ожиданий совокупных убытков одновременно нескольких групп рисков и используется преимущественно в главах 2.2—2.4 и 3.3.

В *коллективной модели* распределение совокупного убытка группы рисков строится на основе распределений числа убытков и размера убытка в одном страховом случае, при этом плоскость отдельных рисков не задействуется. Этот способ позволяет, в частности, реалистично смоделировать хвост распределения совокупного убытка и получить представление о вероятности любого размера годовых потерь. Таким образом, коллективная модель непосредственно решает важную практическую задачу, в то время как индивидуальная модель находит применение лишь опосредованно как составная часть других моделей.

Сразу отметим, чем наш материал отличается от типичного для учебников по теории риска. Обычно индивидуальная модель представляется в форме, удобной для математики страхования жизни (где индивидуальная модель и возникла), но часто бесполезной для рискового страхования из-за отсутствия необходимых данных. Учитывая это обстоятельство, мы модифицируем индивидуальную модель в соответствии с особенностями рискового страхования, сохранив, однако, первоначальную идею моделирования совокупного убытка из убытков отдельных рисков.

Прежде чем обратиться в главах 1.3 и 1.4 к двум основным моделям, в главе 1.2 мы проанализируем два фундаментальных принципа страхования: коллективный баланс и рисковую надбавку к математическому ожиданию убытка.

Как уже, вероятно, понял читатель, в этой книге речь пойдет о *моделях*. Мы задаемся целью найти самую подходящую или, по крайней мере, просто подходящую модель для каждой встречающейся на практике задачи. Подходящей признается модель, наиболее точно отражающая существенные для

задачи аспекты реальности и в то же время позволяющая достаточно просто найти решение. Если модель подходящая, то и достигаемый с ее помощью результат важен для практики.

Приведем простой пример. Требуется спрогнозировать шестое значение числового ряда при наличии пяти наблюдений. В этом случае построение полинома четвертой степени по пяти точкам с последующей экстраполяцией не является подходящей моделью. Искусство моделирования — развить на основе реальных данных априорное представление о предположительной форме, тренде последовательности чисел. Имеющиеся в распоряжении данные никогда не дают полной ясности — нужно знать значительно больше, чем содержится в одних только данных. Для этого необходим навык, приобретаемый при изучении похожих задач или в практической работе.

Решающее значение при моделировании имеет самый первый шаг — выбор модели. Следующий шаг — оценка параметров модели — напротив, только дело техники, тем более что имеющиеся для этого вспомогательные средства в последние годы значительно усовершенствовались благодаря стремительному развитию персональных компьютеров. На третьем шаге проверяется соответствие модели данным (проверка гипотезы согласия). Только в случае удовлетворительного результата имеет смысл четвертый шаг — получение ответа на интересующий вопрос в рамках построенной модели. Наконец, на пятом шаге ответ необходимо утвердить, убедившись в его приемлемости и проверив чувствительность (влияние выбросов и т. д.). На этом этапе снова может возникнуть необходимость изменения модели и прохождения всех шагов заново.

Подчеркнем еще раз, решающее значение имеет спецификация модели на первом шаге. Чем точнее априорный выбор модели, тем выше шанс найти подходящую и устойчивую модель, приводящую к правильному решению рассматриваемой задачи. Главная цель настоящей книги — оказать помощь в построении таких моделей.

1.2. Основные принципы страхования

1.2.1. ОБЗОР

Начнем с обсуждения фундаментального принципа страхования — коллективного баланса. Как ни странно, это понятие до сих пор истолковывается по-разному и вызывает научные споры. Еще меньше стандартизированы на

сегодняшний день расчет и деление рискованной надбавки, обсуждаемые в разделе 1.2.3. Обычно в теории риска необходимость рискованной надбавки обосновывается тем, что в противном случае вероятность разорения равна единице. Мы обходимся без этого не так легко доказуемого аргумента и рекомендуем способ определения размера требуемой в совокупности рискованной надбавки, более понятный страховому менеджеру без математической подготовки. Теория риска также не дает ясной схемы определения рискованной надбавки для каждого отдельного риска, а предлагает множество принципов исчисления премии. По итогам рассуждений, приведенных в разделе 1.2.3, мы фактически вынуждены использовать принцип ковариации в качестве корректного правила деления рискованной надбавки между отдельными рисками. Торопливый читатель найдет краткое представление этого результата в выводе раздела 1.2.5. Некоторые следствия из принципа ковариации, касающиеся политики формирования портфеля, обсуждаются в разделе 1.2.4. Они выводятся достаточно просто и хорошо согласуются с практикой, но некоторым читателям, возможно, будут непривычны ввиду популярности в литературе принципа стандартного отклонения.

1.2.2. КОЛЛЕКТИВНЫЙ БАЛАНС И ТЕХНИЧЕСКИЙ СТРАХОВОЙ РИСК

В соответствии с договором страхования (*полисом*) страховая компания обязуется взамен оговоренной и заранее подлежащей уплате денежной суммы (премии) предоставить партнеру по договору (страхователю) при наступлении указанных в договоре событий (страховых случаев) частичную или полную денежную компенсацию нанесенного событием экономического ущерба. Размер выплаты в большинстве случаев зависит от характера и тяжести события. Иными словами, страховая компания принимает на себя обязательство по выплатам случайного размера в обмен на фиксированную премию. Для страхователя выгодно уже сама по себе замена неизвестных расходов плановыми. Кроме того, маловероятные, но разорительно высокие убытки только благодаря страхованию превращаются в посильные расходы.

Страхование основывается на так называемом *коллективном балансе*. Понимается, что объединение (коллектив, *портфель*) нескольких рисков (полисов), не являющихся полностью положительно скоррелированными, имеет более выгодное распределение убытка и размер премии (в расчете на один полис), чем каждый отдельный риск, поскольку в коллективе благоприятные и неблагоприятные (в сравнении с индивидуальным ожиданием) процессы убытков отдельных рисков могут взаимно компенсироваться. Для пояснения рассмотрим идеальную ситуацию портфеля (коллектива) из I независимых одинаково распределенных рисков R_i , $1 \leq i \leq I$. (Выгоднее, конечно, было бы иметь отрицательно скоррелированные риски, но в реальности этого практически не бывает.) $R_i \geq 0$ представляет собой случайную величину совокупного убытка по риску i за определенный временной промежуток, например за один год. Под *риском* мы будем понимать мельчайшую единицу, которая в отдель-

ности могла бы быть предметом договора страхования; в полисе часто бывает указано несколько рисков. Квадрат *коэффициента вариации* $Vko(S)$ совокупного убытка

$$S = R_1 + \dots + R_I$$

равен

$$(Vko(S))^2 = \frac{Var(S)}{(E(S))^2} = \frac{I \cdot Var(R_1)}{(I \cdot E(R_1))^2} = \frac{(Vko(R_1))^2}{I}$$

и с ростом объема портфеля I уменьшается. Таким образом, стандартное отклонение $Sta(S) = \sqrt{Var(S)}$ растет медленнее, чем математическое ожидание $E(S)$.

Смысл этого результата становится ясен из неравенства Чебышева:

$$P(|S - E(S)| > \varepsilon \cdot E(S)) \leq \frac{Var(S)}{\varepsilon^2 \cdot (E(S))^2} = \frac{(Vko(R_1))^2}{\varepsilon^2 \cdot I},$$

справедливого при любом $\varepsilon > 0$. В нашем контексте оно означает, что вероятность превышения совокупным убытком S своего математического ожидания более чем на 100% уменьшается с ростом объема портфеля I . Подчеркнем, речь идет об *относительном отклонении от математического ожидания*. Абсолютный разброс значений совокупного убытка вокруг среднего с ростом портфеля, конечно же, будет увеличиваться.

Почему за ориентир берется именно относительное отклонение? Допустим, каждый риск R_i помимо средств на оплату ожидаемого убытка $E(R_i)$ имеет в распоряжении денежную сумму c в качестве гарантийного капитала на возможный случай негативного исхода. Тогда, согласно неравенству Чебышева, вероятность нехватки денежных средств для отдельного риска R_i не превышает $Var(R_i) / c^2$. При объединении рисков R_1, \dots, R_I и суммировании их гарантийных капиталов верхний предел этой вероятности снижается до $Var(S) / (Ic)^2 = Var(R_i) / (c^2 I)$, то есть до I -й части. Таким образом, гарантийный капитал, характеризующий отклонение убытка от своего математического ожидания, вырос параллельно ожидаемому убытку. Это показывает, что относительное отклонение — естественная мера вариации совокупного убытка.

Мы не говорим о каком-то особом эффекте неравенства Чебышева. Более того, все то же самое можно доказать точным расчетом. Воспользуемся для этого обратным гауссовским распределением, хорошо аппроксимирующим распределение годового совокупного убытка одиночного риска (см. раздел 1.3.4). Пусть каждый риск R_i имеет обратное гауссовское распределение с математическим ожиданием m и коэффициентом вариации $1 / \sqrt{\alpha}$. С помощью функции Φ стандартного нормального распределения функция распределения величины R_i записывается в виде

$$G_1(r) = \Phi(\sqrt{\alpha r / \mu} - \sqrt{\alpha \mu / r}) + e^{2I\alpha}(1 - \Phi(\sqrt{\alpha r / \mu} + \sqrt{\alpha \mu / r})), r > 0.$$

Если представить r как положительное кратное математического ожидания μ : $r = a^2 \mu$ и положить $\beta = \sqrt{\alpha}$, то

$$G_1(a^2 \mu) = \Phi(\beta(a - a^{-1})) + \exp(2\beta^2)(1 - \Phi(\beta(a + a^{-1}))).$$

Тогда вероятность попадания совокупного убытка R_i в окрестность $(\mu / a^2; a^2 \mu)$, $a > 1$, своего ожидаемого значения μ составит

$$G_1(a^2 \mu) - G_1(\mu / a^2) = \Phi(\beta(a - a^{-1})) - \Phi(\beta(a^{-1} - a)) =: H_a(\beta).$$

Убыток $S = R_1 + \dots + R_I$ совокупности I независимых рисков R_i тоже имеет обратное гауссовское распределение, но с математическим ожиданием $I\mu$ и коэффициентом вариации $1 / \sqrt{I\alpha}$, то есть с функцией распределения

$$G_I(s) = \Phi(\sqrt{\alpha s / \mu} - I\sqrt{\alpha \mu / s}) + e^{2I\alpha}(1 - \Phi(\sqrt{\alpha s / \mu} + I\sqrt{\alpha \mu / s})),$$

соответственно,

$$G_I(a^2 I\mu) = \Phi(\beta(a - a^{-1})) + \exp(2\beta^2)(1 - \Phi(\beta(a + a^{-1}))),$$

где $\beta = \sqrt{I\alpha}$.

Вероятность попадания совокупного убытка S в окрестность $(I\mu / a^2; a^2 I\mu)$, $a > 0$, своего математического ожидания $I\mu$ равна

$$G_I(a^2 I\mu) - G_I(I\mu / a^2) = H_a(\beta).$$

При фиксированном a эта вероятность монотонно возрастает с ростом I . Чтобы убедиться в этом, достаточно лишь доказать монотонное возрастание функции $H_a(\beta)$ по β . Поскольку $\Phi' > 0$, имеем

$$H'_a(\beta) = (a - a^{-1})(\Phi'(\beta(a - a^{-1})) + \Phi'(\beta(a^{-1} - a))) > 0$$

при $a > 1$. В частности, при $a = 1,1$ и $1 / \sqrt{\alpha} = 5$ получаем

$$\begin{aligned} G_I(a^2 I\mu) - G_I(I\mu / a^2) &= 3,1\% && \text{для } I = 1, \\ &= 9,6\% && \text{для } I = 10, \\ &= 29,7\% && \text{для } I = 100, \\ &= 77,3\% && \text{для } I = 1000. \end{aligned}$$

Таким образом, вероятность отклонения совокупного убытка от своего математического ожидания не более чем на 10% существенно увеличивается с ростом количества рисков.

Коллективный баланс подтверждается и *законом больших чисел*. В «слабой» формулировке закон гласит, что средние арифметические $S / I = (R_1 + \dots + R_I) / I$ сходятся по вероятности к математическому ожиданию $E(R_1)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$P(|S / I - E(R_1)| > \varepsilon \cdot E(R_1)) \rightarrow 0 \text{ при } I \rightarrow \infty,$$

что эквивалентно предыдущему утверждению

$$P(|S - E(S)| > \varepsilon \cdot E(S)) \rightarrow 0 \text{ при } I \rightarrow \infty.$$

и поэтому также свидетельствует об уменьшении относительного отклонения с ростом объема портфеля. В «сильной» формулировке

$$P(\lim_{I \rightarrow \infty} S / I = E(R_1)) = 1$$

закон больших чисел для нас означает следующее. Во-первых, $E(R_1)$ — *справедливая цена* за принятие случайных расходов по риску R_1 . Действительно, если интерпретировать R_1, R_2, \dots как последовательность независимых результатов измерений убытка R_1 в разные страховые периоды, то, согласно «сильному» закону больших чисел, среднее возмещение S / I за один период с вероятностью 1 сходится к $E(R_1)$. Во-вторых, для оценки неизвестного математического ожидания $E(R_1)$ требуется собрать как можно большую группу независимых, распределенных так же, как R_1 , рисков. Тогда оценкой будет служить арифметическое среднее S / I . Наиболее точная аппроксимация достигается при объединении данных нескольких компаний.

За исключительно важную роль для коллективного баланса и исчисления премий закон больших чисел часто называют *фундаментальным законом страхования*.

До сих пор мы исходили из идеального случая портфеля независимых и одинаковых по размеру (или одинаково распределенных) рисков. Если бы все риски портфеля положительно коррелировали друг с другом, то эффекта баланса не наблюдалось бы. В реальности риски, являясь независимыми (за исключением рисков в страховании стихийных бедствий и кредитов), как правило, все-таки не распределены одинаково, а, наоборот, сильно различаются (например, имеют разные страховые суммы). Из-за этого эффект баланса проявляется не так четко, как в идеальном случае полностью независимых и одинаково распределенных рисков. Мы всегда говорим об *эффекте баланса*, если с ростом числа рисков уменьшается коэффициент вариации совокупного убытка или увеличивается вероятность попадания совокупного убытка в фиксированный процентный интервал. В страховании стихийных бедствий, где соседствующие риски сильно коррелируют, нередко имеет смысл рассматривать все риски, подверженные одному страховому событию (допустим, урагану), как единый риск (так называемый *кумулятивный риск*). Эффект баланса в этом случае проявляется только на мировом уровне (например, в портфеле перестраховщика).

В то время как страхователь благодаря страхованию несет строго плановые убытки, страховой компании, по крайней мере, для относительно точного планирования требуется как можно большее число независимых и схожих по размеру рисков. Расходы страховой компании по убыткам не планомерны, а случайны. Премияльный фонд в размере ожидаемой суммы убытков (согласно центральному предельному закону) дает всего лишь 50% гарантии. Для увеличения гарантийной вероятности хотя бы до 90% страховой компании необходим дополнительный *гарантийный* или *собственный капитал*. Меньшие по объему или менее сбалансированные портфели для достижения той же гарантийной вероятности нуждаются в большем гарантийном капитале (относительном или абсолютном). Задача страховой компании — не только продать правильно тарифицированные полисы, но и достичь как можно

большой сбалансированности портфеля и обеспечить себя как можно большим гарантийным капиталом. Правда, на баланс можно воздействовать и с помощью перестрахования. Эта тема обсуждается в части 4 «Деление риска».

Наряду с коллективным балансом существует *временной баланс*. Имеется в виду, что объединение нескольких страховых периодов (лет) в один период дает такой же эффект, как и объединение нескольких рисков в один портфель. В реальности использованию временного баланса препятствует обязанность страховых компаний ежегодно отчитываться перед органами страхового надзора. Возможность достижения компанией сбалансированности — скажем, в десятилетнем периоде — не оправдывает несбалансированности годового результата. Чтобы извлечь выгоду из временного баланса, в Германии и некоторых других странах предписывается или допускается формирование *флуктуационного резерва*. Этот резерв ведется отдельно для каждого вида страхования (огонь, автогражданская ответственность, град и т. д.) и пополняется, когда годовой результат превышает средний уровень, причем отчисления в резерв не облагаются налогом. При плохом годовом результате осуществляется изъятие средств из этого резерва.

На практике страховые портфели всегда ограничены по объему и остаются зависимыми от случайности, несмотря на коллективный баланс и закон больших чисел. Более того, абсолютный разброс совокупного убытка вокруг своего математического ожидания увеличивается с ростом объема портфеля, хотя и медленнее, чем само математическое ожидание. Даже если бы все распределения были известны, совокупный убыток по-прежнему оставался бы недетерминированным — в этом заключается *риск случайности*, сопровождающий деятельность любой страховой компании. Кроме того, ни одна страховая компания не защищена еще от двух специфических страховых источников неопределенности. Математическое ожидание совокупного убытка неизвестно ни для одиночного риска, ни для портфеля и должно оцениваться на основании статистики. Получаемая оценка в той или иной мере всегда отклоняется от истинного значения. Этот источник неопределенности называется *риском оценки*, *риском диагноза* или *риском заблуждения*. Но и возможность точного диагностирования случайной закономерности прошлого не исключает (всегда существующей в реальности) угрозы по крайней мере частичного изменения этой закономерности в ближайшем будущем (например, по причине инфляции). А так как премия — цена риска — всегда устанавливается заранее (и почти никогда дополнительных (последующих) платежей не предусматривается), возникает третий источник неопределенности, называемый *риском прогноза*, или *риском изменчивости*. Три источника неопределенности: риск случайности, риск оценки и риск изменчивости — могут быть только мысленно отделены друг от друга; они всегда действуют совместно и в совокупности называются *техническим страховым риском*. Это название отделяет неопределенности, характерные только для страхового бизнеса, от прочих рисков, связанных с любым экономическим предприятием. Итак, технический страховой риск заключается в отклонении годового совокупного убытка от своего ожидаемого значения.

1.2.3. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ РАСЧЕТА ПРЕМИЙ: РИСКОВАЯ НАДБАВКА

Как мы узнали из предыдущего раздела, премии рассчитываются в условиях неопределенности. Даже в идеальной ситуации независимых, одинаково распределенных рисков сохраняются риск случайности (связанный с конечным размером портфеля), риск диагноза и риск прогноза. К тому же в реальности лишь небольшое число рисков обнаруживают сходство, позволяющее считать их одинаково распределенными. Отсюда возникает потребность страховой компании в значительно большем капитале, чем оцененное математическое ожидание совокупного убытка, на возможный случай превышения фактическим убытком своего оцененного значения. Дополнительный капитал, ввиду существования риска случайности, был бы необходим даже при достоверно известном математическом ожидании будущего совокупного убытка.

Для определения требуемого размера капитала рассмотрим калькуляционные доходы и расходы отдельного страхового года:

Доходы:	брутто-премии, доход от капитала.
Расходы:	оцененное значение совокупного годового убытка, расходы на ведение дела, выплаты дивидендов.

Допустим, все величины (в частности, выплаты по убыткам) дисконтированы на начало страхового года с помощью «безрисковой» процентной ставки z , действующей для очень надежных капиталовложений. Тогда доходом от капитала будет считаться сумма, образовавшаяся за счет разницы между фактической и безрисковой ставками, либо заработанная собственным капиталом или накопившимися невыплаченными дивидендами.

Для упрощения изложения нам понадобится определение:

(нетто-) премия = брутто-премия минус расходы на ведение дела.

Часть брутто-премии, соответствующая расходам на ведение дела, рассчитывается относительно точно и пока нас интересовать не будет. Можно считать, что размер дивидендов задается фондовым рынком, ведь для нахождения или сохранения инвесторов страховая компания должна предложить, как минимум, такую же прибыль, какую сулят другие не более рискованные капиталовложения. Риск инвестиций в страховую компанию зависит от размера s совокупного гарантийного или собственного капитала, совокупной нетто-премии b и распределения G совокупного годового убытка. Количественно он может быть описан, например, вероятностью неплатежеспособности $1 - G(b + c)$, отражающей как технические страховые характеристики портфеля, так и склонность самого инвестора к риску. И наоборот, при заданной допустимой вероятности неплатежеспособности ε из равенства $G(b + c) = 1 - \varepsilon$ находится требуемый размер собственного капитала s . Расчет распределения G обсуждается в главе 1.4.

Пусть r — заданная фондовым рынком норма прибыли на капитал s . Тогда выполняется неравенство $r > z$, так как больший риск, разумеется, должен вознаграждаться большим доходом. Если предполагать, что в предыдущие периоды прибыль не накапливалась, то доход $z \cdot s$ от безрискового вложения капитала s будет недостаточным для обеспечения требуемой прибыли $r \cdot s$. Отсюда сразу следует необходимость включения в премию, помимо математического ожидания совокупного убытка, доли $(r - z)s$ от прибыли. Эта компонента премии называется *гарантийной* или *рисковой надбавкой*. Гарантийная — потому что поддерживает капитал, обеспечивающий надежность страховой компании, а рисковая — потому что отражает потенциальное увеличение дохода инвестора в сравнении с безрисковым вложением капитала.

Теперь предстоит выяснить, какой вклад должны вносить отдельные риски или полисы в совокупную рисковую надбавку $(r - z)s$. Для этого разложим портфель на несколько субпортфелей (например, по видам страхования или по группам клиентов), представив совокупный убыток S в виде суммы $S = S_1 + \dots + S_I$. При известном способе деления *рисковой надбавки* между субпортфелями можно проделать то же внутри каждого субпортфеля. Таким образом, достаточно найти способ деления *рисковой надбавки* $(r - z)s$ или, что равносильно, самого гарантийного капитала s между субпортфелями. Допустим сначала *независимость субпортфелей*. Кроме того, будем считать распределение убытка каждого субпортфеля известным или оцененным достаточно точно.

На первый взгляд кажется разумным разделить совокупный гарантийный капитал s между субпортфелями, потребовав одинаковой вероятности надежности $G_i(\mu_i + c_i)$ для всех субпортфелей, где G_i обозначает распределение совокупного убытка i -го субпортфеля, $1 \leq i \leq I$, μ_i — оцененное математическое ожидание и одновременно нетто-премию, а c_i — сопоставленный i -му субпортфелю гарантийный капитал. Однако при таком подходе большие субпортфели, уже имеющие внутри себя определенный баланс, оказываются в более выгодном положении по сравнению с малыми субпортфелями.

Действительно, пусть портфель разбит на два субпортфеля $S = S_1 + S_2$, распределенные нормально с параметрами $E(S_1) = \mu$ и $Var(S_1) = \sigma^2$, $E(S_2) = k\mu$ и $Var(S_2) = k\sigma^2$. Субпортфель S_2 можно считать объединением k независимых экземпляров вида S_1 . Тогда деление гарантийного капитала s на части $c_1 = t\sigma$ и $c_2 = t\sigma\sqrt{k}$ (где t выбирается при условии $c_1 + c_2 = s$) обеспечивает одинаковую вероятность надежности двух субпортфелей, поскольку σ и $\sigma\sqrt{k}$ являются, соответственно, стандартными отклонениями для S_1 и S_2 . Значит, каждому из k субпортфелей портфеля S_2 должен соответствовать гарантийный капитал $c_2/k = t\sigma\sqrt{k}$. Это существенно меньше при $k > 1$, чем значение $c_1 = t\sigma$, получаемое для такого же портфеля S_1 , но рассматриваемого изолированно.

Приведенный пример доказывает некорректность деления, приводящего к одинаковой вероятности надежности всех субпортфелей. Одновременно становится очевидным требование к правилу деления: гарантийная надбавка, сопоставленная некоторому субпортфелю, не должна зависеть от того, рассматривается ли субпортфель изолированно, либо как часть большого субпортфеля, либо как совокупность нескольких независимых субпортфелей, а

также от того, объединены или разделены другие субпортфели. Иначе говоря, правило деления гарантийной надбавки должно быть *аддитивно* относительно любого разложения или объединения портфелей.

Деление гарантийной надбавки параллельно делению математического ожидания $E(S) = E(S_1) + \dots + E(S_I)$, несмотря на аддитивность, тоже некорректно. Действительно, пусть $S = S_1 + S_2$, где S_1 и S_2 независимы, причем $E(S_1) = E(S_2)$, а $Var(S_1) \ll Var(S_2)$. Тогда обе части получат одинаковую гарантийную надбавку, хотя совокупная дисперсия $Var(S) = Var(S_1) + Var(S_2)$ и, следовательно, требуемый совокупный капитал в значительно большей степени зависит от S_2 . Если S_1 и S_2 распределены нормально, то уже при $Var(S_2) > 3 \cdot Var(S_1)$ в результате такого деления доля гарантийного капитала субпортфеля S_1 будет больше, чем капитал, требуемый субпортфелю S_1 для достижения той же надежности в отсутствие субпортфеля S_2 .

Поскольку стандартное отклонение не позволяет удовлетворить требованию аддитивности в случае независимых субпортфелей, остается один разумный вариант деления рискованной надбавки, а именно *пропорционально дисперсиям*. В этом случае при разложении портфеля на независимые субпортфели $S = S_1 + \dots + S_I$ субпортфелю S_i сопоставляется гарантийная надбавка $(r - z)c \cdot Var(S_i) / Var(S)$. Такое правило деления аддитивно в силу равенства $Var(S) = Var(S_1) + \dots + Var(S_I)$. Соответствующая S_i гарантийная надбавка не изменяется при объединении других субпортфелей или разложении их на независимые части. Более того, в случае нормально распределенных убытков S_i деление пропорционально дисперсиям выгодно для каждого субпортфеля в отдельности. В самом деле, будучи изолированной, часть i для достижения такой же, как у S , надежности $c / Sta(S)$ должна обеспечить своей гарантийной надбавкой капитал в размере $Sta(S_i) \cdot c / Sta(S)$. Это больше, чем доля $c \cdot Var(S_i) / Var(S)$, получаемая при делении совокупного капитала по правилу дисперсий. Наконец, аналогичными рассуждениями можно доказать, что, по крайней мере, в случае нормально распределенных S_i никакой совокупности $M \subset \{1, \dots, I\}$ субпортфелей $S_p, i \in M$, невыгодно отделяться от общего портфеля, если деление капитала производится по правилу дисперсий.

Итак, мы имеем разумное правило деления рискованной надбавки между независимыми субпортфелями. Теперь обратимся к случаю, когда какой-либо из таких субпортфелей не может быть далее разложен на независимые части из-за корреляции содержащихся в нем рисков. Такая ситуация встречается в страховании кредитов, где риски зависят от конъюнктуры, а также в страховании от стихийных бедствий (ураган, град, землетрясение, наводнение), где сильно коррелируют риски, близкие по географическому положению. Предположим сначала, что субпортфели T_1, \dots, T_K независимы от остальной части совокупного портфеля, но *полностью положительно скоррелированы между собой* следующим образом: $T_k = a_k T$, $1 \leq k \leq K$, где $T = T_1 + \dots + T_K$ и $a = a_1 + \dots + a_K = 1$. Тогда деление соответствующей портфелю T рискованной надбавки между частями T_k пропорционально дисперсиям $Var(T_k) = a_k^2 Var(T)$ не будет аддитивным. Требованию аддитивности удовлетворяет деление пропорционально математическим ожиданиям $E(T_k) = a_k E(T)$ или стандартным отклонениям $Sta(T_k) = a_k Sta(T)$. Обе аддитивные возможности дают единствен-

ное логичное правило деления — сопоставить части T_k долю a_k рискованной надбавки. В общем случае полной положительной корреляции: $T_k = a_k T + b_k$, $b_1 + \dots + b_K = 0$, деление пропорционально математическим ожиданиям бессмысленно: результат сильно зависит от значений b_k , в то же время не влияющих на требуемый размер совокупного гарантийного капитала. Напротив, деление параллельно стандартным отклонениям не изменяется и остается разумным. Делаем вывод: деление рискованной надбавки между полностью положительно скоррелированными субпортфелями должно осуществляться *пропорционально стандартным отклонениям*.

В принципе, желательно иметь правило деления не только для случая независимых субпортфелей (коэффициент корреляции равен 0) и полностью положительно скоррелированных субпортфелей (коэффициент корреляции равен 1), но и для общего случая любой корреляционной зависимости между частями портфеля. Чаще всего в страховой практике встречаются неотрицательные корреляции (обусловленные общими внешними факторами, такими как конъюнктура, стихийные бедствия или не полностью устраненная инфляция). Из-за высокого риска случайности количественная оценка этих корреляций может быть только грубой, поэтому два рассмотренных частных случая для практики вполне достаточны. Тем не менее оба частных случая легко укладываются в следующее *общее правило деления*: при разложении совокупного портфеля S на любые не обязательно независимые части (или полисы) $S = S_1 + \dots + S_I$ совокупная рискованная надбавка $(r - z)c$ делится так, чтобы на часть S_p , $1 \leq i \leq I$, приходилась доля $(r - z)c \cdot Cov(S_p, S) / Var(S)$ рискованной надбавки. Очевидно, в случае независимых субпортфелей S_1, \dots, S_I это правило предписывает делить рискованную надбавку пропорционально дисперсиям $Var(S_i)$, а в случае полностью зависимых субпортфелей $S_i = a_i S$ — пропорционально a_p , то есть пропорционально стандартным отклонениям $Sta(S_i)$ ($a_i = Sta(S_i) / Sta(S)$).

Нетрудно убедиться, что в случае нормально распределенных S_i никакая совокупность $M \subset \{1, \dots, I\}$ субпортфелей $S_p, i \in M$, не достигнет заданной вероятности надежности с меньшей рискованной надбавкой или с меньшим гарантийным капиталом, чем получаемые в результате деления по общему правилу — на основе ковариаций. Действительно, в совокупном портфеле $S = S_1 + \dots + S_I$ субпортфель $S_M = \sum_{i \in M} S_i$ имеет коллективный уровень надежности $c / Sta(S)$. При этом, согласно правилу ковариаций, его рискованная надбавка обслуживает капитал $c_M = c \cdot Cov(S_M, S) / Var(S)$. Рассматриваемая в отдельности, совокупность S_M при таком же капитале c_M имела бы уровень надежности $c_M / Sta(S_M) = c \cdot \rho(S_M, S) / Sta(S)$, где

$$\rho(S_M, S) = \frac{Cov(S_M, S)}{Sta(S_M) \cdot Sta(S)}.$$

А поскольку коэффициент корреляции $\rho(S_M, S)$ всегда меньше 1 (за исключением случая, когда S_M и S полностью скоррелированы), эта надежность всегда ниже коллективной надежности $c / Sta(S)$.

1.2.4. ВЛИЯНИЕ РИСКОВОЙ НАДБАВКИ НА ПОЛИТИКУ ФОРМИРОВАНИЯ ПОРТФЕЛЯ

В этом разделе мы покажем, что политика формирования портфеля страховой компании существенно зависит от выбранного ею способа деления совокупной рискованной надбавки $(r - z)c$ между отдельными рисками.

Допустим, компания оценила математическое ожидание $E(R)$ и дисперсию $Var(R)$ случайной величины (годового) убытка R по риску, не зависящему от остальной части имеющегося портфеля, и на их основе рассчитала брутто-премию

$$b_1 = \frac{E(R) + k_1 \cdot Var(R) + k_0}{1 - p},$$

где

p — доля расходов на ведение дела, исчисляемых пропорционально брутто-премии (комиссионное вознаграждение, налоги — например, $p = 0,2$),

k_0 — сумма фиксированных расходов, не зависящих от размера премии,

k_1 — множитель для вычисления зависящей от дисперсии рискованной надбавки (например, $k_1 = (r - z)c / Var(S)$ — см. раздел 1.2.3).

Если брутто-премия b_1 устраивает страхователя, то страховщик может принять риск полностью. Но и при наличии на страховом рынке более выгодного для страхователя предложения $b < b_1$ первая компания не обязательно выбывает из игры, даже не отступая от своих значений $E(R)$ и $Var(R)$. Как мы сейчас увидим, первая компания при определенных условиях может застраховать долю $q < 1$ от риска R . В страховой практике распространено деление крупных промышленных рисков между несколькими страховщиками в установленном процентном соотношении (так называемое *совместное страхование*).

Компания, требующая в качестве 100% премии значение b_1 , может принять долю $q < 1$ от риска R , оцененного брутто-премией $b < b_1$, в случае

$$\frac{E(q \cdot R) + k_1 \cdot Var(q \cdot R) + k_0}{1 - p} \leq q \cdot b.$$

Решение этого квадратичного неравенства относительно q дает

$$q_2 \leq q \leq q_1,$$

где

$$q_{1,2} = \frac{b(1 - p) - E(R) \pm \sqrt{(b(1 - p) - E(R))^2 - 4 \cdot k_0 k_1 Var(R)}}{2 \cdot k_1 \cdot Var(R)}.$$

Интервал $[q_1, q_2]$ непуст при выполнении условия неотрицательности дискриминанта

$$b(1 - p) - E(R) \geq 2 \cdot Sta(R) \cdot \sqrt{k_0 k_1}.$$

Оно слабее, чем условие

$$b(1 - p) - E(R) \geq k_1 \cdot Var(R) + k_0,$$

необходимое для принятия всего риска R , поскольку

$$k_1 Var(R) + k_0 - 2 \cdot Sta(R) \sqrt{k_0 k_1} = (Sta(R) \cdot \sqrt{k_1} - \sqrt{k_0})^2 \geq 0.$$

Если компания работает только с пропорциональными расходами ($k_0 = 0$), то $q_2 = 0$. Это означает, что при всех (положительных) q , удовлетворяющих условию

$$q \leq q_1 = \frac{b(1 - p) - E(R)}{k_1 \cdot Var(R)},$$

имеет смысл участие в страховании риска R . Таким образом, в случае $k_0 = 0$ всегда существует допустимая для принятия доля риска, если нетто-премия $b(1 - p)$ превышает ожидаемый убыток $E(R)$. Можно доказать и более общее утверждение: если полностью принять риск невозможно, но по крайней мере выполнено условие неотрицательности дискриминанта и постоянные расходы k_0 не превышают половины разности $b(1 - p) - E(R)$, то всегда существует допустимая для принятия доля $q < 1$.

В случае $b \geq b_1$ страховой компании тоже может быть выгодно *принять менее 100% риска*. В самом деле, ожидаемый размер прибыли

$$q \cdot b - \frac{E(q \cdot R) + k_1 \cdot Var(q \cdot R) + k_0}{1 - p}$$

как функция от принимаемой доли q имеет максимум в точке

$$q^* = \frac{b(1 - p) - E(R)}{2 \cdot k_1 \cdot Var(R)}.$$

Поскольку $b \geq b_1$ и, следовательно,

$$b(1 - p) - E(R) \geq k_1 \cdot Var(R) + k_0,$$

неравенство $q^* < 1$ равносильно условию

$$b(1 - p) - E(R) < 2 \cdot k_1 \cdot Var(R),$$

справедливому при

$$k_1 \cdot Var(R) > k_0.$$

Таким образом, в случае крупных (в смысле размера дисперсии $Var(R)$) рисков принятие доли $q^* < 1$ ведет к максимизации прибыли.

Приведенные рассуждения о влиянии рискованной надбавки на политику формирования портфеля подразумевают зависимость рискованной надбавки от дисперсии. Если рискованная надбавка пропорциональна математическому ожиданию или стандартному отклонению, то приемлема либо любая доля риска, либо никакая. Хорошая согласованность полученных результатов с реальными

ми фактами свидетельствует о большей практической пригодности рисковой надбавки, зависящей от дисперсии, чем надбавки, зависящей, например, от стандартного отклонения.

1.2.5. ВЫВОД

Подведем итоги этой главы. Несмотря на коллективный баланс, годовой совокупный убыток S даже при большом объеме портфеля может превысить свое оцененное математическое ожидание μ (то есть имеющуюся в распоряжении страховой компании нетто-премию). Во избежание разорения компании необходим гарантийный капитал c , при правильном расчете премий не имеющий тенденции ни к сокращению, ни к увеличению в течение длительного времени. Требуемый размер капитала зависит от желаемого уровня надежности $1 - \epsilon$ и может быть вычислен на основе распределения G совокупного убытка из равенства $G(\mu + c) = 1 - \epsilon$. Для получения такого капитала на свободном фондовом рынке страховая компания должна предложить инвесторам более высокую норму прибыли, чем реализуемая при безрисковом вложении капитала. Инвестиция гарантийного капитала должна быть максимально надежной, чтобы в дополнение к техническому страховому риску не возник риск инвестиционный. Получаемая таким образом разность норм прибыли должна компенсироваться страхователями, заинтересованными в поддержании гарантийного капитала. Для этого в премию помимо расходов на ведение дела и оцененного математического ожидания расходов по убыткам включается гарантийная или рисковая надбавка. Как делить совокупную рисковую надбавку между отдельными полисами — вопрос политики бизнеса или формирования портфеля. Справедливое по отношению ко всем частям портфеля деление основывается на ковариации $Cov(S_i, S)$ между полисом S_i и совокупным портфелем S (включающим полис S_i).

Согласно принятой нами модели, в прибыльные годы ($S < \mu$) рисковая надбавка полностью выплачивается инвесторам (в дополнение к доходу от вложения гарантийного капитала). В убыточные годы выплаты осуществляются в соответственно уменьшенном размере. При очень высоких потерях часть гарантийного капитала может тратиться на оплату убытков. Тогда инвесторам нужно принять решение о пополнении капитала или уменьшении объема портфеля для восстановления исходного уровня надежности. Впрочем, прибыль может как выплачиваться, так и использоваться для пополнения гарантийного капитала в целях расширения портфеля. Вводить отдельную надбавку прибыли в дополнение к гарантийной надбавке не принято.

При выборе способа расчета рисковой надбавки (часто называемого в литературе по теории риска *принципом премии*) следует отчетливо различать две задачи. С одной стороны, речь идет об определении совокупной требуемой для портфеля рисковой надбавки, а с другой — о делении ее между отдельными полисами. Для установления совокупной рисковой надбавки мы применили так называемый *принцип процента*, а для ее деления между независимыми полисами — *принцип дисперсии*. В условиях нормального распре-

деления совокупного убытка принцип процента равносильен принципу стандартного отклонения. Таким образом, компания, не желающая каждый год заново рассчитывать распределение совокупного убытка и корректирующая свой гарантийный капитал и суммарную рисковую надбавку параллельно изменению стандартного отклонения совокупного убытка, приближенно придерживается принципа процента. На правило деления совокупной рисковой надбавки между независимыми рисками это никак не влияет. Способы расчета распределения совокупного убытка обсуждаются в разделе 1.4.4.

В заключение приведем *ссылки на литературу*, более подробно освещающую некоторые аспекты рассмотренной темы. К. Борх (*Borch K. Application of Game Theory to Some Problems in Automobile Insurance // ASTIN Bulletin, 1962, 2, p. 208–221; Borch K. The Mathematical Theory of Insurance. Lexington / USA: Lexington Books*) детально разбирает проблемы деления рисковой надбавки, не называя, однако, способа деления на основе ковариаций. Лишь в некоторых поздних работах он рекомендует правило ковариаций, указывая на его аддитивность как в случае зависимых, так и в случае независимых субпортфелей. В двух схожих по содержанию работах С. Бенджамина (*Benjamin S. Loadings for Insurance Premiums // The Geneva Papers on Risk and Insurance, 1986, 39, p. 110–125; Benjamin S. Calculating a Revolution // The Review, 1987, January, February, March*) впервые в связи со страхованием упоминается гарантийный капитал, а эффективность страхового бизнеса характеризуется доходом, заработанным гарантийным капиталом.

1.3. Индивидуальная модель для совокупного убытка риска и группы рисков

1.3.1. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ И ОБЗОР

Для страховых расчетов требуются данные о характере застрахованных рисков и процессе убытков. Если имеющаяся в распоряжении база данных охватывает несколько страховых компаний (рыночная статистика), то зачастую данные изначально представлены в агрегированной форме. В этом случае нам доступны только *суммарные годовые статистические показатели* (число рисков, их совокупная страховая сумма, а также число и суммарный размер убытков) по группам рисков. Информация о страховой сумме каждого риска и размере каждого отдельного убытка отсутствует. В каждой группе собраны

риски, удовлетворяющие определенным общим критериям, например характеризующиеся одинаковыми значениями тарифных факторов. Многие методы исчисления тарифа явно или неявно основываются на некоторой модели распределения совокупного убытка каждой из этих групп. Из соображений простоты расчетов предпочтение отдается распределениям, обладающим явной, задаваемой без помощи интеграла функцией плотности и содержащим небольшое число параметров. Такие распределения будут изучены в этой главе в рамках индивидуальной модели.

Основная проблема, связанная с агрегированием, — ежегодное изменение объема группы рисков (числа рисков и их совокупной страховой суммы) и, следовательно, распределения совокупного убытка. А поскольку в каждом году наблюдается только одно значение совокупного убытка, привлечение моделей распределения кажется бессмысленным, ведь параметры распределения нельзя оценить только по одному наблюдению. Решить эту проблему позволяет нормирование совокупного убытка на соответствующий объем. Получаемые таким образом случайные величины — «убыток на один полисо-год» или «ставка убытка» (при необходимости, после очищения данных от инфляции) — при определенных условиях не меняют математических ожиданий в течение ряда лет. Однако дисперсии даже после нормировки совокупного убытка на объем будут различаться по годам: согласно принципу коллективного баланса, дисперсия нормированного совокупного убытка уменьшается с ростом объема портфеля.

Поэтому одна из наших задач — *количественно описать влияние объема на параметры распределения*. Она обсуждается в разделе 1.3.2. При известном объеме можно адекватно моделировать математические ожидания и дисперсии убытка на один полисо-год и ставки убытка с помощью двухпараметрических моделей. В разделах 1.3.3–1.3.5 мы построим наиболее подходящие распределения по принципу индивидуальной модели — исходя из распределений совокупных убытков одиночных рисков. Представляемые в этой главе модели распределения лежат в основе многих методов, рассматриваемых в части 2, а также методов оценки резерва из главы 3.3. Читатель, желающий сначала познакомиться с некоторыми из этих задач, может обратиться к разделам 2.4.1–2.4.3.

Довольно часто из соображений актуальности данных математик вынужден принимать в расчет только наблюдения последнего года. Нередко и в распоряжении по каждой группе рисков имеется всего одно наблюдение. Как мы увидим, в этих случаях тоже удастся воспользоваться двухпараметрической моделью распределения. Для этого необходимо предположить одинаковую зависимость между математическим ожиданием и дисперсией нормированного убытка (убытка на один полисо-год или ставки убытка) во всех группах рисков. Возможные виды зависимости обсуждаются в разделе 1.3.6.

Несмотря на подавляющий вес математического ожидания убытка в составе нетто-премии, чрезвычайно важен правильный *выбор модели дисперсии*. С одной стороны, модель дисперсии дает представление о разбросе данных вокруг своего математического ожидания, а с другой — определяет, где должно находиться математическое ожидание в свете имеющихся наблюдений.

Модель дисперсии играет большую роль даже в случае нормально распределенных убытков. Например, обычная линейная регрессия (с постоянной дисперсией) и взвешенная линейная регрессия (дисперсия зависит от свободной переменной) могут приводить к существенно различающимся линиям регрессии при одних и тех же данных.

1.3.2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ДИСПЕРСИИ ОТ ОБЪЕМА

Рассмотрим сначала идеальный случай полностью *однородной группы рисков*, где все риски $i = 1, \dots, I$ независимы и имеют одинаковые распределения суммарного (годового) убытка R_i . Введя обозначения

$$m = E(R_i), 1 \leq i \leq I, \quad s^2 = \text{Var}(R_i), 1 \leq i \leq I,$$

для совокупного убытка группы рисков

$$S = \sum_{i=1}^I R_i,$$

получим

$$E(S) = I \cdot m, \quad \text{Var}(S) = I \cdot s^2.$$

Вместо зависящей от объема величины «совокупный убыток» удобнее использовать более наглядную нормированную на объем случайную величину *убыток на один полисо-год*

$$Z = S / I,$$

для которой справедливо

$$E(Z) = m, \\ \text{Var}(Z) = s^2 / I.$$

На практике напрямую оценить значение $E(R_i)$ невозможно, поэтому основой премии для каждого из I рисков служит величина $E(Z)$. Обратной пропорциональной зависимости между $\text{Var}(Z)$ и I непосредственно влечет упомянутый в разделе 1.2.2 эффект: у больших групп рисков колебание убытка на один полисо-год меньше, что позволяет более точно оценить математическое ожидание.

При известных реализациях r_i величин R_i значения

$$\hat{m} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I r_i, \quad \hat{s}^2 = \frac{1}{I-1} \sum_{i=1}^I (r_i - \hat{m})^2$$

представляют собой несмещенные оценки для m и s^2 .

Но, как уже говорилось в разделе 1.3.1, данные по отдельным рискам часто бывают недоступны, и в распоряжении имеются только суммарные годовые показатели числа рисков I_j и очищенного от инфляции убытка на один поли-

со-год z_j (как реализации соответствующей случайной величины Z_j) портфеля за несколько лет $j = 1, \dots, J$. Если данные очищены от инфляции, и изменения в объеме покрытия или структуре убытка пренебрежимо малы, то распределение величины R_i и, следовательно, значения параметров m и s^2 для всех лет можно считать одинаковыми: $E(Z_j) = m$ и $Var(Z_j) = s^2 / I_j$. Тогда *несмещенные оценки* для m и s^2 находятся по формулам (см. теорему в конце раздела)

$$\hat{m} = \sum_{j=1}^J I_j z_j / \sum_{j=1}^J I_j, \quad \hat{s}^2 = \frac{1}{J-1} \sum_{j=1}^J I_j (z_j - \hat{m})^2.$$

Иногда риски содержатся в портфеле только часть года (например, если срок страхования меньше года). Такие риски учитываются в суммарном «количестве рисков» не полностью, а в соответствии со сроком пребывания в портфеле. Например, полугодовой риск считается половиной так называемого *полисо-года*, а два таких риска вместе принимаются за один годовой риск. При этом предполагается однородность процесса убытков во времени, когда ожидаемое значение и дисперсия полугодового риска равны, соответственно, половине ожидаемого значения и дисперсии годового риска.

Представленная модель независимых одинаково распределенных рисков вполне реалистична для групп рисков в страховании автогражданской ответственности. Но в имущественном страховании риски *разлигаются страховыми суммами* и поэтому не могут считаться одинаково распределенными (попытка составить группы только из рисков с одинаковыми страховыми суммами привела бы к очень большому числу слишком маленьких групп). В большинстве видов имущественного страхования для рисков одной тарифной группы используется одинаковая ставка премии, которая умножается на соответствующие страховые суммы. Тем самым подразумевается пропорциональность

$$E(R_i) = m \cdot u_i, \quad i = 1, \dots, I,$$

(m не совпадает с использованным выше). Ничто не мешает нам учитывать различие страховых сумм точно так же, как различие сроков пребывания в портфеле. Будем исходить из некоторого «эталонного риска» R_1 со страховой суммой u_1 и предположим, что, к примеру, у риска с половиной этой суммы математическое ожидание и дисперсия тоже составляют только половину соответствующих показателей риска R_1 и, значит, совокупный убыток двух рисков со страховыми суммами $u_1 / 2$ распределен так же, как R_1 . Короче говоря, мы принимаем равенства

$$E(R_i) = E(R_1) u_i / u_1,$$

$$Var(R_i) = Var(R_1) u_i / u_1$$

для всех $i = 1, \dots, I$. Сравнив эти равенства с формулами $E(S) = I \cdot m$, $Var(S) = I \cdot s^2$, приведенными в начале раздела, мы видим, что каждый риск R_i состоит из u_i независимых частей, причем эти части у всех рисков группы одинаково распределены. Такой подход опирается на предположение, что различия в

страховых суммах существенно влияют только на количество убытков, но не на их размеры (иначе мы записали бы $R_i = R_1 u_i / u_1$ и $Var(R_i) = Var(R_1) u_i^2 / u_1^2$). Это предположение справедливо только для групп схожих по размеру рисков и не выполнялось бы, например, в огневом страховании строений, если бы одна и та же группа рисков содержала коттеджи и многоэтажные дома.

Пусть

$$v = \sum_{i=1}^I u_i$$

совокупная страховая сумма группы рисков. Используя обозначения

$$m = E(R_1) / u_1,$$

$$s^2 = Var(R_1) / u_1$$

для совокупного убытка

$$S = \sum_{i=1}^I R_i$$

независимых рисков, получим

$$E(S) = m \cdot v,$$

$$Var(S) = s^2 v.$$

Соответствующей нормированной на объем случайной величиной теперь выступает *ставка убытка*

$$Z = S / v,$$

имеющая (аналогично убытку на один полисо-год) математическое ожидание

$$E(Z) = m$$

и дисперсию

$$Var(Z) = s^2 / v,$$

что оправдывает применение одинаковых обозначений для ставки убытка и убытка на один полисо-год (условие $u_i = 1$ приводит к рассмотренному выше однородному случаю).

Несмещенные оценки для m и s^2 на базе реализаций r_i величин R_i рассчитываются по формулам

$$\hat{m} = \sum_{i=1}^I \frac{r_i}{v} = \sum_{i=1}^I \frac{u_i}{v} \cdot \frac{r_i}{u_i},$$

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{I-1} \sum_{i=1}^I u_i \left(\frac{r_i}{u_i} - \hat{m} \right)^2.$$

Оценка \hat{m} имеет типичный вид средней групповой ставки убытка, обычно рассчитываемой страховыми компаниями. Предпочитая взвешенное по страховым суммам среднее ставок убытков отдельных рисков альтернативе

$$\hat{m} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \frac{r_i}{u_i},$$

то есть арифметическому среднему, мы неявно предполагаем равенство $\text{Var}(R_i / u_i) = s^2 / u_i$, а не $\text{Var}(R_i / u_i) = \hat{s}^2$. При этом мы руководствуемся доказанной в конце раздела теоремой, диктующей при построении среднего присваивать слагаемым веса, обратно пропорциональные их дисперсиям (неточностям).

Пусть Z_j , $1 \leq j \leq J$, — очищенная от инфляции ставка убытка группы рисков в j -м году, и v_j — соответствующий объем, выраженный совокупной страховой суммой. Тогда величины m и s^2 , как правило, могут считаться постоянными в течение нескольких лет: $E(Z_j) = m$ и $\text{Var}(Z_j) = s^2 / v_j$. Несмещенные оценки параметров m и s^2 на основе реализаций z_j величин Z_j (снова аналогично убытку на один полисо-год) равны

$$\hat{m} = \frac{\sum_{j=1}^J v_j z_j}{\sum_{j=1}^J v_j},$$

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{J-1} \sum_{j=1}^J v_j (z_j - \hat{m})^2 = \frac{1}{J-1} \sum_{j=1}^J v_j z_j^2 - \frac{v_+}{J-1} \cdot \hat{m}^2,$$

где $v_+ = v_1 + \dots + v_J$.

Подведем итог. В индивидуальной модели совокупный убыток S группы из I рисков R_i , $1 \leq i \leq I$, задается в виде суммы

$$S = R_1 + \dots + R_I.$$

При этом предполагается, что R_1, \dots, R_I независимы, и

$$E(R_i) = m \cdot u_i, \quad 1 \leq i \leq I,$$

$$\text{Var}(R_i) = s^2 u_i, \quad 1 \leq i \leq I,$$

где u_i — объем (например, страховая сумма) i -го риска, причем нам известна только сумма $v = u_1 + \dots + u_I$. Из этих предположений следуют равенства $E(S) = mv$, $\text{Var}(S) = s^2 v$, $E(Z) = m$, $\text{Var}(Z) = s^2 / v$, где $Z = S / v$. После очищения данных от инфляции параметры m и s^2 не изменяются по годам и оцениваются по указанным формулам.

Предложенный способ моделирования влияния страховой суммы на дисперсию читатель, возможно, сочтет ограничительным, справедливо полагая, что в некоторых группах рисков страховая сумма влияет не только на количество убытков, но и на их размеры. Если бы страховая сумма влияла только на размер убытка, причем размер убытка был пропорционален страховой сумме, то мы положили бы $R_i = R_{i1} u_i / u_1$ и, следовательно, $\text{Var}(R_i) = \text{Var}(R_{i1}) (u_i / u_1)^2$.

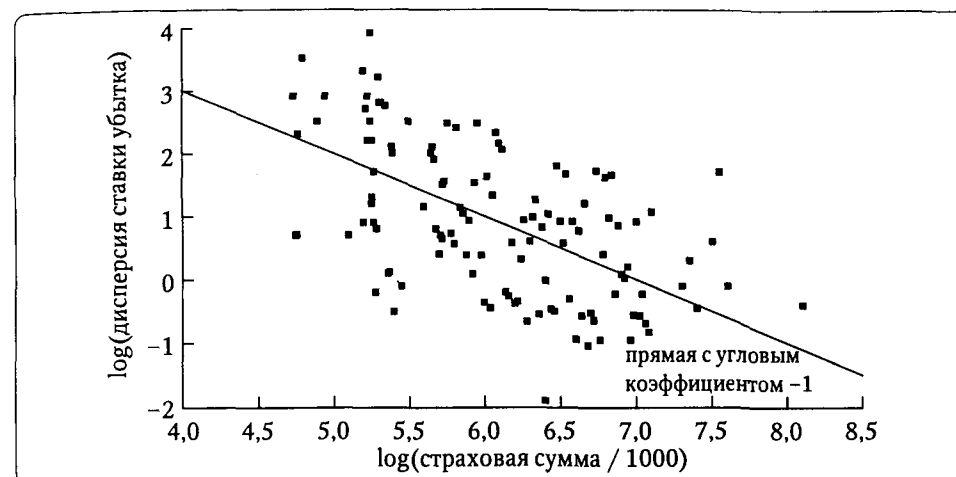


Рисунок 1.3.2.1. Зависимость дисперсии ставки убытка от объема в огневом страховании промышленных предприятий

Тогда дисперсия ставки убытка $\text{Var}(Z) = s^2 / v$ не была бы обратно пропорциональна страховой сумме. Повод ожидать влияния страховой суммы на размер убытка дают большие различия в страховых суммах, наблюдаемые в некоторых видах страхования, например в огневом страховании промышленных предприятий.

На рисунке 1.3.2.1 в логарифмическом масштабе представлена зависимость размера дисперсии годовой ставки убытка при средней страховой сумме от средней страховой суммы для типичных групп рисков огневого страхования промышленных предприятий. Дисперсия и страховая сумма оценены на основании данных за 10-летний период, соответственно, величинами $\hat{s}^2 / (v_+ / 10)$ и $v_+ / 10 = (v_1 + \dots + v_{10}) / 10$. Каждая точка отвечает отдельной группе рисков. На этом же рисунке показана прямая с угловым коэффициентом -1 , как можно видеть, хорошо отражающая некоторый спад высоты расположения точек при возрастании страховой суммы. С обозначением Z для ставки убытка и v для страховой суммы уравнение этой прямой записывается в виде

$$\log(\text{Var}(Z)) = a - \log(v)$$

или

$$\text{Var}(Z) = 10^a / v.$$

Таким образом, и в этом виде страхования наблюдается постулированная нами обратно пропорциональная зависимость дисперсии убытка от страховой суммы. Оговоримся, однако, что обратная зависимость дисперсии от объема выявлена нами при сравнении нескольких групп рисков (поперечный анализ), тогда как интерес представляет изменение дисперсии каждой отдельной группы рисков по годам наблюдений (продольный анализ). Но поскольку ситуация отдельной группы рисков с изменяющимся от года к году объемом

мало чем отличается от ситуации нескольких различных по объему групп рисков в одном году, у нас нет причин отказаться от модели $Var(Z) = s^2 / v$.

В заключение раздела докажем уже не раз упомянутую теорему об оптимальности линейной комбинации оценок, взвешенных в обратной пропорции со своими дисперсиями (неточностью). На эту теорему мы будем и далее ссылаться при построении оценок.

Теорема. Пусть T_1, \dots, T_I — независимые несмещенные оценки величины t : $E(T_i) = t$, $1 \leq i \leq I$, и пусть $T = w_1 T_1 + \dots + w_I T_I$ — линейная комбинация этих оценок, причем $w_1 + \dots + w_I = 1$, то есть $E(T) = t$. Тогда среди всех возможных линейных комбинаций вида T минимальную дисперсию имеет комбинация с весами w_i , обратно пропорциональными $Var(T_i)$: $w_i = w / Var(T_i)$ для всех $i = 1, \dots, I$.

Доказательство. Требуется минимизировать функцию

$$Var(T) = \sum_{i=1}^I w_i^2 Var(T_i)$$

при выполнении уравнения связи $w_1 + \dots + w_I = 1$. Согласно методу множителей Лагранжа, точки экстремума удовлетворяют равенству

$$0 = \frac{\partial}{\partial w_i} \left(\sum_{k=1}^I w_k^2 Var(T_k) + a \left(1 - \sum_{k=1}^I w_k \right) \right) = 2w_i Var(T_i) - a, \quad 1 \leq i \leq I.$$

Решая эту систему, получим

$$w_i = \frac{a/2}{Var(T_i)},$$

где a удовлетворяет уравнению

$$1 = \sum_{i=1}^I w_i = \frac{a}{2} \sum_{i=1}^I \frac{1}{Var(T_i)}.$$

Дисперсия линейной комбинации T , составленной с использованием весов w_i , равна

$$Var(T) = \sum_{i=1}^I w_i^2 Var(T_i) = \frac{a^2}{4} \sum_{i=1}^I \frac{1}{Var(T_i)} = \frac{a}{2}.$$

Для любой линейной комбинации $T = w_1 T_1 + \dots + w_I T_I$ такой, что $w_1 + \dots + w_I = 1$, в силу неравенства Шварца справедливо

$$Var(T) = \sum_{i=1}^I w_i^2 Var(T_i) \cdot 1 = \sum_{i=1}^I w_i^2 Var(T_i) \cdot \sum_{i=1}^I \frac{a/2}{Var(T_i)} \geq \frac{a}{2} \left(\sum_{i=1}^I w_i \right)^2 = \frac{a}{2}.$$

Тем самым теорема доказана. ■

1.3.3. МОДЕЛИРОВАНИЕ СОВОКУПНОГО УБЫТКА РИСКА И ГРУППЫ РИСКОВ С ПОМОЩЬЮ ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Предыдущие рассуждения о распределении совокупного убытка S группы рисков позволили лишь установить характер влияния объема на математическое ожидание и дисперсию. Основная же наша задача — смоделировать совокупную функцию распределения. Выбрав распределение произвольным образом (например, равномерное распределение на интервале $(a; b)$) и определив его параметры из условий $E(S) = \hat{m} \cdot v$ и $Var(S) = \hat{s}^2 \cdot v$ (см. раздел 1.3.2), мы рисковали бы получить абсолютно неверную форму распределения величины S . Гораздо больше шансов построить адекватную модель для S дает анализ распределений совокупных убытков R_i отдельных рисков $i = 1, \dots, I$. Нам известно, что основная масса вероятностей сосредоточена в точке $R_i = 0$, ведь практически во всех видах рискового страхования подавляющее большинство рисков (в отдельно взятом году) не порождает убытков. Значит, распределение случайной величины R_i не имеет непрерывной плотности и, в частности, далеко от нормального распределения. С ростом числа независимых и одинаково распределенных рисков стандартизованный совокупный убыток $(S - E(S)) / Sta(S)$, согласно центральному предельному закону, действительно становится все более похож на нормально распределенную величину (в смысле сходимости распределения). Но, ввиду крайней несимметричности распределения величины R_i , в большинстве групп рисков этот закон срабатывает только при очень большом числе рисков.

Для получения приемлемой аппроксимации распределения совокупного убытка S малой (как это характерно для практики) группы рисков аппроксимируем распределение совокупного убытка R_i отдельного риска i непрерывным распределением, допускающим *явный расчет свертки*. Для грубой аппроксимации распределения величины R_i достаточно знать, что основная масса вероятностей находится в нуле. В последующем процессе свертки неточность аппроксимации довольно быстро нивелируется и достигаются очень близкие к реальности модели совокупного убытка (по крайней мере, для основной массы вероятностей).

Самым известным распределением на интервале $(0; \infty)$, позволяющим рассчитывать свертки в явном виде, является гамма-распределение с плотностью

$$g(x) = \exp(-x\alpha / \mu) \cdot x^{\alpha-1} \cdot (\alpha / \mu)^\alpha / \Gamma(\alpha), \quad x > 0.$$

Отступая от обычного представления плотности гамма-распределения, мы выбрали параметризацию с участием математического ожидания μ . Дисперсия гамма-распределения равна μ^2 / α , коэффициент вариации $1 / \sqrt{\alpha}$, асимметрия $2 / \sqrt{\alpha}$. Параметр формы α определяет вид графика плотности (см. рис. 1.3.3.1).

При $\alpha = 1$ получается убывающее по экспоненте из точки $g(0) = 1$ экспоненциальное распределение; при $\alpha < 1$ график выглядит еще более асимметричным и еще круче убывает из точки $g(0) = \infty$; при $\alpha > 1$ справедливо равенство $g(0) = 0$; единственная мода имеет значение $\mu - \mu / \alpha$, а вид плотности с

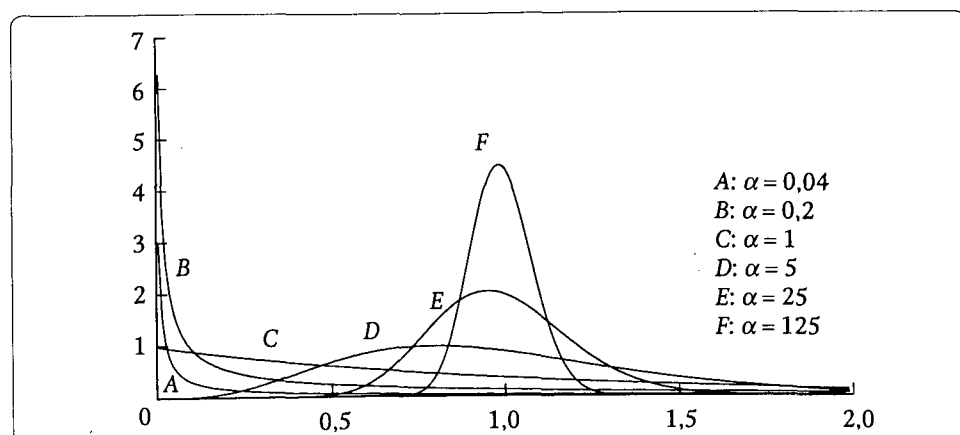


Рисунок 1.3.3.1. Плотности гамма-распределений с математическим ожиданием 1

ростом α становится все симметричнее и более похож на нормальное распределение. (Плотности при $\alpha = 0,04$ и $\alpha = 0,2$ пересекаются слева и справа за пределами рисунка 1.3.3.1.)

Поскольку для нас важно, чтобы аппроксимирующее распределение величины R_i имело как можно больший вероятностный вес вблизи нулевой точки, мы принимаем в рассмотрение только гамма-распределение с параметром формы $\alpha < 1$. При $\alpha = 0,02$, например, 89% вероятностной массы сосредоточено в области ниже значения $\mu / 10$. Сначала предположим однородную группу рисков и аппроксимируем неизвестное распределение величины R_i гамма-распределением с параметрами $\mu = m$ и $\alpha = m^2 / s^2$, где $m = E(R_i)$ и $s^2 = \text{Var}(R_i)$. Параметры распределения можно найти из условий равенства соответствующих теоретических и эмпирических моментов. Тогда в результате I -кратной свертки гамма распределений с параметрами μ и α получим распределение совокупного убытка группы I независимых рисков R_i . I -кратная свертка гамма-распределений снова дает гамма-распределение, но с параметром среднего $I \cdot \mu$ и параметром формы $I \cdot \alpha$. Переход от совокупного убытка S к нормированной на объем величине $Z = S / I$ (убыток на один полисо-год) не изменяет тип распределения: Z будет иметь гамма-распределение с параметром среднего μ и параметром формы $I \cdot \alpha$.

Построенное на основе приемлемых аппроксимаций распределений отдельных рисков, гамма-распределение может считаться вполне реалистичной моделью для совокупного и нормированного убытков группы одинаково распределенных независимых рисков. К тому же гамма-распределение обладает еще одним очень выгодным для нас свойством: сумма независимых гамма-распределенных рисков R_i имеет гамма-распределение и в том случае, когда параметры μ_i и α_i не одинаковы для всех рисков i , но отношение этих параметров постоянно $\mu_i / \alpha_i = c$. Это свойство дает нам возможность моде-

лировать с помощью гамма-распределения совокупный убыток группы рисков с разными страховыми суммами. Мы снова отталкиваемся от распределений отдельных рисков, что гарантирует наибольшую правдоподобность модели совокупного убытка. Предположим для совокупного убытка R_i отдельного риска со страховой суммой u_i (при $E(R_i) = m \cdot u_i$ и $\text{Var}(R_i) = s^2 u_i$, см. раздел 1.3.2) гамма-распределение с параметрами $\mu_i = m \cdot u_i$ и $\alpha_i = m^2 u_i / s^2$. Тогда μ_i / α_i действительно для всех рисков одинаково, и $S = R_1 + \dots + R_I$ тоже имеет гамма-распределение, но с параметром математического ожидания $\mu_1 + \dots + \mu_I = m \cdot v$ и параметром формы $\alpha_1 + \dots + \alpha_I = m^2 v / s^2$, где $v = u_1 + \dots + u_I$. Как видим, для получения распределения совокупного убытка нам снова достаточно просто сложить параметры. Ставка убытка $Z = S / v$ будет иметь гамма-распределение с параметрами m и $m^2 v / s^2$.

Таким образом, как в однородном, так и в неоднородном случае мы можем моделировать нормированную на объем величину убытка Z гамма-распределением с параметрами μ и $v \cdot \alpha$, где $\mu = m$ — среднее значение, v — известный объем (число полисо-лет или совокупная страховая сумма) и $\alpha = m^2 / s^2$. В последней параметризации задействован объем, до сих пор скрытый в параметре формы, и α обозначает параметр формы для одной единицы объема. Именно в таком виде гамма-распределение будет применяться нами в дальнейшем (см. также таблицу распределений в разделе 1.3.8). Если значения m и s^2 , а значит, μ и α считать постоянными в течение ряда лет $j = 1, \dots, J$ (см. раздел 1.3.2), то от года к году в распределении совокупного убытка будет меняться только объем v , присутствующий как множитель в параметре формы.

Нам удалось описать нормированный на объем совокупный годовой убыток Z (как однородной, так и неоднородной) группы рисков двухпараметрическим распределением, параметры которого оцениваются на основе реализаций $z_j = s_j / v_j$, $1 \leq j \leq J$. В построенной модели нормированный на известный объем v_j совокупный убыток $Z_j = S_j / v_j$ j -го года имеет гамма-распределение с параметром математического ожидания μ и параметром формы $v_j \alpha$ (дисперсия равна $\mu^2 / (v_j \alpha)$). Два неизвестных параметра μ и α оцениваются привычными методами на основании годовых реализаций z_j , $1 \leq j \leq J$. Используя несмещенные оценки для m и s^2 , приведенные в предыдущем разделе, а также соотношения

$$\begin{aligned} \mu &= m, \\ \alpha &= m^2 / s^2, \end{aligned}$$

получаем оценки по методу моментов

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \sum_{j=1}^J v_j z_j / \sum_{j=1}^J v_j, \\ \hat{\alpha} &= \hat{\mu}^2 (J-1) / \sum_{j=1}^J v_j (z_j - \hat{\mu})^2. \end{aligned}$$

Значение $\hat{\mu}$ одновременно является и оценкой максимального правдоподобия для μ . Оценка правдоподобия для α удовлетворяет уравнению

$$\sum_{j=1}^J v_j (\ln(\hat{\alpha} v_j z_j / \hat{\mu}) - \Psi(\hat{\alpha} v_j)) = 0,$$

где

$$\Psi(x) = \frac{d(\ln(\Gamma(x)))}{dx} = \Gamma'(x) / \Gamma(x)$$

дигамма-функция. Это уравнение решается методом последовательных приближений с помощью аппроксимации

$$\Psi(x) \approx \ln(x) - x^{-1} / 2 - x^{-2} / 12 + (x^{-4} - 0,46x^{-6}) / 120,$$

имеющей при $x > 5$ точность до 8 десятичных знаков, а также рекурсии

$$\Psi(x) = \Psi(x+1) - 1/x.$$

Заменив $\Psi(\alpha v_j)$ на

$$\Psi(\alpha v_j) = \Psi(\alpha v_j + 5) - \frac{1}{\alpha v_j + 4} - \frac{1}{\alpha v_j + 3} - \frac{1}{\alpha v_j + 2} - \frac{1}{\alpha v_j + 1} - \frac{1}{\alpha v_j},$$

и выразив α из последнего слагаемого правой части, получаем итерационную форму уравнения

$$\alpha = J / \sum_{j=1}^J v_j \left(\Psi(\alpha v_j + 5) - \frac{1}{\alpha v_j + 4} - \frac{1}{\alpha v_j + 3} - \frac{1}{\alpha v_j + 2} - \frac{1}{\alpha v_j + 1} \right) - \ln \left(\frac{\alpha v_j z_j}{\hat{\mu}} \right).$$

Для запуска итерации используем вместо $\Psi(\alpha v_j + 5)$ указанную выше аппроксимацию и подставляем в правую часть в качестве стартового значения α его оценку по методу моментов.

Для вычисления самой функции правдоподобия требуется значение $\ln(\Gamma(x))$. При $x > 3$ удобно воспользоваться аппроксимацией

$$\ln(\Gamma(x)) \approx \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2\pi}{x} \right) + x \cdot \ln(x) - x + \left(\left(\left(1 - \frac{2}{3x^2} \right) \frac{2}{7x^2} - 1 \right) \frac{1}{30x^2} + 1 \right) \frac{1}{12x},$$

имеющей точность до 7 десятичных знаков, а при $0 < x \leq 3$ — рекурсией

$$\ln(\Gamma(x)) = \ln(\Gamma(x+1)) - \ln(x).$$

Приведенные численные методы взяты из книги Шпанира и Олдмана (Spanier J., Oldhman K. B. An Atlas of Functions. Berlin: Springer-Verlag, 1987).

1.3.4. МОДЕЛИРОВАНИЕ СОВОКУПНОГО УБЫТКА РИСКА И ГРУППЫ РИСКОВ С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНОГО ГАУССОВСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Отсутствие возможности явного расчета оценки максимального правдоподобия для второго параметра гамма-распределения заставляет в некоторых случаях предпочесть обратное гауссовское распределение, менее известное, но схожее с гамма-распределением важными для нас свойствами. Плотность обратного гауссовского распределения имеет вид

$$g(x) = \exp \left(- \left(\sqrt{x/\mu} - \sqrt{\mu/x} \right)^2 \alpha / 2 \right) \cdot \sqrt{\mu \cdot \alpha} / \sqrt{2\pi x^3} \\ = \exp \left(- (x/\mu - 2 + \mu/x) \cdot \alpha / 2 \right) \cdot \sqrt{\mu \cdot \alpha} / \sqrt{2\pi x^3}, \quad x > 0.$$

Параметры μ и α , как и у гамма-распределения, выбраны из расчета совпадения математического ожидания с параметром μ и равенства дисперсии значению μ^2 / α . Коэффициент вариации обратного гауссовского распределения составляет $1/\sqrt{\alpha}$, асимметрия $3/\sqrt{\alpha}$ превышает асимметрию гамма-распределения с такими же математическим ожиданием и дисперсией. Параметр формы снова определяет вид функции плотности (см. рис. 1.3.4.1). Плотность всегда унимодальна, и $g(0) = 0$. Мода

$$x_0 = \mu \left(\sqrt{1 + 9/(4\alpha^2)} - 3/(2\alpha) \right) < \mu \cdot \alpha / 3$$

при уменьшении α сдвигается в сторону точки нуля. С ростом α форма плотности становится все симметричнее.

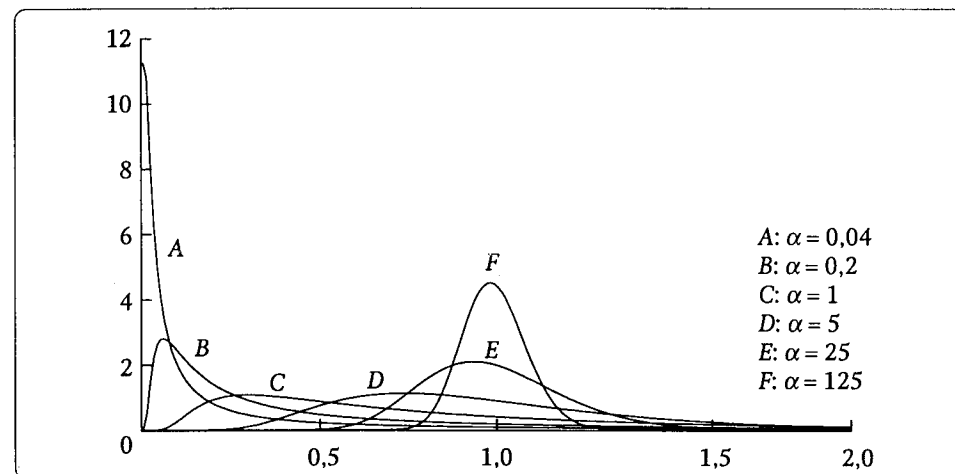


Рисунок 1.3.4.1. Плотности обратных гауссовских распределений с математическим ожиданием 1

Одно из преимуществ обратного гауссовского распределения по сравнению с гамма-распределением — возможность выражения функции распределения G через стандартное нормальное распределение:

$$G(x) = \Phi(\sqrt{\alpha x / \mu} - \sqrt{\alpha \mu / x}) + e^{2\alpha} \cdot \Phi(-\sqrt{\alpha x / \mu} - \sqrt{\alpha \mu / x}).$$

При $\alpha = 0,002$ получаем $G(\mu / 10) = 0,89$. Таким образом, несмотря на условие $g(0) = 0$, при малых α подавляющая вероятностная масса, как и у гамма-распределения, расположена вблизи нуля.

Это позволяет аппроксимировать распределение совокупного убытка отдельного риска обратным гауссовским распределением, тем более что оно не изменяется в результате свертки. Как и в предыдущем случае, аппроксимируем распределение отдельного риска R_i с математическим ожиданием $E(R_i) = m$ и дисперсией $Var(R_i) = s^2$ обратным гауссовским распределением с параметрами $\mu = m$ и $\alpha = m^2 / s^2$. Тогда совокупный убыток S группы I независимых, распределенных как R_i рисков, будет иметь обратное гауссовское распределение с параметром среднего $I\mu$ и параметром формы $I\alpha$ (соответственно, убыток на один полисо-год — обратное гауссовское распределение с параметрами μ и $I\alpha$).

Как и гамма-распределение, обратное гауссовское распределение сохраняется в результате свертки независимых рисков R_i даже тогда, когда параметры μ_i и α_i для разных рисков различны, но, по крайней мере, отношение μ_i / α_i для всех i одинаково. Благодаря этому свойству обратное гауссовское распределение подходит для моделирования распределения совокупного убытка группы рисков R_i с разными страховыми суммами. Если распределение величины R_i задается обратным гауссовским распределением с параметрами $\mu_i = m \cdot u_i$ и $\alpha_i = m^2 u_i / s^2$ (дисперсия равна $s^2 u_i$ — см. раздел 1.3.2), то отношение μ_i / α_i для всех рисков одинаково. В этом случае $S = R_1 + \dots + R_I$ имеет обратное гауссовское распределение с параметром среднего $m \cdot v$ и параметром формы $v\alpha = m^2 v / s^2$, где $v = u_1 + \dots + u_I$ — совокупная страховая сумма группы рисков. Ставка убытка $Z = S / v$ имеет обратное гауссовское распределение с параметрами $\mu = m$ и $v\alpha = m^2 v / s^2$.

Таким образом, мы вправе предположить для нормированной на объем величины убытка (убыток на один полисо-год или ставка убытка) Z (однородной или неоднородной) группы объема v (число полисо-лет или совокупная страховая сумма) обратное гауссовское распределение с параметрами μ и $v\alpha$. Оценки по методу моментов на основе годовых реализаций z_j , $1 \leq j \leq J$, величины Z при заданных объемах v_j совпадают с соответствующими оценками гамма-распределения (в силу одинаковой параметризации). Оценки максимального правдоподобия находим по формулам

$$\hat{\mu} = \sum_{j=1}^J v_j z_j / \sum_{j=1}^J v_j,$$

$$\hat{\alpha} = J / \sum_{j=1}^J v_j (\hat{\mu} / z_j - 1).$$

Для вывода этих формул произведем замену $\beta = \mu \cdot \alpha$. Тогда функция правдоподобия $\ln(L)$ реализаций z_j примет вид

$$2 \cdot \ln(L) = \sum_{j=1}^J \left((-z_j / \mu^2 + 2 / \mu - 1 / z_j) v_j \beta + \ln(v_j \beta) - \ln(2\pi z_j^3) \right).$$

Из условия равенства нулю производной

$$0 = \frac{\partial(2 \cdot \ln(L))}{\partial \mu} = \sum_{j=1}^J (2z_j / \mu^3 - 2 / \mu^2) v_j \beta = 2\beta \cdot \mu^{-3} \sum_{j=1}^J v_j (z_j - \mu),$$

сразу следует

$$\hat{\mu} = \sum_{j=1}^J v_j z_j / \sum_{j=1}^J v_j.$$

Далее из уравнения

$$0 = \frac{\partial(2 \cdot \ln(L))}{\partial \beta} = \sum_{j=1}^J \left((-z_j / \hat{\mu}^2 + 2 / \hat{\mu} - 1 / z_j) v_j + 1 / \beta \right)$$

после замены $\sum_{j=1}^J v_j z_j = \hat{\mu} \sum_{j=1}^J v_j$ получим

$$\hat{\beta} = J / \sum_{j=1}^J v_j (1 / z_j - 1 / \hat{\mu}).$$

Свойство инвариантности оценок максимального правдоподобия позволяет из равенства $\alpha = \beta / \mu$ непосредственно вычислить указанную выше оценку для α . Для простоты расчета оценок максимального правдоподобия в дальнейшем мы часто будем заменять параметр α на $\beta = \mu \cdot \alpha$, как это сделано в таблице распределений в разделе 1.3.8. Но для установления аналогии с гамма-распределением было целесообразно сначала ввести обратное гауссовское распределение с параметром α .

Итак, обратное гауссовское распределение — такая же реалистичная модель распределения совокупного убытка, убытка на один полисо-год и ставки убытка, как и гамма-распределение, но имеет по сравнению с гамма-распределением преимущества в расчете функции распределения и оценок максимального правдоподобия. Правда, в разделе 1.3.6 мы увидим и недостатки обратного гауссовского распределения.

1.3.5. ЛОГНОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КАК МОДЕЛЬ ДЛЯ СОВОКУПНОГО УБЫТКА ГРУППЫ РИСКОВ

Признав гамма- и обратное гауссовское распределения реалистичными моделями совокупного убытка группы рисков, мы можем, минуя аппроксимацию распределений совокупных убытков одиночных рисков с последующей сверткой, сразу рассматривать в качестве потенциальных моделей для совокупного

убытка S распределения, схожие с гамма- и обратным гауссовским распределениями. Таково семейство логнормальных распределений, весьма популярное на практике благодаря возможности перехода к хорошо изученному нормальному распределению посредством логарифмирования данных.

Функция плотности логнормального распределения имеет вид

$$g(x) = \exp\left(-(\ln(x) - \theta)^2 / (2\sigma^2)\right) / \sqrt{2\pi\sigma^2 x^2}, \quad x > 0.$$

Математическое ожидание и дисперсия равны соответственно

$$\exp(\theta + \sigma^2 / 2) \text{ и } \exp(2\theta + \sigma^2) \cdot (\exp(\sigma^2) - 1).$$

Как видим, в обычной параметризации математическое ожидание не является параметром распределения. Коэффициент вариации составляет $\sqrt{\exp(\sigma^2) - 1}$, асимметрия $(\exp(\sigma^2) + 2)\sqrt{\exp(\sigma^2) - 1}$ еще больше, чем у обратного гауссовского распределения с тем же коэффициентом вариации. Как и обратное гауссовское распределение, логнормальное распределение имеет унимодальную плотность, и $g(0) = 0$. Значение моды равно $\exp(\theta - \sigma^2)$ (см. рис. 1.3.5.1). Изображенные на этом рисунке плотности имеют те же коэффициенты вариации, что и плотности на рисунках 1.3.3.1 и 1.3.4.1.

Натуральный логарифм случайной величины, распределенной логнормально с параметрами θ и σ^2 , имеет нормальное распределение с математическим ожиданием θ и дисперсией σ^2 . Это позволяет выразить функцию G логнормального распределения через функцию Φ стандартного нормального распределения:

$$G(x) = \Phi((\ln(x) - \theta) / \sigma).$$

Логнормальное распределение не инвариантно относительно свертки, поэтому мы сразу смоделируем логнормальным распределением нормированную

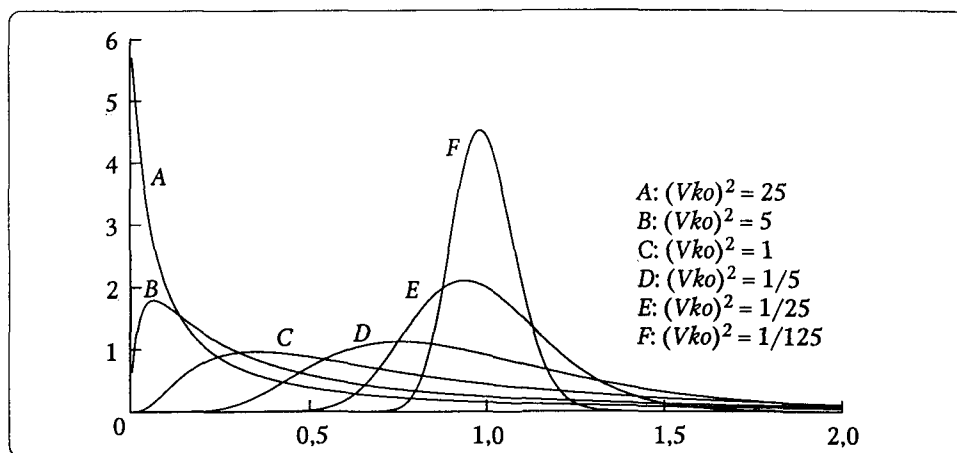


Рисунок 1.3.5.1. Плотности логнормальных распределений с математическим ожиданием 1

переменную $Z = S / \nu$ совокупного убытка группы рисков объема ν . Для удобства работы с нормально распределенной величиной $W = \ln(Z)$ постулируем зависимость дисперсии от объема не для Z , а для W . Будем считать, что величина W (с математическим ожиданием θ) имеет дисперсию σ^2 / ν . Это удобно обходится нам присутствием объема в формуле математического ожидания

$$E(Z) = \exp(\theta + \sigma^2 / (2\nu))$$

и нарушением обратной пропорциональной зависимости дисперсии

$$\text{Var}(Z) = \exp(2\theta + \sigma^2 / \nu) \cdot (\exp(\sigma^2 / \nu) - 1)$$

от объема. Последнее становится ясно из формулы квадрата коэффициента вариации

$$(Vko(Z))^2 = \exp(\sigma^2 / \nu) - 1.$$

Согласно приведенной в разделе 1.3.2 модели объема, коэффициент вариации тоже должен быть обратно пропорционален объему. Обратная пропорциональная зависимость от объема в приемлемом приближении достигается только при $\sigma^2 / \nu < 0,5$. На рисунке 1.3.5.2 нанесены значения $\log((Vko(Z))^2)$ в зависимости от $\log(\nu)$ при некоторых σ^2 . Прямая с угловым коэффициентом -1 соответствует точной обратной пропорциональной зависимости от объема. Прежде чем моделировать совокупный убыток с помощью логнормального распределения, нужно убедиться, что отношение оценки параметра σ^2 к объему ν достаточно мало.

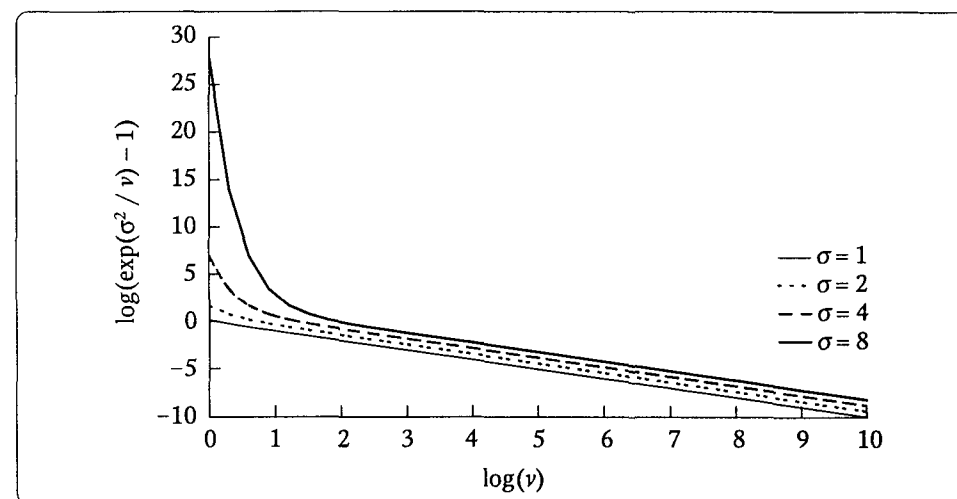


Рисунок 1.3.5.2. Зависимость квадрата коэффициента вариации логнормального распределения от объема

При наличии годовых наблюдений z_j , нормированной на объем v_j случайной величины убытка Z_j , $1 \leq j \leq J$, несмещенные оценки параметров задаются формулами

$$\hat{\theta} = \sum_{j=1}^J v_j \cdot \ln(z_j) / \sum_{j=1}^J v_j,$$

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{j=1}^J v_j \cdot (\ln(z_j) - \hat{\theta})^2 / (J - 1).$$

Они совпадают с формулами оценок для m и s^2 из раздела 1.3.2, но содержат логарифмированные данные. Значение $\hat{\theta}$ одновременно выступает оценкой максимального правдоподобия; оценка максимального правдоподобия параметра σ^2 равна $\hat{\sigma}^2(J - 1) / J$. Большой наглядностью, чем $\hat{\sigma}^2$, обладает безразмерная величина $\hat{\sigma}^2 / v_+$, $v_+ = v_1 + \dots + v_J$, представляющая собой оценку для $\text{Var}(\hat{\theta})$.

Следующий недостаток логнормальной модели заключается в том, что оценка $\exp(\hat{\theta} + \hat{\sigma}^2 / (2v_j))$ для $E(Z_j)$ не является несмещенной, а систематически превышает истинное значение $E(Z_j)$, хотя и незначительно. Ситуация не меняется и при использовании оценки максимального правдоподобия $\hat{\sigma}^2(J - 1) / J$ вместо $\hat{\sigma}^2$. Кроме того, для расчета тарифа требуется прогноз значения объема на предстоящий год, когда премия будет применяться. Правда, изменение объема в большинстве случаев мало влияет на математическое ожидание $E(Z)$. Например, при $\sigma^2 / v = 0,5$ увеличение объема на 10% ведет к снижению математического ожидания $\exp(\theta + \sigma^2 / (2v))$ всего на $(1 - e^{-0,25/11}) \cdot 100\% \approx 2,2\%$.

Мы вынуждены признать, что логнормальное распределение все же недостаточно точно моделирует влияние объема. Как будет видно в разделе 1.4.3, гораздо лучше оно подходит в качестве модели для размера убытка в отдельном страховом случае.

1.3.6. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ МАТЕМАТИЧЕСКИМ ОЖИДАНИЕМ И ДИСПЕРСИЕЙ НЕСКОЛЬКИХ ГРУПП РИСКОВ

Нередко по каждой группе рисков имеется только одно наблюдение совокупного годового убытка или же из соображений актуальности данных во внимание принимается только статистика последнего года. В этих случаях тоже можно извлечь выгоду из рассмотренных двухпараметрических распределений, если постулировать зависимость между параметрами групп рисков, сократив тем самым число свободных параметров. Как мы увидим в главе 2.4, число параметров математического ожидания сокращается за счет перекрестной классификации рисков. Для сокращения числа параметров формы до одного-единственного параметра необходимо предположить одинаковую во всех группах зависимость между математическим ожиданием и дисперсией. Ниже мы установим наиболее правдоподобные виды зависимости.

Сначала рассмотрим фиксированную группу рисков и будем исходить из так называемой *коллективной модели*, более подробно описанной в главе 1.4. В коллективной модели совокупный убыток S группы рисков представляется в форме

$$S = \sum_{n=1}^N X_n$$

($S = 0$ при $N = 0$), где N — число убытков, а X_n — размер n -го убытка; предполагается, что X_n независимы, распределены одинаково и не зависят от N . Эта модель хорошо зарекомендовала себя на практике. С помощью свойств условного математического ожидания и дисперсии расчет моментов величины S сводится к случаю известного нестохастического N (X имеет такое же распределение, как X_n):

$$E(S) = E_N(E(S | N)) = E_N(N \cdot E(X)) = E(N) \cdot E(X),$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(S) &= E_N(\text{Var}(S | N)) + \text{Var}_N(E(S | N)) \\ &= E_N(N \cdot \text{Var}(X)) + \text{Var}_N(N \cdot E(X)) \\ &= E(N) \cdot \text{Var}(X) + \text{Var}(N) \cdot (E(X))^2. \end{aligned}$$

Предположим, что математическое ожидание числа убытков прямо пропорционально (очищенному от инфляции) объему v группы рисков:

$$E(N) = a \cdot v,$$

где $a > 0$ — постоянная для всех лет частота убытков. Это предположение вполне правомерно и позволяет в явном виде задействовать объем в формулах математического ожидания и дисперсии совокупного убытка:

$$E(S) = a \cdot v \cdot E(X),$$

$$\text{Var}(S) = a \cdot v \cdot (\text{Var}(X) + b(E(X))^2),$$

где

$$b = \text{Var}(N) / E(N).$$

Если b не зависит от v , дисперсия $\text{Var}(S / v)$ обратно пропорциональна объему v группы рисков, что соответствует модели из раздела 1.3.2. Далее, кроме объема на первые два момента случайной величины S влияют частота убытков a и размер убытка X . Влияние множителя b незначительно. В самом деле, если число убытков распределено по закону Пуассона, то $b = 1$. При любом другом распределении числа убытков можно предположить приближенное постоянство b для всех лет и всех рисков. Это предположение не представляет серьезного ограничения, ведь слагаемое $b(E(X))^2$ значительно уступает по размеру слагаемому $\text{Var}(X)$ ввиду (как правило) высокого значения коэффициента вариации распределения размера убытка.

Другая группа рисков (того же вида страхования) с совокупным убытком \underline{S} имеет, вообще говоря, другой объем \underline{v} . Поэтому существуют только два иде-

альных варианта сходства групп: либо у них одинаковые распределения размера убытка, но разные частоты убытков, либо одинаковые частоты убытков, но разные распределения размера убытка.

В первом идеальном случае (разная частота убытков a , но одинаковый размер убытка X) получим

$$E(S) = a \cdot \nu \cdot E(X),$$

$$\text{Var}(S) = a \cdot \nu \cdot (\text{Var}(X) + b(E(X))^2),$$

и следовательно, $\text{Var}(S) / E(S) = \text{Var}(S) / E(S)$, то есть отношение дисперсии к математическому ожиданию совокупного убытка в двух группах рисков одинаково. Для нормированной на объем величины убытка $Z = S / \nu$ это означает постоянство отношения $\nu \cdot \text{Var}(Z) / E(Z)$.

Во втором идеальном случае (одинаковая частота убытков a , но разный размер убытка X) предположим простейшую зависимость $X = c \cdot X$. Тогда

$$E(S) = a \cdot \nu \cdot c \cdot E(X),$$

$$\text{Var}(S) = a \cdot \nu \cdot c^2 \cdot (\text{Var}(X) + b(E(X))^2),$$

и таким образом

$$\nu \cdot \text{Var}(S) / (E(S))^2 = \nu \cdot \text{Var}(S) / (E(S))^2.$$

Теперь в двух группах рисков будет одинаковым отношение $\nu \cdot \text{Var}(Z) / (E(Z))^2$.

Чтобы понять, какой из двух идеальных случаев более вероятен в конкретном виде страхования, нужно нанести на график значения $\ln(\nu \cdot \text{Var}(Z_i))$ в зависимости от $\ln(E(Z_i))$ для всех групп $i = 1, \dots, I$. Если к получившемуся облаку точек больше подходит угловой коэффициент +1, то, скорее всего, имеет

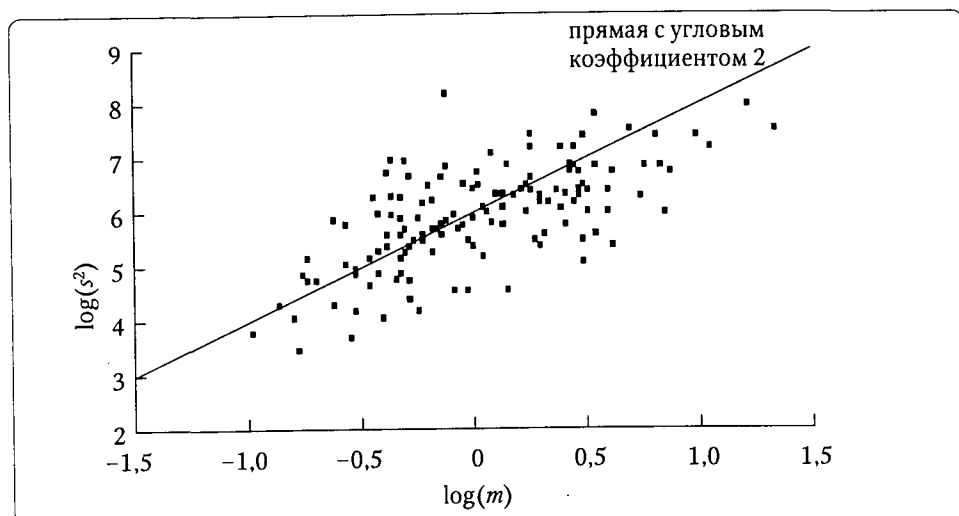


Рисунок 1.3.6.1. Зависимость математического ожидания и дисперсии в огневом страховании промышленных предприятий

место 1-й случай, а если +2, то 2-й случай. На рисунке 1.3.6.1 представлен такой график для групп рисков огневого страхования промышленных предприятий ($\nu_i \text{Var}(Z_i)$ и $E(Z_i)$ оценены соответственно значениями \hat{s}^2 и \hat{m} на основе наблюдений за 10 лет — см. раздел 1.3.2).

Эту регрессию хорошо описывает прямая с угловым коэффициентом +2, откуда заключаем, что для огневого страхования предположение одинаковой для всех групп частоты убытков (2-й случай) вполне реалистично.

В страховании автогражданской ответственности, наоборот, все риски по сути имеют одинаковый потенциал убытков, и априори справедливо предположить 1-й случай (одинаковое распределение размера убытка). Однако теперь мы не можем оценить дисперсию $\text{Var}(Z)$ на основе годовых наблюдений: в автостраховании $\text{Var}(Z)$ существенным образом зависит от колебания годового числа убытков, которое в объеме нескольких лет значительно выше, чем в отдельно взятом году. Последнее обусловлено изменением так называемого качества года. Подробнее мы поговорим об этом в разделе 1.4.2. Оценка на основе годовых наблюдений так или иначе (в зависимости от частоты убытков и объема группы) переоценивала бы величину $\text{Var}(Z)$ и тем самым искажала регрессию. Поэтому в целях статистической проверки 1-го случая дисперсию $\text{Var}(Z)$ следует оценивать на основании данных по отдельным рискам одного-единственного года. Хотя в огневом страховании число убытков тоже зависит от качества года, на наш анализ это практически не влияет, ведь дисперсия убытка от пожара определяется в основном колебаниями размера убытка.

Если моделировать нормированный совокупный убыток Z_i i -й группы рисков, $i = 1, \dots, I$, гамма- или обратным гауссовским распределением с параметром математического ожидания μ_i и параметром формы $\nu_i \alpha_i$ ($\text{Var}(Z_i) = \mu_i^2 / (\nu_i \alpha_i)$), то 2-й идеальный случай (постоянство величины $\nu_i \text{Var}(Z_i) / (E(Z_i))^2$ для всех групп) означает постоянство $\alpha_i = \alpha$ параметра α_i , в то время как 1-й идеальный случай (постоянство $\nu_i \text{Var}(Z_i) / E(Z_i)$) — постоянство отношения μ_i / α_i . С этого момента, моделируя нормированные совокупные убытки Z_i нескольких групп рисков $i = 1, \dots, I$ с помощью гамма-распределения с параметром математического ожидания μ_i и параметром формы $\nu_i \alpha$ (с одинаковым α для всех i), мы будем подразумевать 2-й идеальный случай — одинаковую для всех групп рисков частоту убытков.

При моделировании Z_i логнормальным распределением с параметрами θ_i и σ_i^2 / ν_i только во 2-м идеальном случае в приближении достигается желаемое сокращение числа параметров формы, а именно постоянство $\sigma_i^2 = \sigma^2$. В 1-м случае получается настолько сложная зависимость между θ_i и σ_i^2 , что оценивание параметров выливается в серьезную работу. Это заставляет нас отказаться от применения логнормального распределения в 1-м случае.

У гамма-распределения в 1-м идеальном случае — при постоянном отношении μ_i / α_i — оценки максимального правдоподобия ни одного из параметров не задаются в явном виде. Но существует и более важный аргумент против предположения постоянства μ_i / α_i в гамма-модели.

Рассмотрим нормированные на объемы ν_{ij} величины убытков Z_{ij} нескольких групп рисков $i = 1, \dots, I$ за несколько лет $j = 1, \dots, J$. Сначала в соответствии

со 2-м идеальным случаем предположим для Z_{ij} гамма-распределение с параметрами μ_i (одинаковое для всех лет в одной группе рисков математическое ожидание) и $v_{ij}\alpha$ (глобальное постоянство $v_{ij}Var(Z_{ij}) / (E(Z_{ij}))^2$). Тогда в качестве оценки максимального правдоподобия для μ_i получим

$$\hat{\mu}_i = \sum_{j \geq 1} v_{ij} Z_{ij} / \sum_{j \geq 1} v_{ij},$$

то есть естественную несмещенную оценку, обладающую минимальной дисперсией по сравнению со всеми остальными линейными несмещенными оценками параметра μ_i (по теореме из раздела 1.3.2 и в силу обратной пропорциональности $Var(Z_{ij})$ и v_{ij}). Предположим теперь в соответствии с 1-м идеальным случаем, что Z_{ij} имеют гамма-распределение с параметрами μ_i и $v_{ij}\mu_i\beta$ (глобальное постоянство $v_{ij}Var(Z_{ij}) / E(Z_{ij})$). Тогда, как уже говорилось, оценку максимального правдоподобия параметра μ_i уже нельзя задать в явном виде, и она не совпадает с вышеуказанной $\hat{\mu}_i$, а может существенно отклоняться от нее как в большую, так в меньшую сторону. Таким образом, в случае гамма-распределения требование глобального постоянства величины $v_{ij}Var(Z_{ij}) / E(Z_{ij})$ приводит к ухудшению качества оценки математического ожидания. Именно поэтому применение гамма-распределения в 1-м идеальном случае не рекомендуется.

Если в такой же ситуации (несколько групп рисков и несколько лет наблюдения) предположить обратное гауссовское распределение, то ни в 1-м (всюду равное μ_i / α_i) ни во 2-м (всюду равное α_i) случае мы не получим естественной оценки $\hat{\mu}_i$ математического ожидания. Такая оценка достигается только при одинаковом для всех групп параметре $\beta = \mu_i \alpha_i$. Но это условие равносильно постоянству величины $v_{ij}Var(Z_{ij}) / (E(Z_{ij}))^3$ и не выполняется ни в одном из интересующих нас идеальных случаев. Поэтому мы не будем применять обратное гауссовское распределение при моделировании зависимости между математическим ожиданием и дисперсией. Остаются только гамма- и логнормальное распределения, пригодные, как мы выяснили, только во 2-м случае. Не хватает модели, обеспечивающей естественную оценку $\hat{\mu}_i$ математического ожидания в 1-м идеальном случае, а также при наличии нескольких лет наблюдения. Такая модель будет построена в следующем разделе.

1.3.7. МОДЕЛИРОВАНИЕ СОВОКУПНОГО УБЫТКА ГРУППЫ РИСКОВ С ПОМОЩЬЮ МОДИФИЦИРОВАННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПУАССОНА

В предыдущем разделе мы констатировали отсутствие модели распределения, позволяющей получить естественную оценку $\sum v_j z_j / \sum v_j$ математического ожидания нормированной на объем v случайной величины убытка Z в 1-м идеальном случае — при одинаковом для всех групп рисков значении $v \cdot Var(Z) / E(Z)$. Вспомним, что постоянство величины $v \cdot Var(Z) / E(Z)$ равносильно постоянству отношения $Var(S) / E(S)$ для годового совокупного убытка $S = v \cdot Z$. Последнее условие, а точнее даже его усиление «дисперсия

равна математическому ожиданию», как известно, всегда справедливо для распределения Пуассона, у которого, кроме того, оценка максимального правдоподобия математического ожидания совпадает со средним арифметическим. Это дает нам основание строить искомую модель с помощью распределения Пуассона. Аппроксимируем совокупный убыток S произведением $w \cdot N$ распределенной по закону Пуассона случайной величины N и скаляра $w > 0$, понимаемого как *денежная единица* (мы можем исчислять не в €, а, например, в 1000 €). Представляя совокупный убыток в таком виде, мы допускаем некоторое округление наблюдаемых реализаций величины S до целых кратных w значений.

Предположим сначала точное равенство $S = w \cdot N$, когда S не принимает значений, не кратных w . Тогда в силу свойств

$$Var(S) = w^2 Var(N) = w^2 E(N) = w \cdot E(S)$$

постоянство отношения $Var(S) / E(S)$ для всех групп рисков означает всюду одинаковую денежную единицу w . Переход к нормированной на объем величине убытка $Z = S / v = N \cdot w / v$ можно интерпретировать как смену денежной единицы с w на w / v . В этой модели величина $v \cdot Z / w = S / w = N$ распределена по закону Пуассона с параметром $E(N) = v \cdot E(Z) / w$. При наличии нескольких групп рисков $i = 1, \dots, I$ и нескольких лет наблюдений $j = 1, \dots, J$ функция правдоподобия L наблюдений $z_{ij} = s_{ij} / v_{ij}$ с математическим ожиданием $\mu_i = E(Z_{ij})$ и всюду одинаковой денежной единицей w после перехода к величинам $N_{ij} = v_{ij} Z_{ij} / w$ с математическим ожиданием $E(N_{ij}) = v_{ij} \mu_i / w$ имеет вид

$$L = \prod_{i,j} \left(\exp(-v_{ij} \mu_i / w) \cdot (v_{ij} \mu_i / w)^{v_{ij} z_{ij} / w} / (v_{ij} z_{ij} / w)! \right).$$

Оценка максимального правдоподобия для μ_i находится из условия равенства нулю производной от логарифма функции правдоподобия

$$\ln(L) = \sum_{i,j} \left(-v_{ij} \mu_i / w + (v_{ij} z_{ij} / w) \ln(v_{ij} \mu_i / w) - \ln((v_{ij} z_{ij} / w)!) \right)$$

по μ_i :

$$0 = \sum_{j \geq 1} \left(-v_{ij} / w + v_{ij} z_{ij} / (w \cdot \mu_i) \right)$$

и составляет

$$\hat{\mu}_i = \sum_{j \geq 1} v_{ij} z_{ij} / \sum_{j \geq 1} v_{ij}.$$

Инвариантность распределения Пуассона относительно свертки позволяет ввести ту же модель и в плоскости отдельных рисков. Достаточно предположить распределение Пуассона (с параметром m / w) для величины R_i / w , где R_i — совокупный убыток i -го риска. Тогда сумма $N = \sum R_i / w$, составленная из v независимых рисков, будет иметь распределение Пуассона (с параметром $v \cdot m / w$), а совокупный убыток $S = \sum R_i$ действительно запишется в виде про-

изведения $S = w \cdot N$ распределенной по закону Пуассона случайной величины N и денежной единицы w . Переход к нормированной на объем величине $Z = S / v = Nw / v$ сохраняет тип распределения — изменяется только денежная единица. Делаем вывод: распределение Пуассона с участием денежной единицы (если не принимать в расчет его дискретность) — очень подходящая для наших целей модель, ведь оба важнейших параметра $E(R_i)$ и $P(R_i = 0)$ точно моделируются уже в плоскости отдельных рисков.

Теперь попытаемся освободиться от несколько нереалистичного предположения, что S принимает только целые кратные w значения. Если округлять значение $S = s$ вниз до ближайшего целого кратного $[s / w]w$, то распределение случайной величины S становится определено для всех $s \geq 0$, но $E(S)$ систематически недооценивается. К тому же такое округление, впрочем, как и более точное округление $[s / w + 1 / 2]w$, существенно усложняет расчет оценок максимального правдоподобия. Поэтому мы поступим иначе. Используя формулу $k! = \Gamma(k + 1)$, преобразуем обычное распределение Пуассона (с параметром θ)

$$P(N = k) = \theta^k \cdot e^{-\theta} / k!, \quad k = 0, 1, \dots,$$

в непрерывное распределение Пуассона F с параметром θ

$$dF(x) = \begin{cases} \theta^x \cdot e^{-\theta} / \Gamma(x+1), & x > 0, \\ 1 - \int_0^\infty (\theta^x \cdot e^{-\theta} / \Gamma(x+1)) dx, & x = 0. \end{cases}$$

Заданную этим распределением случайную величину обозначим через N . Фактически мы определили интерполированную форму обычного распределения Пуассона, поскольку $dF(k) = P(N = k)$ при $k = 1, 2, \dots$. В конце раздела доказывается, что значение интеграла не превышает 1.

Аппроксимация по методу трапеций в точках $x = 0, 1, \dots$ дает

$$\int_0^\infty \frac{\theta^x \cdot e^{-\theta}}{\Gamma(x+1)} dx \approx \sum_{k=0}^\infty \frac{P(N=k) + P(N=k+1)}{2} = 1 - e^{-\theta} / 2.$$

Отсюда и из упомянутого доказательства следует, что вероятностная масса в точке $x = 0$, как и у обычного распределения Пуассона, с ростом θ уменьшается. Правда, теперь математическое ожидание и дисперсия уже не задаются в явном виде. Однако мы вправе принять

$$E(N) \approx \theta \approx \text{Var}(N).$$

Как показывает численное интегрирование, приближение тем точнее, чем больше θ . (При $\theta = 1$: $E(N) = 1,033$, $\text{Var}(N) = 0,931$, а при $\theta = 5$: $E(N) = 5,005$, $\text{Var}(N) = 4,995$.) В случае положительных реализаций оценка максимального правдоподобия для θ вычисляется в явном виде и равна среднему арифметическому.

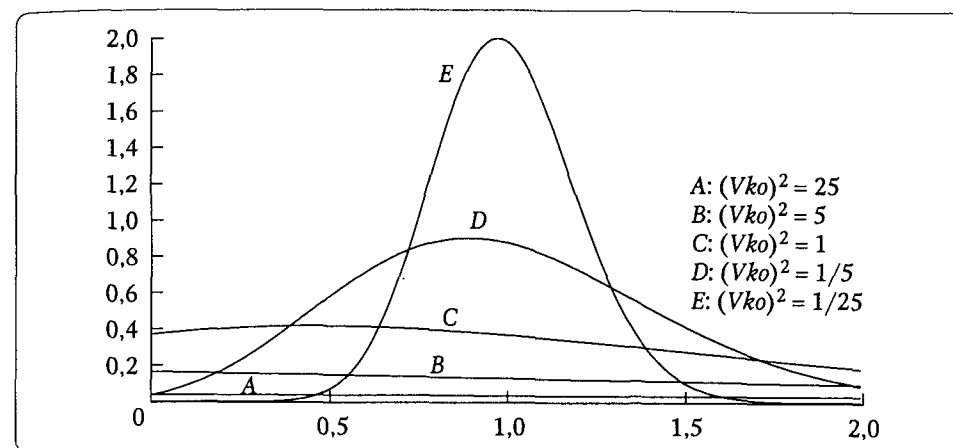


Рисунок 1.3.7.1. Модифицированные распределения Пуассона с математическим ожиданием 1 (без вероятности в 0)

Мы завершили подготовительную работу и теперь будем говорить, что случайная величина $R \geq 0$ имеет модифицированное распределение Пуассона G с параметром формы θ и денежной единицей (скалярным параметром) w , если R / w имеет непрерывное распределение Пуассона с параметром θ . Согласно правилу переноса для распределений, R имеет плотность

$$dG(r) = \frac{\theta^{r/w} \cdot e^{-\theta}}{w \cdot \Gamma(1 + r/w)}, \quad r > 0,$$

с дополнительным весом в нуле. В соответствии с конструкцией, справедливы приближенные равенства $E(R) \approx \theta w$ и $\text{Var}(R) \approx \theta w^2$. Рисунок 1.3.7.1 показывает непрерывную часть модифицированного распределения Пуассона при $\theta w = 1$ и $\theta = 0,04; 0,2; 1; 5; 25$, то есть примерно с теми же коэффициентами вариации, что и у предыдущих распределений.

В дальнейшем нам будет удобнее пользоваться несколько иной параметризацией. Вместо параметра формы θ введем (аппроксимативный) параметр среднего $\mu = \theta w$. Поскольку модифицированное распределение Пуассона в результате свертки не сохраняется в точности, эту модель распределения нельзя применить в плоскости отдельных рисков. Поэтому мы сразу аппроксимируем распределение совокупного убытка S группы объема v , имеющей математическое ожидание μv , модифицированным распределением Пуассона с параметром среднего μv и денежной единицей w (параметр формы равен $\mu v / w$). Тогда нормированный на объем убыток $Z = S / v$ тоже будет иметь модифицированное распределение Пуассона, но с параметром среднего μ и денежной единицей w / v (то есть с тем же параметром формы $\mu v / w$). Дисперсия составит приблизительно

$$\text{Var}(Z) \approx \mu w / v.$$

При условии положительных реализаций z_j , $1 \leq j \leq J$, оценка максимального правдоподобия для μ , как и требовалось, имеет вид

$$\hat{\mu} = \sum_{j=1}^J v_j z_j / \sum_{j=1}^J v_j$$

где v_j — объем, соответствующий z_j , $1 \leq j \leq J$. Для w получаем уравнение правдоподобия

$$\hat{w} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J v_j z_j \cdot \left(\Psi \left(\frac{v_j z_j}{\hat{w}} + 1 \right) - \ln \left(\frac{v_j \hat{\mu}}{\hat{w}} \right) \right),$$

решаемое методом последовательных приближений с использованием стартового значения

$$\hat{w} = \sum_{j=1}^J v_j (z_j - \hat{\mu})^2 / ((J-1)\hat{\mu}).$$

Способ расчета дигамма-функции указан в конце раздела 1.3.3.

Вид модифицированного распределения Пуассона, вероятно, внушает мысль, что мы имеем дело с распределенным по закону Пуассона числом убытков и всегда одинаковым размером убытка w . Тем не менее модифицированное распределение Пуассона может хорошо аппроксимировать случайную величину совокупного убытка и в случае непостоянного размера убытка или непуассоновского числа убытков. Снова забегая вперед, обратимся за примером к коллективной модели следующей главы и рассмотрим совокупный убыток S как сумму распределенного по закону Пуассона числа N одинаково распределенных по экспоненциальному закону размеров убытков. Согласно выведенным в начале раздела формулам, имеем $E(S) = E(N)E(X)$ и $Var(S) = E(N)E(X^2)$. Отсюда с учетом равенства $E(X^2) = 2(E(X))^2$, справедливого для экспоненциального распределения, в качестве денежной единицы модифицированного распределения Пуассона получим $w = Var(S) / E(S) = E(X^2) / E(X) = 2 \cdot E(X)$. Следовательно, параметр непрерывного распределения Пуассона, лежащего в основе модифицированного распределения Пуассона, составляет $E(S) / w = E(N) / 2$, а не $E(N)$. Тем самым модифицированное распределение Пуассона компенсирует разницу разбросов значений и асимметрий случайных величин S и N , обусловленную переменным размером убытка.

В заключение наведем опущенное при определении непрерывного распределения Пуассона доказательство неравенства

$$h(\theta) := \int_0^\infty (\theta^x \cdot e^{-\theta} / \Gamma(x+1)) dx \leq 1$$

для всех $\theta > 0$. Подынтегральное выражение как интерполирующая функция распределения Пуассона всюду определено, положительно и ограничено. Для

доказательства существования несобственного интеграла построим мажоранту. В силу равенства

$$\frac{d}{dx} \frac{\theta^x \cdot e^{-\theta}}{\Gamma(x+1)} = \frac{\theta^x \cdot e^{-\theta}}{\Gamma(x+1)} \cdot (\ln(\theta) - \Psi(x+1))$$

и монотонности дигамма-функции Ψ , подынтегральная функция имеет ровно один максимум на $[0; \infty)$ в точке $x = a$. Следовательно,

$$\begin{aligned} h(\theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{\theta^x \cdot e^{-\theta}}{\Gamma(x+1)} dx \leq \sum_{k=0}^{[a]-1} \frac{\theta^{k+1} \cdot e^{-\theta}}{(k+1)!} + \frac{\theta^a \cdot e^{-\theta}}{\Gamma(a+1)} + \sum_{k=[a]+1}^{\infty} \frac{\theta^k \cdot e^{-\theta}}{k!} = \\ &= 1 - e^{-\theta} + (\theta^a e^{-\theta}) / \Gamma(a+1). \end{aligned}$$

Согласно формуле Стирлинга, последнее слагаемое при $\theta \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Ввиду максимальной подынтегральной функции в точке a , имеем

$$\theta^a / \Gamma(a+1) > \theta^{a+1} / \Gamma(a+2) = \theta^{a+1} / ((a+1)\Gamma(a+1)),$$

откуда следует $a > \theta - 1$. Таким образом, существует $\limsup(h(\theta))$ при $\theta \rightarrow \infty$ и он не превосходит 1. Остается доказать монотонное возрастание функции h :

$$\begin{aligned} h'(\theta) &= \int_0^\infty (x \cdot \theta^{x-1} - \theta^x) \cdot \frac{e^{-\theta}}{\Gamma(x+1)} dx = \\ &= \int_0^\infty \frac{\theta^{x-1} \cdot e^{-\theta}}{\Gamma(x)} dx - \int_0^\infty \frac{\theta^x \cdot e^{-\theta}}{\Gamma(x+1)} dx = \int_0^\infty \frac{\theta^{x-1} \cdot e^{-\theta}}{\Gamma(x)} dx > 0. \end{aligned}$$

1.3.8. ВЫВОД И ТАБЛИЦА МОДЕЛЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Мы убедились в справедливости предположения обратно пропорциональной зависимости дисперсии от объема как в однородном случае убытка на один полисо-год (объем равен числу полисо-лет), так и в неоднородном случае ставки убытка (объем равен страховой сумме). Далее мы выяснили, что в качестве моделей распределения совокупного убытка группы рисков особенно хорошо подходят гамма- и обратное гауссовское распределения, получающиеся в результате агрегирования аппроксимаций, приемлемых для отдельных рисков. По причине внешнего сходства с названными распределениями во внимание также принимается логнормальная модель, хотя ее математическое ожидание зависит от объема. Наконец, введя денежную единицу и интерполировав обычное распределение Пуассона, мы получили еще одну приемлемую модель для совокупного убытка. На рисунках 1.3.8.1–1.3.8.3 одновременно представлены плотности (для модифицированного распределения Пуассона — только непрерывная часть) всех четырех рассмотренных распределений при одинаковых математических ожиданиях и одинаковых коэффициентах вариации.

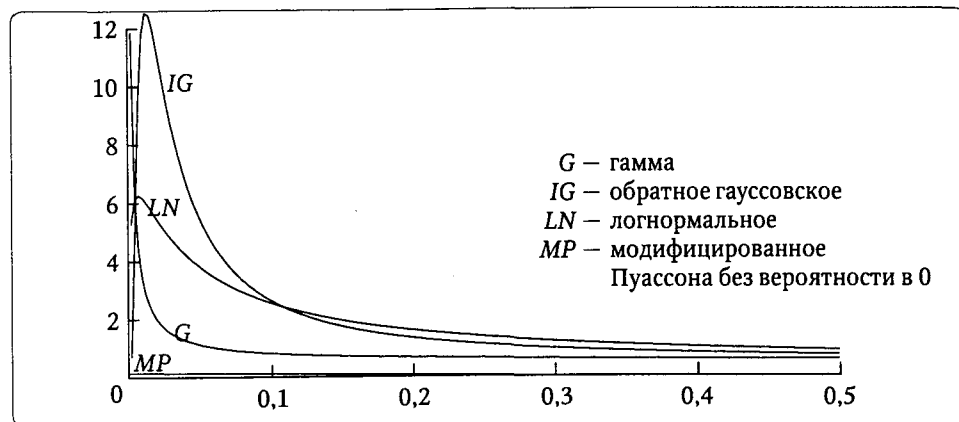


Рисунок 1.3.8.1. Плотности с одинаковым математическим ожиданием 1 и коэффициентом вариации 5

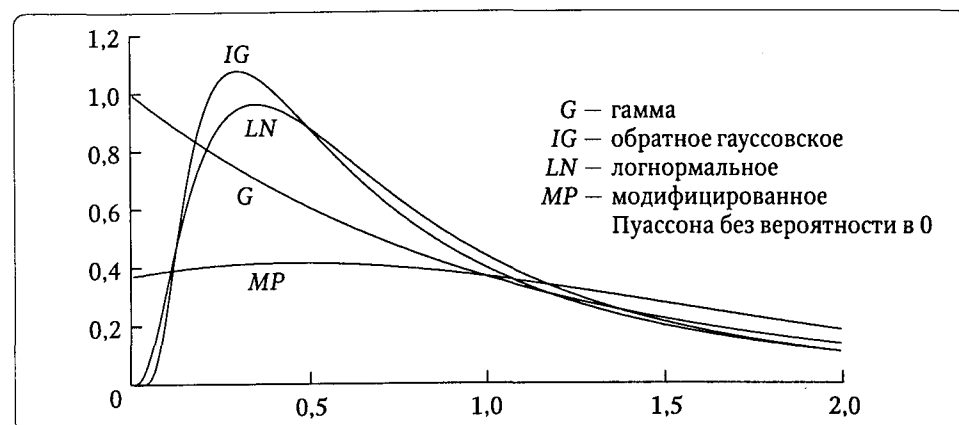


Рисунок 1.3.8.2. Плотности с одинаковым математическим ожиданием 1 и коэффициентом вариации 1

При наличии по каждой группе рисков только одного годового наблюдения требуется предположить зависимость между математическим ожиданием и дисперсией. Мы выявили два идеальных варианта зависимости: либо нормированный на объем убыток Z зависит в большей степени от частоты убытков (1-й случай), либо от размера убытка (2-й случай). Вопрос, какой из двух случаев имеет место в конкретной ситуации, решается с помощью графика логарифмированной регрессии $\ln \cdot \text{Var}(Z)$ на $E(Z)$. В 1-м случае рекомендуется использовать модифицированное распределение Пуассона, а во 2-м — гамма или логнормальное распределения. Обратное гауссовское распределение с технической точки зрения имеет преимущество перед тремя остальными моделями, но не позволяет получить естественной оценки математического ожидания ни в одном из двух идеальных случаев. Это заставляет нас отказаться

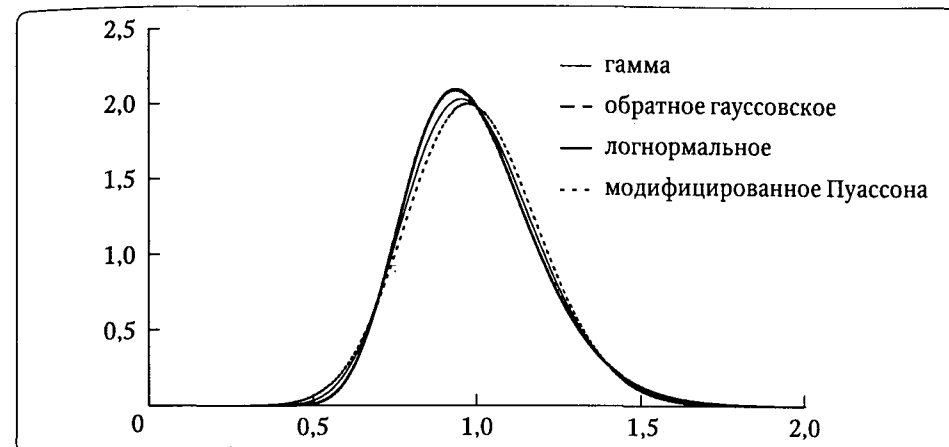


Рисунок 1.3.8.3. Плотности с одинаковым математическим ожиданием 1 и коэффициентом вариации 0,2

от применения обратного гауссовского распределения при моделировании зависимости между математическим ожиданием и дисперсией. В дальнейшем мы будем постоянно обращаться к рассмотренным распределениям, уже не обосновывая их выбор в каждом случае. Если в одной и той же ситуации применимы сразу несколько распределений, то критерием для выбора наиболее подходящей модели может служить значение функции правдоподобия.

В таблице 1.3.8.4 сведены разработанные в этой главе модели распределений (см. с. 56–59).

1.4. Коллективная модель для числа убытков, размера убытка и совокупного убытка портфеля рисков

1.4.1. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ И ОБЗОР

Рассмотренные в предыдущей главе «индивидуальные» модели предназначены в основном для моделирования математического ожидания и дисперсии совокупного годового убытка группы рисков с целью расчета тарифов. Предпосылка использования этих моделей — однородность групп: риски каждой

Таблица 1.3.8.4. Модели распределения совокупного убытка группы рисков в рамках индивидуальной модели

А) Гамма-распределение

Плотность:

Отдельный риск $R = r$: $g(r | \mu, \alpha) = (r\alpha / \mu)^\alpha \exp(-r\alpha / \mu) / (r \cdot \Gamma(\alpha))$, $r > 0$ Совокупный убыток $S = s$ при объеме v : $g(s | v\mu, v\alpha)$ Нормированный на объем v совокупный убыток $Z = S / v = z$: $g(z | \mu, v\alpha)$

	R	S	Z
Параметры	μ, α	$v\mu, v\alpha$	$\mu, v\alpha$
Математическое ожидание	μ	$v\mu$	μ
Дисперсия	μ^2 / α	$v\mu^2 / \alpha$	$\mu^2 / (v\alpha)$
Коэффициент вариации	$1/\sqrt{\alpha}$	$1/\sqrt{v\alpha}$	$1/\sqrt{v\alpha}$
Асимметрия	$2/\sqrt{\alpha}$	$2/\sqrt{v\alpha}$	$2/\sqrt{v\alpha}$

Оценки параметров при наличии независимых наблюдений $v_j, z_j, 1 \leq j \leq J$:

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \sum_{j=1}^J v_j z_j / \sum_{j=1}^J v_j \\ \hat{\alpha} &= \hat{\mu}^2 (J-1) / \sum_{j=1}^J v_j (z_j - \hat{\mu})^2 \end{aligned}$$

Оценки максимального правдоподобия

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \sum_{j=1}^J v_j z_j / \sum_{j=1}^J v_j \\ \hat{\alpha} &= J / \sum_{j=1}^J v_j (\Psi(\hat{\alpha} v_j + 1) - \ln(\hat{\alpha} v_j z_j / \hat{\mu})) \end{aligned}$$

уравнение решается методом последовательных приближений со стартовым значением $\hat{\alpha}$

Правдоподобие

$$\begin{aligned} \ln(L) &= \sum_{j=1}^J \ln(g(z_j | \hat{\mu}, v_j \hat{\alpha})) \\ &= \sum_{j=1}^J (\hat{\alpha} v_j (\ln(\hat{\alpha} v_j z_j / \hat{\mu}) - 1) - \ln(z_j \Gamma(\hat{\alpha} v_j))) \\ &= \sum_{j=1}^J (\hat{\alpha} v_j (\Psi(\hat{\alpha} v_j) - 1) - \ln(z_j \Gamma(\hat{\alpha} v_j))) \end{aligned}$$

Численные методы:

$$\Psi(x) \approx \ln(x) - x^{-1} / 2 - x^{-2} / 12 + (x^{-4} - 0,46x^{-6}) / 120, \quad x > 5,$$

$$\Psi(x) = \Psi(x+1) - 1/x,$$

$$\ln(\Gamma(x)) \approx \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2\pi}{x}\right) + x \cdot \ln(x) - x + \left(\left(\left(1 - \frac{2}{3x^2} \right) \frac{2}{7x^2} - 1 \right) \frac{1}{30x^2} + 1 \right) \frac{1}{12x} \quad \text{при } x > 3,$$

$$\ln(\Gamma(x)) = \ln(\Gamma(x+1)) - \ln(x).$$

Таблица 1.3.8.4. (продолжение)

Б) Обратное гауссовское распределение

Плотность:

$$\text{Отдельный риск } R = r: \quad g(r | \mu, \beta) = \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{2\pi r^3}} \exp\left(-\frac{\beta}{2} \left(\frac{r}{\mu^2} - \frac{2}{\mu} + \frac{1}{r} \right)\right), \quad r > 0$$

Совокупный убыток $S = s$ при объеме v : $g(s | v\mu, v^2\beta)$ Нормированный на объем v совокупный убыток $Z = S / v = z$: $g(z | \mu, v\beta)$

	R	S	Z
Параметры	μ, β	$v\mu, v^2\beta$	$\mu, v\beta$
Математическое ожидание	μ	$v\mu$	μ
Дисперсия	μ^3 / β	$v\mu^3 / \beta$	$\mu^3 / (v\beta)$
Коэффициент вариации	$\sqrt{\mu / \beta}$	$\sqrt{\mu} / \sqrt{v\beta}$	$\sqrt{\mu} / \sqrt{v\beta}$
Асимметрия	$3\sqrt{\mu / \beta}$	$3\sqrt{\mu} / \sqrt{v\beta}$	$3\sqrt{\mu} / \sqrt{v\beta}$

Оценки параметров при наличии независимых наблюдений $v_j, z_j, 1 \leq j \leq J$:

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \sum_{j=1}^J v_j z_j / \sum_{j=1}^J v_j \\ \hat{\beta} &= \hat{\mu}^3 (J-1) / \sum_{j=1}^J v_j (z_j - \hat{\mu})^2 \end{aligned}$$

Оценки максимального правдоподобия

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \sum_{j=1}^J v_j z_j / \sum_{j=1}^J v_j \\ \hat{\beta} &= J / \sum_{j=1}^J v_j (1/z_j - 1/\hat{\mu}) \end{aligned}$$

Правдоподобие

$$\begin{aligned} \ln(L) &= \sum_{j=1}^J \ln(g(z_j | \hat{\mu}, v_j \hat{\beta})) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \ln\left(\frac{v_j \hat{\beta}}{2\pi z_j^3}\right) - \frac{J}{2} \end{aligned}$$

Функция распределения к плотности $g(r | \mu, \beta)$:

$$G(r) = \Phi\left((r/\mu - 1)\sqrt{\beta/r}\right) + e^{2\beta/\mu} \cdot \Phi\left(-(r/\mu + 1)\sqrt{\beta/r}\right),$$

где Φ — функция стандартного нормального распределения

Таблица 1.3.8.4. (продолжение)

В) Логнормальное распределение

Плотность:

Нормированный на объем v совокупный убыток $Z = z > 0$:

$$g(z | \theta, \sigma^2 / v) = \exp(-v(\ln(z) - \theta)^2 / (2\sigma^2)) / \sqrt{2\pi z^2 \sigma^2 / v}$$

Совокупный убыток $S = vZ = s$ при объеме v : $g(s / v | \theta, \sigma^2 / v) / v = g(s | \theta + \ln(v), \sigma^2 / v)$

	S	Z
Параметры	$\theta + \ln(v), \sigma^2 / v$	$\theta, \sigma^2 / v$
Математическое ожидание	$v \cdot \exp(\theta + \sigma^2 / (2v))$	$\exp(\theta + \sigma^2 / (2v))$
Дисперсия	$v^2 \exp(2\theta + \sigma^2 / v) (\exp(\sigma^2 / v) - 1)$	$\exp(2\theta + \sigma^2 / v) (\exp(\sigma^2 / v) - 1)$
Коэффициент вариации	$\sqrt{\exp(\sigma^2 / v) - 1}$	$\sqrt{\exp(\sigma^2 / v) - 1}$
Асимметрия	$(\exp(\sigma^2 / v) + 2) \sqrt{\exp(\sigma^2 / v) - 1}$	$(\exp(\sigma^2 / v) + 2) \sqrt{\exp(\sigma^2 / v) - 1}$

Оценки параметров при наличии независимых наблюдений $v_j, z_j, 1 \leq j \leq J$:

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \sum_{j=1}^J v_j \cdot \ln(z_j) / \sum_{j=1}^J v_j \\ \hat{\sigma}^2 &= \sum_{j=1}^J v_j (\ln(z_j) - \hat{\theta})^2 / (J - 1) \end{aligned}$$

Оценки максимального правдоподобия

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \sum_{j=1}^J v_j \cdot \ln(z_j) / \sum_{j=1}^J v_j \\ \hat{\sigma}^2 &= \sum_{j=1}^J v_j (\ln(z_j) - \hat{\theta})^2 / J \end{aligned}$$

Правдоподобие

$$\begin{aligned} \ln(L) &= \sum_{j=1}^J \ln(g(z_j | \hat{\theta}, \hat{\sigma}^2 / v_j)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \ln \left(\frac{v_j}{2\pi \hat{\sigma}^2 z_j^2} \right) - \frac{J}{2} \end{aligned}$$

Функция распределения к плотности $g(z | \theta, \sigma^2 / v)$:

$$G(z) = \Phi \left(\frac{\ln(z) - \theta}{\sigma / \sqrt{v}} \right),$$

где Φ — функция стандартного нормального распределения

Таблица 1.3.8.4. (окончание)

Г) Модифицированное распределение Пуассона

Плотность:

Плотность распределения частоты (без вероятности в 0):

$$g(r | \mu, w) = (\mu / w)^{r/w} \exp(-\mu / w) / (w \cdot \Gamma(1 + r / w)), r > 0$$

Совокупный убыток $S = s$ при объеме v : $g(s | v\mu, w)$ Нормированный на объем v совокупный убыток $Z = S / v = z > 0$: $g(z | \mu, w / v)$

	S	Z
Параметры	$v\mu, w$	$\mu, w / v$
Математическое ожидание	$\approx v\mu$	$\approx \mu$
Дисперсия	$\approx v\mu w$	$\approx w\mu / v$
Коэффициент вариации	$\approx \sqrt{w} / \sqrt{v\mu}$	$\approx \sqrt{w} / \sqrt{v\mu}$

Оценки параметров при наличии независимых наблюдений $v_j, z_j, 1 \leq j \leq J$:

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \sum_{j=1}^J v_j z_j / \sum_{j=1}^J v_j \\ \hat{w} &= \sum_{j=1}^J v_j (z_j - \hat{\mu})^2 / ((J - 1)\hat{\mu}) \end{aligned}$$

Оценки максимального правдоподобия (когда все $z_j > 0$)

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \sum_{j=1}^J v_j z_j / \sum_{j=1}^J v_j \\ \hat{w} &= \sum_{j=1}^J v_j z_j (\Psi(1 + v_j z_j / \hat{w}) - \ln(v_j \hat{\mu} / \hat{w}) / J) \end{aligned}$$

уравнение решается методом последовательных приближений со стартовым значением \hat{w} Правдоподобие (когда все $z_j > 0$)

$$\begin{aligned} \ln(L) &= \sum_{j=1}^J \ln(g(z_j | \hat{\mu}, \hat{w} / v_j)) = \\ &= \sum_{j=1}^J \left(\frac{v_j z_j}{\hat{w}} \ln \left(\frac{v_j \hat{\mu}}{\hat{w}} \right) - \frac{v_j \hat{\mu}}{\hat{w}} - \ln \left(\frac{\hat{w}}{v_j} \Gamma \left(1 + \frac{v_j z_j}{\hat{w}} \right) \right) \right) = \\ &= \sum_{j=1}^J \left(\frac{v_j z_j}{\hat{w}} \left(1 + \hat{w} \left(1 + \frac{v_j z_j}{\hat{w}} \right) \right) - \frac{1}{\hat{w}} - \ln \left(\frac{\hat{w}}{v_j} \Gamma \left(1 + \frac{v_j z_j}{\hat{w}} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

Численные методы:

$$\Psi(x) \approx \ln(x) - x^{-1} / 2 - x^{-2} / 12 + (x^{-4} - 0.46x^{-6}) / 120, x > 5,$$

$$\Psi(x) = \Psi(x + 1) - 1 / x,$$

$$\ln(\Gamma(x)) \approx \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2\pi}{x} \right) + x \cdot \ln(x) - x + \left(\left(\left(1 - \frac{2}{3x^2} \right) \frac{2}{7x^2} - 1 \right) \frac{1}{30x^2} + 1 \right) \frac{1}{12x}, \text{ при } x > 3,$$

$$\ln(\Gamma(x)) = \ln(\Gamma(x + 1)) - \ln(x)$$

группы должны быть схожи во всем, за исключением страховых сумм. Что же касается совокупного портфеля полисов рискованного страхования, то он, как правило, очень неоднороден, даже если может быть поделен на однородные группы. Одна из важнейших задач страховой компании — моделирование распределения убытка совокупного портфеля. Из главы 1.2 мы узнали, что на основе модели совокупного убытка строится представление об уровне надежности компании и требуемом капитале. В части 4 будет показано влияние модели совокупного убытка на политику перестрахования. Нас интересует не только математическое ожидание, но и сам вид распределения совокупного убытка, в особенности его хвост, непосредственно определяющий уровень надежности компании. Таким образом, необходим метод, позволяющий максимально точно аппроксимировать совокупное *распределение убытка произвольного неоднородного портфеля*.

Возникает мысль разбить портфель на максимально однородные и независимые группы, построить для каждой из них распределение совокупного убытка в соответствии с индивидуальной моделью, а затем свернуть полученные распределения к распределению совокупного убытка портфеля. Поскольку свертка различных распределений не задается без помощи интеграла, этот путь не дает аналитического решения, хотя вполне осуществим при помощи численных методов. Однако из-за требования однородности некоторые группы могут оказаться настолько мелкими, что достоверно описать хвосты распределений моделями из главы 1.3 не удастся, как, впрочем, и проверить адекватность модели в области хвоста или подобрать подходящую модель. Эта проблема типична для рисков с высокими страховыми суммами, число которых сравнительно невелико, а влияние на распределение убытка совокупного портфеля существенно.

Другой, гораздо более успешный путь был указан в начале XX столетия шведом Филипом Лундбергом (Filip Lundberg) и продолжен его соотечественником Гаральдом Крамером (Harald Cramér). Речь идет о так называемой коллективной модели, ставшей отправной точкой новой дисциплины в рамках теории вероятностей — «коллективной теории риска». Ее главное достижение на сегодняшний день — опубликованная в 1980 году Гарри Пейнджером (Harry Panjer) рекурсивная формула, приведенная в конце этой главы. *Идея коллективной модели* — рассматривать портфель только как производителя убытков, не учитывая принадлежность убытков конкретным рискам. Справедливо задать вопрос, не отражается ли потеря информации на качестве результата? Дело в том, что исходные распределения коллективной модели, а конкретно, распределение числа убытков и распределение размера убытка, могут быть оценены значительно точнее, чем распределения убытков отдельных однородных групп рисков. Пусть в итоге требуется вычислять еще больше свертки, чем в индивидуальной модели, — сегодня эта проблема легко решается благодаря мощным компьютерам и эффективным методам (таким как рекурсивная формула Пейнджера или алгоритм быстрого расчета Фурье).

В разделе 1.4.2 проанализированы приемлемые модели распределения числа убытков, и в частности исследован феномен меняющегося качества года. В первой части раздела 1.4.3 выбраны наиболее подходящие модели распре-

деления размера убытка в отдельном страховом случае. Внимание сконцентрировано на моделях, содержащих минимальное число параметров, но вместе с тем адекватно описывающих совокупное распределение. Во второй части раздела 1.4.3 подробно обсуждены различные методы оценки параметров. Наконец, в разделе 1.4.4 представлены способы получения распределения совокупного убытка из распределений числа убытков и размера убытка, и в частности выведена формула Пейнджера. Некоторые дополнительные указания приведены в разделе 1.4.5 и главе 1.5.

1.4.2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЧИСЛА УБЫТКОВ

Пусть N — случайное число страховых событий, происходящих в определенном фиксированном временном промежутке (например, в предстоящем календарном году) и относящихся к портфелю рисков (например, совокупности рисков страхования автогражданской ответственности). Тогда при выполнении довольно общих предпосылок N имеет *распределение Пуассона*

$$P(N = n) = \theta^n e^{-\theta} / n!, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

с параметром $\theta = E(N) = \text{Var}(N)$. Перечислим эти предпосылки:

- 1) случайные величины числа убытков в двух непересекающихся подынтервалах рассматриваемого временного промежутка независимы,
- 2) одновременно не могут произойти два и более убытка (регулярность так называемой функции интенсивности),
- 3) убытки могут происходить в любые моменты времени (непрерывность функции интенсивности).

(Доказательство находится, например, в приложении А книги Дейкина, Пентикяйнена и Песонена (Daykin C. D., Pentikäinen T., Pesonen M. Practical Risk Theory for Actuaries. London: Chapman & Hall, 1994) или в главе 3.4 книги Пейнджера и Уиллмота (Panjer H. J., Willmot G. Insurance Risk Models. Schaumburg / Illinois: Society of Actuaries, 1992)). Есть еще одна предпосылка, связанная с распределением Пуассона, а именно стационарность процесса наступления убытков. Но для построения распределения Пуассона на *фиксированном временном промежутке* это требование не обязательно, потому что мы заранее отказываемся от нереалистичного предположения однородности процесса убытков *внутри* рассматриваемого временного промежутка и исходим из неоднородного процесса Пуассона. Этим допускается возможность различия частоты убытков днем и ночью или зимой и летом.

Предпосылки (1), (2) и (3) на практике могут считаться выполненными (исключение составляет страхование имущества от стихийных бедствий (урагана, града, наводнения, землетрясения и т. д.), где (2) нарушается, но вместе с тем распределение Пуассона очень хорошо подходит в качестве модели для числа событий). Действительно, при столкновении автомобилей страховой случай наступает только у виновного, а возможной кумуляции событий автогражданского страхования и страхования каско либо имущественного стра-

хования и страхования перерывов в производстве, либо страхования зданий и страхования их содержимого можно избежать, отдельно рассматривая кумулирующие подвиды страхования или объединив несколько полисов в один риск.

Предположение (1) кажется несправедливым по отношению к небольшому портфелю и, в частности, отдельному риску, ведь вероятность наступления следующего убытка вслед за произошедшим у большинства рисков очень мала или равна нулю (восстановление пострадавшего объекта обычно занимает время). Теоретически эту проблему мы могли бы решить корректировкой объема — не учитывать риск в суммарном объеме в течение срока, когда убыток произойти не может. Но у больших портфелей данный эффект довольно постоянен во времени, поэтому им можно пренебречь. Другое дело, когда сам срок страхования меньше года. Этот факт, конечно же, известен страховой компании и требует соответствующего сокращения объема. Например, риск с полугодовым сроком страхования при вычислении суммарного объема должен учитываться в половинном размере.

В целом предпосылки (1), (2) и (3) (неоднородного) распределения Пуассона, как правило, могут считаться выполненными и для портфеля, и для отдельного риска. Одно с другим гармонично сочетается, ведь сумма независимых распределенных по закону Пуассона случайных величин с параметрами $\theta_1, \dots, \theta_I$ снова имеет распределение Пуассона с параметром $\theta = \theta_1 + \dots + \theta_I$. Последнее позволяет в однородном случае $\theta_i = \theta_1$ задействовать объем I портфеля в параметре Пуассона: $\theta = I \cdot \theta_1$. Ожидаемое число убытков на единицу объема θ / I называется *частотой убытков*. Мы видим, что в однородном случае ожидаемое число убытков пропорционально объему портфеля. Это особенно важно помнить при моделировании числа убытков группы рисков, наблюдаемой в течение нескольких периодов, — частота убытков при неизменных внешних условиях, как правило, остается постоянной на протяжении нескольких периодов, в то время как объем группы от периода к периоду изменяется. Пропорциональную зависимость от объема можно предположить и для неоднородной группы рисков, наблюдаемой в течение нескольких периодов, если прибывающие в портфель и покидающие его риски имеют примерно ту же структуру размеров, что и остающиеся риски, то есть риски понимаются как выборка из одной и той же генеральной совокупности. В этих случаях разумно моделировать число убытков N_j портфеля объема v_j , наблюдаемого в течение нескольких периодов $j = 1, \dots, J$, с помощью распределения Пуассона с параметром $v_j \theta$, считая частоту убытков постоянной. Такая модель полностью согласуется с нашей общей моделью зависимости распределения от объема из раздела 1.3.2, где вместо числа убытков рассматривался совокупный убыток.

Но при наблюдении за реальными портфелями в течение нескольких лет становится очевидна непригодность описанной модели Пуассона с постоянным параметром θ . Рассмотрим для примера статистику убытков огневого страхования строений, приведенную в таблице 1.4.2.1.

Несмотря на отсутствие явного тренда у частоты n_j / v_j , не существует такого значения θ , при котором реализация n_j случайной величины N_j в подавляющем большинстве лет не отклонялась бы от математического ожидания

Таблица 1.4.2.1. Динамика годового числа убытков в огневом страховании

j	v_j	n_j	$n_j / v_j, \text{‰}$	$v_j \hat{\theta}$	$(n_j - v_j \hat{\theta}) / \sqrt{v_j \hat{\theta}}$
1	4 108 179	38 043	9,3	40 309	-11,3
2	4 403 354	42 179	9,6	43 206	-4,9
3	4 501 883	46 214	10,3	44 172	9,7
4	4 603 582	43 268	9,4	45 170	-9,0
5	4 707 824	43 037	9,1	46 193	-14,7
6	4 769 874	56 226	11,8	46 802	43,6
7	4 793 157	48 703	10,2	47 030	7,7
8	4 857 433	52 052	10,7	47 661	20,1
9	4 869 336	46 654	9,6	47 778	-5,1
10	5 016 704	47 757	9,5	49 224	-6,6
11	5 082 442	43 344	8,5	49 869	-29,2
12	5 341 577	47 848	9,0	52 412	-19,9
13	5 662 668	60 063	10,6	55 562	19,1
1–13	62 718 013	615 388	$\hat{\theta} = 9,8 \text{‰}$	615 388	

$v_j \theta$ более чем на 3 стандартных отклонения $\sqrt{v_j \theta}$ распределения Пуассона (в таблице использовано значение $\theta = \hat{\theta} = \sum n_j / \sum v_j$). Эта вполне типичная ситуация, однако, не опровергает предположения о распределении Пуассона, а только свидетельствует против постоянства во времени параметра θ . Даже если бы портфель постоянно содержал одни и те же риски, параметр θ все равно нельзя было бы считать одинаковым для всех лет. Уже только различие погодных условий играет существенную роль (например, сухое лето для огневого страхования сельскохозяйственных построек или зима с сильным гололедом для автомобильного страхования). Во многих видах страхования на частоту убытков влияет и экономическая конъюнктура. Помимо этого, у каждого вида страхования существуют собственные факторы влияния. Значит, в реальности следует рассчитывать на постоянное изменение вероятности убытка под воздействием общих для всего портфеля факторов. Встречаются колеблющиеся и трендовидные изменения. Правда, трендовидные изменения часто бывают обусловлены самим портфелем. Так, со временем может расти число страхователей, принимающих меры профилактики убытков.

Если не принимать во внимание оговоренные трендовидные изменения, то изменения портфеля, связанные с постоянным притоком и оттоком рисков, а также с изменением отдельных рисков обычно скомпенсированы и поэтому ничтожны по сравнению с изменениями от внешних воздействий. Можно считать, что все остальные не названные нами причины изменения числа убытков N_j тоже относятся к внешним факторам. Мы будем моделировать ежегодно меняющиеся внешние воздействия независимыми одинаково распределенными случайными величинами $Q_j > 0$ и называть Q_j — *качеством* j -го года, $j = 1, \dots, J$. Предположим, что $E(Q_j) = 1$, а число убытков N_j портфеля объема v_j при заданном Q_j имеет распределение Пуассона с параметром

$v_j \theta Q_j$. Математическое ожидание числа убытков в некотором j -м году с неизвестным качеством по-прежнему будет находиться по формуле

$$E(N_j) = E(E(N_j | Q_j)) = E(v_j \theta Q_j) = v_j \theta,$$

так как за неимением дополнительной информации мы вынуждены взять среднее всех возможных значений Q_j . Влияние Q_j проявляется только в формуле дисперсии

$$\begin{aligned} \text{Var}(N_j) &= E(\text{Var}(N_j | Q_j)) + \text{Var}(E(N_j | Q_j)) = \\ &= E(v_j \theta Q_j) + \text{Var}(v_j \theta Q_j) = v_j \theta + v_j^2 \theta^2 \text{Var}(Q_j). \end{aligned}$$

Как видим, дисперсия величины N_j превышает математическое ожидание. Обратим внимание: при рассмотрении одного конкретного года качество Q_j имеет фиксированное значение q_j (связем его с параметром θ соотношением $\theta_j = \theta q_j$), и число убытков распределено по закону Пуассона с параметром $v_j \theta_j = v_j \theta q_j$. Когда же рассматриваются несколько лет, к дисперсии распределения Пуассона добавляется еще меняющееся качество года.

Модель дисперсии $\text{Var}(N_j) = v_j \theta + v_j^2 \theta^2 \text{Var}(Q)$ проверяется с помощью графика зависимости отклонений $(n_j - v_j \hat{\theta})^2 / v_j$ от объема. Если модель верна, отклонения с ростом объема проявляют тенденцию к увеличению. При отсутствии тренда, скорее, справедлива модель вида

$$\text{Var}(N_j) = v_j \sigma^2.$$

Распределение величины N_j , получаемое при условии изменения качества года, называется *смешанным распределением Пуассона*. Часто делается конкретное предположение о виде смешивающего распределения, то есть распределения случайной величины Q_j . Им может быть, например, гамма- или обратное гауссовское распределение. Если предположить для величины Q гамма-распределение с параметром формы α и математическим ожиданием 1 ($\text{Var}(Q) = 1/\alpha$), то N будет иметь *отрицательное биномиальное распределение* с параметрами $p = \alpha / (v\theta + \alpha)$ и α (см. также табл. 1.4.2.2):

$$\begin{aligned} P(N=n) &= E(P(N=n|Q)) = E\left((v\theta Q)^n \cdot e^{-v\theta Q} / n!\right) = \\ &= \int_0^\infty \frac{(v\theta q)^n \cdot e^{-v\theta q} \cdot \alpha^\alpha \cdot q^{\alpha-1} \cdot e^{-\alpha q}}{n! \Gamma(\alpha)} dq = \frac{\alpha^\alpha (v\theta)^\alpha}{n! \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty q^{n+\alpha-1} e^{-(v\theta+\alpha)q} dq = \\ &= \frac{\alpha^\alpha (v\theta)^\alpha \Gamma(n+\alpha)}{n! \Gamma(\alpha) (v\theta+\alpha)^{n+\alpha}} = \binom{\alpha+n-1}{n} \left(\frac{\alpha}{v\theta+\alpha}\right)^\alpha \left(\frac{v\theta}{v\theta+\alpha}\right)^n. \end{aligned}$$

Оценки максимального правдоподобия параметров α и θ на основе наблюдений $N_j = n_j$ при известных объемах v_j , $1 \leq j \leq J$, не вычисляются в явном виде. Поэтому мы найдем сначала оценки *по методу моментов*, не требующие предположения о виде распределения качества Q и пригодные в качестве стартовых значений при решении уравнений правдоподобия. В силу равенства

$$E(N_j / v_j) = \theta$$

любое взвешенное среднее величин $N_1 / v_1, \dots, N_J / v_J$ является несмещенной оценкой для θ . Согласно теореме из раздела 1.3.2, минимальность дисперсии оценки достигается, когда вес при слагаемом N_j / v_j обратно пропорционален его «неточности» $\text{Var}(N_j / v_j) = \theta^2 \text{Var}(Q) + \theta / v_j$. Но поскольку в этом выражении нам известно только значение v_j , мы не можем воспользоваться опти-

Таблица 1.4.2.2. Модели распределения числа убытков

Распределение Пуассона (параметр θ)

Ряд распределения $P(N=n) = e^{-\theta} \theta^n / n!$, $n=0, 1, \dots$

Рекурсия $P(N=n) = P(N=n-1) \cdot \theta / n$

$$E(N) = \theta, \text{Var}(N) = \theta, E(N - E(N))^3 = \theta$$

Отрицательное биномиальное распределение I (параметры α, p)

N — число неудач до α -го успеха

Ряд распределения $P(N=n) = \binom{\alpha+n-1}{n} p^\alpha (1-p)^n$, $n=0, 1, \dots$

Рекурсия $P(N=n) = P(N=n-1)(1-p)(n+\alpha-1)/n$

$$E(N) = \alpha(1-p)/p, \text{Var}(N) = E(N)/p, E(N - E(N))^3 = \text{Var}(N)(2-p)/p$$

Отрицательное биномиальное распределение II (параметры α, θ)

$N \sim \text{Poisson}(v\theta Q)$, $Q \sim \text{Gamma}(1, \alpha)$, известен объем v

Ряд распределения $P(N=n) = \binom{\alpha+n-1}{n} \left(\frac{\alpha}{v\theta+\alpha}\right)^\alpha \left(\frac{v\theta}{v\theta+\alpha}\right)^n$, $n=0, 1, \dots$

$$E(N) = v\theta, \text{Var}(N) = E(N)(1+v\theta/\alpha), E(N - E(N))^3 = \text{Var}(N)(1+2v\theta/\alpha)$$

Отрицательное биномиальное распределение III (параметры α, b)

$N \sim \text{Poisson}(\Theta)$, $\Theta \sim \text{Gamma}(\alpha/\beta, \alpha)$ (см. раздел 2.5.2)

Ряд распределения $P(N=n) = \binom{\alpha+n-1}{n} \beta^\alpha / (\beta+1)^{\alpha+n}$, $n=0, 1, \dots$

$$E(N) = \alpha/\beta, \text{Var}(N) = E(N)(1+\beta^{-1}), E(N - E(N))^3 = \text{Var}(N)(\beta+2)/\beta$$

Выражение параметров друг через друга в случае отрицательного биномиального распределения:

Искомый	Заданный		
	p	$v\theta$	β
p	—	$\alpha / (\alpha + v\theta)$	$\beta / (\beta + 1)$
$v\theta$	$\alpha(1-p)/p$	—	α/β
β	$p/(1-p)$	$\alpha/(v\theta)$	—

мальными весами и должны решить, какое из двух слагаемых оказывает доминирующее влияние на $Var(N_j/v_j)$: постоянное слагаемое $\theta^2 Var(Q)$ (что означает постоянный вес) или θ/v_j (вес пропорционален v_j). Из выражения

$$\frac{Var(N_j/v_j)}{(E(N_j/v_j))^2} = Var(Q) + \frac{1}{E(N_j)}$$

следует, что дисперсия величины Q постоянна, если квадрат коэффициента вариации частоты убытков N_j/v_j во много раз превышает обращенное среднее число убытков $E(N_j)$ (скажем, частота убытков колеблется в пределах $\pm 10\%$, а число убытков превышает 500). Грубо говоря, при высоком числе убытков предпочтение нужно отдать равновзвешенной оценке

$$\hat{\theta} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \frac{N_j}{v_j},$$

а при низком (например, при рассмотрении убытков, превышающих некоторое относительно большое значение, или катастрофических убытков) — взвешенной по объемам оценке

$$\underline{\hat{\theta}} = \sum_{j=1}^J v_j \frac{N_j}{v_j} / \sum_{j=1}^J v_j = \frac{N_1 + \dots + N_J}{v_1 + \dots + v_J}.$$

Для получения оценки параметра $\sigma^2 = Var(Q)$ воспользуемся выборочной дисперсией

$$D^2 = \frac{1}{J-1} \sum_{j=1}^J \left(\frac{N_j}{v_j} - \hat{\theta} \right)^2 = \frac{1}{J-1} \sum_{j=1}^J \left(N_j/v_j \right)^2 - \frac{J}{J-1} \cdot \hat{\theta}^2$$

или, соответственно,

$$\underline{D}^2 = \frac{1}{J-1} \sum_{j=1}^J v_j \left(\frac{N_j}{v_j} - \underline{\hat{\theta}} \right)^2 = \frac{1}{J-1} \sum_{j=1}^J N_j^2/v_j - \frac{v_+}{J-1} \cdot \underline{\hat{\theta}}^2,$$

где $v_+ = v_1 + \dots + v_J$. Математическое ожидание выборочной дисперсии после некоторых преобразований имеет вид

$$E(D^2) = \theta/v + \theta^2 \sigma^2, \text{ где } \frac{1}{v} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \frac{1}{v_j}$$

или, соответственно,

$$E(\underline{D}^2) = \theta + \theta^2 \sigma^2 v^*, \text{ где } v^* = \frac{1}{J-1} \sum_{j=1}^J v_j \left(1 - \frac{v_j}{v_+} \right).$$

Отсюда для $\sigma^2 = Var(Q)$ получаются следующие оценки по методу моментов:

$$\hat{\sigma}^2 = (D^2 - \hat{\theta}/v) / \hat{\theta}^2$$

или

$$\underline{\hat{\sigma}}^2 = (\underline{D}^2 - \underline{\hat{\theta}}) / (\underline{\hat{\theta}}^2 v^*)$$

(если $D^2 < \hat{\theta}/v$ или $\underline{D}^2 < \underline{\hat{\theta}}$, то вместо смешанного распределения Пуассона для N_j можно принять обычное распределение Пуассона).

В случае существенного различия оценок $(\hat{\theta}, \hat{\sigma}^2)$ и $(\underline{\hat{\theta}}, \underline{\hat{\sigma}}^2)$ есть смысл вычислить методом последовательных приближений более точные оценки. Для этого стартуем, например, от значений $\underline{\hat{\theta}}, \underline{\hat{\sigma}}^2$, оценим с их помощью веса $(Var(N_j/v_j))^{-1}$ значениями

$$w_j = \left(\underline{\hat{\theta}}^2 \cdot \underline{\hat{\sigma}}^2 + \underline{\hat{\theta}}/v_j \right)^{-1}$$

и получим улучшенные оценки (с обозначением $w_+ = w_1 + \dots + w_J$)

$$\underline{\hat{\theta}} = \frac{1}{w_+} \sum_{j=1}^J w_j \cdot \frac{N_j}{v_j},$$

$$\underline{\hat{\sigma}}^2 = (\underline{D}^2 - \underline{\hat{\theta}}/v) / (\underline{\hat{\theta}}^2 w^*),$$

где

$$\underline{D}^2 = \frac{1}{J-1} \sum_{j=1}^J w_j \left(\frac{N_j}{v_j} - \underline{\hat{\theta}} \right)^2 = \frac{1}{J-1} \sum_{j=1}^J \frac{w_j N_j^2}{v_j^2} - \frac{w_+}{J-1} \cdot \underline{\hat{\theta}}^2,$$

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{J-1} \sum_{j=1}^J \frac{w_j}{v_j} \left(1 - \frac{w_j}{w_+} \right),$$

$$w^* = \frac{1}{J-1} \sum_{j=1}^J w_j \left(1 - \frac{w_j}{w_+} \right) \text{ (по аналогии с } v^* \text{)}.$$

На основе этих оценок снова строим улучшенные веса и т. д. до сходимости. Для данных огневого страхования из таблицы 1.4.2.1 оценки составляют $\hat{\theta} = 9,808\%$ и $\underline{\hat{\theta}} = 9,812\%$, $\hat{\sigma} = 0,089$ и $\underline{\hat{\sigma}} = 0,090$, то есть практически не различаются. Полученное значение оценки для σ свидетельствует о концентрации основной массы значений случайной величины Q в области $1 \pm 2\hat{\sigma}$ или интервале $(0,82; 1,18)$.

Предположив для N_j отрицательное биномиальное распределение с параметрами $p_j = \alpha / (v_j \theta + \alpha)$ и α , мы можем вычислить оценки максимального

правдоподобия параметров θ и $a = 1 / \text{Var}(Q)$. Для θ получим неявное уравнение

$$\theta = \frac{\sum_{j=1}^J \frac{n_j}{v_j \theta + \alpha}}{\sum_{j=1}^J \frac{v_j}{v_j \theta + \alpha}}.$$

При $v_j \theta \gg \alpha$ эта оценка ближе к $\hat{\theta}$, а при $v_j \theta \ll \alpha$ ближе к $\hat{\hat{\theta}}$. Чем решать это и еще более сложное уравнение правдоподобия для α , проще напрямую максимизировать правдоподобие в зависимости от α , используя уравнения для θ , например, с помощью электронной таблицы. Для тех же данных огневого страхования находим $\hat{\theta} = 9,808\%$ и $\hat{\alpha} = 142$. Это значение параметра формы α придает смешивающему распределению почти симметричную относительно среднего значения 1 форму со стандартным отклонением $1/\sqrt{142} = 0,084$.

1.4.3. МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗМЕРА УБЫТКА В ОТДЕЛЬНОМ СТРАХОВОМ СЛУЧАЕ И ТАБЛИЦА МОДЕЛЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

А. Важные модели распределения

Коллективная модель предполагает, что в течение времени, когда внешние факторы (в частности, инфляция) изменяются незначительно, случайные величины размера убытка в отдельном страховом случае у рассматриваемого портфеля независимы и одинаково распределены. Если предположение независимости после некоторых преобразований, о которых говорилось в разделе 1.4.2 (в частности, объединение кумулирующих полисов), признается выполненным, то предположение одинаковой распределенности кажется нереалистичным уже хотя бы в свете различия страховых сумм. Но поскольку в коллективной модели убытки не сопоставляются отдельным рискам, а рассматриваются в совокупности на определенном временном промежутке, можно считать, что они представляют собой выборку из одного-единственного распределения, а именно смеси из различных распределений отдельных убытков.

Конечно, каждому виду страхования и каждому портфелю соответствует свое (смешанное) распределение убытков, зависящее, в частности, от размеров страховых сумм по отдельным рискам, а также от страхуемых событий. Так, средний убыток от пожара на промышленном предприятии значительно выше, чем от пожара в жилом здании; оба отличаются от средних убытков в страховании автогражданской ответственности и страховании каско, в свою очередь различающихся между собой. Но, как показывает практика, структуры убытков во всех видах страхования очень схожи. Обычно наблюдается намного больше мелких убытков, чем больших. Строго говоря, «концентрация убытков» с увеличением размера убытка все сильнее уменьшается. (Зачастую совсем мелкие убытки тоже малочисленны, но с экономической точки зрения они не имеют большого значения.) Правда, количественное соотношение крупных и мелких убытков, так же как и (в любом случае неточная)

Таблица 1.4.3.1. Распределение размера убытка в огневом страховании

Нижняя граница интервала c_i	Число убытков A_i	Средний размер убытка M_i	Концентрация убытков $A_i / (c_{i+1} - c_i)$	Уклон
0	305	0,23	610	
0,5	259	0,74	518	0,14
1	374	1,47	374	0,47
2	264	2,47	264	0,67
3	199	3,49	199	0,82
4	163	4,51	163	0,78
5	125	5,54	125	1,3
6	178	7,01	89	1,4
8	139	9,04	69,5	0,97
10	98	11,0	49	1,8
12	112	13,5	37,3	1,3
15	111	17,6	22,2	1,9
20	141	25,0	14,1	1,3
30	147	39,0	7,35	1,5
50	152	71,1	3,04	1,5
100	93	136	0,93	1,8
200	64	310	0,213	1,8
500	20	705	0,04	2,0
1000	13	2346	0,00325	2,1
5000	4	8317		
2961		47,6		

граница между крупными и мелкими убытками у разных видов страхования различны.

Таблица 1.4.3.1 содержит пример эмпирического распределения размера убытка в огневом страховании сталелитейных заводов (размеры убытков исчисляются в тысячах).

Представление о виде плотности распределения дает гистограмма. При построении гистограммы необходимо учесть различие длин интервалов размера убытка: высота столбика гистограммы должна быть пропорциональна концентрации убытков $A_i / (c_{i+1} - c_i)$, где A_i обозначает число убытков, размеры которых содержатся в интервале $[c_i; c_{i+1})$. Обычно разброс размеров убытков, как и разброс концентраций убытков, достигает нескольких степеней десяти, поэтому график удобнее строить по логарифмированным значениям. На рисунке 1.4.3.2 представлена зависимость логарифма концентрации убытков от логарифма среднего размера убытка M_i в интервале $[c_i; c_{i+1})$.

Полученный график отражает типичную структуру убытков страхового портфеля, если фактические размеры убытков не усечены перестрахованием (см. часть 4). Для сравнения на рисунке 1.4.3.3 представлен построенный тем же способом график распределения размера ущерба жизни и здоровью в страховании гражданской ответственности.

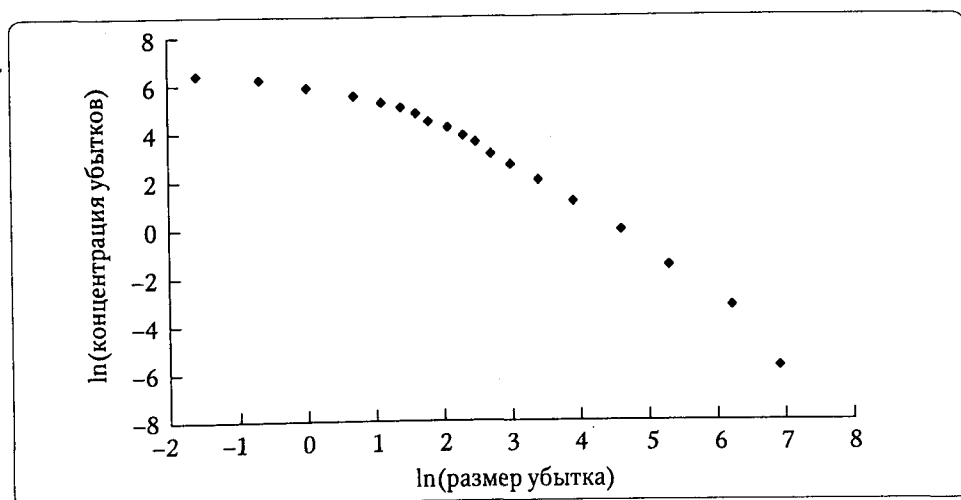


Рисунок 1.4.3.2. Концентрация убытков к таблице 1.4.3.1 (огневое страхование)

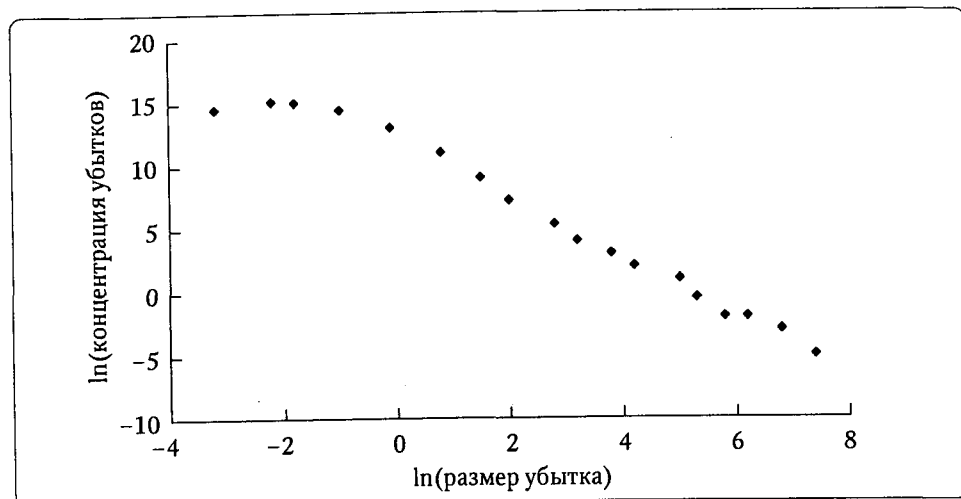


Рисунок 1.4.3.3. Концентрация убытков (страхование гражданской ответственности)

Прежде чем приступить к поиску подходящих функций распределения, обратим внимание на нецелесообразность использования эмпирического распределения в решении многих задач. Дело в том, что эмпирическое распределение неточно описывает правый хвост — область больших убытков реального распределения, где объем выборки слишком мал. В частности, оно не допускает убытков свыше максимального наблюдаемого убытка. Кроме того, при группировке данных, как это сделано в таблице 1.4.3.1, теряется информация о виде распределения внутри групп. Во многих случаях приходится прибегать к интерполяции, поэтому выгоднее сразу использовать непрерыв-

Таблица 1.4.3.4 (дополнение к таблице 1.4.3.1)

Убытки свыше	Доля в совокупном количестве, %	Доля в совокупном размере, %
6 500	0,1	19
750	1,1	50
48 (среднее значение)	12,4	87

ную модель распределения. Наконец, благодаря наличию параметров непрерывные распределения легче сравнивать и характеризовать.

Нормальное распределение стоит заранее отклонить. Оно не исключает отрицательных убытков и симметрично по форме, в то время как типичное распределение размера убытка имеет правостороннюю асимметрию из-за существенного преобладания мелких убытков. В то же время мы пока не обращаем внимания на то, что нормальное и другие рассматриваемые ниже распределения теоретически допускают сколь угодно большие убытки, тогда как в страховой практике размеры убытков зачастую ограничены сверху, например, максимальной для данного портфеля страховой суммой.

Для многих практических задач наиболее важна адекватность модели распределения размера убытка в области больших убытков. Данные таблицы 1.4.3.4 подтверждают, что именно большие убытки имеют решающий экономический вес.

Несмотря на существенное количественное преобладание мелких убытков (более 85% убытков находятся ниже среднего уровня), их суммарный вклад в совокупный убыток составляет менее 15%. Поэтому в наших интересах — как можно точнее описать искомым распределением размера убытка большие убытки. Правда, важнейшая с экономической точки зрения часть распределения практически всегда представлена слишком малым количеством наблюдений.

Графики на рисунках 1.4.3.2 и 1.4.3.3 в области больших убытков — справа от среднего значения — очень близки к прямой с угловым коэффициентом между -1 и -3 . Это означает, что в довольно широком диапазоне больших размеров убытка x выполняется неравенство

$$-3 < \frac{d(\ln(f(x)))}{d(\ln(x))} < -1,$$

где $f(x)$ — плотность распределения размера убытка. Такая ситуация характерна для большинства видов страхования: эмпирические распределения размера убытка оканчиваются, как правило, нарастающим уклоном между 1 и 3. В таблице 1.4.3.1 уклон измеряется отрицательным дифференциальным отношением

$$\text{Уклон} = -\frac{\ln(A_i / (c_{i+1} - c_i)) - \ln(A_{i-1} / (c_i - c_{i-1}))}{\ln(M_i) - \ln(M_{i-1})}.$$

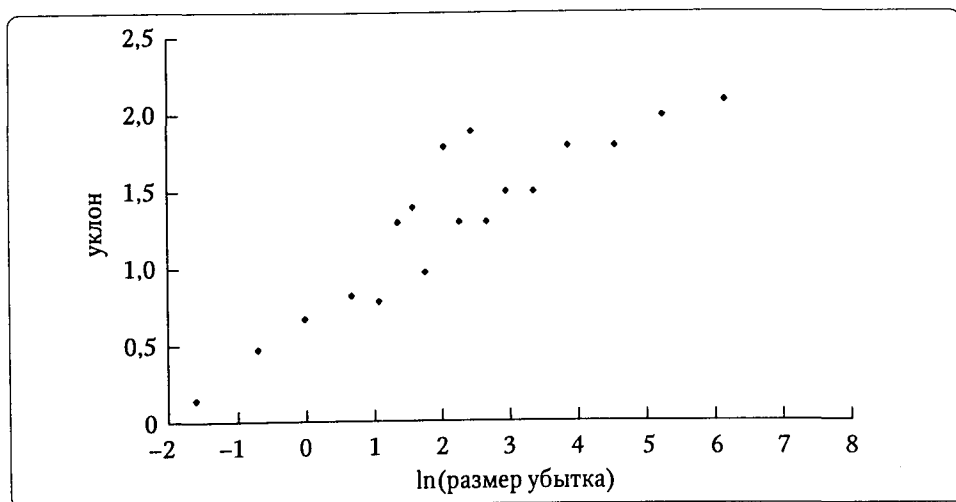


Рисунок 1.4.3.5. Уклон к графику 1.4.3.2

Зависимость уклона от $\ln(c_i)$ иллюстрирует рисунок 1.4.3.5. Как видим, значения уклона приближенно линейно возрастают по $\ln(c_i)$.

В поисках подходящей модели распределения целесообразно сразу обратиться к семействам распределений, имеющим *скалярный параметр* и содержащим вместе с распределением $F(x)$ все распределения вида $F(x/b)$, $b > 0$. Это удобно тем, что при изменении денежной единицы (например, с 1 € на 1000 €) меняется только скалярный параметр, а остальные параметры и вид плотности распределения $f(x) = F'(x)$ сохраняются.

Вернемся к нормальному распределению с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

(скалярный параметр σ). Если отсечь область определения левее нуля, то распределение станет правоасимметричным и уже не будет допускать отрицательных размеров убытка. Возникает вопрос, может ли нормальное распределение в таком виде рассматриваться как модель для размера убытка? Для ответа сравним правую половину нормального распределения с графиком 1.4.3.2. Логарифм функции правдоподобия нормального распределения

$$\begin{aligned} \ln(f(x)) &= \text{const} - (x^2 - 2\mu x) / (2\sigma^2) = \\ &= \text{const} - (e^{2 \cdot \ln(x)} - 2\mu e^{\ln(x)}) / (2\sigma^2) \end{aligned}$$

имеет уклон (соотнесенный к $\ln(x)$)

$$g(x) = -\frac{d(\ln(f(x)))}{d(\ln(x))} = x(x - \mu) / \sigma^2,$$

который в интересующей нас области $x_2 > x_1 > \mu$ удовлетворяет условию

$$\frac{g(x_2)}{x_2} - \frac{g(x_1)}{x_1} = \frac{x_2 - x_1}{\sigma^2} > 0.$$

В нашем же примере и вообще всегда уклон $g(x)$ возрастает намного медленнее, чем x (см. табл. 1.4.3.1), то есть при $x_2 > x_1$ справедливо

$$\frac{g(x_2)}{g(x_1)} < \frac{x_2}{x_1} \quad \text{или} \quad \frac{g(x_2)}{x_2} - \frac{g(x_1)}{x_1} < 0.$$

Делаем вывод: даже отсеченное слева, нормальное распределение не подходит в качестве модели распределения размера убытка.

Далее проверим распределения, использованные нами в главе 1.3 для моделирования совокупных убытков отдельных рисков и групп рисков.

Гамма-распределение

$$f(x) = (x/b)^{\alpha-1} e^{-x/b} / (b \cdot \Gamma(\alpha)),$$

со скалярным параметром b (или μ/α в обозначениях из раздела 1.3.3) и параметром формы α имеет логарифмированное правдоподобие

$$\ln(f(x)) = (\alpha - 1)\ln(x) - x/b + \text{const}$$

и соотнесенный к $\ln(x)$ уклон

$$g(x) = -\frac{d(\ln(f(x)))}{d(\ln(x))} = 1 - \alpha + x/b.$$

Эта функция возрастает линейно по x и экспоненциально по $\ln(x)$, в то время как уклон на рисунке 1.4.3.5 возрастает, скорее, линейно по $\ln(x)$. Следовательно, гамма-распределение подойдет для моделирования размера убытка разве что в области малых убытков. Формально это доказывается следующим образом.

Установленное выше требование $g(x_2)/x_2 < g(x_1)/x_1$ при $x_1 < x_2$ влечет неравенство $1 - \alpha > 0$ или $\alpha < 1$. Далее можно записать

$$\frac{g(x_2) - 1 + \alpha}{g(x_1) - 1 + \alpha} = \frac{x_2}{x_1}.$$

Левая часть при $g(x_1) > 1$ монотонно убывает по $\alpha > 0$, поэтому

$$\frac{g(x_2) - 1}{g(x_1) - 1} > \frac{x_2}{x_1}.$$

В силу требования $g(x_2)/g(x_1) \ll x_2/x_1$, последнее неравенство выполнимо, только когда $g(x_1)$ лишь немного превышает 1 (например, $1 < g(x_1) < 1.1$). А поскольку для математического ожидания $\alpha \cdot b$ гамма-распределения справедливо равенство $g(\alpha b) = 1$, в области больших убытков, где уклон превышает 1.1, гамма-распределение не приемлемо в качестве модели распределения размера отдельного убытка.

Совершенно аналогично ведет себя *обратное гауссовское распределение*

$$f(x) = \sqrt{\mu\alpha/(2\pi x^3)} \exp\left(-\frac{\alpha}{2} \cdot \left(\frac{x}{\mu} - 2 + \frac{\mu}{x}\right)\right)$$

со скалярным параметром μ (совпадающим с математическим ожиданием) и параметром формы α . Его логарифмированное правдоподобие

$$\ln(f(x)) = \text{const} - 1,5 \cdot \ln(x) - (x/\mu - 2 + \mu/x)\alpha/2$$

имеет уклон

$$g(x) = -\frac{d(\ln(f(x)))}{d(\ln(x))} = 1,5 + (x/\mu - \mu/x)\alpha/2,$$

тоже почти линейно возрастающий по x (влияние элемента μ/x быстро убывает). В силу равенства

$$2g(x) - 3 + \alpha\mu/x = \alpha x/\mu,$$

при $g(x_1) > 1,5$ и $x_2 > x_1$ справедливо

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{2g(x_2) - 3 + \alpha\mu/x_2}{2g(x_1) - 3 + \alpha\mu/x_1} < \frac{2g(x_2) - 3 + \alpha\mu/x_1}{2g(x_1) - 3 + \alpha\mu/x_1} < \frac{g(x_2) - 1,5}{g(x_1) - 1,5}.$$

Последнее неравенство выполняется, когда $g(x_1)$ лишь немного превышает значение $1,5 = g(\mu)$. Уклон слишком сильно нарастает, начиная примерно со значения 1,6. Следовательно, обратное гауссовское распределение тоже не пригодно для моделирования распределения размера отдельного убытка, особенно в области больших убытков.

Предвидим *вопрос* читателя: справедливо ли было применять гамма- и обратное гауссовское распределения в главе 1.3 в качестве основных моделей для совокупного убытка отдельного риска? Разумеется, модели всегда остаются только идеализацией реальности. Качество модели определяется главным образом степенью адекватности наиболее существенным аспектам реальности. При моделировании размера отдельного убытка основное внимание, как правило, уделяется распределению больших убытков. При моделировании совокупного убытка отдельного риска важно получить как можно более точную оценку математического ожидания и сосредоточить основную массу распределения (не менее 90%) вблизи нулевого убытка. (Для отдельных убытков вероятность нулевого размера равна нулю.) Таким образом, мы не противоречим себе, считая гамма- и обратное гауссовское распределения подходящими в качестве моделей для совокупного убытка отдельного риска и отвергая их как модели для размера отдельного убытка.

Далее проверим, насколько адекватно описывает размеры отдельных убытков *логнормальное распределение*

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\ln(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

со скалярным параметром e^μ и параметром формы σ . Логарифмированное правдоподобие

$$\ln(f(x)) = \text{const} - \ln(x) - (\ln(x) - \mu)^2 / (2\sigma^2)$$

как функция от $\ln(x)$ в этом случае представляет собой параболу с ветвями вниз. Эмпирическое логарифмированное правдоподобие на рисунке 1.4.3.2 тоже выглядит как правая ветвь параболы. Уклон

$$g(x) = -\frac{d(\ln(f(x)))}{d(\ln(x))} = 1 + (\ln(x) - \mu)/\sigma^2$$

возрастает линейно по $\ln(x)$ и поэтому хорошо согласуется с рисунком 1.4.3.5. Рисунок 1.4.3.6 изображает зависящую от $\ln(x)$ параболу логнормального распределения с параметрами $\mu = 1,61$, $\sigma = 1,96$ (см. табл. 1.4.3.10), которая аппроксимирует точки рисунка 1.4.3.2 и свидетельствует о хорошем соответствии модели данным.

Этот результат не случаен. Практический опыт показывает, что логнормальное распределение прекрасно подходит в качестве модели для размера убытка в отдельном страховом случае. Применение логнормального распределения в главе 1.3 в качестве модели для совокупного убытка отдельных рисков оправдывалось ростом вероятностной массы вблизи нулевой точки при увеличении σ (к примеру, при $\sigma > 5$ более 90% вероятностей соответствуют менее чем одной сотой математического ожидания). Что же касается отдельных убытков, то в этом случае σ , как правило, находится в промежутке между 1,3 и 2,2.

Для получения дальнейших моделей распределения размера отдельного убытка логично воспользоваться рецептом успеха логнормального распределения. Возьмем за основу случайную величину Y , обладающую симметрич-

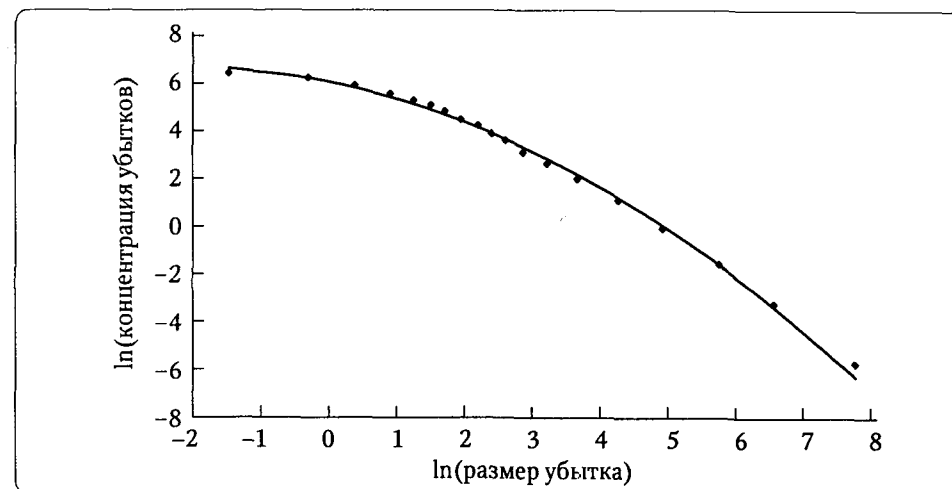


Рисунок 1.4.3.6. Логнормальное распределение к графику 1.4.3.2 (параметры $\mu = 1,61$, $\sigma = 1,96$)

ной, колоколообразной и определенной для всех действительных аргументов плотностью распределения (подобной плотности нормального распределения), и преобразуем ее по формуле $X = \exp(Y)$. Среди всех схожих с нормальным распределением наиболее известно нецентральное t -распределение (Стьюдента). Тем не менее *логарифмированное t -распределение* как модель для размера убытка на практике не прижилось, возможно, потому что его моменты не задаются в явном виде.

Менее известное, но очень схожее с нормальным, логистическое распределение имеет плотность

$$f_0(y) = \frac{1}{c\sigma} \cdot \left(1 + \exp\left(-\frac{y-\mu}{c\sigma}\right)\right)^{-2} \cdot \exp\left(-\frac{y-\mu}{c\sigma}\right)$$

(где $c = \sqrt{3}/\pi$, μ — математическое ожидание, σ^2 — дисперсия) и функцию

$$F_0(y) = \left(1 + \exp\left(-\frac{y-\mu}{c\sigma}\right)\right)^{-1}.$$

В результате преобразования $X = \exp(Y)$ получим функцию распределения

$$F(x) = F_0(\ln(x)) = (1 + (x/b)^{-\alpha})^{-1} = 1 - (1 + (x/b)^{\alpha})^{-1}, \quad x > 0,$$

где $b = e^{\mu}$ (скалярный параметр) и $\alpha = 1/(c\sigma)$. Плотность *логарифмированного логистического распределения* задается формулой

$$f(x) = \frac{\alpha(x/b)^{-\alpha-1}}{b(1+(x/b)^{-\alpha})^2} = \frac{\alpha(x/b)^{\alpha-1}}{b(1+(x/b)^{\alpha})^2}.$$

Логарифмированное правдоподобие

$$\ln(f(x)) = \text{const} - (\alpha + 1)\ln(x) - 2 \cdot \ln(1 + (x/b)^{-\alpha})$$

имеет уклон

$$g(x) = -\frac{d(\ln(f(x)))}{d(\ln(x))} = \alpha + 1 - \frac{2\alpha \cdot (x/b)^{-\alpha}}{1 + (x/b)^{-\alpha}} = \alpha + 1 - 2\alpha / (1 + (x/b)^{\alpha}).$$

Эта функция монотонно возрастает, при больших x/b стремится к константе $(\alpha + 1)$ и хорошо согласуется с графиком 1.4.3.5. Значит, логарифмированное логистическое распределение вполне подходит для наших целей.

Симметричной и определенной для всех действительных аргументов плотностью обладает также распределение Лапласа

$$f_0(y) = 0,5 \cdot \alpha \cdot \exp(-\alpha|y - \mu|),$$

состоящее из двух симметричных относительно μ экспоненциальных распределений. Функция распределения Лапласа имеет вид

$$F_0(y) = \begin{cases} 0,5 \cdot e^{\alpha(y-\mu)} & \text{при } y \leq \mu, \\ 1 - 0,5 \cdot e^{-\alpha(y-\mu)} & \text{при } y \geq \mu. \end{cases}$$

После преобразования $X = \exp(Y)$ получаем логарифмированное распределение Лапласа ($b = e^{\mu}$):

$$F(x) = F_0(\ln(x)) = \begin{cases} 0,5 \cdot (x/b)^{\alpha} & \text{при } 0 < x \leq b, \\ 1 - 0,5 \cdot (x/b)^{-\alpha} & \text{при } x \geq b, \end{cases}$$

правая часть которого $(1 - (x/b)^{-\alpha})$ после нормировки) известна как *распределение Парето*. Плотность логарифмированного распределения Лапласа определяется формулой

$$f(x) = \begin{cases} \alpha(x/b)^{\alpha-1}/(2b) & \text{при } 0 < x \leq b, \\ \alpha(x/b)^{-\alpha-1}/(2b) & \text{при } x \geq b. \end{cases}$$

Правдоподобие

$$\ln(f(x)) = \begin{cases} \text{const} + (\alpha - 1)\ln(x) & \text{при } 0 < x \leq b, \\ \text{const} - (\alpha + 1)\ln(x) & \text{при } x \geq b \end{cases}$$

имеет уклон, состоящий из двух частей

$$g(x) = -\frac{d(\ln(f(x)))}{d(\ln(x))} = \begin{cases} 1 - \alpha & \text{при } 0 < x < b, \\ 1 + \alpha & \text{при } x > b. \end{cases}$$

Из рисунка 1.4.3.2 видно, что участки малых и средних убытков не достаточно точно аппроксимируются двумя отрезками прямых. Зато в области больших убытков линейная аппроксимация вполне приемлема, пусть даже частота больших убытков немного и переоценивается. Рисунок 1.4.3.5 подтверждает определенное постоянство уклона в области больших убытков. На практике распределение Парето действительно часто применяется для моделирования больших убытков. Мы обратимся к нему еще раз в части 4.

Менее подходящую левую часть ($x \leq b$) логарифмированного распределения Лапласа можно заменить распределениями, приемлемыми для описания мелких убытков, например гамма- или обратным гауссовским распределениями. Самый простой способ задать распределение Парето на интервале $(0; b)$ — сместить его влево на величину b . Тогда распределение Парето

$$F(x) = 1 - (x/b)^{-\alpha}, \quad x \geq b,$$

превращается в распределение Парето с нулевой точкой

$$F(x) = 1 - ((b+x)/b)^{-\alpha} = 1 - 1/(1+x/b)^{\alpha},$$

определенное для всех $x \geq 0$. Его плотность задается функцией

$$f(x) = (\alpha/b)(1+x/b)^{-\alpha-1}.$$

Правдоподобие

$$\ln(f(x)) = \text{const} - (\alpha + 1)\ln(b+x)$$

имеет уклон

$$g(x) = -\frac{d(\ln(f(x)))}{d(\ln(x))} = \frac{(\alpha+1)x}{b+x},$$

увеличивающийся с ростом x и поэтому, как правило, более реалистичный, чем уклон обычного распределения Парето.

В некоторых видах страхования распределение Парето с нулевой точкой тоже имеет тенденцию немного переоценивать частоту наибольших убытков. Рекомендуется в таких случаях заменять преобразование $X = \exp(Y)$, переводящее экспоненциальное распределение в распределение Парето, «более слабым преобразованием» $X = Y^z$, $z > 1$. Тогда из несмещенного экспоненциального распределения $F_0(y) = 1 - e^{-\beta y}$ получается *распределение Вейбулла*

$$F(x) = F_0(x^{1/z}) = 1 - \exp(-(x/b)^\alpha), \quad x > 0,$$

где $\alpha = 1/z$ и $b = 1/b^z$. Его плотность находится по формуле

$$f(x) = (\alpha/b) \cdot (x/b)^{\alpha-1} \cdot \exp(-(x/b)^\alpha).$$

Правдоподобие

$$\ln(f(x)) = \text{const} + (\alpha-1)\ln(x) - (x/b)^\alpha$$

имеет уклон

$$g(x) = -\frac{d(\ln(f(x)))}{d(\ln(x))} = 1 - \alpha + \alpha(x/b)^\alpha.$$

Из этого выражения следует, что показатель степени α должен быть меньше 1 — иначе уклон будет расти быстрее, чем у гамма-распределения. Но и при $\alpha < 1$ распределение Вейбулла имеет тенденцию к недооценке частоты наибольших убытков.

Теперь в нашем распоряжении достаточное количество приемлемых моделей для описания размера убытка в отдельном страховом случае. Конечно, мы могли бы подобрать и *распределения с более чем двумя параметрами*, допустим, обобщенное гамма- или обобщенное бета-распределения, включающие некоторые из рассмотренных здесь распределений как частный или граничный случай. Но как показывает опыт, эти модели не позволяют достичь значимо лучшего соответствия эмпирическим данным. Пять важнейших моделей распределения размера убытка сведены в *таблице 1.4.3.7*, где также указаны их моменты.

На *рисунке 1.4.3.8* одновременно показаны логарифмированные плотности рассмотренных распределений. У распределения Вейбулла и обратного гауссовского распределения прослеживается тенденция к недооценке крупных убытков или, по крайней мере, значительно более крутому спаду по сравнению с остальными распределениями. В области мелких убытков тоже видны различия, которые важно иметь в виду при расчете франшизных скидок (см. часть 4).

Таблица 1.4.3.7. Модели распределения размера убытка

Логнормальное распределение (параметр формы σ , скалярный параметр $b = e^\mu$)

Функция распределения	$F(x) = \Phi\left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\ln(x/b)}{\sigma}\right)$
Плотность распределения	$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{(2\pi\sigma^2)}} \exp\left(-\frac{(\ln(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$
Моменты	$E(X^k) = \exp(k\mu + k^2\sigma^2/2) = b^k \cdot \exp(k^2\sigma^2/2)$

Логарифмированное логистическое распределение (параметр формы α , скалярный параметр b)

Функция распределения	$F(x) = (1 + (x/b)^\alpha)^{-1} = 1 - (1 + (x/b)^\alpha)^{-1}$
Плотность распределения	$f(x) = \frac{\alpha(x/b)^{\alpha-1}}{b(1 + (x/b)^\alpha)^2} = \frac{\alpha(x/b)^{\alpha-1}}{b(1 + (x/b)^\alpha)^2}$
Моменты	$E(X^k) = b^k \cdot B\left(1 + \frac{k}{\alpha}, 1 - \frac{k}{\alpha}\right) =$ $= b^k \cdot \frac{k\pi/\alpha}{\sin(k\pi/\alpha)} \quad \text{при } k < \alpha$

Логарифмированное распределение Лапласа (параметр формы α , скалярный параметр b)

Функция распределения	$F(x) = \begin{cases} 0,5 \cdot (x/b)^\alpha & \text{при } 0 < x \leq b, \\ 1 - 0,5 \cdot (x/b)^{-\alpha} & \text{при } x \geq b, \end{cases}$
Плотность распределения	$f(x) = \begin{cases} \alpha(x/b)^{\alpha-1}/(2b) & \text{при } 0 < x \leq b, \\ \alpha(x/b)^{-\alpha-1}/(2b) & \text{при } x \geq b. \end{cases}$
Моменты	$E(X^k) = b^k \cdot \alpha^2 / ((\alpha+k)(\alpha-k)) \quad \text{при } k < \alpha$

Распределение Парето (параметр формы α , скалярный параметр b)
(только для больших убытков)

Функция распределения	$F(x) = 1 - (x/b)^{-\alpha}, \quad x > b,$
Плотность распределения	$f(x) = \alpha \cdot b^\alpha x^{-\alpha-1}, \quad x > b,$
Моменты	$E(X^k) = \alpha \cdot b^k / (\alpha - k) \quad \text{при } k < \alpha$

Распределение Парето с нулевой точкой (параметр формы α , скалярный параметр b)

Функция распределения	$F(x) = 1 - ((b+x)/b)^{-\alpha} = 1 - 1/(1+x/b)^\alpha$
Плотность распределения	$f(x) = (\alpha/b)(1+x/b)^{-\alpha-1}$
Моменты	$E(X^k) = b^k / \left(\frac{\alpha-1}{k}\right) \quad \text{при } k < \alpha$

Распределение Вейбулла (параметр формы α , скалярный параметр b)

Функция распределения	$F(x) = 1 - \exp(-(x/b)^\alpha)$
Плотность распределения	$f(x) = (\alpha/b) \cdot (x/b)^{\alpha-1} \cdot \exp(-(x/b)^\alpha)$
Моменты	$E(X^k) = b^k \cdot \Gamma(1 + k/\alpha)$

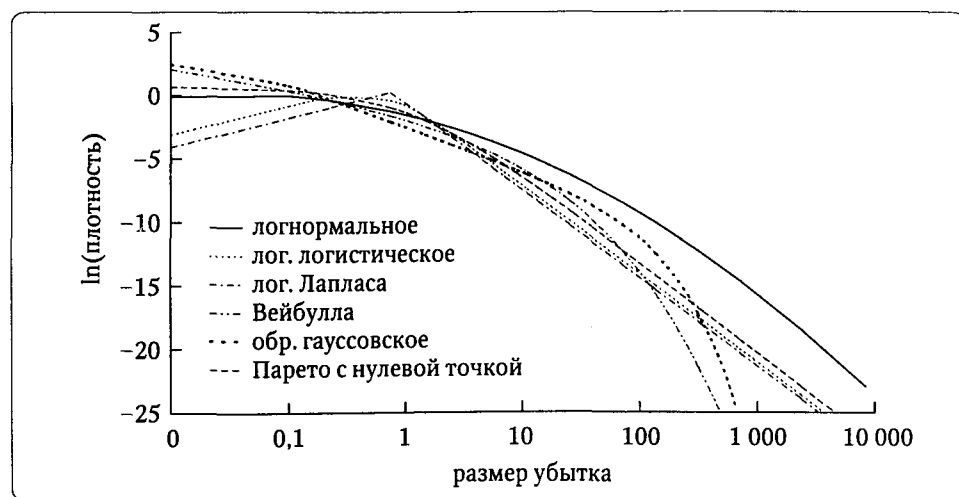


Рисунок 1.4.3.8. Плотности распределений размера убытка с $E(X) = 1$ и $Vko(X) = 5$

Б. Оценка параметров

В заключение раздела обратимся к оценке параметров и проверке качества подгонки распределений. Предположим, что данные представлены либо в сгруппированном виде, как в примере, приведенном в начале раздела (для каждого интервала $[c_i; c_{i+1})$ размеров убытка задано количество A_i принадлежащих ему убытков, $1 \leq i \leq I$), либо в виде полной выборки X_1, \dots, X_N размеров отдельных убытков. В том и другом случае нам подойдет любой из привычных методов оценивания:

- метод моментов,
- метод максимума правдоподобия,
- метод минимума хи-квадрат,
- метод наименьших квадратов.

По *методу моментов* параметры распределения вычисляются из условий равенства эмпирических (выборочных) моментов и соответствующих моментов модели распределения:

$$E(X) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n,$$

$$E(X^2) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n^2,$$

причем второе уравнение может быть заменено на

$$Var(X) = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N X_n^2 - \frac{N}{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n \right)^2.$$

На основе сгруппированных данных эмпирические моменты можно вычислить, вообще говоря, лишь приближенно. Если суммарный размер S_i убытков i -го интервала $[c_i; c_{i+1})$ известен, то первый эмпирический момент рассчитывается точно и составляет $\Sigma S_i / \Sigma A_i$. В противном случае необходимо оценить эмпирический центр тяжести S_i / A_i убытков в i -м интервале. Для этого в области больших и средних убытков лучше подходит геометрическое среднее $\sqrt{c_i \cdot c_{i+1}}$, учитывающее асимметрию распределения, в отличие от арифметического среднего $(c_i + c_{i+1}) / 2$. Геометрическое среднее идентично теоретическому центру тяжести $E(X | c_i \leq X \leq c_{i+1})$, если убытки в интервале $[c_i; c_{i+1})$ имеют усеченное распределение Парето с параметром формы $\alpha = 0,5$, то есть постоянный уклон 1,5. При том же предположении справедливо равенство

$$E(X^2 | c_i \leq X \leq c_{i+1}) = \frac{c_i + \sqrt{c_i c_{i+1}} + c_{i+1}}{3} \sqrt{c_i c_{i+1}},$$

позволяющее вычислить второй эмпирический момент. Даже не принимая во внимание проблемы, связанные с агрегированной формой данных, метод моментов не назовешь удачным способом оценивания, ведь размер эмпирического момента решающим образом зависит от присутствия в выборке отдельных крупных убытков.

По *методу максимума правдоподобия* (МП) в случае полной выборки X_1, \dots, X_N параметры распределения находятся из условия максимума логарифма совместной плотности $f(X_1) \cdot \dots \cdot f(X_N)$

$$\ln \left(\prod_{n=1}^N f(X_n) \right) = \sum_{n=1}^N \ln(f(X_n)).$$

В агрегированной форме наблюдения имеют мультиномиальное распределение, поэтому максимизируется правдоподобие

$$\ln(L_0) = \ln \left(N! \prod_{i=1}^I \frac{(F(c_{i+1}) - F(c_i))^{A_i}}{A_i!} \right) = \sum_{i=1}^I A_i \cdot \ln(F(c_{i+1}) - F(c_i)) + \text{const}$$

($N = A_1 + \dots + A_I$). Если функция распределения $F(x)$ не задается в явном виде, то разность $F(c_{i+1}) - F(c_i)$ аппроксимируется величиной $f(z_i)(c_{i+1} - c_i)$, где $z_i \in \{S_i / A_i, \sqrt{c_i c_{i+1}}, (c_i + c_{i+1}) / 2\}$. Максимум легко определяется методом Ньютона-Рафсона или простым подбором в электронной таблице. Оценки по методу МП обладают полезными свойствами (асимптотическая несмещенность и асимптотическая минимальность дисперсии), благодаря которым метод МП заслуживает рекомендации в качестве метода оценивания. Особое достоинство метода — возможность расчета асимптотической дисперсии оценки. Приятно также, что преобразование данных или параметров влечет точно такое же преобразование оценки МП. Так, оценки МП параметров логнормального распределения непосредственно получаются из соответствующих оценок МП нормального распределения. Помимо этого, *метод отношения правдоподобий* позволяет проверить значимость отличия двух моделей. Например, в качестве альтернативы параметрической модели распределения F

в случае агрегированных данных можно рассмотреть модель, не зависящую от вида распределения, с произвольными параметрами p_i вместо $F(c_{i+1}) - F(c_i)$, $\sum p_i = 1$. Оценив их методом МП

$$\hat{p}_i = A_i / N, \quad 1 \leq i \leq I,$$

получим правдоподобие

$$\ln(L_1) = \sum_{i=1}^I A_i \ln(A_i / N) + \text{const}$$

с той же константой, что и у L_0 . Удвоенный логарифм частного правдоподобий двух моделей составит

$$2 \cdot \ln(L_1 / L_0) = 2 \sum_{i=1}^I A_i \cdot \ln(A_i / B_i),$$

где $B_i = N \cdot (F(c_{i+1}) - F(c_i))$ — ожидаемое число убытков в i -м интервале при нулевой гипотезе справедливости параметрической модели F . При наличии у распределения F двух свободных параметров величина $2 \cdot \ln(L_1 / L_0)$ распределена асимптотически как хи-квадрат с $I - 3$ степенями свободы (не зависящая от распределения модель имеет $I - 1$ свободных параметра p_i). Если гипотеза не отвергается, то предпочтение отдается параметрической модели, содержащей намного меньше параметров и вместе с тем не уступающей альтернативе по значимости.

При оценивании параметров распределения размера убытка методом МП следует соблюдать осторожность. В этом легко убеждает пример логнормального распределения. Оценкой максимального правдоподобия параметра μ на основе наблюдений X_1, \dots, X_N служит арифметическое среднее

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln(X_n)$$

логарифмированных размеров убытков $\ln(X_n)$, распределенных нормально, симметрично относительно μ . На величину оценки $\hat{\mu}$ одинаковым образом влияют около $N / 2$ мелких убытков ($\ln(X_n) < \mu$), и столько же крупных убытков ($\ln(X_n) > \mu$). Из-за этого качество подгонки распределения в решающей области больших убытков может оказаться не настолько хорошим, как если бы мелким убыткам присваивался меньший вес.

По методу минимума хи-квадрат (МХК) параметры распределения оцениваются из условия минимальности статистики

$$T = \sum_{i=1}^I \frac{(A_i - B_i)^2}{B_i}$$

критерия хи-квадрат для проверки соответствия между наблюдаемыми числами убытков A_i и ожидаемыми

$$B_i = N \cdot (F(c_{i+1}) - F(c_i)).$$

Если изначально данные представлены в виде полной выборки размеров отдельных убытков, то перед применением метода МХК их необходимо сгруппировать, что подразумевает определенный произвол (в отношении образования групп) и потерю части информации. Сам минимум легко находится, например, в электронной таблице. Метод МХК обладает примерно такими же статистическими свойствами, как и метод МП для агрегированных данных, но более выгоден возможностью одновременно проверить качество подгонки модели. Статистика T имеет (асимптотическое) распределение хи-квадрат с $I - 3$ степенями свободы (три степени свободы теряются за счет двух уравнений для оценки параметров, а также условия $\sum B_i = \sum A_i$). Высокое значение T свидетельствует против выбранной модели распределения. Кроме того, значения слагаемых $(A_i - B_i)^2 / B_i$ показывают степень адекватности модели данным соответствующего интервала. В поисках минимума стоит отказаться от дальнейшего сокращения T , если при этом ухудшается соответствие модели в области больших убытков.

Нередко модель распределения подбирается только для некоторого подмножества области определения $(0; \infty)$ размера убытка, например, при наличии в распоряжении только данных свыше некоторого порогового значения, или необходимости описания убытков в определенном диапазоне значений. Тогда совокупное число N всех убытков может пониматься как дополнительный параметр, если не требуется приводить в точное соответствие ожидаемое и наблюдаемое числа убытков в интересующем диапазоне размеров убытков. Условие равенства нулю производной $\partial T / \partial N$ приводит к оценке

$$\hat{N} = \sqrt{\sum_{i=1}^I \frac{A_i^2}{F_i} / \sum_{i=1}^I F_i},$$

где $F_i = F(c_{i+1}) - F(c_i)$, а суммирование ведется только по интервалам рассматриваемого диапазона значений убытка. Из неравенства Шварца следует, что \hat{N} всегда не ниже полученного ранее значения $\sum A_i / \sum F_i$. Число степеней свободы статистики T снова составляет $I - 3$ (помимо N оценены еще 2 параметра).

Метод наименьших квадратов (НК) в своем обычном варианте (минимизация расстояний от данных до математического ожидания) совпадает с методом моментов в случае одинаково распределенных наблюдений. Мы предлагаем видоизменить метод НК и минимизировать расстояния между эмпирическим и теоретическим распределениями. Разрешается пользоваться как функциями, так и плотностями распределений, но в последнем случае легче подобрать удобный масштаб (а именно двойной логарифмический) и, следовательно, меру расстояния. В таком виде метод НК допускает наглядную графическую интерпретацию, дополняющую наши рассуждения в начале раздела при выборе модели для размера убытка. В случае агрегированных данных график зависимости логарифмированной эмпирической плотности $\ln(A_i / (c_{i+1} - c_i))$ от аргумента

$$\ln(z_i), \quad z_i \in \{S_i / A_i, \sqrt{c_i c_{i+1}}, (c_i + c_{i+1}) / 2\},$$

(как на рисунке 1.4.3.2) сравнивается с теоретической логарифмированной плотностью $\ln(N \cdot f(x))$ совокупного числа $N = \sum A_i$ наблюдений (как на рисунке 1.4.3.6). (Присутствие множителя N объясняется тем, что площадь под эмпирической плотностью равна не 1, а $\sum A_i = N$.) Эмпирическая логарифмированная плотность может быть получена и на основании размеров отдельных убытков, упорядоченных по величине $X_1 < \dots < X_N$, если строить зависимость $\ln(2 / (X_{n+1} - X_{n-1}))$ от $\ln(X_n)$, $2 \leq n \leq N - 1$.

Оценки параметров находятся из условия минимальности суммы квадратов расстояний

$$\sum_{i=1}^I \left(\ln \left(\frac{A_i}{c_{i+1} - c_i} \right) - \ln(N \cdot f(z_i)) \right)^2 = \sum_{i=1}^I \left(\ln \left(\frac{A_i}{N \cdot f(z_i)(c_{i+1} - c_i)} \right) \right)^2.$$

При расчете минимума допускается заменить элемент $f(z_i)(c_{i+1} - c_i)$ точным значением $F(c_{i+1}) - F(c_i)$ — это одновременно избавляет от выбора промежуточных значений z_i . Собственно говоря, слагаемые следовало бы еще снабдить весами A_i , так как i -е слагаемое основывается на A_i наблюдениях (тогда метод практически становится эквивалентен методу МХК). Но здесь мы нарочно отказались от взвешивания, чтобы достичь лучшего соответствия в области больших убытков, где A_i обычно малы.

Для иллюстрации метода НК осуществим подгонку всех пяти разработанных в этом разделе моделей распределения к данным таблицы 1.4.3.1. Поскольку модели распределения выбирались нами с акцентом на соответствие в области больших убытков, произведем сначала подгонку только в восьми интервалах размеров от 15 до 5000. При этом совокупное число убытков N будем считать свободным параметром. Таблица 1.4.3.9 показывает, что все модели распределения, за исключением логарифмированного распределения Лапласа (здесь распределения Парето), очень хорошо подходят к данным (значения статистики критерия хи-квадрат существенно ниже 95%-ной квантили 11,1 распределения хи-квадрат с 5 степенями свободы).

Логарифмированное логистическое распределение и распределение Парето с нулевой точкой во всех аспектах очень схожи. Они дают наиболее близкую к данным оценку числа убытков свыше 5000, но существенно недооценивают совокупное число 2961 наблюдаемых убытков. Читателя, наверное, удивляет плохой результат подгонки логарифмированного распределения Лапласа/Парето, казавшегося весьма схожим с графиком 1.4.3.2 в области больших убытков. Тем не менее для отклонения гипотезы согласия критерию хи-квадрат хватило всего лишь едва заметной вогнутости графика 1.4.3.2 в хвостовой области.

Так как от рассматриваемых моделей распределения мы требуем ненулевого числа убытков размером свыше 5000, неограниченность распределений не представляется серьезной проблемой. Лишь логарифмированное распределение Лапласа, а точнее, его правая часть — распределение Парето существенно переоценивает число убытков размером свыше 5000. Оно имеет постоянный уклон, тогда как уклон остальных рассматриваемых здесь распределений возрастает. Правда, уклоны логарифмированного логистического

Таблица 1.4.3.9. Подгонка распределений в области больших убытков

Распределение	Параметры	Статистика критерия хи-квадрат	\hat{N}	Ожидаемое число убытков в интервале	
				[15; 5000)	[5000; ∞)
Логнормальное	$\sigma = 2,08$ $\mu = 1,70$	0,20	2364,4	741,1	1,2
Лог. логистическое	$\alpha = 1,02$ $b = 15,70$	1,80	1458,0	741,9	4,1
Лог. Лапласа	$\alpha = 0,68$ $b = 5,70$	23,9	2964,7	752,9	14,8
Парето с нулевой точкой	$\alpha = 1,04$ $b = 16,40$	1,64	1465,2	741,8	3,8
Вейбулла	$\alpha = 0,25$ $b = 0,63$	0,47	6754,7	741,2	0,5
Наблюдаемые значения			2961	741	4

распределения и распределения Парето с нулевой точкой асимптотически эквивалентны уклону распределения Парето. Поэтому три названных распределения во многих случаях не применимы в неограниченной форме. У всех трех распределений математическое ожидание существует только при $\alpha > 1$, а дисперсия — только при $\alpha > 2$ (см. табл. 1.4.3.7). Условие $\alpha > 2$ фактически означает, что в области наибольших убытков уклон $g(x) \approx \alpha + 1$ приближается к значению 3 или превышает его. Поскольку для практики такая ситуация не характерна, распределение Парето, распределение Парето с нулевой точкой и логарифмированное логистическое распределение обычно отсекаются справа. В качестве точки отсечения целесообразно выбирать оценку вероятного максимального убытка. С усеченными распределениями мы будем активно работать в части 4. Логнормальное распределение и распределение Вейбулла при любых значениях параметров обладают всеми моментами и, по крайней мере, с этой точки зрения всегда применимы в неограниченной форме. Можно сказать, что логнормальное распределение и распределение Вейбулла безопаснее трех остальных распределений.

Результат подгонки распределений во всех 20 интервалах размеров убытков представлен в таблице 1.4.3.10. У единственной модели — распределения Парето с нулевой точкой — значение статистики критерия хи-квадрат оказалось ниже 95%-ной квантили 27,6 (17 степеней свободы). Вторая колонка значений в графе «Статистика критерия хи-квадрат», так же как и в таблице 1.4.3.9, относится к 8 интервалам размеров убытков от 15 до 5000. Высокие значения свидетельствуют, что соответствие мелким убыткам достигается только за счет значительного ухудшения соответствия в области больших убытков. Отсюда вывод: при подгонке распределения не обязательно строго следовать правилам математической статистики. Надо выбирать модель, подходящую к наиболее важной для конкретной задачи области размеров убыт-

Таблица 1.4.3.10. Подгонка распределений во всем диапазоне размеров убытков

Модель распределения	Параметр формы	Скалярный параметр	Статистика критерия хи-квадрат	
			совокупная в интервале [15; 5000)	
Логнормальное	$\sigma = 1,96$	$\mu = 1,61$	72,2	22,8
Лог. логистическое	$\alpha = 0,92$	$b = 4,7$	28,2	18,8
Лог. Лапласа	$\alpha = 0,64$	$b = 4,5$	103,6	36,1
Парето с нулевой точкой	$\alpha = 0,80$	$b = 3,3$	20,1	15,3
Вейбулла	$\alpha = 0,39$	$b = 14$	931,6	114,5

ков. Если это область больших убытков, то в рассмотренном примере распределение Парето с нулевой точкой правильнее строить так, чтобы оно хоть и не доставляло минимального значения статистике критерия ни на совокупном интервале, ни в области больших убытков, но описывало область больших убытков лучше, чем в таблице 1.4.3.10, а на совокупном интервале не превосходило порогового значения критерия хи-квадрат.

1.4.4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СОВОКУПНОГО УБЫТКА

Коллективная модель предполагает, что в рассматриваемом портфеле случайные «размеры убытков в отдельных страховых случаях» независимы, одинаково распределены (это предположение уже обсуждалось в предыдущем разделе) и не зависят от случайного «числа убытков в интересующем временном интервале». Последнее требование означает, в частности, независимость среднего размера убытка от количества произошедших убытков. Это условие может нарушаться, например, в страховании автогражданской ответственности: в период гололеда учащаются повреждения жестяного корпуса автомобилей, вследствие чего доля мелких убытков возрастает, а средний размер убытка снижается.

В принципе, такие ситуации неизбежны при наличии внешних факторов (конъюнктура, климатические условия), одновременно воздействующих и на число, и на размеры убытков. Если покрытие распространяется на убытки от стихийных бедствий (как в страховании автокаско или комплексном страховании жилых зданий), то число и размеры убытков нельзя считать независимыми. Но этому препятствует лишь одновременное страхование нескольких причин ущерба одним и тем же полисом. При раздельном рассмотрении причин ущерба независимость числа и размеров убытков почти всегда имеет место. Таким образом, коллективная модель в большинстве случаев применима. Более того, именно коллективная модель положила начало теории риска и решающим образом повлияла на ее развитие и успех.

Пусть N — число убытков заданного портфеля в интересующем временном промежутке (как правило, это один год), и пусть X_1, X_2, \dots, X_N — (независи-

мые одинаково распределенные) размеры убытков, распределение которых не зависит от N . Тогда совокупный убыток представим в виде

$$S = X_1 + \dots + X_N$$

($S = 0$ при $N = 0$). Свойства условного математического ожидания позволяют выразить моменты случайной величины S через моменты величин N и X (X_1, \dots, X_N распределены так же, как X):

$$E(S) = E_N \left(E \left(\sum_{n=1}^N X_n \mid N \right) \right) = E_N \left(\sum_{n=1}^N E(X_n \mid N) \right) = E(N) \cdot E(X),$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(S) &= E_N(\text{Var}(S \mid N)) + \text{Var}_N(E(S \mid N)) = \\ &= E_N(N \cdot \text{Var}(X)) + \text{Var}_N(N \cdot E(X)) = \\ &= E(N) \cdot \text{Var}(X) + \text{Var}(N) \cdot (E(X))^2. \end{aligned}$$

Из этих формул следует

$$(Vko(S))^2 = \text{Var}(S) / (E(S))^2 = (Vko(N))^2 + (Vko(X))^2 / E(N).$$

Третий центральный момент

$$\mu_3(S) = E(S - E(S))^3$$

тоже выражается через моменты величин N и X :

$$\mu_3(S) = \mu_3(N) \cdot (E(X))^3 + 3 \cdot \text{Var}(N) \cdot E(X) \cdot \text{Var}(X) + E(N) \cdot \mu_3(X).$$

Если N распределено по закону Пуассона, то распределение совокупного убытка S называется *составным распределением Пуассона*. Равенства

$$E(N) = \text{Var}(N) = \mu_3(N),$$

справедливые для распределения Пуассона, позволяют привести предыдущие формулы к простому виду

$$E(S) = E(N) \cdot E(X),$$

$$\text{Var}(S) = E(N) \cdot E(X^2),$$

$$\mu_3(S) = E(N) \cdot E(X^3).$$

Значительно сложнее получить *распределение G совокупного убытка S* из распределений величин N и X . К сожалению, другого способа найти распределение совокупного убытка практически не существует. Для прямой подгонки какой-либо модели распределения почти всегда не хватает данных, ведь каждый год дает только одно-единственное наблюдение, а значения совокупного убытка далеких прошлых лет в большинстве случаев не актуальны. Мы можем выразить распределение G через распределение $p_n = P(N = n)$ числа убытков N и распределение $F(x) = P(X \leq x)$ размера убытка X :

$$G(s) = P(S \leq s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot P(S \leq s \mid N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot F^{*n}(s),$$

где F^{*n} обозначает n -кратную свертку распределения F (мы полагаем $F^{*0}(x) = 0$ при $x < 0$ и $F^{*0}(x) = 1$ при $x \geq 0$). Однако явный расчет бесконечной суммы степеней свертки возможен только в редких нереалистичных случаях, например когда N имеет геометрическое распределение (то есть отрицательное биномиальное распределение с параметром $\alpha = 1$), а X — экспоненциальное распределение.

В главе 1.3 мы аппроксимировали совокупный убыток отдельного риска и группы рисков двухпараметрическими гамма-, логнормальным и обратным гауссовским распределениями. Но тогда для нас важно было как можно точнее смоделировать математическое ожидание и дисперсию совокупного убытка. Мы не требовали от этих простых моделей точного воспроизведения вероятности превышения совокупным убытком своего среднего значения. Определять вероятности событий, угрожающих существованию страховой компании, призвана коллективная модель. Несмотря на центральный предельный закон, вряд ли стоит рассчитывать на сходимость S с ростом $E(N)$ к нормальной величине. Опыт показывает, что даже большие портфели асимметричны, а нормальное распределение существенно недооценивает вероятность большого совокупного убытка. Строго говоря, центральный предельный закон работает на нас только в случае пуассоновского числа убытков. Если же N имеет смешанное распределение Пуассона, то распределение величины $S / E(S)$ с ростом $E(N)$ сходится к смешивающему распределению (как следует из приведенной выше формулы для $Vko(S)$).

Гораздо лучшая аппроксимация распределения величины S достигается унимодалными правоасимметричными непрерывными моделями распределения с тремя параметрами (вместо двух). Значения параметров должны находиться из условий равенства первых трех эмпирических моментов соответствующим теоретическим моментам. Ведь чем больше моментов совпадает, тем сильнее схожи и сами распределения. В качестве простейших моделей допускаются смещенные гамма-, логнормальное и обратное гауссовское распределения, причем третий параметр в каждом случае задает смещение нулевой точки. Иными словами, совокупный убыток S аппроксимируется случайной величиной $Y + c$, где Y имеет обычное несмещенное гамма-, логнормальное или обратное гауссовское распределение. Эти простые аппроксимации дают приемлемые оценки интересующих вероятностей только в случае, когда асимметрия $\mu_3(S) / (Sta(S))^3$ величины S не превышает 1, то есть портфель не слишком мал. В противном случае смещение нулевой точки, пожалуй, не имеет смысла и лучше ввести третий параметр посредством преобразования $Y \rightarrow Y^\alpha$, $\alpha > 0$, случайной величины Y , имеющей двухпараметрическое распределение.

Теория риска породила множество других, отчасти довольно сложных аналитических аппроксимаций, во многом потерявших сегодня свое значение на фоне достижений в области численных аппроксимаций. Аналитические аппроксимации остаются полезны только для качественной характеристики влияния некоторых факторов (например, перестрахования) на совокупный убыток, а также имитационного моделирования методом Монте-Карло.

После всего сказанного обратимся к самой популярной численной аппроксимации — *рекурсивному методу*, названному по имени автора Г. Пейнджера.

Перед применением метода необходимо аппроксимировать функцию распределения F размера убытка X арифметическим дискретным распределением \underline{F} , носитель которого \underline{X} принимает только значения $k \cdot h$, $k = 0, 1, 2, \dots, K$, с вероятностями f_k , где $h > 0$ — шаг дискретизации и $f_0 + f_1 + \dots + f_K = 1$. Вопреки постоянному требованию $X > 0$, здесь мы нарочно допускаем значение $\underline{X} = 0$, чтобы при переходе от непрерывной плотности к дискретной располагать дополнительным вероятностным весом в 0.

Хотя на практике размеры убытков всегда представлены в дискретной форме, целесообразно все-таки сначала сгладить имманентные случайности (особенно в области больших убытков) непрерывной плотностью и затем снова дискретизировать ее. Дискретное распределение удобнее всего строить с помощью метода «local moment matching». Сначала из условий равенства частных (локальных) моментов

$$a_i + b_i + c_i = \int_{i \cdot h}^{(i+2)h} dF(x) =: A_i,$$

$$h(i \cdot a_i + (i+1)b_i + (i+2)c_i) = \int_{i \cdot h}^{(i+2)h} x dF(x) =: B_i,$$

$$h^2(i^2 \cdot a_i + (i+1)^2 b_i + (i+2)^2 c_i) = \int_{i \cdot h}^{(i+2)h} x^2 dF(x) =: C_i.$$

определяются вероятностные веса a_i, b_i, c_i , $i = 0, 2, 4, \dots, K-2$ (K — целое число), для размеров убытков $i \cdot h$, $(i+1)h$, $(i+2)h$. Решая эту систему относительно a_i, b_i, c_i , находим

$$2 \cdot a_i = (2 + 3i + i^2)A_i - (3 + 2i)B_i / h + C_i / h^2,$$

$$b_i = -(2i + i^2)A_i + (2 + 2i)B_i / h - C_i / h^2,$$

$$2 \cdot c_i = (i + i^2)A_i - (1 + 2i)B_i / h + C_i / h^2.$$

Вероятности f_k дискретизации \underline{F} распределения F составят:

$$f_0 = a_0,$$

$$f_k = \begin{cases} b_{k-1}, & \text{если } k \text{ нечетное,} \\ c_{k-2} + a_k, & \text{если } k \text{ четное, и } 0 < k < K, \end{cases}$$

$$f_K = c_{K-2}.$$

Изложенный алгоритм прозрачен и не нуждается в дальнейших комментариях. Отрицательность некоторых значений f_k (например, f_0), как правило, не влияет на дальнейший расчет. Если \underline{F} имеет вероятностную массу справа от Kh (в частности, если носитель распределения F принимает значения до ∞), то при распределении этой массы по точкам $(K-2)h$, $(K-1)h$, Kh может возникнуть отрицательный экстремум вероятностного веса в точке $(K-1)h$.

В этом случае рекомендуется добавить одну точку $z > Kh$ и распределить вероятность $A = 1 - F(Kh)$ следующим образом:

$$a = \frac{AKhz - B(Kh + z) + C}{Kh z} \text{ в точке } 0,$$

$$b = \frac{Bz - C}{Kh(z - Kh)} \text{ в точке } Kh,$$

$$c = \frac{C - BKh}{z(z - Kh)} \text{ в точке } z = \left[\frac{C}{Bh} + 1 \right] h,$$

где $B = \int_{Kh}^{\infty} x dF(x)$, $C = \int_{Kh}^{\infty} x^2 dF(x)$. Неравенство $z > Kh$ следует из условия $C > KhB$.

Можно показать, что вероятности a , b , c в сумме составляют A и положительны при $K > (AC/B^2 - 1)^{-1}$. Это неравенство почти всегда выполняется, а в противном случае достигается за счет уменьшения h при неизменном Kh . Дискретизация, таким образом, идет до z , причем в точках между Kh и z вероятностной массы нет.

В итоге математические ожидания и дисперсии распределений \underline{F} и F совпадают. Как показывает опыт, расширение дискретизации за счет попарного приравнивания первых трех моментов не дает существенного увеличения точности аппроксимации совокупного убытка. В то же время простая дискретизация типа $f_k = f(kh)$ (где f — плотность распределения F) или $f_k = F((k + 0,5)h) - F((k - 0,5)h)$ в общем случае не обеспечивала бы попарного равенства первых моментов.

Совокупный убыток $\underline{S} = \underline{X}_1 + \dots + \underline{X}_N$, очевидно, тоже имеет арифметическое дискретное распределение \underline{G} с шагом h и вероятностями

$$g_k = P(\underline{S} = k \cdot h), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

За счет уменьшения шага h может быть сколь угодно повышено качество аппроксимации.

Возможность задания рекурсивной формулы для g_k решающим образом зависит от возможности рекурсивного расчета распределения величины N :

$$p_n = P(N = n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Интересующие нас распределения числа убытков — распределение Пуассона и отрицательное биномиальное распределение — задаются рекурсивной формулой

$$n \cdot p_n = (n \cdot a + b)p_{n-1},$$

где в случае распределения Пуассона с параметром θ

$$a = 0, \quad b = \theta,$$

а в случае отрицательного биномиального распределения с параметрами p и α

$$a = 1 - p, \quad b = (\alpha - 1)(1 - p).$$

Нетрудно убедиться, что кроме названных существует только одно семейство распределений, допускающее представление в рекурсивном виде $n \cdot p_n = (n \cdot a + b)p_{n-1}$, а именно биномиальное распределение.

Теперь мы готовы сформулировать центральное утверждение этого раздела (рекурсивную формулу Пейнджера).

Пусть распределение числа убытков $\{p_n | n = 0; 1; \dots\}$ удовлетворяет рекурсии

$$n \cdot p_n = (n \cdot a + b)p_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Тогда распределение $\{g_k | k = 0; 1; \dots\}$ совокупного убытка, полученное из арифметического дискретного распределения $\{f_k | k = 0; 1; \dots; K$ и $f_k = 0$ для $k > K$ размера убытка, вычисляется с помощью рекурсивной формулы:

$$g_k = \frac{1}{1 - f_0 a} \sum_{j=1}^k (a + b \cdot j/k) \cdot f_j \cdot g_{k-j}, \quad k \geq 1,$$

$$g_0 = \begin{cases} p_0 \cdot \exp(f_0 b), & \text{если } a = 0, \\ p_0 / (1 - f_0 a)^{1+b/a}, & \text{если } a \neq 0. \end{cases}$$

(Расчет g_k ведется до номера K .)

При большом объеме портфеля значение g_0 может быть настолько мало, что расчет на компьютере ведет к исчезновению порядка — «Underflow». В этом случае можно взять в качестве стартового значения g_0 как можно меньшее, но представимое число и затем преобразовать полученные g_k по формуле $g_k = \exp(\ln(g_k/g_0) + \ln(g_0))$ (возможно, в несколько шагов, если в какой-то момент наступает переполнение — «Overflow», и с обнулением значений g_k , не являющихся представимыми числами), поскольку значение $\ln(g_0) (= f_0 \theta - \theta$ в случае распределения Пуассона) — заведомо представимое число.

В завершение раздела докажем рекурсивную формулу Пейнджера. Для этого нам потребуются производящие функции

$$u(z) = E(z^N) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n,$$

$$v(z) = E(z^{\underline{X}/h}) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \quad (f_k = 0 \text{ при } k > K),$$

$$w(z) = E(z^{\underline{S}/h}) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k,$$

всегда существующие при $|z| \leq 1$ и связанные между собой формулой:

$$w(z) = E(z^{\underline{S}/h}) = E(E(z^{\underline{S}/h} | N)) = E((E(z^{\underline{X}/h}))^N) = E((v(z))^N) = u(v(z)).$$

Учитывая равенство $n \cdot p_n = (n \cdot a + b)p_{n-1} = a(n-1)p_{n-1} + (a+b)p_{n-1}$, находим

$$\begin{aligned} u'(z) &= \sum_{n \geq 1} n \cdot p_n z^{n-1} = \sum_{n \geq 1} (a(n-1) + a + b)p_{n-1} z^{n-1} = \\ &= \sum_{n \geq 0} (a \cdot n \cdot p_n z^n + (a+b)p_n z^n) = a \cdot u'(z) \cdot z + (a+b) \cdot u(z). \end{aligned}$$

Отсюда и из предыдущей формулы следует

$$\begin{aligned} w'(z) &= u'(v(z)) \cdot v'(z) = \\ &= a \cdot u'(v(z)) \cdot v(z) \cdot v'(z) + (a+b) \cdot u(v(z)) \cdot v'(z) = \\ &= a \cdot w'(z) \cdot v(z) + (a+b) \cdot v'(z) \cdot w(z). \end{aligned}$$

Представив функции $w(z)$, $v(z)$ и их производные в виде степенных рядов, преобразуем последнее равенство к виду:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)g_{k+1}z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a \sum_{m=0}^k (m+1)g_{m+1}f_{k-m} + (a+b) \sum_{m=0}^k (m+1)f_{m+1}g_{k-m} \right) z^k.$$

Сравнив коэффициенты в левой и правой частях, приходим к равенству

$$(k+1)g_{k+1} = a(k+1)g_{k+1}f_0 + a \sum_{m=0}^{k-1} (m+1)g_{m+1}f_{k-m} + (a+b) \sum_{j=0}^k (k-j+1)f_{k-j+1}g_j$$

или

$$\begin{aligned} (k+1)g_{k+1}(1-f_0a) &= \sum_{m=0}^k (a \cdot m + (a+b)(k-m+1))f_{k-m+1}g_m = \\ &= \sum_{m=0}^k (a(k+1) + b(k-m+1))f_{k-m+1}g_m = \sum_{j=1}^{k+1} (a(k+1) + b \cdot j)f_j g_{k-j+1}, \end{aligned}$$

которое и представляет собой рекурсивную формулу. Стартовое значение задается формулой

$$g_0 = w(0) = u(v(0)) = u(f_0) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot f_0^n.$$

В случае распределения Пуассона и отрицательного биномиального распределения она легко приводится к доказываемому виду. Для общего случая перепишем равенство

$$u'(z) = a \cdot z \cdot u'(z) + (a+b) \cdot u(z)$$

в форме

$$\frac{d}{dz} \ln(u(z)) = \frac{u'(z)}{u(z)} = \frac{a+b}{1-a \cdot z}.$$

В результате интегрирования получим

$$\ln(u(z)) - \ln(u(0)) = \begin{cases} b \cdot z & \text{при } a=0, \\ \frac{a+b}{-a} \ln(1-a \cdot z) & \text{при } a \neq 0, \end{cases}$$

откуда, в силу равенства $u(0) = p_0$, следует стартовое значение $g_0 = u(f_0)$, что и требовалось доказать.

1.4.5. ВЫВОД

Мы подготовили все необходимые инструменты для решения сформулированной в разделе 1.4.1 основной задачи коллективной модели — определить вероятность надежности при заданном гарантийном капитале или требуемый гарантийный капитал при заданной вероятности надежности. Задача сводится к построению *распределения совокупного убытка*, желательно для *портфеля* следующего года. Для этого сначала требуется оценить параметры распределения числа убытков, как описано в разделе 1.4.2. Часто имеет смысл разбить портфель на несколько субпортфелей (например, по видам страхования), каждому из которых соответствует единая мера объема. Тогда, зная ожидаемый объем следующего года, можно спрогнозировать распределение числа убытков. Затем необходимо привести наблюдаемые размеры убытков к ценам предстоящего года с помощью ожидаемой ставки инфляции и подобрать, по крайней мере в области больших убытков, сглаживающую модель распределения, как показано в разделе 1.4.3. Наконец, с помощью формул, приведенных в разделе 1.4.4, вычислить моменты и само распределение будущего совокупного убытка. При построении распределения размера убытка следует учитывать возможность перераспределения весов субпортфелей.

При расчете распределения совокупного убытка важно помнить, что число *убытков от стихийных бедствий* (ураган, землетрясение, наводнение, град) не удовлетворяет основным предпосылкам распределения Пуассона (см. раздел 1.4.2). Поэтому убытки от стихийных бедствий обрабатываются отдельно от остальных. Можно считать, что годовое число событий по каждому виду стихийного бедствия распределено по закону Пуассона (возможно, с меняющимся качеством года). Ведь компании в любом случае удобно объединять убытки от одного стихийного бедствия, в совокупности равносильные одному большому убытку. Тогда останется оценить «только» распределение размеров убытков от стихийных бедствий. Ввиду относительной редкости таких событий (за исключением града), придется обратиться к данным многолетних метеорологических или сейсмологических наблюдений, позволяющих классифицировать частоты событий по максимальной интенсивности (например, в соответствии со шкалой Бофорта для урагана). Для каждой ступени максимальной интенсивности строится оценка (распределения) размера географической области убытка. Поскольку внутри области убытка интенсивность события не одинакова, нужно поделить каждую область по ступеням интенсивности — на центральную область максимальной интенсивности и граничащие с ней области с более низкой интенсивностью. Для этого достаточно рассмотреть статистику небольшого числа событий — границы интенсивности у различных событий относительно схожи (например, концентрические круги или эллипсы). Затем по той же статистике для каждой ступени интенсивности и для каждого типа риска оценивается распределение средней ставки убытка

или среднего убытка на один полисо-год (в зависимости от меры объема). Наконец, распределения

- числа событий для каждой максимальной интенсивности,
- положения, размера и границ интенсивности области убытка,
- средней ставки убытка для каждой ступени интенсивности и типа риска

с учетом географического распределения страховых сумм портфеля смешиваются в распределение размера убытка по каждому событию. Лучше всего это делать с помощью имитации. Читателя, желающего более подробно ознакомиться с этой темой, отсылаем к следующим работам: *Friedman D. G. Insurance and the Natural Hazards // ASTIN Bulletin, 1972, p. 4–58; Clark K. M. A Formal Approach to Catastrophe Risk Assessment and Management // Proceedings of the Casualty Actuarial Society, 1986, p. 69–92.*

В заключение приведем ссылки на литературу, дополняющую рассуждения разделов 1.4.2–1.4.4. Другие теоретические модели числа убытков, в частности дальнейшие смешанные распределения Пуассона, подробно рассматриваются в книге Пейнджера и Уиллмота (*Panjer H. J., Willmot G. Insurance Risk Models. Schaumburg / Illinois: Society of Actuaries, 1992*). Там же детально обсуждается рекурсивный расчет распределения совокупного убытка. Распределению размера убытка посвящена книга Хогга и Клугмана (*Hogg R. V., Klugman S. A. Loss Distributions. New York: Wiley, 1984*). В ней также разбираются многие задачи, описанные в главе 4.2. Тема главы 1.4 тщательно проработана в книге Клугмана, Пейнджера и Уиллмота (*Klugman S. A., Panjer H. J., Willmot G., Loss Models: From Data to Decisions. New York: Wiley, 1998*). При высоком ожидаемом числе убытков (свыше 100) альтернативу рекурсии Пейнджера представляет метод быстрого расчета Фурье, эффективность которого постоянно повышается с помощью различных технических приемов. Материал по этой теме содержится в следующих работах: *Bertram J. Numerische Berechnung von Gesamtschadenverteilungen // Blätter der DGVM, 1981, S. 175–194; Feilmeier M., Bertram J. Anwendung numerischer Methoden in der Risikotheorie. DGVM-Schriftenreihe. Karlsruhe: Versicherungswirtschaft, 1987; Bühlmann H. Numerical Evaluation of the Compound Poisson Distribution: Recursion or Fast Fourier Transform? // Scandinavian Actuarial Journal, 1984, p. 116–126; Robertson J. P. The Computation of Aggregate Loss Distributions // Proceedings of the Casualty Actuarial Society, 1992, p. 57–133; Schröter K. J. Verfahren zur Approximation der Gesamtschadenverteilung: Systematisierung, Techniken und Vergleiche. Karlsruhe: Versicherungswirtschaft, 1995.*

1.5. Вывод и дополнения

Мы подготовили основные модели, используемые в следующих частях книги в качестве базы для дальнейшего моделирования при решении различных практических задач. Как уже неоднократно говорилось, индивидуальная модель служит для моделирования математических ожиданий и дисперсий совокупных убытков однородных (с точностью до страховых сумм) групп рисков, в то время как коллективная модель — для моделирования распределения совокупного убытка, быть может, довольно неоднородного портфеля. Уже только по этой причине сравнение индивидуальной модели с коллективной бессмысленно. Стоит, однако, еще раз обратить внимание читателя на упомянутый в разделе 1.3.6 факт. Если в коллективной модели число убытков пропорционально объему $E(N) = v \cdot \theta$ (как в разделе 1.4.2), то зависимость дисперсии $Var(S)$ совокупного убытка от объема будет такой же, какую мы приняли в разделе 1.3.2 для индивидуальной модели.

В страховании имущества, где размер страховой суммы отчасти характеризует распределение размера убытка соответствующего риска, существует еще один способ аппроксимации распределения совокупного убытка портфеля, объединяющий в себе аспекты индивидуальной и коллективной моделей. Портфель сначала делится на субпортфели так, чтобы рискам одного субпортфеля соответствовало примерно одинаковое распределение степени убытка (это могут быть риски схожего типа, но с большим диапазоном страховых сумм). Под степенью убытка $Y = X / v$ понимается отношение размера убытка X (в отдельном страховом случае) к страховой сумме v данного риска. Распределение H степени убытка Y оценивается на основании наблюдений степеней убытков субпортфеля. При необходимости оно экстраполируется подходящим способом (например, с помощью отсеченного справа логнормального распределения) до максимальной степени убытка 1. Тогда вероятность попадания убытка по риску со страховой суммой v в область ниже значения x задается величиной $H(x / v)$. Затем внутри каждого субпортфеля строится несколько интервалов страховых сумм, и наблюдаемое число убытков на единицу страховой суммы сглаживается по этим интервалам. Пусть $g(v)$ — полученная таким образом функция числа убытков на единицу страховой суммы; она, как правило, монотонно убывает по v . Тогда произведение $v \cdot g(v)$ служит оценкой числа убытков по риску со страховой суммой v . Наконец, посредством взвешенного по числу убытков усреднения распределений степеней убытков всех рисков $i = 1, \dots, I$ субпортфеля находится распределение размера убытка для субпортфеля

$$F(x) = \sum_{i=1}^I v_i g(v_i) H(x / v_i) / \sum_{i=1}^I v_i g(v_i).$$

Ожидаемое число убытков субпортфеля будет равно $v_1 g(v_1) + \dots + v_I g(v_I)$. Совершенно аналогично с помощью взвешенного по числу убытков усреднения по субпортфелям строится распределение размера убытка для совокупного

портфеля. В результате получается ожидаемое число убытков и распределение размера убытка, отражающее структуру страховых сумм портфеля. Распределение совокупного убытка рассчитывается как в разделе 1.4.4.

Этот способ предполагает независимость рисков и пуассоновское число убытков по каждому из них. Действительно, сумма $S = S_1 + S_2$ двух независимых составных распределений Пуассона

$$S_k = \sum_{n=1}^{N_k} X_{k,n}, \quad k=1; 2,$$

снова имеет составное распределение Пуассона с параметром Пуассона

$$E(N_1 + N_2) = E(N_1) + E(N_2)$$

и распределением размера убытка

$$F(x) = (E(N_1)F_1(x) + E(N_2)F_2(x)) / E(N_1 + N_2),$$

где F_k — распределение величины $X_{k,n}$, $1 \leq n \leq N_k$. Это легко доказывается с помощью производящей функции моментов.

Во избежание путаницы обратим внимание читателя на *отличие* определений индивидуальной и коллективной моделей, встречающихся в литературе по страховой математике, от наших определений. Индивидуальная модель для распределения H_i совокупного убытка R_i по риску i чаще всего представляется в форме, известной из математики страхования жизни:

$$H_i = p_i \delta_0 + q_i \underline{H}_i, \quad 1 \leq i \leq I,$$

где δ_0 — вырожденное распределение в точке 0, \underline{H}_i — распределение величины R_i при условии $R_i > 0$, $p_i = P(R_i = 0)$ — вероятность нулевого убытка по i -му риску, а $q_i = 1 - p_i$. Эта модель отличается от применяемой нами индивидуальной модели раздельным рассмотрением случаев $R_i = 0$ и $R_i > 0$ и нуждается в дополнительной информации для оценивания параметров. Путаница может возникнуть по той причине, что указанной детализованной индивидуальной модели ставится в соответствие некая коллективная модель, задаваемая «числом убытков» (δ — индикаторная функция события $\{R_i > 0\}$)

$$N^* = \sum_{i=1}^I \delta \{R_i > 0\}$$

и «распределением размера убытка»

$$F = \sum_{i=1}^I q_i \underline{H}_i / \sum_{i=1}^I q_i.$$

В страховании жизни, где R_i всегда состоит максимум из одного убытка, это определение совпадает с нашим определением коллективной модели. Но в рисковом страховании R_i может складываться из нескольких отдельных убытков, и «распределение размера убытка» F не будет иметь ничего общего с действительным распределением размера отдельного убытка. Величина N^* в этом случае представляет собой лишь число рисков с ненулевыми совокупными убытками, но не число убытков.

ЧАСТЬ 2

ИСЧИСЛЕНИЕ

ТАРИФОВ

Содержание второй части

2.1. Обзор	99
2.2. Построение классов значений фактора риска	100
2.2.1. Постановка проблемы и обзор	100
2.2.2. Агломеративный кластер-метод на основе критерия равенства математических ожиданий	101
2.2.3. Агломеративный кластер-метод с максимизацией функции правдоподобия	105
2.2.4. Метод смешанного распределения	110
2.2.5. Построение классов при наличии нескольких факторов риска	114
2.2.6. Вывод и указания к применению методов	118
2.3. Выбор тарифных факторов	119
2.3.1. Постановка проблемы и обзор	119
2.3.2. Схема пошагового отбора	121
2.3.3. Выбор тарифных факторов с помощью дисперсионного анализа	122
2.3.4. Выбор значений фактора с помощью дихотомических переменных	125
2.3.5. Выбор тарифных факторов с помощью метода отношения правдоподобий	127
2.3.6. Выбор тарифных факторов с помощью перекрестной параметризации при наличии наблюдений за один год	129
2.3.7. Выбор тарифных факторов при наличии наблюдений за один год с помощью дополнительной информации	132
2.3.8. Вывод и указания к применению	135
2.4. Методы выравнивания при многократной классификации рисков	137
2.4.1. Постановка проблемы и обзор	137
2.4.2. Тарификация с помощью маргинальных средних	140
2.4.3. Метод Бейли—Саймона и метод маргинальных сумм	141
2.4.4. Метод на основе модифицированного распределения Пуассона и построение критерия согласия	143
2.4.5. Метод на основе гамма распределения и оценка точности потребной премии	147
2.4.6. Метод на основе логнормального распределения и метод наименьших квадратов	152
2.4.7. Метод на основе обратного гауссовского распределения и факторизация параметра формы при наличии наблюдений за несколько лет	157
2.4.8. Детализация методов при наличии информации о числе убытков	159
2.4.9. Вывод и унификация методов с помощью обобщенной линейной модели; указания к применению	163
2.5. Доверительные методы для моделирования сходства рисков и групп рисков	167
2.5.1. Постановка проблемы и обзор	167
2.5.2. Доверительная модель Пуассон-гамма и построение системы бонус-малус	168
2.5.3. Не зависящие от распределения доверительные методы	175
2.5.4. Доверительные модели Бюльмана и Бюльмана—Штрауба	178
2.5.5. Вывод и указания к применению	188
2.6. Вывод и замечания по проблеме больших убытков	190

2.1. Обзор

В этой части мы ставим задачу — определить адекватные премии для рисков отдельного вида страхования. Совокупность рисков одного вида страхования, вообще говоря, неоднородна (например, в страховании жизни вероятность смерти зависит от возраста, достигнутого застрахованным). Прежде чем рассчитывать тарифы, необходимо разбить риски на однородные (относительно ожидаемого процесса убытков) тарифные классы. Тогда рискам одного тарифного класса можно будет назначить единый тариф. Поскольку никакие два риска в реальности не бывают полностью одинаковыми, построение классов возможно только после задания критерия сходства рисков. Для этого требуется установить связь между историей убытков и внешними факторами риска (к примеру, возрастом в страховании жизни или типом транспортного средства в страховании автогражданской ответственности). Но уже из соображений простоты нельзя учесть в тарифе все факторы, влияющие на процесс убытков. Надо выбрать факторы с наиболее значимым влиянием. Соответствующие математические методы представлены в главе 2.3 «Выбор тарифных факторов».

Возможность и результат применения этих методов зависит от структуры принимаемых в рассмотрение факторов риска. Если фактор обладает большим числом значений, имеет смысл объединить отдельные значения со схожим влиянием на процесс убытков в классы. Эта задача довольно сложна, особенно в случае номинально шкалированного фактора (как, например, географическое положение или род промышленного предприятия). Мы подробно обсудим ее в главе 2.2 «Построение классов значений фактора риска».

Группировка значений факторов автоматически влечет разбиение на классы рисков совокупного портфеля — риски, попадающие по всем факторам в одни классы значений, объединяются в один класс. Даже если бы все построенные таким образом классы содержали достаточно большое количество рисков, было бы нецелесообразно тарифицировать каждый класс только на основании его собственной статистики убытков. Для получения стабильной и гладкой таблицы тарифов следует учитывать сходство соседствующих тарифных классов. Наиболее распространенные методы сглаживания тарифов по классам изложены в главе 2.4 «Методы выравнивания при многократной классификации рисков» и в главе 2.5 «Доверительные методы». В последней также представлен метод учета индивидуальной истории убытков (тарификация на базе опыта или бонус-малус). Знакомство с лежащей в его основе моделью необходимо для понимания излагаемых следом доверительных методов.

Разумеется, на практике дело не заканчивается расчетом нетто-премии (ожидаемого убытка) и рисковой надбавки (см. раздел 1.2.3). Более того, существенную часть брутто-премии занимают расходы на привлечение клиен-

тов и административные расходы. Но поскольку эти расходы не подвержены случайности, их соотнесение с полисами не является специфической проблемой страховой математики и в дальнейшем обсуждаться не будет.

2.2. Построение классов значений фактора риска

2.2.1. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ И ОБЗОР

Если множество значений фактора велико, то уже из соображений простоты тарифной сетки желательно сократить его, *объединив* отдельные значения в классы. С точки зрения тарификации объединять следует значения со схожим влиянием на процесс убытков. Эта задача относительно проста в случае метрически или ординально шкалированных факторов (например, объем двигателя автомобиля или страховая сумма) — у них соседние значения, как правило, обладают и схожим потенциалом убытков. Метрические факторы позволяют совсем отказаться от построения классов, если удастся найти функцию, связывающую значение фактора со случайной величиной убытка (так, в страховании автогражданской ответственности убыток на один полисо-год обычно линейно зависит от годового пробега автомобиля).

Когда же фактор с большим числом значений шкалирован номинально (географические регионы, или области почтовых индексов, или различные виды промышленных предприятий), построение классов становится непростой задачей. Во-первых, некоторые значения представлены слишком малым количеством наблюдений — приходится предварительно «вручную» объединять значения, заведомо относящиеся к одному классу. Это делается на основании компетентной оценки либо предпосылок для реализации страхового продукта. (Во втором случае объединяются риски, деление которых на различные классы трудно было бы объяснить страхователям.) Во-вторых, при наличии значений с полностью или частично отсутствующей историей убытков математико-статистические методы становятся неприменимы, ведь они воспринимают имеющуюся информацию как типичную для потенциала убытков.

Но, в принципе, речь идет о задаче, схожей с рассматриваемой в кластер-анализе. Это позволяет взять за основу методы кластер-анализа. В общем случае кластер-анализ предназначен для объединения некоторых объектов в классы (кластеры) таким образом, чтобы в один класс попадали максимально

схожие, а объекты различных классов максимально отличались друг от друга. Количественный показатель сходства рассчитывается заданным способом на основании данных, характеризующих объекты.

В нашем случае объектами выступают значения (номинально шкалированного) фактора, а для количественного описания их сходства служит история убытков (убытка на один полисо-год, ставки убытка) соответствующих рисков. По сравнению с общей задачей кластер-анализа наша задача обнаруживает следующие особенности. В обычном кластер-анализе все объекты одинаковы по размеру (или весу), а характеристики объектов, в общем, не зависят от случайности и фиксируются только один раз. В нашей постановке задачи значениям фактора изначально соответствует разное количество рисков, то есть размеры объектов не одинаковы. Кроме того, группировочный признак (единственный) — «величина убытка» — по своей природе случаен и представлен наблюдениями за несколько лет. Эти особенности требуют соответствующей модификации методов кластер-анализа.

Ниже приведены три метода, максимально учитывающие зависимость группировочного признака «величина убытка» от случайности. Это два агломеративных метода и метод смешанного распределения. В одном из дальнейших разделов мы объясним, почему и каким образом описанные методы должны быть модифицированы в случае использования нескольких факторов риска, как это чаще всего бывает на практике.

2.2.2. АГЛОМЕРАТИВНЫЙ КЛАСТЕР-МЕТОД НА ОСНОВЕ КРИТЕРИЯ РАВЕНСТВА МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЖИДАНИЙ

В агломеративных кластер-методах задается мера сходства или расстояния, и каждый объект (значение фактора) первоначально рассматривается как отдельный класс. Затем последовательно объединяются два класса, наиболее близко расположенные друг к другу относительно принятой меры расстояния. В принципе, процедура длится до слияния всех объектов (значений фактора) в один класс. Если число классов не установлено заранее, необходимо дополнительное условие для прекращения объединения.

Результат применения этого метода решающим образом зависит от определения меры сходства. В нашем случае требуется найти значения фактора со схожими процессами убытков, а конкретно, схожими математическими ожиданиями убытка на один полисо-год или ставки убытка. Так что вполне разумно проверять сходство с помощью критерия равенства математических ожиданий. Для нормально распределенных случайных величин с этой целью специально разработан t -критерий. Но так как нормальное распределение в нашем случае не применимо, попробуем перенести t -критерий на *логнормальное распределение*, признанное в главе 1.3 реалистичной моделью для совокупного убытка группы рисков.

Обозначим через Z_{ij} нормированный на объем совокупный убыток (убыток на один полисо-год или ставку убытка) i -го значения фактора, $1 \leq i \leq I$, в

j -м году наблюдения, $1 \leq j \leq J$. Предположим, что случайные величины Z_{ij} , $1 \leq i \leq I$, $1 \leq j \leq J$, независимы и имеют логнормальные распределения с параметрами θ_i и σ_i^2 / v_{ij} , где объем v_{ij} (число полисо-лет или соответственно страховая сумма) известен. Тогда случайная величина

$$W_{ij} = \ln(Z_{ij})$$

распределена нормально и

$$E(W_{ij}) = \theta_i, \quad 1 \leq j \leq J,$$

$$\text{Var}(W_{ij}) = \sigma_i^2 / v_{ij}.$$

Модифицированная с учетом этих условий статистика t -критерия для проверки равенства средних θ_i и θ_k соответственно i -го и k -го значений фактора имеет вид

$$T^2(i, k) = \frac{(\underline{W}_{i+} - \underline{W}_{k+})^2}{1/v_{i+} + 1/v_{k+}} \cdot \frac{2(J-1)}{SS_i + SS_k},$$

где

$$\underline{W}_{i+} = \left(\sum_{j \geq 1} v_{ij} W_{ij} \right) / v_{i+},$$

$$v_{i+} = \sum_{j \geq 1} v_{ij},$$

$$SS_i = \sum_{j \geq 1} v_{ij} (W_{ij} - \underline{W}_{i+})^2;$$

\underline{W}_{k+} , v_{k+} и SS_k определяются аналогично.

При справедливости основной гипотезы: $\theta_i = \theta_k$ и $\sigma_i = \sigma_k = \sigma$, разность

$$\underline{W}_{i+} - \underline{W}_{k+},$$

как и в случае обычного t -критерия, распределена нормально с математическим ожиданием 0 и дисперсией $\sigma^2(1/v_{i+} + 1/v_{k+})$. Величина

$$(SS_i + SS_k) / \sigma^2$$

не зависит от $\underline{W}_{i+} - \underline{W}_{k+}$ и при условии $\sigma_i = \sigma_k = \sigma$ распределена как хи-квадрат с $2(J-1)$ степенями свободы. Тогда статистика

$$T(i, k) = \text{sign}(\underline{W}_{i+} - \underline{W}_{k+}) \cdot \sqrt{T^2(i, k)}$$

при справедливости основной гипотезы имеет t -распределение с $2(J-1)$ степенями свободы (соответственно, $T^2(i, k)$ имеет F -распределение с 1 и $2(J-1)$ степенями свободы). Применение этого критерия разрешается только при наличии по каждому значению фактора не менее $J = 5$, а лучше $J = 10$ наблюдений совокупного убытка.

Предположение равенства $\sigma_i = \sigma_k$ не всегда справедливо и предварительно должно быть проверено с помощью F -критерия. Поскольку случайные вели-

чины SS_i / σ_i^2 и SS_k / σ_k^2 независимы и распределены как хи-квадрат с $J-1$ степенями свободы, статистика SS_i / SS_k в случае $\sigma_i = \sigma_k = \sigma$ имеет F -распределение с $J-1$ и $J-1$ степенями свободы. Слишком высокое или слишком низкое значение SS_i / SS_k заставляет отвергнуть гипотезу равенства $\sigma_i = \sigma_k$ и отказать от применения t -критерия к паре (i, k) . В этом случае все равно было бы неправильно объединять i -е и k -е значения фактора в один класс, ведь даже при $\theta_i = \theta_k = \theta$ и $v_{ij} = v_{kj} = v$ величины Z_{ij} и Z_{kj} имели бы разные математические ожидания:

$$\exp(\theta + \sigma_i^2 / (2v)) \neq \exp(\theta + \sigma_k^2 / (2v)).$$

Учитывая общее содержание агломеративных методов, получаем следующий алгоритм кластеризации. Сначала для обоих критериев задается вероятность попадания в допустимую область при справедливости основной гипотезы, например 95% (в обоих случаях мы пользуемся двусторонними критериями), и каждое из имеющихся значений фактора рассматривается как отдельный класс. Затем для всех пар классов вычисляется значение статистики T при условии, что F -критерий не отвергает гипотезу одинаковых σ . Самыми схожими признаются два класса, у которых значение статистики T наиболее близко к своему математическому ожиданию 0. При попадании T в допустимую область эта пара сливается в один класс. Тогда по каждому году наблюдения совокупные убытки двух классов складываются; то же проделывается и с объемами. Частные двух сумм дают нормированные на объем годовые величины убытков нового класса:

$$Z_{i \cup k, j} = (v_{ij} Z_{ij} + v_{kj} Z_{kj}) / (v_{ij} + v_{kj}).$$

Полученная в результате объединения классов случайная величина убытка будет иметь лишь приближенное логнормальное распределение, даже если Z_{ij} и Z_{kj} в точности распределены логнормально. Но нас оправдывает тот факт, что все модели распределения — всего лишь аппроксимация реальности. После каждого объединения заново рассчитываются статистики F -критерия и t -критерия для каждого сочетания нового класса с одним из остальных классов. И вновь объединяются наиболее схожие относительно t -критерия два класса при условии, что применение t -критерия разрешено F -критерием, и т. д. Класс с более чем двумя объектами (значениями фактора) должен быть дополнительно проверен на устойчивость. Для этого нужно убедиться, что внутри класса оба критерия разрешают объединение каждого значения фактора с остальными. Лишь при выполнении этого условия для каждого значения фактора вновь образованный класс признается допустимым и сохраняется. Иначе последнее объединение отменяется, и далее объединяются два класса, имеющие следующее по величине значение статистики t -критерия, при условии, что он допущен F -критерием. Затем снова следует проверка класса на допустимость. Процесс продолжается до тех пор, пока не остается допускаемых F - и t -критериями объединений или ни одно допустимое объединение не приводит к образованию допустимого класса. Тогда гипотеза существования двух классов с одинаковыми параметрами отвергается — правда, с более высоким уровнем значимости, чем исходный, ввиду параллельного при-

менения нескольких критериев. Применяемые всегда к одним и тем же данным, эти критерии к тому же не являются независимыми. В силу названных причин изложенный метод нельзя назвать методом проверки гипотез с точки зрения математической статистики. Но поскольку все требования, предъявляемые к мере расстояния, выполнены, он вполне подходит в качестве метода кластеризации.

При наличии допустимых объединений, не приводящих к образованию допустимых классов, дальнейшее сокращение числа классов может быть достигнуто с помощью *перестановок*. Для этого выбирается допустимое объединение с самым низким значением T (либо объединение со следующим по малости значением $|T|$, если в первом случае перестановок сделать не удастся) и проверяется возможность получения допустимого класса K_1 после изъятия одного значения фактора и объединения его с другим классом K_2 . Разумеется, последнее объединение должно быть допустимым и приводить к допустимому классу. При наличии нескольких вариантов выбора значения фактора и класса K_2 , таких что после перестановки значения из класса K_1 в класс K_2 оба класса становятся допустимыми, производится объединение с наименьшим расстоянием T между переставляемым значением и новым классом K_2 . Затем обычным способом проверяется возможность дальнейших объединений.

Основанный на t -критерии кластер-метод не применим при наличии только одного годового наблюдения ($J = 1$). В этом случае можно воспользоваться более грубой мерой расстояния

$$D^2(i, k) = \frac{(Z_{i+} - Z_{k+})^2}{1/v_{i+} + 1/v_{k+}} = \frac{v_{i+} \cdot v_{k+}}{v_{i+} + v_{k+}} \cdot (Z_{i+} - Z_{k+})^2,$$

в которую превращается T^2 , если сумма $SS_i + SS_k$ равна своему математическому ожиданию, а Z_{i+} и Z_{k+} определены по аналогии с W_{i+} и W_{k+} , но на основании данных Z_{ij} , $1 \leq i \leq I$, $1 \leq j \leq J$. В конце следующего раздела эта мера расстояния используется по другому назначению.

Ввиду эвристического характера агломеративных кластер-методов (это станет более понятно из следующего раздела), недостатки модели логнормального распределения, упомянутые в разделе 1.3.5, здесь не играют большой роли. Для других рассмотренных в главе 1.3 моделей распределения не существует критерия равенства двух математических ожиданий, позволяющего подобно t -критерию задать точные границы значимости даже при малых объемах выборки. Но как уже говорилось, глобальный уровень значимости кластер-метода в любом случае определить невозможно. Мы имеем дело лишь с мерой расстояния, а не с критерием значимости. Это дает нам право применять асимптотические критерии равенства математических ожиданий. В следующем разделе (2.3.5) будет показано, что такие критерии легко конструируются на основе метода отношения правдоподобий.

Если подобрать подходящую модель распределения не удастся, то равенство математических ожиданий можно проверить с помощью критерия, не зависящего от вида распределения, например, критерия Манна—Уитни—Уил-

коксона (Mann—Whitney—Wilcoxon). С теоретической точки зрения этот критерий невыгоден тем, что не учитывает влияние объема на дисперсию. Смысл этого недостатка можно объяснить на примере указанной выше меры расстояния D^2 . При малых объемах v_{i+} , v_{k+} мера D^2 дает меньшее расстояние между эмпирическими средними Z_{i+} и Z_{k+} , чем при больших объемах. Это означает, что маленькие классы с более высокими, чем у больших, дисперсиями оценок средних справедливо будут считаться схожими даже при большом расстоянии $Z_{i+} - Z_{k+}$. Ничего подобного не предусматривает критерий Манна—Уитни—Уилкоксона. Зато он сглаживает часто встречающиеся в небольших классах выбросы за счет использования не самих наблюдений, а их серий. Этим оправдывается его применение для количественного описания сходства двух классов.

Статистика критерия Манна—Уитни—Уилкоксона показывает, сколько раз значение Z_{ij} , $1 \leq j \leq J$, (нелогарифмированной) величины убытка класса i превысило значение Z_{kl} , $1 \leq l \leq J$, класса k . Самими схожими признаются два класса, у которых значение статистики критерия наиболее близко к своему математическому ожиданию $J^2/2$ (J — число наблюдений на один класс). Если имеется только одна такая пара, то она объединяется в класс. Но поскольку статистика критерия принимает только целые значения, таких пар может быть несколько. Тогда объединяются два класса с наименьшим обычным расстоянием между взвешенными по объемам средними годовыми убытками. Как и в предыдущем случае с t -критерием, объединение допускается только при условии образования допустимого класса, когда значение статистики критерия для каждого сочетания отдельного значения фактора с остатком класса не выходит за пределы заданной допустимой области. Далее все аналогично методу с t -критерием.

2.2.3. АГЛОМЕРАТИВНЫЙ КЛАСТЕР-МЕТОД С МАКСИМИЗАЦИЕЙ ФУНКЦИИ ПРАВДОПОДОБИЯ

По следующему кластер-методу искомое разбиение на классы строится посредством оптимизации целевой функции — в большинстве случаев функции правдоподобия. Предполагается, что значения фактора произошли от правильного разбиения на фиксированное (но неизвестное) число K классов, а случайные величины убытка, соответствующие объектам одного и того же класса, распределены одинаково с точностью до объема. Разбиение на классы рассматривается как неизвестный параметр, он оценивается вместе с параметрами распределения из условия максимальности функции правдоподобия. Совокупные убытки разных значений фактора и разных лет считаются независимыми.

Мы продемонстрируем этот метод на примере обратного гауссовского распределения; применение его к гамма- и логнормальному распределениям, а также к модифицированному распределению Пуассона полностью аналогично. Предположим, совокупные I значений фактора в действительности произошли от K классов ($K \ll I$), а нормированный на объем совокупный убыток

(убыток на один полисо-год или ставка убытка) Z каждого значения фактора из класса k , $1 \leq k \leq K$, имеет при заданном объеме (соответственно, число полисо-лет или страховая сумма) v плотность распределения

$$g_k(z|v) = \exp\left(-\left(z/\mu_k^2 - 2/\mu_k + 1/z\right)v\beta_k/2\right) \sqrt{v\beta_k} / \sqrt{2\pi z^3},$$

или обратное гауссовское распределение с меняющимися по классам параметрами μ_k и β_k . Предположение равенства параметров внутри одного класса рационально с той точки зрения, что после объединения двух значений фактора с одинаковыми параметрами μ_k и β_k переменная убытка сохраняет обратное гауссовское распределение с параметрами μ_k и β_k (но относится к большему объему).

При любом фиксированном разбиении на классы C_1, C_2, \dots, C_K множества значений фактора $\{1, \dots, I\}$ функция правдоподобия реализаций z_{ij} нормированных совокупных убытков Z_{ij} , где i — номер значения фактора, $i = 1, \dots, I$, а j — номер года, $j = 1, \dots, J$, при известных объемах v_{ij} имеет вид:

$$L = \prod_{k=1}^K \prod_{i \in C_k} \prod_{j=1}^J g_k(z_{ij} | v_{ij}).$$

Для фиксированного, но неизвестного K требуется определить параметры $\mu_1, \dots, \mu_K, \beta_1, \dots, \beta_K$, а также само разбиение на классы посредством максимизации L или $\ln(L)$. Из условий равенства нулю производной функции $\ln(L)$ по μ_k и β_k получаются оценки максимального правдоподобия:

$$\hat{\mu}_k = \left(\sum_{i \in C_k} \sum_{j \geq 1} v_{ij} z_{ij} \right) / v_k, \quad 1 \leq k \leq K,$$

$$\hat{\beta}_k = a_k / \left(\sum_{i \in C_k} \sum_{j \geq 1} v_{ij} / z_{ij} - v_k / \hat{\mu}_k \right), \quad 1 \leq k \leq K,$$

где

$$a_k = \sum_{i \in C_k} \sum_{j \geq 1} 1,$$

$$v_k = \sum_{i \in C_k} \sum_{j \geq 1} v_{ij}.$$

Подстановка оценок в функцию правдоподобия дает

$$\ln(L) = \sum_{k \geq 1} \sum_{i \in C_k} \sum_{j \geq 1} \left(\ln(v_{ij} \hat{\beta}_k) - \ln(2\pi z_{ij}^3) - 1 \right) / 2 =$$

$$= \sum_{k=1}^K a_k \cdot \ln(\hat{\beta}_k) / 2 + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\ln \left(\frac{v_{ij}}{2\pi z_{ij}^3} \right) - 1 \right) / 2.$$

Это выражение предстоит максимизировать по всем разбиениям I значений фактора на K классов. Заметим, от разбиения на классы зависит только первое слагаемое, поэтому достаточно максимизировать выражение

$$Q_K = \sum_{k=1}^K a_k \cdot \ln(\hat{\beta}_k).$$

Число разбиений множества $\{1, \dots, I\}$ на K классов в общем случае велико и найти разбиение, максимизирующее Q_K , проверкой всех возможных разбиений вряд ли удастся. Но мы можем последовательно производить объединения, сохраняющие наибольшее значение критерия максимизации Q_K , ведь после каждого объединения число параметров μ_k, β_k сокращается и, следовательно, уменьшается значение функции правдоподобия и Q_K .

При объединении классов C_k и C_l с соответствующими показателями $a_k, v_k, \hat{\mu}_k, \hat{\beta}_k$ и $a_l, v_l, \hat{\mu}_l, \hat{\beta}_l$ в класс C последний приобретает следующие показатели:

$$a = \sum_{i \in C} \sum_{j \geq 1} 1 = a_k + a_l,$$

$$v = \sum_{i \in C} \sum_{j \geq 1} v_{ij} = v_k + v_l,$$

$$\hat{\mu} = \sum_{i \in C} \sum_{j \geq 1} v_{ij} z_{ij} / v = (v_k \hat{\mu}_k + v_l \hat{\mu}_l) / (v_k + v_l),$$

$$\hat{\beta} = a / \left(\sum_{i \in C} \sum_{j \geq 1} v_{ij} / z_{ij} - v / \hat{\mu} \right).$$

В силу равенства

$$\sum_{i \in C} \sum_{j \geq 1} v_{ij} / z_{ij} = \sum_{i \in C_k} \sum_{j \geq 1} v_{ij} / z_{ij} + \sum_{i \in C_l} \sum_{j \geq 1} v_{ij} / z_{ij} =$$

$$= a_k / \hat{\beta}_k + v_k / \hat{\mu}_k + a_l / \hat{\beta}_l + v_l / \hat{\mu}_l$$

оценка $\hat{\beta}$ вычисляется без привлечения первичных данных v_{ij}, z_{ij} только на основании показателей объединяемых классов:

$$\hat{\beta} = (a_k + a_l) / \left(a_k / \hat{\beta}_k + v_k / \hat{\mu}_k + a_l / \hat{\beta}_l + v_l / \hat{\mu}_l - (v_k + v_l)^2 / (v_k \hat{\mu}_k + v_l \hat{\mu}_l) \right).$$

В результате объединения классов C_k и C_l значение Q_K уменьшается на величину

$$d(k, l) = a_k \cdot \ln(\hat{\beta}_k) + a_l \cdot \ln(\hat{\beta}_l) - (a_k + a_l) \cdot \ln(\hat{\beta}).$$

Процесс кластеризации сводится к последовательному объединению классов C_k и C_l с наименьшим расстоянием $d(k, l)$ (агломеративный подход).

Если перед нами не стоит цель определить число классов только по результатам разбиений при различных принятых в рассмотрение значениях K

(то есть, в некотором смысле, по личному усмотрению), то можно воспользоваться методом отношения правдоподобий. Удвоенная разность

$$2 \ln(L_I) - 2 \ln(L_K) = Q_I - Q_K$$

между функциями правдоподобия I исходных классов и K классов, полученных в результате объединений, представляет собой статистику метода отношения правдоподобий. При нулевой гипотезе справедливости модели с K классами эта статистика имеет (асимптотическое) распределение хи-квадрат с $2(I - K)$ степенями свободы (каждое сокращение на один класс убавляет два параметра (μ_k и β_k) и, следовательно, добавляет такое же количество степеней свободы). Объединение производится до тех пор, пока статистика критерия не превысит, к примеру, 95%-ную квантиль соответствующего распределения хи-квадрат. Легко видеть, что $d(k, l)$ — статистика метода отношения правдоподобий для проверки гипотезы равенства параметров $(\mu_k, \beta_k) = (\mu_l, \beta_l)$. Значит, настоящий метод отличается от метода предыдущего раздела, по сути, только моделью распределения (обратное гауссовское вместо логнормального).

Разумеется, пошаговая оптимизация не гарантирует получения оптимального, относительно заданного критерия, разбиения на классы. Нередко с помощью *перестановок* удастся улучшить разбиение. Каждое значение фактора на проверку изымается из своего класса и по очереди добавляется к каждому из остальных классов. При изъятии i -го значения фактора с показателями $a_i = J, v_i, \hat{\mu}_i, \hat{\beta}_i$ из класса k показатели последнего $a_k, v_k, \hat{\mu}_k, \hat{\beta}_k$ заменяются на

$$\underline{a}_k = a_k - a_i,$$

$$\underline{v}_k = v_k - v_i,$$

$$\underline{\hat{\mu}}_k = (v_k \hat{\mu}_k - v_i \hat{\mu}_i) / (v_k - v_i),$$

$$\underline{\hat{\beta}}_k = (a_k - a_i) / (a_k / \hat{\beta}_k + v_k / \hat{\mu}_k - a_i / \hat{\beta}_i - v_i / \hat{\mu}_i - \underline{v}_k / \underline{\hat{\mu}}_k).$$

Последующее объединение i -го значения фактора с классом $l \neq k$, имевшим показатели $a_l, v_l, \hat{\mu}_l, \hat{\beta}_l$, ведет к замене показателей l -го класса на

$$\underline{a}_l = a_l + a_i,$$

$$\underline{v}_l = v_l + v_i,$$

$$\underline{v}_l = v_l + v_i,$$

$$\underline{\hat{\mu}}_l = (v_l \hat{\mu}_l + v_i \hat{\mu}_i) / (v_l + v_i),$$

$$\underline{\hat{\beta}}_l = (a_l + a_i) / (a_l / \hat{\beta}_l + v_l / \hat{\mu}_l + a_i / \hat{\beta}_i + v_i / \hat{\mu}_i - \underline{v}_l / \underline{\hat{\mu}}_l).$$

Перестановка повышает значение Q_K при условии

$$d_i(k, l) = \underline{a}_k \ln(\underline{\hat{\beta}}_k) + \underline{a}_l \ln(\underline{\hat{\beta}}_l) - a_k \ln(\hat{\beta}_k) - a_l \ln(\hat{\beta}_l) > 0.$$

При наличии нескольких троек (i, k, l) таких, что $i \in C_k$ и $d_i(k, l) > 0$, осуществляется перестановка с наибольшим значением $d_i(k, l)$. Проверка возмож-

ности повышения Q_K посредством перестановок продолжается столь долго, пока перестановки удаются. Как правило, после перестановок появляется возможность дальнейших объединений. По окончании процесса объединения снова допускаются перестановки и т. д. Конечно, можно не дожидаться конца объединения и пытаться делать перестановки сразу после каждого объединения, как минимум, трех значений фактора. Однако в любом случае пошаговое действие не гарантирует достижения оптимального разбиения (например, одновременная перестановка двух значений фактора могла бы далее повысить Q_K).

В заключение будет нелишним упомянуть *метод Уорда* (Ward), часто встречающийся в литературе по кластер-анализу. Он полностью аналогичен предыдущему методу, но предполагает в отношении случайных величин Z_{ij} k -го класса нормальное распределение с математическим ожиданием μ_k и дисперсией σ^2 / v_{ij} или логнормальное распределение с параметрами μ_k и σ^2 / v_{ij} , где σ^2 известно и одинаково для всех классов. В этом случае расстояние d принимает простую форму (с точностью до множителя σ^{-2} , который всегда одинаков и поэтому опускается)

$$d_{\text{Ward}}(k, l) = (\hat{\mu}_k - \hat{\mu}_l)^2 v_k v_l / (v_k + v_l),$$

где v_k — определяемый как и прежде совокупный объем класса k . Такая форма расстояния позволяет, в частности, строить классы при наличии только одного годового наблюдения ($J = 1$). Однако при наличии наблюдений за несколько лет предположение всюду равного σ^2 представляется ненужным ограничением — предыдущий метод с переменным параметром формы в условиях нормального или логнормального распределений не уступает методу Уорда по простоте. Для логнормального распределения с меняющимся по классам параметром σ_k^2 получается расстояние

$$d_{\text{lognor}}(k, l) = (a_k + a_l) \ln(\hat{\sigma}^2) - a_k \ln(\hat{\sigma}_k^2) - a_l \ln(\hat{\sigma}_l^2),$$

где

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{a_k} \left(\sum_{i \in C_k} \sum_{j \geq 1} v_{ij} (\ln(z_{ij}))^2 - v_k \hat{\theta}_k^2 \right),$$

$$\hat{\theta}_k = \frac{1}{a_k} \left(\sum_{i \in C_k} \sum_{j \geq 1} v_{ij} \ln(z_{ij}) \right)$$

и

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{a_k \hat{\sigma}_k^2 + a_l \hat{\sigma}_l^2}{a_k + a_l} + \frac{v_k v_l (\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_l)^2}{(a_k + a_l)(v_k + v_l)}.$$

Если в действительности параметры σ_k^2 различаются по классам, то метод Уорда может привести к абсолютно неверным результатам. Скорее всего, два класса с очень схожими значениями $\hat{\mu}_k, \hat{\mu}_l$ будут объединены даже при ма-

лых рассеяниях σ_k^2 , σ_l^2 , когда различие параметров $\hat{\mu}_k$ и $\hat{\mu}_l$ значимо. В то же время даже при больших рассеяниях σ_k^2 , σ_l^2 метод Уорда вряд ли объединит классы с сильно различающимися значениями $\hat{\mu}_k$ и $\hat{\mu}_l$, несмотря на возможную незначимость этого различия.

2.2.4. МЕТОД СМЕШАННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Из предыдущего раздела стало ясно, что агломеративное (пошаговое) построение классов не гарантирует максимизации правдоподобия. Представленный ниже метод смешанного распределения позволяет достичь максимума того же правдоподобия за один-единственный шаг, но требует заранее заданного разбиения на классы (допустим, полученного с помощью агломеративного метода) в качестве стартового. Правда, как и во всех случаях максимизации, при этом не исключается возможность нахождения всего лишь локального максимума. Как и в предыдущем разделе, предполагается, что объекты (значения фактора) произошли от правильно определенного разбиения на фиксированное число K классов, а переменные убытков, соответствующие объектам одного класса, с точностью до объема имеют одинаковые распределения. Но в отличие от предыдущего раздела, принадлежность классу рассматривается не как параметр, а как случайная переменная. Таким образом, каждое значение фактора может с определенной вероятностью принадлежать любому классу C_k , $1 \leq k \leq K$.

На основании наблюдений совокупных убытков можно оценить и параметры распределения, и апостериорные вероятности принадлежности значения фактора определенному классу из K имеющихся. Тогда каждое значение фактора сопоставляется классу, у которого эта вероятность максимальна. Отсюда следует, что методы смешанного распределения дают всего лишь вероятностную информацию о принадлежности классу. Однако если классы достаточно сильно отличаются друг от друга, то у каждого значения фактора вероятность попасть в определенный класс будет близка к 1.

Для классификации значений фактора на основании наблюдений требуется знать число классов K и тип распределения переменной убытка каждого класса. Поскольку в реальности ни то, ни другое не известно, надо испытывать различные варианты и по результатам принять решение.

Для иллюстрации метода мы снова используем обратное гауссовское распределение (при любом другом распределении из главы 1.3 схема действий полностью аналогична). Предположим, что совокупные I значений фактора в действительности произошли от K классов, а нормированный на объем совокупный убыток (убыток на один полисо-год или ставка убытка) Z любого значения фактора имеет, при условии принадлежности значения фактора классу k , $1 \leq k \leq K$, и при заданном объеме (соответственно, число полисо-лет или совокупная страховая сумма) v , плотность распределения

$$g_k(z|v) = \exp\left(-\left(\frac{z}{\mu_k} - 2/\mu_k + 1/z\right)v\beta_k/2\right) \sqrt{v\beta_k} / \sqrt{2\pi z^3},$$

то есть обратное гауссовское распределение с изменяющимися по классам параметрами μ_k и β_k .

Отсутствие информации о распределении значений фактора по классам заставляет предположить для всех значений фактора одинаковую (априорную) вероятность p_k принадлежности классу k (классу с плотностью распределения g_k). Разумеется, должно выполняться

$$p_1 + \dots + p_K = 1.$$

Независимые наблюдения z_{i1}, \dots, z_{ij} случайных величин Z_{i1}, \dots, Z_{ij} i -го значения фактора имеют при условии принадлежности этого значения классу k совместную плотность

$$g(z_{i1}, \dots, z_{ij} | k) = \prod_{j=1}^J g_k(z_{ij} | v_{ij}),$$

где v_{ij} — объем, соответствующий z_{ij} , $j = 1, \dots, J$. Но поскольку распределение значений фактора по классам неизвестно, мы наблюдаем только *плотность смешанного распределения*:

$$g(z_{i1}, \dots, z_{ij}) = \sum_{k=1}^K p_k \cdot g(z_{i1}, \dots, z_{ij} | k), \quad 1 \leq i \leq I.$$

На основании реализаций z_{i1}, \dots, z_{ij} с помощью теоремы Байеса можно рассчитать искомую *апостериорную вероятность* $p(k|i) = p(k|z_{i1}, \dots, z_{ij})$, что соответствующие i -му значению фактора реализации z_{i1}, \dots, z_{ij} представляют класс k . Согласно теореме Байеса,

$$p(k|i) = \frac{g(z_{i1}, \dots, z_{ij} | k) \cdot p_k}{g(z_{i1}, \dots, z_{ij})}.$$

При этом снова выполняется равенство

$$p(1|i) + \dots + p(K|i) = 1.$$

Неизвестные параметры p_k , μ_k , β_k оценим на основании данных z_{ij} методом максимума правдоподобия. Функция правдоподобия реализаций (z_{i1}, \dots, z_{ij}) , $1 \leq i \leq I$, имеет вид

$$L = \prod_{i=1}^I g(z_{i1}, \dots, z_{ij}) = \prod_{i=1}^I \sum_{k=1}^K p_k \cdot g(z_{i1}, \dots, z_{ij} | k).$$

Оценками правдоподобия выступают значения параметров p_k , μ_k , β_k , максимизирующие L или

$$\ln(L) = \sum_{i=1}^I \ln\left(\sum_{k=1}^K p_k \cdot g(z_{i1}, \dots, z_{ij} | k)\right)$$

и удовлетворяющие уравнению связи

$$p_1 + \dots + p_K = 1.$$

По методу множителей Лагранжа относительный максимум находится из уравнений

$$\partial \ln(L) / \partial p_k = c, \quad 1 \leq k \leq K,$$

$$\partial \ln(L) / \partial \mu_k = 0, \quad 1 \leq k \leq K,$$

$$\partial \ln(L) / \partial \beta_k = 0, \quad 1 \leq k \leq K,$$

где c — множитель Лагранжа. С учетом формулы для $p(k|i)$ частная производная по каждому параметру $\theta_k \in \{p_k, \mu_k, \beta_k\}$ приводится к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(L)}{\partial \theta_k} &= \frac{\sum_{i=1}^I \frac{\partial}{\partial \theta_k} (p_k \cdot g(z_{i1}, \dots, z_{ij} | k))}{\sum_{k=1}^K p_k \cdot g(z_{i1}, \dots, z_{ij} | k)} = \\ &= \sum_{i=1}^I \frac{p(k|i) \frac{\partial}{\partial \theta_k} (p_k \cdot g(z_{i1}, \dots, z_{ij} | k))}{p_k \cdot g(z_{i1}, \dots, z_{ij} | k)} = \\ &= \sum_{i=1}^I p(k|i) \frac{\partial}{\partial \theta_k} \ln(p_k \cdot g(z_{i1}, \dots, z_{ij} | k)). \end{aligned}$$

Отсюда

$$c = \frac{\partial \ln(L)}{\partial p_k} = \sum_{i=1}^I p(k|i) / p_k, \quad k = 1, \dots, K,$$

$$0 = \frac{\partial \ln(L)}{\partial \mu_k} = \beta_k \cdot \mu_k^{-3} \sum_{i=1}^I p(k|i) \sum_{j=1}^J (v_{ij} z_{ij} - v_{ij} \mu_k), \quad k = 1, \dots, K,$$

$$0 = \frac{\partial \ln(L)}{\partial \beta_k} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I p(k|i) \sum_{j=1}^J \left(\frac{1}{\beta_k} - v_{ij} \left(\frac{z_{ij}^2}{\mu_k^2} - \frac{2}{\mu_k} + \frac{1}{z_{ij}} \right) \right), \quad k = 1, \dots, K.$$

Из первого уравнения, а также уравнения связи находим $c = I$ и

$$\hat{p}_k = \sum_{i=1}^I p(k|i) / I, \quad 1 \leq k \leq K.$$

Из двух других уравнений следует:

$$\hat{\mu}_k = \left(\sum_{i=1}^I p(k|i) \sum_{j=1}^J v_{ij} z_{ij} \right) / \left(\sum_{i=1}^I p(k|i) \sum_{j=1}^J v_{ij} \right), \quad 1 \leq k \leq K,$$

$$\hat{\beta}_k = I \cdot J \cdot \hat{p}_k / \left(\sum_{i=1}^I p(k|i) \sum_{j=1}^J v_{ij} (1/z_{ij} - 1/\hat{\mu}_k) \right), \quad 1 \leq k \leq K.$$

Из этой системы неизвестные оценки параметров и искомые апостериорные вероятности

$$p(k|i) = \frac{p_k \cdot g(z_{i1}, \dots, z_{ij} | k)}{\sum_{k=1}^K p_k \cdot g(z_{i1}, \dots, z_{ij} | k)}$$

вычисляются следующим образом. Сначала строится первое грубое разбиение C_1, \dots, C_K множества $\{1, 2, \dots, I\}$ на K классов. Это можно сделать либо с помощью рассмотренного ранее агломеративного метода (без последующих перестановок), либо посредством визуального анализа расположения I действительных чисел

$$z_{i+} = \sum_{j=1}^J v_{ij} z_{ij} / \sum_{j=1}^J v_{ij}$$

на числовой прямой или точек (z_{i+}, b_i) , $1 \leq i \leq I$, на плоскости (z_{i+}, b_i — оценки максимального правдоподобия параметров μ и β i -го значения фактора). Тем самым задаются стартовые вероятности

$$p(k|i) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in C_k, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

позволяющие вычислить из указанной системы стартовые значения для p_k, μ_k, β_k , $1 \leq k \leq K$. На основании полученных значений рассчитываются новые значения $p(k|i)$ и т. д. Итерация продолжается, пока значения параметров не перестают существенно изменяться. Тогда i -е значение фактора сопоставляется классу k , имеющему максимальную вероятность $p(k|i)$. Так получается искомое разбиение на классы.

Сходимость итерации не исключает возможности достижения всего лишь локального максимума. Поэтому есть смысл проделать расчет с другими стартовыми разбиениями, значительно отличающимися от первоначального и между собой, но тоже кажущимися разумными. В итоге выбирается решение с наибольшим значением функции правдоподобия $\ln(L)$ или, лучше, апостериорного правдоподобия (см. предпоследний абзац этого раздела). Может оказаться, что параметры μ_k и β_k у некоторых классов совпадают. Это указывает или на локальность найденного максимума, или на необходимость сокращения числа классов.

Напомним, метод предполагает заранее заданное число классов K . Для выбора числа классов можно реализовать метод при нескольких различных значениях K , например, $K = 2, 3, 4, 5, 6$. Предпочтение отдается альтернативе с минимальным количеством «граничных случаев», когда i -е значение фактора не может быть отнесено ни в один класс, потому что ни одна вероятность $p(k|i)$, $k = 1, \dots, K$, $i \in I$ не близка к 1.

Как мы уже сказали, более правильным будет максимизировать не априорное правдоподобие L , а определяемое ниже апостериорное правдоподобие L^* . Для этого снова требуются *перестановки*. Сначала с помощью вероятностей

$$p^*(k|i) = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-е значение фактора отнесено в класс } k, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

соответствующих полученному разбиению на классы C_1, \dots, C_K , вычисляется значение *апостериорной функции правдоподобия*

$$L^* = \prod_{i=1}^I \left(\sum_{k=1}^K p^*(k|i) \cdot g(z_{i1}, \dots, z_{ij} | k) \right) = \prod_{k=1}^K \prod_{i \in C_k} g(z_{i1}, \dots, z_{ij} | k),$$

параметры которой оцениваются как в разделе 2.2.3. Затем, как обычно, каждое значение фактора по очереди сопоставляется каждому из остальных классов (фактически нас интересуют только те значения фактора, чьи апостериорные вероятности $p(k|i)$ принадлежности некоторым другим классам не намного ниже максимальной вероятности, соответствующей выбранному классу). Реально производится перестановка, максимально увеличивающая L^* . Процедура повторяется до тех пор, пока не остается перестановок, приводящих к увеличению L^* . При выборе из нескольких локальных максимумов тоже целесообразно руководствоваться апостериорным правдоподобием L^* , а не правдоподобием L смешанного распределения.

Оценки параметров p_k, μ_k, β_k , конечно, тоже лучше было бы искать, максимизируя апостериорное правдоподобие L^* или очень близкое ему правдоподобие

$$\underline{L} = \prod_{i=1}^I \left(\sum_{k=1}^K p(k|i) \cdot g(z_{i1}, \dots, z_{ij} | k) \right).$$

Но тогда вероятности $p(k|i)$ тоже зависели бы от параметров p_k, μ_k, β_k , и оценки максимального правдоподобия уже не задавались бы в явном виде. Это значительно усложнило бы применение метода.

2.2.5. ПОСТРОЕНИЕ КЛАССОВ ПРИ НАЛИЧИИ НЕСКОЛЬКИХ ФАКТОРОВ РИСКА

До настоящего момента мы действовали так, будто имеется всего один фактор, значения которого требуется объединить в классы. Но на практике чаще всего приходится работать с несколькими факторами риска, что играет огромную роль даже при проведении кластеризации только для одного из факторов. Для убедительности рассмотрим простой пример.

В таблице 2.2.5.1 приведены статистические данные (сверху вниз: совокупная страховая сумма, совокупный убыток и ставка убытка) для портфеля рисков, подверженных влиянию двух факторов: А и В. Фактор В принимает

Таблица 2.2.5.1. Пример к задаче классификации при наличии двух факторов риска

Фактор А	Фактор В		Итого
	Значение В ₁	Значение В ₂	
Значение А ₁	100 000 000	700 000 000	800 000 000
	1 430 000	1 050 000	2 480 000
	14,3‰	1,5‰	3,1‰
Значение А ₂	600 000 000	200 000 000	800 000 000
	2 280 000	200 000	2 480 000
	3,8‰	1,0‰	3,1‰
Значение А ₃	300 000 000	500 000 000	800 000 000
	1 530 000	950 000	2 480 000
	5,1‰	1,9‰	3,1‰
Значение А ₄	600 000 000	200 000 000	800 000 000
	3 060 000	380 000	3 440 000
	5,1‰	1,9‰	4,3‰
и т. д.

Итого	10 000 000 000	10 000 000 000	20 000 000 000
	40 000 000	20 000 000	60 000 000
	4,0‰	2,0‰	3,0‰

всего два значения, фактор А, напротив, — очень много значений, которые необходимо объединить в классы. Если при этом игнорировать фактор В и работать только с числами столбца «Итого», то значения А₁, А₂ и А₃ логично поместить в один класс. Если же дифференцировать показатели фактора А по значениям фактора В, то размеры ставок убытка говорят о различии значений А₁, А₂ и А₃ и сходстве А₃ с А₄. Различия в ставках убытка значений А₁, А₂ и А₃ нивелируются в столбце «Итого» за счет различного распределения их объемов по значениям фактора В. Делаем вывод: классификация должна осуществляться или при полном дроблении данных по всем факторам риска, или после устранения влияния различного распределения объема по факторам, не затрагиваемым классификацией.

Построение классов при полном дроблении данных по всем факторам риска требует расширения описанных методов кластер-анализа на многомерный случай. Для всех трех методов это удастся без особых трудностей. Например, в методе, приведенном в разделе 2.2.3, будет максимизироваться функция правдоподобия

$$L = \prod_{k=1}^K \prod_{i \in C_k} \prod_{m=1}^M \prod_{j=1}^J g_{km}(z_{ijm} | v_{ijm}),$$

где значения всех факторов, не затрагиваемых классификацией, пронумерованы от $m = 1$ до $m = M$ (в нашем примере $M = 2$), а g_{km} обозначает плотность

обратного гауссовского распределения с параметрами μ_{km} и β_{km} . Зависящий от разбиения на классы элемент функции правдоподобия имеет вид:

$$Q_k = \sum_{k \geq 1} \sum_{m \geq 1} a_{km} \cdot \ln(\hat{\beta}_{km}).$$

Далее все полностью аналогично случаю $M = 1$, так что мы не будем останавливаться на этом подробно.

Зачастую данные настолько сильно расчленены совокупностью значений всех факторов риска, что встречаются ячейки с отсутствующей статистикой убытков. Ни один из представленных методов в этом случае применяться не может, поскольку все интересующие нас модели распределения, за исключением модифицированного распределения Пуассона, подразумевают условие $Z > 0$. Замена всех реализаций $z = 0$ очень малыми значениями $z = \epsilon$ чревата искажением истинного потенциала убытков и, значит, неверной классификацией. При объединении убытков всех лет наблюдения в одно значение утрачивается возможность применения одной из двухпараметрических моделей распределения. На помощь приходит метод Уорда, в своей многомерной форме расстояния

$$d_{Ward}^{(M)}(k, l) = \sum_{m=1}^M \frac{v_{km} \cdot v_{lm}}{v_{km} + v_{lm}} (\mu_{km} - \mu_{lm})^2$$

настолько хорошо учитывающий структуру данных, что можно смириться с используемым неявно предположением всюду одинакового параметра формы σ^2 .

Выше был предложен еще один подход к кластеризации в условиях нескольких факторов риска — а именно, *устранить влияние различий в распределениях данных* по факторам, не участвующим в классификации. На первый взгляд, кажется разумным оставить без изменений нормированные убытки значений фактора B , а объемы изменить так, чтобы у каждого значения A_i процентное распределение объема по значениям B_1 и B_2 стало таким же, как у совокупности всех значений фактора A . Но тогда убытки всех ячеек, включая ячейки малого объема, сильно зависящие от случайности, считались бы одинаково «истинными». Значит, менять распределение объема нельзя. Правильнее будет заменить индивидуальные нормированные убытки на менее зависящие от случайности убытки строки «Итого», получаемые при агрегировании данных по всем значениям фактора A . Таким образом, мы противопоставляем наблюдаемый нормированный убыток

$$\bar{z}_{i+} = \sum_{m \geq 1} v_{im} z_{im} / \sum_{m \geq 1} v_{im}$$

значения A_i убытку

$$\bar{z}_i = \sum_{m \geq 1} v_{im} \bar{z}_{+m} / \sum_{m \geq 1} v_{im},$$

где

$$\bar{z}_{+m} = \sum_{i \geq 1} v_{im} z_{im} / \sum_{i \geq 1} v_{im}.$$

Величина \bar{z}_i получается в результате замены индивидуальных убытков z_{im} глобальными средними \bar{z}_{+m} , построенными по аналогии с \bar{z}_{i+} . Индекс \bar{z}_{i+} / \bar{z}_i показывает степень отличия процесса убытков значения A_i от глобального среднего при одинаковом распределении объема. Поскольку

$$\bar{z}_{i+} / \bar{z}_i = \sum_{m \geq 1} v_{im} z_{im} / \sum_{m \geq 1} v_{im} \bar{z}_{+m},$$

можно считать, что индекс \bar{z}_{i+} / \bar{z}_i произошел от \bar{z}_{i+} в результате замены фактического объема $v_{i+} = \sum_{m \geq 1} v_{im}$ фиктивным объемом $v_i = \sum_{m \geq 1} v_{im} \bar{z}_{+m} = v_{i+} \bar{z}_i$ (не трудно убедиться в справедливости равенства $(\sum_{i \geq 1} v_i (\bar{z}_{i+} / \bar{z}_i)) / (\sum_{i \geq 1} v_i) = 1$). Следовательно, при кластеризации индексов \bar{z}_{i+} / \bar{z}_i в качестве меры объема должна использоваться величина v_i . Для данных таблицы 2.2.5.1 получаются следующие результаты.

Значение	Индекс убытка	Объем (фиктивный)
A_1	$3,1 / 2,25 = 1,38$	1 800 000
A_2	$3,1 / 3,50 = 0,89$	2 800 000
A_3	$3,1 / 2,75 = 1,13$	2 200 000
A_4	$4,3 / 3,50 = 1,23$	2 800 000
и т. д.		

Как видим, эти показатели хорошо отражают различие значений $A_1 - A_3$.

Если помимо фактора B имеются дальнейшие факторы риска, то в качестве фактора B рассматривается декартово произведение всех факторов.

Наконец, обратимся к случаю, когда требуется построить классы значений не для одного, а для *двух (или более) факторов*. Задача решается двумя способами: синхронным и итерационным. При синхронном построении классов одновременно рассматриваются все классифицируемые факторы и на каждом шаге отыскиваются ближайшие два класса у каждого фактора. Объединение производится у того фактора, где расстояние между ближайшими классами является наименьшим среди всех факторов. Перед следующим шагом заново вычисляются все расстояния у других классифицируемых факторов. При итерационном подходе сначала полностью проводится классификация для фиксированного фактора A (до желаемого числа классов). Затем с учетом полученных классов проводится полная классификация для следующего фактора B , потом, при необходимости, для возможных дальнейших факторов C , D и т. д., каждый раз с учетом последней полученной структуры классов у других факторов. Далее процесс возвращается к фактору A , и классы строятся заново, но теперь с учетом полученной ранее структуры классов у других факторов. То же самое продлевается с другими факторами и повторяется до тех пор, пока разбиение на классы перестает изменяться или наблюдается циклическое повторение одних и тех же структур классов.

2.2.6. ВЫВОД И УКАЗАНИЯ К ПРИМЕНЕНИЮ МЕТОДОВ

Мы познакомились с тремя различными кластер-методами. Все они хорошо подходят для выявления классов в совокупности рисков. Рекомендуется строить классы сразу всеми методами. Сходство результатов будет свидетельствовать о фактическом наличии четко разделенных классов. Методы из разделов 2.2.3 и 2.2.4, применимые к любому из четырех распределений главы 1.3 (гамма-, обратное гауссовское, логнормальное и модифицированное Пуассона), при этом должны основываться на одной и той же модели распределения. Наиболее подходящее распределение можно определить заранее по значениям функций правдоподобия наблюдений, предположив для нормированного убытка каждого значения фактора индивидуальные параметры распределения. Важно иметь в виду, что значения функций правдоподобия позволяют лишь сравнить несколько моделей распределения с одинаковым числом параметров, но не узнать, подходит ли модель в принципе. По окончании процесса классификации следует убедиться, что выбранная модель распределения по-прежнему дает наибольшее значение функции правдоподобия среди всех возможных моделей. Но теперь индивидуальные параметры присваиваются классам, а не значениям фактора.

Для проверки адекватности модели данным можно воспользоваться *критерием согласия хи-квадрат*. Разумеется, он не должен применяться отдельно к каждому классу, ведь при многократном тестировании вероятность отвергнуть гипотезу возрастает даже при хорошем соответствии модели данным. Более того, необходимо сложить статистики всех классов (каждая статистика получается на основе параметров, оцененных индивидуально по наблюдениям соответствующего класса) и их степени свободы в единую статистику критерия и единое число степеней свободы (поскольку сумма независимых величин, распределенных как хи-квадрат, снова имеет распределение хи-квадрат). Тогда гипотеза проверяется сразу в масштабе всех классов. В принципе, глобальную статистику критерия хи-квадрат можно использовать и как целевую функцию кластер-алгоритма — соответствующий агломеративный метод асимптотически эквивалентен методу, приведенному в разделе 2.2.3. Само число классов при агломеративных методах регулируется за счет изменения допустимой области критерия.

Методы, основанные на двухпараметрических распределениях, допускают попадание двух значений фактора с одинаковыми оценками средних, но сильно различающимися оценками параметра формы в разные классы. Это связано со свойством оценки среднего при высокой дисперсии (~параметре формы) намного дальше отстоять от истинного среднего значения, чем при низкой дисперсии. Нередко из-за этого эффекта полученное разбиение на классы бывает трудно объяснить нематематикам. Тогда рекомендуется реализовать метод при одинаковом для всех классов параметре формы (потребуется лишь незначительное изменение программы обработки данных). Перед этим необходимо определить по значению функции правдоподобия с постоянным параметром формы, какой из двух идеальных случаев: 1-й (модифицированное

распределение Пуассона) или 2-й (гамма- или логнормальное распределение) — более вероятен (см. раздел 1.3.6).

Для всех операций нужны наблюдения за несколько лет. При наличии *наблюдений только за один год* задача сильно усложняется. Единственным подходящим методом в этой ситуации остается агломеративный метод с расстоянием Уорда, но и его целесообразно применять только в многомерной форме — при наличии, по крайней мере, двух факторов риска. Иначе можно предвидеть существенное изменение структуры факторов при проведении новой классификации по истечении года.

В случае ординально шкалированного фактора (например, страховая сумма, срок безубыточного страхования, мощность) оба агломеративных метода следует модифицировать таким образом, чтобы объединялись только непосредственно соседствующие классы. Метод смешанного распределения в этом случае не подходит.

Публикации о применении рассмотренных методов кластер-анализа к статистике убытков нескольких лет неизвестны. Некоторым исключением является работа «On the use of mixture models in clustering multivariate frequency data» (Loimaranta K., Jacobsson J., Lonka H.), появившаяся в 1980 году среди докладов ко второй теме Международного конгресса актуариев. В ней метод смешанного распределения (как в разделе 2.2.4) применяется к частоте лесных пожаров в различных регионах (в предположении распределения Пуассона для каждого класса). При этом анализируются данные одного года, но в разрезе нескольких причин ущерба. О применении одномерного метода Уорда к региональным индексам нормированного убытка (убытка на один полис-год) в страховании автогражданской ответственности можно узнать из работ: Dickmann H. Einsatz der Clusteranalyse bei Klassifikations-Problemen in der Versicherungswissenschaft // Blätter der DGVM, 1978, S. 378—401; Schäffer K.-A. Klassifizierung regionaler Schadenbedarfsunterschiede für PKW in der Kraftfahrzeug-Haftpflichtversicherung // Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft, 1985, S. 1—19.

2.3. Выбор тарифных факторов

2.3.1. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ И ОБЗОР

Во многих видах рискового страхования количество факторов, влияющих на процесс убытков, довольно велико. Но между ними часто существует зависимость, и нужно следить за тем, чтобы одно и то же обстоятельство не учитывалось в тарифе многократно.

Приведем пример. Анализ выборки полисов немецкого страхования гражданской ответственности в 1978 году показал, что около 25% автомобилей управляются (преимущественно) женщинами, и их нормированный убыток (убыток на один полисо-год) равен примерно 90% среднего нормированного убытка всех водителей. Тот же показатель (преимущественных) водителей мужского пола составил примерно 103%. Одновременно обнаружилось и различие в мощности автомобилей: у «женских» она составила в среднем 40 кВт, а у «мужских» — 53 кВт. Поскольку с ростом мощности нормированный убыток увеличивается, естественно предположить, что различие нормированных убытков мужчин и женщин во многом объясняется различием мощностей. Более подробные исследования подтвердили отсутствие значимого отличия между мужчинами и женщинами в отношении нормированного убытка при одинаковой мощности автомобиля. Значит, было бы несправедливо применять пол в качестве тарифного фактора, если мощность уже является таковым.

Но чаще всего ситуация бывает не настолько прозрачна, как в этом примере. После того как некоторый фактор риска выбран в качестве тарифного, влияние некоторых других факторов (на еще не объясненную часть целевой переменной убыток на один полисо-год или ставка убытка) уменьшается, но, вообще говоря, не исчезает. Это создает трудности при выборе наиболее эффективных факторов риска, тем более что с практической точки зрения выгодно иметь как можно меньше тарифных факторов.

Выбор факторов со значимым влиянием на целевую переменную — классическая задача многомерной статистики, решаемая как в рамках регрессионного, так и в рамках дискриминантного анализа. Но, как и методы кластер-анализа (см. раздел 2.2.1), эти методы в общем случае предполагают равнозначность объектов, характеризующихся факторами (в смысле независимых и потенциально одинаково распределенных повторений). В нашем же случае риски, как правило, различаются по «размеру» (например, имеют разные страховые суммы). Исключение составляют разве что страхование автогражданской ответственности и массовое страхование имущества, где различия размеров рисков невелики. Для этих видов страхования названные выше стандартные методы могут применяться без какой-либо корректировки при наличии данных по каждому отдельному полису. Далее рассматриваются методы, *не требующие данных по отдельным полисам*. При этом предполагается, что количество значений каждого фактора сокращено до обозримого числа, например, с помощью методов предыдущего раздела.

Все излагаемые методы отбора тарифных факторов построены по одинаковой схеме, типичной для регрессионного анализа. Эта схема будет описана в разделе 2.3.2. Методы отличаются друг от друга только в отношении применяемых статистик критерия (или, что одно и то же, в отношении моделей распределения). В разделе 2.2.3 после соответствующего преобразования данных и статистики критерия отбор факторов проводится с помощью дисперсионного анализа. В разделе 2.3.5 за основу берется другой стандартный метод проверки гипотез — метод отношения правдоподобий. И в первом, и во втором случае допускается детализация отбора, когда на значимость иссле-

дуется не весь фактор, а только отдельные комбинации его (классов) значений. Это усовершенствование достигается за счет использования дихотомических переменных (см. раздел 2.3.4). В двух последующих разделах предполагается наличие данных только за один год. В разделе 2.3.6 эта проблема решается перекрестной классификацией рисков, а в разделе 2.3.7 — привлечением дополнительной информации. На протяжении всей главы, как обычно, мы исходим из независимости рисков рассматриваемого портфеля и, следовательно, независимости совокупных убытков непересекающихся групп рисков.

2.3.2. СХЕМА ПОШАГОВОГО ОТБОРА

Пошаговый отбор тарифных факторов решающим образом опирается на критерий проверки значимости влияния (очередного) фактора риска на целевую переменную «убыток на один полисо-год» или «ставка убытка» при условии уже выбранных $t \geq 0$ тарифных факторов. Два таких критерия будут представлены в следующих разделах. В обоих случаях отбор выполняется по одной схеме, излагаемой ниже.

Начальный шаг. Процесс начинается с выбора наиболее значимого, в соответствии с заданным критерием, фактора риска (в добавление к имеющимся 0 тарифным факторам). Если ни один из факторов не удовлетворяет критерию, то процесс прекращается, и ни один значимый фактор риска не найден. Иначе процесс переходит к итерации.

Итерация. Пусть уже выбраны $t \geq 1$ тарифных факторов.

Фаза выбора. Выбирается следующий самый значимый, в соответствии с критерием, фактор риска в добавление к уже имеющимся t тарифным факторам. Если значимых факторов больше нет, то в качестве следующего тарифного фактора предварительно берется ближайший к границе значимости фактор.

Фаза проверки. При добавлении нового фактора некоторые из уже выбранных ранее тарифных факторов могут потерять значимость. Каждый из $t+1$ тарифных факторов по очереди проверяется на значимость с учетом остальных t факторов. Если все $t+1$ тарифные факторы оказались значимыми, то процесс переходит к следующему шагу итерации с $t+1$ тарифными факторами. В противном случае наименее значимый из $t+1$ тарифных факторов исключается. Если исключенный фактор совпадает с принятым в последней фазе выбора, то итерация прекращается. Иначе процесс снова переходит к фазе проверки с оставшимися факторами ($t-1$ старых и 1 новый), и проверяется необходимость исключения дальнейших тарифных факторов. Это повторяется до тех пор, пока все оставшиеся тарифные факторы не станут значимыми. Если оставшиеся тарифные факторы уже были результатом некоторого предыдущего круга итерации, то процесс прекращается, и все множества тарифных факторов, полученные с начала того круга итерации, считаются равнозначными. При первичном же возникновении множества оставшихся тарифных факторов начинается новый круг итерации, причем в фазе выбора снова принимают участие исключенные ранее факторы риска.

В этом заключается вся процедура отбора. Разумеется, пошаговое действие не гарантирует нахождения самой значимой комбинации факторов. При небольшом совокупном количестве факторов можно проверить значимость каждого отдельного элемента в каждом подмножестве факторов (как в фазе проверки). Нельзя также говорить об определенном уровне значимости набора факторов, так как применяемые последовательно критерии не являются независимыми. Но в целом пошаговое действие в высшей степени интуитивно и позволяет получить хорошее представление о взаимной зависимости факторов риска.

Схематичное изложение алгоритма отбора:*

(В) Добавление очередного наилучшего фактора риска.

(П) Являются ли все текущие тарифные факторы значимыми?

(Пд) Если да: Является ли множество тарифных факторов новым?

(Пдд) Если да: Переход к (В).

(Пдн) Если нет: Конец.

(Пн) Если нет: Исключение наименее значимого фактора. Является ли этот фактор последним принятым на этапе (В)?

(Пнд) Если да: Конец.

(Пнн) Если нет: Переход к (П).

2.3.3. ВЫБОР ТАРИФНЫХ ФАКТОРОВ С ПОМОЩЬЮ ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА

Из всех факторов, имеющих значимое влияние на случайную величину убыток на один полисо-год или ставка убытка, логично в первую очередь выбрать фактор с наиболее отчетливыми различиями реализаций этой случайной величины по классам значений. Количественно различие классов можно определить степенью неприятия гипотезы равенства математических ожиданий нормированных годовых убытков. Тем самым задача отбора факторов сводится к проверке гипотезы равенства средних. В настоящем разделе предполагается наличие наблюдений за несколько лет; из разделов 2.3.6 и 2.3.7 мы узнаем, как действовать при наличии только одного годового наблюдения.

Самый известный способ проверки гипотезы равенства нескольких математических ожиданий — *дисперсионный анализ*. Он подразумевает нормально распределенные величины с одинаковой дисперсией. Мы можем выполнить эти требования за счет логарифмирования данных, предположив логнормальную модель распределения из раздела 1.3.5. Будем считать, что у всех факторов риска нормированный убыток в каждом классе распределен логнормально с параметрами θ и σ^2 / ν , где ν — объем класса. В то время как параметр θ варьируется по классам и по факторам риска, параметр σ^2 в дисперсионном анализе предполагается постоянным. Несмотря на некоторую оптимистич-

* В — Выбор; П — Проверка; Пд — Проверка-да; Пдд — Проверка-да-да; Пдн — Проверка-да-нет; Пн — Проверка-нет; Пнд — Проверка-нет-да; Пнн — Проверка-нет-нет.

ность этого предположения, мы все же можем с ним согласиться, учитывая эвристический характер метода отбора факторов. Еще больше нас оправдывает тот факт, что предположение постоянного σ^2 примерно в равной степени затрагивает все факторы риска. Другой метод, представленный в разделе 2.3.5, обходится без этого ограничения. В условиях принятых предположений после логарифмирования данных мы оказались бы в стандартной ситуации однофакторного дисперсионного анализа с фиксированными эффектами, если бы объем везде был одинаков. Но, как мы увидим, дополнительное взвешивание по объему фактически не меняет схемы дисперсионного анализа.

Для *первого потенциального тарифного фактора* обозначим через Z_{ij} и ν_{ij} соответственно нормированный совокупный убыток (убыток на один полисо-год или ставку убытка) и объем i -го класса в j -м году, $i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J$. В принятой нами модели величины

$$W_{ij} = \ln(Z_{ij}), \quad 1 \leq i \leq I, \quad 1 \leq j \leq J,$$

распределены нормально, и

$$E(W_{ij}) = \theta_j,$$

$$\text{Var}(W_{ij}) = \sigma^2 / \nu_{ij}.$$

С помощью обозначений

$$\nu_{i+} = \sum_{j \geq 1} \nu_{ij},$$

$$\nu_{++} = \sum_{i \geq 1} \nu_{i+} = \sum_{i \geq 1} \sum_{j \geq 1} \nu_{ij},$$

$$\underline{W}_{i+} = \sum_{j \geq 1} \nu_{ij} W_{ij} / \nu_{i+},$$

$$\underline{W}_{++} = \sum_{i \geq 1} \nu_{i+} \underline{W}_{i+} / \nu_{++} = \sum_{i \geq 1} \sum_{j \geq 1} \nu_{ij} W_{ij} / \nu_{++}$$

получаем аналогичное принятому в дисперсионном анализе разложение

$$\sum_{i,j} \nu_{ij} (W_{ij} - \underline{W}_{++})^2 = \sum_{i,j} \nu_{ij} (W_{ij} - \underline{W}_{i+})^2 + \sum_{i,j} \nu_{i+} (\underline{W}_{i+} - \underline{W}_{++})^2,$$

где слагаемые независимы. Введем дополнительные обозначения

$$RSS = \sum_{i,j} \nu_{ij} (W_{ij} - \underline{W}_{i+})^2,$$

$$SS = \sum_{i \geq 1} \nu_{i+} (\underline{W}_{i+} - \underline{W}_{++})^2.$$

Случайная величина RSS / σ^2 имеет распределение хи-квадрат с $I(J-1)$ степенями свободы, а SS / σ^2 при нулевой гипотезе

$$\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_I$$

распределение хи-квадрат с $I - 1$ степенями свободы (а в противном случае имеет тенденцию принимать большие значения). Доказательства этих утверждений полностью аналогичны случаю $v_{ij} \equiv 1$, соответствующему обычному дисперсионному анализу. Тогда при справедливости нулевой гипотезы статистика

$$\frac{SS/(I-1)}{RSS/(I(J-1))}$$

имеет F -распределение с $I - 1$ и $I(J - 1)$ степенями свободы (F -критерий). В качестве первого тарифного фактора выбирается фактор риска, у которого F -критерий наиболее явно отвергает нулевую гипотезу равенства математических ожиданий логарифмированных величин убытка (значение статистики критерия максимально превышает соответствующую заданному уровню значимости квантиль F -распределения).

Допустим, уже выбрано $t \geq 1$ тарифных факторов, и для дальнейшей дифференциации тарифов требуется найти наиболее значимый среди оставшихся факторов риска. Каждый из t выбранных тарифных факторов обладает определенным числом классов значений. Назовем *ячейкой* любую возможную комбинацию из t компонент, содержащую ровно по одному классу от каждого из t тарифных факторов. Пусть I — число всех таких ячеек (например, для двух тарифных факторов с m и n классами $I = m \cdot n$). Тогда дополнительный фактор с K классами значений делит каждую из I ячеек на K подъячеек. В каждой из совокупных $I \cdot K$ ячеек случайная величина Z_{ijk} описывает размер совокупного убытка в j -м году, $j = 1, \dots, J$. Предположим, что все $I \cdot J \cdot K$ наблюдений фактически имеются в распоряжении; в конце раздела мы обсудим проблему отсутствия некоторых данных. Как и прежде, наше предположение о распределении означает, что случайные величины

$$W_{ijk} = \ln(Z_{ijk})$$

распределены нормально, и

$$E(W_{ijk}) = \theta_{ik}, \quad 1 \leq j \leq J,$$

$$\text{Var}(W_{ijk}) = \sigma^2 / v_{ijk},$$

где v_{ijk} — объем, соответствующий величине Z_{ijk} . Дополнительный фактор риска не ведет к дальнейшей дифференциации существующих I ячеек при выполнении нулевой гипотезы равенства всех K векторов:

$$(\theta_{1k}, \theta_{2k}, \dots, \theta_{Ik}), \quad 1 \leq k \leq K.$$

Случай $I = 1$ нами был рассмотрен выше. По аналогии с предыдущими обозначениями положим

$$RSS = \sum_{i,j,k} v_{ijk} (W_{ijk} - \underline{W}_{i,+,k})^2,$$

$$SS = \sum_{i,k} v_{i,+,k} (\underline{W}_{i,+,k} - \underline{W}_{i++})^2$$

(знак «+» в индексе означает суммирование, а для подчеркнутых переменных — усреднение по соответствующему индексу). Тогда величина RSS / σ^2 снова имеет распределение хи-квадрат с $I(J - 1)K$ степенями свободы, а SS / σ^2 при справедливости нулевой гипотезы — распределение хи-квадрат с $I(K - 1)$ степенями свободы. Таким образом, статистика

$$\frac{SS/(I(K-1))}{RSS/(I(J-1)K)}$$

при справедливости нулевой гипотезы имеет F -распределение с $I(K - 1)$ и $I(J - 1)K$ степенями свободы. Для дальнейшей дифференциации тарифов выбирается фактор, у которого значение этой статистики максимально превышает границу заданной допустимой области.

Обратим внимание на отличие нашего подхода от обычного двухфакторного дисперсионного анализа при множественном заполнении ячеек (в каждой ячейке содержится более одного наблюдения). В нашем случае статистика SS объединяет в себе квадратичные суммы эффектов взаимодействия и чистых эффектов нового фактора. Тем самым учитывается возможность значимого влияния нового фактора на нормированный убыток при взаимодействии с уже выбранными факторами.

По мере дробления ячеек количество данных в них сокращается и может стать недостаточным даже для приближенной адекватности логнормального распределения исследуемой случайной величине. В частности, мы не вправе предполагать логнормальное распределение в ячейках, содержащих хотя бы одно нулевое значение годового убытка. Такие ячейки можно просто игнорировать (обнулив соответствующие слагаемые в RSS и SS и сократив число степеней свободы), ведь с практической точки зрения влияние тарифного фактора в неубыточных ячейках не имеет большого значения. Другой выход из этой проблемы — уплотнить данные одним из двух следующих способов.

Первый способ — объединить наблюдения всех лет в одно значение. Тогда наша задача становится аналогична (двухфакторному) дисперсионному анализу при простом заполнении ячеек (в каждой ячейке содержится только одно наблюдение). Для определения соответствующего критерия значимости нам потребуется принять дополнительное предположение о структуре средних значений θ_{ik} . Этот подход обсуждается в разделе 2.3.6.

Другой способ указан в следующем разделе и заключается в поиске и объединении (классов) значений, не влияющих на значимость фактора.

2.3.4. ВЫБОР ЗНАЧЕНИЙ ФАКТОРА С ПОМОЩЬЮ ДИХОТОМИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Отклонение нулевой гипотезы равенства средних еще не означает, что средние различаются по всем классам значений рассматриваемого фактора. Для отклонения нулевой гипотезы бывает достаточно одного существенно отличающегося от остальных класса. Чтобы избежать излишнего измельчения та-

рифной сетки и одновременно сократить число классов значений некоторых факторов, можно применить метод предыдущего раздела, рассматривая классы значений одного и того же фактора как отдельные факторы риска.

Разложим произвольно взятый фактор A с I классами значений $i = 1, \dots, I$, на $I - 1$ дихотомических переменных A_i , $1 \leq i \leq I - 1$, следующим образом. В случае метрически или ординально шкалированного фактора упорядочим классы по возрастанию значений (например, фактор «возраст» — по возрастанию значений возрастов). В случае же номинально шкалированного фактора (как, скажем, «семейное положение») упорядочим классы по возрастанию эмпирических средних

$$\bar{z}_{i+} = \sum_{j \geq 1} v_{ij} z_{ij} / \sum_{j \geq 1} v_{ij}$$

наблюдений z_{ij} величины убытка:

$$\bar{z}_{1+} < \bar{z}_{2+} < \dots < \bar{z}_{I+}$$

(в силу непрерывности случайных величин вероятность события равна нулю). Для $i = 1, \dots, I - 1$ положим

$$A_i = \begin{cases} 0 & \text{в классах } 1, 2, \dots, i, \\ 1 & \text{в классах } i+1, i+2, \dots, I. \end{cases}$$

Некоторый фиксированный класс i характеризуется тем, что в нем переменные A_1, \dots, A_{i-1} имеют значение 1, а переменные A_i, \dots, A_{I-1} — значение 0. Тогда переменные A_i могут рассматриваться как новые факторы, имеющие по два класса значений: один содержит объединение классов с 1 по i исходного фактора A (классов с низкими средними убытками или, соответственно, низкими значениями), другой — объединение остальных классов с $i+1$ по I фактора A (классов с высокими средними убытками или, соответственно, высокими значениями). Определенные таким образом дихотомические переменные предназначены для объединения нескольких классов, схожих между собой относительно нормированного убытка (убытка на один полисо-год или ставки убытка). Если бы мы сопоставили каждому классу i индивидуальную дихотомическую переменную \underline{A}_i (где $\underline{A}_i = 1$ в классе i и $\underline{A}_i = 0$ иначе), то отдельному классу было бы намного сложнее стать значимым тарифным фактором, ведь нормированный убыток отдельного класса чаще всего не слишком заметно отличается от среднего по всем прочим классам. (Кроме того, в этом случае понадобилось бы еще определять дихотомические переменные для всех возможных комбинаций классов, в результате количество дихотомических переменных сильно возросло бы.)

Итак, мы заменили множество $\{A, B, C, \dots\}$ всех факторов риска (существенно большим) множеством

$$\{A_1, \dots, A_{I-1}, B_1, \dots, B_{K-1}, C_1, \dots, C_{L-1}, \dots\}$$

дихотомических переменных. Теперь применим метод дисперсионного анализа из предыдущего раздела к множеству всех дихотомических переменных.

При добавлении новой дихотомической переменной каждая из уже существующих ячеек делится только на две новых ячейки. В качестве очередного тарифного фактора отбирается та дихотомическая переменная, при добавлении которой наиболее явно отвергается нулевая гипотеза равенства математических ожиданий в парах ячеек. Если по фактору A отобраны, к примеру, дихотомические переменные A_2 и A_5 , то 1-й и 2-й классы могут быть объединены и иметь одинаковую премию; то же относится к классам 3—5 и 6— I .

Представленный метод имеет ряд *преимуществ* по сравнению с методом предыдущего раздела. Во-первых, соседние классы вместе проверяются на значимость. Во-вторых, данные не сильно дробятся. Эти качества особенно ценны при наличии небольшого количества данных. Наконец, при таком подходе легче понять, почему критерий принял или отверг гипотезу равенства средних, так как каждый раз сравниваются только два значения. Сама статистика критерия тоже становится более прозрачной: при $K = 2$ величина SS приводится к виду

$$SS = \sum_{i=1}^I \frac{v_{i+1} \cdot v_{i+2}}{v_{i+1} + v_{i+2}} (\bar{W}_{i+1} - \bar{W}_{i+2})^2,$$

где I обозначает число уже существующих ячеек, а третий индекс $k = 1$ и $k = 2$ — соответственно первое и второе значения исследуемой дихотомической переменной. Это выражение нам уже знакомо из раздела 2.2.5 как (многоточное) расстояние Уорда. Но если для образования класса требовалось, чтобы расстояние между значениями фактора было как можно меньшим, то для отбора фактора оно должно быть как можно большим.

При необходимости можно и далее укрупнить структуру данных. После выбора первой значимой дихотомической переменной совокупность всех рисков делится на два класса K_1 и K_2 . В качестве следующего тарифного фактора выбирается дихотомическая переменная, наиболее значимо делящая оба класса *вместе*. Можно также рассматривать каждый из двух классов *отдельно* как новую совокупность рисков и делить ее посредством *индивидуальной дихотомической переменной*. При этом в классе K_1 самой значимой не обязательно будет та же дихотомическая переменная, что и в классе K_2 . Раздельный подход способствует дальнейшей экономии данных, предотвращая ситуации, когда некоторая дихотомическая переменная учитывается в тарифах групп рисков, для которых она вовсе не значима. Но ради этого придется пожертвовать простотой тарифной сетки: при раздельном способе ветви тарификации могут различаться по длине и основываться на разных факторах. Кроме того, методы выравнивания из главы 2.4 в этом случае неприменимы.

2.3.5. ВЫБОР ТАРИФНЫХ ФАКТОРОВ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ОТНОШЕНИЯ ПРАВДОПОДОБИЙ

Метод отбора тарифных факторов, основанный на дисперсионном анализе, подразумевает конкретное распределение переменной убытка, а именно лог-

нормальное распределение с одинаковым всюду параметром формы. Используемый при этом критерий равенства средних является (если не принимать во внимание незначительного преобразования статистики критерия) частным случаем более общего статистического метода, подходящего для любого распределения. Мы имеем в виду метод отношения правдоподобий. Продемонстрируем его на примере обратного гауссовского распределения, позволяющего легко рассчитать оценки максимального правдоподобия (см. раздел 1.3.4).

По сравнению с предыдущим методом здесь изменяется только статистика критерия, а сам принцип отбора переменных остается прежним (как в разделе 2.3.2). Поэтому нам достаточно описать только один шаг отбора. Пусть выбранные ранее тарифные факторы делят риски своими классами значений на $I \geq 1$ ячеек, для каждой из которых имеются наблюдения за $J \geq 2$ лет. В следующем разделе мы покажем, как действовать при наличии наблюдений только за один год. Дополнительный фактор с $K \geq 2$ классами значений делит каждую ячейку на K подъячеек. В каждой из $I \cdot K$ ячеек нормированные на соответствующие объемы v_{ijk} величины убытков (убытки на один полис-год или ставки убытка) Z_{ijk} , $1 \leq j \leq J$, имеют одинаковые математические ожидания $E(Z_{ijk}) = \mu_{ik}$, $1 \leq i \leq I$, $1 \leq k \leq K$. Наша задача — проверить нулевую гипотезу равенства векторов математических ожиданий

$$M_k = (\mu_{1k}, \mu_{2k}, \dots, \mu_{Ik}), \quad 1 \leq k \leq K.$$

Вычислим функцию правдоподобия всех наблюдений z_{ijk} сначала при условии различных векторов математических ожиданий M_1, \dots, M_K , а затем при условии полностью одинаковых векторов математических ожиданий $M_1 = \dots = M_K = M$. Пусть $L_1 = L(M_1, \dots, M_K)$ и $L_0 = L(M)$ — соответствующие функции правдоподобия. Согласно общей теории метода отношения правдоподобий, статистика

$$D = 2 \cdot \ln(L_1 / L_0) = 2 \cdot \ln(L_1) - 2 \cdot \ln(L_0)$$

при справедливости нулевой гипотезы равенства всех векторов математических ожиданий имеет (асимптотическое) распределение хи-квадрат с $I(K-1)$ степенями свободы (число сэкономленных параметров). Если статистика D превышает заданную заранее границу значимости, то следует отвергнуть гипотезу равенства векторов математических ожиданий и тем признать дополнительный фактор риска значимым. Этот метод позволяет отказаться от предположения одинакового для всех ячеек параметра формы, требуемого в дисперсионном анализе, и считать, например, что величина Z_{ijk} имеет обратное гауссовское распределение с математическим ожиданием μ_{ik} и параметром формы $v_{ijk}\beta_{ik}$, где v_{ijk} — известный объем. Тогда, согласно формулам раздела 1.3.4, оценки максимального правдоподобия в ячейке (i, k) равны

$$\hat{\mu}_{ik} = \sum_{j \geq 1} v_{ijk} z_{ijk} / \sum_{j \geq 1} v_{ijk},$$

$$\hat{\beta}_{ik} = J / \sum_{j \geq 1} v_{ijk} (1/z_{ijk} - 1/\hat{\mu}_{ik}).$$

Для удвоенной функции правдоподобия получается выражение

$$2 \cdot \ln(L_1) = J \sum_{i,k} \ln(\hat{\beta}_{ik}) + \sum_{i,j,k} \ln(v_{ijk} / z_{ijk}^3) - I \cdot J \cdot K(1 + \ln(2\pi)).$$

При справедливости нулевой гипотезы равенства векторов математических ожиданий

$$(\mu_{1k}, \mu_{2k}, \dots, \mu_{Ik}) = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_I), \quad 1 \leq k \leq K,$$

формулы для расчета оценок правдоподобия имеют вид

$$\hat{\mu}_i = \sum_{j,k} v_{ijk} z_{ijk} \hat{\beta}_{ik} / \sum_{j,k} v_{ijk} \hat{\beta}_{ik},$$

$$\hat{\beta}_{ik} = J / \sum_{j \geq 1} v_{ijk} (z_{ijk} / \hat{\mu}_i^2 - 2 / \hat{\mu}_i + 1 / z_{ijk}).$$

Значения оценок находятся попеременно методом последовательных приближений на основании стартовых значений $\hat{\beta}_{ik} = \hat{\beta}_{ik}$. Удвоенная функция правдоподобия составит

$$2 \cdot \ln(L_0) = J \sum_{i,k} \ln(\hat{\beta}_{ik}) + \sum_{i,j,k} \ln(v_{ijk} / z_{ijk}^3) - I \cdot J \cdot K(1 + \ln(2\pi)).$$

Теперь можно выписать формулу для статистики метода отношения правдоподобий:

$$D = 2 \cdot \ln(L_1) - 2 \cdot \ln(L_0) = J \sum_{i,k} \ln(\hat{\beta}_{ik} / \hat{\beta}_{ik}).$$

2.3.6. ВЫБОР ТАРИФНЫХ ФАКТОРОВ С ПОМОЩЬЮ ПЕРЕКРЕСТНОЙ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ НАБЛЮДЕНИЙ ЗА ОДИН ГОД

При наличии только одного годового наблюдения ($J = 1$) предыдущие модели оказываются чрезмерно параметризованными: фазе итерации соответствуют $I \cdot K$ данных $\{z_{ik}\}$ и, как минимум, $I \cdot K + 1$ параметров (θ_{ik} и σ^2 или μ_{ik} и $\beta_{11}, \dots, \beta_{IK}$). Для использования прежних методов потребуется сократить число параметров. В условиях логнормального распределения (см. раздел 2.3.3) удобно действовать по аналогии с двухфакторным дисперсионным анализом и предположить модель

$$E(\ln(Z_{ik})) = E(W_{ik}) = \theta + a_i + b_k, \quad 1 \leq i \leq I, \quad 1 \leq k \leq K,$$

$$\Sigma a_i = 0 \text{ и } \Sigma b_k = 0,$$

содержащую всего $I + K - 1$ свободных параметра. Из статистики критерия двухфакторного дисперсионного анализа посредством взвешивания по объему получается статистика для нашей логнормальной модели

$$\frac{SS/(K-1)}{RSS/((I-1)(K-1))} = (I-1)SS/RSS,$$

где (по аналогии с обозначениями из раздела 2.3.3)

$$SS = \sum_{k \geq 1} v_{+k} (\underline{W}_{+k} - \underline{W}_{++})^2,$$

$$RSS = \sum_{i,k} v_{ik} (W_{ik} - \underline{W}_{i+} - \underline{W}_{+k} + \underline{W}_{++})^2.$$

При справедливости *нулевой гипотезы* $b_1 = b_2 = \dots = b_K = 0$ эта статистика имеет F -распределение с $K - 1$ и $(I - 1)(K - 1)$ степенями свободы. Нулевая гипотеза означает, что различие в математических ожиданиях $E(W_{ik})$ связано только с различием параметров a_1, \dots, a_I , и дополнительный фактор с K классами значений не влияет на случайную величину убытка.

Условие $I = 1$ не допускает проведения двухфакторного дисперсионного анализа на начальном шаге отбора — при выборе первого тарифного фактора. Критерием для отбора первого тарифного фактора может служить значение статистики

$$T = \sum_{k \geq 1} v_k (W_k - \underline{W}_+)^2 / (K - 1).$$

При нулевой гипотезе равенства математических ожиданий величин $W_k = \ln(Z_k)$ всех классов $k = 1, \dots, K$ значений рассматриваемого фактора эта статистика имеет математическое ожидание σ^2 . Первым выбирается фактор с наибольшим значением статистики T , то есть наиболее отчетливыми различиями средних по классам (в любом случае предполагается значимость фактора). Обратим внимание, сравниваемые факторы должны содержать примерно одинаковое число K классов, поскольку для факторов с небольшим числом классов более вероятны высокие значения T . Это следует из формулы $Var(T) = 2\sigma^4 / (K - 1)$.

Аналогичная параметризация позволяет применить и *метод отношения правдоподобий* из раздела 2.3.5. На этот раз представим параметры $\mu_{ik} = E(Z_{ik})$ в мультипликативной форме

$$\mu_{ik} = a_i b_k, \quad 1 \leq i \leq I, \quad 1 \leq k \leq K,$$

во избежание отрицательных значений μ_{ik} . Отказавшись от эффектов взаимодействия, вместо $I \cdot K$ параметров мы будем иметь всего лишь $I + K - 1$ параметров $a_2, \dots, a_I, b_1, \dots, b_K$ (не ограничивая общности, можно положить $a_1 = 1$, так как преобразование множителей $\underline{a}_i = a_i / a_1, \underline{b}_k = b_k a_1$ не меняет значений параметров μ_{ik}).

В отличие от предыдущего случая, сейчас требуется сократить еще и число параметров формы. Предположим параметр формы величин убытка Z_{ik} оди-

наковым во всех $I \cdot K$ ячейках. Тогда, согласно разделу 1.3.6, обратное гауссовское распределение для моделирования Z_{ik} не подойдет. Остаются только гамма-распределение и модифицированное распределение Пуассона. (В разделе 2.4.7 мы объясним, почему для β_{ik} невозможно такое же разложение, как для μ_{ik} .)

Для проверки значимости вновь принятого фактора риска с K классами при условии уже имеющихся I ячеек достаточно противопоставить модель со свободными параметрами

$$a_2, \dots, a_I, b_1 = \dots = b_K = b \text{ плюс параметр формы (нулевая гипотеза)}$$

модели со свободными параметрами

$$a_2, \dots, a_I, b_1, \dots, b_K \text{ плюс параметр формы}$$

с помощью метода отношения правдоподобий. В случае незначимого отличия второй модели от первой гипотеза $b_1 = \dots = b_K = b$ принимается. Это означает, что различия μ_{ik} обусловлены только различием параметров a_i , то есть различием уже существующих ячеек. Соответственно, новый фактор риска отвергается в качестве тарифного фактора.

Рассмотренные аддитивное и мультипликативное разложения математического ожидания используются при решении задачи следующей главы 2.4, где также указан способ вычисления оценок правдоподобия при мультипликативном разложении математических ожиданий μ_{ik} . В модели с дополнительным условием $b_1 = \dots = b_K = b$ оценивание проводится аналогично. После подстановки оценок параметров в выражение удвоенной разности функций правдоподобия снова получается статистика, имеющая при нулевой гипотезе одинакового соответствия обеих моделей (асимптотическое) распределение хи-квадрат с $K - 1$ степенями свободы. Если гипотеза не отвергается, значит, исследуемый фактор не содержит значимой дополнительной информации.

В условиях принятой перекрестной параметризации метод отношения правдоподобий не применим на первом шаге отбора. На помощь приходит статистика

$$T_0 = \sum_{k=1}^K v_k (Z_k - \hat{\mu})^2 / (K - 1),$$

где

$$\hat{\mu} = \sum_{k=1}^K v_k Z_k / \sum_{k=1}^K v_k.$$

В силу предположения одинакового для всех ячеек параметра формы, для дисперсии величины Z_k справедливо представление $Var(Z_k) = s^2 / v_k$. Тогда статистика T_0 имеет при нулевой гипотезе $E(Z_k) = \mu$ одинаковых математических ожиданий нормированных убытков Z_k классов $k = 1, \dots, K$ математическое ожидание $E(T_0) = s^2$ вне зависимости от рассматриваемого фактора. Первым выбирается (значимый) фактор риска с наибольшим значением T_0 . Как

и при работе со статистикой T , у сравниваемых факторов должно быть примерно одинаковое число классов.

2.3.7. ВЫБОР ТАРИФНЫХ ФАКТОРОВ ПРИ НАЛИЧИИ НАБЛЮДЕНИЙ ЗА ОДИН ГОД С ПОМОЩЬЮ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Располагая только одним годовым наблюдением по каждому классу рисков, но не желая связывать себя перекрестной параметризацией как в разделе 2.3.6, мы можем устранить лишние параметры с помощью дополнительной информации. Ниже предлагаются два способа: один основан на индивидуальной модели, другой — на коллективной. В обоих случаях параметр, принимаемый равным для всех ячеек, считается заранее известным. Для упрощения записи допустим, что только одна ячейка делится новым фактором риска с K классами значений на K подъячеек; обобщение на случай I таких ячеек очевидно.

Имея нормированные на известные объемы v_k величины убытков Z_k , $1 \leq k \leq K$, мы хотим проверить гипотезу

$$\mu_1 = \dots = \mu_K = \mu$$

равенства математических ожиданий $\mu_k = E(Z_k)$.

Для применения *индивидуальной модели* при наличии единственного наблюдения z_k по каждому классу $k = 1, \dots, K$ требуется знать параметр формы распределения случайной величины Z_k . Оценка параметра формы может быть получена, например, на основании данных по каждому отдельному риску или внешней статистики. Ради простоты предположим одинаковый параметр формы для всех ячеек. Обратное гауссовское распределение для описания Z_k в этом случае не подходит (см. раздел 1.3.6). Допустим для Z_k *гамма-распределение* с математическим ожиданием μ_k и параметром формы $v_k \alpha$, где α и v_k известны. Тогда *нулевую гипотезу* $\mu_1 = \dots = \mu_K = \mu$ можно проверить с помощью метода отношения правдоподобий, как в разделе 2.3.5. Логарифмированное правдоподобие наблюдений z_k имеет вид

$$\ln(L_1) = \sum_{k=1}^K (v_k \alpha \ln(z_k v_k \alpha / \mu_k) - z_k v_k \alpha / \mu_k - \ln(z_k \Gamma(v_k \alpha))).$$

При однократном наблюдении каждого параметра μ_k оценки максимального правдоподобия равны

$$\hat{\mu}_k = z_k, \quad 1 \leq k \leq K.$$

При справедливости нулевой гипотезы $\mu_k = \mu$ из условия максимума правдоподобия

$$\ln(L_0) = \sum_{k=1}^K (v_k \alpha \ln(z_k v_k \alpha / \mu) - z_k v_k \alpha / \mu - \ln(z_k \Gamma(v_k \alpha)))$$

следует обычная оценка максимального правдоподобия параметра μ (см. раздел 1.3.8, таблицы распределений)

$$\hat{\mu} = \sum_{k=1}^K v_k z_k / \sum_{k=1}^K v_k.$$

Подставив оценки в функции правдоподобий, находим выражение для статистики метода отношения правдоподобий:

$$2 \ln(L_1) - 2 \ln(L_0) = 2 \alpha \sum_{k=1}^K v_k \ln(\hat{\mu} / z_k).$$

Эта статистика при нулевой гипотезе распределена (асимптотически) как хи-квадрат с $K - 1$ степенями свободы ($K - 1$ параметров нами было сэкономлено). Как и в разделе 2.3.2, последовательно выбираются факторы, наиболее явно отвергающие нулевую гипотезу.

Если вместо гамма-распределения предположить *модифицированное распределение Пуассона* с известной и одинаковой для всех ячеек денежной единицей w , то статистика метода отношения правдоподобий

$$2 \ln(L_1) - 2 \ln(L_0) = \frac{2}{w} \sum_{k=1}^K v_k z_k \ln(z_k / \hat{\mu})$$

(где $\hat{\mu}$ определяется так же, как и ранее) будет асимптотически эквивалентна статистике

$$\frac{1}{w} \sum_{k=1}^K v_k \frac{(z_k - \hat{\mu})^2}{\hat{\mu}} = \frac{1}{w} \sum_{k=1}^K \frac{(v_k z_k - v_k \hat{\mu})^2}{v_k \hat{\mu}}.$$

Последняя с точностью до множителя $1/w$ совпадает с обычной статистикой критерия хи-квадрат

$$\sum_{k=1}^K \frac{(n_k - v_k \hat{\mu})^2}{v_k \hat{\mu}} = \sum_{k=1}^K \frac{(n_k - p_k n_+)^2}{p_k n_+},$$

для проверки гипотезы равенства частоты убытков $\hat{\mu}$ во всех классах (ожидаемое число убытков в классе k равно $v_k \hat{\mu}$) в случае пуассоновского числа убытков n_k ($n_k = v_k z_k$ и $p_k = v_k / v_+$). Эта статистика не требует дополнительной информации и может использоваться для отбора факторов на основании числа убытков. Представление статистики метода отношения правдоподобий в форме статистики критерия хи-квадрат способствует пониманию сути метода отношения правдоподобий. Если значения z_1, \dots, z_K , скорректированные с учетом объемов, отклоняются от всюду одинакового $\hat{\mu}$ не больше, чем у обычной выборки из модифицированного распределения Пуассона с параметрами μ и w , значит, фактор не является значимым.

Теперь воспользуемся *коллективной моделью* (см. раздел 1.4.4)

$$v_k Z_k = S_k = \sum_{n=1}^{N_k} X_{kn}$$

и предположим для совокупного убытка $S_k = v_k Z_k$ *составное распределение Пуассон-гамма* с распределенным по закону Пуассона числом убытков N_k (с параметром $v_k \theta_k$) и одинаково гамма-распределенными размерами убытков X_{kn} (с математическим ожиданием m_k и параметром формы α). Предположение одинакового для всех ячеек коэффициента вариации $1/\sqrt{\alpha}$ размера убытка, как правило, реалистично. Величина α может быть оценена на основании данных по отдельным полисам и в дальнейшем будет считаться известной. Помимо наблюдений z_k и объемов v_k , в этой модели должно быть известно число убытков n_k (реализация случайной величины N_k). При наличии n_k убытков случайная величина S_k имеет гамма-распределение с математическим ожиданием $n_k m_k$ и параметром формы $n_k \alpha$. Правдоподобие наблюдаемых данных в этом случае составит

$$L_1 = \prod_{k=1}^K \left\{ e^{-v_k \theta_k} \frac{(v_k \theta_k)^{n_k}}{n_k!} \left(\frac{v_k z_k \alpha}{m_k} \right)^{n_k \alpha} \frac{e^{-v_k z_k \alpha / m_k}}{v_k z_k \Gamma(n_k \alpha)} \right\}.$$

Располагая единственным наблюдением для каждого параметра, оценки максимального правдоподобия параметров вычисляем по формулам

$$\hat{\theta}_k = n_k / v_k \quad \text{и} \quad \hat{m}_k = v_k z_k / n_k.$$

При справедливости *нулевой гипотезы*

$$\theta_k m_k = \mu, \quad 1 \leq k \leq K,$$

одинаковых математических ожиданий $E(Z_1) = \dots = E(Z_K) = \mu$ правдоподобие модели (после замены $m_k = \mu / \theta_k$) имеет вид

$$\ln(L_0) = \sum_{k=1}^K (-v_k \theta_k + n_k \ln(v_k \theta_k) - \ln(n_k!) + n_k \alpha \ln(v_k z_k \alpha \theta_k / \mu) - v_k z_k \alpha \theta_k / \mu - \ln(v_k z_k \Gamma(n_k \alpha))).$$

Из условия максимальности $\ln(L_0)$ следуют уравнения

$$\hat{\theta}_k = \frac{n_k(1+\alpha)}{v_k + v_k z_k \alpha / \hat{\mu}} = \hat{\theta}_k \cdot \frac{1+\alpha}{1+\alpha z_k / \hat{\mu}}, \quad 1 \leq k \leq K,$$

$$\hat{\mu} = \sum_{k=1}^K v_k z_k \hat{\theta}_k / \sum_{k=1}^K n_k = \sum_{k=1}^K \frac{n_k}{n_+} \cdot \hat{\theta}_k \hat{m}_k, \quad 1 \leq k \leq K,$$

откуда неизвестные оценки параметров находятся методом последовательных приближений на основании стартовых значений $\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_k$. После подстановки оценок $\hat{\theta}_k$, \hat{m}_k в L_1 и $\hat{\theta}_k$, $\hat{\mu}$ в L_0 статистика $2\ln(L_1 / L_0)$ метода отношения правдоподобий зависит только от известных данных v_k , n_k , z_k , α и при справедливости нулевой гипотезы распределена асимптотически как хи-квадрат с $K - 1$ степенями свободы. Далее отбор переменных проводится в обычном порядке. Вместо гамма-распределения для размера убытка разрешается использовать обратное гауссовское распределение. Оно обладает более асим-

метричной формой и часто точнее описывает данные. Логнормальное распределение в данном случае нас не устраивает отсутствием возможности явного расчета сверток.

2.3.8. ВЫВОД И УКАЗАНИЯ К ПРИМЕНЕНИЮ

Все рассмотренные методы отбора тарифных факторов сводятся к проверке гипотезы равенства нескольких математических ожиданий. Не гарантируя достижения оптимума, последовательный отбор, тем не менее, позволяет легко выявить взаимную зависимость факторов риска. Пошаговая оптимизация является стандартным методом многомерной статистики и уже использовалась нами в главе 2.2 при построении классов. Там тоже проверялась гипотеза равенства математических ожиданий, но от статистики критерия требовалась как можно меньшая значимость, в то время как здесь, наоборот, как можно большая. В этом смысле задачу выбора тарифных факторов можно понимать как обратную задаче кластеризации.

Отбор с помощью метода отношения правдоподобий мы продемонстрировали в разделе 2.3.5 на примере обратного гауссовского распределения. В точности такой же алгоритм действует и для других моделей распределения. В условиях логнормального распределения он аналогичен дисперсионному анализу с той лишь разницей, что параметр формы не предполагается одинаковым для всех ячеек.

Не зависящие от распределения критерии проверки гипотезы равенства математических ожиданий менее пригодны для наших целей. Для выбора первого тарифного фактора еще подойдет критерий Крюскала—Уэллеса (Kruskal—Wallis) (с той же аргументацией, что и в разделе 2.2.2 в пользу критерия кластеризации Манна—Уитни—Уилкоксона). Но в фазе итерации обойтись без модели распределения не удастся — к двухфакторной модели с множественным заполнением ячеек не применим ни один критерий, не зависящий от распределения. Только объединив данные всех лет наблюдения в одно значение, мы смогли бы воспользоваться критерием Фридмана (Friedman). Параметрические методы обладают по сравнению с ним преимуществом в моделировании различий дисперсий.

Следует обратить внимание и на теоретическую слабость методов. Мы всегда исходили из предположения, что нормированный убыток в каждой ячейке удовлетворяет определенной модели распределения, например гамма-распределению. Даже если бы это предположение в какой-то момент (скажем, после выбора первого тарифного фактора) в точности выполнялось, добавление следующего фактора, скорее всего, вело бы к изменению модели, так как сумма гамма-распределенных совокупных убытков двух (подъ)ячеек с различными математическими ожиданиями μ_1 , μ_2 и параметрами формы α_1 , α_2 имеет гамма-распределение лишь при условии $\mu_1 / \alpha_1 = \mu_2 / \alpha_2$. Но это не должно нас смущать, ведь теоретическая модель распределения — в любом случае всего лишь аппроксимация. Главное, чтобы распределение хорошо моделировало первые два момента.

Отбор факторов не стоит проводить схематично. Более того, очень важно детально проверять результат каждого шага. Если некоторый фактор отвергается критерием — это еще не означает отсутствие значимых ячеек (i, k) или даже целых строк $((i, 1), \dots, (i, K))$ из общего числа $I \cdot K$ ячеек. Значимые ячейки легко выявляются проверкой отдельных слагаемых статистики критерия. Рекомендуется по окончании отбора еще раз тщательно проанализировать полученную комбинацию факторов и при необходимости далее разбить некоторые ячейки при помощи дихотомических переменных.

Публикации о применении методов, использующих статистические данные нескольких лет, неизвестны. Зато имеются две публикации о реализации методов из раздела 2.3.7. В работе Питкяйнена (*Pitkäinen P. Tariff Theory // ASTIN Bulletin, 1975, p. 204–228*) рассказывается о применении критерия, основанного на модифицированном распределении Пуассона, к факторам рисков страхования автогражданской ответственности в Финляндии. Работа Халлина и Ингенблека (*Hallin M., Ingenbleek J.-F. The Swedish Automobile Portfolio in 1977 — a statistical study // Scandinavian Actuarial Journal, 1983, p. 49–64*) иллюстрирует метод на базе коллективной модели.

Как говорилось в разделе 2.3.1, при наличии данных по отдельным полисам отбор тарифных факторов может производиться по стандартным статистическим методам (регрессионный и дискриминантный анализ). Применение их к портфелю полисов страхования автогражданской ответственности демонстрируется в работах: *Beuthe M., Van Namen Ph. La sélection des assurés et la détermination des primes d'assurances par l'analyse discriminante // Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 1975, S. 137–156; Masure L. Les méthodes de l'analyse discriminante appliquées aux problèmes de l'assurance automobile // Bulletin de l'Association Royale des Actuaires Belges, 1978, p. 29–51; Lemaire J. Selection procedures of regression analysis applied to automobile insurance // Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 1977, S. 143–160; Ibid., 1979, S. 65–72; Lemaire J. Automobile Insurance. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1985.*

В случае когда целевой переменной служит не нормированный убыток (убыток на один полисо-год или ставка убытка), а вероятность убытка, регрессионному анализу аналогична логит-регрессия. Применение логит-регрессии к данным страхования автогражданской ответственности описано в статье Бейрланта и др. (*Beirlant J. u. a. Statistical risk evaluation applied to (Belgian) car insurance // Insurance: Mathematics & Economics, 1991, p. 289–302.*

Более адекватный подход, чем названные классические регрессионные методы, представляют собой так называемые обобщенные линейные модели (см. раздел 2.4.9), учитывающие асимметрию распределения убытка, а также возможную нелинейность влияния факторов. Примеры приложения обобщенных линейных моделей приводятся в работах: *Stroinski K. J., Currie I. D. Selection of Variables for Automobile Insurance Rating // Insurance: Mathematics & Economics, 1989, 8, p. 35–46; Renshaw A. E. Modelling the Claims Process in the Presence of Covariates // ASTIN Bulletin, 1994, 24, p. 265–285.*

Наконец, следует упомянуть брошюру Штикера (*Sticker K. Analyse der Tarifstruktur für die Haftpflichtversicherung von Personenkraftwagen. Karlsruhe:*

Versicherungswirtschaft, 1984), в которой анализируется выборка результатов немецкого автострахования. Статистические методы при этом не применяются, но с помощью графиков выявляется зависимость между отдельными факторами.

2.4. Методы выравнивания при многократной классификации рисков

2.4.1. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ И ОБЗОР

Обычно в тарифе учитывается не один, а несколько факторов риска. Например, до 1994 года тариф обязательного страхования автогражданской ответственности в Германии зависел от трех факторов: мощности транспортного средства (11 классов по киловаттам), тарифной группы (17 классов по территории использования транспортного средства и профессии) и индивидуальной истории убытков (22 класса бонус-малус). Итого совокупность рисков страхования автогражданской ответственности делилась на $11 \cdot 17 \cdot 22 = 4114$ тарифных классов, кратко называемых ячейками. Мы привели пример полной многократной *перекрестной классификации*. Но иногда некоторые тарифные факторы вводятся только для части рисков. Так, фактор «тарифная группа» объединяет два фактора: «территория использования транспортного средства» и «профессия». Последний имеет три класса: «фермер», «служащий» и «остальные», причем «остальные» делятся по территории использования транспортного средства на 10 классов, служащие — на 6 классов, а фермеры составляют один класс. В общей сложности получается 17 классов по территории использования транспортного средства. Собственно говоря, тариф классифицирован четырехкратно, но в отношении фактора «территория использования транспортного средства» классификация является неполной (в классах профессий «фермер» и «служащий»). Из сказанного одновременно становится ясно, как из неполной четырехкратной классификации сделать полную трехкратную. В дальнейшем мы ограничимся только полными двукратными классификациями; общий случай полной многократной классификации рассматривается совершенно аналогично и не приносит новых результатов или проблем.

Как мы только что убедились, даже при небольшом количестве тарифных факторов *число тарифных классов* может оказаться очень большим. Обычно далеко не все классы содержат достаточное для их изолированной тарифика-

Таблица 2.4.1.1. Схема с маргинальными множителями в случае двукратной классификации тарифов

	y_1	y_2	y_K
x_1	$x_1 y_1$	$x_1 y_2$	$x_1 y_K$
x_2	$x_2 y_1$	$x_2 y_2$	$x_2 y_K$
.
.
.
x_I	$x_I y_1$	$x_I y_2$	$x_I y_K$

ции число рисков. Даже при средней заполненности класса отдельные большие убытки искажают представление об истинном потенциале убытков. Для получения *стабильных* тарифов целесообразно тарифицировать каждый класс (ячейку) с привлечением статистики соседних ячеек.

Учитывая матричную структуру тарифной сетки, определим для каждого класса значений каждого тарифного фактора *маргинальный множитель* (или *маргинальное слагаемое*) таким образом, чтобы тариф в каждом тарифном классе рассчитывался как произведение (или сумма) соответствующих маргинальных множителей (маргинальных слагаемых). В случае двух тарифных факторов с I и K классами получим схему, представленную в таблице 2.4.1.1.

Через x_i , y_k мы будем обозначать маргинальные множители (слагаемые), относящиеся, соответственно, к i -му значению фактора x и k -му значению фактора y . С помощью маргинальных параметров *потребная премия* b_{ik} для рисков ячейки (i, k) вычисляется по формуле

$$b_{ik} = x_i y_k \text{ (или } b_{ik} = x_i + y_k), \quad 1 \leq i \leq I, \quad 1 \leq k \leq K.$$

Так как параметры x_i и y_k предполагается рассчитывать на основании статистики всей строки или, соответственно, всего столбца, премия $b_{ik} = x_i y_k$ ячейки (i, k) будет учитывать историю всех ячеек, принадлежащих тому же классу значений хотя бы по одному тарифному фактору. При этом наблюдается *приятный «побочный эффект»*: вместо $I \cdot K$ значений b_{ik} для заполнения тарифной сетки становится достаточно всего $I + K$ значений x_i , y_k .

С практической точки зрения привлекателен также следующий аспект. Множители x_i , y_k определяются лишь с точностью до некоторого числа $c \neq 0$, и при переходе к множителям $x_i c$, y_k / c значения потребных премий не меняются: $(x_i c) \cdot (y_k / c) = x_i y_k = b_{ik}$ (в аддитивном случае ситуация аналогична). Это позволяет обойтись $I + K - 1$ параметрами, взяв, например, премию b_{11} за основную и положив (в мультипликативном случае) соответствующие множители \bar{x}_1 и \bar{y}_1 равными единице. Тогда остальные премии будут рассчитываться по формуле $b_{ik} = b_{11} \bar{x}_i \bar{y}_k$, где $\bar{x}_i = x_i / x_1$ и $\bar{y}_k = y_k / y_1$. Ввиду *безразмерности* маргинальных множителей \bar{x}_i , \bar{y}_k , учет инфляции в премиях при неизменной структуре классов сведется к корректировке одного значения, а именно основной

Таблица 2.4.1.2. Маргинальные множители шведского тарифа автострахования

Годовой пробег (км)	Множитель	Срок безубыточного страхования (лет)	Множитель
— 10 000	0,8	0	1,0
10 001—15 000	0,9	1	0,8
15 001—20 000	1,0	2	0,7
20 001—25 000	1,1	3	0,6
25 001—	1,2	4	0,5
		5	0,4
		6	0,25
Модель транспортного средства		Регион использования транспортного средства	
10 классов моделей с множителями от 1,0 до 2,0		7 регионов с множителями от 0,81 до 1,14	

премии b_{11} . Пример тарифа такого рода — шведский тариф автострахования (см. табл. 2.4.1.2).

В следующих разделах этой главы речь пойдет о расчете маргинальных множителей (слагаемых) на основании статистических данных всех тарифных классов. В большинстве случаев будут рассматриваться маргинальные множители — для маргинальных слагаемых выкладки аналогичны. Существенный недостаток *аддитивного представления* — возможность получения отрицательных маргинальных слагаемых и отрицательных потребных премий $b_{ik} = x_i + y_k$ в некоторых ячейках.

В этой главе мы исходим из *следующих предпосылок*. Для каждого тарифного класса (i, k) , $1 \leq i \leq I$, $1 \leq k \leq K$, известны совокупный убыток s_{ik} (складывающийся из данных одного года или нескольких лет; первый случай особенно важен с точки зрения *актуальности тарифа*), объем v_{ik} (число полисо-лет или совокупная страховая сумма соответствующих рисков) и, следовательно, нормированный на объем совокупный убыток $z_{ik} = s_{ik} / v_{ik}$. В общем случае, включая использование рыночной статистики, размеры отдельных убытков неизвестны.

В разделе 2.4.2 объясняется, почему в качестве маргинальных множителей нельзя использовать маргинальные средние по каждому классу значений. В разделе 2.4.3 обсуждаются два классических не зависящих от распределения метода расчета маргинальных множителей. В разделах 2.4.4—2.4.7 методы расчета маргинальных множителей строятся на основе четырех моделей распределения из главы 1.3 (индивидуальная модель). При этом обнаруживаются новые качества двух не зависящих от распределения методов. Наконец, в разделе 2.4.8 предполагается известным число убытков по каждой ячейке, что дает возможность применения коллективной модели. Во всей главе случайные величины, относящиеся к разным рискам, принимаются независимыми.

2.4.2. ТАРИФИКАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ МАРГИНАЛЬНЫХ СРЕДНИХ

Предположим полную двукратную классификацию с $I \cdot K$ ячейками и наличие данных об объеме v_{ik} и совокупном убытке s_{ik} каждой ячейки (i, k) . На основании этих данных вычисляется значение нормированного убытка (убытка на один полисо-год или ставки убытка) $z_{ik} = s_{ik} / v_{ik}$ (необходимое для тарификации отдельных рисков). Требуется найти тарифные множители x_i, y_k , максимально приближающие своим произведением $x_i y_k$ значение $z_{ik} = s_{ik} / v_{ik}$ в каждой ячейке (i, k) .

Казалось бы, разумно привлечь в качестве тарифных множителей маргинальные средние

$$x_i = \sum_{k \geq 1} s_{ik} / \sum_{k \geq 1} v_{ik}, \quad 1 \leq i \leq I,$$

$$y_k = \left(\sum_{i \geq 1} s_{ik} / \sum_{i \geq 1} v_{ik} \right) / z, \quad 1 \leq k \leq K,$$

где

$$z = \sum_{i \geq 1} \sum_{k \geq 1} s_{ik} / \sum_{i \geq 1} \sum_{k \geq 1} v_{ik}$$

совокупное среднее. Однако на практике маргинальными средними не достигается приемлемой аппроксимации наблюдаемых убытков $z_{ik} = s_{ik} / v_{ik}$. В подтверждение сказанного произведем расчет на примере голландской статистики страхования автогражданской ответственности, представленной в таблице 2.4.2.1.

Таблица 2.4.2.1. Пример двукратной классификации рисков страхования автогражданской ответственности (данные округлены)

Грузоподъемность		Использование		Итого
		в личных целях	в профессиональных целях	
Низкая	s_{1k}	1 800 000	69 000	1 869 000
	v_{1k}	9 000	300	9 300
	z_{1k}	200	230	201,0
Средняя	s_{2k}	1 320 000	177 100	1 497 100
	v_{2k}	6 000	700	6 700
	z_{2k}	220	253	223,4
Высокая	s_{3k}	720 000	276 000	996 000
	v_{3k}	3 000	1 000	4 000
	z_{3k}	240	276	249
Итого	s_{+k}	3 840 000	522 100	4 362 100
	v_{+k}	18 000	2 000	20 000
	z_{+k}	213,3	261,1	218,1

В таблице для каждого тарифного класса приведены (сверху вниз) совокупный убыток s_{ik} , число полисо-лет v_{ik} и наблюдаемый нормированный убыток $z_{ik} = s_{ik} / v_{ik}$ (убыток на один полисо-год). Применение в качестве маргинальных множителей маргинальных средних

$$x_1 = 201,0, x_2 = 223,4, x_3 = 249,0,$$

$$y_1 = 213 / 218 = 0,98, y_2 = 261 / 218 = 1,20$$

ведет к следующим «выровненным» нормированным убыткам $b_{ik} = x_i y_k$ (в скобках для сравнения указаны наблюдаемые нормированные убытки):

$$b_{11} = 196,6 \text{ (200)}, b_{12} = 240,5 \text{ (230)},$$

$$b_{21} = 218,6 \text{ (220)}, b_{22} = 267,5 \text{ (253)},$$

$$b_{31} = 243,6 \text{ (240)}, b_{32} = 298,0 \text{ (276)}.$$

Как можно видеть, в менее заполненных ячейках ($k = 2$) выровненные нормированные убытки $b_{ik} = x_i y_k$ значительно превышают наблюдаемые значения $z_{ik} = s_{ik} / v_{ik}$. Это не связано с конкретными данными, а происходит во всех случаях, когда тарифные факторы не являются независимыми. И действительно, данные таблицы 2.4.2.1 свидетельствуют о преимущественном использовании в личных целях автомобилей низкой грузоподъемности, а в профессиональных — высокой, следовательно, тарифные факторы «цель использования» и «грузоподъемность» зависимы между собой. Подчеркнем, зависимость тарифных факторов не имеет ничего общего с процессом убытков, поэтому ни в коем случае не означает зависимость случайных величин убытков разных ячеек. Более того, мы можем и будем считать убытки разных ячеек независимыми.

По чистой случайности в нашем примере задача выравнивания имеет точное решение: значения $x_1 = 200, x_2 = 220, x_3 = 240$ и $y_1 = 1, y_2 = 1,15$ приводят к равенствам $x_i y_k = z_{ik}$ во всех тарифных классах. Хотя в реальных условиях обычно удастся найти лишь приближенное решение, мы все же вынуждены констатировать несостоятельность метода маргинальных средних, ведь даже в таком простом примере он не позволил получить удовлетворительного решения, которое на самом деле существует.

2.4.3. МЕТОД БЕЙЛИ—САЙМОНА И МЕТОД МАРГИНАЛЬНЫХ СУММ

Гораздо большие успехи в решении задачи выравнивания были достигнуты с появлением электронных вычислительных устройств, открывших возможность применения численных методов. Первый прорыв совершили в 1960 году американские актуарии Бейли (Bailey) и Саймон (Simon), вычислив параметры x_i, y_k из условия минимальности расстояния, аналогичного статистике критерия согласия хи-квадрат:

$$Q_1 = \sum_{i \geq 1} \sum_{k \geq 1} (s_{ik} - v_{ik} x_i y_k)^2 / (v_{ik} x_i y_k) = \sum_{i \geq 1} \sum_{k \geq 1} v_{ik} (z_{ik} - x_i y_k)^2 / (x_i y_k).$$

Точки минимума x_i, y_k функции Q_1 находятся из равенства нулю частных производных $\partial Q_1 / \partial x_i$ и $\partial Q_1 / \partial y_k$:

$$\hat{x}_i = \sqrt{\sum_{k \geq 1} (v_{ik} z_{ik}^2 / \hat{y}_k)} / \sum_{k \geq 1} v_{ik} \hat{y}_k, \quad 1 \leq i \leq I,$$

$$\hat{y}_k = \sqrt{\sum_{i \geq 1} (v_{ik} z_{ik}^2 / \hat{x}_i)} / \sum_{i \geq 1} v_{ik} \hat{x}_i, \quad 1 \leq k \leq K.$$

Эти уравнения решаются методом последовательных приближений: сначала при стартовых значениях $\hat{y}_k = 1, 1 \leq k \leq K$, из первой формулы вычисляются \hat{x}_i , далее по второй формуле на основе полученных \hat{x}_i рассчитываются новые значения для \hat{y}_k , которые затем подставляются в уравнения для \hat{x}_i , и т. д. Итерация быстро сходится. Для данных таблицы 2.4.2.1 получается приведенное в конце раздела 2.4.2 точное решение (после нормировки $\hat{x}_i = \hat{x}_i \hat{y}_1, \hat{y}_k = \hat{y}_k / \hat{y}_1$).

Аналогичные уравнения в аддитивном случае (маргинальных слагаемых) не решаются в явном виде относительно \hat{x}_i и \hat{y}_k — на каждом шаге итерации приходится обращаться, например, к методу Ньютона—Рафсона.

Метод Бейли—Саймона с начала 1960-х годов применяется для расчета тарифов в немецком автостраховании. Опыт показывает достаточно высокую чувствительность метода к выбросам в отдельных тарифных классах. К тому же в мультипликативном случае оцененный совокупный убыток систематически превышает наблюдаемое значение. В самом деле, для рассчитанных по методу Бейли—Саймона маргинальных множителей \hat{x}_i, \hat{y}_k всегда справедливо

$$\sum_{k \geq 1} v_{ik} \hat{x}_i \hat{y}_k \geq \sum_{k \geq 1} s_{ik}, \quad i = 1, \dots, I,$$

$$\sum_{i \geq 1} v_{ik} \hat{x}_i \hat{y}_k \geq \sum_{i \geq 1} s_{ik}, \quad k = 1, \dots, K,$$

и, следовательно,

$$\sum_{i \geq 1} \sum_{k \geq 1} v_{ik} \hat{x}_i \hat{y}_k \geq \sum_{i \geq 1} \sum_{k \geq 1} s_{ik}.$$

Для доказательства последнего неравенства подставим в левую часть определение \hat{x}_i и применим неравенство Шварца:

$$\left(\sum_{k \geq 1} v_{ik} \hat{x}_i \hat{y}_k \right)^2 = \hat{x}_i^2 \left(\sum_{k \geq 1} v_{ik} \hat{y}_k \right)^2 = \left(\sum_{k \geq 1} v_{ik} z_{ik}^2 / \hat{y}_k \right) \left(\sum_{k \geq 1} v_{ik} \hat{y}_k \right) \geq \left(\sum_{k \geq 1} v_{ik} z_{ik} \right)^2 = \left(\sum_{k \geq 1} s_{ik} \right)^2.$$

Избегать систематической переоценки маргинальных совокупных убытков s_{+k} и s_{+i} позволяет метод маргинальных сумм, тоже впервые предложенный Бейли. На этот раз искомые тарифные множители \hat{x}_i, \hat{y}_k исчисляются из условий:

$$\sum_{k \geq 1} v_{ik} \hat{x}_i \hat{y}_k = \sum_{k \geq 1} s_{ik}, \quad i = 1, \dots, I,$$

$$\sum_{i \geq 1} v_{ik} \hat{x}_i \hat{y}_k = \sum_{i \geq 1} s_{ik}, \quad k = 1, \dots, K,$$

что гарантирует равенство суммарной потребной премии и наблюдаемого совокупного убытка в каждом классе значений каждого тарифного фактора. Для практики это очень выгодно.

Уравнения маргинальных сумм можно переписать в виде

$$\hat{x}_i = \left(\sum_{k \geq 1} s_{ik} \right) / \left(\sum_{k \geq 1} v_{ik} \hat{y}_k \right), \quad 1 \leq i \leq I,$$

$$\hat{y}_k = \left(\sum_{i \geq 1} s_{ik} \right) / \left(\sum_{i \geq 1} v_{ik} \hat{x}_i \right), \quad 1 \leq k \leq K,$$

и решать методом последовательных приближений на основании стартовых значений $y_k = 1, 1 \leq k \leq K$, по такой же схеме, как в методе Бейли—Саймона. В условиях числового примера из раздела 2.4.2 этот метод тоже приводит к точному решению после соответствующей нормировки.

За счет отсутствия квадратичных множителей метод маргинальных сумм менее чувствителен к выбросам, чем метод Бейли—Саймона. Однако ни тот, ни другой не содержат в своей основе стохастической модели, позволяющей судить о точности оценок параметров или качестве соответствия данным. В следующих разделах мы разработаем методы на базе моделей распределения из главы 1.3. Модель из следующего раздела обнаруживает тесную связь с обоими представленными только что классическими методами.

2.4.4. МЕТОД НА ОСНОВЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПУАССОНА И ПОСТРОЕНИЕ КРИТЕРИЯ СОГЛАСИЯ

В отличие от изученных ранее методов все последующие методы основываются на стохастической модели. При этом наблюдаемый совокупный убыток s_{ik} ячейки (i, k) рассматривается как реализация случайной величины S_{ik} , а нормированный на объем v_{ik} совокупный убыток $z_{ik} = s_{ik} / v_{ik}$ — как реализация случайной величины $Z_{ik} = S_{ik} / v_{ik}$. Наша цель — как можно точнее аппроксимировать наблюдаемые значения z_{ik} произведениями $x_i y_k$ маргинальных параметров x_i и y_k . Для этого представим математические ожидания $E(Z_{ik})$ и $E(S_{ik})$ в форме

$$E(Z_{ik}) = x_i y_k, \quad 1 \leq i \leq I, \quad 1 \leq k \leq K,$$

$$E(S_{ik}) = v_{ik} x_i y_k, \quad 1 \leq i \leq I, \quad 1 \leq k \leq K.$$

Допустим, каждая величина S_{ik} имеет описанное в разделе 1.3.7 модифицированное распределение Пуассона с параметром среднего $v_{ik} x_i y_k$ (достаточно близким к математическому ожиданию $E(S_{ik})$), и одинаковой для всех ячеек денежной единицей w (в этом случае S_{ik} / w имеет непрерывное распределение Пуассона с параметром $v_{ik} x_i y_k / w$ — желательно, чтобы он был всюду больше 5). В силу предположения независимости рисков случайные величины S_{ik}

независимы. В случае положительных наблюдений $s_{ik} > 0$ функция правдоподобия записывается в виде

$$L = \prod_{i,k} \frac{(v_{ik} x_i y_k / w)^{s_{ik} / w} \exp(-v_{ik} x_i y_k / w)}{w \cdot \Gamma(1 + s_{ik} / w)}.$$

Оценки максимального правдоподобия параметров x_i , y_k , w находятся из условий равенства нулю частных производных от логарифма функции правдоподобия

$$\ln(L) = \sum_{i,k} \left(\frac{s_{ik}}{w} \ln \left(\frac{v_{ik} x_i y_k}{w} \right) - \frac{v_{ik} x_i y_k}{w} - \ln(w \Gamma(1 + s_{ik} / w)) \right),$$

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial x_i} = \sum_{k \geq 1} \left(\frac{s_{ik}}{x_i w} - \frac{v_{ik} y_k}{w} \right) = \frac{1}{x_i w} \sum_{k \geq 1} (s_{ik} - v_{ik} x_i y_k),$$

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial y_k} = \sum_{i \geq 1} \left(\frac{s_{ik}}{y_k w} - \frac{v_{ik} x_i}{w} \right) = \frac{1}{y_k w} \sum_{i \geq 1} (s_{ik} - v_{ik} x_i y_k),$$

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial w} = \sum_{i,k} \left(\frac{v_{ik} x_i y_k}{w^2} - \frac{s_{ik}}{w^2} \left(1 + \ln \left(\frac{v_{ik} x_i y_k}{w} \right) \right) \right) - \frac{1}{w} + \frac{s_{ik}}{w^2} \Psi \left(1 + \frac{s_{ik}}{w} \right),$$

где $\Psi(z) = \Gamma'(z) / \Gamma(z)$ — дигамма-функция. Условия равенства нулю частных производных по x_i и по y_k совпадают с условиями маргинальных сумм для оценок \hat{x}_i, \hat{y}_k :

$$\sum_{k \geq 1} v_{ik} \hat{x}_i \hat{y}_k = \sum_{k \geq 1} s_{ik}, \quad i = 1, \dots, I,$$

$$\sum_{i \geq 1} v_{ik} \hat{x}_i \hat{y}_k = \sum_{i \geq 1} s_{ik}, \quad k = 1, \dots, K,$$

независимо от денежной единицы w . Это значит, что в основу *метода маргинальных сумм* предыдущего раздела может быть положена параметрическая модель модифицированного распределения Пуассона. Тем самым открывается возможность применения к методу маргинальных сумм различных инструментов статистического анализа.

Прежде всего констатируем, что метод маргинальных сумм допускает стохастическое обоснование в случае приближенного постоянства отношения $v_{ik} \text{Var}(Z_{ik}) / E(Z_{ik}) = \text{Var}(S_{ik}) / E(S_{ik}) = w$ во всех ячейках (i, k) , которое привело нас в разделе 1.3.7 к модифицированному распределению Пуассона. К сожалению, это условие нельзя проверить при наличии всего одного наблюдения в ячейке. Тем не менее модель принимается, если значение функции правдоподобия превосходит, например, правдоподобие гамма-модели, представленной в следующем разделе. Кроме того, обычно мы располагаем данными за несколько лет, что позволяет оценить w в каждой ячейке, даже когда для расчета x_i и y_k используются только данные последнего года.

Далее из общих свойств оценок максимального правдоподобия следует, что метод маргинальных сумм дает состоятельные и асимптотически эффективные оценки параметров (оценка сходится к параметру и имеет асимптотически минимальную дисперсию). Некоторые дальнейшие преимущества параметрических моделей мы еще обсудим в этом и следующих разделах. В частности, расчет точности оценки потребной премии $\hat{x}_i \hat{y}_k$, проведенный в следующем разделе на примере гамма-распределения, возможен и в случае модифицированного распределения Пуассона.

Теперь зададим оценку \hat{w} для денежной единицы. Полагая равной нулю производную функции правдоподобия по w и используя условие

$$\sum_{i,k} v_{ik} \hat{x}_i \hat{y}_k = \sum_{i,k} s_{ik},$$

справедливое для оценок максимального правдоподобия \hat{x}_i и \hat{y}_k , получим

$$\hat{w} = \frac{1}{IK} \sum_{i,k} s_{ik} \left(\Psi \left(\frac{s_{ik}}{\hat{w}} + 1 \right) - \ln \left(\frac{v_{ik} \hat{x}_i \hat{y}_k}{\hat{w}} \right) \right).$$

Решая это уравнение методом последовательных приближений, находим оценку максимального правдоподобия для w , необходимую, в частности, для расчета максимального значения функции правдоподобия. Для запуска итерации требуется подходящее стартовое значение, которым может служить оценка по методу моментов. Из условий $E(S_{ik}) \approx v_{ik} x_i y_k$ и $\text{Var}(S_{ik}) \approx v_{ik} x_i y_k w$ следует приближенное равенство $w \approx \text{Var}(S_{ik}) / E(S_{ik})$. Таким образом, статистика $(S_{ik} - E(S_{ik}))^2 / E(S_{ik})$ любой ячейки (i, k) является оценкой для w , а оценка по методу моментов имеет вид

$$\frac{1}{IK} \sum_{i,k} \frac{(s_{ik} - v_{ik} \hat{x}_i \hat{y}_k)^2}{v_{ik} \hat{x}_i \hat{y}_k}$$

(или с множителем $((I-1)(K-1))^{-1}$ вместо $(IK)^{-1}$, если учесть сокращение числа степеней свободы в связи с оцениванием параметров x_i, y_k). Все то же самое мы уже проделывали в разделе 1.3.7.

Осталось построить *критерий согласия*. Как известно, распределенная по обычному закону Пуассона случайная величина N при $E(N) \rightarrow \infty$ сходится к нормальному распределению. Значит, величина $(N - E(N))^2 / \text{Var}(N) = (N - E(N))^2 / E(N)$ при $E(N) \rightarrow \infty$ сходится к распределению хи-квадрат с 1 степенью свободы. Уже при $E(N) > 5$ эта аппроксимация достаточно точна. В нашем случае S_{ik} / w имеет непрерывное распределение Пуассона, поэтому статистика

$$\sum_{i,k} \frac{(S_{ik} / w - v_{ik} x_i y_k / w)^2}{v_{ik} x_i y_k / w} = \frac{1}{w} \sum_{i,k} \frac{(S_{ik} - v_{ik} x_i y_k)^2}{v_{ik} x_i y_k}$$

асимптотически при достаточно больших v_{ik} распределена как хи-квадрат с IK степенями свободы. Стоящее справа выражение с точностью до множителя

1 / w формально совпадает с обычной статистикой критерия согласия хи-квадрат. После замены параметров x_i, y_k соответствующими оценками максимального правдоподобия \hat{x}_i, \hat{y}_k суммы наблюдаемых и ожидаемых чисел убытков оказываются равными, как при обычном критерии хи-квадрат (это следует из доказанного выше условия

$$\sum_{i,k} v_{ik} \hat{x}_i \hat{y}_k = \sum_{i,k} s_{ik}$$

для оценок максимального правдоподобия). Как и в случае обычного критерия хи-квадрат, при оценивании параметров распределение статистики теряет столько же степеней свободы, сколько параметров оценено. Итого, получается асимптотическое распределение хи-квадрат с $IK - (I + K - 1) = (I - 1)(K - 1)$ степенями свободы (один из $I + K$ параметров может быть выбран произвольно и не требует оценивания — см. раздел 2.4.1). Подчеркнем, параметр w нельзя заменить оценкой максимального правдоподобия как остальные параметры — иначе значение статистики всегда находилось бы вблизи IK . Чтобы убедиться в этом, достаточно подставить вместо w его оценку по методу моментов. Таким образом, асимптотическое распределение хи-квадрат справедливо для нашей статистики только при условии известного w (оцененного, например, по данным за несколько лет).

Теперь, как всегда, задаем вероятность p попадания статистики в допустимую область при справедливости основной гипотезы и находим соответствующую квантиль χ_p распределения хи-квадрат с $IK - I - K + 1$ степенями свободы. Затем вычисляем часть

$$Q = \sum_{i,k} \frac{(s_{ik} - v_{ik} \hat{x}_i \hat{y}_k)^2}{v_{ik} \hat{x}_i \hat{y}_k}$$

статистики критерия и принимаем гипотезу, если w (предполагаемое известным) удовлетворяет условию:

$$Q / w \leq \chi_p.$$

В противном случае наибольшие слагаемые статистики Q сразу показывают нам, в каких ячейках модель подходит плохо.

Перед применением критерия необходимо убедиться в справедливости предположения асимптотического распределения хи-квадрат для Q . Как уже говорилось ранее, аппроксимация распределением хи-квадрат приемлема только при условии, что для математического ожидания основополагающего (непрерывного) распределения Пуассона во всех ячейках (за исключением, может быть, одной или двух) выполняется неравенство

$$E(S_{ik} / w) = v_{ik} x_i y_k / w > 5.$$

Если практически во всех ячейках $v_{ik} \hat{x}_i \hat{y}_k > 5w$ и статистика критерия не превосходит заданной границы значимости, то построенную мультипликативную модель можно признать подходящей. Ведь описанный критерий согласия проверяет не гипотезу о распределении величин S_{ik} , а только специальную пара-

метризацию $E(Z_{ik}) = x_i y_k$. В самом деле, статистика Q выводится из метода отношения правдоподобий для проверки модели $E(Z_{ik}) = x_i y_k$ против модели со всюду разными $E(Z_{ik})$ (при известном w). При $w = 1$ (когда S_{ik} обозначает число убытков) наш критерий превращается в обычный критерий согласия хи-квадрат для распределенных по закону Пуассона чисел убытков S_{ik} .

Наконец, обратим внимание на формальное совпадение части Q статистики критерия с выражением, минимизируемым в *методе Бейли—Саймона*. Получается, что и метод Бейли—Саймона имеет отношение к модифицированному распределению Пуассона, а именно предполагает точно такую же структуру дисперсии. Мы подтвердим это в начале раздела 2.4.6 другими рассуждениями.

В заключение заметим, что в аддитивном случае

$$E(S_{ik} / v_{ik}) = x_i + y_k$$

оценки максимального правдоподобия параметров x_i, y_k не удовлетворяют условиям маргинальных сумм. Таким образом, аддитивный метод маргинальных сумм не может быть обоснован в рамках модифицированного распределения Пуассона. Вопрос, какая модель больше подходит к данным — аддитивная или мультипликативная с модифицированным распределением Пуассона, решается либо на основании значений функций правдоподобия, либо с помощью критерия согласия.

2.4.5. МЕТОД НА ОСНОВЕ ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПОТРЕБНОЙ ПРЕМИИ

Из предыдущего раздела мы узнали о некоторых преимуществах параметрической модели перед рассмотренными в начале главы эвристическими методами Бейли—Саймона и маргинальных сумм. Напомним, параметрические модели допускают проверку гипотезы согласия, а также сравнение аддитивной и мультипликативной форм разложения потребной премии. Кроме того, применение метода максимального правдоподобия обеспечивает состоятельность и асимптотическую эффективность оценок маргинальных параметров x_i, y_k (оценки сходятся к параметрам и имеют асимптотически минимальные дисперсии), а также возможность расчета (асимптотической) точности оценок. Последнее мы продемонстрируем в этом разделе на примере гамма-распределения.

Предположим, что совокупный убыток S_{ik} ячейки (i, k) при известном объеме v_{ik} имеет гамма-распределение с математическим ожиданием

$$E(S_{ik}) = v_{ik} x_i y_k, \quad 1 \leq i \leq I, \quad 1 \leq k \leq K,$$

и параметром формы αv_{ik} (дисперсия равна $\text{Var}(S_{ik}) = v_{ik} (x_i y_k)^2 / \alpha$). Эта модель выведена в разделе 1.3.3. Здесь мы сразу представили математическое ожидание $E(S_{ik} / v_{ik})$ нормированной на объем величины убытка в мультипликативной форме $E(S_{ik} / v_{ik}) = x_i y_k$ с маргинальными параметрами x_i, y_k . Параметр α будем считать равным для всех ячеек (как параметр w в разделе 2.4.4) — если

бы для каждой ячейки мы предположили индивидуальный параметр α_{ik} , то при наличии одного наблюдения s_{ik} на ячейку модель оказалась бы чрезмерно параметризована. В этой модели S_{ik} трактуется как сумма v_{ik} независимых случайных величин, имеющих одинаковое гамма-распределение с математическим ожиданием $x_i y_i$ и параметром формы α . Аналогичная интерпретация возможна и в том случае, когда v_{ik} обозначает не число полисо-лет, а совокупную страховую сумму (см. раздел 1.3.3).

Функция правдоподобия (предполагаемых независимыми) наблюдений s_{ik} имеет вид

$$L = \prod_{i,k} \exp\left(-\frac{\alpha s_{ik}}{x_i y_k}\right) \cdot \left(\frac{\alpha s_{ik}}{x_i y_k}\right)^{\alpha v_{ik}} / (s_{ik} \Gamma(\alpha v_{ik})),$$

$$\ln(L) = \sum_{i,k} \left(-\frac{\alpha s_{ik}}{x_i y_k} + \alpha v_{ik} \ln\left(\frac{\alpha s_{ik}}{x_i y_k}\right) - \ln(s_{ik} \Gamma(\alpha v_{ik})) \right).$$

Оценки максимального правдоподобия параметров x_i , y_k и α максимизируют функцию L (или $\ln(L)$) и удовлетворяют уравнениям

$$0 = \frac{\partial \ln(L)}{\partial x_i} = \alpha \sum_{k \geq 1} (s_{ik} / (x_i^2 y_k) - v_{ik} / x_i), \quad 1 \leq i \leq I,$$

$$0 = \frac{\partial \ln(L)}{\partial y_k} = \alpha \sum_{i \geq 1} (s_{ik} / (x_i y_k^2) - v_{ik} / y_k), \quad 1 \leq k \leq K.$$

Как видим, для расчета оценок максимального правдоподобия \hat{x}_i, \hat{y}_k не требуется условие $\partial \ln(L) / \partial \alpha = 0$. Уравнения приводятся к виду

$$\hat{x}_i = \sum_{k \geq 1} \frac{s_{ik}}{\hat{y}_k} / \sum_{k \geq 1} v_{ik}, \quad 1 \leq i \leq I,$$

$$\hat{y}_k = \sum_{i \geq 1} \frac{s_{ik}}{\hat{x}_i} / \sum_{i \geq 1} v_{ik}, \quad 1 \leq k \leq K.$$

Последняя система, как мы уже привыкли, решается попеременным расчетом \hat{x}_i и \hat{y}_k на основании стартовых значений $\hat{y}_1 = \dots = \hat{y}_K = 1$. Итерация быстро сходится. Для числового примера из раздела 2.4.2 снова получается точное решение (после нормировки $\hat{y}_1 = 1$).

Оценку максимального правдоподобия $\hat{\alpha}$ находим из уравнения

$$0 = \frac{\partial \ln(L)}{\partial \alpha} = \sum_{i,k} v_{ik} (\ln(\hat{\alpha} s_{ik} / (\hat{x}_i \hat{y}_k)) - \Psi(\hat{\alpha} v_{ik})),$$

где $\Psi(z) = \Gamma'(z) / \Gamma(z)$ — дигамма-функция. В этой формуле использовано равенство

$$\sum_{i,k} s_{ik} / (\hat{x}_i \hat{y}_k) = \sum_{i,k} v_{ik}.$$

получаемое в результате суммирования уравнений правдоподобия относительно x_i или y_k . Уравнение правдоподобия относительно α решается методом последовательных приближений, как показано в конце раздела 1.3.3. В качестве стартового значения может служить оценка по методу моментов

$$\hat{\alpha} = \sum_{i,k} 1 / \sum_{i,k} \frac{(s_{ik} - v_{ik} \hat{x}_i \hat{y}_k)^2}{v_{ik} \hat{x}_i^2 \hat{y}_k^2},$$

выведенная по аналогии с оценкой параметра w из раздела 2.4.4 (значение $v_{ik}(S_{ik} - E(S_{ik}))^2 / (E(S_{ik}))^2$ любой ячейки является несмещенной оценкой величины $1 / \alpha = v_{ik} \text{Var}(S_{ik}) / (E(S_{ik}))^2$).

Для построения критерия согласия возьмем за основу метод отношения правдоподобий. При заданном α допустим для каждой величины $Z_{ik} = S_{ik} / v_{ik}$ индивидуальное математическое ожидание μ_{ik} . В этом случае логарифмированное правдоподобие наблюдений s_{ik} / v_{ik} составит

$$\ln(L_1) = \sum_{i,k} \left(-\frac{\alpha s_{ik}}{\mu_{ik}} + \alpha v_{ik} \ln\left(\frac{\alpha s_{ik}}{\mu_{ik}}\right) - \ln(s_{ik} \Gamma(\alpha v_{ik})) \right).$$

Из условия максимума $\ln(L_1)$ получаются оценки $\hat{\mu}_{ik} = s_{ik} / v_{ik}$, обеспечивающие оптимальную подгонку распределения. Подставив оценки в правдоподобие, получим

$$\ln(L_1(\hat{\mu}_{ik})) = \sum_{i,k} (\alpha v_{ik} (\ln(\alpha v_{ik}) - 1) - \ln(s_{ik} \Gamma(\alpha v_{ik}))).$$

Правдоподобие $\ln(L)$ модели перекрестной параметризации после подстановки соответствующих оценок максимального правдоподобия имеет вид

$$\ln(L(\hat{x}_i, \hat{y}_k)) = \sum_{i,k} \left(\alpha v_{ik} \left(\ln\left(\frac{\alpha s_{ik}}{\hat{x}_i \hat{y}_k}\right) - 1 \right) - \ln(s_{ik} \Gamma(\alpha v_{ik})) \right),$$

где учтено равенство

$$\sum_{i,k} s_{ik} / (\hat{x}_i \hat{y}_k) = \sum_{i,k} v_{ik}.$$

Тогда удвоенный логарифм отношения правдоподобий

$$2 \cdot \ln \left(\frac{L_1(\hat{\mu}_{ik})}{L(\hat{x}_i, \hat{y}_k)} \right) = 2\alpha \sum_{i,k} v_{ik} \cdot \ln \left(\frac{v_{ik} \hat{x}_i \hat{y}_k}{s_{ik}} \right)$$

асимптотически распределен как хи-квадрат с $IK - (I + K - 1)$ степенями свободы. Это позволяет проверить гипотезу одинакового качества подгонки модели перекрестной параметризации и полной модели $E(S_{ik}) = \mu_{ik}$ (в предположении гамма-распределения).

При справедливости модели $E(S_{ik}) = v_{ik} x_i y_k$ удвоенный логарифм отношения правдоподобий асимптотически эквивалентен статистике χ^2 , выводимой

по аналогии со статистикой предыдущего раздела 2.4.4: в силу сходимости гамма-распределения величины S_{ik} с ростом параметра формы αv_{ik} к нормальному распределению, величина

$$\sum_{i,k} (S_{ik} - E(S_{ik}))^2 / \text{Var}(S_{ik})$$

по распределению стремится к хи-квадрат с IK степенями свободы. Следовательно, статистика

$$\chi^2 = \sum_{i,k} \frac{(S_{ik} - v_{ik} x_i y_k)^2}{(v_{ik} x_i y_k)^2 / (\alpha v_{ik})} = \alpha \sum_{i,k} v_{ik} \left(\frac{S_{ik}}{v_{ik} x_i y_k} - 1 \right)^2 = \alpha \sum_{i,k} \frac{(S_{ik} / (x_i y_k) - v_{ik})^2}{v_{ik}}$$

(предпоследняя форма представляет собой взвешенную сумму квадратов относительных отклонений; последняя форма схожа с классическим критерием хи-квадрат) при достаточно больших αv_{ik} тоже имеет приближенное распределение хи-квадрат. Правда, в результате замены параметров x_i, y_k оценками максимального правдоподобия \hat{x}_i, \hat{y}_k число степеней свободы сокращается до $IK - I - K + 1$. Значение α при проверке гипотезы предполагается известным (например, оцененным на основании данных за несколько лет). Обратим внимание, распределение хи-квадрат справедливо для величины χ^2 только при выполнении неравенства $v_{ik} \alpha \geq 10$ почти во всех ячейках. В аналогичном неравенстве предыдущего раздела вместо 10 стояло 5, поскольку распределение Пуассона менее асимметрично, чем гамма-распределение.

Следующее общее свойство оценок максимального правдоподобия позволяет задать (асимптотическую) *точность оценок максимального правдоподобия* параметров x_i, y_k и α . При так называемых условиях регулярности (выполненных здесь) оценка максимального правдоподобия $\hat{\theta}$ вектора параметров $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_M)$ асимптотически распределена нормально с математическим ожиданием θ и матрицей ковариации $(I(\theta))^{-1}$, где $I(\theta)$ — информационная матрица. Элементы матрицы $I(\theta)$ вычисляются на основании функции правдоподобия по формуле

$$I(\theta)_{m,n} = E \left(- \frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial \theta_m \partial \theta_n} \right), \quad 1 \leq m, n \leq M.$$

Главная диагональ обращенной информационной матрицы содержит искомые асимптотические дисперсии $\text{Var}(\hat{\theta}_i)$. В нашем случае вектор параметров имеет вид

$$\theta = (x_2, \dots, x_I, y_1, \dots, y_K, \alpha).$$

Для однозначного решения уравнений правдоподобия параметр x_1 , не ограничивая общности, предположим известным. Это предположение равносильно выбору определенного значения в шаре решений $x_i c, y_k / c, c \neq 0$, а именно значения $c = 1 / x_1$. Пусть асимптотичность решения не вызывает беспокойства: аппроксимация достаточно точна даже при относительно малых $\alpha v_{ik} > 10$ (почти во всех ячейках).

Для расчета элементов информационной матрицы дифференцируем функцию правдоподобия, применяем оператор математического ожидания и учитываем равенство $E(S_{ik}) = v_{ik} x_i y_k$ (δ_{ij} обозначает символ Кронекера: $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ иначе):

$$E \left(- \frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \frac{\delta_{ij} \alpha}{x_i^2} \sum_{k=1}^K v_{ik}, \quad 2 \leq i, j \leq I,$$

$$E \left(- \frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial y_k \partial y_l} \right) = \frac{\delta_{kl} \alpha}{y_k^2} \sum_{i=1}^I v_{ik}, \quad 1 \leq k, l \leq K,$$

$$E \left(- \frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial x_i \partial y_k} \right) = \frac{\alpha v_{ik}}{x_i y_k}, \quad 2 \leq i \leq I, \quad 1 \leq k \leq K,$$

$$E \left(- \frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial x_i \partial \alpha} \right) = E \left(- \frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial y_k \partial \alpha} \right) = 0, \quad 2 \leq i \leq I, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (*)$$

$$E \left(- \frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial \alpha^2} \right) = \sum_{i,k} v_{ik} (v_{ik} \Psi'(\alpha v_{ik}) - 1 / \alpha).$$

Последнее выражение вычисляется до любой степени точности с помощью приведенной в разделе 1.3.3 формулы приближенного расчета функции $\Psi(z)$. При условии $\alpha v_{ik} > 10$, выполненном в большинстве случаев, достаточно точны приближения

$$\Psi(z) \approx \ln(z) - 1 / (2z) - 1 / (12z^2),$$

$$\Psi'(z) \approx 1 / z + 1 / (2z^2) + 1 / (6z^3).$$

Используя их, получим

$$E \left(- \frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial \alpha^2} \right) \approx \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i,k} \left(1 + \frac{1}{3\alpha v_{ik}} \right) \approx \frac{I \cdot K}{2\alpha^2}.$$

В силу равенства (*) последний столбец и последняя строка информационной матрицы, за исключением общего элемента, состоят из одних нулей. Отсюда сразу следует, что в обращенной информационной матрице, совпадающей с асимптотической матрицей ковариаций, последний диагональный элемент $\text{Var}(\hat{\alpha})$ является обращением последнего диагонального элемента матрицы $I(\theta)$:

$$\text{Var}(\hat{\alpha}) \approx 2\alpha^2 / (IK) \approx 2\hat{\alpha}^2 / (IK).$$

Для вычисления остальных дисперсий и ковариаций требуется численно обратить информационную матрицу (команда обращения содержится, например, в программном обеспечении электронных таблиц). Предварительно необходимо заменить все параметры x_i, y_k, α значениями $\hat{x}_i, \hat{y}_k, \hat{\alpha}$ оценок максимального правдоподобия. Диагональные элементы $\text{Var}(\hat{x}_i)$, $2 \leq i \leq I$, и $\text{Var}(\hat{y}_k)$, $1 \leq k \leq K$, обратной матрицы непосредственно задают отклонение оценок мак-

симального правдоподобия \hat{x}_i и \hat{y}_k от истинных значений соответствующих параметров x_i и y_k .

Еще больше, чем точность оценок, нас интересует *точность* $Var(\hat{x}_i \hat{y}_k)$ *получаемой потребной премии* $\hat{x}_i \hat{y}_k$. Для определения $Var(\hat{x}_i \hat{y}_k)$ воспользуемся еще одним общим свойством оценок максимального правдоподобия. При любом преобразовании

$$T(\theta) = (T_1(\theta_1, \dots, \theta_M), \dots, T_N(\theta_1, \dots, \theta_M))$$

вектора параметров θ оценка максимального правдоподобия для $T(\theta)$ находится таким же преобразованием $T(\hat{\theta})$ оценки максимального правдоподобия $\hat{\theta}$, а матрица ковариаций аппроксимирующая оценку $T(\hat{\theta})$ нормального распределения вычисляется по формуле

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \cdot I(\theta)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)^t.$$

В нашем случае преобразование имеет вид $T(x_i, y_k) = x_i y_k$. Тогда дисперсия оценки потребной премии составит (асимптотически)

$$\begin{aligned} Var(\hat{x}_i \hat{y}_k) &= (y_k, x_i) \cdot \begin{pmatrix} Var(\hat{x}_i) & Cov(\hat{x}_i, \hat{y}_k) \\ Cov(\hat{x}_i, \hat{y}_k) & Var(\hat{y}_k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_k \\ x_i \end{pmatrix} = \\ &= Var(\hat{x}_i) y_k^2 + 2 x_i Cov(\hat{x}_i, \hat{y}_k) y_k + x_i^2 Var(\hat{y}_k), \end{aligned}$$

где x_i, y_k заменяются оценками \hat{x}_i, \hat{y}_k .

Средняя квадратичная ошибка оценки будущей реализации величины Z_{ik} значением $\hat{x}_i \hat{y}_k$ равна (асимптотически)

$$E(\hat{x}_i \hat{y}_k - Z_{ik})^2 = Var(\hat{x}_i \hat{y}_k - Z_{ik}) = Var(\hat{x}_i \hat{y}_k) + Var(Z_{ik}).$$

Таким образом, к ошибке $Var(\hat{x}_i \hat{y}_k)$, связанной с оцениванием, добавляется ошибка, связанная со случайностью

$$Var(Z_{ik}) = (x_i y_k)^2 / (v_{ik} \alpha).$$

В качестве альтернативы представленной мультипликативной модели можно рассмотреть *аддитивную модель*, анализируемую по такой же схеме. Правда, уравнения правдоподобия аддитивной модели не разрешаются относительно x_i и y_k , поэтому потребуются, например, метод Ньютона—Рафсона. Решение в пользу аддитивной или мультипликативной модели снова принимается на основании значений функций правдоподобия или при помощи критерия согласия.

2.4.6. МЕТОД НА ОСНОВЕ ЛОГНОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

При логнормальном распределении нормированного убытка S_{ik} / v_{ik} ячейки (i, k) мы могли бы произвести расчет в полном соответствии с алгоритмом

предыдущего раздела, предварительно перейдя к параметризации с параметром $E(S_{ik} / v_{ik}) = x_i y_k$. Но как мы помним, логнормальное распределение привлекло нас, в частности, возможностью непосредственного применения к логарифмированным данным методов, разработанных для нормального распределения. Здесь это будет *метод наименьших квадратов*.

Спрашивается, можно ли применить метод наименьших квадратов к нелогарифмированным данным, минимизируя сумму взвешенных квадратичных разностей

$$Q_0 = \sum_{i,k} v_{ik} (s_{ik} / v_{ik} - x_i y_k)^2 = \sum_{i,k} (s_{ik} - v_{ik} x_i y_k)^2 / v_{ik}?$$

У такого подхода есть два недостатка. Первый — распределение случайных величин S_{ik} , порождающих наблюдения s_{ik} , не является нормальным, а имеет правостороннюю асимметрию. Еще более серьезен второй недостаток — неправильное взвешивание слагаемых. Метод наименьших квадратов подразумевает обратную пропорциональную зависимость веса каждого слагаемого от дисперсии соответствующей случайной величины S_{ik} / v_{ik} или S_{ik} . Согласно разделу 1.3.6, существуют два основных варианта отношения дисперсии $Var(S_{ik})$ к математическому ожиданию $E(S_{ik}) = v_{ik} x_i y_k$. В первом случае $Var(S_{ik})$ пропорциональна $E(S_{ik})$, и тогда следует минимизировать функцию

$$Q_1 = \sum_{i,k} (s_{ik} - v_{ik} x_i y_k)^2 / (v_{ik} x_i y_k),$$

что делает *метод Бейли—Саймона*. Во втором случае $Var(S_{ik})$ пропорциональна $(E(S_{ik}))^2 / v_{ik}$, и минимизироваться должна функция

$$Q_2 = \sum_{i,k} v_{ik} (s_{ik} - v_{ik} x_i y_k)^2 / (v_{ik} x_i y_k)^2 = \sum_{i,k} (s_{ik} / (x_i y_k) - v_{ik})^2 / v_{ik},$$

с точностью до множителя α формально совпадающая со статистикой критерия согласия для гамма-модели предыдущего раздела. Минимизируя Q_0 , мы неявно предполагали бы возможность представления всех дисперсий $Var(S_{ik})$ в виде $Var(S_{ik}) = c^2 v_{ik}$, то есть равенство дисперсии каждой из v_{ik} единиц объема каждой ячейки значению c^2 . А это было бы неверно уже хотя бы в силу различия математических ожиданий $E(S_{ik}) / v_{ik} = x_i y_k$. В функционалах Q_1 и Q_2 форма взвешивания верна, но первый недостаток — несоответствие реальных данных нормальному распределению — остается и препятствует применению полезных технических приемов регрессионного анализа. Представленная ниже логнормальная модель распределения лишена обоих недостатков.

Пусть в каждой ячейке (i, k) нормированная на объем v_{ik} переменная убытка S_{ik} / v_{ik} имеет логнормальное распределение с параметрами θ_{ik} и σ^2 / v_{ik} . В этом случае величина $\ln(S_{ik} / v_{ik})$ распределена нормально с математическим ожиданием θ_{ik} и дисперсией σ^2 / v_{ik} . Во избежание чрезмерной параметризации параметр σ^2 предположим одинаковым для всех ячеек. Тогда дисперсия $Var(S_{ik})$ будет приближенно пропорциональна математическому ожиданию $(E(S_{ik}))^2 / v_{ik}$ (см. раздел 1.3.5). Значит, как и в предыдущем разделе, мы имеем

дело со вторым из двух идеальных случаев, описанных в разделе 1.3.6. Однако теперь представление параметра θ_{ik} в форме $\theta_{ik} = x_i y_k$ (как это делалось ранее) бессмысленно, ведь в результате логарифмирования данных некоторые θ_{ik} могут оказаться положительными, а некоторые отрицательными, и уже только из-за знаков приблизить их произведениями двух маргинальных множителей x_i и y_k в общем случае не удастся. Поэтому в рассмотрение принимается только *аддитивное разложение*

$$\theta_{ik} = a_i + b_k,$$

тем более что для математического ожидания все равно получается мультипликативная форма

$$E(S_{ik} / v_{ik}) = \exp(\theta_{ik} + \sigma^2 / (2v_{ik})) = \exp(a_i) \exp(b_k) \exp(\sigma^2 / (2v_{ik})).$$

Мы могли бы применить к аддитивной модели метод максимального правдоподобия (как к мультипликативной модели в предыдущем разделе). Это привело бы нас к аддитивному методу (логарифмированных) маргинальных сумм. Но здесь нам выгоднее перейти к стандартной линейной регрессионной модели (с несколькими регрессорами), для которой существуют готовые программные продукты. Оба способа дают одинаковые значения оценок параметров a_i и b_k . Заметим, модель $\theta_{ik} = a_i + b_k$ допускает трактовку и в терминах двухфакторного дисперсионного анализа, чем мы воспользовались в разделе 2.3.6 при выборе тарифных факторов. Но сейчас такой подход нецелесообразен, поскольку речь не идет о проверке влияния эффектов по строкам и столбцам.

Для *перехода к регрессионной модели* требуется однозначная параметризация, так как $I + K$ параметров a_i, b_k определены лишь с точностью до аддитивной константы. Запишем

$$a_i + b_k = (a_1 + b_1) + (a_i - a_1) + (b_k - b_1)$$

и положим

$$\beta_n = \begin{cases} a_1 + b_1 & \text{при } n = 1, \\ a_n - a_1 & \text{при } 2 \leq n \leq I, \\ b_{n+1-I} - b_1 & \text{при } I+1 \leq n \leq I+K-1. \end{cases}$$

С помощью символа Кронекера δ_{ij} ($\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, и $\delta_{ij} = 0$ иначе) получаем однозначное представление

$$\theta_{ik} = a_i + b_k = \beta_1 + \beta_i(1 - \delta_{i1}) + \beta_{I+k-1}(1 - \delta_{k1}), \quad 1 \leq i \leq I, \quad 1 \leq k \leq K,$$

с участием $I + K - 1$ параметров $\beta_1, \dots, \beta_{I+K-1}$.

Зададим логарифмированные величины убытков $W_{ik} = \ln(S_{ik} / v_{ik})$ в виде

$$W_{ik} = \theta_{ik} + \varepsilon_{ik} = \beta_1 + \beta_i(1 - \delta_{i1}) + \beta_{I+k-1}(1 - \delta_{k1}) + \varepsilon_{ik},$$

где величины $\varepsilon_{ik} = W_{ik} - \theta_{ik}$ распределены нормально с математическим ожиданием $E(\varepsilon_{ik}) = 0$. Это выражение можно интерпретировать как линейную регрессионную модель с абсолютным членом и $I + K - 2$ регрессорами, причем β_i — неизвестные коэффициенты регрессии и, в частности, β_1 — абсолютный

член. $I + K - 2$ независимых переменных (регрессоров) принимают в нашем случае только значения 0 или 1 и отмечают строку и столбец соответствующего наблюдения W_{ik} . Объединив наблюдения в один вектор-столбец W

$$W^t = (W_{11}, W_{21}, \dots, W_{I1}, W_{12}, \dots, W_{I2}, \dots, W_{IK})$$

и точно так же ε_{ik} — в вектор-столбец ε , мы можем представить модель в привычной матричной форме

$$W = M\beta + \varepsilon,$$

где

$$\beta^t = (\beta_1, \dots, \beta_{I+K-1}),$$

а M — матрица размера $(IK) \times (I + K - 1)$ из нулей и единиц (см. табл. 2.4.6.1).

Каждая строка этой так называемой *матрицы плана* содержит коэффициенты при $\beta_1, \dots, \beta_{I+K-1}$ в соответствующем выражении

$$W_{ik} = \beta_1 + \beta_i(1 - \delta_{i1}) + \beta_{I+k-1}(1 - \delta_{k1}) + \varepsilon_{ik}.$$

В классической регрессионной модели предполагается также, что матрица ковариаций случайных ошибок ε с точностью до положительного множителя является единичной. В силу предположения независимости величин S_{ik} , матрица $\text{Cov}(\varepsilon)$ в нашем случае обладает диагональной формой, но диагональные элементы

$$\text{Var}(\varepsilon_{ik}) = \text{Var}(W_{ik}) = \text{Var}(\ln(S_{ik} / v_{ik})) = \sigma^2 / v_{ik}$$

в ней различаются. Таким образом, мы имеем дело со взвешенной регрессией (гетероскедастичная модель). Равенство $\text{Var}(W_{ik} \sqrt{v_{ik}}) = \sigma^2$ позволяет легко

Таблица 2.4.6.1. Матрица плана при перекрестной параметризации

Наблюдение w_{ik}	β_1	β_2 $i=2$	β_{I-1} $i=I-1$	β_I $i=I$	β_{I+1} $k=2$	β_{I+2} $k=3$	β_{I+K-2} $k=K-1$	β_{I+K-1} $k=K$
w_{11}	1	0	0	0	0	0	0	0
w_{21}	1	1		0	0	0	0	0	0
\vdots	\vdots		\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots
$w_{I-1,1}$	1	0		1	0	0	0	0	0
w_{I1}	1	0	0	1	0	0	0	0
w_{12}	1	0	0	0	1	0	0	0
w_{22}	1	1		0	0	1	0		0	0
\vdots	\vdots		\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots
w_{I2}	1	0	0	1	1	0	0	0
w_{13}	1	0	0	0	0	1		0	0
\vdots	\vdots		\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots
$w_{I-1,K}$	1	0		1	0	0	0	0	1
w_{IK}	1	0	0	1	0	0	0	1

преобразовать ее в классическую невзвешенную (гомоскедастичную) регрессию заменой W_{ik} на $W_{ik}\sqrt{v_{ik}}$. Построив диагональную матрицу V с диагональными элементами $\sqrt{v_{ik}}$

$$\text{Diag}(V) = (\sqrt{v_{11}}, \dots, \sqrt{v_{11}}, \sqrt{v_{12}}, \dots, \sqrt{v_{IK}})$$

(элементы располагаются в такой же последовательности, как у матрицы W) и умножив на нее слева уравнение регрессии

$$W = M\beta + \varepsilon,$$

получим регрессионную модель для преобразованных данных VW :

$$VW = (VM)\beta + V\varepsilon,$$

где $\text{Cov}(V\varepsilon)$ с точностью до множителя σ^2 является единичной матрицей. Матрица плана $\underline{M} = VM$ преобразованных наблюдений получается из M в результате замены всех единиц строки, соответствующей ячейке (i, k) , на $\sqrt{v_{ik}}$. Применив к матрице плана \underline{M} и вектору-столбцу \underline{w} преобразованных данных

$$\underline{w}_{ik} = w_{ik}\sqrt{v_{ik}} = \ln(s_{ik}/v_{ik})\sqrt{v_{ik}}$$

готовые программные продукты для регрессионных моделей (в частности, входящие в программное обеспечение электронных таблиц), получим несмещенные оценки наименьших квадратов

$$\hat{\beta} = (\underline{M}'\underline{M})^{-1}\underline{M}'\underline{w},$$

непосредственно определяющие оценки $\hat{\theta}_{ik}$. Помимо оценки для β стандартные программные продукты дают несмещенную оценку параметра σ^2

$$\hat{\sigma}^2 = r'r / (IK - I - K + 1) = \sum_{i,k} v_{ik} (w_{ik} - \hat{\theta}_{ik})^2 / (IK - I - K + 1),$$

где $r = \underline{w} - \underline{M}\hat{\beta}$ — вектор невязки, а также коэффициент множественной детерминации (с обозначением $\underline{w} = \sum_{i,k} w_{ik} / (IK)$)

$$R^2 = \frac{(\underline{M}\hat{\beta})'(\underline{M}\hat{\beta}) - IK\underline{w}^2}{\underline{w}'\underline{w} - IK\underline{w}^2}$$

и стандартную ошибку оценки $\hat{\beta}$, представляющую собой квадратный корень из главной диагонали матрицы

$$\hat{\sigma}^2 (\underline{M}'\underline{M})^{-1}.$$

Таким образом, мы мгновенно получили тот же объем информации, что и в предыдущей главе. Рекомендуется, как это принято в регрессионном анализе, сначала проверить с помощью графиков зависимости стандартизованных невязок $r/\hat{\sigma}$ от i , от k и от $\underline{M}\hat{\beta}$ обоснованность выбора модели перекрестной параметризации, а также предположение нормального распределения с оди-

наковой всюду дисперсией для величин $W_{ik} = W_{ik}\sqrt{v_{ik}}$. Помимо этого, необходимо убедиться в справедливости неравенства $\hat{\sigma}^2 / v_{ik} < 0,5$ во всех ячейках — от этого условия зависит правильность моделирования логнормальным распределением зависимости дисперсии от объема (см. раздел 1.3.5).

Наконец, для оценки математического ожидания требуется просто заметить параметры β_n и σ^2 в формуле

$$\begin{aligned} E(S_{ik} / v_{ik}) &= \exp(\theta_{ik} + \sigma^2 / (2v_{ik})) = \\ &= \exp(\beta_1 + \beta_i(1 - \delta_{i1}) + \beta_{I+k-1}(1 - \delta_{k1}) + \sigma^2 / (2v_{ik})) \end{aligned}$$

соответствующими оценками $\hat{\beta}_n$ и $\hat{\sigma}^2$. Получаемая таким образом оценка уже не является несмещенной, а несколько переоценивает фактическое математическое ожидание (см. раздел 1.3.5); но ведь и оценки максимального правдоподобия, применяемые в других методах, как правило, только асимптотически несмещены. Правда, оценка математического ожидания $E(S_{ik} / v_{ik})$ в модели с логнормальным распределением довольно чувствительно реагирует на выбросы, приводящие к относительно высоким значениям $\hat{\sigma}^2$. Кроме того, из-за элемента $\sigma^2 / (2v_{ik})$ оценка математического ожидания не преобразуется к чисто факторной модели вида $E(S_{ik} / v_{ik}) = x_i y_k$. Зато при расчетах мы можем воспользоваться готовыми программными продуктами.

Для данных из таблицы 2.4.2.1 после нормировки $b_1 = 0$ и обратного преобразования параметров $a_i = \beta_1 + \beta_i(1 - \delta_{i1})$, $b_k = \beta_{I+k-1}(1 - \delta_{k1})$ к параметрам $x_i = \exp(a_i)$, $y_k = \exp(b_k)$ снова получается приведенное в конце раздела 2.4.2 точное решение, потому что случайно оказалось $\hat{\sigma}^2 = 0$.

2.4.7. МЕТОД НА ОСНОВЕ ОБРАТНОГО ГАУССОВСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ФАКТОРИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРА ФОРМЫ ПРИ НАЛИЧИИ НАБЛЮДЕНИЙ ЗА НЕСКОЛЬКО ЛЕТ

Во всех рассмотренных ранее параметрических методах параметр формы принимался постоянным и одинаковым для всех ячеек (i, k) . Это объяснялось прежде всего стремлением сократить число параметров. Располагая только одним наблюдением годового убытка в ячейке, мы и не могли бы ввести наряду с маргинальными параметрами индивидуальный параметр формы для каждой ячейки — тогда число параметров превысило бы количество данных. При наличии же наблюдений нескольких лет вовсе не обязательно объединять данные внутри каждой ячейки в одно значение и считать параметр формы постоянным. Варьирование параметра формы имеет смысл, например, в страховании автогражданской ответственности, если тип населенного пункта используется в качестве тарифного фактора. Городские и сельские риски даже при одинаковом убытке на один полис-год, как правило, имеют разные распределения убытка (городские риски вызывают убытки чаще, но размеры этих убытков ниже). Мы продемонстрируем этот метод на примере обратного гауссовского распределения, при котором в любом случае не рекомендуется устанавливать одинаковый для всех ячеек параметр формы (см. раздел 1.3.4).

В соответствии с моделью из раздела 1.3.4 предположим, что нормированная на объем v_{ijk} ячейки (i, k) в году $j = 1, \dots, J$ величина убытка $Z_{ijk} = S_{ijk} / v_{ijk}$ имеет обратное гауссовское распределение с математическим ожиданием $E(Z_{ijk}) = x_i y_k$ и дисперсией $Var(Z_{ijk}) = (x_i y_k)^3 / (v_{ijk} \beta_{ik})$ (параметр формы равен $v_{ijk} \beta_{ik}$). Если v_{ijk} — число полисо-лет, то значения s_{ijk} необходимо предварительно очистить от инфляции. Когда же v_{ijk} — страховая сумма, инфляция одновременно влияет на s_{ijk} и на v_{ijk} . Сохранив во втором случае исходный вид данных, мы придадим поздним годам больший вес, а это нас, как правило, устраивает. Если предположить для каждой ячейки индивидуальный параметр формы β_{ik} , то число параметров формы превысит число параметров математического ожидания. Поэтому мы примем для параметра формы β_{ik} такое же мультипликативное разложение, как для математического ожидания:

$$\beta_{ik} = u_i w_k.$$

Логарифмированная функция правдоподобия (предполагаемых независимыми) наблюдений z_{ijk} имеет вид

$$2 \cdot \ln(L) = \sum_{ijk} \left(\left(-\frac{z_{ijk}}{x_i^2 y_k^2} + \frac{2}{x_i y_k} - \frac{1}{z_{ijk}} \right) v_{ijk} u_i w_k + \ln \left(\frac{v_{ijk} u_i w_k}{2\pi \cdot z_{ijk}^3} \right) \right).$$

Дифференцируя ее по параметрам, получаем следующие уравнения правдоподобия

$$x_i = \left(\sum_{j,k} v_{ijk} z_{ijk} w_k / y_k^2 \right) / \left(\sum_{j,k} v_{ijk} w_k / y_k \right), \quad 1 \leq i \leq I,$$

$$y_k = \left(\sum_{i,j} v_{ijk} z_{ijk} u_i / x_i^2 \right) / \left(\sum_{i,j} v_{ijk} u_i / x_i \right), \quad 1 \leq k \leq K,$$

$$u_i = JK / \sum_{j,k} \left(\frac{z_{ijk}}{x_i^2 y_k^2} - \frac{2}{x_i y_k} + \frac{1}{z_{ijk}} \right) v_{ijk} w_k, \quad 1 \leq i \leq I,$$

$$w_k = IJ / \sum_{i,j} \left(\frac{z_{ijk}}{x_i^2 y_k^2} - \frac{2}{x_i y_k} + \frac{1}{z_{ijk}} \right) v_{ijk} u_i, \quad 1 \leq k \leq K.$$

Эта система решается методом последовательных приближений. Сначала все u_i и w_k полагаются равными единице, и первые два уравнения относительно x_i и y_k решаются до сходимости. При этом берутся стартовые значения $y_k = 1$, $1 \leq k \leq K$. Затем полученные значения x_i и y_k подставляются во вторые два уравнения, которые решаются относительно u_i и w_k до сходимости. Стартовыми значениями выступают $w_k = 1$, $1 \leq k \leq K$. Затем с учетом новых значений u_i и w_k решаются первые два уравнения относительно x_i и y_k . В качестве стартовых значений используются x_i и y_k , вычисленные на предыдущем шаге, и т. д.

Обратим внимание на несостоятельность рассмотренного метода при наличии только одного годового наблюдения в каждой ячейке. В этом случае значения параметров можно выбрать так, что в некоторой фиксированной i -й

строке будет достигаться точное равенство $x_i y_k = z_{i1k}$, $k = 1, \dots, K$, без ухудшения качества подгонки в других строках. Тогда, в силу равенства

$$\frac{z_{i1k}}{x_i^2 y_k^2} - \frac{2}{x_i y_k} + \frac{1}{z_{i1k}} = z_{i1k} \left(\frac{1}{x_i y_k} - \frac{1}{z_{i1k}} \right)^2,$$

соответствующий параметр u_i и, следовательно, функция правдоподобия будут неограниченными.

2.4.8. ДЕТАЛИЗАЦИЯ МЕТОДОВ ПРИ НАЛИЧИИ ИНФОРМАЦИИ О ЧИСЛЕ УБЫТКОВ

При решении задачи выравнивания нежелательно игнорировать информацию о числе убытков, если таковая имеется по каждой группе рисков. Это особенно касается имущественного страхования, где риски существенно отличаются «размерами» и мерой объема служит страховая сумма. Так как наша модель из раздела 1.3.2 предполагает влияние объема группы только на число, но не на размеры убытков, использование информации о числе убытков может способствовать более адекватному моделированию возможных различий групп в отношении размеров убытков.

Пусть n_{ik} — наблюдаемое число убытков в ячейке (i, k) , а N_{ik} — соответствующая случайная величина. Исходя из *коллективной модели* (см. главу 1.4), представим совокупный убыток S_{ik} ячейки (i, k) как сумму N_{ik} независимых и одинаково распределенных отдельных убытков X_{ikn}

$$S_{ik} = \sum_{n=1}^{N_{ik}} X_{ikn}$$

($S_{ik} = 0$ при $N_{ik} = 0$). Это предположение вполне правомерно и было обосновано нами в начале раздела 1.4.3. Второе основное предположение коллективной модели — независимость числа убытков N_{ik} от размера убытка X_{ikn} , напротив, выполняется не всегда. Как уже говорилось в начале раздела 1.4.4, в период гололеда повреждения жестяного корпуса автомобилей случаются чаще, чем обычно. В автостраховании это приводит к росту числа убытков с одновременным снижением среднего размера убытка. Подобные события нарушают и предполагаемую методами выравнивания независимость величин N_{ik} (или S_{ik} / v_{ik}) во всех ячейках. Но в большинстве случаев независимость числа и размеров убытков внутри каждой отдельной ячейки все-таки можно признать. Этому предположению не противоречит и тот факт, что при сравнении ячеек друг с другом в ячейках с более высокой частотой убытков, скорее всего, будут наблюдаться более низкие размеры убытков (типичное различие города и села в автостраховании). Главное, чтобы в каждой ячейке число и размеры убытков были независимы в течение всех лет.

При известном количестве убытков n_{ik} совокупный убыток можно представить в виде суммы

$$S_{ik} | n_{ik} = \sum_{n=1}^{n_{ik}} X_{ikn}$$

детерминированного числа n_{ik} независимых одинаково распределенных отдельных убытков X_{ikn} . Эта модель полностью аналогична применяемой до сих пор (индивидуальной) модели

$$S_{ik} = \sum_{m=1}^{v_{ik}} R_{ikm},$$

в которой совокупный убыток тоже задается суммой детерминированного числа v_{ik} независимых одинаково распределенных отдельных рисков R_{ikm} . Как и ранее, факторизуем математическое ожидание $E(X_{ikn})$ одинаково распределенных размеров убытков X_{ikn}

$$E(X_{ikn}) = x_i y_k, \quad 1 \leq i \leq I, \quad 1 \leq k \leq K, \quad n = 1, 2, \dots$$

Теперь мы можем применить предыдущие методы этой главы, рассматривая в качестве объема v_{ik} наблюдаемое число убытков n_{ik} . (Выведенные в разделе 1.4.3 распределения размера убытка не допускают задания n_{ik} -кратной свертки без помощи интеграла и поэтому здесь неприменимы.) В результате получим *выровненный средний размер убытка* $\hat{x}_i \hat{y}_k$ в каждой ячейке. Из нескольких моделей распределения выбирается модель с наибольшим значением функции правдоподобия. Значения параметров x_i , y_k и w , α , σ^2 в этом случае не имеют ничего общего с прежними параметрами — произведение $x_i y_k$ описывает теперь не средний совокупный убыток на единицу объема, а средний размер отдельного убытка. Например, параметр α гамма-модели будет значительно выше прежнего, так как распределение размера убытка менее асимметрично, чем распределение совокупного убытка отдельного риска.

В конечном счете нас интересует не условное математическое ожидание

$$E(S_{ik} | n_{ik}) = n_{ik} x_i y_k,$$

рассматриваемое до сих пор, а безусловное нормированное на объем математическое ожидание

$$E(S_{ik} / v_{ik}) = E(N_{ik}) x_i y_k / v_{ik},$$

где объем v_{ik} ячейки (i, k) , как и прежде, известен. В этой формуле осталось оценить математическое ожидание числа убытков $E(N_{ik})$, $1 \leq i \leq I$. Снова построим мультипликативную модель

$$E(N_{ik}) = v_{ik} a_i b_k$$

и предположим для N_{ik} *распределение Пуассона*. Применение метода максимального правдоподобия для оценки параметров a_i , b_k (см. раздел 2.4.4) приводит к методу маргинальных сумм

$$\sum_{k \geq 1} v_{ik} \hat{a}_i \hat{b}_k = \sum_{k \geq 1} n_{ik}, \quad 1 \leq i \leq I,$$

$$\sum_{i \geq 1} v_{ik} \hat{a}_i \hat{b}_k = \sum_{i \geq 1} n_{ik}, \quad 1 \leq k \leq K.$$

Но теперь на том месте, где в разделе 2.4.4 был совокупный убыток s_{ik} , стоит число убытков n_{ik} .

Пусть читателя не смущает, что распределение Пуассона, возможно, недооценивает дисперсии случайных величин N_{ik} , ведь модифицированное распределение Пуассона тоже приводит к условиям маргинальных сумм. Конечно, можно предположить для N_{ik} и *отрицательное биномиальное распределение* с математическим ожиданием $v_{ik} a_i b_k$ и одинаковым для всех ячеек смешивающим гамма-распределением с параметром формы α (см. раздел 1.4.2). Тогда уравнения правдоподобия приобретут вид:

$$a_i = \sum_{k=1}^K n_{ik} / \sum_{k=1}^K \frac{(n_{ik} + \alpha) v_{ik} b_k}{v_{ik} a_i b_k + \alpha}, \quad 1 \leq i \leq I,$$

$$b_k = \sum_{i=1}^I n_{ik} / \sum_{i=1}^I \frac{(n_{ik} + \alpha) v_{ik} a_i}{v_{ik} a_i b_k + \alpha}, \quad 1 \leq k \leq K.$$

Для решения этой системы требуется зафиксировать несколько значений α (например, 10, 30, 100, 200, 400) и при каждом из них вычислить a_i и b_k методом последовательных приближений на основании стартовых значений $a_i = n_{i+} / v_{i+}$, $b_k = 1$. Наилучшее решение определяется по значению функции правдоподобия.

В итоге получаем следующую модель математического ожидания нормированной величины убытка

$$E(S_{ik} / v_{ik}) = a_i b_k x_i y_k.$$

Оценивая параметры a_i , b_k , x_i , y_k с помощью методов предыдущих разделов, мы можем одновременно проверить согласованность модели с данными, а также вычислить точность оценок параметров $\hat{a}_i, \hat{b}_k, \hat{x}_i, \hat{y}_k$ и $\text{Var}(\hat{a}_i \hat{b}_k)$, $\text{Var}(\hat{x}_i \hat{y}_k)$. Точность $\text{Var}(\hat{a}_i \hat{b}_k \hat{x}_i \hat{y}_k)$ оценки нормированного убытка определяется как в конце раздела 2.4.5. Учитывая независимость оценок \hat{a}_i, \hat{b}_k и \hat{x}_i, \hat{y}_k , выводим (асимптотическое) равенство

$$\text{Var}(\hat{a}_i \hat{b}_k \hat{x}_i \hat{y}_k) = \text{Var}(\hat{a}_i \hat{b}_k) (x_i y_k)^2 + (a_i b_k)^2 \text{Var}(\hat{x}_i \hat{y}_k),$$

затем параметры a_i , b_k , x_i , y_k заменяем соответствующими оценками.

По сравнению с предыдущими методами мы применили в два раза больше данных и в два раза больше параметров. Нередко количество параметров удается сократить. Например, в страховании автогражданской ответственности средние размеры убытков $x_i y_k$ обычно слабо различаются по ячейкам. Некоторые параметры x_i или y_k бывают настолько близки, что их можно принять равными. Для каждой из наших моделей распределения возможность сокращения числа параметров проверяется с помощью метода отношения правдоподобий. Эта задача рассматривается более подробно в разделе 3.3.3.

Естественно задать вопрос, как проверить, действительно ли детализованный метод с участием числа убытков n_{ik} *лучше приближает* выровненные совокупные убытки к наблюдениям s_{ik} , чем метод без использования n_{ik} . Детализованный метод предполагает коллективную модель

$$S_{ik} = \sum_{n=1}^{N_{ik}} X_{ikn}.$$

где S_{ik} может иметь, например, составное Пуассон-обратное гауссовское распределение с параметрами $E(N_{ik}) = v_{ik} a_i b_k$, $E(X_{ikn}) = x_i y_k$ и β (параметр формы распределения размера убытка). В этом случае правдоподобие наблюдений s_{ik} равно

$$L_S = \prod_{i,k} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \text{Poisson}(n | v_{ik} a_i b_k) \cdot \text{Inv. Gauss}(s_{ik} | n x_i y_k, n^2 \beta) \right).$$

При наличии данных n_{ik} оценки параметров нужно искать не из условия максимума правдоподобия L_S , а раздельно максимизируя функции

$$L_N = \prod_{i,k} \text{Poisson}(n_{ik} | v_{ik} a_i b_k), \quad L_{S|N} = \prod_{i,k} \text{Inv. Gauss}(s_{ik} | n_{ik} x_i y_k, n_{ik}^2 \beta).$$

В отсутствие данных n_{ik} , мы могли бы описать S_{ik} только индивидуальной моделью и, например, в случае гамма-распределения получили бы правдоподобие

$$L_0 = \prod_{i,k} \text{Gamma}(s_{ik} | v_{ik} \underline{x}_i \underline{y}_k, v_{ik} \alpha),$$

где \underline{x}_i , \underline{y}_k , разумеется, не совпадают с параметрами x_i , y_k , содержащимися в $L_{S|N}$ и L_S .

Правдоподобия L_S и L_0 (каждое из которых представляет собой произведение ИК значений плотности) можно сравнить между собой. Чтобы не вычислять бесконечную сумму в правдоподобии L_S , воспользуемся тем, что составное распределение Пуассона величины S_{ik} , как правило, довольно хорошо аппроксимируется смещенным на w_{ik} гамма-распределением $Y_{ik} \sim \text{Gamma}(\mu_{ik}, \alpha_{ik})$, если первые три момента величины Y_{ik} совпадают с соответствующими моментами величины S_{ik} (см. раздел 1.4.4). Из равенств

$$w_{ik} + \mu_{ik} = E(w_{ik} + Y_{ik}) = E(S_{ik}),$$

$$\mu_{ik}^2 / \alpha_{ik} = \text{Var}(Y_{ik}) = \text{Var}(w_{ik} + Y_{ik}) = \text{Var}(S_{ik}),$$

$$2\mu_{ik}^3 / \alpha_{ik}^2 = \mu_3(Y_{ik}) = \mu_3(w_{ik} + Y_{ik}) = \mu_3(S_{ik})$$

находим

$$\mu_{ik} = \frac{2(\text{Var}(S_{ij}))^2}{E(S_{ik} - E(S_{ik}))^3} = \frac{2 \cdot E(N_{ik})(E(X_{ikn}^2))^2}{E(X_{ikn}^3)},$$

$$\alpha_{ik} = \frac{4(\text{Var}(S_{ij}))^3}{(E(S_{ik} - E(S_{ik}))^3)^2} = \frac{4 \cdot E(N_{ik})(E(X_{ikn}^2))^3}{(E(X_{ikn}^3))^2},$$

$$w_{ik} = E(S_{ik}) - \mu_{ik} = E(N_{ik})E(X_{ikn}) - \mu_{ik}.$$

Тогда L_S аппроксимируется функцией

$$L_S \approx \prod_{i,k} \text{Gamma}(s_{ik} - w_{ik} | \mu_{ik}, \alpha_{ik}).$$

Для оценки неизвестных параметров μ_{ik} и α_{ik} нужно с помощью указанных выше уравнений выразить моменты величин N_{ik} и X_{ikn} через параметры a_i , b_k , x_i , y_k и заменить эти параметры оценками. Если полученное значение L_S существенно превысит L_0 (после подстановки соответствующих оценок), то можно предполагать, что привлечение числа убытков позволило повысить точность подгонки. Однако, ввиду различия исходных данных, числа параметров и областей определения плотностей, речь идет не о критерии проверки гипотезы, а только о некотором приемлемом способе сравнения двух моделей.

В качестве альтернативного критерия сравнения можно рассмотреть сумму стандартизованных квадратичных разностей

$$\text{SSRQ} = \sum_{i,k} \frac{(S_{ik} - E(S_{ik}))^2}{\text{Var}(S_{ik})}$$

(или ее оценку). В случае прямой гамма-модели $S_{ik} \sim \text{Gamma}(v_{ik} \underline{x}_i \underline{y}_k, v_{ik} \alpha)$, значение SSRQ вычисляется по формуле

$$\text{SSRQ} = \sum_{i,k} \frac{(S_{ik} - v_{ik} \underline{x}_i \underline{y}_k)^2}{v_{ik} (\underline{x}_i \underline{y}_k)^2 / \alpha} = \alpha \sum_{i,k} v_{ik} \left(\frac{Z_{ik}}{\underline{x}_i \underline{y}_k} - 1 \right)^2.$$

При раздельном моделировании $N_{ik} \sim \text{Poisson}(v_{ik} a_i b_k)$, $X_{ikn} \sim \text{Inv. Gauss}(x_i y_k, \beta)$ имеем $\text{Var}(S_{ik}) = E(N_{ik})E(X_{ikn}^2)$ и, следовательно,

$$\text{SSRQ} = \sum_{i,k} \frac{(S_{ik} - v_{ik} a_i b_k x_i y_k)^2}{v_{ik} a_i b_k ((x_i y_k)^2 + (x_i y_k)^3 / \beta)}.$$

Предпочтение отдается модели с меньшим значением SSRQ . Обратим внимание на нецелесообразность использования в качестве критерия сравнения взвешенной суммы квадратичных относительных отклонений

$$\sum_{i,k} v_{ik} \left(\frac{Z_{ik}}{E(Z_{ik})} - 1 \right)^2.$$

Эта величина (с точностью до множителя α) одновременно является показателем SSRQ для прямой гамма-модели и, значит, дает последней определенное преимущество.

2.4.9. ВЫВОД И УНИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ С ПОМОЩЬЮ ОБОБЩЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ; УКАЗАНИЯ К ПРИМЕНЕНИЮ

Познакомившись с несколькими методами выравнивания, мы задаемся вопросом, какой из методов лучше применять в конкретной ситуации. Стоит заранее исключить из рассмотрения метод Бейли—Саймона, не содержащий стохастической модели и тем лишающий нас возможности дополнительных ста-

статистических исследований. Несмотря на связь критерия минимизации Бейли—Саймона с модифицированным распределением Пуассона, последнее, как мы узнали, приводит к методу маргинальных сумм, который и следует предпочесть при выборе из двух классических методов.

Применение метода маргинальных сумм разрешается, только если при исследовании сравнимых данных складывается впечатление, что величина $v_{ik} \text{Var}(Z_{ik})$, где $Z_{ik} = S_{ik} / v_{ik}$ — нормированный на объем v_{ik} совокупный убыток, во всех ячейках (i, k) , пропорциональна скорее $E(Z_{ik})$, чем $(E(Z_{ik}))^2$ (см. раздел 1.3.6). Иначе рекомендуются методы на основе гамма- или логнормального распределений. Метод на основе обратного гауссовского распределения целесообразен лишь при наличии данных за несколько лет. Логнормальное распределение не подходит, когда требуется строго мультипликативная структура премий: $b_{ik} = x_i y_k$. В этом случае остаются только распределение Пуассона и гамма-распределение, а выбор из двух вариантов осуществляется по значению функции правдоподобия. Критерий согласия должен применяться только в целях общего обоснования модели перекрестной параметризации, а также выбора между мультипликативной и аддитивной моделями при одинаковом распределении.

В принципе, матричная структура данных не обязательно подразумевает перекрестную параметризацию. Другие виды параметризации тоже допустимы. Например, если высокий нормированный убыток некоторых ячеек переоценивается строго мультипликативной моделью и недооценивается аддитивной, то целесообразна параметризация вида $E(Z_{ik}) = x_i y_k + w_k$.

Главное преимущество параметрических методов перед классическими из раздела 2.4.3 — возможность формулировки опорных стохастических предположений. Кроме того, параметрические методы позволяют задать (асимптотическую) точность потребных премий, что тоже очень важно. Хотя расчет точности был продемонстрирован только для гамма-модели, все то же самое легко проделывается и в случае распределения Пуассона. В случае логнормального распределения точность автоматически определяется только в пространстве логарифмированных данных, поэтому требуется обратное преобразование в пространство исходных данных (см. раздел 3.3.4). Зато метод, основанный на логнормальном распределении, предоставляет возможность использования стандартных программных продуктов.

Для других методов тоже существует программный модуль, содержащийся под названием *обобщенные линейные модели* (Generalized Linear Models) во многих статистических пакетах. Чтобы убедиться в применимости этого модуля, заметим: уравнения правдоподобия из разделов 2.4.4 (модифицированное распределение Пуассона) и 2.4.5 (гамма-распределение) приводятся к виду

$$\sum_{k=1}^K v_{ik} \cdot \frac{z_{ik} - x_i y_k}{(x_i y_k)^{\tau}} \cdot x_i y_k = 0, \quad 1 \leq i \leq I,$$

$$\sum_{i=1}^I v_{ik} \cdot \frac{z_{ik} - x_i y_k}{(x_i y_k)^{\tau}} \cdot x_i y_k = 0, \quad 1 \leq k \leq K,$$

где $z_{ik} = S_{ik} / v_{ik}$ (множитель $x_i y_k$ в числителе нарочно не сокращается, хотя в первой части уравнений можно полностью сократить x_i , а во второй — y_k), причем

$\tau = 1$ в случае модифицированного распределения Пуассона, и

$\tau = 2$ в случае гамма-распределения.

При $\tau = 0$ получаются такие же уравнения, как после дифференцирования критерия наименьших квадратов Q_0 из раздела 2.4.6. Последние представляют собой уравнения правдоподобия при условии нормально распределенных S_{ik} или Z_{ik} . Таким образом,

$\tau = 0$ в случае нормального распределения.

Наконец, случай $\tau = 3$ приводит к уравнениям правдоподобия обратного гауссовского распределения с одинаковым для всех ячеек параметром β . Правда, как мы выяснили в разделе 1.3.6, эта модель нам не подходит.

Распознать в приведенной системе уравнений структуру обобщенной линейной модели нам поможет простое преобразование. Сначала перейдем к линейной параметризации (регрессионная модель), положив $a_i = \ln(x_i)$, $b_k = \ln(y_k)$ и тем самым

$$x_i y_k = \exp(a_i + b_k)$$

(в отличие от раздела 2.4.6, здесь логарифмируются не данные, а параметры). Тогда (при $\delta_{ij} = 0$ и $i \neq j$, $\delta_{ii} = 1$)

$$\frac{\partial}{\partial a_j} (x_i y_k) = \delta_{ij} \exp(a_i + b_k) = \delta_{ij} x_i y_k,$$

$$\frac{\partial}{\partial b_l} (x_i y_k) = \delta_{kl} \exp(a_i + b_k) = \delta_{kl} x_i y_k.$$

Теперь представим перекрестную параметризацию a_i, b_k в виде прямой параметризации $(\beta_1, \dots, \beta_I, \beta_{I+1}, \dots, \beta_{I+K}) = (a_1, \dots, a_I, b_1, \dots, b_K)$.

Учитывая равенство

$$\frac{\partial}{\partial \beta_n} (x_i y_k) = \begin{cases} x_i y_k, & \text{если } n = i \text{ или } n = I + k, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

запишем приведенную выше систему из $I + K$ уравнений в форме

$$\sum_{i,k} v_{ik} \cdot \frac{z_{ik} - x_i y_k}{(x_i y_k)^{\tau}} \cdot \frac{\partial (x_i y_k)}{\partial \beta_n} = 0, \quad 1 \leq n \leq I + K.$$

Последние уравнения имеют структуру уравнений правдоподобия

$$\sum_{m=1}^M w_m \cdot \frac{z_m - \mu_m}{\mu_m^{\tau}} \cdot \frac{\partial \mu_m}{\partial \beta_n} = 0, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (*)$$

обобщенной линейной модели, заданной известными весами w_m , а также наблюдениями z_m случайных величин Z_m с математическими ожиданиями

$E(Z_m) = \mu_m$ и дисперсиями $Var(Z_m) = \sigma^2 \mu_m^2 / w_m$, причем μ_m связаны посредством известной монотонной и дифференцируемой («линк»-) функции $g(\mu_m)$ с линейной комбинацией N известных регрессоров r_{mn} с неизвестными коэффициентами β_n

$$g(\mu_m) = \sum_{n=1}^N r_{mn} \beta_n.$$

Значение параметра τ в системе (*) устанавливается в зависимости от распределения случайных величин Z_m :

$\tau = 2$, если Z_m имеют гамма-распределение с постоянным параметром формы,

$\tau = 1$, если Z_m распределены по закону Пуассона,

$\tau = 0$, если Z_m распределены нормально с постоянным параметром σ^2 .

При $\tau = 0$, $w_m = 1$ и $g(\mu) = \mu$ получается обычная регрессионная модель.

Алгоритм решения уравнений правдоподобия обобщенной линейной модели как раз и является ядром названного программного модуля. Для применения его в нашем случае необходимо (помимо задания $w_m = v_{ik}$, и $g(\mu) = \ln(\mu)$) перейти к однозначной параметризации, чтобы матрица плана (r_{mn}) имела полный ранг. Для этого можно положить $y_K = 1$ или $\beta_{1+K} = 0$.

В заключение укажем на опубликованные приложения рассмотренных здесь методов. Как минимум, исторический интерес представляют работы, относящиеся к двум классическим методам из раздела 2.4.3: *Bailey R. A., Simon L. J.* Two studies in automobile insurance ratemaking // *ASTIN Bulletin*, 1960, I, p. 192–217; *Mehring J.* Ein mathematisches Hilfsmittel für Statistik- und Tariff Fragen in der Kraftfahrtversicherung // *Blätter der DGVM*, 1964, VII, S. 111–125; *Jung J.* On automobile insurance ratemaking // *ASTIN Bulletin*, 1968, V, p. 41–48.

Применение логнормальной модели распределения рассматривается в статье Чанга и Фэрли (*Chang L., Fairley W. B.* Pricing automobile insurance under multivariate classification of risks: additive versus multiplicative // *Journal of Risk and Insurance*, 1979, p. 75–98). В работе Санта (*Sant D. T.* Estimating expected losses in auto insurance // *Journal of Risk and Insurance*, 1980, p. 133–151) данные сглаживаются посредством минимизации критерия Q_0 , определенного в начале раздела 2.4.6. Сравнительный анализ метода Бейли–Саймона, метода маргинальных сумм и метода, основанного на гамма-распределении («direct method»), на примере голландской статистики автострахования описан в статье Ван Игена и др. (*Van Eeghen J., Nijssen J. A., Ruygt F. A. M.* Interdependence of risk factors: application of some models // *New motor rating structure in the Netherlands*, ASTIN-groep Nederland, 1982, p. 105–119).

Если в предыдущих работах для анализа используются данные автомобильного страхования, то в работе Аджни (*Ajne B.* Comparison of some methods to fit a multiplicative tariff structure to observed risk data // *ASTIN Bulletin*, 1986, 16, p. 63–68) метод Бейли–Саймона сравнивается с методом маргинальных сумм на основе данных имущественного страхования.

Применение стохастических моделей из разделов 2.4.4, 2.4.5, 2.4.7 и 2.4.8 в форме обобщенных линейных моделей демонстрируется в диссертациях: *Kruse O.* Modelle zur Prognose des Schadenbedarfs in der Kraftfahrzeug-Haftpflichtversicherung. Karlsruhe: Versicherungswirtschaft, 1997; *Walter J. T.* Zur Anwendung von Verallgemeinerten Linearen Modellen zu Zwecken der Tarifierung in der Kraftfahrzeug-Haftpflichtversicherung. Karlsruhe: Versicherungswirtschaft, 1998.

Далее в книне Маккалахы и Найдера (*McCullagh P., Neider J. A.* Generalized Linear Models. London: Chapman & Hall, 1989, p. 296–300) описывается применение гамма-модели с линейной параметризацией и функцией связи $g(\mu) = 1/\mu$ (вместо $g(\mu) = \ln(\mu)$) к трехкратно классифицированным данным страхования автокаско. В работе Йоргенсена с соавт. (*Jørgensen B., Paes de Souza M. C.* Fitting Tweedier's Compound Poisson Model to Insurance Claims Data // *Scandinavian Actuarial Journal*, 1994, p. 69–93) к данным страхования автокаско применяется составная Пуассон-гамма-модель, в которой число убытков учитывается, но не моделируется отдельно от размера убытка. Возможности применения обобщенных линейных моделей при разделении числа убытков и размера убытка демонстрирует работа Брокмана и Райта (*Brockman M. J., Wright T. S.* Statistical Motor Rating: Making Effective Use of Your Data // *Journal of the Institute of Actuaries*, 1992, 119, p. 457–526).

2.5. Доверительные методы для моделирования сходства рисков и групп рисков

2.5.1. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ И ОБЗОР

Даже самый тщательный отбор тарифных факторов и самая тщательная классификация их значений в реальности не приводят к полностью однородным тарифным группам (ячейкам) — риски любой отдельно взятой тарифной группы, как правило, все равно различаются. Однако априори (до наблюдения процесса убытков) нельзя определить, какой из рисков «хуже», а какой «лучше». Более того, при низкой частоте страховых событий окончательно установить различие рисков невозможно даже по прошествии нескольких периодов наблюдения (апостериори). В настоящей главе мы научимся выявлять систематические, не связанные со случайностью различия в процессах убытков у априори одинаковых рисков и учитывать эти различия в виде бо-

нуса или малуса к одинаковой для всех рисков основной премии. Речь идет об оценке достоверности (Credibility) истории убытков и тарификации на базе опыта. Эта задача решается доверительными методами.

Применение доверительных методов допускается только при достаточно высокой частоте наступления убытков по тарифицируемым единицам (одиночным или групповым рискам). Этому требованию отвечают одиночные риски в страховании промышленных предприятий или автостраховании, а также групповые риски, подверженные влиянию внешних факторов, не входящих в число применяемых тарифных факторов. Последнее имеет место, например, в страховании парков автомобилей, в групповом страховании жизни, несчастных случаев или болезней, при разделении рисков по регионам или при перестраховании рисков нескольких страховщиков. Таким образом, доверительные методы могут относиться как к множеству отдельных рисков, так и к множеству групповых рисков. Для обобщения двух случаев мы будем говорить в разделе 2.5.3 о *коллективе*, состоящем из отдельных *индивидуумов*.

Основное условие использования доверительных методов — отсутствие возможности заранее узнать, каким из рассматриваемых индивидуумов свойствен систематически лучший, а каким худший процесс убытков. Иными словами, рассматриваемые индивидуумы априори не должны различаться в отношении распределения убытков. Например, доверительная тарификация основной и дополнительной квартир в страховании краж со взломом бессмысленна, так как изначально ясно, что дополнительная квартира, посещаемая реже, подвержена большему риску.

В разделе 2.5.2 мы применим байесовский метод оценивания для построения системы бонус-малус на основании статистики числа убытков. Этот метод требует задания модели распределения, что в большинстве случаев приходится делать произвольно. Обойтись без распределения позволяет обсуждаемая в разделе 2.5.4 модель Бюльмана (Bühlmann), для понимания которой байесовская модель очень полезна. В разделе 2.5.4 рассматривается еще одна, более общая, не зависящая от распределения модель, допускающая различие индивидуумов по размеру. Единый для обеих моделей доверительный подход заранее разрабатывается в разделе 2.5.3. Мы ограничимся этими тремя важнейшими моделями — более или менее подробное изложение всей теории доверия, активно развиваемой в последние годы, вылилось бы в отдельную книгу.

В таблице 2.5.1.1 сведены свойства условного математического ожидания, часто используемые в этой главе.

2.5.2. ДОВЕРИТЕЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ПУАССОН-ГАММА И ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ БОНУС-МАЛУС

Представленная ниже модель была разработана в начале 1960-х годов для моделирования числа убытков в страховании автогражданской ответственности. Она основана на предположении, что для описания годового числа убытков одиночного риска в страховании автогражданской ответственности хоро-

Таблица 2.5.1.1. Свойства условного математического ожидания

Определения:

Случайная величина X имеет зависящую от Z функцию распределения $F(x | Z)$, если $E(F(x | Z)) = P(X \leq x)$ для почти всех x . Соответствующее условное математическое ожидание $E(X | Z)$ может быть напрямую задано равенством $E(E(X | Z) \cdot 1_A) = E(X \cdot 1_A)$, где A — любое событие из сигма-алгебры, порождаемой случайной величиной Z .

$$\text{Cov}(X, Y | Z) := E((X - E(X | Z)) \cdot (Y - E(Y | Z)) | Z) = E(XY | Z) - E(X | Z) \cdot E(Y | Z),$$

$$\text{Var}(X | Z) := \text{Cov}(X, X | Z) = E((X - E(X | Z))^2 | Z).$$

Свойства условного математического ожидания:

- (1) $E(E(X | Y, Z) | Y) = E(X | Y)$
(Теорема об итеративности математического ожидания.) С помощью этого свойства получаются формулы

$$E(X) = E(E(X | Z)),$$

$$\text{Var}(X) = E(\text{Var}(X | Z)) + \text{Var}(E(X | Z)),$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(\text{Cov}(X, Y | Z)) + \text{Cov}(E(X | Z), E(Y | Z)).$$

- (2) $E(X \cdot f(Z) | Z) = f(Z) \cdot E(X | Z)$
для любой функции f от случайной величины Z , в частности,

$$E(f(Z) | Z) = f(Z),$$

$$E(aX + b | Z) = aE(X | Z) + b \text{ для скаляров } a, b$$

- (3) $E(X | Z) = E(X | Y, Z)$ для независимых X, Y ,
в частности,

$$E(X | Z) = E(X) \text{ для независимых } X, Z.$$

шо подходит *распределение Пуассона*, выводимое из следующих естественных предпосылок (см. также раздел 1.4.2):

- убытки происходят в любые моменты времени (непрерывность функции интенсивности);
- два или более убытка по одному и тому же риску не могут произойти одновременно (регулярность функции интенсивности);
- в непересекающихся временных интервалах количества убытков независимы (независимость приращений).

Пусть задан портфель из I независимых рисков (автогражданской ответственности), а случайная величина N_i описывает число убытков по риску i , $1 \leq i \leq I$, на определенном временном промежутке. Согласно принятому предположению,

$$P(N_i = n) = \exp(-\theta_i) \cdot \theta_i^n / n!, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где параметр θ_i удовлетворяет условию $\theta_i = E(N_i) = \text{Var}(N_i)$. На основании статистики убытков одного-единственного риска проверить это предположение

Таблица 2.5.2.1. Распределение числа убытков в автостраховании I

n_i	Число рисков	Модель Пуассона	Относительное квадратичное отклонение (слагаемое статистики хи-квадрат)
0	20 592	20 258,1	5,4
1	2 651	3 083,8	60,8
2	297	234,7	16,5
3	41	11,9	108,4
4	7	0,45	
≥ 5	1	0,014	
Σ	23 589	23 589	191,1

практически невозможно, ведь у одиночного риска убытки происходят очень редко (персональный автомобиль порождает убыток в среднем один раз в 10 лет). В силу независимости рисков (страховое событие, в котором «повинны» одновременно несколько рисков одного и того же портфеля, должно быть сопоставлено одному-единственному риску) при одинаковом для всех рисков портфеля значении $\theta_i = \theta$ мы имели бы выборку объема I из распределения Пуассона с параметром θ . Предположение постоянства значения θ можно проверить с помощью критерия хи-квадрат на основании реализаций $N_i = n_i$.

Рассмотрим пример. В 1960 году (более поздние данные искажены жадой бонусов) по автомобилям мощностью от 24 до 45 лошадиных сил в Германии зафиксированы показатели, представленные в первых двух колонках таблицы 2.5.2.1. Третья колонка содержит ожидаемое число убытков в рамках модели Пуассона с постоянным параметром $\hat{\theta} = 0,152$. Эта оценка рассчитана по методу минимума хи-квадрат и доставляет статистике критерия хи-квадрат значение 191 при двух степенях свободы (значения $n_i \geq 3$ объединены в один класс — итого получено 4 класса). Таким образом, предположенная модель отвергается. К такому же результату приводят исследования статистических данных других стран. Модель Пуассона с одинаковым для всех рисков параметром θ существенно недооценивает наблюдаемое количество рисков с большим числом убытков n_i .

Полученный результат свидетельствует не против распределения Пуассона, а против предположения одинакового для всех рисков распределения числа убытков. Дальнейшие статистические наблюдения показали, что риски, не вызвавшие убытков в течение первого года, и в следующем году имели заметно меньшую среднюю частоту убытков по сравнению с остальными. Из этого был сделан вывод: параметры θ_i необходимо различать и понимать как реализации случайной величины Θ с неизвестным распределением $f(\theta)$, $0 < \theta < \infty$. При таком подходе средняя по портфелю вероятность события $N = n$ для отдельного риска задается формулой

$$P(N = n) = \int_0^{\infty} \theta^n e^{-\theta} f(\theta) d\theta / n!.$$

Этот интеграл вычисляется очень просто, когда f — плотность гамма-распределения:

$$f(\theta) = \beta^\alpha \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta} / \Gamma(\alpha), \quad \theta > 0,$$

(здесь мы отступили от обозначений, введенных в разделе 1.3.3, положив $\beta = \alpha / \mu$). Действительно, как и в разделе 1.4.2, для $n = 0, 1, 2, \dots$ получаем

$$\begin{aligned} P(N = n) &= \beta^\alpha \int_0^{\infty} \theta^{n+\alpha-1} e^{-(\beta+1)\theta} d\theta / (n! \Gamma(\alpha)) = \frac{\beta^\alpha \Gamma(n+\alpha)}{n! \Gamma(\alpha) (\beta+1)^{n+\alpha}} = \\ &= \frac{(n+\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-1) \alpha}{n!} \cdot \frac{1}{(\beta+1)^n} \cdot \frac{\beta^\alpha}{(\beta+1)^\alpha} = \binom{n+\alpha-1}{n} p^\alpha (1-p)^n, \end{aligned}$$

где $p = \beta / (\beta + 1)$ (см. также табл. 1.4.2.2). Построенное таким образом распределение числа убытков N произвольного риска портфеля представляет собой *отрицательное биномиальное распределение* и легко рассчитывается по рекуррентной формуле

$$P(N = n) = P(N = n-1) \cdot (1-p) \cdot (\alpha + n - 1) / n.$$

Учитывая, что при известном Θ число убытков N распределено по закону Пуассона с параметром Θ , и используя свойства условного математического ожидания и дисперсии, находим

$$E(N) = E(E(N|\Theta)) = E(\Theta) = \alpha / \beta,$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(N) &= E(\text{Var}(N|\Theta)) + \text{Var}(E(N|\Theta)) = \\ &= E(\Theta) + \text{Var}(\Theta) = \alpha / \beta + \alpha / \beta^2 = (1 + \beta^{-1}) E(N). \end{aligned}$$

Как следует из последней формулы, при одинаковых математических ожиданиях дисперсия отрицательного биномиального распределения всегда превышает дисперсию распределения Пуассона.

Если $P(N = n)$ — средняя по портфелю вероятность наступления n убытков у одного риска, то $1 \cdot P(N = n)$ — ожидаемое в рамках модели Пуассон-гамма совокупное число рисков с n убытками. Оценив параметры α и β на основании данных таблицы 2.5.2.1 по методу минимума хи-квадрат, получаем результат, приведенный в таблице 2.5.2.2 в колонке «Отрицательное биномиальное распределение».

Значение статистики критерия хи-квадрат на это раз равно 3,6 при двух степенях свободы (один класс для $n_i \geq 4$), следовательно, отрицательное биномиальное распределение не отвергается. Оценки параметров составляют: $\hat{\alpha} = 1,107$, $\hat{\beta} = 7,67$, $\hat{p} = \hat{\beta} / (1 + \hat{\beta}) = 0,885$, $\hat{\mu} := \hat{\alpha} / \hat{\beta} = 0,144$. Обратим внимание, принятое нами распределение параметра Пуассона θ_i («структурная функция») схоже с экспоненциальным распределением ($\alpha = 1$) вокруг среднего значения $\hat{\mu} = 0,144$, одновременно являющегося оценкой среднего числа убытков одиночного риска.

Хорошая согласованность модели с данными еще не означает, что гамма-распределение — истинная структурная функция. При использовании в ка-

Таблица 2.5.2.2. Распределение числа убытков в автостраховании II

n_i	Наблюдаемое число рисков	Ожидаемое число рисков	
		Отрицательное биномиальное распределение	Двукратное распределение Пуассона
0	20 592	20 595,1	20 591,3
1	2 651	2 630,8	2 652,6
2	297	319,7	294,6
3	41	38,2	43,2
4	7	4,5	6,4
≥ 5	1	0,6	0,9
Σ	23 589	23 589	23 589

честве структурной функции двухточечного распределения, разделяющего риски на «хорошие» с фиксированным параметром Пуассона θ_1 и «плохие» с фиксированным параметром Пуассона $\theta_2 > \theta_1$, достигается лучшее соответствие данным (см. табл. 2.5.2.2, колонку «Двукратное распределение Пуассона»). Правда, по сравнению с гамма-распределением двукратное распределение Пуассона содержит на один параметр больше: кроме θ_1 и θ_2 необходимо оценить еще долю q «плохих» рисков. Оценки по методу минимума хи-квадрат $\hat{\theta}_1 = 0,105$, $\hat{\theta}_2 = 0,636$, $\hat{q} = 0,074$ приводят к значению 0,2 статистики критерия хи-квадрат при одной степени свободы. Несмотря на это, непрерывная структурная функция в рассматриваемой ситуации все же предпочтительна. В разделе 2.5.4 мы покажем, как обойти проблему выбора структурной функции.

Микромодель распределения Пуассона с индивидуальным, но неизвестным параметром θ_i для числа убытков каждого риска i в случае независимых рисков приводит к *распределению Пуассона для числа убытков совокупного портфеля* (как суммы I независимых распределений Пуассона) и поэтому идеально подходит к макромодели из раздела 1.4.2. Напомним, в разделе 1.4.2 предполагалось, что в отдельно взятом году — при фиксированном качестве года — число убытков портфеля распределено по закону Пуассона. Следует различать распределение числа убытков конкретного риска (с фиксированным параметром θ) и среднего или выбранного случайным образом риска с неизвестным θ . Во втором случае дисперсия числа убытков выше, в силу случайности параметра Пуассона.

Мы убедились, что пуассоновское распределение числа убытков не одинаково для всех рисков. В частности, риск с высоким θ вызывает большее число убытков, чем риск с низким θ . И *наоборот*, риск с высоким числом убытков имеет, скорее, высокое θ , чем низкое. Обратное утверждение в случае модели Пуассон-гамма строго доказывается с помощью *формулы Байеса*. Для любых двух событий A и B условная вероятность $P(A | B)$ задается формулой

$$P(A | B) = P(AB) / P(B).$$

Поменяв события местами, получим

$$P(B | A) = P(AB) / P(A).$$

Из этих двух равенств непосредственно следует формула Байеса

$$P(A | B) \cdot P(B) = P(B | A) \cdot P(A).$$

В частности, для дискретного Θ имеем

$$P(\Theta = \theta | N = n) \cdot P(N = n) = P(N = n | \Theta = \theta) \cdot P(\Theta = \theta).$$

Точно такое же равенство получается и для непрерывного Θ после замены точечных вероятностей соответствующими плотностями. По формуле Байеса можно рассчитать вероятность $P(\Theta = \theta | N = n)$ значения θ у параметра Θ риска с n убытками, поскольку все остальные вероятности нам известны: $P(\Theta = \theta)$ задана плотностью $f(\theta)$ гамма-распределения, $P(N = n | \Theta = \theta)$ — распределением Пуассона с параметром θ , а $P(N = n)$ — вычисленным ранее отрицательным биномиальным распределением. Таким образом,

$$P(\Theta = \theta | N = n) = \frac{e^{-\theta} \theta^n}{n!} \cdot \frac{\beta^\alpha \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}}{\Gamma(\alpha)} \bigg/ \frac{\beta^\alpha \Gamma(n+\alpha)}{n! \Gamma(\alpha) (\beta+1)^{n+\alpha}} =$$

$$= (\beta+1)^{\alpha+n} \theta^{\alpha+n-1} e^{-(\beta+1)\theta} / \Gamma(\alpha+n).$$

Последнее выражение представляет собой плотность гамма-распределения с параметром формы $\alpha + n$ и скалярным параметром $\beta + 1$ (с учетом принятой ранее параметризации), то есть с математическим ожиданием

$$E(\Theta | N = n) = (\alpha + n) / (\beta + 1).$$

Если априори — до наблюдения индивидуального числа убытков N — мы должны были предположить для всех рисков одинаковое значение $E(\Theta) = \alpha / \beta$ параметра θ (и, следовательно, одинаковое ожидаемое число убытков), то *апостериори* — после наблюдения числа убытков N на определенном временном интервале — *риски можно дифференцировать*. Рискам с нулевым числом убытков мы приписываем среднее θ в размере

$$E(\Theta | N = 0) = \alpha / (\beta + 1) < \alpha / \beta,$$

рискам, вызвавшим ровно один убыток, —

$$E(\Theta | N = 1) = (\alpha + 1) / (\beta + 1) > \alpha / \beta$$

(так как здесь $\beta > \alpha$) и т. д. После нормировки этих математических ожиданий на среднее по портфелю $E(\Theta) = \alpha / \beta$ и замены параметров оценками $\hat{\alpha} = 1,107$, $\hat{\beta} = 7,67$, рассчитанными на основании данных таблицы 2.5.2.2, получаются следующие показатели:

Наблюдаемое число убытков, n	0	1	2	3	...	n
Относительное математическое ожидание $E(\Theta N = n) / E(\Theta)$, %	88	168	248	328	...	$\frac{1,107 + n}{8,67 \cdot 0,144}$

При отсутствии систематических различий между рисками в отношении размера убытка представленные выше процентные ставки задают систему бонус-малус. Она показывает, какая процентная доля от средней премии должна соответствовать риску, вызвавшему n убытков, в следующем страховом периоде. Для практики важно, чтобы дифференцированные на основании истории убытков $E(\Theta | N = n)$ ставки премий приводили к такому же совокупному объему премий, как и недифференцированные 100%-ные средние премии, основанные на значении $E(\Theta) = E(N)$. Иными словами, бонусы и малусы должны взаимно компенсироваться. В нашем случае это требование выполняется, как непосредственно следует из формулы

$$\sum_{n=0}^{\infty} E(\Theta | N = n) \cdot P(N = n) = E(E(\Theta | N)) = E(\Theta) = \sum_{n=0}^{\infty} E(\Theta) \cdot P(N = n).$$

Модель Пуассон-гамма легко обобщается на случай, когда для каждого риска известны числа убытков n_1, n_2, \dots, n_J за J одинаковых по продолжительности временных промежутков. Если в течение рассматриваемого времени параметры Пуассона всех рисков не менялись, то апостериорное распределение параметра Θ при заданных n_1, \dots, n_J представляет собой гамма-распределение с параметром формы $\alpha + n_1 + \dots + n_J$ и скалярным параметром $\beta + J$, то есть с математическим ожиданием

$$E(\Theta | N_1 = n_1, \dots, N_J = n_J) = \frac{\alpha + n_1 + \dots + n_J}{\beta + J} = \frac{J}{\beta + J} \cdot \frac{n_1 + \dots + n_J}{J} + \frac{\beta}{\beta + J} \cdot \frac{\alpha}{\beta}$$

(случай $J = 1$ нами был разобран выше). С помощью этой формулы можно вычислить, например, относительное математическое ожидание

$$E(\Theta | N_1 = 0, \dots, N_J = 0) / E(\Theta) = \beta / (\beta + J)$$

для рисков, не вызвавших ни одного убытка в течение J лет наблюдения (с использованием полученной ранее оценки $\hat{\beta} = 7,67$):

J	1	2	3	4	5	6	...	13	...
$\hat{\beta} / (\hat{\beta} + J), \%$	88	79	72	66	61	56	...	37	...

Последнее выражение апостериорного математического ожидания $E(\Theta | N_1, \dots, N_J)$ имеет вид так называемой *доверительной формулы* — взвешенного среднего между индивидуальной историей убытков $(n_1 + \dots + n_J) / J$ конкретного риска и средним ожидаемым числом убытков α / β по одному риску исследуемого коллектива. Так называемый *доверительный множитель* $c = J / (\beta + J)$ определяет вес индивидуальной истории убытков и увеличивается с ростом числа лет наблюдения J , стремясь к 1 при $J \rightarrow \infty$. Соответственно, вес $1 - c = \beta / (\beta + J)$ среднего по коллективу числа убытков уменьшается с накоплением истории убытков.

В заключение приведем два замечания о практическом применении этой модели.

1. В модели Пуассон-гамма играет роль только совокупное число $n_1 + \dots + n_J$ убытков по одному риску за J лет наблюдения, а не последовательность n_1, n_2, \dots, n_J . Поэтому страховой компании достаточно хра-

нить по каждому риску только два значения: число лет наблюдения и совокупное число убытков. Правда, на практике бонус-малус обычно задается в виде функции от премии предыдущего года (отражающей предшествующую историю убытков) и числа убытков в предыдущем году — эти два значения проще запомнить страхователю.

2. В страховании автогражданской ответственности игнорирование размеров убытков при разработке системы бонус-малус почти всегда невыгодно жителям больших городов, имеющим, как правило, больше мелких убытков. Иными словами, несправедливо предполагать отсутствие систематических различий рисков в отношении размера убытка для портфеля, объединяющего риски больших городов и мелких населенных пунктов. Проблема решается раздельным построением таблиц бонус-малус для больших городов и остальных населенных пунктов.

2.5.3. НЕ ЗАВИСЯЩИЕ ОТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

В предыдущем разделе, за неимением другой возможности, мы оценили неизвестный параметр Пуассона θ_i риска с историей n_1, n_2, \dots, n_J величиной $E(\Theta | N_1 = n_1, \dots, N_J = n_J)$, а точнее, оценкой этой величины, поскольку неизвестные параметры α и β в выражении для $E(\Theta | N_1, \dots, N_J)$ были заменены оценками. Через Θ мы обозначили случайную величину, распределение которой («структурная функция») задается индивидуальными параметрами θ_i рассматриваемого коллектива, $1 \leq i \leq I$. В предположении для N условного — зависящего от Θ — распределения Пуассона справедливо равенство $\Theta = E(N | \Theta)$. Можно сказать, что неизвестное индивидуальное математическое ожидание $E(N | \Theta = \theta_i)$ риска с историей n_1, \dots, n_J было оценено значением $E(E(N | \Theta) | N_1 = n_1, \dots, N_J = n_J)$, то есть средним значением величины $E(N | \Theta)$, образованным по всем рискам с такой же историей убытков.

Эта интерпретация позволяет обобщить метод предыдущего раздела. Пусть распределение величины убытка R (например, числа убытков или размера убытка или совокупного убытка) каждого индивидуума коллектива зависит от неизвестного индивидуального параметра (или вектора параметров) θ («качество распределения»). Так как значение параметра у каждого риска свое, выбор индивидуума из коллектива равносителен выбору реализации случайной величины «качество распределения» Θ из совокупности присутствующих в портфеле показателей качества распределения. При таком подходе распределение величины Θ по портфелю называется структурной функцией, в то время как при байесовском подходе индивидуум рассматривается отдельно, а распределение Θ предполагается (субъективно) известным и называется априорным распределением. В обоих случаях величина убытка R считается зависимой от случайной величины Θ .

Мы намерены оценить условное математическое ожидание $E(R | \Theta)$ будущей реализации величины R , но не знаем соответствующей реализации Θ , а располагаем только историей убытков R_1, \dots, R_J нескольких периодов, в тече-

ние которых Θ не менялось. Отсутствие информации о Θ , как и в разделе 2.5.2, дает нам право заменить интересующее математическое ожидание $E(R|\Theta)$ величиной $E(E(R|\Theta) | R_1, \dots, R_j)$ и вместо индивидуального математического ожидания $E(R|\Theta)$ оценивать соответствующее среднее значение по всем индивидуумам с такой же историей убытков. В заданных условиях, очевидно, ничего не остается, кроме как воспользоваться информацией о прошлых убытках.

Этот подход оптимален и с точки зрения минимизации средней квадратичной ошибки. Для любой случайной величины T (при $E(T^2) < \infty$) и любой (измеримой) функции h справедливо (с обозначением $\underline{R} = (R_1, \dots, R_j)$)

$$E(T - h(\underline{R}))^2 = E(T - E(T|\underline{R}) + E(T|\underline{R}) - h(\underline{R}))^2 = \\ = E(T - E(T|\underline{R}))^2 + E(E(T|\underline{R}) - h(\underline{R}))^2,$$

где учтено равенство нулю смешанного произведения:

$$E((T - E(T|\underline{R})) \cdot (E(T|\underline{R}) - h(\underline{R}))) = \\ = E(E((T - E(T|\underline{R})) \cdot (E(T|\underline{R}) - h(\underline{R})) | \underline{R})) = \\ = E((E(T|\underline{R}) - h(\underline{R})) \cdot E((T - E(T|\underline{R})) | \underline{R})) = \\ = E((E(T|\underline{R}) - h(\underline{R})) \cdot 0) = 0.$$

Наилучшая в среднем квадратичном аппроксимация величины T (измеримой) функцией h от R_1, \dots, R_j достигается при $h(\underline{R}) = E(T | R_1, \dots, R_j)$ (в этом случае всегда неотрицательное второе слагаемое $E(E(T|\underline{R}) - h(\underline{R}))^2$ средней квадратичной ошибки равно нулю).

Следовательно, наилучшую аппроксимацию величины $T = E(R|\Theta)$ на основании наблюдений R_1, \dots, R_j обеспечивает функция $E(E(R|\Theta) | R_1, \dots, R_j)$. Рассматривая конкретного индивидуума в различные периоды, величины R, R_1, \dots, R_j можно считать условно (при заданном Θ) независимыми. Тогда

$$E(R|\Theta) = E(R|\Theta, R_1, \dots, R_j).$$

Свойство итеративности математического ожидания позволяет записать

$$E(E(R|\Theta) | R_1, \dots, R_j) = E(E(R|\Theta, R_1, \dots, R_j) | R_1, \dots, R_j) = E(R | R_1, \dots, R_j).$$

(Заметим, в масштабе коллектива или при усреднении по всем возможным значениям Θ , величины R, R_1, \dots, R_j не являются независимыми, а точнее, положительно скоррелированы. Например, в модели Пуассон-гамма при сравнительно низком $N_1 = n_1$ более вероятно низкое Θ и, следовательно, низкое N_2 .)

Для расчета $E(R | R_1, \dots, R_j)$ требуется задать распределения величин $R|\Theta$ и Θ , как это было в разделе 2.5.2. Исследования показали, что в ряде случаев функция $E(R | R_1, \dots, R_j)$ принимает линейную форму $a_0 + a_1 R_1 + \dots + a_j R_j$. Например, в разделе 2.5.2 $a_0 = \alpha / (\beta + j)$ и $a_j = 1 / (\beta + j)$ при $j \geq 0$. Однако распределения величин R (при фиксированном Θ) и Θ известны далеко не всегда. Более того, даже при известных распределениях условное математическое ожидание может не вычисляться в явном виде, а допускать только интегральное представление.

В 1967 году Бюльман предложил напрямую аппроксимировать $E(R|\Theta)$ линейной комбинацией $a_0 + a_1 R_1 + \dots + a_j R_j$ наблюдаемых величин R_1, \dots, R_j по-

средством минимизации средней квадратичной ошибки. Получаемая таким образом оптимальная линейная аппроксимация $E^*(R|\Theta)$ величины $E(R|\Theta)$ или R называется *доверительной оценкой*. Параметры a_0, \dots, a_j доверительной оценки удовлетворяют так называемым *нормальным уравнениям*

$$\sum_{j=1}^J a_j \cdot \text{Cov}(R_j, R_k) = \text{Cov}(E(R|\Theta), E(R_k|\Theta)), \quad 1 \leq k \leq J,$$

$$a_0 = E(R) - \sum_{j=1}^J a_j \cdot E(R_j),$$

имеющим однозначное решение, когда матрица ковариаций $(\text{Cov}(R_j, R_k))_{j,k}$ не вырождена. Такие случаи мы подробнее изучим в разделе 2.5.4.

В следующей теореме зафиксирован основной результат теории доверия (Д).

Теорема. Пусть величины убытков R, R_1, \dots, R_j одного индивидуума за различные периоды наблюдения удовлетворяют условиям:

(Д1) Функции распределения величин R, R_1, \dots, R_j зависят от одного и того же (векторного) параметра (распределения) Θ , моделируемого как случайная величина («качество распределения»).

(Д2) R, R_1, \dots, R_j условно — при фиксированном Θ — некоррелированы (на практике они зачастую даже условно независимы).

Тогда доверительная оценка $E^*(R|\Theta) = a_0 + a_1 R_1 + \dots + a_j R_j$, имеющая минимальную среднюю квадратичную ошибку среди всех аппроксимаций величины $E(R|\Theta)$ линейной функцией от наблюдений R_1, \dots, R_j , задается нормальными уравнениями:

$$\sum_{j=1}^J a_j \cdot \text{Cov}(R_j, R_k) = \text{Cov}(E(R|\Theta), E(R_k|\Theta)), \quad 1 \leq k \leq J,$$

$$a_0 = E(R) - \sum_{j=1}^J a_j \cdot E(R_j).$$

Последнее уравнение одновременно гарантирует несмещенность доверительной оценки $E(E^*(R|\Theta)) = E(R)$.

Доказательство. Для вывода нормальных уравнений необходимо минимизировать среднее квадратичное расстояние $E(T - a_0 - \underline{R})^2$ между $T = E(R|\Theta)$ и $a_0 + \underline{R}$, где $\underline{R} = a_1 R_1 + \dots + a_j R_j$. Условие равенства нулю частной производной по a_0

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial a_0} \right) E(T - a_0 - \underline{R})^2$$

после перемены мест операторов дифференцирования и математического ожидания принимает вид

$$0 = E(T) - a_0 - E(\underline{R}). \quad (1)$$

Умножив обе части на $E(R_k)$, приходим к равенству

$$0 = E(T)E(R_k) - a_0 E(R_k) - E(\underline{R})E(R_k). \quad (2)$$

Из условий равенства нулю остальных частных производных

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial a_k} \right) E(T - a_0 - \underline{R})^2 = -2 \cdot E((T - a_0 - \underline{R})R_k)$$

следует

$$0 = E(TR_k) - a_0 E(R_k) - E(\underline{R}R_k), \quad 1 \leq k \leq J. \quad (3)$$

Вычитая (2) из (3), получим

$$0 = \text{Cov}(T, R_k) - \text{Cov}(\underline{R}, R_k).$$

Поскольку

$$\text{Cov}(\underline{R}, R_k) = \sum_{j=1}^J a_j \cdot \text{Cov}(R_j, R_k)$$

и

$$\begin{aligned} \text{Cov}(T, R_k) &= \text{Cov}(E(R | \Theta), R_k) = \\ &= E(\text{Cov}(E(R | \Theta), R_k | \Theta)) + \text{Cov}(E(E(R | \Theta) | \Theta), E(R_k | \Theta)) = \\ &= 0 + \text{Cov}(E(R | \Theta), E(R_k | \Theta)), \end{aligned}$$

первая часть нормальных уравнений доказана. Вторая часть непосредственно следует из (1), в силу равенств

$$E(T) = E(E(R | \Theta)) = E(R)$$

и

$$E(\underline{R}) = a_1 E(R_1) + \dots + a_J E(R_J).$$

2.5.4. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ МОДЕЛИ БЮЛЬМАНА И БЮЛЬМАНА—ШТРАУБА

Модели Бюльмана (Б) и Бюльмана—Штрауба (БШ) представляют собой простейшие частные случаи, когда нормальные уравнения из раздела 2.5.3 решаются в явном виде. Модель Бюльмана предполагает условную (при заданном Θ) независимость (в принципе, достаточно только некоррелированности) и одинаковую распределенность случайных величин R, R_1, \dots, R_J одного индивидуума за различные периоды — из этих же предположений мы исходили в разделе 2.5.2. Таким образом, помимо общих предпосылок Д1 и Д2 доверительной схемы из раздела 2.5.3 в модели Бюльмана (Б) принимается предположение:

(Б_{инд}) Величины убытков R, R_1, \dots, R_J условно (при заданном Θ) одинаково распределены.

Тогда доверительная оценка $E^*(R | \Theta)$ величины $E(R | \Theta)$ имеет вид

$$E^*(R | \Theta) = c \cdot \left(\sum_{j=1}^J R_j / J \right) + (1 - c) \cdot E(R),$$

где

$$c = \frac{J}{J + t}, \quad t = \frac{E(\text{Var}(R | \Theta))}{\text{Var}(E(R | \Theta))}.$$

Множитель c служит мерой достоверности истории убытков R_1, \dots, R_J и называется доверительным множителем; t называется временной константой и показывает, сколько периодов наблюдения требуется для достижения достоверности $c = 50\%$. С ростом длительности наблюдения J доверительный множитель c увеличивается, придавая больший вес индивидуальной истории убытков. Вывод формулы доверительной оценки мы опускаем, учитывая принадлежность модели Бюльмана к рассматриваемой ниже более общей модели Бюльмана—Штрауба. С помощью доверительных оценок модели Бюльмана можно, как в разделе 2.5.2, построить таблицу бонус-малус $E^*(R | \Theta) / E(R)$, зависящую от истории убытков R_1, \dots, R_J .

Доверительная оценка имеет ту же форму, что и в разделе 2.5.2. Более того, если R (при фиксированном Θ) распределена по закону Пуассона с параметром Θ , подчиненным гамма-распределению с математическим ожиданием α / β и параметром формы α (см. раздел 2.5.2), оценка модели Бюльмана совпадает с выведенным в разделе 2.5.2 точным значением величины $E(\Theta | R_1, \dots, R_J)$. Это следует из равенств

$$t = E(\Theta) / \text{Var}(\Theta) = (\alpha / \beta) / (\alpha / \beta^2) = \beta,$$

$$E(R) = E(E(R | \Theta)) = E(\Theta) = \alpha / \beta,$$

вытекающих из свойства $E(R | \Theta) = \Theta = \text{Var}(R | \Theta)$ распределения Пуассона. Но даже отказавшись от предположения определенной структурной функции и считая только, что R (при фиксированном Θ) распределена по закону Пуассона с параметром Θ , мы по-прежнему будем иметь $t = E(\Theta) / \text{Var}(\Theta)$, в силу равенства $E(R | \Theta) = \Theta = \text{Var}(R | \Theta)$. Далее, из равенств

$$E(R) = E(E(R | \Theta)) = E(\Theta),$$

$$\text{Var}(R) = E(\text{Var}(R | \Theta)) + \text{Var}(E(R | \Theta)) = E(\Theta) + \text{Var}(\Theta)$$

с помощью оценок по методу моментов (через n_k обозначено число рисков, вызвавших k убытков)

$$\hat{m} = \sum_{k \geq 0} k \cdot n_k / \sum_{k \geq 0} n_k \quad \text{для } m = E(R) = E(\Theta),$$

$$\frac{1}{n_+ - 1} \sum_{k \geq 0} n_k (k - \hat{m})^2 \quad \text{для } \text{Var}(R) = E(\Theta) + \text{Var}(\Theta)$$

непосредственно находим оценки структурных параметров $E(R) = E(\Theta)$ и $\text{Var}(\Theta)$. На основании данных таблицы 2.5.2.1 для временной константы по-

лучается оценка $\hat{t} = 0,14422 / (0,16387 - 0,14422) = 7,34$ (при вычислении оценок по методу моментов предполагалось, что риск с пятью и более убытками имел ровно 6 убытков). Напомним, в модели Пуассон-гамма оценка параметра β (по методу минимума хи-квадрат) составила $\hat{\beta} = 7,67$. Как видим, не зависящая от вида структурной функции доверительная модель приводит почти к таким же бонус-малус-премиям, как и модель из раздела 2.5.2.

Если R в модели Бюльмана описывает совокупный убыток индивидуума, то необходимые для расчета доверительной оценки параметры

$$m = E(R),$$

$$u = E(\text{Var}(R | \Theta)),$$

$$w = \text{Var}(E(R | \Theta))$$

оцениваются на основании статистики убытков коллектива. Соответствующие формулы приведены в следующей теореме.

Теорема. Пусть R_{i1}, \dots, R_{ij} — случайные величины убытков i -го индивидуума, $1 \leq i \leq I$, в годах наблюдений $j = 1, \dots, J$, и Θ_i — соответствующее этому индивидууму качество распределения (моделируемое как случайная величина). Пусть также каждый индивидуум i удовлетворяет условиям Д1 и Д2 из раздела 2.5.3, и выполнены следующие предпосылки:

(Д3) Векторы $(\Theta_i, R_{i1}, \dots, R_{ij})$, $1 \leq i \leq I$, различных индивидуумов независимы.

(Д4) Параметры качества рисков $\Theta_1, \dots, \Theta_I$ одинаково распределены.

(Б_{колл}) Величины убытков R_{ij} , $1 \leq i \leq I$, $1 \leq j \leq J$, условно (при одинаковом качестве распределения) одинаково распределены (то есть вероятность $P(R_{ij} \leq r | \Theta_i = \theta)$ не зависит ни от i , ни от j).

Тогда следующие оценки являются несмещенными

$$\hat{m} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J R_{ij},$$

$$\hat{u} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \left(\frac{1}{J-1} \sum_{j=1}^J (R_{ij} - R_{i+}/J)^2 \right),$$

$$\hat{w} = \frac{1}{I-1} \sum_{i=1}^I \left(\frac{R_{i+}}{J} - \hat{m} \right)^2 - \frac{\hat{u}}{J}.$$

Мы снова опускаем доказательство — эти оценки выводятся из более общих формул оценок модели Бюльмана—Штрауба. Кратко обсудим опорные предположения модели. Предположения Д1, Д2 и Д3, как правило, можно признать выполненными. Критическим является предположение Д4. Мы уже упоминали его в разделе 2.5.1: априори (до наблюдения процесса убытков) индивидуумы нельзя различить. Так как качество распределения $\Theta_i = \theta$, при-

сущее i -му индивидууму, неизвестно, предположение Д4 означает одинаковую вероятность всех возможных в коллективе значений θ для каждого Θ_i . Это условие не выполняется, когда внешние факторы рисков рассматриваемых индивидуумов различны. Следовательно, оценивание доверительных параметров m , u и w должно осуществляться только в рамках коллектива, не содержащего различий в качествах распределений.

Ограничение накладывают и специальные предположения Б_{инд} и Б_{колл} модели Бюльмана (Б_{инд} — частный случай Б_{колл} при $I = 1$). Практически они означают применимость модели Бюльмана только к одиночным рискам в «нормированном» массовом страховании (в частности, в страховании гражданской ответственности или имущественном страховании при условии одинаковых для всех рисков страховых сумм). Это ограничение снимается моделью Бюльмана—Штрауба, к которой мы сейчас и обратимся.

В то время как предположения Б_{инд} и Б_{колл} модели Бюльмана не позволяют индивидуумам менять объем на протяжении всех лет, модель Бюльмана—Штрауба предусматривает возможность различий объемов как по годам, так и по коллективу. Обычно в модели Бюльмана—Штрауба случайная величина R описывает нормированный на известный объем v (количество полисов-лет, страховая сумма) совокупный убыток группы рисков. Эту величину, начиная с раздела 1.3.2, мы всюду обозначали через Z . Будем придерживаться этого обозначения и предположим наличие J наблюдений Z_j по одному и тому же индивидууму (например, группе рисков) за различные периоды, причем j -му наблюдению соответствует объем v_j , $1 \leq j \leq J$. Для упрощения записи обозначим неизвестную будущую реализацию величины Z через Z_0 , а соответствующий объем — через v_0 . Результат, полученный Бюльманом и Штраубом, резюмирует следующая теорема.

Теорема. Пусть для величин убытков Z_0, Z_1, \dots, Z_J одного индивидуума за различные периоды наблюдения выполняются условия:

(Д1) Функции распределения величин Z_0, \dots, Z_J зависят от одного и того же неизвестного (векторного) параметра (распределения) Θ , моделируемого как случайная величина («качество распределения»).

(Д2) Z_0, \dots, Z_J условно (при фиксированном Θ) некоррелированы: $\text{Cov}(Z_j, Z_k | \Theta) = 0$ при $j \neq k$.

(БШ_{инд}) Для всех $j = 0, 1, 2, \dots, J$ справедливы равенства $E(Z_j | \Theta) = \mu(\Theta)$ и $\text{Var}(Z_j | \Theta) = \sigma^2(\Theta) / v_j$, где v_j — известный объем, а μ и σ^2 — неизвестные функции, не зависящие от j .

Тогда доверительная оценка $E^*(Z_0 | \Theta)$ величины $E(Z_0 | \Theta)$ имеет вид

$$E^*(Z_0 | \Theta) = c \cdot \left(\sum_{j=1}^J \frac{v_j}{v_+} Z_j \right) + (1-c) \cdot E(Z_0),$$

где

$$v_+ = \sum_{j=1}^J v_j, \quad c = \frac{v_+}{v_+ + t}, \quad t = \frac{E(\sigma^2(\Theta))}{\text{Var}(\mu(\Theta))},$$

а ее средняя квадратичная ошибка (mse — mean squared error) равна

$$E(E^*(Z_0 | \Theta) - E(Z_0 | \Theta))^2 = (1 - c) \text{Var}(\mu(\Theta)).$$

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, обратим внимание, что модель Бюльмана удовлетворяет условию БШ_{инд} при $Z_j = R_j$ и $v_j = 1$, то есть представляет собой частный случай модели Бюльмана—Штрауба.

Доказательство. Вывод формулы доверительной оценки сводится к решению нормальных уравнений

$$\sum_{j=1}^J a_j \cdot \text{Cov}(Z_j, Z_k) = \text{Cov}(E(Z_0 | \Theta), E(Z_k | \Theta)), \quad 1 \leq k \leq J,$$

$$a_0 = E(Z_0) - \sum_{j=1}^J a_j \cdot E(Z_j).$$

Сначала заметим, что

$$\text{Cov}(E(Z_0 | \Theta), E(Z_k | \Theta)) = \text{Cov}(\mu(\Theta), \mu(\Theta)) = \text{Var}(\mu(\Theta)) =: w,$$

$$\text{Cov}(Z_j, Z_k) = E(\text{Cov}(Z_j, Z_k | \Theta)) + \text{Cov}(E(Z_j | \Theta), E(Z_k | \Theta)) =$$

$$= \delta_{jk} \cdot E(\text{Var}(Z_k | \Theta)) + w = \delta_{jk} \cdot u / v_k + w,$$

где $u = E(\sigma^2(\Theta))$, $\delta_{jk} = 0$ при $j \neq k$ и $\delta_{kk} = 1$. С помощью этих равенств первая часть нормальных уравнений приводится к виду (с обозначением $a_+ = a_1 + \dots + a_J$)

$$w \cdot a_+ + a_k u / v_k = w, \quad 1 \leq k \leq J,$$

или

$$v_k a_+ + a_k u / w = v_k, \quad 1 \leq k \leq J,$$

откуда следует

$$a_k = v_k(1 - a_+)w / u, \quad 1 \leq k \leq J.$$

В результате суммирования по k получаем

$$v_+ a_+ + a_+ u / w = v_+$$

или

$$a_+ = v_+ / (v_+ + u / w) = c.$$

Подставив это выражение в формулу для a_k , находим

$$a_k = v_k(1 - a_+)w / u = v_k / (v_+ + u / w) = a_+ v_k / v_+.$$

Поскольку $E(Z_j) = E(E(Z_j | \Theta)) = E(\mu(\Theta))$, $0 \leq j \leq J$, из второй части нормальных уравнений следует

$$a_0 = E(Z_0) - \sum_{j=1}^J a_j E(Z_j) = E(Z_0) - a_+ E(\mu(\Theta)) = (1 - a_+) E(Z_0).$$

В итоге для доверительной оценки величины $E(Z_0 | \Theta)$ получается выражение

$$E^*(Z_0 | \Theta) = a_0 + \sum_{j=1}^J a_j Z_j = (1 - a_+) E(Z_0) + a_+ \sum_{j=1}^J v_j Z_j / v_+.$$

Отсюда, в силу равенства $a_+ = c$, непосредственно вытекает приведенная в формулировке теоремы оценка $E^*(Z_0 | \Theta)$.

Для расчета средней квадратичной ошибки обозначим

$$m = E(\mu(\Theta)) = E(Z_j),$$

$$\underline{Z}_+ = \sum_{j=1}^J v_j Z_j / v_+.$$

Тогда

$$\begin{aligned} E(E^*(Z_0 | \Theta) - E(Z_0 | \Theta))^2 &= \\ &= E(c \underline{Z}_+ + (1 - c)m - \mu(\Theta))^2 = \\ &= E(c(\underline{Z}_+ - \mu(\Theta)) + (1 - c)(m - \mu(\Theta)))^2 = \\ &= c^2 E(\underline{Z}_+ - \mu(\Theta))^2 + (1 - c)^2 E(m - \mu(\Theta))^2 = \\ &\quad (\text{так как смешанное слагаемое } E(\dots | \Theta) \text{ равно нулю}) \\ &= c^2 E(\text{Var}(\underline{Z}_+ | \Theta)) + (1 - c)^2 \text{Var}(\mu(\Theta)) = \\ &= c^2 E\left(\sum_{j=1}^J \frac{v_j^2}{v_+^2} \cdot \frac{\sigma^2(\Theta)}{v_j}\right) + (1 - c)^2 w = \\ &= c^2 u / v_+ + (1 - c)^2 w = \\ &= (c^2 t / v_+ + (1 - c)^2) w = \\ &= c(1 - c) + (1 - c)^2 w = \\ &= (1 - c)w. \end{aligned}$$

Теорема доказана. ■

Для применения доверительной оценки Бюльмана—Штрауба на практике требуется оценить только три «структурных параметра»

$$m = E(\mu(\Theta)) = E(Z_j),$$

$$w = \text{Var}(\mu(\Theta)) = \text{Var}(E(Z_j | \Theta)),$$

$$u = E(\sigma^2(\Theta)) = E(v_j \text{Var}(Z_j | \Theta)).$$

Это возможно, когда в рассматриваемом коллективе из I индивидуумов $i = 1, \dots, I$ показатели качества Θ_i независимы и одинаково распределены и имеются наблюдения (Z_{i1}, \dots, Z_{ij}) нормированных на известные объемы v_{i1}, \dots, v_{ij} величин убытков, не зависящие от индивидуумов и удовлетворяющие предпосылкам модели Бюльмана—Штрауба.

Теорема. Пусть Z_{i1}, \dots, Z_{ij} — величины убытков i -го индивидуума, $1 \leq i \leq I$, в годах наблюдений $j = 1, \dots, J$, и Θ_i — соответствующее i -му индивидууму неизвестное качество распределения, моделируемое как случайная величина.

Пусть также каждый индивидиум удовлетворяет общим условиям доверительной модели Д1 и Д2, сформулированным в предыдущей теореме, и выполнены следующие предположения:

(Д3) Векторы $(\Theta_i, Z_{i1}, \dots, Z_{ij}), 1 \leq i \leq I$, различных индивидиумов независимы.

(Д4) Показатели качества распределения $\Theta_1, \dots, \Theta_I$ одинаково распределены.

(БШ_{колл}) Для всех $1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J$ справедливы равенства $E(Z_{ij} | \Theta_i = \theta) = \mu(\theta)$ и $Var(Z_{ij} | \Theta_i = \theta) = \sigma^2(\theta) / v_{ij}$, где v_{ij} — известные объемы, а μ и σ^2 — неизвестные, одинаковые для всех i, j функции.

Тогда параметры $m = E(\mu(\Theta_i))$, $w = Var(\mu(\Theta_i))$ и $u = E(\sigma^2(\Theta_i))$ не зависят от i и имеют следующие несмещенные оценки

$$\hat{m} = \sum_{i=1}^I \frac{v_{i+}}{v_{++}} \hat{m}_i, \text{ где } \hat{m}_i = \sum_{j=1}^J \frac{v_{ij}}{v_{i+}} Z_{ij},$$

$$\hat{u} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \frac{1}{J-1} \sum_{j=1}^J v_{ij} (Z_{ij} - \hat{m}_i)^2,$$

$$\hat{w} = \frac{1}{K} \left(\sum_{i=1}^I \frac{v_{i+}}{v_{++}} (\hat{m}_i - \hat{m})^2 - \frac{I-1}{v_{++}} \hat{u} \right),$$

где

$$K = 1 - \sum_{i=1}^I \frac{v_{i+}^2}{v_{++}^2} = \sum_{i=1}^I \frac{v_{i+}}{v_{++}} \left(1 - \frac{v_{i+}}{v_{++}} \right).$$

Доказательство. Несмещенность \hat{m} непосредственно следует из равенства

$$E(Z_{ij}) = E(E(Z_{ij} | \Theta_i)) = E(\mu(\Theta_i)) = m.$$

Для доказательства несмещенности \hat{u} и \hat{w} воспользуемся алгебраической эквивалентностью

$$\sum_{j=1}^J v_j (X_j - X)^2 = \sum_{j=1}^J v_j X_j^2 - v_+ X^2,$$

где

$$X = \sum_{j=1}^J \frac{v_j}{v_+} X_j.$$

Имеем

$$\hat{u}_i := \sum_{j=1}^J v_{ij} (Z_{ij} - \hat{m}_i)^2 = \sum_{j=1}^J v_{ij} (Z_{ij} - \mu(\Theta_i) - (\hat{m}_i - \mu(\Theta_i)))^2.$$

Далее заметим, что

$$E(\hat{m}_i | \Theta_i) = \mu(\Theta_i),$$

$$Var(\hat{m}_i | \Theta_i) = \sum_{j=1}^J \frac{v_{ij}^2}{v_{i+}^2} Var(Z_{ij} | \Theta_i) = \sigma^2(\Theta_i) / v_{i+},$$

поэтому

$$\begin{aligned} E(\hat{u}_i | \Theta_i) &= \sum_{j=1}^J v_{ij} Var(Z_{ij} | \Theta_i) - v_{i+} Var(\hat{m}_i | \Theta_i) = \\ &= \sum_{j=1}^J \sigma^2(\Theta_i) - v_{i+} \frac{\sigma^2(\Theta_i)}{v_{i+}} = (J-1) \sigma^2(\Theta_i). \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$E(\hat{u}) = E \left(\sum_{i=1}^I \frac{E(\hat{u}_i | \Theta_i)}{I(J-1)} \right) = \sum_{i=1}^I \frac{E(\sigma^2(\Theta_i))}{I} = u.$$

Аналогично

$$\hat{w} := \sum_{i=1}^I \frac{v_{i+}}{v_{++}} (\hat{m}_i - \hat{m})^2 = \sum_{i=1}^I \frac{v_{i+}}{v_{++}} (\hat{m}_i - m - (\hat{m} - m))^2 = \sum_{i=1}^I \frac{v_{i+}}{v_{++}} (\hat{m}_i - m)^2 - (\hat{m} - m)^2,$$

откуда, в силу равенств $E(\hat{m}) = m = E(\hat{m}_i)$, следует

$$E(\hat{w}) = \sum_{i=1}^I \frac{v_{i+}}{v_{++}} Var(\hat{m}_i) - Var(\hat{m}) = \sum_{i=1}^I \frac{v_{i+}}{v_{++}} Var(\hat{m}_i) - \sum_{i=1}^I \frac{v_{i+}^2}{v_{++}^2} Var(\hat{m}_i),$$

Учитывая равенство

$$\begin{aligned} Var(\hat{m}_i) &= E(Var(\hat{m}_i | \Theta_i)) + Var(E(\hat{m}_i | \Theta_i)) = \\ &= E(\sigma^2(\Theta_i) / v_{i+}) + Var(\mu(\Theta_i)) = u / v_{i+} + w, \end{aligned}$$

получим, наконец,

$$E(\hat{w}) = \frac{I \cdot u}{v_{++}} + w - \frac{u}{v_{++}} - \sum_{i=1}^I \frac{v_{i+}^2}{v_{++}^2} w = \frac{I-1}{v_{++}} u + w \left(1 - \sum_{i=1}^I \frac{v_{i+}^2}{v_{++}^2} \right).$$

Таким образом,

$$E \left(\hat{w} - \frac{I-1}{v_{++}} \hat{u} \right) = wK,$$

что и требовалось доказать. ■

Если в конкретном случае выполняется неравенство $\hat{w} < (I-1)\hat{u}/v_{++}$ или $\hat{w} < 0$ — значит, наблюдаемая вариация \hat{w} индивидуального среднего \hat{m}_i меньше, чем оцененное по индивидиумам в отдельности и затем усредненное по коллективу случайное рассеяние $(I-1)\hat{u}/v_{++}$ величины \hat{m}_i . Поскольку \hat{m}_i являются оценками для $\mu(\Theta_i)$, в этом случае разумным будет принять

$w = \text{Var}(\mu(\Theta_i)) = 0$ (то есть считать коллектив однородным) и не дифференцировать индивидуальные математические ожидания.

Заметим также, что оценки структурных параметров легко обобщаются на случай разного числа J_i наблюдений по индивидуумам $i = 1, \dots, I$. С таким случаем мы встретимся в разделе 3.2.2, где и будут указаны соответствующие формулы.

Наконец, следует упомянуть еще так называемую *однородную доверительную схему*. Ее идея — одновременно получить доверительную оценку и оценку коллективного среднего $m = E(Z_{i0})$. Если аппроксимировать $E(Z_{i0} | \Theta_i)$ не величиной $a_{i0} + a_{i1}Z_{i1} + \dots + a_{ij}Z_{ij}$, как это было в предыдущих моделях, а величиной

$$\sum_{k=1}^I (a_{k1}Z_{k1} + \dots + a_{kj}Z_{kj}),$$

(не содержащей свободного члена a_{i0} , но учитывающей все наблюдения, в том числе относящиеся к другим индивидуумам), то минимизация средней квадратичной ошибки при дополнительном требовании несмещенности (автоматически выполнявшемся в неоднородном случае) приводит к «однородной» доверительной оценке

$$E^{**}(Z_{i0} | \Theta_i) = c_i \left(\sum_{j=1}^I \frac{v_{ij}}{v_{i+}} Z_{ij} \right) + (1 - c_i) \left(\sum_{k=1}^I \frac{c_k}{c_+} \hat{m}_k \right),$$

где

$$c_i = \frac{v_{i+}}{v_{i+} + t} \quad \text{и} \quad t = \frac{E(\sigma^2(\Theta))}{\text{Var}(\mu(\Theta))}.$$

Эта оценка с точностью до множителя при $(1 - c_i)$ совпадает с оценкой $E^*(Z_{i0} | \Theta_i)$ и показывает, что так называемое *доверительное среднее*

$$\hat{m}_c = \sum_{i=1}^I \frac{c_i \hat{m}_i}{c_+}$$

является оценкой для $E(Z_{i0})$ наряду с \hat{m} . Применение оценки $E^{**}(Z_{i0} | \Theta_i)$ обеспечивает равенство взвешенных по объемам сумм доверительных оценок и наблюдаемых средних убытков:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^I v_{i+} E^{**}(Z_{i0} | \Theta_i) &= \sum_{i=1}^I v_{i+} (c_i \hat{m}_i + (1 - c_i) \hat{m}_c) = \sum_{i=1}^I (c_i \hat{m}_i v_{i+} + c_i t \hat{m}_c) = \\ &= \sum_{i=1}^I c_i \hat{m}_i v_{i+} + t \sum_{i=1}^I c_i \hat{m}_i = \sum_{i=1}^I c_i \hat{m}_i (v_{i+} + t) = \sum_{i=1}^I v_{i+} \hat{m}_i \end{aligned}$$

(где учтено равенство $c_i(v_{i+} + t) = v_{i+}$ или $(1 - c_i)v_{i+} = c_i t$). Таким образом, тарификация на базе опыта по однородной доверительной схеме представляет собой чистое перераспределение убытков.

С помощью доверительного среднего \hat{m}_c можно задать всегда неотрицательную оценку для w

$$\hat{w}_c = \frac{1}{I-1} \sum_{i=1}^I c_i (\hat{m}_i - \hat{m}_c)^2.$$

Доказательство несмещенности \hat{w}_c полностью аналогично доказательству для \hat{w} до момента получения выражения

$$E(\hat{w}_c) = \sum_{i=1}^I \frac{c_i}{I-1} \text{Var}(\hat{m}_i) - \frac{c_+}{I-1} \text{Var}(\hat{m}_c).$$

Далее, учитывая равенство

$$\text{Var}(\hat{m}_i) = w + u / v_{i+} = w / c_i,$$

выведенное при доказательстве предыдущей теоремы, получим

$$\text{Var}(\hat{m}_c) = \sum_{i=1}^I \frac{c_i^2}{c_+^2} \text{Var}(\hat{m}_i) = w / c_+.$$

Итого,

$$E(\hat{w}_c) = Iw / (I-1) - w / (I-1) = w.$$

На практике значения c_i в выражении для \hat{w}_c неизвестны и должны быть оценены. Для этого в свою очередь требуется оценка величины w . Приходится строить оценки методом последовательных приближений. Сначала при произвольно взятых значениях $c_i > 0$, например $c_i = 0,5$, вычисляются \hat{w}_c . Затем на основании полученных \hat{w}_c рассчитываются новые c_i и т. д. до сходимости. (В случае $\hat{w} < (I-1)\hat{w} / v_{++}$ значение \hat{w}_c сходится к 0.)

В заключение произведем *расчет* для $I = 6$ групп рисков огневого страхования промышленных предприятий и $J = 10$ лет наблюдения.

В *таблице 2.5.4.1* по каждой группе рисков приведены только необходимые агрегированные данные (совокупный объем, средняя ставка убытка, стандартное отклонение средней ставки убытка).

Взвешенные по объемам суммы однородных и итерационных доверительных оценок составляют каждая по 165,38 и совпадают с $\sum v_{i+} \hat{m}_i$, тогда как взвешенная по объемам сумма обычных доверительных оценок равна всего лишь 159,64.

Мы видим, что у первых трех групп доверительные оценки и стандартные ошибки выше соответствующих индивидуальных показателей, а у остальных групп — наоборот. Следовательно, доверительная схема всегда корректирует индивидуальные оценки в сторону среднего. Но это и логично, ведь доверительная модель полностью полагается на историю убытков коллектива, и лишь отчасти (в зависимости от размера доверительного множителя) — на историю убытков отдельных индивидуумов или частей коллектива.

Существенное расхождение двух оценок для w (с вытекающим отсюда различием доверительных множителей и доверительных оценок) свидетельству-

Таблица 2.5.4.1. Расчет доверительных оценок

i	1	2	3	4	5	6
v_{i+} (млрд)	56,05	15,74	33,97	9,69	3,47	1,37
\hat{m}_i (‰)	1,24	1,27	1,30	1,78	2,54	4,08
$\sqrt{\hat{u}_i / ((J-1)v_{i+})}$	0,086	0,22	0,11	0,30	0,94	2,07
По этим данным находятся оценки структурных параметров						
$\hat{m} = 1,37$						
$\hat{u} = 1,90$						
$\hat{w} = 0,100$						
$\hat{t} = 19,02$						
а также доверительные множители, доверительные оценки и их стандартные ошибки						
\hat{c}_i	0,75	0,45	0,64	0,34	0,15	0,067
$E^*(Z_i \Theta_i)$	1,28	1,33	1,33	1,51	1,55	1,56
$\sqrt{\widehat{mse}}$	0,16	0,23	0,19	0,26	0,29	0,31
или однородные оценки						
$\hat{m}_c = 1,50$						
$E^{**}(Z_i \Theta_i)$	1,31	1,39	1,37	1,59	1,66	1,67
или итерационные оценки						
\hat{c}_i	0,93	0,78	0,88	0,68	0,43	0,23
$\hat{m}_c = 1,66$						
$\hat{w}_c = 0,42$						
$E^*(Z_i \Theta_i)$	1,27	1,36	1,34	1,74	2,04	2,23
$\sqrt{\widehat{mse}}$	0,18	0,31	0,22	0,37	0,49	0,57

ет о недостаточно хорошем качестве обычной оценки даже при условии $\hat{w} > (I-1)\hat{u}/v_{++}$.

2.5.5. ВЫВОД И УКАЗАНИЯ К ПРИМЕНЕНИЮ

Представленные в этой главе байесовский и доверительные методы тесно связаны с методами выравнивания из главы 2.4. И в тех, и в других индивидуальная история убытков отдельной тарифной группы не выступает в качестве единственного базиса расчета премии, а корректируется с учетом истории «схожих» тарифных групп. При этом байесовский и доверительные методы более удобны тем, что не требуют перекрестной структуры тарифов. В то время как байесовский метод предусматривает задание модели распределения (что зачастую сделать непросто), доверительные методы обходятся

без нее. Лишь три структурных параметра должны быть известны или оценены на основании статистики убытков индивидуумов коллектива. Цена этих намного менее ограничительных предпосылок крайне мала: доверительные оценки во многих случаях достигают такой же точности (в смысле средней квадратичной ошибки), что и оптимальная байесовская оценка. Благодаря этим свойствам доверительные методы завоевали в актуарной практике высокую популярность.

В то же время доверительные методы нельзя слепо применять в любой ситуации. Необходимо, чтобы различия в распределениях убытков индивидуумов заранее не были известны, и индивидуумы имели принципиально одинаковый потенциал убытка. Это условие представляется довольно серьезным препятствием применению доверительных методов, ведь на практике часто уже существуют тарифы, содержащие в себе априорную информацию об ожидаемом убытке индивидуумов. Принимая во внимание данный факт, А. Гислер (A. Gisler) предложил учитывать имеющиеся знания об ожидаемом убытке таким образом, чтобы с помощью доверительного метода оценивались только изменения по отношению к априорному ожиданию. Для этого достаточно лишь заменить предположение

$$E(Z_{ij} | \Theta_i) = \mu(\Theta_i)$$

модели Бюльмана—Штрауба на предположение

$$E(Z_{ij} | \Theta_i) = t_i \cdot \mu(\Theta_i),$$

где t_i — априори известное математическое ожидание (например, прежний нетто-тариф) индивидуума i . Модель дисперсии в связи с этим приобретает вид

$$\text{Var}(Z_{ij} | \Theta_i) = \sigma^2(\Theta_i) t_i^\beta / v_{ij}, \text{ где } \beta = 1 \text{ или } \beta = 2$$

(мы обоснуем ее в начале раздела 3.2.3, где t_k заменено на m_k). Тогда для модифицированных величин убытка

$$\underline{Z}_{ij} := Z_{ij} / t_i$$

тоже будет справедлива модель Бюльмана—Штрауба, где, в силу равенства

$$\text{Var}(\underline{Z}_{ij} | \Theta_i) = \text{Var}(Z_{ij} | \Theta_i) / t_i^2 = \sigma^2(\Theta_i) / (v_{ij} t_i^{2-\beta}),$$

объемом будет служить не v_{ij} , а $v_{ij} t_i^{2-\beta}$.

Если обычное доверительное оценивание подразумевает (оправданное недоверием статистики) субсидирование индивидуумов с высокими нормированными убытками индивидуумами с низкими нормированными убытками (корректировка в направлении среднего нормированного убытка), то в случае модели Гислера это не так. Предложенный Гислером подход применим во всех случаях, когда априорный ожидаемый убыток не содержит известных искажений. Он открывает практически безграничные возможности использования доверительных методов, ведь известные искажения всегда могут быть устранены. В частности, доверительные методы незаменимы, когда тарифная сетка не имеет перекрестной (матричной) структуры.

О применении модели Бюльмана—Штрауба на практике сообщается в работах: *Bühlmann H., Straub E.* Glaubwürdigkeit für Schadensätze // Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 1970, S. 111–133 (применение к договорам перестрахования); *Wenger H.* Eine Tarifierungsmethode im Feuer-Industriegeschäft // Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 1973, S. 95–111; *Cohen A., Dupin G., Levi Ch.* Tarification de l'Incendie des Risques Industriels Français par la Methode de la Crédibilité // ASTIN Bulletin, 1986, 16, p. 149–163.

С тех пор разработано множество дальнейших полезных для практики разновидностей доверительного метода, в том числе регрессионные, эволюционные, иерархические модели, модели с усеченными выбросами и робастные методы. Материал по этим темам читатель найдет в следующих оригинальных работах: *Bühlmann H., Gisler A.* Credibility in the Regression Case Revisited (A late Tribute to Charles A. Hachemeister) // ASTIN Bulletin, 1997, 27, p. 83–98; *Gisler A.* Optimum Trimming of Data in the Credibility Model // Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 1980, S. 313–326; *Bühlmann H., Jewell W. S., Mangold K. P.* Hierarchical Credibility Revisited // Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 1987, S. 35–54; S. 99–103; *Gisler A., Reinhard P.* Robust Credibility // ASTIN Bulletin, 1993, 23, p. 117–143.

В заключение заметим, что некоторые из указанных здесь доверительных моделей могут рассматриваться как частные случаи так называемого фильтра Кальмана (Kalman). Он одновременно позволяет рекурсивно рассчитывать доверительные оценки и тем самым избавляет от необходимости обращения матрицы нормальных уравнений. Эта тема широко освещена в работе Мангольда (*Mangold K. P.* Rekursive Schätzverfahren in der Credibilitätstheorie // Blätter der DGVM, 1987, S. 27–44).

В качестве начального ориентира в многообразии доверительных моделей может служить выпуск «Beiträge zur Credibility-Theorie» в серии работ немецкого общества страховых математиков (DGVM-Schriftenreihe. Karlsruhe: Versicherungswirtschaft, 1989), опубликованный Е. Хельтенем (E. Helten) и включающий доклады Бооса (Boos), Гислера (Gisler), Кремера (Kremer), Штерка (Sterk) и Шааффаузена (Schaaffhausen).

Тема бонусов-малусов подробно изложена в книге Лемера (*Lemaire J.* Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1995).

2.6. Вывод и замечания по проблеме больших убытков

Расчет тарифов — задача, не имеющая четко обозначенного пути решения. Это утверждение относится прежде всего к основной части премии, предназначенной для покрытия будущих убытков. Что же касается двух других составляющих премии, то в сравнении с основной частью рискованная надбавка

имеет существенно меньший порядок величины, а нагрузка определяется намного точнее (о расчете и делении рискованной надбавки см. в разделе 1.2.3).

Результат расчета тарифов решающим образом зависит от количества и состава статистических данных. Руководствуясь качеством статистики, а также рассмотренными в предыдущих главах стандартными методами, актуарий должен попытаться найти свой способ расчета премий, наиболее эффективно использующий информацию о будущих страховых событиях, содержащуюся в данных. Вместе с тем измерить «эффективность» или сравнить априори качества двух различных тарифных сеток невозможно. К тому же таблицы тарифов почти всегда можно усовершенствовать, подробно исследовав важные детали с привлечением дополнительных данных (например, отдельно проанализировав большие убытки). В конечном счете решающую роль играют интуиция и изобретательность актуария, а также имеющееся в его распоряжении время.

Особое внимание при расчете премий следует уделять *большим убыткам*. Без определения этого понятия как такового ясно, что большие убытки, с одной стороны, представлены наименьшим количеством данных, а с другой стороны, имеют наибольший экономический вес (см. табл. 1.4.3.4). Так как эта проблема неразрешима в принципе, премии для отдельных тарифных позиций всегда в большей или меньшей степени искажены (чего, правда, нельзя доказать). Но по мере восхождения по ступеням агрегирования становится все проще приблизиться к точному результату. Поэтому очень важно рассчитать премию для совокупного портфеля, а затем, исключив из нее мелкие и средние убытки, прогнозируемые относительно точно, измерить свободное пространство для больших убытков.

Все представленные нами методы подразумевают дробление портфеля на большое число максимально однородных тарифных групп. Можно предвидеть, что в каждой группе число и размеры больших убытков будут нетипичны: либо слишком велики, либо слишком малы. Поскольку большинство методов довольно чувствительно реагирует на большие убытки, целесообразно предварительно усечь убытки на определенном уровне, приняв, например, все убытки свыше 100 000 равными 100 000. Игнорируемое таким образом совокупное значение убытка, конечно, должно быть затем снова учтено в премиях, скажем, в виде одинаковой для всех процентной надбавки. Сама по себе понятная идея *усечения больших убытков* вызывает три вопроса:

- Как выбрать границу усечения?
- Должна ли быть граница усечения всюду одинаковой?
- Как распределять отсеченную сумму?

На эти вопросы можно ответить следующее. Совокупная отсеченная сумма убытков должна составлять примерно 10–20% совокупного убытка всех рассматриваемых тарифных групп (иначе она будет слишком мала либо слишком велика). В каждой тарифной группе следует отсекают один и тот же процент числа убытков или, то же самое, одинаковую по вероятности область эмпирического распределения размера убытка — тогда каждой тарифной

группе усечение будет выгодно. Чтобы распределить отсеченную сумму между тарифными группами, нужно подогнать к данным каждой группы модель распределения размера убытка (например, одно из распределений раздела 1.4.3). Если $f(x)$ — полученная плотность распределения размера убытка отдельной группы, то число отсеченных убытков этой группы аппроксимируется значением

$$n \cdot \int_a^b f(x) dx,$$

где

a — граница усечения,

b — вероятный максимальный убыток ($f(x) = 0$ при $x > b$),

n — количество наблюдаемых убытков в группе.

Тогда доля совокупной отсеченной суммы, причитающаяся рассматриваемой группе, должна быть пропорциональна ожидаемому в рамках распределения f убытку свыше границы усечения

$$n \cdot \int_a^b (x - a) f(x) dx.$$

Таким образом, цель усечения состоит лишь в сглаживании чисто случайных колебаний числа и размеров больших убытков.

Предложенная инструкция усечения больших убытков одновременно подсказывает, как реализовать методы исчисления тарифа без удаления частей больших убытков. Для этого необходимо сгладить большие убытки каждой тарифной группы, подогнав модель распределения к наблюдаемым размерам убытков (оценки по методу моментов применяться не должны — они сильно зависят от больших убытков). Это нужно сделать для каждого года наблюдения, причем так, чтобы в каждой тарифной группе параметры распределений практически не отличались по годам. Теоретический средний размер убытка в построенной модели распределения будет гораздо меньше зависеть от больших убытков, чем эмпирическое среднее. Далее расчет премий проводится на основе подогнанного распределения размера убытка.

До тех пор пока тарифные группы не построены (имеется в виду — на этапах кластеризации и выбора тарифных факторов) ни подгонка распределения размера убытка, ни усечение не имеют смысла. При решении этих задач очень важно использовать данные нескольких лет наблюдения, чтобы выравнивание по времени сглаживало остроту проблемы больших убытков.

В страховании автогражданской ответственности, где тарифные группы различаются в основном частотой убытков, проблему больших убытков можно обойти, применяя в качестве статистической базы для построения классов, выбора факторов и выравнивания не нормированный убыток, а частоту убытков.

ЧАСТЬ 3

РЕЗЕРВИРОВАНИЕ

Содержание третьей части

3.1. Постановка проблемы и обзор	195
3.1.1. Причины долгого развития убытка	195
3.1.2. Роль резерва позднего убытка	196
3.1.3. Суть математических методов	196
3.1.4. Треугольник развития	197
3.1.5. Виды данных: оплаченные или произошедшие убытки?	198
3.1.6. Значение выбора портфеля	200
3.1.7. Инфляция, мера объема, независимость лет событий	200
3.1.8. Значение и расчет точности оценки резерва	201
3.1.9. Обзор методов	204
3.2. Не зависящие от распределения методы	204
3.2.1. Обзор	204
3.2.2. Метод на основе независимости нормированных приращений убытка от года события	205
3.2.3. Доверительный метод по отношению к годам событий	208
3.2.4. Метод цепной лестницы	216
3.2.5. Чувствительность и точность метода цепной лестницы	219
3.2.6. Проверка предположений модели цепной лестницы и сокращение числа параметров	227
3.2.7. Проверка некоррелированности лет развития	233
3.2.8. Вывод и указания к применению	235
3.3. Методы с перекрестной параметризацией	239
3.3.1. Введение и обзор	239
3.3.2. Вывод метода цепной лестницы из метода, основанного на модифицированном распределении Пуассона	242
3.3.3. Метод на основе гамма-распределения	249
3.3.4. Резервирование с помощью метода наименьших квадратов	251
3.3.5. Метод на основе обратного гауссовского распределения	257
3.3.6. Вывод и указания к применению	259
3.4. Модификации предыдущих методов	261
3.4.1. Обзор	261
3.4.2. Отделение эффектов календарных лет	261
3.4.3. Разделение числа убытков и размера убытка; лаг-распределение	265
3.4.4. Разделение IBNR- и IBNER-убытков	270
3.4.5. Метод на основе данных по отдельным убыткам	275
3.4.6. Вывод и указания к применению	281
3.5. Вывод	282

3.1. Постановка проблемы и обзор

3.1.1. ПРИЧИНЫ ДОЛГОГО РАЗВИТИЯ УБЫТКА

Между моментом наступления страхового события и моментом его окончательного урегулирования всегда проходит определенный срок: во-первых, убыток должен быть зарегистрирован и проверен страховщиком, а во-вторых, само урегулирование, особенно в случае больших убытков, занимает время. Если в большинстве видов страхования срок между моментом наступления (или причинения) убытка и моментом его окончательного урегулирования относительно короток (1–2 месяца), то в страховании гражданской ответственности он вполне может составить несколько лет. Это обусловлено *двумя основными причинами*:

1. *Позднее обнаружение*: в ряде случаев, таких как ошибка архитектора, нотариуса или промышленного производителя, ущерб может быть замечен только спустя долгое время после его причинения, проявляясь лишь при определенных условиях, например повышенной нагрузке сооружения, открытии завешания или при стечении нескольких обстоятельств, как было в случае с лекарственным препаратом «Контерган» («Contergan»). Эти убытки, как правило, покрываются полисом страхования ответственности, действующим на момент допущения ошибки.
2. *Долгий период урегулирования*: после обнаружения страхового случая и заявления о нем страховщику может пройти большой срок, прежде чем будет установлен окончательный размер убытка, если он зависит, скажем, от исхода судебного процесса или стоимости и результата длительного лечения.

Таким образом, в конце каждого отчетного периода имеются два вида убытков неопределенного размера:

- убытки второго типа уже заявлены страховщику, но еще не урегулированы окончательно. В каждом из таких случаев компетентное лицо, основываясь на своем опыте и имеющейся в распоряжении информации о страховом случае, устанавливает достаточный, по его мнению, *резерв заявленного убытка*. Разность между ним и производимой позднее фактической выплатой образует так называемую прибыль развития или же потерю развития. Потери развития наступают, когда убыток в течение периода развития возрастает сильнее, чем предполагалось (например, по причине инфляции). Резерв для случая отрицательного результата развития всего портфеля называется *IBNER-резервом* (*Incurred and reported, but not enough reserved, IBNER*). Соответствующие убытки иногда также называются *RBNS-убытками* (*Reported but not settled, RBNS*);

- убытки первого типа уже наступили или причинены, но еще не заявлены страховщику или не замечены страхователем. Они называются *IBNR-убытками* (*Incurred but not reported, IBNR*). Если опыт прошлых лет свидетельствует о возможности таких убытков, то страховщик обязан сформировать для них достаточный *IBNR-резерв*.

В дальнейшем мы будем называть оба вида резервов *резервом позднего убытка*.

3.1.2. РОЛЬ РЕЗЕРВА ПОЗДНЕГО УБЫТКА

Точная оценка резерва заявленного убытка и резерва позднего убытка нужна не только для *внешней отчетности*, но и для *расчета премий*, основанного, как известно, на данных о прошлом процессе убытков. В то время как *IBNR-резервы* необходимы в обоих случаях, *IBNER-резервы* применяются главным образом для расчета премий и *внутреннего финансового учета*. В последние годы надзорные органы все большего числа стран требуют актуарного обоснования резерва позднего убытка — ранее такой порядок действовал только в отношении резерва на покрытие выплат в страховании жизни.

Проблематика резервирования позднего убытка особым образом затрагивает перестраховщика при *перестраховании эксцедента убытка* в страховании гражданской ответственности. По условиям договора эксцедента убытка перестраховщик принимает от каждого убытка свыше некоторого фиксированного значения — называемого приоритетом — превышающую часть. В момент заявления убытка зачастую нельзя узнать наверняка, превысит убыток приоритет или нет. Поэтому в конце года действия договора перестрахования страховщик не в состоянии точно сообщить перестраховщику, какие из заявленных до сих пор убытков превышают приоритет. Перестраховщик ощущает проблему *IBNR* гораздо острее, чем страховщик, ведь для него заявленные страховщику убытки, предварительно оцененные ниже приоритета, но впоследствии все-таки превысившие его, равносильны *IBNR-убыткам*. Проблему усугубляет влияние инфляции (см. разделы 4.3.2 и 4.3.3).

3.1.3. СУТЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

Для оценки резерва заявленного убытка математические методы практически не применяются. Исключение возможно в области мелких убытков. Для них специалист по урегулированию убытков из соображений экономии труда часто дает лишь интервальную оценку вида «предполагаемый размер выплаты — ниже 1000 €». Тогда в конце отчетного года имеется только информация о количестве убытков ниже 1000 €. Средний размер этих убытков должен быть оценен на основании статистики прошлых лет. Учитывая невысокий порядок погрешности таких оценок, мы не будем останавливаться на них подробно.

Оценка *IBNR*- и *IBNER*-резервов по видам страхования с долгим периодом развития, напротив, имеет решающее значение для отчета и исчисления пре-

мий. Поэтому, в особенности за последние годы, разработано большое число математических методов оценки резерва позднего убытка. Они объединены общей идеей — проецировать опыт прошлых лет событий на последующие годы событий (годом события или годом договора называется год, когда убыток произошел или должен быть учтен в бухгалтерской книге). Такой подход теряет смысл, если в течение интересующего периода случались *изломы тренда или структуры*, как, например, изменения в урегулировании убытков, порядке определения резерва заявленного убытка, политике формирования портфеля, юрисдикции и т. д. Во всех представляемых ниже методах предполагается отсутствие подобных изломов тренда или структуры на рассматриваемом временном промежутке.

3.1.4. ТРЕУГОЛЬНИК РАЗВИТИЯ

Задача резервирования имеет следующую основную форму постановки. Пусть S_{ik} , $1 \leq i \leq I$, — суммарная выплата в k -м году развития по убыткам, произошедшим в i -м году события. Первый год развития ($k = 1$) совпадает с годом события. Вторым годом развития ($k = 2$) является календарный год, следующий за годом события, и т. д. За I лет, предшествующих текущему году, становятся известны значения S_{ik} , $i + k \leq I + 1$, образующие так называемый *треугольник развития* (см. табл. 3.1.4.1).

Ближайший год события $i = I$ предшествует текущему году. Из всех убытков, произошедших в году I , известны только заявленные в том же году. Для самого отдаленного года события $i = 1$ известны $k = I$ лет развития. Развитие первого года события предполагается полностью завершенным, то есть показатели $S_{1,I+1}$, $S_{1,I+2}$, ... будущих лет развития равняются нулю. По прошествии одного года треугольник развития приобретает только новую гипотенузу, значения которой

$$S_{I1}, S_{I-1,2}, \dots, S_{i,I+1-i}, \dots, S_{1I}$$

соответствуют последнему календарному году.

Таблица 3.1.4.1. Треугольник развития

S_{11}	S_{12}	...	S_{1k}	...	$S_{1,I+1-i}$...	$S_{1,I-1}$	S_{1I}
S_{21}	S_{22}		S_{2k}	...	$S_{2,I+1-i}$...	$S_{2,I-1}$	
...
S_{i1}	S_{i2}		S_{ik}	...	$S_{i,I+1-i}$			
...
$S_{I+1-k,1}$	$S_{I+1-k,2}$		$S_{I+1-k,k}$					
...					
$S_{I-1,1}$	$S_{I-1,2}$							
S_{I1}								

Примечание. Строка — год события; столбец — год развития.

При построении модели важно иметь в виду тенденцию значений S_{ik} каждого года события i к уменьшению (до нуля) с ростом k (возможно, после небольшого роста в начале развития), обусловленную снижением вероятности изменения уровня убытка по мере увеличения срока развития.

Если по истечении I лет развития все убытки одного года события известны и полностью урегулированы, то величина

$$S_{i+} = S_{i1} + S_{i2} + \dots + S_{iI}$$

представляет собой совокупный убыток i -го года события, необходимый, в частности, для расчета премий. От суммы S_{i+} на текущий момент известна только часть

$$S_{i1} + S_{i2} + \dots + S_{i, I+1-i}$$

Цель математических методов — оценить неизвестную часть

$$R_i = S_{i, I+2-i} + S_{i, I+3-i} + \dots + S_{iI},$$

определяющую фактически требуемый размер *резерва позднего убытка* i -го года события.

Часто треугольник развития строится в *кумулятивной форме*, когда на месте (i, k) стоит не приращение S_{ik} , а аккумулированный уровень убытка

$$C_{ik} = S_{i1} + S_{i2} + \dots + S_{ik}.$$

Из кумулятивного треугольника развития приращения получают по формуле

$$S_{ik} = C_{ik} - C_{i, k-1} \text{ (причем } C_{i0} = 0).$$

Отклонения от основной формы треугольника развития возможны, к примеру, если данные S_{ik} отдаленных календарных лет $i + k \leq r < I$ неизвестны, или последние годы событий $i \geq s > 1$ не сопоставимы с предыдущими (скажем, по причине структурных изломов (см. раздел 3.1.3) или изменений условий страхования) и не должны участвовать в расчете. Все излагаемые ниже методы допускают модификации, учитывающие эти особенности.

3.1.5. ВИДЫ ДАННЫХ: ОПЛАЧЕННЫЕ ИЛИ ПРОИЗОШЕДШИЕ УБЫТКИ?

Существуют два основных вида данных, из которых может быть построен треугольник развития. В одном случае C_{ik} обозначает сумму убытков, *оплаченных* в течение k лет развития (без каких-либо резервов заявленных убытков), а в другом — сумму убытков, *произошедших* в течение k лет развития, куда входят все осуществленные выплаты, а также сформированные к этому моменту резервы заявленных убытков. Соответственно, S_{ik} представляет собой либо сумму выплат, произведенных в k -м году развития по убыткам i -го года события, либо сумму этих же выплат с добавлением сальдо всех изменений резервов заявленных убытков.

Если в первом случае значения S_{ik} всегда неотрицательны (исключения возможны в случае возвратов; при этом исправления вносятся в треугольник раз-

вития, только если прецедентов в будущем не ожидается), то во втором случае вполне возможны отрицательные S_{ik} , например, в связи с изменением оценки страхового случая или выгодным для страховщика исходом судебного разбирательства по установлению факта страхового события. Этим обстоятельством нельзя пренебрегать при построении модели и выборе метода. Некоторые методы предполагают только положительные S_{ik} , а игнорирование содержимого отдельных ячеек (i, k) чревато серьезным искажением результатов.

Благодаря отсутствию оцененных значений в составе данных, треугольник развития оплаченных убытков — более надежная база для расчетов. Зато треугольник развития произошедших убытков позволяет намного раньше узнать порядок величины окончательного убытка C_{iI} по каждому году события, по крайней мере если резервы заявленных убытков оценены опытными специалистами. Возможность предвидеть порядок расходования оцененного резерва во времени снова дает треугольник развития оплаченных убытков. Недостаток треугольника оплаченных убытков — необходимость привлечения большого числа лет событий для оценки окончательного убытка (полное урегулирование некоторых убытков занимает более 20 лет). Оценивание по данным треугольника произошедших убытков обходится меньшим количеством лет событий (например, 10), но при условии достаточной точности оценок резервов заявленных убытков. В *таблицах 3.1.5.1 и 3.1.5.2* представлены фрагменты треугольников развития обоих видов, содержащие реальные данные по

Таблица 3.1.5.1. Кумулятивный треугольник развития произошедших убытков

i	C_{i1}	C_{i2}	C_{i3}	C_{i4}	C_{i5}	C_{i6}	Премия
1	4 370	6 293	10 292	12 460	13 660	14 307	13 085
2	2 701	5 291	7 162	8 945	9 338		14 258
3	4 483	6 729	10 074	11 142			16 114
4	3 254	5 804	8 351				15 142
5	8 010	12 118					16 905
6	5 582						20 224

Таблица 3.1.5.2. Кумулятивный треугольник развития оплаченных убытков

i	C_{i1}	C_{i2}	C_{i3}	C_{i4}	C_{i5}	C_{i6}	Премия
1	45	1 968	4 442	4 831	5 199	6 302	13 085
2	30	260	480	865	1 111		14 258
3	81	500	969	1 621			16 114
4	0	1 281	2 415				15 142
5	20	131					16 905
6	14						20 224

портфелю договоров перестрахования общей ответственности. (В немецкой страховой практике сумма произошедших убытков в начале развития, как правило, несколько преувеличена из-за чрезмерной осторожности при определении резерва заявленного убытка и по мере развития постепенно убывает.)

Треугольник развития может быть создан и из одних резервов заявленных убытков. Он будет представлять собой разность между треугольниками произошедших и оплаченных убытков. Далее, информация о развитии каждого отдельного убытка позволяет получить несколько *треугольников развития числа убытков*: треугольник заявленных убытков, треугольник урегулированных убытков, треугольник убытков, претерпевших изменение. Наконец, можно построить *треугольники для среднего размера* урегулированных убытков, среднего уровня резервов заявленных убытков или среднего изменения суммарного убытка.

3.1.6. ЗНАЧЕНИЕ ВЫБОРА ПОРТФЕЛЯ

Величины S_{ik} в общем случае относятся к некоторому портфелю рисков, то есть образуются в результате агрегирования. Коль скоро при агрегировании часть информации утрачивается, возникает вопрос, позволяет ли информация о развитии каждого отдельного убытка повысить точность оценки резерва позднего убытка. В любом случае ясно, что развитие некоторого отдельного убытка ничего не говорит о развитии других убытков. Более того, согласно принципу коллективного баланса, надежность статистической базы увеличивается с ростом числа убытков. В то же время при объединении субпортфелей с разным характером развития информация искажается. Для успешного резервирования очень важно разбить портфель таким образом, чтобы части оказались как можно более однородными и вместе с тем содержали как можно большее число убытков. Для каждой из частей строится собственный треугольник развития. Компромисс между противоречащими друг другу требованиями размера и однородности удастся найти только при хорошем понимании рассматриваемого вида страхования. Как видим, оценка резерва позднего убытка — не только чисто математическая задача. Результат существенно зависит от состава портфеля, полагаемого в основу треугольника развития, тем более что *сумма резервов двух субпортфелей, вообще говоря, не равна резерву, оцененному тем же методом на основании данных объединенного портфеля.*

3.1.7. ИНФЛЯЦИЯ, МЕРА ОБЪЕМА, НЕЗАВИСИМОСТЬ ЛЕТ СОБЫТИЙ

Для моделирования на базе треугольника развития эти аспекты столь же важны, как и для расчета тарифов. Мы будем предполагать, что значения S_{ik} треугольника развития очищены от *денежной инфляции*. Подходящий для этого индекс может быть заимствован, например, из оговорок об индексах, прилагаемых к договору перестрахования эксцедента убытка в страховании гражданской ответственности. Обычно там указывается смешанный индекс заработной

платы рабочих и служащих. Однако вопрос инфляции этим далеко не исчерпывается. В страховании гражданской ответственности немалую роль играет и так называемая *superimposed inflation* — трендообразный рост (очищенной от денежной инфляции) годовой страховой выплаты, обусловленный изменениями в юрисдикции, ужесточением требований пострадавших и прочими аналогичными факторами. В разделе 3.4.2 мы попытаемся оценить эту инфляцию (вместе с денежной инфляцией) на основании данных. Присутствующая в данных инфляция в любом случае трактуется методами оценки резерва как эффект позднего убытка или IBNER-эффект и прогнозируется на будущее. Правда, в большинстве случаев долю инфляции в совокупном прогнозе определить невозможно.

Если при расчете тарифов (в имущественном страховании) инфляция практически устраняется за счет нормировки величины убытка на страховую сумму, то треугольник развития очистить от инфляции с помощью *меры объема* невозможно. Инфляция действует по календарным годам — в направлении главной диагонали матрицы развития, в то время как мера объема задается по годам событий — для каждой строки матрицы развития. Отсюда ясно, что в качестве меры объема года события должна использоваться величина, корректно отражающая различия между строками матрицы развития. В рассмотрение принимается в первую очередь (очищенная от инфляции) сумма премий или число полисов. Мерой объема могут также служить число убытков, зарегистрированных в первом году развития, или уровень убытка C_d после первого года развития.

Предположение *независимости лет событий* не столь реалистично, как предположение независимости лет наблюдения для групп рисков. Дело в том, что изменение внешних факторов по календарным годам, как правило, одновременно затрагивает несколько лет событий. Речь идет не только об изменении ставки инфляции, но и об изменениях в практике резервирования и урегулирования, а также в юрисдикции. Например, проведение страховой компанией акции по выяснению открытых страховых случаев может вызвать рост резерва заявленных убытков в отдельном календарном году, что одновременно отразится по диагонали на нескольких годах событий (и годах развития). Рекомендуется перед расчетом резерва проверить треугольник развития (допустим, с помощью метода отделения из раздела 3.4.2) на наличие подобного рода *эффектов календарных лет* и при необходимости устранить их влияние на размер резерва, исключая или сглаживая отдельные данные. В любом случае предположение независимости лет событий — неотъемлемая часть всех методов настоящей главы. Правда, как мы позже узнаем, эффект календарного года у большинства методов несовместим с другим опорным предположением.

3.1.8. ЗНАЧЕНИЕ И РАСЧЕТ ТОЧНОСТИ ОЦЕНКИ РЕЗЕРВА

Резерв позднего убытка представляет собой случайную величину, а суть методов резервирования — в оценке ее математического ожидания. В этом смысле задача резервирования аналогична задаче расчета премий, где требуется оце-

нить математическое ожидание совокупного убытка. Но если отклонение совокупного убытка от своего математического ожидания чаще всего относительно невелико (по закону больших чисел), то о резерве позднего убытка этого сказать нельзя, ведь число убытков с долгим сроком развития составляет лишь малую долю от общего числа убытков. Таким образом, математическое ожидание резерва позднего убытка оценивается в условиях повышенной неопределенности. А значит, наряду с *тогетной оценкой* математического ожидания важно определить точность получаемой оценки.

При резервировании расчету точности следует уделять особое внимание. Во-первых, показатель точности отражает изменчивость используемых в расчете данных, позволяя судить о содержательности точечной оценки. Если премия, в принципе, может пересматриваться ежегодно и прогнозируется только на один год, то оценка резерва содержит в себе прогноз на несколько лет, и поэтому гораздо менее надежна. Кроме того, оценка резерва непосредственно влияет на формирование денежных фондов. Резерв, оказавшийся впоследствии недостаточным, уже нельзя будет пополнить премиями прежнего портфеля. Во-вторых, сравнение результатов двух различных методов оценки резерва (одним из них может быть, например, интуитивная оценка компетентного лица или внешние учреждения, таких как налоговая служба, финансовые ведомства или надзорные органы) имеет смысл только при известной *тогности*, как минимум, одной *тогетной оценки*. Принимая во внимание эти факты, для большинства представляемых методов мы укажем способ вычисления точности оценки. Разумеется, измерить можно только отклонение точечной оценки от истинного значения, связанное со случайностью модели расчета. Количественно описать влияние риска изменчивости (см. раздел 1.2.2) конечно же невозможно.

Оценка резерва позднего убытка и расчет показателя точности основываются на следующей модели. Резерв позднего убытка R_i года события i должен быть оценен величиной \hat{R}_i , минимизирующей среднее квадратическое отклонение прогноза от истинного значения — так называемую *среднюю квадратичную ошибку*

$$E((R_i - \hat{R}_i)^2 | D).$$

Следует уточнить, что мы рассматриваем *условную среднюю квадратичную ошибку* при заданном треугольнике развития

$$D = \{S_{ik} | 2 \leq i + k \leq I + 1\},$$

поскольку интерес для нас представляют только будущие отклонения оценки от истинного значения, а безусловная средняя квадратичная ошибка

$$E(R_i - \hat{R}_i)^2 = E(E((R_i - \hat{R}_i)^2 | D))$$

усреднила бы отклонение по всем возможным наборам данных D . (Свойства условного математического ожидания, постоянно применяемые в этой и следующей главах, приведены в таблице 2.5.1.1.)

Для дальнейшего расчета средней квадратичной ошибки воспользуемся законом смещения, справедливым для любого скаляра a :

$$E(X - a)^2 = \text{Var}(X) + (E(X) - a)^2$$

и его обобщением

$$E((X - h(Y))^2 | Y) = \text{Var}(X | Y) + (E(X | Y) - h(Y))^2$$

на условное математическое ожидание. Рассчитываемая на основании наблюдаемого треугольника D , оценка резерва всегда представима в виде функции $\hat{R}_i = h_i(D)$ от D , а значит,

$$E((R_i - \hat{R}_i)^2 | D) = \text{Var}(R_i | D) + (E(R_i | D) - \hat{R}_i)^2.$$

Отсюда следует, во-первых, что $E(R_i | D)$ — оптимальный в среднем квадратичном прогноз величины R_i , так как оценка $\hat{R}_i = E(R_i | D)$ минимизирует среднюю квадратичную ошибку. Значение $E(R_i | D)$ неизвестно и должно быть оценено. Во-вторых, мера качества оценки резерва складывается из двух компонент:

случайной ошибки = $\text{Var}(R_i | D)$ и

оценочной ошибки = $(E(R_i | D) - \hat{R}_i)^2$.

Из-за присутствия случайной ошибки отклонение оценки от истинного значения не исключено даже при достоверно известном значении $E(R_i | D)$.

Наконец, при независимости лет событий (см. раздел 3.1.7) справедливы равенства

$$\begin{aligned} E(R_i | D) &= E(R_i | S_{i1}, \dots, S_{i,I+1-i}) = \\ &= E(R_i | C_{i1}, \dots, C_{i,I+1-i}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(R_i | D) &= \text{Var}(R_i | S_{i1}, \dots, S_{i,I+1-i}) = \\ &= \text{Var}(R_i | C_{i1}, \dots, C_{i,I+1-i}). \end{aligned}$$

Случайная и оценочная ошибки, как правило, содержат неизвестные параметры, в свою очередь тоже подлежащие оцениванию. Квадратный корень из средней квадратичной ошибки называется *стандартной ошибкой*.

Совокупный резерв

$$R = R_2 + \dots + R_I$$

оценивается величиной

$$\hat{R} = \hat{R}_2 + \dots + \hat{R}_I.$$

Условная средняя квадратичная ошибка оценки совокупного резерва составляет

$$E((R - \hat{R})^2 | D) = \text{Var}(R | D) + (E(R | D) - \hat{R})^2.$$

В силу независимости лет событий,

$$\text{Var}(R | D) = \text{Var}(R_2 | D) + \dots + \text{Var}(R_I | D)$$

(см. доказательство последней теоремы раздела 3.2.5). Аналогичная формула для $\text{Var}(\hat{R} | D)$ в общем случае неверна ввиду положительной корреляции оценок $\hat{R}_2, \dots, \hat{R}_I$.

3.1.9. ОБЗОР МЕТОДОВ

После развернутого вступления обратимся к математическим методам оценки значения R_i или $E(R_i | D)$, $2 \leq i \leq I$, на основании заданного треугольника развития D . Для краткости в дальнейшем будем называть резерв позднего убытка просто *резервом*, всегда подразумевая под ним величину R_i , определенную в разделе 3.1.4. В следующей главе рассматриваются два наиболее известных и простых метода: первый — основанный на предположении независимости нормированных приращений убытка от года события, а второй — цепной лестницы. Оба метода не зависят от вида распределения, но в то же время опираются на стохастическую модель. В главе 3.3 обсуждаются методы с перекрестной параметризацией. Они очень схожи с методами выравнивания из главы 2.4 и одновременно связаны с двумя не зависящими от распределения методами. Наконец, в главе 3.4 представлены модификации рассматриваемых методов, зачастую позволяющие более точно оценить резерв, но требующие дополнительной информации.

3.2. Не зависящие от распределения методы

3.2.1. ОБЗОР

В этой главе мы рассмотрим два основных метода оценки резерва. Речь идет о самых старых и простых математических методах, тем не менее не утративших своего значения. Первый метод не получил общепринятого названия — мы назовем его *методом на основе независимости нормированных приращений убытка от года события*. Второй — метод цепной лестницы, с отрывом лидирующий по популярности среди всех методов расчета резерва. Оба метода обычно представляются в чисто детерминированной форме. Но мы положим в основу каждого из них стохастическую модель. Это позволит не только определить границы применимости методов и необходимые предпосылки, но и задать точность оценки резерва. Мы начнем с метода на основе независимости нормированных приращений убытка от года события и покажем, что в его основу формально может быть положена известная из главы 1.3 индивидуальная модель теории риска. При этом годы развития интерпретируются как группы рисков, а годы событий — как годы наблюдений. В разделе 3.2.3 каждому году события ставится в соответствие собственный параметр риска («качество года события»), выбираемый случайным образом из общей генеральной совокупности.

Как мы увидим, в этом случае после соответствующего преобразования становится применима доверительная модель Бюльмана—Штрауба.

Разделы 3.2.4—3.2.6 посвящены методу цепной лестницы. В разделе 3.2.4 дается описание метода и доказываются некоторые основные результаты. В разделе 3.2.5 выводятся формулы точности оценки резерва. В разделе 3.2.6 устанавливается связь с регрессионным анализом, что позволяет, с одной стороны, перепроверить предположения модели цепной лестницы, а с другой стороны, получить ее полезные модификации. Благодаря этим возможностям, метод цепной лестницы достоин оставаться основным методом резервирования. Наконец, в разделе 3.2.7 демонстрируется способ выявления эффектов календарных лет, нарушающих предположение некоррелированности лет развития.

Метод цепной лестницы в своей традиционной детерминированной форме постоянно критиковался известными актуариями. В качестве главного аргумента противниками метода выдвигалась скоррелированность множителей развития. Критика долгое время казалась справедливой, пока в 1993 году не удалось обосновать метод цепной лестницы в рамках стохастической модели, на которой и будет строиться наше изложение.

3.2.2. МЕТОД НА ОСНОВЕ НЕЗАВИСИМОСТИ
НОРМИРОВАННЫХ ПРИРАЩЕНИЙ
УБЫТКА ОТ ГОДА СОБЫТИЯ

Как уже упоминалось в разделе 3.1.3, все методы резервирования основаны на предположении сходства лет событий в треугольнике развития. С точки зрения статистики максимально возможное сходство могло бы заключаться в независимости и одинаковой распределенности случайных векторов (S_{i1}, \dots, S_{iI}) , $1 \leq i \leq I$, всех лет событий (обозначения из раздела 3.1.4). Но в реальности такая модель неприемлема, ведь, по крайней мере, объем портфеля изменяется по годам событий.

Тем самым мы приблизились к простейшей из возможных в реальности моделей. Предположим векторы (S_{i1}, \dots, S_{iI}) , $1 \leq i \leq I$, независимыми и отличающимися (в смысле модели из раздела 1.3.2) только объемами v_i (см. раздел 3.1.7). Тогда для всех $1 \leq i, k \leq I$ справедливы равенства

$$E(S_{ik} / v_i) = m_k,$$

$$\text{Var}(S_{ik} / v_i) = s_k^2 / v_i.$$

Параметры m_k и s_k^2 зависят от года развития k , поскольку наблюдаемое в году развития k приращение S_{ik} совокупного убытка с ростом k имеет тенденцию уменьшаться (см. раздел 3.1.4).

Ссылаясь на подробные рассуждения в разделе 3.1.7, мы всегда будем предполагать независимость лет событий, имея в виду независимость множеств случайных величин $\{S_{i1}, \dots, S_{iI}\}$, $1 \leq i \leq I$. Метод настоящего раздела дополнительно требует независимости лет развития, то есть независимости столбцов $\{S_{1k}, \dots, S_{Ik}\}$, $1 \leq k \leq I$, треугольника развития. Таким образом, все S_{ik} , $1 \leq i, k \leq I$,

предполагаются независимыми. Возможность проверки этого предположения обсуждается в разделе 3.2.7. Тогда мы можем интерпретировать годы развития $k = 1, \dots, I$ как группы рисков, представленные разным числом наблюдений по годам событий $i = 1, \dots, I + 1 - k$, причем объем v_i изменяется от одного года события к другому.

Несмещенные оценки параметров m_k и s_k^2 , как и в разделе 1.3.2, рассчитываются по формулам

$$\hat{m}_k = \sum_{i=1}^{I+1-k} S_{ik} / \sum_{i=1}^{I+1-k} v_i, \quad 1 \leq k \leq I,$$

$$\hat{s}_k^2 = \frac{1}{I-k} \sum_{i=1}^{I+1-k} v_i \left(\frac{S_{ik}}{v_i} - \hat{m}_k \right)^2, \quad 1 \leq k \leq I-1.$$

Для проверки предположения $E(S_{ik} / v_i) = m_k$ можно рассмотреть в качестве альтернативы (взвешенную по v_i) линейную регрессию

$$E(S_{ik} / v_i) = m_k + i \cdot c_k, \quad 1 \leq i \leq I,$$

и при фиксированном k оценить ее параметры на основании наблюдений $i \leq I + 1 - k$. Затем, как обычно, проверить значимость параметра c_k (в предположении нормального распределения). Если параметры тренда c_k подавляющего большинства лет развития k оказываются незначимыми, то исходная модель ($c_k = 0$) сохраняется.

С помощью оценки для m_k сразу получается несмещенная оценка

$$\hat{R}_i = v_i (\hat{m}_{I+2-i} + \dots + \hat{m}_1), \quad 2 \leq i \leq I,$$

требуемого в среднем резерва убытков i -го года события

$$E(R_i) = E(S_{i,I+2-i} + \dots + S_{i1}) = v_i (m_{I+2-i} + \dots + m_1).$$

Как было сказано в разделе 3.1.8, для любого треугольника развития

$$D = \{S_{ik} \mid 2 \leq i + k \leq I + 1\}$$

наилучшим в среднем квадратичном прогнозом величины R_i является условное математическое ожидание

$$E(R_i \mid D) = E(R_i \mid S_{i1}, \dots, S_{i,I+1-i}) = E(S_{i,I+2-i} + \dots + S_{i1} \mid S_{i1}, \dots, S_{i,I+1-i}).$$

В нашем случае все S_{ik} независимы, поэтому

$$E(S_{i,I+2-i} + \dots + S_{i1} \mid S_{i1}, \dots, S_{i,I+1-i}) = E(S_{i,I+2-i} + \dots + S_{i1}) = E(R_i).$$

Значит, \hat{R}_i как несмещенная оценка величины $E(R_i) = E(R_i \mid D)$ может служить прогнозом для R_i .

Точность прогноза \hat{R}_i (см. раздел 3.1.8) характеризуется (условной) средней квадратичной ошибкой

$$E((R_i - \hat{R}_i)^2 \mid D) = \text{Var}(R_i \mid D) + (E(R_i \mid D) - \hat{R}_i)^2 = \text{Var}(R_i) + (E(R_i) - \hat{R}_i)^2,$$

то есть суммой случайной и оценочной ошибок.

В рамках настоящей модели случайная ошибка имеет вид

$$\text{Var}(R_i) = \text{Var}(S_{i,I+2-i}) + \dots + \text{Var}(S_{i1}) = v_i (s_{I+2-i}^2 + \dots + s_1^2).$$

Неизвестные параметры $E(R_i)$ и s_k^2 в выражении для $E((R_i - \hat{R}_i)^2 \mid D)$ должны быть заменены оценками. Если бы мы оценили $E(R_i)$ величиной \hat{R}_i , то тем самым обнулили бы оценочную ошибку. А это было бы неверно: в силу равенства $E(\hat{R}_i) = E(R_i)$ отклонение $(E(R_i) - \hat{R}_i)^2$ составляет в среднем

$$\begin{aligned} E(E(R_i) - \hat{R}_i)^2 &= \text{Var}(\hat{R}_i) = v_i^2 (\text{Var}(\hat{m}_{I+2-i} + \dots + \hat{m}_1) = \\ &= v_i^2 (s_{I+2-i}^2 / w_{I+2-i} + \dots + s_1^2 / w_1). \end{aligned}$$

Последнее следует из условия

$$\text{Var}(\hat{m}_k) = \sum_{j=1}^{I+1-k} \text{Var}(S_{jk}) / \left(\sum_{j=1}^{I+1-k} v_j \right)^2 = s_k^2 / w_k,$$

где использовано сокращение

$$w_k = v_1 + \dots + v_{I+1-k}.$$

Таким образом, средняя квадратичная ошибка $E(R_i - \hat{R}_i)^2$ оценивается величиной

$$(s.e.(\hat{R}_i))^2 = \sum_{k=I+2-i}^I \hat{s}_k^2 \cdot v_i \cdot (1 + v_i / w_k).$$

Квадратный корень $s.e.(\hat{R}_i)$ из этой оценки называется *стандартной ошибкой* величины \hat{R}_i и представляет собой оценку среднего отклонения \hat{R}_i от R_i . Для расчета $s.e.(\hat{R}_i)$ нам не хватает оценки параметра s_i , представленного всего одним наблюдением s_{i1} i -го года развития. Если треугольник развития настолько велик, что в последнем году развития почти наверняка $S_{i1} = 0$ для всех $i = 1, \dots, I$, то параметр m_1 должен равняться нулю, и мы можем принять $\hat{s}_1 = 0$. Иначе надо попытаться оценить s_i , экстраполируя предшествующие значения \hat{s}_k , $k < I$, или положить

$$\hat{s}_I^2 = \min \{ \hat{s}_k^2 \mid 1 \leq k \leq I-1 \},$$

учитывая тенденцию значений s_k к уменьшению. Проблема нехватки наблюдений остро чувствуется и при оценке величины m_i . На практике нередко приходится искать \hat{m}_i посредством экстраполяции оценок предшествующих величин m_{i-1}, m_{i-2}, \dots

Для треугольника развития из таблицы 3.1.5.1 получаются следующие результаты

$$\hat{m}_1, \dots, \hat{m}_6: 0,279; 0,178; 0,201; 0,115; 0,058; 0,049;$$

$$\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_6: 12,87; 5,236; 8,748; 6,054; 5,299; 5,236;$$

$$\hat{R}_2, \dots, \hat{R}_6: 705; 1736; 3380; 7166; 12\,167; \hat{R}_i = 25\,154;$$

$$s.e.(\hat{R}_i): 904; 1306; 1518; 2088; 2504; \quad s.e.(\hat{R}_i) = 5732.$$

Совокупный резерв

$$R = R_2 + \dots + R_I,$$

в силу равенства $E(\hat{R}_i) = E(R_i)$, оценивается величиной

$$\hat{R} = \hat{R}_2 + \dots + \hat{R}_I.$$

(Условная) средняя квадратичная ошибка (см. раздел 3.1.8) равна

$$E((R - \hat{R})^2 | D) = \text{Var}(R | D) + (E(R | D) - \hat{R})^2 = \text{Var}(R) + (E(R) - \hat{R})^2.$$

Для случайной ошибки $\text{Var}(R)$, используя независимость лет событий, получим

$$\text{Var}(R) = \sum_{i=2}^I \text{Var}(R_i) = \sum_{i=2}^I v_i \sum_{k=I+2-i}^I s_k^2 = \sum_{k=2}^I s_k^2 \sum_{i=I+2-k}^I v_i = \sum_{k=2}^I u_k s_k^2,$$

где

$$u_k = v_{I+2-k} + \dots + v_I.$$

Оценочная ошибка $(E(R) - \hat{R})^2$ составляет в среднем

$$\begin{aligned} E(E(R) - \hat{R})^2 &= \text{Var}(\hat{R}) = \text{Var}\left(\sum_{i=2}^I \sum_{k=I+2-i}^I v_i \cdot \hat{m}_k\right) = \\ &= \text{Var}\left(\sum_{k=2}^I \hat{m}_k \cdot u_k\right) = \sum_{k=2}^I u_k^2 s_k^2 / w_k. \end{aligned}$$

В итоге средняя квадратичная ошибка совокупного резерва оценивается величиной

$$(s.e.(\hat{R}))^2 = \sum_{k=2}^I \hat{s}_k^2 u_k (1 + u_k / w_k).$$

Поскольку

$$u_k^2 > v_{I+2-k}^2 + \dots + v_I^2,$$

оценочная ошибка $\text{Var}(\hat{R})$ совокупного резерва превышает сумму $\text{Var}(\hat{R}_2) + \dots + \text{Var}(\hat{R}_I)$ отдельных оценочных ошибок. Но так и должно быть, ведь оценки \hat{R}_i положительно скоррелированы по \hat{m}_k .

3.2.3. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ МЕТОД ПО ОТНОШЕНИЮ К ГОДАМ СОБЫТИЙ

В разделе 3.2.2 в качестве простейшей модели мы предположили, что различие лет событий (S_{i1}, \dots, S_{iI}), $1 \leq i \leq I$, связано только с различием объемов v_i . Доверительный (Д) метод допускает более умеренное сходство лет событий.

Каждому году события i теперь дополнительно присваивается собственное качество Θ_i , которое порождается одинаковым для всех i распределением и задает распределение величины S_{ik} , $1 \leq k \leq I$. Строго говоря, доверительный метод резервирования (Р) опирается на следующие предположения:

- (Д1) В каждом году события i функции распределения случайных величин S_{i1}, \dots, S_{iI} зависят от одинакового неизвестного (векторного) параметра (распределения) Θ_i , моделируемого как случайная величина («качество года события»).
- (Д2) В каждом году события i величины S_{i1}, \dots, S_{iI} условно независимы при заданном Θ_i .
- (Д3) Векторы лет событий ($\Theta_i, S_{i1}, \dots, S_{iI}$), $1 \leq i \leq I$, независимы.
- (Д4) Качества лет событий $\Theta_1, \dots, \Theta_I$ одинаково распределены.
- (Р1) Существуют неизвестные параметры развития $m_k > 0$, $1 \leq k \leq I$, а также одинаковая для всех i, k неизвестная функция μ , удовлетворяющие условию $E(S_{ik} | \Theta_i) = v_i \mu(\Theta_i) m_k$, где v_i — известный объем i -го года события, $1 \leq i \leq I$.

(Д1)–(Д4) — обычные предположения доверительной модели из главы 2.5 (в качестве индивидуумов выступают годы событий). Р1 означает, что средние относительные приращения убытков

$$E(S_{ik} / v_i | \Theta_i) = \mu(\Theta_i) m_k, \quad 1 \leq k \leq I,$$

i -го года события всегда выше или ниже соответствующих относительных приращений некоторого j -го года события, то есть существуют систематически лучшие и систематически худшие годы событий (по сравнению с моделью из раздела 3.2.2 здесь присутствует дополнительный множитель $\mu(\Theta_i)$).

Для получения модели дисперсии сосредоточим внимание на двух идеальных случаях зависимости между математическими ожиданиями и дисперсиями групп рисков (см. раздел 1.3.6). В обоих случаях величина убытка S_{ik} основывается на коллективной модели, раскладывающей совокупный убыток S_{ik} на число убытков N_{ik} и размер убытка X_{ik}

$$E(S_{ik} | \Theta_i) = E(N_{ik} | \Theta_i) \cdot E(X_{ik} | \Theta_i),$$

причем объем v_i заключен в множителе $E(N_{ik} | \Theta_i)$. В первом идеальном случае параметр m_k содержится в $E(N_{ik} | \Theta_i)$ (а $E(X_{ik} | \Theta_i)$ не зависит от k), а во втором — в $E(X_{ik} | \Theta_i)$ (а $E(N_{ik} | \Theta_i)$ не зависит от k). В зависимости от варианта (как и в разделе 1.3.6) получаем одну из двух возможных моделей дисперсии:

- (Р2) $\text{Var}(S_{ik} | \Theta_i) = v_i \sigma^2(\Theta_i) m_k^\beta$, где $\beta = 1$ или $\beta = 2$ — одинаковый для всех i, k параметр, а σ^2 — одинаковая для всех i, k неизвестная функция.

По сравнению с моделью $\text{Var}(S_{ik}) = v_i s_k^2$ из раздела 3.2.2 модель Р2, с одной стороны, более общая благодаря дополнительному множителю $\sigma^2(\Theta_i)$, зависящему от года события, но с другой — более специальная, ввиду отсутствия

параметра s_k^2 . В частности, модель предполагает выполнение неравенства $m_k > 0$ для всех $k = 1, \dots, I$. Но при соблюдении этого ограничения два значения $\beta = 1$ и $\beta = 2$ позволяют охватить наиболее важные для практики случаи.

Для величин

$$Z_{ik} = S_{ik} / (v_i m_k)$$

имеем

$$E(Z_{ik} | \Theta_i) = \mu(\Theta_i),$$

$$\text{Var}(Z_{ik} | \Theta_i) = \sigma^2(\Theta_i) / (v_i m_k^{2-\beta}), \beta \in \{1; 2\}.$$

Как видим, Z_{ik} удовлетворяют предположению БШ_{колл} и, следовательно, БШ_{инд} модели Бюльмана—Штрауба из раздела 2.5.4, причем объем имеет специальную форму

$$v_{ik} = v_i m_k^{2-\beta}$$

(при условии известных m_k). (Заметим, объем v_{ik} в модели Бюльмана—Штрауба определяется только структурой дисперсии и не обязан совпадать с отношением величин S_{ik} и Z_{ik} ; в случае $\beta = 2$ равенство $v_{ik} Z_{ik} = S_{ik}$ не выполняется.) Таким образом, при условии известных m_k для будущих Z_{ij} , $j > I + 1 - i$, или, что одно и то же, для уровня $\mu(\Theta_i)$ года события i справедлива (не зависящая от j) доверительная оценка:

$$E^*(Z_{ij} | \Theta_i) = c_i Z_{i+} + (1 - c_i) \cdot m, \quad j > I + 1 - i,$$

где

$$Z_{i+} = \sum_{k=1}^{I+1-i} v_{ik} Z_{ik} / v_{i+},$$

$$v_{i+} = \sum_{k=1}^{I+1-i} v_{ik} = v_i (m_1^{2-\beta} + \dots + m_{I+1-i}^{2-\beta}),$$

$$c_i = v_{i+} / (v_{i+} + u / w),$$

$$m = E(\mu(\Theta_i)),$$

$$u = E(\sigma^2(\Theta_i)),$$

$$w = \text{Var}(\mu(\Theta_i)).$$

Для расчета $E^*(Z_{ij} | \Theta_i)$ требуется оценить структурные параметры m_1, \dots, m_I , m , u и w . Без ограничения общности можно принять

$$m = E(\mu(\Theta_i)) = 1,$$

ведь иначе мы заменили бы m_k на $\underline{m}_k = m_k m$, $\mu(\Theta_i)$ на $\underline{\mu}(\Theta_i) = \mu(\Theta_i) / m$, а $\sigma^2(\Theta_i)$ на $\underline{\sigma}^2(\Theta_i) = \sigma^2(\Theta_i) / m^\beta$ и получили бы для $\underline{Z}_{ik} = S_{ik} / (v_i \underline{m}_k)$ такую же доверительную модель, как и для Z_{ik} , но с условием $E(\underline{\mu}(\Theta_i)) = 1$. Тогда

$$E(S_{ik} / v_i) = E(\mu(\Theta_i)) m_k = m_k,$$

и несмещенными оценками для m_k являются одновременно

$$\hat{m}_k = \sum_{i=1}^{I+1-k} S_{ik} / \sum_{i=1}^{I+1-k} v_i$$

(совпадающая с оценкой из раздела 3.2.2) и

$$\hat{\underline{m}}_k = \frac{1}{I+1-k} \sum_{i=1}^{I+1-k} \frac{S_{ik}}{v_i}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \text{Var}(S_{ik} / v_i) &= E(\text{Var}(S_{ik} / v_i | \Theta_i)) + \text{Var}(E(S_{ik} / v_i | \Theta_i)) = \\ &= m_k^\beta u / v_i + m_k^2 w, \end{aligned}$$

предпочтение отдается оценке $\hat{\underline{m}}_k$, когда не зависящее от v_i второе слагаемое существенно перевешивает первое слагаемое, то есть $u / w \ll v_{ik}$ (см. детальное описание совершенно аналогичной процедуры оценивания параметра θ в разделе 1.4.2).

Структурные параметры u и w оцениваются (как и в разделе 2.5.4) по формулам

$$\hat{u} = \frac{1}{I-1} \sum_{i=1}^{I-1} \frac{v_i}{I-i} \sum_{k=1}^{I+1-i} \hat{m}_k^{2-\beta} (Z_{ik} - \underline{Z}_{i+})^2$$

(слагаемое при $i = I$ равно нулю, а m_k заменено на \hat{m}_k , поэтому сказать что-либо о несмещенности этой оценки невозможно),

$$\hat{w} = \frac{1}{v_{++}} \left(\sum_{i=1}^I v_{i+} (\underline{Z}_{i+} - 1)^2 - I \hat{u} \right),$$

$$v_{++} = v_{1+} + \dots + v_{I+}.$$

Вместо \hat{w} можно использовать оценку

$$\hat{w}_c = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I c_i (\underline{Z}_{i+} - 1)^2,$$

вычисляемую методом последовательных приближений одновременно с c_i . Отличие оценок \hat{w} и \hat{w}_c от соответствующих оценок в разделе 2.5.4 объясняется известностью значения $E(Z_{ik}) = E(\mu(\Theta_i)) = 1$ в нашей теперешней ситуации.

В рамках этой доверительной модели будущие $S_{ij} = v_i m_j Z_{ij}$, $j > I + 1 - i$, прогнозируются в размере $v_i \hat{m}_j E^*(Z_{ij} | \Theta_i)$. Резерв же

$$R_i = S_{i,I+2-i} + \dots + S_{iI}$$

оценивается величиной

$$\hat{R}_i = v_i E^*(Z_{ij} | \Theta_i) (\hat{m}_{I+2-i} + \dots + \hat{m}_I),$$

отличающейся от оценки в разделе 3.2.2 только (не зависящим от j) дополнительным множителем $E^*(Z_{ij} | \Theta_i)$. Благодаря этому множителю, годам событий

с убытком Z_{i+} выше (ниже) среднего уровня назначается несколько больший (меньший) резерв R_i , чем в разделе 3.2.2.

Вывод *средней квадратичной ошибки* достаточно громоздкий и выносится нами в теорему.

Теорема. Средняя квадратичная ошибка оценки \hat{R}_i резерва R_i при заданном треугольнике развития $D = \{S_{ik} \mid I + k \leq I + 1\}$ составляет

$$E((R_i - \hat{R}_i) \mid D)^2 \approx v_i u (m_{I+2-i}^\beta + \dots + m_I^\beta) + v_i^2 (1 - c_i) w (m_{I+2-i} + \dots + m_I)^2 + \\ + v_i^2 (E^*(Z_{ij} \mid \Theta_i))^2 \sum_{j,k} \text{Cov}(\hat{m}_j, \hat{m}_k),$$

где суммирование ведется по области $I + 2 - i \leq j, k \leq I$, и

$$\text{Cov}(\hat{m}_j, \hat{m}_k) = \frac{\delta_{jk} (v_1 + \dots + v_{I+1-k}) m_k^\beta u + (v_1^2 + \dots + v_{I+1-k}^2) m_j m_k w}{(v_1 + \dots + v_{I+1-j}) \cdot (v_1 + \dots + v_{I+1-k})}$$

при $j \leq k$. Ковариация оценивается подстановкой оценок структурных параметров.

Доказательство. Средняя квадратичная ошибка имеет вид (см. раздел 3.1.8),

$$E((R_i - \hat{R}_i)^2 \mid D) = \text{Var}(R_i \mid D) + (E(R_i \mid D) - \hat{R}_i)^2 = \text{Var}(R_i \mid D_i) + (E(R_i \mid D) - \hat{R}_i)^2,$$

где $D_i = \{S_{i1}, \dots, S_{i, I+1-i}\}$. Учитывая предположение Д2, находим

$$E(R_i \mid D_i) = \sum_{j=I+2-i}^I E(S_{ij} \mid D_i),$$

$$E(S_{ij} \mid D_i) = E(E(S_{ij} \mid \Theta_i, D_i) \mid D_i) = E(v_i \mu(\Theta_i) m_j \mid D_i) \quad (j \geq I + 2 - i) = \\ = v_i E(\mu(\Theta_i) \mid D_i) m_j,$$

$$\text{Var}(R_i \mid D_i) = E(\text{Var}(R_i \mid \Theta_i, D_i) \mid D_i) + \text{Var}(E(R_i \mid \Theta_i, D_i) \mid D_i) = \\ = E \left(\sum_{j=I+2-i}^I \text{Var}(S_{ij} \mid \Theta_i) \mid D_i \right) + \text{Var} \left(\sum_{j=I+2-i}^I E(S_{ij} \mid \Theta_i) \mid D_i \right) = \\ = v_i E(\sigma^2(\Theta_i) \mid D_i) \left(\sum_{j \geq I+2-i} m_j^\beta \right) + v_i^2 \text{Var}(\mu(\Theta_i) \mid D_i) \left(\sum_{j \geq I+2-i} m_j \right)^2.$$

Таким образом,

$$E(R_i \mid D) - \hat{R}_i = v_i E(\mu(\Theta_i) \mid D_i) \left(\sum_{j \geq I+2-i} m_j \right) - v_i E^*(Z_{ij} \mid \Theta_i) \left(\sum_{j \geq I+2-i} \hat{m}_j \right) = \\ = v_i (E(\mu(\Theta_i) \mid D_i) - E^*(Z_{ij} \mid \Theta_i)) \left(\sum_{j \geq I+2-i} m_j \right) + v_i E^*(Z_{ij} \mid \Theta_i) \left(\sum_{j \geq I+2-i} (m_j - \hat{m}_j) \right),$$

и мы можем аппроксимировать $(E(R_i \mid D) - \hat{R}_i)^2$ величиной

$$(E(R_i \mid D) - \hat{R}_i)^2 \approx v_i^2 (E(\mu(\Theta_i) \mid D_i) - E^*(Z_{ij} \mid \Theta_i))^2 \left(\sum_{j \geq I+2-i} m_j \right)^2 + \\ + v_i^2 E^*(Z_{ij} \mid \Theta_i)^2 \left(\sum_{j \geq I+2-i} (m_j - \hat{m}_j) \right)^2$$

(смешанное произведение в среднем равно нулю).

Объединив второе слагаемое из выражения для $\text{Var}(R_i \mid D_i)$ с первым слагаемым из выражения для $(E(R_i \mid D) - \hat{R}_i)^2$ и обозначив

$$m_{i>} = m_{I+2-i} + \dots + m_I,$$

получим

$$v_i^2 m_{i>}^2 (\text{Var}(\mu(\Theta_i) \mid D_i) + (E(\mu(\Theta_i) \mid D_i) - E^*(Z_{ij} \mid \Theta_i))^2) = \\ = v_i^2 m_{i>}^2 E((\mu(\Theta_i) - E^*(Z_{ij} \mid \Theta_i))^2 \mid D_i) = \\ = v_i^2 m_{i>}^2 E(\mu(\Theta_i) - E^*(Z_{ij} \mid \Theta_i))^2 = v_i^2 m_{i>}^2 (1 - c_i) \text{Var}(\mu(\Theta_i)).$$

В последнем равенстве учтено, что $E(\mu(\Theta_i) - E^*(Z_{ij} \mid \Theta_i))^2$ представляет собой среднюю квадратичную ошибку доверительной оценки, приведенную нами в разделе 2.5.4 к виду $(1 - c) \text{Var}(\mu(\Theta_i))$.

Наконец, аппроксимируем элемент $E(\sigma^2(\Theta_i) \mid D_i)$, присутствующий в первом слагаемом выражения для $\text{Var}(R_i \mid D_i)$, значением $E(\sigma^2(\Theta_i)) = u$, а элементы $(m_j - \hat{m}_j)(m_k - \hat{m}_k)$, возникающие в результате применения формулы квадрата суммы в третьем слагаемом выражения для $(E(R_i \mid D) - \hat{R}_i)^2$, — значениями

$$\text{Cov}(\hat{m}_j, \hat{m}_k) = \sum_{i=1}^{I+1-j} \sum_{n=1}^{I+1-k} \frac{\text{Cov}(S_{ij}, S_{nk})}{v_{j<} \cdot v_{k<}},$$

где $v_{j<} = v_1 + \dots + v_{I+1-j}$. Поскольку $\text{Cov}(S_{ij}, S_{nk}) = 0$ при $i \neq n$, и

$$\text{Cov}(S_{ij}, S_{ik}) = E(\text{Cov}(S_{ij}, S_{ik} \mid \Theta_i)) + \text{Cov}(E(S_{ij} \mid \Theta_i), E(S_{ik} \mid \Theta_i)) = \delta_{jk} v_i m_k^\beta u + v_i^2 m_j m_k w,$$

при $j \leq k$, последнее выражение преобразуется к виду

$$\text{Cov}(\hat{m}_j, \hat{m}_k) = \frac{\delta_{jk} (v_1 + \dots + v_{I+1-k}) m_k^\beta u + (v_1^2 + \dots + v_{I+1-k}^2) m_j m_k w}{(v_1 + \dots + v_{I+1-j}) \cdot (v_1 + \dots + v_{I+1-k})}.$$

Хотя теоретически β может принимать любые неотрицательные значения, наибольший смысл имеют значения 1 и 2, непосредственно определяющие модель объема. Решение принимается в пользу того значения β , при котором график зависимости стандартизированной квадратичной разности (оценки дисперсии)

$$(Z_{ik} - E^*(Z_{ik} \mid \Theta_i))^2 \cdot v_i \hat{m}_k^{2-\beta}, \quad i + k \leq I + 1,$$

(после подстановки оценок параметров и логарифмирования) от \hat{m}_k слабее проявляет тренд в области больших значений ординаты. Для данных из таб-

лицы 3.1.5.1 при $\beta = 2$ график выглядит более ровным, чем при $\beta = 1$, поэтому правильным будет использовать значение $\beta = 2$. В итоге получим:

$$\begin{aligned} \hat{m}_1, \dots, \hat{m}_6: & 0,297; 0,178; 0,201; 0,115; 0,058; 0,049; \\ \beta = 2; & \hat{u} = 702,8; \hat{w} = 0,0485; \hat{u}/\hat{w} = 14\,499; \\ \underline{Z}_{1+}, \dots, \underline{Z}_{6+}: & 1,25; 0,77; 0,83; 0,84; 1,48; 0,93; \\ c_1, \dots, c_6: & 0,844; 0,831; 0,816; 0,758; 0,700; 0,582; \\ E^*(Z_{ik} | \Theta_i): & 1,209; 0,812; 0,863; 0,876; 1,338; 0,959; \\ \hat{R}_2, \dots, \hat{R}_6: & 573; 1498; 2961; 9585; 11\,674; \\ s.e.(\hat{R}_i): & 249; 447; 760; 1783; 2512. \end{aligned}$$

Иногда параметры развития m_1, \dots, m_I задаются *извне*, например, рыночной статистикой. В этом случае они обычно удовлетворяют условию нормировки

$$m_1 + \dots + m_I = 1.$$

Если учесть его в нашей модели, то величина

$$v_i \mu(\Theta_i) = v_i \mu(\Theta_i)(m_1 + \dots + m_I) = E(S_{I1} | \Theta_i) + \dots + E(S_{II} | \Theta_i) = E(C_{II} | \Theta_i)$$

будет представлять собой ожидаемый конечный убыток при заданном качестве Θ_i соответствующего года события, а m_k — показывать долю конечного убытка, приходящуюся на k -й год развития. Тогда $m = E(\mu(\Theta_i))$ становится средним относительным конечным убытком $E(C_{II} / v_i)$, а каждое $Z_{ik} = S_{ik} / (v_i m_k)$, $1 \leq k \leq I + 1 - i$, так же как и \underline{Z}_{i+} , — расчетной оценкой для C_{II} / v_i .

Чтобы не лишать себя названных преимуществ условия нормировки $m_1 + \dots + m_I = 1$, мы не будем, как раньше, объединять m и m_k , полагая $m = 1$. Тогда параметр m придется либо оценить (как принято в модели Бюльмана—Штрауба), например доверительным средним

$$\hat{m} = \sum_{i=1}^I c_i \underline{Z}_{i+} / \sum_{i=1}^I c_i$$

(ранее это было невозможно, так как m_k считались неизвестными), либо задать *извне* в размере априорного конечного относительного убытка $q_i = E(\mu(\Theta_i))$. Априорной оценкой может служить, скажем, соотнесенная к объему суммарная нетто-премия i -го года события.

Внешнее задание $q_i = E(\mu(\Theta_i))$, как правило, предполагает отказ от Д4. Параметр $m = E(\mu(\Theta_i))$ в этом случае устанавливается индивидуально для каждого года события i (в размере q_i). Тогда параметры u и w тоже различаются по годам событий и уже не могут быть оценены на основании треугольника развития. Требуется дополнительно задать *извне* некоторое значение c_i доверительного множителя, определяющего соотношение весов между расчетной оценкой \underline{Z}_{i+} и априорной оценкой q_i конечного уровня убытка (байесовское оценивание).

Если помимо нормированных параметров m_1, \dots, m_I *извне* задается параметр q_i , то резерв $R_i = S_{i,I+2-i} + \dots + S_{II}$ можно оценить без привлечения довери-

тельной модели в размере невыплаченной доли $m_{I+2-i} + \dots + m_I$ ожидаемого априорного конечного убытка $v_i q_i$:

$$\hat{R}_i = v_i q_i (1 - w_i),$$

где

$$w_i = m_1 + \dots + m_{I+1-i} \leq 1.$$

Эта очень простая оценка резерва

$$\hat{R}_i^{BF} = v_i q_i (1 - w_i)$$

называется *резервом Борнхюеттера—Фергюсона* (Bornhuetter—Ferguson) (по имени двух американских актуариев, опубликовавших этот метод в 1972 году).

Точно такая же оценка получается в доверительной модели при $c_i = 0$, когда

$$E^*(S_{ij} | \Theta_i) = v_i E^*(Z_{ij} | \Theta_i) m_j = v_i q_i m_j, \quad j \geq I + 2 - i.$$

Однако полное недоверие наблюдаемым данным кажется крайностью. В 1976 году Дж. Бенктандер (G. Benktander) предложил принять $c_i = w_i$. Такой подход гораздо более убедителен, ведь w_i ведет себя как обычный доверительный множитель c_i , монотонно возрастая от 0 до 1 в течение периода развития. Бенктандер принимал во внимание только случай $\beta = 1$ и оценил резерв величиной

$$\begin{aligned} \hat{R}_i^{GB} &= v_i (1 - w_i) (w_i \underline{Z}_{i+} + (1 - w_i) q_i) = (1 - w_i) (C_{i,I+1-i} + (1 - w_i) v_i q_i) = \\ &= (1 - w_i) (C_{i,I+1-i} + \hat{R}_i^{BF}), \end{aligned}$$

где $\underline{Z}_{i+} = C_{i,I+1-i} / (v_i w_i)$. Резерв Бенктандера иногда называют *итерационным резервом Борнхюеттера—Фергюсона*, потому что он получается в результате двукратного применения идеи Борнхюеттера—Фергюсона «резерв — невыплаченная часть ожидаемого конечного убытка» — сначала к априорному конечному убытку $v_i q_i$, затем к вычисленной на первом шаге оценке конечного убытка $C_{i,I+1-i} + \hat{R}_i^{BF}$.

В работах Нойхауса и Мака (Neuhauser W. Another Pragmatic Loss Reserving Method or Bornhuetter/Ferguson Revisited // Scandinavian Actuarial Journal, 1922, p. 151—162; Mack Th. Credible Claims Reserves: The Benktander Method // ASTIN Bulletin, 2000, 30, p. 333—347) показано, что почти всегда выполняется неравенство $mse(\hat{R}_i^{GB}) < mse(\hat{R}_i^{BF})$. Как и следовало ожидать, оценка Бенктандера заслуживает предпочтения перед оценкой Борнхюеттера—Фергюсона. Правда, дальнейшее повторение идеи Борнхюеттера—Фергюсона и построение оценок $\hat{R}_i = (1 - w_i) (C_{i,I+1-i} + \hat{R}_i^{GB})$ и т. д. не обязательно ведет к уменьшению средней квадратичной ошибки. Итерация в конце концов сходится к оценке $\hat{R}_i = (1 - w_i) C_{i,I+1-i} / w_i$, получаемой из \hat{R}_i^{GB} в случае равенства априорного и апостериорного конечных убытков (значению $C_{i,I+1-i} / w_i$) или при условии $c_i = 1$, когда априорная информация q_i игнорируется и признается достоверным наблюдаемый убыток $C_{i,I+1-i}$.

Оценка $(1 - w_i) C_{i,I+1-i} / w_i$, где «лаг-множители» $w_i = (f_{I+1-i} \cdot \dots \cdot f_{I-1})^{-1}$ вычисляются на основании треугольника развития, обсуждается в следующих разделах, но там мы получим ее другим способом.

3.2.4. МЕТОД ЦЕПНОЙ ЛЕСТНИЦЫ

Метод, основанный на независимости нормированных приращений убытка от года события, подразумевает равенство априорных математических ожиданий $m_1 + \dots + m_I$ нормированных на объем конечных убытков $(S_1 + \dots + S_I) / v_i$ всех лет событий. На практике же процессы убытков разных лет событий зачастую различаются весьма существенно и не отвечают предположению постоянного математического ожидания. В разделе 3.2.3 мы признавали различие уровней лет событий, но только частично. В настоящем разделе снимаются все ограничения и для каждого года события допускается индивидуальное математическое ожидание. Это позволяет, в частности, обойтись без параметра объема v_i . Правда, как и прежде, распределение конечного убытка по годам развития полагается в среднем одинаковым для всех лет событий.

Используя обозначения из раздела 3.1.4, представим конечный убыток

$$C_{II} = S_1 + \dots + S_I,$$

в мультипликативной форме

$$C_{II} = C_{I1} F_{I1} F_{I2} \dots F_{I,I-1},$$

где

$$F_{ik} = C_{i,k+1} / C_{ik}$$

мультипликативное приращение аккумулированного уровня убытка

$$C_{ik} = S_1 + \dots + S_{ik}, \quad 1 \leq k \leq I,$$

i -го года события при переходе от k -го к $(k+1)$ -му году развития. Мультипликативное представление возможно только при условии $C_{ik} > 0$ для всех i, k ; иначе произведение нужно начинать не с C_{I1} , а с первого положительного C_{ik} .

Тогда предположение (в среднем) одинакового для всех лет событий распределения конечного убытка C_{II} по годам развития можно трактовать как независимость математического ожидания случайной величины F_{ik} от года события i :

$$E(F_{ik}) = f_k, \quad 1 \leq i \leq I, \quad 1 \leq k \leq I-1.$$

Параметры f_k задают среднее приращение уровня убытка при переходе от k -го к $(k+1)$ -му году развития.

В так называемом *методе цепной лестницы* оценки параметров f_k определяются как взвешенные по C_{ik} арифметические средние

$$\hat{f}_k = \sum_{i=1}^{I-k} C_{ik} F_{ik} / \sum_{i=1}^{I-k} C_{ik} = \sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k+1} / \sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}, \quad 1 \leq k \leq I-1, \quad (1)$$

наблюдаемых значений случайных величин F_{ik} . Следующая характерная особенность метода цепной лестницы состоит в том, что конечный убыток C_{II} оценивается величиной

$$\hat{C}_{II} = C_{i,I+1-i} \hat{f}_{I+1-i} \dots \hat{f}_{I-1}, \quad 2 \leq i \leq I, \quad (2)$$

а резерв

$$R_i = C_{II} - C_{i,I+1-i}$$

величиной

$$\hat{R}_i = C_{i,I+1-i} (\hat{f}_{I+1-i} \dots \hat{f}_{I-1} - 1),$$

то есть прогноз основывается только на текущем уровне убытка $C_{i,I+1-i}$ года события i , а все предыдущие состояния $C_{II}, \dots, C_{i,I-i}$ игнорируются. (Казалось бы, правильнее оценить конечный уровень убытка средним значением проекций

$$C_{I1} \hat{f}_1 \dots \hat{f}_{I-1},$$

$$C_{i2} \hat{f}_2 \dots \hat{f}_{I-1},$$

...

$$C_{i,I-i} \hat{f}_{I-i} \dots \hat{f}_{I-1},$$

$$C_{i,I+1-i} \hat{f}_{I+1-i} \dots \hat{f}_{I-1}.)$$

Таким образом, метод цепной лестницы неявно предполагает отсутствие полезной информации во всех состояниях убытка, кроме текущего. *Предположение* формализуется следующим образом:

(ЦЛ1) Существуют такие *множители развития* f_1, \dots, f_{I-1} , что

$$E\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}} \mid C_{i1}, \dots, C_{ik}\right) = f_k, \quad 1 \leq i \leq I, \quad 1 \leq k \leq I-1, \quad \text{при } C_{ik} > 0$$

$$(\text{или } E(C_{i,k+1} \mid C_{i1}, \dots, C_{ik}) = C_{ik} f_k).$$

ЦЛ1 означает зависимость условного математического ожидания величины $C_{i,k+1}$ только от C_{ik} и независимость от прежних состояний $C_{i1}, \dots, C_{i,k-1}$. Учитывая свойство итеративности математического ожидания, из ЦЛ1 непосредственно выводим равенство

$$E(C_{i,k+1} / C_{ik}) = E(E(C_{i,k+1} / C_{ik} \mid C_{i1}, \dots, C_{ik})) = f_k.$$

Как видим, ЦЛ1 представляет собой частный случай рассмотренной в начале раздела модели $E(F_{ik}) = f_k$. Кроме ЦЛ1, как всегда, будем использовать предположение

(ЦЛ2) Годы событий $\{C_{i1}, \dots, C_{II}\}$, $1 \leq i \leq I$, независимы.

Формулировка предположения ЦЛ1 в терминах условного математического ожидания одновременно подчеркивает наш интерес не к $E(C_{II})$ и $E(R_i)$, а к условным математическим ожиданиям $E(C_{II} \mid D)$ и $E(R_i \mid D)$, где

$$D = \{C_{ik} \mid i + k \leq I + 1\}$$

накопленные до текущего момента данные (треугольник развития). В разделе 3.1.8 мы уже объясняли, почему математическое ожидание должно стро-

иться при условии данных D . Обратим внимание, в модели раздела 3.2.2 значение $R_i = S_{i,i+2-I} + \dots + S_{ii}$ не зависело от D в силу дополнительного предположения независимости лет развития и условное математическое ожидание $E(R_i | D)$ совпадало с безусловным $E(R_i)$. Сейчас же мы работаем с аккумулярованными убытками, не являющимися независимыми по определению. Поэтому важно найти именно условное математическое ожидание при заданных наблюдениях D . Следующая теорема показывает, что в основе проекции цепной лестницы (2) действительно лежат предположения ЦЛ1 и ЦЛ2.

Теорема. При выполнении ЦЛ1 и ЦЛ2 справедливо равенство

$$E(C_{ii} | D) = C_{i,i+1-i} f_{i+1-i} \dots f_{i-1}, \quad 2 \leq i \leq I.$$

Доказательство. Введем обозначение

$$D_i = \{C_{ii}, \dots, C_{i,i+1-i}\}.$$

Последовательно применяя ЦЛ1 и учитывая ЦЛ2, получим

$$\begin{aligned} E(C_{ii} | D) &= E(C_{ii} | D_i) = \\ &= E(E(C_{ii} | C_{ii}, \dots, C_{i,i+1-i}) | D_i) = \\ &= E(C_{i,i+1-i} f_{i+1-i} | D_i) = \\ &= E(C_{i,i+1-i} | D_i) f_{i+1-i} = \\ &= \dots = \\ &= E(C_{i,i+1-i} | D_i) f_{i+1-i} \dots f_{i-1} = \\ &= C_{i,i+1-i} f_{i+1-i} \dots f_{i-1}. \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. ■

Нам осталось убедиться в корректности оценок параметров $f_{i+1-i} \dots f_{i-1}$, используемых в формуле (2). В этом нам поможет следующая теорема.

Теорема. При справедливости ЦЛ1 и ЦЛ2 оценки \hat{f}_k , заданные формулой (1), являются несмещенными и некоррелированными, причем

$$E(\hat{f}_{i+1-i} \dots \hat{f}_{i-1}) = f_{i+1-i} \dots f_{i-1}.$$

Доказательство. Сначала докажем несмещенность \hat{f}_k . Нам потребуется обозначение

$$B_k = \{C_{ij} | j \leq k, \quad i+j \leq I+1\}, \quad 1 \leq k \leq I.$$

В силу ЦЛ2 и ЦЛ1,

$$E(C_{i,k+1} | B_k) = C_{ik} f_k, \quad 1 \leq i \leq I-k,$$

и, следовательно,

$$E(\hat{f}_k | B_k) = \sum_{i=1}^{I-k} E(C_{i,k+1} | B_k) / \sum_{i=1}^{I-k} C_{ik} = f_k.$$

Таким образом,

$$E(\hat{f}_k) = E(E(\hat{f}_k | B_k)) = f_k.$$

Далее, при $j < k$ имеем

$$E(\hat{f}_j \hat{f}_k) = E(E(\hat{f}_j \hat{f}_k | B_k)) = E(\hat{f}_j E(\hat{f}_k | B_k)) = E(\hat{f}_j) f_k = f_j f_k,$$

что и доказывает некоррелированность оценки \hat{f}_k . Для любого произведения двух различных \hat{f}_k доказательство полностью аналогично. ■

Некоррелированность \hat{f}_k явилась неожиданной в свете зависимости \hat{f}_{k-1} и \hat{f}_k от одних и тех же данных $C_{1k} + \dots + C_{I-k,k}$.

Аналогично предыдущей теореме доказывается некоррелированность множителей $F_{ik} = C_{i,k+1} / C_{ik}$, $1 \leq k \leq I-1$, каждого фиксированного года события i . В частности, не коррелируют соседние множители развития $F_{i,k-1}$, F_{ik} . Поэтому метод цепной лестницы не применим к таким портфелям, где за высоким (низким) $F_{i,k-1}$ в общем случае скорее следует низкий (высокий) множитель развития F_{ik} . Подобные особенности выявляются с помощью метода, описанного в разделе 3.2.7.

Наконец, из определения \hat{f}_k как взвешенного по C_{ik} , $1 \leq i \leq I-k$, среднего множителей развития $F_{ik} = C_{i,k+1} / C_{ik}$ следует, что в расчете \hat{f}_k должны участвовать *только те пары* $(C_{ik}, C_{i,k+1})$, где $C_{ik} > 0$ (иначе F_{ik} не определено и соответствующий вес C_{ik} равняется нулю). Таким образом, правильнее рассчитывать \hat{f}_k не по формуле

$$\hat{f}_k = \sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k+1} / \sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}, \quad (1a)$$

как это чаще всего делается на практике, а по формуле

$$\hat{f}_k = \sum_{i=1}^{I-k} C_{ik} F_{ik} / \sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}, \quad \text{полагая } F_{ik} := 0, \text{ если } C_{ik} = 0, \quad (16)$$

(при наличии пары $(C_{ik}, C_{i,k+1})$ со значениями $C_{ik} = 0$ и $C_{i,k+1} > 0$ (1a) завышает оценку параметра f_k).

3.2.5. ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ И ТОЧНОСТЬ МЕТОДА ЦЕПНОЙ ЛЕСТНИЦЫ

В методе цепной лестницы оценка последнего множителя развития f_{I-1} основывается только на одном наблюдении S_{II} (с подобной проблемой мы уже сталкивались в разделе 3.2.2). Тем самым наблюдаемое приращение убытка $\hat{f}_{I-1} = (C_{I,I-1} + S_{II}) / C_{I,I-1}$ первого года события переносится на все последующие годы событий $i = 2, \dots, I$, даже если оно нетипично. Но в отличие от метода из раздела 3.2.2, в методе цепной лестницы такая же проблема возникает еще и в другом углу треугольника развития. В формуле оценки резерва $\hat{R}_I = C_{II} (f_1 \dots f_{I-1} - 1)$ самого последнего года события множитель C_{II} тоже основан на одном-единственном наблюдении. Между тем при большом потенциальном сроке развития уровень C_{II} заявленных или оплаченных убытков на конец года события бывает далеко не показателем (особенно если речь идет о перестраховании эксцедента убытка). Это становится очевидно при рассмот-

рении частного случая $C_{II} = 0$. Руководствуясь только одним наблюдением, мы оценили бы весь резерв R_I I -го года события значением $\hat{R}_I = 0$, что конечно же было бы неправильно.

Один из возможных способов корректировки недопустимого значения C_{II} в формуле оценки резерва — замена C_{II} средним по всем годам событий

$$v_I \sum_{i=1}^I C_{iI} / \sum_{i=1}^I v_i,$$

где v_i — объем портфеля в году события i . Если используемые при этом значения C_{II} других лет событий тоже непоказательны, то их можно оценить обратными проекциями

$$\hat{C}_{iI} = \frac{C_{i,I+1-i}}{\hat{f}_1 \cdots \hat{f}_{I-i}}$$

соответствующих текущих уровней убытка. Тогда в качестве оценки среднего относительного первоначального уровня убытка получим

$$\hat{q}_1 = \sum_{i=1}^I C_{i,I+1-i} / \sum_{i=1}^I (\hat{f}_1 \cdots \hat{f}_{I-i} \cdot v_i),$$

и значение C_{II} в формуле оценки резерва \hat{R}_I заменится на $v_I \hat{q}_1$. Аналогичным образом можно «повысить устойчивость» других текущих состояний $C_{I-1,2}$, $C_{I-2,3}$ и т. д. Изложенный алгоритм называется *методом кейп-кода* (Cape-Cod). Другой простой, но прагматичный способ повышения устойчивости оценки — резервировать совокупную поступившую нетто-премию I -го года события за вычетом C_{II} до тех пор, пока в некотором году данные не станут более надежными.

Ввиду высокой чувствительности метода формула точности оценки резерва \hat{R}_I очень важна. Выводом этой формулы мы сейчас и займемся. Напомним, требуется найти *среднюю квадратичную ошибку* (mean squared error)

$$mse(\hat{R}_I) = E((R_I - \hat{R}_I)^2 | D).$$

Как и в предыдущем разделе, математическое ожидание строится при условии наблюдаемых до текущего момента состояний

$$D = \{C_{ik} | i + k \leq I + 1\},$$

поскольку здесь, в отличие от раздела 3.2.2, не предполагается независимость лет развития (см. ЦЛ1). Тем более, нас интересует ошибка, обусловленная будущей изменчивостью, а безусловное математическое ожидание $E(R_I - \hat{R}_I)^2 = E(E((R_I - \hat{R}_I)^2 | D))$ усреднило бы ошибку по всем возможным наборам данных D .

В силу равенств $R_i = C_{II} - C_{i,I+1-i}$ и $\hat{R}_i = \hat{C}_{II} - C_{i,I+1-i}$, средние квадратичные ошибки $mse(\hat{R}_i)$ и $mse(\hat{C}_{II})$ величин \hat{R}_i и \hat{C}_{II} одинаковы:

$$mse(\hat{R}_i) = E((R_i - \hat{R}_i)^2 | D) = E((C_{II} - \hat{C}_{II})^2 | D) = mse(\hat{C}_{II}).$$

Используя закон смещения, как и в разделе 3.1.8,

$$mse(\hat{C}_{II}) = Var(C_{II} | D) + (E(C_{II} | D) - \hat{C}_{II})^2$$

приходим к разложению средней квадратичной ошибки на две компоненты: случайную и оценочную ошибки.

Для расчета или оценки этих компонент требуется дополнить модель цепной лестницы *предположением в отношении дисперсии* величин C_{ik} . Неявно мы уже приняли его в предыдущем разделе, взяв в качестве оценок множителей развития f_k взвешенные средние приращений $F_{ik} = C_{i,k+1} / C_{ik}$:

$$\hat{f}_k = \sum_{i=1}^{I-k} G_{ik} C_{i,k+1} / C_{ik}$$

с весами

$$G_{ik} = C_{ik} / (C_{1k} + \dots + C_{I-k,k}), \quad 1 \leq i \leq I - k.$$

Согласно теореме из раздела 1.3.2, минимальность дисперсии оценки f_k достигается, когда веса G_{ik} обратно пропорциональны дисперсиям $Var(C_{i,k+1} / C_{ik} | C_{ik})$ соответствующих слагаемых (при фиксированном k). Значит, дисперсия $Var(C_{i,k+1} / C_{ik} | C_{ik})$ должна быть прямо пропорциональна величине $1 / C_{ik}$. (Построение условной дисперсии при заданном C_{ik} необходимо для соблюдения скалярности весов G_{ik} .) Таким образом, модель цепной лестницы следует дополнить предположением

(ЦЛ3) Существуют постоянные коэффициенты пропорциональности $\sigma_1^2, \dots, \sigma_{I-1}^2$ такие, что

$$Var\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}} | C_{i1}, \dots, C_{ik}\right) = \sigma_k^2 / C_{ik}, \quad 1 \leq i \leq I, \quad 1 \leq k \leq I - 1,$$

при $C_{ik} > 0$ (или $Var(C_{i,k+1} | C_{i1}, \dots, C_{ik}) = C_{ik} \sigma_k^2$).

Сравнивая ЦЛ3 с моделью объема из раздела 1.3.2, замечаем, что C_{ik} играет роль меры объема для $C_{i,k+1}$. ЦЛ3 представляет собой модель дисперсии, неявно присутствующую в основе метода цепной лестницы. Для конкретного расчета необходима оценка неизвестного параметра σ_k^2 . Мы построим ее по аналогии с оценкой параметра s^2 из раздела 1.3.2:

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{I - k - 1} \sum_{j=1}^{I-k} C_{jk} \left(\frac{C_{j,k+1}}{C_{jk}} - \hat{f}_k \right)^2, \quad 1 \leq k \leq I - 2.$$

Из условия минимальности $\hat{\sigma}_k^2$ как функции от \hat{f}_k следуют приведенные в разделе 3.2.4 оценки параметров f_k по методу цепной лестницы. Несмещенность $\hat{\sigma}_k^2$ доказывается так же, как несмещенность \hat{f}_k . Как и в разделе 3.2.2, нам не хватает оценки для σ_{I-1} . Если $f_{I-1} = 1$ и предполагается полная урегулированность всех убытков по прошествии $I - 1$ лет развития, то допускается принять $\sigma_{I-1} = 0$. Иначе необходимо экстраполировать последовательность $\sigma_1, \dots, \sigma_{I-3}, \sigma_{I-2}$ к следующему члену. Для этого можно воспользоваться линейной регрес-

сионной моделью по отношению к логарифмированным параметрам σ_k^2 (опыт показывает, что в большинстве случаев $\ln(\hat{\sigma}_k^2)$ почти линейно убывает по k) либо (при $\hat{\sigma}_{I-3} > \hat{\sigma}_{I-2}$) положить

$$\hat{\sigma}_{I-3} / \hat{\sigma}_{I-2} = \hat{\sigma}_{I-2} / \hat{\sigma}_{I-1},$$

откуда

$$\hat{\sigma}_{I-1}^2 = \min(\hat{\sigma}_{I-2}^4 / \hat{\sigma}_{I-3}^2, \hat{\sigma}_{I-3}^2).$$

Теперь мы готовы вывести оценку для $mse(\hat{R}_i)$.

Теорема. При выполнении ЦЛ1 и ЦЛ2 из раздела 3.2.4, а также ЦЛ3 средняя квадратичная ошибка оценки резерва \hat{R}_i по методу цепной лестницы оценивается величиной

$$(s.e.(\hat{R}_i))^2 = \hat{C}_{iI}^2 \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{f}_k^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{ik}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{jk}} \right),$$

где $\hat{C}_{ik} = C_{i,I+1-i} \hat{f}_{I+1-i} \dots \hat{f}_{k-1}$ — оценка для C_{ik} , $k > I+1-i$, и для упрощения записи принято $\hat{C}_{i,I+1-i} = C_{i,I+1-i}$. (Для программного расчета $s.e.(\hat{R}_i)$ более удобна рекурсивная формула, приведенная после доказательства.)

Доказательство. Имеем формулу

$$mse(\hat{R}_i) = mse(\hat{C}_{iI}) = Var(C_{iI} | D) + (E(C_{iI} | D) - \hat{C}_{iI})^2.$$

Введем обозначение

$$D_{ik} = \{C_{ij} | 1 \leq j \leq k\}.$$

Тогда, в силу предположения ЦЛ2, первое слагаемое равно

$$Var(C_{iI} | D) = Var(C_{iI} | D_{i,I+1-i}).$$

Последовательно применяя рекурсивную формулу

$$\begin{aligned} Var(C_{i,k+1} | D_{i,I+1-i}) &= E(Var(C_{i,k+1} | D_{ik}) | D_{i,I+1-i}) + Var(E(C_{i,k+1} | D_{ik}) | D_{i,I+1-i}) = \\ &= E(C_{ik} | D_{i,I+1-i}) \sigma_k^2 + Var(C_{ik} | D_{i,I+1-i}) f_k^2, \end{aligned}$$

справедливую при $k \geq I+1-i$, вместе с равенством

$$E(C_{i,k+1} | D_{i,I+1-i}) = E(C_{ik} | D_{i,I+1-i}) f_k$$

и учитывая, что

$$E(C_{i,I+1-i} | D_{i,I+1-i}) = C_{i,I+1-i}$$

$$Var(C_{i,I+1-i} | D_{i,I+1-i}) = 0,$$

получим

$$\begin{aligned} Var(C_{iI} | D_{i,I+1-i}) &= \sum_{k=I+1-i}^{I-1} E(C_{ik} | D_{i,I+1-i}) \sigma_k^2 f_{k+1}^2 \dots f_{I-1}^2 = \\ &= C_{i,I+1-i} \sum_{k=I+1-i}^{I-1} f_{I+1-i} \dots f_{k-1} \sigma_k^2 f_{k+1}^2 \dots f_{I-1}^2. \end{aligned}$$

Заменяв неизвестные параметры f_k , σ_k^2 несмещенными оценками \hat{f}_k , $\hat{\sigma}_k^2$, найдем оценку дисперсии $Var(C_{iI} | D)$:

$$\begin{aligned} C_{i,I+1-i} \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \hat{f}_{I+1-i} \dots \hat{f}_{k-1} \hat{\sigma}_k^2 \hat{f}_{k+1}^2 \dots \hat{f}_{I-1}^2 = \\ = \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \hat{C}_{ik} \hat{\sigma}_k^2 \hat{f}_{k+1}^2 \dots \hat{f}_{I-1}^2 = \hat{C}_{iI}^2 \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{f}_k^2 \hat{C}_{ik}}, \end{aligned}$$

где использованы обозначения, указанные в формулировке теоремы.

Во втором слагаемом выражения для $mse(\hat{R}_i)$

$$(E(C_{iI} | D) - \hat{C}_{iI})^2 = C_{i,I+1-i}^2 (f_{I+1-i} \dots f_{I-1} - \hat{f}_{I+1-i} \dots \hat{f}_{I-1})^2$$

нельзя заменить параметры f_k оценками — получился бы нуль, хотя слагаемое почти всегда отлично от нуля. Для оценки второго слагаемого придется отказаться считать наблюдения заданными, а потому неизменными. Однако варьировать мы будем не весь треугольник D , а только требуемую часть, чтобы базис $C_{i,I+1-i}$ оценочной ошибки $(E(C_{iI} | D) - \hat{C}_{iI})^2$ не участвовал в последующем построении математического ожидания. Используя обозначения

$$B_k = \{C_{ij} | i+j \leq I+1, j \leq k\}, \quad 1 \leq k \leq I,$$

а также равенства (см. теоремы из раздела 3.2.4)

$$E(C_{iI} | D) = C_{i,I+1-i} f_{I+1-i} \dots f_{I-1} = C_{i,I+1-i} E(\hat{f}_{I+1-i} \dots \hat{f}_{I-1} | B_{I+1-i}) = E(\hat{C}_{iI} | B_{I+1-i}),$$

находим

$$(E(C_{iI} | D) - \hat{C}_{iI})^2 = (\hat{C}_{iI} - E(\hat{C}_{iI} | B_{I+1-i}))^2.$$

Последнее выражение, так же как ранее $Var(C_{iI} | D_{i,I+1-i})$, можно вычислить рекурсивно. Сначала рассмотрим преобразование

$$\begin{aligned} E((\hat{C}_{i,k+1} - E(\hat{C}_{i,k+1} | B_{I+1-i}))^2 | B_{I+1-i}) &= Var(\hat{C}_{i,k+1} | B_{I+1-i}) = \\ &= E(Var(\hat{C}_{ik} \hat{f}_k | B_k) | B_{I+1-i}) + Var(E(\hat{C}_{ik} \hat{f}_k | B_k) | B_{I+1-i}) = \\ &= E(\hat{C}_{ik}^2 Var(\hat{f}_k | B_k) | B_{I+1-i}) + Var(\hat{C}_{ik} | B_{I+1-i}) f_k^2 = \\ &= E(\hat{C}_{ik}^2 Var(\hat{f}_k | B_k) | B_{I+1-i}) + E((\hat{C}_{ik} - E(\hat{C}_{ik} | B_{I+1-i}))^2 f_k^2 | B_{I+1-i}). \end{aligned}$$

Опустив оператор условного математического ожидания при заданном B_{I+1-i} в первом и последнем выражениях, получим приближенную рекурсивную формулу

$$(\hat{C}_{i,k+1} - E(\hat{C}_{i,k+1} | B_{I+1-i}))^2 \approx \hat{C}_{ik}^2 Var(\hat{f}_k | B_k) + (\hat{C}_{ik} - E(\hat{C}_{ik} | B_{I+1-i}))^2 f_k^2.$$

Используя эту формулу одновременно с выражением $\hat{C}_{i,k+1}^2 = \hat{C}_{ik}^2 f_k^2$ и учитывая равенства

$$\hat{C}_{i,l+1-i} = C_{i,l+1-i},$$

$$(\hat{C}_{i,l+1-i} - E(\hat{C}_{i,l+1-i} | B_{i,l+1-i}))^2 = 0,$$

получим

$$(\hat{C}_{il} - E(C_{il} | D))^2 = (\hat{C}_{il} - E(\hat{C}_{il} | B_{l+1-i}))^2 \approx \sum_{k=l+1-i}^{l-1} \hat{C}_{ik}^2 \text{Var}(\hat{f}_k | B_k) f_{k+1}^2 \dots f_{l-1}^2,$$

где

$$\text{Var}(\hat{f}_k | B_k) = \sigma_k^2 / \sum_{i=1}^{l-k} C_{ik}.$$

Отсюда после замены f_k на \hat{f}_k и σ_k^2 на $\hat{\sigma}_k^2$, в силу равенства

$$\hat{C}_{ik} \hat{f}_{k+1} \dots \hat{f}_{l-1} = \hat{C}_{il} / \hat{f}_k,$$

следует доказываемое утверждение. ■

Квадратный корень из оценки средней квадратичной ошибки $mse(\hat{R}_i)$ называется *стандартной ошибкой* $s.e.(\hat{R}_i)$. С помощью приведенных в доказательстве рекурсивных формул для случайной и оценочной ошибок выводится рекурсивная формула для $s.e.(\hat{R}_i) = s.e.(\hat{C}_{il})$:

$$(s.e.(\hat{C}_{i,k+1}))^2 = (s.e.(\hat{C}_{ik}))^2 \hat{f}_k^2 + \hat{C}_{ik} (\widehat{\text{Var}}(F_{ik} | D_{ik}) + \widehat{\text{Var}}(\hat{f}_k | B_k)),$$

где $F_{ik} = C_{i,k+1} / C_{ik}$, а $\widehat{\text{Var}}(X)$ обозначает оценку для $\text{Var}(X)$. Для получения этой формулы элемент $E(C_{ik} | D_{i,l+1-i}) \sigma_k^2$ в выражении случайной ошибки нужно оценить величиной $\hat{C}_{ik} \hat{\sigma}_k^2 = \hat{C}_{ik} \hat{\sigma}_k^2 / \hat{C}_{ik} = \hat{C}_{ik}^2 \widehat{\text{Var}}(F_{ik} | D_{ik})$. Формула показывает, что при переходе от k -го к $(k+1)$ -му году развития стандартная ошибка нарастает множителем развития, и к ней добавляются случайная ошибка $\widehat{\text{Var}}(F_{ik} | D_{ik})$ и оценочная ошибка $\widehat{\text{Var}}(\hat{f}_k | B_k)$, умноженные на текущий уровень убытка C_{ik} . Рекурсивная формула для $s.e.(\hat{C}_{i,k+1})$ со стартовым значением $s.e.(C_{i,l+1}) = 0$ позволяет просто и рационально вычислить величину $s.e.(\hat{C}_{il}) = s.e.(\hat{R}_i)$.

Теперь у нас есть все необходимые формулы для расчета оценок \hat{R}_i и $s.e.(\hat{R}_i)$ математического ожидания и стандартной ошибки резерва убытков R_i года события i . Применение этих формул к данным из таблицы 3.1.5.1 дает следующие результаты:

$$\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_5: 1,588; 1,488; 1,182; 1,074; 1,047;$$

$$\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_5: 12,95; 9,073; 7,025; 3,779; 2,033;$$

$$\hat{R}_2, \dots, \hat{R}_6: 442; 1396; 2760; 11\,868; 11\,964; \hat{R} = 28\,430;$$

$$s.e.(\hat{R}_i): 255; 599; 992; 2332; 2851; \quad s.e.(\hat{R}) = 4639.$$

Совокупный резерв

$$R = R_2 + \dots + R_l,$$

очевидно, оценивается величиной

$$\hat{R} = \hat{R}_2 + \dots + \hat{R}_l.$$

Даже при независимости лет событий стандартную ошибку величины \hat{R} нельзя рассчитать суммированием квадратов стандартных ошибок резервов \hat{R}_i отдельных лет событий, поскольку сами величины \hat{R}_i не являются независимыми, а связаны посредством положительно скоррелированных оценок \hat{f}_k , $\hat{\sigma}_k$.

Теорема. При таких же предположениях и обозначениях, как в предыдущей теореме, средняя квадратичная ошибка совокупного резерва $\hat{R} = \hat{R}_2 + \dots + \hat{R}_l$ оценивается величиной

$$(s.e.(\hat{R}))^2 = \sum_{i=2}^l \left((s.e.(\hat{R}_i))^2 + \hat{C}_{il} \left(\sum_{j=i+1}^l \hat{C}_{jl} \right) \sum_{k=l+1-i}^{l-1} \frac{2\hat{\sigma}_k^2 / \hat{f}_k^2}{\sum_{n=1}^{l-k} C_{nk}} \right).$$

Доказательство. С учетом полученных ранее формул для $mse(\hat{R}_i)$ имеем

$$\begin{aligned} mse\left(\sum_{i=2}^l \hat{R}_i\right) &= E\left(\left(\sum_{i=2}^l \hat{R}_i - \sum_{i=2}^l R_i\right)^2 \middle| D\right) = \\ &= E\left(\left(\sum_{i=2}^l \hat{C}_{il} - \sum_{i=2}^l C_{il}\right)^2 \middle| D\right) = \text{Var}\left(\sum_{i=2}^l C_{il} \middle| D\right) + \left(E\left(\sum_{i=2}^l C_{il} \middle| D\right) - \sum_{i=2}^l \hat{C}_{il}\right)^2. \end{aligned}$$

Далее нам потребуется обозначение

$$D_i = \{C_{il}, \dots, C_{i,l+1-i}\}.$$

В силу предположения независимости лет событий ЦЛ2, величины C_{il} и C_{jl} при $i \neq j$ условно некоррелированы:

$$\begin{aligned} E(C_{il} C_{jl} | D) &= E(C_{il} C_{jl} | D_i, D_j) = E(E(C_{il} C_{jl} | D_i, D_j, C_{il}) | D_i, D_j) = \\ &= E(C_{il} E(C_{jl} | D_i, D_j, C_{il}) | D_i, D_j) = E(C_{il} E(C_{jl} | D_j) | D_i, D_j) = \\ &= E(C_{il} | D_i, D_j) \cdot E(C_{jl} | D_j) = E(C_{il} | D) \cdot E(C_{jl} | D). \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\text{Var}\left(\sum_{i=2}^l C_{il} \middle| D\right) = \sum_{i=2}^l \text{Var}(C_{il} | D).$$

Слагаемые $\text{Var}(C_{il} | D)$ уже вычислены при доказательстве предыдущей теоремы, поэтому мы сразу займемся вторым слагаемым выражения для $mse(\hat{R})$.

$$\begin{aligned} \left(E \left(\sum_{i=2}^I C_{iI} | D \right) - \sum_{i=2}^I \hat{C}_{iI} \right)^2 &= \left(\sum_{i=2}^I (E(C_{iI} | D) - \hat{C}_{iI}) \right)^2 = \\ &= \sum_{i=2}^I (E(C_{iI} | D) - \hat{C}_{iI})^2 + \sum_{2 \leq i < j \leq I} 2 \cdot (E(C_{iI} | D) - \hat{C}_{iI}) \cdot (E(C_{jI} | D) - \hat{C}_{jI}). \end{aligned}$$

В итоге получим

$$mse \left(\sum_{i=2}^I \hat{R}_i \right) = \sum_{i=2}^I mse(\hat{R}_i) + \sum_{i < j} 2 \cdot (E(C_{iI} | D) - \hat{C}_{iI}) \cdot (E(C_{jI} | D) - \hat{C}_{jI}).$$

Как и в предыдущем доказательстве, для расчета удвоенной суммы используем равенство

$$E(C_{iI} | D) = E(\hat{C}_{iI} | B_{I+1-i})$$

с прежним обозначением B_k . Сначала рассмотрим условное математическое ожидание при заданном B_{I+1-i}

$$\begin{aligned} E((\hat{C}_{iI} - E(\hat{C}_{iI} | B_{I+1-i})) \cdot (\hat{C}_{jI} - E(C_{jI} | D)) | B_{I+1-i}) &= \\ = E((\hat{C}_{iI} - E(\hat{C}_{iI} | B_{I+1-i})) \cdot (\hat{C}_{jI} - E(\hat{C}_{jI} | B_{I+1-i})) | B_{I+1-i}) &= \\ = Cov(\hat{C}_{iI}, \hat{C}_{jI} | B_{I+1-i}), \end{aligned}$$

где учтено равенство

$$E((\hat{C}_{iI} - E(\hat{C}_{iI} | B_{I+1-i})) \cdot (E(\hat{C}_{jI} | B_{I+1-i}) - E(C_{jI} | D)) | B_{I+1-i}) = 0,$$

справедливое в силу скалярности второго множителя при заданном B_{I+1-i} . Последовательно применяя рекурсию

$$\begin{aligned} Cov(\hat{C}_{i,k+1}, \hat{C}_{j,k+1} | B_{I+1-i}) &= \\ = E(Cov(\hat{C}_{i,k+1}, \hat{C}_{j,k+1} | B_k) | B_{I+1-i}) + Cov(E(\hat{C}_{i,k+1} | B_k), E(\hat{C}_{j,k+1} | B_k) | B_{I+1-i}) &= \\ = E(Cov(\hat{C}_{i,k+1}, \hat{C}_{j,k+1} | B_k) | B_{I+1-i}) + Cov(\hat{C}_{ik}, \hat{C}_{jk} | B_{I+1-i}) f_k^2 \end{aligned}$$

при $k \geq I+1-i$ со стартовым значением

$$Cov(\hat{C}_{i,I+1-i}, \hat{C}_{j,I+1-i} | B_{I+1-i}) = 0,$$

находим

$$Cov(\hat{C}_{iI}, \hat{C}_{jI} | B_{I+1-i}) = \sum_{k=I+1-i}^{I-1} E(Cov(\hat{C}_{i,k+1}, \hat{C}_{j,k+1} | B_k) | B_{I+1-i}) f_{k+1}^2 \cdot \dots \cdot f_{I-1}^2.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} E((\hat{C}_{iI} - E(C_{iI} | D)) \cdot (\hat{C}_{jI} - E(C_{jI} | D))) &= \\ = E \left(\sum_{k=I+1-i}^{I-1} Cov(\hat{C}_{i,k+1}, \hat{C}_{j,k+1} | B_k) f_{k+1}^2 \cdot \dots \cdot f_{I-1}^2 | B_{I+1-i} \right). \end{aligned}$$

Опустив дополнительно введенный оператор условного математического ожидания при заданном B_{I+1-i} , получаем приближенное равенство

$$\begin{aligned} (\hat{C}_{iI} - E(C_{iI} | D)) \cdot (\hat{C}_{jI} - E(C_{jI} | D)) &\approx \\ \approx \sum_{k=I+1-i}^{I-1} Cov(\hat{C}_{i,k+1}, \hat{C}_{j,k+1} | B_k) f_{k+1}^2 \cdot \dots \cdot f_{I-1}^2 &= \\ = \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \hat{C}_{ik} \cdot \hat{C}_{jk} \cdot Var(\hat{f}_k | B_k) \cdot f_{k+1}^2 \cdot \dots \cdot f_{I-1}^2 &= \\ = \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \hat{C}_{ik} \cdot \hat{C}_{jk} \cdot \sigma_k^2 \cdot f_{k+1}^2 \cdot \dots \cdot f_{I-1}^2 \Big/ \sum_{n=1}^{I-k} C_{nk}. \end{aligned}$$

Здесь использована формула для $Var(\hat{f}_k | B_k)$, выведенная в предыдущем доказательстве. Заменяя параметры оценками и учитывая равенство

$$\hat{C}_{iI} = \hat{C}_{ik} \hat{f}_k \cdot \dots \cdot \hat{f}_{I-1},$$

приходим к оценке для $mse(\hat{R})$, указанной в формулировке теоремы. ■

3.2.6. ПРОВЕРКА ПРЕДПОЛОЖЕНИЙ МОДЕЛИ ЦЕПНОЙ ЛЕСТНИЦЫ И СОКРАЩЕНИЕ ЧИСЛА ПАРАМЕТРОВ

Как стало известно из двух предыдущих разделов, метод цепной лестницы (ЦЛ) неявно опирается на три предположения:

$$(ЦЛ1) E(C_{i,k+1} | C_{i1}, \dots, C_{ik}) = C_{ik} f_k,$$

$$(ЦЛ2) \text{ независимость лет событий,}$$

$$(ЦЛ3) Var(C_{i,k+1} | C_{i1}, \dots, C_{ik}) = C_{ik} \sigma_k^2.$$

В настоящем разделе мы покажем, как с помощью данных проверить справедливость предположений ЦЛ1 и ЦЛ3 для фиксированного k при выполнении ЦЛ2.

Рассмотрим уравнения ЦЛ1 при произвольном, но фиксированном k и $i = 1, \dots, I$. Поскольку значения C_{ik} , $1 \leq i \leq I$, известны, ЦЛ1 представляет собой не что иное, как обычную линейную регрессионную модель вида

$$Y_i = a + x_i b + \varepsilon_i, \quad 1 \leq i \leq I,$$

где a и b — коэффициенты регрессии, а ε_i — случайная ошибка с математическим ожиданием $E(\varepsilon_i) = 0$ (то есть $E(Y_i) = a + x_i b$). В нашем случае $a = 0$, $b = f_k$, и имеются наблюдения зависимых переменных $Y_i = C_{i,k+1}$ в точках $x_i = C_{ik}$, $i = 1, \dots, I - k$. Наконец, из уравнений ЦЛ3 следует, что дисперсия

$$Var(\varepsilon_i) = Var(Y_i) = Var(C_{i,k+1} | C_{i1}, \dots, C_{ik}) = C_{ik} \sigma_k^2$$

не является постоянной для всех i , а изменяется гетероскедастично от наблюдения к наблюдению. Таким образом, речь идет о взвешенной линейной регрес-

сии, причем линия регрессии проходит через *начало координат*. По методу наименьших квадратов коэффициент f_k регрессии определяется из условия минимальности величины

$$\sum_{i=1}^{I-k} (C_{i,k+1} - C_{ik} f_k)^2 / C_{ik}.$$

Решение задачи минимизации действительно приводит к оценке по методу цепной лестницы

$$\hat{f}_k = \sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k+1} / \sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}.$$

Тем самым мы открыли возможность применения обычных инструментов регрессионного анализа для проверки опорных предположений модели цепной лестницы. Чаще всего бывает достаточно внимательно изучить графики данных и невязок. Сначала строим график точек $(C_{ik}, C_{i,k+1})$ для $i = 1, \dots, I-k$ и выясняем, соответствует ли расположение точек прямой с угловым коэффициентом \hat{f}_k , проходящей через начало координат. Во многих случаях картина получается более выразительной, если вместо $C_{i,k+1}$ наносить на график приращения $S_{i,k+1} = C_{i,k+1} - C_{ik}$ в зависимости от C_{ik} . Линия регрессии в этом случае имеет угловой коэффициент $\hat{f}_k - 1$. Убедившись в линейности графиков, строим зависимость от C_{ik} невязок

$$\frac{C_{i,k+1} - C_{ik} \hat{f}_k}{\sqrt{C_{ik}}} = \frac{S_{i,k+1} - C_{ik} (\hat{f}_k - 1)}{\sqrt{C_{ik}}}, \quad 1 \leq i \leq I-k,$$

взвешенных в соответствии с ЦЛЗ. При справедливости ЦЛЗ невязки не проявляют специального тренда, а рассеиваются случайным образом.

Если линейность в общем случае распознать нетрудно, то случайность невязок при малом количестве точек наблюдения часто бывает неочевидна. Возможно, будет полезно наряду с моделью ЦЛЗ

$$\text{Var}(C_{i,k+1} / C_{ik} | C_{i1}, \dots, C_{ik}) = \sigma_k^2 / C_{ik}$$

исследовать альтернативные модели дисперсии, например,

$$\text{Var}(C_{i,k+1} / C_{ik} | C_{i1}, \dots, C_{ik}) = \alpha_k^2$$

или

$$\text{Var}(C_{i,k+1} / C_{ik} | C_{i1}, \dots, C_{ik}) = \beta_k^2 / C_{ik}^2,$$

то есть графики зависимости от C_{ik} невязок

$$(C_{i,k+1} - C_{ik} f_{k0}) / C_{ik}$$

или

$$C_{i,k+1} - C_{ik} f_{k2},$$

где значения

$$f_{k0} = \frac{1}{I-k} \sum_{i=1}^{I-k} \frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}}$$

и

$$f_{k2} = \sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}^2 \frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}} / \sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}^2 = \sum_{i=1}^{I-k} C_{ik} C_{i,k+1} / \sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}^2$$

минимизируют соответствующую сумму квадратов невязок. Для принятия решения в пользу одной из трех моделей дисперсии сравниваем графики зависимости от C_{ik} трех стандартизированных квадратичных невязок:

$$(C_{i,k+1} - C_{ik} \hat{f}_k)^2 / (C_{ik} \hat{\sigma}_k^2), \quad i+k \leq I+1,$$

$$(C_{i,k+1} - C_{ik} f_{k0})^2 / (C_{ik} \hat{\alpha}_k^2), \quad i+k \leq I+1,$$

$$(C_{i,k+1} - C_{ik} f_{k2})^2 / \hat{\beta}_k^2, \quad i+k \leq I+1.$$

Предпочтение отдаем модели, чей график менее остальных проявляет тренд в области больших значений ординаты. Все формулы, относящиеся к классическому методу цепной лестницы, легко переносятся на обе альтернативные модели дисперсии.

Средства регрессионного анализа позволяют выявить эффекты календарных лет, нарушающие независимость лет событий (см. раздел 3.1.7). Для этого исследуем график зависимости стандартизированных невязок

$$(C_{i,k+1} - C_{ik} \hat{f}_k) / (\hat{\sigma}_k^2 \sqrt{C_{ik}}), \quad 2 \leq i+k \leq I+1,$$

от календарных лет. Если график не похож на белый шум, а демонстрирует скачки или тренд, то независимость лет событий, скорее всего, нарушена. К тому же в этом случае постоянство множителей развития соответствующих лет развития, а значит, и справедливость предположения ЦЛ1 тоже вызывает сомнение.

Теперь покажем, как с помощью метода наименьших квадратов *сократить число параметров*, повысив тем самым надежность оценки резерва. Сначала предлагается *сгладить* параметры σ_k^2 некоторой функцией. Это одновременно позволит поставить на более прочную основу экстраполяцию значения $\hat{\sigma}_{I-1}^2$. Как было сказано в предыдущем разделе, на практике логарифмированное значение $\hat{\sigma}_k^2$ почти всегда в хорошем приближении линейно убывает по k . Заменяя модель дисперсии ЦЛЗ моделью

$$\text{Var}(C_{i,k+1} | C_{i1}, \dots, C_{ik}) = C_{ik} \sigma^2 e^{-ck},$$

мы сокращаем прежнее число $I-1$ параметров σ_k^2 до двух: σ^2 и c . Это не влияет на оценку параметра f_k , поскольку $\sigma^2 e^{-ck}$, как и σ_k^2 , не зависит от i .

Параметры σ^2 и c можно оценить либо в рамках модели взвешенной линейной регрессии $\ln(\hat{\sigma}_k^2)$ по k — из условия минимальности функции

$$\sum_{k=1}^{I-2} (I-k-1) (\ln(\hat{\sigma}_k^2) - \ln(\sigma^2 e^{-ck}))^2,$$

либо минимизируя сумму взвешенных квадратичных процентных отклонений

$$\sum_{k=1}^{I-2} (I-k-1) \left(\frac{\hat{\sigma}_k^2}{\sigma^2 e^{-ck}} - 1 \right)^2.$$

Вторую задачу сводим к нахождению минимума функции одной переменной c , зафиксировав пространство решений

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{k=1}^{I-2} (I-k-1) \hat{\sigma}_k^4 e^{2ck} / \sum_{k=1}^{I-2} (I-k-1) \hat{\sigma}_k^2 e^{ck}.$$

Наименьшее количество точек наблюдения присутствует в четырех последних годах развития $I-3$, $I-2$, $I-1$ и I , где оценки \hat{f}_{I-4} , \hat{f}_{I-3} , \hat{f}_{I-2} , \hat{f}_{I-1} основываются соответственно только на 4, 3, 2 и 1 наблюдениях. Для повышения устойчивости оценки резерва целесообразно сгладить последние четыре множителя развития некоторой функцией. На практике они обычно стремятся к 1 сверху, например: $\hat{f}_{I-4} = 1,10$, $\hat{f}_{I-3} = 1,05$, $\hat{f}_{I-2} = 1,02$, $\hat{f}_{I-1} = 1,01$. Поэтому нам подойдет функция вида

$$f_k = 1 + e^{a-bk}, \quad k \geq I-4.$$

Оценки \tilde{f}_k параметров f_k , $k \geq I-4$, теперь не будут являться взвешенными средними значений $F_{ik} = C_{i,k+1} / C_{ik}$, следовательно, оценочные ошибки $Var(\tilde{f}_k)$ и оценки дисперсий σ_k^2 тоже изменятся. Чтобы восполнить недостающие для расчета $s.e.(\hat{R}_i)$ элементы, преобразуем выражение $f_k = 1 + e^{a-bk}$ в обычную линейную регрессию (напрямую применить метод наименьших квадратов и минимизировать функцию

$$Q(a, b) = \sum_{k=I-4}^{I-1} \sum_{i=1}^{I-k} \frac{(C_{i,k+1} - C_{ik}(1 + e^{a-bk}))^2}{C_{ik} e^{-ck}}$$

нельзя — мы нашли бы только оценки для a и b). Для этого опишем данные $\{\ln(F_{ik} - 1) \mid 1 \leq i \leq I+1-k, k \geq I-4\}$ взвешенной линейной регрессионной моделью $a - bk$ с весами

$$w_{ik} = \left(\ln \left(1 + \frac{\hat{\sigma}_k^2}{C_{ik}(\hat{f}_k - 1)^2} \right) \right)^{-1}.$$

Веса w_{ik} соответствуют предположению нормального распределения для величин $\ln(F_{ik} - 1)$ — в этом случае $Var(\ln(F_{ik} - 1)) = \ln(1 + (Vko(F_{ik} - 1))^2)$. Последнее следует из равенства $Var(X) = (E(X))^2 (\exp(Var(\ln(X))) - 1)$, справедливого для любой логнормальной случайной величины X (см. начало раздела 1.3.5). В рамках построенной регрессионной модели оцениваем параметры \hat{a} и \hat{b} , дисперсию $\sigma^2 = w_{ik} Var(\ln(F_{ik} - 1))$, а также $Var(\hat{a})$, $Var(\hat{b})$ и $Cov(\hat{a}, \hat{b})$.

Тогда искомые элементы, требуемые, в частности, для расчета стандартной ошибки $s.e.(\hat{C}_{II}) = s.e.(\hat{R}_i)$, вычисляются по формулам:

$$\tilde{f}_k := 1 + \exp(\hat{a} - \hat{b}k),$$

$$Var(\tilde{f}_k) = Var(\tilde{f}_k - 1) = (E(\tilde{f}_k - 1))^2 (\exp(Var(\hat{a} - \hat{b}k)) - 1) \approx (\tilde{f}_k - 1)^2 (\exp(Var(\hat{a}) - 2kCov(\hat{a}, \hat{b}) + k^2 Var(\hat{b})) - 1),$$

$$Var(F_{ik}) = Var(F_{ik} - 1) = (E(F_{ik} - 1))^2 (\exp(Var(\ln(F_{ik} - 1))) - 1) \approx (\tilde{f}_k - 1)^2 (\exp(\hat{\sigma}^2 / w_{ik}) - 1).$$

Обратим внимание, что оценки параметров a и b основываются на $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ наблюдениях. Получается, на один параметр приходится 5 наблюдений, как и у предшествующего множителя развития \hat{f}_{I-5} . Это дает нам право при необходимости ввести наряду с f_k дополнительный параметр для лет развития $k \leq I-10$, представленных как минимум десятью наблюдениями. Иными словами, мы *допускаем линии регрессии, не проходящие через начало координат*. На практике при $k = 1$ или $k \leq k_0$, действительно, часто напрашивается положительное смещение аппроксимирующей линии регрессии по оси ординат, хотя линейность расположения точек регрессии не вызывает сомнений. Параметры регрессии в этом случае определяются из условия минимальности выражения

$$\sum_{i=1}^{I-k} (C_{i,k+1} - (C_{ik} f_k + g_k))^2 / C_{ik}.$$

Значимость g_k проверяется обычным способом (t -критерий). Для работы с готовыми программными продуктами взвешенную регрессию необходимо преобразовать в невзвешенную, трактуя (f_k, g_k) как коэффициенты невзвешенной регрессии $C_{i,k+1} / \sqrt{C_{ik}}$ по регрессорам $\sqrt{C_{ik}}$ и $1 / \sqrt{C_{ik}}$ с нулевым смещением по оси ординат. Прямые формулы для расчета оценок параметров имеют вид

$$\hat{f}_k = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} (C_{i,k+1} - \underline{C}_{k+1}) / C_{ik}}{\sum_{i=1}^{I-k} (C_{ik} - \underline{A}_k) / C_{ik}},$$

$$\hat{g}_k = \underline{C}_{k+1} - \underline{A}_k \hat{f}_k,$$

где

$$\underline{C}_{k+1} = \frac{1}{I-k} \sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k+1}, \quad \underline{A}_k = \frac{1}{I-k} \sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}.$$

Если двухпараметрическое представление применяется, например, при $k = 1$ и $k = 2$, то оценка конечного убытка ближайшего года события составит

$$\hat{C}_{II} = ((C_{II} \hat{f}_1 + \hat{g}_1) \hat{f}_2 + \hat{g}_2) \hat{f}_3 \hat{f}_4 \dots \hat{f}_{I-1}.$$

Четыре последних множителя развития при необходимости заменяются соответствующими значениями $1 + \exp(\hat{a} - \hat{b}k)$.

В случае использования двухпараметрической регрессии ($\hat{g}_k \neq 0$) при $k \leq k_0$ изменяются и формулы для стандартных ошибок. Оценки для σ_k^2 , $k \leq k_0$, принимают вид

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{I-k-2} \sum_{i=1}^{I-k} \frac{(C_{i,k+1} - C_{ik} \hat{f}_k - \hat{g}_k)^2}{C_{ik}}.$$

Для случайной ошибки остается справедливым выражение

$$\text{Var}(C_{ii} | D) = \sum_{k=I+1-i}^{I-1} E(C_{ik} | D_{i,I+1-i}) \sigma_k^2 f_{k+1}^2 \cdots f_{I-1}^2.$$

Оно, как и раньше, оценивается величиной

$$\sum_{k=I+1-i}^{I-1} \hat{C}_{ik} \hat{\sigma}_k^2 \hat{f}_{k+1}^2 \cdots \hat{f}_{I-1}^2,$$

но уже не преобразуется прежним образом, ведь теперь $\hat{C}_{i,k+1} = \hat{C}_{ik} \hat{f}_k + \hat{g}_k$ при $k \leq k_0$ или $i \geq I+1-k_0$.

Для оценочной ошибки получим формулу

$$(E(C_{ii} | D) - \hat{C}_{ii})^2 \approx \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \text{Var}(\hat{C}_{i,k+1} | B_k) f_{k+1}^2 \cdots f_{I-1}^2.$$

При $k > k_0$, как и в разделе 3.2.5,

$$\text{Var}(\hat{C}_{i,k+1} | B_k) = \hat{C}_{ik}^2 \text{Var}(\hat{f}_k | B_k),$$

а при $k \leq k_0$

$$\text{Var}(\hat{C}_{i,k+1} | B_k) = \text{Var}(\hat{C}_{ik} \hat{f}_k + \hat{g}_k | B_k) = \hat{C}_{ik}^2 \text{Var}(\hat{f}_k | B_k) + 2 \hat{C}_{ik} \text{Cov}(\hat{f}_k, \hat{g}_k | B_k) + \text{Var}(\hat{g}_k | B_k),$$

где

$$\text{Var}(\hat{f}_k | B_k) = \sigma_k^2 / N,$$

$$\text{Var}(\hat{g}_k | B_k) = \sigma_k^2 \underline{A}_k \underline{A}_k / N,$$

$$\text{Cov}(\hat{f}_k, \hat{g}_k | B_k) = -\sigma_k^2 \underline{A}_k / N$$

(проще всего эти формулы выводятся с помощью матрицы плана — см. раздел 2.4.6). В последних равенствах использованы обозначения

$$N = (I - k)(\underline{A}_k - \underline{A}_{k+1}),$$

$$\underline{A}_k = \left(\frac{1}{I-k} \sum_{j=1}^{I-k} \frac{1}{C_{jk}} \right)^{-1}, \text{ соответственно, } \underline{A}_k = 0, \text{ если } k > k_0.$$

(\underline{A}_k уже было введено ранее.) В итоге имеем

$$(s.e.(\hat{R}_i))^2 = \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \left(\hat{C}_{ik} + \frac{\hat{C}_{ik}^2 - 2\hat{C}_{ik}\underline{A}_k + \underline{A}_k \underline{A}_k}{(I-k)(\underline{A}_k - \underline{A}_{k+1})} \right) \hat{\sigma}_k^2 \hat{f}_{k+1}^2 \cdots \hat{f}_{I-1}^2.$$

Эта формула содержит в себе случай $g_k = 0$. Аналогично находим

$$(s.e.(\hat{R}))^2 = \sum_{i=2}^I (s.e.(\hat{R}_i))^2 + \sum_{i < j} \sum_{k=I+1-i}^{I-1} 2 \cdot \hat{V}_{ijk} \hat{f}_{k+1}^2 \cdots \hat{f}_{I-1}^2,$$

где \hat{V}_{ijk} — оценка для

$$\text{Cov}(\hat{C}_{i,k+1}, \hat{C}_{j,k+1} | B_k) = \hat{C}_{ik} \hat{C}_{jk} \text{Var}(\hat{f}_k | B_k) + (\hat{C}_{ik} + \hat{C}_{jk}) \text{Cov}(\hat{f}_k, \hat{g}_k | B_k) + \text{Var}(\hat{g}_k | B_k).$$

Одинаковый для всех лет событий множитель g_k не моделирует различий уровней лет событий. Если эти различия существенны, то лучше применять двухпараметрическую модель вида $E(\hat{C}_{i,k+1} | D_{ik}) = C_{ik} f_k + v_i g_k$, где v_i — известный объем i -го года события. Такая модель рассматривается в разделе 3.4.4.

3.2.7. ПРОВЕРКА НЕКОРРЕЛИРОВАННОСТИ ЛЕТ РАЗВИТИЯ

Как мы узнали из раздела 3.2.6, предположения модели цепной лестницы ЦЛ1 и ЦЛ3 для каждого фиксированного года развития k проверяются с помощью инструментов регрессионного анализа. Поскольку из ЦЛ1 следует *некоррелированность* соседних множителей $C_{ik} / C_{i,k-1}$ и $C_{i,k+1} / C_{ik}$, необходимо дополнительно убедиться в отсутствии зависимости между k -м и $(k+1)$ -м годами развития, о чем уже было сказано в конце раздела 3.2.4.

В методе на основе независимости нормированных приращений убытка от года события предполагалась независимость величин S_{i1}, \dots, S_{iI} , соответствующих i -му году события. Но формулы раздела 3.2.2 удалось бы вывести и при более слабом требовании *некоррелированности* величин S_{i1}, \dots, S_{iI} . Таким образом, оба основных метода резервирования опираются на предположение некоррелированности убытков по годам развития. Это предположение должно быть проверено до начала расчетов. Ниже представлен один из возможных способов проверки некоррелированности лет развития. Мы применим его к множителям развития $C_{i,k+1} / C_{ik}$; некоррелированность приращений S_{ik} проверяется совершенно аналогично.

Стандартный критерий проверки некоррелированности рассчитан на одинаковое нормальное распределение случайных величин. В нашем случае эта предпосылка не выполняется. Во-первых, исследуемые величины

$$F_{ik} = C_{i,k+1} / C_{ik}$$

(или S_{ik}) всегда правоасимметричны, а значит, не являются нормальными. Во-вторых, F_{ik} , $1 \leq i \leq I$, имеют при одинаковых математических ожиданиях f_k разные дисперсии (в силу ЦЛ3). Для таких условий не существует стандартно-

го критерия проверки некоррелированности. Даже не зависящий от распределения критерий Спирмана, основанный на ранговом коэффициенте корреляции, подразумевает одинаковые дисперсии наблюдений. Однако при умеренных различиях дисперсий мы вправе считать его подходящим. Ведь после перехода к рангам множителей развития F_{ik} , $1 \leq i \leq I - k$, небольшие различия дисперсий практически перестают играть роль. Собственно говоря, критерий Спирмана предназначен не для проверки некоррелированности, а для проверки независимости. Это обстоятельство мы учтем при определении критической области.

Для применения критерия Спирмана упорядочим наблюдаемые множители развития $F_{1k}, \dots, F_{I-k,k}$ фиксированного года развития k по возрастанию значений и присвоим элементам полученной последовательности ранги в соответствии с порядковыми номерами. Если r_{ik} — ранг величины F_{ik} , $1 \leq i \leq I - k$, то $1 \leq r_{ik} \leq I - k$. Затем все то же самое проделываем с множителями $F_{i,k-1}$, $1 \leq i \leq I - k$ предшествующего года развития, но при этом диагональный элемент $F_{I+1-k,k-1}$ опускаем, поскольку его последователь еще не известен. Соответствующие ранги от 1 до $I - k$ обозначим через s_{ik} , $1 \leq i \leq I - k$. Тогда ранговый коэффициент корреляции Спирмана вычисляется по формуле

$$T_k = 1 - 6 \sum_{i=1}^{I-k} (r_{ik} - s_{ik})^2 / ((I-k)^3 - I + k).$$

Значение статистики T_k всегда заключено между +1 и -1. При нулевой гипотезе независимости величин $F_{i,k-1}$ и F_{ik} , $1 \leq i \leq I - k$, справедливы равенства

$$E(T_k) = 0,$$

$$\text{Var}(T_k) = 1 / (I - k - 1).$$

Близкое к нулю значение T_k свидетельствует в пользу нулевой гипотезы. Если же T_k близко к +1 или -1, то, скорее всего, величины (положительно или отрицательно) скоррелированы. Понятие «близко» определяется допустимой областью критерия.

Отдельное применение критерия к каждой паре соседних столбцов матрицы развития вело бы к накоплению вероятности ошибки первого рода. Поэтому мы построим из отдельных статистик T_k глобальную статистику критерия. Так как различие дисперсий величин T_k не позволяет просто сложить статистики, образуем взвешенное среднее. Для минимизации дисперсии глобальной статистики присвоим слагаемым веса, обратно пропорциональные их дисперсиям $\text{Var}(T_k)$ (см. теорему в разделе 1.3.2). Получаемая статистика имеет вид

$$T = \sum_{k=2}^{I-2} (I - k - 1) T_k / \sum_{k=2}^{I-2} (I - k - 1).$$

В этой формуле учтено, что элементов T_1 и T_I не существует, а статистика T_{I-1} содержит всего одно ранговое место, и потому не является случайной. Для моментов величины T справедливы выражения

$$E(T) = 0,$$

$$\text{Var}(T) = \sum_{k=2}^{I-2} (I - k - 1) / \left(\sum_{k=2}^{I-2} (I - k - 1) \right)^2 = \frac{2}{(I-2)(I-3)}.$$

В формуле дисперсии использована некоррелированность T_k , имеющая место при нулевой гипотезе независимости F_{ik} .

Чтобы служить в качестве статистики критерия, T должна иметь известное распределение. Каждая статистика T_k распределена симметрично относительно нуля и при $I - k \geq 10$ близка к нормальной случайной величине. Отсюда T как сумма приближенно нормально распределенных T_k тоже распределена нормально с центром в нуле. Если для конкретного треугольника развития значение T достаточно близко к нулю, то гипотеза некоррелированности лет развития принимается. Существенное отклонение T от нуля в большую или меньшую сторону говорит о перевесе положительных или, соответственно, отрицательных корреляций.

Обычно нулевая гипотеза отвергается при попадании статистики критерия за границы своего 95%-ного доверительного интервала. Но, учитывая лишь приближенную справедливость критерия Спирмана для нашей задачи, мы должны соблюдать осторожность и расширить критическую область. Рекомендуется принимать нулевую гипотезу некоррелированности лет развития только при попадании статистики T внутрь своего 50%-ного доверительного интервала. Поскольку 50%-ный доверительный интервал стандартного нормального распределения задается границами $(-0,67; 0,67)$, нулевая гипотеза принимается при выполнении неравенства

$$-\frac{0,67}{\sqrt{(I-2)(I-3)/2}} \leq T \leq +\frac{0,67}{\sqrt{(I-2)(I-3)/2}}.$$

Если значение T находится за пределами этого интервала, то следует не торопиться с применением метода цепной лестницы и поподробнее проанализировать данные. Возможно, высокое абсолютное значение T обусловлено высокими абсолютными значениями отдельных T_k , что говорит о скоррелированности соответствующих величин $C_{ik} / C_{i,k-1}$ и $C_{i,k+1} / C_{ik}$. Для этих лет развития модель цепной лестницы лучше заменить моделью

$$E(C_{i,k+1} | C_{i1}, \dots, C_{ik}) = C_{ik} f_k + C_{i,k-1} h_k.$$

Параметры f_k и h_k определяются, как и в разделе 3.2.6, линейной регрессией $C_{i,k+1}$ по C_{ik} и $C_{i,k-1}$, проходящей через начало координат.

Для метода из раздела 3.2.2 в аналогичной ситуации используется регрессия

$$E(S_{ik} | S_{i1}, \dots, S_{i,k-1}) = v_i m_k + \beta_k S_{i,k-1}, \quad 1 \leq i \leq I - k.$$

3.2.8. ВЫВОД И УКАЗАНИЯ К ПРИМЕНЕНИЮ

Рассмотренные в этой главе не зависящие от распределения методы, благодаря своей стохастической основе, исключительно полезны в качестве вспомогательных средств при определении резерва. Предложенные в разделе 3.2.6

меры повышения устойчивости метода цепной лестницы применимы и к методу на основе независимости нормированных приращений убытка от года события. То же справедливо и в отношении описанного в разделе 3.2.6 графического анализа. Все это позволяет применять методы не только для непосредственного расчета резерва, но и для комплексного анализа данных, необходимого для успешного резервирования.

Во избежание двойной работы мы, конечно, хотели бы заранее узнать, *какой из двух методов лучше подходит к имеющимся данным*. К ответу на этот вопрос приводит графический анализ. Напомним, основное различие двух методов заключается в том, что первый предполагает постоянство аддитивных приращений $E(S_{ik} / v_i) = m_k$, а второй — постоянство мультипликативных приращений $E(C_{i,k+1} / C_{ik}) = f_k$. Таким образом, достаточно построить графики зависимости кумулятивных относительных убытков C_{ik} / v_i треугольника развития от года развития k и соединить точки, соответствующие одному и тому же году события i , отрезками прямой. Если значения C_{ik} / v_i отмеряются по обычной равномерной шкале, то параллельность расположенных друг над другом отрезков означает постоянство лежащих в их основе относительных приращений S_{ik} / v_i . Если же графики строятся на полулогарифмической бумаге, то параллельность отрезков равносильна постоянству множителя приращения

$$(C_{i,k+1} / v_i) / (C_{ik} / v_i) = C_{i,k+1} / C_{ik}.$$

Поскольку мультипликативное приращение не зависит от объема, на полулогарифмическую бумагу можно непосредственно наносить уровни убытков C_{ik} . Построив графики в обычном и логарифмическом масштабах, мы выбираем метод с более отчетливой параллельностью отрезков. Графики на рисунках 3.2.8.1 и 3.2.8.2 соответствуют данным из таблицы 3.1.5.2.

Требованию параллельности отрезков отвечают, скорее, графики в логарифмическом масштабе. Следовательно, к нашим данным метод цепной лестницы подходит лучше, чем аддитивный метод из раздела 3.2.2.

Сравнение форм оценки резерва позволяет понять *разликие философий* рассмотренных методов. Оценка из раздела 3.2.2

$$\hat{R}_{i,0} = v_i (\hat{m}_{l+2-i} + \dots + \hat{m}_l)$$

вообще не зависит от текущего уровня убытка $C_{i,l+1-i}$. Оценка по методу цепной лестницы

$$\hat{R}_{i,1} = C_{i,l+1-i} (\hat{f}_{l+1-i} \dots \hat{f}_{l-1} - 1),$$

наоборот, основывается только на отклонении текущего уровня убытка $C_{i,l+1-i}$ от своего априорного математического ожидания $E(C_{i,l+1-i})$. Если текущий убыток уже превышает свое априорное математическое ожидание на 20%, то метод цепной лестницы рассчитывает, что будущее развитие $S_{i,l+2-i} + \dots + S_{il}$ тоже превысит свое априорное математическое ожидание на 20%.

Доверительный метод из раздела 3.2.3 (при $m = 1$)

$$\hat{R}_i = v_i (\hat{m}_{l+2-i} + \dots + \hat{m}_l) \cdot (c_i Z_{i+} + (1 - c_i))$$

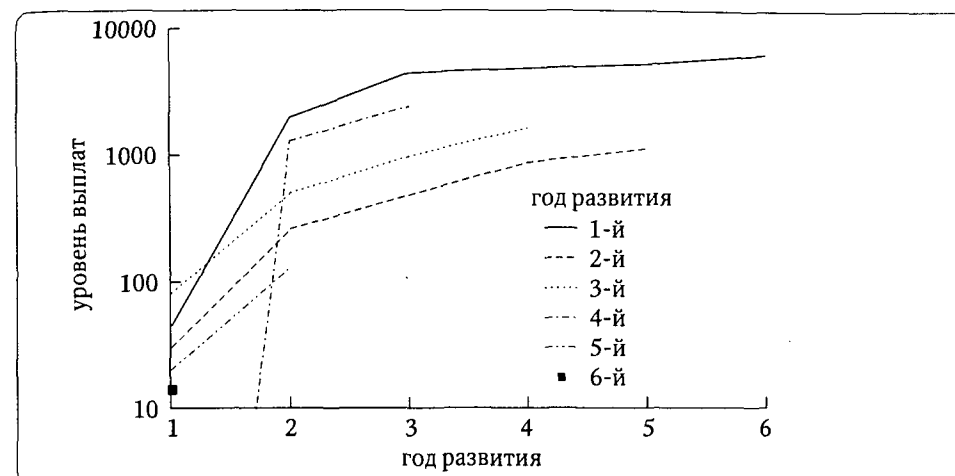


Рисунок 3.2.8.1. Развитие уровня выплат

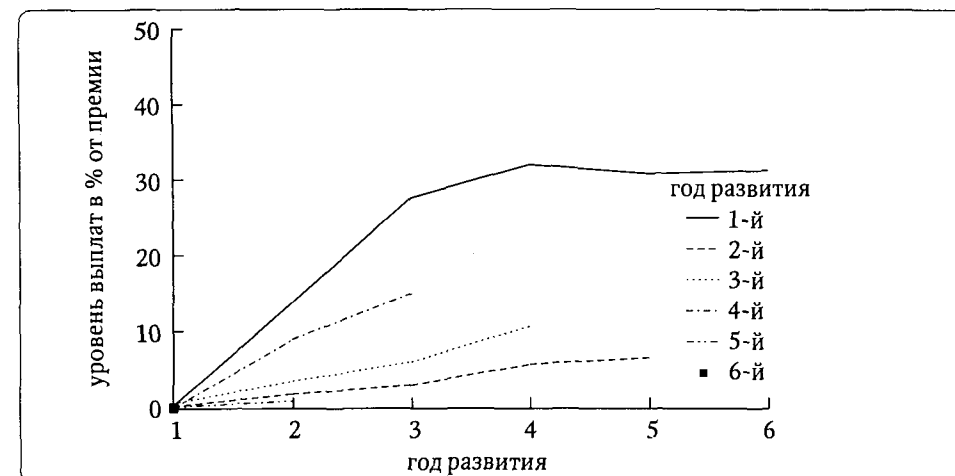


Рисунок 3.2.8.2. Развитие относительного уровня выплат

представляет собой компромисс между этими двумя крайностями. В самом деле, с помощью равенства

$$Z_{i+} = \frac{C_{i,l+1-i}}{v_i (\hat{m}_1 + \dots + \hat{m}_{l+1-i})}$$

формулу резерва \hat{R}_i можно записать в виде (в случае $\beta = 1$)

$$\hat{R}_i = c_i C_{i,l+1-i} \frac{\hat{m}_{l+2-i} + \dots + \hat{m}_l}{\hat{m}_1 + \dots + \hat{m}_{l+1-i}} + (1 - c_i) \hat{R}_{i,0}.$$

Элемент

$$C_{i,I+1-i} \frac{\hat{m}_{I+2-i} + \dots + \hat{m}_I}{\hat{m}_1 + \dots + \hat{m}_{I+1-i}}$$

аналогично оценке $\hat{R}_{i,1}$ полностью определяется текущим состоянием $C_{i,I+1-i}$. Таким образом, оценка \hat{R}_i может пониматься как доверительное среднее между $\hat{R}_{i,0}$ и $\hat{R}_{i,1}$.

Поскольку текущие уровни $C_{i,I+1-i}$ почти всегда отклоняются от своих оцененных математических ожиданий $v_i(\hat{m}_1 + \dots + \hat{m}_{I+1-i})$, выбор метода оценки резерва можно поставить в зависимость от того, считаем мы *эти отклонения показательными* для поведения будущих S_{ik} или нет. Если, к примеру, отклонение значения $C_{i,I+1-i}$ от своего математического ожидания $v_i(\hat{m}_1 + \dots + \hat{m}_{I+1-i})$ в большую сторону связано только с наступлением большого убытка, содержащегося в размере максимально возможной выплаты (страховой суммы) в $C_{i,I+1-i}$, то метод цепной лестницы не подходит — он установил бы надбавку к среднему резерву, хотя прежнее развитие не дает для этого повода.

Если же $C_{i,I+1-i}$ превышает ожидаемое значение по причине значительно большего, чем обычно, числа заявленных убытков, причем доля невозмещенных убытков существенно не изменяется, то R_i , скорее всего, тоже превзойдет ожидание, и правильнее будет воспользоваться методом цепной лестницы.

Более обобщенно можно сказать, что метод цепной лестницы лучше подходит для оценки IBNER-резервов, существенно зависящих от дальнейшего развития уже известных убытков, тогда как для чистого IBNR-резерва, предназначенного для настоящих поздних убытков, чаще всего предпочтителен метод на основе независимости нормированных приращений убытка от года события. Подробнее эту тему мы обсудим в разделе 3.4.4.

В завершение добавим несколько замечаний в отношении *метода наименьших квадратов*, активно используемого в разделе 3.2.6. Некоторые читатели, должно быть, испытывают неудовлетворенность оттого, что метод подразумевает более или менее симметричное расположение данных относительно среднего значения, в то время как на практике множители развития $F_{ik} = C_{i,k+1} / C_{ik}$, как правило, больше отклоняются вверх, чем вниз. Можно попытаться устранить асимметрию посредством логарифмирования данных, предположив для F_{ik} логнормальное распределение с параметрами μ_k и α_k^2 . Если дополнительно считать F_{ik} независимыми при фиксированном i (напомним, метод цепной лестницы неявно предполагает только некоррелированность), то распределение величины

$$C_{ii} = C_{i,I+1-i} \cdot F_{i,I+1-i} \cdot \dots \cdot F_{i,I-1}$$

тоже будет логнормальным, поскольку произведение независимых логнормальных случайных величин снова имеет логнормальное распределение (с параметрами $\sum_k \mu_k$ и $\sum_k \alpha_k^2$), сохраняющееся и при умножении на скалярный множитель $C_{i,I+1-i}$. В разделе 3.3.4 мы рассмотрим похожую модель для величин S_{ik} и F_{ik} .

Дальнейшая критика регрессионного подхода из раздела 3.2.6 может быть обращена к тому, что все C_{ik} подвержены существенным воздействиям случайности, и прохождение линии регрессии именно через точки

$$(C_{ik}, E(C_{i,k+1} | C_{ik})), \quad 1 \leq i \leq I,$$

соответствующие случайным реализациям C_{ik} , маловероятно. Правильнее казалось бы пустить линию регрессии через точки

$$(E(C_{ik} | C_{i,k-1}), E(C_{i,k+1} | C_{ik})), \quad 1 \leq i \leq I.$$

Но принять это предположение значило бы отказаться от принципа цепной лестницы — руководствоваться самими реализациями C_{ik} , а не их математическими ожиданиями. По сути, мы задали бы другую модель (регрессия с ошибками в переменных), схожую с обсуждаемыми в следующей главе.

Примеры применения рассмотренных в этой главе методов практически не встречаются в научных публикациях. Два примера содержатся в работе Мака (Mack Th. Distribution-free Calculation of the Standard Error of Chain Ladder Reserve Estimates // ASTIN Bulletin, 1993, 23, p. 213–225). Применение большинства из представленных в разделах 3.2.4–3.2.7 инструментов анализа демонстрируется в статье «Measuring the Variability of Chain Ladder Reserve Estimates» того же автора, напечатанной во втором томе руководства по резервированию (Claims Reserving Manual) Лондонского института актуариев. Тем же автором показано применение доверительного метода из раздела 3.2.3, правда, без расчета стандартной ошибки (Mack Th. Improved Estimation of IBNR Claims by Credibility Theory // Insurance: Mathematics & Economics, 1990, 9, p. 51–57).

3.3. Методы с перекрестной параметризацией

3.3.1. ВВЕДЕНИЕ И ОБЗОР

Метод цепной лестницы, подробно изученный в предыдущей главе, опирается на предположение

$$(ЦЛ1) E(C_{i,k+1} | C_{i1}, \dots, C_{ik}) = C_{ik} f_k, \quad 1 \leq i \leq I, \quad 1 \leq k \leq I-1,$$

для кумулятивных убытков $C_{ik} > 0$. Применив к этому равенству оператор математического ожидания и воспользовавшись его свойством итеративности,

мы увидим, что модель цепной лестницы — частный случай класса моделей, удовлетворяющих условию

$$(A) E(C_{i,k+1}) = E(C_{ik})f_k, \quad 1 \leq i \leq I, \quad 1 \leq k \leq I-1,$$

где параметры f_1, \dots, f_{I-1} неизвестны и положительны. В настоящей главе мы исследуем этот класс моделей подробнее. Сначала покажем, что речь идет о так называемых моделях *перекрестной параметризации*.

Теорема. Каждая модель, удовлетворяющая условию (A), также удовлетворяет условию

$$(B) E(S_{ik}) = x_i y_k, \quad 1 \leq i, k \leq I,$$

где $S_{ik} = C_{ik} - C_{i,k-1}$, $1 \leq i, k \leq I$, ($C_{i0} = 0$) — приращение суммарного убытка i -го года события в k -м году развития, а параметры $x_i > 0$ и $y_k > 0$ неизвестны, причем $y_1 + \dots + y_I = 1$. И наоборот, каждая модель вида (B) одновременно является моделью вида (A).

Доказательство. (A) \Rightarrow (B): последовательное применение (A) приводит к равенству

$$E(C_{ii}) = E(C_{ik})f_k \cdot \dots \cdot f_{I-1}.$$

Тогда

$$E(S_{ik}) = E(C_{ik}) - E(C_{i,k-1}) = E(C_{ii})((f_k \cdot \dots \cdot f_{I-1})^{-1} - (f_{k-1} \cdot \dots \cdot f_{I-1})^{-1}).$$

Полагая

$$x_i = E(C_{ii}), \quad 1 \leq i \leq I,$$

$$y_1 = (f_1 \cdot \dots \cdot f_{I-1})^{-1},$$

$$y_k = (f_k \cdot \dots \cdot f_{I-1})^{-1} - (f_{k-1} \cdot \dots \cdot f_{I-1})^{-1}, \quad 2 \leq k \leq I-1,$$

$$y_I = 1 - f_{I-1}^{-1},$$

получим (B), поскольку $y_1 + \dots + y_I = 1$.

(B) \Rightarrow (A): в силу равенства

$$E(C_{ik}) = E(S_{i1}) + \dots + E(S_{ik}) = x_i(y_1 + \dots + y_k),$$

величина

$$\frac{E(C_{i,k+1})}{E(C_{ik})} = \frac{y_1 + \dots + y_k + y_{k+1}}{y_1 + \dots + y_k} =: f_k, \quad 1 \leq k \leq I-1,$$

не зависит от i и положительна.

Условие $y_1 + \dots + y_I = 1$ в доказательстве не использовалось, потому что любую модель $E(S_{ik}) = x_i y_k$ всегда можно привести к виду (B) с помощью преобразований $x_i = \underline{x}_i c$, $y_k = \underline{y}_k / c$, где $c = \underline{y}_1 + \dots + \underline{y}_I > 0$. ■

Так как модель класса (B) содержит $2I - 1$ свободных параметра x_i, y_k , каждая модель класса (A) тоже должна иметь $2I - 1$ параметра. Как видно из доказательства, к числу параметров модели (A) наряду с f_1, \dots, f_{I-1} принадлежат средние конечные убытки $E(C_{ii})$, $1 \leq i \leq I$. Правда, безусловные математические ожидания конечных убытков для нас гораздо менее важны, чем условные математические ожидания $E(C_{ii} | D)$ при заданных наблюдениях $D = \{C_{ik} \mid i + k \leq I + 1\}$ (см. раздел 3.2.4). Это становится очевидно при рассмотрении первого года события: при наличии самого значения C_{11} нам совсем не обязательно знать $E(C_{11})$. Именно поэтому параметры $E(C_{ii})$ в методе цепной лестницы вообще не используются. Чтобы понять *различие* между моделью цепной лестницы (ЦЛ1) и классом моделей (A) или (B), предположим параметры f_1, \dots, f_{I-1} модели (ЦЛ1) и параметры x_i, y_k модели (B) известными. Тогда оценка резерва в модели (B) (при дополнительном условии независимости лет развития)

$$\hat{R}_{i,0} = x_i(y_{I+2-i} + \dots + y_I)$$

не будет зависеть от наблюдений D и не изменится, если имитировать различные наборы данных D из базового распределения. Оценка резерва по методу цепной лестницы

$$\hat{R}_{i,1} = C_{i,I+1-i}(f_{I+1-i} \cdot \dots \cdot f_{I-1} - 1),$$

напротив, изменяется с каждой новой имитацией вместе со значением $C_{i,I+1-i}$. В отличие от модели цепной лестницы, классы моделей (A) и (B) обладают упомянутым в разделе 3.2.8 свойством аддитивной модели, описанной в разделе 3.2.2. Последняя фактически тоже является частным случаем моделей перекрестной параметризации (A) и (B) при известных $x_i = v_i$ (без дополнительного условия $y_1 + \dots + y_I = 1$).

Вообще, модели вида

$$(B) E(S_{ik}) = x_i y_k$$

формально полностью аналогичны моделям $E(S_{ik}) = v_{ik} x_i y_k$, лежащим в основе методов выравнивания убытков *перекрестно классифицированных тарифов* (см. главу 2.4). В нашей теперешней ситуации количество строк и столбцов одинаково $I = K$, а объем v_{ik} каждой ячейки (i, k) равен 1 (имеющийся в распоряжении объем v_i зависит только от номера строки i). Таким образом, мы имеем дело всего лишь с частным случаем моделей перекрестной параметризации. Единственная особенность нашей модели — отсутствие наблюдений в ячейках с номерами $i + k > I + 1$. Если это не мешает оценить параметры x_i, y_k , то произведение $\hat{x}_i \hat{y}_k$ автоматически дает оценку неизвестных показателей $E(S_{ik})$, $i + k > I + 1$, будущего развития убытков.

В следующих разделах мы убедимся, что, несмотря на отсутствие наблюдений S_{ik} , $i + k > I + 1$, параметры x_i, y_k можно оценить с помощью параметрических методов из главы 2.4. Но прежде чем применять какой-либо из этих методов, следует проверить адекватность предполагаемой ими модели дисперсии приращениям S_{ik} оплаченных или наступивших убытков i -го года события в k -м году развития.

Важно отметить, что в главе 2.4 использовалась (в принципе, не вызывавшая тогда сомнений) независимость величин S_{ik} . Соответственно применение методов из главы 2.4 для расчета резерва возможно только при условии *независимости всех S_{ik}* — напомним, это предположение принималось в разделе 3.2.2. Далее, поскольку все рассматриваемые распределения определены только на положительной части действительной оси, S_{ik} должны быть строго положительны. В этом отношении модель перекрестной параметризации более ограничительна, чем модель цепной лестницы, требующая только независимости лет событий и не исключающая отрицательных приращений S_{ik} .

Основное внимание в этой главе уделяется модели с распределением Пуассона (см. раздел 3.3.2). Она тесно связана с моделью цепной лестницы и моделью с логнормальным распределением (см. раздел 3.3.4). Последняя лежит в основе широко применяемого программного обеспечения резервирования (ICRFS) Бена Ценвирта (Ben Zehnwirth). Логнормальную модель мы снова исследуем с помощью средств регрессионного анализа, обсудив, в частности, возможность сокращения количества параметров. Другой способ редукции числа параметров рассматривается в разделе 3.3.3 на примере модели с гамма-распределением. В разделе 3.3.5 показывается, как с помощью дополнительного параметра усовершенствовать модель дисперсии в рамках модели перекрестной параметризации. Получаемая модель допускает расчеты только при условии обратного гауссовского распределения. В выводе (см. раздел 3.3.6) затрагивается аддитивная модель $E(S_{ik}) = v_i(x_i + y_k)$.

3.3.2. ВЫВОД МЕТОДА ЦЕПНОЙ ЛЕСТНИЦЫ ИЗ МЕТОДА, ОСНОВАННОГО НА МОДИФИЦИРОВАННОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПУАССОНА

Пусть случайная величина S_{ik} ячейки (i, k) , $1 \leq i, k \leq I$, матрицы развития имеет модифицированное распределение Пуассона с параметром среднего $x_i y_k$ и одинаковой для всех ячеек денежной единицей w . Это распределение введено нами в разделе 1.3.7. Тогда в хорошем приближении

$$E(S_{ik}) \approx x_i y_k,$$

$$\text{Var}(S_{ik}) \approx w x_i y_k,$$

и, следовательно, соотношение $\text{Var}(S_{ik}) / E(S_{ik})$ во всех ячейках практически одинаково. Ссылаясь на рассуждения в конце доказательства теоремы из раздела 3.3.1, положим $y_1 + \dots + y_I = 1$.

Точно такая структура $E(S_{ik})$ и $\text{Var}(S_{ik})$ получается, если задать S_{ik} коллективной моделью

$$S_{ik} = \sum_{n=1}^{N_{ik}} X_{ikn}$$

($S_{ik} = 0$ при $N_{ik} = 0$) в виде суммы N_{ik} отдельных значений X_{ikn} (выплат или изменений резервов заявленных убытков) и принять

$$E(N_{ik}) = x_i y_k,$$

$$\text{Var}(N_{ik}) = (1 + b)E(N_{ik}),$$

$$E(X_{ikn}) = a,$$

$$\text{Var}(X_{ikn}) = c^2,$$

(тогда $x_i = x_i a$ и $w = c^2 / a + a(1 + b)$). Указанные равенства выполняются, например, когда N_{ik} распределена по закону Пуассона, а X_{ikn} распределены одинаково. В принятой модели приращения S_{ik} зависят главным образом от числа изменений отдельных убытков в ячейке (i, k) , причем размер изменений колеблется как внутри одной ячейки, так и по ячейкам случайно, не систематически.

Формально модель перекрестной параметризации, основанная на предположении модифицированного распределения Пуассона для приращений S_{ik} , представляет собой частный случай модели из раздела 2.4.4, когда $v_{ik} = 1$, а матрица данных s_{ik} имеет треугольную форму, $i + k \leq I + 1$. Как мы уже знаем (см. раздел 2.2.4), при $s_{ik} > 0$, $i + k \leq I + 1$, уравнения правдоподобия относительно параметров x_i, y_k совпадают с условиями *маргинальных сумм*

$$\sum_{k=1}^{I+1-i} x_i y_k = \sum_{k=1}^{I+1-i} s_{ik}, \quad 1 \leq i \leq I,$$

$$\sum_{i=1}^{I+1-k} x_i y_k = \sum_{i=1}^{I+1-k} s_{ik}, \quad 1 \leq k \leq I.$$

Эти уравнения определяют параметры x_i, y_k с точностью до постоянного множителя, что дает возможность без ограничения общности удовлетворить дополнительному условию $y_1 + \dots + y_I = 1$ из раздела 3.3.1.

По сравнению с разделом 2.4.4 мы только ограничили область суммирования в уравнениях маргинальных сумм множеством известных данных s_{ik} треугольника развития $i + k \leq I + 1$. Отсюда ясно, что при отсутствии или непригодности некоторых данных s_{ik} , $i + k \leq I + 1$, достаточно просто опустить соответствующие слагаемые в обеих частях обеих систем уравнений.

Треугольная структура данных позволяет задать *рекурсивное решение* уравнений маргинальных сумм, так что метод последовательных приближений нам здесь не потребуется. Учитывая условие $\hat{y}_1 + \dots + \hat{y}_I = 1$, запишем уравнения маргинальных сумм в форме

$$\hat{x}_i = \sum_{k=1}^{I+1-i} s_{ik} / \sum_{k=1}^{I+1-i} \hat{y}_k = \sum_{k=1}^{I+1-i} s_{ik} / \left(1 - \sum_{k=I+2-i}^I \hat{y}_k \right),$$

$$\hat{y}_k = \sum_{i=1}^{I+1-k} s_{ik} / \sum_{i=1}^{I+1-k} \hat{x}_i.$$

По этим формулам параметры непосредственно вычисляются в очередности $\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{x}_2, \hat{y}_2, \dots$ и т. д. Резерв $R_i = S_{i,I+2-i} + \dots + S_{ii}$, очевидно, оценивается величиной

$$\hat{R}_i = \hat{x}_i (\hat{y}_{I+2-i} + \dots + \hat{y}_1).$$

Производя расчеты на конкретных данных, можно убедиться, что эта оценка совпадает с оценкой по методу цепной лестницы из раздела 3.2.4

$$\hat{R}_i = c_{i,I+1-i}(\hat{f}_{I+1-i} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{I-1} - 1),$$

а значения оценок \hat{y}_k — со значениями

$$\underline{y}_k = (\hat{f}_k \cdot \dots \cdot \hat{f}_{I-1})^{-1} - (\hat{f}_{k-1} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{I-1})^{-1}, \quad 2 \leq k \leq I,$$

$$\underline{y}_1 = (\hat{f}_1 \cdot \dots \cdot \hat{f}_{I-1})^{-1},$$

(см. доказательство теоремы из раздела 3.3.1), где \hat{f}_k — множители развития цепной лестницы (см. формулу (1) в разделе 3.2.4). В конце этого раздела мы действительно выведем из условий маргинальных сумм выражение

$$\hat{x}_i \hat{y}_k = \left(\sum_{j=1}^{I+1-i} s_{ij} \right) \cdot \hat{f}_{I+1-i} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{k-2} \cdot (\hat{f}_{k-1} - 1), \quad k > I+1-i,$$

где

$$\hat{f}_j = \left(\sum_{i=1}^{I-j} \sum_{k=1}^{j+1} s_{ik} \right) / \left(\sum_{i=1}^{I-j} \sum_{k=1}^j s_{ik} \right) = \sum_{i=1}^{I-j} c_{i,j+1} / \sum_{i=1}^{I-j} c_{ij}, \quad 1 \leq j \leq I-1,$$

из которого, в силу равенства

$$\hat{f}_{k-1} - 1 + \hat{f}_{k-1}(\hat{f}_k - 1) = \hat{f}_{k-1}\hat{f}_k - 1,$$

непосредственно следует равенство двух оценок резервов

$$\sum_{k=I+2-i}^I \hat{x}_i \hat{y}_k = \left(\sum_{j=1}^{I+1-i} s_{ij} \right) (\hat{f}_{I+1-i} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{I-1} - 1).$$

Хотя формально оценка максимального правдоподобия в случае модифицированного распределения Пуассона совпадает с оценкой по методу цепной лестницы, важно понимать, что модель Пуассона (как любая модель перекрестной параметризации — см. раздел 3.3.1) и модель цепной лестницы — по сути разные модели (например, модель Пуассона предполагает независимые и положительные приращения, а модель цепной лестницы — нет), которые лишь приводят к одинаковой оценке конечного убытка или резерва.

Для более глубокого изучения модели, основанной на модифицированном распределении Пуассона, воспользуемся достижениями теории максимума правдоподобия (как это было в разделах 2.4.4 и 2.4.5). Статистика критерия для проверки согласованности модели с данными:

$$T = \frac{1}{w} \sum_{i,k} \frac{(s_{ik} - \hat{x}_i \hat{y}_k)^2}{\hat{x}_i \hat{y}_k}$$

выводится как в разделе 2.4.4, но суммирование теперь ведется только по ячейкам $i+k \leq I+1$ треугольника развития. При проверке гипотезы параметр w

должен считаться известным, поэтому критерий применяется в строгом соответствии с описанием в разделе 2.4.4 (при $v_{ik} = 1$). Число степеней свободы хи-квадрат-распределения статистики T составляет $(I+1)I/2 - 2I + 1$. Этот критерий особенно полезен при работе с *треугольником развития числа убытков*, распределенных по обычному закону Пуассона, — параметр w в этом случае известен и равен 1.

Для проверки согласованности модели с данными не обязательно рассчитывать маргинальные множители \hat{x}_i , \hat{y}_k — достаточно оценить только множители развития $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_{I-1}$. Это следует из равенства

$$\hat{x}_i \hat{y}_k = \left(\sum_{j=1}^{I+1-i} s_{ij} \right) \cdot ((\hat{f}_k \cdot \dots \cdot \hat{f}_{I-1})^{-1} - (\hat{f}_{k-1} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{I-1})^{-1})$$

($\hat{f}_0 = 0$) или

$$\hat{C}_{ik} = c_{i,I+1-i} / (\hat{f}_k \cdot \dots \cdot \hat{f}_{I-1}), \quad k < I+1-i,$$

справедливого в области $i+k \leq I+1$ наблюдаемых ячеек. Оно выводится по аналогии с приведенной ранее формулой для $\hat{x}_i \hat{y}_k$. Таким образом, оценка ожидаемого убытка $E(C_{ik})$ в области наблюдаемого развития $i+k \leq I+1$ получается обратной проекцией текущих уровней $c_{i,I+1-i}$ с помощью множителей развития цепной лестницы \hat{f}_k , тогда как та же величина в модели цепной лестницы из раздела 3.2.4 оценивается прямой проекцией. Отсюда ясно, что стандартная ошибка модели Пуассона, вообще говоря, не совпадает со стандартной ошибкой модели цепной лестницы.

Свойства оценок максимального правдоподобия позволяют оценить *возможность резерва*. Аналогичную задачу мы уже рассматривали в разделе 2.4.5 на примере гамма-распределения. Поэтому нам удобнее перейти от параметризации с условием $y_1 + \dots + y_I = 1$, используемой в этом разделе до настоящего момента, к параметризации с известным значением x_1 , принятой в разделе 2.4.5. Выбрав

$$x_1 = s_{11} + \dots + s_{1I},$$

из условия маргинальных сумм

$$x_1(y_1 + \dots + y_I) = s_{11} + \dots + s_{1I}$$

получим $y_1 + \dots + y_I = 1$. Таким образом, новая параметризация не меняет значений параметров. Как и в разделе 2.4.5, нам потребуется вычислить информационную матрицу параметров $x_2, \dots, x_I, y_1, \dots, y_I$, w и обратить ее. Функция правдоподобия выглядит как в разделе 2.4.4 с той лишь разницей, что теперь $K = I$, $v_{ik} = 1$, а область суммирования ограничена треугольником развития. Используя символ Кронекера δ_{ij} ($\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ иначе), находим

$$A_{ij} = E \left(-\frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \frac{\delta_{ij}}{w x_i} \sum_{k=1}^{I+1-i} y_k, \quad 2 \leq i, j \leq I,$$

$$B_{kl} = E \left(-\frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial y_k \partial y_l} \right) = \frac{\delta_{kl}}{w y_k} \sum_{i=1}^{I+1-k} x_i, \quad 1 \leq k, 1 \leq I,$$

$$W_{ik} = E \left(-\frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial x_i \partial y_k} \right) = \begin{cases} 1/w, & 2 \leq i \leq I, \quad 1 \leq k \leq I+1-i, \\ 0, & 2 \leq i \leq I, \quad I+2-i \leq k \leq I, \end{cases}$$

$$E \left(-\frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial x_i \partial w} \right) = E \left(-\frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial y_k \partial w} \right) = 0, \quad 2 \leq i \leq I, \quad 1 \leq k \leq I.$$

Учитывая равенство нулю смешанных производных с участием w , мы можем пренебречь соответствующей частью информационной матрицы. Численно обратив матрицу из блоков $A = (A_{ij})$, $B = (B_{kl})$, $W = (W_{ik})$, где параметры x_i , y_k , w заменены оценками \hat{x}_i , \hat{y}_k , \hat{w} , получим асимптотическую матрицу ковариаций

$$M = \text{Cov}(\hat{x}_2, \dots, \hat{x}_I, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_I) \approx \begin{pmatrix} A & W \\ W^t & B \end{pmatrix}^{-1}$$

оценок максимального правдоподобия \hat{x}_i , \hat{y}_k . Оценка для w вычисляется как в разделе 2.4.4. Диагональные элементы матрицы M представляют собой значения дисперсий $\text{Var}(\hat{x}_i)$, $2 \leq i \leq I$, и $\text{Var}(\hat{y}_k)$, $1 \leq k \leq I$. Отличие от нуля элементов вне главной диагонали матрицы M свидетельствует о взаимной скоррелированности всех оценок параметров (за исключением \hat{w}).

Теперь мы в состоянии задать среднюю квадратичную ошибку

$$E((\hat{R}_i - R_i)^2 | D)$$

оценки

$$\hat{R}_i = \sum_{k=I+2-i}^I \hat{x}_i \hat{y}_k$$

резерва

$$R_i = \sum_{k=I+2-i}^I S_{ik}$$

при условии данных $D = \{S_{ik} = s_{ik}, i+k \leq I+1\}$. Используя независимость S_{ik} и формулу из раздела 3.1.8, получим

$$E((\hat{R}_i - R_i)^2 | D) = \text{Var}(R_i | D) + (E(R_i | D) - \hat{R}_i)^2 = \text{Var}(R_i) + (E(R_i) - \hat{R}_i)^2.$$

Ввиду асимптотической несмещенности оценки резерва

$$E(\hat{R}_i) \approx E(R_i),$$

оценочная ошибка $(E(R_i) - \hat{R}_i)^2$ составляет в среднем

$$E(E(R_i) - \hat{R}_i)^2 \approx \text{Var}(\hat{R}_i) = \text{Var}(\hat{x}_i \hat{z}_i),$$

где $z_i = y_{I+2-i} + \dots + y_I$ и соответственно $\hat{z}_i = \hat{y}_{I+2-i} + \dots + \hat{y}_I$. Повторяя рассуждения, приведенные в конце раздела 2.4.5, приходим к (асимптотическому) равенству

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{x}_i \hat{z}_i) &= \text{Var}(\hat{x}_i) z_i^2 + 2x_i \text{Cov}(\hat{x}_i, \hat{z}_i) z_i + x_i^2 \text{Var}(\hat{z}_i) = \\ &= \text{Var}(\hat{x}_i) z_i^2 + 2x_i \sum_j \text{Cov}(\hat{x}_i, \hat{y}_j) z_i + x_i^2 \sum_{j,k} \text{Cov}(\hat{y}_j, \hat{y}_k), \end{aligned}$$

где область суммирования задается неравенствами $I+2-i \leq j, k \leq I$. Ковариации берутся непосредственно из матрицы ковариаций M , а вместо параметров x_i , y_k подставляются значения \hat{x}_i , \hat{y}_k оценок максимального правдоподобия.

Случайная ошибка $\text{Var}(R_i)$ задается формулой

$$\text{Var}(R_i) = \sum_{k=I+2-i}^I \text{Var}(S_{ik}) \approx \sum_{k=I+2-i}^I w x_i y_k$$

и оценивается посредством замены параметров x_i , y_k , w оценками.

Суммируя оценки случайной и оценочной ошибок, находим оценку средней квадратичной ошибки $E((\hat{R}_i - R_i)^2 | D)$. Квадратный корень из средней квадратичной ошибки равен стандартной ошибке оценки резерва \hat{R}_i . Аналогичным образом определяется стандартная ошибка совокупного резерва $R = R_2 + \dots + R_I$ (см. также раздел 3.2.2). Отличие полученной выше стандартной ошибки оценки \hat{R}_i от приведенной в разделе 3.2.5 стандартной ошибки метода цепной лестницы служит еще одним доказательством различия моделей.

В заключение докажем упомянутую ранее теорему.

Теорема. Оценка максимального правдоподобия резерва убытка в модели перекрестной параметризации, основанной на распределении Пуассона, совпадает с резервом по методу цепной лестницы, если приращения s_{ik} , $i+k \leq I+1$, положительны.

Доказательство. Поскольку равенства

$$\hat{x}_i \hat{y}_m = \left(\sum_{j=1}^{I+1-i} s_{ij} \right) \cdot \hat{f}_{I+1-i} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{m-2} \cdot (\hat{f}_{m-1} - 1), \quad m > I+i-1,$$

$$\hat{f}_{j-1} - 1 + \hat{f}_{j-1} (\hat{f}_j - 1) = \hat{f}_{j-1} \hat{f}_j - 1,$$

где

$$\hat{f}_j = \left(\sum_{k=1}^{I-j} \sum_{n=1}^{j+1} s_{kn} \right) / \left(\sum_{k=1}^{I-j} \sum_{n=1}^j s_{kn} \right), \quad j = 1, \dots, I-1,$$

приводят к формуле метода цепной лестницы

$$\hat{R}_i = \hat{x}_i (\hat{y}_{I+2-i} + \dots + \hat{y}_I) = \left(\sum_{j=1}^{I+1-i} s_{ij} \right) (\hat{f}_{I+1-i} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{I-1} - 1),$$

нам достаточно вывести выражение для $\hat{x}_i \hat{y}_m$ из условий маргинальных сумм

$$(H_i) \sum_{j=1}^{I+1-i} x_i y_j = \sum_{j=1}^{I+1-i} s_{ij}, \quad i = 1, \dots, I,$$

$$(V_j) \sum_{i=1}^{I+1-j} x_i y_j = \sum_{i=1}^{I+1-j} s_{ij}, \quad j = 1, \dots, I.$$

Пусть $z_{ij} = \sum_{n=1}^j x_i y_n$ и $c_{ij} = \sum_{n=1}^j s_{in}$, $i+j \leq I+1$, — соответственно ожидаемый и наблюдаемый суммарные убытки i -го года события спустя j лет развития. Тогда условия (H_i) можно кратко записать в форме

$$z_{i,I+1-i} = c_{i,I+1-i}.$$

При $m > I+1-i$ имеем

$$z_{im} = z_{i,I+1-i} \cdot \frac{z_{i,I+2-i}}{z_{i,I+1-i}} \cdot \dots \cdot \frac{z_{im}}{z_{i,m-1}},$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} x_i y_m = z_{im} - z_{i,m-1} &= z_{i,I+1-i} \cdot \frac{z_{i,I+2-i}}{z_{i,I+1-i}} \cdot \dots \cdot \frac{z_{i,m-1}}{z_{i,m-2}} \cdot \left(\frac{z_{im}}{z_{i,m-1}} - 1 \right) = \\ &= \left(\sum_{j=1}^{I+1-i} s_{ij} \right) \cdot \frac{z_{i,I+2-i}}{z_{i,I+1-i}} \cdot \dots \cdot \frac{z_{i,m-1}}{z_{i,m-2}} \cdot \left(\frac{z_{im}}{z_{i,m-1}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Остается убедиться, что $z_{ij} / z_{i,j-1} = \hat{f}_{j-1}$. В силу равенств

$$\frac{z_{ij}}{z_{i,j-1}} = \frac{\sum_{n=1}^j y_n}{\sum_{n=1}^{j-1} y_n} = \frac{\left(\sum_{k=1}^{I+1-j} x_k \right) \left(\sum_{n=1}^j y_n \right)}{\left(\sum_{k=1}^{I+1-j} x_k \right) \left(\sum_{n=1}^{j-1} y_n \right)} = \frac{\sum_{k=1}^{I+1-j} z_{kj}}{\sum_{k=1}^{I+1-j} z_{k,j-1}}$$

и

$$\hat{f}_{j-1} = \frac{\sum_{k=1}^{I+1-j} c_{kj}}{\sum_{k=1}^{I+1-j} c_{k,j-1}}$$

требуется только доказать, что

$$(A_j) \sum_{k=1}^{I+1-j} z_{kj} = \sum_{k=1}^{I+1-j} c_{kj}$$

и

$$(B_j) \sum_{k=1}^{I+1-j} z_{k,j-1} = \sum_{k=1}^{I+1-j} c_{k,j-1}$$

при $j = 2, \dots, I$. Мы проведем доказательство с помощью рекурсии от $j = I$ до $j = 2$. Условие (A_I) : $z_{1I} = c_{1I}$, следует из (H_1) . (B_j) основывается на (A_j) и (V_j) :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{I+1-j} z_{k,j-1} &= \sum_{k=1}^{I+1-j} (z_{kj} - x_k y_j) = \sum_{k=1}^{I+1-j} z_{kj} - \sum_{k=1}^{I+1-j} x_k y_j = \\ &= \sum_{k=1}^{I+1-j} c_{kj} - \sum_{k=1}^{I+1-j} s_{kj} = \sum_{k=1}^{I+1-j} (c_{kj} - s_{kj}) = \sum_{k=1}^{I+1-j} c_{k,j-1}. \end{aligned}$$

Наконец, (A_{j-1}) выводится из (B_j) и (H_{I+2-j}) :

$$\sum_{k=1}^{I+2-j} z_{k,j-1} = z_{I+2-j,j-1} + \sum_{k=1}^{I+1-j} z_{k,j-1} = c_{I+2-j,j-1} + \sum_{k=1}^{I+1-j} c_{k,j-1} = \sum_{k=1}^{I+2-j} c_{k,j-1}.$$

3.3.3. МЕТОД НА ОСНОВЕ ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В предыдущем разделе мы брали за основу коллективную модель, теперь же будем описывать случайную величину S_{ik} приращения суммарного убытка i -го года события в k -м году развития индивидуальной моделью

$$S_{ik} = \sum_{n=1}^{v_i} R_{ikn}$$

и использовать в явном виде число полисов v_i в качестве меры объема i -го года события; аналогичная интерпретация возможна и при использовании других мер объема, например: суммарной потребной премии или числа убытков, заявленных в первом году развития (см. раздел 1.3.3). Величина R_{ikn} представляет собой приращение убытка, соответствующее n -му полису. Для большинства полисов это значение равно нулю, что дает нам основание, как и в разделе 1.3.3, предположить для величины R_{ikn} гамма-распределение (параметр формы должен быть меньше 1). Если считать $E(R_{ikn})$ зависимым только от года развития k , получится параметрическая форма модели из раздела 3.2.2. Поэтому мы примем более общее предположение

$$E(R_{ikn}) = x_i y_k, \quad 1 \leq n \leq v_i.$$

Во избежание чрезмерной параметризации параметр формы α гамма-распределения величины R_{ikn} будем считать одинаковым для всех ячеек (i, k) и всех полисов $n = 1, \dots, v_i$. Тогда

$$\text{Var}(R_{ikn}) = (x_i y_k)^2 / \alpha,$$

а сумма S_{ik} , как и в разделе 1.3.3, имеет гамма-распределение с математическим ожиданием

$$E(S_{ik}) = v_i x_i y_k$$

и параметром формы $v_i \alpha$ (дисперсия равна $\text{Var}(S_{ik}) = v_i (x_i y_k)^2 / \alpha$). Эта модель почти полностью совпадает с моделью из раздела 2.4.5: единственное отли-

чие — независимость объема от индекса k . В разделе 3.4.3 мы обратимся к случаю (треугольник средних изменений), когда для каждой ячейки имеется индивидуальный объем v_{ik} .

Как в главе 2.4 и во всех моделях из главы 3.3, S_{ik} должны быть независимы в совокупности. При выполнении этого условия мы вправе заимствовать результаты из раздела 2.4.5. Так оценки максимального правдоподобия \hat{x}_i , \hat{y}_k задаются уравнениями

$$x_i = \sum_{k=1}^{I+1-i} \frac{S_{ik}}{y_k} / ((I+1-i)v_i), \quad 1 \leq i \leq I,$$

$$y_k = \sum_{i=1}^{I+1-k} \frac{S_{ik}}{x_i} / \sum_{i=1}^{I+1-k} v_i, \quad 1 \leq k \leq I,$$

решаемыми, как обычно, попеременно относительно x_i и y_k методом последовательных приближений на основе стартовых значений $y_1 = \dots = y_I = 1$. Решение находится с точностью до константы, что позволяет удовлетворить равенству $\hat{y}_1 + \dots + \hat{y}_I = 1$ и задать через \hat{x}_i априорную оценку относительного конечного убытка C_{ii} / v_i i -го года события. Заметим, что апостериорный конечный убыток

$$\hat{C}_{ii} = c_{i,i+1-i} + \hat{R}_i,$$

где

$$\hat{R}_i = \sum_{k=I+2-i}^I v_i \hat{x}_i \hat{y}_k$$

оценка резерва, теперь не равен $v_i \hat{x}_i = v_i \hat{x}_i (\hat{y}_1 + \dots + \hat{y}_I)$, ведь текущий уровень $c_{i,i+1-i}$, как правило, отличен от $v_i \hat{x}_i (\hat{y}_1 + \dots + \hat{y}_{I+1-i})$. Это касается всех моделей перекрестной параметризации, не удовлетворяющих условиям маргинальных сумм.

Построение критерия согласия и расчет точности оценки резерва \hat{R}_i следуют схеме, предложенной в предыдущем разделе. При этом применяются соответствующие формулы из раздела 2.4.5.

В настоящем разделе мы воспользуемся еще одним важным достижением теории максимума правдоподобия — методом отношения правдоподобий. Коль скоро в нашей модели

$$E(S_{ik}) = v_i x_i y_k$$

присутствует объем v_i , зависящий только от года события, возникает сомнение в необходимости дальнейших зависящих от года события параметров x_i . Желательно, по крайней мере, проверить возможность установления одинаковых параметров $x_i = x_{i+1}$ для двух соседних лет событий i и $i+1$. Это позволило бы сократить изначальное высокое число параметров (в разделе 2.4 за счет прямоугольной формы мы имели почти вдвое больше данных) и тем повысить устойчивость оценки резерва. Особенно важно сократить число параметров в левом

нижнем углу треугольника развития, где содержится наименьшее количество наблюдений.

Из уравнений правдоподобия (см. раздел 2.4.5) легко видеть, что корректровка модели в связи с заменой двух соседних параметров x_i и x_{i+1} одинаковым параметром x сводится к объединению двух лет событий в одну строку, то есть суммированию значений S_{ik} и $S_{i+1,k}$, v_i и v_{i+1} . Не изменяется только последняя ячейка $(i, I+1-i)$ верхней строки, поскольку соответствующее значение $S_{i+1,I+1-i}$ нижней строки еще не известно. Значит, для редуцированной модели тоже справедливы уравнения правдоподобия из раздела 2.4.5. Необходимо лишь учесть, что количество строк убавилось на одну, а в строке, возникшей в результате объединения, объем уже не постоянен: в последней ячейке он равен v_i , а во всех предыдущих $v_i + v_{i+1}$.

С помощью метода отношения правдоподобия можно проверить качество редуцированной модели по сравнению с исходной. Для этого надо рассчитать правдоподобия $\ln(L_1)$ и $\ln(L_0)$ исходной и редуцированной моделей. Удвоенная разность

$$2 \cdot \ln(L_1) - 2 \cdot \ln(L_0) = 2 \cdot \ln(L_1 / L_0)$$

при нулевой гипотезе справедливости редуцированной модели имеет (асимптотическое) распределение хи-квадрат с 1-й степенью свободы (или с m степенями свободы при удалении m параметров). Если уменьшение размера функции правдоподобия в связи с удалением одного параметра незначимо, то следует сохранить редуцированную модель.

3.3.4. РЕЗЕРВИРОВАНИЕ

С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

В предыдущем разделе мы задали нормированную на объем v_i года события i случайную величину убытка S_{ik} / v_i ячейки (i, k) с помощью индивидуальной модели. Это привело нас к гамма-распределению с математическим ожиданием

$$E(S_{ik} / v_i) = x_i y_k,$$

параметром формы $v_i \alpha$ и коэффициентом вариации $1 / \sqrt{v_i \alpha}$. Как известно из разделов 1.3.5 и 2.4.6, это распределение достаточно близко аппроксимируется логнормальным распределением с параметрами $\theta_{ik} = a_i + b_k$ и σ^2 / v_i , то есть с математическим ожиданием

$$E(\ln(S_{ik} / v_i)) = \theta_{ik} = a_i + b_k,$$

и дисперсией

$$\text{Var}(\ln(S_{ik} / v_i)) = \sigma^2 / v_i.$$

В этом случае математическое ожидание

$$E(S_{ik} / v_i) = \exp(a_i + \sigma^2 / (2v_i)) \exp(b_k)$$

снова имеет форму $x_i y_k$, а коэффициент вариации

$$\sqrt{\exp(\sigma^2 / v_i) - 1} \approx \sigma / \sqrt{v_i}$$

приближен к коэффициенту вариации гамма-распределения.

Логнормальная модель этого раздела отличается от модели из раздела 2.4.6 только независимостью объема v_i от индекса k . Это позволяет с помощью описанных преобразований (см. раздел 2.4.6) перейти к линейной регрессионной модели и применить метод наименьших квадратов.

Объединив параметры a_1 и b_1 , получим однозначную параметризацию

$$\begin{aligned} \theta_{ik} &= (a_1 + b_1) + (a_i - a_1) + (b_k - b_1) = \\ &= \beta_1 + \beta_i(1 - \delta_{i1}) + \beta_{i+k-1}(1 - \delta_{k1}) \end{aligned}$$

(где $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ иначе), содержащую всего $2I - 1$ параметра $\beta_1, \dots, \beta_{2I-1}$. Затем по схеме, указанной в таблице 3.3.4.1, строим матрицу M плана $I(I+1)/2$ наблюдений s_{ik} , $i+k \leq I+1$, упорядоченных некоторым фиксированным образом (например, по столбцам). Каждая строка матрицы плана состоит из коэффициентов при $\beta_1, \dots, \beta_{2I-1}$ в соответствующем уравнении регрессии

$$E(\ln(S_{ik} / v_i)) = \theta_{ik} = \beta_1 + \beta_i(1 - \delta_{i1}) + \beta_{i+k-1}(1 - \delta_{k1}).$$

По сравнению с матрицей плана из раздела 2.4.6 в этой матрице отсутствуют строки, соответствующие ячейкам $i+k > I+1$, не содержащим наблюдений.

Для устранения гетероскедастичности, обусловленной различием объемов v_i (см. раздел 2.4.6), переходим к матрице плана \underline{M} , заменив все единицы строки, отвечающей s_{ik} , на $\sqrt{v_i}$. Преобразованный вектор наблюдений \underline{w} состоит из компонент

$$\underline{w}_{ik} = \ln(s_{ik} / v_i) \cdot \sqrt{v_i},$$

расположенных в таком же порядке, как элементы столбца «Наблюдение (i, k)» таблицы 3.3.4.1. Программное обеспечение регрессионных моделей автоматизирует расчет несмещенных оценок по методу наименьших квадратов для векторного параметра $\beta^t = (\beta_1, \dots, \beta_{2I-1})$ и дисперсии σ^2 :

$$\hat{\beta} = (\underline{M}^t \underline{M})^{-1} \underline{M}^t \underline{w},$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{r^t r}{d} = \sum_{i,k} v_i (\ln(s_{ik} / v_i) - \hat{\theta}_{ik})^2 / d,$$

где $d = I(I+1)/2 - 2I + 1$ — число степеней свободы, а $r = \underline{w} - \underline{M}\hat{\beta}$ — (преобразованный) вектор невязки. Далее обычным способом получаем стандартную ошибку $\hat{\sigma} \sqrt{a_{nn}}$ оценки параметра $\hat{\beta}_n$, где a_{nn} — n -й диагональный элемент матрицы $(\underline{M}^t \underline{M})^{-1}$, а также коэффициент множественной детерминации

$$R^2 = \frac{(\underline{M}\hat{\beta})^t (\underline{M}\hat{\beta}) - w^2 I(I+1)/2}{\underline{w}^t \underline{w} - w^2 I(I+1)/2}, \quad \text{где } w = \frac{2}{I(I+1)} \sum_{i,k} \underline{w}_{ik}.$$

Таблица 3.3.4.1. Матрица плана при перекрестной параметризации

Наблюдение (i, k)	β_1	β_2 $i=2$	β_{I-1} $i=I-1$	β_I $i=I$	β_{I+1} $k=2$	β_{I+2} $k=3$	β_{2I-2} $k=I-1$	β_{2I-1} $k=I$
(1, 1)	1	0	0	0	0	0	0	0
(2, 1)	1	1		0	0	0	0	0	0
:	:			:	:	:	:		:	:
:	:			:	:	:	:		:	:
($I-1, 1$)	1	0		1	0	0	0	0	0
($I, 1$)	1	0	0	1	0	0	0	0
(1, 2)	1	0	0	0	1	0	0	0
(2, 2)	1	1	0	0	1	0	0	0
:	:			:	:	:	:		:	:
:	:			:	:	:	:		:	:
($I-1, 2$)	1	0		1	0	1	0	0	0
(1, 3)	1	0	0	0	0	1		0	0
:	:			:	:	:	:		:	:
:	:			:	:	:	:		:	:
($2, I-1$)	1	1		0	0	0	0		1	0
(1, I)	1	0	0	0	0	0	0	1

Прежде чем перейти к оцениванию резерва, мы хотим исследовать и, по возможности, упростить модель с помощью обычных инструментов регрессионного анализа. Сначала построим и проанализируем графики зависимости стандартизированных невязок $r / \hat{\sigma}$ от года события i , года развития k , календарного года $i+k$ и оцененных значений $\underline{M}\hat{\beta}$. Признав модель приемлемой, проверим значимость отличия от нуля параметров лет событий β_2, \dots, β_I (как было сказано в предыдущем разделе, различие лет событий в идеале должно быть обусловлено только различием объемов). Для этого используем статистику критерия

$$\hat{\beta}_i / (\hat{\sigma} \sqrt{a_{ii}}),$$

расчет которой предусмотрен некоторыми программными продуктами наряду с расчетом оценки параметра β_i и ее стандартной ошибки $\hat{\sigma} \sqrt{a_{ii}}$. При нулевой гипотезе $\beta_i = 0$ эта статистика имеет t -распределение с d степенями свободы.

Если большинство β_i отличается от нуля незначимо, то можно проверить нулевую гипотезу $\beta_2 = \dots = \beta_I = 0$, означающую, что все параметры лет событий a_i равны a_1 . Соответствующая статистика критерия имеет вид

$$\frac{(R^2 - R_0^2)/(I-1)}{(1 - R^2)/d},$$

где R^2 и R_0^2 — коэффициенты множественной детерминации исходной модели и модели без дихотомических регрессоров при β_2, \dots, β_I . При нулевой гипотезе справедливости редуцированной модели эта статистика имеет F -распреде-

ние с $I-1$ и d степенями свободы. В случае принятия гипотезы и сохранения редуцированной модели необходимо перепроверить предположения о параметрах и распределении с помощью упомянутых графиков невязок — теперь они уже будут другими.

Если же нулевая гипотеза отвергается, надо постараться сократить число параметров лет событий хотя бы в левом нижнем углу треугольника развития, где количество наблюдений мало. Для этого проверяется попарное равенство параметров с помощью статистики критерия

$$(\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_j)^2 / \text{Var}(\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_j),$$

имеющей при нулевой гипотезе $\beta_i = \beta_j$ F -распределение с 1 и d степенями свободы. Элементы, необходимые для расчета дисперсии

$$\text{Var}(\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_j) = \text{Var}(\hat{\beta}_i) - 2 \cdot \text{Cov}(\hat{\beta}_i, \hat{\beta}_j) + \text{Var}(\hat{\beta}_j),$$

могут быть взяты непосредственно из оценки $\hat{\sigma}^2 (\underline{M}' \underline{M})^{-1}$ матрицы ковариаций оценок $\hat{\beta}$. Часто имеет смысл разбить параметры β_2, \dots, β_I на несколько классов, так чтобы каждый класс содержал соседние годы событий и обходился только одним параметром года события. Предыдущая статистика подходит для этого в качестве меры расстояния. Для оценки параметров классов строится новая регрессия. Затем с помощью критерия, аналогичного первому из двух названных выше F -критериев, проверяется гипотеза одинакового качества подгонки редуцированной и полной моделей. Тем самым нередко достигается редукция числа параметров, способствующая повышению устойчивости прогнозируемых значений.

Параметры развития $\beta_{I+1}, \dots, \beta_{2I-1}$ обычно различаются существенно, и установить одинаковый параметр для соседних лет развития не представляется возможным. Тем не менее иногда удается сократить и число параметров развития. Для этого нужно попытаться описать параметры простой функцией (значения параметров, как правило, уменьшаются с ростом k — см. раздел 3.1.4). Можно предположить, например, что динамика параметров развития y_k , лежащих в основе $\beta_{I+1}, \dots, \beta_{2I-1}$ (или, соответственно, b_k), отвечает гамма-или экспоненциальной ($\alpha = 1$) плотности, то есть y_k пропорционально $k^{\alpha-1} e^{-\tau k}$. Тогда

$$\beta_{I+k-1} = (\alpha - 1) \ln(k) - \tau k, \quad 2 \leq k \leq I.$$

Этот способ одновременно позволяет прогнозировать развитие после I -го года, не наблюдаемое до текущего момента.

В заключение обратимся к оценке резерва. Если в разделе 2.4.6 математическое ожидание

$$\begin{aligned} E(S_{ik} / v_i) &= \exp(\theta_{ik} + \sigma^2 / (2v_i)) = \\ &= \exp(\beta_1 + \beta_i(1 - \delta_n) + \beta_{I+k-1}(1 - \delta_{k1}) + \sigma^2 / (2v_i)) \end{aligned}$$

уже наблюдаемой величины убытка оценивалось просто подстановкой оценок параметров, то сейчас нам предстоит оценить еще не наблюдаемые величины S_{ik} / v_i , $i + k > I + 1$ с помощью наблюдаемых значений s_{mn} / v_m , $m + n \leq I + 1$, то

есть найти $E(S_{ik} / v_i | s_{mn}, m + n \leq I + 1)$. Способ оценивания из раздела 2.4.6 нас не устраивает тем, что получаемая оценка

$$\exp(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_i(1 - \delta_n) + \hat{\beta}_{I+k-1}(1 - \delta_{k1}) + \hat{\sigma}^2 / (2v_i))$$

не обладает свойством несмещенности, о чем уже говорилось в разделах 1.3.5 и 2.4.6. Кроме того, расчет средней квадратичной ошибки оценки резерва в этом случае слишком трудоемок. Последнее обстоятельство послужило главной причиной появления другого способа.

Заметим сначала, что оценки $\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_{2I-1}$ несмещенные и распределены нормально. Случайная величина

$$\hat{\theta}_{ik} = (\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_i(1 - \delta_n) + \hat{\beta}_{I+k-1}(1 - \delta_{k1}))$$

как линейная комбинация оценок $\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_{2I-1}$ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $E(\hat{\theta}_{ik}) = \theta_{ik}$. Согласно нашей регрессионной модели, $\ln(S_{ik} / v_i)$ задается суммой

$$\ln(S_{ik} / v_i) = \theta_{ik} + \varepsilon_{ik}$$

параметра θ_{ik} и нормально распределенной ошибки ε_{ik} с математическим ожиданием $E(\varepsilon_{ik}) = 0$ и дисперсией $\text{Var}(\varepsilon_{ik}) = \sigma^2 / v_i$. Поэтому мы оценим еще не наблюдаемые случайные величины $\ln(S_{ik} / v_i)$, $i + k > I + 1$, суммой оценки параметра и случайной ошибки

$$\ln(\hat{S}_{ik} / v_i) = \hat{\theta}_{ik} + \varepsilon_{ik}.$$

Тогда оценка \hat{S}_{ik} / v_i , $i + k > I + 1$, будет иметь логнормальное распределение с параметрами $E(\hat{\theta}_{ik} + \varepsilon_{ik}) = \theta_{ik}$ и $\text{Var}(\hat{\theta}_{ik} + \varepsilon_{ik}) = \text{Var}(\hat{\theta}_{ik}) + \sigma^2 / v_i$. Ее математическое ожидание

$$E(\hat{S}_{ik} / v_i) = \exp(\theta_{ik} + (\text{Var}(\hat{\theta}_{ik}) + \sigma^2 / v_i) / 2)$$

может использоваться в качестве *точечного прогноза* величины S_{ik} / v_i после замены параметров θ_{ik} , $\text{Var}(\hat{\theta}_{ik})$ и σ^2 оценками. В силу равенства

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\theta}_{ik}) &= \text{Var}(\hat{\beta}_1) + (\text{Var}(\hat{\beta}_i) + 2\text{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_i))(1 - \delta_n) + \\ &+ (\text{Var}(\hat{\beta}_{I+k-1}) + 2\text{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_{I+k-1}))(1 - \delta_{k1}) + \\ &+ 2\text{Cov}(\hat{\beta}_i, \hat{\beta}_{I+k-1})(1 - \delta_n)(1 - \delta_{k1}), \end{aligned}$$

значения $\text{Var}(\hat{\theta}_{ik})$ вычисляются на основании матрицы ковариаций $\hat{\sigma}^2 (\underline{M}' \underline{M})^{-1}$ оценок $\hat{\beta}$. Построенный таким способом точечный прогноз не обладает несмещенностью, а всегда пессимистичен. Важно помнить, что модель ведет к разумным результатам только при достаточно низких значениях σ^2 / v_i (см. раздел 1.3.5). Это условие может нарушаться, например, при наличии выбросов.

В выражении $\ln(\hat{S}_{ik} / v_i) = \hat{\theta}_{ik} + \varepsilon_{ik}$ уже содержатся риск случайности и риск оценки, поэтому стандартная ошибка точечного прогноза величины S_{ik} получается напрямую из дисперсии

$$\text{Var}(\hat{S}_{ik} / v_i) = (E(\hat{S}_{ik} / v_i))^2 (\exp(\text{Var}(\hat{\theta}_{ik}) + \sigma^2 / v_i) - 1)$$

после подстановки значений оценок и извлечения квадратного корня. Для расчета стандартной ошибки оценки резерва

$$\hat{R}_i = E(\hat{S}_{i,I+2-i}) + \dots + E(\hat{S}_{iI})$$

нам требуются оценки ковариаций, присутствующие в формуле дисперсии

$$\text{Var}(\hat{R}_i) = \sum_{k=I+2-i}^I \text{Var}(\hat{S}_{ik}) + 2 \sum_{k < j} \text{Cov}(\hat{S}_{ik}, \hat{S}_{ij}).$$

Для ковариации логнормально распределенных случайных величин справедливо представление

$$\text{Cov}(\hat{S}_{ik}, \hat{S}_{ij}) = E(\hat{S}_{ik}) \cdot E(\hat{S}_{ij}) \cdot (\exp(\text{Cov}(\ln(\hat{S}_{ik}), \ln(\hat{S}_{ij}))) - 1).$$

При $j \neq k$, в силу независимости величин ε_{ik} друг от друга и от $\hat{\theta}_{ik}$, имеет место равенство

$$\text{Cov}(\ln(\hat{S}_{ik}), \ln(\hat{S}_{ij})) = \text{Cov}(\ln(\hat{S}_{ik} / v_i), \ln(\hat{S}_{ij} / v_j)) = \text{Cov}(\hat{\theta}_{ik}, \hat{\theta}_{ij}).$$

Правая часть рассчитывается только на основании матрицы ковариаций $\hat{\sigma}^2(\underline{M}^t \underline{M})^{-1}$ по аналогии с $\text{Var}(\hat{\theta}_{ik})$. После подстановки оценок параметров в окончательное выражение для $\text{Var}(\hat{R}_i)$ и извлечения квадратного корня получается стандартная ошибка оценки резерва. Подобно $\text{Var}(\hat{S}_{ik} / v_i)$, величина $\text{Var}(\hat{R}_i)$ содержит одновременно оценочную и случайную ошибки.

При виде большого количества ковариаций читатель, вероятно, сочтет описанную процедуру слишком утомительной. Но как мы сейчас увидим, простые матричные операции позволяют существенно упростить расчеты. Определим «будущую» матрицу плана \underline{N} по аналогии с \underline{M} , применяя план (позиционирование $\sqrt{v_i}$) не к наблюдаемым ячейкам (i, k) , $i + k \leq I + 1$, а к прогнозируемым ячейкам (i, k) , $i + k > I + 1$. Матрица \underline{N} имеет $I(I - 1) / 2$ строк и $2I - 1$ столбцов. Тогда компоненты вектор-столбца $\underline{N}\beta$ как раз будут представлять собой значения $\hat{\theta}_{ik}$ для $i + k > I + 1$. Далее,

$$\hat{\sigma}^2 \underline{N}(\underline{M}^t \underline{M})^{-1} \underline{N}^t = \text{Cov}(\hat{\theta}_{ik}, \hat{\theta}_{jl})$$

искомая матрица ковариаций «будущих» θ_{ik} , $i + k > I + 1$. Если очередность строк матрицы \underline{N} выбрана так, что ячейкам одного и того же года события соответствуют соседние строки, то ковариации $\text{Cov}(\hat{\theta}_{ik}, \hat{\theta}_{ij})$, требуемые для расчета $\text{Var}(\hat{R}_i)$, образуют квадратный блок вокруг главной диагонали матрицы $\hat{\sigma}^2 \underline{N}(\underline{M}^t \underline{M})^{-1} \underline{N}^t$.

В заключение подчеркнем, что метод довольно чувствительно реагирует на выбросы, сильно влияющие на размер $\hat{\sigma}^2$. Поэтому рекомендуется заменять выбросы интерполирующими значениями либо рассматривать их как «missing data».

3.3.5. МЕТОД НА ОСНОВЕ ОБРАТНОГО ГАУССОВСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Модели, рассмотренные в предыдущих разделах, очень схожи в описании математического ожидания $E(S_{ik})$ и различаются, по сути, только структурой дисперсии $\text{Var}(S_{ik})$. Чтобы убедиться в этом, достаточно сравнить коэффициенты вариации $Vko(S_{ik}) = \sqrt{\text{Var}(S_{ik})} / E(S_{ik})$. В модели Пуассона из раздела 3.3.2

$$Vko(S_{ik}) \text{ пропорционален } 1 / \sqrt{E(S_{ik})},$$

в гамма-модели из раздела 3.3.3 (а также приближенно в логнормальной модели из раздела 3.3.4)

$$Vko(S_{ik}) \text{ пропорционален } 1 / \sqrt{v_i}.$$

В первом случае коэффициент вариации различается практически по всем ячейкам, во втором же он одинаков для всех ячеек, соответствующих одному году события.

Убытки, проведенные по бухгалтерским счетам в поздних годах развития, часто превышают по размеру средний уровень, хотя количество их и невелико. В первых годах развития, наоборот, преобладают убытки ниже среднего размера. Например, суммы S_{11} и S_{15} могут иметь одинаковый порядок величины, но состоять из разного числа убытков: S_{11} содержит много мелких убытков, а S_{15} — мало больших. Тогда у S_{11} коэффициент вариации будет значительно меньше, чем у S_{15} . Ни один из рассмотренных до настоящего момента методов с перекрестной параметризацией не моделирует эти особенности адекватно. Требуется модель, где коэффициент вариации $Vko(S_{ik})$ был бы обратно пропорционален квадратному корню из числа убытков, составляющих S_{ik} , или, по крайней мере, зависел бы не только от объема v_i , но и от года развития. Для построения такой модели используем коллективное представление S_{ik} в виде суммы N_{ik} независимых и одинаково распределенных убытков

$$S_{ik} = \sum_{n=1}^{N_{ik}} X_{ikn}$$

и примем

$$E(N_{ik}) = v_i y_k, \quad \text{Var}(N_{ik}) / E(N_{ik}) = c_1,$$

$$E(X_{ikn}) = x_i k^b, \quad \text{Var}(X_{ikn}) / (E(X_{ikn}))^2 = c_2,$$

где v_i — известный объем (см. раздел 3.1.7) i -го года события, а все остальные параметры неизвестны и должны быть оценены (что касается значений c_1 и c_2 , то нам важно знать только их сумму). С помощью функции k^b , $b \geq 0$, грубо моделируется наблюдаемый на практике рост среднего размера отдельного убытка при увеличении срока развития. Применяя формулы, выведенные для коллективной модели (см. раздел 1.4.4), находим

$$E(S_{ik}) = v_i x_i y_k k^b,$$

$$\text{Var}(S_{ik}) = E(N_{ik})(E(X_{ikn}))^2(c_2 + c_1) = v_i x_i^2 y_k k^{2b} c \quad (\text{где } c = c_1 + c_2).$$

Тогда, как мы и хотели,

$$Vko(S_{ik}) \text{ пропорционален } 1 / \sqrt{E(N_{ik})} = 1 / \sqrt{v_i y_k}.$$

По сравнению с предыдущими моделями перекрестной параметризации эта модель имеет *на один параметр (b) больше*. Разумеется, не исключается и значение $b = 0$.

Из всех предложенных нами распределений только обратное гауссовское распределение позволяет относительно просто рассчитать оценки параметров этой модели. С учетом полученных выше выражений для $E(S_{ik})$ и $Var(S_{ik})$ плотность обратного гауссовского распределения в точке s_{ik} записывается в виде

$$g(s_{ik}) = \exp \left(-\frac{s_{ik}}{2x_i k^b c} + \frac{v_i y_k}{c} - \frac{v_i^2 x_i y_k^2 k^b}{2s_{ik} c} \right) \frac{\sqrt{v_i^2 x_i y_k^2 k^b}}{\sqrt{2\pi s_{ik}^3 c}}.$$

Функция правдоподобия составляет

$$\ln(L) = \sum_{i,k} \ln(g(s_{ik})) = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \left(\ln \left(\frac{v_i^2 x_i y_k^2 k^b}{2\pi s_{ik}^3 c} \right) - \frac{s_{ik}}{x_i k^b c} + \frac{2v_i y_k}{c} - \frac{v_i^2 x_i y_k^2 k^b}{s_{ik} c} \right).$$

Из условий равенства нулю производных от $\ln(L)$ по параметрам b, c, x_i, y_k следует

$$0 = \sum_{k=1}^I \ln(k) \sum_{i=1}^{I+1-k} \left(1 + \frac{s_{ik}}{x_i k^b c} - \frac{v_i^2 x_i y_k^2 k^b}{s_{ik} c} \right), \quad (*)$$

$$c = \sum_{i,k} \left(\frac{s_{ik}}{x_i k^b} - 2v_i y_k + \frac{v_i^2 x_i y_k^2 k^b}{s_{ik}} \right) / \sum_{i,k} 1,$$

$$x_i = \left(B_i + \sqrt{B_i^2 + 4A_i C_i} \right) / (2A_i),$$

$$y_k = \left(E_k + \sqrt{E_k^2 + 4D_k F_k} \right) / (2D_k),$$

где

$$A_i = \sum_{k=1}^{I+1-i} \frac{v_i^2 y_k^2 k^b}{s_{ik}}, \quad B_i = \sum_{k=1}^{I+1-i} c, \quad C_i = \sum_{k=1}^{I+1-i} \frac{s_{ik}}{k^b},$$

$$D_k = \sum_{i=1}^{I+1-k} \frac{v_i^2 x_i k^b}{s_{ik}}, \quad E_k = \sum_{i=1}^{I+1-k} v_i, \quad F_k = \sum_{i=1}^{I+1-k} c.$$

Из двух решений квадратных уравнений относительно x_i и y_k выбраны удовлетворяющие условию $x_i > 0$ или, соответственно, $y_k > 0$.

Указанная система уравнений решается методом последовательных приближений. В качестве стартовых значений удобно взять $b = 0, c = 1$,

$y_1 = \dots = y_I = 1$. Сначала вычисляются x_i , затем c и y_k . Расчет значений x_i, c, y_k повторяется до сходимости. Далее из уравнения (*) рассчитывается улучшенное значение b и с ним осуществляется переход в новую фазу итерации для x_i, c, y_k . Процедура повторяется до тех пор, пока b не перестанет существенно изменяться. Сравнив полученное значение функции правдоподобия с правдоподобием при $b = 0$, мы узнаем, способствовало ли введение параметра b существенному улучшению модели (см. конец раздела 3.3.3).

В отсутствие удобной меры объема v_i можно перенести параметр x_i из $E(X_{ikn})$ в $E(N_{ik})$. Тогда

$$E(S_{ik}) = x_i y_k k^b,$$

$$Var(S_{ik}) = x_i y_k k^{2b} c,$$

а далее все аналогично предыдущему случаю. При $b = 0$ последняя модель имеет ту же структуру параметров, что и модель из раздела 3.3.2, основанная на распределении Пуассона.

3.3.6. ВЫВОД И УКАЗАНИЯ К ПРИМЕНЕНИЮ

Важное преимущество рассмотренных в этой главе методов — возможность применения тех же программ обработки данных, что и для методов выравнивания из главы 2.4. Благодаря одинаковому числу параметров во всех четырех моделях (с малым отклонением в разделе 3.3.5), наиболее подходящая модель определяется по значению функции правдоподобия. Вопрос — какой базис следует предпочесть для расчетов: оплаченные или произошедшие убытки (см. раздел 3.1.5) — тоже решается функцией правдоподобия. В отличие от моделей из главы 2.4, модели этой главы *перенасыщены параметрами*. Следует попытаться сократить число параметров, особенно в острых углах треугольника развития, где содержится наименьшее количество наблюдений.

На практике хорошо зарекомендовало себя экспоненциальное *сглаживание* параметров лет развития y_k

$$y_k = a e^{-bk} \text{ (соответственно, } b_k = -bk \text{ в разделе 3.3.4), } k \geq k_0,$$

аналогичное предложенному в разделе 3.2.6. Обычно развитие имеет унимодальный правоасимметричный характер, поэтому в качестве сглаживающей функции для параметров развития y_k можно рассмотреть не только плотность экспоненциального распределения, но и правые части плотностей гамма-, обратного гауссовского или логнормального распределений. Такой способ редукции числа параметров одновременно позволяет экстраполировать развитие после последнего наблюдаемого года развития I . Что же касается параметров лет событий x_i , то рекомендуется установить один общий параметр для последних двух, трех или четырех лет событий, если только в конкретном случае не ожидается специфический тренд. Для моделирования различия лет событий весьма важна выразительная мера объема v_i . Значений $v_i = 1$, по возможности, следует избегать.

В заключение кратко обсудим аддитивную модель и случай отрицательных значений некоторых приращений S_{ik} . Применение аддитивной модели

$$E(S_{ik}) = v_{ik}(x_i + y_k)$$

в главе 2.4 грозило отрицательными оценками математического ожидания, не приемлемыми для тарификации. При резервировании отрицательные приращения $S_{ik} < 0$ не исключены, если расчет ведется на основании наступивших убытков (прибыль развития). Но для использования привычных правоасимметричных моделей распределения (гамма-, логнормальное и т. д.) в случае отрицательных S_{ik} требуется ввести один или несколько дополнительных параметров смещения $z_{(ik)}$, обеспечивающих условие $z_{(ik)} + S_{ik} > 0$ (предположение нормального распределения не оправдывается даже возможностью отрицательных S_{ik}). За счет этого увеличивается и без того большое число параметров и значительно усложняется процедура оценивания. Конечно, можно обойтись и одним параметром смещения $-z = \min\{s_{ik} \mid i + k \leq I + 1\} - 1$ или работать с отрицательными s_{ik} как с «missing data». Однако оба варианта чреваты неточными результатами.

В случае положительных значений всех наблюдений s_{ik} аддитивная модель $E(S_{ik}) = v_{ik}(x_i + y_k)$ не вызывает проблем, если отрицательные оценки допускают разумную интерпретацию (в частности, если расчет ведется по наступившим убыткам). Простейший случай $x_i = 0$, $1 \leq i \leq I$, (подобно $x_i = 1$ в мультипликативной модели) может толковаться как непараметрическая модель и равносильна методу на основе независимости нормированных приращений убытка от года события (см. раздел 3.2.2).

В заключение приведем несколько ссылок на публикации о практическом применении методов главы 3.3. Регрессионная модель из раздела 3.3.4 — основа программного обеспечения резервирования ICRFS Бена Ценвирта. Это обстоятельство послужило поводом для многочисленных исследований, проводимых главным образом британскими актуариями. Некоторые результаты представлены в статье Христофидеса (*Christofides S. Regression Models Based on Log-incremental Payments*), напечатанной в 1990 году во втором томе руководства по резервированию Лондонского института актуариев, а также в статье Верролла (*Verrall R.J. Bayes and Empirical Bayes Estimation for the Chain Ladder Model // ASTIN Bulletin, 1990, 20, p. 217–243*). Пример построения несмещенной оценки с минимальной дисперсией содержится в работе Дори (*Doray L. G. UMVUE of the IBNR Reserve in a Lognormal Linear Regression Model // Insurance: Mathematics & Economics, 1996, 18, p. 43–57*). О результатах применения ICRFS в сравнении с методом цепной лестницы сообщается в работах Мака (*Mack Th. Distribution-free Calculation of the Standard error of Chain Ladder Reserve Estimates // ASTIN Bulletin, 1993, 23, p. 213–225; Mack Th. Which Stochastic Model is Underlying the Chain Ladder Method? // Insurance: Mathematics & Economics, 1994, 15, p. 133–138*). В первой из этих двух работ статья под заголовком «Mack 1991» демонстрирует применение гамма-модели из раздела 3.3.3. Во всех названных работах (кроме последней) приводятся формулы стандартной ошибки оценки резерва.

3.4. Модификации предыдущих методов

3.4.1. ОБЗОР

В настоящей главе мы модифицируем представленные ранее методы. При этом, с одной стороны, будут учтены слабые стороны предыдущих моделей, а с другой — привлечены дополнительные статистические данные (детализованная информация). Например, в прошлых главах постоянно уделялось внимание проблеме эффектов календарных лет и был указан способ их выявления с помощью графика невязок. Однако почти ничего не говорилось о наших действиях при наличии эффектов календарных лет и, в частности, инфляции. Это упущение мы наверстаем в разделе 3.4.2, предложив модификацию метода с перекрестной параметризацией — так называемый метод отделения.

В остальных разделах мы усовершенствуем рассмотренные ранее модели, извлекая выгоду из детализованной статистики. В разделе 3.4.3 обсуждается возможность использования информации о развитии числа убытков. В разделе 3.4.4 мы вернемся к упомянутому в разделе 3.1.1 различию между IBNR- и IBNER-убытками и смоделируем его с помощью дополнительных данных. Наконец, в разделе 3.4.5 оценка резерва строится на основании информации о развитии каждого отдельного убытка.

3.4.2. ОТДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТОВ КАЛЕНДАРНЫХ ЛЕТ

В разделе 3.1.7 уже подчеркивалась важная роль инфляции для резервирования. Даже полное устранение денежной инфляции не исключало бы возможности присутствия в данных значимых календарных эффектов (см. раздел 3.1.7). Наряду с годами событий и годами развития календарные годы представляют собой в некотором смысле третье направление в треугольнике развития. Годы событий соответствуют строкам, годы развития — столбцам, а календарные годы — параллелям к гипотенузе треугольника развития. Проще говоря, приращения $S_{1j}, S_{j-1,2}, S_{j-2,3}, \dots, S_{i,j-i+1}, \dots, S_{2,j-1}, S_{1j}$ (в общем, все S_{ik} с одинаковой суммой $i + k$) происходят от одного и того же календарного года j . Но в то время как годы событий и годы развития независимы (могут проявлять независимые тренды), каждый эффект календарного года влияет одновременно и на годы событий, и на годы развития.

Поясним это на примере модели перекрестной параметризации

$$E(S_{ik}) = x_i y_k, \quad 1 \leq i, \quad k \leq I.$$

В условиях инфляции с постоянным годовым индексом $u > 1$ модель приобретает вид

$$E(S_{ik}) = x_i y_k u^{i+k-2}, \quad 1 \leq i, \quad k \leq I.$$

Переписав последнее равенство в форме

$$E(\underline{S}_{ik}) = (x_i u^{i-1})(y_k u^{k-1}),$$

убеждаемся, что инфляция действует как на параметр года события, так и на параметр года развития. Отсюда можно сделать следующие выводы. Во-первых, перекрестная модель не позволяет установить присутствие в данных постоянного календарного эффекта: он растворяется в параметрах года события и года развития. Во-вторых, содержащийся в треугольнике развития постоянный календарный эффект переносится перекрестными моделями на прогнозируемые величины S_{ik} , $i+k > I+1$. Так, постоянная годовая инфляция u , заключенная в значениях $E(\underline{S}_{ik})$, $i+k \leq I+1$, экстраполируется на будущие календарные годы $j = i+k > I+1$. В самом деле, на основании данных треугольника развития получаются параметры

$$\underline{x}_i = x_i u^{i-1}, \quad \underline{y}_k = y_k u^{k-1},$$

с помощью которых рассчитываются будущие математические ожидания $E(\underline{S}_{ik})$, $i+k > I+1$,

$$E(\underline{S}_{ik}) = \underline{x}_i \underline{y}_k = E(S_{ik}) u^{i+k-2}, \quad i+k > I+1.$$

Отсутствие возможности выделить из данных постоянную инфляцию не препятствует применению перекрестной модели до тех пор, пока, за неимением соответствующей информации, мы вынуждены предполагать сохранение прежнего темпа инфляции в последующих годах.

В условиях переменных календарных эффектов u_j , $2 \leq j \leq I+1$, принимается модель вида

$$\underline{S}_{ik} = S_{ik} u_{i+k}.$$

Обычно переменные эффекты не раскладываются на эффекты строк и столбцов в форме

$$u_{i+k} = t_i w_k.$$

Действительно, после (как всегда, произвольного) выбора t_1 все w_k будут зафиксированы, в силу равенства

$$t_1 w_k = u_{1+k}, \quad 1 \leq k \leq I,$$

и решение для t_2 удастся найти только в частном случае

$$u_3 / w_1 = u_4 / w_2 = \dots = u_I / w_{I-2} = u_{I+1} / w_{I-1}.$$

Применение модели перекрестной параметризации к данным с переменными эффектами календарных лет ведет к смешиванию отклонений u_{i+k} от $t_i w_k$ со случайными колебаниями величины убытка S_{ik} и проецированию этого смешения на будущее.

Помимо инфляции встречаются и другие непостоянные календарные эффекты, такие как изменения в юрисдикции или правилах урегулирования убытков. Если подобного рода особые эффекты затрагивают только отдельные календарные годы, то во всех рассмотренных ранее моделях они распоз-

наются с помощью графика зависимости стандартизованных невязок от календарных лет (см. раздел 3.2.6). В любом случае особые эффекты необходимо определить количественно и устранить, ведь мы не можем быть уверены, что они повторятся в будущем или правильно экстраполируются методом резервирования.

Для исключения неизвестной переменной годовой инфляции из треугольника развития следует преобразовать данные S_{ik} таким образом, чтобы в отсутствие инфляции не предполагалось систематических различий лет событий или лет развития. Тогда наблюдаемые различия лет событий или лет развития будут напрямую связаны с инфляцией, что позволит определить ее количественно. Поскольку годы развития обычно различаются вне зависимости от инфляции, остается надеяться, что в отсутствие инфляции не будут прослеживаться систематические различия лет событий. Последнее возможно, когда годы событий с точностью до случайных отклонений отличаются только объемами и соответствующие меры объема известны.

На этом предположении построена модель из раздела 3.2.2, где

$$E(S_{ik} / v_i) = m_k, \quad \text{Var}(S_{ik} / v_i) = s_k^2 / v_i,$$

а v_i — известный объем i -го года события. В условиях инфляции величина S_{ik} преобразуется к виду $\underline{S}_{ik} = S_{ik} u_{i+k}$, а предыдущие формулы — к виду

$$E(\underline{S}_{ik} / v_i) = u_{i+k} m_k,$$

$$\text{Var}(\underline{S}_{ik} / v_i) = (u_{i+k})^2 s_k^2 / v_i.$$

При дополнительном предположении независимости отношения $m_k^2 / s_k^2 = \alpha$ от k структура дисперсии преобразованной модели отвечает гамма-модели из раздела 3.3.3. Это дает повод положить в основу процесса убытков микро-модель

$$\underline{S}_{ik} = \sum_{n=1}^{v_i} \underline{R}_{ikn},$$

$$E(\underline{R}_{ikn}) = u_{i+k} m_k,$$

$$\text{Var}(\underline{R}_{ikn}) = (u_{i+k} m_k)^2 / \alpha.$$

Перед нами перекрестная модель с классификацией параметров по календарному году и году развития. Это легко доказывается с помощью электронной таблицы: достаточно при всех k сдвинуть вниз k -й столбец треугольника на $k-1$ лет событий (строк). Тогда данные приобретут форму, отвечающую перекрестной параметризации с параметрами u_i и m_k : параметр u_{i+k} будет выполнять роль параметра строки i , а объемы строки i составят по порядку $v_i, v_{i-1}, v_{i-2}, \dots, v_1$. Теперь для оценки параметров u_i, m_k применимы методы из разделов 2.4.5 и 3.3.3. Оцененные параметры календарных лет \hat{u}_i и будут представлять собой отделенный от данных индекс инфляции. Теперь читателю понятно, почему методы с индивидуальным параметром для каждого календарного года называются *методами отделения*.

Для прогнозирования будущих значений S_{ik} , $i+k > I+1$, требуется посредством экстраполяции оцененных индексов инфляции

$$\hat{u}_2, \hat{u}_3, \dots, \hat{u}_{I+1}$$

построить оценки будущих индексов

$$u_{I+2}, u_{I+3}, \dots, u_{2I}.$$

Это сложно сделать, даже когда динамика инфляции $\hat{u}_2, \dots, \hat{u}_{I+1}$ с достаточной степенью достоверности объясняется внешними явлениями календарных лет. В большинстве случаев остается только перебирать различные возможные альтернативы будущих индексов с постоянной ставкой прироста.

Чисто формально каждый из рассмотренных в главе 3.3 методов с перекрестной параметризацией может быть преобразован в метод отделения заменой параметров лет событий x_i , $1 \leq i \leq I$, параметрами календарных лет u_{i+k} , $2 \leq i+k \leq I+1$. (Заменять параметры лет развития нецелесообразно — в этом случае неявно предполагалось бы постоянство приращений S_{ik} во всех годах развития, что противоречит типичному характеру развития — см. раздел 3.1.4.) Однако в этом не всегда есть смысл. Например, при переходе от модели Пуассона из раздела 3.3.2 к модели отделения

$$E(S_{ik}) = u_{i+k} y_k,$$

$$\text{Var}(S_{ik}) = w \cdot u_{i+k} y_k$$

в опорной микромоде

$$\underline{S}_{ik} = \sum_{n=1}^{N_{ik}} \underline{X}_{ikn}$$

среднее число убытков

$$E(N_{ik}) = \underline{u}_{i+k} y_k$$

становится зависимым от эффектов календарных лет, чего в прямом страховании быть не может, если календарные эффекты обусловлены исключительно денежной инфляцией (инфляция влияет только на размер, но не на число убытков). Значит, в случае распределения Пуассона метод отделения применим только при наличии календарных эффектов, связанных с регистрацией или урегулированием убытков. В непропорциональном перестраховании инфляция конечно же влияет и на число убытков, вызывая рост частоты превышения приоритета (см. раздел 4.1.3).

Влияние инфляции достаточно точно описывает микромодель

$$\underline{S}_{ik} = \sum_{n=1}^{N_{ik}} \underline{X}_{ikn},$$

$$E(N_{ik}) = v_i w_k, \quad \text{Var}(N_{ik}) = c_1 E(N_{ik}),$$

$$E(\underline{X}_{ikn}) = u_{i+k} k^b, \quad \text{Var}(\underline{X}_{ikn}) = c_2 (E(\underline{X}_{ikn}))^2.$$

Обратим внимание, от параметра u_{i+k} календарного года зависит только размер убытка. Это отражает факт влияния чистой денежной инфляции только на размеры, но не на число убытков. Расчеты в рамках данной модели возможны исключительно при условии обратного гауссовского распределения (см. раздел 3.3.5).

Наконец, схожая с гамма-моделью логнормальная модель из раздела 3.3.4 преобразуется в модель отделения полностью аналогично гамма-модели.

До применения методов отделения необходимо выяснить, насколько весо-мы неизвестные календарные эффекты или сохранившиеся после нормировки на объем различия лет событий, не связанные с календарными эффектами. Поскольку оба вида перекрестных моделей (параметризация календарных лет или лет событий) содержат одинаковое число параметров (а именно $2I-1$ либо $2I$ в модели с обратным гауссовским распределением), при выборе метода удобно руководствоваться значением функции правдоподобия, получаемым после подстановки оценок параметров. Более сложный в плане прогнозирования, метод отделения предпочтителен, только когда его логарифмированное правдоподобие превышает логарифмированное правдоподобие обычного метода с перекрестной параметризацией не менее чем на $3,84/2$ (в силу асимптотического свойства метода отношения правдоподобий в этом случае речь идет об улучшении как минимум на одну степень свободы: $3,84 = 95\%$ -ная квантиль распределения хи-квадрат с 1 степенью свободы).

Методы отделения применяются в основном к треугольнику средних изменений, где годы событий обычно практически не различаются. С таким треугольником мы будем работать в следующем разделе.

3.4.3. РАЗДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА УБЫТКОВ И РАЗМЕРА УБЫТКА; ЛАГ-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

В главе 3.3 мы исследовали модели перекрестной параметризации вида $E(S_{ik}) = x_i y_k$ и выявили их сходство с моделями выравнивания из главы 2.4. Но в главе 3.3, в отличие от 2.4, мы не располагали информацией об объеме v_{ik} каждой отдельной ячейки (i, k) и в лучшем случае могли использовать одинаковый для всех ячеек одного года события объем v_i . Вместе с тем ясно, что в рамках одного года события i распределение совокупного убытка S_{ik} ячейки (i, k) меняет по годам развития как среднее значение, так и форму. Наглядным показателем масштабы этих изменений может служить число убытков, претерпевших изменение в соответствующем году развития: либо покрытых выплатой (если S_{ik} — сумма всех выплат), либо измененных по размеру (если S_{ik} — суммарное изменение выплат и резервов заявленных убытков). Как правило, эта информация бывает доступна. Если частичные выплаты ничтожны, то объем года развития можно измерить и количеством окончательно урегулированных убытков — при этом величина S_{ik} должна определяться как совокупный убыток по всем страховым событиям, окончательно урегулированным в k -м году развития.

Пусть n_{ik} , $i+k \leq I+1$, — число убытков i -го года события, изменившихся любым образом в k -м году развития, а N_{ik} — соответствующая случайная вели-

чина. По аналогии с подходом в разделе 2.4.8 мы можем достроить до квадратов отдельно друг от друга треугольник средних размеров изменений $\{s_{ik} / n_{ik} \mid i + k \leq I + 1\}$ и треугольник $\{n_{ik} \mid i + k \leq I + 1\}$ числа изменений, а затем вычислить математические ожидания $E(S_{ik})$, $i + k > I + 1$ будущего развития $E(S_{ik})$ как произведения оценок для $E(S_{ik} / N_{ik})$ и $E(N_{ik})$. Для этого, как и в разделе 2.4.8, надо предположить независимость $E(S_{ik} / N_{ik} \mid N_{ik})$ от N_{ik} в каждой ячейке.

Чтобы дополнить до квадрата *треугольника средних размеров изменений*, будем моделировать случайную величину S_{ik} / N_{ik} при заданном значении $N_{ik} = n_{ik}$ (как это было в разделе 2.4.8). Известную реализацию n_{ik} можно понимать как объем, лежащий в основе наблюдаемого совокупного значения s_{ik} . Тем самым задается индивидуальная мера объема для каждой ячейки (i, k) , $i + k \leq I + 1$. Это позволяет усовершенствовать методы главы 3.3 — как мы помним, они основаны на методах из главы 2.4, где каждая ячейка тоже обладает индивидуальным объемом. Стохастическая модель записывается в виде $E(S_{ik} / N_{ik} \mid N_{ik} = n_{ik}) = x_i y_k$, а модель дисперсии зависит от выбранного нами распределения. Например, в случае распределения Пуассона: $Var(S_{ik} / N_{ik} \mid N_{ik} = n_{ik}) = w \cdot x_i y_k / n_{ik}$, а в случае гамма-распределения: $Var(S_{ik} / N_{ik} \mid N_{ik} = n_{ik}) = (x_i y_k)^2 / (n_{ik} \alpha)$. Предпочтение отдается распределению, обеспечивающему максимальное значение функции правдоподобия.

Модель цепной лестницы из раздела 3.2.4 к треугольнику средних изменений не подходит, поскольку никакая функция предыдущих значений $s_{i1} / n_{i1}, \dots, s_{ik} / n_{ik}$ не позволит постулировать связь со следующим средним $s_{i,k+1} / n_{i,k+1}$. Напомним, в разделе 3.3.2 нам удалось вывести метод цепной лестницы из распределения Пуассона только благодаря неестественной мере объема $v_{ik} = 1$. Теперь же мы работаем с реальной мерой объема n_{ik} .

В отличие от главы 2.4, здесь можно априори ожидать, что среднее приращение убытка $E(S_{ik} / N_{ik})$ в фиксированном k -м году развития практически не будет меняться по годам событий. Если это на самом деле так, то допускается использование методов из разделов 3.2.2 и 3.2.3, но в формулах необходимо заменить v_i на n_{ik} и учесть зависимость нового объема от года развития. При наличии же инфляции или других календарных эффектов, влияющих на среднее приращение $E(S_{ik} / N_{ik} \mid N_{ik})$, рекомендуется метод отделения из раздела 3.4.2. Наиболее свободный от влияний лет событий (см. раздел 3.4.2) треугольник $\{s_{ik} / n_{ik}\}$ средних изменений наилучшим образом подходит для применения методов отделения.

Для экстраполяции *треугольника $\{n_{ik}\}$ числа изменений* опишем случайную величину N_{ik} распределением Пуассона. Как показано в разделе 3.3.2, оценивание параметров a_i, b_k модели

$$E(N_{ik}) = a_i b_k$$

по методу максимального правдоподобия приводит к методу цепной лестницы для оценки будущих N_{ik} , $i + k > I + 1$. Величина N_{ik} не обязательно должна удовлетворять условию Пуассона $Var(N_{ik}) = E(N_{ik})$, не всегда справедливому на практике, особенно при большом числе убытков. Более того, разрешается приближенное представление величины N_{ik} в виде $N_{ik} = w \underline{N}_{ik}$, где $w > 0$, а \underline{N}_{ik} рас-

пределена по закону Пуассона (модифицированное распределение Пуассона — см. раздел 1.3.7). Такой способ определения N_{ik} обеспечивает возможность неравенства $Var(N_{ik}) > E(N_{ik})$. Использованию других моделей распределения величины N_{ik} препятствует требование независимости величин $N_{i1}, N_{i2}, \dots, N_{ii}$ при перекрестной параметризации. Нетрудно убедиться, что величины N_{i1}, \dots, N_{ii} (задающие распределение убытков i -го года события по годам развития) независимы тогда и только тогда, когда сумма $N_{i1} + \dots + N_{ii}$ распределена по закону Пуассона. Позже в этом разделе мы обратимся и к непугассоновским моделям.

А сейчас познакомим читателя еще с одним способом моделирования числа изменений N_{ik} , когда временной промежуток между моментом наступления убытка и моментом его изменения описывается так называемым *лаг-распределением*. Для каждого изменившегося убытка рассмотрим временной промежуток от момента наступления до момента изменения как случайную величину («лаг»). Году события i , очевидно, соответствуют $N_{i1} + \dots + N_{ii}$ таких случайных величин (в действительности их может быть больше, если развитие не заканчивается в I -м году). Поскольку интересующие нас моменты времени, вообще говоря, известны только с точностью до года, предположим наступление убытков только в середине года события. Тогда у каждого из N_{ik} изменившихся в году развития $k > 1$ убытков срок от момента наступления до момента изменения будет принадлежать лаг-интервалу $(k - 1,5; k - 0,5]$. У N_{i1} убытков, изменившихся в первом году развития (совпадающего с годом события), срок от момента события до момента изменения может принадлежать только полуинтервалу $(0; 0,5]$.

Будем считать $N_{i1} + \dots + N_{ii}$ временных интервала независимыми и одинаково распределенными случайными величинами с функцией распределения F_i . В этом случае наблюдения $n_{i1}, n_{i2}, \dots, n_{i,I+1-i}$ представляют собой выборку из отсеченного в точке $t_i = I + 1 - i - 0,5$ распределения

$$F_i(t) / F_i(t_i), \quad 0 < t < t_i.$$

(Если изменения одного и того же убытка могут происходить в нескольких годах развития, то временные переменные не будут независимыми. Для достижения независимости следует взять за N_{ik} число убытков, окончательно урегулированных в году развития k , либо соответствующим образом определить число вновь зарегистрированных убытков и S_{ik} . Но и без этих ограничений можно обеспечить независимость лагов, если определить лаг как «срок от момента наступления» случайно выбранного изменившегося убытка.)

Гистограмма, построенная по наблюдениям n_{i1}, \dots, n_{ii} первого года события, дает нам примерное представление о форме плотности распределения $F_i(t) / F_i(t_i)$. В общем случае получается унимодальный правоасимметричный вид, чем открывается широкий выбор возможных моделей для F_i : гамма-, лог-нормальное, обратное гауссовское и другие распределения из таблицы 1.4.3.7. Поскольку мы имеем дело с агрегированными данными и при оценке параметров будем вынуждены вычислять интервальные вероятности, для нас предпочтительна функция распределения, легко рассчитываемая в явном виде.

Нет смысла варьировать оба параметра распределения F_i по всем i , $1 \leq i \leq I$, тем более что ближайшие годы событий I и $I - 1$, представленные, соответ-

ственно, только одним и двумя наблюдениями, в этом случае оказались бы чрезмерно параметризованными. Обычно предполагается, что F_i , $1 \leq i \leq I$, имеют индивидуальные скалярные параметры (например, среднее значение), но одинаковый параметр формы (для двух последних лет событий скалярный параметр тоже принимается одинаковым). Нередко и скалярный параметр удается установить одинаковым для всех лет событий и обойтись, таким образом, всего двумя параметрами.

В любом случае значения параметров распределения подбираются так, чтобы в каждом году события i определенная слева от точки $t_i = I + 1 - i - 0,5$ функция $F_i(t) / F_i(t_i)$ как можно точнее описывала наблюдения $n_{i1}, \dots, n_{i,I+1-i}$. Эта задача аналогична рассмотренной в части Б раздела 1.4.3, только теперь распределение подгоняется к I сгруппированным выборкам одновременно. В принципе, для этого нам подойдет любой из методов, представленных в разделе 1.4.3. Выберем сначала метод минимума хи-квадрат. Если считать наблюдаемое совокупное число

$$n_{i+} = n_{i1} + \dots + n_{i,I+1-i}$$

«истинным», то в рамках распределения F_i для k -го года развития ожидается

$$\hat{n}_{ik} = n_{i+} (F_i(k - 0,5) - F_i(k - 1,5)) / F_i(t_i)$$

изменений (в случае $k = 1$ и $t \leq 0$ полагается $F_i(t) = 0$). Тогда параметры распределения F_i находятся из условия минимальности статистики хи-квадрат

$$\sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^{I+1-i} \frac{(n_{ik} - \hat{n}_{ik})^2}{\hat{n}_{ik}},$$

позволяющей заодно проверить согласованность выбранного распределения с наблюдениями (число степеней свободы составляет $I(I+1)/2 - I$ минус число оцененных параметров). В качестве стартовых значений для итерационного процесса могут служить, например, эмпирические моменты наблюдений первого года события.

Для получения оценок параметров распределения F_i по методу максимума правдоподобия максимизируем выражение

$$\prod_{i=1}^I \prod_{k=1}^{I+1-i} ((F_i(k - 0,5) - F_i(k - 1,5)) / F_i(t_i))^{n_{ik}}.$$

Оценка будущего числа изменений вычисляется подстановкой индексов $i + k > I + 1$ в приведенную выше формулу для \hat{n}_{ik} .

Метод с лаг-распределением во многом допускает свободу действий:

- Выбор моделей распределения для F_i весьма богат и включает распределения с тремя и более параметрами.
- Если сначала назначить каждому году события $< I$ индивидуальный скалярный параметр, то по его постоянству или непостоянству можно судить об изменениях скорости развития лет событий. При отсутствии возможности установить единый скалярный параметр разрешается выбрать

одинаковый параметр для группы соседних лет событий или предположить линейную зависимость скалярного параметра от года события i .

- За счет небольшого смещения границ лаг-интервалов часто удается достичь лучшего соответствия наблюдениям. Так, для первого года развития можно выбрать лаг-интервал $(0; 0,7]$ вместо $(0; 0,5]$, а для второго $(0,7; 1,5]$. Удобно варьировать лаг-интервал с помощью дополнительного параметра $s \in (0; 1)$. Соответствующий наблюдению n_{ik} лаг-интервал $(k - 1,5; k - 0,5]$ заменяется интервалом $(k - s - 1; k - s]$, где s оптимизирует правдоподобие или значение статистики хи-квадрат.

Описанный способ подгонки распределения F_i к наблюдениям $n_{i1}, \dots, n_{i,I+1-i}$ представляет собой всего лишь функциональное сглаживание с последующей экстраполяцией. Для получения более общей стохастической модели требуется задать закон распределения совокупного числа

$$N_i = N_{i1} + \dots + N_{i,I+1-i} + \text{возможные будущие изменения}$$

всех изменившихся убытков i -го года события. Допустим сначала, что N_i имеет распределение Пуассона с математическим ожиданием $v_i \theta$, где объем v_i известен, а частота убытков θ неизвестна и одинакова для всех лет событий. Тогда наблюдаемое число

$$N_{i+} = N_{i1} + \dots + N_{i,I+1-i}$$

изменений будет распределено по закону Пуассона с математическим ожиданием

$$\theta_i = v_i \theta F_i(t_i).$$

При заданном значении $N_{i+} = n_{i+}$ распределение величины N_{ik} по годам развития с 1 по $I + 1 - i$ подчиняется полиномиальному закону, где вероятности $p_{i1}, \dots, p_{i,I+1-i}$ вычисляются по формуле

$$p_{ik} = \frac{F_i(k - 0,5) - F_i(k - 1,5)}{F_i(t_i)}.$$

Эта модель обладает правдоподобием

$$L = \prod_{i=1}^I \left(\frac{\exp(-\theta_i)}{n_{i+}!} \cdot \theta_i^{n_{i+}} \cdot n_{i+}! \prod_{k=1}^{I+1-i} (p_{ik}^{n_{ik}} / n_{ik}!) \right).$$

Из условия максимальности $\ln(L)$ как функции параметра частоты убытков θ (он содержится в θ_i) следует

$$\hat{\theta} = \sum_{i=1}^I n_{i+} / \sum_{i=1}^I v_i F_i(t_i).$$

Производные от $\ln(L)$ по параметрам лаг-распределения F_i хоть и упрощаются за счет сокращения элемента $F_i(t_i)$ (присутствующего в θ_i и p_{ik}), как правило, все равно не вычисляются в явном виде.

Больше, чем распределение Пуассона, для описания N_i подходит *отрицательное биномиальное распределение*, получающееся в результате смешивания распределений Пуассона с помощью гамма-распределения (см. раздел 1.4.2). В этом случае N_{i+} тоже имеет смешанное Пуассон-гамма-распределение с тем же параметром формы гамма-распределения. Точнее говоря, если N_i — отрицательная биномиальная величина с параметрами α и $v_i\theta / (\alpha + v_i\theta)$, то N_{i+} тоже будет отрицательной биномиальной величиной, но с параметрами α и $q_i = v_i\theta F_i(t_i) / (\alpha + v_i\theta F_i(t_i))$. Правдоподобие отрицательной биномиальной модели задается формулой

$$L = \prod_{i=1}^I \left\{ \binom{\alpha + n_{i+} - 1}{n_{i+}} \cdot q_i^{n_{i+}} (1 - q_i)^\alpha \cdot n_{i+}! \prod_{k=1}^{I+1-i} \left(p_{ik}^{n_{ik}} / n_{ik}! \right) \right\}.$$

Хотя здесь, как и в предыдущем случае, функция правдоподобия несколько упрощается после сокращения элемента $F_i(t_i)$, оценивание параметров распределения выливается в довольно трудоемкий процесс. Существенно облегчить вычислительную работу позволяет специально предназначенное для этих задач программное обеспечение («Solver»).

С вопросом о целесообразности разделения числа и размеров убытков адресуем читателя к разделу 2.4.8.

3.4.4. РАЗДЕЛЕНИЕ IBNR- И IBNER-УБЫТКОВ

В разделе 3.1.1 объяснялось различие между настоящими поздними убытками (IBNR), не заявленными к моменту анализа, и IBNER- или RBNS-убытками, которые хоть и известны, но урегулированы не полностью. До настоящего момента при изложении методов это различие никак не учитывалось. В реальности оба источника неопределенности существуют одновременно, и зачастую форма имеющихся в распоряжении данных не позволяет различить IBNR- и IBNER-убытки. Но страховые компании обычно в состоянии собрать информацию, необходимую для разделения двух видов убытков. Более того, при заключении договора перестрахования эксцедента убытка (см. раздел 4.1.3) они обязаны по запросу перестраховщика предоставить статистику развития каждого отдельного убытка, превышающего установленную границу. Далее мы увидим, что IBNR- и IBNER-убытки моделируются по-разному, а это вполне серьезное основание для их разделения.

Разложим наблюдаемое в k -м году развития приращение

$$S_{ik} = C_{ik} - C_{i,k-1}$$

суммарного убытка i -го года события на две компоненты

$$S_{ik} = T_{ik} + U_{ik}.$$

Элемент U_{ik} соответствует убыткам, не заявленным до k -го года развития (новые убытки), а T_{ik} — убыткам, заявленным до k -го года развития (изменения в открытых убытках). Если S_{ik} — сумма произошедших убытков (состоящая из

выплат и изменений резервов заявленных убытков), то T_{ik} может принимать отрицательные значения (когда преобладает отрицательное приращение резервов заявленных убытков). Согласно определению, $T_{i1} = 0$, и, следовательно, $C_{i1} = S_{i1} = U_{i1}$.

При моделировании *настоящих* (с позиции года развития $k-1$) *поздних убытков* U_{ik} мы вправе исходить из независимости U_{ik} от $U_{i1}, \dots, U_{i,k-1}$ (если только некоторые отдельные убытки не объединены общей причиной, как это бывает при так называемых серийных убытках) и от $T_{i1}, \dots, T_{i,k-1}$. Это позволяет сразу строить безусловное математическое ожидание величины U_{ik} , зависящее, очевидно, только от года развития k и от известного объема v_i портфеля i -го года события. Получается модель

$$E(U_{ik}) = v_i m_k, \quad 1 \leq i, k \leq I,$$

$$\text{Var}(U_{ik}) = v_i s_k^2, \quad 1 \leq i, k \leq I,$$

с неизвестными параметрами m_k, s_k . Как мы помним, такой вид имеет модель из раздела 3.2.2, где предполагалась независимость нормированных приращений убытков от года события.

Иначе выглядит *модель для приращения* T_{ik} открытых убытков. Величина T_{ik} обычно не зависит от U_{ik} , как мы и будем считать, но зависит от прошлого развития убытков. Все убытки, входящие в T_{ik} , в предыдущем году развития $k-1$ уже были известны, поэтому логично поставить математическое ожидание величины T_{ik} в зависимость от совокупного числа или совокупного размера открытых (к концу года развития $k-1$) убытков. Действительно, при большом количестве открытых убытков суммарное изменение будет больше, чем при малом. Учитывая зависимость относительного изменения от года развития, строим модель

$$E(T_{ik} | D_{i,k-1}) = B_{i,k-1} h_{k-1},$$

$$\text{Var}(T_{ik} | D_{i,k-1}) = B_{i,k-1} t_{k-1}^2,$$

где $D_{i,k-1}$ обозначает совокупность всех наблюдений от года события i до года развития $k-1$ включительно, h_k, t_k — неизвестные параметры, а $B_{i,k-1}$ — суммарный резерв заявленных убытков, сформированный к концу года развития $k-1$. Значения B_{ik} не могут быть получены на основании известных данных U_{ik} и T_{ik} , а требуются в качестве дополнительной информации. Для упрощения модели предположим (приближенное) равенство

$$B_{ik} / C_{ik} = b_k, \quad 1 \leq i \leq I,$$

означающее, что резервы B_{ik} заявленных убытков во всех годах событий составляют примерно одинаковую долю b_k от совокупного убытка C_{ik} . Тогда можно объединить b_k с h_k или соответственно с t_k . Обозначив $h_k = b_k h_k$, $t_k^2 = b_k t_k^2$, приходим к модели

$$E(T_{ik} | D_{i,k-1}) = C_{i,k-1} h_{k-1},$$

$$\text{Var}(T_{ik} | D_{i,k-1}) = C_{i,k-1} t_{k-1}^2.$$

Вытекающая отсюда модель для C_{ik}

$$E(C_{ik} | D_{i,k-1}) = E(C_{i,k-1} + T_{ik} + U_{ik} | D_{i,k-1}) = C_{i,k-1}(1 + h_{k-1}) + v_i m_k,$$

представляет собой комбинацию модели цепной лестницы и модели из раздела 3.2.2. Для неизвестных параметров получаются следующие несмещенные оценки

$$\hat{m}_k = \sum_{i=1}^{I+1-k} U_{ik} / \sum_{i=1}^{I+1-k} v_i, \quad 1 \leq k \leq I,$$

$$\hat{s}_k^2 = \frac{1}{I-k} \sum_{i=1}^{I+1-k} v_i \left(\frac{U_{ik}}{v_i} - \hat{m}_k \right)^2, \quad 1 \leq k \leq I-1,$$

$$\hat{h}_k = \sum_{i=1}^{I-k} T_{i,k+1} / \sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}, \quad 1 \leq k \leq I-1,$$

$$\hat{t}_k^2 = \frac{1}{I-k-1} \sum_{i=1}^{I-k} C_{ik} \left(\frac{T_{i,k+1}}{C_{ik}} - \hat{h}_k \right)^2, \quad 1 \leq k \leq I-2.$$

Как в разделах 3.2.2 и 3.2.4, положим

$$\hat{s}_I^2 = \min\{\hat{s}_k^2 | 1 \leq k \leq I-1\},$$

$$\hat{t}_{I-1}^2 = \min\{\hat{t}_{I-2}^4 / \hat{t}_{I-3}^2, \hat{t}_{I-3}^2\}.$$

В силу независимости U_{ik} и T_{ik} оценки \hat{m}_k и \hat{h}_{k-1} независимы.

Введем обозначения для известных данных

$$D = \{U_{ik}, T_{ik} | i+k \leq I+1\},$$

$$D_i = \{U_{ik}, T_{ik} | 1 \leq k \leq I+1-i\}.$$

Предполагая независимость данных различных лет событий при $k > I+1-i$, имеем

$$E(C_{ik} | D) = E(C_{ik} | D_i) = E(E(C_{ik} | D_{i,k-1}) | D_i) = v_i m_k + E(C_{i,k-1} | D_i)(1 + h_{k-1}).$$

Последовательное применение этой формулы приводит к равенству (с обозначением $g_k = 1 + h_k$)

$$E(C_{ii} | D) = C_{i,I+1-i} g_{I+1-i} \cdots g_{I-1} + \sum_{k=I+2-i}^I v_i m_k g_k \cdots g_{I-1}.$$

Согласно последней формуле, средний конечный убыток находится путем наращения текущего уровня $C_{i,I+1-i}$ и ожидаемых поздних убытков $v_i m_k$, $I+2-i \leq k \leq I$, с помощью множителей g_j . Оценка конечного убытка C_{ii} составит (с обозначением $\hat{g}_k = 1 + \hat{h}_k$)

$$\hat{C}_{ii} = C_{i,I+1-i} \hat{g}_{I+1-i} \cdots \hat{g}_{I-1} + \sum_{k=I+2-i}^I v_i \hat{m}_k \hat{g}_k \cdots \hat{g}_{I-1}.$$

а оценка резерва R_i

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{ii} - C_{i,I+1-i}.$$

Обе оценки несмещенные, поскольку математическое ожидание произведения оценок параметров \hat{g}_k , \hat{m}_k равно произведению параметров (доказательство см. в разделе 3.2.4).

Средняя квадратичная ошибка оценки \hat{R}_i равна

$$E((\hat{R}_i - R_i)^2 | D) = E((\hat{C}_{ii} - C_{ii})^2 | D) = \text{Var}(C_{ii} | D) + (E(C_{ii} | D) - \hat{C}_{ii})^2 = \\ = \text{Var}(C_{ii} | D_i) + (E(C_{ii} | D_i) - \hat{C}_{ii})^2.$$

При $k > I+1-i$ справедливо

$$\text{Var}(C_{ik} | D_i) = E(\text{Var}(C_{ik} | D_{i,k-1}) | D_i) + \text{Var}(E(C_{ik} | D_{i,k-1}) | D_i) = \\ = E(\text{Var}(C_{i,k-1} + U_{ik} + T_{ik} | D_{i,k-1}) | D_i) + \\ + \text{Var}(E(C_{i,k-1} + U_{ik} + T_{ik} | D_{i,k-1}) | D_i) = \\ = E(v_i s_k^2 + C_{i,k-1} t_{k-1}^2 | D_i) + \text{Var}(C_{i,k-1} + v_i m_k + C_{i,k-1} h_{k-1} | D_i) = \\ = v_i s_k^2 + E(C_{i,k-1} | D_i) t_{k-1}^2 + \text{Var}(C_{i,k-1} | D_i) g_{k-1}^2.$$

Последовательно применяя эту формулу одновременно с формулой

$$E(C_{ik} | D_i) = v_i m_k + E(C_{i,k-1} | D_i) g_{k-1}$$

и учитывая равенства $E(C_{i,I+1-i} | D_i) = C_{i,I+1-i}$ и $\text{Var}(C_{i,I+1-i} | D_i) = 0$, находим

$$\text{Var}(C_{ii} | D_i) = C_{i,I+1-i} \sum_{k=I+1-i}^{I-1} g_{I+1-i} \cdots g_{k-1} t_k^2 g_{k+1}^2 \cdots g_{I-1}^2 + \\ + \sum_{j=I+2-i}^{I-1} v_i m_j \sum_{k=j}^{I-1} g_j \cdots g_{k-1} t_k^2 g_{k+1}^2 \cdots g_{I-1}^2 + \sum_{j=I+2-i}^I v_i s_j^2 g_j^2 \cdots g_{I-1}^2.$$

Эта компонента средней квадратичной ошибки оценивается посредством замены параметров g_k , t_k , m_k , s_k несмещенными оценками.

Для вывода оценки другой компоненты $(E(C_{ii} | D_i) - \hat{C}_{ii})^2$ средней квадратичной ошибки рассмотрим математическое ожидание

$$E(C_{ii} | D_i) = C_{i,I+1-i} g_{I+1-i} \cdots g_{I-1} + \sum_{k=I+2-i}^I v_i m_k g_k \cdots g_{I-1}$$

как функцию

$$F_i(m, g) = F_i(m_2, \dots, m_I, g_1, \dots, g_{I-1}) = E(C_{ii} | D_i)$$

от параметров $m_2, \dots, m_I, g_1, \dots, g_{I-1}$ (из которых не все встречаются в каждом F_i). Тогда

$$\hat{C}_{ii} = F_i(\hat{m}_2, \dots, \hat{m}_I, \hat{g}_1, \dots, \hat{g}_{I-1}) = F_i(\hat{m}, \hat{g}).$$

Разложим эту функцию в ряд Тейлора в окрестности точки (m, g) до членов первого порядка

$$F_i(\hat{m}, \hat{g}) \approx F_i(m, g) + \sum_{j=2}^I (\hat{m}_j - m_j) \frac{\partial F_i}{\partial m_j} + \sum_{k=1}^{I-1} (\hat{g}_k - g_k) \frac{\partial F_i}{\partial g_k}$$

(все производные вычисляются в точке (m, g)). Тогда $(E(C_{ii} | D_i) - \hat{C}_{ii})^2$ составит в среднем

$$\begin{aligned} E(E(C_{ii} | D_i) - \hat{C}_{ii})^2 &= E(F_i(m, g) - F_i(\hat{m}, \hat{g}))^2 \approx \\ &\approx E \left(\sum_{j=2}^I (\hat{m}_j - m_j) \frac{\partial F_i}{\partial m_j} + \sum_{k=1}^{I-1} (\hat{g}_k - g_k) \frac{\partial F_i}{\partial g_k} \right)^2 = \\ &= \sum_{j=2}^I \text{Var}(\hat{m}_j) \left(\frac{\partial F_i}{\partial m_j} \right)^2 + \sum_{k=1}^{I-1} \text{Var}(\hat{g}_k) \left(\frac{\partial F_i}{\partial g_k} \right)^2, \end{aligned}$$

где учтена попарная некоррелированность оценок \hat{m}_j, \hat{g}_k . Производные

$$\frac{\partial F_i}{\partial m_j}(m, g) = v_i g_j \cdot \dots \cdot g_{I-1} \quad \text{при } j \geq I+2-i \text{ (0 иначе),}$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial g_k}(m, g) = \frac{C_{i, I+1-i} g_{I+1-i} \cdot \dots \cdot g_{I-1}}{g_k} + \sum_{j=I+2-i}^k \frac{v_i m_j g_j \cdot \dots \cdot g_{I-1}}{g_k}$$

при $k \geq I+1-i$ (0 иначе)

оцениваются соответствующими значениями в точке (\hat{m}, \hat{g}) . Далее,

$$\text{Var}(\hat{m}_j) = \sum_{i=1}^{I+1-j} \text{Var}(U_{ij}) / \left(\sum_{i=1}^{I+1-j} v_i \right)^2 = s_j^2 / \sum_{i=1}^{I+1-j} v_i,$$

и параметр s_j^2 оценивается величиной \hat{s}_j^2 . Как и в методе цепной лестницы

$$\text{Var}(\hat{g}_k) = \text{Var}(\hat{h}_k) = t_k^2 E \left(\left(\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik} \right)^{-1} \right),$$

и соответствующая оценка равна $\hat{t}_k^2 / \sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}$.

Мы построили оценки для обеих составляющих $(E(C_{ii} | D_i) - \hat{C}_{ii})^2$ и $\text{Var}(C_{ii} | D_i)$ средней квадратичной ошибки $\text{mse}(\hat{C}_{ii})$ оценки \hat{C}_{ii} . Квадратный корень из суммарной оценки дает стандартную ошибку величины \hat{C}_{ii} . ■

На примере модели, для которой только что была выведена стандартная ошибка, мы хотим осветить *вопрос принципиального характера*. Напомним вид модели:

$$E(U_{i,k+1}) = v_i m_{k+1}, \quad \text{Var}(U_{i,k+1}) = v_i s_{k+1}^2,$$

$$E(T_{i,k+1} | D_{ik}) = C_{ik} h_k, \quad \text{Var}(T_{i,k+1} | D_{ik}) = C_{ik} t_k^2.$$

Из этих равенств следует

$$E(S_{i,k+1} | D_{ik}) = v_i m_{k+1} + C_{ik} h_k \quad \text{или} \quad E(S_{i,k+1} / v_i | D_{ik}) = m_{k+1} + h_k C_{ik} / v_i.$$

Последнее выражение при каждом фиксированном k может пониматься как обычная линейная регрессия $S_{i,k+1} / v_i$ по C_{ik} / v_i . Значит, параметры m_{k+1} и h_k удалось бы оценить и в отсутствие данных $U_{i,k+1}$ и $T_{i,k+1}$, например с помощью метода наименьших квадратов.

Хотя получаемая в этом случае модель дисперсии

$$\text{Var}(S_{i,k+1} | D_{ik}) = v_i s_{k+1}^2 + C_{ik} t_k^2$$

не позволяет без каких-либо преобразований осуществить взвешивание регрессии (неизвестные параметры s_{k+1}, t_k не выносятся в один коэффициент пропорциональности), не это главный аргумент против применения регрессионной модели. Гораздо важнее, что оценки параметров m_{k+1} и h_k на основании немногочисленных данных $S_{i,k+1} / v_i, 1 \leq i \leq I-k$, куда менее точны, чем на основании детальных данных $U_{i,k+1}, T_{i,k+1}$. Мы делаем вывод: детализация модели и данных способствует уменьшению стандартной ошибки.

3.4.5. МЕТОД НА ОСНОВЕ ДАННЫХ ПО ОТДЕЛЬНЫМ УБЫТКАМ

Страховая компания обычно располагает информацией о развитии каждого отдельного страхового случая от момента его регистрации до текущего состояния (или до урегулирования). Эта информация хранится в электронной базе данных и легко доступна. В настоящем разделе представлен метод, задействующий полную базу данных и позволяющий рассчитать индивидуальный IBNER-резерв для каждого убытка. Последнее, в частности, очень полезно для апостериорной тарификации договоров перестрахования эксцедента убытка (перестраховщик вправе получить от страховщика подробную информацию о развитии каждого отдельного убытка, по крайней мере из определенного диапазона размеров).

Предположим, что по каждому убытку $n = 1, 2, \dots$ года события $i = 1, \dots, I$ известны *уровень выплаты* A_{ikn} и *уровень резерва* B_{ikn} на конец каждого года развития $k = 1, \dots, I$ вплоть до текущего состояния $(A_{i, I+1-i, n}, B_{i, I+1-i, n})$. В этом случае развитие убытка можно представить в виде *последовательности тогек*

$$(A_{ikn}, B_{ikn}), \quad k = 1, 2, \dots, I,$$

на плоскости *выплата-резерв*. Первые $I+1-i$ точек этой последовательности известны, а неизвестные точки $(A_{i, I+2-i, n}, B_{i, I+2-i, n}), \dots, (A_{iIn}, B_{iIn})$ должны быть спрогнозированы. Особый интерес для нас представляет конечное состояние (A_{iIn}, B_{iIn}) . В идеале по прошествии I лет развития убыток должен быть полностью урегулирован и $B_{iIn} = 0$; чем больше длина I рассматриваемого периода развития, тем это равенство вероятнее.

Для установления связи с введенными ранее обозначениями заметим, что суммарное значение C_{ik} всех произошедших убытков (выплаты плюс резервы

заявленных убытков) i -го года события на конец k -го года развития определяется по формуле

$$C_{ik} = \sum_{n \geq 1} (A_{ikn} + B_{ikn}).$$

Изображение развития убытка в виде последовательности точек на плоскости выплата—резерв подсказывает дальнейший ход наших действий. *Логично продолжить состояние* $(A_{i,I+1-i,n}, B_{i,I+1-i,n})$ *по аналогии с развитием похожих убытков более ранних лет событий*, разумеется, предварительно уточнив, во-первых, какие убытки считаются «схожими», и во-вторых, что значит продолжить состояние убытка по аналогии с развитием другого убытка. Поскольку это позволит нам найти только IBNER-резервы, далее потребуется задать способ оценки настоящих поздних убытков, о которых на текущий момент еще ничего не известно.

В роли *количественного показателя сходства* естественно рассмотреть обычное евклидово расстояние

$$d((A, B), (\underline{A}, \underline{B})) = \sqrt{(A - \underline{A})^2 + (B - \underline{B})^2}$$

на плоскости выплата—резерв. Однако этого еще недостаточно, чтобы определить для заданного убытка $(P_{i1n}, P_{i2n}, \dots, P_{i,I+1-i,n})$, где $P_{ikn} = (A_{ikn}, B_{ikn})$, ближайший, самый похожий убыток $(\underline{P}_1, \dots, \underline{P}_k)$, $k > I + 1 - i$, более раннего года события. Например, ближайшим может считаться убыток, минимизирующий сумму всех предыдущих расстояний

$$\sum_{j=1}^{I+1-i} d(P_{ijn}, \underline{P}_j)$$

либо взвешенную сумму предыдущих расстояний

$$\sum_{j=1}^{I+1-i} j \cdot d(P_{ijn}, \underline{P}_j),$$

либо максимальное расстояние

$$\max_{1 \leq j \leq I+1-i} d(P_{ijn}, \underline{P}_j),$$

либо текущее расстояние

$$d(P_{i,I+1-i,n}, \underline{P}_{I+1-i}).$$

Следуя логике метода цепной лестницы, мы выбираем последнюю из названных альтернатив, а именно *текущее расстояние*. Таким образом, из всех убытков $(\underline{P}_1, \dots, \underline{P}_j)$ с известным развитием, по крайней мере до года $j \geq k + 1$, самым похожим на убыток (P_1, \dots, P_k) , развитие которого известно до k -го года, признается убыток с наименьшим текущим расстоянием $d(P_k, \underline{P}_k)$.

Далее необходимо продолжить убыток (P_1, \dots, P_k) по аналогии с развитием его ближайшего по расстоянию «образца» $(\underline{P}_1, \dots, \underline{P}_k, \underline{P}_{k+1}, \dots, \underline{P}_j)$. Мы можем

продолжить убыток как на один год (до P_{k+1}), так и сразу на несколько лет (например, до P_j). По аналогии с методами главы 3.2 сначала продолжим убыток только на *один* год развития. Затем опять найдем самый похожий убыток (он может оказаться прежним) и с его помощью продолжим только что продолженный убыток на следующий год развития и т.д. Тогда задача сведется к отысканию для состояния убытка в k -м году развития $P_k = (A_k, B_k)$ ближайшего состояния $\underline{P}_k = (\underline{A}_k, \underline{B}_k)$ другого убытка с известным развитием, как минимум, до $(k + 1)$ -го года включительно и «продолжению P_k по образцу $\underline{P}_k \rightarrow \underline{P}_{k+1}$ ». Возможны два способа продолжения состояния $P_k = (A_k, B_k)$: *аддитивный*

$$\hat{P}_{k+1} = (\hat{A}_{k+1}, \hat{B}_{k+1}) = (A_k + \underline{A}_{k+1} - \underline{A}_k, B_k + \underline{B}_{k+1} - \underline{B}_k)$$

и *мультипликативный*

$$\hat{P}_{k+1} = (\hat{A}_{k+1}, \hat{B}_{k+1}) = (A_k \cdot \underline{A}_{k+1} / \underline{A}_k, B_k \cdot \underline{B}_{k+1} / \underline{B}_k).$$

Определенное таким образом мультипликативное продолжение имеет смысл только для так называемых *открытых состояний*, когда $A_k > 0$, $B_k > 0$ и $\underline{A}_k > 0$, $\underline{B}_k > 0$. Для *ожидающего состояния* $P_k = (0, B_k)$, $B_k > 0$, целесообразно взять за образец $\underline{P}_k \rightarrow \underline{P}_{k+1}$ также ожидающее состояние $\underline{P}_k = (0, \underline{B}_k)$, $\underline{B}_k > 0$, и определить мультипликативное продолжение как

$$\hat{P}_{k+1} = (\hat{A}_{k+1}, \hat{B}_{k+1}) = (\underline{A}_{k+1}, \underline{B}_{k+1}) \cdot B_k / \underline{B}_k = (\underline{A}_{k+1} \cdot B_k / \underline{B}_k, \underline{B}_{k+1} \cdot B_k / \underline{B}_k).$$

В этом случае у P_k есть шанс быть продолженным до открытого состояния, если \underline{P}_{k+1} открыто.

Урегулированное состояние $P_k = (A_k, 0)$, $A_k > 0$, можно оставить неизменным либо — если в наблюдаемых процессах убытков встречается возрождение урегулированных убытков — продолжить с помощью ближайшего урегулированного образца $\underline{P}_k \rightarrow \underline{P}_{k+1}$ по формуле

$$\hat{P}_{k+1} = (\hat{A}_{k+1}, \hat{B}_{k+1}) = (\underline{A}_{k+1}, \underline{B}_{k+1}) \cdot A_k / \underline{A}_k = (\underline{A}_{k+1} \cdot A_k / \underline{A}_k, \underline{B}_{k+1} \cdot A_k / \underline{A}_k).$$

В аддитивном случае ожидающее состояние тоже следует продолжать только по ожидающему образцу. Аналогичное правило действует и в отношении урегулированных состояний, если существует вероятность возрождения убытков. Во избежание отрицательных резервов аддитивное продолжение необходимо уточнить:

$$\hat{P}_{k+1} = (\hat{A}_{k+1}, \hat{B}_{k+1}) = (A_k + \underline{A}_{k+1} - A_k, \max(B_k + \underline{B}_{k+1} - B_k, 0)).$$

Таким образом, в качестве *образца* для продолжаемого состояния P_k , начиная с этого момента, допускаются только состояния \underline{P}_k того же года развития, того же *типа* (ожидающее, открытое, урегулированное) и с наблюдаемым ранее продолжением \underline{P}_{k+1} . Нам осталось определить схему продолжения состояния P_k при отсутствии образца (например, когда состояние P_k открыто, и в k -м году развития нет ни одного убытка более раннего года события с также открытым состоянием \underline{P}_k). В таких случаях разумно просто сохранять состояние P_k , приняв $\hat{P}_{k+1} = P_k$.

Мы подробно изложили процедуру последовательного продолжения текущего состояния $P_{i,I+1-i,n} = (A_{i,I+1-i,n}, B_{i,I+1-i,n})$ до заключительного года развития I . Повторим кратко: на каждом шаге для каждого убытка, состояние которого надо продолжить, определяется ближайшее, согласно евклидовой мере расстояния, образцовое состояние того же типа (ожидающее, открытое, урегулированное), и затем по указанным формулам строится аддитивное или мультипликативное продолжение по аналогии с развитием образца. Целесообразно брать за образец только фактически наблюдаемое развитие $P_k \rightarrow P_{k+1}$, а не искусственно построенное по изложенному алгоритму продолжения.

Предложенная схема, очевидно, представляет собой *усовершенствование методов из разделов 3.2.2 и 3.2.4* (метод на основе независимости нормированных приращений убытка от года события и метод цепной лестницы). Усовершенствование заключается в раздельном применении методов к треугольнику выплат и треугольнику резервов. Значит, оба метода из раздела 3.2 могут пониматься как частные случаи метода на основе данных по отдельным убыткам: в разделе 3.2 все состояния одного года развития наращиваются с помощью одинакового слагаемого, или, соответственно, одинакового множителя, тогда как здесь каждый убыток наращивается при помощи индивидуального слагаемого или множителя. Отсюда сразу следует, что в качестве образца может служить не только ближайшее по расстоянию состояние. Разрешается, например, взять за образец среднее трех или пяти ближайших состояний или среднее всех состояний, принадлежащих некоторой окрестности продолжаемого состояния (A_k, B_k) , скажем, всех $(\underline{A}_k, \underline{B}_k)$, удовлетворяющих условиям $A_k/2 < \underline{A}_k < 2A_k$ и $B_k/2 < \underline{B}_k < 2B_k$, или взвешенное по расстоянию среднее всех состояний того же года развития, имеющих известное продолжение. Как уже говорилось ранее, если взять невзвешенное среднее всех состояний, то получится метод из раздела 3.2.2 или 3.2.4, применяемый раздельно к выплатам и резервам.

Наиболее убедительной из всех перечисленных альтернатив кажется взвешенное среднее: с одной стороны, в нем учитываются все наблюдаемые убытки (того же типа, что и продолжаемое состояние), а с другой — воплощается идея уподобления развитий убытков. Если для продолжаемого состояния (A_k, B_k) находится несколько образцов $(\underline{A}_{kj}, \underline{B}_{kj}) \rightarrow (\underline{A}_{k+1,j}, \underline{B}_{k+1,j})$, $1 \leq j \leq J$, то возможны и несколько способов построения взвешенного среднего. Мы определим вес как величину, обратную расстоянию от образца j до продолжаемого состояния,

$$w_j = (d((A_k, B_k), (\underline{A}_{kj}, \underline{B}_{kj})))^{-1}.$$

В этом случае среднее образцов имеет вид

$$\left(\frac{\sum w_j \underline{A}_{kj}}{\sum w_j}, \frac{\sum w_j \underline{B}_{kj}}{\sum w_j} \right) \rightarrow \left(\frac{\sum w_j \underline{A}_{k+1,j}}{\sum w_j}, \frac{\sum w_j \underline{B}_{k+1,j}}{\sum w_j} \right) \quad (\text{суммирование ведется по } j).$$

Отсюда получим приращения

$$x_k = \sum w_j (\underline{A}_{k+1,j} - \underline{A}_{kj}) / \sum w_j,$$

$$y_k = \sum w_j (\underline{B}_{k+1,j} - \underline{B}_{kj}) / \sum w_j,$$

и множители развития

$$f_k = \sum w_j \underline{A}_{k+1,j} / \sum w_j \underline{A}_{kj},$$

$$h_k = \sum w_j \underline{B}_{k+1,j} / \sum w_j \underline{B}_{kj},$$

$$\hat{f}_k = \sum w_j \underline{A}_{k+1,j} / \sum w_j \underline{B}_{kj},$$

$$\hat{h}_k = \sum w_j \underline{B}_{k+1,j} / \sum w_j \underline{A}_{kj}$$

(суммирование везде ведется по всем образцам того же типа, что и продолжаемое состояние).

При таком подходе аддитивное продолжение открытого состояния (A_k, B_k) строится по правилу

$$(\hat{A}_{k+1}, \hat{B}_{k+1}) = (A_k + x_k, \max(B_k + y_k, 0)),$$

а мультипликативное — по правилу

$$(\hat{A}_{k+1}, \hat{B}_{k+1}) = (A_k f_k, B_k h_k).$$

При продолжении ожидающего состояния не исключена ситуация, когда все образцовые состояния остаются ожидающими, и только одно переходит в открытое. Руководствуясь средним значением образцов, мы рисковали бы получить нереалистично малый размер выплаты для продолжаемого убытка, заведомо оказавшегося бы открытым, в отличие от почти всех своих образцов. Поэтому имеет смысл несколько уточнить способ построения среднего. Для трех типов состояний: ожидающее, открытое, урегулированное — допускаются следующие *возможности переходов*:

ожидающее	→ ожидающее
ожидающее	→ открытое
ожидающее	→ урегулированное
открытое	→ открытое
открытое	→ урегулированное
урегулированное	→ урегулированное

Некоторые переходы (урегулированное → открытое), а также типы состояний (ошибочное или возрожденное) ради простоты мы опустили. Для продолжаемого состояния выбирается вариант перехода, соответствующий его ближайшему по расстоянию образцу, а среднее берется только по образцам с таким же переходом. Так, если продолжаемое состояние ожидающее $(0, B_k)$, и ближайший образец переходит от ожидающего к открытому, то $(0, B_k)$ также переводится в открытое состояние:

$$(\hat{A}_{k+1}, \hat{B}_{k+1}) = (x_k, \max(B_k + y_k, 0))$$

или

$$(\hat{A}_{k+1}, \hat{B}_{k+1}) = (B_k f_k, B_k h_k),$$

причем среднее в формуле для x_k , y_k , или, соответственно, f_k , h_k образуется только по убыткам, тоже переходящим от ожидающих к открытым.

Осталось оценить *резерв для настоящих поздних убытков*. Для этого потребуется мера объема v_i по каждому году события i , а также год регистрации каждого известного убытка. Годом регистрации будем считать год развития k , когда впервые выполнилось условие $(A_k, B_k) \neq (0, 0)$. Каждый известный убыток, зарегистрированный в году k , должен был произойти в году $i \leq I + 1 - k$. Разумно полагать, что до сих пор не известные убытки, произошедшие в годах событий $j > I + 1 - k$, также могут быть зарегистрированы в k -м году развития. Пусть

$$U_{ik} = \Sigma(A_{ikn} + B_{ikn})$$

суммарное конечное состояние (оцененное в соответствии с изложенным выше алгоритмом для IBNER-резервов) всех убытков, произошедших в году события i и зарегистрированных в году k .

По аналогии с методами из разделов 3.2.2 и 3.4.4 будем исходить из предположения, что различие числа убытков, зарегистрированных в k -м году, по годам событий обусловлено главным образом различием объемов:

$$E(U_{ik}) = v_i m_k.$$

В этом случае суммарное конечное состояние года события $j > I + 1 - k$ оценивается на основании убытков, зарегистрированных в k -м году, по формуле

$$\hat{U}_{jk} = v_j \cdot \frac{U_{1k} + \dots + U_{I+1-k,k}}{v_1 + \dots + v_{I+1-k}}.$$

Существует и другой способ оценивания величины U_{ik} . Подобно методу цепной лестницы, предположим зависимость потенциала поздних убытков не от объема v_i , а от суммарного значения всех зарегистрированных до текущего момента убытков того же года события:

$$E(U_{i,k+1} | U_{i1}, \dots, U_{ik}) = (U_{i1} + \dots + U_{ik}) \cdot r_k.$$

Параметр r_k оценим обычным способом

$$\hat{r}_k = \sum_{i=1}^{I-k} U_{i,k+1} / \sum_{i=1}^{I-k} (U_{i1} + \dots + U_{ik}), \quad 1 \leq k \leq I-1.$$

Тогда оценка суммы поздних убытков j -го года события, зарегистрированных в k -м году, $k > I + 1 - j$, составит

$$\hat{U}_{jk} = (U_{j1} + \dots + U_{j,I+1-j})(1 + \hat{r}_{I+1-j}) \cdot \dots \cdot (1 + \hat{r}_{k-2})\hat{r}_{k-1}.$$

Теперь мы полностью описали процедуру оценивания конечного суммарного убытка одного года события. К сожалению, вывод средней квадратичной ошибки для этого вида моделей настолько громоздок, что нам пришлось его опустить. Рассмотренный метод особенно полезен для апостериорной тарификации договоров перестрахования эксцедента убытка в страховании гражданской ответственности (см. раздел 4.3.3). Получаемая таким образом информация о полном развитии каждого отдельного убытка позволяет суще-

ственно упростить расчет перестраховочных премий. При этом для перестрахования практически не важна стандартная ошибка оценки резерва. Куда больший интерес представляют колебания нормированных конечных значений убытка по годам событий.

3.4.6. ВЫВОД И УКАЗАНИЯ К ПРИМЕНЕНИЮ

В предыдущих разделах этой главы продемонстрированы возможности усовершенствования и расширения базовых моделей из глав 3.2 и 3.3. Применение усовершенствованных методов решающим образом зависит от состава статистических данных. В принципе, чем больше сведений учитывается при оценке резерва, тем меньше должна быть стандартная ошибка. Но иногда, особенно при малом объеме портфеля, в результате деления числа и размеров убытков либо IBNR- и IBNER-убытков характер развития данных проявляется менее отчетливо, чем до деления. Как бы то ни было, при наличии детализированной статистики представленные методы обязаны приниматься во внимание.

В заключение приведем несколько ссылок на публикации о применении методов настоящей главы. Два небольших примера применения метода отделения, основанного на модели Пуассона из раздела 3.4.2, читатель найдет в статье Тейлора (Taylor G. C. Separation of Inflation and other Effects from the Distribution of Non-Life Insurance Claim Delays // ASTIN Bulletin 1977, 9, p. 219–230). Об использовании лаг-распределений из раздела 3.4.3 сообщается в работах Вайснера (Weissner E. W. Estimation of the Distribution of Report Lags by the Method of Maximum Likelihood // Proceedings of the Casualty Actuarial Society, 1978, 65, p. 1–9) и Каминского (Kaminsky K. S. Prediction of IBNR Claim Counts by Modelling the Distribution of Report Lags // Insurance: Mathematics & Economics, 1987, 6, p. 151–159). Детальный анализ данных, разделенных на число и размеры убытков (см. раздел 3.4.3), представлен в статье Райта (Wright T. S. Stochastic Claims Reserving When Past Claim Numbers Are Known // Proceedings of the Casualty Actuarial Society, 1992, 79, p. 255–361). Пример применения метода из раздела 3.4.4 к данным перестрахования эксцедента убытка содержит статья Шнипера (Schnieper R. Separating True IBNR and IBNER Claims // ASTIN Bulletin, 1991, 21, p. 111–127).

3.5. Вывод

По сути дела, мы познакомились только с тремя различными типами методов, а именно двумя методами, не зависящими от вида распределения (аддитивным и мультипликативным), и методом с перекрестной параметризацией. Но и между этими тремя методами существует зависимость: аддитивный метод может пониматься как частный случай метода с перекрестной параметризацией (когда все параметры лет событий одинаковы), мультипликативный метод (цепной лестницы) тоже был обоснован в рамках модели перекрестной параметризации (см. раздел 3.3.1). Тем не менее, благодаря широким возможностям модификаций и усовершенствований трех основных методов, в совокупности получается более чем достаточный инструментарий для анализа данных и оценки резерва убытка.

Мы не раз акцентировали внимание читателя на необходимости расчета стандартной ошибки при определении резерва. Расширить представление о качестве полученной оценки резерва позволяет исследование влияния изменений входных данных на результат расчета (анализ чувствительности). Кроме того, опытный практик, как правило, располагает дополнительной информацией, не вовлекаемой в моделирование, но учитываемой при установлении окончательного размера резерва.

В разделе 3.1.2 мы отметили важную роль резерва для видов страхования с долгим развитием убытка. В США и Канаде в 1993 году введено обязательное актуарное обоснование резерва убытков. В Германии на сегодняшний день это требование относится только к резервам на покрытие выплат в страховании жизни, медицинском страховании, страховании несчастных случаев, а также в пенсионном страховании. Но, по всей видимости, такой же порядок в скором времени будет принят и для резерва убытка в страховании гражданской ответственности. Все это оправдывает наше подробное изложение темы «Резервирование».

Метод цепной лестницы, благодаря возможности анализа и проверок (см. разделы 3.2.5–3.2.7), остается основным методом резервирования. Предпочтение другим методам отдается только в случаях, когда их стандартная ошибка значительно меньше стандартной ошибки метода цепной лестницы, или при наличии детализованных данных. Для большинства методов, встречающихся в литературе по страховой математике и не рассмотренных здесь, не указан способ расчета стандартной ошибки. Эта задача при необходимости решается самим пользователем. Большое количество числовых примеров к детерминированным и стохастическим методам приводится в книге Тейлора (*Taylor G. C. Loss Reserving: An Actuarial Perspective. Boston: Kluwer, 2000*). В ней интересующийся читатель найдет еще целый ряд методов резервирования, правда, без формулы стандартной ошибки и без числовых примеров. Полезную информацию и множество небольших числовых примеров содержит брошюра Ван Игена (*Van Eeghen J. Loss reserving methods. Rotterdam: Nationale-Nederlanden, 1981*), а также изданное в 1990 году Лондонским институтом актуариев руководство по резервированию (*Claims Reserving Manual*).

ЧАСТЬ 4

ДЕЛЕНИЕ

РИСКА

Содержание четвертой части

4.1. Постановка проблемы, обзор, причины и формы	285
4.1.1. Постановка проблемы и обзор	285
4.1.2. Причины и формы деления риска между страховой компанией и страхователем	286
4.1.3. Причины и формы деления риска между страховщиком и перестраховщиком: перестрахование	288
4.2. Влияние деления риска на основные случайные величины	292
4.2.1. Постановка проблемы; пропорциональное деление риска	292
4.2.2. Непропорциональное деление риска: число убытков	295
4.2.3. Непропорциональное деление риска: размер убытка	297
4.2.4. Непропорциональное деление риска: совокупный убыток	300
4.2.5. Эффект освобождения	304
4.2.6. Вывод	309
4.3. Исчисление премий при делении риска	310
4.3.1. Обзор	310
4.3.2. Исчисление премий в случае вычитаемой франшизы	311
4.3.3. Исчисление премий при перестраховании эксцедента убытка	316
4.3.4. Исчисление премий при годовой франшизе и перестраховании «Stop Loss»	327
4.3.5. Заключение и дополнения	333
4.4. Выбор формы и объема деления риска	335
4.4.1. Постановка проблемы и обзор	335
4.4.2. Модели оценки привлекательности деления риска	336
4.4.3. Односторонняя оптимизация при заданных транзакционных расходах	340
4.4.4. Дифференциация собственного удержания	346
4.4.5. Субоптимальное и оптимальное по Парето деление риска	351
4.4.6. Вывод	355
4.5. Вывод: деление риска как важная часть рисковой политики	357

4.1. Постановка проблемы, обзор, причины и формы

4.1.1. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ И ОБЗОР

До сих пор мы не отличали фактические риски страхователей от рисков, составляющих портфель страховой компании. На самом деле это не совсем правильно. Обычно страховая компания принимает риск не полностью, а только частично и, в свою очередь, сама передает часть принятых рисков. Прежде чем называть причины и важнейшие формы деления риска, в общих чертах охарактеризуем два основных способа деления риска.

При *пропорциональном делении риска* величина убытка X (размер убытка в одном страховом случае или совокупный убыток за год) делится на две части cX и $(1 - c)X$ по правилу:

$$X = cX + (1 - c)X, \quad 0 < c < 1.$$

При *непропорциональном делении риска* случайная величина убытка X делится на первичный риск (X, a) и вторичный риск $(X - a, 0)$:

$$X = \min(X, a) + \max(X - a, 0), \quad a > 0.$$

В то время как при пропорциональном делении обе части всегда содержат убыток, при непропорциональном делении вторичный риск не реализуется, если убыток не превысил уровня a .

Математика пропорционального деления риска очень проста и не ставит новых задач. Непропорциональное деление, наоборот, порождает множество интересных задач и сложных проблем. В связи с этим главы 4.2 и 4.3 почти полностью посвящены непропорциональному делению риска. В главе 4.2 исследуется влияние деления риска на распределение числа убытков, размера отдельного убытка и совокупного убытка. В главе 4.3 с помощью результатов из главы 4.2 разбирается задача исчисления премий при важнейших формах непропорционального деления риска: вычитаемой франшизе, перестраховании эксцедента убытка и «Stop Loss». Основное внимание уделяется перестрахованию эксцедента убытка, представляющему собой центральное поле деятельности математиков в области перестрахования.

В последней главе 4.4 на примере деления риска между страховщиком и перестраховщиком сравнивается влияние различных форм деления риска на рисковую политику. Рассуждения ведутся в основном с позиции страховщика, желающего с помощью перестрахования уменьшить риск своего портфеля. Тем не менее большинство результатов непосредственно переносится на случай деления риска между страховщиком и страхователем.

4.1.2. ПРИЧИНЫ И ФОРМЫ ДЕЛЕНИЯ РИСКА МЕЖДУ СТРАХОВОЙ КОМПАНИЕЙ И СТРАХОВАТЕЛЕМ

Существуют две основные причины заинтересованности страховой компании в самостоятельной оплате страхователем части своих убытков.

1. *Исключение мелких убытков.* Во-первых, мелкие убытки страхователь может возместить сам, не испытав финансовых затруднений. Во-вторых, мелкие убытки несоразмерно повышают расходы страховой компании на ведение дела, что в итоге отражается на премии страхователя. Таким образом, обе стороны заинтересованы в исключении из страхования мелких убытков посредством непропорционального деления риска. Без этого соглашения трудно обойтись, например, в страховании строительства, где каждый погнутый гвоздь, в принципе, считался бы страховым случаем. В страховании стихийных бедствий (буря, град, землетрясение) тоже имеет смысл возложить на страхователя оплату мелких убытков: при одновременном возникновении большого числа мелких убытков страховая компания не в состоянии быстро урегулировать все убытки. Однако впервые мелкие убытки были исключены из страхования транспортировок. Это было обусловлено не только высокой вероятностью незначительных повреждений перевозимого груза, но и так называемым моральным риском, о котором говорится ниже.
2. *Предотвращение морального риска.* В некоторых видах страхования существует опасность воздействия со стороны страхователя на процесс убытков (на число и размеры убытков). Например, в страховании автокаско трудно провести грань между убытком, произошедшим по чистой случайности, последовавшим от небрежности и спровоцированным. В этих случаях финансовое участие страхователя в своих убытках мотивирует осторожность вождения и предотвращение убытков.

Наконец, иногда *страхователь* имеет особый интерес в страховании только части своего риска, а именно когда считает свой *риск* *лучшим в сравнении со среднестатистическим*. Он стремится сократить связанные со страхованием расходы, не веря, что эти расходы адекватны получаемой услуге, но в то же время не хочет полностью отказываться от страховой защиты.

Чаще всего встречаются следующие *формы пропорционального деления риска* между страховой компанией и страхователем.

1. *Процентное покрытие в медицинском страховании.* Чистейшая форма пропорционального деления риска между страхователем и страховой компанией встречается в медицинском страховании зубопротезирования. В целях предотвращения морального риска и частные, и государственные страховщики возмещают только процентную долю расходов страхователя.
2. *Неполное страхование.* В имущественном страховании принято возмещать страхователю только часть убытка, когда полная стоимость за-

страхованного имущества превышает установленную в договоре страховую сумму. Если, к примеру, в страховании домашнего имущества страховая сумма составляет половину фактической стоимости имущества, то компания компенсирует только половину убытка, даже если тот не превысил страховую сумму. Но и страхователь при этом оплачивает только половину премии, рассчитанной на полную стоимость.

3. *Совместное страхование.* Крупные риски промышленных предприятий часто страхуются несколькими страховыми компаниями совместно. В страховом полисе фиксируется, в каком соотношении премия и убытки поделены между участвующими компаниями. На этот раз речь идет о делении риска не между страхователем и страховой компанией, а между несколькими страховыми компаниями. Страхователь же, как правило, имеет дело лишь с одной компанией, «ведущей» страховой договор.

Из форм непропорционального деления риска наиболее распространены следующие.

1. *(Вычитаемая) франшиза.* Эта форма деления риска известна, в первую очередь, из страхования автокаско. У страхователя есть право выбирать из нескольких предлагаемых размеров франшизы (возможна также франшиза размера 0, означающая полное страхование). Допустим, страхователь выбрал франшизу 1000 €. Тогда все убытки ниже 1000 € он должен покрывать сам. Если же убыток превышает 1000 €, то 1000 € компенсирует страхователь, а остальное — страховая компания.
2. *Покрывание первичного риска.* Страховые компании весьма неохотно предоставляют не ограниченную по размеру страховую защиту, ведь тогда они практически не в состоянии оценить распределение убытка в экономически важной хвостовой области. Это не относится к имущественному страхованию, где стоимость застрахованных объектов почти всегда оценивается достаточно точно. В страховании же гражданской ответственности априори нельзя задать никакую верхнюю границу возможного требования пострадавшего. Поэтому страхователь и страховщик договариваются о заведомо достаточной сумме покрытия. Однако при любой конечной сумме покрытия существует вероятность, что реальный ущерб окажется выше, и тогда страхователь будет вынужден сам оплачивать разницу. При такой форме деления риска страховая компания обладает первичным риском, а страхователь — вторичным, в то время как при вычитаемой франшизе все наоборот.
3. *Годовая франшиза.* В двух предыдущих пунктах речь шла о делении убытка по каждому отдельному страховому случаю, тогда как при годовой франшизе на первичный и вторичный риски делится совокупный годовой убыток. Эта форма деления риска, пожалуй, лучше всего известна из страхования расходов на амбулаторное лечение. Если совокупные расходы страхователя на оплату услуг врача и лекарств в течение страхового года не превышают установленного в договоре значения франшизы, то страхователь сам оплачивает все расходы. В противном случае

страховая компания компенсирует разность между фактическим убытком и годовой франшизой.

4. *Годовой лимит.* Иногда одновременно с обычной вычитаемой франшизой, действующей в отношении каждого страхового случая, устанавливается годовой лимит. Это связано с тем, что страхователь, хотя и несет убыток только в пределах оговоренной франшизы, не знает, сколько таких убытков ему предстоит. С помощью годового лимита предоставляется страховая защита от риска частоты событий. Пусть

$$\underline{S} = \sum_{n=1}^N \min(X_n, a)$$

совокупный годовой убыток, покрываемый страхователем самостоятельно при франшизе a . Установление годового лимита $b \geq a$ означает, что страхователь оплачивает часть убытка $\min(\underline{S}, b)$, а страховая компания — остальную часть $\max(\underline{S} - b, 0)$ плюс части $\max(X_n - a, 0)$, $1 \leq n \leq N$. Подобные соглашения имеют смысл только для видов страхования с фактически существующим риском частоты (главным образом для страхования промышленных предприятий).

Наряду с представленными основными формами деления риска между страхователем и страховой компанией встречаются некоторые специальные формы, такие как временная франшиза (в страховании перерывов в производстве) или интегральная франшиза. Теоретически возможна любая форма деления риска. Мы не будем рассматривать особые редкие формы. Исключение делается в разделе 4.4.5, где показано, что интегральная франшиза систематически менее выгодна обоим партнерам, чем вычитаемая франшиза.

4.1.3. ПРИЧИНЫ И ФОРМЫ ДЕЛЕНИЯ РИСКА МЕЖДУ СТРАХОВЩИКОМ И ПЕРЕСТРАХОВЩИКОМ: ПЕРЕСТРАХОВАНИЕ

Как уже говорилось в разделе 1.2.2, коллективный баланс не избавляет страховую компанию от риска, хотя и уменьшает риски, связанные с оценением и случайностью. Напомним, вероятность выполнения обязательств перед страхователями $G(b + c)$ определяется суммарной нетто-премией b , распределением совокупного убытка G и гарантийным капиталом c . Посчитав недостаточной надежностью $G(b + c)$, компания сама может приобрести страховую защиту в другой страховой компании или в предназначенной специально для этой цели перестраховочной компании. Замена части взятых на себя страховщиком неизвестных расходов по убыткам на фиксированные расходы называется *перестрахованием*. Этот способ сокращения риска, как правило, проще альтернативных способов, таких как увеличение премиального фонда, пополнение гарантийного капитала или улучшение распределения совокупного убытка (например, за счет изменения условий страхования или отказа от некоторых рисков), и позволяет страховщику принимать особо крупные риски, заведомо

нарушающие баланс портфеля. Таким образом, перестрахование ведет к снижению технического страхового риска (см. раздел 1.2.2). В то же время можно сказать, что перестрахование стимулирует заключение договоров страхования и в этом смысле равносильно повышению гарантийного капитала. Каждая страховая компания, предоставляющая страховую защиту другой страховой компании, в этой связи называется *перестраховщиком*, а компания, выписывающая первичные полисы, — *страховщиком*. На практике почти каждая страховая компания заключает договоры перестрахования с одним или несколькими перестраховщиками. Перестраховщик не имеет договорных отношений со страхователями, чьи полисы он перестраховывает, и страхователи не знают, перестрахованы они или нет. Назначение премий и урегулирование убытков по всем полисам, включая перестрахованные, полностью входит в обязанность страховщика.

В принципе, страховщик и перестраховщик могли бы договариваться о форме и объеме перестрахования по каждому полису в отдельности. Некоторые крупные риски именно так и делятся между несколькими страховыми компаниями (факультативное перестрахование). Но в подавляющем большинстве случаев перестрахование осуществляется в рамках договора между страховщиком и перестраховщиком, действующего для всех рисков, составляющих портфель страховщика в течение установленного срока (облигаторное перестрахование). В договоре четко прописано, какую часть каких рисков или убытков несет перестраховщик и какую премию он за это получает. Обычно для удобства договоры перестрахования заключаются на один год отдельно для каждого вида страхования. На практике сложились пять основных форм перестрахования (см. также табл. 4.1.3.1).

Формы пропорционального перестрахования.

1. *Квотное перестрахование.* Перестраховщик принимает от всех полисов фиксированную одинаковую процентную долю, например 20%, то есть возмещает 20% от каждого убытка и получает 20% от каждой премии (за вычетом доли расходов на привлечение клиентов и административных расходов — так называемой *перестраховочной комиссии*). Таким образом, 20% от совокупного годового убытка и суммарной годовой премии страховщика переходят к перестраховщику.
2. *Перестрахование эксцедента сумм.* Если при квотном перестраховании все риски делятся между страховщиком и перестраховщиком в одинаковой пропорции $c : (1 - c)$, то при перестраховании эксцедента сумм собственное удержание варьируется в зависимости от страховой суммы v по правилу $c = c(v) = \min(v_0 / v, 1)$. Иными словами, страховщик полностью оставляет себе риски со страховой суммой $v \leq v_0$ и делит с перестраховщиком риски со страховой суммой, превышающей v_0 . При этом перестраховщик принимает часть, соответствующую разности между страховой суммой и v_0 . Скажем, если в договоре перестрахования установлено значение $v_0 = 1$ млн, то от риска со страховой суммой $v = 4$ млн перестраховщик принимает 75%. В остальном все совпадает с квотным перестрахованием: по риску со страховой суммой v премия и убытки

Таблица 4.1.3.1. Основные формы перестрахования

Годовой совокупный убыток S страховщика может быть разложен тремя разными способами: по рискам (индивидуальная модель), по отдельным убыткам (коллективная модель) и по страховым событиям (коллективная модель для кумулятивных убытков):

$$S = \sum_{i=1}^I R_i = \sum_{n=1}^N X_n = \sum_{k=1}^{N^*} X_k^*.$$

Далее \underline{S} и $\underline{\underline{S}}$ обозначают доли от S , оплачиваемые, соответственно, страховщиком и перестраховщиком; мы не конкретизируем, кто возмещает остаток $S - \underline{S} - \underline{\underline{S}}$.

Квотное перестрахование ($0 < c < 1$):

$$\underline{S} = cS, \quad \underline{\underline{S}} = (1 - c)S.$$

Перестрахование эксцедента сумм (с максимальным значением v_0 и $m \geq 1$):

$$\underline{S} = \sum_{i=1}^I c_i R_i, \quad \underline{\underline{S}} = \sum_{i=1}^I \min(1 - c_i, mv_0 / v_i) R_i,$$

где v_i — страховая сумма по риску R_i и $c_i = \min(v_0 / v_i, 1)$.

Перестрахование эксцедента убытка (с приоритетом $a > 0$ и ответственностью $h > 0$):

$$\underline{S} = \sum_{n=1}^N \min(X_n, a), \quad \underline{\underline{S}} = \sum_{n=1}^N \min(\max(X_n - a, 0), h).$$

Перестрахование эксцедента кумулятивного убытка (с приоритетом $a^* > 0$ и ответственностью $h^* > 0$):

$$\underline{S} = \sum_{k=1}^{N^*} \min(X_k^*, a^*), \quad \underline{\underline{S}} = \sum_{k=1}^{N^*} \min(\max(X_k^* - a^*, 0), h^*).$$

Перестрахование «Stop Loss» (с приоритетом $s_0 > 0$ и ответственностью $s_1 > 0$):

$$\underline{S} = \min(S, s_0), \quad \underline{\underline{S}} = \min(\max(S - s_0, 0), s_1).$$

делятся между страховщиком и перестраховщиком в соотношении $c(v)$ к $1 - c(v)$. Таким образом, речь идет о чисто пропорциональном делении риска, но собственное удержание не пропорционально страховой сумме v . Перестрахование эксцедента сумм способствует гомогенизации страховых сумм в портфеле страховщика. Обычно по условиям договора перестрахования часть страховой суммы, принимаемая перестраховщиком, ограничивается значением mv_0 . Тогда перестраховщик принимает от каждого риска со страховой суммой v не долю $1 - c(v)$, а

$$\min(1 - c(v), mv_0 / v) = \min(\max(v - v_0, 0), mv_0) / v,$$

где $m \geq 1$, как правило, целое число. Благодаря этому перестраховщик уже при заключении договора знает, что его расход по отдельному убытку в любом случае не превысит mv_0 .

Формы непропорционального перестрахования

1. *Перестрахование эксцедента убытка.* По каждому убытку X страховщик оплачивает сумму $\min(X, a_0)$, ограниченную указанным в договоре максимальным значением a_0 , называемым *приоритетом*, а перестраховщик — сумму $\max(X - a_0, 0)$, но почти всегда тоже в пределах оговоренного максимума a_1 , то есть $\min(\max(X - a_0, 0), a_1)$. Остающаяся после вычета суммы $a_0 + a_1$ часть убытка $\max(X - a_0 - a_1, 0)$ снова попадает под ответственность страховщика, если не существует другого договора перестрахования эксцедента убытка с приоритетом $a_0 + a_1$. Для всех рисков, охваченных одним договором перестрахования, обычно действуют одинаковые значения a_0 и a_1 , определяющие правило деления убытков. Размер причитающейся перестраховщику премии зависит от предполагаемого числа и размеров убытков, превышающих a_0 , от величины a_1 и, наконец, от договоренности. Исчисление премий для договоров перестрахования эксцедента убытка — одна из важнейших задач математики перестрахования (см. раздел 4.3.3).
2. *Перестрахование эксцедента кумулятивного убытка* отличается от перестрахования эксцедента убытка только тем, что приоритет устанавливается не в отношении отдельного убытка, а в отношении суммы убытков, вызванных одним страховым событием (например, ураганом или землетрясением). Эта форма перестрахования учитывает возможность одновременного наступления (при урагане или землетрясении) большого количества мелких убытков, в совокупности составляющих значительную сумму. Что конкретно следует понимать под отдельным событием, не всегда очевидно, особенно когда несколько событий близки территориально и во времени — соответствующие критерии должны быть четко прописаны в договоре перестрахования.
3. *Перестрахование «Stop Loss»* представляет собой результат развития принципа перестрахования эксцедента убытка от отдельного убытка через кумулятивный к годовому. Если совокупный годовой убыток S страховщика (по одному виду страхования) превышает установленный приоритет s_0 , то перестраховщик принимает часть убытка свыше приоритета, но не более фиксированной величины s_1 . Другими словами, страховщик несет убыток $\min(S, s_0) + \max(S - s_0 - s_1, 0)$, а перестраховщик — $\min(\max(S - s_0, 0), s_1)$. При низкой вероятности превышения совокупным убытком границы $s_0 + s_1$ (а на практике это чаще всего именно так), «Stop Loss» предоставляет страховщику самую обширную защиту. Ограничивая потенциал убытка страховщика значением s_0 , перестраховщик почти полностью принимает на себя технический страховой риск. «Stop Loss» — основная форма перестрахования дочерних компаний материнской. Помимо этого «Stop Loss» применяется для защиты от риска частоты событий в страховании града, промерзания водопроводных труб и урагана, где перестрахование эксцедента кумулятивного убытка осложнено проблемой разграничения событий.

Отметим еще раз, что пять представленных форм перестрахования не соответствуют в точности названным в начале основным формам деления риска: пропорциональной и непропорциональной, поскольку перестраховываемая часть в большинстве случаев лимитирована. Но как мы увидим далее, лимитированные формы могут быть составлены из нелимитированных основных форм, поэтому в большинстве случаев нам будет достаточно исследовать только основные формы.

Перечисленные формы перестрахования часто комбинируются даже в рамках одного вида страхования для одновременной защиты от *риска частоты* (квотное перестрахование, перестрахование эксцедента кумулятивного убытка, «Stop Loss») и *риска большого убытка* (перестрахование эксцедента сумм и эксцедента убытка).

Впрочем, стороны могут договариваться о любой форме перестрахования. Встречается, например, перестрахование максимального убытка, когда перестраховщик принимает несколько (допустим, пять) отдельных самых крупных убытков страховщика (возможно, за вычетом франшизы). Правда, подобные формы не приобрели большого практического значения.

4.2. Влияние деления риска на основные случайные величины

4.2.1. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ; ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЕ ДЕЛЕНИЕ РИСКА

С делением риска связаны две основные задачи. Во-первых, необходимо выяснить, как влияет деление риска на премию, ведь непропорциональное деление изначально определяется только как деление убытков. При пропорциональном делении риска этот вопрос не ставится — здесь сразу задано правило деления договоров страхования, то есть премий и убытков. Во-вторых, не менее важно знать, какая форма деления риска наиболее целесообразна в конкретном случае и насколько велика должна быть отдаваемая часть. Прежде чем непосредственно обратиться к двум сформулированным задачам, приведем несколько основных фактов, постоянно используемых в дальнейшем. В этой главе речь пойдет о влиянии непропорционального деления риска на число убытков, размер убытка и совокупный убыток. Исследование проводится преимущественно в рамках коллективной модели из главы 1.4.

При пропорциональном делении риска $X = cX + (1 - c)X$ случайные величины X , cX , $(1 - c)X$ отличаются только «масштабами», равными соответственно 1, c , $(1 - c)$, и преобразование интересующих нас параметров риска особых сложностей не вызывает. Так, в распределении числа убытков абсолютно ничего не меняется. Распределение пропорционально уменьшенного размера убытка cX непосредственно находится из распределения $F(x) = P(X \leq x)$ оригинального размера убытка, в силу равенства $P(cX \leq x) = P(X \leq x / c)$. Плотность f величины cX и плотность f величины X связаны формулой $f(x) = f(x / c) / c$. Как видим, вид плотности полностью сохраняется, изменяется только масштаб. Если для F принята одна из рассмотренных в главе 1.3 или в разделе 1.4.3 моделей распределения (например, логнормальное распределение), то в результате пропорционального деления риска меняется только скалярный параметр, а параметр формы остается прежним. Из соотношений

$$E(cX) = c \cdot E(X),$$

$$\text{Var}(cX) = c^2 \text{Var}(X),$$

$$E((cX)^k) = c^k E(X^k)$$

непосредственно следует, что относительные меры риска: коэффициент вариации

$$\text{Vko}(cX) = \text{Vko}(X) = \text{Sta}(X) / E(X)$$

и асимметрия

$$\text{Sch}(cX) = \text{Sch}(X) = E((X - E(X))^3) / (\text{Sta}(X))^3$$

при пропорциональном делении риска не изменяются. В этом состоит важнейшее свойство пропорционального деления риска. Все приведенные утверждения о поведении распределения и его параметров справедливы как в отношении отдельного убытка, так и в отношении годового убытка пропорционально поделенного риска, а при квотном перестраховании — в отношении совокупной переданной в перестрахование части портфеля.

При перестраховании эксцедента сумм зависимость пропорции деления $c(v) : 1 - c(v)$ от страховой суммы v способствует уменьшению относительного риска (измеряемого коэффициентом вариации и асимметрией) в портфеле страховщика и увеличению его в части портфеля, передаваемой перестраховщику. Поясним это на примере.

Пусть в портфеле из 1000 независимых рисков смерти от несчастного случая имеется

600 полисов со страховой суммой 30 000,

300 полисов со страховой суммой 50 000 и

100 полисов со страховой суммой 100 000.

Если вероятность смерти от несчастного случая в течение года равна 1‰, то математическое ожидание совокупного годового убытка составляет

$$600 \cdot 30 + 300 \cdot 50 + 100 \cdot 100 = 43\,000.$$

Предположим, что в точности этой суммой располагает страховщик. Так как в среднем нужно рассчитывать на один страховой случай в год, потери наступают тогда, когда этот случай попадает на один из 400 полисов со страховыми суммами 50 000 или 100 000.

Допустим теперь, что заключен договор перестрахования эксцедента сумм с собственным удержанием $v_0 = 30\ 000$ и долей на собственном удержании $c(v) = \min(v_0 / v, 1)$. Тогда перестраховщик получит

от каждого из 300 полисов премию $50 - 30 = 20$ и

от каждого из 100 полисов премию $100 - 30 = 70$,

то есть суммарную премию 13 000 (без учета надбавок). Оставшаяся на собственном удержании премия $43\ 000 - 13\ 000 = 30\ 000$ будет всегда достаточной для покрытия теоретического убытка, поскольку полисы с большими страховыми суммами теперь отягощают собственное удержание всего на 30 000. В этом примере договор перестрахования эксцедента сумм полностью устранил риск изменчивости размера убытка страховщика.

Дисперсия рассмотренного риска несчастного случая составляет $p(1-p)v^2$, где $p = 0,001$, а v — соответствующая страховая сумма. Отсюда стандартное отклонение совокупного убытка S портфеля равно 47 830, а $Vko(S) = 1,11$. При заключении договора перестрахования эксцедента сумм стандартное отклонение и коэффициент вариации совокупного убытка страховщика уменьшаются, соответственно, до значений $Sta(S) = 29\ 985$ и $Vko(S) = 1,00$. Те же характеристики убытка \underline{S} перестраховщика равны $Sta(\underline{S}) = 24\ 686$ и $Vko(\underline{S}) = 1,90$.

В заключение исследуем в общем виде влияние перестрахования эксцедента сумм на распределение размера убытка. Для этого рассмотрим страховую сумму $V > 0$, соответствующую убытку размера X , как случайную величину (зависящую от X , так как большие размеры убытков могут встречаться только у полисов с большими страховыми суммами) и построим случайную величину *степень убытка*

$$Y = X / V,$$

всегда удовлетворяющую условию $0 < Y \leq 1$.

При перестраховании эксцедента сумм с собственным удержанием u (доля на собственном удержании $c(V) = \min(u / V, 1)$) случайная величина \underline{X} размера убытка в пределах собственного удержания определяется формулой

$$\underline{X} = \min(u / V, 1) \cdot X = \min(u, V) \cdot Y.$$

Обозначив через $g(v, y)$ совместную плотность величин V и Y , находим

$$\begin{aligned} E(\underline{X}^k) &= \iint (\min(u, v)y)^k g(v, y) dv dy = \\ &= \int_0^u v^k \int_0^1 y^k g(v, y) dy dv + \int_u^\infty u^k \int_0^1 y^k g(v, y) dy dv = \int_0^u v^k h_k(v) dv + u^k \int_u^\infty h_k(v) dv, \end{aligned}$$

где

$$h_k(v) = \int_0^1 y^k g(v, y) dy.$$

Поскольку

$$\int_0^\infty h_k(v) dv = E(Y^k),$$

функция

$$H_k(v) = \int_0^v h_k(w) dw / E(Y^k)$$

задает взвешенное по Y^k распределение случайной величины V , и мы можем записать

$$E(\underline{X}^k) = E(Y^k) \int_0^\infty (\min(v, u))^k dH_k(v).$$

В отличие от обычного распределения страховых сумм $H_0(v) = P(V \leq v)$, функция $H_k(v)$ показывает совокупную долю степеней убытка y_n^k со страховыми суммами $v_n \leq v$, в сумме всех y_n^k (n пробегает по всем убыткам).

Когда различия страховых сумм в портфеле невелики, случайные величины V и Y могут считаться независимыми. Тогда предыдущая формула приобретает более простой вид

$$E(\underline{X}^k) = E(\min(V, u))^k \cdot E(Y^k),$$

причем математическое ожидание

$$E(\min(V, u))^k = \int_0^\infty \min(v, u)^k dH_0(v)$$

строится на основе обычного распределения страховых сумм H_0 . В этом случае легко доказывается стабилизирующее влияние перестрахования эксцедента сумм на коэффициент вариации

$$\begin{aligned} (Vko(\underline{X}))^2 &= Var(\underline{X}) / (E(\underline{X}))^2 = E(\underline{X}^2) / (E(\underline{X}))^2 - 1 = \\ &= E(Y^2) E(\min(V, u))^2 / (E(Y) E(\min(V, u)))^2 - 1. \end{aligned}$$

Как мы покажем в разделе 4.2.4, он монотонно не возрастает по u .

4.2.2. НЕПРОПОРЦИОНАЛЬНОЕ ДЕЛЕНИЕ РИСКА: ЧИСЛО УБЫТКОВ

При непропорциональном делении каждого убытка $X = \min(X, a) + \max(X - a, 0)$ на первичный $\underline{X} = \min(X, a)$ и вторичный $\underline{X} = \max(X - a, 0)$ число убытков по первичному риску совпадает с оригинальным числом убытков N , на-

блюдаемым в отсутствие деления риска. По вторичному риску происходит убыток нулевого размера, когда оригинальный размер X не превышает значения a . Обычно носитель вторичного риска не знает о таких убытках, если только специально не проинформирован носителем первичного риска. Следовательно, убытки размера 0 не должны учитываться при расчете числа убытков \underline{N} по вторичному риску. Это побуждает нас к применению коллективной модели

$$\underline{N} = \sum_{n=1}^N B_n,$$

где B_n — независимые, одинаково распределенные случайные величины — индикаторы события « $X_n > a$ ». Введем обозначения

$$P(B_n = 1) = P(X > a) =: p_a,$$

$$P(B_n = 0) = P(X \leq a) = 1 - p_a.$$

С помощью формул из раздела 1.4.4 находим

$$E(\underline{N}) = E(N) \cdot E(B_n) = p_a E(N),$$

$$\text{Var}(\underline{N}) = E(N) \cdot \text{Var}(B_n) + \text{Var}(N)(E(B_n))^2 = p_a(1 - p_a)E(N) + p_a^2 \cdot \text{Var}(N),$$

$$\text{Var}(\underline{N}) - E(\underline{N}) = p_a^2(\text{Var}(N) - E(N)),$$

$$\begin{aligned} E(\underline{N} - E(\underline{N}))^3 &= \\ &= E(\underline{N} - E(N))^3 p_a^3 + 3\text{Var}(N)p_a^2(1 - p_a) + E(N)p_a(1 - p_a)(1 - 2p_a). \end{aligned}$$

Распределение случайной величины \underline{N} имеет вид:

$$\begin{aligned} P(\underline{N} = k) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(\underline{N} = k, N = n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(\underline{N} = k | N = n)P(N = n) = \sum_{n=k}^{\infty} P(N = n) \binom{n}{k} p_a^k (1 - p_a)^{n-k}. \end{aligned}$$

Если N распределена по закону Пуассона с параметром θ :

$$P(N = n) = e^{-\theta} \theta^n / n!,$$

то

$$P(\underline{N} = k) = \exp(-\theta p_a) \cdot (\theta p_a)^k / k!.$$

Как видим, число убытков по вторичному риску тоже распределено по закону Пуассона, но с меньшим параметром, а именно θp_a .

Предположим теперь для N смешанное распределение Пуассона (см. раздел 1.4.2). Поменяв местами в общей формуле для $P(\underline{N} = k)$ операцию суммирования с операцией интегрирования (смешивания), содержащейся в $P(N = n)$, мы сразу увидим, что \underline{N} тоже имеет смешанное распределение Пуассона с тем же смешивающим распределением и умноженным на p_a параметром Пуассона. При отрицательном биномиальном распределении оригинального числа убы-

ков N с параметрами α и $p = \alpha / (\nu\theta + \alpha)$ величина \underline{N} имеет отрицательное биномиальное распределение с прежним α и

$$\underline{p} = \alpha / (\alpha + \nu\theta p_a).$$

Однако число убытков \underline{N} по вторичному риску не всегда имеет тот же тип распределения, что и оригинальное число убытков N . Так, при логарифмическом распределении

$$P(N = n) = r \cdot p^n / n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где

$$0 < p < 1 \text{ и } r = |\ln(1 - p)|^{-1},$$

в результате перехода к \underline{N} тип распределения не сохраняется.

Обратим внимание, что при отрицательном биномиальном распределении оригинального числа убытков N число убытков по вторичному риску \underline{N} с ростом a приближается к пуассоновской случайной величине, как следует из общего соотношения

$$\frac{\text{Var}(\underline{N}) - E(\underline{N})}{E(\underline{N})} = p_a \cdot \frac{\text{Var}(N) - E(N)}{E(N)}.$$

С ростом a правая часть уменьшается, и в разложении

$$\text{Var}(\underline{N}) = E(\underline{N}) + (\text{Var}(\underline{N}) - E(\underline{N}))$$

второе слагаемое $\text{Var}(\underline{N}) - E(\underline{N})$, характеризующее различие между отрицательным биномиальным распределением и распределением Пуассона, становится все менее весомым по сравнению с $E(\underline{N})$. Следовательно, чем реже наступают убытки по вторичному риску, тем больше подходит для случайной величины \underline{N} распределение Пуассона.

4.2.3. НЕПРОПОРЦИОНАЛЬНОЕ ДЕЛЕНИЕ РИСКА: РАЗМЕР УБЫТКА

При непропорциональном делении риска $X = \min(X, a) + \max(X - a, 0)$ размер убытка по *первичному риску* $\underline{X} = \min(X, a)$ составляет

$$\underline{X} = \min(X, a) = \begin{cases} X, & \text{если } X < a, \\ a, & \text{если } X \geq a. \end{cases}$$

Отсюда сразу следует формула для функции распределения

$$\underline{F}(x) = P(\underline{X} \leq x) = \begin{cases} F(x), & \text{если } x < a, \\ 1, & \text{если } x \geq a, \end{cases}$$

где F — функция распределения оригинального размера убытка. Если $F(a) < 1$ (деление риска не фиктивное), то распределение \underline{F} имеет положительную мас-

су в точке a и поэтому не обладает непрерывной плотностью, даже если такая существует у исходного распределения F .

Для моментов получается выражение

$$E(\underline{X}^k) = \int_0^{\infty} (\min(x, a))^k dF(x) = \int_0^a x^k dF(x) + a^k (1 - F(a)).$$

С помощью формулы интегрирования по частям находим

$$\begin{aligned} E(\underline{X}^k) &= \left[x^k F(x) \right]_0^a - \int_0^a kx^{k-1} F(x) dx + a^k (1 - F(a)) = \\ &= a^k F(a) - \int_0^a kx^{k-1} F(x) dx + a^k (1 - F(a)) = \int_0^a kx^{k-1} (1 - F(x)) dx. \end{aligned}$$

Из определения \underline{X} непосредственно следуют неравенства $E(\underline{X}^k) < E(X^k)$ и $E(\underline{X}^k) < a^k$. Кроме того, посредством дифференцирования по a можно показать, что коэффициент вариации

$$Vko(X) = Sta(X) / E(X)$$

и асимметрия

$$Sch(X) = E(X - E(X))^3 / (Sta(X))^3$$

монотонно возрастают по a (для $Vko(\underline{X})$ см. доказательство теоремы из раздела 4.2.4), и, значит, при $F(a) < 1$

$$Vko(\underline{X}) < Vko(X),$$

$$Sch(\underline{X}) < Sch(X).$$

В этом состоит одно из главных отличий непропорционального деления риска от пропорционального, где коэффициент вариации и асимметрия первичной и вторичной частей убытка совпадают.

При моделировании размера убытка $\underline{X} = \max(X - a, 0)$ по вторичному риску, как и при моделировании числа убытков \underline{N} , необходимо учитывать, что убытки размера 0 не причисляются к убыткам. Более точно размер убытка по вторичному риску определяется как

$${}_aX := X - a \mid X > a.$$

Отсюда следует формула, связывающая функции распределения размеров убытков по первичному и вторичному рискам

$${}_aF(x) = P({}_aX \leq x) = P(X \leq a + x \mid X > a) = \frac{F(a + x) - F(a)}{1 - F(a)}.$$

При наличии непрерывной плотности f у величины X , ${}_aX$ также обладает непрерывной плотностью, причем

$${}_af(x) = f(a + x) / (1 - F(a)).$$

Согласно этой формуле, при переходе ко вторичному риску плотность f отсекается слева от точки a , сдвигается влево на a и нормируется таким образом, чтобы площадь под ней снова стала равна 1. Экспоненциальное распределе-

Таблица 4.2.3.1. Неполные функции моментов

$$F_k(a) := \int_0^a x^k dF(x) / E(X^k), \quad k = 1, 2, \dots$$

Логнормальное распределение $F(x) = F(x \mid \mu, \sigma) = \Phi((\ln(x) - \mu) / \sigma)$:

$$F_k(a) = F(a \mid \mu + k\sigma^2, \sigma) = \Phi\left(\frac{\ln(a) - \mu - k\sigma^2}{\sigma}\right),$$

где Φ — функция стандартного нормального распределения.

Логарифмированное логистическое распределение $F(x) = F(x \mid \alpha, b)$:

$$F_k(a) = B(1 + k / a; F(a)),$$

где

$$B(p, q; y) = \int_0^y t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \cdot \Gamma(p+q) / (\Gamma(p)\Gamma(q))$$

неполная бета-функция.

Логарифмированное распределение Лапласа $F(x) = F(x \mid \alpha, b)$:

$$F_k(a) = \begin{cases} (\alpha - k) \cdot (a/b)^{k+\alpha} / (2\alpha), & \text{если } a \leq b, \\ 1 - (\alpha + k) (a/b)^{k-\alpha} / (2\alpha), & \text{если } a \geq b. \end{cases}$$

Распределение Парето $F(x) = F(x \mid \alpha, b)$:

$$F_k(a) = F(a \mid \alpha - k, b) = 1 - (a/b)^{k-\alpha} \text{ при } k < \alpha.$$

Распределение Парето с нулевой точкой $F(x) = F(x \mid \alpha, b)$:

$F_k(a)$ вычисляется с помощью равенств

$$\int_0^a (x+b)^k dF(x) = \frac{\alpha b^k}{\alpha - k} \left(1 - \left(\frac{b}{a+b} \right)^{\alpha-k} \right)$$

или

$$\int_a^{\infty} (x-a)^k dF(x) = E(X^k) \cdot \left(\frac{b}{a+b} \right)^{\alpha-k}.$$

Распределение Вейбулла $F(x) = F(x \mid \alpha, b)$:

$$F_k(a) = \Gamma(k / \alpha + 1; (a/b)^\alpha),$$

где

$$\Gamma(\alpha; y) = \int_0^y t^{\alpha-1} e^{-t} dt / \Gamma(\alpha)$$

неполная гамма-функция.

Гамма-распределение $F(x) = F(x \mid \alpha, b) = \Gamma(\alpha; x/b) / \Gamma(\alpha)$:

$$F_k(a) = F(a \mid \alpha + k, b) = \Gamma(\alpha + k; a/b) / \Gamma(\alpha + k) \text{ и } E(X^k) = b^k \Gamma(\alpha + k) / \Gamma(\alpha).$$

ние $F(x) = 1 - e^{-x/b}$ — единственное непрерывное распределение, инвариантное относительно этих преобразований и удовлетворяющее равенству ${}_aF(x) = F(x)$ для всех $x \geq 0$ и всех $a \geq 0$. Если оригинальный размер убытка X распределен по Парето $F(x) = 1 - (x/b)^{-\alpha}$, то вторичный убыток ${}_bX$ имеет распределение Парето с нулевой точкой ${}_bF(x) = 1 - ((b+x)/b)^{-\alpha}$.

Для моментов размера убытка по вторичному риску при условии их существования справедливо выражение

$$E({}_aX^k) = E((X-a | X > a)^k) = \int_0^{\infty} (x-a | x > a)^k dF(x) = \\ = \int_a^{\infty} (x-a)^k dF(x) / (1-F(a)) = E(\underline{X}^k) / (1-F(a)).$$

Первый момент $E({}_aX)$ называется *средним превышением* (границы a). Значение $E({}_aX)$ может быть как больше, так и меньше или равно $E(X)$. Например, в случае экспоненциального распределения $F(x) = 1 - e^{-x/b}$ функция $E({}_aX)$ не зависит от a :

$$E({}_aX) = b;$$

в случае распределения Парето с нулевой точкой $F(x) = 1 - b^{\alpha} (b+x)^{-\alpha}$ она монотонно возрастает по a :

$$E({}_aX) = (a+b) / (\alpha-1).$$

На практике эмпирическое среднее превышение

$$\sum_{n \geq 1} \max(x_n - a, 0) / \text{количество}\{x_i > a\},$$

где x_1, x_2, \dots — наблюдаемые размеры убытков, как правило, монотонно возрастает по $a \in \{x_1, x_2, \dots\} / \{2-5 \text{ самых крупных убытков}\}$.

Для явного расчета моментов случайных величин \underline{X} и ${}_aX$ или \underline{X} очень полезна неполная функция моментов

$$F_k(a) := \int_a^{\infty} x^k dF(x) / E(X^k), \quad k=1, 2, \dots,$$

обладающая всеми свойствами функции распределения. В таблице 4.2.3.1 приведены неполные функции моментов для распределений размера убытка из таблицы 1.4.3.7, а также для гамма-распределения, иногда используемого для аппроксимации совокупного убытка.

4.2.4. НЕПРОПОРЦИОНАЛЬНОЕ ДЕЛЕНИЕ РИСКА: СОВОКУПНЫЙ УБЫТОК

В этом разделе мы исследуем влияние непропорционального деления отдельных убытков на совокупный убыток в рамках коллективной модели. Пусть N обозначает число убытков, а X_1, X_2, \dots, X_N — независимые и одинаково распределенные размеры убытков (см. раздел 1.4). Если деление риска осуществля-

ется посредством вычитаемой франшизы a , то (как мы узнали из двух предыдущих разделов) на первичный риск по-прежнему приходится N убытков, правда, усеченного размера

$$\underline{X}_n = \min(X_n, a).$$

Под вторичный риск попадает меньшее число убытков

$$\underline{N} = B_1 + \dots + B_N,$$

где B_n — независимые, одинаково распределенные по закону Бернулли случайные величины, $P(B_n = 1) = P(X_n > a)$. Соответствующие размеры убытков распределены как случайная величина

$${}_aX = X - a | X > a,$$

где X распределена как X_n .

Таким образом, совокупный убыток

$$S = X_1 + \dots + X_N$$

делится на совокупный первичный риск

$$\underline{S} = \underline{X}_1 + \dots + \underline{X}_N$$

и совокупный вторичный риск

$$\underline{\underline{S}} = \underline{X}_1 + \dots + \underline{X}_N = {}_aX_1 + \dots + {}_aX_N$$

(где $\underline{X}_n = \max(X_n - a, 0)$). Математическое ожидание и дисперсия первичного риска равны

$$E(\underline{S}) = E(N) \cdot E(\underline{X}) = E(N) \cdot E(\min(X, a)),$$

$$\text{Var}(\underline{S}) = E(N) \cdot \text{Var}(\underline{X}) + \text{Var}(N) \cdot (E(\underline{X}))^2 = \\ = E(N) \cdot E(\underline{X}^2) + (\text{Var}(N) - E(N)) \cdot (E(\underline{X}))^2.$$

Для моментов вторичного риска возможны два способа представления (часто бывает удобнее выразить моменты вторичного риска через $\underline{X} = \max(X - a, 0)$ и N , чем через ${}_aX$ и \underline{N}):

$$E(\underline{\underline{S}}) = E(\underline{N}) \cdot E({}_aX) = E(N) \cdot E(\underline{X}),$$

$$\text{Var}(\underline{\underline{S}}) = E(\underline{N}) \cdot E({}_aX^2) + (\text{Var}(\underline{N}) - E(\underline{N})) \cdot (E({}_aX))^2 = \\ = E(N) \cdot E(\underline{X}^2) + (\text{Var}(N) - E(N)) \cdot (E(\underline{X}))^2.$$

Согласно результатам предыдущего раздела,

$$E({}_aX^k) = E(\underline{X}^k) / (1 - F(a)),$$

$$E(\underline{X}^k) = \int_a^{\infty} (x-a)^k dF(x),$$

где F — функция распределения случайной величины X . Из неравенств $\underline{X} < X$ и $\underline{\underline{X}} < X$ получим

$$E(\underline{S}) < E(S),$$

$$E(\underline{\underline{S}}) < E(S),$$

здесь и далее всегда предполагается фактическое деление риска, то есть $0 < F(a) < 1$. Отношение

$$r(a) = E(\underline{S}) / E(S)$$

показывает, какая доля ожидаемого убытка в среднем попадает под франшизу, и называется *эффектом освобождения*. В следующем разделе мы исследуем его более подробно.

Для дисперсий справедливы такие же неравенства, как и для математических ожиданий:

$$\text{Var}(\underline{S}) < \text{Var}(S),$$

$$\text{Var}(\underline{\underline{S}}) < \text{Var}(S),$$

поскольку

$$\text{Var}(S) = \text{Var}(\underline{S} + \underline{\underline{S}}) = \text{Var}(\underline{S}) + 2 \cdot \text{Cov}(\underline{S}, \underline{\underline{S}}) + \text{Var}(\underline{\underline{S}}),$$

а величины \underline{S} и $\underline{\underline{S}}$ положительно скоррелированы:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\underline{S}, \underline{\underline{S}}) &= E(\text{Cov}(\underline{S}, \underline{\underline{S}} | N)) + \text{Cov}(E(\underline{S} | N), E(\underline{\underline{S}} | N)) = \\ &= E(N \cdot \text{Cov}(\underline{X}, \underline{\underline{X}})) + \text{Cov}(N \cdot E(\underline{X}), N \cdot E(\underline{\underline{X}})) = \\ &= E(N) \cdot \text{Cov}(\underline{X}, \underline{\underline{X}}) + \text{Var}(N) \cdot E(\underline{X}) \cdot E(\underline{\underline{X}}) > 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство следует из положительной корреляции величин $\underline{X} = \min(X, a)$ и $\underline{\underline{X}} = \max(X - a, 0)$:

$$\text{Cov}(\underline{X}, \underline{\underline{X}}) = E(\underline{X} \cdot \underline{\underline{X}}) - E(\underline{X})E(\underline{\underline{X}}) = (a - E(\underline{X})) \cdot E(\underline{\underline{X}}) > 0,$$

в свою очередь, вытекающей из условий $E(\underline{X}) < a$ и

$$\begin{aligned} E(\underline{X} \cdot \underline{\underline{X}}) &= \int_0^{\infty} \min(x, a) \cdot \max(x - a, 0) dF(x) = \\ &= \int_0^a 0 \cdot dF(x) + \int_a^{\infty} a \cdot \max(x - a, 0) dF(x) = a \cdot E(\underline{\underline{X}}). \end{aligned}$$

В то время как дисперсии величин \underline{S} , $\underline{\underline{S}}$ и S связаны соотношением

$$\text{Var}(\underline{S}) + \text{Var}(\underline{\underline{S}}) < \text{Var}(S),$$

для стандартных отклонений выполняется обратное неравенство

$$\text{Sta}(\underline{S}) + \text{Sta}(\underline{\underline{S}}) > \text{Sta}(S).$$

Для доказательства достаточно возвести обе части в квадрат

$$\text{Var}(\underline{S}) + 2 \cdot \text{Sta}(\underline{S}) \cdot \text{Sta}(\underline{\underline{S}}) + \text{Var}(\underline{\underline{S}}) > \text{Var}(S)$$

и учесть равенство

$$\text{Var}(S) = \text{Var}(\underline{S}) + 2 \cdot \text{Cov}(\underline{S}, \underline{\underline{S}}) + \text{Var}(\underline{\underline{S}}),$$

а также общее свойство коэффициента корреляции случайных величин, не связанных линейной зависимостью,

$$\text{Cov}(\underline{S}, \underline{\underline{S}}) / (\text{Sta}(\underline{S}) \text{Sta}(\underline{\underline{S}})) < 1.$$

Свойство $\text{Sta}(\underline{S}) + \text{Sta}(\underline{\underline{S}}) > \text{Sta}(S)$ особенно интересно в сравнении с соответствующим свойством пропорционального деления риска:

$$\text{Sta}(cS) + \text{Sta}((1 - c)S) = \text{Sta}(S).$$

Но более важно следующее свойство непропорционального деления риска.

Теорема. При непропорциональном делении каждого убытка коэффициенты вариации $Vko(\underline{S})$ и $Vko(\underline{\underline{S}})$ первичного и вторичного рисков в рамках коллективной модели являются монотонно невозрастающими функциями от вычитаемой франшизы a , и справедливы неравенства (при условии фактического деления риска)

$$Vko(N) < Vko(\underline{S}) < Vko(S) < Vko(\underline{\underline{S}}).$$

Доказательство. В силу равенства

$$(Vko(\underline{S}))^2 = \text{Var}(\underline{S}) / (E(\underline{S}))^2 = \frac{E(\underline{X}^2)}{E(N) \cdot (E(\underline{X}))^2} + \frac{\text{Var}(N) - E(N)}{(E(N))^2},$$

для доказательства монотонности $Vko(\underline{S})$ достаточно убедиться, что зависящая от a часть

$$h(a) = E(\underline{X}^2) / (E(\underline{X}))^2 = m_2(a) / (m_1(a))^2,$$

где

$$m_k(a) = E(\underline{X}^k) = \int_0^a kx^{k-1}(1 - F(x))dx$$

(см. раздел 4.2.3), обладает положительной производной $h'(a) > 0$. Тем самым одновременно будет доказана упомянутая в разделе 4.2.3 монотонность $Vko(\underline{X}) = \sqrt{h(a)} - 1$. Учитывая

$$m_k'(a) = k \cdot a^{k-1}(1 - F(a)),$$

находим

$$\begin{aligned} h'(a)(m_1(a))^4 &= (m_1(a))^2 \cdot m_2'(a) - 2m_1(a) \cdot m_1'(a) \cdot m_2(a) = \\ &= 2m_1(a)(1 - F(a))(a \cdot m_1(a) - m_2(a)) > 0, \end{aligned}$$

так как $m_k(a) < a \cdot m_{k-1}(a)$ при $a > \inf\{x | F(x) > 0\}$.

Поскольку $Vko(\underline{S}) \rightarrow Vko(S)$ при $a \rightarrow \infty$, монотонность $Vko(\underline{S})$ приводит к неравенству $Vko(\underline{S}) \leq Vko(S)$. Неравенство $Vko(\underline{S}) > Vko(N)$ следует из выражения

$$Vko(\underline{S})^2 = \text{Var}(\underline{S}) / (E(\underline{S}))^2 = (Vko(N))^2 + (Vko(\underline{X}))^2 / E(N).$$

Доказательство для $\underline{\underline{S}}$ проводится аналогично: ввиду равенства

$$(Vko(\underline{\underline{S}}))^2 = \frac{E(\underline{\underline{X}}^2)}{E(N) \cdot (E(\underline{\underline{X}}))^2} + \frac{\text{Var}(N) - E(N)}{(E(N))^2}$$

требуется исследовать на монотонность только функцию

$$H(a) = E(\underline{X}^2) / (E(\underline{X}))^2 = M_2(a) / M_1(a)^2,$$

где

$$M_k(a) = E(\underline{X}^k) = \int_a^\infty (x-a)^k dF(x).$$

Используя свойства

$$M'_k(a) = -k \cdot \int_a^\infty (x-a)^{k-1} dF(x) = -k \cdot M_{k-1}(a)$$

и

$$M_0(a) = 1 - F(a),$$

получим

$$\begin{aligned} H'(a)(M_1(a))^4 &= (M_1(a))^2 \cdot M_2'(a) - 2 \cdot M_1(a) \cdot M_1'(a) \cdot M_2(a) = \\ &= 2 \cdot M_1(a) \cdot (M_2(a)(1 - F(a)) - (M_1(a))^2) = \\ &= 2 \cdot M_1(a) \cdot (E(\underline{X}^2) - (E(\underline{X}))^2) \cdot (1 - F(a))^2 = \\ &= 2 \cdot M_1(a) \cdot \text{Var}(\underline{X}) \cdot (1 - F(a))^2 > 0 \end{aligned}$$

при $a < \sup\{x \mid F(x) < 1\}$.

Наконец, из монотонности $Vko(\underline{S})$ и равенства $Vko(\underline{S}) = Vko(S)$ при $a = 0$ вытекает неравенство $Vko(S) \leq Vko(\underline{S})$. ■

Пример. Пусть размер убытка X распределен логнормально с коэффициентом вариации $Vko(X) = 4$, а число убытков N — по закону Пуассона с математическим ожиданием $E(N) = 0,1$ (эти значения типичны для страхования автогражданской ответственности). Тогда

$$(Vko(S))^2 = ((Vko(X))^2 + 1) / E(N) = 170 \approx 13^2.$$

Если измерять вычитаемую франшизу в долях от математического ожидания или скалярного параметра, то коэффициенты вариации $Vko(\underline{S})$ и $Vko(S)$ первичного и вторичного рисков не будут зависеть от скалярного параметра (см. раздел 4.3.2):

$a / E(X)$	0,01	0,1	1	10	100	∞
$Vko(S)$	3,2	3,3	4,3	7,0	10,9	13,0
$Vko(\underline{S})$	13,2	14,1	20,8	61,9	466,0	

4.2.5. ЭФФЕКТ ОСВОБОЖДЕНИЯ

Введенный в предыдущем разделе эффект освобождения

$$r(a) = E(\underline{S}) / E(S)$$

задает среднюю долю ожидаемого убытка $E(S)$, от которой страховщик освобождается за счет установления франшизы a , и служит основой для определе-

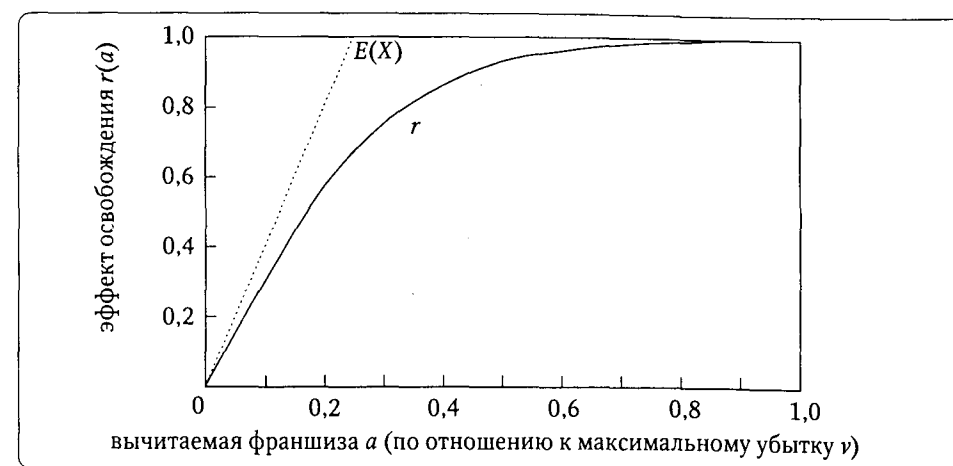


Рисунок 4.2.5.1. Пример функции эффекта освобождения

ния франшизных скидок. В этом разделе мы исследуем поведение $r(a)$ в зависимости от a в рамках коллективной модели. При независимости числа и размеров убытков справедливо равенство

$$\begin{aligned} r(a) &= E(\underline{S}) / E(S) = E(\underline{X}) / E(X) = \\ &= \frac{1}{E(X)} \left(\int_0^a x dF(x) + a(1 - F(a)) \right) = \int_0^a (1 - F(x)) dx / E(X). \end{aligned}$$

Отсюда видим, что эффект освобождения не зависит от числа убытков, а зависит только от распределения размера убытка F . Далее, обозначив через $v = \sup\{x \mid F(x) < 1\}$ максимальный убыток, выявляем следующие свойства:

r непрерывна и дифференцируема, причем

$$r(0) = 0,$$

$$r(v) = 1,$$

$$r'(a) = (1 - F(a)) / E(X),$$

$$r'(a) > 0 \text{ при } a < v,$$

$$r'(0) = 1 / E(X),$$

$$r'(v) = 0, \text{ если } \lim_{x \rightarrow v} F(x) = 1,$$

$$r''(a) \leq 0.$$

Получается, функция эффекта освобождения $r(a)$ всегда депрессивно (вогнуто) возрастает на промежутке $(0; 1)$ от 0 до v , см. рисунок 4.2.5.1. Эти свойства обеспечивают достаточно высокую точность оценки

$$r(a) \leq r'(0) \cdot a = a / E(X)$$

при малых значениях a . В силу свойства

$$r(c \cdot v) = r(c \cdot v + (1 - c) \cdot 0) > c \cdot r(v) + (1 - c)r(0) = c$$

при $0 < c < 1$ (вогнутость), эффект освобождения при франшизе 100% от максимального убытка (страховой суммы) v (в большинстве случаев значительно) превышает 100%. Это означает, в частности, что франшиза в размере 100% от страховой суммы больше освобождает страховщика, чем деление убытков со страхователем в пропорции 100% : 100(1 - c) %.

Функция эффекта освобождения r полностью характеризует распределение размера убытка F . Последнее выражается через r по формуле

$$F(x) = 1 - r'(x) / r'(0).$$

С эффектом освобождения связана очень удобная и зачастую довольно полезная *графическая интерпретация* моментов первичного и вторичного рисков. Выведенное в разделе 4.2.3 выражение

$$E(\underline{X}) = r(a)E(X) = \int_0^a (1 - F(x))dx,$$

представляет собой обобщение известной формулы математического ожидания (для неотрицательных случайных величин)

$$E(X) = \int_0^{\infty} (1 - F(x))dx.$$

Эта формула получается из предыдущей в результате предельного перехода $a \rightarrow \infty$ и допускает интерпретацию математического ожидания $E(X)$ как величины площади, заключенной между функцией распределения F и прямой $y = 1$. Эффект освобождения $r(a)$ показывает, какую долю в этой площади занимает участок, расположенный слева от прямой $x = a$, см. *рисунок 4.2.5.2*.

В случае распределения Парето с нулевой точкой $F(x) = 1 - b^{\alpha}(x + b)^{-\alpha}$ по указанным формулам находим

$$r(a) = 1 - b^{\alpha-1}(a + b)^{1-\alpha}, \quad \text{при } \alpha > 1.$$

Размер площади справа от прямой $x = a$ равен

$$E(\underline{X}) = E(X) - E(\underline{X}) = \int_a^{\infty} (1 - F(x))dx.$$

Далее, дифференцируя функцию

$$m_2(a) = E(\underline{X}^2) = \int_0^a x^2 dF(x) + a^2(1 - F(a))$$

и учитывая равенство $r'(a) = (1 - F(a)) / E(X)$, получим

$$m_2'(a) = 2a(1 - F(a)) = 2aE(X)r'(a)$$

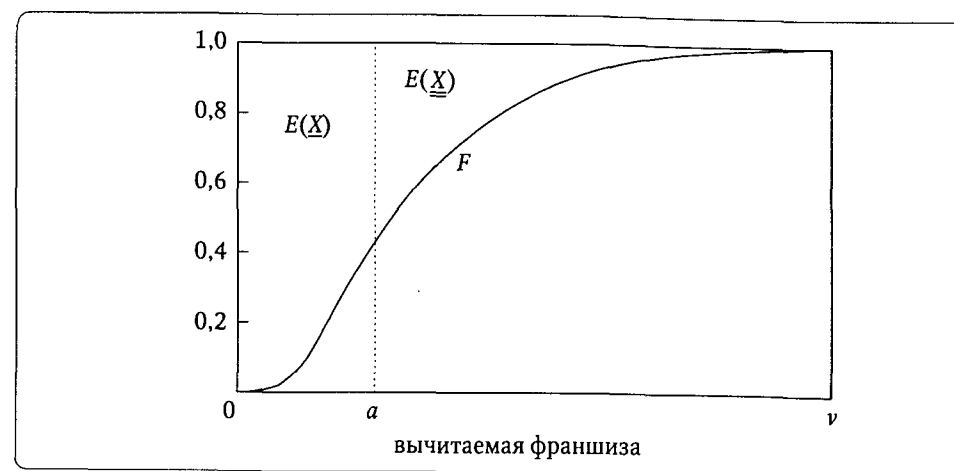


Рисунок 4.2.5.2. Графическая интерпретация первого момента первичного и вторичного рисков

и отсюда

$$\begin{aligned} E(\underline{X}^2) &= m_2(a) = m_2(a) - m_2(0) = \int_0^a m_2'(x)dx = \\ &= 2 \cdot E(X) \cdot \int_0^a x \cdot r'(x)dx = 2 \cdot E(X) \cdot \int_0^a (r(a) - r(x))dx. \end{aligned}$$

В последнем равенстве использована формула интегрирования по частям. В результате предельного перехода $a \rightarrow \infty$ имеем

$$E(X^2) = 2 \cdot E(X) \cdot \int_0^{\infty} (1 - r(x))dx.$$

Согласно этой формуле, $E(X^2)$ с точностью до множителя $2 \cdot E(X)$ совпадает с площадью, ограниченной кривой эффекта освобождения $r(x)$ и прямой $y = 1$. Второй момент $E(\underline{X}^2)$ первичного риска равен части этой площади слева от прямой $x = a$ и ниже прямой $y = r(a)$.

Часть площади, соответствующую второму моменту $E(\underline{X}^2)$ вторичного риска (она не равна разности $E(X^2) - E(\underline{X}^2)$), найдем из равенства

$$1 - r(a) = E(\underline{X}) / E(X) = M_1(a) / E(X),$$

где

$$M_k(a) = E(\underline{X}^k) = \int_a^{\infty} (x - a)^k dF(x).$$

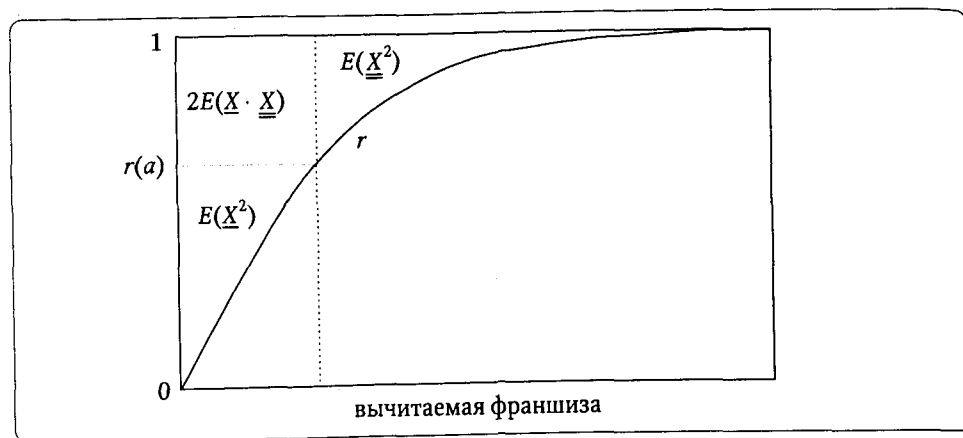


Рисунок 4.2.5.3. Графическая интерпретация второго момента первичного и вторичного рисков. Нанесенные значения получаются умножением площадей на $2E(x)$

Учитывая

$$M'_k(a) = -k \cdot M_{k-1}(a),$$

получим

$$M'_2(a) = -2 \cdot M_1(a) = -2 \cdot E(X) = -2 \cdot E(X)(1 - r(a)).$$

Поскольку $M_2(a) \rightarrow 0$ при $a \rightarrow \infty$,

$$E(\underline{X}^2) = M_2(a) = - \int_0^{\infty} M'_2(x) dx = 2 \cdot E(X) \cdot \int_a^{\infty} (1 - r(x)) dx.$$

Следовательно, $E(\underline{X}^2)$ с точностью до множителя $2 \cdot E(X)$ определяется площадью, расположенной справа от прямой $x = a$ и ограниченной эффектом освобождения $r(x)$ и прямой $y = 1$ (см. рис. 4.2.5.3).

Прямоугольному участку площади между прямыми $x = 0$, $x = a$, $y = r(a)$ и $y = 1$ соответствует величина

$$E(X^2) - E(\underline{X}^2) - E(\underline{X} \cdot \underline{X}) = 2 \cdot E(\underline{X} \cdot \underline{X}),$$

а формула $2 \cdot E(\underline{X} \cdot \underline{X}) = 2 \cdot E(X) \cdot a \cdot E(\underline{X}) / E(X)$ площади прямоугольника (с сохранением общего множителя $2 \cdot E(X)$), подтверждает доказанное в разделе 4.2.4 равенство $E(\underline{X} \cdot \underline{X}) = a \cdot E(\underline{X})$.

Графическая интерпретация особенно важна, когда число убытков N распределено по закону Пуассона. В этом случае

$$\text{Var}(S) = E(N) \cdot E(X^2),$$

$$\text{Var}(\underline{S}) = E(N) \cdot E(\underline{X}^2),$$

$$\text{Var}(\underline{S}) = E(N) \cdot E(\underline{X}^2),$$

$$\text{Cov}(\underline{S}, \underline{S}) = E(N) \cdot E(\underline{X} \cdot \underline{X}).$$

и площадь между кривой эффекта освобождения $r(x)$ и прямой $y = 1$, умноженная на

$$2 \cdot E(N) \cdot E(X) = 2 \cdot E(S),$$

равна дисперсии $\text{Var}(S)$, а описанные выше участки площадей — по порядку $\text{Var}(\underline{S})$, $\text{Var}(\underline{S})$ и $2 \cdot \text{Cov}(\underline{S}, \underline{S})$.

Учтем зависимость первичного и вторичного совокупных рисков от размера франшизы a в обозначениях $\underline{S}(a)$ и $\underline{S}(a)$. В силу равенств

$$E(\underline{S}(a)) = r(a) \cdot E(S),$$

$$E(\underline{S}(a)) = (1 - r(a)) \cdot E(S),$$

в пуассоновском случае получаются простые выражения для дисперсий

$$\text{Var}(\underline{S}(a)) = 2 \cdot E(S) \int_0^a (r(a) - r(x)) dx = 2 \cdot \int_0^a (E(\underline{S}(a)) - E(\underline{S}(x))) dx,$$

$$\text{Var}(\underline{S}(a)) = 2 \cdot E(S) \int_a^{\infty} (1 - r(x)) dx = 2 \cdot \int_0^a E(\underline{S}(x)) dx,$$

допускающие вычисление дисперсий посредством интегрирования математических ожиданий.

4.2.6. ВЫВОД

В этой главе мы научились описывать влияние (непропорционального) деления риска на случайные величины числа убытков, размера отдельного убытка и совокупного убытка. Исследование сводится к различным манипуляциям с функциями распределения и нередко требует численного интегрирования, так как не все функции задаются в явном виде. Существенно облегчает работу компьютерное программное обеспечение расчета функций нормального, гамма- и бета-распределений.

Принципиальное значение для следующей главы имеет эффект освобождения, который полезно представить в виде графика (см. рис. 4.2.5.1–4.2.5.3). Для построения кривой эффекта освобождения группы рисков необходимо смоделировать распределение размера убытка на основании детальной статистики убытков группы. Конечно, можно построить эмпирическую кривую эффекта освобождения, минуя подгонку распределения размера убытка. Но делать это категорически не рекомендуется — уровень расположения эмпирической кривой существенно зависит от присутствия в выборке *больших убытков*. В области больших убытков все равно потребовалось бы предварительно выравнять или экстраполировать статистику.

Это становится очевидным при анализе эмпирической функции эффекта освобождения. Пусть $s = x_1 + \dots + x_n$ — сумма всех наблюдаемых размеров убытков x_k . Тогда

$$\underline{r}(a) = \sum_{k=1}^n \min(x_k, a) / s$$

эмпирический эффект освобождения при франшизе a . При добавлении убытка размера $x_0 > a$ значение $r(a)$ заменяется на

$$r_0(a) = \frac{r(a) \cdot s + a}{s + x_0}.$$

С ростом x_0 эта величина уменьшается. Как только x_0 становится больше $a / r(a)$, достигается неравенство $r_0(a) < r(a)$. Таким образом, недооценка частоты больших убытков ведет к завышению эффекта освобождения. В случае небольшой группы рисков завышение может быть очень существенным. Следующий пример служит тому подтверждением. Пусть по группе наблюдалось 200 убытков со средним размером μ , и при франшизе $a = 2\mu$ эмпирический эффект освобождения составил $r(a) = 30\%$. Дополнительный большой убыток размера $x_0 = 100\mu$ (убыток такого порядка вполне возможен в большинстве видов страхования) снизил бы эмпирический эффект освобождения до $r_0(a) = 20,7\%$.

Собственно, риск при любой форме страхования, включая частичное, заключается в отклонении убытка от своего ожидаемого значения. Поведение коэффициента вариации (см. теорему из раздела 4.2.4) свидетельствует, что при непропорциональном делении вторичный риск намного опаснее первичного. Как мы выяснили в разделе 4.2.1, при перестраховании эксцедента сумма ситуация аналогична. Поэтому перестрахование эксцедента сумм и непропорциональное деление риска весьма привлекательны для носителя первичного риска, если партнер не пытается компенсировать повышенный риск соответствующей рисковой надбавкой. Подробнее мы обсудим эту тему в главе 4.4.

4.3. Исчисление премий при делении риска

4.3.1. ОБЗОР

В настоящей главе мы применим выведенные в главе 4.2 распределения к расчетам, связанным с франшизой и непропорциональным перестрахованием, — эти формы деления риска представляют наибольший практический интерес. Технические приемы полностью описаны в главе 4.2, поэтому нам предстоит заниматься только конкретными задачами. В разделе 4.3.2 мы выясним, как влияет вычитаемая франшиза на рисковую надбавку и нагрузку. Особое вни-

мание уделяется инфляции, дополнительно отягощающей вторичный риск при любом непропорциональном делении риска.

Наиболее обширный раздел 4.3.3 посвящен перестрахованию эксцедента убытка — основной сфере приложения математики перестрахования. Центральное место в разделе занимают два метода расчета перестраховочных премий. Первый (традиционный) — основан на данных по оригинальным рискам (тарификация «Exposure»). Второй (тоже довольно распространенный) — рассчитан на недостаток статистики и обходится данными, соответствующими только интересующей части покрытия (тарификация на базе опыта). Как будет показано на параметрическом примере, существенная потеря информации, связанная с применением второго метода, оборачивается высоким размером дисперсии. В разделе 4.3.3 кратко обсуждаются две модели распределения размера убытка, определенные только в области больших убытков.

Несмотря на формальное сходство вычитаемой франшизы и перестрахования эксцедента убытка, реальные подоплеку этих форм совершенно разные. Данный факт находит отражение и в терминологии: при делении риска с помощью вычитаемой франшизы для партнеров употребляются названия «Страхователь» и «Страховая компания», а при перестраховании эксцедента убытка — «Страховщик» и «Перестраховщик».

В разделе 4.3.4 анализируется деление не единичного, а совокупного убытка, что предусмотрено годовой франшизой, перестрахованием «Stop Loss», а также плавающими премиями. Единственная связанная с этими формами дополнительная задача — учесть деление при расчете распределения совокупного убытка.

4.3.2. ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕМИЙ В СЛУЧАЕ ВЫЧИТАЕМОЙ ФРАНШИЗЫ

В этом разделе предполагается возможность выбора страхователем любого размера (вычитаемой) франшизы, как в страховании автокаско или огнемом страховании промышленных предприятий. Покрытие с минимальным размером франшизы (например, 0) называется основным. Поскольку убытки ниже минимального размера франшизы страховщику, как правило, неизвестны, принято относить распределение F размера убытка только к основному покрытию. Например, при минимальном значении франшизы 300 € убытками считаются только превышающие 300 €, а через F обозначается распределение разности между фактическим размером убытка и 300 €. Все франшизные скидки тоже измеряются относительно основного покрытия.

Для расчета франшизных скидок требуется определить влияние франшизы (превышающей минимальную) на три элемента:

- математическое ожидание убытка $E(S)$,
- рисковую надбавку s_0 ,
- нагрузку (постоянные расходы k_0 и долю p пропорциональных расходов),

составляющих брутто-премию

$$b = (E(S) + s_0 + k_0) / (1 - p).$$

Влияние франшизы на математическое ожидание убытка $E(S)$ мы подробно исследовали в главе 4.2. Оно характеризуется эффектом освобождения. Напомним, за счет франшизы a (на a превышающей основное покрытие) математическое ожидание убытка страховой компании $E(S)$ уменьшается до размера

$$E(\underline{S}) = E(S)(1 - r(a)).$$

Как мы узнали из главы 4.2, эффект освобождения r в коллективной модели не зависит от частоты убытков. Это позволяет назначать тарифным группам, отличающимся только частотой убытков, одинаковые франшизные скидки.

Задача исчисления франшизных скидок упрощается и когда распределения размеров убытков разных тарифных групп отличаются только скалярными параметрами (имеют одинаковую форму). В качестве примера рассмотрим логнормальное распределение $F(x | \mu, \sigma) = \Phi((\ln(x) - \mu) / \sigma)$ (Φ – функция стандартного нормального распределения). Эффект освобождения в этом случае равен (см. табл. 4.2.3.1)

$$r(a) = F(a | \mu + \sigma^2, \sigma) + (1 - F(a | \mu, \sigma)) \cdot a / E(X) = \\ = \Phi\left(\frac{\ln(a) - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right) + \frac{a}{E(X)} \cdot \Phi\left(-\frac{\ln(a) - \mu}{\sigma}\right),$$

где $E(X) = \exp(\mu + \sigma^2 / 2)$. Из приведенной формулы следует, что при неизменном отношении $t = a / E(X)$ франшизы к ожидаемому размеру убытка эффект освобождения

$$\underline{r}(t) := r(t \cdot E(X))$$

вне зависимости от $E(X)$ всегда составляет

$$\underline{r}(t) = \Phi(\ln(t) / \sigma - \sigma / 2) + t \cdot \Phi(-\ln(t) / \sigma - \sigma / 2),$$

так как $\mu = \ln(E(X)) - \sigma^2 / 2 = \ln(a) - \ln(t) - \sigma^2 / 2$. Функция $\underline{r}(t)$ зависит не только от t , но и от параметра формы σ . Следовательно, расчет франшизных скидок для тарифных групп с одинаковым параметром формы распределения размера убытка может производиться при помощи одной и той же функции эффекта освобождения, если размер франшизы измеряется относительно скалярного параметра. Для функции эффекта освобождения $\underline{r}(t)$ логнормального распределения, кроме того, справедливо равенство

$$\underline{r}(t^{-1}) = \underline{r}(t) / t, \quad 0 < t < \infty,$$

показывающее, что для задания функции $\underline{r}(t)$ на всей области определения достаточно задать ее значения только на множестве $t \leq 1$. На рисунке 4.3.2.1 изображены графики функции $\underline{r}(t)$ при $\sigma = 1,5$, $\sigma = 1,75$ и $\sigma = 2$.

Различия тарифных групп в отношении математического ожидания размера убытка часто бывают обусловлены различием вероятных максимальных

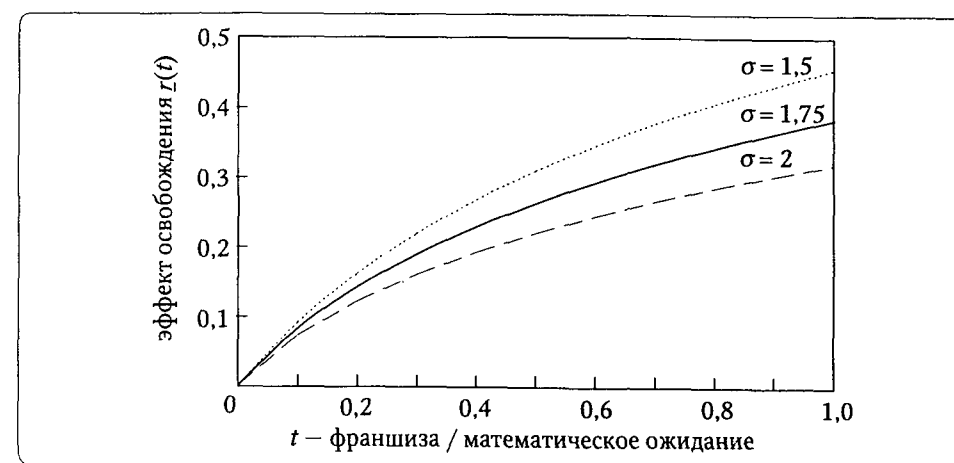


Рисунок 4.3.2.1. Эффект освобождения при логнормальном распределении

убытков (связанным, например, с различием объемов рисков). Поэтому имеет смысл дифференцировать таблицы франшизных скидок только в зависимости от размера максимального убытка (как это сделано Немецким союзом страховщиков для огневого страхования промышленных предприятий), или же ставить франшизную скидку в зависимость от доли франшизы в максимальном убытке.

Исследование влияния франшизы на рисковую надбавку проведем только для портфеля независимых полисов — этот случай наиболее интересен с практической точки зрения. Как мы выяснили в разделе 1.2.3, рисковая надбавка полиса k с точностью до не зависящего от k множителя равна дисперсии $Var(S_k)$. Когда страхователь принимает на себя (дополнительную) франшизу, $Var(S_k)$ уменьшается, и размер рисковая надбавка должен быть снижен. Относительно математического ожидания рисковая надбавка изменяется от $Var(S_k) / E(S_k)$ до $Var(\underline{S}_k) / E(\underline{S}_k)$, в общем случае ничего более конкретного сказать невозможно. В некоторых реалистичных случаях (скажем, когда размер убытка имеет распределение Парето с нулевой точкой) отношение $Var(\underline{S}_k) / E(\underline{S}_k)$ представляет собой возрастающую функцию размера франшизы. (Если число убытков распределено по закону Пуассона, а размер убытка имеет равномерное распределение, то $Var(\underline{S}_k) / E(\underline{S}_k)$, наоборот, убывает с ростом размера франшизы.)

Вспомним, что при расчете рисковая надбавки дисперсия каждого полиса умножается на коэффициент

$$(r - z)c / Var(S),$$

где $(r - z)$ — желаемый доход, c — сопоставленный портфелю гарантийный капитал, а S — совокупный убыток портфеля (см. раздел 1.2.3). Уменьшение дисперсии $Var(S)$ совокупного убытка за счет установления франшиз ведет к снижению потребности в гарантийном капитале. В первом приближении га-

рантийный капитал можно изменять параллельно стандартному отклонению совокупного убытка (см. раздел 1.2.5) и работать с коэффициентом

$$(r - z)\beta_0 / \text{Sta}(S),$$

где β_0 — кратность стандартного отклонения совокупного убытка в исходном гарантийном капитале:

$$c = \beta_0 \text{Sta}(S).$$

Рассмотрим сначала простейшую ситуацию K одинаково распределенных полисов, принимающих одинаковую франшизу. При введении франшиз исходный совокупный убыток

$$S = S_1 + \dots + S_K$$

снижается до уровня

$$\underline{S} = \underline{S}_1 + \dots + \underline{S}_K,$$

а рискованная надбавка k -го полиса (с точностью до множителя $(r - z)\beta_0$)

$$\text{Var}(S_k) / \text{Sta}(S) = \text{Sta}(S_k) / \sqrt{K}$$

до уровня

$$\text{Var}(\underline{S}_k) / \text{Sta}(\underline{S}) = \text{Sta}(\underline{S}_k) / \sqrt{K}.$$

В силу доказанного в разделе 4.2.4 свойства монотонности коэффициента вариации, отношение рискованной надбавки к математическому ожиданию $E(\underline{S}_k)$ в этом случае всегда увеличивается с ростом франшизы.

Аналогичное утверждение справедливо и в общем случае по-разному распределенных полисов с разными франшизами, по крайней мере, если (соответствующим образом определенное, например, с помощью страховой суммы) распределение «размеров» полисов в результате введения франшиз не слишком сильно меняется. Подведем итог наших рассуждений: несмотря на уменьшение абсолютной рискованной надбавки с ростом франшизы, отношение рискованной надбавки к математическому ожиданию убытка в большинстве случаев увеличивается.

Влияние франшизы на нагрузку описывается сравнительно просто. Процентная доля пропорциональных расходов (комиссионное вознаграждение агентов и налоги) при назначении франшизы обычно не изменяется. Исключение возможно, когда введение франшиз форсируется за счет предоставления агентам такой же комиссии, какую они получали бы, страхуя те же риски без франшизы. Постоянные (штучные) расходы, состоящие по большей части из административных расходов, вообще говоря, тоже не подвержены влиянию франшизы. Можно предполагать разве только сокращение расходов на обработку убытков, которых с появлением франшиз становится меньше.

Таким образом, брутто-премия полиса с франшизой a составит

$$b(a) = (E(S)(1 - r(a)) + s_0(a) + k_0) / (1 - p),$$

причем рискованная надбавка, как мы только что убедились, в большинстве случаев удовлетворяет неравенству

$$s_0(a) > s_0(0) \cdot (1 - r(a)).$$

Сравнив $b(a)$ с брутто-премией $b = b(0)$ для основного покрытия, замечаем, что брутто-скидка ниже эффекта освобождения $r(a)$:

$$\frac{b - b(a)}{b} < \frac{(E(S) + s_0(0)) \cdot r(a)}{b \cdot (1 - p)} = \frac{(E(S) + s_0(0)) \cdot r(a)}{E(S) + s_0(0) + k_0} < r(a).$$

С применением франшизы связаны три довольно серьезные проблемы:

- инфляция,
- антиселекция,
- потеря информации.

Если по причине инфляции случайная величина убытка X возрастает до размера $(1 + z)X$, то эффект освобождения становится равен

$$\begin{aligned} r_z(a) &= E(\min((1 + z)X, a)) / E((1 + z)X) = \\ &= E(\min(X, a / (1 + z))) / E(X) = r(a / (1 + z)) < r(a), \end{aligned}$$

где r обозначает эффект освобождения до поправки на инфляцию z . Как видим, за счет инфляции $z > 0$ при неизменном размере франшизы эффект освобождения уменьшается. Для восстановления исходного эффекта освобождения надо повысить либо премию, либо франшизу.

Из предыдущих выкладок следует, что эффект освобождения не изменяется при наращении франшизы a параллельно размеру убытка до значения $a(1 + z)$. В то же время было бы недостаточно нарастить премию параллельно размеру убытка, оставив неизменным значение франшизы, поскольку математическое ожидание $E(\underline{X})$ вторичного риска в условиях инфляции возрастает более чем пропорционально:

$$\begin{aligned} E(\underline{(1 + z)X}) &= E(\max((1 + z)X - a, 0)) = \\ &= (1 + z) \cdot E(\max(X - a / (1 + z), 0)) > (1 + z) \cdot E(\max(X - a, 0)) = \\ &= (1 + z) \cdot E(\underline{X}). \end{aligned}$$

Самый простой способ учесть инфляцию — привязать размер франшизы к подходящему индексу инфляции убытка. Однако на практике эта возможность почти не используется, вероятно, потому что привязки к индексам не приветствуются клиентами.

Проблема антиселекции связана с применением необязательных франшиз (когда страхователи вправе не принимать франшизу) и усугубляется крайней неоднородностью тарифных групп именно в тех видах страхования, где введение необязательных франшиз наиболее целесообразно (например, страхование промышленных предприятий). Это создает потенциально опасную ситуацию, когда на франшизу соглашаются преимущественно обладатели так называемых «хороших» рисков (желающие уменьшить свою премию), а обладатели «плохих» рисков от нее отказываются. При наихудшем раскладе страховщик, предоставляя скидки, соберет существенно меньшую премию по сравнению с той, какая была бы в отсутствие франшиз, но понесет почти такой же расход по убыткам, как и до введения франшиз. Правда, такая экстремальная

антиселекция возможна только при условии правильной оценки страхователями своего потенциала убытков. Корректировка скидок по прошествии года не избавляет от проблемы, ведь страхователи могут соответствующим образом корректировать свое решение. Изначальное встраивание гарантийной маржи в скидки позволяет снизить потери, но тоже не исключает антиселекцию как таковую. С проблемой антиселекции страховщик сталкивается и при использовании обязательных франшиз, если страхователи свободны в выборе размера франшизы.

Единственный способ борьбы с антиселекцией — не оглашать фиксированных скидок, а назначать каждому страхователю, заинтересованному во франшизе или побуждаемому к принятию франшизы, индивидуальную скидку. При определении скидки страховщик должен попытаться поставить себя на место страхователя. Обладая куда большим навыком и информацией, чем страхователь, страховщик в состоянии назначить скидку, соразмерную с освобождением от убытка конкретного полиса.

Третья основная проблема, названная нами *потерей информации*, заключается в том, что после введения франшиз страховщик ничего не узнает об убытках ниже франшизы (и не хочет узнавать из соображений экономии расходов на ведение дела). Тем он лишает себя возможности в дальнейшем рассчитывать эффект освобождения и будет вынужден сразу исчислять премию для покрытия с франшизой (для исчисления основной премии (без франшизы) ему будет недоставать информации). С таким положением дел еще можно смириться, когда используется только один размер франшизы. Но если риски и без того, как правило, неоднородных или слишком мелких тарифных групп должны быть поделены на множество подгрупп в соответствии с размерами франшиз, то исчисление премий, особенно при небольшом объеме портфеля, становится весьма трудной задачей. В этом случае мы лишь знаем из свойств эффекта освобождения, что ставки премии дегрессивно уменьшаются с ростом франшизы, а значит, лежат на выпуклой кривой.

4.3.3. ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕМИЙ ПРИ ПЕРЕСТРАХОВАНИИ ЭКСЦЕДЕНТА УБЫТКА

Существенное формальное различие между перестрахованием эксцедента убытка и франшизой — лимитированность перестрахования. Подразумевается, что по каждому убытку X перестраховщик несет не полный вторичный риск $\max(X - a, 0)$, а лишь так называемый *лейер* (*Layer* — слой)

$$\min(\max(X - a, 0), h) = \begin{cases} 0, & \text{если } X \leq a, \\ X - a, & \text{если } a \leq X \leq a + h, \\ h, & \text{если } a + h \leq X, \end{cases}$$

ограничивающий его ответственность по каждому убытку значением h . Страховщик же помимо первичного риска $\min(X, a)$ несет остаток $\max(X - (a + h), 0)$. Обычно либо a и h выбираются практически исключающими убыток свы-

ше $a + h$, либо страховщик заключает еще один договор лимитированного перестрахования эксцедента убытка с приоритетом $a + h$. В реальности эксцедент убытка страховщика очень часто делится на несколько лейеров — опыт показывает, что для лейера с невысокой ответственностью h легче находится перестраховщик. На страховых рынках, где прямое страхование автогражданской ответственности предусматривает нелимитированное покрытие, возможен и нелимитированный лейер эксцедента убытка, то есть лейер с ответственностью $h = \infty$.

Каждый лимитированный лейер представим в виде разности двух нелимитированных лейеров (покрытий вторичного риска) или двух покрытий первичного риска (*формула эквивалентности лейеров*):

$$\begin{aligned} \min(\max(X - a, 0), h) &= \max(X - a, 0) - \max(X - (a + h), 0) = \\ &= \min(X, a + h) - \min(X, a). \end{aligned}$$

Это позволяет нам в большинстве случаев ограничиться рассмотрением нелимитированного лейера. На практике при тарификации договоров перестрахования эксцедента убытка математическое ожидание убытка чаще всего также сначала рассчитывается для нелимитированного лейера, а затем находится премия для лимитированного лейера.

Существуют два метода тарификации перестрахования эксцедента убытка: тарификация «Exposure» и тарификация «Burning Cost», называемая еще тарификацией на базе опыта. В первом случае перестраховщик руководствуется главным образом премиями и составом портфеля прямого страховщика, пользуясь техническими приемами из главы 4.2, а во втором случае — историей убытков лейера.

Тарификация «Exposure» заключается в следующем. Для каждой из интересующих групп рисков перестраховщик строит кривую эффекта освобождения r или кривую вторичного риска $1 - r$, или (что равноценно) распределение размера убытка. Для этого он почти всегда использует рыночную статистику или собственную статистику по пропорциональному перестрахованию (в виде выборки размеров отдельных убытков). От страховщика ему требуется узнать деление совокупной оригинальной премии покрываемого портфеля по группам рисков, а также долю нагрузки в оригинальной премии. На основании этих данных он сразу находит совокупную оригинальную нетто-премию b_i по i -й группе рисков, служащую ему в качестве оценки математического ожидания $E(S_i)$ оригинального совокупного убытка i -й группы. (Разумеется, перестраховщик произведет корректировки, если сочтет оригинальные премии страховщика для каких-то групп рисков недостаточными.) Затем к величине b_i применяется подходящая для i -й группы функция эффекта освобождения r_i , и таким образом определяется оценка $b_i(1 - r_i(a))$ ожидаемого по i -й группе убытка свыше приоритета a (см. главу 4.2). Для лимитированного лейера с приоритетом a и ответственностью h оценка вычисляется как $b_i(r_i(a + h) - r_i(a))$. Суммируя эти значения по всем группам i , перестраховщик получает математическое ожидание совокупного убытка по перестрахованной части портфеля страховщика. Как всякая страховая премия, окончательная пере-

страховочная премия помимо оценки математического ожидания убытка включает рисковую надбавку и нагрузку.

Справедливость этого метода существенно зависит от соответствия выбранной перестраховщиком кривой эффекта освобождения r_i эффектам освобождения полисов, отнесенных страховщиком в группу i . Соответствия не будет, например, когда страховые суммы по всем полисам i -й группы не превышают a , а перестраховщик применяет кривую r_i со значением $r_i(a) < 1$, допуская тем самым убытки свыше a , в то время как таковые невозможны. Для предотвращения подобных проблем страховщик должен применять страховую сумму в качестве одного из критериев классификации рисков (наряду с формой покрытия, родом предприятия и т. д.). Другими словами, в одну группу должны попадать только полисы с примерно одинаковыми страховыми суммами. Название «тарификация „Exposure“» как раз и объясняется зависимостью получаемого размера перестраховочной премии от степени «угрозы» приоритету со стороны страховых сумм перестраховываемых рисков.

Для перестраховщика из этих рассуждений следует необходимость дифференциации кривых эффекта освобождения в зависимости от размера страховой суммы, и в частности запрет на применение неограниченных распределений размера убытка. В связи с этим в *имущественном страховании* принято предполагать приближенное соотношение $X_1 / v_1 = X_2 / v_2$ для случайных величин убытков X_1 и X_2 двух рисков одинакового вида, но с разными страховыми суммами v_1 и v_2 . Тогда для рассматриваемого вида риска перестраховщику при любой страховой сумме требуется одна и та же кривая эффекта освобождения r^* , основанная на распределении степени убытка $Y = X / v$:

$$r^*(y) = E(\min(Y, y)) / E(Y), \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Если $b(v)$ — оригинальная нетто-премия анализируемого вида риска со страховой суммой v , то перестраховщик использует величину $b(v) \cdot (1 - r^*(a/v))$, $v > a$, в качестве оценки математического ожидания убытка свыше приоритета a . Одно из преимуществ кривых эффекта освобождения, основанных на степени убытка, — инвариантность относительно инфляции и валюты. Параметр формы распределения степени убытка существенно отличается от параметра формы распределения размера убытка, дополнительно содержащего в себе распределение страховых сумм.

При одинаковом для всех рисков распределении степени убытка средний размер убытка прямо пропорционален объему $E(X) = E(Y) \cdot v$. Но так как с ростом объема v число убытков $E(N) = \theta v$ увеличивается, эта модель не согласуется с моделью объема из раздела 1.3.2. Действительно, математическое ожидание величины $Z = S / v$ теперь зависит от v : $E(Z) = E(S/v) = E(N)E(X)/v = \theta E(Y)v$. Есть и еще одно обстоятельство, препятствующее применению этой модели. У рисков с очень высокими страховыми суммами тотальный убыток (в размере всей страховой суммы v) чаще всего невозможен в принципе (например, пожар в многоквартирном доме, как правило, затрагивает лишь несколько этажей). Поэтому, в частности, в огневом страховании принято оперировать не страховой суммой, а так называемым *вероятным максимальным убытком* (probable maximum loss, PML) $w < v$, он оценивается экспертами индивидуаль-

но по каждому риску. Нормируя убыток не на v , а на w , мы можем с большей уверенностью предполагать независимость распределения величины X/w от w у многих рисков. Поскольку у крупных рисков среднее число убытков растет медленнее страховой суммы, а отношение w/v с ростом v обычно убывает, мы снова приходим к модели из раздела 1.3.2, где средняя ставка убытка $E(Z)$ не зависит от объема v .

В *страховании ответственности* максимальный размер страховой выплаты заранее оценить практически невозможно, ведь страхуется не вещь, а требование третьих лиц. Поэтому для случайных величин размера убытка X_1 и X_2 двух рисков одинакового типа, но с разными страховыми суммами $v_1 < v_2$ предполагается приближенное соотношение $X_1 | X_1 < v_1 = X_2 | X_2 < v_1$, означающее, что риски имеют почти одинаковые распределения размера убытка, отсеченные и сконцентрированные справа от различных точек v_1 и v_2 . Если отсечь и сконцентрировать (нелимитированную) функцию распределения F размера убытка X справа от точки v , то функция

$$F_v(x) = \begin{cases} F(x) & \text{при } x < v \\ 1 & \text{при } x \geq v \end{cases}$$

будет задавать распределение размера убытка усеченной случайной величины $X_v = \min(X, v)$. Средний первичный риск $E(\min(X_v, a))$ при этом остается для всех $a \leq v$ неизменным:

$$E(\min(X_v, a)) = E(\min(X, a)),$$

но математическое ожидание

$$E(X_v) = E(\min(X, v))$$

убывает с уменьшением v . Тогда эффект освобождения r_v , соответствующий величине X_v , равен

$$r_v(a) = \frac{E(\min(X_v, a))}{E(X_v)} = \frac{E(\min(X, a))}{E(\min(X, v))} = \frac{r(a)}{r(v)}, \quad 0 \leq a \leq v,$$

где $r(a) = E(\min(X, a)) / E(X)$ — эффект освобождения неусеченной величины X . Получается, перестраховщик снова может тарифицировать риски одного вида, но с разными страховыми суммами с помощью одной и той же кривой эффекта освобождения r . В самом деле, если $b(v)$ — оригинальная премия рассматриваемого риска со страховой суммой v , то величина

$$b(v) \cdot (1 - r_v(a)) = b(v) \cdot (1 - r(a) / r(v)), \quad v > a,$$

служит оценкой математического ожидания убытка свыше приоритета a . Однако теперь значения функции r должны постоянно корректироваться с учетом инфляции и при необходимости переводиться в другую валюту.

Обойтись без этих корректировок позволяет применение так называемых *надбавок удвоения*, известных из прямого страхования ответственности. Поясним: в прямом страховании ответственности полис со стандартной страховой суммой v_0 (скажем, 1 млн) предлагается за определенную премию b_0 ; если

страхователь желает увеличить страховую сумму в два раза, то страховщик назначает надбавку z к основной премии (например, $z = 20\%$), и премия составляет $b_0(1+z)$. Для страховой суммы, в 4 раза превышающей стандартную, премия равна $b_0(1+z)^2$. Отсюда для 2^k -кратной стандартной страховой суммы получается премия $b_0(1+z)^k$ и соответственно для r -кратной — премия $b_0(1+z)^{\text{ld}(z)}$, где ld обозначает логарифм по основанию 2. В общем случае формула для премии по отдельному риску с произвольной страховой суммой $v > 0$ имеет вид

$$b(v) = b_0(1+z)^{\text{ld}(v/v_0)} = b_0(v/v_0)^{\text{ld}(1+z)}.$$

Поскольку заданная этой формулой функция $b(v)$ дегрессивна (вогнута), правило удвоения премии согласуется с выведенной ранее формой зависимости среднего размера убытка от страховой суммы: $E(X_v) = E(\min(X, v))$. Из равенств

$$b(v) = E(N)E(X_v)$$

и

$$\frac{d}{dv}E(X_v) = 1 - F(v)$$

легко вывести распределение размера убытка, лежащее в основе формулы премии со ставкой удвоения z . Взяв производную от

$$b(v) / E(N) = b_1(v/v_0)^c,$$

где $b_1 = b_0 / E(N)$ и $c = \text{ld}(1+z)$, находим

$$1 - F(v) = b_1 c (v/v_0)^{c-1}.$$

Таким образом, речь идет о распределении Парето (см. раздел 1.4.3) с параметром формы

$$\alpha = 1 - c = 1 - \text{ld}(1+z).$$

Правда, в отличие от обычного распределения Парето, функция F изначально определена для всех $v > 0$ и при малых v принимает отрицательные значения. Для получения настоящей функции распределения требуется изменить F в области отрицательных значений. Это можно сделать с таким расчетом, чтобы за пределом измененной части оставалась справедливой формула премии b . Например, функция $F(x) = 1 - (1 - \alpha)(x/u)^{-\alpha}$ при $x \geq u > 0$ (и $F(x) = 0$ иначе) удовлетворяет формуле премии b при всех $v > u$ и $v_0 > u$ ($0 < \alpha < 1$). Одиночному риску страхования ответственности обычно соответствует распределение с параметром $\alpha_1 < 1$, тогда как портфелю (в области больших убытков) — распределение с параметром $\alpha_2 > 2$. Эти факты не противоречат друг другу: распределение размера отдельного убытка в портфеле представляет собой смесь распределений размеров убытков одиночных рисков с распределением страховых сумм, а последнее усиливает уклон α_1 распределения размера убытка одиночного риска (функция плотности распределения страховых сумм почти всегда убывает).

Теперь проанализируем влияние инфляции на лимитированный лейер. В предыдущем разделе мы показали, что связанный с инфляцией рост размера убытка от X до $(1+z)X$ при неизменной франшизе a ведет к снижению эффекта освобождения и увеличению доли вторичного риска. Для лимитированного лейера аналогичное утверждение в общем случае неверно. Можно придумать такие сочетания лейера, ставки инфляции и распределения размера убытка (например, экспоненциальное распределение и лейер, не превышающий $E(X)$), при которых доля лейера в совокупном убытке вследствие инфляции оказывается ниже своего исходного размера. Правда, что касается важных для практики распределений, то в этих случаях инфляция всегда повышает долю лейера в совокупном убытке. Рассмотрим в качестве примера распределение Парето $F(x) = 1 - (x/d)^{-\alpha}$, $x > d$. При $\alpha > 1$ эффект освобождения равен $r(x) = 1 - \alpha^{-1}(x/d)^{1-\alpha}$. Значит, на лейер с приоритетом $a > d$ и ответственностью h приходится доля

$$r(a+h) - r(a) = \alpha^{-1}(a/d) - \alpha^{-1}((a+h)/d)^{1-\alpha}$$

совокупного убытка. Если размер убытка X возрастает под влиянием инфляции до уровня $(1+z)X$, то доля лейера составит (при $a > (1+z)d$)

$$\begin{aligned} \frac{E(\min((1+z)X, a+h)) - E(\min((1+z)X, a))}{E((1+z)X)} &= r\left(\frac{a+h}{1+z}\right) - r\left(\frac{a}{1+z}\right) = \\ &= (r(a+h) - r(a)) \cdot (1+z)^{\alpha-1}, \end{aligned}$$

а это в $(1+z)^{\alpha-1} > 1$ раз выше исходной доли. Абсолютное значение ожидаемого убытка по лейеру увеличивается в условиях инфляции в $(1+z)^{\alpha} > 1+z$ раз (даже более, чем пропорционально), поскольку к относительному приращению $(1+z)^{\alpha-1}$ добавляется связанное с инфляцией повышение основной величины $E(X)$ до уровня $(1+z)E(X)$.

Для расчета рискованной надбавки необходимо знать дисперсию совокупного лейера. Перестраховщик, как правило не имеет возможности с приемлемой точностью оценить дисперсию оригинального совокупного убытка, на основании которой он рассчитал бы дисперсию совокупного лейера. Поэтому мы будем отталкиваться от формулы, выведенной в разделе 4.2.4 для вторичного риска:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\underline{S}) &= E(\underline{N}) \cdot E({}_aX^2) + (\text{Var}(\underline{N}) - E(\underline{N})) \cdot (E({}_aX))^2 = \\ &= E(\underline{N}) \cdot E({}_aX) \cdot \left\{ \frac{E({}_aX^2)}{E({}_aX)} + \left(\frac{\text{Var}(\underline{N})}{E(\underline{N})} - 1 \right) \cdot E({}_aX) \right\} = \\ &= E(\underline{S}) \cdot \left\{ \frac{E(\underline{X}^2)}{E(\underline{X})} + \left(\frac{\text{Var}(\underline{N})}{E(\underline{N})} - 1 \right) \cdot E({}_aX) \right\}. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что такое же выражение справедливо и для лимитированного лейера, когда величины \underline{X} и ${}_aX$ соотнесены к лейеру. Оценка присут-

ствующей в этой формуле величины $E(\underline{S})$ нам известна (она находится с помощью метода тарификации «Exposure»). Для среднего убытка лейера

$$E(\underline{X}) = \left(\int_a^{a+h} (x-a) dF(x) + h(1-F(a+h)) \right) / (1-F(a))$$

достаточно лишь грубой оценки (допустим, $h/2$). Это оправдано ничтожной ролью второго слагаемого в фигурной скобке (отношение $Var(\underline{N}) / E(\underline{N})$, как правило, очень близко к 1, а в случае распределения Пуассона равно 1; в разделе 4.2.2 мы выяснили, что отрицательное биномиальное распределение оригинального числа убытков с ростом количества мелких убытков, не попадающих под ответственность перестраховщика, тоже становится все больше похоже на распределение Пуассона). Что же касается видов страхования с непуассоновским числом убытков свыше приоритета (речь идет главным образом о числе событий в страховании стихийных бедствий), то по ним перестраховщик, как правило, ведет собственную статистику, достаточную для оценки $Var(\underline{N}) / E(\underline{N})$. Таким образом, расчет дисперсии совокупного убытка лейера сводится к оценке элемента $E(\underline{X}^2) / E(\underline{X})$. Для каждой из тарифицируемых в отдельности групп рисков эту оценку можно вычислить с помощью соответствующей функции эффекта освобождения r и интеграла

$$t(a) = 2 \cdot \int_0^a (r(a) - r(x)) dx,$$

поскольку

$$\frac{E(\underline{X}^2)}{E(\underline{X})} = \frac{2 \cdot \int_a^{a+h} (r(a+h) - r(x)) dx}{r(a+h) - r(a)} = \frac{t(a+h) - t(a)}{r(a+h) - r(a)} - 2a$$

(это равенство выводится с помощью таких же рассуждений, как в разделе 4.2.5). Но гораздо проще воспользоваться оценкой

$$\begin{aligned} E(\underline{X}^2) &= \int_a^{a+h} (x-a)^2 dF(x) + h^2(1-F(a+h)) < h \cdot \int_a^{a+h} (x-a) dF(x) + h^2(1-F(a+h)) = \\ &= h \cdot E(\underline{X}), \end{aligned}$$

обладающей достаточной точностью при небольших h . Убедиться в этом позволяет, в частности, график на рисунке 4.2.5.3, где оценка означает замену участка функции r между $r(a)$ и $r(a+h)$ отрезком прямой.

Для тарификации на базе опыта, часто называемой тарификацией «Burning Cost» (последнее понятие происходит из огневого страхования), перестраховщику не требуется собственная статистика — он опирается исключительно на историю убытков покрываемого портфеля страховщика. Обычно страховщик предоставляет перестраховщику статистику убытков, превысивших 50% приоритета минимального лейера, за последние 5 лет. Перестраховщик перево-

дит каждый убыток в цены предстоящего года договора при помощи индекса, наилучшим образом отражающего подорожание убытков. Проще говоря, перестраховщик изменяет историческое значение каждого убытка так, чтобы получаемое значение равнялось предполагаемой стоимости того же убытка в предстоящем году договора. Пусть x_{jk} — индексированное на будущий $(J+2)$ -й год договора значение k -го убытка j -го года, $1 \leq j \leq J$. Тогда величина

$$s_j = \sum_{k \geq 1} \max(x_{jk} - a, 0)$$

представляет собой скорректированный с учетом инфляции совокупный убыток j -го года свыше приоритета a . Если рассматриваемый вид страхования подразумевает долгое развитие убытка (как страхование ответственности), то о конечном размере большинства убытков перестраховщик может судить лишь по грубой оценке страховщика, а о настоящих поздних убытках ему, разумеется, вообще ничего не известно. В этих случаях расчет перестраховочных премий не обходится без применения методов оценки IBNR-убытков (см. часть 3). Если расчет перестраховочных премий производится в рамках заданной модели распределения убытка — этот способ обсуждается ниже — то для оценки IBNR-убытков следует воспользоваться методом на основе данных по отдельным убыткам (один из возможных методов предложен в разделе 3.4.5).

Кроме всего перечисленного перестраховщик запрашивает у страховщика некоторый показатель объема портфеля j -го года наблюдения, а также оценку этого показателя для предстоящего $(J+2)$ -го года договора. В качестве меры объема чаще всего используется суммарная оригинальная премия страховщика. Прошлые объемы тоже корректируются перестраховщиком с учетом инфляции и возможных изменений тарифа таким образом, чтобы получаемые значения v_j показывали, какая суммарная премия в будущем году договора соответствовала бы портфелю j -го года. Тогда каждое отношение s_j / v_j , $1 \leq j \leq J$, будет служить оценкой ожидаемого в $(J+2)$ году относительного совокупного убытка («Burning Cost») свыше приоритета a . На основании J оцененных значений s_j / v_j перестраховщик находит относительный ожидаемый убыток по договору перестрахования эксцедента убытка. Для этого он строит среднее

$$\frac{\hat{s}_{J+2}}{v_{J+2}} = \sum_{j=1}^J s_j / \sum_{j=1}^J v_j$$

или продолжение тренда. Окончательная перестраховочная премия, содержащая еще рисковую надбавку и нагрузку, исчисляется в долях от фактического объема v_{J+2} портфеля предстоящего года договора. Тем самым автоматически корректируются ошибки, возникающие при оценке значения v_{J+2} . Для лимитированного лейера рассчитывается разность оценок \hat{s}_{J+2} , соответствующих приоритету a и конечной точке лейера $a+h$.

Ясно, что этот метод тарификации применим только в случае, когда портфель в течение рассматриваемых $J+2$ лет не претерпевает существенных изменений, и история убытков дает правильное представление о будущем процессе убытков. Важно также, чтобы оценки величин s_j основывались на достаточно

большом числе наблюдений $x_{jk} > a$. Часто последнее требование выполняется для лейеров с низким приоритетом, но не выполняется для лейеров с высоким приоритетом. Чтобы тарифицировать лейер с отсутствующей или непоказательной историей убытков, перестраховщик должен экстраполировать «Burning Cost» лейеров с более низкими приоритетами — например, *подогнав* к данным x_{jk} *распределение размера убытка* и продолжив его на интересующий лейер. С этой целью часто используется обычное *распределение Парето*

$$F(x) = 1 - (x/d)^{-\alpha}, \quad x > d,$$

как показывает опыт, довольно хорошо описывающее область больших убытков (см. раздел 1.4.3). Более того, оно содержит всего один неизвестный параметр α , поскольку d представляет собой границу размера убытка, начиная с которой имеющуюся статистику $\{x_{jk}\}$ (после поправки на инфляцию) можно считать полноценной. Выбор параметра d ни на что не влияет, благодаря инвариантности распределения Парето относительно смещения точки отсечения убытков. В самом деле, если отсечь все убытки ниже $b > d$, то снова получится распределение Парето $F(x|b) = (F(x) - F(b)) / (1 - F(b)) = 1 - (x/b)^{-\alpha}$. Параметр α можно оценить методом максимального правдоподобия

$$\hat{\alpha} = \sum_j K_j / \sum_{j,k} \ln(x_{jk}/d).$$

В этой формуле K_j обозначает число элементов множества $\{x_{jk} > d, k = 1, 2, \dots\}$, и все $x_{jk} > d$. (Замена $\sum K_j$ на $\sum K_j - 1$ приводит к несмещенной оценке с минимальной дисперсией.) На основании показателей количества K_j или частоты K_j/v_j перестраховщик вычисляет оценку \hat{n}_d ожидаемого в предстоящем году числа убытков N_d свыше d . Математическое ожидание совокупного убытка по вторичному риску при $a > d$ составляет

$$\begin{aligned} E(\underline{S}(a)) &= E(N_d) \cdot E(\underline{X}(a)) = E(N_d) \cdot \int_a^\infty (x-a) dF(x) = \\ &= E(N_d) \cdot \int_a^\infty (1-F(x)) dx = E(N_d) \cdot (d/a)^\alpha \cdot a / (\alpha - 1), \quad \alpha > 1. \end{aligned}$$

Ожидаемый совокупный убыток лимитированного лейера с приоритетом a и ответственностью h задается формулой

$$E(\underline{S}(a) - E(\underline{S}(a+h))) = E(N_d) \cdot (d/a)^\alpha \cdot (1 - (a/(a+h))^{\alpha-1}) \cdot a / (\alpha - 1)$$

и оценивается посредством замены неизвестных значений $E(N_d)$ и α соответствующими оценками \hat{n}_d и $\hat{\alpha}$.

Предыдущая формула для лимитированного лейера имеет смысл и при $\alpha < 1$; в этом случае она подразумевает распределение Парето, сосредоточенное справа от точки $d_1 \geq a + h$:

$$\underline{F}(x) = \begin{cases} 1 - (x/d)^{-\alpha} & \text{при } d \leq x \leq d_1, \\ 1 & \text{при } x \geq d_1. \end{cases}$$

При $\hat{\alpha} \leq 1$ можно предложить отсечь распределение Парето F справа от максимального наблюдаемого убытка d_2 , но не концентрировать вероятность в точке d_2 , а распределить ее на весь остаток и работать с функцией

$$\underline{\underline{F}}(x) = \begin{cases} \frac{x^{-\alpha} - d^{-\alpha}}{d_2^{-\alpha} - d^{-\alpha}} & \text{при } d \leq x \leq d_2, \\ 1 & \text{при } x \geq d_2. \end{cases}$$

Распределение $\underline{\underline{F}}$, как правило, более реалистично, чем \underline{F} , и рекомендуется в ситуации, когда применение нелимитированного распределения Парето за пределом максимального наблюдаемого убытка приводит к неправдоподобно высокому значению ожидаемого убытка.

С помощью выбранного распределения размера убытка можно оценить дисперсию или второй момент $E(\underline{X}^2)$ убытка лейера. Так, в случае обычного нелимитированного распределения Парето F с параметром $\alpha > 2$ или сосредоточенного справа от точки $d_1 \geq a + h$ распределения Парето \underline{F} с параметром $\alpha > 0$ формула второго момента убытка лимитированного лейера с приоритетом a и ответственностью h имеет вид ($w = a + h$):

$$\begin{aligned} E(\underline{X}^2) &= \int_a^{a+h} (x-a)^2 dF(x) + h^2 (1 - F(a+h)) = \\ &= 2a^2 (d/a)^\alpha \left(\frac{1 - (a/w)^{\alpha-2}}{\alpha-2} - \frac{1 - (a/w)^{\alpha-1}}{\alpha-1} \right). \end{aligned}$$

Если математическое ожидание совокупного убытка лейера удастся вычислить непосредственно на основании статистики убытков — минуя подгонку распределения размера убытка, то и дисперсию можно оценить выборочной дисперсией наблюдений s_j/v_j .

Встречаются случаи, когда история убытков полностью отсутствует (в частности, при покрытии редких стихийных бедствий), и перестраховщик сам «придумывает» статистику, определяя для нескольких различных сценариев предполагаемый размер убытка и частоту событий (в форме периода возвращения). При этом он опирается на метеорологическую или сейсмологическую статистику ураганов или землетрясений. Этот в некотором смысле вырожденный частный случай тарификации «Burning Cost» иногда также называют тарификацией «Pay Back».

Тарификация «Burning Cost» на практике нередко основывается всего на 5–20 убытках, поэтому оценки получаются *далеко не надежными*. В этом нетрудно убедиться, проанализировав оценку максимального правдоподобия

$$\hat{\alpha} = \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \ln(X_k/d) \right)^{-1}$$

параметра α распределения Парето. При нулевой гипотезе справедливости обычного нелимитированного распределения Парето $F(x) = 1 - (x/d)^{-\alpha}$ для

размера убытка X_k , величина $\ln(X_k/d)$ имеет экспоненциальное распределение с математическим ожиданием $1/\alpha$:

$$P(\ln(X_k/d) > y) = P(X_k > d \cdot e^y) = 1 - F(d \cdot e^y) = e^{-\alpha y}.$$

Отсюда $\hat{\alpha}^{-1}$ как деленная на K сумма K независимых экспоненциально распределенных случайных величин имеет гамма-распределение с математическим ожиданием $1/\alpha$ и параметром формы K (см. раздел 1.3.3). Первые два момента величины $\hat{\alpha}$ получаются в результате обращения первых двух моментов гамма-распределения и составляют

$$E(\hat{\alpha}) = K\alpha / (K - 1),$$

$$E(\hat{\alpha}^2) = K^2 \alpha^2 / ((K - 1)(K - 2)).$$

Следовательно, скорректированная оценка

$$\hat{\alpha} = \frac{K-1}{K} \cdot \hat{\alpha} = \left(\frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K \ln(X_k/d) \right)^{-1}$$

несмещенная и обладает дисперсией

$$Var(\hat{\alpha}) = \alpha^2 / (K - 2)$$

и коэффициентом вариации $1/\sqrt{K-2}$. (Являясь достаточной, оценка $\hat{\alpha}$ имеет минимальную дисперсию среди всех несмещенных оценок параметра α .) Если, к примеру, на основании $K = 11$ убытков получается оценка $\hat{\alpha} = 2$, то истинное значение параметра α вполне может составить $\alpha = 1,5$ или $\alpha = 3$. Этот результат практически в полной мере переносится на ожидаемый убыток лейера: истинный ожидаемый убыток может быть как вдвое больше, так и вдвое меньше своего оцененного значения.

Во избежание таких погрешностей для оценивания параметров рекомендуется применять *байесовский или доверительный метод*, извлекая пользу из имеющегося априорного знания. Так, оценки параметра α , как правило, известны из многих похожих ситуаций и, скажем, в огневом страховании обычно лежат между 1 и 2. Тогда истинный параметр α в области больших убытков тарифицируемого портфеля может рассматриваться как случайная величина, например, с математическим ожиданием $\alpha_0 = 1,5$ и коэффициентом вариации 0,2. Если, как в разделе 2.5.2, априори предположить для α гамма-распределение (с математическим ожиданием α_0 и параметром формы $\tau_0 = 1/0,2^2 = 25$), то апостериори — при заданных наблюдениях X_1, \dots, X_K распределенных по Парето размеров убытков — α будет иметь гамма-распределение с параметром формы $\tau = \tau_0 + K$ и математическим ожиданием

$$E(\alpha | X_1, \dots, X_K) = \frac{\tau_0 + K}{\tau_0/\alpha_0 + T},$$

где

$$T = \sum_{k=1}^K \ln(X_k/d).$$

Если оценка $\hat{\alpha} = (K - 1) / T$ на основании $K = 11$ убытков дает значение $\hat{\alpha} = 2$ ($T = 5$), то байесовская оценка составит $E(\alpha | X_1, \dots, X_K) = 1,66$. Из формулы средней квадратичной ошибки

$$Var(\alpha | X_1, \dots, X_K) = (E(\alpha | X_1, \dots, X_K))^2 / (\tau_0 + K)$$

следует значение $1/\sqrt{\tau_0 + K} = 1/6$ коэффициента вариации байесовской оценки, которое в два раза меньше предыдущего $1/\sqrt{K-2} = 1/3$.

Наряду с рассмотренным в качестве примера (обычным) распределением Парето при тарификации «Burning Cost» может применяться любое из представленных в разделе 1.4.3 распределений размера убытка. Помимо них популярностью пользуются еще несколько распределений, заданных подобно распределению Парето, только на интервале $[d, \infty)$, $d > 0$, и поэтому не упоминавшихся в разделе 1.4.3. К ним, в частности, относится *лог-гамма-распределение*

$$F(x) = \Gamma(\tau, \alpha \cdot \ln(x/d)), \quad x > d,$$

(неполная гамма-функция приведена в таблице 4.2.3.1), где $\ln(X/d)$ имеет гамма-распределение с математическим ожиданием τ/α и параметром формы τ . Плотность этого распределения представляется в виде

$$f(x) = \alpha^\tau \cdot (\ln(x/d))^{\tau-1} \cdot (x/d)^{-\alpha-1} / (d \cdot \Gamma(\tau)), \quad x > d,$$

а моменты вычисляются по формуле

$$E(X^k) = d^k \cdot (\alpha / (\alpha - k))^\tau, \quad k < \alpha.$$

Поскольку лог-гамма-распределение содержит распределение Парето как частный случай при $\tau = 1$, особый интерес представляет область $\tau \geq 1$ значений параметра, где мода превышает d , и уклон (см. раздел 1.4.3) выше, чем у распределения Парето.

Рекомендуется для повышения точности расчетов применять одновременно оба метода тарификации — и «Exposure», и «Burning Cost», а в случае значительного расхождения результатов выяснять, с какими данными или параметрами оно связано. Действуя двумя способами, перестраховщик имеет больше шансов правильно оценить требуемую премию.

4.3.4. ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕМИЙ ПРИ ГОДОВОЙ ФРАНШИЗЕ И ПЕРЕСТРАХОВАНИИ «STOP LOSS»

В предыдущих разделах рассматривалась задача исчисления премий при двух основных формах деления убытков по каждому страховому событию. В этом разделе мы обратимся к формам непропорционального деления риска, когда годовая сумма S отдельных убытков или их частей делится установленной по договоренности сторон границей $c > 0$ на долю $\min(S, c)$ первичного риска и долю $\max(S - c, 0)$ вторичного риска. На практике встречается множество различных вариантов такого деления риска. Важнейшие из них кратко представ-

лены ниже (для полноты картины здесь повторяются два уже названных в главе 4.1 варианта).

1. При *перестраховании «Stop Loss»* (см. также раздел 4.1.3) величина S описывает годовую сумму всех убытков определенного вида страхования (например, страхования града или урагана). Страховщик несет первичный риск $\underline{S} = \min(S, c)$, причем граница убытка c в большинстве случаев немного превышает страховую нетто-премию. Перестраховщик принимает, как правило, ограниченный величиной $c_1 > 0$ лейер

$$\begin{aligned} \min(\max(S - c, 0, c_1)) &= \max(S - c, 0) - \max(S - (c + c_1), 0) = \\ &= \min(S, c + c_1) - \min(S, c) \end{aligned}$$

вторичного риска $\underline{S} = \max(S - c, 0)$.

2. Наряду с обычной вычитаемой франшизой иногда дополнительно устанавливается *годовой лимит* для ограничения риска частоты убытков, принимаемых на себя страхователем. Пусть S обозначает годовую сумму частей $\min(X, a)$ убытков, попадающих под франшизу a . Граница убытка c часто задается целым числом, кратным размеру франшизы a : $c = k \cdot a$, $k = 1, 2, \dots$. Страховщик несет помимо частей отдельных убытков $\max(X - a, 0)$ еще и вторичный риск $\max(S - c, 0)$, складывающийся из частей первичного риска, не превышающих a .
3. При обычном перестраховании эксцедента убытка также нередко принимается соглашение о *годовом лимите*, ограничивающем риск частоты убытков перестраховщика. Пусть S обозначает годовую сумму частей отдельных убытков, попадающих в перестрахованный лейер $\min(\max(X - a, 0), h)$. Перестраховщик несет первичный риск $\min(S, c)$, а страховщик — вторичный $\max(S - c, 0)$. Правда, значение c почти всегда выбирается настолько высоким, что событие $\{S > c\}$ маловероятно. Граница убытка c , как и в предыдущем случае, чаще всего задается целым числом, кратным ответственности h по лейеру: $c = k \cdot h$, $k = 1, 2, \dots$. При этом говорят о « $k - 1$ пополнениях» (ответственности по лейеру). В перестраховании эксцедента кумулятивного убытка установление годового лимита взято за правило. Разница между ответственностью h по отдельному событию и перестраховочной премией здесь очень велика, и при наступлении неожиданно большого числа убытков перестраховщик может понести серьезные потери.

Встречаются также годовые франшизы на суммарный годовой убыток S перестраховщика, когда, в отличие от ситуации с годовым лимитом, страховщик несет первичный риск, а перестраховщик — вторичный.

4. При годовом лимите, рассмотренном в предыдущем пункте, пополнения ответственности лейера изначально учтены в премии по эксцеденту убытка. Но часто договором перестрахования предусматривается уплата страховщиком к началу действия договора только некоторого базового взноса b_0 с последующим внесением *дополнительного взноса* $qb_0 Y/h$ при каждом (даже частичном) пополнении ответственности лейера.

Здесь Y обозначает размер убытка в рамках эксцедента убытка, а q чаще всего равно 1 или 0,5 (в общем случае $q \in (0; 1]$). При $q = 1$ за убыток $Y = h$, полностью исчерпывающий ответственность h , перестраховщику дополнительно полагается полный базовый взнос b_0 . В случае частичного убытка $Y < h$ страховщик доплачивает часть взноса b_0 , соответствующую израсходованной части ответственности перестраховщика. Таким образом, премия перестраховщика варьируется в зависимости от его совокупного убытка S :

$$B_1(S) = b_0 + qb_0 \min(S, w \cdot h) / h,$$

где параметры q , w и h известны. Более подробно о расчете b_0 будет сказано далее.

5. Другая форма плавающей (нетто-)премии по эксцеденту убытка:

$$B_2(S) = \min(\max(S, b_0), b_1), \quad 0 < b_0 < E(S) < b_1,$$

где S снова обозначает годовую сумму убытков, попадающих в лейер эксцедента убытка. Перестраховочная премия в зависимости от S колеблется от b_0 до b_1 (плюс рисковая надбавка и нагрузка). Поскольку

$$B_2(S) = b_0 + \min(\max(S - b_0, 0), b_1 - b_0) = b_0 + \min(S, b_1) - \min(S, b_0),$$

этот вариант формально означает, что страховщик уплачивает минимальную премию b_0 и дополнительно предоставляет перестраховщику покрытия «Stop Loss» совокупного убытка S по лейеру с приоритетом b_0 и ответственностью $b_1 - b_0$. В случае расхождения мнений страховщика и перестраховщика относительно справедливого размера премии по эксцеденту убытка варьирование премии в зависимости от размера убытка может быть в некотором роде компромиссом. Ввиду асимметричности распределения величины S премия b_0 , очевидно, должна быть ближе к $E(S)$, чем b_1 . Бенктандером (Benktander) предложена следующая ориентировочная форма зависимости элементов b_0 , b_1 и $E(S)$:

$$b_1 = (E(S))^2 / b_0.$$

Более подробно расчет b_0 обсуждается ниже.

6. При групповом страховании, а также пропорциональном перестраховании стороны могут принимать *соглашение об угастии в прибыли*. Если годовой совокупный убыток S (по застрахованной группе или договору пропорционального перестрахования) оказывается ниже договорной нетто-премии b , то часть $q < 1$ образующейся таким образом прибыли $\max(b - S, 0)$ возвращается страхуемому (обычно, $q = 0,5$). Долевое участие

$$q \cdot \max(b - S, 0) = q \cdot b - q \cdot \min(S, b)$$

в прибыли равносильно плавающей премии ($b_0 = (1 - q)b$)

$$B_3(S) = (1 - q)b + q \cdot \min(S, b) = b_0 + q \cdot \min(S, b_0 / (1 - q)).$$

Расчет премии для первых трех вариантов деления риска предполагает оценку математического ожидания и дисперсии величины $\min(S, c)$ или $\max(S - c, 0)$. Соответствующий способ будет представлен чуть позже. А сначала убедимся, что для расчета трех плавающих премий тоже достаточно знать только математическое ожидание и дисперсию величины $\min(S, c)$ или $\max(S - c, 0)$.

Три формы $B_1(S)$, $B_2(S)$, $B_3(S)$ плавающей перестраховочной премии строятся по одинаковой схеме

$$B_k(S) = b_0 + Z_k(S, b_0)$$

и состоят из минимальной премии b_0 и дополнительной премии $Z_k(S, b_0)$, зависящей от годового убытка S и минимальной премии b_0 , причем b_0 — искомая величина, а все другие параметры известны. Для определения b_0 недостаточно просто положить $E(B_k(S)) = E(S)$ — полученная таким образом премия не содержала бы рисковой надбавки. За счет положительной корреляции дополнительной премии $Z_k(S, b_0)$ с убытком S дисперсия убытка перестраховщика будет ниже, чем при фиксированной премии. Интерпретируя дополнительную премию как величину, на которую уменьшается убыток, мы можем применить обычный способ расчета рисковой надбавки. Выбирая рисковую надбавку, пропорциональную дисперсии, получим следующее уравнение относительно b_0 :

$$b_0 = E(S - Z_k(S, b_0)) + \alpha \text{Var}(S - Z_k(S, b_0)) = \\ = E(S) - E(Z_k(S, b_0)) + \alpha \text{Var}(S) - 2\alpha \text{Cov}(S, Z_k(S, b_0)) + \alpha \text{Var}(Z_k(S, b_0)).$$

Это уравнение решается методом последовательных приближений (стартовое значение $b = E(S) + \alpha \text{Var}(S)$). Но прежде необходимо вычислить элементы, содержащие $Z_k(S, b_0)$. Структура величин Z_k позволяет нам ограничиться рассмотрением случая $Z_k(S, b_0) = \min(S, c)$ с произвольным значением $c > 0$ и найти только $E(\min(S, c))$, $\text{Cov}(S, \min(S, c))$ и $\text{Var}(\min(S, c))$. Сначала выразим $\text{Cov}(S, \min(S, c))$ через две остальные величины, а затем опишем способ расчета величин $E(\min(S, c))$ и $\text{Var}(\min(S, c))$, требуемых, как мы уже сказали, и для первых трех вариантов деления риска.

В силу равенства $S = \min(S, c) + \max(S - c, 0)$ можно записать

$$\text{Cov}(S, \min(S, c)) = \text{Var}(\min(S, c)) + \text{Cov}(\max(S - c, 0), \min(S, c)).$$

Используя доказанное в разделе 2.4.2 свойство $\text{Cov}(\underline{X}, \underline{X}) = (a - E(\underline{X}))E(\underline{X})$, находим

$$\text{Cov}(\max(S - c, 0), \min(S, c)) = (c - E(\min(S, c)))E(\max(S - c, 0)) = \\ = (c - E(\min(S, c)))(E(S) - E(\min(S, c))).$$

Тем самым $\text{Cov}(S, \min(S, c))$ выражена через $E(\min(S, c))$ и $\text{Var}(\min(S, c))$.

Мы выяснили, что при всех шести названных вариантах деления риска для расчета премии достаточно оценить математическое ожидание и дисперсию величины $\min(S, c)$ или $\max(S - c, 0)$. Когда функция G распределения случайной величины S известна, эта задача решается как показано в предыдущих разделах 4.3.2 и 4.3.3, где вместо совокупного убытка S рассматривался раз-

мер отдельного убытка X . Но на практике распределение величины S обычно неизвестно и — если следовать коллективной модели — должно быть построено из распределений числа и размеров отдельных убытков (число и размеры убытков могут также относиться к некоторому лейеру). В наших теперешних условиях эта задача обнаруживает некоторые особенности, на них мы сейчас и хотим обратить внимание.

Аппроксимируем функцию распределения величины S функцией распределения арифметической дискретной случайной величины S_0 , допускающей рекурсивное вычисление вероятностей (см. раздел 1.4.4). Тогда при расчете моментов первичного и вторичного рисков мы сможем заменить S на S_0 . Пусть ряд распределения величины S_0 задан значениями $k \cdot u$, $k = 0, 1, \dots$, и вероятностями

$$g_k = P(S_0 = k \cdot u), \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$g_0 + g_1 + \dots = 1,$$

где $u > 0$ — длина шага. Пусть далее

$$G_k = P(S_0 \leq k \cdot u) = g_0 + \dots + g_k$$

функция распределения величины S_0 , и

$$m_i(k) = E(\min(S_0, k \cdot u))^i,$$

$$M_i(k) = E(\max(S_0 - k \cdot u, 0))^i,$$

соответственно, i -е моменты первичной и вторичной частей убытка S_0 ($i = 1$ и $i = 2$).

При рекурсивном расчете вероятностей g_k с помощью алгоритма Пейнджера (см. раздел 1.4.4) одновременно становятся известны значения G_k , $m_i(k)$ и $M_i(k)$. Действительно, G_k связано с g_k соотношением

$$G_k = G_{k-1} + g_k,$$

причем $G_0 = g_0$. Далее, из равенств

$$m_i(k) = \sum_{j=0}^{k-1} (j \cdot u)^i g_j + (k \cdot u)^i (1 - G_{k-1}) = \sum_{j=0}^k (j \cdot u)^i g_j + (k \cdot u)^i (1 - G_k),$$

$$M_i(k) = \sum_{j \geq k} (j - k)^i u^i g_j = \sum_{j \geq k} (j - k)^i u^i g_j,$$

следует

$$m_1(k) - m_1(k-1) = u(1 - G_{k-1}),$$

$$M_1(k) - M_1(k-1) = -u(1 - G_{k-1}),$$

$$m_2(k) - m_2(k-1) = (2k-1)u^2(1 - G_{k-1}),$$

$$M_2(k) - M_2(k-1) = -\sum_{j=k}^{\infty} (2(j-k)+1)u^2 g_j = \\ = -2u \cdot M_1(k) - u^2(1 - G_{k-1}) = u^2(1 - G_{k-1}) - 2u \cdot M_1(k-1).$$

Тем самым продемонстрирована возможность одновременного вычисления первых двух моментов $m_i(k)$ и $M_i(k)$ вместе с вероятностями g_k и G_k . В качестве стартовых значений служат $m_i(0) = 0$ и $M_i(0) = E(S_0^i)$, причем S_0 в большинстве случаев выбирается с условием выполнения равенства $E(S_0^i) = E(S^i)$ при $i = 1$ и $i = 2$. С технической точки зрения удобно, что для расчета моментов вторичного риска $\max(S_0 - c, 0)$ требуются только вероятности g_k размеров убытков $k \cdot u$ и ниже границы c .

Если граница c лежит между узловыми точками $(k-1)u$ и $k \cdot u$, то соответствующие математические ожидания интерполируются прямой, а вторые моменты — параболой с параметром формы $1 - G_{k-1}$.

При расчете рискованной надбавки для покрытий с плавающей премией важно иметь в виду, что за счет положительной корреляции премии $B(S)$ с совокупным убытком S изменчивость совокупного результата у получателя плавающей премии сокращается, поэтому рискованная надбавка должна быть ниже, чем при фиксированной премии. В случае плавающей премии расчет рискованной надбавки должен основываться на изменчивости величины $S - B(S)$, а не S .

В заключение кратко представим более грубые по сравнению с рекурсией Пейнджера методы, дающие приемлемую аппроксимацию распределения совокупного убытка, когда размер убытка X принадлежит ограниченному интервалу — как в случае лейера эксцедента убытка. В простейшем из этих методов S аппроксимируется величиной $z \cdot N_0$, где N_0 — пуассоновская случайная величина, ее параметр θ вместе с множителем z выбираются из расчета совпадения первых двух моментов величин S и $z \cdot N_0$:

$$z = \text{Var}(S) / E(S),$$

$$\theta = (E(S))^2 / \text{Var}(S).$$

Эта аппроксимация предложена Бенктандером и представляет собой арифметическую дискретизацию модифицированного распределения Пуассона, разработанного для индивидуальной модели в разделе 1.3.7. Математические ожидания первичной и вторичной частей риска $z \cdot N_0$ вычисляются очень просто: пусть

$$p_n = e^{-\theta} \cdot \theta^n / n! = \theta \cdot p_{n-1} / n, \quad P_0(x) = P(N_0 \leq x) = p_0 + \dots + p_{[x]},$$

тогда

$$\begin{aligned} E(\min(z \cdot N_0, c)) &= \sum_{n \leq c/z} z \cdot n \cdot p_n + c(1 - P_0(c/z)) = \\ &= \theta \cdot z \cdot P_0(c/z - 1) + c(1 - P_0(c/z)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(\max(z \cdot N_0 - c, 0)) &= \sum_{n > c/z} (z \cdot n - c) p_n = \\ &= \theta \cdot z \cdot (1 - P_0(c/z - 1)) - c(1 - P_0(c/z)). \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что такая аппроксимация всегда недооценивает вторичную часть риска и переоценивает первичную.

Аппроксимация получается гораздо более точной, если (при использовании коллективной модели) заменить размер убытка X дискретной случайной величиной X_0 , принимающей только два значения x_1 и x_2 соответственно с вероятностями p и $q = 1 - p$ и имеющей такие же первые три момента, как у величины X . Параметры p , x_1 и x_2 рассчитываются по формулам:

$$p = \left(1 + \tau / \sqrt{4 + \tau^2}\right) / 2,$$

$$x_1 = \mu - \sigma \cdot \sqrt{q/p},$$

$$x_2 = \mu + \sigma \sqrt{p/q},$$

где $\mu = E(X)$, $\sigma = \text{Sta}(X)$, $\tau = E((X - \mu)^3) / \sigma$. Распределение совокупного убытка, отвечающее размеру убытка X_0 и (неизменному) числу убытков N , тоже вычисляется довольно просто и имеет такие же первые три момента, как у S . Этот метод дает удивительно точные значения математических ожиданий первичной и вторичной частей убытка S .

Наконец, обратим внимание на возможность применения метода тарификации на базе опыта и к перестрахованию «Stop Loss». В этом случае необходимо перевести совокупные годовые убытки страховщика за последние 10–15 лет в текущие цены и проверить, как часто и насколько они превышают приоритет. Для учета различий объемов портфелей достаточно нормировать совокупные убытки на соответствующие суммарные премии. Разумеется, такая тарификация целесообразна лишь при условии актуальности статистики отдаленных прошлых лет — этому требованию вполне удовлетворяет, например, статистика страхования града. Но и тогда рекомендуется строить оценки не на основании самих данных, а на основании сглаживающего распределения, например (быть может, смещенного) логнормального или гамма-распределения (см. раздел 1.4.4), чтобы возможное покрытие свыше максимального наблюдаемого убытка не предоставлялось бесплатно.

4.3.5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ДОПОЛНЕНИЯ

Несмотря на формальное сходство вычитаемой франшизы, эксцедента убытка, годовой франшизы и перестрахования «Stop Loss» — все это разновидности непропорционального деления риска, — нам пришлось иметь дело с разными задачами. Мы узнали о существовании двух основных методов тарификации: один использует оригинальные данные (тарификация «Exposure», см. главу 4.2), другой — только данные, попавшие в область покрытия (тарификация на базе опыта). Если во втором случае часть данных игнорируется, то в первом предполагается, что распределение оригинального убытка в результате деления риска не изменяется. Это предположение не всегда справедливо. Так, при делении посредством вычитаемой франшизы страхователь порой искусственно завышает убыток, чтобы переложить расходы на плечи страховой компании.

В данном случае речь идет о *моральном риске*, нами не учитываемом. При перестраховании эксцедента убытка и «Stop Loss» тоже существует опасность потери интереса страховщика в максимально выгодном урегулировании убытка, как только тот перешагнет приоритет. Именно поэтому договором перестрахования эксцедента убытка часто бывает предусмотрено право перестраховщика на ассистирование в урегулировании убытков. При перестраховании «Stop Loss» та же проблема обычно решается оговоркой о пропорциональном участии страховщика в части убытка, превышающей собственное удержание.

В разделах, посвященных исчислению премии, мы не затронули в явном виде две важные формы деления риска: пропорциональное перестрахование и перестрахование эксцедента кумулятивного убытка. При *пропорциональном перестраховании* принято применять одинаковую пропорцию деления к убыткам и оригинальной брутто-премии. Правда, перестраховщик возвращает всю или почти всю содержащуюся в его части премии долю нагрузки страховщику, за которым полностью остается ведение страховых договоров. Такой способ деления премий, в особенности при перестраховании *эксцедента сумм*, может не устраивать перестраховщика, если:

- оригинальные премии страховщика в совокупности не достаточны для покрытия риска, и перестраховщик не хочет нести недооцененный риск;
- оригинальные премии страховщика, хоть и достаточны в совокупности, занижены по отдельным полисам с крупными суммами, большей частью передаваемыми перестраховщику;
- для полисов с крупными суммами доля нагрузки установлена ниже, чем для всех остальных полисов, вследствие чего перестраховщик выплачивает страховщику завышенное возмещение расходов на ведение дела.

Но, как правило, перестраховщик (а отчасти и сам страховщик) не в состоянии сразу увидеть эти нюансы, ведь уже только из соображений экономии расходов на ведение дела никто не станет пересчитывать тариф по каждому перестрахованному риску в отдельности. Однако перестраховщик может произвести следующий контрольный расчет. На основании информации о совокупных убытках s_j и максимальных отдельных убытках x_{jk} по договорам последних лет $j = 1, \dots, J$ он устанавливает такую границу a отдельного убытка, чтобы ее превышали лишь немногие известные ему убытки, а совокупная величина $s_j - \sum_k \max(x_{jk} - a, 0)$ убытков размером ниже a по отношению к премии мало колебалась по годам. Затем с помощью методов из раздела 4.3.3 (предпочтителен метод тарификации «Exposure») он оценивает математическое ожидание убытка в части покрытия, превышающей a . Тогда сумма математических ожиданий убытка свыше a и остального убытка дает ему примерное представление о справедливом размере оригинальной премии.

Расчет премии по договору *перестрахования эксцедента кумулятивного убытка* следует такому же принципу, как и расчет распределения совокупного убытка от стихийных бедствий (см. раздел 1.4.5). Перестраховщик запрашивает у страховщика мелкое разбиение страховых сумм и премий покрываемого портфеля по географическим областям. Исходя из статистических данных

о районах и интенсивности стихийных бедствий, а также собственных предположений о ставке убытка на одно деление шкалы интенсивности, он получает искусственную статистику убытков от стихийных бедствий, позволяющую оценить математическое ожидание убытка по договору перестрахования эксцедента кумулятивного убытка.

4.4. Выбор формы и объема деления риска

4.4.1. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ И ОБЗОР

Прежде чем делить риск, партнеры должны принять два принципиальных решения. Во-первых, выбрать форму деления риска: пропорциональное $X = cX + (1 - c)X$ или непропорциональное $X = \min(X, a) + \max(X - a, 0)$, и определить, какому убытку соответствует величина X : отдельному, кумулятивному или годовому. Во-вторых, задать объем деления риска, например пропорцию $c : (1 - c)$ при чисто пропорциональном делении или границу a при чисто непропорциональном делении.

В прямом страховании, особенно в его массовых видах, предлагаются преимущественно стандартные страховые продукты, зачастую ограничивающие свободу выбора страхователя вплоть до двух крайностей: «полностью передать риск» или «полностью нести риск самому». Иногда страхователю все же предоставляется право выбора из нескольких заранее установленных размеров франшизы — такой порядок принят, в частности, в страховании автокаско. При перестраховании же стороны договора равноправны и имеют широкие возможности выбора варианта деления риска. Поэтому всю главу мы посвящаем *исключительно перестрахованию*. Хотя большинство результатов непосредственно переносится на прямое страхование, практическое применение они находят только в страховании промышленных предприятий.

Договор перестрахования обычно заключается на год и регламентирует порядок деления совокупного годового убытка S страховщика в рамках одного вида страхования. При этом часть R , $0 < R < S$, от S передается перестраховщику вместе с премией $b(R)$. Если b — соответствующая убытку S оригинальная премия за минусом расходов на привлечение клиентов и административных расходов, то страховщик должен сравнить финансовый результат

$b - S$ до перестрахования

с результатом

$$b - S - (b(R) - R) - k_1 \quad \text{после перестрахования,}$$

где k_1 — возможные связанные с перестрахованием дополнительные (административные) расходы. (Предполагается, что все величины дисконтированы на дату начала действия договора перестрахования.) k_1 может зависеть от формы и объема перестрахования.

Финансовый результат перестраховщика равен

$$0 \quad \text{до заключения договора}$$

и

$$b(R) - R - k_2 \quad \text{после заключения договора,}$$

где k_2 — соответствующие этому договору расходы перестраховщика (включая рассчитанную им рисковую надбавку). Премия $b(R)$, очевидно, должна быть не ниже $E(R) + k_2$. Значение k_2 тоже может зависеть от формы и объема перестрахования. Итого, после заключения договора перестрахования совокупный финансовый результат страховщика и перестраховщика ухудшается на $k_1 + k_2$.

При такой формулировке исходных условий задача принятия решения сводится к следующему. Во-первых, выяснить, компенсируются ли связанные с перестрахованием дополнительные *транзакционные расходы* $k_0 = k_1 + k_2$ *эффектами синергии*, а во-вторых, построить модель, позволяющую страховщику оценить привлекательность конкретного договора перестрахования. Обе эти задачи рассматриваются в разделе 4.4.2. Сначала при помощи простой модели обосновывается экономическая рациональность перестрахования. Затем обоснуются три различные модели принятия решения. Одновременно выявляется важная роль транзакционных расходов. Это побуждает нас исследовать в разделе 4.4.3 некоторые специальные модели транзакционных расходов в рамках одной из моделей принятия решения. Там же обнаруживается, что при определенных условиях перестраховщик всегда может принять, по крайней мере, часть перестраховочной ответственности. В разделе 4.4.4 разбирается задача дифференциации собственного удержания — с ней страховщик довольно часто сталкивается в реальности. В разделе 4.4.5 доказываться практическая непригодность некоторых форм перестрахования посредством задания альтернативных более выгодных обеим сторонам форм. В конце главы дается характеристика форм перестрахования, для которых не существует лучших альтернативных форм.

4.4.2. МОДЕЛИ ОЦЕНКИ ПРИВЛЕКАТЕЛЬНОСТИ ДЕЛЕНИЯ РИСКА

В разделе 4.1.3 мы объясняли потребность в перестраховании недостаточным совокупным размером премий и гарантийного капитала для обеспечения страховщику желаемого уровня надежности. Коль скоро альтернатива перестрахованию — пополнение гарантийного капитала, интересно *сравнить эти два способа сокращения риска страховщика*. Мы проведем сравнение на простом идеализированном примере, одновременно показывающем, что при правильно

выбранном варианте перестрахования за счет снижения изменчивости риска страховщика высвобождается часть рисковой надбавки, достаточная для финансирования транзакционных расходов. Так как пополнение гарантийного капитала тоже сопровождается транзакционными расходами, перестрахование может быть предпочтительным даже тогда, когда связанные с ним транзакционные расходы не полностью покрываются освободившейся частью рисковой надбавки.

Допустим, наш идеализированный страховщик владеет «опасным» субпортфелем с совокупным убытком S_0 , характеризуемым математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2 , а также другими менее опасными субпортфелями с (общим) убытком S_1 , математическое ожидание и дисперсия которого равны соответственно $\mu_1 = 9\mu$ и $\sigma_1^2 = 2\sigma^2$. Для простоты будем считать S_0 и S_1 независимыми и распределенными нормально. В этом случае страховщику вдобавок к минимальной премии 10μ (без учета рисковой надбавки и нагрузки) требуется гарантийный капитал в размере $\beta \cdot \text{Sta}(S_0 + S_1) = \beta \cdot \sigma\sqrt{3}$, где множитель β зависит от желаемого уровня надежности. Если проценты на гарантийный капитал начисляются по ставке z (свыше «безрисковой»), то совокупная рисковая надбавка должна составить $z \cdot \beta \cdot \sigma\sqrt{3}$ (см. раздел 1.2.3).

Предположим, страховщик перестраховывает половину опасного портфеля, отдавая $S_0 / 2$ перестраховщику. Тогда дисперсия всего портфеля страховщика уменьшается на четверть, а потребность в гарантийном капитале — на $\beta \cdot \sigma\sqrt{2,25}$. Если на «рынке» действуют I таких страховщиков с независимыми и одинаково распределенными портфелями и каждый отдает половину своего опасного портфеля S_0 (математическое ожидание $\mu / 2$ и дисперсию $\sigma^2 / 4$) тому же самому перестраховщику, то последнему для обеспечения такого же, как у страховщиков, уровня надежности потребуются гарантийный капитал $0,5\beta \cdot \sigma\sqrt{I}$ (при отсутствии у него других портфелей). Совокупная экономия гарантийного капитала I страховщиков составляет $I\beta \cdot \sigma(\sqrt{3} - \sqrt{2,25})$. Эта сумма превышает потребность перестраховщика в гарантийном капитале при $I > (0,5 / (\sqrt{3} - 1,5))^2 = 4,64$. Выходит, при наличии на страховом рынке пяти или более страховщиков с появлением перестраховщика сокращается общая потребность рынка в гарантийном капитале.

Соответствующая освобожденному капиталу часть рисковой надбавки может использоваться для покрытия транзакционных расходов. Немного углубляясь в детали, предположим, что включенная каждым страховщиком (до перестрахования) в оригинальную премию рисковая надбавка $z \cdot \beta \cdot \sigma\sqrt{3}$ составляла ровно 4% от минимальной премии 10μ ($z = 0,4\mu / (\beta \cdot \sigma\sqrt{3})$), а на транзакционные расходы пришлось в общей сложности 3% от переданной перестраховщику части премии $\mu / 2$. Указанная доля транзакционных расходов вполне реалистична: при пропорциональном перестраховании административные расходы перестраховщика, как правило, не превышают 3% от ожидаемого убытка, а транзакционные расходы страховщика практически ничтожны. Чтобы совокупная рисковая надбавка $0,4\mu I$ обеспечивала рост суммарного гарантийного капитала $I\beta \cdot \sigma\sqrt{2,25} + 0,5\beta \cdot \sigma\sqrt{I}$ всех участников рынка по прежней ставке $z = 0,4\mu / (\beta \cdot \sigma\sqrt{3})$, а также покрывала транзакционные расходы в размере $0,03I\mu / 2$, достаточно выполнения неравенства $I > 4,9$.

Рассмотренный пример свидетельствует, что при надлежащем варианте перестрахования высвобождается часть рискованной надбавки, достаточная для покрытия транзакционных расходов. Таким образом, *перестрахование экономически рационально* и не должно приводить к увеличению оригинальных премий.

Само по себе полезное перестрахование имеет смысл для обоих партнеров только в том случае, если части поделенной оригинальной рискованной надбавки позволяют каждому покрыть свои транзакционные расходы и требуемую для своей части портфеля рискованную надбавку. Возможность выполнения этого требования решающим образом зависит от правильности определения перестраховочной премии. Она должна, как минимум, покрывать расходы на ведение дела и рискованную надбавку перестраховщика, а как максимум, оставлять страховщику средства, достаточные для финансирования его транзакционных расходов и рискованной надбавки. Уже здесь нам становится очевидна важность задачи расчета перестраховочной премии. Подробнее об этом мы поговорим в разделе 4.4.3.

Предыдущий пример продемонстрировал возможность достижения страховщиком при неизменном капитале более высокого уровня надежности за счет деления портфеля посредством кватного перестрахования. Тот же эффект наблюдался бы и при любой другой форме перестрахования, ведь все они, в принципе, допускают передачу риска в любом объеме между «все» и «ничего». Ясно, что страховщик предпочтет форму $(R, b(R))$, оставляющую ему при одинаковом уровне надежности большую часть рискованной надбавки. С помощью обозначений

S — совокупный оригинальный убыток,

b — суммарная премия страховщика за минусом расходов на привлечение клиентов и административных расходов,

R — переданная перестраховщику часть убытка S ,

$b(R)$ — перестраховочная премия (включая административные расходы и рискованную надбавку перестраховщика),

$Q = S - R$ — совокупный убыток на собственном удержании страховщика,

$b(Q) = b - b(R)$ — премия на собственном удержании страховщика

(для упрощения записи мы предполагаем, что транзакционные расходы k_1 страховщика включены в премию $b(R)$) *принцип принятия решения страховщика* формулируется следующим образом:

«Значения R и $b(R)$ должны выбираться так, чтобы при собственном удержании $Q = S - R$ достигался желаемый уровень надежности, а ожидаемый результат $b(Q) - E(Q) = b - b(R) - E(Q)$ от собственного удержания был максимален».

С этого момента мы интересуемся только выбором подходящей формы перестрахования и уже не ставим вопрос о целесообразности перестрахования для страховщика. Если однажды (предположим, из-за высоких цен на перестрахование) ни один вариант перестрахования не будет выгоден страховщику, то ему придется либо увеличить свой гарантийный капитал или премиальный фонд, либо отказаться от некоторых рисков, либо временно согласиться на более низкий уровень надежности.

Надежность мы до сих пор измеряли *однолетней вероятностью потери*

$$P(S > b + c) \text{ или соответственно } P(Q > b(Q) + c),$$

где c — заданный гарантийный капитал. Когда S и Q распределены нормально, а теоретический доход $b - E(S)$ или $b(Q) - E(Q)$ полностью выплачивается инвесторам, эти вероятности равны соответственно

$$1 - \Phi(c / \text{Sta}(S)) \text{ и } 1 - \Phi(c / \text{Sta}(Q)),$$

где Φ — функция стандартного нормального распределения. В данном случае достижение определенной вероятности потери равносильно достижению определенного (низкого) значения дисперсии $\text{Var}(Q) = (\text{Sta}(Q))^2$ совокупного убытка на собственном удержании. Хотя нормальное распределение для величин Q и S нетипично, интуитивно ясно, что дисперсия и без нормального распределения подходит в качестве критерия надежности. Тем более с аналитической точки зрения дисперсия гораздо удобнее, чем распределение совокупного убытка. Как мы увидим в следующем разделе, *дисперсионная модель*:

«Значения R и $b(R)$ должны выбираться так, чтобы дисперсия $\text{Var}(Q)$ собственного удержания не превышала желаемого уровня, а ожидаемый результат $b(Q) - E(Q)$ от собственного удержания был как можно более высоким»

позволяет получить ряд интересных общих результатов.

Еще одной количественной мерой надежности портфеля может служить так называемая *вероятность разорения*, известная из теории риска и представляющая собой непрерывный многолетний аналог однолетней вероятности потери. Правда, этот критерий так и не прижился на практике. Он довольно сложен для анализа, и те, кто к нему все-таки обращаются, чаще всего пользуются оценкой Крамера—Лундберга. Но тогда критерий становится очень похож на частный случай *модели полезности*, популярной в экономической теории принятия решений. В рамках этой модели результат $x = b(Q) - Q$ собственного удержания оценивается с помощью некоторой функции полезности $u(x)$, обладающей свойствами: $u'(x) > 0$ (чем выше результат, тем лучше) и $u''(x) < 0$ (увеличение результата на любое фиксированное значение тем менее привлекательно, чем выше уже имеющийся результат — неприятие риска). Желаемый уровень надежности находит выражение в специальном выборе функции полезности u .

В соответствии с моделью полезности следует выбирать форму перестрахования, обеспечивающую максимальное значение математического ожидания полезности результата от собственного удержания. Строго говоря,

«Значения R и $b(R)$ должны выбираться так, чтобы при заданных гарантийном капитале c и функции полезности u ожидаемая полезность $E(u(c + b(Q) - Q))$ была как можно выше».

Модель полезности неудобна тем, что выбор функции полезности u , полагаемой в основу решения, для страховщика неочевиден. Хотя аксиомы теории полезности, в общем-то, позволяют определить функцию полезности рационально действующего лица, соответствующие результаты для страховых ком-

паний не известны. Благодаря своей простоте, в теоретических исследованиях пользуется предпочтением семейство экспоненциальных функций полезности

$$u(x) = (1 - e^{-r \cdot x}) / r,$$

где параметр $r > 0$ определяет степень склонности к риску. Но страховщику гораздо проще задать желаемый размер дисперсии или однолетнюю вероятность потери, нежели оценивать степень склонности к риску.

В заключение приведем альтернативные формулировки модели неразорения и дисперсионной модели:

Модель неразорения

«Значения R и $b(R)$ должны выбираться так, чтобы разность $b(Q) - E(Q)$ не превышала желаемого минимального уровня, а вероятность потери $P(Q > b(Q) + c)$ была как можно ниже».

Дисперсионная модель

«Значения R и $b(R)$ должны выбираться так, чтобы разность $b(Q) - E(Q)$ не превышала желаемого минимального уровня, а дисперсия $Var(Q)$ была как можно ниже».

Модель полезности при условии экспоненциальной функции полезности тоже может быть переформулирована таким образом, чтобы при заданной минимальной полезности максимизировалось неприятие риска. Эквивалентность приведенных формулировок легко доказывается методом от противного.

Сравнение двух различных вариантов перестрахования в рамках любой из трех названных моделей в общем случае ведет к одинаковому решению. Учитывая это, в дальнейшем мы просто будем выбирать в каждой конкретной ситуации наиболее удобную модель.

4.4.3. ОДНОСТОРОННЯЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ПРИ ЗАДАННЫХ ТРАНЗАКЦИОННЫХ РАСХОДАХ

В предыдущем разделе мы уяснили важную роль включенных в перестраховочную премию $b(R)$ транзакционных расходов при выборе варианта перестрахования. От их размера фактически зависит целесообразность договора перестрахования для каждого из партнеров. Чтобы выбрать оптимальную с позиции страховщика форму перестрахования в рамках одной из представленных моделей принятия решения, необходимо знать размер транзакционных расходов для всех интересующих форм перестрахования. На деле это требование, разумеется, невыполнимо. В лучшем случае страховщик может ознакомиться с несколькими предложениями на перестраховочном рынке и, скорее всего, констатирует, что даже при небольшом числе вариантов трудно принять правильное решение, не зная точно (будущих) распределений величин S , Q и R в наиболее важной области больших убытков.

Аналитический же путь определения оптимального варианта перестрахования предполагает идеализированное функциональное представление транзакционных расходов. Два таких подхода исследуются в двух следующих теоремах в рамках дисперсионной модели. Но сначала уточним, что под *транзакционными расходами* мы понимаем разность между ожидаемыми финансовыми результатами до и после перестрахования или, что одинаково, сумму, теряемую в среднем за счет перестрахования,

$$k(R) = b - E(S) - (b(Q) - E(Q)) = b(R) - E(R).$$

(Формально речь идет о расходах, обозначенных в разделе 4.4.1 через k_2 . Но до тех пор пока рассуждения ведутся с позиции страховщика, премия $b(R)$ может включать дополнительно возникшие у страховщика в связи с перестрахованием административные расходы k_1 .) Две следующие теоремы однозначно определяют наилучший для страховщика вариант перестрахования в случаях, когда транзакционные расходы $k(R)$ имеют вид $k(R) = \alpha_1 E(R)$, или $k(R) = \alpha_2 Sta(R)$, или $k(R) = \alpha_3 Var(R)$. При доказательстве теорем мы будем пользоваться второй формой дисперсионной модели, то есть задавать максимальный уровень транзакционных расходов $k(R)$ и минимизировать дисперсию собственного удержания $Var(Q)$.

Теорема (Борх, Кан, Песонен) (Borch, Kahn, Pesonen). Пусть транзакционные расходы k для всех форм перестрахования R выражаются одинаковой функцией $k(R) = g(E(R))$ от математического ожидания $E(R)$. Тогда в дисперсионной модели оптимальным для страховщика будет нелимитированное перестрахование «Stop Loss».

Доказательство. Если S — совокупный убыток, и $a > 0$ — приоритет, то нелимитированное перестрахование «Stop Loss» задается убытком на собственном удержании $Q_a = \min(S, a)$ и перестрахованным убытком $R_a = \max(S - a, 0)$. Пусть $(R, b(R))$ — произвольная форма перестрахования с транзакционными расходами $k(R) = g(E(R))$. Определим значение a из расчета выполнения равенства $E(R_a) = E(R)$ и, следовательно, $k(R_a) = k(R)$. Это всегда возможно благодаря непрерывности и монотонному убыванию функции $E(R_a)$ по a , а также условиям $E(R_0) = E(S) \geq E(R)$ и $E(R_\infty) = 0 \leq E(R)$. Осталось доказать неравенство $Var(Q_a) \leq Var(Q) = Var(S - R)$.

Сначала предположим, что соответствующий величине R убыток на собственном удержании $Q = S - R$ может быть представлен в виде функции $Q = t(S)$ от совокупного убытка, как это имеет место при $Q_a = Q_a(S) = \min(S, a)$. Если G — функция распределения случайной величины S , то

$$\begin{aligned} E(Q - a)^2 &= \int_0^a (t(s) - a)^2 dG(s) \geq \int_0^a (t(s) - a)^2 dG(s) \geq \int_0^a (s - a)^2 dG(s) \quad (Q \leq S) = \\ &= \int_0^a (Q_a(s) - a)^2 dG(s) = \int_0^a (Q_a(s) - a)^2 dG(s) = E(Q_a - a)^2. \end{aligned}$$

Учитывая это выражение, а также равенство

$$E(Q_a) = E(S) - E(R_a) = E(S) - E(R) = E(Q),$$

находим

$$\begin{aligned} \text{Var}(Q) &= \text{Var}(Q - a) = E(Q - a)^2 - (E(Q - a))^2 \geq \\ &\geq E(Q_a - a)^2 - (E(Q_a - a))^2 = \text{Var}(Q_a - a) = \text{Var}(Q_a). \end{aligned}$$

Тем самым теорема доказана для форм перестрахования, позволяющих представить убыток Q страховщика в виде функции $Q = t(S)$ от совокупного убытка. Однако этому условию не удовлетворяют, например, перестрахование эксцедента сумм и перестрахование эксцедента убытка. Для произвольной формы перестрахования $Q + R = S$, не представимой в виде функции от S , требуется следующий промежуточный шаг доказательства.

Зададим форму перестрахования $\underline{R} = S - E(Q|S)$. В силу определения условного математического ожидания, убыток страховщика $\underline{Q} = S - \underline{R} = E(Q|S)$ является функцией от S . Поскольку $E(\underline{R}) = E(S) - E(Q) = E(R)$, форме \underline{R} отвечают такие же транзакционные расходы, как и R . Отсюда, согласно доказанному ранее, $\text{Var}(Q_a) \leq \text{Var}(Q)$. Из условия

$$\text{Var}(\underline{Q}) = \text{Var}(E(Q|S)) \leq \text{Var}(E(Q|S)) + E(\text{Var}(Q|S)) = \text{Var}(Q)$$

следует, наконец, неравенство $\text{Var}(Q_a) \leq \text{Var}(Q)$ в общем случае. ■

Заметим, доказательство заключалось в улучшении функционально не зависящей от S формы перестрахования. Этим приемом мы еще раз воспользуемся в разделе 4.4.5.

Теорема (Берд, Пентикайнен, Песонен) (Beard, Pentikäinen, Pesonen). Пусть для всех форм перестрахования транзакционные расходы k задаются одинаковой монотонно возрастающей функцией $k(R) = h(\text{Var}(R))$ от дисперсии $\text{Var}(R)$ перестрахованного убытка R . Тогда в рамках дисперсионной модели оптимальным для страховщика будет кватное перестрахование. (Примеры функции h : $h(x) = z_1 x$ или $h(x) = z_2 \sqrt{x}$, или $h(x) = z_3 x + z_0$.)

Доказательство. Пусть $(R, b(R))$ — произвольная форма перестрахования с транзакционными расходами $k(R) = h(\text{Var}(R))$. Можно считать, что $\text{Var}(R) \leq \text{Var}(S)$, иначе полное кватное перестрахование $R_1 = S$ было бы выгоднее, чем R . Тогда существует $q \leq 1$, такое что $\text{Var}(qS) = \text{Var}(R)$, а заданное пропорцией $(1 - q) : q$ деления убытка S кватное перестрахование имеет такие же транзакционные расходы, как и R . Используя общее свойство коэффициента корреляции величин R и S

$$\frac{\text{Cov}(S, R)}{\text{Sta}(S) \cdot \text{Sta}(R)} \leq 1,$$

а также равенство $\text{Var}(R) = q^2 \text{Var}(S)$, получим

$$\begin{aligned} \text{Var}(Q) &= \text{Var}(S - R) = \text{Var}(S) - 2 \cdot \text{Cov}(S, R) + \text{Var}(R) \geq \\ &\geq \text{Var}(S) - 2 \cdot \text{Sta}(S) \cdot \text{Sta}(R) + \text{Var}(R) = \\ &= \text{Var}(S) - 2q \text{Var}(S) + q^2 \text{Var}(S) = \text{Var}((1 - q)S). \end{aligned}$$

Тем самым доказано, что при одинаковых с R транзакционных расходах кватное перестрахование обеспечивает страховщику более выгодную дисперсию убытка. ■

Согласно предыдущим теоремам, оптимальное решение страховщика, как ни странно, не зависит от распределения совокупного убытка S , а зависит исключительно от вида и размера транзакционных расходов. В то же время из доказанного не следует, что «Stop Loss» или кватное перестрахование — в реальности наиболее выгодные для страховщика формы перестрахования, ведь в обоих случаях предполагалась почти не реальная функциональная форма транзакционных расходов. Напомним, транзакционные расходы состоят из двух компонент: суммарных связанных с перестрахованием административных расходов страховщика и перестраховщика и рискованной надбавки перестраховщика. Последняя вполне может зависеть от дисперсии, тогда как административные расходы, напротив, скорее зависят от объема и пропорциональны математическому ожиданию убытков (при этом коэффициент пропорциональности зависит от формы перестрахования, и существует нижняя граница административных расходов, соответствующая размеру постоянных расходов). Кроме того, речь идет только о калькуляционных, но не о фактических расходах. Мы совершенно правильно поступили, определив транзакционные расходы как разность

$$k(R) = b(R) - E(R)$$

между перестраховочной премией (включая, возможно, дополнительные расходы страховщика) и математическим ожиданием перестрахованного убытка. При таком подходе транзакционные расходы содержат не только сознательно включаемые сюда административные расходы и рисковую надбавку, но и произвольную надбавку или вычет, возникающие из-за неточности оценки $E(R)$. Но так как в реальности $E(R)$ никогда не бывает известно точно, функциональная форма транзакционных расходов не может быть установлена в принципе.

Из доказательства теорем становится ясно, как выбирать *объем перестрахования* (или *размер собственного удержания*). На основании заданного (максимального) размера транзакционных расходов, отвечающего допустимому среднему сокращению финансового результата, приоритет a для «Stop Loss» или кватное собственное удержание $1 - q$ определяются из расчета достижения желаемого размера транзакционных расходов и, следовательно, желаемого размера финансового результата от собственного удержания. Обычно функция расходов $k(R) = g(E(R))$ или $k(R) = h(\text{Var}(R))$ строго монотонно возрастает по $E(R)$ или соответственно по $\text{Var}(R)$, что позволяет при заданном размере расходов непосредственно и однозначно вычислить объем $E(R)$ или $\text{Var}(R)$ перестраховываемой части. Ввиду монотонности функции расходов желание уменьшить связанные с перестрахованием расходы всегда приводит к увеличению размера приоритета или кватного собственного удержания, а значит, к увеличению дисперсии собственного удержания.

В более общем случае при изначально не известных транзакционных расходах страховщику предлагается действовать следующим образом. Исходя из максимально допустимой дисперсии собственного удержания, нужно определить размер собственного удержания для каждой из интересующих форм перестрахования. Затем изучить ценовые предложения на перестраховочном

рынке, соответствующие полученным вариантам перестрахования, и принять решение в пользу самого выгодного по цене варианта. Разумеется, в реальности подобную процедуру страховщик не в состоянии проделать со всеми формами перестрахования, которых (с учетом всевозможных комбинаций), в общем-то, сколь угодно много. Вполне возможно также, что выбранный вариант не будет оптимальным даже среди рассмотренных альтернатив, ведь ни транзакционные расходы, ни дисперсия собственного удержания не известны достаточно точно.

Теперь интересно узнать, как *отражается на перестраховщике* стремление страховщика к наиболее выгодному для себя договору перестрахования. При любых двух формах перестрахования $S = Q + R$ и $S = \underline{Q} + \underline{R}$ условие $Var(Q) < Var(\underline{Q})$, как правило, сопровождается условием $Var(R) > Var(\underline{R})$. Это значит, что форма, предпочтительная для страховщика, в большинстве случаев невыгодна перестраховщику (исключения обсуждаются в разделе 4.4.5). Если в основе транзакционных расходов лежит установленная перестраховщиком маржа (административные расходы, рисковая надбавка), то интересы перестраховщика в любом случае соблюдены. Другое дело, когда страховщик выходит на перестраховочный рынок с самостоятельно разработанным предложением договора и цены. Тогда каждый потенциальный перестраховщик должен убедиться в приемлемости для него предлагаемых условий. Ниже мы увидим, что эта задача не столь тривиальна, как может показаться на первый взгляд.

Страховщик предлагает принять случайный убыток R в обмен на премию $b(R)$. Предположим, перестраховщик ранее имел не зависящий от R портфель и сопоставляет новому договору гарантийный капитал c_R , на котором рассчитывает заработать рисковую надбавку $z \cdot c_R$. Если величина $b(R) - E(R)$ покрывает расходы k_R и рисковую надбавку $z \cdot c_R$ перестраховщика, то допускается полное принятие предложения страховщика. Но и в случае

$$b(R) - E(R) < k_R + z \cdot c_R$$

перестраховщик при определенных условиях может взять на себя часть предлагаемого объема ответственности. Пусть, например, $b(R) - E(R) > k_R$, и административные расходы перестраховщика сокращаются пропорционально доле участия q , по крайней мере до тех пор пока та не опускается ниже значения

$$q = (b(R) - E(R) - k_R) / (z \cdot c_R) < 1.$$

Тогда, как мы узнали из раздела 1.2.4, принятие доли q ведет к снижению потребности в гарантийном капитале и рисковей надбавки пропорционально дисперсии $Var(qR) = q^2 Var(R)$ или пропорционально квадрату доли участия. Следовательно, для принятия убытка qR перестраховщику необходима, как минимум, премия

$$E(qR) + q \cdot k_R + q^2 z \cdot c_R = q \cdot (E(R) + k_R + q \cdot z \cdot c_R) = q \cdot b(R)$$

(где использовано указанное выше определение q), как раз совпадающая с долей q от предлагаемой страховщиком премии $b(R)$. На практике довольно часто встречается пропорциональное деление между несколькими перестра-

ховщиками (возможно, непропорционального) перестрахования одного страховщика.

В заключение раздела продемонстрируем на примере независимость оптимальной формы перестрахования от выбранной страховщиком модели принятия решения. Для этого докажем аналогичный первой теореме результат, но в рамках модели полезности.

Теорема (Арроу) (Arrow). Если транзакционные расходы k выражаются посредством одинаковой для всех форм перестрахования $R = S - Q$ функции g через математическое ожидание $E(R)$: $k(R) = g(E(R))$, то в модели полезности нелимитированное перестрахование «Stop Loss» оптимально для страховщика.

Доказательство. Пусть R — перестрахованный убыток при некоторой произвольной форме перестрахования. Тогда, как и в дисперсионной модели, существует величина $R_a = \max(S - a, 0)$, такая, что $E(R_a) = E(R)$, и, значит, $k(R_a) = k(R)$. В этом случае убыткам $Q_a = S - R_a = \min(S, a)$ и $Q = S - R$ соответствуют одинаковые премии: $b(Q) = b(Q_a)$. В силу вогнутости функции полезности u страховщика ($u'' \leq 0$), для любых x, x_0 выполняется неравенство

$$u(x) \leq u(x_0) + u'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Если величина Q представима в виде функции $Q(S)$ от совокупного убытка, то при заданном гарантийном капитале c справедливо

$$\begin{aligned} u(b(Q) + c - Q(s)) - u(b(Q_a) + c - Q_a(s)) &\leq \\ &\leq (Q_a(s) - Q(s)) \cdot u'(b(Q_a) + c - Q_a(s)) \leq \\ &\leq (Q_a(s) - Q(s)) \cdot u'(b(Q_a) + c - a). \end{aligned}$$

Последнее неравенство доказывается следующими рассуждениями. В случае $Q_a(s) < Q(s)$ из условия $Q(s) \leq s$ следует сначала $Q_a(s) < s$, а затем $Q_a(s) = \min(s, a) = a$. Таким образом, аргументы функции u' в обеих частях неравенства одинаковы, что доказывает справедливость знака равенства. Поскольку $Q_a(s) \leq a$, в случае $Q_a(s) \geq Q(s)$ аргументы функции u' удовлетворяют соотношению $b(Q_a) + c - Q_a(s) \geq b(Q_a) + c - a$, откуда в силу невозрастания функции u' непосредственно вытекает доказываемая оценка.

Применяя к предыдущему неравенству оператор математического ожидания и учитывая условие $E(Q_a) = E(Q)$, а также скалярность величин $b(Q_a)$ и $u'(b(Q_a) + c - a)$, получим

$$E(u(b(Q) + c - Q)) - E(u(b(Q_a) + c - Q_a)) \leq 0.$$

Тем самым теорема доказана для разложений $Q + R = S$, где Q и R представимы в виде функции от S . В случае произвольного разложения $Q + R = S$ снова зададим договор перестрахования величинами $\underline{Q} = E(Q | S)$ и $\underline{R} = S - E(Q | S)$. Ввиду равенства $E(\underline{R}) = E(S) - E(Q)$ этому договору соответствуют такие же транзакционные расходы, как и R , а значит, такая же премия на собственном удержании: $b(\underline{Q}) = b(Q)$. В силу вогнутости функции u для любой измеримой функции h справедливо

$$E(u(h(Q)) | S) \leq u(E(h(Q) | S)).$$

Тогда

$$E(u(b(Q) + c - Q)) = E(E(u(b(Q) + c - Q) | S)) \leq \\ \leq E(u(b(Q) + c - E(Q | S))) = E(u(b(Q) + c - Q)),$$

что и доказывает теорему, так как Q представляет собой функцию от S и имеет максимальную ожидаемую полезность при перестраховании «Stop Loss». ■

В частном случае квадратичной функции полезности

$$u(x) = x - x^2 / (2w), \quad x \leq w,$$

где w — так называемый *уровень насыщения*, максимизация полезности при заданном математическом ожидании убытка на собственном удержании равносильна максимизации дисперсии. Таким образом, последняя теорема является обобщением аналогичной теоремы для дисперсионной модели.

4.4.4. ДИФФЕРЕНЦИАЦИЯ СОБСТВЕННОГО УДЕРЖАНИЯ

Как правило, страховщик не заключает один договор перестрахования на весь портфель, а перестраховывает отдельно каждый вид страхования (огонь, общую гражданскую ответственность, автогражданскую ответственность, автокаско, несчастный случай, транспорт, взлом — кражу и т. д.). Предположим, он намерен использовать для нескольких или всех перестраховываемых в отдельности субпортфелей одну и ту же форму перестрахования. Возникает вопрос, должен ли быть размер параметра, определяющего объем перестрахования, одинаковым для всех субпортфелей? Далее мы получим ответ на этот вопрос в условиях дисперсионной модели и независимости субпортфелей. Начнем с квотного перестрахования.

Теорема (Де Финетти, Бюльман) (De Finetti, Bühlmann). Пусть независимые субпортфели S_i , $1 \leq i \leq I$, защищены отдельными договорами квотного перестрахования. Если транзакционные расходы пропорциональны математическому ожиданию перестрахованного убытка R_i с коэффициентом z_i ($k(R_i) = z_i E(R_i)$), то в дисперсионной модели квота собственного удержания $c_i = Q_i / S_i$ должна быть пропорциональна величине

$$\frac{z_i \cdot E(S_i)}{\text{Var}(S_i)}.$$

Доказательство. Пропорциональное деление портфеля i задается разложением $S_i = Q_i + R_i$, где $Q_i = c_i S_i$. Если b_i — премия, соответствующая убытку S_i (после вычета оригинальных расходов), то ожидаемый финансовый результат от собственного удержания составит

$$w_i = b_i - E(S_i) - z_i E(R_i) = b_i - (1 + z_i(1 - c_i))E(S_i).$$

В дисперсионной модели страховщик устанавливает квоты собственного удержания c_i из расчета максимальной ожидаемого финансового результата $w_1 + \dots + w_I$ от собственного удержания при заданной совокупной дисперсии

$$\sum_{i=1}^I \text{Var}(Q_i) = v_0.$$

Таким образом, наша задача сводится к нахождению условного экстремума. Согласно методу множителей Лагранжа, оптимальные значения c_i удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial}{\partial c_j} \left\{ \sum_{i=1}^I (b_i - (1 + z_i(1 - c_j))E(S_i)) + \beta \left(v_0 - \sum_{i=1}^I \text{Var}(Q_i) \right) \right\} = 0,$$

где $j = 1, \dots, I$, а β — постоянный множитель. Взяв производную и учитывая равенство

$$\text{Var}(Q_i) = \text{Var}(c_i S_i) = c_i^2 \text{Var}(S_i),$$

получим

$$z_j E(S_j) - 2\beta c_j \text{Var}(S_j) = 0,$$

откуда следует

$$c_j = \frac{z_j E(S_j)}{2\beta \text{Var}(S_j)}, \quad 1 \leq j \leq I.$$

Значение β находится из уравнения связи

$$v_0 = \sum_{i=1}^I c_i^2 \text{Var}(S_i)$$

и составляет

$$\beta^2 = \frac{1}{4 \cdot v_0} \sum_{i=1}^I \frac{(z_i E(S_i))^2}{\text{Var}(S_i)}.$$

Таким образом, доля собственного удержания c_i должна быть тем выше, чем дороже перестрахование (если мерить стоимость величиной z_i), и чем больше портфель (если мерить объем величиной $E(S_i)$), и тем ниже, чем выше дисперсия портфеля. Логичность этого итога дает нам право опустить доказательство максимальности ожидаемого результата страховщика при найденных c_i (оно аналогично доказательству теоремы в конце раздела 1.3.2). Если некоторые c_i оказываются больше 1, то соответствующие субпортфели не перестраховываются.

При квотном перестраховании всего портфеля одного вида страхования выражение

$$k(R_i) = z_i E(R_i)$$

для транзакционных расходов нельзя назвать нереалистичным. К тому же приведенное доказательство легко переносится и на *другие формы транзакционных расходов*. Одно из приемлемых выражений для транзакционных расходов выглядит как

$$k(R_i) = z_i + k_1 E(R_i) + k_2 \text{Var}(R_i).$$

Оно содержит постоянные расходы z_i , элемент, зависящий от объема $E(R_i)$, и зависящую от дисперсии рисковую надбавку. По аналогии с предыдущим доказывается, что квота собственного удержания в этом случае должна равняться

$$c_i = \frac{k_1 E(S_i) + 2k_2 \text{Var}(S_i)}{2(\beta + k_2) \text{Var}(S_i)},$$

где β снова определяется с соблюдением заданного уровня дисперсии собственного удержания.

Нет смысла применять предыдущую теорему непосредственно к одиночным рискам, рассматривая их в качестве субпортфелей. В этом случае параметры $\text{Var}(S_i)$, необходимые для определения собственного удержания, невозможно оценить с достаточной точностью. Если же в (суб)портфеле риски различаются только страховыми суммами v_i , а значит, случайные величины относительных убытков S_i / v_i всех рисков i одинаково распределены и, в частности, имеют одинаковые моменты

$$E(S_i / v_i) = \mu, \quad \text{Var}(S_i / v_i) = \sigma^2,$$

то предыдущая теорема рекомендует устанавливать квоту собственного удержания c_i по риску i пропорционально величине

$$\frac{z \cdot v_i \cdot \mu}{v_i^2 \cdot \sigma^2},$$

то есть обратно пропорционально страховой сумме v_i (мы исходим из того, что при одинаковом для всех рисков распределении ставки убытка ставка транзакционных расходов тоже постоянна: $z_i = z$). Тем самым мы вывели из предыдущей теоремы следствие для *перестрахования эксцедента сумм*. Обратим внимание, предположение $\text{Var}(S_i / v_i) = \sigma^2$ может быть справедливо только для одиночных рисков и при условии, что страховая сумма v_i влияет в основном на размер убытка. Когда же рассматривается группа таких рисков, дисперсия ставки убытка уже не постоянна и в случае независимости рисков, скорее, удовлетворяет модели $\text{Var}(S_i / v_i) = \sigma^2 / v_i$ из раздела 1.3.2.

В огневом страховании различие рисков столь велико (например, сельскохозяйственные постройки, жилые здания, промышленные строения), что предполагать одинаковое для всех рисков распределение ставки убытка S_i / v_i было бы неправильно. Однако мы всегда можем разделить риски на группы, внутри которых это предположение выполняется в приближении. Тогда квота c_i собственного удержания по i -му риску будет пропорциональна величине $u_{g(i)} / v_i$, где $u_{g(i)} = E(Z_{g(i)}) / \text{Var}(Z_{g(i)})$, а $Z_{g(i)}$ — ставка убытка группы, содержащей i -й риск (доказательство аналогично приведенному выше). Таким образом, квоты собственного удержания дифференцируются не только в зависимости от страховой суммы v_i , но и в зависимости от $u_{g(i)}$. В огневом страховании собственное удержание при перестраховании эксцедента сумм действительно зачастую дополнительно дифференцируется по группам рисков, причем для «опасных» групп устанавливается более низкое собственное удержание. В соответствии с нашими рассуждениями «опасность» измеряется величиной $1 / u_{g(i)} = \text{Var}(Z_{g(i)}) / E(Z_{g(i)})$.

Наконец, попытаемся выяснить, какие размеры приоритетов должны выбираться при нелимитированном *перестраховании эксцедента убытка* одновременно нескольких независимых субпортфелей. Опишем совокупный убыток i -го субпортфеля коллективной моделью

$$S_i = \sum_{n=1}^{N_i} X_{in},$$

считая размеры убытков X_{i1}, X_{i2}, \dots независимыми, распределенными как X_i и не зависящими от числа убытков N_i . Если для i -го портфеля установлен приоритет a_i , то на собственном удержании остается убыток

$$Q_i = \sum_{n=1}^{N_i} \min(X_{in}, a_i),$$

а перестраховщику отдается часть $R_i = S_i - Q_i$. Справедлива следующая

Теорема (Бюльман) (Bühlmann). Пусть в субпортфеле S_i , $1 \leq i \leq I$, размер отдельного убытка задан случайной величиной X_i , а число убытков распределено по закону Пуассона и не зависит от X_i . Пусть далее субпортфели независимы и защищены отдельными договорами нелимитированного перестрахования эксцедента убытка. Если транзакционные расходы имеют вид

$$k(R_i) = z_i + k_1 E(R_i) + k_2 \text{Var}(R_i),$$

то приоритет a_i i -го субпортфеля в дисперсионной модели удовлетворяет невязному уравнению

$$a_i = (k_1 / 2 + k_2 \cdot E((X_i - a_i | X_i > a_i))) / \beta,$$

где множитель β определен с соблюдением заданного уровня дисперсии.

Доказательство. Пусть b_i — премия i -го субпортфеля (за вычетом оригинальных расходов). В соответствии с дисперсионной моделью, a_i следует выбирать из расчета максимальной ожидаемого результата собственного удержания

$$\sum_{i=1}^I (b_i - E(S_i) - k(R_i))$$

при соблюдении заданного уровня дисперсии

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^I Q_i\right) = v_0.$$

Согласно методу множителей Лагранжа, для этого необходимо выполнение равенства

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \left\{ \sum_{i=1}^I (b_i - E(S_i) - k(R_i)) + \beta \left(v_0 - \sum_{i=1}^I \text{Var}(Q_i) \right) \right\} = 0 \quad \text{при } j = 1, 2, \dots, I.$$

В случае пуассоновского числа убытков N_i справедливы выражения ($h_i = E(N_i)$):

$$E(R_i) = h_i \cdot E(\max(X_i - a_i, 0)),$$

$$\text{Var}(R_i) = h_i \cdot E(\max(X_i - a_i, 0))^2,$$

$$\text{Var}(Q_i) = h_i \cdot E(\min(X_i, a_i))^2.$$

Обозначив через F_i — функцию распределения случайной величины X_i (см. функции M_k и m_2 в разделе 4.2.5) и учитывая указанные выше равенства, получим

$$\frac{\partial}{\partial a_i} E(R_i) = -h_i(1 - F_i(a_i)),$$

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \text{Var}(R_i) = -2 \cdot h_i \cdot E(\max(X_i - a_i, 0)),$$

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \text{Var}(Q_i) = 2 \cdot h_i \cdot a_i \cdot (1 - F_i(a_i)).$$

Тогда условие Лагранжа преобразуется к виду

$$k_i h_i (1 - F_i(a_i)) + 2k_2 h_i E(\max(X_i - a_i, 0)) - 2\beta \cdot h_i a_i (1 - F_i(a_i)) = 0$$

или

$$a_i = \frac{k_1}{2\beta} + \frac{k_2}{\beta} \cdot \frac{E(\max(X_i - a_i, 0))}{1 - F_i(a_i)} = k_1 / (2\beta) + k_2 \cdot E(X_i - a_i | X_i > a_i) / \beta.$$

Параметр β снова находим из уравнения связи

$$\text{Var}(Q_1 + \dots + Q_l) = v_0.$$

Неявное уравнение относительно a_i при $\beta > 0$ обычно имеет решение. Действительно, переписав последнее равенство в виде

$$\frac{2\beta \cdot a_i - k_1}{2k_2} = E(X_i - a_i | X_i > a_i),$$

замечаем, что левая часть как функция от a_i задает прямую с положительным угловым коэффициентом, пересекающую ось ординат в области отрицательных значений, а правая часть представляет собой среднее превышение приоритета a_i в реальности почти всегда дегрессивно возрастающее по a_i , начиная со значения $E(X_i) > 0$ в точке $a_i = 0$. Выходит, точка пересечения в большинстве случаев существует.

Если у одного из двух субпортфелей среднее превышение интересующих приоритетов больше, чем у другого, то и приоритет для первого получится выше. Это вполне логично, ведь за счет сокращения среднего превышения приоритета сокращается и зависящая от $\text{Var}(R_i)$ часть транзакционных расходов.

Если предположить для размеров убытков X_i всех субпортфелей в области больших убытков распределение Парето:

$$F_i(x) = 1 - (x/d_i)^{-\alpha_i}, \quad x \geq d_i,$$

где $\alpha_i > 1$, то

$$E(X_i - a_i | X_i > a_i) = a_i / (\alpha_i - 1),$$

и оптимальные приоритеты составят

$$a_i = \frac{k_1/2}{\beta - k_2/(\alpha_i - 1)}.$$

Как видно из последней формулы, приоритет тем выше, чем меньше α_i , то есть чем сильнее распределение размера убытка F_i отягощено большими убытками.

Практика не полностью согласуется с полученным результатом. Например, приоритеты в страховании общей ответственности зачастую устанавливаются ниже, чем в страховании автогражданской ответственности, хотя среднее превышение во втором случае меньше. Это говорит либо об усиленном стремлении страховщиков к защищенности, либо об игнорировании перестраховщиками рисковой надбавки (коль скоро она пропорциональна дисперсии). Во втором случае ($k_2 = 0$) условие Лагранжа дает одинаковый для всех субпортфелей приоритет $a_i = k_1 / (2\beta)$. Но, как мы помним, перестрахование эксцедента убытка изначально определяется как деление с одинаковым для всех рисков приоритетом. И действительно, в отличие от перестрахования эксцедента сумм, при перестраховании эксцедента убытка дифференцировать приоритеты внутри покрываемого портфеля не принято.

4.4.5. СУБОПТИМАЛЬНОЕ И ОПТИМАЛЬНОЕ ПО ПАРЕТО ДЕЛЕНИЕ РИСКА

Для некоторых форм деления риска всегда можно подобрать более выгодную обоим участникам альтернативу. Одна из таких форм — *интегральная франшиза*. В контексте перестрахования интегральная франшиза относится к годовому убытку. Если S — совокупный годовой убыток, и a — установленная по договоренности сторон граница, то страховщик несет убыток

$$Q = \begin{cases} S, & \text{если } S \leq a, \\ 0, & \text{если } S > a, \end{cases}$$

а перестраховщик — убыток $R = S - Q$. Иными словами, перестраховщик принимает полный убыток, если тот превышает уровень a .

Теорема. Для любой интегральной франшизы $Q + R = S$ с границей a существует нелимитированное перестрахование «Stop Loss» $Q_a + R_a = S$, $Q_a = \min(S, a)$, с приоритетом $a < a$, такое что $E(Q_a) = E(Q)$, $E(R_a) = E(R)$, но $\text{Var}(Q_a) < \text{Var}(Q)$, $\text{Var}(R_a) < \text{Var}(R)$.

Доказательство. $E(Q_a)$ как функция от a непрерывна и монотонно возрастает, причем $0 \leq E(Q_a) \leq E(S)$. Значит, для заданной интегральной франшизы $Q + R = S$ с границей \underline{a} всегда существует такое «Stop Loss», что $E(Q_a) = E(Q)$ и, следовательно, $E(R_a) = E(R)$. Остается доказать только соотношение дисперсий. Из равенства

$$\int_0^a s dG(s) = E(Q) = E(Q_a) = \int_0^a s dG(s) + a \cdot (1 - G(a))$$

(где G — функция распределения величины S) сразу следует, что $a < \underline{a}$, и

$$\int_a^{\underline{a}} s dG(s) = a(1 - G(a)).$$

Тогда

$$\begin{aligned} E(Q^2) &= \int_0^a s^2 dG(s) = \int_0^a s^2 dG(s) + \int_a^{\underline{a}} s^2 dG(s) > \int_0^a s^2 dG(s) + a \cdot \int_a^{\underline{a}} dG(s) = \\ &= \int_0^a s^2 dG(s) + a^2(1 - G(a)) = E(Q_a^2). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\text{Var}(Q_a) = E(Q_a^2) - (E(Q_a))^2 < E(Q^2) - (E(Q))^2 = \text{Var}(Q)$$

(это неравенство уже один раз выводилось при доказательстве теоремы Борха, Кана и Песонена в разделе 4.4.3).

Неравенство

$$\text{Var}(R_a) = E(R_a^2) - (E(R_a))^2 < E(R^2) - (E(R))^2 = \text{Var}(R)$$

вытекает из соотношения

$$\int_a^{\infty} (s - a)^2 dG(s) = E(R_a^2) < E(R^2) = \int_a^{\infty} s^2 dG(s).$$

Последнее достигается следующими выкладками

$$\begin{aligned} \int_a^{\underline{a}} (s - a)^2 dG(s) &< (\underline{a} - a) \cdot \int_a^{\underline{a}} (s - a) dG(s) = (\underline{a} - a)a(1 - G(a) - (G(\underline{a}) - G(a))) < \\ &< (2\underline{a}a - a^2) \cdot (1 - G(\underline{a})) < \int_a^{\infty} (s^2 - (s - a)^2) dG(s). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Прокомментируем доказанный результат. Принимая решение в соответствии с дисперсионной моделью, страховщик и перестраховщик могут заранее отказаться от интегральной франшизы: в сравнении с ней для обоих всегда более выгодно перестрахование «Stop Loss» (или вычитаемая франшиза). Строго говоря, это справедливо, когда транзакционные расходы зависят ис-

ключительно от математического ожидания и дисперсии перестрахованного убытка — для дисперсионной модели такая предпосылка вполне естественна. Если транзакционные расходы имеют вид $k(R) = k_0 + k_1 E(R) + k_2 \text{Var}(R)$, то (удовлетворяющее условиям теоремы) перестрахование «Stop Loss» обеспечивает не только более низкую дисперсию собственного удержания, но и более низкие транзакционные расходы (при $k_2 > 0$), чем интегральная франшиза.

Форма деления риска, для которой не существует альтернативы, улучшающей положение по крайней мере одной из сторон, не ухудшая положения второй стороны, называется *оптимальной по Парето*. Выше мы доказали в рамках дисперсионной модели, что интегральная франшиза не оптимальна по Парето. То же можно доказать и в рамках модели полезности, если предположить зависимость транзакционных расходов только от ожидаемого убытка перестраховщика. При любой оптимальной по Парето форме перестрахования улучшение положения страховщика влечет ухудшение положения перестраховщика и наоборот.

До сих пор мы уделяли основное внимание формам перестрахования, допускающим представление совокупного убытка Q на собственном удержании страховщика и передаваемую перестраховщику часть $R = S - Q$ в виде функций от совокупного убытка. Этому условию удовлетворяют квотное перестрахование ($Q = cS$), перестрахование «Stop Loss» ($Q = \min(S, a)$) и интегральная франшиза (относящаяся к годовому убытку). В отличие от перечисленных форм перестрахования эксцедент сумм и эксцедент убытка не задаются функциями от совокупного убытка S . Более того, деление величины S в этих случаях зависит от пропорции мелких и крупных убытков в составе совокупного убытка S (эксцедент убытка) или от соотношения вероятностей крупного убытка для высоких и не очень высоких страховых сумм (эксцедент сумм).

При доказательстве теоремы Борха, Кана, Песонена и теоремы Арроу в разделе 4.4.3 мы воспользовались тем, что любой форме перестрахования, не являющейся функцией от совокупного убытка S , можно сопоставить более выгодную обоим сторонам форму, представимую в виде функции от S . Здесь мы хотим зафиксировать этот факт для дисперсионной модели.

Теорема. Для любой формы перестрахования $Q + R = S$, где \underline{Q} и \underline{R} не задаются в виде функций годового совокупного убытка S , а зависят от отдельных убытков, существует форма перестрахования $Q + R = S$, где Q и R представимы в виде функций от S , и выполняются соотношения $E(Q) = E(\underline{Q})$, $E(R) = E(\underline{R})$ и $\text{Var}(Q) < \text{Var}(\underline{Q})$, $\text{Var}(R) < \text{Var}(\underline{R})$.

Доказательство. Покажем, что названным требованиям удовлетворяет форма $Q = E(Q | S)$, $R = S - Q = E(S | S) - E(Q | S) = E(\underline{R} | S)$. Действительно, Q и R являются функциями от S , причем $E(Q) = E(E(Q | S)) = E(\underline{Q})$, $E(R) = E(E(\underline{R} | S)) = E(\underline{R})$. Далее

$$\text{Var}(Q) = \text{Var}(E(Q | S)) < \text{Var}(E(Q | S)) + E(\text{Var}(Q | S)) = \text{Var}(\underline{Q}),$$

и

$$\text{Var}(R) = \text{Var}(E(\underline{R} | S)) < \text{Var}(E(\underline{R} | S)) + E(\text{Var}(\underline{R} | S)) = \text{Var}(\underline{R}). \quad \blacksquare$$

Следствие. Форма перестрахования, не представимая в виде функции от совокупного годового убытка, в дисперсионной модели не оптимальна по Парето.

Теорема и следствие справедливы и для модели полезности, когда транзакционные расходы зависят только от ожидаемого убытка перестраховщика. Правда, в доказательстве тогда должен присутствовать такой же дополнительный шаг, как в теореме Арроу из раздела 4.4.3.

Предыдущее доказательство одновременно дает способ построения *улучшенной* с точки зрения обеих сторон *формы перестрахования* для перестрахования эксцедента сумм и эксцедента убытка. При фиксированном портфеле рассматривается конкретный вариант перестрахования эксцедента сумм. Для каждого из возможных вариантов представления годового совокупного убытка $S = s$ в виде суммы отдельных убытков рассчитывается собственное удержание Q в соответствии с заданным эксцедентом сумм. Тогда математическое ожидание $E(Q | S = s)$ убытков на собственном удержании при условии $S = s$ представляет собой фактический совокупный убыток на собственном удержании страховщика при улучшенной форме перестрахования (если годовой совокупный убыток равен s).

Для расчета значения $E(Q | S = s)$ необходимо знать вероятностные распределения числа и размеров убытков по каждому риску. В рисковом страховании они могут быть найдены разве только приближенно и при дополнительных предположениях. Кроме того, сторонам вряд ли удастся прийти к единому мнению относительно справедливого базиса расчета — такое возможно, пожалуй, только в страховании жизни и страховании смерти от несчастного случая. Таким образом, улучшение эксцедента сумм и эксцедента убытка, хоть и возможно теоретически, в реальности, как правило, недостижимо, что дает право этим так называемым субоптимальным формам на дальнейшее существование в страховой практике. Предложенная в предыдущем разделе дифференциация собственного удержания также не является оптимальной по Парето в том смысле, что теоретически она может быть улучшена за счет использования формы перестрахования, зависящей только от совокупного убытка всех рассматриваемых субпортфелей.

Мы узнали, что оптимальная по Парето форма перестрахования обязательно допускает представление в виде функции от совокупного годового убытка. Но, как показал пример с интегральной франшизой (относящейся к годовому убытку), одного этого условия недостаточно. Следующая теорема в полной мере характеризует оптимальные по Парето формы перестрахования.

Теорема (Песонен) (Pesonen). Форма перестрахования $Q + R = S$ в дисперсионной модели или модели полезности тогда и только тогда оптимальна по Парето, когда убыток на собственном удержании Q и перестрахованный убыток R являются монотонно неубывающими функциями годового совокупного убытка S .

За доказательством теоремы адресуем читателя к оригинальной работе (Pesonen M. Optimal Reinsurances // Scandinavian Actuarial Journal, 1984, p. 65–90). Из теоремы непосредственно следует, что кватное перестрахование и «Stop Loss» оптимальны по Парето — в этих случаях Q и R монотонно не убывают по S . Напротив, в случае интегральной франшизы (относящейся к годовому

убытку) собственное удержание Q не является монотонно неубывающей функцией. Этим подтверждается, что интегральная франшиза не оптимальна по Парето.

4.4.6. ВЫВОД

Как мы выяснили, без точного знания распределения убытка и фактических транзакционных расходов невозможно определить оптимальную для страховщика форму перестрахования. Поэтому *на практике* за ориентир берется доминирующая компонента технического страхового риска: риск случайности или риск изменчивости (см. раздел 1.2.2). Соотношение их весов в разных видах страхования различно. Например, в огневом страховании промышленных предприятий, характеризующемся высокими различиями страховых сумм, почти всегда доминирует риск случайности, и годовой финансовый результат решающим образом зависит от наличия нескольких крупных убытков (см. табл. 1.4.3.4). В страховании автогражданской ответственности, наоборот, отдельные крупные убытки не играют серьезной роли; гораздо сильнее на годовом результате сказываются изменчивость («качество года», см. раздел 1.4.2) и инфляция, влияющая на расходы по компенсации ущерба.

От риска случайности отдельных крупных убытков лучше всего защищают эксцедент сумм и эксцедент убытка. При кумуляции большого числа убытков от одного события, естественно, чаще всего помогает эксцедент кумулятивного убытка. Риск изменчивости, затрагивающему одновременно все убытки, очевидно, удобнее всего противостоять с помощью квоты или «Stop Loss». Когда весомы сразу обе компоненты технического страхового риска, можно комбинировать несколько форм перестрахования («программа перестрахования»).

Далее мы увидели, что теоретические модели, дополненные идеализированными предположениями относительно транзакционных расходов, одновременно дают оптимальную форму перестрахования и оптимальное собственное удержание. В реальности прийти аналитическим путем к наиболее выгодному варианту перестрахования, как правило, не удастся, а численный путь предполагает проверку огромного количества вариантов даже в рамках пяти основных форм и их разумных комбинаций. Когда же форма перестрахования задана, выбор собственного удержания не требует столь серьезной вычислительной работы, хотя к теоретическому оптимуму зачастую можно приблизиться только путем проб и интерполирования. Принципиально важно при этом правильно оценить распределение убытка (в области больших размеров) и транзакционные расходы. Эта задача была и остается довольно сложной, тем более что и то и другое с течением времени может существенно меняться.

Прогресс в области электронной обработки данных открыл возможность оптимизации собственного удержания посредством *имитационных расчетов*. Для различных размеров собственного удержания — частично с помощью аналитически выведенных формул, частично с помощью случайных чисел — рассчитываются некоторые параметры (математическое ожидание, стандартное отклонение, коэффициент вариации, асимметрия, квантили), характе-

ризирующие распределение годового финансового результата от собственного удержания. Затем на основании полученных значений параметров определяется подходящий размер собственного удержания. Преимущество этого метода состоит в том, что страховщик не обязан формулировать свои решения абстрактно и заранее, а решает, скорее, интуитивно при виде конкретных цифр. Трудности оценки распределения убытка, обсуждаемые ранее, здесь, разумеется, тоже присутствуют, поэтому важно попробовать как можно большее число альтернатив (анализ чувствительности).

В процессе принятия решения приходится сталкиваться еще с одной (всегда существующей при наличии нескольких критериев) проблемой выбора из двух вариантов, когда в одних критериях отдается предпочтение первому варианту, а в других — второму. Помимо всего, нельзя забывать о зависимости выбора модели от текущей интенсивности заключения договоров страхования, в свою очередь зависящей от текущего порядка перестрахования. Подходящая для текущего портфеля модель в дальнейшем окажется непригодной, если ее применение выльется в совершенно другой порядок заключения договоров страхования.

Некоторые практики не видят ничего сложного в задаче выбора собственного удержания, полагая возможным исходить из имеющегося собственного удержания и связанного с ним опыта — достаточно лишь выбрать направление изменения текущего собственного удержания. Однако приобретенный опыт, как любое статистическое наблюдение, подчинен закону случайности и нередко дает искаженное представление о крупных убытках, происходящих нечасто.

Несмотря на все сложности, связанные с применением теоретической модели для оценки распределения результатов собственного удержания, практикам не стоит слишком сильно полагаться на свое выработанное с опытом чутье, особенно когда перестраховочная защита приобретает в небольшом объеме. Только теоретическая модель риска в состоянии учесть все, даже самые малые вероятности, не реализовавшиеся в двадцати- или тридцатилетнем периоде наблюдения, но на которые всегда стоит рассчитывать. И хотя теоретическая модель — это в конечном счете всего лишь замена решающего параметра «собственное удержание» одним или несколькими другими параметрами, сравнение теоретического результата с интуитивным представлением почти всегда позволяет сделать чрезвычайно полезные выводы.

В заключение приведем несколько ссылок на дополнительную литературу. Хесселлагер в своей работе (Hesselager O. Some Results on Optimal Reinsurance in Terms of the Adjustment Coefficient // Scandinavian Actuarial Journal, 1990, p. 80–95) выводит результаты для модели, измеряющей надежность вероятностью разорения (а точнее, ее оценкой с участием «поправочного коэффициента» (adjustment coefficient), предложенной Крамером—Лундбергом). В рамках той же модели, но с дополнительным предположением нормального распределения совокупного убытка на собственном удержании Штрауб в главе «Retentions» своей книги (Straub E. Non-Life Insurance Mathematics. Berlin: Springer, 1988) приходит к довольно наглядному представлению собственного удержания для основных форм перестрахования. Аналитический метод опти-

мизации портфеля, явно учитывающий риск, связанный с резервированием и вложением капитала, изложен в работе Шнипера (Schneiper R. Portfolio Optimization // ASTIN Bulletin, 2000, 30, p. 195–248).

Намного чаще, чем деление риска между страховщиком и перестраховщиком, в литературе анализируется деление риска между страхователем и страховщиком. При этом применяется исключительно модель полезности. Обзор с многочисленными дальнейшими ссылками на литературу приведен в статье Кромшрёдера (Kromschröder B. Zum Stand und zur Entwicklung der Versicherungsentscheidungstheorie // Risiko—Versicherung—Markt. Karlsruhe: Versicherungswirtschaft, 1994).

4.5. Вывод: деление риска как важная часть рискованной политики

Деление риска — один из важнейших инструментов рискованной политики страховщика, позволяющий одновременно влиять на структуру портфеля (деление риска со страхователем) и дополнительно ограничивать технический страховой риск (перестрахование). Как мы знаем из раздела 1.2.2, технический страховой риск характеризуется, с одной стороны, распределением совокупного убытка принятого на страхование портфеля, а с другой — размером имеющихся в распоряжении страховщика денежных средств для возмещения убытков, то есть суммарной собранной премией (за вычетом расходов на привлечение клиентов и административных расходов) и гарантийным капиталом. Рисковая политика направлена на улучшение этих показателей и включает меры:

- пополнения гарантийного капитала, например накопление доходов, привлечение капитала извне,
- увеличения сбора премий — дифференцированное или недифференцированное повышение премий для некоторых или всех рисков,
- улучшения распределения убытка — тщательное урегулирование убытков и пропаганда профилактики убытков,
- одновременно воздействующие на сбор премий и распределение убытка — политика формирования портфеля (решения о количестве, характере и размере принимаемых рисков, а также о делении риска со страхователем) и политика перестрахования.

В реальности портфель страховой компании непрерывно меняется. Уже только поэтому компания обязана постоянно перепроверять и соответствующим образом корректировать рискованную политику. По той же причине уровень

надежности может быть определен или оценен только на текущий момент. В то же время из опыта известно, что циклы мягких или жестких страховых рынков, как правило, длятся по нескольку лет. Бывает, из-за жесткой конкуренции повышение премий невозможно в течение нескольких лет. Кроме того, некоторые мероприятия рискованной политики дают эффект только через годы, а приносящие результат мгновенно (например, увеличение капитала или перестрахование) могут как раз в нужный момент быть особенно дорогими. Из всего сказанного делаем вывод: измерение уровня надежности компании в целях предотвращения возможных проблем должно основываться на моделях, охватывающих, как минимум, десять лет.

Эти модели должны быть динамичными, то есть не просто десятикратно воспроизводить одну и ту же ситуацию, а обеспечивать максимальное соответствие мероприятий рискованной политики текущим требованиям реальности. Аналитическое исследование в рамках таких моделей невозможно — все расчеты проводятся только посредством имитации. Наряду с принятыми нами во внимание суммарной премией, распределением убытка и перестрахованием в действительности очень важную роль играет результат инвестирования капитала — проценты, заработанные гарантийным капиталом и техническими страховыми резервами.

Проектирование и имитация этих так называемых *моделей тестирования платежеспособности* в 1980-е годы усиленно форсировались финской рабочей группой под руководством Т. Пентикяйнена (Т. Pentikäinen) и британской рабочей группой под руководством К. Д. Дэйкина (С. D. Daykin). За информацией по этой теме отсылаем интересующегося читателя ко второй части книги: Daykin C. D., Pentikäinen T., Pesonen M. *Practical Risk Theory for Actuaries*. London: Chapman & Hall, 1994. Проблематика простых индикаторов платежеспособности обсуждается в брошюре: Kastelijn W. M., Remmerswaal J. C. M. *Solvency*. Rotterdam: Nationale-Nederlanden, 1986. Если в упомянутых финско-британских исследованиях на первый план выдвигался аспект платежеспособности, то начиная с 1990-х годов акцент ставится на аспекты управления, ориентированного на держателей акций. За последнее время значительно усовершенствовалось моделирование инвестиций и их зависимости от процесса убытков. Эти модели относятся к так называемому *динамическому финансовому анализу* (Dynamic Financial Analysis, DFA). Дизайн и спектр применимости DFA-моделей для перестраховщика описывает работа: Lowe S. P., Stanard J. N. *An Integrated Dynamic Financial Analysis and Decision Support System for a Property Catastrophe Reinsurer* // ASTIN Bulletin, 1997, 27, p. 339—371. Общее представление о компонентах DFA-модели дает статья: Kaufmann R., Gadmer A., Klett R. *Introduction to Dynamic Financial Analysis* // ASTIN Bulletin, 2001, 31, p. 213—249.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Типовые задачи квалификационного экзамена по математике рискового страхования в Немецком обществе актуариев

Для вступления в Немецкое общество актуариев необходимо сдать шесть квалификационных экзаменов по различным разделам актуарной математики, в том числе по математике рискового страхования. Экзамен по математике рискового страхования представляет собой письменное решение трех задач, по одной на каждую из следующих тем: исчисление тарифов, резервирование, деление риска. На выполнение всей работы отводится 90 минут — по 30 минут в среднем на каждую задачу. Мы приводим задачи, предложенные на экзаменах по математике рискового страхования в Немецком обществе актуариев в 1997–2003 годах. После каждого вопроса и задания в скобках указано количество баллов за правильный ответ. Это число баллов одновременно соответствует примерному времени в минутах, достаточному для решения. Экзамен считается сданным, если набрано не менее 40% от совокупного максимально возможного числа баллов.

Задачи по теме «Исчисление тарифов»

№1

1. С какой целью применяется метод Бейли—Саймона и почему такая цель ставится? (5 баллов)
2. Назовите четыре недостатка метода Бейли—Саймона. (5 баллов)
3. Каких из этих недостатков лишен метод маргинальных сумм? (5 баллов)
4. На примере двух тарифных факторов схематично опишите подход, с помощью которого устраняются все слабые места методов Бейли—Саймона и маргинальных сумм. (15 баллов)

№2

Для выравнивания нормированных убытков перекрестных тарифных групп часто применяется обобщенная линейная модель (GLM) с гамма-распределенной случайной компонентой и логарифмической функцией связи.

1. Почему гамма-распределение подходит в качестве модели для нормированного убытка однородной тарифной группы? (7 баллов)
2. Каноническая (естественная) функция связи гамма-распределения имеет вид $g(\mu) = 1/\mu$. Однако на практике в большинстве случаев предпочитается логарифмическая функция связи. Почему? (5 баллов)
3. Программное обеспечение обобщенных линейных моделей дает на выходе следующие показатели по каждой тарифной группе i :
 - объем n_i (заданное значение),
 - наблюдаемый нормированный убыток z_i (заданное значение),
 - оценка максимального правдоподобия $\hat{\mu}_i$ выровненного нормированного убытка $\mu_i = E(Z_i)$,
 - оценка максимального правдоподобия \hat{y}_i линейного предиктора $y_i = \ln(\mu_i)$,
 - стандартная ошибка $s.e.(\hat{y}_i) = \hat{\sigma}_i$,
 - одинаковый для всех групп скалярный параметр $\hat{\alpha}$.

Постройте на основании этой информации оценки для коэффициентов вариации случайной и оценочной ошибок $Vko(Z_i)$ и $Vko(\hat{\mu}_i)$. (Указание: для оценивания $Vko(\hat{\mu}_i)$ используйте асимптотическое распределение оценки \hat{y}_i .) (18 баллов)

№3

1. Метод кластеризации Уорда опирается на меру расстояния

$$d_{ik} = (\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_k)^2 v_i v_k / (v_i + v_k).$$

С какой целью в страховании применяются кластер-методы? Что обозначают символы $i, k, v_i, v_k, \hat{\mu}_i, \hat{\mu}_k$? В чем заключается метод Уорда? (10 баллов)

2. Объясните роль элемента $v_i v_k / (v_i + v_k)$, отличающего меру d_{ik} от обычного евклидова расстояния $e_{ik} = (\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_k)^2$. (8 баллов)
3. В каких случаях расстояние

$$c_{ik} = d_{ik} / (\hat{\sigma}_i^2 + \hat{\sigma}_k^2),$$

где $\hat{\sigma}_i^2$ и $\hat{\sigma}_k^2$ — меры ошибок оценок $\hat{\mu}_i$ и $\hat{\mu}_k$, обеспечивает более качественную кластеризацию, чем d_{ik} , и почему? (4 балла)

4. Используя меру расстояния, задайте статистически обоснованный критерий прекращения процесса кластеризации для метода Уорда. (8 баллов)

№4

1. Объясните принцип выбора наиболее эффективного тарифного фактора в добавление к ранее утвержденным m тарифным факторам, образующим M тарифных ячеек (отбор производится на основании нормированных убытков). Какие данные при этом используются? (8 баллов)
2. Страховая компания классифицирует тарифы страхования автогражданской ответственности исключительно на основании частоты убытков. Первый тарифный фактор выбирается с помощью статистики

$$T = \sum_{k=1}^K v_k (z_k - \hat{\mu})^2 / \hat{\mu},$$

где

K — число классов значений фактора,

v_k — число полисо-лет в классе k ,

z_k — частота убытков в классе k ; $z_k = (\text{число убытков}) / v_k$,

$$\hat{\mu} = \sum v_k z_k / \sum v_k.$$

- а) Обоснуйте пригодность этой статистики для рассматриваемой задачи. Какой фактор должен быть выбран: с наибольшим значением T , с наименьшим значением T или какой-либо другой (какой) и почему? (10 баллов)
- б) После выбора первого тарифного фактора ставится вопрос о привлечении дополнительного тарифного фактора. Правильно ли рассматривать фактор, оказавшийся вторым по значимости в п. а), в качестве следу-

ющего тарифного фактора, или же вопрос решается иначе (как)? Обоснуйте ответ. (7 баллов)

№5

1. Сотрудник отдела автострахования проверяет необходимость дифференциации тарифов страхования автогражданской ответственности по цвету автомобиля, сравнивая средние нормированные убытки всех светлых и всех темных автомобилей (рассчитанные на основании усеченных на уровне 100 000 € убытков последнего года). Объясните, почему так делать неправильно
- а) словесно. (5 баллов)
- б) при помощи небольшого самостоятельно разработанного примера (с использованием данных об объемах групп и суммарных выплатах). (5 баллов)
- в) Укажите приемлемый способ сравнения, не требующий расчета тарифов, и объясните, в чем его преимущество. (10 баллов)
2. Для выравнивания нормированных убытков перекрестных тарифных групп используется обобщенная линейная модель с логарифмической функцией связи. Классам «мужской» (стандартный класс) и «женский» фактора «пол» соответствуют следующие оценки параметров в линейном предикторе:

Пол	Индикатор	Оценка параметра в линейном предикторе	Стандартная ошибка оценки
Мужской	0	0	0
Женский	1	-0,2	0,05

Не зная оценок параметров других факторов, оценку математического ожидания нормированного убытка женского пола можно представить в виде скидки с математического ожидания нормированного убытка мужского пола. Вычислите

- а) оценку этой скидки. (5 баллов)
- б) ее стандартную ошибку. (5 баллов)

№6

В страховании автогражданской ответственности риски дифференцируются по двум факторам А и В, соответственно, с I и K классами значений. По каждой ячейке (i, k) , $1 \leq i \leq I$, $1 \leq k \leq K$, в распоряжении имеются число убытков n_{ik} и совокупный объем v_{ik} прошлого года. Для оценки математических ожиданий $E(N_{ik})$ случайных величин числа убытков N_{ik} применяется метод выравнивания с перекрестной параметризацией.

1. Назовите два основных преимущества методов выравнивания перед изолированным расчетом $E(N_{ik})$ по каждой ячейке. (4 балла)
2. Считая случайные величины N_{ik} независимыми и распределенными по закону Пуассона, постройте функцию правдоподобия модели перекрестной параметризации и выведите уравнения правдоподобия для оценки параметров. (11 баллов)
3. Укажите численный способ решения полученных в п. 2 уравнений правдоподобия, позволяющий обойтись без специальных программных продуктов. (3 балла)
4. Задайте для рассматриваемой модели статистику критерия согласия и опишите проверку гипотезы согласия. (6 баллов)
5. Назовите все возможные причины отклонения нулевой гипотезы. (6 баллов)

№7

1. В группе объема n полисо-лет риски независимы и имеют одинаковое гамма-распределение $G(\mu, \alpha)$ с математическим ожиданием μ и параметром формы α (дисперсия равна μ^2 / α). Каковы параметры гамма-распределений годового совокупного убытка S и нормированного убытка Z группы? (4 балла)
2. Таблица тарифов основана на двух факторах с $i = 1, \dots, I$ и $k = 1, \dots, K$ классами значений. Для нормированного убытка Z_{ik} ячейки (i, k) объема v_{ik} полисо-лет принята модель $E(Z_{ik}) = x_i y_k$ с неизвестными параметрами x_i, y_k . Покажите, что один из этих параметров не нуждается в оценивании. (2 балла)
3. Перейдите от принятой в п. 2 модели $E(Z_{ik}) = x_i y_k$ к однозначно параметризованной обобщенной линейной модели вида

$$g(E(Z_{ik})) = \sum_{j=1}^J x_j^{(i,k)} \beta_j.$$

(Указание: используя обозначения из п. 2, определите $g, J, x_j^{(i,k)}$ и β_j таким образом, чтобы параметризация математического ожидания $E(Z_{ik})$ была такой же, как в модели п. 2.) (10 баллов)

4. В обобщенной линейной модели дисперсия наблюдений Z_{ik} зависит от дисперсионной функции V . Выразите $\text{Var}(Z_{ik})$ через V и определите V в случае гамма-распределенных Z_{ik} . (4 балла)
5. Какой из следующих четырех методов наименьших квадратов

$$\text{i. } \sum_{i,k} v_{ik} (Z_{ik} - (x_i + y_k))^2 \rightarrow \min$$

$$\text{ii. } \sum_{i,k} v_{ik} (Z_{ik} - x_i y_k)^2 \rightarrow \min$$

$$\text{iii. } \sum_{i,k} v_{ik} (Z_{ik} - x_i y_k)^2 / (x_i y_k) \rightarrow \min$$

$$\text{iv. } \sum_{i,k} v_{ik} \left(\frac{Z_{ik}}{x_i y_k} - 1 \right)^2 \rightarrow \min$$

больше всех подходит к обобщенной линейной модели п. 3 с гамма-распределенной случайной компонентой Z_{ik} и почему? (10 баллов)

РЕШЕНИЕ

№1

1. Метод Бейли—Саймона применяется для выравнивания статистики убытков при перекрестной классификации рисков. С помощью выравнивания достигаются следующие цели:

- стабилизация статистики каждой отдельной ячейки (за счет привлечения статистики соседних тарифных ячеек, а точнее, всех ячеек, принадлежащих тому же классу значений хотя бы по одному тарифному фактору);
- упорядоченность тарифов: между тарифами двух значений одного тарифного фактора существует одинаковое отношение порядка (больше или меньше) во всех классах значений остальных факторов;
- сокращение числа параметров.

Названные эффекты позволяют задать тарифы таблицей скидок и надбавок (к основному тарифу), зависящих от значений тарифных факторов.

2. Метод Бейли—Саймона

- чувствителен к выбросам,
- переоценивает маргинальные суммы,
- не допускает проверки гипотезы согласия,
- исключает возможность определения точности параметров и выровненных потребных премий.

3. Метод маргинальных сумм лишен первого и второго недостатков метода Бейли—Саймона, но не лишен двух остальных.

4. Для нормированного убытка Z_{ik} ячейки (i, k) задается модель распределения (например, гамма-распределение), и принимается мультипликативная или аддитивная параметризация $E(Z_{ik}) = x_i \oplus y_k$. Неизвестные параметры x_i, y_k оцениваются методом максимального правдоподобия. Такой подход позволяет проверить перекрестную параметризацию $E(Z_{ik}) = x_i \oplus y_k$ против полной параметризации $E(Z_{ik}) = \mu_{ik}$ с помощью метода отношения правдоподобий, а также вычислить точность (стандартную ошибку) параметров и выровненных нормированных убытков на основании (асимптотической) матрицы ковариаций оценок максимального правдоподобия.

№2

1. Гамма-распределение обладает свойствами:

- область определения $[0; \infty)$,
- большая масса вероятностей в нуле,
- сильная правосторонняя асимметрия,

и поэтому подходит для грубого моделирования годового совокупного убытка отдельного риска (при малых α). Совокупный убыток однородной группы независимых рисков с гамма-распределенными совокупными убытками тоже имеет гамма-распределение, причем за счет агрегирования неточность аппроксимации убытков отдельных рисков нивелируется. При нормировании совокупного убытка на объем группы гамма-распределение сохраняется. Все это оправдывает применение гамма-распределения в качестве модели для совокупного и нормированного убытков однородной группы независимых рисков.

2. Логарифмическая функция связи обеспечивает мультипликативное представление тарифа. Например, в случае двух тарифных факторов обобщенная линейная модель

$$\ln(E(Z_{ik})) = \mu + \alpha_i + \beta_k$$

эквивалентна модели

$$E(Z_{ik}) = \exp(\mu) \cdot \exp(\alpha_i) \cdot \exp(\beta_k),$$

где нетто-премия мультипликативно зависит от параметра каждого фактора. Основное достоинство мультипликативной структуры тарифов — органичность тарифной сетки: во всех тарифных группах с одинаковым значением фиксированного фактора влияние этого фактора описывается одинаковой процентной скидкой или надбавкой к основной премии. В отличие от логарифмической функции связи, обратная функция связи

$$(E(Z_{ik}))^{-1} = \mu + \alpha_i + \beta_k$$

не приводит к мультипликативной структуре тарифа.

3. Если совокупный убыток каждого отдельного риска i -й тарифной группы подчиняется гамма-распределению с математическим ожиданием $\mu_i = \alpha / \beta_i$ и дисперсией μ_i^2 / α , то групповой убыток S_i в случае независимых рисков обладает гамма-распределением с математическим ожиданием $v_i \mu_i$ и дисперсией $v_i \mu_i^2 / \alpha$, где v_i — объем группы. Тогда нормированный убыток $Z_i = S_i / v_i$ i -й тарифной группы описывается гамма-распределением с математическим ожиданием μ_i и дисперсией $\mu_i^2 / (v_i \alpha)$. Коэффициент вариации $Vko(Z_i) = (v_i \alpha)^{-1/2}$ оценивается посредством замены параметра α соответствующей оценкой.

Величина $\hat{\mu}_i$ как оценка максимального правдоподобия асимптотически распределена нормально с математическим ожиданием $\ln(\mu_i)$ и дисперсией σ_i^2 . Отсюда $\hat{\mu}_i = \exp(\hat{\mu}_i)$ распределена логнормально с коэффициентом ва-

риации $Vko(\hat{\mu}_i) = \sqrt{\exp(\sigma_i^2) - 1}$ ($\approx \sigma_i$ при $\sigma_i \ll 1$). Для оценки $Vko(\hat{\mu}_i)$ тоже достаточно подставить в указанное выражение оценку параметра σ_i .

№3

1. Кластер-методы применяются для сокращения числа значений номинально шкалированного фактора (марка автомобиля, род предприятия, почтовый индекс, географический регион и т. д.). За счет объединения схожих значений фактора в классы увеличиваются объемы опорных статистических выборок.

Индексы i, k обозначают номера двух любых (классов) значений фактора, v_i, v_k — соответственно, объемы i -го и k -го классов (число полисо-лет или совокупная страховая сумма), $\hat{\mu}_i, \hat{\mu}_k$ — оценки математического ожидания убытка на один полисо-год или ставки убытка.

По методу Уорда сначала вычисляются расстояния d_{ik} между всеми значениями фактора. Затем объединяются два значения с наименьшим расстоянием d_{ik} и рассчитываются расстояния от всех остальных значений до вновь образовавшегося класса. Далее снова объединяются два значения (или класса) с наименьшим расстоянием d_{ik} и т. д. до образования желаемого числа классов (агломеративный подход).

2. Представление d_{ik} в виде $d_{ik} = (\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_k)^2 / (v_i^{-1} + v_k^{-1})$ позволяет понять, что при одинаковой разнице оценок $\hat{\mu}_i, \hat{\mu}_k$ расстояние d_{ik} между классами большого объема больше, чем между классами малого объема. Это логично: при малых объемах классов оценки $\hat{\mu}_i, \hat{\mu}_k$ менее точны и, в силу случайности, могут сильнее отличаться, чем при больших объемах, даже если истинные математические ожидания μ_i, μ_k в обоих случаях одинаково удалены друг от друга. Таким образом, множитель $1 / (v_i^{-1} + v_k^{-1})$ приглушает влияние выбросов в мелких группах. Если для дисперсии нормированного убытка Z_i предположить модель $Var(Z_i) = \sigma^2 / v_i$ с одинаковым для всех классов параметром σ^2 , то знаменатель $v_i^{-1} + v_k^{-1}$ с точностью до множителя σ^2 составит $Var(\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_k)$, и все d_{ik} при нулевой гипотезе $\mu_i = \mu_k$ будут в приближении одинаково распределены.
3. Расстояние c_{ik} следует предпочесть расстоянию d_{ik} , когда различие дисперсий нормированных убытков (и, следовательно, $\hat{\mu}_i, \hat{\mu}_k$) по классам обусловлено не только различием объемов, но и различием параметра σ^2 (то есть $Var(Z_i) = \sigma_i^2 / v_i$). В этом случае расстояния c_{ik} имеют примерно одинаковое распределение, чего уже нельзя сказать о d_{ik} . Мера c_{ik} препятствует объединению классов с малым рассеянием нормированных убытков, несмотря на малое расстояние между оценками $\hat{\mu}_i, \hat{\mu}_k$, и способствует объединению классов с сильно различающимися значениями $\hat{\mu}_i, \hat{\mu}_k$ при большом рассеянии нормированных убытков.
4. При заданной модели распределения (например, $Z_i \sim Normal(\mu_i, \sigma^2 / v_i)$ с известным σ^2) вычисляется распределение величины d_{ik} при нулевой гипотезе $\mu_i = \mu_k$. Тогда d_{ik} представляет собой статистику критерия для проверки

гипотезы одинаковых математических ожиданий. Процесс кластеризации прекращается, если при заданной границе значимости (например, 95%) нулевая гипотеза отвергается для всех проверяемых пар классов.

№4

1. Из всех потенциальных (дополнительных) тарифных факторов выбирается фактор, наиболее явно отвергающий гипотезу равенства математических ожиданий нормированных убытков во всех классах. Сравнение производится одновременно по всем уже существующим M ячейкам, то есть проверяется гипотеза равенства векторов

$$(E(Z_{1k}), E(Z_{2k}), \dots, E(Z_{Mk})), 1 \leq k \leq K,$$

где K — количество классов значений рассматриваемого фактора, а Z_{ik} — нормированный убыток в ячейке (i, k) . Проверку гипотезы можно осуществить, например, с помощью метода отношения правдоподобий.

Для этого необходимы (очищенные от инфляции) значения нормированного убытка за несколько лет и соответствующий каждому году объем (число полисо-лет или совокупная страховая сумма) по каждой из образовавшихся ячеек. При наличии данных только за один год следует считать параметр формы известным или же принять перекрестную параметризацию.

2.a) Статистика

$$T = \sum_{k=1}^K v_k (z_k - \hat{\mu})^2 / \hat{\mu} = \sum_{k=1}^K \frac{(n_k - v_k \hat{\mu})^2}{v_k \hat{\mu}},$$

где $n_k = v_k z_k$ — число убытков в k -м классе значений фактора, представляет собой статистику критерия согласия χ^2 (с $K - 1$ степенями свободы) и служит для проверки гипотезы H_0 равенства средней частоты убытков $E(n_k / v_k) = \mu$ во всех классах значений фактора (при справедливости нулевой гипотезы вектор (n_1, n_2, \dots, n_K) распределен полиномиально с вероятностями $p_k = v_k / v_+$, $1 \leq k \leq K$, при этом по k -му классу ожидается $p_k n_+ = v_k \hat{\mu}$ убытков).

Если гипотеза H_0 не отвергается — значит, различие классов обусловлено только случайностью и рассматриваемый фактор не приемлем в качестве тарифного фактора. И наоборот, фактор тем скорее подходит на роль тарифного фактора, чем более явно отвергается H_0 , то есть чем ниже вероятность $P(\chi_{K-1}^2 > T)$ превышения хи-квадрат-распределенной случайной величиной с $K - 1$ степенями свободы наблюдаемого значения T . Ввиду различия числа классов у разных факторов наиболее значимым необязательно будет фактор с наибольшим значением T

- б) Было бы неправильно принять фактор, оказавшийся в пункте а) вторым по значимости, — он может сильно коррелировать с первым фактором,

и в таком случае эффективность тарифа с двумя факторами вряд ли будет выше эффективности тарифа с одним фактором. Вторым выбирается фактор, обеспечивающий наибольшую значимость обобщенной статистики

$$T_2 = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L v_{kl} (z_{kl} - \hat{\mu}_k)^2 / \hat{\mu}_k, \quad \text{где } \hat{\mu}_k = \sum_l v_{kl} z_{kl} / \sum_l v_{kl},$$

то есть наименьшее значение $P(\chi_{K(L-1)}^2 > T_2)$. С помощью T_2 проверяется гипотеза равенства частоты убытков μ_k во всех классах значений второго фактора одновременно по всем K ячейкам первого тарифного фактора.

№5

- 1.a) Различие совокупных нормированных убытков светлых и темных автомобилей может быть обусловлено только различием распределений объемов портфелей светлых и темных автомобилей по остальным факторам риска, а вовсе не различием потенциала убытков светлых и темных автомобилей.

б)

Цвет автомобиля		Государственные служащие	Остальные	Итого
Светлый	Убыток на один полисо-год	500	600	580
	Число полисо-лет	1 000	4 000	5 000
	Суммарная выплата	0,5 млн	2,4 млн	2,9 млн
Темный	Убыток на один полисо-год	500	600	520
	Число полисо-лет	8 000	2 000	10 000
	Суммарная выплата	4,0 млн	1,2 млн	5,2 млн

Несмотря на одинаковый нормированный убыток светлых и темных автомобилей в классах «Государственные служащие» и «Остальные», совокупный нормированный убыток светлых автомобилей заметно выше. Это объясняется тем, что в классе светлых автомобилей на более убыточных «Остальных» приходится больше полисо-лет. Если бы у темных автомобилей распределение числа полисо-лет по классам «Государственные служащие» и «Остальные» было бы таким же (2000 : 8000 вместо 8000 : 2000), то не наблюдалось бы существенного различия совокупных нормированных убытков светлых и темных автомобилей.

- в) Пусть M — число тарифных ячеек в каждом из двух классов цветов автомобилей, $v_{c,m}$ и $v_{t,m}$ — объемы (число полисо-лет), а $S_{c,m}$ и $S_{t,m}$ — суммарные выплаты m -х ячеек, соответственно, светлых и темных автомобилей, $1 \leq m \leq M$. Тогда в классе светлых автомобилей нормированный убыток m -й ячейки равен $Z_{c,m} = S_{c,m} / v_{c,m}$, в классе темных $Z_{t,m} = S_{t,m} / v_{t,m}$, а сово-

купный наблюдаемый нормированный убыток светлых (темных) автомобилей находится по формуле

$$Z_i = \sum_{m=1}^M v_{i,m} Z_{i,m} / v_{i+}, \quad \text{где } v_{i+} = \sum_{m=1}^M v_{i,m}, \quad i \in \{c, t\}.$$

Чтобы устранить влияние инверсного распределения объемов светлых и темных автомобилей по классам «Государственные служащие» и «Остальные», можно заменить объемы $v_{i,m}$ светлых и темных автомобилей соответствующим совокупным объемом v_{+m} и сравнивать не нормированные убытки Z_i , а модифицированные величины

$$\tilde{Z}_i = \sum_{m=1}^M v_{+m} Z_{i,m} / v_{++}, \quad \text{где } v_{++} = \sum_{m=1}^M v_{+m}, \quad i \in \{c, t\}.$$

(Этого решения достаточно для получения максимального числа баллов.) В приведенном примере модифицированные совокупные нормированные убытки светлых и темных автомобилей оказываются равны: $\tilde{Z}_c = \tilde{Z}_t$. Рассмотренный способ расчета совокупных нормированных убытков весьма чувствителен к выбросам среди значений $Z_{i,m}$. Поэтому лучше сначала вычислить совокупные нормированные убытки при сохранении исходных объемов, заменив наблюдаемый нормированный убыток ячейки (i, m) средним нормированным убытком всех автомобилей в классе m :

$$Z_i^{coo} = \sum_{m=1}^M v_{i,m} Z_{i,m} / v_{i+}, \quad \text{где } Z_{i,m} = \sum_i v_{i,m} Z_{i,m} / v_{+m}.$$

Тогда отношение Z_i / Z_i^{coo} может считаться очищенным от влияния распределения объема по ячейкам $m = 1, \dots, M$ и служить наглядной характеристикой потенциала убытков i -го класса исследуемого фактора (цвет автомобиля) — этот подход предложен Немецким союзом страховщиков и называется «индивидуальное перевзвешивание». Величину Z_i^{coo} можно также интерпретировать как априорный ожидаемый нормированный убыток i -го класса цветов. Окончательное решение о дифференциации тарифов по цвету автомобиля принимается только после проверки значимости фактора «цвет».

Замечание (не влияет на оценку): взвешенная по v_{i+} сумма индексов Z_i / Z_i^{coo} не равна 1, поэтому при дальнейшем использовании индексов (например, в кластер-анализе) в качестве объема следует рассматривать величину $\tilde{v}_i = v_{i+} Z_i^{coo}$.

2.а) В принятой модели оценка математического ожидания i -й тарифной группы имеет вид

$$\hat{\mu}_i = \exp\left(\sum_{j=1}^J x_{ij} \hat{\beta}_j\right),$$

где $\hat{\beta}_j$ — оценки параметров, а x_{ij} — индикаторы классов значений факторов. Без ограничения общности β_1 можно считать параметром стандарт-

ного класса, содержащего мужской пол (x_{i1} всегда равен 1), а β_2 — параметром класса «женский» (x_{i2} равен 1 в классе «женский» и 0 в классе «мужской»). Тогда у i -й и k -й тарифных групп, принадлежащих одним и тем же классам по всем факторам, кроме «пола» (i -я тарифная группа содержит лиц женского пола, а k -я — мужского), линейные предикторы $\sum x_{ij} \beta_j$ и $\sum x_{kj} \beta_j$ будут совпадать во всех слагаемых за исключением второго. Следовательно, $\sum x_{ij} \beta_j - \sum x_{kj} \beta_j = \beta_2$, $\hat{\mu}_i / \hat{\mu}_k = \exp(\hat{\beta}_2) = \exp(-0,2) = 0,82$, и скидка составит $r = 1 - \exp(\beta_2) = 18\%$.

б) Для простоты далее вместо β_2 будем писать β . Согласно условиям задачи, оценка $\hat{\beta}$ удовлетворяет равенству $E(\hat{\beta} - \beta)^2 = (0,05)^2$. Оценкой скидки служит величина $r(\hat{\beta}) = 1 - \exp(\hat{\beta})$. Требуется вычислить $E(r(\hat{\beta}) - r(\beta))^2$ и извлечь корень из этой величины. С помощью формулы Тейлора находим

$$\begin{aligned} r(\hat{\beta}) - r(\beta) &\approx r'(\beta)(\hat{\beta} - \beta), \\ (r(\hat{\beta}) - r(\beta))^2 &\approx (r'(\beta))^2(\hat{\beta} - \beta)^2 \\ E(r(\hat{\beta}) - r(\beta))^2 &\approx (r'(\beta))^2 E(\hat{\beta} - \beta)^2 \approx (r'(\hat{\beta}))^2 E(\hat{\beta} - \beta)^2 = \\ &= (-\exp(\hat{\beta}))^2 (0,05)^2 = (0,82)^2 (0,05)^2 = (0,041)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, стандартная ошибка оценки $r(\hat{\beta}) = 0,18$ равна 0,041. Вместо разложения в ряд Тейлора можно напрямую применить формулу $\text{Var}(r(\hat{\beta})) \approx (r'(\hat{\beta}))^2 \text{Var}(\hat{\beta})$, учитывая свойство инвариантности оценок максимального правдоподобия.

№6

- Во-первых, за счет агрегирования статистики нескольких ячеек увеличивается надежность статистической базы — особенно в ячейках малого объема v_{ik} . Во-вторых, перекрестная параметризация позволяет сократить число оцениваемых параметров.
- Мультипликативная модель перекрестной параметризации имеет вид $E(N_{ik}) = v_{ik} x_i y_k$ с неизвестными параметрами x_i, y_k . При пуассоновском числе убытков функция правдоподобия равна

$$\begin{aligned} L &= \prod_{i,k} P(N_{ik} = n_{ik}) = \prod_{i,k} \left(\exp(-v_{ik} x_i y_k) \cdot (v_{ik} x_i y_k)^{n_{ik}} / n_{ik}! \right), \\ \ln(L) &= \sum_{i,k} (-v_{ik} x_i y_k + n_{ik} \ln(v_{ik} x_i y_k) - \ln(n_{ik}!)). \end{aligned}$$

Для вычисления точек максимума функции правдоподобия приравняем нулю ее частные производные:

$$0 = \frac{\partial \ln(L)}{\partial x_i} = \sum_k (-v_{ik} y_k + n_{ik} / x_i), \quad 1 \leq i \leq I,$$

$$0 = \frac{\partial \ln(L)}{\partial y_k} = \sum_i (-v_{ik} x_i + n_{ik} / y_k), \quad 1 \leq k \leq K.$$

Отсюда непосредственно следуют уравнения правдоподобия для оценок \hat{x}_i, \hat{y}_k (совпадающие с условиями маргинальных сумм):

$$\sum_k v_{ik} \hat{x}_i \hat{y}_k = \sum_k n_{ik}, \quad 1 \leq i \leq I,$$

$$\sum_i v_{ik} \hat{x}_i \hat{y}_k = \sum_i n_{ik}, \quad 1 \leq k \leq K,$$

или

$$\hat{x}_i = \sum_k n_{ik} / \sum_k v_{ik} \hat{y}_k,$$

$$\hat{y}_k = \sum_i n_{ik} / \sum_i v_{ik} \hat{x}_i.$$

- Уравнения правдоподобия можно решить методом последовательных приближений. Сначала в уравнениях для \hat{x}_i все \hat{y}_k полагаются равными 1; вычисленные таким образом значения \hat{x}_i подставляются в уравнения для \hat{y}_k , из которых рассчитываются новые \hat{y}_k . Последние снова подставляются в уравнения для \hat{x}_i и т. д. Итерация быстро сходится к искомым оценкам параметров. Они определяются лишь с точностью до общего множителя, но всегда приводят к одним и тем же оценкам частот убытков $\hat{x}_i \hat{y}_k$.
- Для проверки гипотезы согласия может служить классический критерий согласия хи-квадрат со статистикой

$$T = \sum_{i,k} \frac{(n_{ik} - v_{ik} \hat{x}_i \hat{y}_k)^2}{v_{ik} \hat{x}_i \hat{y}_k},$$

имеющей при справедливости рассматриваемой модели (нулевая гипотеза) распределение хи-квадрат с $IK - (I + K - 1) = (I - 1)(K - 1)$ степенями свободы. Качество подгонки модели признается приемлемым, если значение T оказывается ниже, например, 95%-ной квантили названного распределения хи-квадрат.

- Отклонение критерием гипотезы согласия указывает на ошибочность, по крайней мере, одного из принятых предположений: распределение Пуассона, независимость наблюдений, мультипликативная перекрестная структура математических ожиданий $E(N_{ik})$.

№7

- По условиям задачи совокупный убыток R одного годового полиса имеет гамма-распределение с функцией $G(\mu, \alpha)$, и $Var(R) = \mu^2 / \alpha$. В принятых обозначениях параметр формы гамма-распределения равен отношению квадрата математического ожидания к дисперсии. Для годового совокупного убытка S группы из n годовых полисов с независимыми одинаково гамма-распределенными годовыми убытками R справедливо: $E(S) = n\mu$ и $Var(S) = n\mu^2 / \alpha$. Параметр формы распределения величины S составляет

$(n\mu)^2 / (n\mu^2 / \alpha) = n\alpha$. Таким образом, S имеет гамма-распределение $G(n\mu, n\alpha)$. Убыток на один полисо-год $Z = S / n$ удовлетворяет условиям $E(Z) = \mu$ и $Var(Z) = \mu^2 / (n\alpha)$. Следовательно, параметр формы убытка на один полисо-год равен $n\alpha$, а распределение задается функцией $G(\mu, n\alpha)$.

- В силу равенства $x_i y_k = (x_i c)(y_k / c)$, параметры x_i, y_k определяются лишь с точностью до константы c . Это позволяет задать один из параметров (например, x_1) произвольно или поставить дополнительное условие $y_1 + \dots + y_K = 1$, или, с помощью равенства $x_i y_k = (x_i y_k)(x_i / x_i)(y_k / y_k)$, перейти к параметризации с $I + K - 1$ параметрами $x_1 / x_I, \dots, x_{I-1} / x_I, y_1 / y_K, \dots, y_{K-1} / y_K, x_I y_K$ и т. д.
- Для преобразования мультипликативной модельной формы в линейную необходимо сначала перейти к однозначной параметризации $E(Z_{ik}) = (x_i y_k)(x_i / x_I)(y_k / y_K)$, а затем осуществить логарифмирование

$$\ln(E(Z_{ik})) = \ln(x_i y_k) + \ln(x_i / x_I) + \ln(y_k / y_K).$$

Обозначив $g(x) = \ln(x)$, $J = I + K - 1$, $\beta_1 = \ln(x_I y_K)$, $\beta_j = \ln(x_{j-1} / x_I)$ при $2 \leq j \leq I$, $\beta_j = \ln(y_{j-I} / y_K)$ при $I + 1 \leq j \leq I + K - 1$, а также $x_j^{(i,k)} = 1$ при $j = 1$ или $j = i + 1$, или $j = k + I$ и $x_j^{(i,k)} = 0$ иначе, получаем обычную форму обобщенной линейной модели.

- Дисперсия выражается через дисперсионную функцию V по формуле $Var(Z_{ik}) = \phi V(\mu) / v_{ik}$, где ϕ — неизвестный параметр. Гамма-распределению соответствует дисперсионная функция $V(\mu) = \mu^2$. Доказательство содержится в п. 1, где $\phi = 1/\alpha$.
- К построенной в п. 3 обобщенной линейной модели с гамма-распределенной случайной компонентой наилучшим образом подходит метод (iv). Для обоснования перепишем (iv) в виде

$$\frac{1}{\alpha} \sum_{i,k} \frac{(Z_{ik} - x_i y_k)^2}{(x_i y_k)^2 / (v_{ik} \alpha)} \rightarrow \min.$$

Когда параметры модели известны, каждое слагаемое в левой части представляет собой квадрат случайной величины с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1 (согласно п. 3). Следовательно, в левой части стоит сумма пирсоновских квадратичных невязок, соответствующих обобщенной линейной модели с гамма-распределенной случайной компонентой. Если Z_{ik} в приближении распределены нормально (что может быть справедливо для ячеек большого объема, где $v_{ik} \alpha > 10$), то каждое слагаемое как квадрат стандартной гауссовской случайной величины подчинено распределению хи-квадрат с 1 степенью свободы, а сумма — распределению хи-квадрат с $I + K$ степенями свободы. При наличии неизвестных параметров теряется столько же степеней свободы, сколько параметров оценивается, но сумма сохраняет распределение хи-квадрат. Таким образом, метод наименьших квадратов (iv) равносильен методу минимума хи-квадрат. Последний, как правило, асимптотически эквивалентен методу максимума правдоподобия, традиционно применяемому для оценивания параметров обобщенной линейной модели.

Задачи по теме «Резервирование»

№1

1. Сформулируйте ключевые предположения метода, основанного на независимости нормированных приращений убытка от года события. (5 баллов)
2. Какая формула оценки \hat{R}_i резерва R_i убытков i -го года события соответствует этому методу? (5 баллов)
3. Выведите оценку средней квадратичной ошибки $E(\hat{R}_i - R_i)^2$ для оценки \hat{R}_i из п. 2. (15 баллов)
4. С какой целью может применяться оценка, полученная в п. 3? (5 баллов)

№2

1. Какая стохастическая модель суммарного убытка C_{ik} i -го года события на конец k -го года развития лежит в основе метода цепной лестницы? Докажите в рамках этой модели некоррелированность соседних множителей развития $C_{ik} / C_{i,k-1}$ и $C_{i,k+1} / C_{ik}$ ($C_{i,k-1} > 0$, $C_{ik} > 0$). (12 баллов)
2. Применение доверительной модели Бюльмана—Штрауба к годам событий в треугольнике развития приращений оплаченных убытков ведет к доверительной оценке резерва

$$\hat{R}_i(c_i) = (1 - w_i) (c_i C_{i,n+1-i} / w_i + (1 - c_i) v_i q_i),$$

где

v_i — объем i -го года события,

$C_{i,n+1-i}$ — текущий аккумулированный убыток i -го года события,

q_i — априорный ожидаемый относительный конечный убыток $E(C_{in} / v_i)$ i -го года события,

w_i — априорная ожидаемая доля $C_{i,n+1-i} / C_{in}$ конечной суммы убытков i -го года события, оплаченная в течение $n + 1 - i$ лет развития,

c_i — доверительный множитель.

При каких трех значениях c_i формула оценки $\hat{R}_i(c_i)$ совпадает с известными методами резервирования? Назовите эти методы и обсудите условия применения каждого из трех значений c_i . (18 баллов)

№3

1. Какая формула оценки неизвестных аккумулированных убытков C_{ik} , $k > n + 1 - i$ (i — год события, k — развития, $(n + 1)$ — последний календарный год) соответствует методу цепной лестницы? (4 балла)

2. На какой стохастической модели основан метод цепной лестницы? (4 балла)
3. Выпишите формулы стандартизованных невязок r_{ik} , $i + k \leq n + 1$, для модели из п. 2. (7 баллов)
4. Как с помощью стандартизованных невязок можно узнать о наличии эффектов календарных лет в треугольнике развития? (5 баллов)
5. Какое из предположений модели п. 2 нарушается эффектами календарных лет и почему? (5 баллов)
6. Почему в п. 4 нельзя воспользоваться обычными нестандартизованными невязками? (5 баллов)

№4

Для моделирования случайных величин

$$Z_{ik} := \frac{S_{i,k+1}}{C_{ik}}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

при условии данных $D_{ik} := \{C_{i1}, C_{i2}, \dots, C_{ik}\}$, где C_{ik} — суммарный убыток i -го года события спустя k лет развития и $S_{ik} := C_{ik} - C_{i,k-1}$, $1 \leq i, k \leq n$, применяется гамма-распределение с математическим ожиданием μ_k и параметром формы $C_{ik}\alpha_k$.

1. Правомерно ли такое предложение в отношении вида и параметров распределения величины Z_{ik} ? Обоснуйте ответ. (8 баллов)
2. Постройте оценку максимального правдоподобия для μ_k на основании имеющихся в распоряжении наблюдений D_{ik} . Какое дополнительное предположение для этого требуется? Выявите сходство полученной формулы с одним из известных методов резервирования. (9 баллов)
3. Выведите формулу (условного) математического ожидания $E(S_{i,k+2} | D_{ik})$ приращения убытка в $(k + 2)$ -м году развития. (8 баллов)
4. Какой интеграл необходимо вычислить, чтобы получить полное распределение величины $S_{i,k+2}$ при условии данных D_{ik} (параметры считать известными)? Для упрощения записи разрешается применять обозначения $f(x | \mu, \alpha)$ и $F(x | \mu, \alpha)$ соответственно для плотности и функции гамма-распределения с математическим ожиданием μ и параметром формы α . (10 баллов)

№5

Треугольник развития составлен из кумулятивных убытков C_{ik} , $i + k \leq n + 1$ (i — год события, k — год развития).

1. Как определяется стандартная ошибка $s.e.(\hat{C}_{in})$ оценки конечного убытка \hat{C}_{in} (независимо от метода оценивания) и из каких двух компонент она

состоит? Приведите формулы и объясните роль каждой компоненты. (10 баллов)

2. В недавно появившейся публикации предлагается рассчитывать волатильность (Volatility) оценки $\hat{C}_{n+1-k,n} = C_{n+1-k,k} \cdot f_k \cdot \dots \cdot f_{n-1}$ конечного убытка $(n+1-k)$ -го года события с k известными состояниями развития (метод цепной лестницы) по формуле

$$Vol(\hat{C}_{n+1-k,n}) := \sum_{j=1}^{n-k} \frac{C_{jk}}{\sum_{i=1}^{n-k} C_{ik}} \left(\hat{C}_{n+1-k,n}^{(j)} - \hat{C}_{n+1-k,n} \right)^2 = C_{n+1-k,k}^2 \sum_{j=1}^{n-k} \frac{C_{jk}}{\sum_{i=1}^{n-k} C_{ik}} (F_{jk} - F_j)^2,$$

где

$$\hat{C}_{n+1-k,n}^{(j)} := C_{n+1-k,k} \cdot F_{jk},$$

$$F_{jk} := \frac{C_{j,k+1}}{C_{jk}} \cdot \frac{C_{j,k+2}}{C_{j,k+1}} \cdot \dots \cdot \frac{C_{j,n+1-j}}{C_{j,n-j}} \cdot \hat{f}_{n+1-j} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{n-1},$$

со следующей аргументацией. Величина F_{jk} представляет собой произведение всех известных индивидуальных множителей развития $C_{j,m+1} / C_{jm}$ j -го года события начиная с k -го года развития, дополненное обычными множителями развития цепной лестницы \hat{f}_m для еще не известных лет развития. Взвешенное среднее величин F_{jk} равно произведению множителей развития цепной лестницы:

$$\sum_{j=1}^{n-k} \frac{C_{jk}}{\sum_{i=1}^{n-k} C_{ik}} \cdot F_{jk} = \hat{f}_k \cdot \hat{f}_{k+1} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{n-1} =: F_k.$$

Наряду с оценкой по методу цепной лестницы $\hat{C}_{n+1-k,n} := C_{n+1-k,k} \cdot F_k$ оценки конечного убытка $C_{n+1-k,n}$ года события $n-k+1$ могут служить $n-k$ произведений $\hat{C}_{n+1-k,n}^{(j)}$ текущего убытка $C_{n+1-k,k}$ с каждой из величин F_{jk} , $1 \leq j \leq n-k$. Величина $Vol(\hat{C}_{n+1-k,n})$ задает рассеяние этих оценок вокруг оценки по методу цепной лестницы.

Сравните $Vol(\hat{C}_{n+1-k,n})$ со стандартной ошибкой $(s.e.(\hat{C}_{n+1-k,n}))^2$. Что оценивает функция Vol ? Соответствует ли Vol своему предназначению? Можно ли применять Vol вместо $s.e.$? (Указание: рассмотрите частный случай $Vol(\hat{C}_{n+1-k,k+1})$.) (20 баллов)

№6

1. Треугольник развития аккумулированных убытков в непропорциональном перестраховании содержит следующие значения в первых двух годах развития.

Год развития	Год события							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	120	0	50	150	0	200	80	100
2	400	250	150	400	350	550	300	X

Для оценки аккумулированного убытка X 8-го года события на 2-й год развития применяется метод цепной лестницы. Начинаящий актуарий получает в качестве оценки для X значение

$$\frac{400 + 250 + 150 + 400 + 350 + 550 + 300}{120 + 0 + 50 + 150 + 0 + 200 + 80} \cdot 100 = 400.$$

По мнению опытного актуария, такой способ оценивания ведет к завышению математического ожидания величины X и не отвечает принципу цепной лестницы. Каковы его аргументы? Какую оценку он предложит? (6 баллов)

2. C_{ik} и $S_{ik} = C_{ik} - C_{i,k-1}$ обозначают, соответственно, аккумулированный убыток и приращение убытка i -го события в k -м году развития. Все значения C_{ik} строго положительны.

а) Докажите эквивалентность следующих двух классов моделей:

- (А) Существуют параметры f_1, f_2, \dots, f_{n-1} , такие, что $f_k = E(C_{i,k+1}) / E(C_{ik})$ при $k = 1, \dots, n-1$.
 (В) Существуют параметры $x_i > 0$ и y_k , $1 \leq i, k \leq n$, такие, что $y_1 + \dots + y_n = 1$ и $E(S_{ik}) = x_i y_k$. (12 баллов)

б) Какие из следующих утверждений верны?

- i. Класс моделей (А) содержит модель цепной лестницы.
 ii. Класс моделей (А) эквивалентен модели цепной лестницы.
 iii. Класс моделей (А) является частным случаем модели цепной лестницы.
 iv. Ни одно из утверждений (i)–(iii) неверно.

Обоснуйте ответ. (5 баллов)

в) Как получить оценки параметров x_i и y_k модели (В) без привлечения параметров f_k ? Сформулируйте требуемые для этого дополнительные предположения. (5 баллов)

г) В рамках модели (В) постройте с помощью оценок \hat{x}_i, \hat{y}_k параметров x_i, y_k оценки резерва R_i и конечного убытка C_{in} i -го года события. (2 балла)

№7

C_{ik} и $S_{ik} = C_{ik} - C_{i,k-1}$ обозначают соответственно аккумулированный уровень и приращение выплат по убыткам i -го события в k -м году развития, $i \geq 1$, $k \leq n$. Для математического ожидания величины S_{ik} принята модель $E(S_{ik}) = v_i m_k$ с известными v_i и неизвестными m_k .

1. Какие три статистических показателя могут применяться на практике в качестве v_i ? (3 балла)
2. Задайте три различные несмещенные оценки для m_k на основании наблюдений S_{ik} k -го года развития (при одинаковой мере объема v_i). (4 балла)
3. Как при фиксированном k выбрать наилучшую из трех построенных в п. 2 оценок (предполагается, что треугольник развития достаточно велик)? (8 баллов)
4. Укажите статистически обоснованный способ сравнения качеств подгонки к данным модели $E(S_{ik}) = v_i m_k$ и модели цепной лестницы при фиксированном k (и большом треугольнике развития). (8 баллов)
5. В рамках модели $E(S_{ik}) = v_i m_k$ постройте несмещенную оценку конечного относительного убытка C_{in} / v_i . (2 балла)
6. При расчете тарифов по видам страхования с долгим развитием убытка тоже используется модель $E(S_{ik}) = v_i m_k$. На ее основе строятся оценки относительных конечных убытков \hat{C}_{in} / v_i , $i = 1, \dots, n$, и их среднего значения $\hat{q} = \sum_{i=1}^n \hat{C}_{in} / \sum_{i=1}^n v_i$. Для определения рисковой надбавки при этом требуется оценка a^2 квадрата среднего отклонения фактического относительного убытка $C_{n+1,n} / v_{n+1}$ следующего года события от \hat{q} . Объясните, почему расчет значения a^2 по формуле

$$a^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \frac{v_i}{v_{n+1}} \left(\frac{\hat{C}_{in}}{v_i} - \hat{q} \right)^2$$

ведет к недооценке фактического среднего отклонения. (5 баллов)

РЕШЕНИЕ

№1

1. Метод на основе независимости нормированных приращений убытка от года события опирается на следующие предположения:
 - приращения S_{ik} независимы по всем годам событий $i \geq 1$ и всем годам развития $k \leq n$;
 - для каждого года события известен объем v_i , и при всех i, k справедливы равенства $E(S_{ik} / v_i) = m_k$ и $Var(S_{ik} / v_i) = s_k^2 / v_i$.
2. В силу равенства $R_i = S_{i,n+2-i} + \dots + S_{in}$, резерв R_i оценивается величиной

$$\hat{R}_i = S_{i,n+2-i} + \dots + S_{in} = v_i (\hat{m}_{n+2-i} + \dots + \hat{m}_n),$$

где $\hat{m}_k = \sum_j S_{jk} / \sum_j v_j$ (суммирование ведется по j от 1 до $n+1-k$).

3. Средняя квадратичная ошибка $E(\hat{R}_i - R_i)^2$ выводится из следующих формул:

$$E(\hat{R}_i - R_i)^2 = Var(\hat{R}_i - R_i) = Var(\hat{R}_i) + Var(R_i),$$

$$Var(R_i) = \sum_{k=n+2-i}^n Var(S_{ik}) = \sum_{k=n+2-i}^n v_i s_k^2,$$

$$Var(\hat{R}_i) = v_i^2 Var\left(\sum_{k=n+2-i}^n \hat{m}_k\right) = v_i^2 \sum_{k=n+2-i}^n Var(\hat{m}_k),$$

$$Var(\hat{m}_k) = \sum_{j=1}^{n+1-k} Var(S_{jk}) / \left(\sum_{j=1}^{n+1-k} v_j\right)^2$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1-k} v_j s_k^2 / \left(\sum_{j=1}^{n+1-k} v_j\right)^2 = s_k^2 / \sum_{j=1}^{n+1-k} v_j.$$

Для получения оценки величины $E(\hat{R}_i - R_i)^2$ необходимо заменить неизвестные параметры s_k^2 оценками \hat{s}_k^2 :

$$\hat{s}_k^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{j=1}^{n+1-k} \left(\frac{S_{jk}}{v_j} - \hat{m}_k \right)^2 \quad \text{при } k < n \text{ и } s_n = \min(s_{n-2}, s_{n-1}).$$

4. Оценку средней квадратичной ошибки можно использовать для построения приближенного доверительного интервала величины R_i , предположив для R_i нормальное или логнормальное распределение с математическим ожиданием \hat{R}_i и дисперсией, равной оценке величины $E(\hat{R}_i - R_i)^2$. С помощью доверительного интервала проверяется значимость отклонения других оценок величины R_i от заданной в п. 2 оценки \hat{R}_i .

№2

1. Метод цепной лестницы основан на предположении

$$E(C_{i,k+1} | C_{i1}, C_{i2}, \dots, C_{ik}) = C_{ik} f_k, \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

где параметры f_1, \dots, f_{n-1} неизвестны. При $C_{ik} > 0$ из этого равенства следует

$$E(C_{i,k+1} / C_{ik} | C_{i1}, \dots, C_{ik}) = f_k.$$

Тогда $E(C_{i,k+1} / C_{ik}) = f_k$ и аналогично $E(C_{ik} / C_{i,k-1}) = f_{k-1}$. Наконец,

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{C_{ik}}{C_{i,k-1}} \cdot \frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}}\right) &= E\left(E\left(\frac{C_{ik}}{C_{i,k-1}} \cdot \frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}} \mid C_{i1}, \dots, C_{ik}\right)\right) = \\
&= E\left(\frac{C_{ik}}{C_{i,k-1}} \cdot E\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}} \mid C_{i1}, \dots, C_{ik}\right)\right) = \\
&= E\left(\frac{C_{ik}}{C_{i,k-1}} \cdot f_k\right) = \\
&= E\left(\frac{C_{ik}}{C_{i,k-1}}\right) \cdot E\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}}\right),
\end{aligned}$$

что представляет собой условие некоррелированности.

2. Значения $c_i = 0$, $c_i = 1$ и $c_i = w_i$ приводят к трем известным методам резервирования:

$\hat{R}_i(0) = (1 - w_i)v_i q_i$ — метод Борнхюеттера—Фергюсона,

$\hat{R}_i(1) = (1 - w_i)C_{i,n+1-i} / w_i = C_{i,n+1-i} / w_i - C_{i,n+1-i}$ — метод цепной лестницы,

где $1 / w_i = \hat{f}_{n+1-i} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{n-1}$ — произведение оценок множителей развития,

$\hat{R}_i(w_i) = (1 - w_i)(C_{i,n+1-i} + (1 - w_i)v_i q_i)$ — метод Бенкандера.

Оценка $\hat{R}_i(c_i)$ комбинирует две оценки $C_{i,n+1-i} / w_i$ и $v_i q_i$ конечного убытка i -го года события. Первая оценка определяется только текущим состоянием и основана на предположении, что текущий аккумулированный убыток составляет долю w_i в конечном убытке. Во второй используется исключительно априорная информация об i -м годе события и полностью игнорируется текущее состояние. Эти абсолютно разные оценки конечного убытка объединены во взвешенное среднее с помощью доверительного множителя c_i . Множитель $1 - w_i$ лишь обеспечивает переход от оценки конечного убытка к оценке резерва.

При $c_i = 0$ текущее состояние $C_{i,n+1-i}$ не принимается во внимание. Это разумно, когда оно дает искаженное представление о дальнейшем развитии убытка (например, $C_{i,n+1-i} = 0$). Если же сумма $C_{i,n+1-i}$ содержит нетипично большой убыток, то правильнее скорректировать $C_{i,n+1-i}$ посредством усечения большого убытка, чем полагать $c_i = 0$. Существенно ускоренное (или замедленное) развитие тоже не дает повода для принятия $c_i = 0$. В этих случаях нужно просто изменить значение w_i .

Установление $c_i = 1$ означает полное доверие текущему состоянию, и недоверие априорной оценке $v_i q_i$. Такой подход целесообразен, когда большинство убытков i -го года события уже заявлено и лежащие в основе значения $v_i q_i$ предположения признаны ошибочными. Присутствующие в $C_{i,n+1-i}$ нетипично большие убытки при этом должны усекаться.

Множитель $c_i = w_i$ возрастает от 0 до 1 в течение периода развития, придавая текущей сумме убытка $C_{i,n+1-i}$ тем больший вес, чем ближе эта сумма к

своему конечному значению (если оценки w_i достаточно точны). Нетипично большие убытки при расчете $C_{i,n+1-i}$ должны усекаться.

№3

1. Расчет производится по рекурсивной формуле $\hat{C}_{ik} = \hat{C}_{i,k-1} \hat{f}_{k-1}$, где

$$\hat{f}_{k-1} = \sum_{i=1}^{n+1-k} C_{ik} / \sum_{i=1}^{n+1-k} C_{i,k-1}, \quad 1 \leq i \leq n, 2 \leq k \leq n.$$

Стартовое значение равно $\hat{C}_{i,n+1-i} = C_{i,n+1-i}$.

2. (ЦЛ1) $E(C_{ik} \mid C_{i1}, \dots, C_{i,k-1}) = C_{i,k-1} f_{k-1}$.

(ЦЛ2) Векторы $(C_{i1}, C_{i2}, \dots, C_{in})$, $1 \leq i \leq n$, независимы.

(ЦЛ3) $Var(C_{ik} \mid C_{i1}, \dots, C_{i,k-1}) = C_{i,k-1} \sigma_{k-1}^2$.

$$3. r_{ik} = \frac{C_{ik} - \hat{E}(C_{ik} \mid C_{i,k-1})}{\sqrt{\widehat{Var}(C_{ik} \mid C_{i,k-1})}} = \frac{C_{ik} - C_{i,k-1} \hat{f}_{k-1}}{\sqrt{C_{i,k-1} \hat{\sigma}_{k-1}^2}} = \frac{\frac{C_{ik}}{C_{i,k-1}} - \hat{f}_{k-1}}{\hat{\sigma}_{k-1} / \sqrt{C_{i,k-1}}},$$

$1 \leq i \leq n-1, 2 \leq k \leq n-1, 3 \leq i+k \leq n+1$, и $r_{1n} = 0$, причем

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{n-k-1} \sum_{i=1}^{n-k} C_{ik} \left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}} - \hat{f}_k \right)^2.$$

4. Эффекты календарных лет выявляются посредством анализа графика зависимости невязок r_{ik} от календарных лет $j = i + k$, $3 \leq j \leq n+1$. При наличии эффекта календарного года график не похож на белый шум, а демонстрирует тренд или скачкообразное изменение среднего значения невязки.
5. Согласно п. 4, календарный эффект влечет зависимость невязок одного или нескольких календарных лет. Последнее означает скоррелированность соответствующих приращений $C_{ik} - C_{i,k-1} \hat{f}_{k-1}$. Таким образом, календарным эффектом нарушается предположение независимости ЦЛ2, а также предположение ЦЛ1, из которого выводится некоррелированность соседних множителей развития каждого года события.
6. Чтобы быть сравнимыми и производить белый шум, все невязки должны обладать примерно одинаковым распределением. Нестандартизованные невязки $C_{ik} - C_{i,k-1} \hat{f}_{k-1}$ этому требованию не отвечают — согласно ЦЛ3, дисперсии $Var(C_{ik} \mid C_{i,k-1})$ различаются по ячейкам матрицы развития.

№4

1. В треугольнике оплаченных убытков приращения $S_{i,k+1}$ обычно распределены правоасимметрично на промежутке $(0; \infty)$, что дает право моделировать

их с помощью гамма-распределения. Тогда отношения $Z_{ik} = \frac{S_{i,k+1}}{C_{ik}}$ при условии известных данных D_{ik} тоже подчиняются гамма-распределению.

Величина C_{ik} в этом случае играет роль меры объема для $S_{i,k+1}$, а $(1 + Z_{ik}) = C_{i,k+1} / C_{ik}$ представляет собой частный множитель развития. По аналогии с методом цепной лестницы разумно предположить одинаковое математическое ожидание μ_k величин Z_{ik} $1 \leq i \leq n$ и прогнозировать неизвестную часть треугольника развития по формуле $\hat{C}_{i,k+1} = \hat{C}_{ik}(1 + \hat{\mu}_k)$, $k > n - i$. Как и в модели для множителей развития цепной лестницы, дисперсии величин Z_{ik}

$$\text{Var}(Z_{ik}) = \mu_k^2 / (C_{ik} \alpha_k)$$

обратно пропорциональны соответствующим объемам C_{ik} . Таким образом, предложенная модель является частным случаем модели цепной лестницы и вполне приемлема для треугольника выплат. Для треугольника наступивших убытков модель с гамма-распределенными Z_{ik} подходит меньше из-за возможности отрицательных значений $S_{i,k+1}$. Для треугольника числа убытков она вовсе не пригодна ввиду непрерывности и строгой положительности гамма-распределенной случайной величины.

2. Плотность гамма-распределения с математическим ожиданием μ и параметром формы α имеет вид (см. табл. 1.3.8.4):

$$f(x|\mu, \alpha) = \left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^\alpha x^{\alpha-1} e^{-x\alpha/\mu} / \Gamma(\alpha).$$

Выпишем правдоподобие

$$\ln(f(x|\mu, \alpha)) = \alpha \ln(\alpha/\mu) + (\alpha - 1) \ln(x) - x\alpha/\mu - \ln(\Gamma(\alpha)).$$

Значение функции правдоподобия в точке $x_i = Z_{ik}$ составляет

$$\begin{aligned} \ln(f(x_i|\mu_k, C_{ik}\alpha_k)) &= \\ &= C_{ik}\alpha_k \ln(C_{ik}\alpha_k/\mu_k) + (C_{ik}\alpha_k - 1) \ln(Z_{ik}) - Z_{ik}C_{ik}\alpha_k/\mu_k - \ln(\Gamma(C_{ik}\alpha_k)). \end{aligned}$$

При независимых наблюдениях $x_1 = Z_{1k}, \dots, x_{n-k} = Z_{n-k,k}$ правдоподобие совокупной выборки вычисляется по формуле

$$L(\mu_k, \alpha_k) = \ln \left(\prod_{i=1}^{n-k} f(x_i|\mu_k, C_{ik}\alpha_k) \right) = \sum_{i=1}^{n-k} \ln(f(x_i|\mu_k, C_{ik}\alpha_k)).$$

Оценка максимального правдоподобия параметра μ_k находится из уравнения

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial \mu_k} L(\mu_k, \alpha_k) = \sum_{i=1}^{n-k} \left(-\frac{C_{ik}\alpha_k}{\mu_k} + \frac{Z_{ik}C_{ik}\alpha_k}{\mu_k^2} \right) = \\ &= \frac{\alpha_k}{\mu_k^2} \sum_{i=1}^{n-k} (S_{i,k+1} - C_{ik}\mu_k) \end{aligned}$$

и равна

$$\hat{\mu}_k = \sum_{i=1}^{n-k} S_{i,k+1} / \sum_{i=1}^{n-k} C_{ik} = \sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k+1} / \sum_{i=1}^{n-k} C_{ik} - 1.$$

Таким образом, дополнение треугольника развития строится по такой же формуле, как в методе цепной лестницы.

3. $E(S_{i,k+2} | D_{ik}) = E(E(S_{i,k+2} | D_{i,k+1}) | D_{ik}) =$
 $= E(C_{i,k+1} \mu_{k+1} | D_{ik}) =$
 $= E((C_{ik} + S_{i,k+1}) | D_{ik}) \mu_{k+1} =$
 $= (C_{ik} + E(S_{i,k+1} | D_{ik})) \mu_{k+1} =$
 $= (C_{ik} + C_{ik} \mu_k) \mu_{k+1} =$
 $= C_{ik}(1 + \mu_k) \mu_{k+1}.$
4. Плотность величины $S_{i,k+2}$ при условии наблюдений $D_{i,k+1}$ имеет в точке $x > 0$ значение

$$f(x | C_{i,k+1}\mu_{k+1}, C_{i,k+1}\alpha_{k+1}) = f(x | (C_{ik} + S_{i,k+1})\mu_{k+1}, (C_{ik} + S_{i,k+1})\alpha_{k+1}).$$

Поскольку нам известно множество данных D_{ik} , а не $D_{i,k+1}$, величина $S_{i,k+1}$ является случайной. Для получения плотности величины $S_{i,k+2}$ при условии данных D_{ik} необходимо усреднить предыдущую плотность по всем возможным значениям $S_{i,k+1} = y$ с учетом их вероятностей $f(y | C_{ik}\mu_k, C_{ik}\alpha_k)$ при заданном C_{ik} . Тогда искомая плотность составит

$$\int_0^\infty f(x | (C_{ik} + y)\mu_{k+1}, (C_{ik} + y)\alpha_{k+1}) f(y | C_{ik}\mu_k, C_{ik}\alpha_k) dy, \quad x > 0.$$

№5

1. Стандартной ошибкой оценки \hat{C}_{in} называется квадратный корень из оценки (условной при заданном треугольнике развития D) средней квадратичной ошибки оценки \hat{C}_{in} . Средняя квадратичная ошибка находится по формуле

$$\text{mse}(\hat{C}_{in}) = E((\hat{C}_{in} - C_{in})^2 | D) = \text{Var}(C_{in} | D) + (\hat{C}_{in} - E(C_{in} | D))^2$$

и состоит из двух компонент: случайной ошибки $\text{Var}(C_{in} | D)$ и оценочной ошибки $(\hat{C}_{in} - E(C_{in} | D))^2$. Случайная ошибка характеризует случайное отклонение фактического конечного убытка C_{in} от наилучшего прогноза $E(C_{in} | D)$, а оценочная ошибка — отклонение оценки \hat{C}_{in} от наилучшего прогноза. Для удобства вычисления оценочная ошибка часто заменяется величиной $\text{Var}(\hat{C}_{in}) = E(\hat{C}_{in} - E(\hat{C}_{in}))^2$.

2. Для упрощения записи обозначим $C^* := \hat{C}_{n+1-k,n}$, $C_j^* = \hat{C}_{n+1-k,n}^{(j)}$, $C_{+k} := \sum_{j=1}^{n-k} C_{jk}$.

Согласно условиям задачи, оценка C^* представляет собой взвешенное по C_{jk} среднее оценок C_j^* конечного убытка: $C^* = \sum_{j=1}^{n-k} \frac{C_{jk}}{C_{+k}} C_j^*$ (метод цепной лестницы). В линейной комбинации независимых оценок веса должны обратно пропорционально зависеть от дисперсий соответствующих слагаемых (см. теорему в разделе 1.3.2). Это дает основание предположить для C_j^* модель дисперсии $Var(C_j^*) = \sigma^2 / C_{jk}$. Несмещенной оценкой параметра σ^2 служит

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n-k-1} \sum_{j=1}^{n-k} C_{jk} (C_j^* - C^*)^2.$$

Тогда функцию Vol можно представить в виде $Vol(C^*) = (n-k-1) \hat{\sigma}^2 / C_{+k}$. В рамках принятой модели дисперсии $Var(C_j^*)$ средняя дисперсия величин C_j^* составляет

$$\sum_{j=1}^{n-k} \frac{C_{jk}}{C_{+k}} Var(C_j^*) = (n-k) \sigma^2 / C_{+k}.$$

Таким образом, $Vol(C^*)$ оценивает среднюю дисперсию величин C_j^* (с точностью до множителя $(n-k-1)/(n-k)$). Для использования $Vol(C^*)$ в качестве случайной ошибки оценки C^* необходимо, чтобы величины C_j^* содержали только истинные множители развития $C_{j,m+1} / C_{jm}$, а не их оценки \hat{f}_m . Кроме того, $Vol(C^*)$ превышает оценочную ошибку

$$Var(C^*) = \sum_{j=1}^{n-k} \frac{C_{jk}^2}{C_{+k}^2} Var(C_j^*) = \sigma^2 / C_{+k}$$

в $n-k-1$ раз. Подчеркнем, однако, что все вышесказанное относится только к случаю независимых C_j^* . В действительности же каждая пара C_j^* , C_r^* ($j > r > 1$) содержит один или несколько одинаковых множителей \hat{f}_m , а значит, C_j^* положительно скоррелированы. Но тогда $E(\hat{\sigma}^2) < \sigma^2$, и Vol так или иначе недооценивает среднюю дисперсию оценок C_j^* .

Сравнение величины Vol со стандартной ошибкой $s.e.(\hat{C}_{n+1-k,k+1})$ проведем на примере первого ненаблюдаемого года развития, когда величины $C_j^* = \hat{C}_{n+1-k,k+1}^j$ еще не содержат оценок \hat{f}_m , что позволяет предположить независимость (соответствующим образом модифицированных) слагаемых $C_j^* = C_{n+1-k,k} \frac{C_{j,k+1}}{C_{jk}}$. Для этого случая все предыдущие рассуждения справедливы, то есть

$$\begin{aligned} Vol(\hat{C}_{n+1-k,k+1}) &= \sum_{j=1}^{n-k} \frac{C_{jk}}{C_{+k}} \left(C_{n+1-k,k} \frac{C_{j,k+1}}{C_{jk}} - C_{n+1-k,k} \hat{f}_k \right)^2 = \\ &= \hat{C}_{n+1-k,k}^2 (n-k-1) \hat{\sigma}_k^2 / C_{+k}, \end{aligned}$$

где

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{n-k-1} \sum_{j=1}^{n-k} C_{jk} \left(\frac{C_{j,k+1}}{C_{jk}} - \hat{f}_k \right)^2.$$

В модели цепной лестницы стандартная ошибка в первом ненаблюдаемом году развития составляет

$$\left(s.e.(\hat{C}_{n+1-k,k+1}) \right)^2 = C_{n+1-k,k}^2 \left(\frac{\hat{\sigma}_k^2}{C_{n+1-k,k}} + \frac{\hat{\sigma}_k^2}{C_{+k}} \right)$$

(слагаемые в правой части задают, соответственно, случайную и оценочную ошибки). Сравнив эту формулу с формулой для Vol , заключаем, что даже в рассмотренном нами сравнительно регулярном случае равенство значений $s.e.$ и Vol достигается только при $C_{n+1-k,k} = C_{+k} / (n-k-2)$.

Описанный способ расчета волатильности рекомендован Хеппом-Алтинером и Клеммштайном (Heep-Altiner, Klemmstein) в книге о практическом применении страховой математики «Versicherungsmathematische Anwendungen in der Praxis».

№6

1. В годах событий с нулевым уровнем убытка в первом году развития изменение этого уровня во втором году развития, очевидно, никак не связано с множителем развития, так как никакой множитель не может перевести нулевой убыток в положительный. При оценивании множителей развития эти годы событий учитываться не должны, тем более что они влияют только на числитель рассматриваемой дроби, придавая годам событий с положительным начальным убытком больший вес. Метод цепной лестницы предписывает образовать взвешенное среднее отдельных множителей развития $C_{i,k+1} / C_{ik}$ с весами, пропорциональными соответствующим накопленным убыткам предыдущего года. Годы событий с нулевым начальным убытком в этом случае получают нулевой вес и не участвуют в усреднении. Правильное применение метода цепной лестницы, таким образом, ведет к оценке

$$\frac{120 \cdot \frac{400}{120} + 50 \cdot \frac{150}{50} + 150 \cdot \frac{400}{150} + 200 \cdot \frac{550}{200} + 80 \cdot \frac{300}{80}}{120 + 50 + 150 + 200 + 80} = 3,$$

откуда следует $\hat{X} = 300$. При построении линии регрессии второго года развития на первый (проходящей через начало координат) легко увидеть, что 2-й и 5-й годы событий не соответствуют общему характеру регрессии.

- 2.а) Последовательно расписывая (А), получим

$$E(C_{in}) = E(C_{ik}) f_k \cdot \dots \cdot f_{n-1} \quad \text{для } k = 1, \dots, n,$$

(пустое произведение полагается равным 1). Отсюда при $k > 1$ следует равенство

$$E(S_{ik}) = E(C_{ik}) - E(C_{i,k-1}) = E(C_{in}) ((f_k \cdot \dots \cdot f_{n-1})^{-1} - (f_{k-1} \cdot \dots \cdot f_{n-1})^{-1}).$$

Обозначив $x_i = E(C_{in}) > 0$, $y_k = (f_k \cdot \dots \cdot f_{n-1})^{-1} - (f_{k-1} \cdot \dots \cdot f_{n-1})^{-1}$ и $y_n = 1 - (f_{n-1})^{-1}$, приходим к модели (B). Действительно, при $k = 1$ имеем

$$E(S_{i1}) = E(C_{i1}) = E(C_{in})(f_1 \cdot \dots \cdot f_{n-1})^{-1},$$

откуда $y_1 = (f_1 \cdot \dots \cdot f_{n-1})^{-1}$. Нетрудно убедиться, что $y_1 + \dots + y_n = 1$. Таким образом, при выполнении (A) выполнены и все условия (B).

Пусть выполнены условия (B). В силу равенства

$$E(C_{ik}) = E(S_{i1}) + \dots + E(S_{ik}) = x_i(y_1 + \dots + y_k),$$

имеем

$$\frac{E(C_{i,k+1})}{E(C_{ik})} = \frac{x_i(y_1 + \dots + y_{k+1})}{x_i(y_1 + \dots + y_k)} = \frac{y_1 + \dots + y_{k+1}}{y_1 + \dots + y_k} =: f_k,$$

что соответствует модели (A).

б) Основное предположение модели цепной лестницы:

$$E(C_{i,k+1} | C_{i1}, \dots, C_{ik}) = C_{ik} f_k.$$

Применив к обеим частям оператор математического ожидания, получим $E(C_{i,k+1}) = E(C_{ik}) f_k$. Отсюда заключаем, что модель цепной лестницы удовлетворяет условиям класса моделей (A), то есть утверждение (i) верно, а (iii) и (iv) неверны. Утверждение (ii) тоже неверно, поскольку в (B) входят модели со всюду независимыми S_{ik} , тогда как в модели цепной лестницы величины $S_{i,k+1}$ и S_{ik} не являются независимыми.

в) Модель (B) относится к мультипликативным моделям перекрестной параметризации. Последние лежат в основе методов выравнивания, применяемых при исчислении тарифов. Единственная особенность модели (B) — одинаковый объем $v_{ik} = 1$ всех ячеек (i, k) . Для применения методов выравнивания к расчету резерва требуется предположить независимость всех приращений S_{ik} , а также $S_{ik} > 0$, если используется распределение с положительным носителем. Тогда параметры x_i , y_k можно оценить методом максимального правдоподобия. Получить оценки параметров x_i , y_k без привлечения модели распределения для величин S_{ik} позволяет метод маргинальных сумм или метод наименьших квадратов (со взвешиванием слагаемых).

г) $\hat{R}_i = \hat{S}_{i,n+2-i} + \dots + \hat{S}_n = \hat{x}_i(\hat{y}_{n+2-i} + \dots + \hat{y}_n)$, $\hat{C}_{in} = C_{i,n+1-i} + \hat{R}_i$. Оценка $\hat{C}_{in} = \hat{x}_i$ неверна, так как относится к безусловному математическому ожиданию $E(C_{in})$, а не к условному $E(C_{in} | D)$ при заданном треугольнике развития D.

№7

1. При n -кратном увеличении значения v_i ожидаемое приращение убытка $E(S_{ik})$ в каждом году развития тоже увеличивается в n раз. Поэтому логично интерпретировать v_i как объем i -го года события. В качестве меры объема подходят суммарная собранная премия (если значения S_{ik} не очищены от инфляции) или число полисов (если S_{ik} очищены от инфляции, и полисы сравнимы по «размеру»). В рассмотрение принимаются также число убытков, заявленных в первом году развития, или суммарная выплата $S_{i1} = C_{i1}$ в первом году развития.
2. В силу равенства $E(S_{ik}) = v_i m_k$, каждое относительное приращение S_{ik} / v_i представляет собой несмещенную оценку для m_k . Тогда оценкой для m_k на основе всех наблюдаемых данных k -го года развития может служить любая линейная комбинация отношений S_{ik} / v_i при $i = 1, \dots, n+1-k$ с известными коэффициентами (в сумме составляющими 1), и в частности

$$\hat{m}_k^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^{n+1-k} v_i^\alpha \frac{S_{ik}}{v_i} / \sum_{i=1}^{n+1-k} v_i^\alpha, \quad \text{где } \alpha \in \{0; 1; 2\}.$$

При $\alpha = 0$ имеем обычное среднее относительных приращений, при $\alpha = 1$ — взвешенное по объемам среднее, при $\alpha = 2$ — оценку (по методу наименьших квадратов) углового коэффициента линии регрессии S_{ik} на v_i , проходящей через начало координат.

3. Каждому из трех предложенных в п. 2 вариантов взвешивания слагаемых S_{ik} / v_i отвечает своя модель дисперсии $\text{Var}(S_{ik} / v_i) = s_k^2 / v_i^\alpha$ (в линейной комбинации оценок вес каждого слагаемого должен быть обратно пропорционален его дисперсии — см. теорему в разделе 1.3.2). Параметр s_k^2 может быть несмещенно оценен величиной

$$\frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n+1-k} v_i^\alpha \left(\frac{S_{ik}}{v_i} - \hat{m}_k^{(\alpha)} \right)^2.$$

Слагаемые $v_i^\alpha \left(\frac{S_{ik}}{v_i} - \hat{m}_k^{(\alpha)} \right)^2$ в этой формуле представляют собой взвешенные квадратичные невязки. Если модель дисперсии величины S_{ik} / v_i выбрана правильно, то зависимость квадратичных невязок от i или v_i не проявляет тренда. Для определения наилучшей из трех оценок $\hat{m}_k^{(\alpha)}$, $\alpha \in \{0; 1; 2\}$, надо построить график зависимости квадратичных невязок от i и v_i . Решение принимается в пользу того значения α , которому соответствуют наиболее равномерные графики. Выбранная таким образом модель будет обладать минимальной нормированной суммой взвешенных квадратичных невязок

$$\sum_{i=1}^{n+1-k} \frac{v_i^\alpha}{\sum_{j=1}^{n+1-k} v_j^\alpha} \left(\frac{S_{ik}}{v_i} - \hat{m}_k^{(\alpha)} \right)^2.$$

Это выражение одновременно является оценкой для оценочной ошибки $Var(\hat{m}_k^\alpha)$, поскольку $Var(\hat{m}_k^\alpha) = s_k^2 / \sum v_j^\alpha$ (с точностью до множителя $n - k$). Значит, альтернативным критерием выбора из трех значений α может служить минимальность оценочной ошибки.

4. Запишем основное предположение модели цепной лестницы в виде $E(S_{ik}) = C_{i,k-1}(f_k - 1)$, удобном для сравнения с предположением $E(S_{ik}) = v_i m_k$. Если величина $f_k - 1$ оценивается точнее, чем m_k , то модель цепной лестницы лучше подходит к данным. Поскольку оценки \hat{m}_k и $f_k - 1$ существенно отличаются порядком величины, сравнение оценочных ошибок $Var(\hat{m}_k)$ и $Var(f_k - 1)$ не дает ответа на вопрос, какая из двух оценок точнее. Правильным будет сравнить коэффициенты вариации $Vko(\hat{m}_k)$ и $Vko(f_k - 1)$ (для расчета коэффициентов вариации потребуется упомянутая в п. 3 оценка параметра s_k^2). Модель с меньшим коэффициентом вариации более адекватна данным. Коэффициенты вариации одновременно представляют собой обращенные коэффициенты детерминации регрессий S_{ik} на v_i или, соответственно, на $C_{i,k-1}$.

Другой способ сравнения двух моделей — проверка значимости параметров a_k и b_k обобщенной модели

$$E(S_{ik}) = v_i a_k + C_{i,k-1} b_k$$

(аналогичный способ используется в тарификации). Если один из двух параметров a_k и b_k оказывается значимым, а другой нет, то часть модели, соответствующая значимому параметру, очевидно, более точна, чем другая часть модели. В общем случае предпочтение отдается модели с более значимым параметром.

(Сравнение коэффициентов вариации $Vko(\hat{m}_k^{(\alpha)})$ также может быть одним из способов решения задачи 3.)

Замечание: сравнение линейного и логарифмического графиков зависимости относительных аккумулированных убытков от года развития k не является статистически обоснованным решением задачи. К тому же в этом случае сравнение моделей производится на всем треугольнике развития, а не при фиксированном k . Поскольку коэффициенты вариации отдельных лет развития невозможно объединить в одну меру, этот способ допустим для сравнения двух моделей на совокупном треугольнике развития.

5. $\hat{C}_{in} / v_i = C_{i,n+1-i} / v_i + \hat{m}_{n+2-i} + \dots + \hat{m}_n$.
6. Любые две оценки конечного относительного убытка \hat{C}_{in} / v_i , $2 \leq i \leq n$, содержат одну или несколько одинаковых оценок \hat{m}_k , а значит, положительно скоррелированы. Поэтому оценка a^2 всегда ниже оцениваемой величины.

Задачи по теме «Деление риска»

№1

В коллективной модели распределение размера убытка X задано функцией F , а распределение совокупного убытка S — функцией G .

1. Постройте функцию распределения \underline{F} размера убытка перестраховщика при перестраховании эксцедента убытка с приоритетом a и ответственностью c . (10 баллов)
2. Найдите функцию распределения \underline{G} совокупного убытка перестраховщика при перестраховании «Stop Loss» с приоритетом b и ответственностью h . (5 баллов)
3. Покажите, что линейность функции эффекта освобождения r в интервале $[a_1, a_2]$ возможна только при нулевой вероятности убытков размера между a_1 и a_2 . (5 баллов)
4. Величина X описывается логнормальным распределением с математическим ожиданием $E(X) = 6000$ и параметром $\sigma = 1,8$. Вычислите математическое ожидание усеченного на уровне $a = 100\,000$ размера убытка $X = \min(X, a)$. (10 баллов)

№2

1. Портфель страховщика состоит из m рисков; i -му риску соответствует страховая сумма u_i , $i = 1, 2, \dots, m$. В течение года по портфелю наблюдались убытки размеров X_1, X_2, \dots, X_N , причем убыток X_n относится к риску $i(n)$.
 - а) Вычислите совокупный убыток $S_1(a)$ на собственном удержании страховщика при нелимитированном перестраховании эксцедента убытка с приоритетом a .
 - б) Вычислите совокупный убыток $S_2(b)$ на собственном удержании страховщика при нелимитированном перестраховании эксцедента сумм с максимумом b .
 - в) Пусть для всех $n = 1, \dots, N$ убыток X_n исчерпывает страховую сумму, то есть $X_n = u_{i(n)}$ (как, например, в страховании смерти от несчастного случая). При каких значениях a выполняется неравенство $S_1(a) < S_2(b)$, если $0 < b < \max\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$? (10 баллов)
2. Совокупный убыток S имеет дискретное распределение, сосредоточенное в точках $\{0; 1; 2; \dots\}$, и $P(S \leq 10) = 0,77$. Функция $Q_S(t)$ задает ожидаемый убыток перестраховщика при нелимитированном перестраховании «Stop

Loss» с приоритетом t . Рассчитайте значение $Q_S(11)$, если известно $Q_S(10) = 0,85$. (Указание: найдите сначала разность $Q_S(10) - Q_S(11)$.) (10 баллов)

3. По договору перестрахования под ответственность перестраховщика переходит сумма

$$R = \begin{cases} S - b, & \text{если } S > b, \\ 0, & \text{если } a \leq S \leq b, \\ -(a - S), & \text{если } S < a \text{ (перестраховщик получает} \\ & \text{сумму } a - S \text{ от страховщика),} \end{cases}$$

где S — совокупный убыток страховщика, и $0 < a < b < \infty$ (так называемое обратное перестрахование «Stop Loss»). Вычислите $E(R)$, располагая программным обеспечением для расчета математического ожидания $Q_S(t) = E(\max(S - t, 0))$ убытка страховщика при обычном перестраховании «Stop Loss» с произвольным приоритетом $t \geq 0$. (10 баллов)

№3

Процесс убытков страховщика описывается коллективной моделью со случайным числом убытков N и одинаково распределенными размерами убытков X_1, X_2, \dots

1. Выпишите формулу для совокупного убытка S_a страховщика, если для всех полисов установлена одинаковая вычитаемая франшиза $a > 0$. (3 балла)
2. Выразите математическое ожидание $E(N_a)$ числа N_a оплаченных убытков через N , a и функцию распределения размера убытка F . (3 балла)
3. Получите средний размер $E(X(a))$ одного покрываемого страховщиком убытка $X(a)$ как функцию от F и a . (4 балла)
4. Представьте математическое ожидание $E(S_a)$ совокупной выплаты страховщика в виде функции от a , N и F и рассчитайте его при $F(x) = 1 - (x/b)^{-2}$, $x > b > 0$ (и $F(x) = 0$ иначе). (7 баллов)
5. Функция распределения размера убытка имеет вид $F(x) = 1 - (x/b)^{-2}$ при $x > b > 0$ и $b < a/2$ ($F = 0$ иначе). Во сколько раз изменится $E(S_a)$ при снижении вычитаемой франшизы на 10%? (3 балла)
6. Распределение размера убытка задано функцией $F(x) = 1 - (x/b)^{-2}$ при $x > b > 0$ и $b < a/2$ ($F = 0$ иначе). Во сколько раз изменится $E(S_a)$ при увеличении размеров всех убытков X_n на 10% (и неизменном размере франшизы a)? (10 баллов)

№4

В рамках коллективной модели со случайным числом убытков N , размером убытка X и распределением размера убытка F .

1. Вычислите производную от $m_k(a) = E(\min(X, a))^k$, $k = 1, 2, \dots$ по a в точках непрерывности функции F . (6 баллов)
2. Выразите коэффициент вариации $Vko(S_a)$ совокупного убытка на собственном удержании $S_a = \sum_{n=1}^N \min(X_n, a)$ через $m_k(a)$ и N . (3 балла)
3. Покажите, что $Vko(S_a)$ монотонно возрастает по a . (7 баллов)
4. Докажите неравенство $Var(S^*) > Var(S_a)$ при условии $E(S^*) = E(S_a)$, если S^* — совокупный убыток на собственном удержании страховщика при квотном перестраховании. (6 баллов)
5. Докажите, что величины $X_a = \min(X, a)$ и $Y_a := X - X_a = \max(0, X - a)$ при фактическом делении риска положительно скоррелированы. (8 баллов)

№5

1. В коллективной модели размер убытка X в отдельном страховом случае подчинен логнормальному распределению с функцией $\Lambda(x; \mu, \sigma)$, математическим ожиданием $m = \exp(\mu + \sigma^2/2)$ и $\sigma = 2$.
 - а) Выразите $\Lambda(x; \mu, \sigma)$ через стандартное нормальное распределение Φ . (2 балла)
 - б) Вычислите вероятность превышения убытком значения m . (3 балла)
 - в) Вычислите процентную долю суммы всех убытков выше m в ожидаемом совокупном убытке. (4 балла)
 - г) Какую долю в ожидаемом совокупном убытке составляет ожидаемый совокупный убыток перестраховщика при нелимитированном перестраховании эксцедента убытка с приоритетом m ? (4 балла)
 - д) Какую долю дисперсии совокупного убытка составляет дисперсия совокупного убытка перестраховщика при нелимитированном перестраховании эксцедента убытка с приоритетом m , если оригинальное число убытков распределено по закону Пуассона? (7 баллов)
2. По договору перестрахования из двух первых убытков выше a перестраховщик полностью возмещает больший убыток, а меньший убыток в полном размере остается под ответственностью страховщика. Вычислите ожидаемый убыток перестраховщика, если убытки размером выше a независимы и распределены по Парето с функцией $F(x) = 1 - (x/a)^{-\alpha}$. (10 баллов)

№6

1. Размер убытка X имеет распределение Парето с функцией $F(x) = 1 - (x/b)^{-\alpha}$ при $x > b > 0$.
 - а) Вычислите $E(X | X > a)$, $E(X \cdot 1_{\{X > a\}})$, $E(\max(X - a, 0))$, $E(X - a | X > a)$ при $a = 9$, $b = 3$ и $\alpha = 2$ ($1_{\{X > a\}}$ — индикаторная функция события $\{X > a\}$, $1_{\{X > a\}} = 1$ при $X > a$ и $1_{\{X > a\}} = 0$ в противном случае). (12 баллов)

- б) Какое из вышеуказанных математических ожиданий задает среднее превышение (приоритета a), а какое — средний размер большого убытка, если большим считается убыток размером выше a ? (4 балла)
- в) Выразите функцию распределения размера убытка свыше приоритета $a > b$ через a и параметры распределения Парето α и b . (4 балла)
2. Размеры убытков X и Y независимы и имеют одинаковое экспоненциальное распределение с функцией $F(z) = 1 - \exp(-\beta z)$. Вычислите $E(\min(X, Y))$. (10 баллов)

№7

Портфель одного вида страхования содержит независимые риски $i = 1, \dots, I$; i -й риск описывается коллективной моделью с числом убытков N_i , размером n -го убытка X_{in} , функцией распределения F_i величины X_{in} и совокупным убытком S_i .

1. Определите эффект освобождения r_i , соответствующий i -му риску, если каждый убыток делится по границе a ? (2 балла)
2. R_a — совокупный убыток перестраховщика при нелимитированном перестраховании эксцедента убытка с приоритетом a . Выразите $E(R_a)$ через r_i и $E(S_i)$. (4 балла)
3. Решение задачи п. 2 приводит к основной формуле метода тарификации «Exposure». Каким образом перестраховщик оценивает величины $E(S_i)$, необходимые для расчета перестраховочных премий? (3 балла)
4. Для построения кривой r_i перестраховщику требуется функция распределения F_i размера отдельного убытка по i -му риску. Оценить F_i на основании статистики убытков отдельного риска невозможно — число убытков одиночного риска слишком мало. Какое упрощающее предположение позволяет моделировать зависимость функции распределения F_i от страховой суммы v_i в имущественном страховании и использовать для оценки F_i статистику убытков всех рисков, отличающихся только страховыми суммами? Исходя из этого предположения получите явную форму зависимости функции распределения F_i от страховой суммы v_i . (5 баллов)
5. Почему принимаемая в страховании имущества модель п. 4 не подходит для страхования гражданской ответственности? (4 балла)
6. Какой подход применяется в немецкой практике страхования гражданской ответственности для получения математического ожидания убытка $b(v)$ по риску с произвольной страховой суммой v на основании математического ожидания $b(v_0)$ убытка по риску со стандартной страховой суммой v_0 . Выведите соотношение между $b(v)$ и $b(v_0)$. (4 балла)
7. Какая часть от премии $b(v)$ (вычисляемой в соответствии с п. 6) причитается перестраховщику за предоставление покрытия эксцедента убытка свыше приоритета $a < v$ (ответ обосновать)? (3 балла)

8. Изменится ли относительная доля перестраховщика в премии $b(v)$ (из п. 6) вследствие инфляции (при неизменных прочих условиях) и если да, то в какую сторону (ответ обосновать)? (5 баллов)

РЕШЕНИЕ

№1

1. От оригинального убытка X перестраховщик принимает часть

$$\tilde{X} = \begin{cases} 0 & \text{при } X \leq a, \\ X - a & \text{при } a < X < a + c, \\ c & \text{при } a + c \leq X, \end{cases}$$

подчиненную распределению

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} F(a) & \text{при } x = 0, \\ F(a + x) & \text{при } 0 < x < c, \\ 1 & \text{при } c \leq x. \end{cases}$$

С точки зрения перестраховщика убытками считаются только значения $\tilde{X} > 0$, поэтому

$$\underline{F}(x) = P(\tilde{X} \leq x | \tilde{X} > 0) = \frac{P(0 < \tilde{X} \leq x)}{P(\tilde{X} > 0)} = \frac{\tilde{F}(x) - \tilde{F}(0)}{1 - \tilde{F}(0)} = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{F(a + x) - F(a)}{1 - F(a)}, & 0 < x < c, \\ 1, & x \geq c. \end{cases}$$

2. Для совокупного убытка \underline{S} перестраховщика справедливо представление

$$\underline{S} = \begin{cases} 0 & \text{при } S \leq b, \\ S - b & \text{при } b < S < b + h, \\ h & \text{при } b + h \leq S. \end{cases}$$

Отсюда

$$\underline{G}(y) = \begin{cases} G(b) & \text{при } y = 0, \\ G(b + y) & \text{при } 0 < y < h, \\ 1 & \text{при } h \leq y. \end{cases}$$

3. В силу равенства

$$r(x) = E(\min(X, x)) / E(X) = \int_0^x (1 - F(t)) dt / E(X) \quad \text{при } x \geq 0,$$

имеем

$$r'(x) = (1 - F(x)) / E(X).$$

Если функция r линейна на промежутке $[a_1, a_2]$, то r' и, следовательно, F постоянны на (a_1, a_2) . Последнее означает, что убытки размером между a_1 и a_2 имеют нулевую вероятность.

$$4. E(\min(X, a)) = \int_0^a x dF(x) + a(1 - F(a)) = E(X) - \int_a^\infty x dF(x) + a(1 - F(a)).$$

Согласно таблице 4.2.3.1, для логнормального распределения $F(x) = \Lambda(x; \mu, \sigma) = \Phi((\ln(x) - \mu) / \sigma)$ (где Φ — функция стандартного нормального распределения) справедливо

$$\int_0^\infty x dF(x) = E(X) (1 - \Lambda(a; \mu + \sigma^2, \sigma)).$$

Из равенства $E(X) = \exp(\mu + \sigma^2 / 2)$ получаем $\mu = \ln(E(X)) - \sigma^2 / 2 = 7,08$. Тогда

$$F(a) = \Phi((\ln(a) - \mu) / \sigma) = \Phi(2,463) = 0,9931,$$

$$\Lambda(a; \mu + \sigma^2, \sigma) = \Phi((\ln(a) - \mu - \sigma^2) / \sigma) = \Phi(0,663) = 0,746,$$

$$E(\min(X, a)) = E(X) \Lambda(a; \mu + \sigma^2, \sigma) + a(1 - F(a)) = 4476 + 690 = 5166.$$

№2

$$1.a) S_1(a) = \sum_{n=1}^N \min(a, X_n).$$

$$б) S_2(b) = \sum_{n=1}^N \min\left(\frac{b}{u_{i(n)}}, 1\right) \cdot X_n.$$

в) Из условия $X_n = u_{i(n)}$ следует $S_2(b) = \sum_{n=1}^N \min(b, X_n) = S_1(b)$. Функция $S_1(a)$ монотонно возрастает на $[0; \max\{X_1, \dots, X_N\})$. Таким образом, неравенство $S_1(a) < S_2(b)$ выполняется для всех $a < b$.

2. Используя обозначения $g_n = P(S = n)$, находим

$$Q_S(10) = \sum_{n=10}^\infty (n-10)g_n = \sum_{n=11}^\infty (n-10)g_n,$$

$$Q_S(10) - Q_S(11) = \sum_{n=11}^\infty (n-10)g_n - \sum_{n=11}^\infty (n-11)g_n = (11-10) \sum_{n=11}^\infty g_n = 1 - \sum_{n=0}^{10} g_n = 0,23,$$

$$Q_S(11) = Q_S(10) - 0,23 = 0,62.$$

$$\begin{aligned} 3. E(R) &= \int_0^a (s-a)dG(s) + \int_b^\infty (s-b)dG(s) \\ &= \int_0^\infty (s-a)dG(s) - \int_a^\infty (s-a)dG(s) + Q_S(b) = Q_S(0) - a - Q_S(a) - Q_S(b). \end{aligned}$$

№3

$$1. S_a = \sum_{n=1}^N \max(X_n - a, 0).$$

$$2. N_a = \sum_{n=1}^N 1_{\{X_n > a\}}. \text{ Отсюда } E(N_a) = E(N)E(1_{\{X_n > a\}}) = E(N)(1 - F(a)).$$

$$\begin{aligned} 3. E(X(a)) &= E(X - a | X > a) = \int_a^\infty (x-a)dF(x) / (1 - F(a)) = \\ &= \int_a^\infty (1 - F(x))dx / (1 - F(a)). \end{aligned}$$

$$4. E(S_a) = E(N_a)E(X(a)) = E(N) \int_a^\infty (1 - F(x))dx.$$

В частном случае

$$1 - F(x) = \begin{cases} (x/b)^{-2} & \text{при } x > b, \\ 1 & \text{при } x \leq b \end{cases}$$

имеем

$$\int_a^\infty (1 - F(x))dx = \int_a^\infty \left(\frac{x}{b}\right)^{-2} dx = \left[-\left(\frac{x}{b}\right)^{-1} b \right]_a^\infty = \frac{b^2}{a}$$

при $a \geq b$ и

$$\int_a^\infty (1 - F(x))dx = \int_a^b dx + \int_b^\infty \left(\frac{x}{b}\right)^{-2} dx = b - a + \left[-\left(\frac{x}{b}\right)^{-1} b \right]_b^\infty = 2b - a$$

при $a < b$. Следовательно,

$$E(S_a) = \begin{cases} E(N)b^2/a & \text{при } a \geq b, \\ E(N)(2b-a) & \text{при } a < b. \end{cases}$$

5. Положим $\tilde{a} = 0,9a$. Тогда $E(S_{\tilde{a}}) = E(N) \cdot b^2 / (0,9a) = E(S_a) / 0,9$. Таким образом, $E(S_a)$ увеличивается в $\frac{1}{0,9} = 1,1(1)$ раз.

6. Обозначим $\tilde{X}_n = cX_n$. Имеем

$$\tilde{F}(x) = P(\tilde{X}_n < x) = P\left(X_n < \frac{x}{c}\right) = F\left(\frac{x}{c}\right) = 1 - \left(\frac{x}{bc}\right)^{-2} \text{ при } x > bc.$$

Тогда, согласно п. 4,

$$E(\tilde{S}_a) = E(N) \int_a^{\infty} (1 - \tilde{F}(x)) dx = E(N) \tilde{b}^2 / a,$$

где $\tilde{b} = bc$. Отсюда $E(\tilde{S}_a) = E(S_a) \cdot c^2$, и $E(S_a)$ увеличивается в $c^2 = 1,10^2 = 1,21$ раз.

Выражение

$$E(\tilde{S}_a) = E(N) \int_a^{\infty} (1,1x - a) \frac{dF(x)}{1 - F(a)}$$

неверно, поскольку убытки размером ниже a за счет инфляции тоже оказывают влияние на значение $E(\tilde{S}_a)$.

№4

1. Согласно определению,

$$m_k(a) = E((\min(X, a))^k) = \int_0^a x^k dF(x) + a^k (1 - F(a)).$$

Если существует плотность $dF(x) = f(x)dx$, то производную по a можно взять непосредственно от выражения в правой части. В противном случае путем интегрирования находим

$$\begin{aligned} m_k(a) &= \left[x^k F(x) \right]_0^a - \int_0^a k x^{k-1} F(x) dx + a^k (1 - F(a)) = \\ &= a^k - \int_0^a k x^{k-1} F(x) dx = \int_0^a k x^{k-1} (1 - F(x)) dx, \end{aligned}$$

откуда непосредственно следует формула

$$m_k'(a) = k a^{k-1} (1 - F(a)).$$

2. Обозначив $X_a = \min(X, a)$, получим

$$\begin{aligned} Vko(S_a) &= \frac{\sqrt{Var(S_a)}}{E(S_a)} = \frac{\sqrt{E(N)Var(X_a) + Var(N)(E(X_a))^2}}{E(N)E(X_a)} = \\ &= \frac{\sqrt{E(N)(m_2(a) - m_1^2(a)) + Var(N)m_1^2(a)}}{E(N)m_1(a)}. \end{aligned}$$

$$3. (Vko(S_a))^2 = \frac{1}{E(N)} \cdot \frac{m_2(a)}{m_1^2(a)} + \frac{Var(N) - E(N)}{(E(N))^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} \left(\frac{m_2(a)}{m_1^2(a)} \right) &= \frac{m_1^2(a)m_2'(a) - m_2(a)2m_1(a)m_1'(a)}{m_1^4(a)} = \\ &= \frac{m_1(a)2a(1 - F(a)) - m_2(a)2(1 - F(a))}{m_1^3(a)} = \\ &= \frac{2(1 - F(a))}{m_1^3(a)} (am_1(a) - m_2(a)). \end{aligned}$$

Последнее выражение строго положительно, так как

$$m_2(a) = \int_0^a x^2 dF(x) + a^2 (1 - F(a)) < \int_0^a x dF(x) + a^2 (1 - F(a)) = am_1(a).$$

4. Из равенств $Vko(S^*) = Vko(S) = Vko(S_{\infty})$ и доказанного в п. 3 неравенства $Vko(S_a) < Vko(S_{\infty})$ следует $Vko(S_a) < Vko(S^*)$, и

$$\frac{Var(S_a)}{(E(S_a))^2} < \frac{Var(S^*)}{(E(S^*))^2}.$$

Отсюда, в силу предположения $E(S_a) = E(S^*)$, сразу вытекает доказываемое утверждение.

5. Требуется показать, что $Cov(X_a, Y_a) > 0$. Имеем

$$Cov(X_a, Y_a) = E(X_a \cdot Y_a) - E(X_a)E(Y_a).$$

Используя равенство

$$E(X_a \cdot Y_a) = \int_0^a x \cdot 0 dF(x) + \int_a^{\infty} a(x - a) dF(x) = a \int_a^{\infty} (x - a) dF(x) = a E(Y_a),$$

получаем

$$Cov(X_a, Y_a) = (a - E(X_a))E(Y_a).$$

Выражение в правой части строго положительно, поскольку

$$E(X_a) = \int_0^{\infty} \min(x, a) dF(x) < \int_0^{\infty} a dF(x) = a.$$

№5

1.a) $X \sim \text{Lognormal}(\mu, \sigma)$ равносильно $\ln(X) \sim \text{Normal}(\mu, \sigma)$ или $(\ln(X) - \mu) / \sigma \sim \text{Normal}(0, 1)$.

Тогда

$$\Lambda(x; \mu, \sigma) = P(X < x) = P(\ln(X) < \ln(x)) = \\ = P\left(\frac{\ln(X) - \mu}{\sigma} < \frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right).$$

б) Учитывая результат п. а), а также равенство $\ln(m) = \mu + \sigma^2 / 2$, находим

$$P(X > m) = 1 - \Lambda(m; \mu, \sigma) = \\ = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(m) - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\sigma}{2}\right) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0,84 = 16\%.$$

в) Математическое ожидание совокупного убытка $S = X_1 + \dots + X_N$ вычисляется по формуле $E(S) = E(N)E(X) = E(N)m$. Сумма всех больших убытков составляет $\tilde{S} = \sum_{n=1}^N X_n \cdot 1_{\{X_n > m\}}$ и имеет математическое ожидание (см. табл. 4.2.3.1)

$$E(\tilde{S}) = E(N)E\left(X \cdot 1_{\{X > m\}}\right) = E(N) \int_m^{\infty} x d\Lambda(x) = \\ = E(N) \cdot \exp(\mu + \sigma^2 / 2) \cdot (1 - \Lambda(m; \mu + \sigma^2, \sigma)) = \\ = E(N)m \left(1 - \Phi\left(\frac{\ln(m) - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right)\right) = E(N)m \left(1 - \Phi\left(-\frac{\sigma}{2}\right)\right).$$

Отсюда $E(\tilde{S}) / E(S) = 1 - \Phi(-\sigma / 2) = 1 - \Phi(-1) = \Phi(1) = 84\%$.

г) Перестраховщик принимает убыток

$$S^* = \sum_{n=1}^N \max(X_n - m, 0)$$

с математическим ожиданием

$$E(S^*) = E(N) E(\max(X - m, 0)) = E(N) \int_m^{\infty} (x - m) d\Lambda(x) = \\ = E(N) \int_m^{\infty} x d\Lambda(x) - E(N)mP(X > m) = E(\tilde{S}) - E(S)P(X > m)$$

(величина $E(\tilde{S})$ определена в п. в)). Следовательно, искомая процентная доля составляет

$$E(S^*) / E(S) = E(\tilde{S}) / E(S) - P(X > m) = 84\% - 16\% = 68\%.$$

д) Ссылаясь на свойства распределения Пуассона, а также таблицу 1.4.3.7, выводим

$$\text{Var}(S) = E(N)E(X^2) = E(N)(\text{Var}(X) + m^2) = E(N)m^2 \exp(\sigma^2), \\ \text{Var}(S^*) = E(N)E((\max(X - m, 0))^2) = E(N) \int_m^{\infty} (x - m)^2 d\Lambda(x) = \\ = E(N) \int_m^{\infty} x^2 d\Lambda(x) - 2E(N)m \int_m^{\infty} x d\Lambda(x) + E(N)m^2 P(X > m).$$

Согласно таблице 4.2.3.1,

$$\int_m^{\infty} x^2 d\Lambda(x) = \exp(2\mu + 2\sigma^2)(1 - \Lambda(m; \mu + 2\sigma^2, \sigma)) = \\ = m^2 \exp(\sigma^2)(1 - \Phi(-3\sigma / 2)) = m^2 \exp(\sigma^2) \Phi(3\sigma / 2).$$

Таким образом, искомая процентная доля равна

$$\frac{\text{Var}(S^*)}{\text{Var}(S)} = \Phi\left(\frac{3}{2}\sigma\right) - \frac{2mE(\tilde{S})}{mE(S)\exp(\sigma^2)} + \frac{P(X > m)}{\exp(\sigma^2)} = \\ = \Phi\left(\frac{3}{2}\sigma\right) - \exp(-\sigma^2) \left(2 \frac{E(\tilde{S})}{E(S)} - P(X > m)\right) = \\ = 0,99865 - e^{-1}(1,68 - 0,16) = 0,99865 - 0,02791 = 97\%$$

(в выкладках учтены п. б) и в)).

2. В зависимости от числа N убытков размером выше $a > 0$ убыток R перестраховщика составляет

$$R = \begin{cases} 0, & \text{если } N = 0, \\ X_1, & \text{если } N = 1, \\ \max(X_1, X_2), & \text{если } N > 1. \end{cases}$$

При $p_n = P(N = n)$ имеем

$$E(R) = p_1 E(X_1) + (1 - p_0 - p_1) E(\max(X_1, X_2)).$$

Далее $E(X_1) = \alpha a / (\alpha - 1)$ (см. табл. 1.4.3.7). Таким образом, задача сводится к расчету $E(\max(X_1, X_2))$. Его можно выполнить тремя способами.

I. При стандартном подходе используется совместная плотность $f(x_1)f(x_2)$ независимых размеров убытков X_1 и X_2 , где $f(x) = F'(x) = \frac{\alpha}{a} \left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}$.

Имеем

$$E(\max(X_1, X_2)) = \iint \max(x_1, x_2) f(x_1) f(x_2) dx_1 dx_2 = \\ = \iint_{x_1 > x_2} x_1 f(x_1) f(x_2) dx_1 dx_2 + \iint_{x_2 > x_1} x_2 f(x_1) f(x_2) dx_1 dx_2 = \\ = 2 \iint_{x_1 > x_2} x_1 f(x_1) f(x_2) dx_1 dx_2 = \\ = 2 \int_a^{\infty} \left(\int_a^{x_1} f(x_2) dx_2 \right) x_1 f(x_1) dx_1 = \\ = 2 \int_a^{\infty} F(x_1) x_1 f(x_1) dx_1 =$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_a^{\infty} \left(1 - \left(\frac{x}{a} \right)^{-\alpha} \right) x \frac{\alpha}{a} \left(\frac{x}{a} \right)^{-\alpha-1} dx = \\
&= 2\alpha \int_a^{\infty} \left(\left(\frac{x}{a} \right)^{-\alpha} - \left(\frac{x}{a} \right)^{-2\alpha} \right) dx = \\
&= 2\alpha \left[\frac{a}{1-\alpha} \left(\frac{x}{a} \right)^{1-\alpha} - \frac{a}{1-2\alpha} \left(\frac{x}{a} \right)^{1-2\alpha} \right]_a^{\infty} = \\
&= 2\alpha \left(\frac{a}{\alpha-1} - \frac{a}{2\alpha-1} \right) = \frac{2\alpha a(2\alpha-1-\alpha+1)}{(\alpha-1)(2\alpha-1)} = \\
&= \frac{2\alpha^2 a}{(\alpha-1)(2\alpha-1)}.
\end{aligned}$$

(Замечание: последнее значение больше, чем $E(X_1) = \alpha a / (\alpha - 1)$.)

II. Распределение величины $\max(X_1, X_2)$ можно получить элегантнее и проще:

$$P(\max(X_1, X_2) < x) = P(X_1 < x, X_2 < x) = P(X_1 < x)P(X_2 < x) = (F(x))^2.$$

Отсюда

$$E(\max(X_1, X_2)) = \int_a^{\infty} x d(F(x))^2 = 2 \int_a^{\infty} x F(x) f(x) dx, \text{ а дальше как в п. I).}$$

III. Сначала размер первого убытка полагается известным и находится условное математическое ожидание

$$\begin{aligned}
E(\max(X_1, X_2) | X_1 = x) &= xP(X_2 \leq x) + E(X_2 | X_2 > x)P(X_2 > x) = \\
&= x \int_a^x dF(x_2) + \int_x^{\infty} x_2 dF(x_2) = \\
&= x \left(1 - \left(\frac{x}{a} \right)^{-\alpha} \right) + x \frac{\alpha}{\alpha-1} \left(\frac{x}{a} \right)^{-\alpha} = (\text{см. табл. 1.4.3.7}) \\
&= x + \frac{x}{\alpha-1} \left(\frac{x}{a} \right)^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

Затем эта величина интегрируется по всем возможным размерам первого убытка:

$$\begin{aligned}
E(\max(X_1, X_2)) &= \int_a^{\infty} E(\max(X_1, X_2) | X_1 = x) f(x) dx = \\
&= \int_a^{\infty} \left(x + \frac{x}{\alpha-1} \left(\frac{x}{a} \right)^{-\alpha} \right) \frac{\alpha}{a} \left(\frac{x}{a} \right)^{-\alpha-1} dx
\end{aligned}$$

и т. д. с тем же конечным результатом, что и в I).

№6

1. а) Используя таблицу 4.2.3.1, находим

$$E(X | X > a) = \int_a^{\infty} x dF(x) / (1 - F(a)) = \frac{\alpha a}{\alpha - 1} = 18.$$

$$E(X \cdot 1_{\{X > a\}}) = \int_a^{\infty} x dF(x) = E(X | X > a) \cdot (1 - F(a)) = \frac{\alpha a}{\alpha - 1} \left(\frac{a}{b} \right)^{-\alpha} = 2,$$

$$\begin{aligned}
E(\max(X - a, 0)) &= \int_a^{\infty} (x - a) dF(x) = \int_a^{\infty} x dF(x) - a(1 - F(a)) = \\
&= (E(X | X > a) - a)(1 - F(a)) = \frac{a}{\alpha - 1} \left(\frac{a}{b} \right)^{-\alpha} = 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X - a | X > a) &= \\
&= \int_a^{\infty} (x - a) dF(x) / (1 - F(a)) = E(\max(X - a, 0)) / (1 - F(a)) = \frac{a}{\alpha - 1} = 9.
\end{aligned}$$

б) $E(X | X > a)$ — средний размер крупного убытка, $E(X - a | X > a)$ — среднее превышение убытком уровня a .

в) Пусть $Y = X - a | X > a$ размер превышения уровня a . В силу определения условной вероятности имеем

$$\begin{aligned}
P(Y < y) &= P(X - a < y | X > a) = P(a < X < a + y) / P(X > a) = \\
&= \frac{F(a + y) - F(a)}{1 - F(a)} = \frac{1 - F(a) - (1 - F(a + y))}{1 - F(a)} = 1 - \frac{((a + y)/b)^{-\alpha}}{(a/b)^{-\alpha}} = 1 - \left(\frac{a + y}{a} \right)^{-\alpha},
\end{aligned}$$

при $y > 0$, и $P(Y < y) = 0$ при $y \leq 0$. Отсюда заключаем, что размер превышения подчинен распределению Парето с нулевой точкой.

2. Обозначим через f плотность распределения величин X и Y . Учитывая условие $f(z) = \beta e^{-\beta z}$, находим

$$\begin{aligned}
E(\min(X, Y)) &= \iint \min(x, y) f(x) f(y) dx dy = \\
&= 2 \iint_{x < y} x f(x) f(y) dx dy = 2 \int_0^{\infty} \left(\int_x^{\infty} f(y) dy \right) x f(x) dx = \\
&= 2 \int_0^{\infty} (1 - F(x)) x f(x) dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-\beta x} x \beta e^{-\beta x} dx = \int_0^{\infty} x \cdot 2\beta e^{-2\beta x} dx.
\end{aligned}$$

Последний интеграл представляет собой математическое ожидание экспоненциального распределения с параметром 2β и равен $1 / 2\beta$.

Тот же результат можно получить быстрее, если воспользоваться распределением величины $\min(X, Y)$:

$$P(\min(X, Y) > z) = P(X > z, Y > z) = P(X > z)P(Y > z) = e^{-\beta z} e^{-\beta z} = e^{-2\beta z}.$$

Отсюда следует, что $\min(X, Y)$ имеет экспоненциальное распределение с параметром 2β .

№7

1. Эффект освобождения определяется как

$$r_i(a) = E(\min(X_i, a)) / E(X_i)$$

(здесь и в дальнейшем X_i обозначает случайную величину, распределенную так же, как X_{in}).

2. Перестраховщик несет от каждого убытка X_{in} долю $\max(X_{in} - a, 0)$. С помощью равенства $E(X_i) = E(\min(X_i, a)) + E(\max(X_i - a, 0))$ получаем

$$\begin{aligned} E(R_a) &= \sum_{i=1}^I E(N_i) E(\max(X_i - a, 0)) = \\ &= \sum_{i=1}^I E(N_i) E(X_i) (1 - r_i(a)) = \sum_{i=1}^I (1 - r_i(a)) E(S_i). \end{aligned}$$

3. Величина $E(S_i)$ представляет собой основу брутто-премии b_i по риску i . Второй существенной компонентой брутто-премии b_i является нагрузка k страховщика. Размеры брутто-премий (по крайней мере, суммарные по группам рисков), а также размер нагрузки перестраховщик узнает от страховщика и оценивает величину $E(S_i)$ значением $(1 - k)b_i$ (при необходимости предварительно скорректировав оригинальные премии b_i страховщика по своему усмотрению). Оценку основной части брутто-премии b_i перестраховщик может получить и не зная размера нагрузки, если рыночная статистика позволяет ему оценить средний относительный убыток соответствующей группы рисков.
4. В имущественном страховании для рисков, отличающихся только страховыми суммами, предполагается соотношение $X_i = v_i Y$, то есть постоянство функции распределения G степени убытка $Y = X_i / v_i$. Последнее оправдывает применение одинаковой ставки (нетто-)премии $E(Y) = E(X_i) / v_i$ для рисков, отличающихся только страховыми суммами. Распределение G можно оценить на основании всех наблюдаемых степеней убытка X_{in} / v_i . Тогда F_i будет связана с v_i формулой:
- $$F_i(x) = P(X_i \leq x) = P(v_i Y \leq x) = P(Y \leq x / v_i) = G(x / v_i).$$
5. В отличие от имущественного страхования, в страховании гражданской ответственности оценить максимальный размер убытка невозможно, поскольку требование третьих лиц обычно не зависит от свойств страхуемого

объекта. Более того, страхователи выбирают страховые суммы v_i , скорее исходя из личного неприятия риска, поэтому даже при одинаковом потенциале убытков страхователей страховые суммы могут различаться. Следовательно, степень убытка нельзя считать одинаково распределенной.

6. В немецком страховании гражданской ответственности при каждом удвоении стандартной страховой суммы v_0 принято повышать нетто-премию (ожидаемый убыток) на фиксированный и всегда одинаковый процент $z \in (0; 100)$, например, на 20%. (Значение $z = 100\%$ соответствует модели, применяемой в имущественном страховании.) Если $b_0 = b(v_0)$ — ожидаемый убыток по риску со стандартной страховой суммой v_0 , то ожидаемый убыток по риску со страховой суммой $2v_0$ вычисляется по формуле

$$b(2v_0) = b_0(1 + z).$$

Соответственно,

$$\begin{aligned} b(2^k v_0) &= b_0(1 + z)^k, \\ b(tv_0) &= b_0(1 + z)^{\text{ld}(t)}, \end{aligned}$$

где ld — логарифм по основанию 2, и

$$b(v) = b_0(1 + z)^{\text{ld}(v/v_0)}.$$

7. Страхование гражданской ответственности представляет собой покрытие первичного риска. Если X — размер требования третьих лиц по отдельному страховому случаю, а v — страховая сумма, то под ответственность страховщика попадает величина $\min(X, v)$. Пусть N обозначает число убытков по отдельному риску. Тогда $b(v) = E(N)E(\min(X, v))$. При перестраховании эксцедента убытка с приоритетом $a < v$ страховщику остается часть $\min(X, a)$ с математическим ожиданием $b(a)$. Тогда перестраховщику причитается часть премии $b(v) - b(a)$.
8. Согласно п. 6 и 7, относительная доля перестраховщика в премии составляет

$$1 - \frac{b(a)}{b(v)} = 1 - (1 + z)^{\text{ld}(a/v)} = 1 - \left(\frac{a}{v}\right)^{\text{ld}(1+z)}.$$

Инфляция не влияет на эту величину, когда значения a , v и z постоянны. Если размер X требования третьих лиц по причине инфляции возрастает до значения $X(1 + j)$, то отношение математических ожиданий $b(a)$ и $b(v)$ становится равно

$$\frac{b_j(a)}{b_j(v)} = \frac{E(\min(X(1 + j), a))}{E(\min(X(1 + j), v))} = \frac{b(a/(1 + j))}{b(v/(1 + j))} = (1 + z)^{\text{ld}(a/v)},$$

то есть не изменится. Значит, относительная доля перестраховщика в премии не зависит от инфляции!

- Ajne B. Comparison of some methods to fit a multiplicative tariff structure to observed risk data // ASTIN Bulletin, 1986, 16, p. 63–68.
- Bailey R. A., Simon L. J. Two studies in automobile insurance ratemaking // ASTIN Bulletin, 1960, 1, p. 192–217.
- Beirlant J. et al. Statistical risk evaluation applied to (Belgian) car insurance // Insurance: Mathematics & Economics, 1991, 10, p. 289–302.
- Benjamin S. Loadings for Insurance Premiums // The Geneva Papers on Risk and Insurance, 1986, 39, p. 110–125.
- Bertram J. Numerische Berechnung von Gesamtschadenverteilungen // Blätter der DGVM, 1981, S. 175–194.
- Beuthe M., Van Namen Ph. La selection des assures et la determination des primes d'assurances par l'analyse discriminante // Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 1975, S. 137–156.
- Borch K. Application of Garne Theory to Some Problems in Automobile Insurance // ASTIN Bulletin, 1962, 2, p. 208–221.
- Borch K. The Mathematical Theory of Insurance. Lexington: Lexington Books USA, 1974.
- Brockman M. J., Wright T. S. Statistical Motor Rating: Making Effective Use of Your Data // Journal of the Institute of Actuaries, 1992, 119, p. 457–526.
- Bühlmann H. Numerical Evaluation of the Compound Poisson Distribution: Recursion or Fast Fourier Transform? // Scandinavian Actuarial Journal, 1984, p. 116–126.
- Bühlmann H., Jewell W. S., Mangold K. P. Hierarchical Credibility Revisited // Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 1987, S. 35–54; Ibid., S. 99–103.
- Bühlmann H., Gisler A. Credibility in the Regression Case Revisited (A late Tribute to Charles A. Hachemeister) // ASTIN Bulletin, 1997, 27, p. 83–98.
- Bühlmann H., Straub E. Glaubwürdigkeit für Schadensätze // Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 1970, S. 111–133.
- Chang L. W., Fairley B. Pricing automobile insurance under multivariate classification of risks: additive versus multiplicative // Journal of Risk and Insurance, 1979, p. 75–98.
- Christofides S. Regression Models Based on Log-incremental Payments // Claims Reserving Manual. Institute of Actuaries. London, 1990, vol. 2.1.
- Clark K. M. A Formal Approach to Catastrophe Risk Assessment and Management // Proceedings of the Casualty Actuarial Society, 1986, p. 69–92.
- Cohen A., Dupin G., Levi Ch. Tarification de l'Incendie des Risques Industriels Français par la Methode de la Credibilite // ASTIN Bulletin, 1986, 16, p. 149–163.
- Daykin C. D., Pentikäinen T., Pesonen M. Practical Risk Theory for Actuaries. London: Chapman & Hall, 1994.

- Dickmann H. Einsatz der Clusteranalyse bei Klassifikationsproblemen in der Versicherungswissenschaft // Blätter der DGVM, 1978, S. 378–401.
- Doray L. G. UMVUE of the IBNR Reserve in a Lognormal Linear Regression Model // Insurance: Mathematics & Economics, 1996, 18, p. 43–57.
- Feilmeier M., Bertram J. Anwendung numerischer Methoden in der Risikotheorie // DGVM-Schriftenreihe. Karlsruhe: Verlag Versicherungswirtschaft, 1987.
- Friedman D. G. Insurance and the Natural Hazards // ASTIN Bulletin 1972, 7, p. 4–58.
- Gisler A. Optimum Trimming of Data in the Credibility Model // Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 1980, S. 313–326.
- Gisler A., Reinhard P. Robust Credibility // ASTIN Bulletin, 1993, 23, p. 117–143.
- Hallin M., Ingenbleek J.-F. The Swedish Automobile Portfolio in 1977 – a Statistical study // Scandinavian Actuarial Journal, 1983, p. 49–64.
- Helten E. (Hg.) Beiträge zur Credibility-Theorie // DGVM-Schriftenreihe, Heft 16. Karlsruhe: Verlag Versicherungswirtschaft, 1989.
- Hesselager O. Some Results on Optimal Reinsurance in Terms of the Adjustment Coefficient // Scandinavian Actuarial Journal, 1990, p. 80–95.
- Hogg R. V., Klugman S. A. Loss Distributions. New York: Wiley, 1984.
- Claims Reserving Manual. London: Institute of Actuaries (Hg.), 1989 ff.
- Jørgensen B., Paes de Souza M. C. Fitting Tweedie's Compound Poisson Model to Insurance Claims Data // Scandinavian Actuarial Journal, 1994, p. 69–93.
- Jung J. On automobile insurance ratemaking // ASTIN Bulletin, 1968, 5, p. 41–48.
- Kaminsky K. S. Prediction of IBNR Claim Counts by Modelling the Distribution of Report Lags // Insurance: Mathematics & Economics, 1987, 6, p. 151–159.
- Kastelijn W., Remmerswaal J. C. Solvency. Rotterdam: Nationale-Nederlanden, 1986.
- Kaufmann R., Gadmer A., Klett R. Introduction to Dynamic Financial Analysis // ASTIN Bulletin, 2001, 31, p. 213–249.
- Klugman S. A., Panjer H. H., Willmot G. E. Loss Models: From Data to Decisions. New York: Wiley, 1998.
- Kromschröder B. Zum Stand und zur Entwicklung der Versicherungsentscheidungstheorie // Risiko-Versicherung-Markt. Karlsruhe: Verlag Versicherungswirtschaft, 1994.
- Kruse O. Modelle zur Prognose des Schadenbedarfs in der Kraftfahrzeug-Haftpflichtversicherung. Karlsruhe: Verlag Versicherungswirtschaft, 1997.
- Lemaire J. Selection procedures of regression analysis applied to automobile insurance // Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 1977, S. 143–160; Ibid., 1979, S. 65–72.
- Lemaire J. Automobile Insurance. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1985.
- Lemaire J. Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1995.
- Loimaranta K., Jacobsson J., Lonka H. On the use of mixture models in clustering multivariate frequency data, 1980 (Доклады ко 2-й теме Международного конгресса актуариев, 1980).
- Löwe S. P., Stanard J. N. An Integrated Dynamic Financial Analysis and Decision Support System for a Property Catastrophe Reinsurer // ASTIN Bulletin, 1997, 27, p. 339–371.

- Mack Th.* Improved Estimation of IBNR Claims by Credibility Theory // Insurance: Mathematics & Economics, 1990, 9, p. 51–57.
- Mack Th.* Distribution-free Calculation of the Standard Error of Chain Ladder Reserve Estimates // ASTIN Bulletin, 1993, 23, p. 213–225.
- Mack Th.* Which Stochastic Model is Underlying the Chain Ladder Method? // Insurance: Mathematics & Economics, 1994, 15, p. 133–138.
- Mack Th.* Measuring the Variability of Chain Ladder Reserve Estimates // Claims Reserving Manual. Institute of Actuaries. London, 1997, vol. 2.
- Mack Th.* Credible Claims Reserves: The Benktander Method // ASTIN Bulletin, 2000, 30, p. 333–347.
- Mangold K. P.* Rekursive Schätzverfahren in der Kreditabilitätstheorie // Blätter der DGVM, 1987, S. 27–44.
- Masure L.* Les methodes de l'analyse discriminante appliquees aux problemes de l'assurance automobile // Bulletin de l'Association Royale des Actuaire Belges, 1978, p. 29–51.
- McCullagh P., Neider J. A.* Generalized Linear Models. London: Chapman & Hall, 1983; Ibid., 1989, p. 296–300.
- Mehring J.* Ein mathematisches Hilfsmittel für Statistik- und Tariffragen in der Kraftfahrtversicherung // Blätter der DGVM, 1964, S. 111–125.
- Neuhaus W.* Another Pragmatic Loss Reserving Method or Bornhuetter/Ferguson Revisited // Scandinavian Actuarial Journal, 1992, p. 151–162.
- Panjer H. J., Willmot G.* Insurance Risk Models. Schaumburg/Illinois: Society of Actuaries, 1992.
- Pesonen M.* Optimal Reinsurances // Scandinavian Actuarial Journal, 1984, p. 65–90.
- Pitkänen P.* Tariff Theory // ASTIN Bulletin, 1975, 8, p. 204–228.
- Renshaw A. E.* Modelling the Claims Process in the Presence of Covariates // ASTIN Bulletin, 1994, 24, p. 265–285.
- Robertson J. P.* The Computation of Aggregate Loss Distributions // Proceedings of the Casualty Actuarial Society, 1992, p. 57–133.
- Sant D. T.* Estimating expected losses in auto insurance // Journal of Risk and Insurance, 1980, p. 133–151.
- Schäffer K.-A.* Klassifizierung regionaler Schadenbedarfsunterschiede für PKW in der Kraftfahrzeug-Haftpflichtversicherung // Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft, 1985, S. 1–19.
- Schnieper R.* Separating True IBNR and IBNER Claims // ASTIN Bulletin, 1991, 21, p. 111–127.
- Schnieper R.* Portfolio Optimization // ASTIN Bulletin, 2000, 30, p. 195–248.
- Schröter K. J.* Verfahren zur Approximation der Gesamtschadenverteilung: Systematisierung, Techniken und Vergleiche. Karlsruhe: Verlag Versicherungswirtschaft, 1995.
- Spanier J. K., Oldham B.* An Atlas of Functions. Berlin: Springer-Verlag, 1987.
- Sticker K.* Analyse der Tarifstruktur für die Haftpflichtversicherung von Personenkraftwagen. Karlsruhe: Verlag Versicherungswirtschaft, 1984.
- Straub E.* Non-Life Insurance Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 1988.
- Stroinski K. J., Currie I. D.* Selection of Variables for Automobile Insurance Rating // Insurance: Mathematics & Economics, 1989, 8, p. 35–46.

- Taylor G. C.* Separation of Inflation and other Effects from the Distribution of Non-Life Insurance Claim Delays // ASTIN Bulletin, 1977, 9, p. 219–230.
- Taylor G. C.* Loss Reserving: An Actuarial Perspective. Boston: Kluwer, 2000.
- Van Eeghen J.* Loss reserving methods. Rotterdam: Nationale-Nederlanden, 1981.
- Van Eeghen J., Nijssen J. A., Ruygt F. A. M.* Interdependence of risk factors: application of some models // New motor rating structure in the Netherlands. ASTIN-groep. Nederland, 1982.
- Verrall R. J.* Bayes and Empirical Bayes Estimation for the Chain Ladder Model // ASTIN Bulletin, 1990, 20, p. 217–243.
- Walter J. T.* Zur Anwendung von Verallgemeinerten Linearen Modellen zu Zwecken der Tarifierung in der Kraftfahrzeug-Haftpflichtversicherung. Karlsruhe: Verlag Versicherungswirtschaft, 1998.
- Weissner E. W.* Estimation of the Distribution of Report Lags by the Method of Maximum Likelihood // Proceedings of the Casualty Actuarial Society, 1978, 65, p. 1–9.
- Wenger H.* Eine Tarifierungsmethode im Feuer-Industriegeschäft // Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 1973, S. 95–111.
- Wright T. S.* Stochastic Claims Reserving When Past Claim Numbers Are Known // Proceedings of the Casualty Actuarial Society, 1992, 79, p. 255–361.

Предметный указатель

- Антиселекция 4.3.2
- Баланс
временной 1.2.2
коллективный 1.2.2
- Выбор факторов 2.3
- Гарантийный капитал 1.2.2, 1.2.3, 4.4.2
- Год
развития 3.1.4
события 3.1.4
- Годовой лимит 4.1.2, 4.3.4
- Деление риска 4
- Динамический финансовый анализ 4.5
- Дискретизация распределения 1.4.4
- Дисперсионный анализ 2.3.3, 2.3.6
- Дифференциация собственного удержания 4.4.4
- Дихотомическая переменная 2.3.4
- Доверительное среднее 2.5.4
- Зависимость дисперсии от объема 1.3.2
- Инфляция 1.3.2, 3.1.7, 3.4.2, 4.3.2, 4.3.3
- Исчисление премии 1.2.2, 1.2.3, 2
- Исчисление тарифа 2
- Качество
года 1.4.2, 3.2.3
распределения 2.5.3
- Класс значений фактора 2.2
- Кластер-анализ 2.2
- Концентрация убытков 1.4.3
- Коэффициент ранговой корреляции Спирмана 3.2.7
- Критерий
Манна—Уитни—Уилкоксона 2.2.2
F- 2.2.2
t- 2.2.2
- Лейер 4.3.3
- Маргинальное слагаемое 2.4.1
- Маргинальное среднее 2.4.2
- Маргинальный множитель 2.4.1
- Матрица плана 2.4.6, 3.3.4
- Мера
объема 1.3.1, 3.1.7
расстояния 2.2
- Метод
Бейли—Саймона 2.4.3, 2.4.4, 2.4.6
быстрого расчета Фурье 1.4.5
выравнивания 2.4
доверительный 2.5
кейп-кода 3.2.5
максимума правдоподобия 1.4.3 и др.
маргинальных сумм 2.4.3, 2.4.4, 3.3.2
минимума хи-квадрат 1.4.3, 3.4.3
моментов 1.4.3, 1.4.4
наименьших квадратов 1.4.3, 2.4.6, 3.2.6, 3.2.8, 3.3.4
отделения 3.4.2
отношения правдоподобий 1.4.3 и др.

- Метод (*продолжение*)
 смешанного распределения 2.2.4
 Уорда 2.2.3, 2.2.5, 2.3.4
 цепной лестницы 3.2.4–3.2.8, 3.3.2, 3.4.4
- Множитель развития 3.2.4
- Моделирование 1.1.1
- Модель
 Бюльмана 2.5.4
 Бюльмана–Штрауба 2.5.4, 3.2.3
 индивидуальная 1.3, особ. 1.3.2, 1.5 и др.
 коллективная 1.4, особ. 1.4.4, 1.5 и др.
 обобщенная линейная 2.4.9
 полезности 4.4.2
 регрессионная 2.4.6, 3.2.6, 3.3.4
- Надбавка
 гарантийная 1.2.3
 рисковая 1.2.3
 удвоения 4.3.3
- Неполная функция моментов 4.2.3
- Нормальные уравнения 2.5.3
- Оптимальность по Парето 4.4.5
- Оценка
 байесовская 3.2.3, 4.3.3
 доверительная 2.5.3, 3.2.3, 4.3.3
 параметров 1.4.3
- Ошибка
 оценочная 3.1.8
 случайная 3.1.8
 стандартная 3.1.8 и др.
- Перекрестная классификация 2.3.6, 2.4, 3.3
- Перестановка классов 2.2
- Перестрахование 4.1.3, 4.4
 квотное 4.1.3
- эксцедента кумулятивного убытка 4.1.3, 4.3.5
 эксцедента сумм 4.1.3, 4.3.5, 4.4.4, 4.4.5
 эксцедента убытка 4.1.3, 4.3.3, 4.4.4, 4.4.5
 Stop-Loss 4.1.3, 4.3.4
- Плавающая премия 4.3.4
- Платежеспособность 4.5
- Полис 1.2.2
- Полисо-год 1.3.2
- Политика формирования портфеля 1.2.4, 4.5
- Пополнение ответственности 4.3.4
- Потребная премия 2.4.1
- Принцип премии 1.2.5
- Принцип страхования 1.2.2
- Приоритет 4.1.3
- Размер убытка 1.4.3
- Распределение
 Вейбулла 1.4.3
 гамма- 1.3.3, 1.3.8, 1.4.3, 2.3.7, 2.4.5, 3.3.3, 3.4.2
 лаг- 3.4.3
 логарифмированное
 гамма- 4.3.3
 Лапласа 1.4.3
 логистическое 1.4.3
 Стюдента 1.4.3
 логнормальное 1.3.5, 1.3.8, 1.4.3, 2.2.2, 2.3.3, 2.3.6, 2.4.6, 3.2.8, 3.3.4, 4.3.2
 модифицированное Пуассона 1.3.7, 1.3.8, 2.3.7, 2.4.4, 3.3.2
 нормальное 1.4.3
 обратное гауссовское 1.3.4, 1.3.8, 1.4.3, 2.2.3, 2.2.4, 2.3.5, 2.4.7, 3.3.5, 3.4.2
 отрицательное биномиальное 1.4.2, 2.5.2, 3.4.3

- Распределение (*продолжение*)
 Парето 1.4.3, 4.2.3, 4.3.3
 Парето с нулевой точкой 1.4.3, 4.2.3
 Пуассона 1.4.2, 2.5.2
 смешанное Пуассона 1.4.2, 2.5.2
 совокупного убытка 1.4.4, 1.5
 составное Пуассона 1.4.4, 1.5, 2.3.7
 экспоненциальное 1.3.3, 1.3.7, 4.2.3
- Расходы на ведение дела 1.2.3, 4.3.2
- Резерв
 индивидуальный 3.1.1
 Бенкандера 3.2.3
 Борнхюеттера–Фергюсона 3.2.3
 убытка 3, 3.1.9
 флуктуационный 1.2.2
- Рекурсия Пейнджера 1.4.4
- Риск 1.2.2
 вторичный 4.1.1, 4.2.2, 4.2.3
 диагноза 1.2.2
 изменчивости 1.2.2
 моральный 4.1.2, 4.3.5
 оценки 1.2.2
 ошибки 1.2.2
 первичный 4.1.1, 4.2.2, 4.2.3
 прогноза 1.2.2
 случайности 1.2.2
 технический страховой 1.2.2
- Рисковая политика 4.5
- Система бонус-малус 2.5.2, 2.5.4
- Скалярный параметр 1.4.3
- Собственное удержание 4.4.2
- Сострахование 4.1.2
- Ставка убытка 1.3.2
- Стихийное бедствие 1.2.2, 1.4.2, 1.4.5, 4.3.5
- Страхование первичного риска 4.1.2
- Структурная функция 2.5.2
- Структурный параметр 2.5.4
- Тарификация
 на базе опыта 4.3.3, 4.3.4
 «Burning-Cost» 4.3.3
 «Exposure» 4.3.3
- Тарифный фактор 2.3.1
- Точность оценки 2.4.5, 3.1.8, 3.2, 3.3.2, 3.4.4
- Транзакционные расходы при перестраховании 4.4
- Треугольник развития 3.1.4
- Убыток
 на один полисо-год 1.3.2
 наступивший 3.1.5
 нормированный 1.3.2
 крупный 1.4.3, 2.6, 4.2.6
 поздний 3.1.1
 совокупный 1.2.2, 1.3.2, 1.4.4
- Уклон 1.4.3
- Участие в прибыли 4.3.4
- Фактор риска 2.3.1
- Формула Байеса 2.2.4, 2.5.2
- Франшиза 4.1.2, 4.3.2
 вычитаемая 4.1.2, 4.3.2
 годовая 4.1.2, 4.3.4
 интегральная 4.4.5
- Частота убытков 1.4.2
- Число убытков 1.4.2
- Эксцедент убытка 4.1.3
- Эффект календарного года 3.1.7, 3.2.6, 3.4.2
- Эффект освобождения 4.2.5
- IBNER, IBNR 3.1.1

Издательство «Олимп—Бизнес»

119071, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 13/2, 15-й этаж.

Тел./факс (095) 411-90-14 (многоканальный)

Интернет-магазин: <http://www.olbuss.ru>

e-mail: sales@olbuss.ru

**Наши книги можно приобрести
в издательстве «Олимп—Бизнес»,
центральных и специализированных
книжных магазинах г. Москвы**

**По всем вопросам
оптовой и розничной торговли
нашей продукцией
обращайтесь
в отдел распространения издательства**

Томас Мак

Математика рискованого страхования

Редактор *Н. М. Дмуховская*

Корректор *Н. В. Антонова*

Компьютерная верстка *Д. А. Мацквявигюс*

Художник *В. П. Коршунов*

Подписано в печать 11.02.2005.

Формат 70×100 ¹/₁₆. Бумага офсетная №1.

Гарнитура «Таймс». Печать офсетная.

Печ.л. 27,0. Уч.-изд.л. 31,2. Заказ № 959

Издательство «Олимп—Бизнес».

119071, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 13/2, этаж 15.

ОАО «Типография „Новости“».

105005, Москва, ул. Ф. Энгельса, 46.