ЕГЭ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
«МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ЕГЭ»

Под редакцией Ф.Ф. Лысенко,
С.Ю. Кулабухова

готовимся к ЕГЭ

МАТЕМАТИКА

УСТНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ И БЫСТРЫЙ СЧЕТ

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ
УПРАЖНЕНИЯ
ЗА КУРС 7-11 КЛАССОВ

ЛЕГИОН

Готовимся к ЕГЭ

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

УСТНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ И БЫСТРЫЙ СЧЁТ

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ ЗА КУРС 7–11 КЛАССОВ

Учебно-методическое пособие

ТМ

ЛЕГИОН-М
Ростов-на-Дону
2010

ББК 74.262.21
М34

Рецензенты:
А. Б. Неймарк — к. ф.-м. н.
Л. Н. Ланцова — учитель высшей категории

Авторский коллектив:
Л. Н. Евич, С. О. Иванов, Л. Н. Ковалёва, Л. С. Ольховая

М34 **Математика. Устные вычисления и быстрый счёт. Тренировочные упражнения за курс 7 – 11 классов:** учебно-методическое пособие / Под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион-М, 2010. — 231 с. — (Готовимся к ЕГЭ)

ISBN 978-5-91724-051-0

В предлагаемом пособии представлено около **3000 тренировочных устных упражнений** по всем дидактическим линиям программы по математике за курс 7-х—11-х классов. Книга состоит из 17 глав. В каждую главу включён теоретический материал. Предлагаемые задания объединены в группы по шесть, для одного из них приводится решение. В конце книги даны ответы ко всем заданиям.

Пособие адресовано ученикам, учителям и методистам. Учителю дается материал, который может быть использован как при изложении новых тем, так и при организации тематического повторения. Ученику предоставляется возможность выработать навыки выполнения быстрых и качественных вычислений.

Особенно книга важна выпускникам, готовящимся к ЕГЭ. Прорешав пособие, выпускник сможет **правильно выполнить задания части В** и потратит на их выполнение минимальное время, а это даст возможность уделить больше внимания решению трудных заданий части С.

ББК 74.262.21

ISBN 978-5-91724-051-0

Оглавление

От авторов

С введением стандартов второго поколения математическое образование в школе направлено на достижение планируемых результатов освоения основной образовательной программы.

Освоить планируемые результаты возможно за счёт внедрения в педагогическую практику системы устных упражнений. На наш взгляд, именно эта система поможет школьникам отработать технику вычислительных операций, выполнять правильно и быстро задания разного уровня сложности, развивать память, внимание, речь.

К сожалению, подходящих материалов по устному решению задач явно недостаточно. При этом в имеющихся пособиях либо приводятся лишь приёмы устного счёта, либо отсутствует необходимый теоретический материал, либо невелик набор рассматриваемых тем.

Настоящее пособие мы рекомендуем прежде всего тем, кто желает научить и научиться выполнять задания как базового, так и повышенного уровней сложности. Книга даёт возможность овладеть приёмами выполнения различных письменных преобразований и повысить достоверность получаемых результатов.

Важность умения выполнять те или иные действия «в уме» трудно переоценить. Когда вы пытаетесь выполнить какое-либо задание устно, то подход к решению у вас совершенно иной, чем при письменном решении. Вы лучше анализируете условие, составляете более рациональный план решения и, наконец, происходит существенно бóльшая мобилизация ваших умственных ресурсов.

При просмотре материала может возникнуть вопрос: «Неужели всё написанное можно решить устно?» Отвечаем: «Да. Можно!» Однако алгоритмы выполнения основополагающих процедур нужно обязательно освоить, а для этого надо знать правила, методы, формулы.

Следует помнить, что книга может чему-то научить только заинтересованного человека, читающего её с карандашом в руке. Для этого после каждого задания оставлено место, куда можно занести не только ответ, но и результаты промежуточных действий.

Сталкиваясь с многошаговыми упражнениями, не пугайтесь, разберите приведённое решение аналогичного задания из этой группы и вернитесь к выполнению тех, которые вызвали затруднение. В итоге, скорее всего, всё решится устно!

Данное пособие состоит из 17 глав, которые в свою очередь разбиты на части. В книге представлены тренировочные упражнения по всем дидактическим линиям программы по математике за курс 7х — 11х классов. Учителю даётся полноценный пропедевтический материал, который может быть использован при изложении тем «Решение алгебраических уравнений», «Степень с рациональным показателем», «Арифметический корень натуральной степени», «Решение неравенств методом интервалов», «Делимость чисел» и др. Подробно отражены темы «Предел последовательности», «Предел функции», «Определённый интеграл», «Сравнения по модулю», «Решение уравнений в целых числах». Задания по перечисленным модулям, безусловно, с «заморочками». Но мы считаем, что если ученик отработает каждое задание на уровне знаний, умений и практического применения, то он сможет преодолеть любые трудности, возникшие при решении. В каждой главе приводится теоретический материал, отмеченный символом . Ученик, приступая к выполнению задания, может вспомнить основные понятия, определения, формулы.

Предлагаемые задания объединены в группы по 6 штук (а — е), причём для одного из них приводится решение. Изучив это решение, даже недостаточно подготовленный ученик сможет успешно справиться с остальными заданиями этой группы. В конце книги расположены ответы ко всем заданиям.

Мы считаем, что книга заинтересует преподавателей и учеников основной и средней школы.

Учитель может пользоваться заданиями при:

- изучении новой темы;
- закреплении изученного;
- повторении;
- корректировке знаний учащихся.

Ученику предоставляется возможность:

- повторять и закреплять пройденное;
- совершенствовать вычислительную культуру;
- тренировать память.

Пособие особенно полезно выпускникам. Оно поможет выработать навыки выполнения качественных вычислений, что является важнейшим условием успешного усвоения материала в процессе подготовки к Единому государственному экзамену. Прорешав задачи данного пособия, выпускник не только сможет правильно решить задания части «В», но и потратит на их выполнение минимальное время. Ведь основная часть необходимых вычислений будет производиться в уме без потери драгоценных минут на выписывание промежуточных выкладок. Таким образом, на ЕГЭ выпускник не только получит высокий балл за решение части «В», но и будет располагать достаточным временем для выполнения более трудных заданий части «С».

Глава I

Линейные уравнения

Линейные уравнения с одной переменной

Равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой, называется уравнением.

Корнем уравнения называется то значение неизвестного, при котором это уравнение обращается в верное равенство.

Решить уравнение — это значит найти все его корни или установить, что их нет.

Уравнение вида $ax = b$, где a и b — заданные числа, x — переменная, называется линейным.

1. Найдите, при каких значениях переменной x верно равенство:

а) $x + 11 = 3$; ________________ г) $y + 16 = -17$; ________________

б) $t - 5 = 14$; ________________ д) $x - 30 = 2$; ________________

в) $8 + z = 12$; ________________ е) $u - 5 = -5$. ________________

Решение.

б) $t - 5 = 14, \quad t = 14 + 5, \quad t = 19.$

Решите уравнение:

2. а) $3x = 1{,}5$; ________________ г) $0{,}2t = 4{,}6$; ________________

б) $-2z = -4$; ________________ д) $\frac{1}{8}x = \frac{1}{4}$; ________________

в) $-5y = -2\frac{1}{2}$; ________________ е) $\frac{2}{5}y = 0$. ________________

Решение.

в) $-5y = -2\frac{1}{2}$, $y = -2{,}5 : (-5)$, $y = 0{,}5$.

3. а) $3(x + 2) = 90$; ________________

б) $-2(x + 10) = 3x - 5x - 20$; ________________

в) $-5(2x + 7) = -10x - 35$; ________________

г) $2(x - 4) = -32$; ________________

д) $4(x + 6) + 3(2x - 1) = 10x$; ________________

е) $6(x - 12) = 3x + 3(x - 1)$. ________________

Решение.

е) $6(x - 12) = 3x + 3(x - 1)$, $6x - 72 = 3x + 3x - 3$, $6x - 72 = 6x - 3$, $0x = 69$, корней нет.

4. а) $\frac{1}{5}(x + 3) = 2$; ________

б) $-\frac{1}{4}(5u - 7) = 6$; ________

в) $2s = \frac{4}{3}(s + 15)$; ________

г) $\frac{2}{3}(10 - k) = -12$; ________

д) $0{,}2(x + 3) = 6$; ________

е) $1{,}25(x - 4) = -3{,}75(x + 4)$. ________

Решение.

е) $1{,}25(x - 4) = -3{,}75(x + 4)$, $1{,}25x - 5 = -3{,}75x - 15$, $5x = -10$, $x = -2$.

5. Решите уравнение относительно x:

а) $x - a = 7$; ____________

б) $4x + a = b + 3x$; ____________

в) $3m + 2x = 0$; ____________

г) $a - x = b$; ____________

д) $ex + c = 0$; ____________

е) $c - 2x = 4 - 3x$. ____________

Решение.

в) $3m + 2x = 0$, $2x = -3m$, $x = -1{,}5m$.

Если отношение $\frac{a}{b}$ равно отношению $\frac{c}{d}$, то равенство $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ называют пропорцией, где $b \neq 0$, $d \neq 0$.

a и d — крайние члены, b и c — средние члены пропорции.

Произведение крайних членов пропорции равно произведению её средних членов.

Если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $ad = bc$.

6. Решите уравнение, используя свойство пропорции:

а) $\frac{3x}{0,2} = \frac{x+5}{0,1}$; ____________ г) $\frac{5}{12} = \frac{b}{0,4}$; ____________

б) $\frac{a}{2} = \frac{3}{5}$; ____________ д) $\frac{1+x}{3} = \frac{2x-8}{5}$; ____________

в) $\frac{0,3}{1,5} = \frac{2}{x-1}$; ____________ е) $\frac{x+1}{0,1} = \frac{-0,03x}{0,02}$. ____________

Решение.

е) $\frac{x+1}{0,1} = \frac{-0,03x}{0,02}$, $\frac{x+1}{0,1} = -\frac{3x}{2}$, $2(x+1) = -3x \cdot 0,1$,

$2x + 2 = -0,3x$, $2x + 0,3x = -2$, $2,3x = -2$, $x = -\frac{20}{23}$.

Линейные уравнения с двумя переменными. Линейная функция

Уравнение вида $ax + by + c = 0$, где a, b, c — заданные числа, называют линейным уравнением с двумя переменными.

Линейной функцией называется функция, которую можно задать формулой вида $y = kx + b$, где x — независимая переменная, k и b — некоторые числа.

7. Выберите пары чисел $(x; y)$, которые являются решением уравнения $2x - 3y + 2 = 0$.

а) $(-1; 0)$; в) $(1; 0)$; д) $(4; 5)$;
б) $(0; -1)$; г) $(5; 4)$; е) $(0,35; 0,9)$.

Решение.

б) Подставим $x = 0$, $y = -1$ в уравнение $2x - 3y + 2 = 0$. Получим $2 \cdot 0 - 3(-1) + 2 = 5$, $5 \neq 0$. Пара чисел $(0; -1)$ не является решением уравнения $2x - 3y + 2 = 0$.

8. Найдите значение коэффициента b в уравнении $5x - by = 12$, если известно, что решением уравнения является пара чисел $(x; y)$:

а) $x = 2$, $y = 3$; ____________ г) $x = -1$, $y = 1$; ____________

б) $x = 0$, $y = -4$; ____________ д) $x = -3$, $y = 9$; ____________

в) $x = -0,1$, $y = -5$; ____________ е) $x = 2,4$, $y = 0$. ____________

Решение.

г) Подставим $x = -1$ и $y = 1$ в уравнение $5x - by = 12$. Получим $5 \cdot (-1) - b \cdot 1 = 12$, $-5 - b = 12$, $b = -5 - 12$, $b = -17$.

9. Для каждого уравнения найдите значение y при заданном значении x:

а) $2x - 3y + 8 = 0$ при $x = 2$; __________

б) $19x = 15y + 45$ при $x = 0$; __________

в) $11x - 3y - 10 = 0$ при $x = \frac{1}{11}$; __________

г) $-x - y = 1$ при $x = -1$; __________

д) $0{,}7x - 2y + 0{,}79 = 0$ при $x = 0{,}3$; __________

е) $5 + 2y - 25x = 0$ при $x = 0{,}04$. __________

Решение.

б) Подставим $x = 0$ в уравнение $19x = 15y + 45$. Получим $19 \cdot 0 = 15y + 45$, $15y + 45 = 0$, $15y = -45$, $y = -45 : 15$, $y = -3$.

10. Для каждого уравнения найдите значения x при заданном значении y:

а) $y = 2x + 1$ при $y = 0$; ____

б) $2x - 3y + 2 = 0$ при $y = -2$; ____

в) $x = 2{,}5 - y$ при $y = -0{,}5$; ____

г) $y = 3x - 5$ при $y = 1$; ____

д) $5x + 1 = 7y$ при $y = \frac{2}{7}$; ____

е) $7x = 2 - 15y$ при $y = 2$. ____

Решение.

б) Подставим $y = -2$ в уравнение $2x - 3y + 2 = 0$. Получим $2x - 3 \cdot (-2) + 2 = 0$, $2x + 6 + 2 = 0$, $2x + 8 = 0$, $2x = -8$, $x = -4$.

11. Преобразуйте к виду $y = kx + b$ уравнение:

а) $2x + y = 5$; ________

б) $x = 4y - 80$; ________

в) $10x = \frac{2}{3}y + 12$; ________

г) $x - 2y = -10$; ________

д) $0{,}25x + 0{,}5y - 4 = 0$; ________

е) $3x + 2y - 7 = 0$. ________

Решение.

е) Выразим y через x. $2y = -3x + 7$, $y = -1{,}5x + 3{,}5$.

12. Преобразуйте уравнение к виду $y = kx + b$. В ответе укажите значения k и b:

а) $x - y = 0$; ________

б) $4y - 12x = 0$; ________

в) $3x - 5y + 6 = 0$; ________

г) $5x - 2y + 4 = 0$; ________

д) $15y + 30 = 0$; ________

е) $3y - 36 = 9x$. ________

Решение.

д) Приведём уравнение $15y + 30 = 0$ к виду $y = kx + b$. $15y = -30$, $y = -2$. Получили $k = 0$; $b = -2$.

13. Найдите значение линейной функции $y = kx + b$ при заданном значении аргумента:

а) $y = 2x - 7$ при $x = 3$; ____ г) $y = -x - 0{,}2$ при $x = 0$; ____

б) $y = -0{,}3x + 2$ при $x = 20$; ____ д) $y = 0{,}1x + 1$ при $x = -10$; ____

в) $y = 3\frac{5}{6}x - 1$ при $x = \frac{1}{23}$; ____ е) $y = 5$ при $x = -2$. ____

Решение.

г) Подставим $x = 0$ в уравнение $y = -x - 0{,}2$. Получим $y = -0{,}2$.

14. Найдите координаты точки пересечения графиков функций:

а) $y = x$ и $y = 2$; ________________

б) $y = x + 1$ и $y = 5$; ________________

в) $y = -3x + 0{,}2$ и $y = x - 1$; ________________

г) $y = -x - 4$ и $y = 2x$; ________________

д) $y = x + 1$ и $y = 2x - 3$; ________________

е) $y = 3x + 1$ и $y = 3x - 5$. ________________

Решение.

б) Решим уравнение $x + 1 = 5$, $x = 4$. $(4; 5)$ — искомые координаты.

Взаимное расположение прямых $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ на плоскости можно определить по их угловым коэффициентам.

$k_1 \neq k_2$ — прямые пересекаются.

$k_1 = k_2$ — прямые параллельны, если $b_1 \neq b_2$, или совпадают, если $b_1 = b_2$.

$k_1 \cdot k_2 = -1$ — прямые перпендикулярны.

15. Установите взаимное расположение прямых на плоскости, исследуя значения угловых коэффициентов:

а) $y = 15x - 7$ и $y = 15$; ________________

б) $y = 3x - 2$ и $y = 3x + 8$; ________________

в) $y = 4 - 2x$ и $y = -2x + 7$; ________________

г) $y = x + 1$ и $y = -x + 1$; ________________

д) $y = -0{,}5x - 1$ и $y = -1 - \frac{x}{2}$; ________________

е) $y = 5x - 6$ и $y = 8 - 3x$. ________________

Решение.

д) Найдём значения k: $k_1 = -0{,}5$, $k_2 = -0{,}5$, $k_1 = k_2$, значит, прямые либо параллельны, либо совпадают. Найдём значения b: $b_1 = -1$, $b_2 = -1$, $b_1 = b_2$ — прямые совпадают.

16. Найдите все значения c, при которых графики линейных функций пересекаются:

а) $y = 2cx + 2$ и $y = -3x + 7$; ______
б) $y = 0{,}3x - 1{,}5$ и $y = 0{,}3x + c$; ______
в) $y = -2{,}5x + 3$ и $y = -cx - 1$; ______
г) $y = 2x - 1$ и $y = 2 - cx$; ______
д) $y = -4x - 2$ и $y = 2 + 3cx$; ______
е) $y = -x - 7$ и $y = \frac{1}{2}cx - 2$. ______

Решение.

е) Прямые пересекаются, если $k_1 \neq k_2$. $k_1 = -1$, $k_2 = \frac{1}{2}c$; $\frac{1}{2}c \neq -1$; $c \neq -2$.

17. Найдите значение t, при котором графики линейных функций либо параллельны, либо совпадают:

а) $y = x + 7$ и $y = tx - 1$; ___
б) $y = 0{,}1 - tx$ и $y = 2x - 3$; ___
в) $y = 0{,}3 + t$ и $y = 5 - t$; ___
г) $y = 2 - 3x$ и $y = 2 - tx$; ___
д) $y = -tx + 3$ и $y = -5x - 5$; ___
е) $y = 6x + 1$ и $y = 1 + tx$. ___

Решение.

б) Прямые параллельны если $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$. $k_1 = -t$, $k_2 = 2$; $b_1 = 0{,}1$, $b_2 = -3$. Так как $b_1 \neq b_2$, прямые параллельны при $t = -2$.

18. Найдите значение m, при котором графики линейных функций перпендикулярны:

а) $y = 2x + 1$ и $y = mx - 7$; ______
б) $y = mx$ и $y = -2x$; ______
в) $y = -5x - 11$ и $y = \frac{1}{5}mx + 8$; ______
г) $y = x - 4$ и $y = mx + 3$; ______
д) $y = \frac{1}{2}x + 5$ и $y = -4mx$; ______
е) $y = 0{,}1x - 7$ и $y = 10mx - 2$. ______

Решение.

е) Найдём m из условия перпендикулярности двух прямых: $k_1 \cdot k_2 = -1$. $k_1 = 0{,}1$, $k_2 = 10m$, $0{,}1 \cdot 10m = -1$, $m = -1$.

Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$ — система двух линейных уравнений.

Пару значений $(x; y)$, которая одновременно является решением и первого и второго уравнения системы, называют *решением системы*.

Решить систему — это значит найти множество её решений.

19. Выразите x через y:

а) $x + 7y = 2$; __________ г) $2x - y + 3 = 0$; __________
б) $-6y = 12x$; __________ д) $3y - 5x = 9$; __________
в) $0{,}1x - y = 7$; __________ е) $-2{,}5x + 0{,}5y - 5 = 0$. __________

Решение.

в) $0{,}1x = y + 7$. Умножим обе части уравнения на 10. Получим $x = 10y + 70$.

20. Выразите y через x:

а) $2y + 3x - 11 = 0$; __________ г) $5x - y = 3$; __________
б) $x = 8y$; __________ д) $-2x - 4y + 1 = 0$; __________
в) $7 - x - y = 3$; __________ е) $2{,}6 - 0{,}3x + 0{,}1y = 0$. __________

Решение.

е) $0{,}1y = 0{,}3x - 2{,}6$. Умножим обе части уравнения на 10. Получим $y = 3x - 26$.

21. Для каждой системы уравнений найдите значение t_1 и t_2, если $(x_0; y_0)$ — её решение:

а) $\begin{cases} x - y = t_1, \\ 2x + 3y = t_2; \end{cases}$ $(3; -5)$ ____________________

б) $\begin{cases} 0{,}2x + y = t_1, \\ 0{,}5x - y = t_2; \end{cases}$ $(5; 1)$ ____________________

в) $\begin{cases} x + y = t_1, \\ x \cdot y = t_2; \end{cases}$ $(-2; -2)$ ____________________

г) $\begin{cases} 2x = t_1 + 1, \\ x + 2y = t_2; \end{cases}$ $(-1; 0)$ ____________________

д) $\begin{cases} -\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = t_1 - 2, \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = t_2 - 4; \end{cases}$ (6; 12) ____________________

е) $\begin{cases} -x \cdot y = t_1, \\ x - y = t_2. \end{cases}$ (−1; 1) ____________________

Решение.

б) Подставим в уравнения системы $x = 5$, $y = 1$. Получим $t_1 = 0{,}2 \cdot 5 + 1 = 2$, $t_2 = 0{,}5 \cdot 5 - 1 = 1{,}5$.

Система имеет единственное решение, если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

Система не имеет решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.

Система имеет бесконечно много решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

22. Определите, сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ 3x - y = 1; \end{cases}$ ____________
г) $\begin{cases} 2x + y - 4 = 0, \\ -x + 2y - 1 = 0; \end{cases}$ ____________

б) $\begin{cases} x - y = 6, \\ -x + y = 2; \end{cases}$ ____________
д) $\begin{cases} 2y - x = 3, \\ x - 2y = -2; \end{cases}$ ____________

в) $\begin{cases} x + y - 3 = 0, \\ 5x + 5y = 15; \end{cases}$ ____________
е) $\begin{cases} 2x - 3y = 4, \\ x - 1{,}5y - 2 = 0. \end{cases}$ ____________

Решение.

б) $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $b_1 = -1$, $b_2 = 1$, $c_1 = 6$, $c_2 = 2$, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{-1} = -1$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{-1}{1} = -1$, $\frac{c_1}{c_2} = \frac{6}{2} = 3$. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$. Система не имеет решений.

Решите систему уравнений:

23. а) $\begin{cases} 2x + 0y = 8, \\ x + y = 5; \end{cases}$ ____________
г) $\begin{cases} 3x - 0y = 9, \\ x - y = 2; \end{cases}$ ____________

б) $\begin{cases} y = 5, \\ 2x + y = 11; \end{cases}$ ____________
д) $\begin{cases} 4y = 16, \\ x + 2y = 7; \end{cases}$ ____________

в) $\begin{cases} 1{,}1x = 11, \\ 3x - 2y = 0; \end{cases}$ ____________
е) $\begin{cases} 2{,}5y = 50, \\ 0{,}1x + 0{,}2y = 0. \end{cases}$ ____________

Решение.

е) Из первого уравнения системы: $y = \dfrac{50}{2,5} = 20$. Подставим $y = 20$ во второе уравнение. Получим $0,1x + 0,2 \cdot 20 = 0$, $0,1x = -4$, $x = -40$.

24. а) $\begin{cases} 3x + y = 7, \\ 2x - y = 3; \end{cases}$ ____________ г) $\begin{cases} x - 5y = 20, \\ 2x - 5y = 15; \end{cases}$ ____________

б) $\begin{cases} x = 2 - y, \\ 2x - y = -8; \end{cases}$ ____________ д) $\begin{cases} y = x + 5, \\ x + 2y = 7; \end{cases}$ ____________

в) $\begin{cases} 3x = 5y, \\ 6x - 2y = 16; \end{cases}$ ____________ е) $\begin{cases} \dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{2} = 3, \\ \dfrac{x}{5} - \dfrac{y}{2} = 1. \end{cases}$ ____________

Решение.

б) Подставим $x = 2 - y$ во второе уравнение системы: $2(2 - y) - y = -8$, $4 - 2y - y = -8$, $-3y = -12$, $y = 4$. Найдём x: $x = 2 - 4 = -2$.

Глава II

Степень с натуральным показателем

Понятие степени с натуральным показателем

Степенью числа a с натуральным показателем n, большим 1, называется произведение n множителей, каждый из которых равен a.

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$

1. Вычислите объём куба, длина ребра которого равна a:

а) $a = 1$; ________ в) $a = 2$; ________ д) $a = 3$; ________

б) $a = 5$; ________ г) $a = \frac{1}{2}$; ________ е) $a = 0{,}3$. ________

Решение.

в) $V = a^3$, $V = 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

2. Запишите произведение в виде степени:

а) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$; ______ г) $(x - t) \cdot (x - t) \cdot (x - t)$; ______

б) $\underbrace{\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{m}{n}}_{10 \text{ раз}}$; ______ д) $\underbrace{(-1{,}2) \cdot (-1{,}2) \cdot \ldots \cdot (-1{,}2)}_{9 \text{ раз}}$; ______

в) $\underbrace{(0,2) \cdot (0,2) \cdot \ldots \cdot (0,2)}_{k \text{ раз}}$; ______ е) $\underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \ldots \cdot (ab)}_{(n+5) \text{ раз}}$. ______

Решение.

б) $\underbrace{\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{m}{n}}_{10\text{ раз}}=\left(\frac{m}{n}\right)^{10}$.

Положительное число в натуральной степени положительно.

Отрицательное число в чётной степени положительно.

Отрицательное число в нечётной степени отрицательно.

$0^n=0$, где n — натуральное число.

$a^2\geqslant 0$ при любом значении a.

Вычислите:

3. а) 2^4; ______ в) 3^2; ______ д) 10^5; ______
б) 0^6; ______ г) $(-1)^{12}$; ______ е) $(-5)^3$. ______

Решение.

д) $10^5=10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10=100\,000$.

4. а) -4^2; ______ в) $(-4)^2$; ______ д) $-\left(-1\frac{2}{5}\right)^3$; ______
б) $\left(2\frac{3}{5}\right)^2$; ______ г) $2\cdot(-3)^2$; ______ е) $-\frac{1}{3}\cdot(-3)^4$. ______

Решение.

б) $\left(2\frac{3}{5}\right)^2=\left(\frac{13}{5}\right)^2=\frac{13}{5}\cdot\frac{13}{5}=\frac{169}{25}=6\frac{19}{25}$.

Выполните действия:

5. а) $100\cdot(0,1)^2-5^2\cdot(-4)$; ______ г) $(0,1)^2+0,3^2$; ______
б) -2^2+3^3; ______ д) $\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot81-\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot64$; ______
в) $-3^3-(-2)^3$; ______ е) $(5-7)^4$. ______

Решение.

д) $\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot81-\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot64=\frac{1}{3^4}\cdot81-\frac{1}{4^3}\cdot64=\frac{1}{81}\cdot81-\frac{1}{64}\cdot64=1-1=0$.

2. Зак. № 265

6. а) $5^2 - 9^2$; ____________ г) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 2^6$; ____________

б) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 \cdot (-3)^5$; ____________ д) $10^3 : (-2)^2$; ____________

в) $\left(\frac{1}{5}\right)^3 : \left(\frac{1}{3}\right)^3$; ____________ е) $18^2 - 17^2$. ____________

Решение.

в) $\left(\frac{1}{5}\right)^3 : \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{5^3} : \frac{1}{3^3} = \frac{1}{125} : \frac{1}{27} = \frac{27}{125}$.

7. Сравните степени:

а) $3^5 ... 3^2$; в) $\left(\frac{1}{7}\right)^3 ... \left(\frac{1}{7}\right)^4$; д) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 ... \left(-\frac{1}{2}\right)^3$;

б) $2^3 ... 3^2$; г) $(-0{,}1)^3 ... (-0{,}1)^5$; е) $\left(12\frac{1}{3}\right)^2 ... \left(-13\frac{1}{2}\right)^2$.

Решение.

б) $2^3 = 8$, $3^2 = 9$, $8 < 9$. Следовательно, $2^3 < 3^2$.

Свойства степени с натуральным показателем

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

$a^m : a^n = a^{m-n}$, $m > n$, $a \neq 0$.

$(a^m)^n = a^{mn}$.

$(ab)^n = a^n \cdot b^n$.

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$.

Запишите произведение в виде степени:

8. а) $a^3 \cdot a^2$; ____________ г) $c^5 \cdot c^6 \cdot c^3$; ____________

б) $\left(\frac{1}{5}b\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{5}b\right)$; ____________ д) $(2c) \cdot (2c)^4$; ____________

в) $3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4$; ____________ е) $0{,}1^2 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}1^2$. ____________

Решение.

г) $c^5 \cdot c^6 \cdot c^3 = c^{5+6+3} = c^{14}$.

9. а) $(-6)^2 \cdot (-6)^4 \cdot (-6)$; ____________

б) $(x-7)^7 \cdot (x-7)^5 \cdot (x-7)^3$; ____________

в) $\left(-\frac{3}{7}x^5\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{7}x^5\right)^4 \cdot \left(-\frac{3}{7}x^5\right)^2$; ____________

г) $\left(-2{,}5h^3\right)^3 \cdot \left(-2{,}5h^3\right)^2 \cdot \left(-2{,}5h^3\right)$; ____________

д) $(m+n)^4 \cdot (m+n)^6 \cdot (m+n)$; ____________

е) $(a-b)^2 \cdot (b-a)^4$. ____________

Решение.

г) $\left(-2{,}5h^3\right)^3 \cdot \left(-2{,}5h^3\right)^2 \cdot \left(-2{,}5h^3\right) = \left(-2{,}5h^3\right)^{3+2+1} = \left(-2{,}5h^3\right)^6 =$
$= \left(2{,}5h^3\right)^6$.

10. Запишите выражение в виде степени с основанием 2:

а) $2 \cdot 256$; ________ в) $\frac{2^{15}}{256}$; ________ д) $2^6 : 2^3$; ________

б) $128 \cdot 64$; ________ г) $32 : 2$; ________ е) $\frac{2^9}{2^7}$. ________

Решение.

а) $2 \cdot 256 = 2 \cdot 2^8 = 2^9$.

11. Запишите выражение в виде степени с основанием 3:

а) $243 \cdot 27$; ________ в) $\frac{3^9}{3^4}$; ________ д) $\frac{243}{3^3}$; ________

б) $\frac{81}{27}$; ________ г) $3^5 : 3^2$; ________ е) $\frac{81}{9}$. ________

Решение.

е) $\frac{81}{9} = 9 = 3^2$.

Запишите выражение в виде степени с натуральным показателем[1]:

12. а) $\left(-\frac{6}{7}\right)^8 : \left(-\frac{6}{7}\right)^3$; ________ г) $\left(-\frac{3a}{2}\right)^7 : \left(-\frac{3a}{2}\right)$; ________

б) $c^{12} : c^9$; ________ д) $\left(\frac{1}{2}b\right)^5 : \left(\frac{1}{2}b\right)$; ________

в) $x^{20} : x^{18}$; ________ е) $(-3c)^7 : (-3c)^3$. ________

Решение.

е) $(-3c)^7 : (-3c)^3 = (-3c)^{7-3} = (-3c)^4 = (3c)^4$.

---

[1] Здесь и далее буквами обозначены числа, для которых рассматриваемые выражения имеют смысл.

13. а) $(a-b)^6:(a-b)$; ______ г) $t^6:t^4:t$; ______
б) $(m+n)^{10}:(m+n)$; ______ д) $a^{12}:(a^7:a^3)$; ______
в) $(12z)^{12}:(12z)^{11}$; ______ е) $b^{11}:(b^5:b)$. ______

Решение.

г) $t^6:t^4:t=t^{6-4-1}=t$.

14. Сравните с нулём число k:

а) $k=(-2)^3\cdot(-2)^8$; ______ г) $k=(-9)^6\cdot(-3^5)$; ______
б) $k=(-3)^8\cdot 11$; ______ д) $k=(-5)^{10}:(-5^8)$; ______
в) $k=(-15)^3\cdot(-21^4)$; ______ е) $k=-4^4:(-2)^3$. ______

Решение.

в) $-15<0$, 3 — нечётный показатель, значит, $(-15)^3<0$.
(-21^4) — число, противоположное числу $21^4>0$, значит, $-21^4<0$. Произведение двух отрицательных чисел — положительно, следовательно, $(-15)^3\cdot(-21^4)>0$, $k>0$.

15. Решите уравнение:

а) $x:2^5=2^2$; ______ г) $7^6\cdot m=7^8$; ______
б) $m\cdot 3^3=3^4$; ______ д) $12^5:k=12^3$; ______
в) $5^9:x=5^8$; ______ е) $4^3\cdot z=4^5$. ______

Решение.

е) $z=4^5:4^3$, $z=4^2$, $z=16$.

Вычислите:

16. а) $2^5\cdot 2$; ______ г) $11^3:11$; ______
б) $3^2\cdot 3^3$; ______ д) $(-9)^5:(-9)^2$; ______
в) $15^{12}:15^{10}$; ______ е) $(0{,}237)^{15}:(0{,}237)^{14}$. ______

Решение.

е) $(0{,}237)^{15}:(0{,}237)^{14}=0{,}237^{15-14}=0{,}237$.

17. а) $\dfrac{(0{,}7)^6}{(0{,}7)^4}$; ______ г) $\left(-1\frac{3}{15}\right)^{20}:\left(-1\frac{3}{15}\right)^{18}$; ______

б) $\dfrac{\left(2\frac{5}{7}\right)^8}{\left(2\frac{5}{7}\right)^6}$; ______ д) $\left(2\frac{4}{5}\right)^{14}:\left(2\frac{4}{5}\right)^{12}$; ______

в) $\dfrac{-(0{,}9)^3}{0{,}9}$; ______ е) $\left(-1\frac{3}{4}\right)^{16}:\left(-1\frac{3}{4}\right)^{14}$. ______

Решение.

д) $\left(2\frac{4}{5}\right)^{14}:\left(2\frac{4}{5}\right)^{12}=\left(2\frac{4}{5}\right)^{14-12}=\left(2\frac{4}{5}\right)^2=\left(\frac{14}{5}\right)^2=\frac{196}{25}=7\frac{21}{25}$.

18. а) $\frac{2 \cdot 7^3}{7^2}$; ________ г) $\frac{9^2 \cdot 9^5 \cdot 9^4}{9^3 \cdot 9^7}$; ________

б) $\frac{2^5 \cdot 3^6}{2^3 \cdot 3^4}$; ________ д) $\frac{(0,2)^{11} \cdot (0,2)^{10}}{(0,2)^{19}}$; ________

в) $\frac{5^6 \cdot 5^7}{5^8 \cdot 5^3}$; ________ е) $\frac{15^3}{3^3 \cdot 5^4}$. ________

Решение.

г) $\frac{9^2 \cdot 9^5 \cdot 9^4}{9^3 \cdot 9^7} = \frac{9^{2+5+4}}{9^{3+7}} = \frac{9^{11}}{9^{10}} = 9^{11-10} = 9.$

19. Запишите в виде степени с основанием a:

а) $a^3 \cdot (a^5)^4$; ________ г) $\frac{a^3 (a^2)^{10}}{(a^3)^7}$; ________

б) $a^2 \cdot (a^2)^2 \cdot a^2$; ________ д) $\frac{(a^2)^3 \cdot a}{a^3 \cdot a^2}$; ________

в) $\frac{(a^7)^5}{(a^5)^6}$; ________ е) $a^5 \cdot a^4 : (a^2)^3$. ________

Решение.

е) $a^5 \cdot a^4 : (a^2)^3 = a^5 \cdot a^4 : a^{2 \cdot 3} = a^{5+4-6} = a^3.$

20. При каком значении k верно равенство:

а) $(2^{10})^k = 2^{20}$; ________ г) $(3^k)^3 = 3^{27}$; ________

б) $(2^k)^{10} = 2^{20}$; ________ д) $(5^6)^k = 25^{15}$; ________

в) $(3^7)^k = 3^{21}$; ________ е) $(5^k)^5 = 125^{10}$? ________

Решение.

г) $(3^k)^3 = 3^{27}, \quad 3^{3k} = 3^{27}, \quad 3k = 27, \quad k = 27 : 3, \quad k = 9.$

21. Запишите выражение в виде степени с показателем 2:

а) $\frac{81}{256}$; ________ г) $0{,}0001$; ________

б) x^4; ________ д) $36y^{12}$; ________

в) $9a^4$; ________ е) $0{,}04z^6$. ________

Решение.

в) $9a^4 = 3^2 \cdot (a^2)^2 = (3a^2)^2.$

22. Возведите в степень произведение:

а) $(3y)^4$; ________ г) $(-0{,}1p^2q^3)^2$; ________

б) $(2c^3d)^7$; ________ д) $(-10xz^2)^3$; ________

в) $(-2mn^2)^3$; ________ е) $(a^4b^3)^4$. ________

Решение.

д) $(-10xz^2)^3 = (-10)^3 \cdot x^3(z^2)^3 = -1000x^3z^6$.

23. Представьте выражение в виде степени:

а) $1{,}2^4a^8b^{16}$; ________ г) $-0{,}027x^{15}$; ________

б) $a^3b^6c^9$; ________ д) $16x^4y^8z^{12}$; ________

в) $32c^5d^{10}$; ________ е) $-1000m^3n^9$. ________

Решение.

а) $1{,}2^4a^8b^{16} = 1{,}2^4(a^2)^4(b^4)^4 = (1{,}2a^2b^4)^4$.

Вычислите:

24. а) $\dfrac{7^2 \cdot 3^5}{21^2}$; ________ г) $\dfrac{3^7 \cdot 6^7}{2^6 \cdot 9^6}$; ________

б) $\dfrac{35^3}{5^2 \cdot 7^2}$; ________ д) $\dfrac{12^4}{3^4 \cdot 4^2 \cdot 16}$; ________

в) $\dfrac{5^{12} \cdot 4^{12}}{10^{12} \cdot 2^{12}}$; ________ е) $\dfrac{9^{16}}{27^{10}}$. ________

Решение.

е) $\dfrac{9^{16}}{27^{10}} = \dfrac{(3^2)^{16}}{(3^3)^{10}} = \dfrac{3^{32}}{3^{30}} = 3^2 = 9$.

25. а) $\dfrac{5^7 \cdot 6^7}{30^6}$; ________ г) $\dfrac{7^6 \cdot 8^2}{14^6}$; ________

б) $\dfrac{28^5}{7^4 \cdot 2^8}$; ________ д) $\dfrac{10^{34}}{2^{30} \cdot 4^2 \cdot 5^{34}}$; ________

в) $\dfrac{16^2 \cdot 5^3}{10^3}$; ________ е) $\dfrac{5^{10} \cdot 625}{5^{11}}$. ________

Решение.

б) $\dfrac{28^5}{7^4 \cdot 2^8} = \dfrac{(7 \cdot 4)^5}{7^4 \cdot (2^2)^4} = \dfrac{(7 \cdot 4)^5}{(7 \cdot 4)^4} = 7 \cdot 4 = 28$.

26. Возведите в степень дробь:

а) $\left(\dfrac{m}{n}\right)^5$; ________ в) $\left(\dfrac{b}{5}\right)^3$; ________ д) $\left(\dfrac{c}{3d}\right)^4$; ________

б) $\left(-\dfrac{3}{a}\right)^2$; ________ г) $\left(-\dfrac{2xy}{z}\right)^5$; ________ е) $\left(-\dfrac{4t}{7s}\right)^3$. ________

Решение.

д) $\left(\dfrac{c}{3d}\right)^4 = \dfrac{c^4}{(3d)^4} = \dfrac{c^4}{3^4 \cdot d^4} = \dfrac{c^4}{81d^4}$.

Запишите в виде степени дроби:

27. а) $\frac{7^2}{5^2}$; ______ в) $\frac{x^5}{2^5}$; ______ д) $\frac{81}{25}$; ______

б) $\frac{3^7}{4^7}$; ______ г) $\frac{(2a)^3}{(7b)^3}$; ______ е) $\frac{343}{125}$. ______

Решение.

г) $\frac{(2a)^3}{(7b)^3} = \left(\frac{2a}{7b}\right)^3$.

28. а) $\frac{(-5a)^4}{(3b)^4}$; ______ в) $-\frac{27}{b^9}$; ______ д) $\frac{(2m)^8}{p^8}$; ______

б) $-\frac{216c^3}{125}$; ______ г) $-\frac{1}{343}$; ______ е) $\frac{(0{,}75k)^6}{(0{,}75k)^4}$. ______

Решение.

б) $-\frac{216c^3}{125} = -\frac{6^3 \cdot c^3}{5^3} = (-1{,}2c)^3$.

Стандартный вид числа

Каждое число, большее 10, можно записать в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a < 10$ и n — натуральное число. Такая запись числа называется стандартным видом числа.

29. Запишите в стандартном виде число:

а) 358; ______ г) 5 200 000; ______

б) 87 370; ______ д) 6 400,07; ______

в) 900 035; ______ е) 740 тысяч. ______

Решение.

б) $87\,370 = 8{,}737 \cdot 10^4$.

30. Выполните действия:

а) $(2{,}4 \cdot 10^6) : (1{,}2 \cdot 10^5)$; ______ г) $(2{,}5 \cdot 10^2) \cdot (1{,}2 \cdot 10^4)$; ______

б) $(2{,}3 \cdot 10^3) \cdot (1{,}1 \cdot 10^4)$; ______ д) $(4{,}5 \cdot 10^4) : (1{,}5 \cdot 10)$; ______

в) $(4{,}8 \cdot 10^4) : (1{,}6 \cdot 10^3)$; ______ е) $(2{,}5 \cdot 10^3) \cdot (1{,}0 \cdot 10^5)$. ______

Решение.

г) $(2{,}5 \cdot 10^2) \cdot (1{,}2 \cdot 10^4) = (2{,}5 \cdot 1{,}2) \cdot 10^{2+4} = 3 \cdot 10^6$.

Глава III

Одночлены

Понятие и стандартный вид одночлена

Одночленом называют алгебраическое выражение, которое представляет собой произведение чисел, переменных и их степеней.

Любой одночлен можно записать в стандартном виде. Для этого одночлен надо представить в виде произведения числового множителя, записанного на первом месте, и степеней различных переменных.

1. Из приведённых алгебраических выражений выберите одночлены:

а) $2ab$; в) $\frac{1}{7}a^m b^n$; д) $\frac{t^3 - 5t}{2t}$;

б) $0{,}3aabb5$; г) $\frac{8}{7a}$; е) $\frac{z}{1{,}5 + 2}$.

Решение.

б) Алгебраическое выражение $0{,}3aabb5$ является одночленом по определению.

Приведите одночлен к стандартному виду и укажите его коэффициент:

2. а) $2aa^2 3a$; ______________ г) $-1\frac{1}{2}m^2 nmn4n^3$; ______________

б) $-\frac{1}{6}cb^2 12b^3 c$; ______________ д) $p^2 q^2 p^3 q$; ______________

в) $2{,}5z^3 d3z^2$ ______________ е) $-\frac{2}{3}s^2 t^n \frac{3}{8}s^m t$. ______________

Решение.

г) $-1\frac{1}{2}m^2nmn4n^3 = \left(-1\frac{1}{2}\cdot 4\right)(m^2\cdot m)(n\cdot n\cdot n^3) = -6m^3n^5$. Коэффициент одночлена равен -6.

3. а) $4p^{n-1}q\frac{1}{4}p$; ______________ г) $\frac{5ab}{7}$; ______________

б) $aax^2x^5y^3yz$; ______________ д) 2^naa2^m; ______________

в) $\frac{bbccd}{5}$; ______________ е) $-t^3ttsss^3$. ______________

Решение.

в) $\frac{bbccd}{5} = \frac{b^2c^2d}{5} = 0{,}2b^2c^2d$. Коэффициент одночлена равен 0,2.

Сложение и вычитание одночленов

Два одночлена, состоящие из одних и тех же переменных, каждая из которых входит в оба одночлена в одинаковых степенях (то есть с равными показателями степеней), называют подобными одночленами.

4. Отметьте пары подобных одночленов:

а) $0{,}7b^2$ и $0{,}1b^2$; в) mn и $3mn$; д) $\frac{1}{2}x^3$ и $\frac{1}{3}x^2$;

б) $-s^3t^2$ и t^2s^3; г) m^2n^3 и n^2m^3; е) $1\frac{2}{3}a^4b^5$ и $\frac{2}{3}b^5a^4$.

Решение.

д) Одночлены $\frac{1}{2}x^3$ и $\frac{1}{3}x^2$ не подобны, так как показатели степеней переменных различны.

5. Упростите выражение:

а) $aab + 2a^2b$; ________ г) $\frac{3}{7}z^2t - \frac{2}{7}zzt + \frac{6}{7}tzz$; ________

б) $-2x - x + 7x$; ________ д) $5x^2y + 3x2xy - 4yxx$; ________

в) $2m^2n^3 - 0{,}5mm3n^2n$; ________ е) $cc(-2)d + 2dcc + 4c^2d$. ________

Решение.

в) $2m^2n^3 - 0{,}5mm3n^2n = 2m^2n^3 - (0{,}5\cdot 3)(m\cdot m)(n^2\cdot n) = 2m^2n^3 - 1{,}5m^2n^3 = 0{,}5m^2n^3$.

Выполните действия:

6. а) $3x + 7x + 4x$; ______ г) $5m^3 - 2{,}1m^3$; ______

б) $2{,}5a^2b + 1{,}7a^2b - 0{,}2a^2b$; ______ д) $3{,}3t^5 - 2{,}1t^5 + 0{,}8t^5$; ______

в) $\frac{1}{2}k + \frac{3}{2}k + 2k$; ______ е) $15a^2 - 12a^2 + 3a^2$. ______

Решение.

в) $\frac{1}{2}k + \frac{3}{2}k + 2k = k\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 2\right) = 4k.$

7. а) $b^5c^3 - 2b^5c^3 - b^5c^3$; ______

б) $\frac{7}{8}a^4 + \frac{1}{8}a^4 - \frac{5}{8}a^4 - \frac{3}{8}a^4$; ______

в) $12\frac{5}{6}m^2n^3 - 11\frac{1}{3}m^2n^3 - \frac{5}{6}m^2n^3 + 11m^2n^3$; ______

г) $4{,}75t^2z - 0{,}25t^2z - 1{,}5t^2z + t^2z$; ______

д) $2x^2 - 3x^2 + 1{,}7x^2 + 0{,}3x^2 - x^2 + 2x^2$; ______

е) $1\frac{3}{4}b^3 - \frac{1}{4}b^3 - 0{,}75b^3 - 0{,}75b^3$. ______

Решение.

д) $2x^2 - 3x^2 + 1{,}7x^2 + 0{,}3x^2 - x^2 + 2x^2 = 2x^2.$

8. Найдите, при каком значении N верно равенство:

а) $4a^2 + N = 6a^2$; ______ г) $N - 0 = -2{,}8a^2b^3c$; ______

б) $N + 4{,}5x^2y = 7x^2y$; ______ д) $m^3n^2 + N = 0$; ______

в) $-1{,}2t^5 - N = 4t^5$; ______ е) $3x^2y + 5yx^2 = N$. ______

Решение.

в) $-N = 1{,}2t^5 + 4t^5 = 5{,}2t^5,\quad N = -5{,}2t^5.$

Умножение одночленов. Возведение одночлена в натуральную степень

При умножении одночлена на одночлен надо:

- умножить коэффициент одного одночлена на коэффициент другого одночлена;
- одинаковые буквенные множители записать в виде степени по правилу умножения степеней с одинаковым основанием;

- буквенные множители, которые содержатся только в одном одночлене и не содержатся в другом, записать в произведение без изменения.

При возведении одночлена в степень надо:

- возвести в эту степень коэффициент;
- возвести в эту степень каждый буквенный множитель по правилу возведения степени в степень.

Выполните умножение одночленов:

9. а) $2a \cdot (-4b)$; ________ г) $-9m \cdot \frac{1}{6}n^2$; ________

б) $(-3m) \cdot (-2n)$; ________ д) $2a^2b^3 \cdot (-0{,}5a^3b^2)$; ________

в) $4a^2 \cdot 5b^2$; ________ е) $7m^2n^5p \cdot \left(-\frac{1}{4}m^3n^2p\right)$. ________

Решение.

д) $2a^2b^3 \cdot (-0{,}5a^3b^2) = 2 \cdot (-0{,}5) \cdot (a^2 \cdot a^3) \cdot (b^3 \cdot b^2) = -a^5b^5$.

10. а) $-2n \cdot \frac{1}{2}n \cdot 5n^2$; ________

б) $\frac{1}{3}ay^2 \cdot \frac{3}{4}a^2y \cdot 4a^2y^2$; ________

в) $-12b^2cd \cdot \frac{1}{6}bc^2d \cdot \left(-\frac{1}{2}bcd^2\right)$; ________

г) $3m^2n^3p \cdot \frac{1}{9}m^3n^2p(-27mnp)$; ________

д) $4ts \cdot \left(-\frac{1}{16}ts\right) \cdot 8t^3s^2$; ________

е) $(-xy) \cdot (-x^2y^2) \cdot x^3y^3$. ________

Решение.

а) $-2n \cdot \frac{1}{2}n \cdot 5n^2 = \left(-2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5\right) \cdot (n \cdot n \cdot n^2) = -5n^4$.

Возведите одночлен в степень:

11. а) $(2a)^2$; ________ в) $(a^2b)^4$; ________ д) $\left(\frac{1}{2}m^2n^2\right)^5$; ________

б) $(3b)^3$; ________ г) $(-3x^2y)^3$; ________ е) $\left(-\frac{2}{3}a^3b^2\right)^4$. ________

Решение.
г) $\left(-3x^2y\right)^3 = (-3)^3 \cdot \left(x^2\right)^3 \cdot y^3 = -27x^6y^3$.

12. а) $\left(0{,}1a^5b^5\right)^2$; ______ г) $\left(0{,}4t^ns^k\right)^3$; ______
б) $\left(1{,}2x^2y^2\right)^2$; ______ д) $\left((-a)^3\right)^2$; ______
в) $\left(-\frac{3}{5}a^4b^2\right)^3$; ______ е) $|a|^2$. ______

Решение.
б) $\left(1{,}2x^2y^2\right)^2 = 1{,}2^2\left(x^2\right)^2\left(y^2\right)^2 = 1{,}44x^4y^4$.

13. Найдите площадь прямоугольника с длинами сторон a и b:

а) $a = 2x,\ b = 4y$; ______ г) $a = 0{,}3,\ b = 0{,}1n$; ______
б) $a = \frac{1}{2}c,\ b = 8d$; ______ д) $a = 2\frac{1}{3}p,\ b = \frac{6}{7}q$; ______
в) $a = 5m,\ b = 7$; ______ е) $a = 2t^2,\ b = 5t^4$. ______

Решение.
д) $S = a \cdot b = 2\frac{1}{3}p \cdot \frac{6}{7}q = \left(\frac{7}{3} \cdot \frac{6}{7}\right)pq = 2pq$.

14. Найдите объём прямоугольного параллелепипеда с длинами сторон a, b, c.

а) $a = 2,\ b = 3,\ c = 4$; ______
б) $a = 0{,}5m,\ b = 1\frac{1}{3}n,\ c = \frac{3}{2}t$; ______
в) $a = 0{,}1p,\ b = 2q^2,\ c = 5pq$; ______
г) $a = 2x,\ b = 4y,\ c = \frac{1}{8}xy$; ______
д) $a = 1{,}2m,\ b = 5m,\ c = 6m$; ______
е) $a = 1\frac{3}{5}d,\ b = \frac{3}{8}d,\ c = \frac{5}{3}d$. ______

Решение.
е) $V = abc = 1\frac{3}{5}d \cdot \frac{3}{8}d \cdot \frac{5}{3}d = \left(\frac{8}{5} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{3}\right)d^3 = d^3$.

15. Запишите одночлен в виде квадрата другого одночлена:

а) $4a^2$; ________ г) $\frac{9}{16}m^{10}n^8$; ________

б) $\frac{1}{9}b^4c^2$; ________ д) $1{,}96p^{12}q^{14}$; ________

в) $81x^6y^4$; ________ е) $2\frac{1}{4}c^{20}d^{16}$. ________

Решение.

в) $81x^6y^4 = 9^2 \cdot (x^3)^2 \cdot (y^2)^2 = (9x^3y^2)^2$.

16. Запишите одночлен в виде куба другого одночлена:

а) $27b^3$; ________ г) $216m^6n^{15}$; ________

б) $-8a^6$; ________ д) $-\frac{1}{125}x^{15}y^{21}$; ________

в) $-0{,}001a^9b^{12}$; ________ е) $343c^{18}d^{24}$. ________

Решение.

д) $-\frac{1}{125}x^{15}y^{21} = \left(-\frac{1}{5}\right)^3 \cdot (x^5)^3(y^7)^3 = \left(-\frac{1}{5}x^5y^7\right)^3$.

17. Укажите, при каком значении n верно равенство:

а) $(5kp)^n = 5kp$; ________ г) $(0{,}2m^2)^n \cdot 100 = 4m^4$; ________

б) $(3a)^n = 81a^4$; ________ д) $\left(-\frac{1}{4}a^4b^2\right)^n = -\frac{1}{64}a^{12}b^6$; ________

в) $\left(-\frac{1}{2}x^2y\right)^n = \frac{1}{16}x^8y^4$; ________ е) $(0{,}3cd^5)^n \cdot \frac{1}{0{,}09} = c^2d^{10}$. ________

Решение.

е) $(0{,}3cd^5)^n \cdot \frac{1}{0{,}09} = c^2d^{10}$; $(0{,}3cd^5)^n = 0{,}09c^2d^{10}$;

$(0{,}3cd^5)^n = (0{,}3cd^5)^2$; $n = 2$.

18. Выполните действия:

а) $(-3x^2y)^3 \cdot x^5$; ________ г) $-0{,}2y^2 \cdot (10y^2)^2$; ________

б) $a^2 \cdot (2a)^2$; ________ д) $(5ab^4)^3 \cdot (0{,}2a^4b)^3$; ________

в) $(-x^2)^3 \cdot 11x^5$; ________ е) $\left(-\frac{2}{7}m^2n\right)^2 \cdot \frac{49}{8}mn^2$. ________

Решение.

е) $\left(-\frac{2}{7}m^2n\right)^2 \cdot \frac{49}{8}mn^2 = \left(-\frac{2}{7}\right)^2(m^2)^2 \cdot n^2 \cdot \frac{49}{8}mn^2 = \frac{4}{49} \cdot m^4n^2 \cdot \frac{49}{8}mn^2 =$

$= \frac{4}{49} \cdot \frac{49}{8}m^5n^4 = 0{,}5m^5n^4$.

Деление одночлена на одночлен

При делении одночлена на одночлен надо:

- разделить коэффициент делимого на коэффициент делителя;
- одинаковые буквенные множители записать в виде степени по правилу деления степеней с одинаковым основанием;
- буквенные множители, содержащиеся в делимом, но не содержащиеся в делителе, записать в частное без изменения.

Выполните деление одночленов:

19. а) $4a : 2a$; ______ в) $a^7 : a^6$; ______ д) $z^{35} : z^{30}$; ______

б) $b^3 : b^3$; ______ г) $y^{10} : y^7$; ______ е) $-15a : (-5a)$. ______

Решение.

в) $a^7 : a^6 = a^{7-6} = a$.

20. а) $-32a^4 : (-16a^3)$; ______ г) $-2{,}5xyp^5 : 0{,}5xyp^5$; ______

б) $18x^2yz : 9xy$; ______ д) $42a^{10}b^5 : 6a^5b^4$; ______

в) $1{,}2a^4y^3 : 0{,}6a^3y^2$; ______ е) $100m^3n^6 : 10m^2n^3$. ______

Решение.

е) $100m^3n^6 : 10m^2n^3 = (100 : 10) \cdot (m^3 : m^2) \cdot (n^6 : n^3) = 10mn^3$.

Глава IV

Многочлены

Понятие и стандартный вид многочлена

Многочленом называют алгебраическую сумму одночленов.

Если в многочлене все члены записаны в стандартном виде и приведены подобные члены, то говорят, что многочлен приведён к стандартному виду.

Приведите многочлен к стандартному виду:

1. а) $mmn - m^2n$; ____________ г) $-abab + a^2b4b$; ____________
б) $2p^2qp - ppqp$; ____________ д) $b^25a^3b - a2a^22b^2b$; ____________
в) $aa3b + 2abaa$; ____________ е) $x^2y^2xy + 0{,}5x^3yy^3$. ____________

Решение.

д) $b^25a^3b - a2a^22b^2b = 5a^3b^3 - 4a^3b^3 = a^3b^3$.

2. а) $2m3n - 3n2m$; ________ г) $2m + n + n - 3m$; ________
б) $2a^2 - aa + 5a^2$; ________ д) $4nnq^2 - 2p^2qq + ppqq$; ________
в) $\frac{2}{3}aab - \frac{1}{3}baa$; ________ е) $-\frac{1}{5}x^2y^3 + 0{,}2x^2y^3 - 4x^2y^3$. ________

Решение.

д) $4nnq^2 - 2p^2qq + ppqq = 4n^2q^2 - 2p^2q^2 + p^2q^2 = 4n^2q^2 - p^2q^2$.

Сложение и вычитание многочленов

Чтобы записать алгебраическую сумму нескольких многочленов в виде многочлена стандартного вида, надо раскрыть скобки и привести подобные члены, если они есть.

Если перед скобкой стоит знак «+», то при раскрытии скобок надо знаки, стоящие перед слагаемыми в скобках, оставить без изменения.

Если перед скобкой стоит знак «−», то при раскрытии скобок надо знаки, стоящие перед слагаемыми в скобках, заменить на противоположные.

3. Выполните сложение многочленов:

а) $(12x + 7y) + (3y - 2x)$;
б) $(-0{,}2a - 3) + (2{,}4a + 5)$;
в) $(7m^2 - 5mn + 4) + (3m^2 + 2mn - 1)$;
г) $(-2b^2 - 3ab + a^3) + (2a^3 - 5ab + b^2)$;
д) $(2y^2 - 3x^2y - 7x^2) + (-3x^2 - 2x^2y - 2y^2)$;
е) $(m^3 - 2m^2 + 4) + (5 + 2m^2 - m^3)$.

Решение.

г) $(-2b^2 - 3ab + a^3) + (2a^3 - 5ab + b^2) = -2b^2 - 3ab + a^3 + 2a^3 - 5ab + b^2 =$
$= 3a^3 - 8ab - b^2$.

4. Выполните вычитание многочленов:

а) $(2a - 3b) - (a - 2b)$;
б) $(3x - 2y + z) - (-5x - 3y - z)$;
в) $(8a^2 - 2b^2 - c) - (3c + 4b^2 - 2a^2)$;
г) $(2m^2n - 3mn^2) - (5m^2n + 2mn^2)$;
д) $(0{,}3x - 9) - (7 - 2{,}5x)$;
е) $(7y^2 + 3x^2y - 4x^2) - (-3x^2 + 5x^2y - 2y^2)$.

Решение.

е) $(7y^2 + 3x^2y - 4x^2) - (-3x^2 + 5x^2y - 2y^2) = 7y^2 + 3x^2y - 4x^2 + 3x^2 - 5x^2y +$
$+ 2y^2 = 9y^2 - 2x^2y - x^2$.

Умножение многочлена на одночлен

Чтобы умножить многочлен на одночлен, надо каждый член многочлена умножить на этот одночлен и полученные произведения сложить.

5. Найдите произведение многочлена на одночлен:

а) $2(2a^3 - a^2 + 4)$; ________________

б) $3x(\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3})$; ________________

в) $6ab(a - 2b)$; ________________

г) $-xyz(x^2 - y^2 - z^2)$; ________________

д) $2{,}5mn^2(2m^2 - 3mn + 5mn^2)$; ________________

е) $(x^2 + 3y) \cdot (-4xy)$. ________________

Решение.

в) $6ab(a - 2b) = 6ab \cdot a - 6ab \cdot 2b = 6a^2b - 12ab^2$.

6. Выполните действия:

а) $2(c + d) - (c - d)$; ________________

б) $5a(a - b) + 5b(a + b)$; ________________

в) $3c^2(d^2 - t^2) - 3d^2(c^2 - t^2)$; ________________

г) $6(2s - 3t) + 2(3s + 9t)$; ________________

д) $3ab(2a^2 - b^2) - 2ab(3a^2 + b^2)$; ________________

е) $7p^3(p^2 - q^5) - 7p^5 + 14p^3q^5$. ________________

Решение.

г) $6(2s - 3t) + 2(3s + 9t) = 12s - 18t + 6s + 18t = 18s$.

Умножение многочлена на многочлен

Чтобы умножить многочлен на многочлен надо каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить.

Выполните умножение многочленов:

7. а) $(b + 2)(b + 3)$; __________ г) $(x - 2)(x + 3)$; __________

б) $(t - 1)(t - 2)$; __________ д) $(y - 6)(y + 2)$; __________

в) $(a + 3)(a - 5)$; __________ е) $(m + n)(n - m)$. __________

Решение.

д) $(y - 6)(y + 2) = y^2 + 2y - 6y - 12 = y^2 - 4y - 12$.

8. а) $(x^2 - 1)(x - 2)$; ________________

б) $(a^2 - b)(b^2 - a)$; ________________

в) $(-x - y)(x^2 + y^2)$; ________________

г) $(a^2 + 3b)(3a + b^2)$; ________________

д) $(-m + n)(-2 - m)$; ________________

е) $(-t - s)(-3 - t)$. ________________

3. Зак. № 265

Решение.

д) $(-m+n)(-2-m) = 2m + m^2 - 2n - mn.$

Деление многочлена на одночлен

Чтобы разделить многочлен на одночлен надо каждый член многочлена разделить на этот одночлен и полученные результаты сложить.

Выполните деление многочлена на одночлен:

9. а) $(a+a^2):a$; ________ г) $(-2x+3xy):(-x)$; ________

б) $(15a+10):5$; ________ д) $(0{,}2z^2-0{,}1z^3):(0{,}1z)$; ________

в) $(-3x-9):(-3)$; ________ е) $\left(\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}ab\right):\frac{1}{4}a$. ________

Решение.

д) Деление числа на 0,1 равносильно умножению его на 10. Применив это свойство, получим $(0{,}2z^2-0{,}1z^3)\cdot\frac{10}{z} = 2z - z^2.$

10. а) $(7x^2-5xy+3x):10x$; ________

б) $(8z-4z^2t+6z^3):\frac{1}{2}z$; ________

в) $(4a^5-4a^4-3a^3):4a^3$; ________

г) $-(b^{10}+b^5+b^3):5b^3$; ________

д) $(x^3+x^2+x):(-2x)$; ________

е) $-(c^5-c^3):\left(-\frac{1}{3}c^3\right)$. ________

Решение.

г) $-(b^{10}+b^5+b^3):5b^3 = -\frac{b^{10}}{5b^3}-\frac{b^5}{5b^3}-\frac{b^3}{5b^3} = -0{,}2b^7-0{,}2b^2-0{,}2.$

11. а) $(6a^3b^3-4a^2b^2):(2a^2b^2)$; ________

б) $(2c^5d^8+7c^4d^5):(c^3d^5)$; ________

в) $(-x^7y^3+3x^6y^5):4x^4y^3$; ________

г) $\left(-27k^{10}l^{15}+\frac{2}{3}k^{11}l^{13}\right):\frac{1}{3}k^9l^9$; ________

д) $(5x^3y^2z^5-3x^5y^2z^3):(-10x^2y^2z^2)$; ________

е) $(1{,}2a^6b^2+2{,}4a^5b):0{,}6a^5b$. ________

Решение.

г) $(-27k^{10}l^{15} + \frac{2}{3}k^{11}l^{13}) : \frac{1}{3}k^9l^9 = \left(-27k^{10}l^{15} : \frac{1}{3}k^9l^9\right) +$

$+ \left(\frac{2}{3}k^{11}l^{13} : \frac{1}{3}k^9l^9\right) = -81kl^6 + 2k^2l^4.$

Вынесение общего множителя за скобки. Разложение многочлена на множители

Вынесите общий множитель за скобки:

12. а) $3a + 3$; ______ г) $12q - 36p + 24$; ______

б) $6b + 2c$; ______ д) $49k^2 - 14k + 56$; ______

в) $7n - 14$; ______ е) $5xy - 5xz$. ______

Решение.

в) $7n - 14 = 7(n - 2)$.

13. а) $-m^2n + 5mn^2 - 4m^2n^2$; ______

б) $2{,}4x^5 - 7{,}2x^3$; ______

в) $\frac{2}{5}b^8 - \frac{4}{5}b^7$; ______

г) $x^{n+3} - x^n$; ______

д) $y^{2n} - 2y^n$; ______

е) $a^2p^{n+3} + a^np^{n-1}$. ______

Решение.

г) $x^{n+3} - x^n = x^n(x^3 - 1)$.

Разложите на множители:

14. а) $(c + d) + k(c + d)$; ______

б) $m(n + 2) - m(n - 2)$; ______

в) $3(a - b) + c(a - b)$; ______

г) $x(y + 4) + z(y + 4)$; ______

д) $2m(n + t) + 4k(n + t)$; ______

е) $0{,}5s^2(5 - t) + 0{,}1s(5 - t)$. ______

Решение.

е) $0{,}5s^2(5 - t) + 0{,}1s(5 - t) = (5 - t)(0{,}5s^2 + 0{,}1s) = 0{,}1s(5 - t)(5s + 1)$.

15. а) $(p - q) + \frac{1}{7}n(q - p)$; ______

б) $5(1 - b) - 3(b - 1)$; ______

в) $4a(-x - y) - (x + y)$; ______

г) $t^3(z-p)+t(p-z)-z^2+pz$; ______

д) $6m^2(n+4)-2m^2(-n-4)+8(n+4)$; ______

е) $7t^3(m^2+2)-2t^2(m^2+2)+t(2+m^2)$. ______

Решение.

г) $t^3(z-p)+t(p-z)-(z^2-pz)=t^3(z-p)-t(z-p)-z(z-p)=$
$=(z-p)(t^3-t-z)$.

16. Вычислите:

а) $36\cdot25-24\cdot25$; ______

б) $9\cdot7+21\cdot7$; ______

в) $5\frac{3}{5}\cdot7+2\frac{2}{5}\cdot7-4\frac{5}{7}\cdot2-12\frac{2}{7}\cdot2$; ______

г) $4\cdot13+5\cdot17+3\cdot13+2\cdot17$; ______

д) $2{,}7\cdot1{,}3+4{,}2\cdot1{,}7-2{,}7\cdot0{,}3-4{,}2\cdot0{,}7$; ______

е) $33\cdot11-13\cdot11+32\cdot12-12\cdot12$. ______

Решение.

е) $33\cdot11-13\cdot11+32\cdot12-12\cdot12=(33\cdot11-13\cdot11)+(32\cdot12-12\cdot12)=$
$=11(33-13)+12(32-12)=11\cdot20+12\cdot20=20(11+12)=20\cdot22=440$.

17. Разложите многочлен на множители:

а) x^2-2x+1; ______

б) x^2+5x-6; ______

в) $3x^2-7x+4$; ______

г) $-x^2+3x-2$; ______

д) $ab+a+b+1$; ______

е) $x^3y^3-x^2y^2+2xy-2$. ______

Решение.

в) $3x^2-7x+4=(3x^2-3x)-(4x-4)=3x(x-1)-4(x-1)=(3x-4)(x-1)$.

Формулы сокращённого умножения

Квадрат суммы: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

Квадрат разности: $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

Разность квадратов: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

Раскройте скобки:

18. а) $(a+2)^2$; ______ г) $(5+p)^2$; ______

б) $(4-b)^2$; ______ д) $-(t-3)^2$; ______

в) $(m-n)^2$; ______ е) $(-2-x)^2$. ______

Решение.

д) $-(t-3)^2 = -(t^2-6t+9) = -t^2+6t-9$.

19. а) $(-3x+2y)^2$; ____________ г) $(x^2-\frac{1}{4}y)^2$; ____________

б) $-(\frac{1}{2}t-s)^2$; ____________ д) $(10t+0{,}2k)^2$; ____________

в) $(0{,}3a-2{,}5b)^2$; ____________ е) $-(6c-\frac{1}{3}d^2)$. ____________

Решение.

г) $\left(x^2-\frac{1}{4}y\right)^2 = \left(x^2\right)^2 - 2\cdot x^2\cdot\frac{1}{4}y + \left(\frac{1}{4}y\right)^2 = x^4 - \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{16}y^2$.

20. Вычислите:

а) 27^2; ____________ в) 53^2; ____________ д) 47^2; ____________

б) 61^2; ____________ г) 82^2; ____________ е) 39^2. ____________

Решение.

д) $47^2 = (50-3)^2 = 50^2 - 2\cdot 50\cdot 3 + 3^2 = 2500 - 300 + 9 = 2209$.

Выполните умножение:

21. а) $(x+y)(x-y)$; ________ г) $(m^3-n^2)(m^3+n^2)$; ________

б) $(2-3x)(2+3x)$; ________ д) $(2s+7t^2)(7t^2-2s)$; ________

в) $(5d-c)(c+5d)$; ________ е) $(0{,}2a+0{,}3b)(0{,}3b-0{,}2a)$. ________

Решение.

д) $(2s+7t^2)(7t^2-2s) = (7t^2)^2-(2s)^2 = 49t^4-4s^2$.

22. а) $(2{,}5x+1{,}2)(2{,}5x-1{,}2)$; ____________

б) $\left(1\frac{3}{4}a^2-\frac{2}{5}b^2\right)\left(1\frac{3}{4}a^2+\frac{2}{5}b^2\right)$; ____________

в) $(-m-n)(m-n)$; ____________

г) $\left(-\frac{1}{2}p^2-\frac{1}{3}q^2\right)\left(\frac{1}{3}q^2-\frac{1}{2}p^2\right)$; ____________

д) $(3t+2s)(2s-3t)$; ____________

е) $(0{,}1m+0{,}3n)(0{,}3n-0{,}1m)$. ____________

Решение.

в) $(-m-n)(m-n) = -(m+n)(m-n) = (m+n)(n-m) = n^2-m^2$.

Разложите на множители:

23. а) a^2-c^2; ____________ г) $25y^2-81x^2$; ____________

б) $4x^2-1$; ____________ д) $-49t^2+36s^2$; ____________

в) $9d^2-16k^2$; ____________ е) $0{,}04x^2-1$. ____________

Решение.

е) $0{,}04x^2 - 1 = (0{,}2x)^2 - 1 = (0{,}2x - 1)(0{,}2x + 1)$.

24. а) $0{,}09y^2 - 0{,}04z^2$; ________ г) $(2c+3d)^2 - 9d^2$; ________
б) $(x-1)^2 - y^2$; ________ д) $s^2 - (t-s)^2$; ________
в) $(a+b)^2 - (a-b)^2$; ________ е) $4(x+y)^2 - 4x^2$. ________

Решение.

д) $s^2 - (t-s)^2 = (s-(t-s))(s+(t-s)) = (s-t+s)(s+t-s) = t(2s-t)$.

Вычислите:

25. а) $22 \cdot 18$; ________ в) $54 \cdot 46$; ________ д) $33 \cdot 27$; ________
б) $37 \cdot 43$; ________ г) $27 \cdot 13$; ________ е) $61 \cdot 59$. ________

Решение.

в) $54 \cdot 46 = (50+4)(50-4) = 50^2 - 4^2 = 2500 - 16 = 2484$.

26. а) $23^2 - 13^2$; ____ в) $3{,}1^2 - 0{,}1^2$; ____ д) $\dfrac{5{,}8^2 - 3{,}8^2}{9{,}6}$; ____
б) $2{,}7^2 - 0{,}7^2$; ____ г) $\left(5\frac{2}{7}\right)^2 - \left(3\frac{2}{7}\right)^2$; ____ е) $\dfrac{26^2 - 16^2}{21}$. ____

Решение.

б) $2{,}7^2 - 0{,}7^2 = (2{,}7 - 0{,}7)(2{,}7 + 0{,}7) = 2 \cdot 3{,}4 = 6{,}8$.

27. а) $\dfrac{80}{13^2 - 3^2}$; ______ в) $\dfrac{9^2 - 3^2}{23^2 - 13^2}$; ______ д) $\dfrac{17^2 - 7^2}{22^2 - 12^2}$; ______
б) $\dfrac{120}{25^2 - 5^2}$; ______ г) $\dfrac{28^2 - 18^2}{20^2 - 3^2}$; ______ е) $\dfrac{35^2 - 31^2}{41^2 - 30^2}$. ______

Решение.

е) $\dfrac{35^2 - 31^2}{41^2 - 30^2} = \dfrac{(35-31)(35+31)}{(41-30)(41+30)} = \dfrac{4 \cdot 66}{11 \cdot 71} = \dfrac{4 \cdot 6}{71} = \dfrac{24}{71}$.

28. Найдите значение N, при котором верно равенство:

а) $a^2 - 4a + N^2 = (a - N)^2$; ________________
б) $9x^2 + 6xy + N^2 = (3x + N)^2$; ________________
в) $25b^2 + N + 4 = (5b + 2)^2$; ________________
г) $c^2 + 0{,}8cd + N^2 = (c + N)^2$; ________________
д) $k^2 - N + 81t^2 = (k - 9t)^2$; ________________
е) $4t^2 - 12ts + N^2 = (2t - N)^2$. ________________

Решение.

д) $(k - 9t)^2 = k^2 - 18kt + 81t^2$, $N = 18kt$.

29. Найдите, при каком значении N квадратный трёхчлен будет полным квадратом некоторого двучлена:

а) $N + 24a^2b + 16b^2$; ________ г) $s^4 + 7s^2 + N$; ________
б) $c^6 - N + 25d^2$; ________ д) $N + 5x^2y + 6{,}25y^2$; ________
в) $49m^2 + N + 36n^4$; ________ е) $N + 3a^4b^4 + b^8$. ________

Решение.

е) $N + 3a^4b^4 + b^8 = N + 2 \cdot 1{,}5a^4b^4 + \left(b^4\right)^2$, $N = \left(1{,}5a^4\right)^2 = 2{,}25a^8$.

Разложите многочлен на множители:

30. а) $x^2 + 2xy + y^2$; ________ г) $m^2 - 12mn + 36n^2$; ________
б) $9a^2 - 6ab + b^2$; ________ д) $16 - 8s + s^2$; ________
в) $1 - 4t + 4t^2$; ________ е) $y^4 - 2y^2 + 1$. ________

Решение.

г) $m^2 - 12mn + 36n^2 = (m)^2 - 2m \cdot 6n + (6n)^2 = (m - 6n)^2$.

31. а) $-9a^4 + 24a^2b^2 - 16b^4$; ________
б) $30ab + 25a^2 + 9b^2$; ________
в) $7x^6 - 14x^3 + 7$; ________
г) $9a^2b^2 + 18abc + 9c^2$; ________
д) $(a^2 - 2ab + b^2) - t^2$; ________
е) $4 - (x^2 + 4xy + 4y^2)$. ________

Решение.

е) $4 - (x^2 + 4xy + 4y^2) = 2^2 - (x + 2y)^2 = (2 - (x + 2y))(2 + (x + 2y)) =$
$= (2 - x - 2y)(2 + x + 2y)$.

32. а) $d^2 - (9d^2 - 12d + 4)$; ________
б) $100 - x^2 + 2xy - y^2$; ________
в) $9 - (2x + 3)^2$; ________
г) $(7x + 4)^2 - (3x - 2)^2$; ________
д) $(a - 2)^2 - (a + 7)^2$; ________
е) $1 - x^2 - 2xy - y^2$. ________

Решение.

б) $100 - x^2 + 2xy - y^2 = 100 - (x^2 - 2xy + y^2) = 10^2 - (x - y)^2 =$
$= (10 - (x - y))(10 + (x - y)) = (10 - x + y)(10 + x - y)$.

33. Найдите значение N, при котором выполняется равенство:

а) $N + 4x + 4 = (x + 2)^2$; ________
б) $x^2 - 10x + N = (x - 5)^2$; ________
в) $4N + 4ab + b^2 = (2a + b)^2$; ________
г) $64m^2 - N + 0{,}04n^2 = (8m - 0{,}2n)^2$; ________
д) $0{,}09a^2 - N + 0{,}25b^2 = (0{,}3a + 0{,}5b)^2$; ________
е) $9a^2 + 6ab^2 + b^4 = (3a + N)^2$. ________

Решение.

г) $64m^2 - N + 0{,}04n^2 = 64m^2 - 3{,}2mn + 0{,}04n^2, \quad N = 3{,}2mn.$

Куб суммы: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Куб разности: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Сумма кубов: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.

Разность кубов: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

34. Раскройте скобки:

а) $(a+2)^3$; ________________
б) $(2-b)^3$; ________________
в) $(1+b^2)^3$; ________________
г) $(a^2-1)^3$; ________________
д) $(2a+b)^3$; ________________
е) $(c-3d)^3$. ________________

Решение.

г) $(a^2-1)^3 = (a^2)^3 - 3(a^2)^2 \cdot 1 + 3a^2 \cdot 1 - 1^3 = a^6 - 3a^4 + 3a^2 - 1.$

35. Выполните умножение:

а) $(c-d)(c^2+cd+d^2)$; ________
б) $(2-x)(4+2x+x^2)$; ________
в) $(b+3)(9-3b+b^2)$; ________
г) $(2a-1)(4a^2+2a+1)$; ________
д) $(a^3-2)(a^6+2a^3+4)$; ________
е) $(1+c^3)(1-c^2+c^6)$. ________

Решение.

г) $(2a-1)(4a^2+2a+1) = (2a)^3 - 1 = 8a^3 - 1.$

36. Представьте в виде произведения многочленов:

а) m^3+n^3; ________________
б) $27a^6-b^3$; ________________
в) $125x^9-64y^6$; ________________
г) a^6-1; ________________
д) t^3-216s^3; ________________
е) $0{,}008-0{,}001m^3$. ________________

Решение.

е) $0{,}008 - 0{,}001m^3 = (0{,}2)^3 - (0{,}1m)^3 = (0{,}2 - 0{,}1m)(0{,}04 + 0{,}02m+$
$+0{,}01m^2).$

Глава V

Алгебраические дроби

Понятие алгебраической дроби. Основное свойство дроби

Алгебраической дробью называют отношение двух многочленов: $\frac{P}{Q}$, где P — числитель, Q — знаменатель алгебраической дроби.

Сократить алгебраическую дробь — это значит разделить одновременно числитель и знаменатель дроби на их общий множитель.

Сократите дробь:

1. а) $\frac{24}{48}$; ______________________ г) $\frac{-38}{57}$; ______________________

б) $-\frac{12}{60}$; ______________________ д) $\frac{-28}{63}$; ______________________

в) $\frac{-77}{-22}$; ______________________ е) $\frac{125}{25}$. ______________________

Решение.

в) $\frac{-77}{-22} = \frac{7 \cdot (-11)}{2 \cdot (-11)} = \frac{7}{2}$.

2. а) $\frac{n^7}{n^3}$, $n \neq 0$; ____________ г) $\frac{3a}{a}$, $a \neq 0$; ____________

б) $\frac{p^{10}}{-p^9}$, $p \neq 0$; ____________ д) $\frac{7b^3}{14b^5}$; ____________

в) $\frac{-m^5}{m^6}$; ____________ е) $\frac{51a^2}{17b^2}$. ____________

Решение.

д) $\frac{7b^3}{14b^5} = \frac{7b^3}{2b^2 \cdot 7b^3} = \frac{1}{2b^2}$.

3. а) $\frac{15ad^2}{6a}$, $a \neq 0$; ____________ г) $\frac{-12t^4s^3}{24t^3s^5}$, $t \neq 0$; ____________

б) $\frac{18x^2y}{xy^3}$, $x \neq 0$; ____________ д) $\frac{100xy^2}{50x^2yz}$, $y \neq 0$; ____________

в) $\frac{-8m^3n^2}{7m^2n^3}$, $m \neq 0$; ____________ е) $\frac{k^3p}{5k^5p^2}$. ____________

Решение.

г) $\frac{-12t^4s^3}{24t^3s^5} = \frac{-t \cdot 12t^3s^3}{2s^2 \cdot 12t^3s^3} = -\frac{t}{2s^2}$.

4. а) $\frac{5(a-b)}{8(a-b)}$, $a \neq b$; ____________ г) $\frac{12(k-t)^3}{3(k-t)}$, $k \neq t$; ____________

б) $\frac{14(x+y)}{21(x+y)}$, $x \neq -y$; ____________ д) $\frac{6(k^2-s^2)}{36(k^2+s^2)}$; ____________

в) $\frac{3(m+n)}{9(m+n)^2}$; ____________ е) $\frac{28(a^2-b^2)}{7(a+b)}$, $a \neq -b$. ____________

Решение.

в) $\frac{3(m+n)}{9(m+n)^2} = \frac{3(m+n)}{3(m+n) \cdot 3(m+n)} = \frac{1}{3(m+n)}$.

Найдите значения переменной, при которых не имеет смысла алгебраическая дробь:

5. а) $\frac{a+5}{a-3}$; ____________ г) $\frac{3d}{7-21d}$; ____________

б) $\frac{3x-12}{x+1}$; ____________ д) $\frac{2x}{x^2+3x-4}$; ____________

в) $\frac{5c-4}{2c+10}$; ____________ е) $\frac{(x+1)}{x^2+5x+4}$. ____________

Решение.

в) Дробь $\dfrac{5c-4}{2c+10}$ не имеет смысла, если $2c+10=0$, $c=-5$.

6. а) $\dfrac{3x^2}{x(x-3)}$; ________ г) $\dfrac{37c^2}{c(c+6)(c-6)}$; ________

б) $\dfrac{45t+9}{(t-3)(t+15)}$; ________ д) $\dfrac{d^3-1}{d^2-4}$; ________

в) $\dfrac{b^2+75}{b(12b-48)}$; ________ е) $\dfrac{a+8}{a^2-64}$. ________

Решение.

г) Дробь $\dfrac{37c^2}{c(c+6)(c-6)}$ не имеет смысла, если $c(c+6)(c-6)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=0, \\ c=-6, \\ c=6. \end{array}\right.$$

7. Найдите значения переменной, при которых дробь равна нулю:

а) $\dfrac{x+3}{x-7}$; ________ г) $\dfrac{x^2-16}{x+4}$; ________

б) $\dfrac{x^2-4}{x}$; ________ д) $\dfrac{x^2-9}{x-3}$; ________

в) $\dfrac{x-1}{x^2-1}$; ________ е) $\dfrac{(x-1)^2}{x^2+3x+2}$. ________

Решение.

в) Дробь $\dfrac{x-1}{x^2-1}$ равна нулю, если

$$\begin{cases} x-1=0, \\ x^2-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ x_{1,2}\neq \pm 1. \end{cases}$$ Таких значений нет.

8. Найдите значение алгебраической дроби:

а) $\dfrac{x+2}{x}$ при $x=1$; ______ г) $\dfrac{a^2-5}{a}$ при $a=5$; ______

б) $\dfrac{y+5}{y-2}$ при $y=4$; ______ д) $\dfrac{(b-3)^2}{b-3}$ при $b=13$; ______

в) $\dfrac{(t+4)^2}{3t}$ при $t=2$; ______ е) $\dfrac{4c^2-d^2}{2c+d}$ при $c=2$, $d=-1$. ______

Решение.

е) $\dfrac{4c^2-d^2}{2c+d}=\dfrac{(2c-d)(2c+d)}{2c+d}=2c-d$. При $c=2$, $d=-1$, $2c-d=5$.

Сократите дробь:

9. а) $\dfrac{(x-y)^2}{(y-x)^2}$, $x \neq y$; ________

г) $\dfrac{4c+4d}{(c+d)^2}$; ________

б) $\dfrac{(3m+n)^2}{(6m+2n)^2}$, $3m \neq -n$; ________

д) $\dfrac{9t+18s}{4t+8s}$, $t \neq -s$; ________

в) $\dfrac{(a-b)^3}{(b-a)^3}$, $a \neq b$; ________

е) $\dfrac{3-30k}{(10k-1)^2}$. ________

Решение.

г) $\dfrac{4c+4d}{(c+d)^2} = \dfrac{4(c+d)}{(c+d)^2} = \dfrac{4}{c+d}$.

10. а) $\dfrac{12a^5b^3(c-d)}{6a^4b^2(d-c)^3}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$; ________________

б) $\dfrac{8b(b-7)}{12b^5(7-b)^2}$; ________________

в) $\dfrac{x^2y^2(x^2+y^2)}{x^3y+xy^3}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$; ________________

г) $\dfrac{8c^3d^2(t-s)^2}{2c^5d^3(s-t)^2}$, $s \neq t$; ________________

д) $\dfrac{(m-n)^{10}}{(n-m)^{11}}$; ________________

е) $\dfrac{(a+5)^3}{(a+5)}$, $a \neq -5$. ________________

Решение.

в) $\dfrac{x^2y^2(x^2+y^2)}{x^3y+xy^3} = \dfrac{x^2y^2(x^2+y^2)}{xy(x^2+y^2)} = xy$.

11. а) $\dfrac{7a-21}{7a}$; ____________

г) $\dfrac{cd+ck}{ad+ak}$, $d \neq -k$; ____________

б) $\dfrac{2a+2b}{4a}$; ____________

д) $\dfrac{ab-ad}{ac}$, $a \neq 0$; ____________

в) $\dfrac{15k}{3k+6}$; ____________

е) $\dfrac{kt}{5t-t^2}$, $t \neq 0$. ____________

Решение.

в) $\dfrac{15k}{3k+6} = \dfrac{15k}{3(k+2)} = \dfrac{5k}{k+2}$.

12. а) $\dfrac{3x^2}{x^4+x^2}, x \neq 0;$ ______

б) $\dfrac{a^5-a^3}{7a^3}, a \neq 0;$ ______

в) $\dfrac{20a^2b^3+15a^2}{8b^5+6b^2}, b^3 \neq -\dfrac{3}{4};$ ______

г) $\dfrac{xy-x}{x^3y-x^3}, x \neq y;$ ______

д) $\dfrac{a-b}{a^2-b^2}, a \neq b;$ ______

е) $\dfrac{c^2-d^2}{c+d}, c \neq -d.$ ______

Решение.

д) $\dfrac{a-b}{a^2-b^2} = \dfrac{a-b}{(a-b)(a+b)} = \dfrac{1}{a+b}.$

13. а) $\dfrac{(a+b)^2}{a^3+b^3},\ a \neq -b;$ ______

б) $\dfrac{a^2-b^2}{(a-b)^3};$ ______

в) $\dfrac{16a^2-25c^2}{4a-5c},\ 4a \neq 5c;$ ______

г) $\dfrac{x^2-6xy+9y^2}{3y-x},\ x \neq 3y;$ ______

д) $\dfrac{5-2x}{4x^2-20x+25};$ ______

е) $\dfrac{4-9x^2}{4+12x+9x^2}.$ ______

Решение.

е) $\dfrac{4-9x^2}{4+12x+9x^2} = \dfrac{2^2-(3x)^2}{(2+3x)^2} = \dfrac{(2-3x)(2+3x)}{(2+3x)^2} = \dfrac{2-3x}{2+3x}.$

14. Вычислите:

а) $\dfrac{2^7+2^6}{2^6-2^5};$ ______

б) $\dfrac{3^3}{3^4-3^3};$ ______

в) $\dfrac{5^2+2\cdot5\cdot3+3^2}{4};$ ______

г) $\dfrac{7}{7^2+2\cdot7\cdot3+3^2};$ ______

д) $\dfrac{5^2+5\cdot3+3^2}{5^3-3^3};$ ______

е) $\dfrac{7^3+6^3}{7^2-7\cdot6+6^2}.$ ______

Решение.

в) $\dfrac{5^2+2\cdot5\cdot3+3^2}{4} = \dfrac{(5+3)^2}{4} = \dfrac{8^2}{4} = 16.$

15. Определите знак дроби:

а) $\dfrac{a}{b}$, если $a>0,\ b>0;$ ______

б) $\dfrac{a^2}{b}$, если $a>0,\ b<0;$ ______

в) $\dfrac{c^2}{d}$, если $c<0,\ d>0;$ ______

г) $\dfrac{t}{s^2}$, если $s>0,\ t>0;$ ______

д) $\dfrac{a^3}{b^2}$, если $a>0,\ b<0;$ ______

е) $\dfrac{x}{y^2}$, если $x<0,\ y<0.$ ______

Решение.

д) $\frac{a^3}{b^2}$, если $a > 0$, $b < 0$. $a^3 > 0$, так как $a > 0$, $b^2 > 0$ как отрицательное число в чётной степени, следовательно, $\frac{a^3}{b^2} > 0$.

16. Сократите дробь:

а) $\frac{x}{|x|}$, если $x < 0$; ____________ г) $\frac{|y|}{-4y}$, если $y < 0$; ____________

б) $\frac{2|x|}{x}$, если $x > 0$; ____________ д) $\frac{2|y|}{|-y|}$, если $y > 0$; ____________

в) $\frac{-5x}{2|x|}$, если $x > 0$; ____________ е) $\frac{-|y|}{5y}$, если $y < 0$. ____________

Решение.

в) $\frac{-5x}{2|x|}$, если $x > 0$. Так как $x > 0$, то $|x| = x$. Дробь примет вид: $\frac{-5x}{2x} = -2{,}5$.

Сложение и вычитание алгебраических дробей

$$\frac{a}{d} \pm \frac{b}{d} = \frac{a \pm b}{d}, \quad d \neq 0.$$

$$\frac{a}{d} \pm \frac{b}{c} = \frac{ac \pm bd}{cd}, \quad d \neq 0, \quad c \neq 0.$$

Выполните действия[1]:

17. а) $\frac{x}{2} + \frac{y}{2}$; ____________ г) $\frac{x}{3} + \frac{2x}{6}$; ____________

б) $\frac{a}{4} - \frac{b}{4}$; ____________ д) $\frac{3b}{7} - \frac{b}{14}$; ____________

в) $\frac{c}{10} - \frac{d}{5}$; ____________ е) $\frac{6m}{5} + \frac{2m}{15}$. ____________

Решение.

г) $\frac{x}{3} + \frac{2x}{6} = \frac{2x + 2x}{6} = \frac{4x}{6} = \frac{2x}{3}$.

[1] Здесь и далее буквами обозначены числа, при которых знаменатель дроби не равен нулю.

18. а) $\frac{3c-5}{d}-\frac{2c+1}{d}$; ________ г) $\frac{3z-2}{2z}-\frac{2z-3}{z}$; ________

б) $\frac{8a-15}{a}+\frac{2a+12}{a}$; ________ д) $\frac{7p+1}{10p^2}+\frac{3-p}{5p^2}$; ________

в) $\frac{4m-5}{m}-\frac{2m+1}{2m}$; ________ е) $\frac{5}{3x^2}-\frac{x+1}{2x^3}$. ________

Решение.

в) $\frac{4m-5}{m}-\frac{2m+1}{2m}=\frac{2(4m-5)-(2m+1)}{2m}=\frac{8m-10-2m-1}{2m}=$
$=\frac{6m-11}{2m}$.

19. а) $\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}$; ________ г) $\frac{5a+2}{z-t}+\frac{7-3a}{z-t}$; ________

б) $\frac{x}{cd}-\frac{y}{dp}$; ________ д) $\frac{7}{2(a+b)}+\frac{3}{a+b}$; ________

в) $\frac{2-b}{m+n}-\frac{3b}{m+n}$; ________ е) $\frac{4k^2}{5(c-d)}-\frac{k^2}{3(c-d)}$. ________

Решение.

г) $\frac{5a+2}{z-t}+\frac{7-3a}{z-t}=\frac{5a+2+7-3a}{z-t}=\frac{2a+9}{z-t}$.

20. а) $2-\frac{3b}{b-1}$; ________ г) $\frac{2}{a+1}-a+1$; ________

б) $c+\frac{5-c}{c+1}$; ________ д) $\frac{x}{x-y}-\frac{x}{x+y}$; ________

в) $d+1-\frac{3}{d-1}$; ________ е) $\frac{b-a}{a}+\frac{a+b}{b}$. ________

Решение.

г) $\frac{2}{a+1}-a+1=\frac{2}{a+1}+(1-a)=\frac{2+(1-a)(1+a)}{a+1}=\frac{2+1-a^2}{a+1}=$
$=\frac{3-a^2}{a+1}$.

21. а) $\frac{x^2+z}{x}-x$; ______________ г) $s-\frac{(t+s)^2}{2t}$; ______________

б) $\frac{(p-q)^2}{2q}+p$; ______________ д) $b+c-\frac{c^2+b^2}{b-c}$; ______________

в) $3t-\frac{9t^2-2}{3t}$; ______________ е) $\frac{a^2+d^2}{a+d}+a-d$. ______________

Решение.

г) $s-\frac{(t+s)^2}{2t}=\frac{2st-(t^2+2st+s^2)}{2t}=\frac{2st-t^2-2st-s^2}{2t}=-\frac{t^2+s^2}{2t}$.

22. а) $\frac{b}{1-b^2}-\frac{1}{1-b}$; ______________ г) $\frac{2z}{4-3z}-\frac{6z^2+8z}{16-9z^2}$; ______________

б) $\frac{2a}{a^2-9}+\frac{1}{a-3}$; ______________ д) $\frac{1}{a^2-b^2}-\frac{1}{a(a+b)}$; ______________

в) $\frac{1}{6+c}+\frac{c}{36-c^2}$; ______________ е) $\frac{2}{k(k-2)}-\frac{2}{k^2-4}$. ______________

Решение.

г) $\frac{2z}{4-3z}-\frac{6z^2+8z}{16-9z^2}=\frac{2z}{4-3z}-\frac{6z^2+8z}{(4-3z)(4+3z)}=$

$=\frac{2z(4+3z)-(6z^2+8z)}{16-9z^2}=\frac{8z+6z^2-6z^2-8z}{16-9z^2}=0.$

Умножение и деление алгебраических дробей

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$, $b\neq 0$, $d\neq 0$.

$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$ $b\neq 0$, $c\neq 0$, $d\neq 0$.

Выполните действия:

23. а) $\frac{6x}{7}\cdot\frac{14y}{3}$; ______________ г) $\frac{m^5}{10}\cdot\frac{100}{m^4}$; ______________

б) $\frac{5}{4a}:\frac{7}{2a}$; ______________ д) $\frac{a^2}{8}:\frac{a}{4}$; ______________

в) $\frac{11c}{12}\cdot\frac{18}{c}$; ______________ е) $\frac{24}{c^3}\cdot\frac{c^5}{48}$. ______________

Решение.

г) $\frac{m^5}{10}\cdot\frac{100}{m^4}=\frac{m^5\cdot100}{10\cdot m^4}=10m.$

24. а) $\frac{b^3}{xy}:\frac{a^2b}{xy}$; ______ г) $\frac{a^3b}{c}\cdot\frac{c^2}{a^5}$; ______

б) $\frac{p^3q^2}{z}:\frac{p^3q^3}{z^2}$; ______ д) $x\cdot\frac{kt}{x^2}$; ______

в) $\frac{16}{3d^3}\cdot\frac{9d^4}{8}$; ______ е) $q:\frac{bq}{t^2}$. ______

Решение.

б) $\frac{p^3q^2}{z}:\frac{p^3q^3}{z^2}=\frac{p^3q^2\cdot z^2}{z\cdot p^3q^3}=\frac{z}{q}.$

25. а) $\frac{8mn^3}{7p^4}\cdot\frac{28p^2}{16m^3n}$; ______ г) $\frac{5st}{2}\cdot\frac{2st}{25}$; ______

б) $-\frac{3b^7}{4c^4x^2}:\frac{9b^6}{8c^3x^3}$; ______ д) $-25y^3:\frac{15y^2}{4x}$; ______

в) $\frac{51x^2y^3}{13a^3b^2}:\frac{-17x^3y^2}{26a^2b^3}$; ______ е) $\frac{3x^2y}{cd}:9xy$. ______

Решение.

в) $\frac{51x^2y^3}{13a^3b^2}:\frac{-17x^3y^2}{26a^2b^3}=-\frac{51x^2y^3\cdot26a^2b^3}{13a^3b^2\cdot17x^3y^2}=-\frac{3y\cdot2b}{a\cdot x}=-\frac{6by}{ax}.$

26. а) $\frac{2-a}{p+q}\cdot\frac{p+q}{a-2}$; ______ г) $\frac{a^2}{b}\cdot\frac{ab-b}{a}$; ______

б) $\frac{2b}{m-n}\cdot\frac{m-n}{6}$; ______ д) $\frac{xy-y^2}{16}:\frac{y^2}{8x}$; ______

в) $\frac{x+y}{x-y}:\frac{1}{x^2-y^2}$; ______ е) $\frac{a-b}{c+d}:\frac{3(b-a)}{2(d+c)}$. ______

Решение.

г) $\frac{a^2}{b}\cdot\frac{ab-b}{a}=\frac{a^2\cdot b(a-1)}{ab}=a(a-1).$

27. а) $\frac{1}{a+b}\cdot(a^2+2ab+b^2)$; ______

б) $\frac{x^2-25}{x^2+6x+9}\cdot\frac{x+3}{x-5}$; ______

в) $\frac{x^2-10x+25}{4x-12}:\frac{2x-10}{x-3}$; ______

4. Зак. № 265

г) $\dfrac{1-b^2}{4a+8b}\cdot\dfrac{a^2+4ab+4b^2}{5-5b^2}$; ________________

д) $\dfrac{2(p^2+q^2)}{3(p+q)^2}:\dfrac{p^2+q^2}{(p+q)^3}$; ________________

е) $\dfrac{5m-10n}{m-5}:\dfrac{m-2n}{m^2-25}$. ________________

Решение.

г) $\dfrac{1-b^2}{4a+8b}\cdot\dfrac{a^2+4ab+4b^2}{5-5b^2}=\dfrac{(1-b^2)(a+2b)^2}{4(a+2b)\cdot5(1-b^2)}=\dfrac{1}{20}(a+2b).$

28. а) $\left(m+\dfrac{m}{n}\right)\cdot\left(\dfrac{m}{n}-m\right)$; ________

б) $\left(\dfrac{s}{t}-2\right)\cdot\left(2+\dfrac{s}{t}\right)$; ________

в) $\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)\cdot\dfrac{5ab}{a-b}$; ________

г) $\left(t-\dfrac{3t}{t+2}\right):\dfrac{t-1}{t+2}$; ________

д) $\dfrac{b-3}{b+3}\cdot\left(b+\dfrac{b^2}{3-b}\right)$; ________

е) $\left(\dfrac{2a}{b^2}-\dfrac{1}{2a}\right):\dfrac{2a+b}{2ab^2}$. ________

Решение.

г) $\left(t-\dfrac{3t}{t+2}\right):\dfrac{t-1}{t+2}=\dfrac{t^2+2t-3t}{t+2}:\dfrac{t-1}{t+2}=\dfrac{(t^2-t)\cdot(t+2)}{(t+2)(t-1)}=$

$=\dfrac{t(t-1)}{t-1}=t.$

Глава VI

Квадратные корни

Понятие квадратного корня из неотрицательного числа

Арифметическим квадратным корнем из числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a.

$\sqrt{a} \geqslant 0$.

$(\sqrt{a})^2 = a$.

Действие нахождения квадратного корня из числа называют извлечением квадратного корня.

1. Найдите сторону квадрата, если его площадь равна:

а) $S = 64$ см^2; ______________ г) $S = \dfrac{225}{144}$ см^2; ______________

б) $S = \dfrac{81}{169}$ дм^2; ______________ д) $S = 6{,}25$ дм^2; ______________

в) $S = 0{,}01$ м^2; ______________ е) $S = 1$ м^2. ______________

Решение.

д) $S = 6{,}25$ дм^2; $a = \sqrt{6{,}25} = \sqrt{(2{,}5)^2} = 2{,}5$ (дм).

2. Выберите верные равенства:

а) $\sqrt{169} = 13$; г) $\sqrt{0} = 0$;

б) $\sqrt{25} = -5$; д) $\sqrt{196} = \pm 14$;

в) $\sqrt{225} = -(-15)$; е) $\sqrt{144} = |-12|$.

Решение.

д) $\sqrt{196} = \pm 14$. Число -14 не удовлетворяет условию $\sqrt{a} \geqslant 0$, значит, $\sqrt{196} \neq \pm 14$.

3. Вычислите:

а) $(\sqrt{4})^2$; ________ г) $\sqrt{\left(-\frac{15}{17}\right)^2}$; ________

б) $-(\sqrt{9})^2$; ________ д) $2\sqrt{256} - \sqrt{144}$; ________

в) $-(\sqrt{0{,}25})^2$; ________ е) $\frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 18} + 3 \cdot \sqrt{3 \cdot \frac{1}{27}}$. ________

Решение.

е) $\frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 18} + 3 \cdot \sqrt{3 \cdot \frac{1}{27}} = \frac{1}{2}\sqrt{36} + 3\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{2} \cdot 6 + 3 \cdot \frac{1}{3} = 3 + 1 = 4.$

4. Найдите значение выражения:

а) $2\sqrt{10 - 3a}$ при $a = 3$; ________

б) $\frac{1}{5}\sqrt{2x - y}$ при $x = 10$, $y = 4$; ________

в) $\sqrt{2a} - \sqrt{3a + b}$ при $a = 50$, $b = 19$; ________

г) $\sqrt{b^2} - \sqrt{5}$ при $b = \sqrt{5}$; ________

д) $\sqrt{\frac{u}{v}} - \sqrt{\frac{v}{u}}$ при $u = 16$, $v = 256$; ________

е) $\sqrt{t^4} + 3$ при $t = 3$. ________

Решение.

г) Подставим $b = \sqrt{5}$ в выражение $\sqrt{b^2} - \sqrt{5}$. Получим $\sqrt{(\sqrt{5})^2} - \sqrt{5} = \sqrt{5} - \sqrt{5} = 0$.

При каких значениях a имеет смысл выражение:

5. а) $\sqrt{a}$; ________ г) $\sqrt{\frac{1}{a}}$; ________

б) $-\sqrt{a}$; ________ д) $\frac{|a|}{\sqrt{a}}$; ________

в) $\sqrt{a^2}$; ________ е) $-\sqrt{-a}$? ________

Решение.

г) Учитывая, что квадратный корень определён на множестве неотрицательных чисел, а знаменатель дроби отличен от нуля, выражение $\sqrt{\frac{1}{a}}$ имеет смысл при $a > 0$.

6. а) $\sqrt{2a+8}$; ______ г) $\sqrt{-(-a)^3}$; ______

б) $\dfrac{1}{\sqrt{-3a}}$; ______ д) $-\dfrac{2}{\sqrt{8-a}}$; ______

в) $\sqrt{3-a}$; ______ е) $\dfrac{a}{\sqrt{|a|}}$. ______

Решение.

г) Выражение $\sqrt{-(-a)^3}$ имеет смысл, если $-(-a)^3 \geqslant 0$, $(-a)^3 \leqslant 0$, $-a^3 \leqslant 0$, $a^3 \geqslant 0$, $a \geqslant 0$.

7. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если его катеты равны:

а) $a = 8, b = 6$; ______ г) $a = 15, b = 8$; ______

б) $a = 12, b = 5$; ______ д) $a = 2k, b = \sqrt{5}k$; ______

в) $a = 7, b = 24$; ______ е) $a = \sqrt{3}, b = \sqrt{27}$. ______

Решение.

в) По теореме Пифагора имеем: $c^2 = a^2 + b^2$,
$c^2 = 7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625$, $c = \sqrt{625} = 25$.

8. Сравните числа:

а) $\sqrt{12} \ldots 4$; в) $\sqrt{10} \ldots \pi$; д) $\sqrt{7{,}84} \ldots 2{,}8$;

б) $2\sqrt{5} \ldots \sqrt{25}$; г) $2{,}3 \ldots \sqrt{6{,}25}$; е) $3{,}1 \ldots \sqrt{9{,}6}$.

Решение.

г) $\sqrt{6{,}25} = 2{,}5$, $2{,}3 < 2{,}5$, следовательно, $2{,}3 < \sqrt{6{,}25}$.

Для любого числа a справедливо равенство $\sqrt{a^2} = |a|$.

9. Упростите выражение:

а) $\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2}$; ______ г) $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}$; ______

б) $\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}$; ______ д) $\sqrt{(x-2)^2}$, если $x \geqslant 2$; ______

в) $\sqrt{(\sqrt{24}-5)^2}$; ______ е) $\sqrt{(b+4)^2}$, если $b < -4$. ______

Решение.

г) $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} = |\sqrt{2}-\sqrt{3}|$. Установим знак выражения $\sqrt{2}-\sqrt{3}$. $2 < 3$, значит $\sqrt{2} < \sqrt{3}$, отсюда $\sqrt{2}-\sqrt{3} < 0$. Применяем правило: модуль отрицательного числа равен числу ему противоположному. Имеем: $|\sqrt{2}-\sqrt{3}| = \sqrt{3}-\sqrt{2}$. $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$.

Свойства квадратных корней. Преобразование выражений, содержащих квадратные корни

Если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Если $a \geqslant 0$, $b > 0$, то $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Вычислите:

10. а) $\sqrt{9 \cdot 4}$; ____________ г) $\sqrt{1{,}44 \cdot 1{,}44}$; ____________

б) $\sqrt{25 \cdot 36}$; ____________ д) $\sqrt{0{,}36 \cdot 49}$; ____________

в) $\sqrt{0{,}01 \cdot 0{,}09}$; ____________ е) $\sqrt{\frac{81}{64}}$. ____________

Решение.

в) $\sqrt{0{,}01 \cdot 0{,}09} = \sqrt{0{,}01} \cdot \sqrt{0{,}09} = 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}03$.

11. а) $\sqrt{2^2 \cdot 4 \cdot 9}$; ____________ г) $\sqrt{2{,}56 \cdot 0{,}04}$; ____________

б) $\sqrt{144 \cdot 1 \cdot 25}$; ____________ д) $\sqrt{0{,}0196 \cdot 4}$; ____________

в) $\sqrt{169 \cdot 36}$; ____________ е) $\sqrt{\frac{25}{49} \cdot \frac{16}{81}}$. ____________

Решение.

е) $\sqrt{\frac{25}{49} \cdot \frac{16}{81}} = \sqrt{\frac{25}{49}} \cdot \sqrt{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt{25} \cdot \sqrt{16}}{\sqrt{49} \cdot \sqrt{81}} = \frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 9} = \frac{20}{63}$.

12. а) $\sqrt{\frac{9}{8} \cdot \frac{1}{2}}$; ____________ г) $\sqrt{7\frac{1}{9}}$; ____________

б) $\sqrt{\frac{36}{12} \cdot \frac{3}{25}}$; ____________ д) $\sqrt{6\frac{1}{4}}$; ____________

в) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; ____________ е) $\sqrt{3\frac{1}{16}}$. ____________

Решение.

г) $\sqrt{7\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{9}} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$.

Используя свойства квадратных корней, найдите значение числового выражения:

13. а) $\sqrt{27} \cdot \sqrt{3}$; ____________ г) $\sqrt{19{,}6} \cdot \sqrt{0{,}1}$; ____________

б) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2}$; ____________ д) $\sqrt{1{,}92} \cdot \sqrt{3}$; ____________

в) $\sqrt{4{,}5} \cdot \sqrt{50}$; ____________ е) $\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{160}}$. ____________

Решение.

д) $\sqrt{1{,}92}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{1{,}92\cdot 3}=\sqrt{5{,}76}=2{,}4.$

14. а) $\dfrac{\sqrt{108}}{\sqrt{12}}$; ______ г) $\dfrac{\sqrt{160}}{\sqrt{250}}$; ______

б) $\dfrac{\sqrt{288}}{\sqrt{18}}$; ______ д) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{147}}$; ______

в) $\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$; ______ е) $\dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{128}}$. ______

Решение.

д) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{147}}=\sqrt{\dfrac{27}{147}}=\sqrt{\dfrac{9}{49}}=\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{49}}=\dfrac{3}{7}.$

15. Подберите два последовательных целых числа, между которыми заключено число:

а) $\sqrt{23}$; ______ г) $-\sqrt{69}$; ______

б) $\sqrt{48}$; ______ д) $-\sqrt{0{,}1}$; ______

в) $\sqrt{0{,}7}$; ______ е) $-\sqrt{228}$. ______

Решение.

б) Подкоренное выражение равно 48, $36 < 48 < 49$, значит, $\sqrt{36} < \sqrt{48} < \sqrt{49}$; $6 < \sqrt{48} < 7$.

16. Найдите наибольшее целое значение a, которое удовлетворяет неравенству:

а) $a < \sqrt{7}$; ______ г) $a < \sqrt{5}$; ______

б) $2a < \sqrt{18}$; ______ д) $5a < \sqrt{27}$; ______

в) $3a < 9$; ______ е) $a < \sqrt{3}$. ______

Решение.

б) Очевидно, $18 < 25$, значит, $\sqrt{18} < \sqrt{25}$, $2a < \sqrt{25}$, $2a < 5$, $a < 2{,}5$. Наибольшее целое число — это 2.

17. Найдите наименьшее целое значение b, которое удовлетворяет неравенству:

а) $b > \sqrt{3}$; ______ г) $b > \sqrt{11}$; ______

б) $2b \geqslant \sqrt{16}$; ______ д) $b > \sqrt{0{,}1}$; ______

в) $3b > \sqrt{20}$; ______ е) $5b \geqslant \sqrt{144}$. ______

Решение.

в) Очевидно, $20 > 16$, $\sqrt{20} > \sqrt{16}$, $3b > \sqrt{16}$, $3b > 4$, $b > \dfrac{4}{3}$.

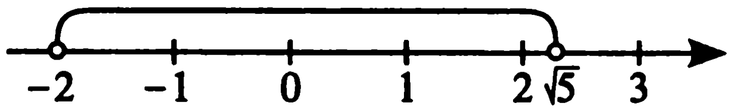
Наименьшее целое число — это 2.

18. Укажите, сколько целых чисел принадлежит промежутку:

а) $[1; \sqrt{7}]$;
б) $[-\sqrt{2}; \sqrt{8})$;
в) $(-\sqrt{4}; \sqrt{5})$;
г) $(\sqrt{9}; 9)$;
д) $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$;
е) $(0; \sqrt{10})$.

Решение.

в) Изобразим заданный промежуток на числовой прямой, учитывая, что $-\sqrt{4} = -2, \quad 2 < \sqrt{5} < 3$.



Промежуток $(-\sqrt{4}, \sqrt{5})$ содержит четыре целых числа: $-1,\ 0,\ 1,\ 2$.

19. Вычислите:

а) $\sqrt{5^2 \cdot 2^4}$;
б) $\sqrt{3^4 \cdot 2^2}$;
в) $\sqrt{2^6 \cdot 7^2}$;
г) $\sqrt{(-11)^2 \cdot (0{,}1)^2}$;
д) $\sqrt{(-3)^2 \cdot (0)^2}$;
е) $\sqrt{(-2)^3 \cdot (-2)^5}$.

Решение.

г) $\sqrt{(-11)^2 \cdot (0{,}1)^2} = \sqrt{(-11)^2} \cdot \sqrt{(0{,}1)^2} = |-11| \cdot |0{,}1| = 1{,}1.$

20. Вычислите, применяя формулы сокращённого умножения:

а) $(\sqrt{2} + \sqrt{8})^2$;
б) $(\sqrt{12} - \sqrt{3})^2$;
в) $(\sqrt{17} - \sqrt{5})(\sqrt{17} + \sqrt{5})$;
г) $(\sqrt{13} - \sqrt{2})(\sqrt{13} + \sqrt{2})$;
д) $(\sqrt{7} + \sqrt{11})(\sqrt{11} - \sqrt{7})$;
е) $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})$.

Решение.

б) $(\sqrt{12} - \sqrt{3})^2 = (\sqrt{12})^2 - 2 \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 12 - 2\sqrt{36} + 3 =$
$= 15 - 2 \cdot 6 = 15 - 12 = 3.$

21. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{\dfrac{81 \cdot 36}{25}}$;
б) $\sqrt{\dfrac{144 \cdot 25}{9}}$;
в) $\sqrt{\dfrac{25}{169 \cdot 4}}$;
г) $\sqrt{\dfrac{49}{16 \cdot 9}}$;
д) $\sqrt{\dfrac{121 \cdot 4}{100}}$;
е) $\sqrt{\dfrac{225}{64}}$.

Решение.

в) $\sqrt{\dfrac{25}{169 \cdot 4}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{169} \cdot \sqrt{4}} = \dfrac{5}{13 \cdot 2} = \dfrac{5}{26}.$

Вынесите множитель из-под знака корня:

22. а) $\sqrt{9a}$; ______ г) $\sqrt{75a^3}$; ______

б) $\sqrt{5b^8}$; ______ д) $\sqrt{27b^6}$, $b > 0$; ______

в) $\sqrt{49c^4}$; ______ е) $\sqrt{2\frac{1}{4}x^6y}$, $x < 0$. ______

Решение.

г) $\sqrt{75a^3} = \sqrt{25 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot a} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{3a} = 5a\sqrt{3a}$.

23. а) $\sqrt{\frac{81}{49}p^{13}q^6}$, $q < 0$; ______ г) $\sqrt{1\frac{24}{25}x^6y}$, $x > 0$; ______

б) $\sqrt{36m^2n}$, $m < 0$; ______ д) $\sqrt{2{,}89a^3b^2}$, $b > 0$; ______

в) $\sqrt{\frac{225}{144}t^4}$; ______ е) $\sqrt{0{,}0625t^7s^8}$, $t > 0$. ______

Решение.

г) $\sqrt{1\frac{24}{25}x^6y} = \sqrt{\frac{49}{25}\left(x^3\right)^2y} = \frac{7}{5}|x^3|\sqrt{y}$. По условию $x > 0$, $|x^3| = x^3$.

Следовательно, $\frac{7}{5}|x^3|\sqrt{y} = 1{,}4x^3\sqrt{y}$.

Внесите множитель под знак корня:

24. а) $2\sqrt{5}$; ______ г) $-3\sqrt{5}$; ______

б) $5\sqrt{3}$; ______ д) $-2\sqrt{8}$; ______

в) $7\sqrt{2}$; ______ е) $-4\sqrt{10}$. ______

Решение.

д) $-2\sqrt{8} = -\sqrt{2^2 \cdot 8} = -\sqrt{4 \cdot 8} = -\sqrt{32}$.

25. а) $-b^4\sqrt{11}$; ______ г) $\frac{1}{n^8}\sqrt{3}$; ______

б) $c^2\sqrt{16}$; ______ д) $4x^2z^6\sqrt{0{,}5xz}$; ______

в) $-z^4\sqrt{5}$; ______ е) $m^3\sqrt{m}$. ______

Решение.

д) $4x^2z^6\sqrt{0{,}5xz} = \sqrt{(4x^2z^6)^2 \cdot 0{,}5xz} = \sqrt{16x^4z^{12} \cdot 0{,}5xz} = \sqrt{8x^5z^{13}}$.

26. Упростите выражение:

а) $\sqrt{20} + \sqrt{125}$; ______ г) $3\sqrt{5} + 2\sqrt{20} - \sqrt{80}$; ______

б) $\sqrt{48} - \sqrt{27}$; ______ д) $3\sqrt{8} + 4\sqrt{2} - 5\sqrt{32}$; ______

в) $\sqrt{128} - \sqrt{8}$; ______ е) $\sqrt{75} + \sqrt{147} - \sqrt{12}$. ______

Решение.

д) $3\sqrt{8}+4\sqrt{2}-5\sqrt{32}=3\sqrt{4\cdot 2}+4\sqrt{2}-5\sqrt{16\cdot 2}=3\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}+4\sqrt{2}-$ $-5\sqrt{16}\cdot\sqrt{2}=3\cdot 2\sqrt{2}+4\sqrt{2}-5\cdot 4\sqrt{2}=6\sqrt{2}+4\sqrt{2}-20\sqrt{2}=-10\sqrt{2}$.

27. Решите уравнение, применяя определение квадратного корня:

а) $\sqrt{x-1}=2$; ________ г) $\sqrt{x^2}+4=0$; ________

б) $\sqrt{x+2}=5$; ________ д) $\sqrt{25-x^2}=0$; ________

в) $\sqrt{x^4}=4$; ________ е) $\sqrt{(x-3)^2}=5$. ________

Решение.

д) $\sqrt{25-x^2}=0$, $25-x^2=0$, $x^2=25$, $x=\pm 5$ — корни уравнения.

28. Решите неравенство:

а) $\sqrt{(x-1)^2}\geqslant 4$; ________ г) $\sqrt{x-7}\geqslant 2$; ________

б) $\sqrt{(3+x)^2}<5$; ________ д) $\sqrt{x-2}\leqslant 1$; ________

в) $\sqrt{x^2}\geqslant 12$; ________ е) $\sqrt{(x-3)^2}\leqslant 1$. ________

Решение.

е) $\sqrt{(x-3)^2}\leqslant 1$, $|x-3|\leqslant 1$, $-1\leqslant x-3\leqslant 1$, $-1+3\leqslant x\leqslant 1+3$, $2\leqslant x\leqslant 4$.

Разложите на множители, применяя формулы сокращённого умножения:

29. а) a^2-5; ________ г) $36-n^2$; ________

б) $7-b^2$; ________ д) $c-3$; ________

в) $m-100$; ________ е) $m-n$. ________

Решение.

д) $c-3=(\sqrt{c})^2-(\sqrt{3})^2=(\sqrt{c}-\sqrt{3})(\sqrt{c}+\sqrt{3})$.

30. а) $1-2\sqrt{q}+q$; ________ г) $t+6\sqrt{ts}+9s^2$; ________

б) $p+4\sqrt{p}+4$; ________ д) $3k^2-10\sqrt{3}k+25$; ________

в) $c+2\sqrt{cd}+d$; ________ е) $64a^6-100b^4$. ________

Решение.

б) $p+4\sqrt{p}+4=(\sqrt{p})^2+2\cdot 2\cdot\sqrt{p}+2^2=(\sqrt{p}+2)^2$.

31. Сократите дробь:

а) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$; ________ г) $\dfrac{\sqrt{18}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}-1}$; ________

б) $\dfrac{11+\sqrt{11}}{1+\sqrt{11}}$; ________ д) $\dfrac{a-3}{\sqrt{a}-\sqrt{3}}$, $a\neq 3$; ________

в) $\dfrac{5\sqrt{2}+2}{5+\sqrt{2}}$; ________ е) $\dfrac{m-n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$, $\sqrt{m}+\sqrt{n}\neq 0$. ________

Решение.

в) $\dfrac{5\sqrt{2}+2}{5+\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}{5+\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}(5+\sqrt{2})}{5+\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$

32. Освободите выражение от иррациональности в знаменателе:

а) $\dfrac{6}{\sqrt{2}}$; ____________ г) $\dfrac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$; ____________

б) $\dfrac{9}{2\sqrt{3}}$; ____________ д) $\dfrac{8}{\sqrt{3}-\sqrt{11}}$; ____________

в) $\dfrac{7\sqrt{3}}{3\sqrt{7}}$; ____________ е) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$. ____________

Решение.

б) $\dfrac{9}{2\sqrt{3}} = \dfrac{9\cdot\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \dfrac{9\sqrt{3}}{2\cdot 3} = 1{,}5\sqrt{3}.$

Глава VII

Арифметический корень натуральной степени

Понятие арифметического корня натуральной степени

Арифметическим корнем натуральной степени $n \geqslant 2$ из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Если $a \geqslant 0$, то $(\sqrt[n]{a})^n = a$; $\sqrt[n]{a^n} = a$.

Если $a < 0$, $n = 2k + 1$, то есть n — нечётное натуральное число, то $\sqrt[2k+1]{a}$ — называют корнем нечётной степени из отрицательного числа.

Корень нечётной степени из отрицательного числа a связан с арифметическим корнем из числа $-a$ равенством
$\sqrt[2k+1]{a} = -\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{|a|}$.

1. Найдите кубический корень из числа:

а) 1; ____________ в) 125; ____________ д) $\frac{1}{64}$; ____________

б) 0; ____________ г) 27; ____________ е) 0,008. ____________

Решение.

в) $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$.

2. Найдите корень четвёртой степени из числа:

а) 16; ________ в) 1; ________ д) $\frac{256}{81}$; ________

б) 0; ________ г) $0{,}0625$; ________ е) $0{,}0001$. ________

Решение.

е) $\sqrt[4]{0{,}0001} = \sqrt[4]{(0{,}1)^4} = 0{,}1$.

3. Вычислите:

а) $\sqrt[8]{16^2}$; ________ в) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{25}\right)^2}$; ________ д) $\sqrt[5]{32^2}$; ________

б) $\sqrt[6]{64^3}$; ________ г) $\sqrt[3]{-5^{12}}$; ________ е) $\sqrt[5]{-\frac{1}{243}}$. ________

Решение.

а) $\sqrt[8]{16^2} = \sqrt[8]{(2^4)^2} = \sqrt[8]{2^8} = 2$.

4. При каких значениях a имеет смысл выражение:

а) $\sqrt[8]{2a+5}$; ________ г) $\sqrt[4]{\frac{a-2}{2+a}}$; ________

б) $\sqrt[10]{2a^2-3a+1}$; ________ д) $\sqrt[5]{a^3-5a^2-a-7}$; ________

в) $\sqrt[3]{a-3}$; ________ е) $\sqrt[6]{8-a}$. ________

Решение.

г) Показатель корня — чётное число, данное выражение имеет смысл, если $\frac{a-2}{2+a} \geqslant 0$.

$a \in (-\infty; -2) \cup [2; +\infty)$.

Свойства арифметического корня

Если соответствующие выражения имеют смысл, то:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

5. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{5^3 \cdot 8}$; ____ в) $\sqrt[6]{4^3 \cdot 10^6}$; ____ д) $\sqrt[4]{3^{12} \cdot 1^{13}}$; ____

б) $\sqrt[5]{32 \cdot 3^5}$; ____ г) $\sqrt[5]{(0{,}2)^5 \cdot 7^5}$; ____ е) $\sqrt[10]{4^{20} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20}}$. ____

Решение.

г) $\sqrt[5]{(0{,}2)^5 \cdot 7^5} = \sqrt[5]{(0{,}2)^5} \cdot \sqrt[5]{7^5} = 0{,}2 \cdot 7 = 1{,}4.$

6. Извлеките корень (x, y, z, a, b — положительные числа):

а) $\sqrt[3]{27a^3b^{12}}$; ____ в) $\sqrt[6]{y^{12}z^{18}}$; ____ д) $\sqrt[4]{\dfrac{16x^8}{81y^4}}$; ____

б) $\sqrt[4]{256x^{16}z^{20}}$; ____ г) $\sqrt[3]{3\dfrac{3}{8}}$; ____ е) $\sqrt[3]{\dfrac{64a^6b^{21}}{125z^9}}$. ____

Решение.

г) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$

7. Вычислите:

а) $\left(\sqrt[6]{5^3}\right)^2$; ____ в) $\left(\sqrt[10]{32}\right)^2$; ____ д) $\sqrt{\sqrt{3^{12}}}$; ____

б) $\left(\sqrt[3]{9}\right)^{-3}$; ____ г) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$; ____ е) $\left(\sqrt[8]{16}\right)^{-4}$. ____

Решение.

г) $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{2^6} = 2.$

8. Упростите выражение:

а) $\left(\sqrt{\sqrt[4]{a^2b^3}}\right)^8$; ____ г) $\dfrac{\sqrt[5]{x^2y} \cdot \sqrt[5]{x^4y^6}}{\sqrt[5]{x^6y^7}}$; ____

б) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{x}}\right)^{12}$; ____ д) $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^{18}}}}{\sqrt{a^4}}$; ____

в) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{(3a)^3}}\right)^{12}$; ____ е) $\dfrac{\sqrt[4]{27a^2b^5} \cdot \sqrt[4]{9a^3b}}{\sqrt[4]{3ab^2}}$. ____

Решение.

е) $\sqrt[4]{\dfrac{3^3a^2b^5 \cdot 3^2a^3b}{3ab^2}} = \sqrt[4]{\dfrac{3^5a^5b^6}{3ab^2}} = \sqrt[4]{3^4a^4b^4} = 3ab.$

9. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{7-\sqrt{41}}\cdot\sqrt[3]{7+\sqrt{41}}$; ______

б) $\sqrt[5]{16-\sqrt{13}}\cdot\sqrt[5]{16+\sqrt{13}}$; ______

в) $\sqrt[4]{26+\sqrt{51}}\cdot\sqrt[4]{26-\sqrt{51}}$; ______

г) $\sqrt[3]{\dfrac{64}{125}}+\sqrt[4]{36}\cdot\sqrt{6}$; ______

д) $\sqrt{\sqrt{81}}-\sqrt[4]{18}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{9}{2}}$; ______

е) $\dfrac{\sqrt[6]{27^2}\cdot\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$. ______

Решение.

в) $\sqrt[4]{26+\sqrt{51}}\cdot\sqrt[4]{26-\sqrt{51}}=\sqrt[4]{(26+\sqrt{51})(26-\sqrt{51})}=$

$=\sqrt[4]{26^2-(\sqrt{51})^2}=\sqrt[4]{676-51}=\sqrt[4]{625}=\sqrt[4]{5^4}=5.$

Глава VIII

Квадратные уравнения

Квадратные уравнения общего вида

Уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где a, b, c — заданные числа, $a \neq 0$, x — неизвестное, называется квадратным.

1. Из перечисленных уравнений выберите квадратные:

а) $2x^2+3x+7=0$; г) $7x^2+x^3=0$;
б) $2x^2+2x=0$; д) $2x^2+x-2x^2+1=0$;
в) $3x^2+5x-x^2+2=2x^2$; е) $\dfrac{3}{x^2}+x-1=0$.

Решение.
д) Многочлен левой части уравнения приведём к стандартному виду. Получим $x+1=0$. Наибольшая степень неизвестного — первая, уравнение не является квадратным.

2. Для заданных значений a, b, c составьте квадратное уравнение:

а) $a=5, b=2, c=-1$; ____________________

б) $a=2, b=-1, c=-\frac{1}{5}$; ____________________

в) $a=-\frac{1}{7}, b=0, c=\frac{3}{4}$; ____________________

г) $a=-12, b=0, c=0$; ____________________

д) $a=-1, b=d, c=5k$; ____________________

е) $a=0{,}75, b=-m, c=1{,}2$. ____________________

Решение.

а) Подставим в уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ значение заданных коэффициентов. Получим $5x^2 + 2x - 1 = 0$.

3. Приведите уравнение к виду $ax^2+bx+c = 0$ и укажите значение коэффициентов a, b, c:

а) $x(x + 2) = 3$; ________ г) $(x - 2)(x + 2) = 3x$; ________

б) $x(x - 7) = 5$; ________ д) $3(x + 1)(x - 1) = -x$; ________

в) $2x(x + 11) = 17$; ________ е) $(x + 3)(x - 2) = 0$. ________

Решение.

д) $3(x + 1)(x - 1) = -x$, $3(x^2 - 1) = -x$, $3x^2 + x - 3 = 0$, $a = 3$, $b = 1$, $c = -3$.

Неполные квадратные уравнения

Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ называется неполным, если хотя бы один из коэффициентов в нём равен нулю.

$ax^2 = 0$. Уравнение имеет единственный корень $x = 0$.

$$ax^2 + bx = 0,\ b \neq 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -\dfrac{b}{a}. \end{array}\right.$$

Уравнение имеет два различных корня.

$$ax^2 + c = 0,\ ac < 0 \Leftrightarrow ax^2 = -c \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{-\dfrac{c}{a}}, \\ x = -\sqrt{-\dfrac{c}{a}}. \end{array}\right.$$

Уравнение имеет два различных корня.

$ax^2 + c = 0$, $ac > 0$. Уравнение не имеет действительных корней.

Решите уравнение:

4. а) $-3x^2 = 0$; ________ г) $x^2 - 64 = 0$; ________

б) $\frac{1}{7}x^2 = 0$; ________ д) $x^2 - 36 = 0$; ________

в) $5x^2 = 0$; ________ е) $x^2 + 81 = 0$. ________

Решение.

б) $\frac{1}{7}x^2 = 0$, $x^2 = 0$, $x = 0$.

5. Зак. № 265

5. а) $x^2 = \frac{1}{144}$; ______ г) $5x^2 + 125 = 0$; ______

б) $3x^2 = \frac{1}{27}$; ______ д) $x^2 - \frac{45}{49} = 0$; ______

в) $x^2 + 0{,}12 = 0$; ______ е) $x^2 - 32 = 0$. ______

Решение.

в) $x^2 + 0{,}12 = 0$, $x^2 = -0{,}12$, корней нет, так как $x^2 \geqslant 0$ при всех $x \in R$.

6. а) $x^2 + 8x = 0$; ______ г) $0{,}2x^2 - 6x = 0$; ______

б) $5x - 20x^2 = 0$; ______ д) $\frac{2}{5}x^2 - 4x = 0$; ______

в) $3x^2 - 27x = 0$; ______ е) $0{,}1x + x^2 = 0$. ______

Решение.

а) $x^2 + 8x = 0$, $x(x+8) = 0$, $x = 0$ или $x + 8 = 0$, $x = -8$.

7. а) $x^2 + 2x = 2x^2 - 7x$; ______ г) $15 + 3(x+1) = x^2 + 3x$; ______

б) $-x - 7x = 3x^2 + 5x^2$; ______ д) $12 - 2(x+4) = x^2 - 2x$; ______

в) $x^2 - 4x = 2(5 - 2x)$; ______ е) $x(x-1) = 9 - x$. ______

Решение.

г) $15+3(x+1) = x^2+3x$, $15+3x+3 = x^2+3x$, $x^2 = 18$, $x_{1,2} = \pm 3\sqrt{2}$ — корни уравнения.

8. а) $\frac{(2x-3)^2}{2} + \frac{2x-3}{2} = 0$; ______ г) $x^2 - |x| = 0$; ______

б) $(2x-1)^2 - 9 = 0$; ______ д) $x^2 + |x| - 3x = 0$; ______

в) $(x+1)^2 = 4$; ______ е) $2x^2 - |x| + 4x = 0$. ______

Решение.

в) $(x+1)^2 = 4$, $|x+1| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1 = 2, \\ x+1 = -2; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -3. \end{array}\right.$

9. При каких значениях p $x_1 = 0$, $x_2 \neq 0$ в уравнении:

а) $2x^2 + x + p = 0$; ______ г) $2x^2 + 3x + 2p + 2 = 0$; ______

б) $3x^2 - x + p - 1 = 0$; ______ д) $x^2 + x + p^2 - p = 0$; ______

в) $5x^2 + x + p^2 - 1 = 0$; ______ е) $-x^2 + x - 7p + 14m = 0$? ______

Решение.

в) Квадратное уравнение имеет корни $x_1 = 0$, $x_2 \neq 0$, если $b \neq 0$, $c = 0$.

$b = 1$, $c = p^2 - 1$, $b \neq 0$, $p^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p = 1, \\ p = -1. \end{array}\right.$

10. При каких значениях p $x = 0$ единственный корень уравнения:

а) $7x^2 + px + p^2 - 2p = 0$; ______

б) $5x^2 + (p+1)x + p^2 - 1 = 0$; ______

в) $3x^2 + (p^2 - 4)x + p - 2 = 0$; ________________

г) $-x^2 + 7px + p^3 = 0$; ________________

д) $2x^2 - (p-1)x + p^3 - 1 = 0$; ________________

е) $-4x^2 + (p^2 - 9)x + p + 3 = 0$? ________________

Решение.

в) $3x^2 + (p^2 - 4)x + p - 2 = 0$.

Квадратное уравнение имеет единственный корень, равный нулю, если $b = 0$ и $c = 0$.

$$\begin{cases} p^2 - 4 = 0, \\ p - 2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} p = 2, \\ p = -2, \end{array}\right. \\ p = 2; \end{cases} \Leftrightarrow p = 2.$$

Решение квадратных уравнений

Формула корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ или $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, где дискриминант $D = b^2 - 4ac$.

Формула корней квадратного уравнения с чётным вторым коэффициентом $ax^2 + 2mx + c = 0$, $a \neq 0$: $x_{1,2} = \dfrac{-m \pm \sqrt{m^2 - ac}}{a}$ или

$$x_{1,2} = \frac{-m \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}, \text{ где } \frac{D}{4} = m^2 - ac.$$

11. Выберите уравнения, для которых число -3 является корнем:

а) $x^2 - 2x - 15 = 0$;
б) $x^2 - 9 = 0$;
в) $-x^2 + 3x + 18 = 0$;
г) $2x^2 - 4x + 7 = 0$;
д) $2x^2 - x - 21 = 0$;
е) $-7x^2 - 21x = 0$.

Решение.

а) $(-3)^2 - 2 \cdot (-3) - 15 = 9 + 6 - 15 = 0$. Число -3 — корень исходного уравнения.

12. Найдите дискриминант уравнения:

а) $2x^2 - 7x + 3 = 0$; __________
б) $2x^2 - 3x + 11 = 0$; __________
в) $x^2 - 10x + 25 = 0$; __________
г) $-x^2 + 2x - 10 = 0$; __________
д) $x^2 + 6x + 9 = 0$; __________
е) $5x^2 - x - 6 = 0$. __________

Решение.

а) $a = 2$, $b = -7$, $c = 3$; $D = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 49 - 24 = 25$.

13. Найдите $\frac{D}{4}$:

а) $x^2 + 2x - 12 = 0$; ________ г) $x^2 - 4x + 4 = 0$; ________
б) $3x^2 - 16x + 1 = 0$; ________ д) $-2x^2 + 12x + 3 = 0$; ________
в) $-5x^2 - 8x - 3 = 0$; ________ е) $4x^2 + 20x + 25 = 0$. ________

Решение.

г) $a = 1, \quad m = \frac{b}{2} = \frac{-4}{2} = -2, \quad c = 4.$

$\frac{D}{4} = m^2 - ac = (-2)^2 - 1 \cdot 4 = 4 - 4 = 0.$

$D = 0$ или $\frac{D}{4} = 0$ — уравнение имеет один корень.

$D > 0$ или $\frac{D}{4} > 0$ — уравнение имеет два различных действительных корня.

$D < 0$ или $\frac{D}{4} < 0$ — уравнение не имеет действительных корней.

14. Найдите число корней уравнения:

а) $3x^2 + x - 10 = 0$; ________ г) $x^2 - 2x + 11 = 0$; ________
б) $-5x + x^2 + 6{,}25 = 0$; ________ д) $4x^2 + 4x + 1 = 0$; ________
в) $-2x^2 - 3x + 1 = 0$; ________ е) $-x^2 - 7x - 15 = 0$. ________

Решение.

д) $a = 4, \quad m = \frac{b}{2} = \frac{4}{2} = 2, \quad c = 1. \quad \frac{D}{4} = m^2 - ac = 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0.$

$\frac{D}{4} = 0$ — уравнение имеет один корень.

15. Решите уравнение:

а) $2x^2 - 5x - 3 = 0$; ________ г) $2x^2 - 7x - 15 = 0$; ________
б) $3x^2 - 2x - 8 = 0$; ________ д) $3x^2 + 5x + 2 = 0$; ________
в) $9x^2 - 6x + 2 = 0$; ________ е) $5x^2 - 12x + 4 = 0$. ________

Решение.

в) $a = 9, \quad m = \frac{b}{2} = \frac{-6}{2} = -3, \quad c = 2.$

$\frac{D}{4} = m^2 - ac = (-3)^2 - 9 \cdot 2 = 9 - 18 = -9. \quad \frac{D}{4} < 0.$ Уравнение не имеет действительных корней.

Частные случаи решения квадратного уравнения

Рассмотрим уравнение $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0.$

Если $a + b + c = 0$, то корни уравнения: $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{c}{a}.$

Если $a-b+c = 0$ (то есть $a+c = b$), то корни уравнения: $x_1 = -1,$ $x_2 = -\frac{c}{a}.$

Решите уравнение:

16. а) $3x^2 - 5x + 2 = 0$; ______ г) $1000x^2 - 2x - 998 = 0$; ______

б) $4x^2 - 6x + 2 = 0$; ______ д) $436x^2 - 36x - 400 = 0$; ______

в) $17x^2 + 3x - 20 = 0$; ______ е) $15x^2 - 19x + 4 = 0$. ______

Решение.

е) $a = 15,\ b = -19,\ c = 4.\ \ a+b+c = 15-19+4 = 0$. Корни уравнения: $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{c}{a} = \frac{4}{15}.$

17. а) $7x^2 + 4x - 3 = 0$; ______ г) $32x^2 + 49x + 17 = 0$; ______

б) $-7x^2 - 5x + 2 = 0$; ______ д) $-x^2 + 9x + 10 = 0$; ______

в) $3x^2 + 8x + 5 = 0$; ______ е) $8x^2 - 5x - 13 = 0$. ______

Решение.

а) $a = 7,\ b = 4,\ c = -3.\ \ a - b + c = 7 - 4 - 3 = 0$. Корни уравнения: $x_1 = -1,\ x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{-3}{7} = \frac{3}{7}.$

Приведённое квадратное уравнение

Уравнение вида $x^2 + px + q = 0$, где p и q — заданные числа, x — неизвестное, называется приведённым квадратным уравнением.

Формула корней приведённого квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Формула корней приведённого квадратного уравнения с чётным вторым коэффициентом: $x^2 + 2kx + q = 0;\ \ x_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - q}.$

18. Составьте квадратное уравнение $x^2+px+q=0$, если известны его коэффициенты:

а) $p=2, q=-1$; ______ г) $p=-4, q=3$; ______
б) $p=9, q=2{,}7$; ______ д) $p=0{,}8, q=-1{,}2$; ______
в) $p=-7\frac{3}{8}, q=-5\frac{1}{6}$; ______ е) $p=\sqrt{3}, q=-3$. ______

Решение.

а) Подставим значения $p=2$ и $q=-1$ в уравнение $x^2+px+q=0$. Получим $x^2+2x-1=0$.

19. Приведите уравнение $ax^2+bx+c=0$ к виду $x^2+px+q=0$:

а) $3x^2-6x-12=0$; ______
б) $-5x^2+10x+25=0$; ______
в) $2x^2-5x-8=0$; ______
г) $12x^2-24x+36=0$; ______
д) $-x^2+3x-2=0$; ______
е) $-10x^2+11x+100=0$. ______

Решение.

б) Разделим обе части уравнения на коэффициент $a=-5$. Получим $x^2-2x-5=0$.

20. Решите уравнение:

а) $x^2+6x-1=0$; ______ г) $x^2+8x-2=0$; ______
б) $x^2+4x-10=0$; ______ д) $x^2-12x+4=0$; ______
в) $x^2-2x-8=0$; ______ е) $x^2+10x-24=0$. ______

Решение.

а) $k=\frac{p}{2}=\frac{6}{2}=3,\quad q=-1.$

$x_{1,2}=-k\pm\sqrt{k^2-q}=-3\pm\sqrt{9+1}=-3\pm\sqrt{10}.$

Теорема Виета

Если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$, то справедливы формулы:

$$x_1+x_2=-p,$$
$$x_1\cdot x_2=q.$$

21. Найдите сумму и произведение корней уравнения:

а) $x^2 - 0{,}5x + 0{,}06 = 0$; ________ г) $x^2 - 4bx - a^2 = 0$; ________

б) $x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{3}{25} = 0$; ________ д) $x^2 + 11x + 24 = 0$; ________

в) $x^2 - 2\sqrt{3}x - d^2 = 0$; ________ е) $x^2 - 12x + 11 = 0$. ________

Решение.

д) Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения, тогда по теореме Виета:

$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 + x_2 = -11.$

$x_1 \cdot x_2 = q, \quad x_1 \cdot x_2 = 24.$

22. Составьте приведённое квадратное уравнение, если известны его корни:

а) $x_1 = 5,\ x_2 = 7$; ________ г) $x_1 = 0{,}1,\ x_2 = 2{,}5$; ________

б) $x_1 = 3,\ x_2 = -2$; ________ д) $x_1 = -\sqrt{2},\ x_2 = 2\sqrt{2}$; ________

в) $x_1 = -1,\ x_2 = 6$; ________ е) $x_1 = -0{,}7,\ x_2 = 0{,}01$. ________

Решение.

а) $x_1 + x_2 = 5 + 7 = 12$, $p = -12$. $x_1 \cdot x_2 = 5 \cdot 7 = 35$, $q = 35$. Уравнение примет вид $x^2 - 12x + 35 = 0$.

23. Не решая уравнение, определите знаки его корней:

а) $x^2 + 7x + 2 = 0$; ________ г) $x^2 + 8x + 2 = 0$; ________

б) $x^2 - 3x - 4 = 0$; ________ д) $x^2 - 15x - 16 = 0$; ________

в) $x^2 + 11x - 17 = 0$; ________ е) $x^2 - 20x + 10 = 0$. ________

Решение.

а) $q = 2 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 2 > 0$ — произведение корней — положительное число, значит, корни одного знака.

$p = 7 \Rightarrow x_1 + x_2 = -7 < 0$ — сумма корней — отрицательное число, значит, оба корня отрицательные.

Теорема, обратная теореме Виета

Если числа p, q, x_1, x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$, то x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.

24. Подбором найдите корни уравнения:

а) $x^2 - 5x + 6 = 0$; ________ г) $x^2 + 8x + 12 = 0$; ________

б) $x^2 + 4x - 12 = 0$; ________ д) $x^2 - 7x + 12 = 0$; ________

в) $x^2 + 2x - 15 = 0$; ________ е) $x^2 - 11x + 24 = 0$. ________

Решение.

а) Подберём два числа таких, что их произведение равно 6, а сумма 5. Это числа 2 и 3. Получаем: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

25. В уравнении $x^2 + px + q = 0$ корень $x_1 = t$. Найдите x_2 и p:

а) $x^2 + px - 12 = 0$, $x_1 = 4$; ______________________

б) $x^2 + px + 48 = 0$, $x_1 = -12$; ______________________

в) $x^2 + px - 60 = 0$, $x_1 = 15$; ______________________

г) $x^2 + px - 26 = 0$, $x_1 = -13$; ______________________

д) $x^2 + px - 45 = 0$, $x_1 = 9$; ______________________

е) $x^2 + px + 56 = 0$, $x_1 = 7$. ______________________

Решение.

а) $q = x_1 \cdot x_2 = -12$, $x_2 = -12 : 4 = -3$. $x_1 + x_2 = -p$, $4 - 3 = 1$, $p = -1$.

26. В уравнении $x^2 + px + q = 0$ известен корень x_1. Найдите x_2 и q:

а) $x^2 + 3x + q = 0$, $x_1 = 2$; ______________________

б) $x^2 - 8x + q = 0$, $x_1 = 12$; ______________________

в) $x^2 + 2x + q = 0$, $x_1 = -3$; ______________________

г) $x^2 + 15x + q = 0$, $x_1 = -8$; ______________________

д) $x^2 - 27x + q = 0$, $x_1 = 17$; ______________________

е) $x^2 + x - q = 0$, $x_1 = 2$. ______________________

Решение.

а) $x_1 + x_2 = -p$, $p = 3$, $x_1 + x_2 = -3$, $x_2 = -3 - x_1 = -3 - 2 = -5$. $q = x_1 \cdot x_2$, $q = 2 \cdot (-5)$, $q = -10$.

27. В уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ известен корень x_1. Найдите x_2 и b:

а) $5x^2 + bx + 3 = 0$, $x_1 = 0{,}4$; ______________________

б) $2x^2 + bx + 8 = 0$, $x_1 = 4$; ______________________

в) $3x^2 + bx - 15 = 0$, $x_1 = 2{,}5$; ______________________

г) $5x^2 + bx - 4 = 0$, $x_1 = 2$; ______________________

д) $8x^2 + bx + 1 = 0$, $x_1 = -\frac{1}{2}$; ______________________

е) $-x^2 + bx + 2 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$. ______________________

Решение.

а) Разделим обе части уравнения на 5. Получим $x^2 + 0{,}2bx + 0{,}6 = 0$;

$x_1 \cdot x_2 = 0{,}6, \quad x_2 = \dfrac{0{,}6}{0{,}4} = 1{,}5. \quad x_1 + x_2 = -0{,}2b, \quad 0{,}4 + 1{,}5 = -0{,}2b,$

$b = \dfrac{1{,}9}{-0{,}2} = -9{,}5.$

28. В уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ известен корень x_1. Найдите x_2 и c:

а) $5x^2 - 26x + c = 0,\ x_1 = 0{,}2;$ ______

б) $3x^2 + 11x + c = 0,\ x_1 = -3;$ ______

в) $8x^2 - 10x + c = 0,\ x_1 = 1;$ ______

г) $7x^2 + 5x + c = 0,\ x_1 = -1;$ ______

д) $2x^2 - 11x + c = 0,\ x_1 = 4;$ ______

е) $-x^2 + 12x - c = 0,\ x_1 = 5.$ ______

Решение.

а) Разделим обе части уравнения на 5. Получим $x^2 - 5{,}2x + 0{,}2c = 0$; $x_1 + x_2 = 5{,}2, \quad x_2 = 5{,}2 - 0{,}2 = 5. \quad x_1 \cdot x_2 = 0{,}2c, \quad 5 \cdot 0{,}2 = 0{,}2c, \quad c = 5.$

Решение квадратных уравнений способом замены

Решим уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ способом замены.

Умножим обе части уравнения на a.

Получим $(ax)^2 + b(ax) + ac = 0$.

Выполним замену $ax = t$. Уравнение примет вид: $t^2 + bt + ac = 0$, t_1 и t_2 — корни уравнения. Вернёмся к исходной переменной:

$ax_1 = t_1, \quad x_1 = \dfrac{t_1}{a}, \quad ax_2 = t_2, \quad x_2 = \dfrac{t_2}{a}.$

Рассмотрим на примере $2x^2 - 11x + 15 = 0$.

1. Умножим a на c: $2 \cdot 15 = 30$.
2. Составим вспомогательное уравнение: $t^2 - 11t + 30 = 0$.
3. Найдём корни t_1 и t_2: $t_1 = 6$, $t_2 = 5$.
4. Найдём корни исходного уравнения: $x_1 = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$; $x_2 = \dfrac{6}{2} = 3$.

Ответ: 2,5; 3.

Решите уравнение способом замены:

29. а) $4x^2 + 19x + 22 = 0;$ ______

б) $5x^2 - 11x + 2 = 0;$ ______

в) $3x^2 - 8x + 4 = 0;$ ______

г) $33x^2 + 20x + 3 = 0;$ ______

д) $5x^2 - 22x + 8 = 0;$ ______

е) $8x^2 + 18x - 5 = 0.$ ______

Решение.

г) 1) $33 \cdot 3 = 99$;

2) $t^2 + 20t + 99 = 0$;

3) $t_1 = -11, t_2 = -9$;

4) $x_1 = -\frac{11}{33} = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{-9}{33} = -\frac{3}{11}$.

30. а) $3x^2 + 2x - 16 = 0$; ________ г) $12x^2 - 13x + 3 = 0$; ________

б) $7x^2 + 16x + 4 = 0$; ________ д) $15x^2 + x - 2 = 0$; ________

в) $16x^2 - 10x + 1 = 0$; ________ е) $12x^2 + 13x + 3 = 0$. ________

Решение.

г) 1) $12 \cdot 3 = 36$;

2) $t^2 - 13t + 36 = 0$;

3) $t_1 = 9, t_2 = 4$;

4) $x_1 = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$, $x_2 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Разложение квадратного трёхчлена на множители

Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то при всех x справедливо равенство $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

31. Разложите квадратный трёхчлен на множители:

а) $x^2 - 3x + 2$; ________ г) $-x^2 + 5x + 36$; ________

б) $x^2 + 5x - 24$; ________ д) $-x^2 + 9x + 22$; ________

в) $2x^2 + 6x - 8$; ________ е) $x^2 - 8x + 16$. ________

Решение.

а) Найдём корни квадратного уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.

32. Сократите дробь:

а) $\frac{(x-3)^2}{x^2 - 9}$, $x \neq 3$; ________

б) $\frac{x^2 + 5x - 14}{x^2 - 4x + 4}$; ________

в) $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 11x + 24}$, $x + 3 \neq 0$; ________

г) $\frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - x - 20}$, $x - 5 \neq 0$; ________

д) $\dfrac{x^2-7x+6}{x^2-9x+18}$, $x-6\neq 0$; ______

е) $\dfrac{x^2+x-42}{x^2+2x-35}$, $x+7\neq 0$. ______

Решение.

д) Разложим на множители числитель и знаменатель дроби. Для этого решим уравнение $x^2-7x+6=0$; $x_1=1$, $x_2=6$ и уравнение $x^2-9x+18=0$; $x_1=3$, $x_2=6$. Получим $\dfrac{(x-1)(x-6)}{(x-3)(x-6)}=\dfrac{x-1}{x-3}$.

Биквадратные уравнения

Уравнение вида $ax^4+bx^2+c=0$, где $a\neq 0$, называются биквадратными.

33. Решите уравнение:

а) $x^4+x^2-20=0$; ______
б) $x^4-50x^2+49=0$; ______
в) $x^4-4x^2-5=0$; ______
г) $x^4-5x^2+4=0$; ______
д) $x^4-10x^2+9=0$; ______
е) $x^4+3x^2-4=0$. ______

Решение.

д) Обозначим $x^2=t$. Уравнение примет вид $t^2-10t+9=0$; $t_1=1$, $t_2=9$. Вернёмся к переменной x: $x^2=1$, $x_{1,2}=\pm1$ или $x^2=9$, $x_{3,4}=\pm3$.

Глава IX

Квадратичная функция

Квадратичной называется функция, которую можно задавать формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где a, b и c — некоторые числа, причём $a \neq 0$.

Квадратичная функция определена при любом значении аргумента.

1. Из перечисленных функций выберите квадратичную:

а) $y = 2x^2 - 3x + 1$; ______________ г) $y = \dfrac{x^2}{3}$; ______________

б) $y = (x - 5)^2$; ______________ д) $y = \dfrac{3}{x^2}$; ______________

в) $y = x^3 + 2x^2 - x$; ______________ е) $y = -0{,}2x^2$. ______________

Решение.

б) Функцию $y = (x - 5)^2$ можно записать в виде $y = x^2 - 10x + 25$, что соответствует определению квадратичной функции.

2. Для функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ найдите $f(t)$:

а) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1,\ f(2)$; ______________

б) $f(x) = \dfrac{x^2}{7} + 3x,\ f(-14)$; ______________

в) $f(x) = (x - 3)^2 + 5,\ f(0)$; ______________

г) $f(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{2}x - 3,\ f(-4)$; ______________

д) $f(x) = -x^2,\ f(-1)$; ______________

е) $f(x) = -x^2 + 5x - 7,\ f(-2)$. ______________

Решение.

г) Подставим $x = -4$ в правую часть равенства. Получим

$f(-4) = -\frac{1}{4}(-4)^2 + \frac{1}{2}(-4) - 3 = -4 - 2 - 3 = -9.$

3. Найдите, при каком значении k график функции $y = g(x)$ проходит через точку с координатами $(p; g(p))$:

а) $g(x) = x^2 - 7x + k,\ (2; 3);$ ______

б) $g(x) = -2x^2 + kx - 10,\ (1; -2);$ ______

в) $g(x) = kx^2 - 3x + 4,\ (2; 0);$ ______

г) $g(x) = -x^2 - 10x - k,\ (0; -1);$ ______

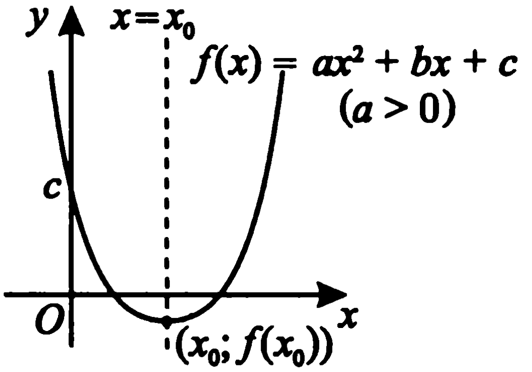
д) $g(x) = (x-2)^2 + k,\ (1; 10);$ ______

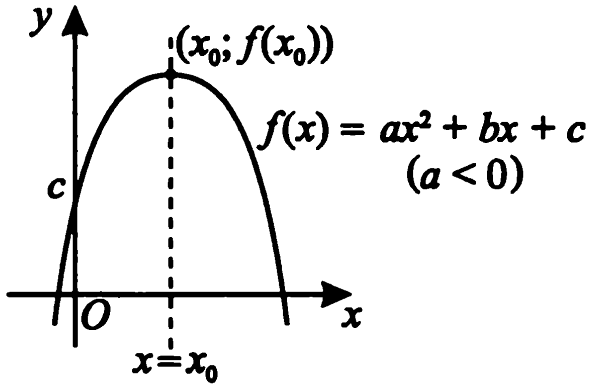
е) $g(x) = -kx^2 + 12x,\ (-1; 3).$ ______

Решение.

б) Найдём значение k из условия $g(1) = -2$, $\quad -2 + k - 10 = -2$, $\quad k = 10$.

График квадратичной функции — парабола.





Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх.

Если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

$x_0 = \frac{-b}{2a}$ — абсцисса вершины параболы.

$(x_0, f(x_0))$ — координаты вершины параболы.

$x = x_0$ — уравнение оси симметрии параболы.

4. Укажите направление ветвей параболы $y = g(x)$:

а) $g(x) = 5x^2 - 7x + 3;$ ______

б) $g(x) = 8 - 2x - x^2;$ ______

в) $g(x) = 3x - 8x^2 + 7;$ ______

г) $g(x) = (5 - x)^2 + 2;$ ______

д) $g(x) = (x - 3)^2 - 4;$ ______

е) $g(x) = -(x + 2)^2 + 1.$ ______

Решение.

в) Запишем квадратный трёхчлен, стоящий в правой части, в виде $g(x) = -8x^2 + 3x + 7$, $a = -8$, $a < 0$. Ветви параболы направлены вниз.

5. Найдите координаты вершины параболы $y = f(x)$:

а) $f(x) = x^2 + 4x - 1$; ______ г) $f(x) = 2x^2 + 6x$; ______
б) $f(x) = -x^2 + 3$; ______ д) $f(x) = x^2 - 4$; ______
в) $f(x) = -x^2 + 8x + 4$; ______ е) $f(x) = -3x^2 - 12x + 36$. ______

Решение.

в) $x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-8}{2 \cdot (-1)} = 4$; $f(4) = -4^2 + 8 \cdot 4 + 4 = -16 + 32 + 4 = 20$.

6. Составьте уравнение оси симметрии параболы $y = g(x)$:

а) $g(x) = x^2 + 3x + 7$; ______ г) $g(x) = 3x^2$; ______
б) $g(x) = -2x^2 + 8x + 12$; ______ д) $g(x) = -5x^2 + 12$; ______
в) $g(x) = -5x^2 - 10x - 11$; ______ е) $g(x) = 7x^2 - 14x$. ______

Решение.

е) Найдём абсциссу вершины параболы: $x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-14)}{2 \cdot 7} = 1$. Уравнение оси симметрии параболы примет вид $x = 1$.

7. Найдите координаты точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью абсцисс:

а) $f(x) = x^2 - 4x + 3$; ______
б) $f(x) = -2x^2 - 5x - 3$; ______
в) $f(x) = x^2 - 7x + 10$; ______
г) $f(x) = 2x^2 - 8x + 8$; ______
д) $f(x) = x^2 + 6x + 9$; ______
е) $f(x) = -x^2 + 8x - 7$. ______

Решение.

е) Нули функции найдём из условия $f(x) = 0$. $-x^2 + 8x - 7 = 0$, $x^2 - 8x + 7 = 0$, $\left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 7. \end{array}\right.$ Координаты точек пересечения: $(1;0)$ и $(7;0)$.

Если выделить полный квадрат, то квадратичная функция примет вид: $y = a(x - x_0)^2 + y_0$, где $(x_0; y_0)$ — координаты вершины параболы.

Множество значений квадратичной функции:
$E(y) = [f(x_0); +\infty)$, если $a > 0$;
$E(y) = (-\infty; f(x_0)]$, если $a < 0$.

8. Найдите координаты вершины параболы $y = f(x)$:

а) $f(x) = (x-5)^2 + 1$; ____ г) $f(x) = (x+2)^2 + 3$; ____
б) $f(x) = -(x+k)^2 - 2$; ____ д) $f(x) = -5(x-\sqrt{2})^2 + 8$; ____
в) $f(x) = -2(x+\sqrt{3})^2 - m$; ____ е) $f(x) = (x-m)^2 + n$. ____

Решение.

г) $x_0 = -2$, $y_0 = 3$; $(-2; 3)$ — координаты вершины.

9. Найдите множество значений функции:

а) $y = x^2$; ____ г) $y = -(x-7)^2 - 1$; ____
б) $y = -x^2$; ____ д) $y = x^2 + 6x - 1$; ____
в) $y = (x-2)^2 + 3$; ____ е) $y = -x^2 + 2x$. ____

Решение.

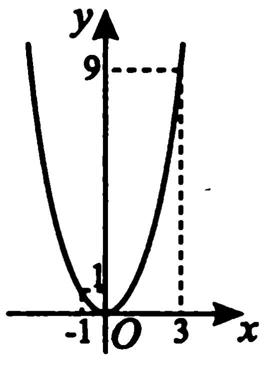
в) Найдём координаты вершины параболы: $x_0 = 2$, $y_0 = 3$. $a = 1 > 0$, ветви параболы направлены вверх. $[3; +\infty)$ — множество значений функции.

10. Найдите множество значений функции на заданном отрезке:

а) $y = x^2$, $[-1; 3]$; ____ г) $y = x^2 + 5$, $[-1; 1]$; ____
б) $y = -x^2$, $[-2; 2]$; ____ д) $y = (x-1)^2$, $[2; 3]$; ____
в) $y = x^2 - 4$, $[-3; 1]$; ____ е) $y = x^2 - 3x + 2$, $[-2; 0]$. ____

Решение.

а) Абсцисса вершины параболы $x_0 = 0$. Найдём $y(-1) = 1$, $y(3) = 9$, $y(0) = 0$. $[0; 9]$ — множество значений функции $y = x^2$ на отрезке $[-1; 3]$.



Глава X

Неравенства

Числовые неравенства

Число a больше числа b, если разность $a - b$ положительна.

Число a меньше числа b, если разность $a - b$ отрицательна.

1. Сравните числа:

а) $\frac{3}{7} \dots \frac{4}{9}$;   в) $\frac{2}{5} \dots 0,8$;   д) $-2,4 \cdots -2\frac{3}{5}$;

б) $-\frac{11}{12} \cdots -\frac{2}{3}$;   г) $-1\frac{7}{8} \cdots -1,6$;   е) $\frac{13}{50} \dots 0,24$.

Решение.

г) По определению числового неравенства имеем:

$-1\frac{7}{8} - (-1,6) = -1,875 + 1,6 = -0,275 < 0$, следовательно, $-1\frac{7}{8} < -1,6$.

2. Сравните a и b, если:

а) $b - a = -2,5$; ______________   г) $a - b = -7^2$; ______________

б) $a - b = (-7)^2$; ______________   д) $b - a = 0$; ______________

в) $b - a = 1,3$; ______________   е) $a - b = -0,2^2$. ______________

Решение.

е) $-0,2^2 = -0,04 < 0$, значит, $a - b < 0$, следовательно, $a < b$.

3. Сравните с нулём значение числового выражения:

а) $(-1{,}28)^2 \dots 0$; в) $\left(-\frac{2}{7}\right)^2 \cdot (-4) \dots 0$; д) $-\frac{4}{12} + \frac{3}{4} \dots 0$;

б) $(-2{,}78)^3 \dots 0$; г) $(-\pi)^2 \dots 0$; е) $2{,}45 - 2\frac{1}{4} \dots 0$.

Решение.

в) $\left(-\frac{2}{7}\right)^2 \geqslant 0$, $-4 < 0$, значит, $\left(-\frac{2}{7}\right)^2 \cdot (-4) < 0$.

4. Определите знак числа x, если известно, что:

а) $3x < 2x$; ____________ г) $-5x > -2x$; ____________

б) $10x > 7x$; ____________ д) $7x < -4x$; ____________

в) $-2x < 3x$; ____________ е) $-2\frac{1}{5}x > x$. ____________

Решение.

д) По определению числового неравенства имеем: $7x - (-4x) < 0$, $7x + 4x < 0$, $11x < 0$, $11 > 0$, значит, $x < 0$.

Свойства числовых неравенств

Если $a > b$, $b > c$, то $a > c$.

Если $a > b$, то $a + c > b + c$.

Если $a > b$, $m > 0$, то $am > bm$, $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$.

Если $a > b$, $m < 0$, то $am < bm$, $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$.

Если $a > b$, $c > d$, то $a + c > b + d$.

Если $a > b$, $c > d > 0$, то $ac > bd$.

Если $a > b \geqslant 0$, $n \in N$, то $a^n > b^n$.

Если $a > b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

5. Выясните, положительным или отрицательным является число a, если:

а) $a > b,\ b > 7$; ____________
б) $a < b,\ b < -2$; ____________
в) $a+2 > b,\ b > 5$; ____________
г) $a-4 < b,\ b < -8$; ____________
д) $a+7 > b,\ b > 12$; ____________
е) $a < b,\ b < 0$. ____________

Решение.

д) По свойству, если $a > b,\ b > c$, то $a > c$ имеем: $a + 7 > 12$. Вычтем из обеих частей неравенства число 7. Получим $a + 7 - 7 > 12 - 7,\ \ a > 5$, то есть a — положительное число.

6. Умножьте обе части неравенства на указанное число:

а) $35 > 27$ на 2; ____________
б) $-1{,}3 < -1{,}2$ на -1; ____________
в) $\frac{4}{5} > \frac{3}{5}$ на $\frac{20}{5}$; ____________
г) $-\frac{2}{7} > -\frac{5}{7}$ на $-\frac{7}{4}$; ____________
д) $-3{,}25 < -1{,}5$ на $\frac{1}{5}$; ____________
е) $0 < 1$ на -2. ____________

Решение.

д) $\frac{1}{5} > 0$, следовательно, при умножении обеих частей неравенства на положительное число знак неравенства сохраняется.

$-3{,}25 \cdot \frac{1}{5} < -1{,}5 \cdot \frac{1}{5},\quad -0{,}65 < -0{,}3.$

7. Разделите обе части неравенства на указанное число:

а) $-10 < 7$ на -2; ____________
б) $3{,}3 > -2{,}2$ на $1{,}1$; ____________
в) $\frac{3}{8} < \frac{3}{4}$ на -3; ____________
г) $25 < 27$ на 5; ____________
д) $\frac{15}{7} < \frac{25}{3}$ на -10; ____________
е) $0{,}9 > 0$ на $0{,}1$. ____________

Решение.

д) $-10 < 0$, следовательно, при делении обеих частей неравенства на отрицательное число, знак неравенства меняется на противоположный.

$\frac{15}{7 \cdot (-10)} > \frac{25}{3 \cdot (-10)};\quad -\frac{15}{70} > -\frac{25}{30};\quad -\frac{3}{14} > -\frac{5}{6}.$

8. Известно, что $m < -3$. Сравните числа:

а) $2m \ldots \frac{3}{5}$; в) $5 - m \ldots 7$; д) $-\frac{m}{3} \ldots -2{,}3$;

б) $\frac{m}{2} \ldots -1$; г) $\frac{m}{6} \ldots 0$; е) $-\frac{m}{9} \ldots \frac{5}{24}$.

Решение.

в) Начнём решение с исходного неравенства $m < -3$. Умножим обе части неравенства $m < -3$ на (-1). Получим $-m > 3$. Прибавим к обеим частям неравенства 5. Получим $5 - m > 3 + 5$, $5 - m > 8$. Сравним $5 - m$ и 7: $5 - m > 7$.

9. Известно, что $m > 6$ и $n < 18$. Оцените значение выражения:

а) $m - 4 - n$; ____________ г) $28 - 3n + 4m$; ____________

б) $15 - 2m + 2n$; ____________ д) $-3m + 2n + 15$; ____________

в) $3m - n + 10$; ____________ е) $m - n$. ____________

Решение.

д) 1) $m > 6$, $-3m < -18$.

2) $n < 18$, $2n < 36$.

3) $-3m + 2n < -18 + 36$, $-3m + 2n < 18$.

4) $-3m + 2n + 15 < 18 + 15$, $-3m + 2n + 15 < 33$.

10. Известно, что $10 < a < 15$. Оцените значение выражения:

а) $0{,}2a$; ____________ г) $2a + 3$; ____________

б) $-5a$; ____________ д) $-a - 1$; ____________

в) $a - 15$; ____________ е) $a - 10$. ____________

Решение.

д) $10 < a < 15$, $-15 < -a < -10$, $-16 < -a - 1 < -11$.

11. Соотнесите решение неравенства с соответствующей графической иллюстрацией.

а) $x \leqslant 5$;

б) $x > -0{,}5$;

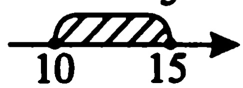
в) $3 \leqslant x < 4$;

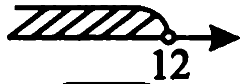
г) $10 \leqslant x \leqslant 15$;

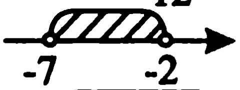
д) $-7 < x < -2$;

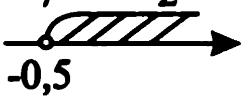
е) $x < 12$;

1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

6) 

Решение.

г) Неравенству $10 \leqslant x \leqslant 15$ соответствует рисунок 2.

12. Отметьте верные неравенства:

а) $a + b > 17$, если $a > 12$, $b > 5$;

б) $a \cdot b > -12$, если $a < -2$, $b < 6$;

в) $\frac{a}{-b} > 27$, если $a > 81$, $b > 3$;

г) $-a - b < 0$, если $a > 5$, $-b < -5$;

д) $-a - b < -17$, если $a > 7$, $b > 10$;

е) $-\frac{a}{b} < 12$, если $a > 5$, $b > 3$.

Решение.

в) $a > 81$, $b > 3$, тогда $-b < -3$. При делении положительного числа на отрицательное в результате получаем отрицательное число, следовательно, $\frac{a}{-b} < 0$, а так как $27 > 0$, то неравенство $\frac{a}{-b} > 27$ неверное.

Линейные неравенства

Неравенства $ax > b$, $ax < b$, $ax \geqslant b$, $ax \leqslant b$, где a и b — заданные числа, x — неизвестное, называются линейными неравенствами с одним неизвестным.

Решить неравенство — это значит найти множество его решений.

13. Решите неравенство:

а) $x + 7 \geqslant 3$; ______ г) $2x \leqslant 3x - 1$; ______

б) $-2x < 0$; ______ д) $4 - x < 2$; ______

в) $5x + 8 > -2$; ______ е) $5 < 2x - 1$. ______

Решение.

д) $-x < 2 - 4$, $-x < -2$, $x > 2$.

14. а) При каких значениях a двучлен $4a + 10$ принимает положительные значения? ______

б) При каких значениях b двучлен $15b - 30$ принимает отрицательные значения? ______

в) При каких значениях c двучлен $12 - c$ принимает неположительные значения? ______

г) При каких значениях d двучлен $7d + 14$ принимает неотрицательные значения? ________

д) При каких значениях m двучлен $9 - 2m$ больше 5? ________

е) При каких значениях p значения двучлена $3p + 2$ не меньше значений двучлена $7 - 2p$? ________

Решение.

г) Задача сводится к решению неравенства $7d+14 \geqslant 0$, $7d \geqslant -14$, $d \geqslant -2$.

15. Найдите наименьшее целочисленное решение неравенства:

а) $4(z-2) < 2+5z$; ________ г) $\frac{4-5k}{2} \leqslant \frac{k}{6}$; ________

б) $3(t-4) - 2t < 4t$; ________ д) $\frac{3}{7} - \frac{y}{5} < 0$; ________

в) $6y+6 \geqslant 2(y-4) - 3y$; ________ е) $-\frac{x}{2} + \frac{1}{5} < \frac{3}{5}$. ________

Решение.

д) $\frac{3}{7} < \frac{y}{5}$, $y > \frac{15}{7}$, $y > 2\frac{1}{7}$. Наименьшее целочисленное решение — это 3.

16. Найдите наибольшее целочисленное решение неравенства:

а) $7 - 3x > 0$; ________ г) $\frac{3x}{2} - \frac{3}{5} < 0$; ________

б) $2x + 7 \leqslant 3$; ________ д) $x < 0$; ________

в) $3(1-t) > 5(2+t)$; ________ е) $-3(2x+7) > 0$. ________

Решение.

е) $-3(2x+7) > 0$, $2x + 7 < 0$, $2x < -7$, $x < -3{,}5$. Наибольшее целочисленное решение — (-4).

17. Решите неравенство:

а) $8 < 2x < 24$; ________ г) $12 \leqslant 7 - 2x \leqslant 13$; ________

б) $27 < -3x < 30$; ________ д) $-15 \leqslant -2 - x \leqslant 10$; ________

в) $-10 \leqslant 5x + 1 \leqslant -4$; ________ е) $0 < 3 - x < 1$. ________

Решение.

в) $-10 - 1 \leqslant 5x + 1 - 1 \leqslant -4 - 1$, $-11 \leqslant 5x \leqslant -5$, $-\frac{11}{5} \leqslant x \leqslant \frac{-5}{5}$, $-2{,}2 \leqslant x \leqslant -1$.

Системы неравенств

18. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2x > 7, \\ x - 3 < 5; \end{cases}$ ________ г) $\begin{cases} 3x - 15 > 0, \\ 4x - 12 > 0; \end{cases}$ ________

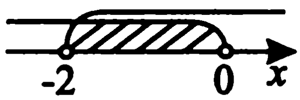
б) $\begin{cases} x + 4 > 2, \\ 3 - x < 0; \end{cases}$ ________ д) $\begin{cases} 5 - 2t \geqslant 0 \\ 4t - 8 < 0; \end{cases}$ ________

в) $\begin{cases} 1 - x < 2x + 7, \\ x < 0; \end{cases}$ ________ е) $\begin{cases} 2t - 1 < 0, \\ t - 3 < -5. \end{cases}$ ________

Решение.

в) $\begin{cases} 1 - x < 2x + 7, \\ x < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 2x < 7 - 1, \\ x < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x < 6, \\ x < 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

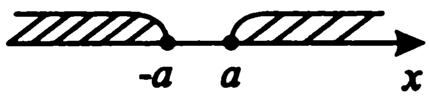
$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -2, \\ x < 0. \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2; 0).$



Неравенства, содержащие неизвестные под знаком модуля

$|x| \leqslant a$, где $a > 0$; $|x| \geqslant a$, где $a > 0$.

$-a \leqslant x \leqslant a$



$x \leqslant -a; x \geqslant a$

Решите неравенство:

19. а) $|x| \leqslant 3$; ________ г) $|2x + 3| < 7$; ________
б) $|x| < 2$; ________ д) $|5 - 2x| \leqslant 11$; ________
в) $|1 + x| \leqslant 2$; ________ е) $|2 - 9x| \leqslant 20$. ________

Решение.

е) $-20 \leqslant 2 - 9x \leqslant 20, \quad -22 \leqslant -9x \leqslant 18, \quad -2 \leqslant x \leqslant \frac{22}{9}.$

20. а) $|x - 4| \geqslant 3$; ________ г) $|5 - 3x| \geqslant 14$; ________
б) $|x - 7| \geqslant 1$; ________ д) $|x| \geqslant 0{,}5$; ________
в) $|2x + 1| \geqslant 4$; ________ е) $|x - 1| > 0$. ________

Решение.

г) $|5-3x| \geqslant 14; \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5-3x \leqslant -14, \\ 5-3x \geqslant 14; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3x \leqslant -19, \\ -3x \geqslant 9; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geqslant \frac{19}{3}, \\ x \leqslant -3; \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ x \in (-\infty; -3] \cup \left[\frac{19}{3}; +\infty\right).$

21. Сравните число t с нулём, если $t \neq 0$.

а) $|t| \cdot t > 0$; ______ г) $\frac{|t|}{t^3} > 0$; ______

б) $t^3 \cdot |t| < 0$; ______ д) $\frac{|t|}{t} < 0$; ______

в) $\frac{t^5}{|t|^2} < 0$; ______ е) $\frac{|t|^2}{t} > 0$. ______

Решение.

д) $|t| > 0$, $\frac{|t|}{t} < 0$, следовательно, $t < 0$.

Квадратные неравенства

Квадратными называют неравенства вида $ax^2 + bx + c > 0$, где $a \neq 0$, и неравенства, сводящиеся к ним (вместо знака «>» может быть любой другой знак неравенства).

22. Отметьте, какие из следующих неравенств являются квадратными:

а) $x^2 - 15 < 0$; г) $x^2 - 5x + 1 \leqslant 0$;

б) $3x^2 + 2 < 0$; д) $3x^2 - 3x(x+1) \leqslant 0$;

в) $x^3 + 12x^2 - 11 \geqslant 0$; е) $x^4 + 16 > x^4 + x^2$.

Решение.

в) Левая часть неравенства — многочлен стандартного вида третьей степени. Поэтому неравенство не является квадратным.

23. Сведите к квадратным следующие неравенства:

а) $x^2 + 3x > -2$; ______ г) $3x^2 \leqslant 2x(x+1) + 4$; ______

б) $-5x^2 < x + 11$; ______ д) $\frac{x^4 - 16}{x^2 + 4} \leqslant 0$; ______

в) $x(x-3) \geqslant 7$; ______ е) $\frac{x^2 - 9}{3} \geqslant 3$. ______

Решение.

г) $3x^2 \leqslant 2x(x+1)+4$; $3x^2 \leqslant 2x^2+2x+4$; $x^2-2x-4 \leqslant 0$.

24. Отметьте неравенства, которые выполняются при $x = 0$.

а) $x^2 - 9 < 0$; г) $x^2 + 15x + 9 \leqslant 0$;
б) $2x^2 - 15x + 8 > 0$; д) $x^2 - 12x + 3 > 0$;
в) $-x^2 + 2x - 4 < 0$; е) $-x^2 - 4x + 4 \leqslant 0$.

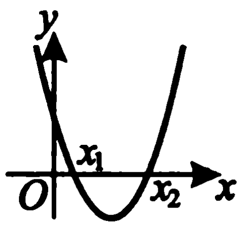
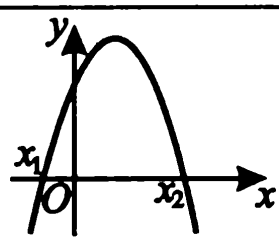
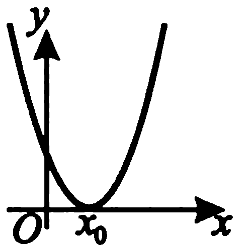
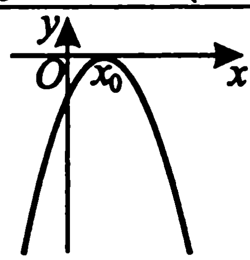
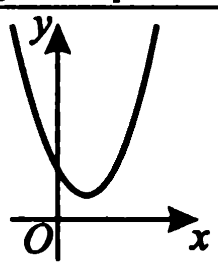
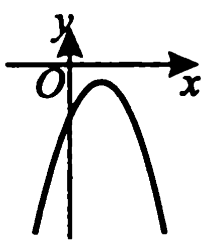
Решение.

б) При $x = 0$ имеем: $2 \cdot 0 - 15 \cdot 0 + 8 > 0$, $8 > 0$ — неравенство верное.

Решение квадратных неравенств методом парабол

Решение квадратных неравенств методом парабол сводится к нахождению необходимых промежутков знакопостоянства квадратного трёхчлена с помощью графика квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$.

При решении неравенств методом парабол удобно пользоваться таблицей.

 1. $D > 0$, $a > 0$ $y > 0$, $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ $y < 0$, $x \in (x_1; x_2)$	 2. $D > 0$, $a < 0$ $y > 0$, $x \in (x_1; x_2)$ $y < 0$, $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$
 3. $D = 0$, $a > 0$ $y > 0$, $x \in (-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$ $y < 0$, решений нет	 4. $D = 0$, $a < 0$ $y > 0$, решений нет $y < 0$, $x \in (-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$
 5. $D < 0$, $a > 0$ $y > 0$, $x \in (-\infty; +\infty)$ $y < 0$, решений нет	 6. $D < 0$, $a < 0$ $y > 0$, решений нет $y < 0$, $x \in (-\infty; +\infty)$

Решите неравенство:

25. а) $x^2 + 3x - 10 > 0$; ________ г) $-x^2 + 15x - 14 < 0$; ________
б) $3x^2 - 4x + 1 < 0$; ________ д) $2x^2 - 7x + 3 > 0$; ________
в) $-9x^2 + 7x + 16 > 0$; ________ е) $x^2 + 6x + 9 \leqslant 0$. ________

Решение.

б) Уравнение $3x^2 - 4x + 1 = 0$ имеет два корня: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$, значит, $D > 0$. Так как $a = 3 > 0$, то в таблице это случай 1. Решение неравенства: $x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

26. а) $-x^2 + 2x - 1 < 0$; ________ г) $-x^2 + 10x - 25 < 0$; ________
б) $9x^2 - 12x + 4 \geqslant 0$; ________ д) $x^2 + x > 0$; ________
в) $16x^2 + 8x + 1 < 0$; ________ е) $-x^2 + 9x - 14 > 0$. ________

Решение.

а) Уравнение $-x^2 + 2x - 1 = 0$ имеет один корень $x = 1$, значит, $D = 0$. Так как $a = -1 < 0$, то в таблице это случай 4. Решение неравенства: $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

27. а) $5x^2 - 3x + 20 < 0$; ________ г) $-x^2 + 4 > 0$; ________
б) $12x - x^2 - 40 \leqslant 0$; ________ д) $-3x^2 - 6 < 0$; ________
в) $2x^2 + 7x + 30 < 0$; ________ е) $6x^2 + 24 > 0$. ________

Решение.

а) Найдём дискриминант: $D = b^2 - 4ac = 13^2 - 4 \cdot 5 \cdot 20 < 0$. Имеем: $D < 0$, $a > 0$, в таблице это случай 5. Неравенство решений не имеет.

28. Решите неравенство:

а) $(x + 5)(x - 4) > 0$; ________ г) $(7x - 4)(4 + 7x) \leqslant 0$; ________
б) $(2 - x)(x - 3) < 0$; ________ д) $(3x + 2)(5 - x) > 0$; ________
в) $(3x + 8)(x - 7) \geqslant 0$; ________ е) $(2x - 1)(2x + 1) \leqslant 0$. ________

Решение.

б) 1. Уравнение $(2 - x)(x - 3) = 0$ имеет корни: $x = 2$, $x = 3$.
2. Старший коэффициент (коэффициент при x^2) неравенства $a = -1 < 0$ совпадает со знаком неравенства.
3. $x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.

Решение неравенств вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \geqslant 0$ и $P(x) \cdot Q(x) > 0$ методом интервалов

Алгоритм решения.

1. Найти нули числителя.
2. Найти нули знаменателя.
3. Нанести полученные корни на числовую прямую.
4. Установить знак на выделенных промежутках.
5. Записать ответ.

Решите неравенство:

29. а) $\dfrac{3x+6}{x-1} < 0$; ________ г) $\dfrac{x+5}{x-10} \leqslant 0$; ________

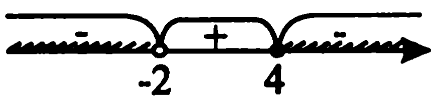
б) $\dfrac{x-3}{x+7} \geqslant 0$; ________ д) $\dfrac{(12-x)(x+1)}{3-x} < 0$; ________

в) $\dfrac{4-x}{x+2} \leqslant 0$; ________ е) $\dfrac{(x-7)(x-5)}{x+2} \geqslant 0$. ________

Решение.

в) Решаем по алгоритму.

1. $4 - x = 0,\ x = 4$.
2. $x + 2 = 0,\ x = -2$.
3. Наносим -2 и 4 на числовую прямую.
4. Устанавливаем знаки.



5. Записываем ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup [4; +\infty)$.

30. а) $(x-3)(x+2)(x-7) > 0$; ________

б) $x(x-1)(x+1) \leqslant 0$; ________

в) $x^2(x-2)(x+3) > 0$; ________

г) $(x-11)(x+10)(x-3)^2 \geqslant 0$; ________

д) $(x-2)^3(x+1) < 0$; ________

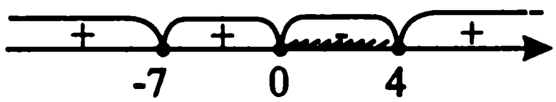
е) $x^3(x+7)^2(x-4) \leqslant 0$. ________

Решение.

е) 1. Уравнение $x^3(x+7)^2(x-4) = 0$ имеет корни $x = 0$, $x = -7$, $x = 4$.

2. Нанесём полученные корни на числовую прямую.

3. Установим знаки на выделенных промежутках. Помним: при переходе через точку $x = -7$ смены знака не произойдёт, так как показатель множителя $(x+7)^2$ — чётное число.



4. Запишем ответ: $\{-7\} \cup [0; 4]$.

Глава XI

Степень с рациональным показателем

Степень с целым показателем

Если $a \neq 0$ и n — натуральное число, то $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Если $a \neq 0$, то $a^0 = 1$.

Все свойства степени с натуральным показателем справедливы и для степени с любым целым показателем.

1. Вычислите:

а) 1^{-2}; ____________ в) $(-10)^0$; ____________ д) $0{,}5^{-2}$; ____________

б) 4^{-3}; ____________ г) $(-5)^{-3}$; ____________ е) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$. ____________

Решение.

б) $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$.

2. Запишите в виде степени с отрицательным показателем:

а) $\frac{1}{2^7}$; ____________ в) $\frac{1}{x^3}$; ____________ д) 4^5; ____________

б) $\frac{1}{3^5}$; ____________ г) $\left(\frac{1}{a^5}\right)^5$; ____________ е) b^6. ____________

Решение.

е) $b^6 = \frac{1}{b^{-6}} = \left(\frac{1}{b}\right)^{-6}$.

3. Сравните с единицей:

а) 12^{-5}; ______ г) $\left(\frac{4}{35}\right)^{-1}$; ______

б) 15^0; ______ д) $(0{,}6)^{-7}$; ______

в) $\left(1\frac{3}{7}\right)^{-2}$; ______ е) $\left(\frac{3}{20}\right)^{-2}$. ______

Решение.

е) $\left(\frac{3}{20}\right)^{-2} = \left(\frac{20}{3}\right)^2$; $\frac{20}{3} > 1$, значит, $\left(\frac{20}{3}\right)^2 > 1$, следовательно, $\left(\frac{3}{20}\right)^{-2} > 1$.

4. Запишите без степени с отрицательным показателем:

а) $(x+y)^{-2}$; ______ г) $3a^{-1}b^{-5}$; ______

б) $(x-y)^{-3}$; ______ д) $\frac{7x^{-2}}{y^{-3}}$; ______

в) $\frac{1}{(a-b)^{-5}}$; ______ е) $\frac{5^{-2}c^8}{d^{-3}}$. ______

Решение.

г) $3a^{-1}b^{-5} = \frac{3}{ab^5}$.

5. Вычислите:

а) $\left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$; ______ г) $(0{,}2)^2 : 0{,}2^{-1}$; ______

б) $0{,}3^{-2} \cdot 0{,}3^0$; ______ д) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} : \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$; ______

в) $\left(\frac{2}{9}\right)^{10} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{-11}$; ______ е) $3^7 : \left(\frac{1}{3}\right)^{-6}$. ______

Решение.

г) $(0{,}2)^2 : (0{,}2)^{-1} = 0{,}2^{2-(-1)} = 0{,}2^3 = 0{,}008$.

6. Возведите степень в степень:

а) $\left(a^2\right)^{-2}$; ______ г) $\left(t^{-7}\right)^0$; ______

б) $\left(b^{-3}\right)^{-5}$; ______ д) $\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{-3}\right)^2$; ______

в) $\left(x^3\right)^{-3}$; ______ е) $\left(\left(\frac{2}{b}\right)^0\right)^{-5}$. ______

Решение.

в) $(x^3)^{-3} = x^{3\cdot(-3)} = x^{-9}$.

7. Возведите в степень произведение:

а) $(cd^{-2})^3$; ____________ г) $\left(\frac{1}{5}c^{-2}\right)^{-1}$; ____________

б) $(3ab^{-1})^2$; ____________ д) $(27a^{-12b^{-1}})^0$; ____________

в) $(2a^2b^0)^{-5}$; ____________ е) $(b^6)^{-4}$. ____________

Решение.

в) $(2a^2b^0)^{-5} = 2^{-5}(a^2)^{-5}b^0 = \frac{1}{2^5}a^{-10} \cdot 1 = \frac{1}{32}a^{-10}$.

8. Выполните действия:

а) $\left(\frac{a^6}{b^5}\right)^{-2}$; ____________ г) $\frac{-3a^{-1}b^{-2}}{c^2} \cdot \frac{-c^3}{a^{-2}b^{-3}}$; ____________

б) $\left(\frac{m^{-3}}{n^{-2}}\right)^{-1}$; ____________ д) $2c^{-2}d \cdot 3c^3d^{-1}$; ____________

в) $\left(\frac{2x^4}{y^{-3}}\right)^2$; ____________ е) $\frac{5t^{-8}}{s^2} : \frac{t^{-9}}{s^{-1}}$. ____________

Решение.

г) $-\frac{3a^{-1}b^{-2}}{c^2} \cdot \frac{-c^3}{a^{-2} \cdot b^{-3}} = 3 \cdot \frac{a^{-1}}{a^{-2}} \cdot \frac{b^{-2}}{b^{-3}} \cdot \frac{c^3}{c^2} = 3 \cdot a^{-1-(-2)} \cdot b^{-2-(-3)} \cdot c^{3-2} =$
$= 3abc$.

9. Вычислите:

а) $(-3)^{-2} \cdot 9 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$; ____________

б) $2^{-3} \cdot 16 - 4^0$; ____________

в) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$; ____________

г) $\left((-12)^{-4}\right)^{-8} : \left((-12)^{-17}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{12}\right)^2$; ____________

д) $\left((-11)^{-2}\right)^{-5} : \left((-11)^{-3}\right)^{-3} + \left(\frac{1}{11}\right)^{-1}$; ____________

е) $3^{-6} : 3^{-8} - 2^{-3} \cdot 2^5 + \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$. ____________

Решение.

д) $\left((-11)^{-2}\right)^{-5} : \left((-11)^{-3}\right)^{-3} + \left(\frac{1}{11}\right)^{-1} = (-11)^{10} : (-11)^9 + 11 =$
$= (-11)^{10-9} + 11 = -11 + 11 = 0$.

10. Представьте в виде степени дробь:

а) $\dfrac{a^5a^{-3}}{a^{-2}}$; ____________ г) $\dfrac{d^0d^5}{d^7}$; ____________

б) $\dfrac{b^{-2}b^{-3}}{b^{-6}}$; ____________ д) $\dfrac{t^3}{t^5t^{-2}}$; ____________

в) $\dfrac{c^{15}c^{-3}}{c^{13}}$; ____________ е) $\dfrac{s^{12}}{s^{10}s^2}$. ____________

Решение.

г) $\dfrac{d^0d^5}{d^7} = d^{0+5-7} = d^{-2}$.

11. Запишите в стандартном виде число:

а) 3000^3; ____________ г) $\dfrac{1}{625}$; ____________

б) 0,000 000 71; ____________ д) 0,000 000 080 6; ____________

в) $\dfrac{1}{125}$; ____________ е) $0{,}0002^{-2}$. ____________

Решение.

е) $0{,}0002^{-2} = \dfrac{1}{0{,}0002^2} = \dfrac{1}{2^2\left(10^{-4}\right)^2} = \dfrac{1}{4\cdot 10^{-8}} = \dfrac{1}{4}\cdot 10^8 = 0{,}25\cdot 10^8 =$
$= 2{,}5\cdot 10^7$.

Степень с дробным показателем

Рациональное число r — это число вида $\dfrac{m}{n}$, то есть $r = \dfrac{m}{n}$, где m — целое, n — натуральное число.

Все свойства степени с натуральным показателем верны для степени с любым рациональным показателем и положительным основанием.

Вычислите:

12. а) $64^{\frac{1}{2}}$; ____________ в) $32^{\frac{1}{5}}$; ____________ д) $81^{\frac{3}{4}}$; ____________

б) $27^{\frac{1}{3}}$; ____________ г) $8^{\frac{2}{3}}$; ____________ е) $16^{-0{,}75}$. ____________

Решение.

г) $8^{\frac{2}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$.

13. а) $2^{\frac{1}{7}} \cdot 2^{\frac{6}{7}}$; ______ в) $\left(7^{-5}\right)^{-\frac{2}{5}}$; ______ д) $9^{\frac{2}{5}} \cdot 81^{\frac{3}{10}}$; ______

б) $4^{\frac{2}{3}} : 4^{-\frac{1}{3}}$; ______ г) $\left(64^{\frac{1}{12}}\right)^{-4}$; ______ е) $5^{\frac{2}{3}} \cdot 25^{\frac{2}{3}}$. ______

Решение.

д) $9^{\frac{2}{5}} \cdot \left(9^2\right)^{\frac{3}{10}} = 9^{\frac{2}{5}} \cdot 9^{\frac{3}{5}} = 9.$

14. Представьте выражение в виде корня n-ой степени:

а) $7^{\frac{3}{5}}$; ______ в) $a^{\frac{1}{3}}$; ______ д) $2y^{\frac{1}{2}}$; ______

б) $4^{-\frac{1}{2}}$; ______ г) $b^{\frac{2}{3}}$; ______ е) $(5a)^{-\frac{m}{3}}$. ______

Решение.

д) $2y^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{y} = \sqrt{4y}.$

15. Представьте в виде степени с рациональным показателем выражение:

а) $\sqrt[3]{7}$; ______ в) $\sqrt[4]{1{,}2^{-3}}$; ______ д) $\dfrac{2^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{5^{-2}}}$; ______

б) $\sqrt[5]{1\dfrac{2}{3}}$; ______ г) $\sqrt[5]{x^2 + y^2}$; ______ е) $\dfrac{1}{\sqrt[6]{(a+2)^{-1}}}$. ______

Решение.

д) $\dfrac{2^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{5^{-2}}} = \dfrac{2^{\frac{2}{3}}}{5^{-\frac{2}{3}}} = 2^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 10^{\frac{2}{3}}.$

16. Найдите область определения выражения:

а) $\dfrac{1}{y^{\frac{1}{2}}}$; ______ г) $b^{-\frac{5}{3}}$; ______

б) $(x+2)^{\frac{3}{4}}$; ______ д) $(3-5a)^{-\frac{1}{4}}$; ______

в) $(a-1)^{-\frac{2}{5}}$; ______ е) $(m+2)^{\frac{1}{2}}$. ______

Решение.

е) Данное выражение определено, если $m + 2 \geqslant 0$, $m \geqslant -2$.

17. Представьте в виде степени с рациональным показателем:

а) $b^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{6}}$; ______ г) $y^{-2{,}7} : y^{-2{,}4} \cdot y^{0{,}3}$; ______

б) $a^{\frac{4}{3}} : a^{\frac{1}{3}}$; ______ д) $3^{0{,}5+n} : 3^{n-0{,}5}$; ______

в) $x^{1{,}2} \cdot x^{2{,}8} : x^{0{,}2}$; ______ е) $0{,}2^{k+1} \cdot 0{,}2^{0{,}3k} : 0{,}2^{1-0{,}7k}$. ______

Решение.

е) $0{,}2^{k+1} \cdot 0{,}2^{0{,}3k} : 0{,}2^{1-0{,}7k} = 0{,}2^{k+1+0{,}3k-(1-0{,}7k)} = 0{,}2^{1{,}3k+1-1+0{,}7k} =$
$= 0{,}2^{2k}.$

18. Разложите на множители:

а) $a - b$; ______

б) $4x - 9y$; ______

в) $x - 2\sqrt{x} + 1$; ______

г) $5 - 5^{\frac{2}{3}}$; ______

д) $(kp)^{\frac{2}{5}} - (kq)^{\frac{2}{5}}$; ______

е) $7^{\frac{1}{4}} + 2 \cdot 7^{\frac{1}{8}} \cdot a^{\frac{1}{4}} + a^{\frac{1}{2}}$. ______

Решение.

д) $(kp)^{\frac{2}{5}} - (kq)^{\frac{2}{5}} = k^{\frac{2}{5}}\left(p^{\frac{2}{5}} - q^{\frac{2}{5}}\right) = k^{\frac{2}{5}}\left(p^{\frac{1}{5}} - q^{\frac{1}{5}}\right)\left(p^{\frac{1}{5}} + q^{\frac{1}{5}}\right).$

19. Сократите дробь:

а) $\dfrac{x-y}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}$, $-x \neq y$; ______

б) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{4}} - n^{\frac{1}{4}}}$, $m \neq n$; ______

в) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}{a + 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b}$; ______

г) $\dfrac{c - 2c^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b}{c^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}$, $c \neq b$; ______

д) $\dfrac{t^{\frac{1}{4}} - s^{\frac{1}{4}}}{t - s}$, $t \neq s$; ______

е) $\dfrac{b^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{1}{3}}}{b + c}$, $b \neq -c$. ______

Решение.

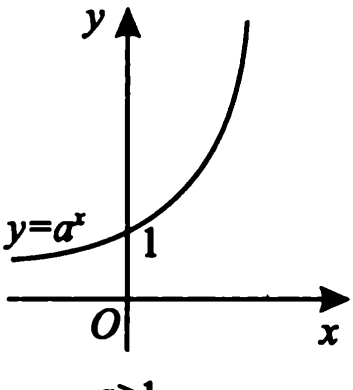
е) $\dfrac{b^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{1}{3}}}{b + c} = \dfrac{b^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{1}{3}}}{\left(b^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{1}{3}}\right)\left(b^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{2}{3}}\right)} = \dfrac{1}{b^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{2}{3}}}.$

Глава XII

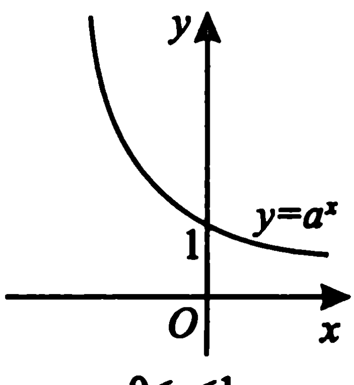
Показательная функция

Свойства и график показательной функции

- Показательной функцией называется функция $y = a^x$, где a — заданное число, $a > 0$, $a \neq 1$.
- Область определения: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
- Множество значений: $E(y) = (0; +\infty)$.
- При $a > 1$ функция является возрастающей, при $0 < a < 1$ — убывающей.
- График показательной функции:



$a>1$



$0<a<1$

1. Из перечисленных функций выберите те, которые являются показательными:

а) $y = 2^x$; в) $y = (-3)^x$; д) $y = x^{0,3}$;

б) $y = 15^{x^2}$; г) $(\sqrt{5})^x$; е) $y = e^x$.

7. Зак. № 265

Решение.

в) Функция $y = (-3)^x$ не является показательной, так как не удовлетворяет условию $a > 0$ $(a = -3 < 0)$.

2. Найдите значение функции $y = f(x)$ при заданном значении аргумента:

а) $f(x) = 3^x,\ x = 2;$ ______ г) $f(x) = (\sqrt{3})^x,\ x = 4;$ ______

б) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x,\ x = 5;$ ______ д) $f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x,\ x = 2;$ ______

в) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x},\ x = 0;$ ______ е) $f(x) = 4^{-x},\ x = 1.$ ______

Решение.

в) $f(0) = \left(\frac{1}{5}\right)^0 = 1.$

3. Определите характер монотонности функции:

а) $y = 5^x;$ ______ г) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x};$ ______

б) $y = \left(\frac{32}{40}\right)^x;$ ______ д) $y = \pi^x;$ ______

в) $y = \left(\frac{12}{11}\right)^x;$ ______ е) $y = e^{-x}.$ ______

Решение.

в) Основание $a = \frac{12}{11};$ $a > 1,$ функция $y = \left(\frac{12}{11}\right)^x$ является возрастающей.

4. Найдите множество значений функции:

а) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3;$ ______ г) $y = 2 - 2^x;$ ______

б) $y = 5^{-x};$ ______ д) $y = 5 - \left(\frac{1}{7}\right)^x;$ ______

в) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 4;$ ______ е) $y = (\pi - 1)^x.$ ______

Решение.

в) $\left(\frac{1}{3}\right)^x - 4 > -4,$ значит, $E(y) = (-4; +\infty).$

5. Сравните числа:

а) $1{,}5^3 \ldots 1{,}5^0$; в) $3{,}5^{2,3} \ldots 3{,}5^{1,6}$; д) $0{,}1^{-5} \ldots 0{,}1^{-2}$;

б) $0{,}3^2 \ldots 1$; г) $3^e \ldots 3^{2,7}$; е) $\left(\frac{1}{7}\right)^{\sqrt{3}} \ldots \left(\frac{1}{7}\right)^{1,7}$.

Решение.

в) Функция $y = 3{,}5^x$ является возрастающей, так как $a = 3{,}5 > 1$. $2{,}3 > 1{,}6$, значит, $3{,}5^{2,3} > 3{,}5^{1,6}$.

6. Сравните с единицей число, пользуясь схемой:

$t = a^b$

	$b > 0$	$b < 0$
$a > 1$	$t > 1$	$t < 1$
$a < 1$	$t < 1$	$t > 1$

а) $(0{,}2)^{-\frac{4}{5}}$; ______ в) $(0{,}7)^{\sqrt{2}}$; ______ д) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}$; ______

б) $(3{,}2)^{0,1}$; ______ г) $\pi^{-1,5}$; ______ е) $(\pi - 3)^2$. ______

Решение.

в) $t = 0{,}7^{\sqrt{2}}$, $a = 0{,}7$, $a < 1$, $b = \sqrt{2}$, $b > 0$. Делаем вывод: при $a < 1$ и $b > 0$, $t < 1$, значит, $0{,}7^{\sqrt{2}} < 1$.

7. Сравните основание $a > 0$ с единицей, зная, что верно неравенство:

а) $a^5 > a^4$; ______ г) $a^{\frac{\pi}{3}} > a$; ______

б) $a^7 < a^3$; ______ д) $a^{-\frac{2}{7}} < a^{-0,5}$; ______

в) $a^{-\frac{3}{2}} > a^{-\frac{3}{4}}$; ______ е) $a^{\sqrt{8}} > a^{\sqrt{6}}$. ______

Решение.

д) $-\frac{2}{7} > -0{,}5 \Rightarrow 0 < a < 1$.

8. Сравните показатели степеней, зная, что верно неравенство:

а) $2^a > 2^b$; ______ г) $(0{,}05)^t > (0{,}05)^s$; ______

б) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^y$; ______ д) $e^m < e^n$; ______

в) $(\sqrt{\pi})^c > (\sqrt{\pi})^d$; ______ е) $\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2 < \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^q$. ______

Решение.

в) $\sqrt{\pi} > 1 \Rightarrow c > d$.

9. Найдите координаты точки пересечения графиков функций:

а) $y = 3^x$, $y = 9$; ________ г) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, $y = 64$; ________

б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = 4$; ________ д) $y = 5^x$, $y = \frac{1}{125}$; ________

в) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = 3$; ________ е) $y = \pi^x$, $y = \pi^2$. ________

Решение.

д) $\frac{1}{125} = \frac{1}{5^3} = 5^{-3}$. Функция $y = 5^x$ принимает значение 5^{-3} при $x = -3$. $\left(-3; \frac{1}{125}\right)$ — искомые координаты.

10. Выберите значение x, при котором верно неравенство $2^x \geqslant 1$:

а) $x = 0$; в) $x = -3$; д) $x = \pi$;

б) $x = \frac{1}{2}$; г) $x = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$; е) $x = \frac{1}{e}$.

Решение.

д) Функция $y = 2^x$ принимает значения больше либо равные 1 при всех значениях $x \geqslant 0$. $\pi > 0$, значит, $2^\pi > 1$.

11. Выберите значение x, при котором верно неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 1$.

а) $x = 0$; в) $x = -1$; д) $x = -e$;

б) $x = \sqrt{2}$; г) $x = -0{,}02$; е) $x = \frac{1}{0{,}1}$.

Решение.

е) Функция $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ принимает значения меньше 1 при всех значениях $x > 0$. $\frac{1}{0{,}1} > 0$, значит, $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{0{,}1}} < 1$.

12. При каком значении a график показательной функции $y = a^x$ проходит через точку с координатами:

а) $(3; 8)$; ________ в) $(2; 9)$; ________ д) $(-1; 5)$; ________

б) $(0; 1)$; ________ г) $\left(\frac{1}{2}; 7\right)$; ________ е) $(3; 125)$? ________

Решение.

а) $a^3 = 8$, $a^3 = 2^3$, $a = 2$.

13. Найдите наибольшее значение функции $y = f(x)$ на промежутке $[a; b]$.

а) $y = 2^x$, $[1; 2]$; ________ г) $y = \pi^x$, $[-5; 0]$; ________

б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $[-2; 1]$; ________ д) $y = (\sqrt{2})^x$, $(-\infty; 4]$; ________

в) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, $[0; 3]$; ________ е) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$, $[2; +\infty)$. ________

Решение.

в) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ — убывающая функция, так как $\frac{1}{5} < 1$, значит, наибольшее значение она принимает при наименьшем значении аргумента. Наименьшее значение аргумента на промежутке $[0; 3]$ равно 0. $f(0) = \left(\frac{1}{5}\right)^0 = 1$.

Решение показательных уравнений и неравенств

Решите уравнение:

14. а) $2^x = 32$; ________ г) $4^x = 64$; ________

б) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = \frac{1}{125}$; ________ д) $10^x = 10000$; ________

в) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{27}$; ________ е) $22^x = 1$. ________

Решение.

а) $2^x = 32$, $2^x = 2^5$, $x = 5$.

15. а) $2^{x-1} = 4$; ________ г) $\left(\frac{1}{12}\right)^x = 144$; ________

б) $13^{5-x} = 169$; ________ д) $(0{,}6)^x = \frac{5}{3}$; ________

в) $3^{2x} = 27$; ________ е) $\pi^x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. ________

Решение.

е) $\pi^x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $\pi^x = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}}$, $\pi^x = \pi^{-\frac{1}{2}}$, $x = -\frac{1}{2}$.

16. а) $3^x \cdot 5^x = 225$; ____________ г) $2^x = \frac{4}{\sqrt[3]{64}}$; ____________

б) $4^{\frac{x}{2}} \cdot 3^x = 216$; ____________ д) $\frac{2^x}{3^x} = \frac{9}{4}$; ____________

в) $5^{\frac{x}{3}} = 25\sqrt[3]{5}$; ____________ е) $\frac{7^x}{5^x} = \frac{125}{343}$. ____________

Решение.

е) $\frac{7^x}{5^x} = \frac{125}{343}$, $\frac{7^x}{5^x} = \frac{5^3}{7^3}$, $\left(\frac{7}{5}\right)^x = \left(\frac{5}{7}\right)^3$, $\left(\frac{7}{5}\right)^x = \left(\frac{7}{5}\right)^{-3}$, $x = -3$.

17. а) $10^{x-4} = \frac{1}{100}$; ____________ г) $4^{2x-5} = 0{,}25$; ____________

б) $3^{2x+1} = \frac{1}{27}$; ____________ д) $0{,}1^{-5x} = 10$; ____________

в) $5^{x^3} = 5$; ____________ е) $7^{2-x} = \frac{1}{49}$. ____________

Решение.

д) $0{,}1^{-5x} = 10$, $\left(\frac{1}{10}\right)^{-5x} = 10$, $10^{5x} = 10$, $5x = 1$, $x = 0{,}2$.

18. а) $7^{\frac{3}{x}} \cdot 0{,}7^{\frac{3}{x}} = \sqrt[3]{4{,}9}$; ____________ г) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot 7^x = \sqrt[5]{\frac{3}{7}}$; ____________

б) $5^x \cdot 2^x = 0{,}1^{-3}$; ____________ д) $11^x \cdot \left(\frac{3}{11}\right)^x = \frac{1}{81}$; ____________

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} \cdot 4^x = 2\sqrt{2}$; ____________ е) $2^x\left(\frac{5}{2}\right)^x = \frac{1}{25}$. ____________

Решение.

а) $7^{\frac{3}{x}} \cdot 0{,}7^{\frac{3}{x}} = \sqrt[3]{4{,}9}$, $(7 \cdot 0{,}7)^{\frac{3}{x}} = 4{,}9^{\frac{1}{3}}$, $4{,}9^{\frac{3}{x}} = 4{,}9^{\frac{1}{3}}$, $\frac{3}{x} = \frac{1}{3}$, $x = 9$.

19. а) $3^x + 3^{x-1} = 12$; ______ г) $2\left(\frac{1}{7}\right)^{x+7} - 7\left(\frac{1}{7}\right)^{x+8} = 49$; ______

б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$; ______ д) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{4}{27}$; ______

в) $2^x = 3^x$; ______ е) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 5^{x+1}$. ______

Решение.

д) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x}=\frac{4}{27}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{27}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}\cdot\frac{4}{3}=\frac{4}{27}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}=\frac{1}{9}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2}$, $x-1=2$, $x=3$.

20. Решите уравнение подбором:

а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}=x+11$; ________ г) $0{,}2^x=x+6$; ________

б) $2^x=1-x$; ________ д) $3^x=-x+4$; ________

в) $5^x=-7x+39$; ________ е) $3^{\frac{x}{3}}=-0{,}5x+4{,}5$. ________

Решение.

в) При $x=2$ имеем: $5^2=-7\cdot2+39=-14+39=25$. $x=2$ — корень исходного уравнения.

Решите неравенство:

21. а) $2^x>2^5$; ________ г) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x}<49$; ________

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}<\left(\frac{1}{3}\right)^{7}$; ________ д) $11^x<1$; ________

в) $5^x>25$; ________ е) $0{,}4^x>0{,}16$. ________

Решение.

е) $0{,}4^x>0{,}16$, $0{,}4^x>0{,}4^2$. Учитывая, что $y=0{,}4^t$ — убывающая функция, получим $x<2$.

22. а) $5^x<\frac{1}{25}$; ________ г) $(0{,}1)^{5x}<0{,}001$; ________

б) $3^x\geqslant\sqrt[5]{27}$; ________ д) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x+5}>\frac{4}{9}$; ________

в) $7^x<\sqrt{7^3}$; ________ е) $0{,}5^{2x+3}\geqslant0{,}5^{x-2}$. ________

Решение.

а) $5^x<\frac{1}{25}$, $5^x<5^{-2}$, $5>1$, значит, $x<-2$.

23. Найдите наибольшее целочисленное решение неравенства:

а) $2^{3-x}>4$; ________ г) $5^{2-x}\geqslant625$; ________

б) $6^{5x}\leqslant\frac{1}{216}$; ________ д) $12^{x+4}<\frac{1}{144}$; ________

в) $7^{x-1}<49$; ________ е) $\left(\frac{1}{11}\right)^{\frac{x}{2}}>121$. ________

Решение.

е) $\left(\frac{1}{11}\right)^{\frac{x}{2}} > 121$, $\left(\frac{1}{11}\right)^{\frac{x}{2}} > \left(\frac{1}{11}\right)^{-2}$, $\frac{1}{11} < 1$, $\frac{x}{2} < -2$, $x < -4$.

$x = -5$ — наибольшее целочисленное решение исходного неравенства.

24. Найдите наименьшее целочисленное решение неравенства:

а) $3^{2-x} < 9$; ____________ г) $\left(\frac{1}{27}\right)^{1-2x} > 3\sqrt{3}$; ____________

б) $\left(\frac{1}{15}\right)^{-\frac{x}{8}} > 15$; ____________ д) $1{,}1^{3-5x} < 1{,}21$; ____________

в) $\left(\frac{1}{25}\right)^{-2x} > \sqrt{5}$; ____________ е) $\left(\frac{2}{5}\right)^{7x-4} < \frac{8}{125}$. ____________

Решение.

г) $\left(\frac{1}{27}\right)^{1-2x} > 3\sqrt{3}$, $(27)^{2x-1} > 27^{\frac{1}{2}}$, $27 > 1$, $2x - 1 > \frac{1}{2}$, $2x > \frac{3}{2}$,

$x > \frac{3}{4}$. $x = 1$ — наименьшее целочисленное решение исходного неравенства.

25. Решите неравенство:

а) $5^{x^2-3x} > \frac{1}{25}$; ____________ г) $6^{|x+1|} < 36$; ____________

б) $7^{x^2-8} < 7$; ____________ д) $18^{|2x+5|} > 1$; ____________

в) $(0{,}3)^{x^2-x} > \frac{100}{9}$; ____________ е) $\frac{6^x + 18}{6^x} < 4$. ____________

Решение.

в) $(0{,}3)^{x^2-x} > \frac{100}{9}$, $0{,}3^{x^2-x} > (0{,}09)^{-1}$, $(0{,}3)^{x^2-x} > 0{,}3^{-2}$, так как $0{,}3 < 1$, то $x^2 - x < -2$, $x^2 - x + 2 < 0$, решений нет.

Глава XIII

Логарифмическая функция

Понятие логарифма

Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0$, $a \neq 1$, называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить b.

Определение логарифма можно кратко записать так:
$a^{\log_a b} = b,\ \ b > 0,\ \ a > 0,\ \ a \neq 1.$
Это равенство называют основным логарифмическим тождеством.

Логарифм по основанию 10 называется десятичным и обозначается символом lg.
$\lg x$ — десятичный логарифм числа x.

Логарифм по основанию $e \approx 2,71828$ называется натуральным и обозначается символом ln.
$\ln x$ — натуральный логарифм числа x.

1. Найдите число b, если:

а) $\log_2 b = 5$; ______ в) $\log_5 b = 2$; ______ д) $\log_{\frac{1}{4}} b = 0{,}5$; ______

б) $\log_{\sqrt[3]{2}} b = 6$; ______ г) $\lg b = -3$; ______ е) $\lg b = 3$. ______

Решение.

а) По определению логарифма имеем: $2^5 = b,\quad b = 32.$

2. Вычислите:

а) $\log_2 64$; ______ в) $\log_{\frac{1}{5}} 25$; ______ д) $\ln e$; ______

б) $\log_6 \frac{1}{216}$; ______ г) $\lg \sqrt[5]{10^3}$; ______ е) $\log_{\sqrt[3]{3}} \sqrt{27}$. ______

Решение.

б) $6^t = \frac{1}{216}$, $6^t = \frac{1}{6^3}$, $6^t = 6^{-3}$, $t = -3$.

3. Решите уравнение:

а) $\log_x 27 = 3$; ______ г) $\log_x 64 = 2$; ______

б) $\log_x \frac{1}{12} = -1$; ______ д) $\log_x 256 = 8$; ______

в) $\log_x \sqrt{7} = \frac{1}{2}$; ______ е) $\lg_x 10 = -\frac{1}{3}$. ______

Решение.

е) $x^{-\frac{1}{3}} = 10$. Возведём обе части равенства в куб. Получим $x^{-1} = 1000$, $\frac{1}{x} = 1000$, $x = 0{,}001$.

4. Найдите, при каких значениях x существует логарифм:

а) $\log_{\frac{5}{3}}(x+7)$; ______ г) $\log_7(x^2+15)$; ______

б) $\log_{12}(4-x)$; ______ д) $\lg|x-4|$; ______

в) $\log_2 \frac{1}{x-8}$; ______ е) $\ln(20-x)^2$. ______

Решение.

б) $\log_{12}(4-x)$, $4-x>0$, $x<4$.

Вычислите:

5. а) $5^{\log_5 4}$; ______ в) $49^{\log_7 \sqrt{2}}$; ______ д) $\pi^{4\log_\pi \frac{1}{\sqrt{2}}}$; ______

б) $12^{2\log_{144} 3}$; ______ г) $10^{\lg 8}$; ______ е) $\sqrt{15}^{\log_{15} 16}$. ______

Решение.

б) $12^{2\log_{144} 3} = (12^2)^{\log_{144} 3} = 144^{\log_{144} 3} = 3$.

6. а) $16^{\log_4 \sqrt{3}}$; ______ в) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{27}} 216}$; ______ д) $7^{1+\log_7 3}$; ______

б) $7^{\log_{49} 121}$; ______ г) $5^{1-\log_5 1}$; ______ е) $10^{\lg 2+2}$. ______

Решение.

е) $10^{\lg 2} \cdot 10^2 = 100 \cdot 2 = 200$.

7. а) $4^{\log_2 \sqrt{5}}$; ______ в) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9 \frac{1}{16}}$; ______ д) $2{,}2^{\log_{2,2} 5+1}$; ______

б) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{25} 144}$; ______ г) $2^{1-\log_2 5}$; ______ е) $10^{\lg 5-2}$. ______

Решение.

в) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9 \frac{1}{16}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}} 4^{-2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 4} = 4.$

8. Решите уравнение:

а) $\log_2 x = \log_2 5$; ______ г) $\log_{16} x = \frac{1}{4}$; ______

б) $\log_3(x+1) = \log_{\frac{1}{3}} 2$; ______ д) $\log_5 x = \frac{1}{2}\log_{25} 625$; ______

в) $\log_{\frac{1}{2}} x = \log_4 16$; ______ е) $\lg x = \log_{0,1} \frac{1}{\sqrt{10}}$. ______

Решение.

е) $\lg x = \log_{0,1} \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\lg x = \log_{10^{-1}} \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\lg x = \lg\sqrt{10}$, $x = \sqrt{10}$.

9. Вычислите:

а) $\log_3 \log_2 8$; ______ г) $\log_{\frac{1}{2}} \log_5 625$; ______

б) $\log_9 \lg 1000$; ______ д) $\log_{\sqrt{2}} \log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{49}$; ______

в) $\log_2 \log_2 2^{16}$; ______ е) $\log_3^2 5 \cdot \log_2 7 \cdot \lg 1$. ______

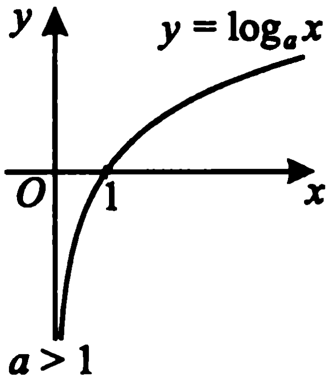
Решение.

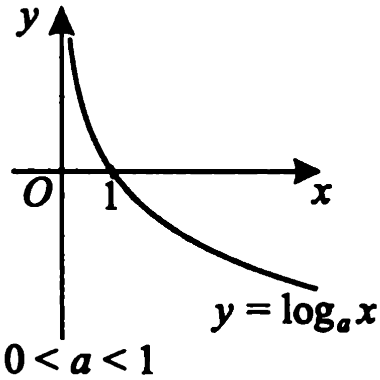
д) $\log_{\sqrt{2}} \log_{\frac{1}{7}} \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \log_{\sqrt{2}} 2 = 2.$

Логарифмическая функция, её свойства и график

- Логарифмической функцией называется функция $y = \log_a x$, где a — заданное число, $a > 0$, $a \neq 1$.
- Область определения $D(y) = (0; +\infty)$.
- Множество значений $E(y) = (-\infty; +\infty)$.
- При $a > 1$ функция является возрастающей, при $0 < a < 1$ — убывающей.

График логарифмической функции:





10. Найдите значение функции $y = \log_a x$ при заданном значении x:

а) $\log_2 x$ при $x = 2$; ____________ г) $\log_3 x$ при $x = 81$; ____________

б) $\log_4 x$ при $x = \frac{1}{2}$; ____________ д) $\lg x$ при $x = 100$; ____________

в) $\log_3 x$ при $x = 9$; ____________ е) $\ln x$ при $x = e$. ____________

Решение.

в) $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2.$

11. Найдите, при каком значении аргумента значение функции $y = \log_5 x$ равно:

а) 0; ____________ в) 2; ____________ д) -2; ____________

б) 1; ____________ г) -1; ____________ е) 4. ____________

Решение.

г) $-1 = \log_5 x, \quad x = 5^{-1}, \quad x = \frac{1}{5}.$

12. Сравните числа:

а) $\log_5 \frac{6}{7} \ldots \log_5 \frac{7}{6}$; г) $\log_{0,3} \frac{\sqrt{8}}{5} \ldots \log_{0,3} \frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\log_{\frac{1}{2}} 5 \ldots \log_{\frac{1}{2}} 10$; д) $\log_2 e \ldots \log_2 \pi$;

в) $\log_\pi \frac{1}{2} \ldots \log_\pi \frac{3}{2}$; е) $\log_{\sqrt{7}} 5 \ldots \log_7 3$.

Решение.

б) Учитывая, что $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ — убывающая функция и $5 < 10$, имеем: $\log_{\frac{1}{2}} 5 > \log_{\frac{1}{2}} 10$.

Если числа a и b на числовой прямой расположены по одну сторону от единицы, то $\log_a b > 0$, если — по разные, то $\log_a b < 0$.

13. Выясните, является ли положительным или отрицательным число:

а) $\log_5 3$; ________ в) $\log_{\frac{1}{2}} 11$; ________ д) $\log_{0,2} e$; ________

б) $\log_3 0{,}7$; ________ г) $\log_\pi 95$; ________ е) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{5}$. ________

Решение.

в) $\frac{1}{2} < 1$, $11 > 1$. Числа $\frac{1}{2}$ и 11 расположены по разные стороны от единицы, значит, $\log_{\frac{1}{2}} 11 < 0$.

14. Сравните с единицей число a $(a > 0)$, если:

а) $\log_3 a = -0{,}3$; ________ г) $\log_\pi a = \sqrt{8}$; ________

б) $\log_2 a = 1{,}5$; ________ д) $\log_{\frac{1}{3}} a = 0{,}5$; ________

в) $\log_{\sqrt{5}} a = -1$; ________ е) $\log_{\frac{7}{5}} a = \frac{11}{12}$. ________

Решение.

б) Основание логарифма — число 2, $2 > 1$, значение логарифма — число 1,5, $1{,}5 > 0$. Логарифмируемое число и основание расположены на числовой прямой по одну сторону от единицы, значит, $a > 1$.

15. Определите характер монотонности функции:

а) $y = \log_{0,02} x$; ________ г) $y = \ln x$; ________

б) $y = \log_3 x$; ________ д) $y = \log_{\frac{\sqrt{5}}{2}} x$; ________

в) $y = \lg x$; ________ е) $y = \log_{\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}} x$. ________

Решение.

а) Основание логарифма — число 0,02. $0 < 0{,}02 < 1$, функция $y = \log_{0,02} x$ является убывающей.

16. Выберите выражения, которые имеют смысл:

а) $\log_{0,5}(2\sqrt{2} - 3)$; в) $\sqrt{\log_5(\sqrt{3} - \sqrt{2})}$; д) $\sqrt[3]{\log_{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} 45^\circ}$;

б) $\log_6(35 - 3\sqrt{3})$; г) $\log_4 \cos\pi$; е) $\sqrt[4]{\log_2 \sin 30^\circ}$.

Решение.

а) Определим знак разности $2\sqrt{2} - 3$, $2\sqrt{2} = \sqrt{8}$, $3 = \sqrt{9}$, $\sqrt{8} - \sqrt{9} < 0$, значит, выражение $\log_{0,5}(2\sqrt{2} - 3)$ не имеет смысла.

17. Найдите область определения функции:

а) $y = \log_9(x-2)$; ________ г) $y = \log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{2}{x+1}\right)$; ________

б) $y = \log_{\sqrt{3}}(4-x^2)$; ________ д) $y = \lg\left(\frac{3x-27}{4}\right)$; ________

в) $y = \log_{0,2}(1+x)$; ________ е) $y = \ln(9-x^2)$. ________

Решение.

д) $\frac{3x-27}{4} > 0, \quad 3x - 27 > 0, \quad 3x > 27, \quad x > 9.$

18. Найдите множество значений функции $y = f(x)$ на промежутке $[a; b]$:

а) $y = \log_2 x$, $[4; 64]$; ________ г) $y = \log_{\frac{1}{5}} x$, $\left[\frac{1}{625}; \frac{1}{25}\right]$; ________

б) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $\left[\frac{1}{27}; 3\right]$; ________ д) $y = \log_5 x$, $\left[\frac{1}{25}; 625\right]$; ________

в) $y = \log_6 x$, $[1; 216]$; ________ е) $y = \log_3 x$, $[9; 243]$. ________

Решение.

в) Найдём $y(1) = \log_6 1 = 0$, $y(216) = \log_6 216 = \log_6 6^3 = 3$. Учитывая, что $y = \log_6 x$ — возрастающая функция, получим $E(y) = [0; 3]$.

19. Решите уравнение:

а) $\log_3(2x-1) = 2$; ________ г) $\log_{\sqrt{2}}(4+x) = 4$; ________

б) $\log_5(x+4) = 1$; ________ д) $\ln(2x-7) = 0$; ________

в) $\log_{\frac{1}{2}}(3-x) = -2$; ________ е) $\lg(5-x) = 1$. ________

Решение.

д) $\ln(2x-7) = \ln 1, \quad 2x - 7 = 1, \quad 2x = 8, \quad x = 4.$

20. Решите неравенство:

а) $\log_7 x > \log_7 3$; ________ г) $\log_3 x < 2$; ________

б) $\log_{\frac{1}{2}} x \leqslant \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{5}$; ________ д) $\log_{0,2} x > 2$; ________

в) $\lg x < \lg 4$; ________ е) $\ln x > \ln 0{,}1$. ________

Решение.

д) $\log_{0,2} x > \log_{0,2} 0{,}04, \quad 0 < 0{,}2 < 1, \quad 0 < x < 0{,}04.$

21. Расположите числа в порядке убывания:

а) $\log_2 0{,}1, \quad \log_2 26, \quad \log_2 7$; ________

б) $\log_{\frac{1}{2}} 0{,}4, \quad \log_{\frac{1}{2}} 11, \quad \log_{\frac{1}{2}} \pi$; ________

в) $\log_{\sqrt{5}} 7$, $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{3}$, $\log_{\sqrt{5}} 23$; ____________

г) $\lg 0{,}2$, $\lg 7$, $\lg 0{,}1$; ____________

д) $\ln \frac{12}{5}$, $\ln 3\frac{1}{2}$, $\ln \frac{5}{12}$; ____________

е) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 25$, $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{6}{7}$, $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{7}{6}$. ____________

Решение.

а) Учитывая, что $y = \log_2 x$ — возрастающая функция и $0{,}1 < 7 < 26$, имеем: $\log_2 26$, $\log_2 7$, $\log_2 0{,}1$.

Свойства логарифмов

Если $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$ и r — действительное число, то:

$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$;

$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$;

$\log_a b^r = r \log_a b$.

Вычислите:

22. а) $\log_7 2 + \log_7 3{,}5$; ________

б) $\log_6 2 + \log_6 18$; ________

в) $\log_{144} 3 + \log_{144} 4$; ________

г) $\log_3 15 - \log_3 5$; ________

д) $\log_{\frac{1}{2}} 22 - \log_{\frac{1}{2}} 11$; ________

е) $\log_{0,2} 100 - \log_{0,2} 4$. ________

Решение.

г) $\log_3 15 - \log_3 5 = \log_3 \frac{15}{5} = \log_3 3 = 1$.

23. а) $\lg 25 + \lg 4$; ______

б) $\lg \frac{3}{15} + \lg 500$; ______

в) $\log_7 392 - 3\log_7 2$; ______

г) $\log_3 16 + 4\log_3 \frac{9}{2}$; ______

д) $\log_5 11 + \log_5 \frac{25}{11}$; ______

е) $\log_9 63 - 2\log_9 \frac{1}{7} + \log_9 \frac{1}{343}$. ______

Решение.

е) $\log_9 63 - 2\log_9 \frac{1}{7} + \log_9 \frac{1}{343} = \log_9 \frac{63 \cdot 49}{343} = \log_9 9 = 1$.

24. а) $\log_{\sqrt{5}} 10 - \log_{\sqrt{5}} 2\sqrt{5}$; ______ г) $\log_{\sqrt{2}} 6\sqrt{2} - \log_{\sqrt{2}} 12$; ______

б) $\log_{\frac{2}{3}} 16 - \log_{\frac{2}{3}} 81$; ______ д) $\log_{\sqrt{11}} 11 + \log_{\sqrt{13}} 13$; ______

в) $\log_{0,1} 0{,}007 - \log_{0,1} 0{,}007$; ______ е) $\lg \frac{1}{10\sqrt{10}} + \log_3 \sqrt{27}$. ______

Решение.

е) $\lg \frac{1}{10\sqrt{10}} + \log_3 \sqrt{27} = \lg \frac{1}{10^{\frac{3}{2}}} + \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \lg 10^{-\frac{3}{2}} + \log_3 3^{\frac{3}{2}} =$

$= -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0.$

25. а) Известно, что $\log_3 2 = a$. Найдите $\log_3 16$; ______

б) Известно, что $\log_{\frac{1}{2}} 5 = b$. Найдите $\log_{\frac{1}{2}} 25$; ______

в) Известно, что $\log_2 7 = c$. Найдите $\log_2 14$; ______

г) Известно, что $\log_6 8 = m$. Найдите $\log_6 48$; ______

д) Известно, что $\log_7 42 = p$. Найдите $\log_7 6$; ______

е) Известно, что $\log_5 35 = t$. Найдите $\log_5 7$. ______

Решение.

д) $\log_7 42 = \log_7(6 \cdot 7) = \log_7 6 + \log_7 7 = \log_7 6 + 1$. По условию $\log_7 42 = p$, значит, $\log_7 6 + 1 = p$, $\log_7 6 = p - 1$.

26. Между какими двумя последовательными целыми числами расположено число:

а) $\log_2 18$; ______ в) $\log_{\frac{1}{5}} 20$; ______ д) $\log_{\frac{1}{3}} 70$; ______

б) $\log_3 30$; ______ г) $\log_{0,5} 15$; ______ е) $\lg 50$? ______

Решение.

д) Подберём два целых числа таких, что $\left(\frac{1}{3}\right)^k < 70 < \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}$, где $k \in Z$. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = 81$, $27 < 70 < 81$.

$y = \log_{\frac{1}{3}} x$ — убывающая функция, значит, $\log_{\frac{1}{3}} 81 < \log_{\frac{1}{3}} 70 < \log_{\frac{1}{3}} 27$, $-4 < \log_{\frac{1}{3}} 70 < -3$.

27. Найдите число t по данному логарифму:

а) $\log_2 t = \log_2 96 - \log_2 16$; ______

б) $\log_7 t = \log_7 28 - 2\log_7 2$; ______

в) $\log_{\frac{1}{4}} t = \log_{\frac{1}{4}} 2\sqrt{2} + \log_{\frac{1}{4}} 8\sqrt{8}$; ______

г) $\lg t = \lg \frac{1}{4} + \lg \frac{1}{25}$; ________

д) $\log_{\sqrt{7}} t = 2\log_{\sqrt{7}} 4 - \log_{\sqrt{7}} 2 + \log_{\sqrt{7}} \frac{1}{8}$; ________

е) $\lg t = 2\lg 3 + \lg 5 - \frac{1}{2}\lg 9$. ________

Решение.

е) $\lg t = 2\lg 3 + \lg 5 - \lg 9^{\frac{1}{2}} = 2\lg 3 + \lg 5 - \lg 3 = \lg 3 + \lg 5 = \lg 15$, $t = 15$.

$\log_a x \cdot \log_b y = \log_a y \cdot \log_b x$, где $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$.

28. Выполните действия:

а) $\log_3 8 \cdot \log_2 9$; ______ г) $\log_\pi e \cdot \ln \pi$; ______

б) $\log_{\frac{1}{3}} 27 \cdot \log_{\frac{1}{2}} 25 \cdot \log_{\frac{1}{5}} 4$; ______ д) $\lg 49 \cdot \log_7 1000$; ______

в) $\log_5 216 \cdot \log_6 25$; ______ е) $\log_{0,5} 81 \cdot \log_3 36 \cdot \log_6 8$. ______

Решение.

е) $\log_{0,5} 8 \log_3 81 \log_6 36 = -3 \cdot 4 \cdot 2 = -24$.

29. Сравните значения выражений:

а) $\log_3 5 + \log_3 8 \ldots \log_3(5+8)$;

б) $\log_{0,3} 12 - \log_{0,3} 2 \ldots \log_{0,3}(12-2)$;

в) $\log_{\sqrt{6}} 17 - \log_{\sqrt{6}} 5 \ldots \log_{\sqrt{6}}(17-5)$;

г) $\log_{\frac{1}{7}} 16 + \log_{\frac{1}{7}} 4 \ldots \log_{\frac{1}{7}}(16+4)$;

д) $\lg \sin 30° \ldots \lg \operatorname{tg} 45°$;

е) $\ln \cos 0° \ldots \ln \operatorname{tg} 60°$.

Решение.

е) Зная, что $\cos 0° = 1$, а $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$, получим $\ln\cos 0° = \ln 1$, $\ln \operatorname{tg} 60° = \ln\sqrt{3} > 0$, так как $e > 1$ и $\sqrt{3} > 1$. Имеем: $\ln 1 < \ln\sqrt{3}$, значит, $\ln\cos 0° < \ln\operatorname{tg} 60°$.

Формулы перехода к новому основанию логарифма:

$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, где $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $c > 0$, $c \neq 1$.

$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$; $\log_{a^n} b = \dfrac{1}{n}\log_a b$.

30. Выразите данный логарифм через логарифмы с основанием 5:

а) $\log_7 3$; ______ г) $\log_{\frac{1}{2}} 5$; ______

б) $\lg 6$; ______ д) $\log_{\sqrt{3}} 7$; ______

в) $\log_{25} 11$; ______ е) $\log_{125} 2$. ______

Решение.

е) $\log_{125} 2 = \log_{5^3} 2 = \dfrac{1}{3}\log_5 2$.

31. Выразите данный логарифм через десятичные:

а) $\log_3 25$; ______ г) $\log_9 0{,}75$; ______

б) $\log_7 8$; ______ д) $\log_{1000} 4$; ______

в) $\log_{0,1} 2$; ______ е) $\ln\sqrt{10}$. ______

Решение.

в) $\log_{0,1} 2 = \dfrac{\lg 2}{\lg 0{,}1} = -\lg 2$.

32. Прологарифмируйте по основанию 2 $(a > 0, b > 0)$:

а) $32a^2b^5$; ______ г) $4\sqrt{ab}$; ______

б) $\dfrac{1}{16}a\sqrt{b}$; ______ д) $\dfrac{b^2}{a^3}$; ______

в) $128a\sqrt{ab}$; ______ е) $\dfrac{a^5}{4b^2}$. ______

Решение.

в) $\log_2(128a\sqrt{ab}) = \log_2 128 + \log_2(a\sqrt{a}) + \log_2 b = \log_2 2^7 + \log_2 a^{1,5} + \log_2 b = 7 + 1{,}5\log_2 a + \log_2 b$.

33. Прологарифмируйте по основанию e $(a > 0)$:

а) e^3; ______ г) $\dfrac{a}{3e^2}$; ______

б) a^2e^5; ______ д) $\dfrac{4\sqrt{e}}{a}$; ______

в) $\dfrac{a}{e}$; ______ е) $2\sqrt{ae}$. ______

Решение.

в) $\ln\left(\dfrac{a}{e}\right) = \ln a - \ln e = \ln a - 1$.

Вычислите:

34. а) $\log_2 16 \cdot \log_3 9$; ________ г) $\log_3 \frac{1}{81} - \log_2 \frac{1}{8}$; ________

б) $\log_4 64 : \log_3 27$; ________ д) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} + \log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{216}$; ________

в) $\log_{\frac{1}{5}} 25 + \log_{\frac{1}{6}} 36$; ________ е) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{216}} \frac{1}{6}$. ________

Решение.

е) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{216}} \frac{1}{6} = \log_{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \frac{1}{2} + \log_{\left(\frac{1}{6}\right)^3} \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{6} =$
$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

35. а) $\lg 25 - \lg 2{,}5$; ________ г) $\ln\left(\frac{1}{4}e\right) + \ln(4e^3)$; ________

б) $\lg 4 + \lg 25$; ________ д) $\log_6 66 - \log_6 11$; ________

в) $\lg 8 + \lg 125$; ________ е) $\log_{12} 72 + \log_{12} 2$. ________

Решение.

г) $\ln\left(\frac{1}{4}e\right) + \ln(4e^3) = \ln\left(\frac{1}{4}e \cdot 4e^3\right) = \ln e^4 = 4$.

36. а) $\log_7 \sin \frac{\pi}{4} - \log_7 \cos \frac{\pi}{4}$; ________ г) $\log_3 \cos \frac{\pi}{3} - \log_3 \sin \frac{2\pi}{3}$; ________

б) $\log_3 \sin \frac{5\pi}{6} - \log_3 \cos \frac{\pi}{6}$; ________ д) $\ln \cos \frac{\pi}{4} - \ln \sin \frac{\pi}{4}$; ________

в) $\lg \operatorname{tg} 105^\circ + \lg \operatorname{ctg} 105^\circ$; ________ е) $\log_\pi \operatorname{tg} 54^\circ + \log_\pi \operatorname{tg} 36^\circ$. ________

Решение.

д) $\ln \cos \frac{\pi}{4} - \ln \sin \frac{\pi}{4} = \ln \dfrac{\cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}} = \ln \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = \ln 1 = 0$.

Решение логарифмических уравнений и неравенств

Уравнение вида $\log_a (f(x)) = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, решается по определению логарифма $f(x) = a^b$.

Решите уравнение:

37. а) $\log_2 x = 5$; ______ г) $\log_{\frac{1}{3}} x = -2$; ______

б) $\log_7(5x) = 2$; ______ д) $\ln x = 0$; ______

в) $\lg(-x) = -1$; ______ е) $\log_{0,2} x = -3$. ______

Решение.

в) $\lg(-x) = -1, \quad -x = 10^{-1}, \quad -x = \frac{1}{10}, \quad x = -0{,}1.$

38. а) $\lg(x+7) = 1$; ______ г) $\log_5(7-x) = -1$; ______

б) $\log_2(x-4) = 2$; ______ д) $\lg(2x+0{,}1) = -1$; ______

в) $\ln(5-2x) = 0$; ______ е) $\log_{20}(x^2-5) = 1$. ______

Решение.

б) $\log_2(x-4) = 2, \quad x-4 = 2^2, \quad x-4 = 4, \quad x = 8.$

39. а) $\lg(x+2) = \lg 5$; ______ г) $\ln(x^2-3) = \ln 6$; ______

б) $\log_3(5-4x) = -\log_3 0{,}5$; ______ д) $\lg(5-x^2) = \lg 4$; ______

в) $\lg(13-x) = \lg 13$; ______ е) $\log_2(3x-1) = \log_{15} 1$. ______

Решение.

д) $\lg(5-x^2) = \lg 4, \quad 5-x^2 = 4, \quad x^2 = 1, \quad x = \pm 1.$

40. а) $\log_2 x = 1 + \log_2 3$; ______

б) $\log_3 x = 2\log_3 5 - \log_3 2$; ______

в) $\lg(2x-1) = \lg 11 - \lg 1{,}1$; ______

г) $\ln(6-x) = \ln 12 - \ln 3$; ______

д) $3\log_5 \frac{1}{2} - \log_5 \frac{1}{32} = \log_5 x$; ______

е) $2\log_{0,3} x = \log_{0,3} 2 + \log_{0,3} 8$. ______

Решение.

б) $\log_3 x = 2\log_3 5 - \log_3 2, \quad \log_3 x = \log_3 25 - \log_3 2, \quad \log_3 x = \log_3 \frac{25}{2},$
$x = 12{,}5.$

41. а) $\log_{\frac{1}{2}} \sin x = 1$; ______

б) $\log_2 \cos x = -1$; ______

в) $\log_{0,7}(x+4) = \log_{0,7}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\right)$; ______

г) $\log_5(2x-7) = \log_5 \cos 0°$; ______

д) $\log_6(1-2x) = \log_6 \cos\frac{\pi}{3}$; ____________

е) $\lg\cos x = 1$. ____________

Решение.

г) $\log_5(2x-7) = \log_5\cos 0°$, $2x-7=\cos 0°$, $2x-7=1$, $2x=8$, $x=4$.

42. а) $5\log_5(\cos x+1)=0$; ________ г) $\log_{\sqrt{3}}(\operatorname{tg} x+1)=0$; ________

б) $3\log_3(\sin x+1)=0$; ________ д) $\log_{\sqrt{2}}(\sin x)=-1$; ________

в) $\log_{\sqrt{3}}(\operatorname{ctg} x+1)=0$; ________ е) $\log_5(\sqrt{2}\cos x)=0$. ________

Решение.

в) $\log_{\sqrt{3}}(\operatorname{ctg} x+1)=0$, $\operatorname{ctg} x+1=\sqrt{3}^0$, $\operatorname{ctg} x+1=1$, $\operatorname{ctg} x=0$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$.

43. а) $\log_{\frac{1}{7}}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0$; ________ г) $\ln\cos(2\pi-x)=0$; ________

б) $\lg\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0$; ________ д) $\lg\sin(4\pi+x)=0$; ________

в) $\log_5\operatorname{tg}(\pi+x)=0$; ________ е) $\log_2\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=0$. ________

Решение.

д) $\lg\sin(4\pi+x)=0$, $\sin(4\pi+x)=1$, $\sin x=1$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$.

44. а) $\log_{0,5}(x^2+4x-20)=0$; ____ г) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+3x-31)+2=0$; ____

б) $\log_3(x^2-11x+21)=1$; ____ д) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2+x+23)+2=0$; ____

в) $\ln(x^2-8x+16)=0$; ____ е) $\log_\pi(x^2-12x+36)=0$. ____

Решение.

в) $\ln(x^2-8x+16)=0$, $x^2-8x+16=e^0$, $x^2-8x+16=1$, $x^2-8x+15=0$, $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=5. \end{array}\right.$

Уравнение вида $\log_a(f(x))=\log_a(g(x))$, где $a>0$, $a\neq 1$, равносильно любой из двух систем:

$$\left\{\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)>0; \end{array}\right. \quad \text{либо} \quad \left\{\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ g(x)>0. \end{array}\right.$$

Решите уравнение:

45. а) $\log_3(x-2)=\log_3(2x+5)$; ______

б) $\log_{0,1}(3x-6)=\log_{0,1}(x-1)$; ______

в) $\log_{\frac{1}{5}}(2x+7)=\log_{\frac{1}{5}}x$; ______

г) $\log_{\sqrt{2}}(2x-4)-\log_{\sqrt{2}}(2-9x)=0$; ______

д) $\log_{\pi}(0{,}2x)-\log_{\pi}(6-x)=0$; ______

е) $\log_2 x^2-\log_2 x=0$. ______

Решение.

е) $\log_2 x^2 = \log_2 x; \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=x, \\ x>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x=0, \\ x>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1)=0, \\ x>0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=1, \end{array}\right. \\ x>0; \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$

При решении логарифмического уравнения (отличного от ранее рассмотренных) необходимо либо находить область допустимых значений уравнения, либо делать проверку.

Решите уравнение:

46. а) $\log_2(x-1)+\log_2(x+1)=\log_2(2x)$; ______

б) $\log_3^2(x+5)-\log_3(x+5)\cdot\log_3(3-x)=0$; ______

в) $\log_{17}(x-11)\cdot\log_5(x+3)=0$; ______

г) $7^{\log_7(x+2)}=5x-4$; ______

д) $11^{\log_{11}(4-x)}=6x-10$; ______

е) $5^{\log_3 x}\cdot 2^{\log_3 x}=100$. ______

Решение.

б) $\log_3(x+5)\left(\log_3(x+5)-\log_3(3-x)\right)=0$;

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_3(x+5)=0, \\ \log_3(x+5)=\log_3(3-x), \end{array}\right. \\ x+5>0, \\ 3-x>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+5=1, \\ x+5=3-x, \end{array}\right. \\ x>-5, \\ x<3; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4, \\ x=-1. \end{array}\right.$

Решение неравенства $\log_a(f(x)) > \log_a(g(x))$, $a>0$, $a\neq 1$, равносильно решению системы неравенств:

- если $a>1$, то $\begin{cases} g(x)>0, \\ f(x)>g(x); \end{cases}$

- если $0 < a < 1$, то $\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$

Решите неравенство:

47. а) $\log_5 x > 2$; ________ г) $\log_{\frac{1}{3}} x < -2$; ________

б) $\log_3 x < 1$; ________ д) $\lg x > 3$; ________

в) $\log_{\frac{1}{2}} x > -1$; ________ е) $\log_{\sqrt{3}} x < 4$. ________

Решение.

а) $\log_5 x > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x > \log_5 25, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 25, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow x > 25.$

48. а) $\lg(3x-2) > 0$; ________ г) $\log_{\frac{1}{3}}(x-2) \geqslant -2$; ________

б) $\log_{\frac{1}{2}}(7-5x) < 1$; ________ д) $\log_{0,2} \frac{x}{5} \leqslant -1$; ________

в) $\log_3(x+1) < 3$; ________ е) $\log_{\sqrt{2}}(5x+4) < 2$. ________

Решение.

в) $\log_3(x+1) < \log_3 27$. Логарифмическая функция по основанию 3 возрастающая, поэтому $\begin{cases} x+1 > 0, \\ x+1 < 27; \end{cases}$ $\begin{cases} x > -1, \\ x < 26; \end{cases}$ $-1 < x < 26$.

49. а) $(x-1)\log_2 4 \geqslant 0$; ________ г) $\dfrac{\log_6 216}{x-2} < 0$; ________

б) $(2x-3)\log_{\frac{1}{3}} 9 \leqslant 2$; ________ д) $\dfrac{x+3}{\ln e} > 0$; ________

в) $\dfrac{5x-1}{\log_{25} 5} > 4$; ________ е) $\dfrac{\lg \frac{1}{2}}{x+1} > 0$. ________

Решение.

е) Разделим обе части неравенства на $\lg \frac{1}{2}$, учитывая, что $\lg \frac{1}{2} < 0$. Получим $\dfrac{1}{x+1} < 0$, $x+1 < 0$, $x < -1$.

50. а) $\log_3 x < \log_3(2x-1)$; ____ г) $\log_{0,1}(4x-1) \leqslant \log_{0,1} x$; ____

б) $\log_{\frac{1}{2}}(3x-6) > \log_{\frac{1}{2}} 2x$; ____ д) $\log_{\frac{1}{6}}(18-3x) < \log_{\frac{1}{6}} x$; ____

в) $\log_5 \frac{x}{2} > \log_5(9-x)$; ____ е) $2\lg\sqrt{x} > \lg(2x-1)$. ____

Решение.

е) $\lg(\sqrt{x})^2 > \lg(2x-1)$, $\lg x > \lg(2x-1)$. $y = \lg t$ — возрастающая функция, значит, $\begin{cases} 2x-1>0, \\ x>2x-1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2}, \\ x<1; \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 1.$

Найдите наибольшее целочисленное решение неравенства:

51. а) $\log_2(x-3) < 2$; ______ г) $\log_{\frac{1}{3}}(x+2) > -3$; ______

б) $\log_{\frac{1}{4}}(2x+1) > -1{,}5$; ______ д) $\log_{\frac{1}{9}}(x+5) > -\frac{1}{2}$; ______

в) $\log_3(x+1) < 4$; ______ е) $\log_5(2x-1) < 2$. ______

Решение.

д) $\log_{\frac{1}{9}}(x+5) > -\frac{1}{2}$, $\log_{\frac{1}{9}}(x+5) > \log_{\frac{1}{9}}\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $\log_{\frac{1}{9}}(x+5) > \log_{\frac{1}{9}} 9^{\frac{1}{2}}$, $\log_{\frac{1}{9}}(x+5) > \log_{\frac{1}{9}} 3$. Функция $y = \log_{\frac{1}{9}} t$ — убывающая, поэтому $\begin{cases} x+5<3, \\ x+5>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-2, \\ x>-5 \end{cases} \Leftrightarrow -5 < x < -2$. Наибольшее целочисленное решение -3.

52. а) $\log_{1,2}(1+2x) < \log_{1,2} 5$; ______ г) $\log_{\frac{7}{5}}(1-2x) < \log_{\frac{7}{5}} 4$; ______

б) $\log_{0,7}(x-4) > \log_{0,7} 5$; ______ д) $\lg(5x+3) < \lg 18$; ______

в) $\log_{\frac{3}{5}}(3x-6) > \log_{\frac{3}{5}} 12$; ______ е) $\ln(2-x) < \ln 3$. ______

Решение.

г) Учитывая, что $y = \log_{\frac{7}{5}} t$ возрастающая функция, имеем:

$\begin{cases} 1-2x>0, \\ 1-2x<4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0{,}5, \\ x>-1{,}5; \end{cases} \Leftrightarrow -1{,}5 < x < 0{,}5$. Наибольшее целочисленное решение 0.

Найдите наименьшее целочисленное решение неравенства:

53. а) $\log_2(x-3) < 5$; ______ г) $\lg(2x-1) \geqslant 1$; ______

б) $\log_{\frac{1}{2}}(8-x) > -2$; ______ д) $\ln(1-5x) < 0$; ______

в) $\log_{\frac{1}{5}}(4-2x) > -2$; ______ е) $\log_7(x-2) < \log_7(2x+1)$. ______

Решение.

в) $\log_{\frac{1}{5}}(4-2x) > \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$, $\log_{\frac{1}{5}}(4-2x) > \log_{\frac{1}{5}} 25$. Учитывая, что $y = \log_{\frac{1}{5}} t$ — убывающая функция, имеем: $\begin{cases} 4-2x>0, \\ 4-2x<25; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x > -10{,}5; \end{cases} \Leftrightarrow -10{,}5 < x < 2.$ Наименьшее целочисленное решение -10.

54. а) $(x+1)\log_{\frac{1}{3}} 12 < -\log_{\frac{1}{3}} 12$; __________

б) $(2x-7)\log_{\frac{5}{6}} 11 \leqslant 5\log_{\frac{5}{6}} 11$; __________

в) $7x\log_2 15 - 14\log_2 15 \geqslant 0$; __________

г) $(8-3x)\lg 7 + 10\lg 7 < 0$; __________

д) $5x\log_{\frac{1}{5}} 25 - (2x+6)\log_{\frac{1}{5}} 25 \leqslant 0$; __________

е) $(12+x)\ln 0{,}5 + 5\ln 0{,}5 < 0$. __________

Решение.

в) $7x\log_2 15 \geqslant 14\log_2 15$. Разделим обе части неравенства на $\log_2 15$, учитывая, что $\log_2 15 > 0$. Получим: $7x \geqslant 14$, $x \geqslant 2$. Наименьшее целочисленное решение 2.

55. Решите неравенство:

а) $5^{\log_5(x+2)} < 4$; __________ г) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\log_{0,125} x} < 2$; __________

б) $7^{\log_7(3-x)} \leqslant 1$; __________ д) $10^{\lg(x-1)} < 5$; __________

в) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}(x-7)} < 3$; __________ е) $e^{\ln(x+3)} < -1$. __________

Решение.

е) $e^{\ln(x+3)} < -1$, $\begin{cases} x+3 > 0, \\ x+3 < -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3, \\ x < -4; \end{cases}$ решений нет.

56. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt[4]{\log_6(4x-1)}$; __________ г) $y = \dfrac{7x}{\log_3(x-1)}$; __________

б) $y = \sqrt{\log_2(x-4)}$; __________ д) $y = \sqrt{\ln(x-1)}$; __________

в) $y = \sqrt[6]{\log_{\frac{1}{3}}(2x+1)}$; __________ е) $y = \sqrt{\lg 2x - \lg(x+1)}$. __________

Решение.

в) Арифметический корень чётной степени определён на множестве неотрицательных чисел, поэтому $\log_{\frac{1}{3}}(2x+1) \geqslant 0$, $\log_{\frac{1}{3}}(2x+1) \geqslant \log_{\frac{1}{3}} 1$.

Функция $y = \log_{\frac{1}{3}} t$ — убывающая, значит, $\begin{cases} 2x+1 \leqslant 1, \\ 2x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

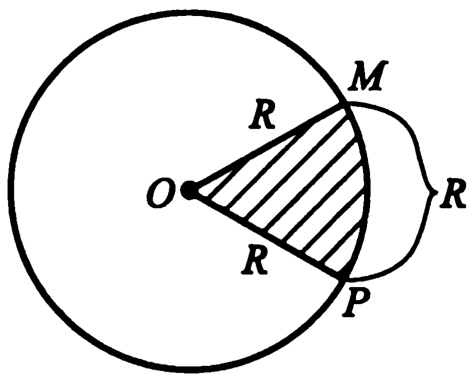
$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 0, \\ x > -0{,}5. \end{cases} -0{,}5 < x \leqslant 0.$

Глава XIV

Тригонометрия

Радианная мера угла

Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется углом в один радиан.



α рад. $= \left(\dfrac{\alpha \cdot 180}{\pi}\right)^{\circ}$.

$\alpha^{\circ} = \dfrac{\pi\alpha}{180}$ рад[1].

Формула вычисления длины дуги: $l = \alpha R$, где
R — радиус окружности,
α — угловая мера дуги в радианах (величина центрального угла, соответствующего этой дуге).

---

[1] Обычно при обозначении меры угла в радианах наименование «рад.» опускают.

Формула вычисления площади кругового сектора радиуса R, дуга которого содержит α радиан:

$$S = \frac{R^2}{2}\alpha, \text{ где } 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi.$$

1. Найдите радианную меру угла, выраженного в градусах:

а) $20°$; __________ в) $45°$; __________ д) $120°$; __________

б) $30°$; __________ г) $60°$; __________ е) $150°$. __________

Решение.

в) $45° = \frac{\pi \cdot 45°}{180°} = \frac{\pi}{4}$.

2. Найдите градусную меру угла, выраженного в радианах:

а) $\frac{\pi}{12}$; __________ в) $\frac{\pi}{9}$; __________ д) $\frac{2\pi}{5}$; __________

б) $\frac{\pi}{18}$; __________ г) $\frac{\pi}{10}$; __________ е) 2. __________

Решение.

б) $\frac{\pi}{18} = \left(\frac{180}{\pi} \cdot \frac{\pi}{18}\right)^{\circ} = 10°$.

3. Решите задачи:

а) Конец минутной стрелки часов движется по окружности радиуса 12 см. Какой путь (в см) проходит конец стрелки за 7 мин 30 с? (Принять $\pi = 3$.) __________

б) Вычислите радиус окружности, если дуге длиной 0,27 м соответствует центральный угол 0,9 рад. Ответ выразите в см. __________

в) Найдите радианную меру угла, который соответствует дуге окружности длиной 8 см, если радиус окружности равен 4 см. __________

г) Дуге кругового сектора соответствует угол в $\frac{2\pi}{3}$ рад. Найдите площадь этого сектора (в см^2), если радиус круга равен 1 см. (Принять $\pi = 3$.) __________

д) Радиус круга равен 5 см, площадь кругового сектора равна 6,25 см^2. Найдите угол (в рад.), который соответствует дуге этого кругового сектора. __________

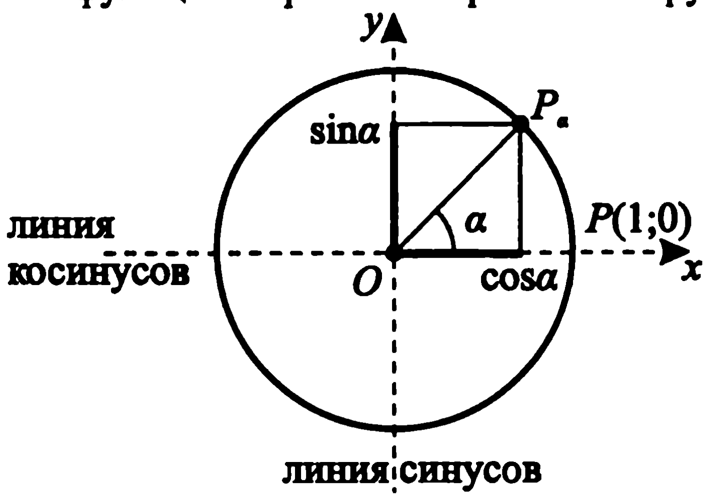
е) Площадь кругового сектора равна $36\,\text{см}^2$, а угол, соответствующий дуге этого кругового сектора, равен 0,5 рад. Найдите радиус круга. Ответ выразите в см. ____________

Решение.

е) Из формулы вычисления площади кругового сектора $S = \frac{R^2}{2}\alpha$ найдём R: $R = \sqrt{\frac{2S}{\alpha}} = \sqrt{\frac{2\cdot 36}{0{,}5}} = 12.$

Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла

Тригонометрические функции в тригонометрическом круге:

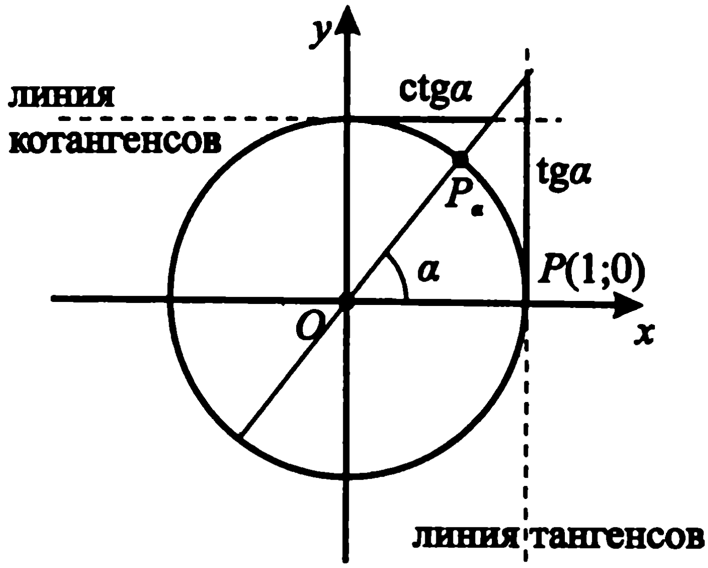


радиус окружности $R = 1$;
точка P_α имеет координаты $(x_\alpha; y_\alpha)$;
$\sin\alpha = y_\alpha, \quad \cos\alpha = x_\alpha.$

Очевидно: $-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1, \quad -1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, n \in Z$$



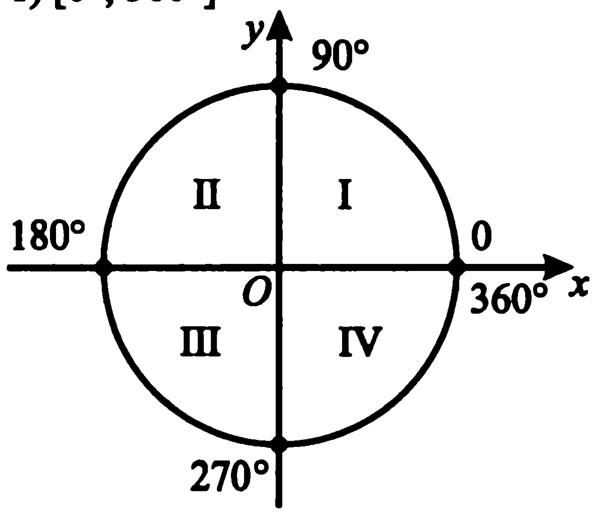
Очевидно: $-\infty < \operatorname{tg}\alpha < \infty, \quad -\infty < \operatorname{ctg}\alpha < \infty.$

Таблица знаков значений тригонометрических функций:

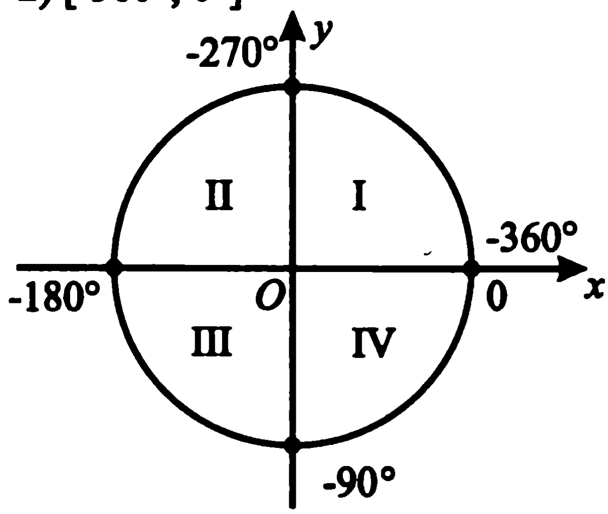
четверть	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\operatorname{tg}\alpha$	+	−	+	−
$\operatorname{ctg}\alpha$	+	−	+	−

Меры углов на единичной окружности:

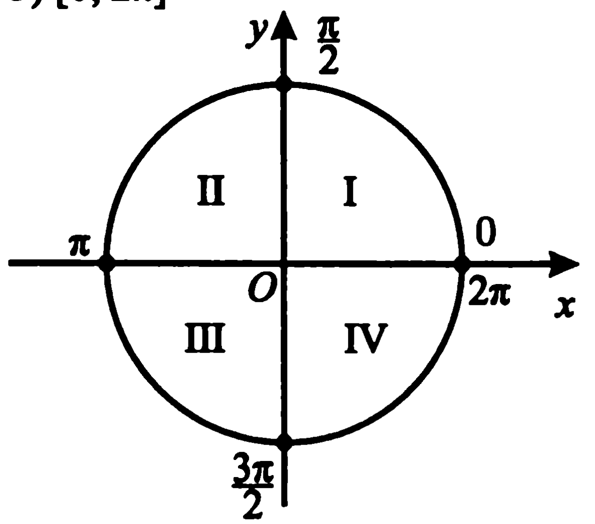
1) [0°; 360°]



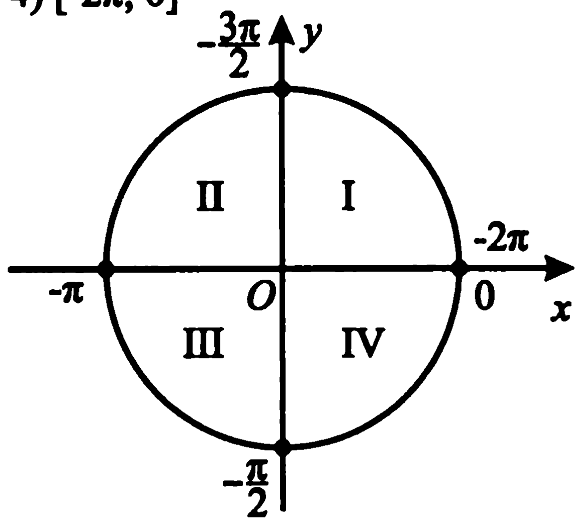
2) [-360°; 0°]



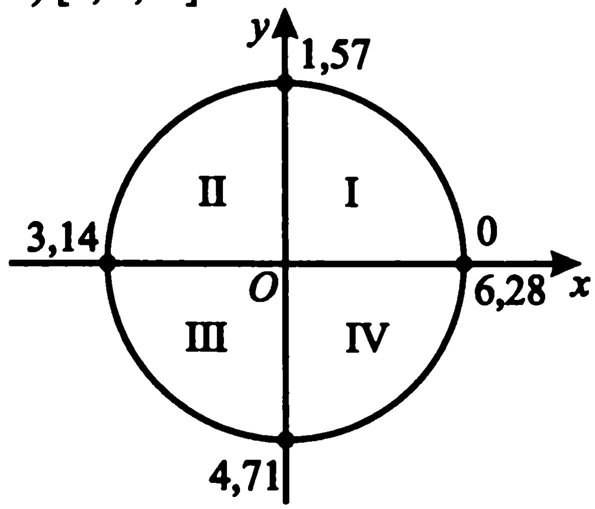
3) [0; 2π]



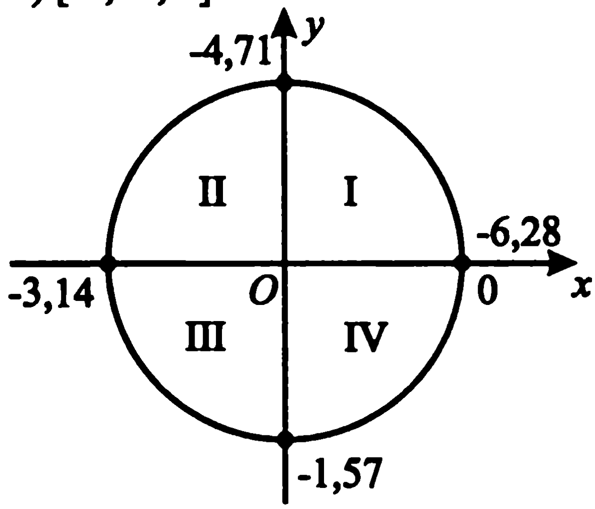
4) [-2π; 0]



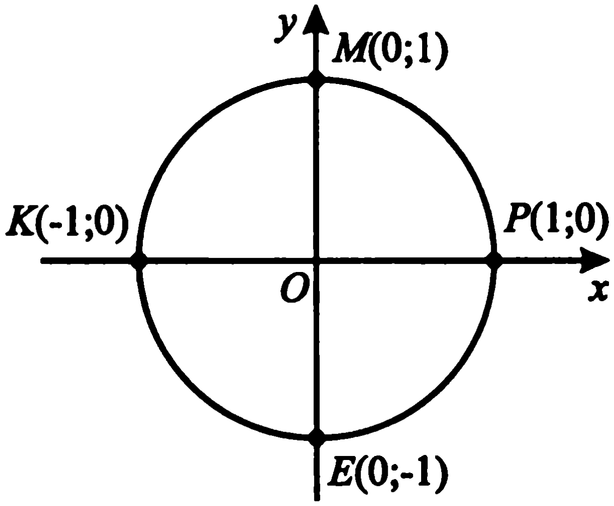
5) [0; 6,28]



6) [-6,28; 0]



Координаты точки $P\,(1;0)$ при повороте на угол $\alpha = \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$:



4. Выберите верные утверждения:

а) Если $90° < \alpha < 180°$, то α — угол II четверти;
б) Если $180° < \alpha < 270°$, то α — угол III четверти;
в) Если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то α — угол I четверти;
г) Если α — угол IV четверти, то $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;
д) Если α — угол IV четверти, то $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$;
е) Если α — угол III четверти, то $3{,}2 < \alpha < 4{,}7$.

Решение.

а) По рисунку (1) определяем: утверждение «Если $90° < \alpha < 180°$, то α — угол II четверти» верное.

5. Определите знак числа:

а) $\sin 200°$; ______	в) $\operatorname{tg} 2$; ______	д) $\operatorname{ctg}(-150°)$; ______
б) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; ______	г) $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$; ______	е) $\sin(-4)$. ______

Решение.

д) По рисунку (2) определяем $-150° \in [-180°; -90°]$, это III четверть. По таблице знаков находим, что котангенс в третьей четверти положительный, значит, $\operatorname{ctg}(-150°) > 0$.

6. Определите знак выражения:

а) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$, если α, β, γ — углы остроугольного треугольника; ______

б) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$, если α, β, γ — углы тупоугольного треугольника; ______

в) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\theta$, если α, β, γ, θ — углы трапеции; ______

г) $\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma$, если α, β, γ — углы остроугольного треугольника; ______

д) $\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma$, если α, β, γ — углы тупоугольного треугольника; ______

е) $\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$, если α, β, γ — углы тупоугольного треугольника. ______

Решение.

д) Так как косинус тупого угла отрицательный, а острого угла положительный, то имеем: $(+) \cdot (+) \cdot (-) < 0$.

7. Определите, в какой четверти находится угол α, если:

а) $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$; ________ г) $\operatorname{tg}\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$; ________

б) $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$; ________ д) $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$; ________

в) $\operatorname{tg}\alpha < 0$, $\sin\alpha > 0$; ________ е) $|\sin\alpha| = \sin\alpha$. ________

Решение.

г) $\operatorname{tg}\alpha > 0$, если угол α лежит в I или III четвертях, $\cos\alpha < 0$ если угол α лежит во II или III четвертях. Таким образом, угол α лежит в III четверти.

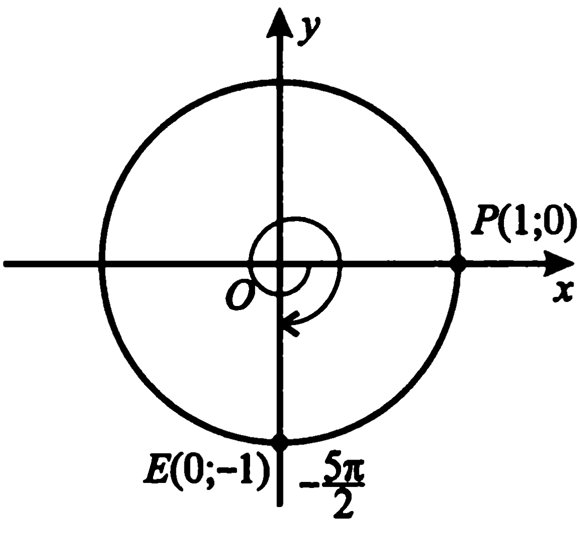
8. Найдите координаты точки единичной окружности, полученной поворотом точки (1; 0) на угол:

а) 2π; ________ в) 3,14; ________ д) 450°; ________

б) $-\frac{5\pi}{2}$; ________ г) 4,71; ________ е) −720°. ________

Решение.

б) Точка $P(1;0)$ при повороте на угол $-\frac{5\pi}{2}$ займёт положение точки $E(0;-1)$.



9. Укажите в градусах все значения α, принадлежащие промежутку [−180°; 360°], при которых:

а) $\cos\alpha = -1$; ________ г) $\sin\alpha = 0$; ________

б) $\sin\alpha = 1$; ________ д) $\cos\alpha = 0$; ________

в) $\operatorname{tg}\alpha = 0$; ________ е) $\operatorname{ctg}\alpha = 0$. ________

Решение.

г) $\sin\alpha = 0$; $\alpha = 0°$, $\alpha = \pm 180°$, $\alpha = 360°$.

10. Укажите в радианах все значения α, при которых:

а) $\cos\alpha = 1$; ______ г) $\sin\alpha = 0$; ______
б) $\sin\alpha = -1$; ______ д) $\cos\alpha = -1$; ______
в) $\operatorname{tg}\alpha = 0$; ______ е) $\cos\alpha = 0$. ______

Решение.

в) $\operatorname{tg}\alpha = 0$, если $\alpha = \pi n,\ n \in Z$.

11. Возможно ли равенство:

а) $\cos\alpha = \pi$; в) $\operatorname{tg}\alpha = 2\pi$; д) $\sin\alpha = a + \frac{1}{a}$;

б) $\sin\alpha = -\frac{\pi}{2}$; г) $\sin\alpha = \sqrt{5} - 3$; е) $\cos\alpha = a^2 + 1$?

Решение.

е) Так как $a^2 + 1 \geqslant 1$, а $|\cos\alpha| \leqslant 1$, то равенство возможно только при $a = 0$.

12. Найдите множество значений выражения:

а) $2 + \sin\alpha$; ______ г) $|\sin\alpha|$; ______
б) $2 - \cos\alpha$; ______ д) $|\cos\alpha| + 1$; ______
в) $\cos\alpha + \frac{1}{2}$; ______ е) $-|\cos\alpha|$. ______

Решение.

а) $-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$; $1 \leqslant 2 + \sin\alpha \leqslant 3$.

13. Возможно ли равенство:

а) $\cos\alpha + \sin\alpha = 2$; ______ г) $2\sin\alpha - \cos\alpha = 1$; ______
б) $2\cos\alpha + \sin\alpha = 3$; ______ д) $3\sin\alpha - \cos\alpha = 3$; ______
в) $4\sin\alpha + 3\cos\alpha = 7$; ______ е) $\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha = 48$? ______

Решение.

д) Равенство возможно, если $\sin\alpha = 1$, тогда $\cos\alpha = 0$.

14. Найдите, при каких значениях b возможно равенство:

а) $\sin\alpha = 3b$; ______ г) $\cos\alpha = 2\pi b$; ______

б) $\cos\alpha = \frac{b}{2}$; ______ д) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3\pi}{b}$; ______

в) $\sin\alpha = \frac{2\pi}{b}$; ______ е) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{\pi}$. ______

Решение.

в) $\sin\alpha = \frac{2\pi}{b}$, $-1 \leqslant \frac{2\pi}{b} \leqslant 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{2\pi}{b} \geqslant -1, \\ \frac{2\pi}{b} \leqslant 1. \end{cases} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} b \leqslant -2\pi, \\ b \geqslant 2\pi. \end{array}\right.$

Таблица значений тригонометрических функций.

α	0	$30°\ \left(\frac{\pi}{6}\right)$	$45°\ \left(\frac{\pi}{4}\right)$	$60°\ \left(\frac{\pi}{3}\right)$	$90°\ \left(\frac{\pi}{2}\right)$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не существует
$\operatorname{ctg}\alpha$	не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Найдите значение выражения:

15. а) $\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$; ______ г) $\operatorname{tg}60°\cdot\operatorname{ctg}60°$; ______

б) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; ______ д) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4}$; ______

в) $\cos^2\frac{\pi}{6}$; ______ е) $\sin 45° + \cos 45°$. ______

Решение.

б) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$.

16. а) $2\sin\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}$; ______ г) $\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}$; ______

б) $5\sin^2\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}$; ______ д) $\cos 0-\sin\frac{3\pi}{2}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$; ______

в) $\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{3}$; ______ е) $\cos 180° - \sin 360° + \operatorname{ctg} 90°$. ______

Решение.

в) $\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$.

17. а) $\operatorname{tg} 45° \cdot \operatorname{ctg} 45°$; __________

б) $\operatorname{tg} 1° \cdot \operatorname{tg} 2° \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 45° \cdot \operatorname{ctg} 45° \cdot \operatorname{ctg} 44° \cdot \ldots \cdot \operatorname{ctg} 1°$; __________

в) $\sin^2 \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3}$; __________

г) $2 - \sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; __________

д) $\sqrt{3}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$; __________

е) $\dfrac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6}}{1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{6}}$. __________

Решение.

в) $\sin^2 \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$

18. Сравните числа:

а) $\sin \frac{\pi}{7} \ \ldots\ \sin^2 \frac{\pi}{7}$;

б) $\cos^2 \frac{\pi}{12} \ \ldots\ \cos \frac{\pi}{12}$;

в) $\cos \frac{\pi}{4} \ \ldots\ \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

г) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{13} \ \ldots\ \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{13}$;

д) $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} \ \ldots\ \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$;

е) $\operatorname{tg} 70° \ \ldots\ \operatorname{tg}^2 70°$.

Решение.

г) $0 < \operatorname{tg} \frac{\pi}{13} < 1$, поэтому $\operatorname{tg} \frac{\pi}{13} > \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{13}$.

19. Определите знак выражения:

а) $\sin 93° \cdot \cos 47°$; ________

б) $-\operatorname{tg} 182° \cdot \operatorname{ctg} 20°$; ________

в) $\sin 1 \cdot \cos 6$; ________

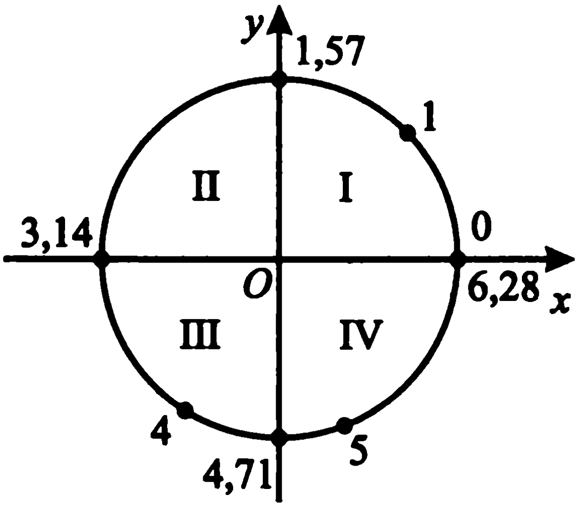
г) $-\cos \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{3\pi}{4}$; ________

д) $\operatorname{tg} 5 \cdot \sin 4 \cdot \cos 1$; ________

е) $\cos \frac{5\pi}{6} \cdot \operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \cdot \sin \frac{3\pi}{2}$. ________

Решение.

д) Воспользуемся тригонометрическим кругом.



$\operatorname{tg} 5 < 0$;
$\sin 4 < 0$;
$\cos 1 > 0$;
$\operatorname{tg} 5 \cdot \sin 4 \cdot \cos 1 > 0$.
Знак произведения: «+».

Зависимость между функциями одного и того же аргумента

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

$\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

$\operatorname{ctg} \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$.

$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$, $\alpha \neq \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \dfrac{1}{\sin^2 \alpha}$, $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$.

Упростите выражение:

20. а) $1 - \cos^2 \alpha$; ____________________

б) $\sin^2 \alpha - 1$; ____________________

в) $1 - \sin^2 \alpha$; ____________________

г) $\dfrac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$; ____________________

д) $\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}$; ______

е) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha$. ______

Решение.

д) $\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}=\dfrac{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sin\alpha.$

21. а) $\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha-2\cos\alpha$; ______

б) $\sin\alpha-\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$; ______

в) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$; ______

г) $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\sin^2\alpha$; ______

д) $\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}+\cos^2\alpha$; ______

е) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)$. ______

Решение.

д) $\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}+\cos^2\alpha=1:\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$

Формулы приведения

Если аргументом тригонометрической функции является любое выражение вида $\frac{\pi n}{2}\pm t$, где $n\in Z$, то с помощью формул приведения его можно привести к более простому виду, где у тригонометрической функции аргументом будет только t. Например,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t,\quad \cos(\pi+t)=-\cos t,\quad \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)=\operatorname{ctg}t.$$

Мнемоническое правило:

В правой части формулы ставится тот знак, который имеет левая часть при условии $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Если в левой части формулы угол равен $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ или $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, то синус заменяется на косинус, косинус — на синус, тангенс — на котангенс и котангенс — на тангенс. Если угол равен $\pi \pm \alpha$, то замену не производят.

22. Вычислите с помощью формул приведения синус, косинус, тангенс и котангенс следующих углов:

а) 120°; ______ г) 210°; ______
б) 150°; ______ д) 315°; ______
в) 225°; ______ е) $\frac{5\pi}{4}$. ______

Решение.

в) $\sin 225° = \sin(180° + 45°) = -\sin 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\cos 225° = \cos(180° + 45°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\operatorname{tg} 225° = \operatorname{tg}(180° + 45°) = \operatorname{tg} 45° = 1$;
$\operatorname{ctg} 225° = \operatorname{ctg}(180° + 45°) = \operatorname{ctg} 45° = 1$.

23. Упростите выражение:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; ______ г) $\sin(2\pi - \alpha)$; ______

б) $\cos(\pi - \alpha)$; ______ д) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$; ______

в) $\cos(\pi + \alpha)$; ______ е) $\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$. ______

Решение.

е) $\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha$.

Формулы сложения

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.

$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$.

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.$$

24. Найдите значение выражения:

а) $\sin 15^\circ\cos 30^\circ+\cos 15^\circ\sin 30^\circ$; ________________

б) $\sin 75^\circ\cos 15^\circ-\cos 75^\circ\sin 15^\circ$; ________________

в) $\cos 105^\circ\cos 15^\circ+\sin 105^\circ\sin 15^\circ$; ________________

г) $\cos 165^\circ\cos 15^\circ-\sin 165^\circ\sin 15^\circ$; ________________

д) $\dfrac{\operatorname{tg}30^\circ+\operatorname{tg}15^\circ}{1-\operatorname{tg}30^\circ\cdot\operatorname{tg}15^\circ}$; ________________

е) $\dfrac{\operatorname{tg}75^\circ-\operatorname{tg}30^\circ}{1+\operatorname{tg}75^\circ\cdot\operatorname{tg}30^\circ}$. ________________

Решение.

а) $\sin 15^\circ\cos 30^\circ+\cos 15^\circ\sin 30^\circ=\sin(15^\circ+30^\circ)=\sin 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

25. Упростите выражение:

а) $\sin 5\alpha\cos\alpha-\cos 5\alpha\sin\alpha$; ________________

б) $\sin 7\beta\sin\beta-\cos 7\beta\cos\beta$; ________________

в) $\dfrac{\operatorname{tg}5\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}5\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}$; ________________

г) $\dfrac{\operatorname{tg}5\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}5\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}$; ________________

д) $\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha$; ________________

е) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\alpha+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\alpha$. ________________

Решение.

е) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\alpha+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\alpha=-\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=0$.

Синус, косинус и тангенс двойного угла

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha.$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha};\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k;\quad \alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2},\ k,m\in Z.$$

26. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sin 124^\circ}{\cos 62^\circ}$; ________ г) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{10}}$; ________

б) $\cos 56^\circ + \sin^2 28^\circ$; ________ д) $\cos^2\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7}$; ________

в) $\operatorname{tg} 100^\circ(1-\operatorname{tg}^2 50^\circ)$; ________ е) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{9}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{18}\right)$. ________

Решение.

е) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{9}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{18}\right) = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{18}\cdot\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{18}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{18}} = 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{18}$.

27. Найдите значение выражения:

а) $2\sin 15^\circ\cos 15^\circ$; ________

б) $\cos^2 22{,}5^\circ - \sin^2 22{,}5^\circ$; ________

в) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$; ________

г) $2\sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8}$; ________

д) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$; ________

е) $\dfrac{2\operatorname{tg} 15^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 15^\circ}$. ________

Решение.

в) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

28. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sin\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$; ________ г) $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} - \operatorname{tg}\alpha$; ________

б) $\dfrac{\cos\alpha}{2\sin 2\alpha}$; ________ д) $\dfrac{\sin 4\alpha}{\sin 2\alpha}$; ________

в) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$; ________ е) $2\sin 15^\circ\cos 15^\circ + \cos^2 30^\circ$. ________

Решение.

е) $2\sin 15^\circ \cos 15^\circ + \cos^2 30^\circ = \sin 30^\circ + \cos^2 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$.

29. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

а) $2\sin^2\alpha + \cos 2\alpha$;

б) $3\sin^2 3\alpha + 3\cos^2 6\alpha$;

в) $\left(\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\right)^2$;

г) $\frac{1}{2}\sin^2 2\beta + \sin^2\beta + \cos^2\beta$;

д) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

е) $(\cos^2 7\alpha - \sin^2 7\alpha)^2$.

Решение.

б) $3\sin^2 3\alpha + 3\cos^2 6\alpha = 3\sin^2 3\alpha + 3\cos^2 3\alpha - 3\sin^2 3\alpha = 3\cos^2 3\alpha$; $0 \leqslant \cos^2 3\alpha \leqslant 1$; $0 \leqslant 3\cos^2 3\alpha \leqslant 3$. Наибольшее значение равно 3, наименьшее — 0.

Синус, косинус и тангенс половинного угла

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

$$\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, \quad \alpha \neq \pi + 2\pi n,\ n \in Z.$$

30. Упростите выражение:

а) $\sin^2 2\alpha + \frac{1}{2}\cos 4\alpha$; ________ г) $\cos^2 2\alpha - \frac{1}{2}\cos 4\alpha$; ________

б) $\sin^2 \alpha + \frac{1}{2}\cos 2\alpha$; ________ д) $1 - \cos 4\alpha$; ________

в) $\cos^2 \alpha - \frac{1}{2}\cos 2\alpha$; ________ е) $1 + \cos 6\alpha$. ________

Решение.

а) $\sin^2 2\alpha + \frac{1}{2}\cos 4\alpha = \frac{1-\cos 4\alpha}{2} + \frac{1}{2}\cos 4\alpha = \frac{1}{2}$.

31. Вычислите:

а) $\cos 15^\circ$; ________ г) $\cos 22^\circ 30'$; ________

б) $\sin 15^\circ$; ________ д) $\operatorname{tg} 22^\circ 30'$; ________

в) $\sin 22^\circ 30'$; ________ е) $\operatorname{tg} 15^\circ$. ________

Решение.

а) $\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

32. Упростите выражение:

а) $\cos 0^\circ - \cos 4\alpha$; ________ г) $\sin 90^\circ - \cos 6\alpha$; ________

б) $\cos 0^\circ + \cos 2\alpha$; ________ д) $\sin 90^\circ + \cos 160^\circ$; ________

в) $1 - \sin 2\alpha$; ________ е) $\cos 0^\circ + \cos 140^\circ$. ________

Решение.

е) $\cos 0^\circ + \cos 140^\circ = 1 + \cos 140^\circ = 2\cos^2 70^\circ$.

Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n,\quad \beta \neq \frac{\pi}{2}+\pi k,\quad n, k \in Z.$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n,\quad \beta \neq \frac{\pi}{2}+\pi k,\quad n, k \in Z.$$

33. Выберите верные равенства:

а) $\cos 45^\circ + \cos 75^\circ = \cos 15^\circ$;
б) $\cos 27^\circ - \cos 33^\circ = \sin 3^\circ$;
в) $\sin 96^\circ - \sin 16^\circ = \sqrt{2}\cos 51^\circ$;
г) $\sin 21^\circ + \sin 39^\circ = \cos 9^\circ$;
д) $\sin 86^\circ - \sin 26^\circ = \cos 56^\circ$;
е) $\cos 14^\circ - \sin 16^\circ = \cos 46^\circ$.

Решение.

е) $\cos 14^\circ - \sin 16^\circ = \sin(90^\circ - 14^\circ) - \sin 16^\circ = \sin 76^\circ - \sin 16^\circ = 2\sin\frac{76^\circ - 16^\circ}{2}\cos\frac{76^\circ + 16^\circ}{2} = 2\sin 30^\circ \cos 46^\circ = \cos 46^\circ$. Данное равенство верно.

34. Представьте выражение в виде произведения:

а) $\cos 2\alpha - \cos 2\beta$; ____________________
б) $\cos 4\alpha + \cos 4\beta$; ____________________
в) $\sin 3\alpha + \sin 5\alpha$; ____________________
г) $\sin 4\alpha - \sin 6\alpha$; ____________________
д) $\sin 7\beta + \sin 11\beta$; ____________________
е) $\operatorname{tg} 7\beta + \operatorname{tg}\beta$. ____________________

Решение.

в) $\sin 3\alpha + \sin 5\alpha = 2\sin 4\alpha\cos\alpha$.

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму или разность

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\big).$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big).$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\big).$$

35. Преобразуйте произведение тригонометрических функций в сумму или разность:

а) $2\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ$; __________

б) $2\sin 5^\circ \cdot \cos 3^\circ$; __________

в) $\cos 55^\circ \cdot \cos 5^\circ$; __________

г) $\sin \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{14}$; __________

д) $\sin 15^\circ \cdot \cos 75^\circ$; __________

е) $\sin 34^\circ \cdot \sin 11^\circ$. __________

Решение.

а) $2\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2}\left(\cos(20^\circ + 40^\circ) + \cos(40^\circ - 20^\circ)\right) =$

$= \cos 60^\circ + \cos 20^\circ = \frac{1}{2} + \cos 20^\circ$.

Выражение синуса и косинуса через тангенс половинного аргумента

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq \pi + 2\pi k, \quad k \in Z.$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq \pi + 2\pi k, \quad k \in Z.$$

36. Найдите значение выражения:

а) $\sin 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$; ______

б) $\cos 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$; ______

в) $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}$; ______

г) $\sin 4\alpha$, если $\operatorname{tg} 2\alpha = 1$; ______

д) $\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} = -1$; ______

е) $\operatorname{tg} 10\alpha$, если $\operatorname{tg} 5\alpha = 3$. ______

Решение.

в) $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{2\cdot\frac{1}{4}}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \dfrac{1\cdot 16}{2\cdot 15} = \dfrac{8}{15}.$

37. Найдите значение выражения:

а) $\sin 2\beta$, если $\operatorname{ctg}\beta = 3$; ______________________

б) $\cos 2\beta$, если $\operatorname{ctg}\beta = 3$; ______________________

в) $\operatorname{tg} 2\beta$, если $\operatorname{ctg}\beta = 3$; ______________________

г) $\sin 3\beta$, если $\operatorname{ctg}\frac{3}{2}\beta = 1$; ______________________

д) $\cos 5\beta$, если $\operatorname{ctg} 2{,}5\beta = 2$; ______________________

е) $\operatorname{tg} 4\beta$, если $\operatorname{ctg} 2\beta = 0{,}5$. ______________________

Решение.

е) $\operatorname{tg} 4\beta = \dfrac{2\operatorname{tg} 2\beta}{1-\operatorname{tg}^2 2\beta}$. Учитывая, что $\operatorname{tg} 2\beta = \dfrac{1}{\operatorname{ctg} 2\beta}$, получим $\operatorname{tg} 2\beta = \dfrac{1}{0{,}5} = 2$. $\operatorname{tg} 4\beta = \dfrac{2\cdot 2}{1-2^2} = \dfrac{4}{-3} = -\dfrac{4}{3}$.

Обратные тригонометрические функции

$\arcsin b = \alpha$

1) $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$; 2) $\sin\alpha = b$, $b \in [-1; 1]$.

$\arccos b = \alpha$

1) $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$; 2) $\cos\alpha = b$, $b \in [-1; 1]$.

$\operatorname{arctg} b = \alpha$

1) $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$; 2) $\operatorname{tg}\alpha = b$, $b \in R$.

$\operatorname{arcctg} b = \alpha$

1) $0 < \alpha < \pi$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha = b$, $b \in R$.

$\arcsin(-b) = -\arcsin b$.

$\arccos(-b) = \pi - \arccos b$.

$\operatorname{arctg}(-b) = -\operatorname{arctg} b$.

$\operatorname{arcctg}(-b) = \pi - \operatorname{arcctg} b$.

38. Вычислите:

а) $\arcsin\frac{1}{2}$; ____________ г) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; ____________

б) $\arccos\frac{1}{2}$; ____________ д) $\mathrm{arctg}(-\sqrt{3})$; ____________

в) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; ____________ е) $\arcsin 1+\arccos(-1)$. ____________

Решение.

г) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$.

39. Сравните выражения:

а) $\arcsin\frac{1}{2}$ ... $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$ ... $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\arcsin\frac{1}{2}$ ... $\arcsin\frac{1}{3}$; д) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ ... $\arccos\frac{1}{2}$;

в) $\arcsin\frac{2}{3}$ ... $\arcsin\frac{1}{5}$; е) $\arccos\frac{2}{3}$ ... $\arccos\frac{1}{3}$.

Решение.

а) $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$, $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$. Так как $\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{4}$, то $\arcsin\frac{1}{2}<\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$.

40. Найдите значение выражения:

а) $\sin(\arcsin 1)$; ____________ г) $\cos(\arccos 1)$; ____________

б) $\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$; ____________ д) $\cos\left(\pi-\arccos\frac{1}{2}\right)$; ____________

в) $\cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$; ____________ е) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. ____________

Решение.

г) $\cos(\arccos 1)=1$.

41. Найдите область определения выражения:

а) $\arcsin 2x$; ____________ г) $\arccos(x-4)$; ____________

б) $\arccos\frac{x}{2}$; ____________ д) $\mathrm{arctg}\frac{1}{x}$; ____________

в) $\arcsin(x+2)$; ____________ е) $\mathrm{arcctg}\sqrt{x}$. ____________

Решение.

а) $-1\leqslant 2x\leqslant 1$; $-0{,}5\leqslant x\leqslant 0{,}5$.

Решение тригонометрических уравнений

$\sin x = a,\ \ |a| \leqslant 1$
$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ \ n \in Z.$

$\sin x = -a,\ \ |a| \leqslant 1$
$x = (-1)^{n+1} \arcsin a + \pi n,\ \ n \in Z.$

Частные случаи:
$\sin x = 0,\ \ x = \pi n,\ \ n \in Z$

$\sin x = 1,\ \ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ n \in Z$

$\sin x = -1,\ \ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ n \in Z.$

$\cos x = a,\ \ |a| \leqslant 1$
$x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ \ n \in Z.$

Частные случаи:
$\cos x = 0,\ \ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \ n \in Z$
$\cos x = 1,\ \ x = 2\pi n,\ \ n \in Z$
$\cos x = -1,\ \ x = \pi + 2\pi n,\ \ n \in Z.$

$\operatorname{tg} x = a,\ \ a \in R$
$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ \ n \in Z.$

$\operatorname{ctg} x = a, a \in R$
$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ \ n \in Z.$

42. Решите уравнение:

а) $\sin \frac{x}{5} = 0$; __________ г) $\operatorname{tg}(-x) = -1$; __________
б) $\cos 3x = 0$; __________ д) $\sin(x - 4) = 0$; __________
в) $\frac{1}{7}\sin(-x) = 0$; __________ е) $\cos(8\pi + x) = 1$. __________

Решение.
в) $-\frac{1}{7}\sin x = 0;\ \ \sin x = 0,\ \ x = \pi n,\ n \in Z.$

43. Решите уравнение $\sin x = a$:

а) $\sin x = \frac{1}{2}$; ______________ г) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; ______________

б) $\sin x = -\frac{1}{2}$; ______________ д) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; ______________

в) $\sin x = 3$; ______________ е) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. ______________

Решение.

б) $x = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{2} + \pi n$, $n \in Z$, $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

44. Решите уравнение $\cos x = a$:

а) $\cos x = \frac{1}{2}$; ______________ г) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; ______________

б) $\cos x = 2$; ______________ д) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; ______________

в) $\cos x = -\frac{1}{2}$; ______________ е) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. ______________

Решение.

е) $x = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k$, $k \in Z$; $x = \pm\left(\pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k$, $k \in Z$; $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$.

45. Решите уравнение $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$:

а) $\operatorname{tg} x = 1$; ______________ г) $\operatorname{ctg} x = 1$; ______________

б) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; ______________ д) $\operatorname{ctg} x = -1$; ______________

в) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; ______________ е) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$. ______________

Решение.

е) $x = \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) + \pi n$, $n \in Z$; $x = \pi - \operatorname{arcctg} \sqrt{3} + \pi n$, $n \in Z$; $x = \frac{5\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

46. Найдите все корни уравнения:

а) $\sin 2x = \frac{1}{2}$; ______________ г) $\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; ______________

б) $\cos \frac{1}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; ______________ д) $\operatorname{tg} 2x = 1$; ______________

в) $\sin \frac{x}{4} = -\frac{1}{2}$; ______________ е) $\operatorname{tg} 4x = -1$. ______________

Решение.

е) $4x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$; $\quad x = -\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4},\ n \in Z$.

Решите уравнение:

47. а) $\sin x \cdot (1 - \sin x) = 0$; ______________

б) $(\cos x + 1) \cdot (\sin x - 5) = 0$; ______________

в) $\operatorname{tg} x \cdot (\operatorname{tg} x + 1) = 0$; ______________

г) $(\operatorname{tg} x + 3) \cdot (\operatorname{ctg} x - 1) = 0$; ______________

д) $(\cos x + 4) \cdot (\cos x - 1) = 0$; ______________

е) $(\sin x + 2) \cdot (\sin x + 1) = 0$. ______________

Решение.

б) 1) $\cos x + 1 = 0$; $\cos x = -1$; $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$;

2) $\sin x - 5 = 0$; $\sin x = 5$; корней нет, так как $|\sin x| \leqslant 1$.

48. а) $\arccos(x - 3) = \frac{\pi}{3}$; __________ г) $\arccos \frac{x-1}{2} = \frac{2\pi}{3}$; __________

б) $\arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$; __________ д) $\arcsin \frac{x+2}{4} = -\frac{\pi}{6}$; __________

в) $\operatorname{arctg}(2x + 1) = \frac{\pi}{4}$; __________ е) $\operatorname{arcctg} \sqrt{x - 1} = \frac{\pi}{6}$. __________

Решение.

д) $\frac{x+2}{4} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; $\frac{x+2}{4} = -\frac{1}{2}$; $x = -4$.

10. Зак. № 265

Глава XV

Производная

Числовые последовательности

Числовой последовательностью называют функцию вида $y = f(x)$, где $x \in N$.

Числовую последовательность обозначают (y_n) или $y_1, y_2, ..., y_n, ...$

Говорят, что последовательность задана аналитически, если указана формула её n-го члена.

Говорят, что последовательность задана рекуррентно, если указан способ вычисления её n-го члена через предыдущие члены.

1. Отметьте функции, которые являются числовыми последовательностями:

а) $y = x^2$, $x \in R$; в) $y = \dfrac{1}{x}$, $x \in N$; д) $y = 3x$, $x \in Q$;

б) $y = e^x$, $x \in Z$; г) $y = x$, $x \in N$; е) $y = \sin x$, $x \in N$.

Решение.

а) Нет, так как функция $y = x^2$ определена на множестве всех действительных чисел.

2. Последовательность (y_n) задана формулой $y_n = n^2+3$. Найдите:

а) y_3; ____________ в) y_{20}; ____________ д) y_1; ____________

б) y_{10}; ____________ г) y_{25}; ____________ е) y_6. ____________

Решение.

е) $y_6 = 6^2 + 3 = 39$.

3. Для последовательностей, заданных рекуррентным способом, найдите y_4:

а) $y_1 = 1, y_{n+1} = y_n^2 + y_n$; ______ г) $y_1 = 1, y_{n+1} = \cos(\pi y_n)$; ______
б) $y_1 = 0, y_{n+1} = 2^{y_n}$; ______ д) $y_1 = 1, y_{n+1} = y_n + n$; ______
в) $y_1 = 256, y_{n+1} = \sqrt{y_n}$; ______ е) $y_1 = 5, y_{n+1} = (-1)^n y_n$. ______

Решение.

а) $y_2 = 1^2 + 1 = 2, \quad y_3 = 2^2 + 2 = 6, \quad y_4 = 6^2 + 6 = 42.$

4. Найдите количество членов последовательности (y_n), лежащих в интервале (0; 10), если:

а) $y_n = n^3$; ______ г) $y_n = n + 2$; ______
б) $y_n = \sin \pi n$; ______ д) $y_n = 4n + \sin n$; ______
в) $y_n = 3^{n-2}$; ______ е) $y_n = \sqrt{n}$. ______

Решение.

д) Так как $|\sin n| \leqslant 1$, то:
$y_1 = 4 + \sin 1, \quad 3 \leqslant y_1 \leqslant 5; \quad y_2 = 8 + \sin 2, \quad 7 \leqslant y_2 \leqslant 9;$
$y_k = 4k + \sin k, \quad 4k - 1 \leqslant y_k \leqslant 4k + 1, \quad 4k - 1 > 10$ при $k \geqslant 3$.
На интервале (0; 10) лежат 2 члена данной последовательности.

5. Перечислите номера членов последовательности (y_n) лежащих между:

а) y_7 и y_{11}; ______ г) y_{3n-2} и y_{3n+1}; ______
б) y_{100} и y_{105}; ______ д) $y_{(n-2)(n+2)}$ и y_{n^2}; ______
в) y_{n-2} и y_{n+2}; ______ е) y_{7n-3} и y_{7n-1}. ______

Решение.

д) Так как $(n-2)(n+2) = n^2 - 4$, то между числами $n^2 - 4$ и n^2 лежат числа $n^2 - 3$, $n^2 - 2$, $n^2 - 1$. Искомые члены — это y_{n^2-3}, y_{n^2-2}, y_{n^2-1}.

6. Укажите количество членов последовательности (y_n), оканчивающихся на 0:

а) $y_1 = 3, \ y_{n+1} = y_n + 20$; ____ г) $y_1 = 6, \ y_{n+1} = y_n + 4$; ____
б) $y_1 = 10, \ y_{n+1} = 2^{y_n}$; ____ д) $y_1 = 7, \ y_{n+1} = y_n^n$; ____
в) $y_1 = 30, \ y_{n+1} = 2y_n + 1$; ____ е) $y_1 = 100, \ y_{n+1} = 5y_n + 2$. ____

Решение.

б) $y_1 = 10$ оканчивается на 0, остальные члены последовательности являются степенями двойки, поэтому не делятся на 5, следовательно, не могут оканчиваться на 0.

7. По первым семи членам последовательности составьте одну из возможных формул n-го члена:

а) 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, ... ________

б) −4, −7, −10, −13, −16, −19, −22, ... ________

в) 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ... ________

г) 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ... ________

д) $\frac{1}{2\cdot 5}, \frac{1}{4\cdot 7}, \frac{1}{6\cdot 9}, \frac{1}{8\cdot 11}, \frac{1}{10\cdot 13}, \frac{1}{12\cdot 15}, \frac{1}{14\cdot 17}, \ldots$ ________

е) −1, 2, −3, 4, −5, 6, −7, ... ________

Решение.

г) Замечаем, что первый член равен 2, а каждый следующий вдвое больше предыдущего. Поэтому $y_n = 2^n$.

Последовательность y_n ограничена сверху, если существует число M, такое, что для всех членов этой последовательности выполняется неравенство $y_n \leqslant M$.

Последовательность y_n ограничена снизу, если существует число M, такое, что для всех членов этой последовательности выполняется неравенство $y_n \geqslant M$.

Последовательность y_n ограничена, если она одновременно ограничена снизу и сверху.

8. Выберите последовательности (y_n), ограниченные сверху:

а) $y_n = 2n+3$; в) $y_n = (-1)^n \cdot 3n$; д) $y_n = 2^{-n}$;

б) $y_n = 5\sin n$; г) $y_n = -2^n$; е) $y_n = n^2 - 100n$.

Решение.

д) $y_n = 2^{-n} = \frac{1}{2^n} \leqslant 1$. Последовательность ограничена сверху.

9. Выберите последовательности (y_n), ограниченные снизу:

а) $y_n = 3n+4$; в) $y_n = \sqrt{n}+3$; д) $y_n = |1-n|$;

б) $y_n = 6\cos n$; г) $y_n = -3^n$; е) $y_n = -\frac{n+1}{n}$.

Решение.

д) $y_n = |1-n| \geqslant 0$. Последовательность ограничена снизу.

10. Определите, является ли последовательность y_n ограниченной:

а) $y_n = 3 - \frac{5}{n}$; в) $y_n = 3n^2 - 8$; д) $y_n = \sqrt[3]{n}$;

б) $y_n = (-1)^n \sin n$; г) $y_n = 5^{-n+1}$; е) $y_n = \frac{2n}{n+8}$.

Решение.

г) $5^{-n+1} = \frac{1}{5^{n-1}} \leqslant 1$, $5^{-n+1} \geqslant 0$. Последовательность ограничена.

Последовательность (y_n) называется возрастающей, если $y_i < y_i + 1$ для всех $i \in N$.

Последовательность (y_n) называется убывающей, если $y_i > y_i + 1$ для всех $i \in N$.

Является ли последовательность y_n убывающей? Возрастающей?

11. а) $y_n = 5n - 8$; ________ г) $y_n = -8^{-n}$; ________

б) $y_n = 15 - 3n^2$; ________ д) $y_n = \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right)$; ________

в) $y_n = \frac{3}{n}$; ________ е) $y_n = \sin\frac{\pi}{2n}$. ________

Решение.

г) $y_n = -8^{-n} = -\left(\frac{1}{8}\right)^n$. Функция $\left(\frac{1}{8}\right)^n$ убывает на $n \in N$, поэтому $y_n = -\left(\frac{1}{8}\right)^n$ возрастает.

12. а) $y_n = \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$; ________ г) $y_n = \frac{2n+1}{2n+3}$; ________

б) $y_n = \frac{n}{n+1}$; ________ д) $y_n = 3^{-2n}$; ________

в) $y_n = \sqrt[5]{(-1)^n n}$; ________ е) $y_n = \cos\frac{\pi}{n}$. ________

Решение.

б) Так как $y_{k+1} - y_k = \frac{k+1}{k+2} - \frac{k}{k+1} = \frac{(k+1)^2 - k(k+2)}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$, то $y_{k+1} > y_k$ для любого $k \in N$. Следовательно, y_n возрастает.

Пределы последовательностей и функций

Окрестностью точки a радиуса $r > 0$ называется интервал $(a-r; a+r)$.

13. Принадлежит ли точка x окрестности точки a радиуса r, если:

а) $x = 4,\ a = 6,\ r = 1$;
б) $x = 9{,}96,\ a = 10,\ r = 0{,}3$;
в) $x = -5{,}3,\ a = -5{,}5,\ r = 0{,}1$;
г) $x = -10,\ a = -9{,}5,\ r = 0{,}6$;
д) $x = 25{,}2,\ a = 25{,}5,\ r = 0{,}2$;
е) $x = 18{,}3,\ a = 19{,}1,\ r = 0{,}6$?

Решение.

г) $a - r = -9{,}5 - 0{,}6 = -10{,}1$; $a + r = -9{,}5 + 0{,}6 = -8{,}9$,
$-10 \in (-10{,}1; -8{,}9)$.

Говорят, что последовательность сходится, если у неё есть предел. Фразу «предел последовательности (y_n) равен a» записывают так: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0.$

$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, если $|q| < 1$.

$\lim\limits_{n\to\infty} C = C.$

$\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n.$

$\lim\limits_{n\to\infty} kx_n = k \lim\limits_{n\to\infty} x_n.$

$\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n.$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$ при условии $y_n \neq 0$ для всех n.

14. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$:

а) $x_n = \dfrac{4}{n}$; ________ г) $x_n = \dfrac{2n^2+1}{3n^2-3n+1}$; ________

б) $x_n = \dfrac{7}{2n+3}$; ________ д) $x_n = \dfrac{2n^2+7n+1}{-n^2+8n+2}$; ________

в) $x_n = \dfrac{3n}{10n-3}$; ________ е) $x_n = \dfrac{n^2}{3n^2+1}$. ________

Решение.

д) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+7n+1}{-n^2+8n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{7}{n}+\frac{1}{n^2}}{-1+\frac{8}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{7}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-1+\frac{8}{n}+\frac{2}{n^2}\right)} =$$

$$= \frac{2}{-1} = -2.$$

Если $|q| < 1$, то последовательность q^n сходится.

Если $|q| > 1$, то последовательность q^n расходится.

15. Определите, сходится ли последовательность z_n. Если z_n сходится, вычислите её предел:

а) $z_n = \left(\dfrac{16}{15}\right)^n$; ________ г) $z_n = 6^{2n+1}$; ________

б) $z_n = \left(-\dfrac{7}{15}\right)^n$; ________ д) $z_n = 7^{-2n+3}$; ________

в) $z_n = 5^{-n}$; ________ е) $z_n = 9^{0,5n-5}$. ________

Решение.

д) $z_n = 7^{-2n+3} = 7^3 \cdot 7^{-2n} = 7^3 \cdot \left(\dfrac{1}{49}\right)^n$, $q = \dfrac{1}{49} < 1$. Последовательность сходится, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

16. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$:

а) $y_n = \dfrac{(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)(n+5)}$; ________

б) $y_n = \dfrac{2n+1}{7n-8} + \dfrac{15}{14^n}$; ________

в) $y_n = \dfrac{15n-1}{n\sqrt{n}}$; ________

г) $y_n = \dfrac{(2n-3)(3n-2)}{4n^2-7n+10}$; ________________

д) $y_n = \dfrac{n^3+3n^2-5n+1}{(n+3)(3n-5)(7n+9)} + \dfrac{8}{9^n}$; ________________

е) $y_n = \dfrac{4^n+5^n+6^n}{7^n}$. ________________

Решение.

д) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+3n^2-5n+1}{(n+3)(3n-5)(7n+9)} + \frac{8}{9^n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{\left(1+\frac{3}{n}\right)\left(3-\frac{5}{n}\right)\left(7+\frac{9}{n}\right)} + 8\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{1}{1\cdot 3\cdot 7} + 8\cdot 0 = \frac{1}{21}.$$

Запись $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ означает, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$.

Для пределов функций на бесконечности справедливы те же соотношения, что и для пределов последовательностей.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 0.$

Вычислите предел функции на бесконечности:

17. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x+1}$; ________________

б) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(8+\dfrac{7}{x^5}\right)\left(9+\dfrac{10}{x^6}\right)$; ________________

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^3+1}{2x^3+7x-8}$; ________________

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-3}{2x^3-1}$; ________________

д) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{x^2+1} + \dfrac{x^2}{x^3+1} + \dfrac{x^4}{x^4+1}\right)$; ________________

е) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^5}{1-2x^5} + \dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}\right)$. ________________

Решение.

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3}{2x^3-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^3}}{2-\dfrac{1}{x^3}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}-3\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3}}{2-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3}}=$

$=\dfrac{0-3\cdot 0}{2-0}=0.$

18. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x|x|+1}{x^2-1}$; ____________________

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-3x-4}{x^3}$; ____________________

в) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2|x|-5}{x+3}$; ____________________

г) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|3x+5|}{|-3x+1|+6}$; ____________________

д) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^{20}+3x^{30}+4x^{40}}{4x^{10}+3x^{30}+x^{40}}$; ____________________

е) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x^{40}+3)(3x^{30}-2)}{x^{120}+3x^{10}-1}$. ____________________

Решение.

г) Рассматривая функцию $f(x)=\dfrac{|3x+5|}{|-3x+1|+6}$ на промежутке $(-\infty;-2]$, получаем: $3x+5<0$, $-3x+1>0$, значит,

$f(x)=\dfrac{-3x-5}{-3x+1+6}=\dfrac{-3x-5}{-3x+7}$ на $(-\infty;-2]$ и

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x-5}{-3x+7}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3-\dfrac{5}{x}}{-3+\dfrac{7}{x}}=\frac{-3-0}{-3+0}=1.$$

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=a$, то $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

Вычислите предел функции в точке:

19. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2+3}{x^3-2}$; ________ г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3^x+4^x}{5^x+6^x}$; ________

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{x-2}$; ________ д) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{2x^3+4x^2+3x+8}{x-9}$; ________

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$; ________ е) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sin\frac{\pi x}{2}}{x^3+3}$. ________

Решение.

в) Так как функция $f(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$ определена и непрерывна в точке $x=0$, то $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=\dfrac{\sin 0}{2+\cos 0}=\dfrac{0}{2+1}=0$.

20. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-2x^2+x}{3x^2+5x}$; ____ г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{x-3}$; ____

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{x-1}$; ____ д) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+4x+4}{x+2}$; ____

в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(3x+2)(x+1)^2}{5x^2-5}$; ____ е) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-5)(x+1)(x+2)}{(x+6)(x-5)}$. ____

Решение.

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3(x+1)(x-1)}{x-1}=3(1+1)=6$.

21. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin x}$; ________ г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4+x^2}{5+6\sin x}$; ________

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{3x+\sin x}$; ________ д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{5x}$; ________

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2+\sin x}$; ________ е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{7x+3}$. ________

Решение.

б) $$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{3x+\sin x}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+\sin x}{x}}=\frac{1}{3+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{3+1}=0{,}25.$$

Понятие и вычисление производной

Приращением функции $f(x)$ при переходе от точки x_0 к x_1 называется разность $f(x_1) - f(x_0)$.

Производной функции $f(x)$ в точке x называется предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$.

Говорят, что функция дифференцируема в некоторой точке, если в этой точке у неё есть производная.

22. Найдите приращение функции $f(x)$ при переходе от точки x_0 к x_1, если:

а) $f(x) = x^2,\ x_0 = 3,\ x_1 = 4;$ ________________

б) $f(x) = \cos x,\ x_0 = \dfrac{7\pi}{8},\ x_1 = \dfrac{9\pi}{8};$ ________________

в) $f(x) = |x^3 + 1|,\ x_0 = -1,\ x_1 = 0;$ ________________

г) $f(x) = \dfrac{1}{x},\ x_0 = 3,\ x_1 = 2;$ ________________

д) $f(x) = x^4,\ x_0 = 0{,}1,\ x_1 = -0{,}1;$ ________________

е) $f(x) = 3^x,\ x_0 = -1,\ x_1 = 0.$ ________________

Решение.

д) $\Delta f = f(x_1) - f(x_0) = (-0{,}1^4) - 0{,}1^4 = 0{,}1^4 - 0{,}1^4 = 0.$

$C' = 0.$

$x' = 1.$

$\big(kf(x)\big)' = kf'(x).$

$\big(f(x) + g(x)\big)' = f'(x) + g'(x).$

$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$

$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$

$(x^n)' = nx^{n-1}$, где $n \neq 0$.

$(\sin x)' = \cos x.$

$(\cos x)' = -\sin x.$

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$

$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

$\big(f(kx+m)\big)' = kf'(kx+m).$

Найдите производные функций:

23. а) $y = 10x + 19$; ________ г) $y = x^2 + x$; ________

б) $y = x^2 - 8$; ________ д) $y = -x^3$; ________

в) $y = -\dfrac{7}{x}$; ________ е) $y = 3x + \dfrac{4}{x}$. ________

Решение.

в) $\left(-\dfrac{7}{x}\right)' = -7 \cdot \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -7 \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{7}{x^2}.$

24. а) $y = \sin x + \cos x$; ________ г) $y = 2\sqrt{x} - 3\cos x$; ________

б) $y = \sqrt{x} + x + 1$; ________ д) $y = 25 - 9\sqrt{x}$; ________

в) $y = 4\sqrt{x} + 3$; ________ е) $y = 3\sin x - 8\cos x + 3$. ________

Решение.

г) $(2\sqrt{x} - 3\cos x)' = 2(\sqrt{x})' - 3(\cos x)' = \dfrac{2}{2\sqrt{x}} - 3 \cdot (-\sin x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 3\sin x.$

25. а) $y = 2x\sin x$; ________ г) $y = (5x-9)(3x+1)$; ________

б) $y = x\sqrt{x}$; ________ д) $y = (5x+4)\cos x$; ________

в) $y = (7x-8)\sqrt{x}$; ________ е) $y = (2x+1)\sqrt{x}\cos x$. ________

Решение.

а) $(2x\sin x)' = (2x)'\sin x + 2x(\sin x)' = 2\sin x + 2x\cos x.$

26. а) $y = \dfrac{\sin x}{x}$; ________ г) $y = \dfrac{\cos\frac{\pi}{4}}{x}$; ________

б) $y = \dfrac{x^2+3}{\cos x}$; ________ д) $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$; ________

в) $y = \dfrac{x}{\sin\frac{\pi}{6}}$; ________ е) $y = \dfrac{2x^4-1}{x}$. ________

Решение.

д) $\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}\right)' = \dfrac{(x^3)'(x^2+1)-(x^2+1)'x^3}{(x^2+1)^2} = \dfrac{3x^2(x^2+1)-2x\cdot x^3}{(x^2+1)^2} =$

$= \dfrac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}.$

27. а) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$; __________ г) $y = x \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}$; __________

б) $y = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$; __________ д) $y = \operatorname{tg}^2 x \operatorname{ctg} x$; __________

в) $y = \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$; __________ е) $y = \dfrac{\sin x}{\cos x} + x^2$. __________

Решение.

б) $\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)' = (\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

28. а) $y = \cos(10x+3)$; __________ г) $y = \operatorname{tg} 8x + \operatorname{ctg} \frac{8\pi}{15}$; __________

б) $y = \operatorname{tg} 4x$; __________ д) $y = (5x+3)^5$; __________

в) $y = \dfrac{\sin 3x}{\cos 4\pi}$; __________ е) $y = (8x+7)^6 \sin \frac{5\pi}{6}$. __________

Решение.

в) $\left(\dfrac{\sin 3x}{\cos 4\pi}\right)' = (\sin 3x)' = 3\cos 3x.$

29. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$, если:

а) $f(x) = x^2 + 3x - 5,\ x_0 = 7$; ____________________

б) $f(x) = \sin x \cos x,\ x_0 = \frac{\pi}{8}$; ____________________

в) $f(x) = \operatorname{tg} 3x,\ x_0 = \frac{\pi}{18}$; ____________________

г) $f(x) = \dfrac{x}{x+1},\ x_0 = 2$; ____________________

д) $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{5}),\ x_0 = \frac{2\pi}{5}$; ____________________

е) $f(x) = \dfrac{2\cos x}{\sin x},\ x_0 = \frac{2\pi}{3}$. ____________________

Решение.

г) $f'(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$; $f'(2) = \frac{1}{9}$.

Уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке $(a; f(a))$ выглядит так: $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.

30. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

а) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 3x + 1$, $x_0 = 10$; ____________

б) $f(x) = (2x-3)^6$, $x_0 = 2$; ____________

в) $f(x) = \operatorname{tg}\Big((2x+1)\pi\Big)\cos\Big((2x+1)\pi\Big)$, $x_0 = 0$; ____________

г) $f(x) = (8-x)^4$, $x_0 = 6$; ____________

д) $f(x) = \operatorname{ctg} 5x$, $x_0 = \frac{\pi}{20}$; ____________

е) $f(x) = \frac{2x+3}{x}$, $x_0 = 4$. ____________

Решение.

б) $f'(k) = \Big((2x-3)^6\Big)' = 12(2x-3)^5$; $f'(2) = 12$.

31. Найдите тангенс угла между касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке $x = x_0$ и положительным направлением оси абсцисс, если:

а) $g(x) = \cos\frac{x}{2}$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$; ____________

б) $g(x) = \left(\frac{x}{5} + 8\right)^4$, $x_0 = 10$; ____________

в) $g(x) = \sqrt{\frac{x}{3} - 5}$, $x_0 = 21$; ____________

г) $g(x) = \sqrt{10 - \frac{x}{4}}$, $x_0 = 12$; ____________

д) $g(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{8}\right)$, $x_0 = \frac{3\pi}{8}$; ____________

е) $g(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} + 1\right)$, $x_0 = \pi - 2$. ____________

Решение.

а) $g'(x) = \left(\cos\frac{x}{2}\right)' = -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$; $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

32. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$:

а) $f(x) = x^5$, $x_0 = 2$; ____________

б) $f(x) = \operatorname{tg} x + 1$, $x_0 = 0$; ____________

в) $f(x) = (x+3)^2$, $x_0 = -1$; ____________

г) $f(x) = \sin\frac{x}{3}$, $x_0 = 6\pi$; ____________

д) $f(x) = (5-x)^3$, $x_0 = 3$; ____________

е) $g(x) = \cos 4x$, $x_0 = 0$. ____________

Решение.

в) $f'(x) = 2(x+3)$; уравнение касательной $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = (-1+3)^2 + 2(-1+3)(x+1) = 4 + 4(x+1) = 4x + 8$.

33. Найдите все значения x, при которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = g(x)$, если:

а) $f(x) = x^2 + 5$, $g(x) = 8$; ____________

б) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 1$, $g(x) = 4x - 8$; ____________

в) $f(x) = \sin x$, $g(x) = -x - 3$; ____________

г) $f(x) = (2x+1)^3$, $g(x) = 6x - 9$; ____________

д) $f(x) = 2\operatorname{tg} x$, $g(x) = 2x - 3$; ____________

е) $f(x) = \sqrt{5-x}$, $g(x) = -2x + \frac{1}{2}$. ____________

Решение.

г) Для параллельности необходимо совпадение угловых коэффициентов прямых, поэтому $f'(x) = 6$, $6(2x+1)^2 = 6$, $2x + 1 = \pm 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = -1$.

34. Решите уравнение $f(x) = f'(x)$:

а) $f(x) = x + 2$; ____________ г) $f(x) = \sqrt{x}$; ____________

б) $f(x) = 3x^3$; ____________ д) $f(x) = (x+1)^2$; ____________

в) $f(x) = 2\sin x$; ____________ е) $f(x) = \sqrt{1-x}$. ____________

Решение.

б) $f'(x) = (3x^3)' = 9x^2$; $3x^3 = 9x^2$; $x^3 - 3x^2 = 0$; $x^2(x-3) = 0$; $x_1 = 0, x_2 = 3$.

35. Найдите промежутки непрерывности функций:

а) $f(x) = \sqrt{x^2}$; ____________ г) $f(x) = \dfrac{9x+1}{x^2+8}$; ____________

б) $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$; ____________ д) $f(x) = \dfrac{5x+1}{\sin x}$; ____________

в) $f(x) = \dfrac{8x}{16-x^2}$; ____________ е) $f(x) = \sqrt{1-x}$. ____________

Решение.

в) Функция $f(x)$ является отношением двух многочленов, поэтому непрерывна на своей области определения. $f(x)$ определена при $16 - x^2 \neq 0$, то есть $x \neq \pm 4$.

36. Найдите все точки, в которых функция $f(x)$ определена, но не дифференцируема:

а) $f(x) = |x - 6|$; ____________

б) $f(x) = \sqrt{x}$; ____________

в) $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{если } x < 1, \\ 2x+5, & \text{если } x \geqslant 1; \end{cases}$ ____________

г) $f(x) = \begin{cases} 3-x, & \text{если } x < 5, \\ 3-x^2, & \text{если } x \geqslant 5; \end{cases}$ ____________

д) $f(x) = \sqrt{x^2}$; ____________

е) $f(x) = |x|^4$. ____________

Решение.

в) $f(x)$ разрывна в точке $x = 1$, поэтому не дифференцируема в этой точке.

37. Какой угол (тупой, острый или прямой) образует с положительным направлением оси абсцисс касательная к графику функции $f(x)$ в точке $x = x_0$:

а) $f(x) = x^3 + 8,\ x_0 = 10$; ________ г) $f(x) = \dfrac{1}{x+1},\ x_0 = 8$; ________

б) $f(x) = \sin x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{4}$; ________ д) $f(x) = \operatorname{tg} x,\ x_0 = 4$; ________

в) $f(x) = \cos x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{2}$; ________ е) $f(x) = \operatorname{ctg} 9x,\ x_0 = 5$? ________

Решение.

г) $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$, $f'(8) < 0$, поэтому искомый угол тупой.

38. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, если положительное направление оси абсцисс образует с касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 угол, равный:

а) $45°$; ________ в) $135°$; ________ д) $60°$; ________
б) $30°$; ________ г) $0°$; ________ е) $150°$. ________

Решение.

д) Так как значение производной в некоторой точке равно тангенсу угла наклона касательной к графику функции в этой точке, то $f'(x_0) = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$.

39. Найдите координаты точек (x_0, y_0), в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна оси абсцисс:

а) $f(x) = x^2 - 5x + 3$; ________ г) $f(x) = x^3$; ________
б) $f(x) = x^3 - 12x + 1$; ________ д) $f(x) = \operatorname{tg} x$; ________
в) $f(x) = \cos 2x$; ________ е) $f(x) = \operatorname{ctg} 2x - 5$. ________

Решение.

а) $f'(x) = 2x - 5$; $f'(x) = 0$ при $x = 2{,}5$; $f(2{,}5) = 6{,}25 - 12{,}5 + 3 = -3{,}25$. Касательная параллельна оси Ox в точке $(2{,}5; -3{,}25)$.

40. Длина пути прямолинейно движущегося автомобиля при $t \in [0; 10]$ описывается формулой $s(t)$. Найдите, в какой момент времени скорость автомобиля равна v:

а) $s(t) = 4t^2$, $v_1 = 5$ м/с; ________
б) $s(t) = 6t + 2t^2$, $v_1 = 18$ м/с; ________
в) $s(t) = 100 + 3t + 3t^2$, $v_1 = 24$ м/с; ________
г) $s(t) = 7t + 4t^2$, $v_1 = 63$ м/с; ________
д) $s(t) = 15 + t + 1{,}5t^2$, $v_1 = 13$ м/с; ________
е) $s(t) = 18 + 80t - 3t^2$, $v_1 = 50$ м/с. ________

Решение.

б) Так как $v(t) = s'(t)$, то $v(t) = 4t + 6$. Решая уравнение $4t + 6 = 18$, находим $t = 3$.

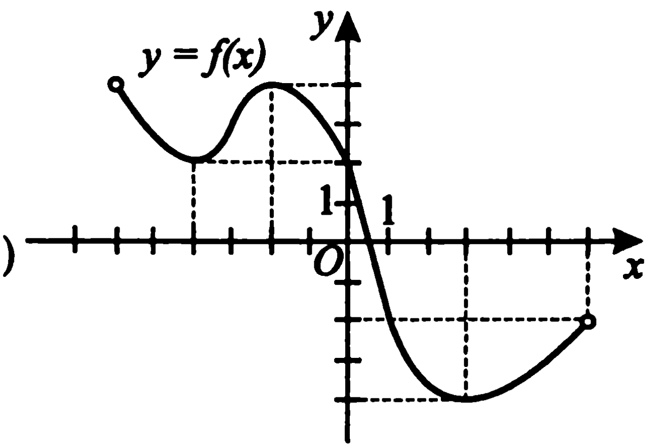
Если во всех точках некоторого открытого промежутка X выполняется $f'(x) \geqslant 0$, причём равенство достигается лишь в отдельных точках, то $f(x)$ возрастает на X.

Если во всех точках некоторого открытого промежутка X выполняется $f'(x) \leqslant 0$, причём равенство достигается лишь в отдельных точках, то $f(x)$ убывает на X.

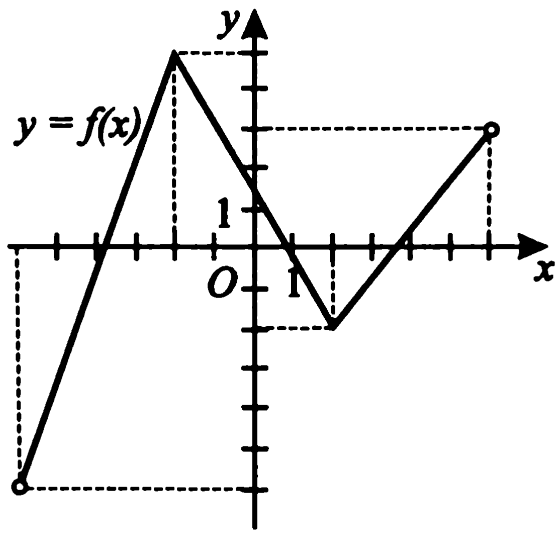
11 Зак. № 265

Если во всех точках некоторого открытого промежутка X выполняется $f'(x) = 0$, то $f(x)$ постоянна на X.

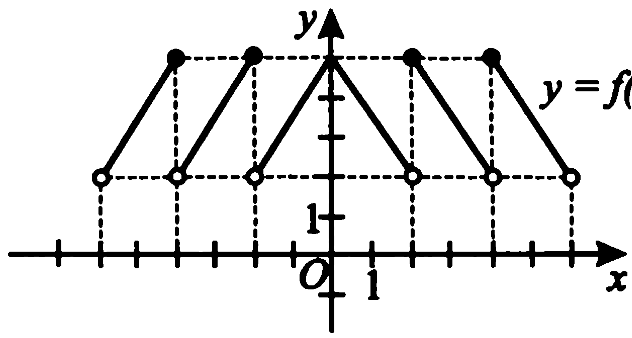
41. По графику функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$, найдите, на каких промежутках $f'(x)$ отрицательна:

а) 

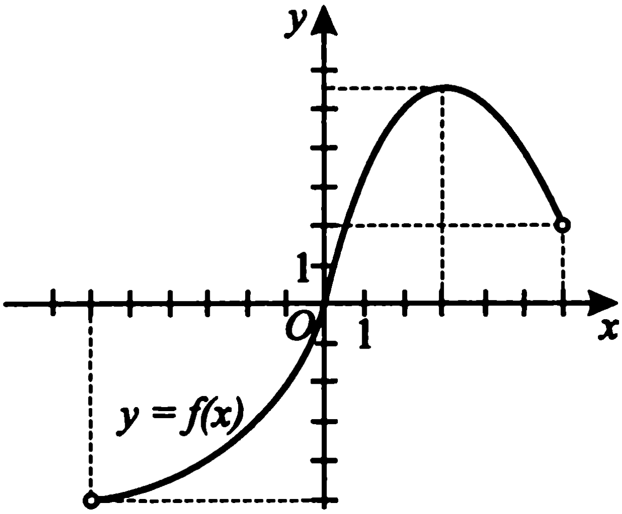
____

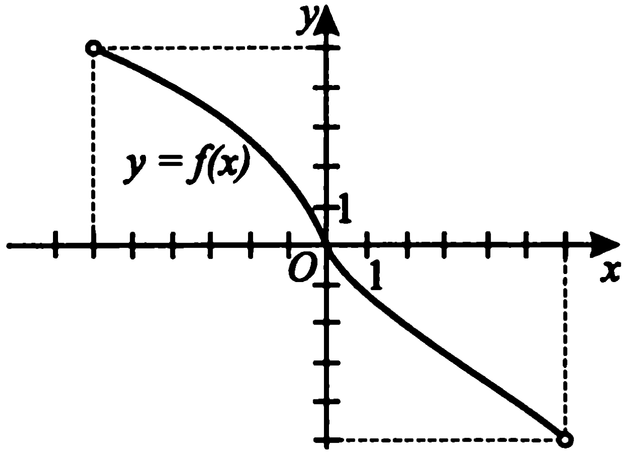
б) 

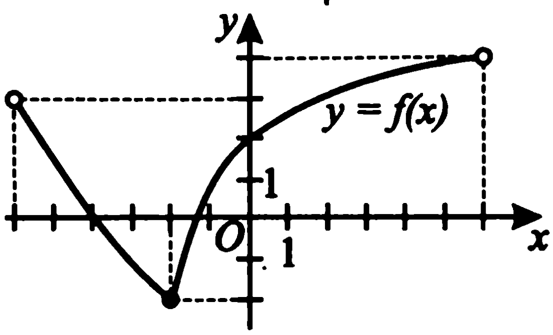
____

в) 

____

г)


д)


е)


Решение.

г) Так как функция $f(x)$ возрастает на $(-6;3)$ и убывает на $(3;6)$, то $f'(x) < 0$ на интервале $(3;6)$.

42. Найдите все промежутки возрастания функции:

а) $f(x) = \cos 5x - 8x + 10$;

б) $f(x) = \operatorname{tg} x - 3$;

в) $f(x) = |2x - 5|$;

г) $f(x) = |x^2 - 4|$;

д) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 20$;

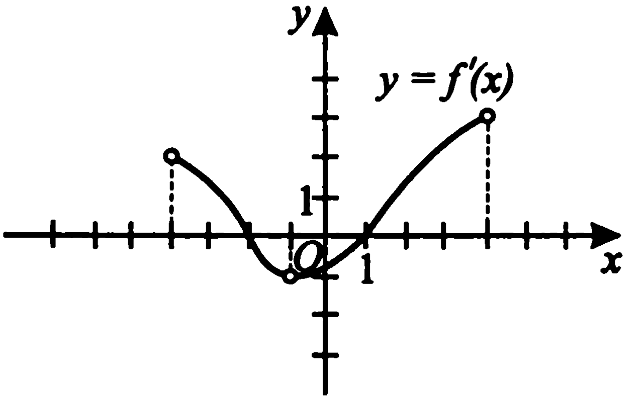
е) $f(x) = \sin x + \cos x$.

Решение.

в) При $x < 2{,}5$ имеем: $f(x) = 5 - 2x$ и $f'(x) = -2 < 0$, $f(x)$ убывает. При $x > 2{,}5$ имеем: $f(x) = 2x - 5$ и $f'(x) = 2 > 0$, $f(x)$ возрастает.

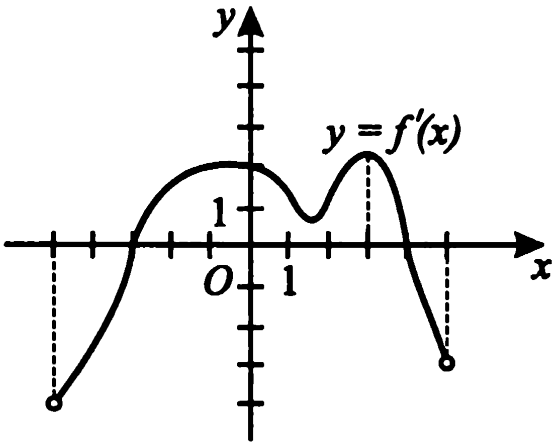
43. По графику производной функции $f(x)$ найдите все интервалы убывания функции $f(x)$:

а)



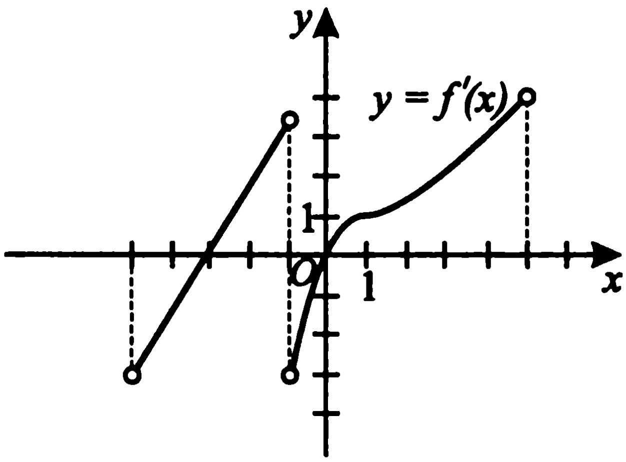
____

б)



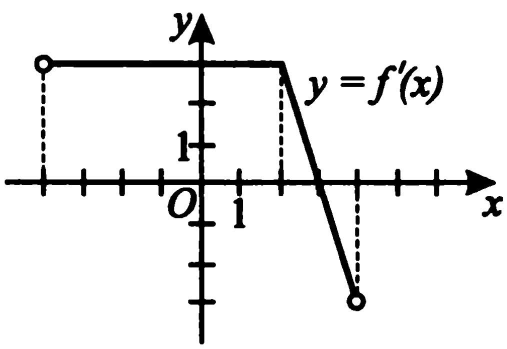
____

в)

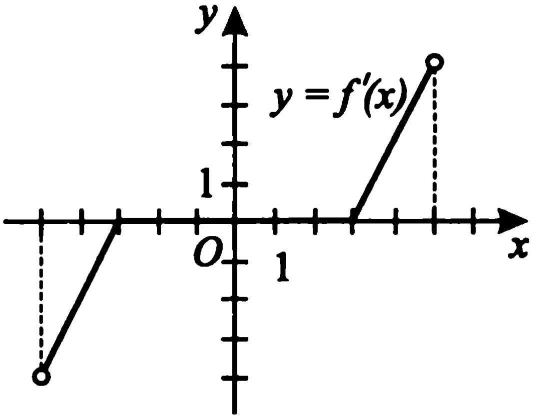


____

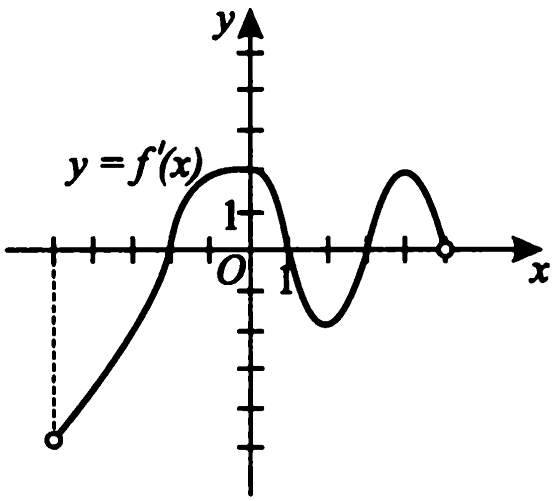
г)



____

д)


____



е) ____________________

Решение.

г) $f'(x) > 0$ при $x \in (-4; 3)$, здесь $f(x)$ возрастает; $f'(x) < 0$ при $x \in (3; 4)$, здесь $f(x)$ убывает.

44. С помощью производной найдите промежутки монотонности функции:

а) $f(x) = x^4 + 5x^3 - 100$; ____________________

б) $f(x) = \cos^2 x$; ____________________

в) $f(x) = 1 - 2x^2$; ____________________

г) $f(x) = \sqrt{2x + 5}$; ____________________

д) $f(x) = \cos^2 x + \sqrt{x} + \sin^2 x$; ____________________

е) $f(x) = 25x^3 - 4$. ____________________

Решение.

г) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x + 5}} > 0$, поэтому $f(x)$ возрастает на своей области определения $x \in [-2{,}5; +\infty)$.

Если функция $y = f(x)$ имеет экустремум в точке $x = x_0$, то в этой точке производная функции либо равна нулю, либо не существует. При этом, если при переходе через точку x_0 $f'(x)$ меняет знак с

«$-$» на «$+$», то x_0 — точка минимума, если с «$+$» на «$-$», то x_0 — точка максимума.

45. Найдите точки экстремума функции $f(x)$ и установите их характер:

а) $f(x) = -x^2 + 4x - 20$; ________ г) $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$; ________

б) $f(x) = 8(2x-1)^4$; ________ д) $f(x) = \operatorname{ctg} x + 10$; ________

в) $f(x) = \sqrt{|x-6|}$; ________ е) $f(x) = x^{20} + x - 8$. ________

Решение.

б) $f'(x) = 8 \cdot 4 \cdot 2 \cdot (2x-1)^3 = 64(2x-1)^3$. $f'(x) = 0$ при $x = 0{,}5$. $f'(x) < 0$ при $x < 0{,}5$ и $f'(x) > 0$ при $x > 0{,}5$. Следовательно, $x = 0{,}5$ — точка минимума.

46. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$:

а) $f(x) = x^2 - 8x + 100$, $a = 3$, $b = 10$; ________

б) $f(x) = \sin x$, $a = -1$, $b = 1$; ________

в) $f(x) = |x-2| + |x-3|$, $a = 0$, $b = 6$; ________

г) $f(x) = \sqrt{2x+9}$, $a = -4$, $b = 8$; ________

д) $f(x) = \dfrac{x^2+9}{x}$, $a = -6$, $b = -1$; ________

е) $f(x) = |x^2 + 2x + 9|$, $a = -2$, $b = 3$. ________

Решение.

д) $f'(x) = \dfrac{2x^2 - (x^2+9)}{x^2} = \dfrac{x^2-9}{x^2}$ не имеет критических точек на отрезке $[-6; -1]$. Стационарные точки — $x = \pm 3$, $3 \notin [-6; -1]$; $f(-6) = -7{,}5$; $f(-3) = -6$; $f(-1) = -10$. $f_{\text{наиб}} = -6$, $f_{\text{наим}} = -10$.

47. Определите, имеет ли функция $f(x)$ хотя бы одну точку экстремума:

а) $f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$; ________ г) $f(x) = x^{24}$; ________

б) $f(x) = -\sqrt{|x+8|}$; ________ д) $f(x) = \sin^2 x$; ________

в) $f(x) = 9x^3 + 50$; ________ е) $f(x) = 5x^3 + 3x + 1$. ________

Решение.

а) $f(x)$ определена при $x \neq \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\sin^2 x} > 0$ при $x \neq \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. Стационарных и критических точек нет, поэтому экстремумов также нет.

Глава XVI

Первообразная и интеграл

Первообразная

$F(x)$ называют первообразной для $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$.

Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то любая функция вида $F(x) + C$, где $C \in R$, также является первообразной для $F(x)$.

1. Установите, является ли функция $F(x)$ первообразной для функции $f(x)$:

а) $F(x) = \frac{x^6}{3}$, $f(x) = 2x^5$;

б) $F(x) = \cos x$, $f(x) = \sin x$;

в) $F(x) = 8x^7$, $f(x) = x^8$;

г) $F(x) = 2^x$, $f(x) = 2^x$;

д) $F(x) = e^x$, $f(x) = e^x$;

е) $F(x) = \operatorname{tg} x$, $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$;

Решение.

б) $F'(x) = -\sin x$, $F(x)$ не является первообразной для $f(x)$.

2. Определите, какие из следующих функций являются первообразными для функции $f(x) = 8x + \sin x$:

а) $F(x) = 8x^2 - \cos x$;

б) $F(x) = 4x^2 - \cos x + \sqrt{2}$;

в) $F(x) = -\cos x + 4x^2$;

г) $F(x) = 8 + \cos x$;

д) $F(x) = 4x^2 - \cos x + e^x$;

е) $F(x) = 4x^2 + \cos x$.

Решение.

е) $F'(x) = 8x - \sin x \neq 8x + \sin x$, поэтому $F(x) = 4x^2 + \cos x$ не является первообразной для предложенной функции.

Таблица первообразных $F(x)$ для функций $f(x)$:

$f(x)$	0	1	$x^n, n \neq -1$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$F(x)$	C	x	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\ln x$	$2\sqrt{x}$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg} x$

Первообразная суммы равна сумме первообразных.

Постоянный множитель можно вынести за знак первообразной.

Найдите первообразную для функции $f(x)$:

3. а) $f(x) = \sin x + \cos x$; ________ г) $f(x) = 5 - \frac{1}{\sin^2 x}$; ________

б) $f(x) = x^3 + x^4$; ________ д) $f(x) = \sin x - x$; ________

в) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$; ________ е) $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}$. ________

Решение.

д) Так как первообразная разности равна разности первообразных, то $F(x) = -\cos x - \frac{x^2}{2}$.

4. а) $f(x) = 38\cos x$; ________ г) $f(x) = 2x\sqrt{3}$; ________

б) $f(x) = \frac{\pi}{x^2}$; ________ д) $f(x) = \sin x \sin \frac{\pi}{5}$; ________

в) $f(x) = e^4$; ________ е) $f(x) = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$. ________

Решение.

г) Постоянный множитель $2\sqrt{3}$ можно вынести за знак первообразной, поэтому $F(x) = 2\sqrt{3} \cdot \frac{x^2}{2} = \sqrt{3}x^2$.

5. а) $f(x) = 8\cos x + 9\sin x$; ________ г) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{8}{\sqrt[3]{x}}$; ________

б) $f(x) = 5x^3 + 4x^2 + 3$; ________ д) $f(x) = \frac{3}{4}x^{10} - 5\pi x$; ________

в) $f(x) = 0{,}1e^4 - 3\sqrt{3}e$; ________ е) $f(x) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$; ________

Решение.

б) Применяя формулу первообразной для функции x^n, получим:

$F(x) = 5 \cdot \frac{x^4}{4} + 4 \cdot \frac{x^3}{3} + 3x = \frac{5}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 3x.$

Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то $\frac{1}{k}F(kx+m)$ является первообразной для $f(kx+m)$.

Найдите первообразную для функции $f(x)$:

6. а) $f(x) = e^{3x+1}$; ______ г) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x+3}}$; ______

б) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{5}\right)$; ______ д) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 5x}$; ______

в) $f(x) = (3-8x)^{10}$; ______ е) $f(x) = -\frac{1}{\cos^2(2x+1)}$. ______

Решение.

б) Первообразной для $\sin x$ является $(-\cos x)$, поэтому первообразной для функции $f(x) = \sin\left(\frac{1}{4}x + \frac{\pi}{5}\right)$ будет функция

$F(x) = 4 \cdot \left(-\cos\left(\frac{1}{4}x + \frac{\pi}{5}\right)\right) = -4\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{5}\right).$

Неопределённый интеграл

Неопределённым интегралом функции $f(x)$ называется множество всех её первообразных.

Неопределённый интеграл функции $f(x)$ обозначается через $\int f(x)dx$.

$\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$.

$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$

7. Найдите $\int f(x)dx$, если:

а) $f(x) = \frac{1}{x^4} + \frac{2}{x^5}$; ________ г) $f(x) = \frac{x}{\sin^2 x + \cos^2 x}$; ________

б) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$; ________ д) $f(x) = 25x^{99}$; ________

в) $f(x) = e^x + e^{-x}$; ________ е) $f(x) = \frac{e^x}{e^8}$. ________

Решение.

б) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \int \sqrt{x}dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C.$

8. Найдите закон движения материальной точки $S = s(t)$, если известен закон изменения скорости $v = v(t)$ и координата точки в начальный момент времени:

а) $v(t) = 10t,\ s(0) = 0$; ________

б) $v(t) = 20,\ s(0) = 100$; ________

в) $v(t) = 2\sin 3t,\ s(0) = \frac{1}{3}$; ________

г) $v(t) = 0,\ s(0) = 45$; ________

д) $v(t) = \cos 5t,\ s(0) = 1$; ________

е) $v(t) = 3t^2 + 1,\ s(0) = 8$. ________

Решение.

а) $s(t) = \int v(t)dt = \int 10t\,dt = 5t^2 + C$. Так как $s(0) = 0$, то $5 \cdot 0^2 + C = 0$, $C = 0$. $s(t) = 5t^2$.

9. Выполнив преобразования подынтегральной функции, найдите интеграл:

а) $\int \frac{e^{5x}}{4e^{2x}}dx$; ________ г) $\int (x-1)(x+4)dx$; ________

б) $\int 3\cos^2 x\,dx$; ________ д) $\int (x^{10})^2 dx$; ________

в) $\int \frac{x + x^2}{\sqrt{x}}dx$; ________ е) $\int \sqrt{\sqrt{x}}dx$. ________

Решение.

б) Так как $\cos^2 x = \dfrac{\cos 2x + 1}{2}$, то $\int 3\cos^2 x\,dx = 3\int \dfrac{\cos 2x + 1}{2}dx =$
$= \dfrac{3}{2}\int \cos 2x\,dx + \dfrac{3}{2}\int dx = \dfrac{3}{4}\sin 2x + \dfrac{3}{2}x + C = 0{,}75\sin 2x + 1{,}5x + C.$

Определённый интеграл

Определённый интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ можно найти по формуле $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, а $F(x)$ — первообразная для $f(x)$.

Для приведённой формулы используется сокращённая запись:
$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$.

$$\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx.$$

$$\int\limits_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Найдите значение определённого интеграла:

10. а) $\int\limits_1^2 x^2dx$; ________________ г) $\int\limits_a^b xdx$; ________________

б) $\int\limits_0^3 e^x dx$; ________________ д) $\int\limits_a^{a+2} dx$; ________________

в) $\int\limits_\pi^{2\pi} \cos x dx$; ________________ е) $\int\limits_1^9 \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. ________________

Решение.

в) $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_{\pi}^{2\pi} = \sin 2\pi - \sin \pi = 0.$

11. а) $\int\limits_{2}^{2} \sin^2 x \cos^2 x dx;$ ____________ г) $\int\limits_{-1}^{0} \sin \pi x dx;$ ____________

б) $\int\limits_{0}^{1} e^{5x-3} dx;$ ____________ д) $\int\limits_{-4}^{0} dx;$ ____________

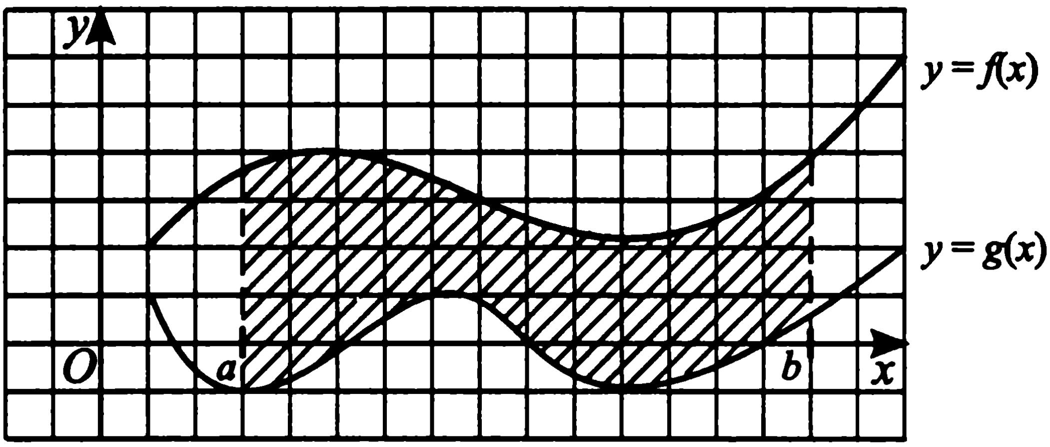
в) $\int\limits_{1}^{3} \frac{x^6 - x^2}{x^4} dx;$ ____________ е) $\int\limits_{2}^{3} (1-2x)^2 dx.$ ____________

Решение.

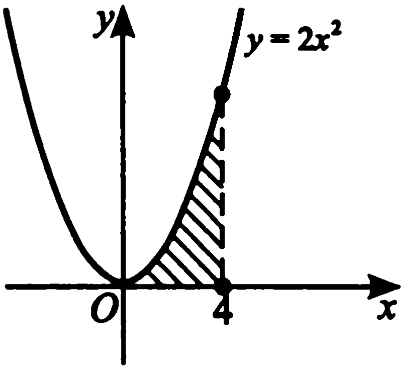
б) $\int\limits_{0}^{1} e^{5x-3} dx = \frac{1}{5} e^{5x-3} \Big|_{0}^{1} = \frac{1}{5}\left(e^2 - e^{-3}\right) = \frac{e^2}{5} - \frac{1}{5e^3}.$

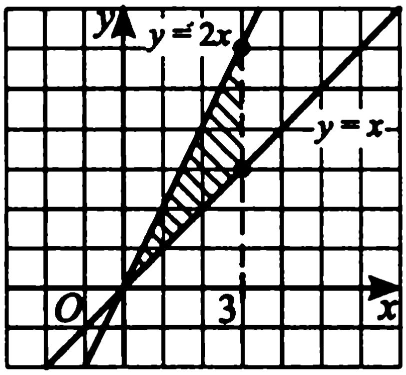
Площадь криволинейной трапеции можно вычислить по формуле

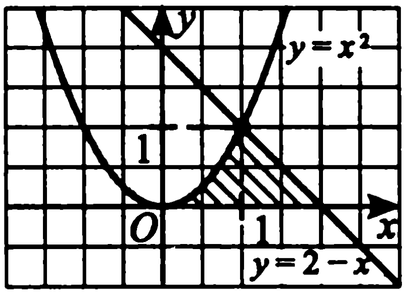
$$S = \int\limits_{a}^{b} \left(f(x) - g(x)\right) dx.$$

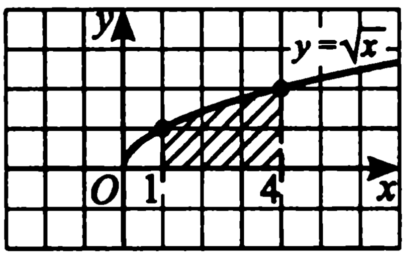


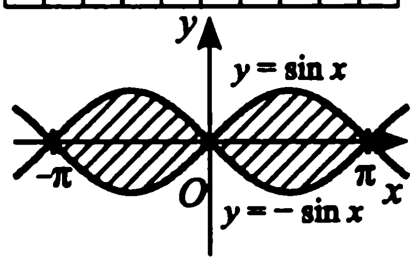
12. Вычислите площадь криволинейной трапеции, пользуясь эскизами, приведёнными на рисунке:

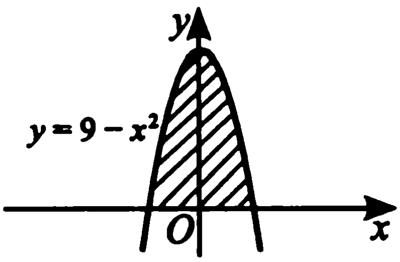
а) 

б) 

в) 

г) 

д) 

е) 

Решение.

е) График $y = 9 - x^2$ пересекается с осью абсцисс в точках с координатами $(-3; 0)$ и $(3; 0)$, поэтому искомая площадь равна

$$\int_{-3}^{3} (9 - x^2)dx = \left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{3} = 27 - 9 + 27 - 9 = 36.$$

13. Найдите площадь фигуры, ограниченной:

а) прямой $y = 3 - 2x$ и осями координат; ____________

б) параболой $y = x^2 - 1$ и осью абсцисс; ____________

в) графиками $y = |x| - 2$ и $y = 2 - |x|$; ____________

г) графиком $y = x^3$, прямыми $y = 0$ и $x = 1$; ____________

д) графиками $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$; ____________

е) прямыми $x = 3,\ x = -3,\ y = 3,\ y = -3$. ____________

Решение.

д) Графики $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$ пересекаются в точках с абсциссами $x = 0$ и $x = 1$, причём $\sqrt{x} > x^2$ при $x \in [0; 1]$. Поэтому искомая площадь равна $\int\limits_{0}^{1} (\sqrt{x} - x^2)dx = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

Примечание.

Задачи 12(б) и 13(в) можно решать исходя из геометрических соображений, применив формулу площади треугольника $S = \frac{1}{2}a \cdot h$, где a — основание, h — высота.

Глава XVII

Делимость

Признаки делимости «по последним цифрам»

- **На 2.** Число делится на 2, если его последняя цифра — ноль или делится на 2. Числа, делящиеся на два, называются чётными, не делящиеся на два — нечётными.

- **На 4.** Число делится на 4, если две его последние цифры — нули или образуют число, которое делится на 4.

- **На 5.** Число делится на 5, если его последняя цифра — ноль или 5.

- **На 8.** Число делится на 8 тогда и только тогда, когда три его последние цифры — нули или образуют число, которое делится на 8.

- **На 10.** Число делится на 10, если оно оканчивается на ноль.

- **На 25.** Число делится на 25, если две его последние цифры — нули или образуют число, которое делится на 25 (25, 50 или 75).

- **На 2^n, $n \in N$.** Число делится на 2^n, если число, образованное его последними n цифрами, делится на 2^n.

- **На 5^n, $n \in N$.** Число делится на 5^n, если число, образованное его последними n цифрами, делится на 5^n.

- **На 10^n, $n \in N$.** Число делится на 10^n тогда и только тогда, когда n его последних цифр — нули.

1. Определите, какие из перечисленных чисел одновременно делятся на 4 и на 5:

а) 16 830; в) 76 475; д) 305 900;
б) 148 580; г) 78 660; е) 275 310.

Решение.

а) Число 16 830 делится на 5, так как последняя его цифра 0. Данное число не делится на 4, так как число 30, образованное последними двумя его цифрами, не делится на 4.

2. Определите, какие из перечисленных чисел одновременно делятся на 2 и на 125:

а) 196 350; в) 410 550; д) 535 500;
б) 267 750; г) 392 700; е) 490 875.

Решение.

б) Число 267 750 делится на 2, так как последняя его цифра 0. Данное число делится на $125 = 5^3$, так как число 750, образованное последними тремя его цифрами, делится на 125 $\left(\frac{750}{125} = 6\right)$.

3. Определите, какие из перечисленных чисел делятся на 5:

а) 66^5; в) 89^{15}; д) 15^{43};
б) 77^{25}; г) 10^{14}; е) 33^{10}.

Решение.

б) Последняя цифра у степеней 77 равна последней цифре соответствующей степени числа 7. Эти цифры повторяются: $7, 9, 3, 1, 7, \ldots$. Следовательно, число 77^{25} не делится на 5, так как последняя его цифра не является нулём или цифрой 5.

Признаки делимости «по сумме цифр»

На 3. Число делится на 3, если сумма его цифр делится на 3.

На 9. Число делится на 9, если сумма его цифр делится на 9.

На 11. На 11 делятся только те числа, у которых сумма цифр, стоящих на нечётных местах, либо равна сумме цифр, стоящих на чётных местах, либо отличается от неё на число, делящееся на 11 (знакопеременная сумма цифр делится на 11).

4. Определите, какие из перечисленных чисел одновременно делятся на 2, 3 и 11:

а) 924; в) 616; д) 605;
б) 693; г) 660; е) 792.

Решение.

а) Число 924 делится на 2, так как последняя его цифра 4 — чётная. 924 делится на 3, так как сумма его цифр: $9 + 2 + 4 = 15$, а это число делится на 3. Наконец, 924 делится на 11, так как знакопеременная сумма его цифр делится на 11 $(9 - 2 + 4 = 11)$.

5. Определите, какие из перечисленных чисел одновременно делятся на 25 и на 9:

а) 252 450; в) 410 550; д) 903 210;
б) 267 750; г) 235 620; е) 490 875.

Решение.

в) Число 410 550 делится на 25, так как число 50, образованное двумя последними его цифрами, делится на 25. Данное число не делится на 9, так как сумма его цифр: $4 + 1 + 5 + 5 = 15$ не делится на 9.

Признаки делимости «с использованием отбрасывания цифр»

На 7. Число делится на 7, если результат вычитания удвоенной последней цифры из этого числа без последней цифры делится на 7.
Алгоритм:

1. Зачеркнуть последнюю цифру, из полученного числа вычесть число, равное удвоенной зачёркнутой цифре.
2. Повторить вычисления пункта 1 до получения двузначного или однозначного числа. Если конечное число делится на 7, то исходное число делится на 7.

На 13. Число делится на 13, если число его десятков (число, получаемое из данного отбрасыванием последней цифры), сложенное с учетверённым числом единиц, кратно 13.
Алгоритм:

1. Зачеркнуть последнюю цифру и к полученному числу прибавить число, равное учетверённой зачёркнутой цифре.

12. Зак. № 265

2. Повторять вычисления пункта 1 до получения двузначного или однозначного числа. Если последнее число этой последовательности делится на 13, то исходное число делится на 13.

На 17. Число делится на 17, если разность между числом его десятков (числом, получаемым из данного отбрасыванием последней цифры) и упятерённым числом единиц кратна 17.
Алгоритм:

1. Зачеркнуть последнюю цифру и из полученного числа вычесть число, равное увеличенной в 5 раз зачёркнутой цифре.
2. Повторить вычисления пункта 1 до получения двузначного или однозначного числа. Если конечное число делится на 17, то исходное число делится на 17.

На 19. Число делится на 19, если число его десятков (число, получаемое из данного отбрасыванием последней цифры), сложенное с удвоенным числом единиц, кратно 19.
Алгоритм:

1. Зачеркнуть последнюю цифру и к полученному числу прибавить число, равное удвоенной зачёркнутой цифре.
2. Повторить вычисления пункта 1 до получения двузначного или однозначного числа. Если конечное число делится на 19, то исходное число делится на 19.

На 23. Число делится на 23, если число его десятков (число, получаемое из данного отбрасыванием последней цифры), сложенное с усемерённым числом единиц, кратно 23.
Алгоритм:

1. Зачеркнуть последнюю цифру и к полученному числу прибавить число, равное усемерённой зачёркнутой цифре.
2. Повторить вычисления пункта 1 до получения двузначного или однозначного числа. Если конечное число делится на 23, то исходное число делится на 23.

6. Определите, какие из перечисленных чисел одновременно делятся на 7 и на 13:

а) 855 855;	в) 1 833 975;	д) 1 589 445;
б) 921 690;	г) 460 845;	е) 5 990 985.

Решение.

а) Применим алгоритм признака делимости на 7: $85\,585 - 2 \cdot 5 = 85\,575$; $8557 - 2 \cdot 5 = 8547$; $854 - 2 \cdot 7 = 840$; $84 - 2 \cdot 0 = 84$; $8 - 2 \cdot 4 = 0$. Так как конечное число 0, то исходное число делится на 7.

Применим алгоритм признака делимости на 13: $85\,585 + 4 \cdot 5 = 85\,605$; $8560 + 4 \cdot 5 = 8580$; $858 + 4 \cdot 0 = 858$; $85 + 4 \cdot 8 = 117$; $11 + 4 \cdot 7 = 39$; $3+4{\cdot}9 = 39$. Последнее число убывающей последовательности 39 делится на 13, следовательно, исходное число делится на 13.

7. Определите, какие из перечисленных чисел одновременно делятся на 17, 19 и 23:

а) 3 677 355;	в) 3 037 815;	д) 3 290 265;
б) 3 290 265;	г) 3 536 204;	е) 4 975 245.

Решение.

а) Применим алгоритм признака делимости на 17: $367\,735-5{\cdot}5 = 367\,710$; $36\,771-5{\cdot}0 = 36\,771$; $3677-5{\cdot}1 = 3672$; $367-5{\cdot}2 = 357$; $35-5{\cdot}7 = 0$. Так как конечное число 0, то исходное число делится на 17.

Применим алгоритм признака делимости на 19: $367\,735 + 2 \cdot 5 = 367\,745$; $36\,774+2{\cdot}5 = 36\,784$; $3678+2{\cdot}4 = 3686$; $368+2{\cdot}6 = 380$; $38+2{\cdot}0 = 38$; $3+2{\cdot}8 = 19$. Так как получено число 19, то исходное число делится на 19.

Применим алгоритм признака делимости на 23: $367\,735 + 7 \cdot 5 = 367\,770$; $36\,777+7{\cdot}0 = 36\,777$; $3677+7{\cdot}7 = 3726$; $372+7{\cdot}6 = 414$; $41+7{\cdot}4 = 69$. Последнее число убывающей последовательности 69 делится на 23, следовательно, исходное число делится на 23.

Признаки делимости «с использованием группировки»

Признак делимости на 99. Разобьём число на группы по 2 цифры справа налево (в самой левой группе может быть одна цифра) и найдём сумму этих групп, считая их двузначными числами. Число делится на 99, если полученная сумма делится на 99.

Признак делимости на 101. Разобьём число на группы по 2 цифры справа налево (в самой левой группе может быть одна цифра) и найдём сумму этих групп с переменными знаками (первая группа имеет знак «+»), считая их двузначными числами. Число делится на 101, если полученная сумма делится на 101.

Признак делимости на $10^n - 1$. Разобьём число на группы по n цифр справа налево (в самой левой группе может быть от 1 до n цифр) и найдём сумму этих групп, считая их n-значными числами. Число делится на $10^n - 1$, если полученная сумма делится на $10^n - 1$.

8. Определите, какие из перечисленных чисел одновременно делятся на 99 и на 101:

а) 343 035; в) 846 153; д) 389 961;
б) 149 985; г) 387 638; е) 919 908.

Решение.

б) Разобьём число 149 985 на группы и найдём сумму этих групп: $14 + 99 + 85 = 198$. Применим к полученному числу тот же алгоритм: $1 + 98 = 99$. Полученное число делится на 99, следовательно, и исходное число делится на 99.

Разобьём число 149 985 на группы и найдём сумму этих групп с переменными знаками: $14 - 99 + 85 = 0$. Полученное число делится на 101, следовательно, исходное число делится на 101.

9. Определите, какие из перечисленных чисел делятся на 9999:

а) 314 685; в) 846 153; д) 389 961;
б) 147 015; г) 379 962; е) 919 908.

Решение.

г) $9999 = 10^4 - 1$. Разобьём число 379 962 на группы по 4 цифры, начиная с разряда единиц, и найдём сумму этих групп: $37 + 9962 = 9999$. Полученное число делится на 9999, следовательно, исходное число делится на 9999.

Разложение числа на простые множители

Простыми называются натуральные числа, отличные от единицы, которые без остатка делятся только на единицу и на самих себя.

Решето Эратосфена — алгоритм нахождения всех простых чисел до некоторого натурального числа.

Для нахождения всех простых чисел не больше заданного числа n, следуя методу Эратосфена, нужно выполнить следующие шаги:

1. Выписать подряд все целые числа от 2 до n.
2. Пусть переменная p изначально равна 2 — первому простому числу.

3. Вычеркнуть из списка все числа от $2p$ до n, делящиеся на p (то есть числа $2p, 3p, 4p, \ldots$).
4. Найти первое невычеркнутое число, большее чем p, и присвоить значению переменной p это число.
5. Повторять шаги 3 и 4 до тех пор, пока p не станет больше, чем n.

Все невычеркнутые числа — простые.

Данный алгоритм достаточно выполнять до тех пор, пока выполняется условие: $p^2 < n$.

Основная теорема арифметики. Каждое натуральное число $n > 1$ представляется в виде $n = p_1 \cdot \cdots \cdot p_k$, где $p_1, \ldots, p_k$ — простые числа, причём такое представление единственно с точностью до порядка следования множителей.

Каждое натуральное число n единственным образом представимо в виде

$$n = p_1^{d_1} \cdot p_2^{d_2} \cdot \cdots \cdot p_k^{d_k},$$

где $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ — простые числа, $d_1, \ldots, d_k$ — некоторые натуральные числа.

Такое представление числа n называется каноническим.

10. Перечислите все простые числа, лежащие между:

а) 2 и 8; ____________ г) 24 и 32; ____________
б) 4 и 12; ____________ д) 32 и 40; ____________
в) 6 и 22; ____________ е) 55 и 80. ____________

Решение.

б) Выпишем все натуральные числа от 2 до 12: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Уберём из этой последовательности числа, делящиеся на первое простое число — 2 (кроме числа 2): 2, 3, 5, 7, 9, 11. Из полученной последовательности уберём все числа, делящиеся на 3 (кроме числа 3): 2, 3, 5, 7, 11. Следуя алгоритму Эратосфена, получаем последовательность простых чисел, не превосходящих 12: 2, 3, 5, 7, 11. Следовательно, простыми числами, лежащими между 4 и 12, являются 5, 7, 11.

11. Для каждого из чисел запишите его каноническое разложение на простые множители:

а) 8; ____________ г) 450; ____________
б) 44; ____________ д) 9702; ____________
в) 120; ____________ е) 20449. ____________

Решение.

б) Для того чтобы найти каноническое представление заданного числа, выполним следующий алгоритм: 1) на основе признаков делимости и алгоритма Эратосфена найдём наименьшее простое число p, на которое это число делится; 2) найдём частное от деления данного числа на найденное простое число; 3) для полученного частного будем повторять шаги 1) и 2) до тех пор, пока не получим простое число.

Согласно признакам делимости, число 44 делится на 2: $44/2 = 22$; $22/2 = 11$. Следовательно, $44 = 2 \cdot 22 = 2 \cdot 2 \cdot 11 = 2^2 \cdot 11$.

12. Среди предложенных чисел отметьте те, на которые делится число $A = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$:

а) 9;	в) 45;	д) 120;
б) 12;	г) 50;	е) 675.

Решение.

в) Делится, так как $45 = 3^2 \cdot 5$. Эти множители входят в разложение числа A.

13. Натуральное число делится на 4 и на 10. Всегда ли верно, что оно делится на:

а) 2;	в) 20;	д) 100;
б) 5;	г) 40;	е) 300?

Решение.

г) Нет. Например, число 20 делится на 4 и 10, но не делится на 40. Если число делится на 4, то в его разложение на простые множители, по крайней мере, два раза входит число 2; из делимости числа на 10 следует, что в его разложении есть числа 2 и 5. То есть разложение числа имеет вид $A = 2^2 \cdot 5 \cdot B$, где B — некоторое натуральное число, о разложении которого ничего сказать нельзя.

14. Натуральное число $5A$ делится на 330. Всегда ли верно, что:

а) A делится на 3;	г) A делится на 6;
б) A делится на 5;	д) A делится на 33;
в) A делится на 15;	е) A делится на 55?

Решение.

а) Так как 330 кратно 3, то в разложение числа $5A$ на простые множители число 3 входит, а в разложение числа 5 — не входит. Следовательно, A делится на 3.

15. $N! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot N$. Найдите наименьшее натуральное N такое, что $N!$ делится на:

а) 10; ____________ в) 70; ____________ д) 455; ____________

б) 30; ____________ г) 252; ____________ е) 1045. ____________

Решение.

в) $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$, значит $N!$ должно делиться на 7. Наименьшее выражение, содержащее множитель 7, будет 7!, в это произведение будут входить и 2, и 5.

16. Решите в натуральных числах уравнения:

а) $x^2 - y^2 = 13$; ____________ г) $x^2 - y^2 = 77$; ____________

б) $x^2 - y^2 = 23$; ____________ д) $x^2 - y^2 = 143$; ____________

в) $x^2 - y^2 = 15$; ____________ е) $x^2 - y^2 = 105$. ____________

Решение.

в) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 15$. Учитывая, что первое число в произведении меньше второго, возможными разложениями числа 15 на два множителя являются: 1) $1 \cdot 15$; 2) $3 \cdot 5$. В первом случае $x - y = 1$, $x + y = 15$, отсюда: $x = 8$, $y = 7$. Во втором случае $x - y = 3$, $x + y = 5$, отсюда: $x = 4$, $y = 1$.

Наибольший общий делитель. Наименьшее общее кратное.

Наибольший общий делитель — это наибольшее из натуральных чисел, на которое делится без остатка каждое из данных натуральных чисел a и b. Обозначается НОД(a, b).

Для нахождения НОД нужно:

1. Разложить данные числа на простые множители.
2. Выписать все простые числа, которые одновременно входят в каждое из полученных разложений.
3. Каждое из выписанных простых чисел взять с наименьшим из показателей степени, с которыми оно входит в разложения данных чисел.
4. Записать произведение полученных степеней.

17. Чему равен НОД(A,B), если:

а) $A = 2^2 \cdot 13^2$; $B = 2^3$; ____________

б) $A = 2 \cdot 3 \cdot 17^2$; $B = 17^3$; ____________

в) $A = 3^5 \cdot 7^4$; $B = 7 \cdot 23^2$; ____________
г) $A = 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^4$; $B = 3 \cdot 5 \cdot 11$; ____________
д) $A = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 7$; $B = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$; ____________
е) $A = 3^2 \cdot 5^4 \cdot 11^2$; $B = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2$? ____________

Решение.

г) Простыми числами, входящими в разложение чисел A и B с учётом наименьших показателей, являются 3 и 5, значит, $НОД(A, B) = 3 \cdot 5 = 15$.

18. p и q — различные простые числа, n, m — натуральные числа. Сколько делителей у числа:

а) pq; ____________ в) p^2q^3; ____________ д) p^2q^n; ____________
б) pq^2; ____________ г) p^3q^4; ____________ е) p^nq^m? ____________

Решение.

в) Поскольку данные числа p и q — простые, то делителями числа p^2q^3 являются всевозможные произведения чисел p и q, взятых со степенями из множеств $0, 1, 2$ и $0, 1, 2, 3$ соответственно. Всего таких произведений $3 \cdot 4 = 12$: $1, p, pq, pq^2, pq^3, p^2, p^2q, p^2q^2, p^2q^3, q, q^2, q^3$.

19. Определите, делится ли произведение любых пяти последовательных чисел на:

а) 2; в) 7; д) 70;
б) 3; г) 10; е) 120?

Решение.

г) Среди пяти последовательных чисел есть хотя бы одно чётное и хотя бы одно, кратное 5, следовательно, произведение, образованное такими числами, будет делиться на 10.

Алгоритм Евклида нахождения НОД:

1. Если числа равны, то взять любое из них в качестве ответа, в противном случае продолжить выполнение алгоритма.
2. Заменить большее число разностью большего и меньшего из чисел.
3. Вернуться к выполнению пункта 1.

Если НОД $(a, b) = 1$, то числа a и b называют взаимно простыми.

20. Используя алгоритм Евклида, найдите НОД(A, B) для чисел:

а) $A = 28$, $B = 42$; ________ г) $A = 3025$, $B = 495$; ________
б) $A = 315$, $B = 165$; ________ д) $A = 5202$, $B = 2805$; ________
в) $A = 1859$, $B = 1014$; ________ е) $A = 30\,498$, $B = 12\,155$. ________

Решение.

в) 1) $1859 > 1014$; $1859 - 1014 = 845$;
2) $1014 > 845$; $1014 - 845 = 169$;
3) $845 > 169$; $845 - 169 = 676$;
4) $676 > 169$; $676 - 169 = 507$;
5) $507 > 169$; $507 - 169 = 338$;
6) $338 > 169$; $338 - 169 = 169$;
7) $169 = 169$, следовательно, НОД$(1859, 1014) = 169$.

Наименьшее общее кратное (НОК) двух целых чисел a и b — это наименьшее натуральное число, которое делится на a и b. Обозначается НОК(a, b).

Для определения НОК нужно:

1. Разложить данные числа на простые множители.
2. Выписать все простые числа, которые входят в каждое из полученных разложений.
3. Каждое из выписанных простых чисел взять с наибольшим из показателей степени, с которыми оно входит в разложения данных чисел.
4. Записать произведение полученных степеней.

21. Чему равен НОК(A, B), если:

а) $A = 2^2 \cdot 3^2$; $B = 2^3$; ____________
б) $A = 2 \cdot 3^3 \cdot 11$; $B = 11 \cdot 3$; ____________
в) $A = 3^5 \cdot 17$; $B = 7 \cdot 17$; ____________
г) $A = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2$; $B = 2^3 \cdot 5 \cdot 13$; ____________
д) $A = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$; $B = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3$; ____________
е) $A = 5^2 \cdot 7^4 \cdot 11^2$; $B = 7^4 \cdot 11^3$? ____________

Решение.

г) Простыми числами, которые входят в разложение чисел A и B с учётом наибольших показателей, являются 2^3, 5^3, 7^2 и 13, значит,
НОК$(A, B) = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 = 637\,000$.

22. Определите, для каких из перечисленных чисел верно, что НОК$(A, B) = 1020$:

а) $A = 12$; $B = 1020$;
б) $A = 204$; $B = 60$;
в) $A = 51$; $B = 20$;
г) $A = 102$; $B = 10$;
д) $A = 204$; $B = 5$;
е) $A = 340$; $B = 255$.

Решение.

а) $12 = 2^2 \cdot 3$; $1020 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$. Следовательно, $НОК(12, 1020) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 = 1020$.

Взаимно простыми называются числа, которые не имеют никаких общих делителей, кроме ± 1.

Если числа $a_1, \ldots, a_n$ — попарно взаимно простые числа, то $НОК(a_1, \ldots, a_n) = |a_1 \cdot \ldots \cdot a_n|$.

Числа a и b взаимно просты тогда и только тогда, когда существуют целые x и y такие, что $ax + by = 1$.

23. Определите, являются ли взаимно простыми следующие числа:

а) 3 и 5;	г) 102, 10 и 55;
б) 12 и 35;	д) 369, 741 и 3333;
в) 4, 20 и 21;	е) 209, 165, 285 и 869.

Решение.

в) Разложим каждое из чисел на простые множители: $4 = 2^2$, $20 = 2^2 \cdot 5$, $21 = 3 \cdot 7$. Из разложений видно, что общим делителем данных чисел является 1. Следовательно, числа 4, 20 и 21 — взаимно простые.

24. Определите, сколько пар попарно взаимно простых чисел в следующих последовательностях:

а) $4, 5, 10$;	г) $121, 11, 55, 5$;
б) $4, 12, 21, 14$;	д) $25, 15, 63, 9, 45$;
в) $7, 20, 55, 77$;	е) $-4, 9, -39, 14, -49$.

Решение.

б) В данной последовательности только одна пара чисел не имеет общих делителей, отличных от ± 1: 4 и 21. Значит, в последовательности 1 пара взаимно простых чисел.

Сравнение по модулю.

Пусть a, b — целые числа, $b \neq 0$. Тогда разделить число a на b с остатком значит найти такие целые числа q и r, что $0 \leqslant r < |b|$ и $a = bq + r$. Число q называется неполным частным, а r — остатком от деления a на b.

Остаток от деления числа a на b равен нулю тогда и только тогда, когда a делится на b.

25. Найдите остатки от деления числа А на число В, если:

а) $A = 12$; $B = 7$; ________ г) $A = -211$; $B = 15$; ________

б) $A = 31$; $B = 9$; ________ д) $A = -151$; $B = -4$; ________

в) $A = 66$; $B = 11$; ________ е) $A = -431$; $B = -55$. ________

Решение.

д) $-151 = 38 \cdot (-4) + 1$. Следовательно, остаток от деления данных чисел равен 1.

26. Найдите наименьшее натуральное число, которое:

а) при делении на 4 даёт остаток 3, при делении на 5 — остаток 4; ________

б) при делении на 6 даёт остаток 5, при делении на 8 — остаток 7, а при делении на 11 — остаток 10; ________

в) при делении на 4 даёт остаток 2, при делении на 5 — остаток 3, а при делении на 6 — остаток 4; ________

г) при делении на 7 даёт остаток 3, при делении на 9 — остаток 5, а при делении на 10 — остаток 6; ________

д) при делении на $4a$ даёт остаток $4a - 2$, при делении на $3a$ — остаток $3a-2$, а при делении на $6a$ — остаток $6a - 2$, где a — натуральное число; ________

е) при делении на $a+2$ даёт остаток $a-1$, при делении на $a+1$ — остаток $a-2$, а при делении на a — остаток $a - 3$, где a — нечётное натуральное число. ________

Решение.

в) Пусть n — искомое число. Тогда

1) $n = 4q_1 + 2$; $n + 2 = 4q_1 + 4$, следовательно, $n + 2$ делится на 4;

2) $n = 5q_2 + 3$; $n + 2 = 5q_2 + 5$, следовательно, $n + 2$ делится на 5;

3) $n = 6q_3 + 4$; $n + 2 = 6q_3 + 6$, следовательно, $n + 2$ делится на 6.

Значит, $n + 2$ делится на НОК$(4; 5; 6) = 60$.

Отсюда получаем, $n = 60 - 2 = 58$.

Два целых числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если они имеют одинаковые остатки при делении на m; пишут: $a \equiv b \pmod{m}$.

Два числа a и b сравнимы по модулю m тогда и только тогда, когда их разность делится на m.

Свойства сравнений по модулю. Свойства сравнений по модулю вытекают из свойств арифметических операций.

Пусть $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$. Тогда:

1) $a + c \equiv b + d \pmod{m}$,

2) $a - c \equiv b - d \pmod{m}$,

3) $ac \equiv bd \pmod{m}$.

4) $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ для любого $n \in N$.

Пусть $ab \equiv 0 \pmod{m}$ и числа a и m взаимно просты, тогда $b \equiv 0 \pmod{m}$.

Малая теорема Ферма. Если p — простое число и a не делится на p, то $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

27. Чему равен остаток от деления числа a на число m, если $a \equiv -3 \pmod{m}$ при

а) $m = 5$; ________ в) $m = 9$; ________ д) $m = 12$; ________

б) $m = 7$; ________ г) $m = 10$; ________ е) $m = 26$? ________

Решение.

в) $a = 9 \cdot q_1 + r_1$, $-3 = 9 \cdot q_2 + r_2$. Остатки от деления чисел a и -3 на 9 должны совпадать, поэтому $r_1 = r_2$. Следовательно, $a - 9 \cdot q_1 = -3 - 9 \cdot q_2$; $a = 9(q_1 - q_2) - 3 = 9(q_1 - q_2 - 1) + 9 - 3 = 9(q_1 - q_2 - 1) + 6$. Значит, остаток от деления данного числа a на 9 равен 6.

28. Определите, верно ли $A \equiv B \pmod{m}$, если:

а) $A = 121$, $B = 11$, $m = 5$; г) $A = 31$, $B = -1$, $m = 8$;

б) $A = 5$, $B = 7$, $m = 3$; д) $A = 231$, $B = 27$, $m = 2$;

в) $A = 32$, $B = 5$, $m = 9$; е) $A = 143$, $B = 425$, $m = 6$.

Решение.

в) $32 = 3 \cdot 9 + 5$. Следовательно, остаток от деления числа 32 на 9 равен 5. Остаток от деления числа 5 на 9 также равен 5. Так как остатки от деления чисел 32 и 5 на 9 совпадают, то эти числа сравнимы по модулю 9.

29. Определите, верно ли $2^{100} \equiv 3^{100} \pmod{m}$, если:

а) $m = 2$; в) $m = 5$; д) $m = 81$;

б) $m = 3$; г) $m = 13$; е) $m = 211$.

Решение.

в) $2 \equiv -3 \pmod{5}$, следовательно, $2^{100} \equiv (-3)^{100} \pmod{5}$; $2^{100} \equiv (-1)^{100} \cdot 3^{100} \pmod{5}$; $2^{100} \equiv 3^{100} \pmod{5}$.

30. Определите, верно ли, что число $20^{15} - 1$ делится на m, если:

а) $m = 3$; в) $m = 19$; д) $m = 31$;
б) $m = 5$; г) $m = 11$; е) $m = 61$.

Решение.

г) $20^{15} = 2^{15} \cdot 10^{15}$; $32 = 2^5 \equiv -1 \pmod{11}$, следовательно, $2^{15} \equiv (-1)^3 \pmod{11}$; $2^{15} \equiv -1 \pmod{11}$; $10 \equiv -1 \pmod{11}$, следовательно, $10^{15} \equiv (-1)^{15} \pmod{11}$; $10^{15} \equiv -1 \pmod{11}$. Значит, $20^{15} \equiv 1 \pmod{11}$. Следовательно, $20^{15} - 1$ делится на 11.

Приближённое выражение иррациональных чисел через рациональные

Если w — произвольное число, а u — произвольное целое число, то существует рациональная дробь $\frac{m}{n}$ со знаменателем n, которая отличается от w меньше, чем на $\frac{1}{n}$: $0 \leqslant \left|w - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n}$.

31. Для следующих чисел найдите приближённые значения, которые отличаются от каждого из них меньше, чем на $\frac{1}{5}$:

а) $\sqrt{2}$; ________ в) $\sqrt{5}$; ________ д) $\sqrt{72}$; ________
б) $\sqrt{3}$; ________ г) $\sqrt{8}$; ________ е) $\sqrt{180}$. ________

Решение.

б) Так как $1 < \sqrt{3} < 2$ и искомое число b отличается от числа $\sqrt{3}$ меньше, чем на $\frac{1}{5}$, то b заключено между 1 и 2 в одном из пяти интервалов между числами: $1, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}, 2$. Каждый из этих интервалов равен $\frac{1}{5}$. Из перечисленных чисел нужно взять то, которое лежит ближе всего к $\sqrt{3}$.

Для удобства вычислений освободимся от знаменателей, умножив все числа полученного ряда на 5: $5, 6, 7, 8, 9, 10$. Выясним, какое из этих чисел является ближайшим к числу $5\sqrt{3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{75}$. Так как $64 < 75 < 81$, то $8 < \sqrt{75} < 9$. Учитывая, что $75 - 64 < 81 - 75$, получаем искомое число — 9. Значит, $\sqrt{3} \approx \frac{9}{5} = 1{,}8$.

Ответы

Глава I. Линейные уравнения

	а	б	в	г	д	е
1	−8	19	4	−33	32	0
2	0,5	2	0,5	23	2	0
3	28	любое число	любое число	−12	корней нет	корней нет
4	7	−3,4	30	28	27	−2
5	$a+7$	$b-a$	$-1{,}5m$	$a-b$	$-\frac{c}{e}$	$4-c$
6	10	1,2	11	$\frac{1}{6}$	29	$-\frac{20}{23}$
7	да	нет	нет	да	нет	да
8	$-\frac{2}{3}$	3	2,5	−17	−3	любое число
9	4	−3	−3	0	0,5	−2
10	−0,5	−4	3	2	0,2	−4
11	$y=-2x+5$	$y=0{,}25x+20$	$y=15x-18$	$y=0{,}5x+5$	$y=-0{,}5x+8$	$y=-1{,}5x+3{,}5$
12	1; 0	3; 0	0,6; 1,2	2,5; 2	0; −2	3; 12
13	−1	−4	$-\frac{5}{6}$	−0,2	0	5
14	(2; 2)	(4; 5)	(0,3; −0,7)	$\left(-\frac{4}{3}; -\frac{8}{3}\right)$	(4; 5)	не пересекаются
15	пересекаются	параллельны	параллельны	перпендикулярны	совпадают	пересекаются

	а	б	в	г	д	е
16	$c \neq -1{,}5$	решений нет	$c \neq 2{,}5$	$c \neq -2$	$c \neq -\frac{4}{3}$	$c \neq -2$
17	1	−2	любое число	3	5	6
18	−0,5	0,5	1	−1	0,5	−1
19	$x = 2 - 7y$	$x = -0{,}5y$	$x = 10y + 70$	$x = 0{,}5y - 1{,}5$	$x = 0{,}6y - 1{,}8$	$x = 0{,}2y - 2$
20	$y = -1{,}5x + 5{,}5$	$y = 0{,}125x$	$y = -x + 4$	$y = 5x - 3$	$y = -0{,}5x + 0{,}25$	$y = 3x - 26$
21	8; −9	2; 1,5	−4; 4	−3; −1	6; 3	1; −2
22	1	0	∞	1	0	∞
23	(4; 1)	(3; 5)	(10; 15)	(3; 1)	(−1; 4)	(−40; 20)
24	(2; 1)	(−2; 4)	$(\frac{10}{3}; 2)$	(−5; −5)	(−1; 4)	(10; 2)

Глава II. Степень с натуральным показателем

	а	б	в	г	д	е
1	1	125	8	0,125	27	0,027
2	2^4	$\left(\frac{m}{n}\right)^{10}$	$(0{,}2)^k$	$(x-t)^3$	$(-1{,}2)^9$	$(ab)^{n+5}$
3	16	0	9	1	100 000	−125
4	−16	$6\frac{19}{25}$	16	18	$2\frac{93}{125}$	−27
5	101	23	−19	0,1	0	16
6	−56	9	$\frac{27}{125}$	8	250	35
7	$3^5 > 3^2$	$2^3 < 3^2$	$\left(\frac{1}{7}\right)^3 > \left(\frac{1}{7}\right)^4$	$(-0{,}1)^3 < (-0{,}1)^5$	$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 > \left(-\frac{1}{2}\right)^3$	$\left(12\frac{1}{3}\right)^2 < \left(-13\frac{1}{2}\right)^2$
8	a^5	$\left(\frac{1}{5}b\right)^4$	3^9	c^{14}	$(2c)^5$	$0{,}1^6$
9	$(-6)^7$	$(x-7)^{15}$	$\left(-\frac{3}{7}x^5\right)^9$	$(2{,}5h^3)^6$	$(m+n)^{11}$	$(a-b)^6$
10	2^9	2^{13}	2^7	2^4	2^3	2^2
11	3^8	3	3^5	3^3	3^2	3^2
12	$\left(-\frac{6}{7}\right)^5$	c^3	x^2	$\left(\frac{3a}{2}\right)^6$	$\left(\frac{1}{2}b\right)^4$	$(3c)^4$
13	$(a-b)^5$	$(m+n)^9$	$12z$	t	a^8	b^7
14	$k < 0$	$k > 0$	$k > 0$	$k < 0$	$k < 0$	$k > 0$
15	128	3	5	49	144	16

	а	б	в	г	д	е
16	64	243	225	121	−729	0,237
17	0,49	$7\frac{18}{49}$	−0,81	$1\frac{11}{25}$	$7\frac{21}{25}$	$3\frac{1}{16}$
18	14	36	25	9	0,04	0,2
19	a^{23}	a^8	a^5	a^2	a^2	a^3
20	2	2	3	9	5	6
21	$\left(\frac{9}{16}\right)^2$	$(x^2)^2$	$(3a^2)^2$	$0{,}01^2$	$(6y^6)^2$	$(0{,}2z^3)^2$
22	$81y^4$	$128c^{21}d^7$	$-8m^3n^6$	$0{,}01p^4q^6$	$-1000x^3z^6$	$a^{16}b^{12}$
23	$(1{,}2a^2b^4)^4$	$(ab^2c^3)^3$	$(2cd^2)^5$	$(-0{,}3x^5)^3$	$(2xy^2z^3)^4$	$(-10mn^3)^3$
24	27	35	1	18	1	9
25	30	28	32	1	1	125
26	$\frac{m^5}{n^5}$	$\frac{9}{a^2}$	$\frac{b^3}{125}$	$-\frac{32x^5y^5}{z^5}$	$\frac{c^4}{81d^4}$	$-\frac{64t^3}{343s^3}$
27	$1{,}4^2$	$0{,}75^7$	$(0{,}5x)^5$	$\left(\frac{2a}{7b}\right)^3$	$1{,}8^2$	$1{,}4^3$
28	$\left(\frac{5a}{3b}\right)^4$	$(-1{,}2c)^3$	$\left(-\frac{3}{b^3}\right)^3$	$\left(-\frac{1}{7}\right)^3$	$\left(\frac{2m}{p}\right)^8$	$(0{,}75k)^2$
29	$3{,}58 \cdot 10^2$	$8{,}737 \cdot 10^4$	$9{,}00035 \cdot 10^5$	$5{,}2 \cdot 10^6$	$6{,}40007 \cdot 10^3$	$7{,}4 \cdot 10^5$.
30	20	$2{,}53 \cdot 10^7$	30	$3 \cdot 10^6$	$3 \cdot 10^3$	$2{,}5 \cdot 10^8$

Глава III. Одночлены

	а	б	в	г	д	е
1	да	да	да	нет	нет	да
2	$6a^4$; 6	$-2b^5c^2$; -2	$7{,}5z^5d$; 7,5	$-6m^3n^5$; -6	p^5q^3; 1	$-\frac{1}{4}s^{m+2}t^{n+1}$; $-\frac{1}{4}$
3	p^nq; 1	$a^2x^7y^4z$; 1	$0{,}2b^2c^2d$; 0,2	$\frac{5}{7}ab$; $\frac{5}{7}$	$2^{m+n}a^2$; 2^{m+n}	$-t^5s^5$; -1
4	да	да	да	нет	нет	да
5	$3a^2b$	$4x$	$0{,}5m^2n^3$	z^2t	$4x^2y$	$4c^2d$
6	$14x$	$4a^2b$	$4k$	$2{,}9m^3$	$2t^5$	$6a^2$
7	$-2b^5c^3$	0	$11\frac{2}{3}m^2n^3$	$4t^2z$	$2x^2$	0
8	$2a^2$	$2{,}5x^2y$	$-5{,}2t^5$	$-2{,}8a^2b^3c$	$-m^3n^2$	$8x^2y$
9	$-8ab$	$6mn$	$20a^2b^2$	$-1{,}5mn^2$	$-a^5b^5$	$-1{,}75m^5n^7p^2$
10	$-5n^4$	a^5y^5	$b^4c^4d^4$	$-9m^6n^6p^3$	$-2t^5s^4$	x^6y^6
11	$4a^2$	$27b^3$	a^8b^4	$-27x^6y^3$	$\frac{1}{32}m^{10}n^{10}$	$\frac{16}{81}a^{12}b^8$
12	$0{,}01a^{10}b^{10}$	$1{,}44x^4y^4$	$-\frac{27}{125}a^{12}b^6$	$0{,}064t^{3n}s^{3k}$	a^6	a^2
13	$8xy$	$4cd$	$35m$	$0{,}03n$	$2pq$	$10t^6$
14	24	mnt	p^2q^3	x^2y^2	$36m^3$	d^3
15	$(2a)^2$	$\left(\frac{1}{3}b^2c\right)^2$	$(9x^3y^2)^2$	$\left(\frac{3}{4}m^5n^4\right)^2$	$(1{,}4p^6q^7)^2$	$(1{,}5c^{10}d^8)^2$

	а	б	в	г	д	е
16	$(3b)^3$	$\left(-2a^2\right)^3$	$\left(-0{,}1a^3b^4\right)^3$	$\left(6m^2n^5\right)^3$	$\left(-\frac{1}{5}x^5y^7\right)^3$	$\left(7c^6d^8\right)^3$
17	1	4	4	2	3	2
18	$-27x^{11}y^3$	$4a^4$	$-11x^{11}$	$-20y^6$	$a^{15}b^{15}$	$0{,}5m^5n^4$
19	2	1	a	y^3	z^5	3
20	$2a$	$2xz$	$2ay$	-5	$7a^5b$	$10mn^3$

Глава IV. Многочлены

	а	б	в	г	д	е
1	0	p^3q	$3a^2b+2a^3b$	$3a^2b^2$	a^3b^3	$x^3y^3+0{,}5x^3y^4$
2	0	$6a^2$	$\frac{1}{3}a^2b$	$2n-m$	$4n^2q^2-p^2q^2$	$-4x^2y^3$
3	$10x+10y$	$2{,}2a+2$	$10m^2-3mn+3$	$3a^3-8ab-b^2$	$-10x^2-5x^2y$	9
4	$a-b$	$8x+y+2z$	$10a^2-6b^2-4c$	$-3m^2n-5mn^2$	$2{,}8x-16$	$9y^2-2x^2y-x^2$
5	$4a^3-2a^2+8$	$2x^3-x$	$6a^2b-12ab^2$	$-x^3yz+$ $+xy^3z+xyz^3$	$5m^3n^2-7{,}5m^2n^3+$ $+12{,}5m^2n^4$	$-4x^3y-12xy^2$
6	$c+3d$	$5a^2+5b^2$	$3d^2t^2-3c^2t^2$	$18s$	$-5ab^3$	$7p^3q^5$
7	b^2+5b+6	t^2-3t+2	$a^2-2a-15$	x^2+x-6	$y^2-4y-12$	n^2-m^2
8	x^3-2x^2- $-x+2$	$a^2b^2-a^3-$ $-b^3+ab$	$-x^3-xy^2-$ $-x^2y-y^3$	$3a^3+a^2b^2+$ $+9ab+3b^3$	m^2-mn+ $+2m-2n$	t^2+ts+ $+3t+3s$
9	$1+a$	$3a+2$	$x+3$	$2-3y$	$2z-z^2$	$a-2b$
10	$0{,}7x-$ $-0{,}5y+0{,}3$	$16-8zt+$ $+12z^2$	$a^2-a-0{,}75$	$-0{,}2b^7-$ $-0{,}2b^2-0{,}2$	$-0{,}5x^2-$ $-0{,}5x-0{,}5$	$3c^2-3$
11	$3ab-2$	$2c^2d^3+7c$	$-0{,}25x^3+$ $+0{,}75x^2y^2$	$-81kl^6+2k^2l^4$	$-0{,}5xz^3+0{,}3x^3z$	$2ab+4$
12	$3(a+1)$	$2(3b+c)$	$7(n-2)$	$12(q-3p+2)$	$7(7k^2-2k+8)$	$5x(y-z)$
13	$-mn(m-$ $-5n+4mn)$	$1{,}2x^3\times$ $\times(2x^2-6)$	$0{,}4b^7(b-2)$	$x^n(x^3-1)$	$y^n(y^n-2)$	$a^2p^{n-1}\times$ $\times(p^4+a^{n-2})$
14	$(c+d)(1+k)$	$4m$	$(a-b)(3+c)$	$(y+4)(x+z)$	$2(n+t)(m+2k)$	$0{,}1s(5-t)\times$ $\times(5s+1)$

	а	б	в	г	д	е
15	$(p-q)\times$ $\times\left(1-\frac{1}{7}n\right)$	$8(1-b)$	$-(x+y)\times$ $\times(4a+1)$	$(z-p)\times$ $\times(t^3-t-z)$	$8(n+4)\times$ $\times(m^2+1)$	$t(m^2+2)\times$ $\times(7t^2-2t+1)$
16	300	210	22	210	6,9	460
17	$(x-1)^2$	$(x+6)(x-1)$	$(x-1)(3x-4)$	$-(x-1)(x-2)$	$(b+1)(a+1)$	$(xy-1)(x^2y^2+2)$
18	a^2+4a+4	$16-8b+b^2$	$m^2-2mn+n^2$	$25+10p+p^2$	$-t^2+6t-9$	$4+4x+x^2$
19	$9x^2-12xy+$ $+4y^2$	$-\frac{1}{4}t^2+$ $+ts-s^2$	$0{,}09a^2-1{,}5ab+$ $+6{,}25b^2$	$x^4-\frac{1}{2}x^2y+$ $+\frac{1}{16}y^2$	$100t^2+4tk+$ $+0{,}04k^2$	$-36c^2+$ $+4cd^2-\frac{1}{9}d^4$
20	729	3721	2809	6724	2209	1521
21	x^2-y^2	$4-9x^2$	$25d^2-c^2$	m^6-n^4	$49t^2-4s^2$	$0{,}09b^2-0{,}04a^2$
22	$6{,}25x^2-1{,}44$	$\frac{49}{16}a^2-\frac{4}{25}b^2$	n^2-m^2	$\frac{1}{4}p^4-\frac{1}{9}q^4$	$4s^2-9t^2$	$0{,}09n^2-0{,}01m^2$
23	$(a-c)(a+c)$	$(2x-1)\times$ $\times(2x+1)$	$(3d-4k)\times$ $\times(3d+4k)$	$(5y-9x)\times$ $\times(5y+9x)$	$(6s-7t)\times$ $\times(6s+7t)$	$(0{,}2x-1)\times$ $\times(0{,}2x+1)$
24	$(0{,}3y-0{,}2z)\times$ $\times(0{,}3y+0{,}2z)$	$(x-y-1)\times$ $\times(x+y-1)$	$4ab$	$4c(c+3d)$	$t(2s-t)$	$4y(2x+y)$
25	396	1591	2484	351	891	3599
26	360	6,8	9,6	$\frac{120}{7}$	2	20
27	0,5	0,2	0,2	$\frac{20}{17}$	$\frac{12}{17}$	$\frac{24}{71}$

	а	б	в	г	д	е
28	2	y	$20b$	$0{,}4d$	$18kt$	$3s$
29	$9a^4$	$10c^3d$	$84mn^2$	$12{,}25$	x^4	$2{,}25a^8$
30	$(x+y)^2$	$(3a-b)^2$	$(1-2t)^2$	$(m-6n)^2$	$(4-s)^2$	$(y-1)^2(y+1)^2$
31	$-(3a^2-4b^2)^2$	$(5a+3b)^2$	$7(x-1)^2\times$ $\times(x^2+x+1)^2$	$9(ab+c)^2$	$(a-b-t)\times$ $\times(a-b+t)$	$(2-x-2y)\times$ $\times(2+x+2y)$
32	$4(1-d)\times$ $\times(2d-1)$	$(10-x+y)\times$ $\times(10+x-y)$	$-4x(3+x)$	$4(2x+3)\times$ $\times(5x+1)$	$-9(2a+5)$	$(1-x-y)\times$ $\times(1+x+y)$
33	x^2	25	a^2	$3{,}2mn$	$-0{,}3ab$	b^2
34	a^3+6a^2+ $+12a+8$	$8-12b+$ $+6b^2-b^3$	$1+3b^2+$ $+3b^4+b^6$	a^6-3a^4+ $+3a^2-1$	$8a^3+12a^2b+$ $+6ab^2+b^3$	c^3-9c^2d+ $+27cd^2-27d^3$
35	c^3-d^3	$8-x^3$	b^3+27	$8a^3-1$	a^9-8	$1+c^9$
36	$(m+n)\times$ $\times(m^2-mn+$ $+n^2)$	$(3a^2-b)\times$ $\times(9a^4+$ $+3a^2b+b^2)$	$(5x^3-4y^2)\times$ $\times(25x^6+20x^3y^2+$ $+16y^4)$	$(a-1)\times$ $\times(a+1)\times$ $\times(a^2-a+1)\times$ $\times(a^2+a+1)$	$(t-6s)\times$ $\times(t^2+6ts+$ $+36s^2)$	$(0{,}2-0{,}1m)\times$ $\times(0{,}04+0{,}02m+$ $+0{,}01m^2)$

Глава V. Алгебраические дроби

	а	б	в	г	д	е
1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{7}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{9}$	5
2	n^4	$-p$	$-\frac{1}{m}$	3	$\frac{1}{2b^2}$	$\frac{3a^2}{b^2}$
3	$\frac{5d^2}{2}$	$\frac{18x}{y^2}$	$-\frac{8m}{7n}$	$-\frac{t}{2s^2}$	$\frac{2y}{xz}$	$\frac{1}{5k^2p}$
4	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3(m+n)}$	$4(k-t)^2$	$\frac{k^2-s^2}{6(k^2+s^2)}$	$4(a-b)$
5	$a=3$	$x=-1$	$c=-5$	$d=\frac{1}{3}$	$x=1; x=-4$	$x=-1; x=-4$
6	$x=0; x=3$	$t=-15; t=3$	$b=0; b=4$	$c=0; c=\pm 6$	$d=\pm 2$	$a=\pm 8$
7	$x=-3$	$x=\pm 2$	таких значений нет	$x=4$	$x=-3$	$x=1$
8	3	4,5	6	4	10	5
9	1	0,25	-1	$\frac{4}{c+d}$	2,25	$\frac{3}{1-10k}$
10	$-\frac{2ab}{(c-d)^2}$	$\frac{2}{3b^4(b-7)}$	xy	$\frac{4}{c^2d}$	$\frac{1}{n-m}$	$(a+5)^2$
11	$\frac{a-3}{a}$	$\frac{a+b}{2a}$	$\frac{5k}{k+2}$	$\frac{c}{a}$	$\frac{b-d}{c}$	$\frac{k}{5-t}$
12	$\frac{3}{x^2+1}$	$\frac{a^2-1}{7}$	$\frac{5a^2}{2b^2}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{a+b}$	$c-d$

	а	б	в	г	д	е
13	$\frac{a+b}{a^2-ab+b^2}$	$\frac{a+b}{(a-b)^2}$	$4a+5c$	$3y-x$	$\frac{1}{5-2x}$	$\frac{2-3x}{2+3x}$
14	6	0,5	16	0,07	0,5	13
15	+	−	+	+	+	−
16	−1	2	−2,5	0,25	2	0,2
17	$\frac{x+y}{2}$	$\frac{a-b}{4}$	$\frac{c-2d}{10}$	$\frac{2x}{3}$	$\frac{5b}{14}$	$\frac{4m}{3}$
18	$\frac{c-6}{d}$	$\frac{10a-3}{a}$	$\frac{6m-11}{2m}$	$\frac{4-z}{2z}$	$\frac{5p+7}{10p^2}$	$\frac{7x-3}{6x^3}$
19	$\frac{c+b}{abc}$	$\frac{px-cy}{cdp}$	$\frac{2-4b}{m+n}$	$\frac{2a+9}{z-t}$	$\frac{13}{2(a+b)}$	$\frac{7k^2}{15(c-d)}$
20	$\frac{b+2}{1-b}$	$\frac{c^2+5}{c+1}$	$\frac{d^2-4}{d-1}$	$\frac{3-a^2}{a+1}$	$\frac{2xy}{x^2-y^2}$	$\frac{a^2+b^2}{ab}$
21	$\frac{z}{x}$	$\frac{p^2+q^2}{2q}$	$\frac{2}{3t}$	$-\frac{t^2+s^2}{2t}$	$\frac{2c^2}{c-b}$	$\frac{2a^2}{a+d}$
22	$\frac{1}{b^2-1}$	$\frac{3(a+1)}{a^2-9}$	$\frac{6}{36-c^2}$	0	$\frac{b}{a(a^2-b^2)}$	$\frac{4}{k(k^2-4)}$
23	$4xy$	$\frac{5}{14}$	16,5	$10m$	$0{,}5a$	$0{,}5c^2$
24	$\frac{b^2}{a^2}$	$\frac{z}{q}$	$6d$	$\frac{bc}{a^2}$	$\frac{kt}{x}$	$\frac{t^2}{b}$
25	$\frac{2n^2}{p^2m^2}$	$-\frac{2bx}{3c}$	$-\frac{6by}{ax}$	$0{,}2s^2t^2$	$-\frac{20xy}{3}$	$\frac{x}{3cd}$

	а	б	в	г	д	е
26	-1	$\frac{b}{3}$	$(x+y)^2$	$a(a-1)$	$\frac{x(x-y)}{2y}$	$-\frac{2}{3}$
27	$a+b$	$\frac{x+5}{x+3}$	$\frac{x-5}{8}$	$\frac{a+2b}{20}$	$\frac{2(p+q)}{3}$	$5(m+5)$
28	$\frac{m^2(1-n^2)}{n^2}$	$\frac{s^2-4t^2}{t^2}$	$5(a+b)$	t	$-\frac{3b}{b+3}$	$2a-b$

Глава VI. Квадратные корни

	а	б	в	г	д	е
1	8 см	$\frac{9}{13}$ дм	0,1 м	1,25 см	2,5 дм	1 м
2	да	нет	да	да	нет	да
3	4	-9	$-0{,}25$	$\frac{15}{17}$	20	4
4	2	0,8	-3	0	$-3{,}75$	12
5	$a \geqslant 0$	$a \geqslant 0$	a — любое число	$a > 0$	$a > 0$	$a \leqslant 0$
6	$a \geqslant -4$	$a < 0$	$a \leqslant 3$	$a \geqslant 0$	$a < 8$	$a \neq 0$
7	10	13	25	17	$3k$	$\sqrt{30}$
8	$\sqrt{12} < 4$	$2\sqrt{5} < \sqrt{25}$	$\sqrt{10} > \pi$	$2{,}3 < \sqrt{6{,}25}$	$\sqrt{7{,}84} = 2{,}8$	$3{,}1 > \sqrt{9{,}6}$
9	$3 - 2\sqrt{2}$	$\sqrt{5} - 2$	$5 - \sqrt{24}$	$\sqrt{3} - \sqrt{2}$	$x - 2$	$-b - 4$
10	6	30	0,03	1,44	4,2	1,125
11	12	60	78	0,32	0,28	$\frac{20}{63}$
12	0,75	0,6	1,25	$2\frac{2}{3}$	2,5	1,75
13	9	8	15	1,4	2,4	2,5
14	3	4	5	0,8	$\frac{3}{7}$	$\frac{7}{8}$
15	4; 5	6; 7	0; 1	$-9; -8$	$-1; 0$	$-16; -15$
16	2	2	2	2	1	1

	а	б	в	г	д	е
17	2	2	2	4	1	3
18	2	4	4	5	5	3
19	20	18	56	1,1	0	16
20	18	3	12	11	4	−6
21	10,8	20	$\frac{5}{26}$	$\frac{7}{12}$	2,2	$1\frac{7}{8}$
22	$3\sqrt{a}$	$b^4\sqrt{5}$	$7c^2$	$5a\sqrt{3a}$	$3b^3\sqrt{3}$	$-\frac{3}{2}x^3\sqrt{y}$
23	$-1\frac{2}{7}p^6q^3\sqrt{p}$	$-6m\sqrt{n}$	$1{,}25t^2$	$1{,}4x^3\sqrt{y}$	$1{,}7ab\sqrt{a}$	$0{,}25t^3s^4\sqrt{t}$
24	$\sqrt{20}$	$\sqrt{75}$	$\sqrt{98}$	$-\sqrt{45}$	$-\sqrt{32}$	$-\sqrt{160}$
25	$-\sqrt{11b^8}$	$\sqrt{16c^4}$	$-\sqrt{5z^8}$	$\sqrt{\frac{3}{n^{16}}}$	$\sqrt{8x^5z^{13}}$	$\sqrt{m^7}$
26	$7\sqrt{5}$	$\sqrt{3}$	$6\sqrt{2}$	$3\sqrt{5}$	$-10\sqrt{2}$	$10\sqrt{3}$
27	5	23	±2	корней нет	±5	−2; 8
28	$(-\infty; -3] \cup [5; +\infty)$	$(-8; -2)$	$(-\infty; -12] \cup [12; +\infty)$	$[11; +\infty)$	$[2; 3]$	$[2; 4]$
29	$(a-\sqrt{5})\times$ $\times(a+\sqrt{5})$	$(\sqrt{7}-b)\times$ $\times(\sqrt{7}+b)$	$(\sqrt{m}-10)\times$ $\times(\sqrt{m}+10)$	$(6-n)\times$ $\times(6+n)$	$(\sqrt{c}-\sqrt{3})\times$ $\times(\sqrt{c}+\sqrt{3})$	$(\sqrt{m}-\sqrt{n})\times$ $\times(\sqrt{m}+\sqrt{n})$
30	$(1-\sqrt{q})^2$	$(\sqrt{p}+2)^2$	$(\sqrt{c}+\sqrt{d})^2$	$(\sqrt{t}+3s)^2$	$(\sqrt{3}k-5)^2$	$(8a^3-10b^2)\times$ $\times(8a^3+10b^2)$
31	$\sqrt{3}+1$	$\sqrt{11}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{a}+\sqrt{3}$	$\sqrt{m}-\sqrt{n}$
32	$3\sqrt{2}$	$1{,}5\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{21}}{3}$	$2(\sqrt{7}+\sqrt{5})$	$-\sqrt{3}-\sqrt{11}$	$4+\sqrt{15}$

Глава VII. Арифметический корень натуральной степени

	а	б	в	г	д	е
1	1	0	5	3	$\frac{1}{4}$	0,2
2	2	0	1	0,5	$\frac{4}{3}$	0,1
3	2	8	$\frac{1}{5}$	-625	4	$-\frac{1}{3}$
4	$[-2{,}5;+\infty)$	$(-\infty;0{,}5]\cup[1;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$	$(-\infty;-2)\cup[2;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$	$(-\infty;8]$
5	10	6	20	1,4	27	4
6	$3ab^4$	$4x^4z^5$	y^2z^3	1,5	$\frac{2x^2}{3y}$	$\frac{4a^2b^7}{5z^3}$
7	5	$\frac{1}{9}$	2	2	27	$\frac{1}{4}$
8	a^2b^3	x^2	$27a^3$	1	1	$3ab$
9	2	3	5	6,8	0	6

Глава VIII. Квадратные уравнения

	а	б	в	г	д	е
1	да	да	нет	нет	нет	нет
2	$5x^2+2x-$ $-1=0$	$2x^2-x-\frac{1}{5}=0$	$-\frac{1}{7}x^2+\frac{3}{4}=0$	$-12x^2=0$	$-x^2+dx+$ $+5k=0$	$0{,}75x^2-mx+$ $+1{,}2=0$
3	x^2+2x- $-3=0$ $a=1, b=2,$ $c=-3$	$x^2-7x-5=0$ $a=1, b=-7,$ $c=-5$	$2x^2+22x-$ $-17=0$ $a=2, b=22,$ $c=-17$	$x^2-3x-4=0$ $a=1, b=-3,$ $c=-4$	$3x^2+x-3=0$ $a=3, b=1,$ $c=-3$	$x^2+x-6=0$ $a=1, b=1,$ $c=-6$
4	0	0	0	± 8	± 6	корней нет
5	$\pm\frac{1}{12}$	$\pm\frac{1}{9}$	корней нет	корней нет	$\pm\frac{3\sqrt{5}}{7}$	$\pm 4\sqrt{2}$
6	$-8; 0$	$0; 0{,}25$	$0; 9$	$0; 30$	$0; 10$	$-0{,}1; 0$
7	$0; 9$	$-1; 0$	$\pm\sqrt{10}$	$\pm 3\sqrt{2}$	± 2	± 3
8	$1; 1{,}5$	$-1; 2$	$-3; 1$	$0; \pm 1$	$0; 2$	$-2{,}5; 0$
9	0	1	± 1	-1	$0; 1$	$2m$
10	0	-1	2	0	1	-3
11	да	да	да	нет	да	да
12	25	-79	0	-36	0	121
13	13	61	1	0	42	0
14	2	1	2	0	1	0
15	$-0{,}5; 3$	$-\frac{4}{3}; 2$	корней нет	$-1{,}5; 5$	$-1; -\frac{2}{3}$	$0{,}4; 2$

	а	б	в	г	д	е
16	$\frac{2}{3}; 1$	$\frac{1}{2}; 1$	$-1\frac{3}{17}; 1$	$-0{,}998; 1$	$-\frac{100}{109}; 1$	$\frac{4}{15}; 1$
17	$-1; \frac{3}{7}$	$-1; \frac{2}{7}$	$-1\frac{2}{3}; -1$	$-1; -\frac{17}{32}$	$-1; 10$	$-1; 1\frac{5}{8}$
18	$x^2 + 2x - 1 = 0$	$x^2 + 9x + 2{,}7 = 0$	$x^2 - 7\frac{3}{8}x - 5\frac{1}{6} = 0$	$x^2 - 4x + 3 = 0$	$x^2 + 0{,}8x - 1{,}2 = 0$	$x^2 + \sqrt{3}x - 3 = 0$
19	$x^2 - 2x - 4 = 0$	$x^2 - 2x - 5 = 0$	$x^2 - 2{,}5x - 4 = 0$	$x^2 - 2x + 3 = 0$	$x^2 - 3x + 2 = 0$	$x^2 - 1{,}1x - 10 = 0$
20	$-3 \pm \sqrt{10}$	$-2 \pm \sqrt{14}$	$-2; 4$	$-4 \pm 3\sqrt{2}$	$6 \pm 4\sqrt{2}$	$-12; 2$
21	$0{,}5; 0{,}06$	$-\frac{2}{5}; -\frac{3}{25}$	$2\sqrt{3}; -d^2$	$4b; -a^2$	$-11; 24$	$12; 11$
22	$x^2 - 12x + 35 = 0$	$x^2 - x - 6 = 0$	$x^2 - 5x - 6 = 0$	$x^2 - 2{,}6x + 0{,}25 = 0$	$x^2 - \sqrt{2}x - 4 = 0$	$x^2 + 0{,}69x - 0{,}007 = 0$
23	оба отрицательные	разные	разные	оба отрицательные	разные	оба положительные
24	$2; 3$	$-6; 2$	$-5; 3$	$-6; -2$	$3; 4$	$3; 8$
25	$-3; -1$	$-4; 16$	$-4; -11$	$2; 11$	$-5; -4$	$8; -15$
26	$-5; -10$	$-4; -48$	$1; -3$	$-7; 56$	$10; 170$	$-3; -6$
27	$1{,}5; -9{,}5$	$1; -10$	$-2; -1{,}5$	$-0{,}4; -8$	$-0{,}25; 6$	$-4; -3{,}5$
28	$5; 5$	$-\frac{2}{3}; 6$	$0{,}25; 2$	$\frac{2}{7}; -2$	$1{,}5; 12$	$7; 35$
29	$-2{,}75; -2$	$0{,}2; 2$	$\frac{2}{3}; 2$	$-\frac{3}{11}; -\frac{1}{3}$	$0{,}4; 4$	$-2{,}5; 0{,}25$

	а	б	в	г	д	е
30	$-2\frac{2}{3}; 2$	$-2; -\frac{2}{7}$	$\frac{1}{8}; \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}; \frac{3}{4}$	$-\frac{2}{5}; \frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}; -\frac{3}{4}$
31	$(x-1)(x-2)$	$(x+8)(x-3)$	$2(x+4)(x-1)$	$(x+4)(9-x)$	$(x+2)(11-x)$	$(x-4)^2$
32	$\frac{x-3}{x+3}$	$\frac{x+7}{x-2}$	$\frac{x+3}{x+8}$	$\frac{x-3}{x+4}$	$\frac{x-1}{x-3}$	$\frac{x-6}{x-5}$
33	± 2	$\pm 1; \pm 7$	$\pm\sqrt{5}$	$\pm 1; \pm 2$	$\pm 1; \pm 3$	± 1

Глава IX. Квадратичная функция

	а	б	в	г	д	е
1	да	да	нет	да	нет	да
2	9	−14	14	−9	−1	−21
3	13	10	0,5	1	9	−15
4	вверх	вниз	вниз	вверх	вверх	вниз
5	$(-2; -5)$	$(0; 3)$	$(4; 20)$	$(-1{,}5; -4{,}5)$	$(0; -4)$	$(-2; 48)$
6	$x = -1{,}5$	$x = 2$	$x = -1$	$x = 0$	$x = 0$	$x = 1$
7	$(1; 0)$, $(3; 0)$	$(-1{,}5; 0)$, $(-1; 0)$	$(2; 0)$, $(5; 0)$	$(2; 0)$	$(-3; 0)$	$(1; 0)$, $(7; 0)$
8	$(5; 1)$	$(-k; -2)$	$(-\sqrt{3}; -m)$	$(-2; 3)$	$(\sqrt{2}; 8)$	$(m; n)$
9	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$	$[3; +\infty)$	$(-\infty; -1]$	$[-10; +\infty)$	$(-\infty; 1]$
10	$[0; 9]$	$[-4; 0]$	$[-4; 5]$	$[5; 6]$	$[1; 4]$	$[2; 12]$

Глава X. Неравенства

	а	б	в	г	д	е
1	$\frac{3}{7} < \frac{4}{9}$	$-\frac{11}{12} < -\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5} < 0{,}8$	$-1\frac{7}{8} < -1{,}6$	$-2{,}4 > -2\frac{3}{5}$	$\frac{13}{50} > 0{,}24$
2	$b < a$	$a > b$	$b > a$	$a < b$	$b = a$	$a < b$
3	$(-1{,}28)^2 > 0$	$(-2{,}78)^3 < 0$	$\left(-\frac{2}{7}\right)^2 \cdot (-4) < 0$	$(-\pi)^2 > 0$	$-\frac{4}{12} + \frac{3}{4} > 0$	$2{,}45 - 2\frac{1}{4} > 0$
4	$x < 0$	$x > 0$	$x > 0$	$x < 0$	$x < 0$	$x < 0$
5	$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$
6	$70 > 54$	$1{,}3 > 1{,}2$	$\frac{80}{25} > \frac{60}{25}$	$\frac{14}{28} < \frac{35}{28}$	$-0{,}65 < -0{,}3$	$0 > -2$
7	$5 > -3{,}5$	$3 > -2$	$-\frac{1}{8} > -\frac{1}{4}$	$5 < 5{,}4$	$-\frac{3}{14} > -\frac{5}{6}$	$9 > 0$
8	$2m < \frac{3}{5}$	$\frac{m}{2} < -1$	$5 - m > 7$	$\frac{m}{6} < 0$	$-\frac{m}{3} > -2{,}3$	$-\frac{m}{9} > \frac{5}{24}$
9	$(-16; +\infty)$	$(-\infty; 39)$	$(10; +\infty)$	$(-2; +\infty)$	$(-\infty; 33)$	$(-12; +\infty)$
10	$(2; 3)$	$(-75; -50)$	$(-5; 0)$	$(23; 33)$	$(-16; -11)$	$(0; 5)$
11	1	5	6	2	4	3
12	да	нет	нет	да	да	да
13	$[-4; +\infty)$	$(0; +\infty)$	$(-2; +\infty)$	$[1; +\infty)$	$(2; +\infty)$	$(3; +\infty)$
14	$(-2{,}5; +\infty)$	$(-\infty; 2)$	$[12; +\infty)$	$[-2; +\infty)$	$(-\infty; 2)$	$[1; +\infty)$
15	-9	-3	-2	1	3	0
16	2	-2	-1	0	-1	-4
17	$(4; 12)$	$(-10; -9)$	$[-2{,}2; -1]$	$[-3; -2{,}5]$	$[-12; 13]$	$(2; 3)$

14. Зак. № 265

	а	б	в	г	д	е
18	$(3{,}5; 8)$	$(3; +\infty)$	$(-2; 0)$	$(5; +\infty)$	$(-\infty; 2)$	$(-\infty; -2)$
19	$[-3; 3]$	$(-2; 2)$	$[-3; 1]$	$(-5; 2)$	$[-3; 8]$	$\left[-2; \frac{22}{9}\right]$
20	$(-\infty; 1] \cup [7; +\infty)$	$(-\infty; 6] \cup [8; +\infty)$	$(-\infty; -2{,}5] \cup [1{,}5; +\infty)$	$(-\infty; -3] \cup \left[\frac{19}{3}; +\infty\right)$	$(-\infty; -0{,}5] \cup [0{,}5; +\infty)$	$(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$
21	$t > 0$	$t < 0$	$t < 0$	$t > 0$	$t < 0$	$t > 0$
22	да	да	нет	да	нет	да
23	$x^2 + 3x + 2 > 0$	$5x^2 + x + 11 > 0$	$x^2 - 3x - 7 \geqslant 0$	$x^2 - 2x - 4 \leqslant 0$	$x^2 - 4 \leqslant 0$	$x^2 - 18 \geqslant 0$
24	да	да	да	нет	да	нет
25	$(-\infty; -5) \cup (2; +\infty)$	$\left(\frac{1}{3}; 1\right)$	$\left(-1; \frac{16}{9}\right)$	$(-\infty; 1) \cup (14; +\infty)$	$(-\infty; 0{,}5) \cup (3; +\infty)$	-3
26	$(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	решений нет	$(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$	$(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$	$(2; 7)$
27	решений нет	$(-\infty; +\infty)$	решений нет	$(-2; 2)$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
28	$(-\infty; -5) \cup (4; +\infty)$	$(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$	$\left(-\infty; -\frac{8}{3}\right] \cup [7; +\infty)$	$\left[-\frac{4}{7}; \frac{4}{7}\right]$	$\left(-\frac{2}{3}; 5\right)$	$[-0{,}5; 0{,}5]$
29	$(-2; 1)$	$(-\infty; -7) \cup [3; +\infty)$	$(-\infty; -2) \cup [4; +\infty)$	$[-5; 10)$	$(-\infty; -1) \cup (3; 12)$	$(-2; 5] \cup [7; +\infty)$
30	$(-2; 3) \cup (7; +\infty)$	$(-\infty; -1] \cup [0; 1]$	$(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$	$(-\infty; -10] \cup \{3\} \cup [11; +\infty)$	$(-1; 2)$	$\{-7\} \cup [0; 4]$

Глава XI. Степень с рациональным показателем

	а	б	в	г	д	е
1	1	$\frac{1}{64}$	1	$-\frac{1}{125}$	4	81
2	2^{-7}	3^{-5}	x^{-3}	a^{-25}	$\left(\frac{1}{4}\right)^{-5}$	$\left(\frac{1}{b}\right)^{-6}$
3	$12^{-5} < 1$	$15^0 = 1$	$\left(1\frac{3}{7}\right)^{-2} < 1$	$\left(\frac{4}{35}\right)^{-1} > 1$	$(0{,}6)^{-7} > 1$	$\left(\frac{3}{20}\right)^{-2} > 1$
4	$\frac{1}{(x+y)^2}$	$\frac{1}{(x-y)^3}$	$(a-b)^5$	$\frac{3}{ab^5}$	$\frac{7y^3}{x^2}$	$\frac{d^3c^8}{25}$
5	$\frac{1}{25}$	$\frac{100}{9}$	$\frac{9}{2}$	0,008	$\frac{1}{4}$	3
6	a^{-4}	b^{15}	x^{-9}	1	a^6	1
7	c^3d^{-6}	$9a^2b^{-2}$	$\frac{1}{32}a^{-10}$	$5c^2$	1	b^{-24}
8	$\frac{b^{10}}{a^{12}}$	$\frac{m^3}{n^2}$	$4x^8y^6$	$3abc$	$6c$	$\frac{5t}{s^3}$
9	3	1	50	0	0	6,5
10	a^4	b	c^{-1}	d^{-2}	t^0	s^0
11	$2{,}7 \cdot 10^{10}$	$7{,}1 \cdot 10^{-7}$	$8 \cdot 10^{-3}$	$1{,}6 \cdot 10^{-3}$	$8{,}06 \cdot 10^{-8}$	$2{,}5 \cdot 10^7$
12	8	3	2	4	27	$\frac{1}{8}$
13	2	4	49	$\frac{1}{4}$	9	25

	а	б	в	г	д	е
14	$\sqrt[5]{343}$	$\sqrt{0{,}25}$	$\sqrt[3]{a}$	$\sqrt[3]{b^2}$	$\sqrt{4y}$	$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{5a}\right)^m}$
15	$7^{\frac{1}{3}}$	$\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{5}}$	$1{,}2^{-\frac{3}{4}}$	$(x^2+y^2)^{\frac{1}{5}}$	$10^{\frac{2}{3}}$	$(a+2)^{\frac{1}{6}}$
16	$(0;+\infty)$	$[-2;+\infty)$	$(-\infty;1)\cup$ $\cup(1;+\infty)$	$(-\infty;0)\cup$ $\cup(0;+\infty)$	$(-\infty;0{,}6)$	$[-2;+\infty)$
17	$b^{\frac{1}{2}}$	a	$x^{3,8}$	y^0	3	$0{,}2^{2k}$
18	$\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\times$ $\times\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$	$\left(2x^{\frac{1}{2}}-3y^{\frac{1}{2}}\right)\times$ $\times\left(2x^{\frac{1}{2}}+3y^{\frac{1}{2}}\right)$	$(\sqrt{x}-1)^2$	$5^{\frac{2}{3}}(5^{\frac{1}{3}}-1)$	$k^{\frac{2}{5}}\left(p^{\frac{1}{5}}-q^{\frac{1}{5}}\right)\times$ $\times\left(p^{\frac{1}{5}}+q^{\frac{1}{5}}\right)$	$\left(7^{\frac{1}{8}}+a^{\frac{1}{4}}\right)^2$
19	$x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}$	$m^{\frac{1}{4}}+n^{\frac{1}{4}}$	$\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}$	$c^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{\left(t^{\frac{1}{2}}+s^{\frac{1}{2}}\right)\left(t^{\frac{1}{4}}+s^{\frac{1}{4}}\right)}$	$\frac{1}{b^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{2}{3}}}$

Глава XII. Показательная функция

	а	б	в	г	д	е
1	да	нет	нет	да	нет	да
2	9	$\frac{1}{32}$	1	9	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
3	возрастающая	убывающая	возрастающая	возрастающая	возрастающая	убывающая
4	$(3;+\infty)$	$(0;+\infty)$	$(-4;+\infty)$	$(-\infty;2)$	$(-\infty;5)$	$0;+\infty$
5	$1{,}5^3 > 1{,}5^0$	$0{,}3^2 < 1$	$3{,}5^{2,3} > 3{,}5^{1,6}$	$3^e > 3^{2,7}$	$0{,}1^{-5} > 0{,}1^{-2}$	$\left(\frac{1}{7}\right)^{\sqrt{3}} < \left(\frac{1}{7}\right)^{1,7}$
6	$(0{,}2)^{-\frac{4}{5}} > 1$	$(3{,}2)^{0,1} > 1$	$(0{,}7)^{\sqrt{2}} < 1$	$\pi^{-1,5} < 1$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} > 1$	$(\pi - 3)^2 < 1$
7	$a > 1$	$a < 1$	$a < 1$	$a > 1$	$a < 1$	$a > 1$
8	$a > b$	$x > y$	$c > d$	$t < s$	$m < n$	$2 > q$
9	$(2;9)$	$(-2;4)$	$(-1;3)$	$(-3;64)$	$\left(-3;\frac{1}{125}\right)$	$(2;\pi^2)$
10	да	да	нет	да	да	да
11	нет	да	нет	нет	нет	да
12	2	$(0;1) \cup (1;+\infty)$	3	49	$\frac{1}{5}$	5
13	4	9	1	1	4	$\frac{1}{3}$

	а	б	в	г	д	е
14	5	3	3	3	4	0
15	3	3	1,5	−2	−1	$-\frac{1}{2}$
16	2	3	7	0	−2	−3
17	2	−2	1	2	0,2	4
18	9	3	−1,5	−0,2	−4	−2
19	2	−1	0	−9	3	−1
20	−2	0	2	−1	1	3
21	$(5;+\infty)$	$(7;+\infty)$	$(2;+\infty)$	$(-2;+\infty)$	$(-\infty;0)$	$(-\infty;2)$
22	$(-\infty;-2)$	$[0,6;+\infty)$	$(-\infty;1,5)$	$(0,6;+\infty)$	$(-\infty;-1)$	$(-\infty;-5]$
23	0	−1	2	−2	−7	−5
24	1	9	1	1	1	2
25	$(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$	$(-3;3)$	решений нет	$(-3;1)$	$(-\infty;-2,5)\cup(-2,5;+\infty)$	$(1;+\infty)$

Глава XIII. Логарифмическая функция

	а	б	в	г	д	е
1	32	4	25	0,001	0,5	1000
2	6	−3	−2	0,6	1	4,5
3	3	12	7	8	2	0,001
4	$(-7; +\infty)$	$(-\infty; 4)$	$(8; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$x \neq 4$	$x \neq 20$
5	4	3	2	8	0,25	4
6	3	11	6	5	21	200
7	5	$\frac{1}{12}$	4	0,4	11	0,05
8	5	−0,5	0,25	2	5	$\sqrt{10}$
9	1	0,5	4	−2	2	0
10	1	−0,5	2	4	2	1
11	1	5	25	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	625
12	$\log_5 \frac{6}{7} < \log_5 \frac{7}{6}$	$\log_{\frac{1}{2}} 5 > \log_{\frac{1}{2}} 10$	$\log_\pi \frac{1}{2} < \log_\pi \frac{3}{2}$	$\log_{0,3} \frac{\sqrt{8}}{5} > \log_{0,3} \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\log_2 e < \log_2 \pi$	$\log_{\sqrt{7}} 5 > \log_7 3$
13	+	−	−	+	−	−
14	$a < 1$	$a > 1$	$a < 1$	$a > 1$	$a < 1$	$a > 1$
15	убывает	возрастает	возрастает	возрастает	возрастает	возрастает
16	нет	да	нет	нет	да	нет
17	$(2; +\infty)$	$(-2; 2)$	$(-1; +\infty)$	$(-1; +\infty)$	$(9; +\infty)$	$(-3; 3)$

	а	б	в	г	д	е
18	$[2;6]$	$[-1;3]$	$[0;3]$	$[2;4]$	$[-2;4]$	$[2;5]$
19	5	1	-1	0	4	-5
20	$(3;+\infty)$	$\left[\frac{1}{5};+\infty\right)$	$(0;4)$	$(0;9)$	$(0;0{,}04)$	$(0{,}1;+\infty)$
21	$\log_2 26$, $\log_2 7$, $\log_2 0{,}1$	$\log_{\frac{1}{2}} 0{,}4$, $\log_{\frac{1}{2}} \pi$, $\log_{\frac{1}{2}} 11$	$\log_{\sqrt{5}} 23$, $\log_{\sqrt{5}} 7$, $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{3}$	$\lg 7$, $\lg 0{,}2$, $\lg 0{,}1$	$\ln 3\frac{1}{2}$, $\ln \frac{12}{5}$, $\ln \frac{5}{12}$	$\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{6}{7}$, $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{7}{6}$, $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 25$.
22	1	2	0,5	1	-1	-2
23	2	2	2	8	2	1
24	1	4	0	-1	4	0
25	$4a$	$2b$	$1+c$	$1+m$	$p-1$	$t-1$
26	$4;5$	$3;4$	$-2;-1$	$-4;-3$	$-4;-3$	$1;2$
27	6	7	64	0,01	1	15
28	6	-12	6	1	6	-24
29	$>$	$>$	$<$	$<$	$<$	$<$
30	$\frac{\log_5 3}{\log_5 7}$	$\frac{\log_5 6}{1+\log_5 2}$	$0{,}5\log_5 11$	$-\frac{1}{\log_5 2}$	$\frac{2\log_5 7}{\log_5 3}$	$\frac{1}{3}\log_5 2$
31	$\frac{\lg 25}{\lg 3}$	$\frac{\lg 8}{\lg 7}$	$-\lg 2$	$\frac{\lg 75-2}{2\lg 3}$	$\frac{1}{3}\lg 4$	$\frac{1}{2\lg e}$
32	$5+2\log_2 a+$ $+5\log_2 b$	$-4+\log_2 a+$ $+0{,}5\log_2 b$	$7+1{,}5\log_2 a+$ $+\log_2 b$	$2+0{,}5\log_2 a+$ $+0{,}5\log_2 b$	$2\log_2 b-3\log_2 a$	$5\log_2 a-2-2\log_2 b$

	а	б	в	г	д	е
33	3	$2\ln a+5$	$\ln a-1$	$\ln a-\ln 3-2$	$\ln 4+0{,}5-\ln a$	$\ln 2+0{,}5\ln a+0{,}5$
34	8	1	–4	–1	5	$\frac{5}{6}$
35	1	2	3	4	1	2
36	0	–0,5	0	–0,5	0	0
37	32	9,8	–0,1	9	1	125
38	3	8	2	6,8	0	±5
39	3	0,75	0	±3	±1	$\frac{2}{3}$
40	6	12,5	5,5	2	4	4
41	$(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$	$\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$	–3	4	0,25	решений нет
42	$\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$	πk, $k\in Z$	$\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$	πk, $k\in Z$	$(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$	$\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$
43	$2\pi k$, $k\in Z$	$\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$	$\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$	$2\pi k$, $k\in Z$	$\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$	$\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$
44	–7; 3	2; 9	3; 5	–8; 5	–2; 1	5; 7
45	корней нет	2,5	корней нет	корней нет	5	1
46	$1+\sqrt{2}$	–4; –1	12	1,5	2	9
47	$(25;+\infty)$	$(0;3)$	$(0;2)$	$(9;+\infty)$	$(1000;+\infty)$	$(0;9)$
48	$(1;+\infty)$	$(-\infty;1{,}3)$	$(-1;26)$	$(2;11]$	$[25;+\infty)$	$(-0{,}8;-0{,}4)$

	а	б	в	г	д	е
49	$[1;+\infty)$	$[1;+\infty)$	$(0{,}6;+\infty)$	$(-\infty;2)$	$(-3;+\infty)$	$(-\infty;-1)$
50	$(1;+\infty)$	$(2;6)$	$(6;9)$	$\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$	$(0;4{,}5)$	$(0{,}5;1)$
51	6	3	79	24	−3	12
52	1	8	5	0	2	1
53	4	5	−10	6	таких чисел нет	3
54	−1	6	2	7	2	−16
55	$(-2;2)$	$[2;3)$	$(7;10)$	$(0;2)$	$(1;6)$	решений нет
56	$[0{,}5;+\infty)$	$[5;+\infty)$	$(-0{,}5;0]$	$(1;2)\cup(2;+\infty)$	$[2;+\infty)$	$[1;+\infty)$

Глава XIV. Тригонометрия

	а	б	в	г	д	е
1	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
2	15°	10°	20°	18°	72°	$\left(\frac{360}{\pi}\right)^\circ$
3	9	30	2	1	0,5	12
4	верно	верно	верно	верно	верно	верно
5	«−»	«+»	«−»	«+»	«+»	«+»
6	«+»	«+»	«+»	«+»	«−»	«+»
7	I	IV	II	III	II или III	I или II
8	$(1;0)$	$(0;-1)$	$(-1;0)$	$(0;-1)$	$(0;1)$	$(1;0)$
9	$-180°, 180°$	$90°$	$-180°, 0°, 180°, 360°$	$-180°, 0°, 180°, 360°$	$-90°, 90°, 270°$	$-90°, 90°, 270°$
10	$2\pi n$, $n \in Z$	$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$	πn, $n \in Z$	πn, $n \in Z$	$\pi + 2\pi n$, $n \in Z$	$\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$
11	нет	нет	да	да	нет	да
12	$[1;3]$	$[1;3]$	$\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$	$[0;1]$	$[1;2]$	$[-1;0]$
13	нет	нет	нет	да	да	да
14	$\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$	$[-2;2]$	$(-\infty; -2\pi] \cup [2\pi; +\infty)$	$\left[-\frac{1}{2\pi}; \frac{1}{2\pi}\right]$	$b \neq 0$	b — любое число
15	0,5	−0,5	0,75	1	$\frac{3}{2\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}$

	а	б	в	г	д	е
16	2,5	–0,5	0	0	3	–1
17	1	1	0	2	(–3)	$\frac{1}{3}$
18	$>$	$<$	$=$	$>$	$<$	$<$
19	«+»	«–»	«+»	«–»	«+»	«+»
20	$\sin^2\alpha$	$-\cos^2\alpha$	$\cos^2\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$
21	$-\cos\alpha$	0	$\mathrm{tg}^2\,\alpha$	1	1	$\sin^2\alpha$
22	$\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; -\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{3}; -\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 1; 1$	$-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; -1; -1$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 1; 1$
23	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
24	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	–1	1	1
25	$\sin 4\alpha$	$-\cos 8\beta$	$\mathrm{tg}\,6\alpha$	$\mathrm{tg}\,4\alpha$	$\cos\beta$	0
26	$2\sin 62°$	$\cos^2 28°$	$2\,\mathrm{tg}\,50°$	$2\cos\frac{\pi}{10}$	$\sin^2\frac{\pi}{7}$	$2\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{18}$
27	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
28	$\sin\frac{\alpha}{2}$	$\frac{1}{4\sin\alpha}$	$\cos\alpha+\sin\alpha$	0	$2\cos 2\alpha$	$\frac{5}{4}$
29	1	3; 0	нет; 0	1,5; 1	1	1; 0
30	0,5	0,5	0,5	0,5	$2\sin^2 2\alpha$	$2\cos^2 3\alpha$

	а	б	в	г	д	е
31	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$2-\sqrt{3}$
32	$2\sin^2 2\alpha$	$2\cos^2\alpha$	$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$	$2\sin^2 3\alpha$	$2\cos^2 80^\circ$	$2\cos^2 70^\circ$
33	верно	верно	неверно	верно	верно	верно
34	$-2\sin(\alpha+\beta)\times$ $\times\sin(\alpha-\beta)$	$2\cos(2\alpha+2\beta)\times$ $\times\cos(2\alpha-2\beta)$	$2\sin 4\alpha\times$ $\times\cos\alpha$	$-2\sin\alpha\times$ $\times\cos 5\alpha$	$2\sin 9\beta\times$ $\times\cos 2\beta$	$\frac{\sin 8\beta}{\cos 7\beta\cos\beta}$
35	$\frac{1}{2}+\cos 20^\circ$	$\sin 8^\circ+\sin 2^\circ$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 50^\circ$	$\frac{1}{2}\left(\sin\frac{3\pi}{14}+\right.$ $\left.+\sin\frac{\pi}{14}\right)$	$\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\frac{1}{2}\left(\cos 23^\circ-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
36	0,8	−0,6	$\frac{8}{15}$	1	0	−0,75
37	0,6	0,8	0,75	1	0,6	$-\frac{4}{3}$
38	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
39	$<$	$>$	$>$	$>$	$>$	$<$
40	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
41	$[-0{,}5; 0{,}5]$	$[-2; 2]$	$[-3; -1]$	$[3; 5]$	$(-\infty; 0)\cup$ $\cup(0; +\infty)$	$[0; +\infty)$
42	$5\pi n, n\in Z$	$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}, n\in Z$	$\pi n, n\in Z$	$\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$	$\pi n+4, n\in Z$	$2\pi n, n\in Z$

	а	б	в	г	д	е
43	$(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,$ $n\in Z$	$(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,$ $n\in Z$	корней нет	$(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n,$ $n\in Z$	$(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+\pi n,$ $n\in Z$	$(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+\pi n,$ $n\in Z$
44	$\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,$ $k\in Z$	корней нет	$\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,$ $k\in Z$	$\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k,$ $k\in Z$	$\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,$ $k\in Z$	$\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k,$ $k\in Z$
45	$\frac{\pi}{4}+\pi n,$ $n\in Z$	$\frac{\pi}{6}+\pi n,$ $n\in Z$	$-\frac{\pi}{3}+\pi n,$ $n\in Z$	$\frac{\pi}{4}+\pi n,$ $n\in Z$	$\frac{3\pi}{4}+\pi n,$ $n\in Z$	$\frac{5\pi}{6}+\pi n,$ $n\in Z$
46	$(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},$ $n\in Z$	$\pm\frac{\pi}{3}+4\pi n,$ $n\in Z$	$(-1)^{n+1}\frac{2\pi}{3}+$ $+4\pi n, n\in Z$	$\pm\frac{5\pi}{12}+\pi n,$ $n\in Z$	$\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},$ $n\in Z$	$-\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4},$ $n\in Z$
47	$\pi n, \frac{\pi}{2}+2\pi n,$ $n\in Z$	$\pi+2\pi n,$ $n\in Z$	$\pi n, -\frac{\pi}{4}+\pi n,$ $n\in Z$	$-\operatorname{arctg}3+\pi n,$ $\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$	$2\pi n,$ $n\in Z$	$-\frac{\pi}{2}+2\pi n,$ $n\in Z$
48	3,5	1	0	0	−4	4

Глава XV. Производная

	а	б	в	г	д	е
1	нет	нет	да	да	нет	да
2	12	103	403	628	4	39
3	42	4	2	−1	7	−5
4	2	0	4	7	2	99
5	8, 9, 10	101, 102, 103, 104	$n-1, n, n+1$	$3n-1, 3n$	n^2-3, n^2-2, n^2-1	$7n-2$
6	0	1	1	бесконечно много	0	1
7	$y_n = n+6$	$y_n = -3n-1$	$y_n = 2n$	$y_n = 2^n$	$y_n = \frac{1}{2n(2n+3)}$	$y_n = (-1)^n n$
8	нет	да	нет	да	да	нет
9	да	да	да	нет	да	да
10	да	да	нет	да	нет	да
11	возрастает	убывает	убывает	возрастает	не монотонна	убывает
12	не монотонна	возрастает	не монотонна	возрастает	убывает	возрастает
13	нет	да	нет	да	нет	нет
14	0	0	0,3	$\frac{2}{3}$	−2	$\frac{1}{3}$
15	расходится	0	0	расходится	0	расходится
16	0	$\frac{2}{7}$	0	1,5	$\frac{1}{21}$	0
17	0	72	−0,5	0	1	0,5

	а	б	в	г	д	е
18	1	0	−2	1	4	0
19	$\frac{21}{25}$	−0,5	0	$\frac{25}{61}$	2438	−0,5
20	0,2	6	0	0	0	$\frac{42}{11}$
21	2	0,25	0	0,8	0,2	0
22	7	0	1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{2}{3}$
23	10	$2x$	$\frac{7}{x^2}$	$2x+1$	$-3x^2$	$3-\frac{4}{x^2}$
24	$\cos x-\sin x$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}+1$	$\frac{2}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}+3\sin x$	$-\frac{9}{2\sqrt{x}}$	$3\cos x+8\sin x$
25	$2\sin x+2x\cos x$	$1{,}5\sqrt{x}$	$10{,}5\sqrt{x}-\frac{4}{\sqrt{x}}$	$30x-22$	$5\cos x-$ $-(5x+4)\sin x$	$(3\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}})\cos x-$ $-(2x+1)\sqrt{x}\sin x$
26	$\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$	$\frac{2x}{\cos x}+$ $+\frac{(x^2+3)\sin x}{\cos^2 x}$	2	$-\frac{1}{x^2\sqrt{2}}$	$\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}$	$\frac{6x^4+1}{x^2}$
27	$\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	0	1	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\cos^2 x}+2x$
28	$-10\sin(10x+3)$	$\frac{4}{\cos^2 4x}$	$3\cos 3x$	$\frac{8}{\cos^2 8x}$	$25(5x+3)^4$	$24(8x+7)^5$

	а	б	в	г	д	е
29	17	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	4	$\frac{1}{9}$	−2	$-\frac{8}{3}$
30	103	12	-2π	−32	−10	$-\frac{3}{16}$
31	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$	800	$\frac{1}{6\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{8\sqrt{7}}$	$\frac{2}{3}$	−0,5
32	$y = 80x - 128$	$y = x + 1$	$y = 4x + 8$	$y = \frac{x}{3} - 2\pi$	$y = -12x + 44$	$y = 1$
33	0	±2	$\pi + 2\pi k,\ k \in Z$	0; −1	$\pi k,\ k \in Z$	$\frac{79}{16}$
34	−1	0;3	$\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$	0,5	±1	нет решений
35	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; 3) \cup$ $\cup (3; +\infty)$	$(-\infty; -4) \cup$ $\cup (-4; 4) \cup$ $\cup (4; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$\bigcup\limits_{k \in Z} (\pi k; \pi(k+1))$	$(-\infty; 1]$
36	6	0	1	5	0	дифферен- цируема всюду
37	острый	острый	тупой	тупой	острый	тупой
38	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	−1	0	$\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
39	(2,5; −3,25)	(−2; 17), (2; −15)	$\left(\frac{\pi k}{2}; (-1)^k\right),\ k \in Z$	(0; 0)	нет решений	нет решений

	а	б	в	г	д	е
40	$\frac{5}{8}$	3	3,5	7	4	5
41	$(-6;-4)\cup$ $\cup(-2;3)$	$(-2;2)$	$(0;2)\cup(2;4)\cup$ $\cup(4;6)$	$(3;6)$	$(-6;6)$	$(-6;-2)$
42	везде убывает	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in Z$	$[2,5;+\infty)$	$[-2;0]$, $[2;+\infty)$	$(-\infty;0]$, $[4;+\infty)$	$\left[-\frac{3\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{\pi}{4}+2\pi k\right]$, $k\in Z$
43	$(-2;-1)$, $(-1;1)$	$(-5;-3)$, $(4;5)$	$(-5;-3)$, $(-1;0)$	$(3;4)$	$(-5;-3)$	$(-5;-2)$, $(1;3)$
44	убывает на $(-\infty;-3,75]$, возрастает на $[-3,75;+\infty)$	убывает на $\left[\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right]$, возрастает на $\left[\pi k-\frac{\pi}{2};\pi k\right]$, $k\in Z$	возрастает на $(-\infty;0]$, убывает на $[0;+\infty)$	возрастает на $[-2,5;+\infty)$	возрастает на $[0;+\infty)$	возрастает на $(-\infty;+\infty)$
45	$x=2$, точка максимума	$x=0,5$, точка минимума	$x=6$, точка минимума	нет точек экстремума	нет точек экстремума	$x=-\sqrt[19]{0,05}$, точка минимума
46	120; 84	$\sin 1;\ -\sin 1$	7; 1	5; 1	−6; −10	24; 8
47	нет	да	нет	да	да	нет

Глава XVI. Первообразная и интеграл

	а	б	в	г	д	е
1	да	нет	нет	нет	да	да
2	нет	да	да	нет	нет	нет
3	$\sin x - \cos x$	$\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$	$5x + \operatorname{ctg} x$	$-\cos x - \frac{x^2}{2}$	$-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3}$
4	$38 \sin x$	$-\frac{\pi}{x}$	$e^4 x$	$\sqrt{3}x^2$	$-\sin\frac{\pi}{5}\cos x$	$2x$
5	$8\sin x -$ $-9\cos x$	$\frac{5}{4}x^4 +$ $+\frac{4}{3}x^3 + 3x$	$0{,}1e^4 x - 3\sqrt{3}ex$	$8\sqrt{x} - 12\sqrt[3]{x^2}$	$\frac{3}{44}x^{11} - \frac{5}{2}\pi x^2$	$-\cos x$
6	$\frac{e^{3x+1}}{3}$	$-4\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{5}\right)$	$\frac{1}{88}(8x-3)^{11}$	$0{,}5\sqrt{4x+3}$	$-0{,}2\operatorname{ctg} 5x$	$-0{,}5\operatorname{tg}(2x+1)$
7	$-\frac{1}{3x^3} -$ $-\frac{1}{2x^4} + C$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x} +$ $+2\sqrt{x} + C$	$e^x - e^{-x} + C$	$\frac{x^2}{2} + C$	$\frac{x^{100}}{4} + C$	$e^{x-8} + C$
8	$5t^2$	$20t + 100$	$-\frac{2}{3}\cos 3t + 1$	45	$0{,}2\sin 5t + 1$	$t^3 + t + 8$
9	$\frac{1}{12}e^{3x} + C$	$0{,}75\sin 2x +$ $+1{,}5x + C$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x} +$ $+\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$	$\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 -$ $-4x + C$	$\frac{x^{21}}{21} + C$	$0{,}8x\sqrt[4]{x} + C$

	а	б	в	г	д	е
10	$\frac{7}{3}$	e^3-1	0	$\frac{b^2-a^2}{2}$	2	4
11	0	$\frac{e^2}{5}-\frac{1}{5e^3}$	8	$-\frac{2}{\pi}$	4	$\frac{49}{3}$
12	$\frac{128}{3}$	4,5	$\frac{5}{6}$	$\frac{14}{3}$	8	36
13	2,25	$\frac{4}{3}$	8	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	36

Глава XVII. Делимость

	а	б	в	г	д	е
1	нет	да	нет	да	да	нет
2	нет	да	нет	нет	да	нет
3	нет	нет	нет	да	да	нет
4	да	нет	нет	да	нет	да
5	да	да	нет	нет	нет	нет
6	да	нет	нет	нет	нет	да
7	да	нет	нет	да	нет	нет
8	нет	да	нет	нет	да	да
9	нет	нет	нет	да	да	да
10	$3, 5, 7$	$5, 7, 11$	$7, 11, 13, 17, 19$	$29, 31$	37	$59, 61, 67, 71, 73, 79$
11	2^3	$2^2 \cdot 11$	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	$2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$	$2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11$	$11^2 \cdot 13^2$
12	да	да	да	нет	да	нет
13	да	да	да	нет	нет	нет
14	да	нет	нет	да	да	нет
15	5	5	7	7	13	19
16	$(7;6)$	$(12;11)$	$(8;7), (4;1)$	$(39;38), (9;2)$	$(72;71), (12;1)$	$(53;52), (19;16), (13;8), (11;4)$
17	4	289	7	15	24	225
18	4	6	12	20	$3(n+1)$	$(n+1)(m+1)$
19	да	да	нет	да	нет	да
20	14	15	169	55	51	221
21	72	594	28 917	637 000	27 000	79 893 275
22	да	да	да	нет	да	да
23	да	да	да	да	нет	да

	а	б	в	г	д	е
24	1	1	3	2	2	7
25	5	4	0	14	1	46
26	19	263	58	626	$12a-2$	$a(a+1)(a+2)-3$
27	2	4	6	7	9	23
28	да	нет	да	да	да	да
29	нет	нет	да	да	нет	да
30	нет	нет	да	да	да	да
31	1,4	1,8	2,2	2,8	8,4	13,4

Литература

1. *Макарычев Ю. Н. и др.* Алгебра, 7 кл.—М.: Просвещение, 2010.
2. *Макарычев Ю.Н. и др.* Алгебра, 8 кл.—М.: Просвещение, 2010.
3. *Макарычев Ю.Н. и др.* Алгебра, 9 кл.—М.: Просвещение, 2010.
4. *Мордкович А.Г. и др.* Алгебра, 7 кл.—М.: Мнемозина, 2010.
5. *Мордкович А.Г. и др.* Алгебра, 8 кл.—М.: Мнемозина, 2010.
6. *Мордкович А.Г. и др.* Алгебра, 9 кл.—М.: Мнемозина, 2010.
7. *Мордкович А.Г. и др.* Алгебра и начала анализа, 10 кл.— М.: Просвещение, 2010.
8. *Мордкович А.Г. и др.* Алгебра и начала анализа, 11 кл.— М.: Просвещение, 2010.
9. *Колягин Ю.М. и др.* Алгебра и начала анализа, 10–11 кл.— М.: Просвещение, 2010.
10. *Лукин Р.Д., Лукина Т.К., Якунина М.С.* Устные упражнения по алгебре и началам анализа,— М.: Просвещение, 1989–96.

Готовимся к ЕГЭ

Учебное издание

МАТЕМАТИКА
УСТНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ И БЫСТРЫЙ СЧЁТ.
Тренировочные упражнения за курс 7—11 классов

Учебно-методическое пособие

Под редакцией ***Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова***

Художественное оформление,
разработка серии *И. Лойкова*
Компьютерная верстка *А. Ковалевская*
Корректор *Н. Пимонова*

Подписано в печать 29.07 2010.
Формат 60x84$^{1}/_{16}$. Бумага типографская.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ л. 13,96.
Тираж 10 000 экз. Заказ № 265.

ООО «ЛЕГИОН-М»
Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.
Адрес редакции: 344011, г. Ростов-на-Дону, пер. Доломановский, 55.
www.legionr.ru e-mail: legionrus@legionrus.com

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных диапозитивов
в ЗАО «Полиграфобъединение». 347900, г. Таганрог, ул. Лесная биржа, 6 В.

Пособия издательства «Легион» можно приобрести в книготорговых организациях:

АБАКАН

ООО «Кругозор Иванова и К»
(3902) 22-36-40
ГОУ ДПО ХРИПК и ПРО
(39022) 2-70-12, 2-61-22

АНАПА

ИП Ладанова Н. И.
(86133) 3-72-76

АРХАНГЕЛЬСК

ООО «Оберег»
(8182) 65-12-41, 20-72-12, 65-24-77
Магазин учебной литературы «Школьный мир»
(8142)78-24-43

АСТРАХАНЬ

ИП Агаев Сархаддин Х.О.
8-960-859-53-89
ИП Агаев Сейфаддин Х.О.
(8512)72-77-93
ИП Щенина В.В.
8-917-180-88-18, (8512) 22-33-62

БАРНАУЛ

ИП Нестеренко Т.Н.
(3852) 36-80-93

БЕЛГОРОД

ИП Бабъяк И. А.
(4722) 34-15-59
Областное государственное учреждение «Квант»
(4722) 34-17-34,34-30-28
ИП Поляков А.М.
(4722) 35-61-83

БЕЛЕБЕЙ

ООО «Предприятие Прогресс»
(34786) 448-61,467-39,450-89

БОРИСОГЛЕБСК

ИП Мусатов С.Ю.
(47354) 64-560

БРЯНСК

ООО «Александрия»
(4832) 66-52-30, 74-41-80
ИП Белкина И. В.
(4832) 67-68-40
ИП Трубко Л. И.
(4832) 74-92-20, 74-61-64

ВЕЛИКИЙ НОВГОРОД

ООО «Маркет-Сервис»
(8162) 62-30-47
ООО «Книжный магазин «Прометей»
(8162)77-82-96, 77-30-21

ВЛАДИМИР

ИП Митина Л.Г.
8-960-721-40-48, 8-960-721-55-48
ОГОУ ДПО ВИПКРО
(4922) 36-63-94, 36-63-69
Талета
(4922) 21-26-66

ВОЛГОГРАД

ИП Гражданкин Н. Н.
(8442) 93-04-65, 90-05-85, 95-54-11
ООО «Кассандра»
(8442) 97-58-00, 97-85-85
ООО «Учебная и деловая книга»
(844-2) 76-06-06, 76-34-34, 76-60-92, 76-60-93

ВОЛОГДА

ОАО «Библиотечный коллектор»
(8172) 72-04-75, 21-05-86, 72-20-45
ОАО «Источник»
(8172) 72-42-38
ИП Соловьев А.В.
(8172) 72-61-28, 21-17-36

ВОРОНЕЖ

ООО «Амиталь»
(4732) 26-77-77, 24-24-90, 26-35-19, 26-35-60
ООО «Риокса»
(4732) 21-08-66, 46-13-26, 46-43-94

ВЫШНИЙ ВОЛОЧЕК

ИП Лебедев В. Ф.
(48233) 6-41-03, 8-910-930-86-35

ГЕОРГИЕВСК

ИП Куцева Т.И.
(87951) 6-77-43, 6-39-12
ИП Филатов В.П.
8-928-366-05-00

ДЕРБЕНТ

ИП Шисинов И. Ш.
(87240) 4-35-00

ДМИТРОВГРАД
ООО «Учебник»
(8423) 57-48-48

ЕЙСК
ООО «Телеком»
(86132) 69-069

ЕКАТЕРИНБУРГ
ООО «Алис-Альянс»
(343) 355-33-86, 355-43-92
ИП Евтюгина Н.С.
(343) 228-10-91, 228-10-79

ИВАНОВО
ООО «Новая мысль»
(4932) 41-64-16
ИП Ракова О.В.
(4932) 30-04-28

ИЖЕВСК
ООО «Инвис»
(3412) 78-16-24
ООО «Свиток»
(3412) 78-22-24,51-05-37
ООО «Учебно-методическая книга»
(3412) 78-35-04

ЙОШКАР-ОЛА
ИП Бессолицын В.С.
(8362) 42-88-55
ИП Кошкин Н.Ю.
(8362) 63-41-55, 63-44-04
ИП Удальцова З.И.
(8362) 46-24-69

КАЗАНЬ
ИП Крамень И.Н.
(843) 292-46-51
ИП Микашкин В. Н.
8-903-344-90-63
ООО «Пегас»
(843) 272-34-55, 272-34-55, 295-12-71
ООО Торговый дом «Аист-Пресс»
(843) 525-55-40, 525-52-14

КАЛИНИНГРАД
ООО «Лабор»
(4012) 75-87-46

КАЛУГА
ИП Безбородова Т. И.
8-906-643-37-17
ИП Калуженский Г.В.
8-910-910-41-76
ИП Махонина А. А.
(4842) 56-10-10
ИП Настенко Т. Н.
8-910-913-08-49, (4842) 54-71-95

КИРОВ
ИП Кокорин Ю. П.
(8332) 29-40-40, 29-44-08

КОСТРОМА
ИП Аббакумова Э. О.
(4942) 31-53-76, 37-05-21, 37-04-21
ООО «Филлипок»
(4942) 41-50-91, 36-00-72
МУП города Костромы «Школьник»
(4942) 51-42-55, 31-25-58

КРАСНОДАР
ООО «Когорта»
(861) 279-54-21, 279-54-20
ООО «Ремикс»
(861) 267-24-49

КРАСНОЯРСК
ООО фирма «Градъ»
(391) 212-39-94; 226-91-45; 227-82-65;
ООО «Мила-В»
(3912) 40-04-80

КУРГАН
ООО «Алис-К»
(3522) 24-61-04; 24-61-05
ООО «Кристалл»
(3522) 49-23-01

КУРСК
ООО «Аистенок»
(4712) 52-86-10
ИП Захаров С.Ю.
(4712) 35-16-51
ООО «Интеллект Образование XXI»
(4712) 52-97-03

КЫЗЫЛ
ИП Тунева Е. Г.
(39422) 2-29-27, 2-42-86, 2-42-86

ЛЕНИНОГОРСК
ИП Исхакова Ф.Г.
(85595) 5-08-74

ЛИПЕЦК
ООО «ЛКТФ Книжный клуб 36,6»
(4742) 77-40-64, 48-79-32, 22-19-61,
22-19-50

МОСКВА

ООО «Абрис Д»
(495) 229-67-59
ООО ТД «БИБЛИО-ГЛОБУС»
(495) 621-78-39, 781-19-08, 621-19-47
ООО «Учебно-методический Центр «Глобус»
(495) 988-72-83, 721-17-13

НЕВИННОМЫСК

ИП Гагарин Н. В.
(86554) 6-74-94

НЕФТЕКАМСК

ИП Киямова Г. Ф.
(34783) 4-88-83, 9-07-34

НЕФТЕЮГАНСК

ИП Пугачева М.В.
(3463) 25-47-42

НИЖНИЙ НОВГОРОД

ИП Кулемина Л. М.
(8312) 41-92-27, 41-95-57, 41-95-74
ИП Чернышев В. В.
(831) 436-58-14

НОВОРОССИЙСК

ООО «Центр социальных инициатив»
(8617) 63-17-04

НОВОСИБИРСК

ИП Березкина Е. В.
(8383) 223-47-71
ИП Камалетдинов Р.Р.
(383) 28-999-06, 224-63-48
ООО «СибВерк»
(383) 212-50-90

ОМСК

ООО «Принт ТФ»
(3812) 53-52-73, 53-42-73
ООО «Сфера»
8-960-989-48-65
ООО «Форсаж»
(3812) 23-35-71, 57-88-56, 53-89-67

ОРЕЛ

ЗАО «Орловский учебный коллектор»
(4862) 74-48-34, 75-29-11

ОРЕНБУРГ

ООО «Фирма «Фолиант»
(3532) 77-46-92, 77-40-33

ПЕРМЬ

ИП Жмыхова Г.И.
(342), 226-66-91, 226-44-10
ИП Габзалилов М.Х.
(342) 245-24-37

ПЕТРОЗАВОДСК

ООО «Азбука»
(8142) 78-55-03
ООО Книжный магазин «Экслибрис»
(8142) 76-33-76, 76-75-51

ПЛАВСК

ИП Дедук Л. В.
(848752) 6-53-11

Пос. ЛАЗАРЕВСКАЯ Краснодарского края

ИП Зайцев А. А.
8-918-916-71-66, (8622)70-74-13

ПСКОВ

ИП Васильева А. В.
(8112) 66-25-04
ОАО «Псковский областной учебный коллектор»
(8112) 56-93-63, 58-58-36

ПЯТИГОРСК

ПБОЮЛ Бердникова Л.А.
(8793) 33-88-80, 39-47-17
ИП Борисковский В.А.
(88793) 39-02-54, 39-02-53

РОСТОВ-НА-ДОНУ

ООО «Алтай»
(863) 262-37-95
ООО «Донская школа»
(863) 267-56-11
ИП Евдокимов И.А.
(863) 279-39-11, 26-35-331
ОАО «Ростовкнига»
(863) 295-89-32, 278-36-23
ИП Рудницкий А.В.
(863) 291-03-53, 234-82-96

САМАРА

Магазин «Учебная книга»
(846) 995-58-68
ООО «МЕТИДА-ОПТ»
(846) 269-17-17
ООО «Чакона»
(846) 331-22-33

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

ООО «Век развития»
(812)924-04-58

ООО «Коллибри»
(812) 703-59-94; 703-59-95; 703-59-75
ООО «Санкт-Петербургский Дом Книги»
(812) 448-23-57

САРАНСК

ГУП РМ «Мордовское книжное издательство»
(8342) 47-05-91

САРАТОВ

ИП Вавилов О.Ю.
(8452) 222-404
ООО «Гемера-Плюс»
(8452) 64-37-37, 64-78-24
ООО «Стрелец и К»
(8452) 52-25-24

СМОЛЕНСК

ИП Воронцов С.В.
(4812) 65-62-94,32-75-21
ИП Кормильцева И. В.
(4812) 38-93-52
ИП Кудашова Н.Н.
(4812)65-86-65

СОЧИ

ООО «Анис»
(8622) 92-33-51,64-83-56
МУП г. Сочи «Книги»
(8622) 64-14-61, 64-69-28

СТАВРОПОЛЬ

ИП Апурин А.И.
(8652) 28-07-30, 28-23-81
ООО «Ставрополь-Сервис-Школа»
(8652) 57-47-27, 72-87-40

СЫКТЫВКАР

ИП Коврижных Д.Г.
(8212) 66-37-35

ТАГАНРОГ

ИП Боринский И.Г.
(8634) 61-03-57

ТАМБОВСКАЯ обл.

ГОУ ДПО «Тамбовский областной ИПК работников образования»
(8-4752) 63-05-08

ТВЕРЬ

ООО «BOOK-СЕРВИС»
(4822) 34-52-11
ООО «Кириллица»
(4822) 32-05-68

ТИХОРЕЦК

ООО «Астрея»
(86196) 7-36-42, 7-36-53

ТОМСК

Книжный магазин-музей «Петр Макушин»
(3822) 51-58-33

ТУЛА

ООО «Система плюс»
(4872) 31-29-23, 70-02-48, 32-60-94

ТЮМЕНЬ

ООО «Книжник»
(3452) 35-72-12
ИП Нестеров В.А.
(3452) 20-56-10

УЛАН-УДЕ

ИП Шашина О. К.
(3012) 22-01-05

УЛЬЯНОВСК

ИП Селезнев Ю. И.
(8422) 94-23-83

УФА

ГУП Башучколлектор РБ
(3472) 63-37-78, 83-95-66
ООО «Мир книги»
(3472) 82-56-30,82-83-92, 82-89-65

ЧЕБОКСАРЫ

Чувашский учколлектор
(8352) 56-08-55, 61-45-76,62-85-57
Чувашский бибколлектор
(8352) 62-15-67,62-03-70, 62-28-46

ЧЕЛЯБИНСК

ООО «ИнтерСервис ЛТД»
(351) 247-74-14, 247-74-13
ООО ПК «Урал-пресс»
(351) 772-69-57, 773-48-37, 771-44-03

ЭЛИСТА

ИП Борлыкова Л.А.
(84722) 2-86-42
ООО «Фирма МСП магазин «Санан»
8-917-681-77-77

ЯРОСЛАВЛЬ

ИП Зелинская Т.В.
(4852) 73-40-07
ГОУ «Институт развития образования»
(4852) 73-93-00,21-06-83

ДЛЯ РЕШЕНИЙ И ЗАМЕТОК

ДЛЯ РЕШЕНИЙ И ЗАМЕТОК

ЕГЭ

344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550
Тел. (863) 303-05-50, 248-14-03
www.legionr.ru
e-mail: legionrus@legionrus.com

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕГИОН ™

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЛЕГИОН» ПРЕДЛАГАЕТ УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ В СЕРИЯХ

готовимся к ЕГЭ

ГИА-9

ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ

МАСТЕР-КЛАСС

ГОТОВИМСЯ К ОЛИМПИАДЕ

ISBN 978-5-91724-051-0
9 785917 240510