МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ КИБЕРНЕТИКИ

5

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ КИБЕРНЕТИКИ

Под редакцией
С. В. ЯБЛОНСКОГО

ВЫПУСК 5

МОСКВА
ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ФИРМА
«ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИТЕРАТУРА» ВО «НАУКА»
1994

ББК 22.18
М33
УДК 519.6(082)

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований согласно проекту 94-01-21002.

*Сборники «Математические вопросы кибернетики» выпускаются под общим руководством Отделения математики РАН с **1988 г.***

В СОСТАВЛЕНИИ И РЕДАКТИРОВАНИИ СБОРНИКА ПРИНИМАЛИ УЧАСТИЕ

М. В. ЗАХАРЬЯЩЕВ, Н. А. КАРПОВА, О. С. КУЛАГИНА, С. А. ЛОЖКИН, О. Б. ЛУПАНОВ, Н. П. РЕДЬКИН, В. М. ТИХОМИРОВ, Ю. И. ЯНОВ

Математические вопросы кибернетики. Вып. 5: Сборник статей/Под ред. С. В. Яблонского.— М.: Физматлит, 1994.— 304 с.— ISBN 5-02-014889-X.

Выпуск серии сборников по проблемам математической кибернетики и дискретной математики и их приложений. Продолжает математическую направленность известной серии «Проблемы кибернетики» (1958—1984 гг.).

В данный выпуск включены оригинальные работы и обзорные статьи, отражающие современное состояние математической кибернетики и наиболее интересные результаты исследований последних лет.

Выпуск 4 — 1992 г.

Для специалистов в области математической кибернетики, аспирантов, и студентов старших курсов.

$М\frac{1602110000-047}{053(02)-94}21\text{-}93$

ISBN 5-02-014889-X

СОДЕРЖАНИЕ

ХРОНИКА

ОТ РЕДАКТОРА

Несмотря на то, что наука в России испытывает сегодня значительные трудности (недостаточное финансирование, разрыв сложившихся связей между коллективами и т. п.), исследования в области математической кибернетики по-прежнему ведутся интенсивно и на высоком научном уровне. Свидетельством тому могут служить Межгосударственный семинар по дискретной математике и ее приложениям в Московском университете, Школа по дискретным моделям в теории управляющих систем в Звенигороде, Конференция по проблемам теоретической кибернетики в Саратове — научные мероприятия 1993 года, собравшие большое число ученых из многих стран бывшего СССР.

Серия сборников «Математические вопросы кибернетики» предназначена для публикации оригинальных и обзорных статей (объемом до 100 машинописных страниц), относящихся или примыкающих к следующим направлениям:

— теория функциональных систем,
— теория графов,
— теория кодирования,
— комбинаторный анализ,
— дискретная оптимизация,
— синтез и сложность управляющих систем,
— математическая теория эквивалентных преобразований и логического вывода в формальных системах,
— построение систем автоматического доказательства теорем и автоматизация математических методов решения задач,
— методы построения надежных схем из ненадежных элеменов,
— теория игр,
— математическое программирование,
— исследование операций и оптимальное управление,
— теория автоматов,
— математические вопросы теории вычислений,
— построение и изучение моделей естественных и искусственных языков,
— математические вопросы распознавания,
— математическое моделирование в биологии и медицине,
— вероятностные методы в математической кибернетике.

Особая потребность испытывается в работах, связанных с созданием и изучением математических моделей управляющих систем, а также в широких обзорах, отражающих современное состояние исследований в перечисленных областях и анализ тенденций их развития.

ПОРОГОВЫЕ ФУНКЦИИ
И ПОРОГОВЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Ю. А. ЗУЕВ

(МОСКВА)

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение

Аристотель пришел к логическим функциям, анализируя приемы рассуждений и доказательств. Эти исследования были продолжены Лейбницем, а в середине 19-го века изучение законов мышления привело Буля к созданию алгебры высказываний, ставшей аппаратом математической логики.

В 1943 г. американскими учеными Маккаллоком и Питтсом [81] была предпринята смелая попытка описать с помощью алгебры логики процесс распространения возбуждения по нервным волокнам, промоделировав тем самым функционирование нервной системы живых организмов. При этом элемент, моделирующий отдельную нервную клетку — нейрон, мыслился как логическое устройство, работающее по принципу «все или ничего», т. е. он возбуждался и передавал возбуждение далее по сети в том и только том случае, если суммарный возбуждающий сигнал, поступающий на его вход от других нейронов, превышал некоторое пороговое значение. Хотя частный вид пороговой функции — мажоритарная, реализующая процедуру принятия решения большинством голосов,— издревле был известен человечеству и использовался в государствах с республиканской системой правления, именно эта работа положила начало развитию пороговой логики.

Можно сказать, что в общем случае пороговая функция реализует процедуру взвешенного голосования. Более строго, булева функция $f\colon \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ называется пороговой, если существует линейное неравенство с действительными коэффициентами

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \leqslant b, \tag{1}$$

выполненное на тех и только тех булевых наборах $\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_n)$, для которых $f(\mathbf{x})=0$. Коэффициенты a_i называются весами, b — порогом.

Как обычно, булев набор длины n можно интерпретировать либо как подмножество n-элементного множества (и такая интерпретация совершенно естественна в большинстве прикладных задач), либо считать его вершиной n-мерного единичного куба. Пороговая функция задается при этом гиперплоскостью, рассекающей гиперкуб так, что в вершинах по одну сторону гиперплоскости функция равна нулю, по другую — единице (рис. 1). Такой взгляд оказывается весьма полезным в теоретических исследованиях, так как позволяет использовать геометрическую интуицию при решении различных вопросов, связанных с пороговыми функциями. В частности, становится сразу видно, что все булевы функции от одной переменной являются пороговыми, а из 16 функций от двух переменных не являются пороговыми лишь две — сложение по модулю 2 и его отрицание (рис. 2). Однако с ростом n доля пороговых функций начинает быстро падать.

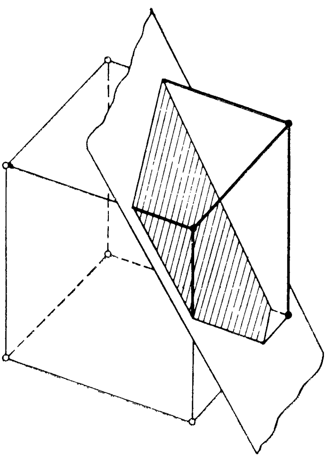

Рис. 1

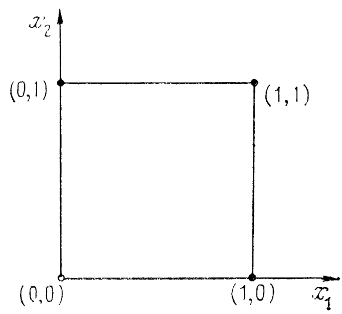

Рис. 2

Небольшим изменением порога или весов для пороговой функции всегда можно добиться строгого отделения гиперплоскостью ее нулей от единиц так, чтобы ни одна из вершин куба не лежала в гиперплоскости. Отметим также, что значения весов и порога всегда могут быть взяты рациональными, а стало быть, при желании и целыми. Подробнее эти вопросы будут рассмотрены в дальнейшем.

В середине пятидесятых годов пороговые функции привлекли внимание исследователей простотой своей технической реализации, сулившей возможность их эффективного использования в логических схемах появившихся в те годы первых серийных ЭВМ. Это привело к бурному росту исследований по пороговой логике. После интенсивного периода скрытого развития во второй половине пятидесятых годов, характеризовавшегося отчетами и частными сообщениями, пороговая логика заявила о себе в начале шестидесятых на симпозиумах и конференциях, а затем и в научной периодике как уже сложившаяся дисциплина. Этот первый этап исследований был подытожен в 1961 г. в специальной публикации Американского института инженеров-электриков S-134, содержавшей основополагающие работы Чоу, Элгота, Уиндера. Годом позже появилась целиком посвященная пороговой логике докторская диссертация Уиндера [116], которая до сих пор является уникальным собранием сведений по пороговым функциям и нередко цитируется в научных работах.

К сожалению, эти самые первые работы по пороговой логике в библиотеки СССР не поступили. Тем не менее, в 1964 г. Нечипоруком была опубликована фундаментальная работа [35] по синтезу схем из пороговых элементов, в которой получен порядок асимптотики сложности таких схем. Эти исследования были завершены в 1973 г. Лупановым [34], показавшим, что минимальное число пороговых элементов, достаточное для синтеза любой булевой функции, асимптотически равно $2\sqrt{2^n/n}$, и такую сложность имеют почти все булевы функции.

В 1965 г. в США вышли сразу две монографии по пороговой логике. В книге американского математика Ху [68], автора известных монографий по топологии, свойства пороговых функций изложены с изяществом, не утратившим своего блеска и поныне. Оригинальный взгляд на пороговую логику развит в переведенной на русский язык книге Дертоузоса [55], в большей степени посвященной техническим вопросам синтеза пороговых функций и схем. И, наконец, в 1971 г. в США вышла книга Муроги [86] с библиографией, содержащей около 400 работ по пороговой логике, которая стала настоящей энциклопедией результатов, полученных за все предыдущие годы. Достаточно полное изложение пороговой логики на русском языке можно найти в книге Бутакова [2].

С дальнейшей миниатюризацией электронных схем и появлением больших интегральных схем интерес к пороговой логике падает. Конъюнкторы, дизъюнкторы и инверторы, плотно упакованные в малом объеме, обеспечили необходимую компактность, надежность и скорость срабатывания логических схем ЭВМ, а также обладали необходимой технологичностью. Потребность в более мощной, но и более сложной пороговой логике отпала, и в начале семидесятых годов работы по пороговой логике становятся редкостью. Однако к середине семидесятых интерес к проблематике вновь оживляется. На этот раз к пороговым функциям пришли из совершенно другой области — от задач целочисленного программирования (см., например, [106]).

В самом деле, одной из наиболее известных NP-полных задач линейного булева программирования является задача о ранце:

$$\text{максимизировать } \sum c_i x_i \quad (2)$$

$$\text{при условии } \sum a_i x_i \leqslant b,$$

где переменные x_i булевы, а коэффициенты c_i, a_i, b — неотрицательные действительные числа. Таким образом, областью допустимых значений здесь является множество нулей монотонной пороговой функции, и изучение его строения может пролить свет на проблему алгоритмической трудности решения подобных задач.

В задачах линейного булева программирования допустимая область может быть задана не одним, а системой неравенств. При этом возникает задача агрегирования неравенств, т. е. замена их меньшим числом без изменения допустимой области. Изучение подобных вопросов привело к возникновению теории пороговых представлений булевых функций — таких представлений с помощью систем линейных неравенств, когда допустимые для системы булевы наборы и только они являются нулями булевой функции. Геометрически пороговое представление булевой функции сводится к отсечению гиперплоскостями всех ее единичных вершин. Минимальное число необходимых для этого линейных неравенств называется пороговым числом булевой функции и наряду с длиной ее кратчайшей дизъюнктивной нормальной формы может считаться мерой ее сложности.

Пороговое представление можно рассматривать и как дизъюнкцию пороговых функций, т. е. подобно дизъюнктивной нормальной форме (д. н. ф.) считать его схемой глубины 2 (рис. 3). При этом аналогия между длиной кратчайшей д. н. ф. и пороговым числом делается особенно отчетливой.

Целесообразность использования в ряде случаев порогового представления вместо д. н. ф. видна уже из того, что мажоритарная функция, задаваемая одним неравенством

$$x_1 + \ldots + x_n \leqslant \frac{n-1}{2}, \tag{3}$$

требует для своего представления с помощью д. н. ф. $\binom{n}{[n/2]}$ элементарных конъюнкций — огромного числа при больших n.

Для пороговых функций имеются, однако, и совершенно иные сферы приложения, где на протяжении уже более 30 лет используются их адаптивные возможности, т. е. способность в результате многократной коррекции весов удовлетворять заданным требованиям. Эти возможности, по-видимому, впервые были осознаны в в 1957 г. Розенблаттом, разработавшим распознающую систему «персептрон» (см. [82, 103]), и в 1959 г. Уидроу, с успехом применившим адаптивный пороговый элемент «адалина» (см. [112]) в ряде технических приложений. Не касаясь детально огромного числа предложенных с тех пор алгоритмов адаптации (см. [113]), поясним лишь сам принцип. Для этого полезно рассмотреть несколько иное представление для пороговой функции.

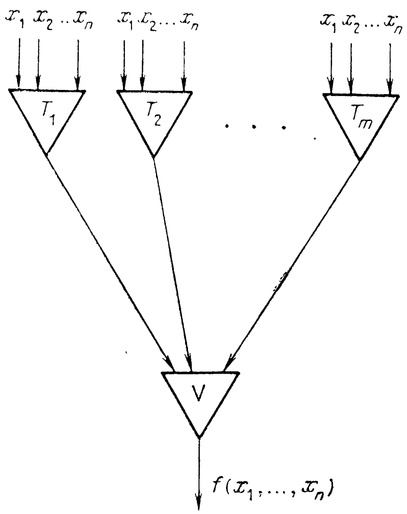

Рис. 3

Булевой функцией будем считать отображение f: $\{-1, 1\}^n \to \{-1, 1\}$. Тогда пороговую функцию можно представить в виде

$$f(\mathbf{y}) = \operatorname{sgn}(a_0 + a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n), \tag{4}$$

полагая $\operatorname{sgn}(0) = -1$. Геометрически это соответствует переходу от куба $\{0, 1\}^n$ к кубу $\{-1, 1\}^n$. Связь между переменными y_i в (4) и x_i в (1) задается соотношением $y_i = 2x_i - 1$. Поэтому коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ в (4) те же, что и в (1), а обобщенный порог или смещение a_0 равен $a_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i - 2b$.

Однако на (4) можно взглянуть и иначе, рассматривая в качестве значения пороговой функции знак скалярного произведения расширенного вектора весов $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ и расширенного вектора-вершины $(1, y_1, \ldots, y_n)$. Тогда естественным образом возникает следующий алгоритм коррекции: при обходе вершин куба в случае правильного значения функции в вершине не менять значений весов, а в случае ошибки прибавлять к расширенному вектору весов или вычитать из него расширенный вектор-вершину в зависимости от того, какое действие приводит к изменению скалярного произведения в нужном направлении. И действительно, этот алгоритм, называемый персептронным, за конечное число обходов куба приводит к цели, т. е. дает функцию, принимающую в вершинах $\{-1, 1\}^n$ заданные значения, если только такая пороговая функция вообще существует (см. [56, 82, 87]).

Персептронный алгоритм может рассматриваться как метод градиентного спуска для минимизации функционала $\sum |(\mathbf{a}, \mathbf{y})|$, где суммирование производится по тем наборам **y**, на которых функция принимает неправильные значения, с той, однако, разницей, что вместо градиента суммы поочередно используется градиент каждого из слагаемых. Рассматривая другие функционалы ошибки, например $\sum(\mathbf{a}, \mathbf{y})^2$, а также регулируя шаг градиентного спуска, можно получить новые алгоритмы адаптации (см. [56, 113]). Если же вершины куба предъявляются не в фиксированном порядке, а выбираются случайным образом в соответствии с некоторым вероятностным распределением, что согласуется с постановками многих прикладных задач, то рассмотренные алгоритмы минимизируют математическое ожидание функционала ошибки и становятся методами стохастической аппроксимации типа процедуры Роббинса — Монро. Открытие подобных алгоритмов подстройки весов явилось одной из причин широкого использования пороговых и вообще линейных функций в задачах искусственного интеллекта и распознавания образов.

Заметим, что в (4) a_0 входит равноправно с $a_1, \ldots, a_n$. Это позволяет (подобно однородным координатам в проективной геометрии) ввести дополнительную переменную y_0 и рассмотреть функцию

$$f^H(y_0, y_1, \ldots, y_n) = \operatorname{sgn}(a_0y_0 + a_1y_1 + \ldots + a_ny_n), \qquad (5)$$

совпадающую с исходной функцией f в подкубе $y_0 = 1$ и называемую по отношению к ней гиперфункцией. Гиперфункция может быть также записана в виде $f^H = y_0 f \vee \bar{y}_0 f^d$, где $f^d = \bar{f}(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$ — функция, двойственная к f. Сама же гиперфункция является, как сразу видно из (5), самодвойственной функцией $(f^H)^d = f^H$. Схематически гиперфункция представлена на рис. 4, из которого можно заметить, что для дуализации пороговой функции в форме (4) достаточно изменить значение a_0 на противоположное. Отметим также, что с помощью (5) устанавливается взаимно однозначное соответствие между пороговыми функциями от n переменных и самодвойственными пороговыми функциями от $n+1$ переменных.

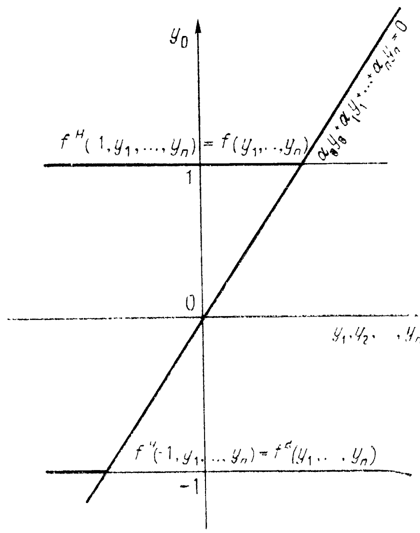

Рис. 4

Сама же первоначальная идея Маккаллока и Питтса — описать функционирование нервной системы логическими сетями — также не была забыта и, значительно обогащенная, получила дальнейшее развитие в современной теории нейронных сетей (см. [91, 97, 111]). Эта бурно развивающаяся в последние годы область, продвигаемая с одной стороны нейробиологами, стремящимися раскрыть тайну функционирования нервной системы и выработки условных рефлексов живыми организмами, а с другой — математиками, физиками и инженерами, конструирующими искусственные нейронные сети, способные решать задачи распознавания и оптимизации, стала в настоящее время одним из основных направлений в исследованиях по искусственному интеллекту.

Прогресс был достигнут, когда от простейших адаптивных сетей типа «персептрона» перешли к многослойным нейронным сетям, каждый слой которых состоит из множества адаптивных элементов, и были разработаны алгоритмы их настройки. В совокупности это привело к качественному росту функциональных возможностей искусственных нейронных сетей. В нейронных вычислениях внимание конструкторов привлекает также распараллеленность процесса обработки информации, обещающая при подходящей аппаратной реализации существенный рост быстродействия по сравнению с компьютерами фон-неймановского типа. Сегодня именно с нейронным компьютером, заимствующим структурно-функциональные принципы мозга, большинство исследователей связывают дальнейший прогресс в обучении машин распознаванию слуховых и зрительных образов, их потенциальную возможность решать другие плохо формализованные задачи, не вызывающие затруднений у «естественного интеллекта» человека и животных, но трудных для современных ЭВМ, требующих алгоритмически точного описания процесса решения.

Заканчивая этот краткий экскурс в историю развития пороговой логики, вернемся к ее истокам. Можно предполагать, что в демократических республиках древней Эллады принятием ответственных решений с помощью голосования стремились избежать ошибки, хотя возможно, что решение по большинству воспринималось просто как справедливое и необходимое для поддержания государственной структуры. Более определенно сформулировал свою точку зрения Лаплас [31], настаивая на количественном увеличении состава суда для уменьшения вероятности судебной ошибки. Однако обоснование использования мажоритарного принципа в обществе с помощью теории вероятности даже в простейшем двухальтернативном случае сталкивается с двумя серьезными трудностями: 1) не всегда возможно корректно определить само понятие правильного решения, чтобы затем приписывать вероятности ошибок отдельным членам коллектива, 2) затруднен обоснованный выбор вероятностной модели коллектива.

Этих трудностей не возникает при использовании мажоритарного принципа в технических системах переработки и передачи информации, в которых для повышения надежности применяются избыточность и дублирование. Простейшая модель статистически независимых ошибок в различных устройствах часто оказывается вполне приемлемой. Приоритет в использовании здесь мажоритарного принципа принадлежит фон Нейману [109], чьи идеи вызвали целый поток исследований по повышению надежности логических схем и автоматов в конце пятидесятых — начале шестидесятых годов (см. [77, 83, 100, 123]).

Примерно в это же время рядом исследователей было замечено, что при статистической независимости ошибок отдельных членов коллектива оптимальное решающее правило является пороговой функцией (см. ссылки в [48, 56, 87]). Дальнейшее исследование качества решений, принимаемых простым большинством и путем взвешенного голосования, проводилось Пирсом [94], сформулировавшим также общие принципы обучения и самообучения порогового элемента, используемого для повышения надежности. Статистические свойства мажоритарной функции рассматривались также автором [17, 18, 19]. В [4] сходные идеи были использованы для повышения точности решения задач распознавания образов. Следующая модель абстрактной информационной системы взята из [20].

Пусть имеется n дублирующих друг друга параллельных информационных каналов, по которым передаются бинарные символы. Такие каналы могут быть моделью технической системы связи, коллектива экспертов или совокупностью различных программно реализованных алгоритмов распознавания. Пусть p_i — вероятность правильной передачи символа i-м каналом, $q_i = 1 - p_i$ — вероятность ошибки. Тогда в случае статистической независимости ошибок в каналах оптимальное правило восстановления переданного символа по набору символов, принятых по каналам, задается взвешенным голосованием между каналами с весами, равными $\log(p_i/q_i)$, т. е. пороговой функцией.

На практике редко бывает выполнено условие независимости и известны вероятности ошибок. Однако в ряде случаев оказывается возможным пропустить по многоканальной системе тестовую последовательность битов, а затем найти пороговую функцию, минимизирующую число ошибок на обучающем материале, использовав для этого, например, персептронный алгоритм. Наконец, если пропускание теста неосуществимо, то остается воспользоваться мажоритарным алгоритмом, т. е. восстанавливать переданный бит по большинству принятых по каналам битов. Другая интересная возможность состоит в том, чтобы, начав с мажоритарной пороговой функции, считать бит на ее выходе безошибочным и поощрять или наказывать каналы соответствующим изменением их весов, улучшая таким образом в процессе работы саму решающую процедуру [20а].

В большинстве технических систем связи, однако, повышение достоверности информации достигается не путем распараллеливания, а с помощью помехоустойчивого кодирования. Здесь идея использования мажоритарного принципа в декодерах принадлежит Риду [101], затем она была развита Месси [79]. Общий же результат о возможности порогового декодирования блоковых кодов выражается теоремой Рудольфа (см. [78]).

Интерес к изучению свойств пороговых функций стимулируется, с одной стороны, важностью решаемых с их помощью задач, с другой — богатством и разнообразием используемых методов, связанных с различными разделами математики. Оглядываясь назад, можно сказать, что 1960—1965 гг. были «золотым веком» пороговой логики, когда здесь в течение короткого промежутка времени было выдвинуто много ярких идей и получено большинство результатов. Ряд задач все же не получил тогда удовлетворительного решения. В первую очередь это относится к задаче подсчета числа N_n пороговых функций от n переменных. К 1965 г. удалось получить лишь порядок асимптотики логарифма этого числа

$$2^{n^2(1/2-o(1))} < N_n < 2\sum_{i=0}^{n}\binom{2^n-1}{i} = 2^{n^2(1-o(1))}. \tag{6}$$

Верхняя оценка здесь выражает максимальное число областей, на которые $(n+1)$-мерное евклидово пространство может разбиваться 2^n гиперплоскостями, проходящими через начало координат. Впервые верхняя оценка в (6) появилась согласно авторитетным свидетельствам Уиндера [121] и Муроги [86] в 1959 г. в отчете [93] и примерно в это же время была независимо получена Камероном [46] и Уиндером [115]. Впоследствии, однако, выяснилось, что пальму первенства здесь следует отдать выдающемуся швейцарскому математику девятнадцатого века, одному из создателей многомерной геометрии Людвигу Шлефли, впервые получившему формулу для числа областей около 1850 г. (см. [105, с. 209—212]). Сама же постановка задачи о подсчете числа областей разбиения и ее решение для трехмерного пространства принадлежат знаменитому геометру Якобу Штейнеру [108].

Нижняя оценка в (6) была получена изящным индуктивным методом, основанным на вариации порога, также независимо открытым несколькими авторами, но первая публикация в 1965 г. принадлежит Ядзиме и Ибараки [124]. На русский язык переведена также работа Блоха и Моравека [44].

Оценки (6) продержались до 1989 г. и вопрос об асимптотике оставался открытым, пока автором [15] не было показано, что

$$\log_2 N_n \sim n^2, \qquad n\to\infty. \tag{7}$$

Этот результат оказался возможным вследствие общего прогресса, достигнутого в дискретной математике после 1965 г., в частности, появления мощных комбинаторно-вероятностных методов.

В настоящем обзоре предпринята попытка не только изложить основные комбинаторные свойства пороговых функций, но и в целом охватить используемые в исследованиях методы, значение которых подчас выходит за рамки пороговой логики. Рассматриваются только классические двузначные пороговые функции. Алгоритмы адаптации и статистические свойства пороговых функций в задачах повышения достоверности информации в обзоре не рассматриваются. Эти вопросы, не соприкасающиеся непосредственно с комбинаторными свойствами и тесно связанные с прикладными задачами, заслуживают отдельного рассмотрения. Из схем на пороговых элементах рассматриваются лишь порогово-дизъюнктивные схемы, т. е. пороговые представления. Доказательства порою лишь намечены, но в важнейших случаях автор стремился дать ссылки на первоисточники с указанием авторства.

Основным в обзоре является § 2, на него в значительной степени опирается последующее изложение. От читателя предполагается знакомство со стандартным курсом булевых функций и теории д. н. ф., в качестве которого можно рекомендовать книгу Нигматуллина [36]. На протяжении обзора без специального разъяснения используются: 1) известный частичный порядок на множестве $\{0, 1\}^n$: $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \leqslant \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \Leftrightarrow x_i \leqslant y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$; 2) понятие монотонной булевой функции φ: $\mathbf{x} \leqslant \mathbf{y} \Rightarrow \varphi(\mathbf{x}) \leqslant \varphi(\mathbf{y})$; 3) понятие нижней единицы и верхнего нуля монотонной функции φ: $\alpha \in \{0, 1\}^n$ называется нижней единицей функции φ, если $\varphi(\alpha) = 1$ и $\varphi(\beta) = 0$ для любого $\beta < \alpha$; аналогично определяется верхний нуль; конъюнкции, соответствующие нижним единицам, являются простыми импликантами монотонной функции; 4) расстояние Хемминга $r(\alpha, \beta)$ между вершинами $\alpha, \beta \in \{0, 1\}^n$ — число несовпадающих у них координат; 5) i-й слой куба — множество вершин с i единичными координатами; 6) $\log a = \log_2 a$. Будем также говорить, что некоторое свойство выполнено для почти всех булевых функций от n переменных или для типичной булевой функции, если доля функций, для которых оно выполнено, стремится к 1 с ростом n. Остальные необходимые понятия и определения вводятся по ходу изложения.

Обзор завершается списком интересных с точки зрения автора открытых проблем, которыми он надеется привлечь внимание специалистов по комбинаторному анализу к задачам пороговой логики. Автор сознает, что при изложении в одном обзоре результатов, по времени разделенных десятилетиями, ему вряд ли удалось избежать неточностей или даже ошибок, и будет признателен всем сообщившим или приславшим ему свои замечания.

§ 2. Общие подходы и методы в исследовании пороговых функций

1. Разбиение пространства гиперплоскостями. Пусть некоторая пороговая функция f: $\{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ задана в форме (1) набором значений параметров $a_1^0, \ldots, a_n^0, b$, строго отделяющим множество $f^{-1}(0)$ от $f^{-1}(1)$. В этом случае и все точки $(a_1, \ldots, a_n, b)$, лежащие внутри шара достаточно малого радиуса с центром в $(a_1^0, \ldots, a_n^0, b)$ в $(n+1)$-мерном пространстве, будут задавать ту же самую функцию. Возникает вопрос: что представляет собой множество значений параметров, задающих данную пороговую функцию? Для ответа на него удобнее использовать представление (4). Значение функции в каждой вершине $\mathbf{y} \in \{-1, 1\}^n$ накладывает на значения параметров ограничение вида $a_0 + a_1 y_1 + \ldots \ldots + a_n y_n \gtrless 0$, т. е. точка $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ должна принадлежать одному из двух полупространств в зависимости от значения $f(\mathbf{y})$. Выпуклый многогранный конус, образованный пересечением 2^n таких полупространств, и является множеством значений параметров, реализующих функцию f. Если конус не пуст, т. е. пороговая функция с заданными значениями в вершинах $\{-1, 1\}^n$ существует, то он в данном случае обладает и внутренностью, т. е. является телесным. Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между открытыми конусами, на которые $(n+1)$-мерное пространство $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ разбивается проходящими через начало координат 2^n гиперплоскостями вида

$$a_0 \pm a_1 \pm \ldots \pm a_n = 0 \tag{8}$$

и пороговыми функциями.

Задача подсчета числа конусов, на которые n-мерное евклидово пространство E^n разбивается K гиперплоскостями, проходящими через начало координат, впервые была рассмотрена для двух- и трехмерного случаев в 1826 г. Штейнером [108], и около 1850 г. обобщена Шлефли [105, с. 209—212] на n-мерный случай. В дальнейшем, на протяжении ста с лишним лет проблематика, связанная с разбиением пространства гиперплоскостями, развивалась многими авторами, хотя и не все из них были, по-видимому, осведомлены о работах своих предшественников. Так продолжалось вплоть до 1971 г., когда появился обстоятельный обзор Грюнбаума [63], содержащий обширную библиографию.

Из всего многообразия полученных здесь результатов коснемся лишь двух, имеющих отношение к проблеме перечисления пороговых функций. Напомним, что расположение гиперплоскостей в n-мерном евклидовом пространстве E^n называется *общим* (нецентрированным), если пересечение любых i гиперплоскостей имеет размерность $n-i$, при $i > n$ оно пусто. Расположение гиперплоскостей называется *центрированным общим*, если все они проходят через одну точку (начало координат) и любые i, $i \leqslant n$, нормалей линейно независимы.

Теорема 1 [Шлефли]. *Максимальное число n-мерных открытых многогранных конусов, возникающих при разбиении n-мерного евклидова пространства K гиперплоскостями, проходящими через начало координат, равно* $2\sum_{i=0}^{n-1}\binom{K-1}{i}$, *и этот максимум достигается в том и только том случае, если гиперплоскости находятся в центрированном общем положении.*

Теорема 2 [45]. *Максимальное число n-мерных открытых многогранных областей, возникающих при разбиении n-мерного евклидова пространства произвольными K гиперплоскостями, равно* $\sum_{i=0}^{n}\binom{K}{i}$, *и этот максимум достигается в том и только том случае, если гиперплоскости находятся в общем положении.*

Докажем вторую из этих теорем, первая доказывается аналогично. Доказательство отличается от данного в [45], где использовались эйлерова характеристика, и является примером использования индуктивного метода в геометрии, гносеологическое значение которого подчеркивалось Пойа [96], его использовал и сам Шлефли.

Доказательство. При $K=1$ утверждение теоремы 2 выполнено при любом n. Пусть оно выполнено для всех n при $K=m$. Докажем его для $K=m+1$. Пусть в E^n заданы $m+1$ гиперплоскостей $L_1, \ldots, L_m, L_{m+1}$. Число областей, на которые гиперплоскости $L_1, \ldots, L_{m+1}$ разбивают E^n, по предположению индукции не превышает $\sum_{i=0}^{n}\binom{m}{i}$. При проведении L_{m+1} число областей увеличивается за счет того, что некоторые из областей рассекаются на две области. В результате каждого такого рассечения в гиперплоскости L_{m+1} вырезается $(n-1)$-мерный кусок, и прирост числа областей в E^n равен числу таких кусков в L_{m+1}. Эти куски являются $(n-1)$-мерными областями гиперплоскости L_{m+1}, получающимися в результате рассечения L_{m+1} лежащими в ней $(n-2)$-мерными гиперплоскостями, образованными пересечениями L_{m+1} с $L_1, \ldots, L_m$. Таких $(n-2)$-мерных гиперплоскостей не более m, и по предположению индукции число кусков гиперплоскости L_{m+1} не превышает $\sum_{i=0}^{n-1}\binom{m}{i}$. Поэтому полное число областей в E^n не превосходит

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{m}{i}+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{m}{i}=\sum_{i=0}^{n}\binom{m+1}{i}.$$

Расположение гиперплоскостей $L_1, \ldots, L_{m+1}$ является общим в том и только том случае, когда гиперплоскости $L_1, \ldots, L_m$ находятся в общем положении и $(n-2)$-мерные гиперплоскости-пересечения находятся в общем положении в L_{m+1}. Этим устанавливается условие равенства. Теорема доказана.

С задачей разбиения пространства гиперплоскостями тесно связана задача о числе линейных разделений конечного множества точек. Напомним, что точки находятся в общем положении в E^n, если никакие $i+2$ из них не лежат в i-мерном аффинном подпространстве для $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Следующий результат прекрасно изложен Нильсоном [87] со ссылкой на Ковера [51], его доказательство также представлено в [66].

Теорема 3. *Максимальное число линейно отделимых подмножеств у конечного множества из K точек в E^n равно* $2\sum_{i=1}^{n}\binom{K-1}{i}$, *и этот максимум достигается в том и только том случае, если точки находятся в общем положении.*

Воспользовавшись теоремой 1 или теоремой 3 и положив $K=2^n$, получим верхнюю оценку (6) для числа пороговых функций. Отметим также, что помимо пороговой логики теорема 1 нашла интересное приложение в геометрических вероятностях [52, 110].

Нетривиальную нижнюю оценку для числа областей разбиения пространства гиперплоскостями, зависящую лишь от n и K, дать невозможно, так как это число зависит от степени вырожденности системы гиперплоскостей. Семейство гиперплоскостей (8) вырождено, и этим было обусловлено длительное отсутствие прогресса в задаче оценивания числа пороговых функций. Однако полезную нижнюю оценку для числа областей можно получить, если воспользоваться также зависящей от степени вырожденности величиной — полным числом различных аффинных подпространств, порожденных пересечениями гиперплоскостей.

Расположение гиперплоскостей в E^n назовем *квазиобщим*, если пересечение любых i гиперплоскостей имеет размерность $n-i$ или пусто (т. е. допускается параллельность, но через каждое подпространство пересечения размерности $n-i$ проходит ровно i гиперплоскостей).

Теорема 4 [16]. *Число n-мерных открытых многогранных областей, на которые пространство E^n разбивается произвольной конечной системой гиперплоскостей, всегда не меньше полного числа всевозможных аффинных подпространств пересечения, считая подпространства всех размерностей от 0 (точки) до $n-1$ (сами гиперплоскости) и n (все пространство E^n). Причем равенство имеет место в том и только том случае, когда расположение гиперплоскостей квазиобщее.*

На иллюстрирующем теорему рис. 5 представлены все неизоморфные расположения трех прямых на плоскости. В случаях *а*), *б*), *в*) расположение квазиобщее, и в теореме имеет место равенство. Так, в случае *а*) имеется 7 областей, и полное число аффинных подпространств также равно 7 (3 точки, 3 прямые и плоскость). В случае же *г*) расположение не квазиобщее, здесь 6 областей и только 5 подпространств (точка, 3 прямые и плоскость).

Теорема 4 может быть доказана подобно теореме 2 индукцией по числу гиперплоскостей. При проведении L_{m+1} увеличение числа областей в E^n равно числу $(n-1)$-мерных кусков в L_{m+1}, которое по предположению индукции не превосходит числа лежащих в L_{m+1} аффинных подпространств пересечения. Поэтому прирост числа областей разбиения в E^n при проведении L_{m+1} всегда не меньше прироста числа подпространств пересечения. При квазиобщем расположении гиперплоскостей прирост числа подпространств пересечения равен числу подпространств, лежащих в L_{m+1}, откуда и следует условие равенства.

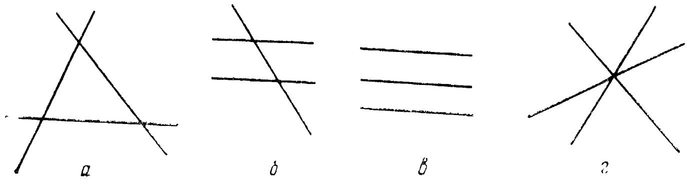

Рис. 5

В § 3, п. 1 с помощью теоремы 4 и свойств случайных (± 1)-матриц будет доказана асимптотика (7).

Помимо верхних и нижних оценок для числа областей разбиения существуют формулы, позволяющие, в принципе, точно, вычислить это число. Первым таким результатом была теорема Уиндера [118].

Пусть задано произвольное центрированное расположение K гиперплоскостей. Подмножество из i гиперплоскостей, где $0 \leqslant i \leqslant K$, назовем *четным*, если размерность их пересечения имеет одинаковую четность с $n-i$, и *нечетным* — в противном случае.

Теорема 5 [118]. *Число n-мерных открытых многогранных конусов, на которые конечное множество гиперплоскостей, проходящих через начало координат, разбивает E^n, равно разности между числом четных и нечетных подмножеств множества гиперплоскостей.*

Теорему 5 легко доказать уже рассмотренным индуктивным методом, но ее применение оказалось слишком сложным, чтобы продвинуть вопрос о числе пороговых функций. Более удобной оказалась формула Заславского [125]. Пусть имеется произвольное расположение гиперплоскостей в E^n. Множество аффинных подпространств пересечения упорядочим обратно включению, т. е. все пространство будет нулем частично упорядоченного множества, а гиперплоскости — его атомами. Любой интервал полученного таким образом частично упорядоченного множества является геометрической решеткой (см. [43]). Тогда, обращая соотношение Эйлера для числа геометрических элементов различных размерностей, возникающих в результате пересечений гиперплоскостей, можно получить следующий результат.

Теорема 6 [125]. *Число n-мерных открытых многогранных областей, на которые произвольная конечная система гиперплоскостей разбивает E^n, равно $\sum_s |\mu(0, s)|$, где $\mu(0, s)$ — функция Мебиуса частично упорядоченного множества подпространств пересечения, а суммирование производится по всем его элементам s.*

Для вычисления значений функции Мебиуса необходимо точное знание всей решетки подпространств пересечения, что в интересующем нас случае практически невозможно. Однако, геометрическая решетка и ее функция Мебиуса как аксиоматически задаваемые алгебраические объекты рассматривались в основополагающей работе Рота [104], в которой было, в частности, показано, что $\mu(0, s) \neq 0$. Это сразу позволяет заключить, что число областей разбиения не меньше полного числа подпространств пересечения, т. е. получить ослабленный вариант теоремы 5. Это и было впервые использовано в [15] при получении асимптотики (7).

2. Условия линейной разделимости точек. Булева функция является пороговой, если множество ее нулей отделимо от множества единиц гиперплоскостью. Одним из старейших результатов по линейной разделимости точек в E^n является теорема Кирхбергера [72]. Доказанная в 1903 г. на 24 страницах журнального текста, она долгое время считалась одной из труднейших, пока в 1950 г. Радемахером и Шенбергом [99] не была подмечена ее выводимость из теоремы Хелли (см. [54]). Хотя теорема Кирхбергера и не нашла прямых приложений в пороговой логике, этот красивый результат заслуживает быть приведенным.

Теорема 7 [72]. *Два конечных множества точек T_1 и T_2 в E^n строго разделимы гиперплоскостью тогда и только тогда, когда для всех $T \subseteq T_1 \cup T_2$, $|T| = n+2$, множества $T \cap T_1$ и $T \cap T_2$ строго разделимы.*

Доказательство [99]. В $(n+1)$-мерном пространстве $(a_1, \ldots, a_n, b)$ для каждой точки $t = (t_1, \ldots, t_n)$ из $T_1 \cup T_2$ рассмотрим открытое полупространство $a_1t_1 + \ldots + a_nt_n - b < 0$ для $t \in T_1$ и $a_1t_1 + \ldots + a_nt_n - b > 0$ для $t \in T_2$. По условию теоремы пересечение каждых $n+2$ из этих полупространств не пусто. Следовательно, по теореме Хелли, в $E^{n+1} = (a_1, \ldots, a_n, b)$ существует точка, принадлежащая всем полупространствам, которая и задает гиперплоскость, строго отделяющую T_1 от T_2. Этим завершается доказательство.

Значительно большее значение в пороговой логике приобрели результаты, вытекающие из фундаментальной теоремы выпуклого анализа, согласно которой для линейной разделимости двух конечных множеств в E^n необходимо и достаточно, чтобы их выпуклые оболочки не пересекались. Этот широко известный факт имеет в пороговой логике ряд важных следствий. Следующий результат хорошо известен.

Утверждение 1. *Элементарная конъюнкция является пороговой функцией.*

Доказательство следует из того, что подкуб, соответствующий элементарной конъюнкции, задается фиксацией значений части переменных, и у любой выпуклой линейной комбинации вершин подкуба и только у них эти переменные принимают тот же набор значений. Неравенство, отсекающее произвольный подкуб, легко выписать и в явном виде (см. [10, 42]).

Из того, что вершины куба $\{0, 1\}^n$ имеют целые координаты, следует, что для произвольной булевой функции f выпуклые оболочки множеств $f^{-1}(0)$ и $f^{-1}(1)$ пересекаются в том и только том случае, если существуют их совпадающие выпуклые комбинации с рациональными коэффициентами. А это позволяет выразить условие пересечения выпуклых оболочек на языке конечных сумм. Следующее определение общепринято в пороговой логике.

Функция f называется *k-суммируемой*, если для некоторого j, $2 \leqslant j \leqslant k$, существует j не обязательно различных наборов $\mathbf{x}_1^0, \ldots, \mathbf{x}_j^0$ из $f^{-1}(0)$ и j также не обязательно различных наборов $\mathbf{x}_1^1, \ldots, \mathbf{x}_j^1$ из $f^{-1}(1)$ таких, что $\mathbf{x}_1^0 + \ldots + \mathbf{x}_j^0 = \mathbf{x}_1^1 + \ldots + \mathbf{x}_j^1$, где под суммированием понимается обычное покоординатное сложение векторов. В противном случае f называется *k-несуммируемой*. Если f k-несуммируема для всех натуральных k, то она называется *несуммируемой*.

Из предыдущего замечания вытекает следующий хорошо известный в пороговой логике результат, впервые сформулированный Элготом [57].

Теорема 8 [57]. *Для того чтобы функция была пороговой, необходимо и достаточно, чтобы она была несуммируемой.*

В общем случае условие несуммируемости является труднопроверяемым, что соответствует сложности задачи распознавания пороговости (см. п. 8). Однако в некоторых частных случаях теорема 8 может быть уточнена. Так, если функция является монотонной, то в качестве единичных наборов в условии суммируемости можно брать ее нижние единицы или же в качестве нулевых использовать верхние нули. Если, кроме того, все нижние единицы или все верхние нули лежат в слое 2, то возможны дальнейшие уточнения теоремы 8. Следующее утверждение обобщает результат, впервые полученный при исследовании пороговых графов (см. п. 5).

Утверждение 2. *Если у монотонной функции все нижние единицы лежат в слое 2 (функция графическая) или в слое 2 лежат все ее верхние нули, то для нее несуммируемость и, следовательно, пороговость эквивалентны несуммируемости в слое 2.*

Доказательство. Достаточно показать, что из суммируемости следует суммируемость в слое 2. Пусть сначала все верхние нули функции лежат в слое 2 и функция суммируема. Если среди нулевых наборов $\mathbf{x}_1^0, \ldots, \mathbf{x}_j^0$ в условии суммируемости имеются наборы, не являющиеся верхними нулями, то заменим их большими их наборами, являющимися верхними нулями, увеличив одновременно некоторые из единичных наборов $\mathbf{x}_1^1, \ldots, \mathbf{x}_j^1$ так, чтобы равенство сохранилось. После этого все единичные наборы в условии суммируемости также будут лежать в слое 2, и функция оказывается суммируемой в слое 2. В самом деле, если допустить, что не все единичные наборы лежат в слое 2, то среди них найдется набор, лежащий в слое 1 и меньший некоторого нулевого, что невозможно вследствие монотонности.

Пусть теперь по условию нижние единицы лежат в слое 2 и функция суммируема. Тогда можно считать, что в условии суммируемости все единичные наборы являются нижними единицами. Если при этом некоторый нулевой набор в условии суммируемости лежит в слое 1, то существует больший его единичный набор в слое 2. Удалим оба набора из условия суммируемости, сохранив равенство уменьшением одного из оставшихся нулевых наборов. После такого удаления всех нулевых наборов слоя 1 оставшиеся нулевые наборы обязаны лежать в слое 2, т. е. функция суммируема в слое 2. Утверждение доказано.

Таким образом, в классе рассматриваемых в утверждении 2 функций для отделимости гиперплоскостью нулевых вершин от единичных достаточно их отделимости в слое 2. В п. 5 будет показано, что суммируемость в слое 2 эквивалентна 2-суммируемости. Таким образом, при исследовании пороговости таких функций с помощью теоремы 8 в условии суммируемости достаточно рассматривать лишь пары единичных и пары нулевых наборов, лежащих в слое 2. В общем же случае для любого фиксированного k существуют, как было показано Уиндером [116], k-несуммируемые функции, не являющиеся пороговыми. Заметим также, что утверждение 2 перестает быть справедливым, если слой 2 в нем заменить на слой 3 [102].

Другим важнейшим понятием пороговой логики, связанным с теоремой о линейной разделимости, являются параметры Чоу. Пусть T — конечное множество точек в E^n. Для каждого подмножества $T_1 \subseteq T$ определим его вектор (параметров) Чоу как $(n+1)$-мерный вектор $S(T_1) = (s_0, s_1, \ldots, s_n)$, у которого $s_0 = |T_1|$, а s_i при $i \geqslant 1$ есть сумма i-х координат точек множества T_1, т. е. вектор $(s_1, \ldots, s_n)$ является суммой n-мерных векторов-точек множества T_1. Следующий результат имеет для пороговой логики большое значение.

Теорема 9. *Пусть T_1 — подмножество множества T, строго отделимое от $T \setminus T_1$ гиперплоскостью, $S(T_1) = (s_0, s_1, \ldots, s_n)$ — его вектор Чоу,* *Тогда для любого подмножества* $T_2 \subseteq T$, *не совпадающего с* T_1, $S(T_2) \neq S(T_1)$.

Доказательство проведем от противного. Пусть существует $T_2 \neq T_1$ такое, что $S(T_2) = S(T_1)$. Тогда

$$\sum_{t \in T_1} \mathbf{t} = \sum_{t \in T_2} \mathbf{t}, \quad \sum_{t \in T_1 \cap T_2} \mathbf{t} + \sum_{t \in T_1 \setminus T_2} \mathbf{t} = \sum_{t \in T_1 \cap T_2} \mathbf{t} + \sum_{t \in T_2 \setminus T_1} \mathbf{t},$$

$$\sum_{t \in T_1 \setminus T_2} \mathbf{t} = \sum_{t \in T_2 \setminus T_1} \mathbf{t}.$$

Так как $|T_1| = |T_2|$, то $|T_1 \setminus T_2| = |T_2 \setminus T_1|$ и

$$\frac{1}{|T_1 \setminus T_2|} \sum_{t \in T_1 \setminus T_2} t = \frac{1}{|T_2 \setminus T_1|} \sum_{t \in T_2 \setminus T_1} \mathbf{t},$$

что невозможно, так как множества $T_1 \setminus T_2$ и $T_2 \setminus T_1$ лежат по разные стороны гиперплоскости и их выпуклые оболочки не могут пересекаться. Теорема доказана.

Возьмем теперь в качестве конечного множества T в E^n множество вершин n-мерного единичного куба $\{0, 1\}^n$, а каждой булевой функции f: $\{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ сопоставим подмножество ее единичных вершин $f^{-1}(1)$. Тогда для булевой функции f можно определить ее вектор Чоу как $S(f) = S(f^{-1}(1))$. Теперь согласно теореме 9, если f_1 — пороговая функция и $S(f_1)$ — ее вектор Чоу, то для любой отличной от нее функции f_2, пороговой или непороговой, $S(f_2) \neq S(f_1)$. Именно в такой форме теорема 9 была впервые установлена Чоу [47]. Приведенная здесь более общая формулировка будет использована при изучении пороговых представлений в § 4, п. 4, где в качестве множества T теоремы 9 будет использован средний слой куба.

Векторы Чоу являются удобным средством идентификации пороговых функций и используются для их табулирования. По вектору Чоу произвольной булевой функции можно, в принципе, однозначно установить, является ли она пороговой, а если является, то и выписать задающее ее неравенство (1). Однако эффективных алгоритмов для решения этой задачи неизвестно.

Интересный подход к параметрам Чоу предложен Дертоузосом [55]. Им разрабатывались также приближенные алгоритмы для получения линейного неравенства по вектору Чоу. Уиндером [120] проведено экспериментальное исследование различных подходов к получению таких приближений. Наиболее полное освещение теоретических вопросов, связанных с параметрами Чоу, можно найти в работе Уиндера [122].

В заключение заметим, что для произвольной булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ каждая координата ее $(n+1)$-мерного вектора Чоу $S(f)$ может принимать лишь целые значения от 0 до 2^n. Поэтому всего существует не более $(2^n+1)^{n+1}$ векторов Чоу и, стало быть, не более $(2^n+1)^{n+1}$ пороговых функций [68], что также дает верхнюю оценку n^2 для асимптотики логарифма числа пороговых функций.

3. Метод вариации порога. Пороговая функция (1) зависит от n весов и порога и является достаточно сложным объектом. Легче проследить ее изменение, варьируя только ее порог b, т. е. параллельно перемещая гиперплоскость в пространстве E^n. Следующий результат хорошо известен и интуитивно ясен.

Теорема 10. *Пусть T — произвольное конечное множество точек в E^n, L: $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$ — гиперплоскость, не проходящая через точки множества T. Тогда либо любой параллельный сдвиг гиперплоскости содержит не более одной точки множества T, либо этого можно добиться варьированием значений $a_1, \ldots, a_n$, не меняя разделения гиперплоскостью точек множества T.*

Доказательство. В пространстве параметров $(a_1, \ldots, a_n)$ возьмем n-мерный шар с центром, задаваемым положением гиперплоскости, столь малого радиуса, чтобы при любом положении гиперплоскости, задаваемой точкой $(a_1, \ldots, a_n)$ внутри шара и прежним значением b, в ней не лежали точки множества T. Для двух произвольных точек $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in T$ множество тех наборов значений параметров $(a_1, \ldots, a_n)$, для которых изменением b обе точки могут быть помещены на гиперплоскость, задается условием

$$(a_1, \ldots, a_n) \perp (\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1),$$

т. е. является гиперплоскостью. Утверждение теоремы следует из того, что конечным числом таких гиперплоскостей (размерности $n-1$) нельзя покрыть n-мерный шар.

Из теоремы 10 непосредственно вытекает, что из каждой пороговой функции от n переменных изменением только порога можно получить 2^n+1 различных функций, отсекая от 0 до 2^n вершин куба $\{0, 1\}^n$.

Пусть теперь варьируется не порог b, а один из весовых коэффициентов, например a_n. Разобьем куб $\{0, 1\}^n$ на два подкуба: $x_n = 0$ и $x_n = 1$. В обоих подкубах функция (1) является пороговой. В подкубе $x_n = 0$ она задается неравенством

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \leqslant b \tag{9}$$

и при варьировании a_n остается неизменной. В подкубе $x_n = 1$ она задается неравенством

$$a_1x_1 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1} \leqslant b - a_n,$$

и при варьировании a_n здесь возникает $2^{n-1}+1$ различных функций. Таким образом, из каждой пороговой функции (9) от $n-1$ переменных, придавая различные значения коэффициенту a_n, можно получить $2^{n-1}+1$ функций от n переменных, т. е.

$$N_n \geqslant (2^{n-1}+1)N_{n-1} \qquad [44, 124]. \tag{10}$$

С помощью (10) получаем

$$N_n > \prod_{i=1}^{n-1} 2^i = 2^{n(n-1)/2},$$

что и дает нижнюю оценку в (6).

На самом деле, в (10) всегда имеет место строгое неравенство, так как небольшим изменением весов в (9), не меняющим функции в подкубе $x_n = 0$, можно добиться, чтобы при вариации b в подкубе $x_n = 1$ возникли некоторые новые функции. Однако улучшить асимптотику логарифма нижней оценки в (6) на этом пути не удалось [124].

В § 3 метод вариации порога будет использован для получения оценок числа пороговых множеств заданной мощности, а также для доказательства существования обширного класса пороговых функций с экспоненциальной сложностью д. н. ф.

4. Связь с другими классами булевых функций. Пороговая функция (1) с неотрицательными весами является, очевидно, монотонной. Если же среди весов $a_1, \ldots, a_n$ имеются отрицательные, то заменами $x_i \to 1 - x_i$ из нее можно получить монотонную. Функция, которая заменой некоторых из переменных на их отрицания может быть преобразована в монотонную, называется *однородной*. Пороговые функции являются, таким образом, однородными, а число N_n^0 монотонных пороговых функций связано с полным числом пороговых функций соотношением $N_n^0 < N_n < 2^nN_n^0$.

Подобно монотонной, сокращенная д. н. ф. однородной функции является ее единственной тупиковой, кратчайшей и минимальной д. н. ф.. Каждая буква может входить в эту д. н. ф. либо только без отрицания, либо только с отрицанием. Множества $f^{-1}(0)$ и $f^{-1}(1)$ однородной функции f являются связными, т. е. каждое из них можно обойти, переходя каждый раз в соседнюю вершину и не покидая пределов множества. Это справедливо и для пороговых функций.

Утверждение 3 [68]. *Множества $f^{-1}(0)$ и $f^{-1}(1)$ пороговой функции f являются связными.*

Перейдем теперь к более общему понятию k-сравнимой функции. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — булева функция, $G \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ — произвольное подмножество множества ее переменных. Пусть α — некоторый набор значений переменных из G, обозначим через $(G=\alpha)f$ — функцию от $n - |G|$ переменных $\{x_1, \ldots, x_n\} \setminus G$, получаемую из f приписыванием переменных множества G фиксированного набора значений α. Следующее понятие сыграло важную роль в изучении пороговых функций.

Функция f называется *k-сравнимой*, если для любого G, $|G| = k$, 2^k функций $(G = \alpha_i)f$, $i = 1, 2, \ldots, 2^k$, получаемых приписыванием переменным множества G всевозможных значений, линейно упорядочены, т. е. для любых i, j выполнено хотя бы одно из соотношений $(G = \alpha_i)f \leqslant (G = \alpha_i)f$ или $(G = \alpha_i)f \leqslant (G = \alpha_i)f$. Ясно, что $(k+1)$-сравнимая функция является k-сравнимой.

Однородную функцию теперь можно определить как 1-сравнимую, а n-сравнимую функцию будем называть *полностью сравнимой*. Нетрудно показать, что из $[n/2]$-сравнимости следует полная сравнимость [116]. Уиндером же был доказан технически намного более трудный результат о том, что при $1 \leqslant k \leqslant [n/2]$ класс k-сравнимых функций всегда является собственным подклассом класса $(k-1)$-сравнимых функций.

Пороговые функции являются, очевидно, полностью сравнимыми, так как приписывание некоторому подмножеству переменных различных наборов значений приводит к пороговым функциям, отличающимся лишь значениями порога. В середине пятидесятых годов существовала гипотеза, что условие полной сравнимости является достаточным для пороговости. Она была опровергнута в 1957 г. Э. Ф. Муром, который привел пример функции от 12 переменных, полностью сравнимой, но не пороговой (см. [2, 86]). Позднее с помощью ЭВМ было установлено, что все полностью сравнимые функции до 8 переменных включительно являются пороговыми, а Габелманом [60] был приведен пример полностью сравнимой функции от 9 переменных, не являющейся пороговой. Так как класс пороговых функций совпадает с классом несуммируемых, то следующая теорема, принадлежащая Элготу, совместно с результатами Уиндера о недостаточности для пороговости условия k-несуммируемости показывают собственное вложение пороговых функций в класс полностью сравнимых.

Теорема 11 [57]. *Класс полностью сравнимых функций совпадает с классом 2-несуммируемых функций.*

Доказательство. Пусть f не является полностью сравнимой. Тогда существует набор значений $\mathbf{u}$ некоторого подмножества U переменных и два различных набора значений $\mathbf{v}$ и $\mathbf{e}$ дополняющего его подмножества такие, что

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 1; \tag{11}$$

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0; \tag{12}$$

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{e}) = 0; \tag{13}$$

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{e}) = 1. \tag{14}$$

Из (11) и (12) следует $(U = \mathbf{u})f \nleqslant (U = \overline{\mathbf{u}})f$, а из (13) и (14) —

$(U=\bar{\mathbf{u}})f \not\leqslant (U=\mathbf{u})f$, что и выражает несравнимость функций $(U=\mathbf{u})f$ и $(U=\bar{\mathbf{u}})f$. Складывая попарно как векторы наборы в (11), (14) и в (12), (13), получаем одинаковые суммы

$$(\mathbf{u},\ \mathbf{v})+(\bar{\mathbf{u}},\ \mathbf{e})=(\bar{\mathbf{u}},\ \mathbf{v})+(\mathbf{u},\ \mathbf{e}),$$

т. е. функция f — 2-суммируема. Таким образом, класс 2-несуммируемых функций принадлежит классу полностью сравнимых.

Пусть, напротив, функция f является 2-суммируемой. Тогда существуют наборы $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{h}$ такие, что

$$f(\mathbf{x})=1,$$
$$f(\mathbf{y})=0,$$
$$f(\mathbf{z})=0,$$
$$f(\mathbf{h})=1$$

и

$$\mathbf{x}+\mathbf{h}=\mathbf{y}+\mathbf{z}. \qquad (15)$$

Вследствие условия (15) в наборах $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{h}$ возможны лишь те комбинации значений i-х координат, которые выписаны в столбцах табл. 1. Выделим координаты, имеющие комбинации значений как в первом или во втором столбцах таблицы. Поднабор значений этих координат в наборе $\mathbf{x}$ обозначим через $\mathbf{u}$. Тогда в наборе $\mathbf{z}$ этот поднабор будет также равен u, а в наборах $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ он равен $\bar{\mathbf{u}}$. Обозначив дополняющий его поднабор в наборах $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ через $\mathbf{v}$, а в наборах $\mathbf{z}$ и $\mathbf{h}$ через $\mathbf{e}$, получаем равенства (11)—(14), т. е. условия несравнимости. Таким образом, имеет место также обратное включение, и класс полностью сравнимых функций принадлежит классу 2-несуммируемых, а значит, эти классы совпадают. Теорема доказана.

Таблица 1

x	1	0	1	0	1	0
y	0	1	1	0	1	0
z	1	0	0	1	1	0
h	0	1	0	1	1	0

Система вложенных классов булевых функций схематически представлена на рис. 6.

Рассмотрим теперь подробнее важный класс 2-сравнимых функций. Пусть сначала $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная булева функция. На множестве переменных $\{x_1, \ldots, x_n\}$ введем отношение «$\overset{f}{\preccurlyeq}$» следующим образом:

$$x_i \overset{f}{\preccurlyeq} x_j \Leftrightarrow (x_i=1,\ x_j=0)f \leqslant (x_i=0,\ x_j=1)f.$$

Теорема 12 [84, 116]. *Для произвольной булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ отношение «$\overset{f}{\preccurlyeq}$» транзитивно на множестве переменных $\{x_1, \ldots, x_n\}$.*

Доказательство. Нужно показать, что из $x_i \overset{f}{\preccurlyeq} x_j$, $x_j \overset{f}{\preccurlyeq} x_k$ следует $x_i \overset{f}{\preccurlyeq} x_k$. Не теряя общности, будем считать, что $i=1$, $j=2$, $k=3$, через $\mathbf{x}$ обозначим $(n-3)$-мерный булев набор. Из определения отношения «$\overset{f}{\preccurlyeq}$» имеем

$$x_1 \overset{f}{\preccurlyeq} x_2 \Leftrightarrow f(10\gamma\mathbf{x}) \leqslant f(01\gamma\mathbf{x}), \qquad (16)$$

$$x_2 \overset{f}{\preccurlyeq} x_3 \Leftrightarrow f(\alpha 10\mathbf{x}) \leqslant f(\alpha 01\mathbf{x}). \qquad (17)$$

Нужно показать, что $f(1\beta0\mathbf{x}) \leqslant f(0\beta1\mathbf{x})$, т. е. $f(100\mathbf{x}) \leqslant f(001\mathbf{x})$ и $f(110\mathbf{x}) \leqslant f(011\mathbf{x})$. Применяя (16) и (17), получаем

$$f(100\mathbf{x}) \leqslant f(010\mathbf{x}) \leqslant f(001\mathbf{x}),$$
$$f(110\mathbf{x}) \leqslant f(101\mathbf{x}) \leqslant f(011\mathbf{x}).$$

Теорема доказана.

Отношение «$\overset{f}{\preccurlyeq}$» не является антисимметричным, поэтому, строго говоря, его нельзя назвать частичным порядком. Но если ввести отношение эквивалентности

$$x_i \overset{f}{\sim} x_j \Leftrightarrow x_i \overset{f}{\preccurlyeq} x_j \ \&\ x_j \overset{f}{\preccurlyeq} x_i,$$

то на множестве классов эквивалентности возникает частичный порядок. Функция f симметрична по переменным в каждом классе эквивалентности.

Рис. 6

Если $f(x_1, \ldots, x_n)$ — 2-сравнимая функция, то для каждой пары ее переменных выполнено хотя бы одно из отношений $x_i \overset{f}{\preccurlyeq} x_j$ или $x_j \overset{f}{\preccurlyeq} x_i$. Поэтому перестановкой переменных можно добиться выполнения отношений $x_n \overset{f}{\preccurlyeq} x_{n-1} \overset{f}{\preccurlyeq} \ldots \overset{f}{\preccurlyeq} x_2 \overset{f}{\preccurlyeq} x_1$, так чтобы «значимость» единицы была тем выше, чем раньше она встречается.

Монотонная 2-сравнимая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, переменные которой находятся в отношении $x_n \overset{f}{\preccurlyeq} x_{n-1} \overset{f}{\preccurlyeq} \ldots \overset{f}{\preccurlyeq} x_2 \overset{f}{\preccurlyeq} x_1$, называется *регулярной.*

Регулярную функцию содержательно можно охарактеризовать тем свойством, что при перемещении единиц в более правые позиции или их удалении значение функции не возрастает. Поэтому ее можно определить и иначе, введя на множестве вершин куба $\{0, 1\}^n$ так называемый канонический частичный порядок.

Будем говорить, что вершины $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \{0, 1\}^n$ находятся в отношении *канонического порядка* $\mathbf{x} \overset{k}{\preccurlyeq} \mathbf{y}$ в том и только том случае, если выполнены n неравенств

$$\sum_{i=1}^{j} x_i \leqslant \sum_{i=1}^{j} y_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Заметим, что из $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{y}$ следует $\mathbf{x} \overset{k}{\preccurlyeq} \mathbf{y}$, т. е. отношение «$\overset{k}{\preccurlyeq}$» содержит отношение «$\preccurlyeq$». Теперь регулярную булеву функцию f можно определить как сохраняющую канонический порядок:

$$\mathbf{x} \overset{k}{\preccurlyeq} \mathbf{y} \Rightarrow f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{y}).$$

Регулярные функции рассматривались в шестидесятые годы Уиндером [116, 117], Ху [68], а позднее и другими авторами (см. ссылки в [53]). Канонический же порядок на $\{0, 1\}^n$ многократно рассматривался математиками по разным поводам. Частично упорядоченное каноническим порядком множество $\{0, 1\}^n$ является ранжируемым, функция ранга имеет вид

$$r(\mathbf{x}) = nx_1 + (n-1)x_2 + \ldots + 2x_{n-1} + x_n.$$

Если вершина $\mathbf{y}$ покрывает вершину $\mathbf{x}$, то $r(\mathbf{y}) = r(\mathbf{x}) + 1$, т. е. $\mathbf{x}$ получается из $\mathbf{y}$ сдвигом некоторой единицы на одну позицию вправо или удалением последней единицы. Далее, как следует из [98, 107], это частично упорядоченное множество является шпернеровым, т. е. максимальная мощность его антицепи совпадает с максимальной из мощностей множеств одинакового ранга. Последовательность же ранговых мощностей $A(r)$, $r = 0, 1, \ldots, n(n+1)/2$, совпадающая с коэффициентами многочлена $(1+q)(1+q^2)\ldots(1+q^n)$, симметрична и унимодальна. Ее максимум достигается при $r = [n(n+1)/4]$ и асимптотически равен $(2/3\pi)^{1/2} n^{-3/2} 2^n$ [88]. Отсюда для числа R_n регулярных функций получаем [92] $\log R_n \gtrsim (2/3\pi)^{1/2} n^{-3/2} 2^n$.

Отметим также здесь, что для числа $R_n(l)$ регулярных функций с l нижними единицами справедлива следующая доказанная в [13] оценка

$$R_n(l) \leqslant (n+1)^l. \tag{18}$$

5. Пороговые графы. В этом разделе рассматриваются только простые неориентированные без кратных ребер и петель графы $G = (V, E)$, где V — множество вершин, E — множество ребер. Для любого $V' \subseteq V$ граф $G' = (V', E')$ называется индуцированным подграфом графа G, если две вершины в G' смежны тогда и только тогда, когда они смежны в G. Подмножество вершин графа называется независимым, если вершины в нем попарно несмежны, т. е. индуцированный подграф пуст. Через $I(v)$ будем обозначать множество вершин, смежных с v, степень вершины $\deg v = |I(v)|$. Вершина v называется доминирующей, если она смежна со всеми остальными, т. е. $\deg v = |V| - 1$. Если при этом в графе нет ребер, не инцидентных доминирующей вершине, то он называется звездой.

Рассмотрим монотонную булеву функцию φ: $\{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$, все простые импликанты которой состоят из двух букв, т. е. нижние единицы функции φ лежат в слое 2. Сопоставим ей граф $G(\varphi) = (V, E)$, множество вершин которого V находится во взаимно однозначном соответствии с множеством переменных $\{x_1, \ldots, x_n\}$, а множество ребер — с множеством простых импликантов, т. е. импликанту $x_i x_j$ соответствует ребро $(i, j) \in E$. Этим устанавливается взаимно однозначное соответствие между графами и монотонными булевыми функциями, все нижние единицы которых лежат в слое 2. Поэтому такие функции называют *графическими*. Если φ — пороговая графическая функция, то для соответствующего ей графа это означает, что существует линейное неравенство (1), отделяющее независимые подмножества вершин от зависимых. Такие графы называются пороговыми. Введенные Хваталом и Хаммером [49], они оказались весьма плодотворным для изучения объектом: с одной стороны, их класс достаточно представителен, с другой — для них находят исчерпывающее решение практически все возникающие в теории графов вопросы. Основательно изучены они были уже в [49]. В последовавшем затем потоке публикаций отметим работы [64, 65], а также монографию [62], трактующую эти вопросы весьма обстоятельно. Изложение их основных свойств можно найти также в [5], а более полную библиографию в [38].

Для пороговых графов известно много характеризаций, восходящих в основном к [49]. Сформулируем в виде теоремы наиболее интересные в контексте настоящего обзора.

Теорема 13. *Следующие условия для графа* $G=(V, E)$ *эквивалентны:*

1) *существует линейное неравенство, отделяющее характеристические векторы независимых множеств от зависимых;*

2) *среди индуцированных подграфов графа* G *не содержится* C_4, P_4 *и* $2K_2$ (*рис.* 7);

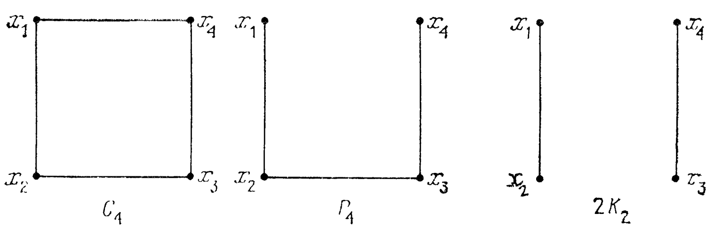

Рис. 7

3) *граф* G *может быть получен из одновершинного графа последовательным добавлением изолированных или доминирующих вершин;*

4) *для любых вершин* $u, v \in V$ *выполнено хотя бы одно из отношений:* $I(u)\backslash v \subseteq I(v)$ *либо* $I(v)\backslash u \subseteq I(u)$;

5) *существуют действительные числа* $a_1, \ldots, a_n$ *и* b *такие, что* $(i, j) \in E \Leftrightarrow a_i + a_j > b$.

Наметим доказательство, следуя [49], где в основу положены следующие два легко проверяемых утверждения: а) любой индуцированный подграф порогового графа является пороговым и б) граф, получаемый из порогового добавлением изолированной или доминирующей вершины, является пороговым. Из а) следует, что пороговый граф не может содержать в качестве индуцированных подграфов C_4, P_4 или $2K_2$, так как соответствующие им графические функции 2-суммируемые и, следовательно, не пороговые. Условие 2) поэтому является необходимым для пороговости, а условие 3), в силу б) — достаточным. Нетрудно показать, далее, что произвольный граф либо имеет изолированную или доминирующую вершину, либо у него есть индуцированный подграф, изоморфный C_4, P_4 или $2K_2$. В самом деле, пусть изолированных и доминирующих вершин нет. Тогда если x_1 — вершина с максимальной степенью, $x_3 \notin I(x_1)$, $x_4 \in I(x_3)$, то из условия $\deg x_1 \geqslant \deg x_4$ следует существование вершины x_2 такой, что $x_2 \in I(x_1)$ и $x_2 \notin I(x_4)$, а это означает, что подграф, индуцированный вершинами x_1, x_2, x_3, x_4, изоморфен одному из представленных на рис. 7 графов. Поэтому, используя рекурсию, в случае выполнения условия 2) получаем требуемое условием 3) упорядочивание вершин и, следовательно, пороговость. Этим доказана эквивалентность условий 1) — 3).

Условие 4) следует из 3), а из 4) вытекает 2). И, наконец, эквивалентность пороговости условия 5) следует из доказанной в утверждении 2 эквивалентности для графической функции условия несуммируемости и несуммируемости в слое 2. Этим завершается доказательство.

Любое из условий 2) — 5) теоремы 13 может быть проверено за полиномиальное время, поэтому и задача распознавания пороговости графа является полиномиально разрешимой. Далее, все подграфы, выделяемые условием 2), соответствуют 2-суммируемым функциям, поэтому 2-несуммируемости достаточно для пороговости графическй функции, из условия же 4) следует, что достаточно даже 2-сравнимости. Наконец, из 3) вытекает, что существует ровно 2^{n-1} неизоморфных пороговых графов, помеченных же пороговых графов менее $n!2^{n-1}$, что составляет ничтожную часть от общего числа $2^{n(n-1)/2}$ графов с n помеченными вершинами.

Хотя пороговых графов и немного, однако любой граф G может быть разложен на пороговые так, чтобы каждое из его ребер входило хотя бы в один из графов разложения. Минимальное число пороговых графов в таком разложении называется пороговым числом $t(G)$ графа G. Таким образом, пороговые графы — это графы с пороговым числом 1. Задача порогового разложения графа эквивалентна пороговому представлению соответствующей графической функции, их пороговые числа совпадают.

Теорема 14 [49]. *Для порогового числа произвольного n-вершинного графа G справедлива оценка $t(G) \leqslant n - \alpha(G)$, где $\alpha(G)$ — максимальная мощность независимого множества, причем если в графе G нет треугольников, то в оценке имеет место знак равенства.*

Доказательство. Пусть $G = (V_n, E)$, $k = n - \alpha(G)$. Пусть, далее, S — независимое множество мощности $\alpha(G)$, $V_n \backslash S = \{v_1, \ldots, v_k\}$. Для каждого v_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, обозначим через E_i ребра, инцидентные v_i. Тогда каждый граф $G_i = (V_n, E_i)$ является звездой и, следовательно, по теореме 13, пороговым графом. Взяв графы G_i в качестве порогового разложения графа G, получим требуемую оценку.

Пусть теперь в графе G нет треугольников. Возьмем пороговое разложение G на $t = t(G)$ пороговых графов $G_i = (V_n, E_i)$. Как легко следует из теоремы 13, каждый пороговый граф без треугольников обязан быть звездой, поэтому G_i — звезды. Пусть вершины $\{v_1, \ldots, v_t\}$ — центры этих звезд. Тогда множество инцидентных им ребер совпадает с множеством E всех ребер графа G, а множество вершин $V_n \backslash \{v_1, \ldots, v_t\}$ является независимым. Отсюда следует, что $\alpha(G) \geqslant n - t(G)$, чем и устанавливается равенство.

Теорема 14 имеет два важных следствия.

Следствие 1. $\max\limits_{G=(V_n,E)} t(G) \sim n, \ n \to \infty.$

Следствие 2. *Задача определения порогового числа графа является NP-трудной.*

Следствие 1 вытекает из результата Эрдеша [58] о существовании графов $G = (V_n, E)$ без треугольников, для которых $\alpha(G) = o(n)$, $n \to \infty$. Следствие 2 следует из результата Поляка [95] о NP-трудности задачи нахождения $\alpha(G)$ в классе графов без треугольников.

Пороговые графы и гиперграфы нашли применение в программировании при управлении параллельным выполнением программ (см. [62, 67, 90]). Пусть требуется организовать эффективное параллельное выполнение n программ, причем имеется ряд ограничений, состоящих в том, что некоторые пары программ не могут выполняться одновременно (вследствие, например, ограничений по памяти). Тогда если граф запретов является пороговым, то управление вычислительным процессом удобно организовать с помощью переменной, называемой «семафором». Ее текущее значение равно порогу минус сумма весов выполняемых в данный момент заданий. При окончании некоторого задания его вес прибавляется к «семафору», при включении нового — вычитается. Управляющая программа следит, чтобы значение «семафора» всегда было неотрицательным.

Если же граф запретов не является пороговым, то можно, взяв его пороговое разложение, использовать несколько «семафоров». Наконец, если запреты заданы не на парах, а на бо́льших по мощности подмножествах, то к этой задаче, описанной в терминах гиперграфа, применима та же процедура [62]. Фактически, здесь имеет место общая задача порогового представления монотонной булевой функции, нижние единицы которой заданы минимальными запрещенными подмножествами программ. Отметим, что для r-регулярных гиперграфов при $r \geqslant 3$ условия типа 4) или 5) уже не являются достаточными для пороговости [102].

Помимо графических, существует другой подкласс монотонных булевых функций, которые можно поставить во взаимно однозначное соответствие с графами так, чтобы пороговым функциям соответствовали пороговые графы. Это рассмотренные в утверждении 2 монотонные функции, все верхние нули которых лежат в слое 2. Если $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — такая функция, то ее граф определим следующим образом. По-прежнему вершины графа соответствуют переменным, а ребро (i, j) принадлежит E в том и только том случае, если булев набор с единицами в i-й и j-й позициях является верхним нулем функции φ. Для такой функции, как и для графической, несуммируемость согласно утверждению 2 эквивалентна несуммируемости в слое 2. Поэтому функция φ является пороговой в том и только том случае, если пороговым является соответствующий ей граф $G(\varphi)$, и теорема 13 дает, таким образом, характеризации линейно отделимых множеств, лежащих в пределах второго слоя. Такая характеризация будет сформулирована в следующем пункте, а использована в § 3, п. 2.

6. Некоторые простейшие пороговые множества. Подмножество вершин куба $\{0, 1\}^n$ будем называть пороговым, если оно отделимо от своего дополнения гиперплоскостью. Таким образом, с каждой пороговой функцией связаны два пороговых множества: пороговое множество нулей и пороговое множество единиц. Наиболее прямой способ изучения пороговых функций состоит в конструктивном комбинаторном описании строения их пороговых множеств. В своей массе, однако, пороговые множества устроены слишком сложно, чтобы для них можно было указать подобные описания. Поэтому приходится ограничиваться описанием их весьма узких подклассов.

Простейшими пороговыми множествами являются подкубы, соответствующие элементарным конъюнкциям, которых 3^n, что составляет ничтожную часть от числа всех пороговых множеств. Более представительный класс пороговых множеств можно получить, объединяя такие подкубы в небольшом числе некоторым специальным образом. Другим удобно описываемым классом пороговых множеств являются пороговые множества небольшого радиуса. Эти простейшие классы пороговых множеств рассматривались в [10, 12, 13] в связи с пороговыми представлениями булевых функций, а также задачей перечисления всех пороговых множеств заданной мощности.

Пороговое множество A назовем монотонным пороговым множеством нулей, если из $\alpha \in A$ и $\beta \preccurlyeq \alpha$ следует $\beta \in A$, т. е. оно является множеством нулей некоторой монотонной пороговой функции; аналогично определим монотонное пороговое множество единиц. Монотонное пороговое множество всегда может быть задано неравенством (1) с $a_i \geqslant 0$, произвольное же пороговое множество может быть преобразовано в монотонное заменами $x_i \to 1 - x_i$ для $a_i < 0$. Обратно, из монотонного порогового множества, существенно зависящего от всех координат с помощью таких отражений координат может быть получено 2^n различных пороговых множеств такой же мощности. Заметим, что пороговое множество нечетной мощности всегда существенно зависит от всех координат.

Для произвольного порогового множества A вершину $\alpha \in A$ назовем его центром, если для любой вершины $\beta \in A$ все $2^{r(\alpha,\beta)}$ вершин γ таких, что $r(\alpha, \gamma)+r(\gamma, \beta)=r(\alpha, \beta)$, принадлежат A. Эквивалентным образом центр порогового множества может быть определен как вершина, которая при преобразовании порогового множества в монотонное пороговое множество нулей может быть переведена в нулевую вершину. Пороговое множество может иметь несколько центров. Вершина, в которой достигается экстремум линейной формы в левой части (1), всегда является центром порогового множества.

Радиусом порогового множества назовем максимальное из расстояний Хемминга от его вершин до центра. Как легко видеть, радиус не зависит от выбора центра и определен корректно. Это радиус минимального шара Хемминга, в который может быть заключено пороговое множество. Нулевая вершина является центром монотонного порогового множества нулей, а его радиус определяется максимальным из номеров слоев, содержащих его вершины.

Диаметр порогового множества определим как максимальное из расстояний Хемминга, взятых по всем парам вершин множества. Ясно, что диаметр не превышает удвоенного радиуса. Поэтому справедлива следующая оценка, связывающая диаметр порогового множества с его мощностью.

Утверждение 4. *Диаметр порогового множества мощности M не превосходит $2\log M$.*

Два последующих утверждения для монотонных множеств нулей радиуса 1 и 2 легко могут быть переформулированы для произвольных множеств с использованием вместо нулевой вершины их центров. Одно из них сразу следует из критерия несуммируемости, а другое — из замечания в конце п. 5.

Утверждение 5. *Любое монотонное множество нулей, лежащее в пределах 1-го слоя, является пороговым.*

Утверждение 6. *Для того чтобы монотонное множество нулей, лежащее в пределах 2-го слоя, было пороговым, необходимо и достаточно, чтобы оно было 2-сравнимым.*

Рассмотрим теперь объединение в одном пороговом множестве близких подкубов.

Утверждение 7 [10, 13]. *Если все нижние единицы монотонной функции лежат внутри некоторого шара Хемминга единичного радиуса, то она является пороговой.*

Доказательство. Пусть $B=\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ — нижние единицы, α — центр шара. Тогда имеет место один из следующих трех взаимно исключающих случаев: 1) $\beta_i \geqslant \alpha$, $i=1, 2, \ldots, k$; 2) $B=\{\alpha\}$; 3) $\beta_i \leqslant \alpha$, $i=1, 2, \ldots, k$. Случай 2) — тривиален. В случае 1) рассмотрим подкуб куба $\{0, 1\}^n$, состоящий из вершин $\mathbf{x} \geqslant \alpha$. В этом подкубе нижние единицы лежат в слое 1 и несуммируемость функции становится очевидной. Аналогично рассматривается случай 3).

7. Структурные свойства множества пороговых функций. Наряду с рассмотрением отдельных подклассов пороговых функций представляет интерес изучение множества пороговых функций в целом. Если рассматривать множество пороговых функций как отдельно взятых элементов, то единственной возникающей для него задачей является оценка его мощности. Однако между пороговыми функциями существуют некоторые естественные отношения, учет которых значительно обогащает проблематику. В [16] были рассмотрены два таких отношения. Одно из них использует классический алгебраический подход и наделяет множество пороговых функций частичным порядком, другое описывает множество пороговых функций как простой неориентированный граф.

На множестве всех булевых функций естественным образом вводится отношение частичного порядка: $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow f(\mathbf{x}) \leqslant g(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in \{0, 1\}^n$. Возникающее при этом частично упорядоченное множество изоморфно множеству всех подмножеств 2^n-элементного множества, упорядоченных включением, и является булевой алгеброй (определения см. в [43]). Операциями взятия верхней и нижней граней являются соответственно дизъюнкция и конъюнкция. Упорядоченное этим же отношением, множество пороговых функций не обладает столь богатой структурой. Оно градуируется числом единиц пороговых функций, имеет универсальные нижнюю и верхнюю грани, но, как несложно проверить, не является решеткой. Тем не менее, его изучение представляет интерес. В частности, заслуживает внимания задача оценивания числа элементов заданной высоты, т. е. числа пороговых функций с заданным числом единиц. Эта задача будет рассмотрена в § 3, п. 2.

Иное структурное описание можно получить, перейдя от задающего частичный порядок ориентированного графа к неориентированному, т. е. заменив каждую ориентированную дугу неориентированным ребром. При изучении булевых функций, в частности, исследовании полуэффекта Шеннона с помощью вариационного принципа [36], оказывается полезной метрика, в которой расстоянием между двумя функциями служит число тех булевых наборов, на которых они принимают различные значения. Тогда «соседними» естественно считать функции, различающиеся лишь на одном наборе. Если рассмотреть граф, вершины которого соответствуют булевым функциям, а ребра соединяют «соседние» функции, то он изоморфен 2^n-мерному кубу. Аналогичный граф на множестве пороговых функций назовем графом пороговых функций. Он обладает более сложной структурой, но допускает прозрачную геометрическую интерпретацию.

Конусы (8) в $(n+1)$-мерном пространстве весов $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, соответствующие «соседним» пороговым функциям, смежны. При переходе через разделяющую их гиперплоскость происходит изменение значения функции в одной вершине гиперкуба. Вершины гиперкуба, соответствующие граням конуса пороговой функции, называются ее граничными точками [68, 80]. Множество граничных точек обладает, как легко видеть, следующими свойствами: а) является наибольшим множеством вершин таким, что пороговая функция может быть изменена в любой одной вершине множества без изменения значений на всем остальном гиперкубе; б) является наименьшим множеством вершин, знание значений пороговой функции на котором позволяет восстановить ее на всем гиперкубе.

Число «соседей» у пороговой функции равно числу ее граничных точек, а в графической интерпретации — это степень вершины графа. Эта степень всегда не меньше $n+1$, так как телесный конус с вершиной имеет в E^{n+1} не менее $n+1$ граней. Столько «соседей» у пороговых функций $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$ и $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$, а также у любой другой пороговой функции, имеющей один нуль или единицу. Максимальным же числом «соседей», равным 2^n, обладает любая пороговая функция, существенно зависящая от не более чем одной переменной.

При непрерывном изменении весов пороговой функции (4) соответствующая точка описывает некоторую траекторию. Если эта траектория не выбрана определенным «специальным» образом, а именно не проходит через $\binom{2^n}{2}$ подпространств размерности $n-1$, при пересечении которых функция меняет значения сразу в двух вершинах гиперкуба, то переход от одной пороговой функции к другой осуществляется по ребрам графа пороговых функций. Дискретным аналогом такой непрерывной траектории могут служить изменения весов в процессе адаптации, осуществляемой с достаточно малым шагом. Отметим, что расстояние между пороговыми функциями равно расстоянию между соответствующими вершинами графа, т. е. числу ребер в кратчайшем пути между ними. В самом деле, если $f_0(\mathbf{y}) = \operatorname{sgn}(a_0 + a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n)$ и $f_1(\mathbf{y}) = \operatorname{sgn}(a_0' + a_1' y_1 + \ldots + a_n y_n)$ — пороговые функции, различающиеся на наборах, то переход от f_0 к f_1 по графу также осуществим за r шагов с помощью формулы $f_t(\mathbf{y}) = \operatorname{sgn}(a + t(a' - a))$, изменяя t от 0 до 1. Отсюда непосредственно вытекает следующее утверждение.

Утверждение 8 [16]. *Диаметр графа пороговых функций равен* 2^n.

8. Алгоритмическая сложность синтеза пороговой функции. Проблема синтеза пороговой функции, т. е. распознавание пороговости и нахождение линейного неравенства (1) для булевой функции, заданной таблицей своих значений или некоторой своей д. н. ф., всегда являлась одной из основных задач пороговой логики (см. [2, 55, 68, 86]). После работ Кука [50] и Карпа [71] появилась возможность строго математического подхода к исследованию этой задачи и ее классификации в соответствии с трудоемкостью решения, т. е. отнесения к одному из стандартных классов, важнейшими из которых являются класс P — класс задач, разрешимых за полиномиальное время, и класс NP — класс универсальных переборных задач, для которых алгоритма полиномиальной трудоемкости предположительно не существует (см. [61]). Такое исследование было выполнено в работе Пильда и Симеоне [92], на которую и опирается настоящее изложение.

Заметим, прежде всего, что если функция f задана с помощью своей совершенной д. н. ф., т. е. таблицей своих значений на всем множестве 2^n бинарных наборов, то задача синтеза сводится к решению системы из 2^n линейных неравенств. А для этой задачи, как стало ясно после работы Хачияна [40], существует алгоритм, решающий ее за полиномиальное от длины ее записи, т. е. от величины 2^n, время. Остается ли задача полиномиально разрешимой, если допускать д. н. ф. более общего вида? Ответ на этот вопрос, как было показано в [92], существенно зависит от вида д. н. ф.. Если однородная булева функция задана своей сокращенной д. н. ф., то задача распознавания пороговости и выписывания неравенства (1) является полиномиально разрешимой. В качестве такой булевой функции, не ограничивая общности, всегда можно рассматривать монотонную булеву функцию, заданную своими нижними единицами. Если же на д. н. ф. не накладывать никаких ограничений, то задача распознавания пороговости является NP-полной. Отсюда вытекает, в частности, NP-трудность задачи получения сокращенной д. н. ф. для однородной функции по ее произвольной д. н. ф. без знания того, какие из переменных должны браться с отрицанием, а какие — без отрицания.

Теорема 15 [92]. *Задача распознавания пороговости по произвольной д. н. ф. является NP-полной.*

Доказательство. Покажем, что известная NP-полная задача распознавания тождественного равенства единице произвольной д. н. ф. сводима к задаче распознавания пороговости. Пусть имеется произвольная д. н. ф. $D(\mathbf{x})$. Введя две новых переменные, сконструируем д. н. ф. $D'(\mathbf{x}, y_1, y_2) = D(\mathbf{x}) y_2 \vee y_1 y_2 \vee \bar{y}_1 \bar{y}_2$. Если $D(\mathbf{x}) \equiv 1$, то функция $D'(\mathbf{x}, y_1, y_2) = \bar{y}_1 \vee y_2$ является пороговой. Если же $D(\mathbf{x}^0) = 0$ для некоторого $\mathbf{x}^0$, то $D'(\mathbf{x}^0, 0, 0) = D'(\mathbf{x}^0, 1, 1) = 1$, $D'(\mathbf{x}^0, 0, 1) = D'(\mathbf{x}^0, 1, 0) = 0$ и $(\mathbf{x}^0, 0, 0) + (\mathbf{x}^0, 1, 1) = (\mathbf{x}^0, 0, 1) + (\mathbf{x}^0, 1, 0)$, т. е. функция, задаваемая д. н. ф. $D'(\mathbf{x}, y_1, y_2)$, является 2-суммируемой и, следовательно, не пороговой. Теорема доказана.

Покажем теперь, как для произвольной монотонной булевой функции, заданной своими нижними единицами, эффективно решается вопрос о ее пороговости. Пусть $\{\alpha_i\}$ — множество нижних единиц функции φ. Если, наряду с ним, известно множество ее верхних нулей $\{\beta_j\}$, то вопрос о ее пороговости сводится к исследованию совместности системы

$$(\mathbf{a},\ \alpha_i) > b,$$
$$(\mathbf{a},\ \beta_j) \leqslant b,$$
$$\mathbf{a},\ b \geqslant 0,$$

т. е. решается эффективно.

Каждый верхний нуль монотонной функции — это покомпонентное отрицание нижней единицы функции, двойственной к исходной, поэтому задачу получения множества верхних нулей по множеству нижних единиц называют задачей дуализации для монотонной булевой функции. Тот факт, что в случае произвольной монотонной функции задача дуализации не является эффективно решаемой, следует уже из того, что с ростом числа переменных число верхних нулей может быть экспоненциально растущей функцией от числа нижних единиц. Чтобы обойти эту трудность, проверим предварительно φ на 2-сравнимость. Этот тест эффективно выполним, так как для выполнения условия $(x_i = 1,\ x_j = 0)\varphi \leqslant \leqslant (x_i = 0,\ x_j = 1)\varphi$ необходимо и достаточно, чтобы для каждой нижней единицы функции $(x_i = 1,\ x_j = 0)\varphi$ существовала меньшая или равная ей нижняя единица функции $(x_i = 0,\ x_j = 1)\varphi$. В случае выполнения условия 2-сравнимости перестановкой переменных сделаем φ регулярной. Для регулярной функции задача дуализации, как было впервые показано в [92], эффективно разрешима. Более простое решение этой задачи с лучшей оценкой для числа верхних нулей, основанной на явном описании их строения, дано Крамой [53]. Независимо те же улучшения предложены Липкиным [32]. Следующая лемма основана на их исследованиях.

Лемма 1. *Каждый верхний нуль регулярной функции может быть получен из некоторой ее нижней единицы изменением значения одной из ее единичных координат на нулевое с одновременным приравниванием единице всех координат, правее обнуленной.*

Доказательство. Пусть $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — верхний нуль регулярной функции φ. Если $\beta_n = 0$, то набор $\alpha = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, 1)$ является единичным для φ, а в силу регулярности φ никакая из единичных координат α не может быть обнулена с сохранением единичного значения функции. Таким образом, α является нижней единицей, из которой получается верхний нуль β.

Пусть теперь самый правый нуль в наборе β стоит на i-м месте, где $i < n$, т. е. $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, 0, 1, \ldots, 1)$. Тогда набор $\alpha = (\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, 1, \ldots, 1)$ является единичным для φ. Будем последовательно, двигаясь справа налево, обнулять его единичные координаты, начиная с последней, каждый раз проверяя, чтобы значение функции φ оставалось равным единице. Обнулив таким образом j-ю координату, где $j > i$, придем к набору $\alpha_1 = (\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, в котором обнуление $(j-1)$-й координаты изменяет значение функции на нулевое. В силу регулярности φ ни одна из единичных координат набора α_1 не может быть обнулена без изменения значения φ, т. е. α_1 является нижней единицей, из которой получается β. Лемма доказана.

Как следует из леммы 1, все верхние нули регулярной функции содержатся в эффективно получаемом множестве, мощность которого не превышает mn, где m — число нижних единиц функции. Задача выбора из него верхних нулей не представляет трудности. В целом же предыдущими рассуждениями установлен следующий результат.

Теорема 16 [92]. *Для монотонной булевой функции, заданной своими нижними единицами, задача распознавания пороговости и получения неравенства* (1) *разрешима за полиномиальное время.*

§ 3. Количественные оценки, связанные с пороговыми функциями

1. Число пороговых функций. При реализации функций алгебры логики схемами из пороговых элементов число N_n пороговых функций от n переменных служит естественной мерой разнообразия порогового базиса и позволяет оценивать сложность таких реализаций. Это явилось причиной пристального внимания к проблеме подсчета N_n с конца пятидесятых годов. Так как получение точной формулы для N_n не представлялось возможным, то исследования были направлены на получение асимптотических оценок для N_n при $n \to \infty$, а также прямой подсчет значений N_n с помощью ЭВМ для небольших значений n.

Методами, освещенными в § 2, пп. 1—3, для $\log N_n$ к 1965 г. были получены асимптотические оценки (6), и встал вопрос об асимптотике логарифма числа пороговых функций, но сколько-нибудь улучшить эти оценки не удавалось вплоть до 1989 г. Параллельно с этим сразу несколькими исследователями в начале шестидесятых годов были подсчитаны точные значения N_n до $n=6$. Дальнейшее продвижение потребовало уже изощренных методов перебора и мощных ЭВМ. В 1965 г. Уиндер [117] сообщил результаты подсчета N_7, а в 1970 Мурогой с коллегами [86] были опубликованы результаты аналогичных вычислений для N_8, выполненных на ILLIAC-2. Помимо подсчета N_n в этих работах изучались значения весов в оптимальных реализациях, а также было установлено, что все полностью сравнимые функции вплоть до $n=8$ являются пороговыми. Основные же результаты этих вычислений тщательным образом анализировались на предмет поведения отношения $(\log N_n)/n^2$ в попытке угадать его асимптотику (см. табл. 2).

Таблица 2

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$(\log N_n)/n^2$	2	0,95183	0,74449	0,67987	0,66116	0,66225	0,67273	0,68740

Уиндер, чей вклад в развитие пороговой логики следует признать выдающимся, неоднократно выражал, опираясь на эти результаты и свою интуицию, уверенность в том, что $(\log N_n)/n^2 \to 1$ [116, 117, 119], но были и более осторожные мнения [86]. Строгое же доказательство асимптотики (7) наряду с новыми геометрическими результатами по разбиению пространства гиперплоскостями потребовало использования мощных вероятностных методов комбинаторного анализа, которые только зарождались в шестидесятые годы. Результат был анонсирован автором в [15], а его более полное изложение с доказательством теоремы 4 появилось в [16]. Помимо теоремы 4 доказательство асимптотики существенно опирается на работу Одлыжко [89] о случайных (± 1)-матрицах.

В 1967 г. Комлошом [74] было показано, что детерминант случайной (0, 1)-матрицы почти всегда отличен от нуля. В дальнейшем это доказательство, в основе которого лежит лемма Литтлвуда — Оффорда, было им технически усовершенствовано (см. [75]). Его результат остается справедливым и для случайных (± 1)-матриц. Это означает, что n случайных n-мерных векторов, компоненты которых независимо и равновероятно принимают значения 1 или -1, почти всегда образуют базис в n-мерном пространстве. Поэтому любой n-мерный вектор и, в частности, любой (± 1)-вектор может быть выражен в виде их линейной комбинации.

Решая задачу, возникшую в теории нейронных сетей [70], Одлыжко [89] получил результат, в определенном смысле дополняющий результат Комлоша. Им было установлено, что если брать не n, а $p \leqslant n(1-9{,}9/\ln n)$ случайных (± 1)-векторов, то натянутое на них линейное подпространство почти всегда не содержит (± 1)-векторов, отличных от взятых и им противоположных. Более того, он показал, хотя здесь это и не будет использовано, что в вероятность $P(n, p)$ того, что в линейном подпространстве найдется еще хотя бы один (± 1)-вектор, главный вклад дают ненулевые линейные комбинации троек векторов. Это позволило найти для рассматриваемой вероятности точную асимптотику

$$P(n, p) \sim 4\binom{p}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n, \quad p \leqslant n(1-9{,}9/\ln n), \ n \to \infty.$$

Качественную связь между результатами Комлоша и Одлыжко можно продемонстрировать, перейдя от дискретной модели к непрерывной. Пусть компоненты n-мерного вектора независимы и непрерывно распределены в интервале $(-1, 1)$. Тогда, взяв из такого распределения произвольное конечное число K векторов, с вероятностью 1 имеем, что любые n из них линейно независимы, а в линейной оболочке каждых $n-1$ не содержится ни одного из оставшихся $K-n+1$. Таким образом, результаты Комлоша и Одлыжко свидетельствуют фактически о том, что с ростом n свойства случайных (± 1)-векторов приближаются к свойствам векторов, выбранных из непрерывного распределения.

И. П. Чухрову удалось сделать результат Одлыжко более прозрачным, упростив доказательство, а также устранив имевшиеся в [89] неточности. Его усовершенствования будут использованы в наброске доказательства следующей леммы, представляющей ослабленный вариант теоремы Одлыжко.

Лемма 2. *Вероятность $P(n, p)$ того, что в линейной оболочке p случайных n-мерных (± 1)-векторов содержится еще хотя бы один (± 1)-вектор, отличный от образующих и им противоположных, с ростом n при $p \leqslant n(1-9{,}9/\ln n)$ стремится к нулю.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что в гиперплоскости $\sum a_i y_i = b$, где все $a_i \neq 0$, не может лежать более $\binom{n}{[n/2]}$ вершин куба $\mathbf{y} \in \{-1, 1\}^n$. Это утверждение, известное под названием леммы Литтлвуда — Оффорда, легко следует из леммы Шпернера о максимальном числе попарно несравнимых вершин в $\{-1, 1\}^n$. Поэтому для произвольных фиксированных значений $a_i \neq 0$ и b и случайных $y_i \in \{-1, 1\}$ вероятность выполнения равенства $\sum a_i y_i = b$ не превосходит $\binom{n}{[n/2]} \Big/ 2^n$.

Обозначим через $P(n, p, m)$ вероятность того, что среди p векторов существуют m векторов, линейная комбинация которых с ненулевыми коэффициентами дает (± 1)-вектор, и не существует меньшего числа векторов с таким свойством. Эти m векторов необходимо являются линейно независимыми, поэтому существует построенный на них базисный минор порядка m. При фиксированном положении базисного минора коэффициенты линейной комбинации, задающей (± 1)-вектор, однозначно определяются его координатами в столбцах базисного минора, вероятность же совпадения значения линейной комбинации с координатой (± 1)-вектора в столбце, не входящем в базисный минор, не превышает $\binom{m}{[m/2]} \Big/ 2^m$. Минор порядка m в $(p \times m)$-матрице может быть выбран $\binom{p}{m}\binom{n}{m}$ способами, а различных (± 1)-векторов имеется 2^n, поэтому для вероятности $P(n, p, m)$ справедлива оценка

$$P(n, p, m) \leqslant 2^n \binom{p}{m}\binom{n}{m}\left(\binom{m}{[m/2]} \Big/ 2^m\right)^{n-m}.$$

Теперь вероятность $P(n, p)$ может быть оценена так:

$$P(n,p)=\sum_{m=3}^{p} P(n,p,m)\leqslant \sum_{m=3}^{p}\binom{p}{m}\binom{n}{m}2^n\left(\binom{m}{[m/2]}\Big/2^m\right)^{n-m},$$

а эта величина, как можно показать, с ростом n при $p\leqslant n(1-9{,}9/\ln n)$ стремится к нулю. Этим завершим набросок доказательства.

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема 17 [15, 16]. *Для логарифма числа N_n пороговых функций от n переменных при достаточно больших n справедливо неравенство* $\log N_n > n^2(1-10/\ln n)$.

Доказательство. Как указывалось в § 2, п. 1, подсчет числа пороговых функций можно свести к подсчету числа конусов, на которые E^{n+1} разбивается гиперплоскостями (8). Будем рассматривать лишь пороговые функции (4) с $a_0=0$, т. е. самодвойственные. Отметим, что, как несложно заключить непосредственно из (5), их число $N_n'=N_{n-1}$. Самодвойственные функции находятся во взаимно однозначном соответствии с конусами, на которые пространство $E^n=(a_1, \ldots, a_n)$ разбивается 2^{n-1} гиперплоскостями вида

$$\pm a_1\pm a_2\pm\ldots\pm a_n=0. \tag{19}$$

Метод получения нижней оценки для числа этих конусов заключается в том, чтобы с помощью леммы 2 показать, что при пересечении гиперплоскостей (19) возникает более $2^{n^2(1-10/\ln n)}$ линейных подпространств, а затем воспользоваться теоремой 4.

Положим $p=n(1-9{,}9/\ln n)$ и рассмотрим множество $\mathfrak{A}_n$ случайных (±1)-матриц $A(p\times n)$, элементы которых независимо и равновероятно принимают значения 1 или -1. Множество $\mathfrak{A}_n$ состоит, таким образом, из 2^{pn} равновероятных матриц. Считая строки матриц нормальными векторами гиперплоскостей (19), свяжем с каждой матрицей $A\in\mathfrak{A}_n$ линейное подпространство, натянутое на ее строки,— линейную оболочку строк. Тогда пересечение p гиперплоскостей, задаваемых строками матрицы A как нормалями, будет ортогональным дополнением к линейной оболочке ее строк. Это сводит задачу к подсчету числа различных линейных подпространств, порождаемых матрицами из $\mathfrak{A}_n$.

Обозначим через $\mathfrak{A}_n'$ подмножество матриц, не содержащих пар одинаковых или противоположных строк. Ясно, что в $\mathfrak{A}_n'$ входят почти все матрицы, т. е. $|\mathfrak{A}_n'|\sim|\mathfrak{A}_n|$, $n\to\infty$. Множество $\mathfrak{A}_n'$ разобьем на классы эквивалентности следующим образом. В один класс включим матрицы, получаемые друг из друга операциями перестановки строк и замены строк на противоположные. Тогда в каждом классе будет ровно $p!\,2^p$ матриц. Ясно, что все матрицы из одного класса эквивалентности порождают одно и тоже подпространство. А из того, что у почти всех матриц линейная оболочка не содержит (±1)-векторов, отличных от строк матрицы и им противоположных, следует, что число различных подпространств асимптотически совпадает с числом классов эквивалентности, т. е. равно $2^{pn}/(p!2^p)$. Отсюда вытекает утверждение теоремы (см. добавление при корректуре).

Принимая во внимание верхнюю оценку в (6), получаем

$$N_n=2^{n^2(1-o(1))},\quad n\to\infty.$$

2. Число пороговых множеств заданной мощности. Наряду с оцениванием общего числа N_n пороговых функций интерес представляет получение оценок для числа $N_n(M)$ — пороговых функций с заданным числом единиц (нулей) M или, другими словами, для числа пороговых множеств мощности M. Отметим, что в случае разделений гиперплоскостью точек общего положения в E^n от подобной задачи приходится отказаться, так как мощность произвольного множества точек общего положения не определяет, как нетрудно проверить, числа линейных отсечений заданной мощности [66]. В пороговой же логике эти оценки являются более детальной характеристикой множества пороговых функций. В терминах рассмотренного в § 2, п. 7 частичного порядка $N_n(M)$ — это число элементов высоты M. Особое значение подобные оценки приобретают при изучении пороговых представлений. Здесь роль пороговых множеств заданной мощности аналогична элементарным конъюнкциям заданного ранга в теории д. н. ф.

Впервые задача оценивания $N_n(M)$ была рассмотрена автором и Липкиным [11]. Полученные оценки были затем усилены в [12] и приняли окончательный вид в [16]. Всюду в условиях теоремы буква c обозначает некоторую константу.

Теорема 18. *С ростом n при заданном характере изменения $M(n)$ для $\log N_n(M)$ имеют место следующие асимптотики:*

1) *если* $M = o(n)$, *то* $\log N_n(M) \sim n$;

2) *если* $M = cn(1+o(1))$, *то* $\log N_n(M) \sim n(c\log(1+1/c) + \log(1+c)+1)$;

3) *если* $M = \alpha(n)n$, $\alpha(n) \to \infty$, $\log \alpha(n) = o(\log n)$, *то* $\log N_n(M) \sim n\log\alpha(n)$;

4) *если* $M = n^{c+o(1)}$, $c \geqslant 1$, *то* $\log N_n(M) \sim (c-1)n\log n$;

5) *если* $M = 2^{\beta(n)}$, $\beta(n) \to \infty$, $\beta(n) = o(n)$, *то* $\log N_n(M) \sim \beta(n)n$;

6) *если* $M = 2^{cn(1+o(1))}$, $0 < c < 1$, *то* $\log N_n(M) \sim cn^2$.

Доказательство. Каждая из асимптотик 1)—6) теоремы доказывается получением асимптотически совпадающих верхних и нижних оценок для $\log N_n(M)$. Все верхние оценки получаются подсчетом числа различных векторов Чоу. Для получения же нижних оценок в каждом случае используется специальный метод: в 1)—3) — это конструктивное построение самих пороговых множеств; в 4)—5) — построоение множества линейных неравенств, задающих пороговые множества заданной мощности; в 6) — неконструктивный метод, использующий полученную вероятностными рассуждениями асимптотику (7).

Начнем с верхних оценок. В 6) она получается совсем просто. Каждая координата $(n+1)$-мерного вектора Чоу $S(A)$ является целым неотрицательным числом, не превышающим $|A|$. Поэтому в случае 6) существует не более $2^{cn(1+o(1))(n+1)}$ различных векторов Чоу, откуда и вытекает, что $\log N_n(M) \leqslant cn^2$. Не рассматривая в деталях всех случаев 1)—5), остановимся на случае 2) как технически наиболее трудном. Использованных здесь методов достаточно для получения верхних оценок во всех оставшихся случаях.

Пусть монотонное пороговое множество нулей A мощности cn задано неравенством (1) с $a_i \geqslant 0$. Упорядочим коэффициенты a_i по величине $a_{i_1} \leqslant a_{i_2} \leqslant \ldots \leqslant a_{i_n}$. Выберем номер k так, чтобы имело место $a_{i_{k-1}} + a_{i_k} \leqslant b$, $a_{i_k} + a_{i_{k+1}} > b$. Из $\binom{k}{2} \leqslant cn$, следует $k < 2\sqrt{cn}$. Пусть $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $I_1 = \{i_1, \ldots, i_k\}$, $I_0 = \{i_{k+1}, \ldots, i_n\}$. Тогда у принадлежащих A вершин не может быть более одной единичной координаты в I_0. Отсюда для вектора Чоу $S(A) = (s_0, s_1, \ldots, s_n)$ множества A имеем $\sum\limits_{i \in I_0} s_i \leqslant cn$. Не более чем cn одинаковых шаров может быть размещено по t различным ящикам $\binom{t+cn}{t}$ способами (см. [39]). Поэтому различных I_0-фрагментов вектора Чоу может быть не более $\binom{n-k+cn}{n-k} \leqslant \binom{n+cn}{n}$. Число же различных I_1-фрагментов не превосходит

$(cn)^{2\sqrt{cn}}$. А число способов разбиения I на I_0 и I_1 не превышает

$$\sum_{j=0}^{2\sqrt{cn}} \binom{n}{j} \leqslant 2\sqrt{cn}\, n^{2\sqrt{cn}}.$$

Поэтому для числа $N_n^0(cn)$ монотонных пороговых множеств мощности cn имеем

$$\log N_n^0(cn) \leqslant \log\left(2\sqrt{cn}\, n^{2\sqrt{cn}} \binom{n+cn}{n}\right) \sim \log\binom{n+cn}{n} \sim$$
$$\sim n\,(c\log(1+1/c)+\log(1+c)).$$

Учитывая, что $N_n(cn) < 2^n N_n^0(cn)$, получаем

$$\log N_n(cn) \leqslant n\,(c\log(1+1/c)+\log(1+c)+1).$$

Перейдем теперь к нижним оценкам. Случай 1) очевиден. Покажем, как с помощью утверждения 6 § 2, п. 6 для случаев 2) и 3) строится необходимое число монотонных пороговых множеств, лежащих в пределах второго слоя и существенно зависящих от всех координат. Для определенности будем рассматривать случай 2). Включим сначала в пороговое множество A нулевую вершину. Затем на первом шаге выберем из n координат m_1 координат и включим в A m_1 вершин первого слоя, имеющих единичными выбранные координаты. Остальные вершины первого слоя оставим вне A. На втором шаге выберем из m_1 координат, взятых на первом шаге, m_2+1 координат и отметим одну из них. Включим, далее, в A m_2 вершин второго слоя, которые имеют единичными отмеченную и одну из выбранных неотмеченных координат. Продолжая таким образом, на j-м шаге из m_{j-1} выбранных и неотмеченных на предыдущем шаге координат выбираем m_j+1 координат, отмечаем одну из них и m_j вершин второго слоя, имеющих единичными отмеченную и одну из выбранных неотмеченных координат, включаем в A. Сделав k шагов, получим монотонное пороговое множество A мощности $1+\sum_{j=1}^{k} m_j$, которое при $m_1 > m_2+1$ существенно зависит от всех координат. Таким путем может быть получено

$$\binom{n}{m_1}\binom{m_1}{m_2+1}(m_2+1)\ldots\binom{m_{k-1}}{m_k+1}(m_k+1) =$$
$$= \frac{n!}{(n-m_1)!\,(m_1-m_2-1)!\ldots(m_{k-1}-m_k-1)!\,m_k!} \tag{20}$$

пороговых множеств.

Теперь, чтобы полностью задать процесс построения, положим $m_j=[nq^j]$, где $q=c/(c+1)$, а значение k положим таким, при котором процесс естественным образом обрывается. Тогда

$$|A| = 1+[nq]+[nq^2]+\ldots+[nq^k] \sim cn,$$

а как следует из (20) (подробнее см. в [12]), логарифм числа построенных монотонных пороговых множеств асимптотически равен $n(c\log(1+1/c)+\log(1+c))$, что и доказывает асимптотику в 2).

Нижние оценки в 4) и 5) доказываются конструктивным построением множества линейных неравенств методом вариации порога, которым получена нижняя оценка в (6) (см. § 2, п. 3). Если $M \leqslant 2^n$, то для каждого порогового множества мощности m, где $0 \leqslant m \leqslant M$, лежащего в подкубе $x_n=0$, можно с помощью подходящего выбора величины a_n получить в подкубе $x_n=1$ пороговое множество мощности $M-m$, так чтобы мощность порогового множества во всем кубе была равна M. Поэтому для $M \leqslant 2^{n-1}$ имеем

$$N_n(M) \geqslant \sum_{m=0}^{M} N_{n-1}(m). \tag{21}$$

С помощью (21) для $M \leqslant 2^{n-k}$ можно получить

$$N_n(M) \geqslant \frac{M^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{m=0}^{M} N_{n-k}(m). \tag{22}$$

Полагая $k = n -]\log M[$ и учитывая, что при этом $N_{n-k}(M) \geqslant 1$, получаем из (22) требуемые нижние асимптотические оценки в случаях 4) и 5).

Обратимся теперь к нижней оценке в случае 6). Пусть $\log M = cn$. Положив $l = [cn]$ и используя (21), имеем

$$N_n(M) \geqslant \sum_{m=0}^{M} N_{n-1}(m) > N_{n-1}(2^l).$$

Взяв теперь $k = n - l - 1$ и воспользовавшись (22), получаем

$$N_{n-1}(2^l) \geqslant \frac{2^{l(n-l-2)}}{(n-l-2)!} \sum_{m=0}^{2^l} N_l(m) > \frac{2^{l(n-l-2)}}{(n-l-2)!} N_l(2^{l-1}).$$

Но число $N_l(2^{l-1})$ совпадает с числом самодвойственных пороговых функций, и по теореме 15 $\log N_l(2^{l-1}) \sim l^2$. Поэтому $\log N_n(M) \gtrsim l(n-l) + l^2 \sim cn^2$. Теорема 18 доказана.

3. Величина весовых коэффициентов. Геометрически пороговая функция (1) задается гиперплоскостью, отделяющей подмножество $f^{-1}(0)$ вершин гиперкуба от подмножества $f^{-1}(1)$. Как уже отмечалось, небольшим изменением положения гиперплоскости это разделение всегда можно сделать строгим, когда ни одна из вершин куба не лежит в гиперплоскости. При этом, естественно, возникает вопрос, сколь большого расстояния от гиперплоскости до ближайшей к ней вершины можно добиться. Другими словами, задача состоит в оценке величины

$$\rho(f) = \max_{\mathbf{a}, b} \min_{\mathbf{x} \in \{0,1\}^n} \frac{|(\mathbf{a}, \mathbf{x}) - b|}{\|\mathbf{a}\|}. \tag{23}$$

Максимум здесь берется по всем положениям гиперплоскости, реализующим заданное разделение вершин гиперкуба. Далее, можно, абстрагируясь от конкретной функции, рассмотреть величину

$$\rho(n) = \min_f \rho(f),$$

где минимум берется по всем пороговым функциям от n переменным.

В случае технической реализации пороговой функции f, основанной на каком-либо физическом принципе (см. [2, 86]), вследствие неизбежных флуктуаций физических величин, соответствующих весам и порогу, гиперплоскость будет слегка колебаться, и изменения ее положения не повлияют на реализуемую ею функцию лишь при условии достаточно большого значения $\rho(f)$. Величину же $\rho(n)$ можно рассматривать как характеристику устойчивости пороговой логики в целом.

Традиционно, однако, рассматриваемая задача в пороговой логике ставится несколько иначе. Система $\mathbf{a} = a_1, \ldots, a_n$ и T называется *нормированной реализацией* пороговой функции $f: \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$, если

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{x}) &\leqslant T - 1, & \mathbf{x} &\in f^{-1}(0), \\ (\mathbf{a}, \mathbf{x}) &\geqslant T, & \mathbf{x} &\in f^{-1}(1). \end{aligned} \tag{24}$$

При нормированной реализации выдерживается, таким образом, единичный «зазор» по линейному функционалу между нулевыми и единичными значениями функции.

Если пороговая функция f задана в форме (4) $f:\{-1, 1\}^n \to \{-1, 1\}$, то ее нормированная реализация принимает вид:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{a}, \mathbf{y}) \leqslant -1, \quad \mathbf{y} \in f^{-1}(-1), \\ &(\mathbf{a}, \mathbf{y}) \geqslant 1, \quad \mathbf{y} \in f^{-1}(1), \end{aligned} \tag{25}$$

где $\mathbf{y} = (1, y_1, \ldots, y_n)$, $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$, причем значения $a_1, \ldots, a_n$ здесь те же, что и в (24), а $a_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i + 1 - 2T$.

Для нормированной реализации в пороговой логике рассматривается задача минимизации весовых коэффициентов. В качестве минимизируемого функционала при реализации (25) берется величина $\sum_{i=0}^{n} |a_i|$, и задача решается методами линейного программирования.

Любая целочисленная реализация пороговой функции является ее нормированной реализацией. В начале шестидесятых годов существовала гипотеза, что для любой пороговой функции существует ее целочисленная минимальная реализация. Это, однако, оказалось не так. Первый пример функции от 9 переменных, единственная минимальная реализация которой содержит дробные веса, был построен Уиллисом [114]. Позже выяснилось, что такие примеры встречаются уже для функций от 8 переменных [85].

Целочисленная реализация, подобно параметрам Чоу, позволяет кодировать пороговые функции. Однако здесь, в отличие от параметров Чоу, трудно однозначно выбрать отображение множества пороговых функций в множество весов, так как различные целочисленные наборы могут быть реализациями, и при том минимальными, одной и той же пороговой функции. Зато кодирование целочисленными весами позволяет легко вычислять значения функции, что не удается достичь с помощью параметров Чоу. Сложность такого кодирования определяется максимальной абсолютной величиной целых чисел, используемых в реализациях.

Пусть

$$M(f) = \min_{\mathbf{a}} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i|,$$

где минимум берется по всем реализациям (24) функции f. Пусть, далее,

$$M(n) = \max_f M(f),$$

где максимум берется по всем пороговым функциям от n переменных. Аналогичные величины для целочисленной реализации обозначим соответственно через $M_ц(f)$ и $M_ц(n)$. Ясно, что $M(f) \leqslant M_ц(f)$ и $M(n) \leqslant \leqslant M_ц(n)$. Зная $M_ц(n)$ и учитывая, что $|T| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leqslant nM_ц$, все пороговые функции от n переменных можно перебрать, рассмотрев $(2M_ц(n)+1)(2nM_ц(n)+1)$ различных комбинаций весов и порога. Отсюда можно оценить $M_ц(n)$ снизу. Из соотношения

$$(2M_ц(n)+1)^n(2nM_ц(n)+1) \geqslant N_n = 2^{n^2(1-o(1))}$$

следует

$$\begin{aligned} n \log M_ц(n) &\geqslant n^2, \\ \log M_ц(n) &\geqslant n. \end{aligned} \tag{26}$$

Причем для почти всех пороговых функций f выполнено

$$M_ц(f) > 2^{n(1-o(1))}.$$

Проблеме выяснения скорости роста величин $M(n)$ и $M_ц(n)$ в пороговой логике придавалось большое значение. В начале шестидесятых годов рядом авторов были конструктивно построены примеры функций от n переменных, для которых $M(f)=M_ц(f)\asymp 2^n$. Эти потребовавшие значительной изобретательности конструкции и соответствующие библиографические ссылки можно найти в [2, 86]. Полученная элементарным мощностным методом оценка (26) несколько слабее, но она относится к почти всем функциям, характеризуя, таким образом, поведение $M_ц(f)$ в типичном случае. Покажем теперь, как геометрическими рассуждениями, модифицирующими мощностной метод для непрерывного случая, можно доказать справедливость оценки (26) и для $M(f)$.

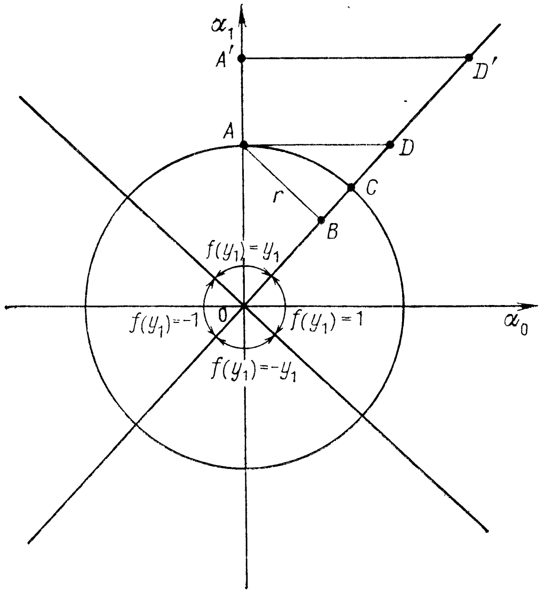

Рис. 8

Теорема 19. *Для $M(n)$ справедлива оценка*

$$\log M(n)\geqslant n, \quad n\to\infty,$$

причем столь велики значения $M(f)$ для почти всех пороговых функций f.

Доказательство. В $(n+1)$-мерном пространстве весов $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ пороговым функциям $f(\mathbf{y})=\operatorname{sgn}(a_0+a_1y_1+\ldots+a_ny_n)$ соответствуют конусы, образованные гиперплоскостями (8). (См. рис. 8, где представлен случай $n=1$.) Нормируем весовые векторы на единичную длину, т. е. для каждой пороговой функции будем рассматривать лишь ее реализации, лежащие на сфере единичного радиуса $R=\sqrt{a_0^2+a_1^2+\ldots+a_n^2}$. Для каждой функции f найдем на ее куске сферы точку $A(f)=\left(a_0^f, a_1^f, \ldots, a_n^f\right)$ с наибольшим расстоянием до ближайшей гиперплоскости. Опустим из A перпендикуляр AB на эту гиперплоскость, $|AB|=r(f)$. Нормали к гиперплоскостям (8) имеют вид $(1, \pm1, \pm1, \ldots, \pm1)/\sqrt{n+1}$, и для расстояния r от A до ближайшей гиперплоскости справедливо $r\leqslant \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}|a_i|/\sqrt{n+1}\leqslant 1/\sqrt{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Поэтому, если C — точка пересечения луча OB с единичной сферой, то дуга AC асимптотически сливается с AB при $n\to\infty$.

Для типичной пороговой функции f объем соответствующего ей куска единичной сферы асимптотически не превосходит

$$\frac{S_{сф}^n(R)}{N_n}=\frac{2\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\frac{R^n}{N_n}=\frac{2\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\frac{1}{N_n}.$$

Этот объем асимптотически не меньше объема n-мерного шара радиуса r. Поэтому

$$V_{ш}^n(r)=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}r^n\leqslant\frac{2\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\frac{1}{N_n}.$$

Отсюда, учитывая, что $\log N_n \sim n^2$, получаем

$$\log r \leqslant -n.$$

Проведем из A прямую, параллельную оси a_0, т. е. в направлении $(\pm 1, 0, \ldots, 0)$, до пересечения с ближайшей гиперплоскостью в точке D. Абсолютная величина косинуса угла между AB и AD равна $1/\sqrt{n+1}$, $|AD| = r/\sqrt{n+1}$. Нормированная реализация (25) функции f с минимальным модулем весового вектора задается точкой A', получаемой из A гомотетией с коэффициентом $1/|AD|$, т. е. умножением вектора $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ единичной длины на $\sqrt{n+1}/r$, при этом $|A'D'| = 1$. Таким образом, минимум модуля весового вектора при нормированных реализациях f равен $\sqrt{n+1}/r$. Отсюда $M(f) > 2^{n(1-o(1))}$. Теорема доказана.

Перейдем теперь к верхним оценкам для $M_{\text{ц}}(n)$. Они являются верхними оценками и для $M(n)$. Единственный известный здесь подход, предложенный 30 лет назад Мурогой с соавторами [84], состоит в использовании принципа граничных решений, правила Крамера для решений систем линейных уравнений и оценки Адамара для величины детерминантов.

Теорема 20 [84]. *Для величины $M_{\text{ц}}(n)$ справедлива оценка*

$$M_{\text{ц}}(n) \leqslant 2\left(\frac{n+1}{2}\right)^{(n+1)/2}.$$

Доказательство. Система из 2^n линейных неравенств (24), которым должна удовлетворять нормированная реализация $(a_1, \ldots, a_n, T)$ пороговой функции $f: \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$, имеет допустимое базисное решение, когда $n+1$ неравенств обращаются в равенства и ранг соответствующей линейной системы равен $n+1$:

$$\begin{array}{ll} a_1 x_1^{(1)} + \ldots + a_n x_n^{(1)} - T = 0, & \mathbf{x}^{(1)} \in f^{-1}(1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_1 x_1^{(n+1)} + \ldots + a_n x_n^{(n+1)} - T = -1, & \mathbf{x}^{(n+1)} \in f^{-1}(0). \end{array}$$

Решая ее по правилу Крамера, получаем

$$\begin{aligned} &a_i = \Delta_i/\Delta, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ &T = \Delta_{n+1}/\Delta. \end{aligned} \tag{27}$$

Оценим по абсолютной величине определитель Δ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Для этого умножим его последний столбец на $1/2$ и прибавим его ко всем остальным столбцам, за исключением i-го, а от i-го вычтем. В результате получим определитель, целиком состоящий из $\pm 1/2$. Оценив его по Адамару, получаем

$$\frac{|\Delta_i|}{2} \leqslant \left(\frac{n+1}{4}\right)^{(n+1)/2}.$$

Умножив в (27) все a_i и T на $|\Delta|$, получим целочисленную реализацию для f, в которой все веса не превосходят по абсолютной величине $2\left(\frac{n+1}{4}\right)^{(n+1)/2}$, что и требовалось доказать.

Отметим огромный разрыв между нижними оценками (26) и теоремы 19, с одной стороны, и верхней оценкой теоремы 20, с другой. До настоящего времени не известно подхода к понижению оценки в теореме 20, даже если отбросить требование целочисленности.

Вернемся теперь к величине $\rho(f)$ в (23). Если $\min\limits_{\mathbf{x} \in \{0,1\}^n} |(\mathbf{a}, \mathbf{x}) - b| = p$, то, положив $a_i' = a_i/2p$ и выбрав подходящим образом T, можно получить нормированную реализацию (24) для f. Поэтому $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{|a_i|}{2p} \geqslant M(f)$, и

$$2pM(f) \leqslant \|\mathbf{a}\| \leqslant \sqrt{n} 2pM(f).$$

Из того, что $\rho(f) = p/\|\mathbf{a}\|$, следует, что

$$\frac{1}{2\sqrt{n}M(f)} \leqslant \rho(f) \leqslant \frac{1}{2M(f)}.$$

Отсюда, используя теоремы 19 и 20, получаем

$$-\frac{1}{2} n \log n \lesssim \log \rho(n) \sim -\log M(n) \lesssim -n.$$

4. Сложность дизъюнктивной нормальной формы. Пороговая функция является однородной, поэтому ее сокращенная д. н. ф. является ее единственной тупиковой, кратчайшей и минимальной. Здесь будет рассматриваться только эта д. н. ф. Заменами $x_i \to 1 - x_i$ любая пороговая функция может быть преобразована в монотонную с сохранением сложности д. н. ф., поэтому ограничимся рассмотрением монотонных функций, простые импликанты которых соответствуют нижним единицам.

Оценка сложности представления пороговых функций с помощью д. н. ф. представляет интерес в силу двух причин. Во-первых, значительная длина д. н. ф. пороговых функций является аргументом в пользу использования в ряде случаев для задания булевых функций вместо д. н. ф. пороговых представлений. И, во-вторых, эти исследования соприкасаются с проблемой алгоритмической сложности решения NP-полных задач, которая в течение уже двух десятилетий привлекает к себе пристальное внимание математиков. В самом деле, задача о ранце (2) может быть решена путем просмотра всех максимальных допустимых решений — верхних нулей соответствующей монотонной функции, и такой просмотр осуществим за время $O(n^2 K)$, где K — число верхних нулей [76]. Таким образом, если бы для всех пороговых функций длина д. н. ф. была ограничена полиномом, то отсюда немедленно следовало бы, что $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$.

То, что пороговые функции могут иметь экспоненциальную сложность д. н. ф., показывает уже пример мажоритарной функции, д. н. ф. которой состоит из $\binom{n}{[n/2]}$ конъюнкций, и этот факт, разумеется, никак не влияет на состояние проблемы $\mathrm{P} \stackrel{?}{=} \mathrm{NP}$. Могут ли пороговые функции обладать большей длиной д. н. ф.? Нет, так как нижние единицы монотонной функции несравнимы, а максимальная мощность множества попарно несравнимых наборов в силу леммы Шпернера равна $\binom{n}{[n/2]}$. Справедлив, таким образом, следующий результат.

Теорема 21. *Число простых импликантов у пороговой функции не превышает* $\binom{n}{[n/2]}$.

Тот факт, что на мажоритарной функции достигается максимум длины д. н. ф. в классе пороговых функций, отмечен уже у Муроги [86]. Возникает, однако, вопрос, насколько часто среди пороговых функций встречается экспоненциальная длина д. н. ф.? Опыт решения подобных задач, накопленный за несколько десятилетий развития дискретной математики, подсказывает, что типичный случай не должен существенно отличаться от экстремального и экспоненциальной сложностью д. н. ф. должны обладать почти все пороговые функции. Для доказательства этого напрашивается использование мощностного метода Шеннона. Однако его применение «в лоб» не дает желаемого результата. Существуют 2^n элементарных конъюнкций без отрицания переменных, и с помощью не более чем k конъюнкций можно получить не более $\sum_{i=0}^{k}\binom{2^n}{i}<2^{nk}$ функций. А так как всего пороговых функций $2^{n^2(1-o(1))}$, то почти все они имеют длину д. н. ф., асимптотически не меньшую n. Чтобы улучшить эту оценку, нужно учесть, что берутся не произвольные подмножества конъюнкций, а лишь те, дизъюнкция которых является пороговой функцией, а это сделать нелегко.

Несколько более сильный результат можно получить, если воспользоваться оценкой (18) для числа $R_n(l)$ регулярных функций с l нижними единицами. Любая монотонная пороговая функция может быть сделана регулярной перестановкой переменных, поэтому число монотонных пороговых функций с не более чем k нижними единицами не превышает

$$n!\sum_{l=0}^{k}R_n(l)\leqslant n!\sum_{l=0}^{k}(n+1)^l.$$

Отсюда получаем, что у почти всех пороговых функций длина д. н. ф. асимптотически не меньше $n^2/\log n$ [14].

Автору неизвестен метод получения более сильных нижних оценок для сложности д. н. ф. типичной пороговой функции, однако в [13] им совместно с Липкиным доказано существование обширного класса пороговых функций с экспоненциальной сложностью д. н. ф.

Пусть $D_n(l)$ — число монотонных пороговых функций от n переменных с l нижними единицами. Тогда, как следует из леммы Шпернера, $D_n\binom{n}{[n/2]}=1$ при n четном, $D_n\binom{n}{[n/2]}=2$ при n нечетном и $D_n(l)=0$ при $l>\binom{n}{[n/2]}$.

Теорема 22 [13]. *Пусть $l(n)=2^{cn(1+o(1))}$, $0<c<1$, $n\to\infty$. Тогда для числа $D_n(l)$ монотонных пороговых функций с l нижними единицами справедлива следующая асимптотическая оценка*

$$\log D_n(l)\geqslant c(1-c)n^2/2.$$

Доказательство использует метод вариации порога и в идейном отношении близко к доказательству нижних оценок для числа пороговых множеств заданной мощности. В основе его лежит следующее соображение. Пусть в неравенстве (1), задающем монотонную пороговую функцию с l нижними единицами, порог b постепенно увеличивается, так что гиперплоскость параллельно перемещается. Ввиду теоремы 10 можно считать, что гиперплоскость последовательно пересекает по одной все вершины куба. Каждая пересекаемая вершина, являясь нижней единицей в момент, непосредственно предшествующий ее пересечению гиперплоскостью, становится нулевой вершиной в момент пересечения. При пересечении очередной вершины число нижних единиц может увеличиться за счет того, что вершины с единичными значениями функции, большие пересеченной, стали нижними единицами. Уменьшиться же оно может только на единицу. При достаточно большом значении порога функция станет тождественно равной единице и не будет иметь нижних единиц, поэтому для любого целого l_1, $0\leqslant l_1\leqslant l$, существует такое значение порога b_1, что неравенство $a_1x_1+\ldots+a_nx_n\leqslant b_1$ задает функцию с l_1 нижними единицами.

Данное замечание позволяет заключить, что для любых n, $l\geqslant 3$ справедливо соотношение

$$D_n(l)\geqslant\sum_{l_1=[l/2]}^{l}D_{n-2}(l_1). \qquad (28)$$

В самом деле, для каждого l_1, $[l/2]\leqslant l_1\leqslant l$, по определению существует $D_{n-2}(l_1)$ монотонных пороговых функций от $n-2$ переменных с l_1 нижними единицами. Если неравенство $\sum\limits_{i=1}^{n-2} a_i x_i \leqslant b_1$ задает такую функцию, то, выбрав b_2 так, чтобы функция $\sum\limits_{i=1}^{n-2} a_i x_i \leqslant b_2$ имела $l_2 = l-l_1-1$ нижних единиц, построим функцию от n переменных с помощью неравенства

$$\sum_{i=1}^{n-2} a_i x_i + (b-b_1)\,x_{n-1} + (b-b_2)\,x_n \leqslant b, \tag{29}$$

где $b=\infty$ (достаточно велико). Функция (29) имеет l_1 нижних единиц в подкубе $x_{n-1}=1$, $x_n=0$ и l_2 нижних единиц в подкубе $x_{n-1}=0$, $x_n=1$, а также нижнюю единицу $(0, \ldots, 0, 1, 1)$, всего $l_1+l_2+1=l$ нижних единиц. С помощью (28) нетрудно получить, что при $k\leqslant(n-3)/2$

$$D_n(l) \geqslant \sum_{l_1=[l/2]}^{l} \frac{(l-l_1+1)^k}{k!}\, D_{n-2k-2}(l_1). \tag{30}$$

Подставляя в (30) $k=[(n-\log l)/2-\log n]$ и учитывая, что при этом $\binom{n-2k-2}{[n/2]-k-1} > l$ и, следовательно, $D_{n-2k-2}(l)\geqslant 1$, получаем утверждение теоремы.

§ 4. Пороговые представления

1. Постановка задачи. Пороговые функции, т. е. те, которые представимы одним линейным неравенством (1), составляют исчезающе малую часть от всех булевых функций. Однако любая булева функция может быть задана системой линейных неравенств

$$\begin{gathered} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n \leqslant b_1,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n \leqslant b_m \end{gathered} \tag{31}$$

так, чтобы нулевые для функции наборы и только они удовлетворяли системе. Такое задание булевой функции системой линейных неравенств называется ее *пороговым представлением*, а наименьшее число m необходимых для этого неравенств — *пороговым числом* $t(f)$ булевой функции f. Геометрически пороговое представление функции f сводится к отсечению гиперплоскостями всех ее единичных вершин. Поэтому в дальнейшем пороговое множество, состоящее из единичных для функции f вершин, будем называть *допустимым* для f. Пороговое число $t(f)$ есть, таким образом, минимальное число допустимых для f пороговых множеств, покрывающих $f^{-1}(1)$.

Пороговое представление (31) булевой функции f можно рассматривать и как дизъюнкцию пороговых функций, т. е. подобно д. н. ф. считать его схемой глубины 2 (рис. 3). Любая элементарная конъюнкция является пороговой функцией, поэтому пороговые представления по своим возможностям не уступают д. н. ф. Прямым следствием этого замечания является следующий результат.

Утверждение 9. *Пороговое число $t(f)$ булевой функции f всегда не превышает длины ее кратчайшей д. н. ф.*.

Пороговое число может совпадать с длиной кратчайшей д. н. ф., но может быть и значительно меньшим, как показывает пример мажоритарной функции. Таким образом, пороговые представления в ряде важных случаев являются более экономными.

Задача определения по д. н. ф. пороговой функции ее порогового числа является согласно следствию 2 теоремы 14 NP-трудной уже в классе графических функций. Поэтому важное значение при изучении пороговых представлений приобретают вопросы, связанные с распределением значений пороговых чисел. По постановкам задач и используемым методам эти исследования близки соответствующей проблематике в теории д. н. ф., где оценкам длин кратчайших д. н. ф. посвящено значительное число работ (см. [3]). В обоих случаях решается задача о покрытии множества $f^{-1}(1)$, но в д. н. ф. это покрытие осуществляется подкубами, соответствующими допустимым элементарным конъюнкциям [6], а в пороговых представлениях $f^{-1}(1)$ покрывается допустимыми пороговыми множествами. Как и в теории д. н. ф., в пороговых представлениях изучаются экстремальные и типичные значения пороговых чисел, а наряду с классом всех булевых функций важнейшим рассматриваемым подклассом являются монотонные функции.

Отметим, что с точки зрения теории нейронных сетей пороговое представление может считаться адаптивной двухслойной нейронной сетью простейшей конфигурации, в которой настраиваемыми являются элементы первого слоя, а во втором используется фиксированный логический блок — дизъюнкция. Подобные сети под названием «мадалины» и алгоритмы их настройки рассматривались в литературе (см. [113]).

В качестве порогово-дизъюнктивных схем пороговые представления изучались в шестидесятые годы (см. [55]), однако не вызвали значительного интереса, так как при их физической реализации трудно добиться устойчивой работы схемы из-за большого числа входов, подаваемых на каждый пороговый элемент. С теоретической точки зрения такие схемы также примитивны и неэкономичны. Гораздо привлекательней во всех отношениях выглядели каскадные схемы (см. [2, 34, 55]).

Положение изменилось, когда стали изучаться задачи линейного булева программирования, в частности, многомерная задача о ранце:

$$\text{максимизировать } c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$$
$$\text{при условии} \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1, \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m. \end{cases} \tag{32}$$

Все коэффициенты в (32) неотрицательны, поэтому областью допустимых решений здесь является множество нулей монотонной булевой функции, заданной с помощью порогового представления. С этой точки зрения пороговые представления, по-видимому, впервые рассматривались Коробковым [23].

Особую роль в развитии теории пороговых представлений сыграла проблема агрегирования линейных неравенств в задачах типа (32), т. е. замена их меньшим числом неравенств без изменения допустимой области. При этом пороговое число как раз и выражает максимально возможную степень такого агрегирования. Именно задача агрегирования была исходным пунктом в исследованиях [10, 49, 64, 69]. Забегая вперед, отметим, что, как показали первые же результаты этих исследований, возможности точного агрегирования в общем случае весьма ограничены. Выяснилось существование булевых функций с пороговым числом, равным 2^{n-1}, и монотонных булевых функций с пороговым числом, равным $\binom{n}{[n/2]}\Big| n$. Это не исключает, однако, эффективного агрегирования в более узких подклассах булевых функций, например, в классе графических функций, где пороговое число согласно теореме 14 всегда меньше n. Фактически, значительная часть результатов в этой области получена именно для графических функций и сформулированы на языке пороговых разложений графов.

Сегодня, оглядываясь назад, можно сказать, что изучение пороговых представлений под новым по сравнению со схемами углом зрения, когда работы шестидесятых годов по пороговой логике были уже основательно забыты, хотя и привело к неизбежному на первых порах переоткрытию известных результатов, однако обеспечило устойчивый интерес к проблематике на протяжении уже длительного времени. Причина состоит, по-видимому, в том, что возникающие здесь задачи лежат в русле развития современной дискретной математики и связаны со многими ее разделами.

2. Теоремы о пороговых числах. Согласно утверждению 9 пороговое число булевой функции не превосходит длины ее кратчайшей д. н. ф., а она, в свою очередь, как хорошо известно (см. [3]), не превышает 2^{n-1} и достигает этого значения на счетчике четности $f(\mathbf{x}) = x_1 + \ldots \ldots + x_n \pmod 2$. Единичные вершины счетчика четности перемежаются нулевыми, поэтому, как следует из утверждения 3 § 2, п. 4, все его допустимые пороговые множества одноэлементны, и его пороговое число равно числу его единичных вершин, т. е. также 2^{n-1}. Более тщательный, хотя и несложный анализ показывает, что существуют всего две функции, на которых пороговое число принимает это максимальное значение: счетчик четности и его отрицание. Таким образом, справедлив следующий результат.

Теорема 23. *Пороговые числа булевых функций от n переменных не превосходят 2^{n-1}, причем для каждого натурального k, $1 \leqslant k \leqslant 2^{n-1}$, множество функций с пороговым числом $t(f) = k$ не пусто. Максимальное значение порогового числа, равное 2^{n-1}, достигается на двух функциях: счетчике четности и его отрицании.*

То, что максимальное значение порогового числа равно 2^{n-1} и достигается на счетчике четности, было, по-видимому, хорошо известно специалистам по пороговой логике в шестидесятые годы (см. [2, с. 165]), но доказательство этого, возможно, впервые опубликовано Джерослоу, хотя им и не было отмечено, что максимум достигается на двух функциях.

Ясно, что пороговое число булевой функции не превышает числа ее единичных вершин. Липкиным [33] был открыт намного менее очевидный факт, что оно не превосходит и числа ее нулевых вершин.

Теорема 24 [33]. *Для порогового числа произвольной булевой функции f справедливо неравенство*

$$t(f) \leqslant \min\{|f^{-1}(1)|,\ |f^{-1}(0)|\}.$$

Доказательство. Соотношение $t(f) \leqslant |f^{-1}(1)|$ очевидно. Докажем соотношение $t(f) \leqslant |f^{-1}(0)|$ индукцией по числу нулевых вершин. При $|f^{-1}(0)| = 1$ оно верно. Пусть оно верно для всех булевых функций с числом нулей, не превышающем $k-1$, и пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет k нулей. Тогда существует переменная x_j такая, что в каждом из подкубов $x_j = 0$ и $x_j = 1$ имеются нулевые вершины функции. Не теряя общности, будем считать, что $j = n$. Пусть в подкубе $x_n = 1$ лежит m нулей функции, а в подкубе $x_n = 0$ $k - m$ нулей, где $m \leqslant k-1$ и $k - m \leqslant k - 1$. Тогда по предположению индукции существует система из m неравенств

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n-1}x_{n-1} \leqslant b_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn-1}x_{n-1} \leqslant b_m,$$

задающая функцию $(x_n = 1)f$, и система из $k - m$ неравенств

$$a_{m+1\,1}x_1 + \ldots + a_{m+1\,n-1}x_{n-1} \leqslant b_{m+1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{k1}x_1 + \ldots + a_{k\,n-1}x_{n-1} \leqslant b_k,$$

задающая функцию $(x_n = 0)f$. Тогда система

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n-1}x_{n-1} + Mx_n \leqslant b_1 + M,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn-1}x_{n-1} + Mx_n \leqslant b_m + M,$$
$$a_{m+1\,1}x_1 + \ldots + a_{m+1\,n-1}x_{n-1} - Mx_n \leqslant b_{m+1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{k1}x_1 + \ldots + a_{k\,n-1}x_{n-1} - Mx_n \leqslant b_k,$$

где M достаточно велико, задает функцию f. Теорема доказана.

Из теоремы 24 сразу вытекает, что пороговое число не может превышать 2^{n-1}. Заметим, что теорема 24 не имеет аналога в теории д. н. ф. (см. [7]). Отметим также, что по ходу доказательства было установлено, что для произвольной пороговой функции, заданной на некотором подкубе единичного куба, существует пороговая функция, заданная на всем кубе, совпадающая с исходной в выделенном подкубе и равная нулю вне его.

Оценим теперь число булевых функций с заданным значением порогового числа. Обозначим через Φ_n множество пороговых функций $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ таких, что $\varphi(1, 1, \ldots, 1) = 1$, $\varphi(0, 0, \ldots, 0) = 0$, а через Φ'_n — множество их отрицаний. Каждая монотонная пороговая функция, не равная тождественно нулю или единице, принадлежит Φ_n, поэтому $|\Phi_n| = |\Phi'_n| = N_2^0 - 2$.

Теорема 25 [13]. *При $1 \leqslant t \leqslant 2^{n-1}$ для числа $B_n(t)$ булевых функций от n переменных с пороговым числом t справедливы оценки*

$$\left(N^0_{n-]\log t[} - 2\right)^t \leqslant B_n(t) \leqslant \binom{N_n}{t}.$$

Доказательство. Верхняя оценка теоремы сразу получается из мощностных соображений. Для доказательства нижней оценки выделим в n-мерном кубе t подкубов фиксацией различных значений первых $]\log t[$ координат. Множество выделенных $(n -]\log t[)$-мерных подкубов разобьем на два подмножества: четных и нечетных подкубов, в зависимости от четности суммы $\sum\limits_{i=1}^{]\log t[} x_i$. Рассмотрим множество F_n булевых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, получаемых следующим образом. В вершинах, не принадлежащих выделенным подкубам (при $]\log t[> \log t$), f полагается равной нулю. В каждом из четных подкубов f совпадает с произвольно выбранной функцией из $\Phi_{n-]\log t[}$, в каждом из нечетных — с функцией из $\Phi'_{n-]\log t[}$. Тогда $|F_n| \geqslant (N_{n-]\log t[} - 2)^t$.

Покажем, что пороговое число функции $f \in F_n$ равно t. Оно не может превышать t, так как в каждом из t подкубов функция f является пороговой. Покажем, что оно не может быть и меньше t. Для этого выберем в каждом из t подкубов по одной единичной для f вершине и докажем, что никакие две из этих t вершин нельзя отсечь одним неравенством. В четных подкубах в качестве таких вершин возьмем вершины с $x_i = 1$, $i =]\log t[+ 1, \ldots, n$, в нечетных — с $x_i = 0$, $i =]\log t[+ 1, \ldots, n$.

Пусть сначала две выбранные вершины α и β принадлежат подкубом одинаковой четности, например четным, $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_{]\log t[}, 1, \ldots, 1)$, $\beta=(\beta_1, \ldots, \beta_{]\log t[}, 1, \ldots, 1)$. Тогда существуют вершины $\gamma=(\gamma_1, \ldots \ldots, \gamma_{]\log t[}, 1, \ldots, 1)$ и $\delta=(\delta_1, \ldots, \delta_{]\log t[}, 1, \ldots, 1)$, принадлежащие нечетным подкубам и, следовательно, нулевые для f такие, что $\alpha+\beta=\gamma+\delta$, и любая гиперплоскость, отсекающая α и β, должна отсекать хотя бы одну из вершин γ или δ. Если же две выбранные вершины α и β принадлежат подкубам различной четности $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_{]\log t[}, 1, \ldots, 1)$, $\beta=(\beta_1, \ldots, \beta_{]\log t[}, \ldots, 0, \ldots, 0)$, то хотя бы одна из нулевых для функции f вершин $\gamma=(\alpha_1, \ldots, \alpha_{]\log t[}, 0, \ldots, 0)$, $\delta=(\beta_1, \ldots, \beta_{]\log t[}, 1, \ldots, 1)$ должна отсекаться тем же неравенством. Теорема доказана.

В качестве следствия получаем, что при $n\to\infty$, $\log t=o(n)$

$$\log B_n(t)\sim tn^2.$$

3. Статистические методы в пороговых представлениях. Наряду с изучением экстремальных значений числовых характеристик комбинаторных объектов интерес представляет исследование их типичных значений, т. е. тех, которые принимаются на основной массе объектов. Важную роль здесь приобретают вероятностные методы исследования, применение которых основано на том, что на множестве комбинаторных объектов задается равномерное распределение вероятностей и изучается вероятностное распределение исследуемых числовых характеристик, которые при таком подходе становятся случайными величинами, и к ним применимы теоремы теории вероятностей.

Существенно, что во многих случаях имеется простая вероятностная модель порождения множества комбинаторных объектов, в которой каждый объект возникает с одинаковой вероятностью. Так, для графов с помеченными вершинами равномерное на множестве всех графов распределение возникает при независимом появлении каждого ребра с вероятностью 1/2. В случае же булевых функций равномерное на множестве всех функций распределение можно получить, задавая независимо в каждой вершине куба с вероятностью 1/2 значение нуль или единица. Подобные модели порождения объектов оказываются весьма удобными в вероятностных методах.

В ряде случаев экстремальное значение некоторой числовой характеристики булевых функций асимптотически совпадает с ее значением в типичном случае. Это имеет место, например, для сложности реализации булевых функций схемами. В этом случае говорят, что имеет место эффект Шеннона. В других случаях, например для длины кратчайшей д. н. ф., экстремальное значение оказывается существенно большим, но почти все булевы функции имеют асимптотически совпадающие значения числовой характеристики, т. е. асимптотика типичного значения существует, но не совпадает с экстремальным значением. Тогда говорят о полуэффекте Шеннона. В определенной мере его можно сопоставить с законом больших чисел в теории вероятностей, утверждающим сходимость частоты к вероятности для почти всех реализаций случайной последовательности.

В 1967 г. Нигматуллиным был предложен метод, названный им вариационным принципом (см. [36]), позволяющий во многих случаях доказывать существование полуэффекта Шеннона. В основе метода лежит хорошо известный факт, что в слоях n-мерного куба с номерами от $[n/2-\sqrt{n}\log n]$ до $[n/2+\sqrt{n}\log n]$ находятся почти все его вершины, а также доказанное Нигматуллиным утверждение, что если $P\subseteq\{0, 1\}^n$ и $Q\subseteq\{0, 1\}^n$ — два подмножества вершин n-мерного куба и $|P|\geqslant \geqslant\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}$, $|Q|\geqslant\sum_{i=l}^{n}\binom{n}{i}$, то расстояние Хемминга между P и Q не превышает $l-k$.

Суть метода заключается в следующем. Каждая булева функция $\{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ рассматривается как упорядоченный набор 2^n своих значений, т. е. считается вершиной 2^n-мерного куба. В качестве расстояний $r(f_1, f_2)$ между функциями f_1 и f_2 берется число вершин n-мерного куба, на которых их значения различаются, т. е. расстояние Хемминга между соответствующими им вершинами 2^n-мерного куба.

Пусть для исследуемой числовой характеристики булевых функций $h(f)$ удается показать, что из $r(f_1, f_2) = 1$ следует $|h(f_1) - h(f_2)| \leqslant R(n)$. Тогда если $r(f_1, f_2) = r$, то $|h(f_1) - h(f_2)| \leqslant rR(n)$. Если, кроме того, удается показать, что для почти всех булевых функций $h(f) \geqslant H(n)$, то рецепт Нигматуллина для доказательства асимптотики состоит в следующем. Выпишем булевы функции, для которых $h(f) \geqslant H(n)$, в ряд в порядке неубывания значений $h(f)$. Выделим начальный отрезок ряда длины $\sum\limits_{i=0}^{2^{n-1}-n2^{n/2}} \binom{2^n}{i}$ и конечный его отрезок такой же длины. Тогда в средней части ряда в промежутке между выделенными отрезками находятся почти все булевы функции, а расстояние на 2^n-мерном кубе между множествами, соответствующими выделенным начальному и конечному отрезкам, не превышает $2n2^{n/2}$. Поэтому разброс значений $h(f)$ в средней части ряда не превышает $2n2^{n/2}R(n)$. Если теперь имеет место $2n2^{n/2}R(n) = o(H(n))$, то это означает, что почти все булевы функции f имеют асимптотически одинаковые значения $h(f)$.

Сам Нигматуллин использовал этот метод для доказательства существования асимптотики длины кратчайшей д. н. ф., но он без труда переносится и на пороговые числа. При случайном независимом и равновероятном задании значений булевой функции в вершинах единичного n-мерного куба вероятность того, что некоторое фиксированное пороговое множество мощности cn будет целиком заполнено единицами, равна 2^{-cn}. Поэтому математическое ожидание числа допустимых пороговых множеств мощности cn равно

$$2^{-cn}N_n(cn) = 2^{n(c\log(1+1/c)+\log(1+c)+1-c+o(1))}.$$

Функция $c\log(1+1/c)+\log(1+c)+1-c$ монотонно убывает при $c > 1$ $((c\log(1+1/c)+\log(1+c)-c)' = \log(1+1/c)-1)$. Отсюда, используя неравенство Чебышева, получаем, что почти все булевы функции не имеют допустимых пороговых множеств мощности cn при $c > c_0$, где $c_0 \approx \approx 4{,}87$ — корень уравнения

$$c\log(1+1/c)+\log(1+c)-c+1=0.$$

Опираясь на это замечание, оценим разность $|t(f_1)-t(f_2)|$ при условии $r(f_1, f_2) = 1$. Пусть $f_1(\alpha) = 0$, $f_2(\alpha) = 1$. Тогда пороговое представление для f_2 может быть получено из порогового представления для f_1 добавлением одного неравенства, отсекающего α, следовательно, $t(f_2) \leqslant \leqslant t(f_1) + 1$. Обратно, представление для f_1 можно получить из представления для f_2, удалив все неравенства, отсекающие α, и выписав для каждой вершины, за исключением α, отсекавшейся хотя бы одним из удаленных неравенств, отдельное неравенство. Линейное неравенство, отсекающее не более cn вершин, включая α, согласно утверждению 4 § 2, п. 6 не может отсекать вершины на расстоянии, большем $2\log(cn)$ от α. Поэтому число выписанных неравенств не превышает

$$\sum_{i=0}^{[2\log(cn)]} \binom{n}{i} \leqslant 2\log(cn)\, n^{2\log(cn)},$$

и эта величина является верхней оценкой для разности $|t(f_1)-t(f_2)|$ при $r(f_1, f_2) = 1$.

Почти все булевы функции имеют асимптотически 2^{n-1} единичных вершин, поэтому для них $t(f) \geqslant 2^{n-1}/c_0 n$. Разность же значений пороговых чисел в средней части ряда этих функций, выписанных в порядке неубывания пороговых чисел, не превышает

$$2n2^{n/2}2\log(cn)\,n^{2\log(cn)} = o(2^{n-1}/c_0 n),$$

что и доказывает существование асимптотики.

В теории д. н. ф. Коршуновым [25], а несколько позже Андреевым [1] установлен порядок асимптотики длины кратчайшей д. н. ф. $l(f)$ для почти всех булевых функций f:

$$l(f) \asymp \frac{2^n}{\log n \log\log n}.$$

В пороговых представлениях пока удалось достигнуть меньшего.

Теорема 26 [13]. *Существует функция $t(n)$ такая, что при $n \to \infty$ для почти всех булевых функций f от n переменных $t(f) \sim t(n)$. Для асимптотики $t(n)$ справедливы оценки*

$$2^n/(c_1+1)n \leqslant t(n) \leqslant \log n\, 2^{n-1}/n,$$

где $c_1 \approx 3{,}41$ — корень уравнения

$$c\log(1+1/c) + \log(1+c) - c = 0.$$

Доказательство. Существование асимптотики $t(n)$ уже установлено предыдущим рассуждением, в котором также показано, что $t(n) \geqslant 2^{n-1}/c_0 n > 2^n/9{,}74n$. Мощностной метод Шеннона позволяет сразу вдвое увеличить эту нижнюю оценку. Так как почти все функции не имеют допустимых пороговых множеств мощности $(c_0+\varepsilon)n$, где ε — сколь угодно малое положительное число, а число всех пороговых множеств мощности $(c_0+o(1))n$ равно

$$2^{n(c_0\log(1+1/c_0)+\log(1+c_0)+1+o(1))} = 2^{n(c_0+o(1))},$$

то m неравенствами можно задать не более $2^{mn(c_0+o(1))}$ функций. Поэтому для задания почти всех 2^{2^n} булевых функций требуется асимптотически не менее $2^n/c_0 n > 2^n/4{,}87n$ линейных неравенств.

Для дальнейшего усиления нижней оценки воспользуемся модификацией мощностного метода, впервые предложенной Кузнецовым [30] для д. н. ф. Идея состоит в том, чтобы учесть, что для некоторого $c_1 < c_0$ число допустимых пороговых множеств мощности cn, $c_1 < c \leqslant c_0$, для почти всех функций мало. Поэтому при оценке числа функций, которые можно задать m неравенствами, следует принять во внимание, что пороговых множеств такой мощности можно брать лишь небольшое, не зависящее от m число. Пороговых же множеств мощности, не превышающей $c_1 n$, можно брать m, но этот выбор делается из числа $N_n(c_1 n) < N_n(c_0 n)$ пороговых множеств.

Пусть $c_1 \approx 3{,}41$ — корень уравнения

$$c\log(1+1/c) + \log(1+c) - c = 0.$$

Левая часть уравнения монотонно убывает при $c > 1$, поэтому для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ математическое ожидание числа допустимых пороговых множеств мощности, большей $(c_1+\varepsilon)n$, для случайной булевой функции равно

$$2^{n(c_1\log(1+1/c_1)+\log(1+c_1)-c_1+1-\delta_1(\varepsilon)+o(1))} = 2^{n(1-\delta_1(\varepsilon)+o(1))},$$

где $\delta_1(\varepsilon) > 0$, $\delta_1(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Отсюда с помощью неравенства Чебышева получаем, что для почти всех булевых функций число допустимых пороговых множеств мощности, большей $(c_1+\varepsilon)n$, не превосходит $2^{n(1-\delta_2)}$ для любого $\delta_2<\delta_1$ и столько пороговых множеств берется из числа, заведомо не превышающего 2^{n^2}. Пороговых же множеств мощности не более $(c_1+\varepsilon)n$ имеется

$$2^{n(c_1\log(1+1/c_1)+\log(1+c_1)+1+\delta_3(\varepsilon)+o(1))}=2^{n(1+c_1+\delta_3(\varepsilon)+o(1))},$$

где $\delta_3(\varepsilon)>0$, $\delta_3(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Поэтому m неравенствами можно задать не более

$$2^{n^2 2^{n(1-\delta_2)}}\times 2^{mn(c_1+1+\delta_3+o(1))}$$

булевых функций. Отсюда, учитывая, что $n^2 2^{n(1-\delta_2)}=o(2^n)$, получаем, устремляя ε к нулю, что для задания почти всех 2^{2^n} булевых функций требуется асимптотически не менее $2^n/(c_1+1)n$ неравенств.

Перейдем к доказательству верхней оценки теоремы, которое использует утверждение 5 § 2, п. 6 и результаты теории кодирования о покрытии вершин n-мерного куба единичными шарами Хемминга. Согласно утверждению 5, если у функции f можно выделить k ее единичных вершин так, чтобы все ее единичные вершины находились внутри шаров радиуса 1 с центрами в выделенных вершинах, то $t(f)\leqslant k$. Для простоты рассмотрим сначала случай, когда $n=2^r-1$ и существует совершенный код Хемминга (см. [78]), т. е. множество из $2^n/(n+1)$ вершин таких, что шары единичного радиуса с центрами в них не пересекаются и покрывают весь куб. Множество, получаемое из кода изменением значений i-х координат всех его вершин на противоположные, называется i-м смежным классом кода, $1\leqslant i\leqslant n$, а сам код считается нулевым классом. Любая вершина куба попадает, таким образом, в один из $n+1$ смежных классов, и если рассмотреть произвольную вершину i-го класса, то среди n ее соседей будут представители всех классов, исключая i-й.

Выберем теперь из $n+1$ смежных классов произвольные $[\log n]$ классов, зафиксируем их, и для случайной булевой функции в качестве центров шаров будем брать ее единичные вершины, попавшие в выбранные классы. Математическое ожидание их числа равно $[\log n]\,2^{n-1}/(n+1)$, и по закону больших чисел асимптотически столько их почти всегда и будет. Каждая единичная вершина функции, не принадлежащая выбранным смежным классам, окружена $[\log n]$ вершинами из выбранных смежных классов, поэтому математическое ожидание числа единичных вершин, не покрытых шарами, равно

$$\frac{1}{2}\left(2^n-2^n[\log n]/(n+1)\right)2^{-[\log n]}\sim o\left([\log n]\,2^{n-1}/(n+1)\right),$$

и для каждой непокрытой вершины можно выписать отдельное неравенство, асимптотически не увеличив числа неравенств.

В общем случае, когда $n\neq 2^r-1$ и совершенного кода не существует, можно воспользоваться результатом Кабатянского и Панченко [21, 22], которыми было показано, что для любого $n\to\infty$ существует покрытие n-мерного куба, состоящее асимптотически из $2^n/n$ шаров. Теперь смежные классы не обладают столь правильной структурой и могут перекрываться, поэтому доказательство необходимых соотношений для математических ожиданий легче всего провести с помощью случайного выбора $[\log n]$ классов. Этим завершается доказательство теоремы.

4. Представление монотонных функций. Во многих задачах линейного булева программирования, как и в (32), коэффициенты a_{ij} линейных неравенств неотрицательны. Поэтому задаваемая ими булева функция является монотонной. Этим объясняется повышенный интерес к пороговым представлениям монотонных функций. Переходя к их изучению, заметим, прежде всего, что произвольное максимально допустимое для монотонной функции пороговое множество всегда может быть задано неравенством с неотрицательными коэффициентами. В самом деле, если допустимое пороговое множество задано неравенством, в котором имеются отрицательные весовые коэффициенты, то заменив их нулями, получим также допустимое пороговое множество, содержащее исходное.

Изучение возможностей агрегирования неравенств в задачах, подобных (32), стимулировало получение оценок для значений пороговых чисел в классе монотонных функций. Из того, что число нижних единиц у монотонных функций не превышает $\binom{n}{[n/2]}$, и из утверждения 1 сразу следует, что в классе монотонных функций значения пороговых чисел не превосходят $\binom{n}{[n/2]}$. Более того, функции, имеющие $\binom{n}{[n/2]}$ нижних единиц, являются пороговыми, поэтому значения пороговых чисел не достигают этой величины. Далее, Хаммером, Ибараки и Пильдом [64] был построен пример монотонной функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ с пороговым числом $t(\varphi) \geqslant \binom{n}{[n/2]}\Big/n$. Позднее этот же пример был построен автором и Тришиным [8], не знакомыми в то время с работой [64]. Его конструкция состоит в следующем.

На среднем слое n-мерного куба берется множество вершин с минимальным расстоянием между вершинами, равным 4 (равновесный код), и принимается за множество нижних единиц функции φ. Нетрудно показать, что никакие две нижние единицы функции φ не могут быть отсечены одним неравенством без отсечения нулевых вершин функции (аналог утверждения 3 § 2, п. 4 для слоя). Поэтому $t(\varphi)$ совпадает с мощностью кода. Существование же равновесного кода мощности $\binom{n}{[n/2]}\Big/n$ с минимальным расстоянием 4 легко показать с помощью следующего известного из теории кодирования рассуждения. Для любого j, $0 \leqslant j \leqslant n-1$, множество вершин среднего слоя, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\sum_{i=1}^{n} ix_i \equiv j \pmod{n},$$

является таким кодом. В объединении эти n кодов дают средний слой. Поэтому среди них существует код мощности $\binom{n}{[n/2]}\Big/n$.

Приведенные соображения позволили дать следующие оценки для максимального значения порогового числа в классе монотонных функций

$$\binom{n}{[n/2]}\Big/n \leqslant \max_{\varphi} t(\varphi) \leqslant \binom{n}{[n/2]} \quad [64]. \tag{33}$$

Позднее в [10, 13] автором было показано, что

$$\max_{\varphi} t(\varphi) \leqslant \chi_n/n, \tag{34}$$

где χ_n — максимальная мощность множества вершин n-мерного куба, которое может быть покрыто единичными шарами Хемминга с попарно несравнимыми центрами. Использование даже тривиальной нижней оценки $\chi_n \leqslant 2^n$ позволяло существенно снизить верхнюю оценку в (33). Автор рассчитывал на дальнейшее ее снижение с помощью более аккуратного оценивания χ_n, не исключая при этом возможности $\chi_n = O\left(\binom{n}{[n/2]}\right)$, позволявшей сразу установить порядок асимптотики для $\max t(\varphi)$. Задача оценки χ_n в качестве самостоятельной комбинаторной проблемы неоднократно ставилась им в 1983—1985 г. на семинарах и конференциях в СССР и в качестве открытой проблемы сформулирована в [10]. Она также была темой его выступления на семинаре профессора Г. Буроша в университете г. Ростока в апреле 1985 г.

Гипотеза $\chi_n = O\left(\binom{n}{[n/2]}\right)$ вскоре была опровергнута Коспановым [26], сконструировавшим красивый пример, из которого следовало, что $\chi_n \gtrsim n^{-1/6}2^n$. Казалось, что эта оценка правильно отражает порядок роста величины χ_n, однако в начале 1988 г. в СССР в форме предварительного препринта была получена работа Фюреди, Кана и Клейтмена [59], в которой было показано, что $\chi_n > 0{,}1 \cdot 2^n$. Этот удивительный результат, полученный с использованием техники, развитой ранее Косточкой [27], явился еще одной убедительной демонстрацией мощи вероятностных методов в комбинаторном анализе и стимулировал новые усилия. Вскоре Чухровым [41] нижняя оценка была доведена до $0{,}2 \cdot 2^n$, а Косточке [28, 29] удалось получить первую асимптотически отличную от 2^n верхнюю оценку $\chi_n < 0{,}9987 \cdot 2^n$ и доказать тем самым гипотезу Фюреди, Кана и Клейтмена о том, что χ_n асимптотически не совпадает с 2^n.

Наряду с экстремальными значениями пороговых чисел изучались их типичные значения. Автором и Тришиным [9] было показано, что для пороговых чисел почти всех монотонных функций φ справедлива оценка $t(\varphi) > 2^n/n^2$, а в совместной работе автора с Липкиным [11] она была существенно усилена. Используя открытое Коршуновым [24] строение почти всех монотонных функций и более тонкие методы исследования, в [11] было установлено, что для почти всех монотонных функций

$$t(\varphi) \asymp \binom{n}{[n/2]}\Big/ n. \qquad (35)$$

Таким образом, оказалось, что построенный в [8, 64] пример является скорее правилом, чем исключением. Вопрос же о порядке максимального значения порогового числа в классе монотонных функций остается открытым. По-прежнему не доказана и не опровергнута гипотеза автора [10]:

$$\max_{\varphi} t(\varphi) \asymp \binom{n}{[n/2]}\Big/ n.$$

Перейдем к доказательству оценок (34) и (35). Они будут опираться на утверждение 7, уже использованный в § 4, п. 3 результат Кабатянского и Панченко о возможности покрытия куба $(1+o(1))2^n/n$ единичными шарами, а также на следующую лемму, возникшую в результате обсуждения проблемы автором с Г. А. Кабатянским, которому и принадлежит ее точная формулировка. Впервые с соответствующей ссылкой она была опубликована в [13].

Лемма 3. *Пусть $Q \subseteq \{0, 1\}^n$ — произвольное подмножество вершин n-мерного куба, H — множество покрывающих куб единичных шаров. Тогда существует покрытие куба единичными шарами такое, что в множестве Q лежит не более $|H| \cdot |Q|/2^n$ центров шаров.*

Доказательство. Рассмотрим 2^n покрытий $\{H + \alpha\}$, получаемых из H сдвигами (mod 2) на всевозможные векторы $\alpha \in \{0, 1\}^n$. Считая эти сдвиги случайными и равновероятными и вычисляя математическое ожидание числа центров, попадающих в Q, получаем, что оно равно $|Q| \cdot |H|/2^n$. Лемма доказана.

Докажем теперь оценку (34).

Теорема 27 [10, 13]. *Максимальное значение порогового числа в классе монотонных функций асимптотически не превосходит χ_n/n, где χ_n — максимальная мощность объединения единичных шаров Хемминга с попарно несравнимыми центрами.*

Доказательство. Пусть φ — произвольная монотонная функция, H — множество покрывающих куб единичных шаров, $|H| = (1 + o(1))2^n/2$. Возьмем в качестве множества Q объединение единичных шаров с центрами в нижних единицах функции φ. По лемме 3 существует покрытие куба единичными шарами, имеющее в множестве Q не более $|H| \cdot |Q|/2^n \lesssim \chi_n/n$ центров. Шары с этими центрами покрывают все нижние единицы φ, а согласно утверждению 7 для нижних единиц в каждом шаре достаточно одного линейного неравенства. Теорема доказана.

Перейдем теперь к доказательству оценки (36) для типичных значений пороговых чисел монотонных функций. Согласно Коршунову [24] почти все монотонные функции от n переменных имеют нижние единицы лишь в трех средних слоях m, $m-1$ и $m+1$, где $m = n/2$ при n четном и $m = [n/2]$ или $m =]n/2[$ при n нечетном. При этом в слое m лежит асимптотически $\binom{n}{[n/2]}\Big/2$ нижних единиц, а суммарное число нижних единиц в слоях $m-1$ и $m+1$ не превышает $2^{n/2}$, т. е. составляет ничтожную часть от числа нижних в слое m.

При изучении типичного значения порогового числа в классе монотонных функций будет использована следующая вероятностная модель порождения множества почти всех монотонных функций, почерпнутая автором из обсуждений с А. А. Сапоженко. Она может быть обоснована с помощью теоремы 1 из работы [37].

Первоначально все вершины куба считаются нулевыми. Затем части вершин в трех средних слоях присваиваются единичные значения по следующему правилу. Сначала вершинам слоя m независимо с вероятностью 1/2 присваивается значение 1. Затем в слое $m+1$ выбираются вершины, не покрывающие единичных вершин в слое m, и с вероятностью 1/2 им присваивается значение 1. И, наконец, в слое $m-1$ выбираются вершины, у которых все покрывающие их вершины в слое m единичные, и с вероятностью 1/2 им присваивается значение 1. На этом процесс случайного порождения завершается и далее функция определяется по монотонности, т. е. во всех вершинах, больших вершин, которым были присвоены единичные значения, она полагается равной единице.

Вершины слоев $m+1$ и $m-1$, которым в процессе случайного порождения было присвоено значение 1, необходимо являются нижними единицами функции. Математическое ожидание числа нижних единиц в слое $m+1$ равно $\frac{1}{2}\binom{n}{m+1}2^{-m-1} = o(2^{n/2})$, поэтому их почти всегда меньше $2^{n/2}$. Это справедливо и для слоя $m-1$.

Данная вероятностная модель порождения почти всех монотонных функций позволяет методами, аналогичными использованным в § 4, п. 3, оценить асимптотику типичных значений пороговых чисел в классе монотонных функций. Роль, которая в доказательстве теоремы 26 принадлежала всему кубу, теперь переходит к его среднему слою. Поэтому наряду с пороговыми множествами здесь будут рассматриваться пороговые множества слоя, подразумевая под этим такие его подмножества, которые могут быть отсеченны от своих дополнений в слое гиперплоскостью.

Понятия центра, радиуса и диаметра, введенные в § 2, п.6 для пороговых множеств, переносятся на пороговые множества слоя с учетом того, что расстояние между вершинами множества теперь принимает лишь четные значения. Если A — пороговое множество слоя, α — его центр, $\beta \in A$ и $r(\alpha, \beta) = 2k$, то все $\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i}^2 = \binom{2k}{k}$ вершин слоя γ таких, что $r(\alpha, \gamma) + r(\gamma, \beta) = 2k$, принадлежат A. Отсюда можно получить оценку на диаметр, аналогичную содержащейся в утверждении 3.

Оценим теперь сверху число пороговых множеств слоя $[n/2]$, мощность которых не превышает cn.

Лемма 4 [13]. *Число пороговых множеств среднего слоя n-мерного куба, имеющих мощность не более cn, при $n \to \infty$ не превосходит*

$$2^{2n(1+(c+1/2)\log(c+1/2)-c\log c+o(1))}.$$

Доказательство. Возьмем в качестве множества T в теореме 9 слой m, где $m = [n/2]$, и оценим сверху число различных параметров Чоу у пороговых множеств слоя, мощность которых не превышает cn. Пусть A — пороговое множество слоя, заданное как множество единиц неравенством $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant b$. Упорядочим коэффициенты $a_{i_1} \leqslant a_{i_2} \leqslant \ldots \leqslant a_{i_n}$. Положим $k = [2\sqrt{cn}]$ и разобьем множество координат на 3 группы: $I_{\text{нач}} = \{i_1, \ldots, i_{m-k}\}$, $I_{\text{ср}} = \{i_{m-k+1}, \ldots, i_{m+k}\}$, $I_{\text{кон}} = \{i_{m+k+1}, \ldots, i_n\}$. Число таких разбиений равно $\binom{n}{m-k}\binom{n-m+k}{2k} = 2^{n(1+o(1))}$. Заметим, что вершина слоя, имеющая единичными координаты $i_{n-m+1}, \ldots, i_n$, является центром A, и никакая вершина из A не может иметь в $I_{\text{нач}}$ более одной единицы, так как в противном случае было бы $|A| > cn$. В самом деле, в $I_{\text{ср}} \cup I_{\text{кон}}$ у вершин слоя имеется более k нулей, и замена любых двух из них на единицы с одновременной заменой двух фиксированных единиц в $I_{\text{нач}}$ на нули даст вершину из A, а таких замен $\binom{k}{2} > cn$. Для вектора Чоу $S(A) = (s_0, s_1, \ldots, s_n)$ имеем, следовательно, $\sum_{i \in I_{\text{нач}}} s_i \leqslant cn$, и число различных $I_{\text{нач}}$-фрагментов векторов Чоу не превосходит $\binom{[cn] + |I_{\text{нач}}|}{[cn]}$. Аналогично, в $I_{\text{кон}}$ не может быть более одного нуля, и число $I_{\text{кон}}$-фрагментов не превосходит $\binom{[cn] + |I_{\text{кон}}|}{[cn]}$. Число же $I_{\text{ср}}$-фрагментов не превосходит $(cn+1)^{2k}$. И, наконец, s_0 может принимать не более $cn+1$ значений. Таким образом, число различных векторов Чоу не превосходит

$$2^{n(1-o(1))}(cn+1)\binom{[cn] + |I_{\text{нач}}|}{[cn]}(cn+1)^{2k}\binom{[cn] + |I_{\text{кон}}|}{[cn]} =$$

$$= 2^{n(1+o(1))}\binom{[cn] + [n/2]}{[cn]}^2 = 2^{2n(1+(c+1/2)\log(c+1/2)-c\log c+o(1))}.$$

Лемма доказана. Ее роль для монотонных функций аналогична роли случая 2 теоремы 18 при изучении всех булевых функций.

Сформулируем теперь основной результат относительно типичных значений пороговых чисел монотонных функций.

Теорема 28 [13]. *Существует функция $\tau(n)$ такая, что при $n \to \infty$ для почти всех монотонных булевых функций φ от n переменных $t(\varphi) \sim \tau(n)$. Для асимптотики $\tau(n)$ справедливы оценки*

$$\frac{1}{c_2+1}\binom{n}{[n/2]}\Big/ n \leqslant \tau(n) \leqslant \frac{5}{2}\binom{n}{[n/2]}\Big/ n,$$

где $c_2 \approx 4{,}76$ — корень уравнения

$$1/2 + (c+1/2)\log(c+1/2) - c\log c - c/2 = 0.$$

Доказательство. Нижняя оценка теоремы получается методом, аналогичным использованному в доказательстве теоремы 26. При случайном порождении монотонных функций математическое ожидание числа допустимых пороговых множеств слоя мощности cn, как следует из леммы 4, не превышает

$$2^{2n(1+(c+1/2)\log(c+1/2)-c\log c-c/2+o(1))}.$$

Поэтому почти все функции не имеют в слое m допустимых пороговых множеств мощности cn при $c > c_3$, где $c_3 \approx 6{,}11$ — корень уравнения

$$1+(c+1/2)\log(c+1/2)-c\log c-c/2=0.$$

Для таких функций $t(\varphi) \geqslant \binom{n}{[n/2]}\Big/2c_3n$, и две функции, имеющие одинаковые множества единиц в слое m и отличающиеся лишь нижними единицами в слоях $m-1$ и $m+1$, число которых не превосходит $2^{n/2}$, имеют асимптотически одинаковые пороговые числа. Поэтому доказательство существования асимптотики легко можно получить с помощью вариационного принципа, закодировав монотонные функции вершинами $\binom{n}{[n/2]}$-мерного куба.

Далее, число допустимых пороговых множеств мощности cn при $c > c_2$ почти всегда не превосходит

$$2^{2n(1+(c+1/2)\log(c+1/2)-c\log c-c/2+o(1))} < 2^{n(1-\delta)},$$

где $\delta > 0$, и столько пороговых множеств слоя выбирается из числа, заведомо не превышающего 2^{n^2}. Учитывая, что число пороговых множеств слоя мощности не более c_2n не превосходит

$$2^{2n(1+(c_2+1/2)\log(c_2+1/2)-c_2\log c_2+o(1))} = 2^{n(c_2+1+o(1))},$$

получаем, что с помощью m неравенств можно задать не более

$$2^{n^2 2^{n(1-\delta)}} \times 2^{mn(c_2+1+o(1))}$$

монотонных функций. Поэтому для задания почти всех $2^{\binom{n}{[n/2]}(1+o(1))}$ монотонных функций требуется асимптотически не менее $\binom{n}{[n/2]}\Big/(c_2+1)\,n$ линейных неравенств.

Для доказательства верхней оценки теоремы возьмем покрытие куба $(1+o(1))2^n/n$ единичными шарами и воспользуемся леммой 3, взяв в качестве множества Q объединение слоев $m-1$ и $m+1$ с нижними единицами в слое m. Тогда все нижние единицы слоя m окажутся внутри $\frac{5}{2}(1+o(1))\binom{n}{[n/2]}\Big/n$ шаров, и верхняя оценка следует из утверждения 7.

§ 5. Открытые проблемы

Одной из целей настоящего обзора являлось освещение исторического пути развития пороговой логики и описание ее приложений, другая состояла в демонстрации связи пороговой логики с различными разделами математики. Вследствие общего прогресса дискретной математики в пороговой логике удалось продвинуться в решении ряда задач, в частности, получить новые результаты в старой проблеме оценки числа пороговых функций. При этом пороговая логика, по-прежнему, способна предоставить широкий спектр проблем специалистам по различным разделам комбинаторного анализа. Сформулируем некоторые из них, в той или иной мере уже затрагивавшихся в контексте настоящего обзора, отбирая при этом достаточно разнообразные задачи, способные заинтересовать возможно более широкий круг исследователей.

1. После того как найдена асимптотика логарифма числа пороговых функций, встает вопрос об асимптотике самого этого числа. Можно ли здесь рассчитывать на успех на нынешнем этапе развития дискретной математики? Повторится ли история монотонных функций, где после установления Клейтменом [73] асимптотики логарифма через сравнительно короткий промежуток времени Коршуновым [24] была найдена асимптотика самого числа монотонных функций. Не пытаясь угадать будущее, отметим все же, что задача нахождения асимптотики числа пороговых функций представляется достаточно трудной. Это не исключает, однако, различных усилений и уточнений теоремы 17.

2. Другая задача связана с числом пороговых множеств различной мощности. Рассматривая множество значений $N_n(M)$, $M = 0, 1, \ldots, 2^n$, как дискретное распределение, симметричное относительно 2^{n-1}, можно заметить, что все оценки теоремы 18 относятся к «хвостам» этого распределения. Естественно тогда поставить вопрос об исследовании центральной его части, где сосредоточена основная масса пороговых множеств. Подобная постановка подсказывается известными предельными теоремами теории вероятностей. Что можно сказать об асимптотическом поведении этого распределения в центральной его части? Будет ли оно подобно числу выпадений герба при бросании правильной монеты описываться нормальным законом? Это интересный качественный вопрос, заслуживающий изучения.

3. В § 3, п. 3 отмечен огромный разрыв между нижними и верхними оценками для абсолютных величин весов $M(n)$ и $M_ц(n)$. Естественно попытаться сократить этот разрыв, оценив величины $M(n)$ и $M_ц(n)$ хотя бы с точностью до порядка асимптотики логарифма. Можно предполагать, что мощностные оценки являются более точными и $\log M(n) \asymp \asymp \log M_ц(n) \asymp n$, но какого-либо подхода к доказательству этого пока не видно.

4. В теореме 22 § 3, п. 4 доказано существование обширного класса пороговых функций с экспоненциальной сложностью д. н. ф. Представляется правдоподобным, что почти все пороговые функции имеют экспоненциальную сложность д. н. ф., однако это предстоит еще доказать.

5. В теореме 26 § 4, п.3 верхняя и нижняя оценки для асимптотики типичного значения порогового числа различаются в $\asymp \log n$ раз. Автор предполагает, что нижняя, мощностная оценка правильно отражает порядок асимптотики и $t(f) \asymp 2^n/n$, однако его попытки доказать этот факт, покрыв единичные вершины случайной булевой функции $\asymp 2^n/n$ шарами Хемминга радиуса 1 с центрами в единичных вершинах, успехом не увенчались. А. Д. Коршунов в 1986 г. сообщил, что для такого покрытия почти всегда требуется $\asymp \log n 2^n/n$ шаров, что и было анонсировано автором в [13]. Позднее, однако, А. Д. Коршунов отказался от сделанного заявления. Таким образом, вопрос о порядке числа единичных шаров в оптимальном покрытии для типичной булевой функции остается открытым. Данная задача, безусловно, представляет самостоятельный интерес и должна заинтересовать специалистов по вероятностным методам комбинаторного анализа. Затратив значительные усилия на поиски такого покрытия мощности $\asymp 2^n/n$ и потерпев неудачу, автор склонен считать, что это сделать невозможно. Если это будет доказано, то возможным путем к понижению верхней оценки в теореме 26 могло бы стать рассмотрение шаров радиуса 2 с центрами в единичных вершинах и использование утверждения 6 § 2, п. 6.

6. В § 4, п.4 уже была, фактически, сформулирована задача оценки максимального значения порогового числа в классе монотонных булевых функций, для которого в настоящее время существуют оценки

$$\binom{n}{[n/2]}\Big/n \leqslant \max_{\varphi} t(\varphi) \leqslant 2^n/n.$$

В пороговых представлениях эта задача, безусловно, является одной из ключевых.

7. В § 2, п.7 определен граф пороговых функций, впервые введенный автором в [16]. Он является примером некоторого естественно возникающего графа, и исследование его свойств может представить интерес для всех интересующихся теорией графов и многомерной геометрией. Граф пороговых функций устроен достаточно сложно, и для него трудно заранее прогнозировать возможность успешного продвижения в исследовании тех или иных свойств. Поэтому получение любых результатов представляет интерес. К настоящему времени здесь определен лишь диапазон изменения степеней вершин и найден диаметр графа. Возможными направлениями дальнейших исследований являются изучение связности, гамильтоновости и т. д.

8. В § 2, п. 2 рассматривались параметры Чоу булевых функций, которые являются удобным средством кодирования пороговых функций. Круг связанных с ними задач достаточно широк. Коснемся лишь одной из них, алгоритмической. Как следует из теоремы 9, по параметрам Чоу булевой функции можно, в принципе, определить, является ли она пороговой, а если является, то и однозначно ее идентифицировать. Возникает, однако, вопрос, касающийся вычислительной трудности этих процедур. Является ли задача распознавания пороговости по параметрам Чоу разрешимой за полиномиальное время или нет? Параметры Чоу интенсивно изучались в шестидесятые годы и эффективных процедур для решения этой задачи найдено не было. Установление ее NP-сложности положило бы конец дальнейшим попыткам найти подобную процедуру.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев А. Е. Об одной модификации градиентного алгоритма // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика.— 1985.— № 3.— С. 29—35.
2. Бутаков Е. А. Методы синтеза линейных устройств из пороговых элементов.— М.: Энергия, 1970.
3. Васильев Ю. Л., Глаголев В. В. Метрические свойства дизъюнктивных нормальных форм // Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Т. 1./Под ред. С. В. Яблонского и О. Б. Лупанова.— М.: Наука, 1974.— С. 99—148.
4. Вешторт А. М., Зуев Ю. А., Краснопрошин В. В. Двухуровневая схема распознавания с логическим корректором // Распознавание, классификация, прогноз: Математические методы и их применение. Вып. 2.— М.: Наука,— 1989.— С. 73—98.
5. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов.— М.: Наука, 1990.
6. Журавлев Ю. И. Алгоритмы построения минимальных дизъюнктивных нормальных форм для функций алгебры логики // Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Т. 1./Под ред. С. В. Яблонского и О. Б. Лупанова.— М.: Наука, 1974.— С. 67—98.
7. Журавлев Ю. И., Коган А. Ю. Реализация булевых функций с малым числом нулей дизъюнктивными нормальными формами и смежные задачи // Докл. АН СССР.— 1985.— Т. 285, № 4.— С. 795—799.
8. Зуев Ю. А., Тришин В. Н. Нижняя оценка числа неравенств, представляющих монотонную булеву функцию от n переменных // Журн. вычисл. математики и матем. физики.— 1983.— Т. 23, № 3.— С. 754—756.
9. Зуев Ю. А., Тришин В. Н. О связи линейных неравенств с монотонными булевыми функциями // Журн. вычисл. математики и матем. физики.— 1984.— Т. 24, № 5.— С. 780—781.

10. Зуев Ю. А. О представлении булевых функций системами линейных неравенств // Кибернетика.— 1985.— № 5.— С. 7—9, 40.
11. Зуев Ю. А., Липкин Л. И. О числе линейно-отделимых булевых множеств заданной мощности // Методы дискретного анализа в теории графов и логических функций. Вып. 43.— Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1986.— С. 29—39.
12. Зуев Ю. А., Липкин Л. И. Линейные отсечения заданной мощности в единичном гиперкубе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.— 1988.— № 3.— С. 79—85.
13. Зуев Ю. А., Липкин Л. И. К оценке эффективности пороговых представлений булевых функций // Кибернетика.— 1988.— № 6.— С. 29—37.
14. Зуев Ю. А., Липкин Л. И. Регулярные булевы функции с заданной сложностью дизъюнктивных нормальных форм // Методы дискретного анализа в изучении булевых функций и графов. Вып. 48.— Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1989.— С. 17—22.
15. Зуев Ю. А. Асимптотика логарифма числа пороговых функций алгебры логики // Докл. АН СССР.— 1989.— Т. 306, № 3— С. 528—530.
16. Зуев Ю. А. Комбинаторно-вероятностные и геометрические методы в пороговой логике // Дискретная математика.— 1991.— Т. 3, вып. 2.— С. 47—57.
17. Зуев Ю. А. О статистических свойствах принятия решения большинством голосов в задачах классификации // Докл. АН СССР.— 1986.— Т. 288, № 2.— С. 320—322.
18. Зуев Ю. А. Вероятностная модель комитета классификаторов // Журн. вычисл. математики и матем. физики.— 1986.— Т. 26, № 2.— С. 276—292.
19. Зуев Ю. А. Наихудший случай для принятия решения большинством голосов // Журн. вычисл. математики и матем. физики.— 1989.— Т. 29, № 8.— С. 1256—1257.
20. Зуев Ю. А., Иванов С. К. Повышение эффективности комплексной обработки информации в динамических системах с использованием принципов распознавания // Вопросы кибернетики. Проблемы комплексирования кибернетических динамических систем/Под ред. Е. А. Федосова.— М.: Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика», 1992.— С. 86—106.
20а. Зуев Ю. А., Иванов С. К. «Ускоренный» персептрон и самообучение процедуры взвешенного голосования // Докл. РАН.— 1993.— Т. 328, № 2.— С. 160—163.
21. Кабатянский Г. А., Панченко В. И. Упаковки и покрытия хэммингова пространства единичными шарами // Докл. АН СССР.— 1988.— Т. 303, № 3.— С. 550—552.
22. Кабатянский Г. А., Панченко В. И. Упаковки и покрытия пространства Хэмминга шарами единичного радиуса // Проблемы передачи информации.— 1988.— Т. 24, вып. 3.— С. 3—16.
23. Коробков В. К. О некоторых целочисленных задачах линейного программирования // Проблемы кибернетики. Вып. 14.— М.: Наука, 1965.— С. 297—299.
24. Коршунов А. Д. О числе монотонных булевых функций // Проблемы кибернетики. Вып. 38.— М.: Наука, 1981.— С. 5—108.
25. Коршунов А. Д. О сложности кратчайших дизъюнктивных нормальных форм случайных булевых функций // Методы дискретного анализа в оптимизации управляющих систем. Вып. 40.— Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1983.— С. 25—53.
26. Коспанов Э. Ш. О покрытии шарами единичного радиуса, центры которых несравнимы // Методы дискретного анализа в синтезе управляющих систем. Вып. 44.— Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1986.— С. 54—57.
27. Косточка А. В. О максимальной мощности границы фильтра в n-мерном кубе // Методы дискретного анализа в изучении реализаций логических функций. Вып. 41.— Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1984.— С. 49—61.
28. Косточка А. В. О максимальной границе шпернерова семейства // Докл. АН СССР.— 1990.— Т. 310, № 3.— С. 536—538.
29. Косточка А. В. Верхняя оценка мощности границы антицепи в n-мерном кубе // Дискретная математика.— 1989.— Т. 1, вып. 3.— С. 53—61.
30. Кузнецов С. Е. О нижней границе длины кратчайшей д. н. ф. почти всех булевых функций // Вероятностные методы и кибернетика. Вып. 19.— Казань: Казанский гос. университет, 1983.— С. 44—47.
31. Лаплас П. Опыт философии теории вероятностей: Пер. с фр.— М., 1908.
32. Липкин Л. И. К оценке вычислительной сложности комбинаторно-логических алгоритмов распознавания // Тез. докл. 5-й Московской городской конференции молодых ученых и специалистов по проблемам кибернетики и вычислительной техники — М.: 1986.— С. 31.
33. Липкин Л. И. О представлении булевых функций с заданным числом нулей системами линейных неравенств // Журн. вычисл. матем. и матем. физики.— 1987.— Т. 27, № 6.— С. 949—951.
34. Лупанов О. Б. О синтезе схем из пороговых элементов // Проблемы кибернетики. Вып. 26.— М.: Наука, 1973.— С. 109—140.

35. Нечипорук Э. И. О синтезе схем из пороговых элементов // Проблемы кибернетики. Вып. 11.— М.: Наука, 1964.— С. 49—62.
36. Нигматуллин Р. Г. Сложность булевых функций.— М.: Наука, 1991.
37. Сапоженко А. А. О числе антицепей в многослойных ранжированных множествах // Дискретная математика.— 1989.— Т. 1, вып. 2.— С. 110—128.
38. Тышкевич Р. И., Черняк А. А. Пороговые разложения булевых функций и графов // Комбинаторно-алгебраические и вероятностные методы дискретного анализа.— Горький: Горьковский гос. университет, 1989.— С. 111—129.
39. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1.— М.: Мир, 1984.
40. Хачиян Л. Г. Полиномиальный алгоритм в линейном программировании // Докл. АН СССР.— 1979.— Т. 244, № 5.— С. 1093—1096.
41. Чухров И. П. О максимальной мощности тени антицепи // Дискретная математика.— 1989.— Т. 1, вып. 4.— С. 78—85.
42. Balas E., Jeroslow R. G. Canonical cuts on the unit hypercube.— SIAM J. Appl. Math.— 1972.— V. 23, № 1.— P. 61—69.
43. Birkhoff G. Lattice Theory. 3rd Edition.— Providence: Amer. Math. Society, 1967. [Рус. пер.: Биркгоф Г. Теория решеток.— М.: Наука, 1984.]
44. Bloch M., Moravek Ja. Bounds of the number of threshold functions // Information Processing Machines.— 1967.— № 13.— P. 67—73. [Рус. пер.: Блох М., Моравек Я. Оценка числа пороговых функций // Кибернетический сборник. Новая серия. Вып. 6.— М.: Мир, 1969.— С. 82—88.]
45. Buck R. C. Partition of Space // Amer. Math. Monthly.— 1943.— V. 50, № 9.— P. 541—544.
46. Cameron S. H. An estimate of the complexity requisite in a universal decision network // Tech. Rept. 60—600. Proceedings of the Bionics Symposium. Wright Air Development Division, Dayton, Ohio, December 1960.— P. 197—212.
47. Chow C. K. On the characterization of threshold functions // Minimization of Boolean Fuctions and Logic Design. Switching Circuit Theory and Logical Design/ AIEE Special Publication S — 134, Sept. 1961.— P. 34—38.
48. Chow C. K. Statistical independence and threshold functions // IEEE Trans. on Electronic Comput.— 1965.— V. EC-14, № 1.— P. 66—68.
49. Chvátal V., Hammer P. L. Aggregation of inequalities in integer programming // Annals of Discrete Mathematics — 1977.— № 1.— P. 145—162.
50. Cook S. A. The complexity of theorem-proving procedure // Proc. 3rd Annual ACM Symposium on the Theory of Computing.— N. Y.: Association for Computing Machinery, 1971.— P. 151—158. [Рус. пер.: Кук С. А. Сложность процедур вывода теорем // Кибернетический сборник. Новая серия. Вып. 12.— М.: Мир, 1975.— С. 5—15.]
51. Cover T. M. Geometrical and statistical properties of systems of linear inequalities with applications in pattern recognition // IEEE Trans on Electronic Comp.— 1965. V. EC — 14, № 3.— P. 326—334.
52. Cover T. M., Efron B. Geometrical probability and random points on a hypersphere // The Annals of Mathematical Statistics.— 1967.— V. 38, № 1.— P. 213—220.
53. Crama Y. Dualization of regular boolean functions // Discrete Applied Mathematics.— 1987.— № 16.— P. 79—85.
54. Danzer L., Grünbaum B., Klee V. Helly's theorem and its relatives.— Providence: Amer. Math. Society, 1963. [Рус. пер.: Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В. Теорема Хелли и ее применения.— М.: Мир, 1968.]
55. Dertouzos M. L. Threshold logic: A synthesis approach.— Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1965. [Рус. пер.: Дертоузос М. Пороговая логика.— М.: Мир, 1967.]
56. Duda R. O., Hart P. E. Pattern classification and scene analysis.— N. Y.: Wiley, 1973. [Рус. пер.: Дуда Р., Харт П. Распознавание образцов и анализ сцен.— М.: Мир, 1976.]
57. Elgot C. C. Truth functions realizable by single treshold organs // Minimization of Boolean Functions and Threshold Logic Design. Switching circuit theory and logical design/AIEE Special Publication S — 134, Sept. 1961.— P. 225—245.
58. Erdös P. Graph theory and probability, II // Canad. J. Math.— 1961.— V. 13.— P. 346—352.
59. Füredi Z., Kahn J., Kleitman D. J. Sphere coverings of the hypercube with incomparable centers // Discrete Mathematics.— 1990.— V. 83, № 1.— P. 129—134.
60. Gabelman I. J. The functional behavior of majority (threshold) elements.— Ph. D. Dissertation. Dep. of Elec. Eng., Syracuse University, N. Y.— June 1961.
61. Garey M. R., Johnson D. S. Computers and intractability. A guide to the theory of NP-completeness.— San Francisco: Freeman, 1979. [Рус. пер.: Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи.— М.: Мир, 1982.]

62. Golumbic M. C. Algorithmic graph theory and perfect graphs.— N. Y.: Academic Press, 1980.
63. Grünbaum B. Arrangements of hyperplanes // Proc. Second Louisiana Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing (R. C. Mullin et. al., eds.).— 1971.— P. 41—74.
64. Hammer P. L., Ibaraki T., Peled U. N. Threshold numbers and threshold completions // Annals of Discrete Mathematics.— 1981.— № 11.— P. 125—145.
65. Hammer P. L., Ibaraki T., Simeone B. Threshold sequences // SIAM J. Algebraic Discrete Methods.— 1981.— V. 2, № 1.— P. 39—49.
66. Harding E. F. The number of partitions of a set of N points in K dimensions induced by hyperplanes // Proc. Edinburgh Math. Society.— 1967.— V. 15 (Series II), № 4.— P. 285—289.
67. Henderson P. B., Zalcstein Y. A graph-theoretic characterization of the *PV* chunk class of synchronizing primitives // SIAM J. Comput.— 1977.— V. 6.— P. 88—108.
68. Hu S.-T. Threshold logic.— Berkeley: University of California Press, 1965.
69. Jeroslow R. G. On defining sets of vertices of hypercube by linear inequalities // Discrete Mathematics.— 1975.— V. 11, № 2.— P. 119—124.
70. Kanter I., Sompolinsky H. Associative recall of memory without errors // Physical Review A.— 1987.— V. 35, № 1.— P. 380—392.
71. Karp R. M. Reducibility among combinatorial problems // Miller R. E., Thatcher J. W. (eds.) Complexity of Computer Computations.— N. Y.: Plenum Press, 1972.— P. 85—103. [Рус. пер.: Карп Р. М. Сводимость комбинаторных проблем // Кибернетический сборник. Новая серия. Вып. 12.— М.: Мир, 1975.— С. 16—38.]
72. Kirchberger P. Über Tschebyschefsche Annäherugsmethoden // Math. Ann.— 1903.— V. 57.— S. 509—540.
73. Kleitman D. On Dedekind's problem: the number of monotone Boolean functions // Proc. Amer. Math. Soc.— 1969.— V. 21, № 3.— P. 677—682. [Рус. пер.: Клейтмен Д. О проблеме Дедекинда: число монотонных булевых функций // Кибернетический сборник. Новая серия. Вып. 7.— М.: Мир, 1970.— С. 43—52.]
74. Komlós J. On the determination of (0, 1) matrices // Studia Sci. Math. Hungar.— 1967.— V. 2.— P. 7—21.
75. Komlós J., manuscipt (1977). In Bollobás B. Random Graphs.— New York and London: Academic Press, 1985.— P. 347—350.
76. Lawler E. L., Lenstra J. K., Rinnooy Kan A. H. G. Generating all maximal independent sets: NP-hardness and polynomial-time algorithms // SIAM J. Comput.— 1980.— V. 9, № 3.— P. 558—565.
77. Lowenschuss O. Restoring organs in redundant automata // Information and control.— 1959.— V. 2, № 2.— P. 113—136. [Рус. пер.: Лоуэншусс О. Восстанавливающие органы в избыточных автоматах // Кибернетический сборник. Вып. 2.— М.: ИЛ, 1961.— С. 206—228.]
78. MacWilliams F. J., Sloane N. J. A. The theory of error-correcting codes.— Amsterdam: North-Holland publishing company, 1977. [Рус. пер.: Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А. Теория кодов, исправляющих ошибки.— М.: Связь, 1979.]
79. Massey J. L. Threshold Decoding.— Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1963. [Рус. пер.: Месси Дж. Пороговое декодирование.— М.: Мир, 1966.]
80. Mays C. H. The Boundary Matrix of Threshold Functions // IEEE Trans. on Electronic Comput.— 1965.— V. EC-14, № 1.— P. 65—66.
81. McCulloch W. S., Pitts W. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity // Bulletin of Math. Biophysics.— 1943.— V. 5.— P. 115—133. [Рус. пер.: Маккаллок У. С., Питтс У. Логическое исчисление идей, относящихся к нервной активности // Автоматы.— М.: ИЛ, 1956.— С. 362—384.]
82. Minsky M., Papert S. Perceptrons.— Massachusetts: The MIT Press, 1969. [Рус. пер.: Минский М., Пейперт С. Персептроны.— М.: Мир, 1971.]
83. Moore E. F., Shannon C. E. Reliable circuits using less reliable relays // J. Franklin Inst.— 1956.— V. 262, № 3.— P. 191—208; № 4.— P. 281—297. [Рус. пер.: Мур Э. Ф., Шеннон К. Е. Надежные схемы из ненадежных реле // Кибернетический сборник. Вып. 1.— М.: ИЛ, 1960.— С. 109—148.]
84. Muroga M., Toda I., Takasu S. Theory of majority decision elements // J. Franklin Inst.— 1961.— V. 271, № 5.— P. 376—418.
85. Muroga S., Tsuboi T., Baugh C. H. Enumeration of threshold functions of eight variables // IEEE Trans. on Comp.— 1970.— V. C-19, № 9.— P. 818—825.
86. Muroga S. Threshold logic and its applications.— N. Y.: Wiley, 1971.
87. Nilsson N. J. Learning machines.— N. Y.: McGraw-Hill, 1965. [Рус. пер.: Нильсон Н. Обучающиеся машины.— М.: Мир, 1967.]
88. Odlyzko A. M., Richmond L. B. On the unimodality of some partition polinomials // Europ. J. Combinatorics.— 1982.— V. 3.— P. 69—84.
89. Odlyzko A. M. On subspaces spanned by random selections of ± 1 vectors // J. Combin. Theory, A.— 1988.— V. 47, № 1.— P. 124—133.

90. Ordman E. T. Minimal threshold separators and memory requirements for synchronization // SIAM J. Comput.— 1989.— V. 18, № 1.— P. 152—165.
91. Parallel distributed processing: exploration in the microstructure of cognition/Eds. D. E. Rumelhart and J. L. McClelland.— Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1986.
92. Peled U. N., Simeone B. Polynomial-time algorithms for regular set-covering and threshold synthesis // Discrete Applied Mathematics.— 1985.— № 12.— P. 57—69.
93. Perkins D. T., Willis D. G., Whitmore E. A. Division of space by concurrent hyperplanes // Internal Rept./Lockheed Aircraft Corp. Missiles and Space Division. Sunnyvale, Calif., 1959.
94. Pierce W. H. Failure-Tolerant computer dezign.— New York and London: Academic Press, 1965. [Рус. пер.: Пирс У. Построение надежных вычислительных машин.— М.: Мир, 1968.]
95. Poljak S. A note on stable sets colorings of graphs // Comm. Math. Univ. Carolinae.— 1974.— V. 15.— P. 307—309.
96. Polya G. Mathematics and plausible reasoning. V. 1. Induction and analogy in mathematics.— Princeton: Princeton University Press, 1954. [Рус. пер.: Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. Т. 1. Индукция и аналогия в математике.— М.: ИЛ, 1957.]
97. Proceedings of the IEEE.— 1990.— V. 78, № 9, № 10.
98. Proctor R. A. Solution of two combinatorial problems with linear algebra // Amer. Math. Monthly.— 1982.— V. 89.— P. 721—734.
99. Rademacher H., Schoenberg I. J. Helly's theorem on convex domains and Tchebycheff's approximation problem // Canad. J. Math.— 1950.— V. 2.— P. 245—256.
100. Redundancy techniques for computing systems (R. H. Wilcox and W. C. Mann, eds.) — Washington, D. C.: Spartan Books, 1962. [Рус. пер.: Методы введения избыточности для вычислительных систем/Пер. с англ. под ред. В. С. Пугачева.— М.: Сов. радио, 1966.]
101. Reed I. S. A class of multiple-error-correcting codes and the decoding scheme // Trans. IRE.— 1954.— PGIT—4.— P. 38—49. [Рус. пер.: Рид И. С. Класс кодов с исправлением нескольких ошибок и схема декодирования // Кибернетический сборник. Вып. 1.— М.: ИЛ, 1960.— С. 189—205.]
102. Reiterman J., Rödl V., Šiňajova E., Tuma M. Threshold hypergraphs // Discrete Mathematics.— 1985.— V. 54.— P. 193—200.
103. Rosenblatt F. Principles of neurodynamics: perceptron and the theory of brain mechanisms.— Washington: Spartan Books, 1962. [Рус. пер.: Розенблатт Ф. Принципы нейродинамики (персептрон и теория механизмов мозга).— М.: Мир, 1965.]
104. Rota G.-C. On the foundations of combinatorial theory I. The Möbius functions // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.— 1964.— Bd. 2, № 4.— S. 340—368.
105. Schläfli L. Gesammelte mathematisce Abhandlugen. Band 1.— Basel: Verlag Birkhäuzer, 1950.
106. Schrijver A. Theory of linear and integer programming.— Chichester: Wiley, 1986. [Рус. пер.: Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования.— М.: Мир, 1991.]
107. Stanley R. P. Weyl Groups, the hard Lefschetz theorem, and the Sperner property // SIAM J. Algebraic Discrete Methods.— 1980.— V. 1.— P. 168—184.
108. Steiner J. Einige Gezetze uber die Theilung der Ebene und des Raumes // J. reine angew. Math.— 1826.— № 1.— S. 349—364.
109. Von N'eumann J. Probabilistic logic and the synthesis of reliable organisms from urreliable components // Automata Studies (C. E. Shannon and J. McCarthy, eds.).— Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1956. [Рус. пер.: Нейман Дж. Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент // Автоматы.— М.: ИЛ, 1956.— С. 68—139.]
110. Wendel J. G. A problem in geometric probability // Mathematica Scandinavica.— 1962.— V. 11.— P. 109—111.
111. Wasserman P. D. Neural computation. Theory and practice.— N. Y.: Van Nostrand Reinhold, 1989. [Рус. пер.: Уоссермен Ф. Нейрокомпьютерная техника. Теория и практика.— М.: Мир, 1992.]
112. Widrow B., Stearns S. D. Adaptive signal processing.— Englewood-Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1985. [Рус. пер.: Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов.— М.: Радио и связь, 1989.]
113. Widrow B., Lehr M. A. 30 Years of adaptive neural networks: perceptron, madaline, and backpropagation // Proceedings of the IEEE.— 1990.— V. 78, № 9.— P. 1415—1442.
114. Willis D. G. Minimum weights for threshold switches // Switching Theory in Space Technology.— Stanford University Press, 1963.— C. 91—108.

115. Winder R. O. Single stage threshold logic // Minimization of Boolean Functions and Logic Design. Switching Circuit Theory and Logical Design/AIEE Special Publication S—134, Sept. 1961.— P. 321—332.
116. Winder R. O. Threshold logic. Ph. D. Dissertation, Dept. Math., Princeton University, 1962. Published by University Microfilms, Xerox Co. (Ann Arbor, MI, 1973).
117. Winder R. O. Enumeration of seven-argument threshold functions // IEEE Trans. on Electronic Comput.— 1965.— V. EC-14, № 3.— P. 315—325.
118. Winder R. O. Partitions of N-space by hyperplanes // SIAM J. Appl. Math.— 1966.— V. 14, № 4.— P. 811—818.
119. Winder R. O. The status of threshold logic // RCA Review. — 1969.— V. 30, № 1.— P. 62—84.
120. Winder R. O. Threshold gate approximations based on Chow parameters // IEEE Trans. on Comput.— 1969.— V. C-18, № 4.— P. 372—375.
121. Winder R. O. Threshold logic asimptotes // IEEE Trans. on Comput.— 1970.— V. C-19, № 4.— P. 349—353.
122. Winder R. O. Chow parameters in threshold logic // J. of Association for Computing Machinery.— 1971.— V. 18, № 2.— P. 265—289.
123. Winograd S., Cowan J. D. Reliable computation in the presence of noise.— Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1963. [Рус. пер.: Виноград С., Коуэн Дж. Д. Надежные вычисления при наличии шумов.— М.: Наука, 1968.]
124. Yajima S., Ibaraki T. A lower bound of the number of threshold functions // IEEE Trans. on Electronic Comput.— 1965.— V. EC-14, № 6.— P. 926—929. [Рус. пер.: Яджима С., Ибараки Т. Нижняя оценка числа пороговых функций // Кибернетический сборник. Новая серия. Вып. 6.— М.: Мир, 1969.— С. 72—81.]
125. Zaslavsky T. Facing up to arrangement: face-count formulas for partitions of space by hyperplanes // Memoirs of the Amer. Math. Society.— 1975. — V. 1, № 154.— P. 1—102.

Поступило в редакцию 15 XII 1990

ДОБАВЛЕНИЕ ПРИ КОРРЕКТУРЕ

Недавно А. А. Ирматовым (Ирматов А. А. О числе пороговых функций // Дискретная математика.— 1993.— Т. 5, вып. 3.— С. 40—43) был предложен другой подход к получению асимптотики (7), также основанный на результате Одлыжко [89], но использующий анализ в пространстве $(y_1, \ldots, y_n)$, а не в пространстве весов, что сближает его с методом Нечипорука [35]. Если p-мерное подпространство, порожденное матрицей $A \in \mathfrak{A}_n$, содержит $2p$ (± 1)-векторов — образующих и им противоположных — и не содержит других (± 1)-векторов, то его можно расширить до $(n-1)$-мерного подпространства, также не содержащего новых (± 1)-векторов. Пусть $a_1y_1 + \ldots + a_ny_n = 0$ — такое подпространство в пространстве $(y_1, \ldots, y_n)$. Тогда при достаточно малом ε в полосе $-\varepsilon < a_1y_1 + \ldots + a_ny_n < \varepsilon$ лежат только данные $2p$ вершин гиперкуба $\{-1, 1\}^n$. Это замечание сразу позволяет получить асимптотически $2^{pn}/p!2^n$ различных самодвойственных функций от $n+1$ переменных вида

$$f(y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}) = \operatorname{sgn}(a_1y_1 + \ldots + a_ny_n + \varepsilon y_{n+1}).$$

НЕРАЗРЕШИМЫЕ СВОЙСТВА СУПЕРИНТУИЦИОНИСТСКИХ ЛОГИК

А. В. ЧАГРОВ

(ТВЕРЬ)

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Описание всей совокупности суперинтуиционистских логик, казавшееся, быть может, лет тридцать назад если и не легко, то во всяком случае реально достижимой целью, ныне представляется чрезвычайно трудной задачей. Более того, многие казавшиеся тогда и позже возможными пути ее решения оказались непригодными, как это следует из многочисленных «отрицательных» результатов; напомню лишь несколько — континуальность семейства суперинтуиционистских логик (см. [55]), существование неполных по Крипке (см. [50]) и неразрешимых (см. [51]) исчислений, невозможность выбора такой счетной последовательности моделей (алгебр и т. п.), что всякая суперинтуиционистская логика задается какой-нибудь ее подпоследовательностью (см. [39]). Таким образом, предмет исследования — семейство суперинтуиционистских логик — представляет собой очень богатое поле деятельности для исследователей, а учитывая все возрастающий интерес к так называемым интенсиональным логикам, обогащению языков классических систем модальными и другими операторами, имеющими реляционную семантику, реляционное истолкование (я имею в виду в первую очередь разного рода динамические, программные логики, логики и теории с явно введенными операторами доказуемости и т. п.), эта область деятельности — хороший полигон для создания и опробования новых методов исследования логических систем с реляционной семантикой, более того, в большинстве таких логик суперинтуиционистские логики содержатся в виде фрагментов из формульных переводов интуиционистских формул, где переводы допускают естественное осмысливание.

Одним из перспективных направлений решения задачи описания того или иного класса логик является поиск алгоритмов, позволяющих выделять из данного семейства логик логики с заранее заданными свойствами. Свойство логик будем называть *разрешимым*, если существует алгоритм, который по конечному списку аксиом (или по одной аксиоме, являющейся их конъюнкцией), дополнительных к аксиоматике логики, выбранной за основу (в §§ 2—6 основа — это интуиционистская логика), определяет, обладает ли логика с этой аксиоматикой данным свойством. Требование конечности списка аксиом здесь по существу, поскольку в случае рассмотрения бесконечных (разумеется, рекурсивно перечислимых, или, что ввиду [65] одно и то же, рекурсивных) аксиоматизаций на вопрос распознавания свойства будет влиять не столько сама логика и ее «устройство», сколько алгоритм описания аксиоматизации (см. по этому поводу приложение Б к данной статье).

Впервые вопросы о разрешимости свойств логик, близких к суперинтуиционистским, исследовал А. В. Кузнецов в [16]. Центральный результат [16] состоит в следующем: каково бы ни было суперинтуиционистское исчисление I_0, алгоритмически неразрешима проблема определения по произвольному списку формул, является ли этот список аксиоматизацией I_0 с правилами вывода — подстановки и modus ponens; в терминах [16], таким образом, неразрешима проблема: задается ли I_0 данным общим исчислением высказываний. При подходящем выборе I_0 получаются различные неразрешимые свойства общих исчислений высказываний. В частности, неразрешимы свойства непротиворечивости, полноты относительно классических двузначных таблиц истинности, т. е. свойство «быть аксиоматизацией классической логики высказываний» и другие свойства, которые удается сформулировать как факт совпадения проверяемого исчисления (в смысле множества выводимых формул, т. е. равнообъемности) с некоторым фиксированным суперинтуиционистским исчислением.

Результаты [16], да и дальнейшая деятельность А. В. Кузнецова, стимулировали изучение вопросов разрешимости свойств самих суперинтуиционистских исчислений. Для многих свойств ответ на вопрос о разрешимости в этом случае оказывается положительным. Так, разрешимы свойство непротиворечивости, свойство совпадения с классической логикой, свойства табличности и предтабличности. О проблемах табличности и предтабличности см. [20], а проблемы непротиворечивости и совпадения с классической логикой есть частные случаи проблемы совпадения с фиксированной табличной логикой, разрешимость которой была анонсирована в [17], доказательство можно извлечь из [58]. Впечатляющи результаты [24] о разрешимости интерполяционного свойства и [36] (подробности в [38]) о разрешимости свойства наследственной структуральной полноты. Среди «положительных» алгоритмических результатов о свойствах логик отмечу разрешимость свойства ДС* — если $L \vdash A \vee B$, то $L \vdash \neg\neg A$ или $L \vdash \neg\neg B$, см. [62]. Это один из немногих известных мне примеров разрешимых свойств суперинтуиционистских логик, когда оба семейства логик — имеющих данное свойство и не имеющих его — континуальны. Другой пример такого рода — свойство «иметь такой же позитивный фрагмент, что и в интуиционистской логике», см. конец § 6.

Для других свойств подобных результатов не было, хотя частично можно было соответствующие проблемы решать. Например, если исчисление аксиоматизируется формулами без отрицательных вхождений дизъюнкции или без вхождений импликации [18, 73], или формулами, все вхождения переменных в которые находятся в области действия отрицаний [33, 74], или формулами от одной лишь переменной [35], то оно финитно аппроксимируемо, полно по Крипке и разрешимо. Но как по произвольной аксиоматике определить, можно ли найти эквивалентную, т. е. равнообъемную, ей аксиоматику из формул с одним из этих «хороших» свойств?

Близким к вопросам о разрешимости свойств является вопрос о существовании неразрешимых исчислений. Сам факт наличия неразрешимого исчисления уже дает неразрешимые свойства, например, свойство совпадения, равнообъемности с ним. Кроме того, неразрешимые исчисления оказываются полезными, а возможно, и необходимыми и для получения результатов о неразрешимости свойств вообще.

В [16] было предложено неразрешимое исчисление, но оно не является суперинтуиционистским, и вопрос А. В. Кузнецова о существовании неразрешимых суперинтуиционистских исчислений был долгое время открыт, см. историю этого вопроса и близких к нему в [52].

Далее используются удобные для наших целей модификации неразрешимого суперинтуиционистского исчисления, разработанного в [46] для доказательства в [48, 47] неразрешимости свойства элементарности суперинтуиционистских исчислений, которое можно определить так: исчисление элементарно, если класс шкал Крипке этого исчисления можно описать условием, выражаемым классической формулой первого порядка.

Цель данной работы — разработка методов доказательства неразрешимости свойств суперинтуиционистских логик, и поэтому некоторые доказательства представлены здесь набросками. В частности, это касается доказательства неразрешимости дизъюнктивного свойства, полученного мною совместно с М. В. Захарьящевым, см. подробности в [11, 63].

Особенностью предлагаемых методов является то, что, по выражению С. Н. Артемова, «теорем больше, чем доказательств». Однако я сознательно подавлял желание «собрать все теоремы под одно доказательство», что могло бы повлечь потерю прозрачности конструкций.

§ 1. Предварительные сведения

В статье употребляются в основном стандартные понятия и обозначения. Цель этого параграфа — дать читателю краткий «справочник» по основным из них, к которому нужно обращаться по мере необходимости, и зафиксировать варианты некоторых из этих понятий и обозначений, в литературе не всегда устоявшиеся.

Интуиционистские пропозициональные формулы строятся из переменных p, q, r, ..., возможно с индексами, константы $\perp$ («ложь»), с помощью связок $\&$, $\vee$, $\supset$, $\neg$. Сигнатура избыточна — $\perp$ можно считать сокращением $p \& \neg p$, а $\neg A$ — сокращением $A \supset \perp$. Для большей части дальнейшего изложения выбор сигнатуры — $\&$, $\vee$, $\supset$, $\perp$ или $\&$, $\vee$, $\supset$, $\neg$ — безразличен, исключение составляют лишь некоторые факты о модальных напарниках интуиционистской логики в приложении A и § 6.

Сигнатура *модальных формул* получается из интуиционистской добавлением унарной связки $\Box$ («необходимо, что...») и $\Diamond$ («возможно, что...»), которую, впрочем, можно считать сокращением — $\Diamond A = \neg \Box \neg B$. Используем сокращение $\Box^+ A = A \& \Box A$.

Назовем формулу *константной*, если она не содержит вхождений переменных.

Иногда логическая символика будет употребляться неформально, что не должно вызывать затруднений из-за контекстности этого употребления.

Аксиоматику (одну из возможных) интуиционистской логики (обозначаем ее Int) можно найти в [29], где она называется конструктивной, в [5, 14, 15]. В этих же книгах приводятся многочисленные примеры выводимых в Int формул, которые мы и будем использовать без особых упоминаний.

Суперинтуиционистской логикой с дополнительной аксиоматикой X называется замыкание $\mathrm{Int} \cup X$ по правилам: modus ponens и подстановка интуиционистских формул вместо переменных. Обозначаем эту логику $\mathrm{Int} + X$, а если $X = \{A_1, \ldots, A_n\}$, то $\mathrm{Int} + A_1 + \ldots + A_n$. Тривиально равенство $\mathrm{Int} + A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \mathrm{Int} + A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_n$.

Важнейшей суперинтуиционистской логикой является *классическое исчисление высказываний* $\mathrm{Cl} = \mathrm{Int} + \neg p \vee p$. Здесь и далее не делается различий между исчислением как логической системой «аксиомы и правила вывода» и множеством выводимых в нем формул, хотя, конечно, алгоритмические проблемы ставятся для аксиоматик исчислений и, более того, проблема равнообъемности аксиоматик неразрешима. Эта некорректность обычно путаницы не вызывает.

Модальная логика K4 есть

$$\mathrm{Cl} \oplus \Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q) \oplus \Box p \supset \Box\Box p,$$

где $\oplus$ — замыкание объединения по правилам: подстановка модальных формул вместо переменных, modus ponens и *правило Гёделя* $A/\Box A$. Употребляем в модальных контекстах и символ $+$ — замыкание по правилам modus ponens и подстановки модальных формул вместо переменных. *Модальная логика* $\mathrm{K4} + X$ называется нормальной, если она замкнута по правилу Гёделя. Легко доказывается, что $\mathrm{K4} \oplus A = \mathrm{K4} + \Box^+ A$.

Некоторые популярные модальные логики:

$$\mathrm{S4} = \mathrm{K4} \oplus \Box p \supset p, \quad \mathrm{GL} = \mathrm{K4} \oplus \Box(\Box p \supset p) \supset \Box p, \quad \mathrm{S} = \mathrm{GL} + \Box p \supset p.$$

Принадлежность формулы A логике L, или, что то же самое, выводимость A в L, обозначаем по традиции $L \vdash A$, в противном случае пишем $L \not\vdash A$.

Для установления невыводимости в логиках используем реляционную семантику.

Интуиционистской шкалой называется непустое частично упорядоченное множество $\mathfrak{F} = \langle W, \leqslant \rangle$. Элементы W при этом называем *мирами* или, учитывая геометрическое изображение шкал, при котором миры изображаются точками, а факт $\alpha \leqslant \beta$ — неубывающей ломаной между α и β, состоящей, быть может, из одной точки в случае $\alpha = \beta$, иногда называем *точками*. Отношение $\leqslant$ называем *отношением достижимости*; $\alpha \leqslant \beta$ читаем «из мира α достижим мир β». Иногда вместо $\alpha \in W$, где $\mathfrak{F} = \langle W, \leqslant \rangle$, пишем $\alpha \in \mathfrak{F}$.

Распределение значений (*оценка*) *переменных в интуиционистской шкале* $\mathfrak{F} = \langle W, \leqslant \rangle$ — это функция V, сопоставляющая каждой переменной p подмножество W так, что если $\alpha \in V(p)$ и $\alpha \leqslant \beta$, то $\beta \in V(p)$. По функции V *оценка* $\underset{V}{\models}$ (символ V, как правило, будем опускать) формул определяется индуктивно:

$$\begin{aligned}
&\alpha \not\models \bot, \\
&\alpha \models p \quad \leftrightarrow \alpha \in V(p), \\
&\alpha \models A \& B \leftrightarrow \alpha \models A \& \alpha \models B, \\
&\alpha \models A \vee B \leftrightarrow \alpha \models A \vee \alpha \models B, \\
&\alpha \models A \supset B \leftrightarrow \forall \beta (\alpha \leqslant \beta \& \beta \models A \supset \beta \models B), \\
&\alpha \models \neg A \quad \leftrightarrow \forall \beta (\alpha \leqslant \beta \rightarrow \beta \not\models A).
\end{aligned}$$

Иногда будет употребляться сокращение $\alpha \| \not\models A \supset B$ в случае, если $\alpha \models A$ и $\alpha \not\models B$.

Шкалу $\mathfrak{F}$ с оценкой V называем *моделью*, обозначаем $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V \rangle$. Формула A *истинна в модели* $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V \rangle$, символически $\mathfrak{M} \models A$, если

$\forall\alpha\in\mathfrak{F}\ \alpha\overset{V}{\models}A$. Формула A *истинна в шкале* $\mathfrak{F}$, если $\langle\mathfrak{F}, V\rangle\models A$ при любой оценке V на $\mathfrak{F}$; обозначение $\mathfrak{F}\models A$.

Модальной шкалой здесь называется $\mathfrak{F}=\langle W, D, R\rangle$, где $D\neq\varnothing$, $D\subseteq W$, R — транзитивное бинарное отношение на W. D — множество действительных (или выделенных) миров; при рассмотрении нормальных модальных логик, т. е. логик, замкнутых по правилу Гёделя, всегда $D=W$, и потому в этом случае вместо $\langle W, D, R\rangle$ пишем $\langle W, R\rangle$. Название элементов W и прочтение $\alpha R\beta$ аналогично интуиционистскому случаю. Вообще, эпитеты «интуиционистская», «модальная» будут, при возможности, далее, как правило, опускаться.

В модальном случае распределение значений переменных в шкале $\mathfrak{F}=\langle W, D, R\rangle$ — это функция V, сопоставляющая каждой переменной подмножество W. Оценка $\overset{V}{\models}$ (символ V опускаем) по функции V индуктивно определяется так:

$$\begin{aligned}
&\alpha\not\models\bot,\\
&\alpha\models p \quad\leftrightarrow\alpha\in V(p),\\
&\alpha\models A\,\&\,B\leftrightarrow\alpha\models A\,\&\,\alpha\models B,\\
&\alpha\models A\vee B\leftrightarrow\alpha\models A\vee\alpha\models B,\\
&\alpha\models A\supset B\leftrightarrow(\alpha\models A\to\alpha\models B),\\
&\alpha\models\neg A \quad\leftrightarrow\alpha\not\models A,\\
&\alpha\models\Box A \quad\leftrightarrow\forall\beta\,(\alpha R\beta\to\beta\models A),\\
&\alpha\models\Diamond A \quad\leftrightarrow\exists\beta\,(\alpha R\beta\,\&\,\beta\models A)
\end{aligned}$$

(напомню об избыточности используемой сигнатуры).

Шкала с оценкой и в модальном случае называется *моделью*. Формула A истинна в шкале $\mathfrak{F}=\langle W, D, R\rangle$, если $\forall V\ \forall\alpha\in D\quad\alpha\overset{V}{\models}A$.

Сходство модальных и суперинтуиционистских логик на синтаксическом уровне выражается в том, что суперинтуиционистские логики можно считать фрагментами некоторых модальных логик в следующем смысле. Определим формульный *T-перевод* из языка суперинтуиционистских логик в язык модальных логик индуктивно:

$$T(\bot)=\Box\bot,\quad T(p)=\Box p,\quad T(A\&B)=T(A)\&T(B),$$
$$T(A\vee B)=T(A)\vee T(B),\quad T(\neg A)=\Box\neg T(A),$$
$$T(A\supset B)=\Box(T(A)\supset T(B)).$$

Модальную логику M называем *модальным напарником* суперинтуиционистской логики L, а L — *суперинтуиционистским фрагментом* M, если

$$L\vdash A \text{ тогда и только тогда, когда } M\vdash T(A).$$

Среди нормальных расширений S4 для всякой суперинтуиционистской логики L есть наименьший модальный напарник —

$$\tau\mathrm{L}=\mathrm{S4}\oplus\{T(A)\,|\,L\vdash A\},$$

и наибольший —

$$\sigma\mathrm{L}=\tau\mathrm{L}\oplus\Box(\Box(p\supset\Box p)\supset p)\supset p.$$

Имеются и другие варианты такого рода погружений суперинтуиционистских логик в модальные (см. [61]), но в основном тексте они использоваться не будут.

Многие понятия и для суперинтуиционистских логик, и для модальных логик формулируются одинаково, и в таких случаях будем говорить просто «логика».

Логика L *разрешима*, если имеется алгоритм, определяющий по произвольной формуле A, верно ли, что $L \vdash A$. Для *исчислений*, т. е. конечноаксиоматизируемых логик, одним из стандартных приемов доказательства разрешимости является установление их финитной аппроксимируемости. Логика L *финитно аппроксимируема*, если из $L \not\vdash A$ следует, что найдется такая конечная шкала $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{F} \models L$, т. е. в $\mathfrak{F}$ истинны все формулы из L, и $\mathfrak{F} \not\models A$. Это определение не вполне стандартно, но, как хорошо известно, эквивалентно стандартному. Если из $L \not\vdash A$ следует, что найдется такая шкала $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{F} \models L$ и $\mathfrak{F} \not\models A$, то L называется *полной по Крипке*; в частности, всякая финитно аппроксимируемая логика полна по Крипке.

Имеются некоторые достаточные условия (см. введение), накладываемые на аксиомы исчислений, их вид, которые обеспечивают их финитную аппроксимируемость, а значит, и разрешимость и полноту по Крипке. Эти условия будут приводиться далее в тексте в местах их использования.

Логика называется *табличной*, если она совпадает с множеством формул, истинных в какой-нибудь фиксированной конечной шкале, или противоречива. Логика *предтаблична* в данном классе логик, если она не таблична, но всякое ее расширение в этом классе логик таблично. Логика *локально таблична*, если для каждого $n (n \in \omega)$ имеется лишь конечное число попарно неэквивалентных в ней формул от n переменных. Логика *антитаблична*, если она непротиворечива, но не имеет конечных моделей (шкал, алгебр и т. п.).

Суперинтуиционистская логика L обладает *дизъюнктивным свойством*, если из $L \vdash A \vee B$ следует, что $L \vdash A$ или $L \vdash B$. Модальная логика M обладает *дизъюнктивным свойством*, если из $M \vdash \Box A \vee \Box B$ следует, что $M \vdash \Box A$ или $M \vdash \Box B$. Логика L, модальная или суперинтуиционистская, *полна по Холдену*, если из $L \vdash A \vee B$, где A и B не имеют общих переменных, следует, что $L \vdash A$ или $L \vdash B$. Говорим, что логика *допускает дизъюнктивное свойство*, если она имеет непротиворечивое расширение с этим свойством, например, сама является таковой; конечно, это свойство зависит от класса рассматриваемых расширений.

Двойственным к понятию разрешимого исчисления является следующее, по-видимому, новое понятие. *Формулу A* называем *разрешимой* в классе (нормальных) расширений логики L, если существует алгоритм, который по формуле B определяет, верно ли, что $L + B \vdash A$ (в нормальном случае — верно ли, что $L \oplus B \vdash A$).

Основным инструментом получения результатов о неразрешимости будет моделирование работы машин Минского выводами в специально построенных исчислениях. Впервые такое моделирование, но в довольно слабых модальных логиках, проводилось в [70], а для суперинтуиционсистских разработано в [46].

Машина Минского (см. [70, 75]) — это двухленточная машина, каждая лента которой ограничена слева, головки машины (по одной на каждой ленте) ничего не пишут и ничего не стирают, информация на ленте — это число ячеек от левой границы до положения головки. Упомяну, что машины Минского часто называют автоматами с двумя магазинами.

Программа машины Минского — это конечный набор команд или инструкций вида

$$q_\alpha \to q_\beta T_1 T_0, \quad q_\alpha \to q_\beta T_0 T_1,$$

$$q_\alpha \to q_\beta T_{-1} T_0 (q_\gamma T_0 T_0), \; q_\alpha \to q_\beta T_0 T_{-1} (q_\gamma T_0 T_0).$$

Третья, например, команда означает: «находясь в состоянии q_α, если на первой ленте слева от головки есть ячейки, то передвинуть эту головку на одну ячейку влево, не меняя положения второй головки, затем перейти в состояние q_β, а если на первой ленте слева от головки ячеек нет, то перейти в состояние q_γ, не меняя положения головок на лентах». Отождествляем машину Минского с ее программой.

Конфигурацией машины Минского называем тройку (α, m, n), где q_α — состояние, m — информация на первой ленте, n — информация на второй ленте. Если программа P некоторым вычислением переводит конфигурацию (α, m, n) в (β, k, l), то пишем P: $(\alpha, m, n) \to (\beta, k, l)$, в противном случае пишем P: $(\alpha, m, n) \not\to (\beta, k, l)$. Иногда используем обозначение $P(\alpha, m, n) = \{(\beta, k, l) | P: (\alpha, m, n) \to (\beta, k, l)\}$. Всегда имеем $(\alpha, m, n) \in P(\alpha, m, n)$, т. е.

$$P: (\alpha, m, n) \to (\alpha, m, n).$$

Некоторая модификация машин Минского описана в [27]. Она отличается от только что описанной небольшими деталями, но при ее непосредственном применении для целей данной работы возрастает громоздкость имитации машин Минского. В частности, вместо четырех видов команд надо имитировать 25 видов из [27].

На машинах Минского при некотором естественном кодировании вычислимы все частично рекурсивные функции (см. [27, 75]), поэтому имеется огромное количество разного рода неразрешимых проблем, касающихся этого вида представления алгоритмов. Их достаточно для многих наших дальнейших целей, но для свойства разрешимости, точнее — неразрешимости, нам понадобится следующий вид алгоритмически неразрешимых проблем: существует такая программа P и конфигурация (α, m, n), что проблема «Верно ли, что P: $(\alpha, m, n) \to (\beta, k, l)$?» алгоритмически неразрешима; доказательство этого факта — несложное упражнение, см., например, [42]. Для дальнейшего зафиксируем программу P и конфигурацию (α, m, n), для которых эта проблема неразрешима. Замечу, что P, начав работу в конфигурации (α, m, n), работает вечно.

§ 2. Моделирование машин Минского суперинтуиционистскими исчислениями. Начальные результаты о неразрешимости

В этом параграфе метод доказательства неразрешимости тех или иных свойств, который используется в дальнейшем, будет представлен в наиболее «чистом» виде, т. е. без каких-либо конструкционных добавок, которые будут нужны в следующих параграфах для некоторых свойств.

Применяются, по существу, конструкции [46]. Основное существенное отличие состоит в изменениях формул S_i (см. ниже; в [46] аналог S_i обозначался F), которые будем иногда называть *стартовыми*. Впрочем, все наши стартовые формулы будут оказываться неразрешимыми. Выбор стартовой формулы определяется тем свойством, неразрешимость которого доказывается, и остальные формулы, участвующие в доказательстве, конечно, зависят от этого выбора, но во всех модификациях метода есть инвариантная часть — принципиальный вид формул, моделирующих команды машины Минского, заимствованный из [46].

Здесь нам понадобятся следующие формулы:

$$S_1 = p' \vee (p' \supset S_1'), \qquad S_1' = A^4 \vee B^4,$$

$$A^4 = u_1 \mathbin{\&} \neg v_1 \supset u_2 \vee A^3_{-2}, \quad B^4 = v_1 \mathbin{\&} \neg u_1 \supset v_2 \vee B^3_{-2},$$

$$A^3_{-2} = u_2 \supset u_3 \vee A^3_{-3}, \qquad B^3_{-2} = v_2 \supset v_3 \vee B^3_{-3},$$

$$A^3_{-3} = u_3 \supset u_4 \vee A^2_{-2}, \qquad B^3_{-3} = v_3 \supset v_4 \vee B^2_{-2},$$

$$A^2_{-2} = u_4 \supset u_5 \vee A^2_{-3}, \qquad B^2_{-2} = v_4 \supset v_5 \vee B^2_{-3},$$

$$A^2_{-3} = u_5 \supset u_6 \vee A^1_{-2}, \qquad B^2_{-3} = v_5 \supset v_6 \vee B^1_{-2},$$

$$A^1_{-2} = u_6 \supset u_7 \vee A^1_{-3}, \qquad B^1_{-2} = v_6 \supset v_7 \vee B^1_{-3},$$
$$A^1_{-3} = \neg u_7, \qquad B^1_{-3} = \neg v_7.$$

Лемма 1. *Формула S_1 опровергается в шкале тогда и только тогда, когда в этой шкале имеются миры, образующие диаграмму, изображенную на рис. 1, причем выполняются следующие условия:*

а) *миры a^4 и b^4 не имеют общих потомков; опровергающая оценка такова, что*

б) $\{s_1\} = \{x \mid x \models\!\!\!\!/\; S_1\}$, $\{s_1, s_1'\} = \{x \mid x \models\!\!\!\!/\; S_1'\}$;

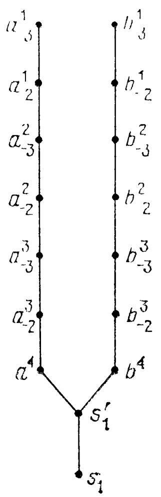

Рис. 1

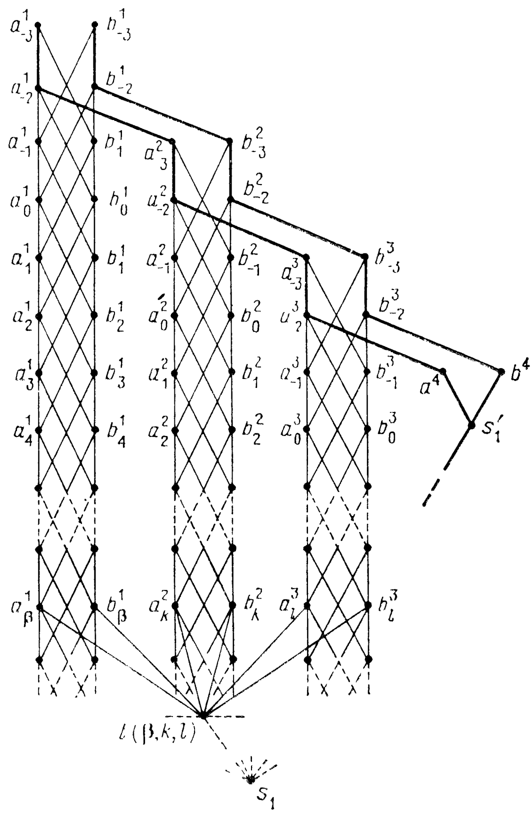

Рис. 2

в) *при $i \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{-3, -2\}$ либо*

$$\{a^4\} = \{x \mid x \Vdash\!\!\!\!/\; A^4\}, \quad \{b^4\} = \{x \mid x \Vdash\!\!\!\!/\; B^4\},$$
$$\{a^i_j\} = \{x \mid x \Vdash\!\!\!\!/\; A^i_j\}, \quad \{b^i_j\} = \{x \mid x \Vdash\!\!\!\!/\; B^i_j\},$$

либо

$$\{b^4\} = \{x \mid x \Vdash\!\!\!\!/\; A^4\}, \quad \{a^4\} = \{x \mid x \Vdash\!\!\!\!/\; B^4\},$$
$$\{b^i_j\} = \{x \mid x \Vdash\!\!\!\!/\; A^i_j\}, \quad \{a^i_j\} = \{x \mid x \Vdash\!\!\!\!/\; B^i_j\}$$

(*здесь множества ограничены универсумом из рис.* 1).

Доказательство состоит в попытке опровергнуть формулу и проведении затем обратных рассуждений.

Определяем теперь по программе P и конфигурации (α, m, n) шкалу $\mathfrak{F}_1$ следующим образом:

множество миров —

$$\{s_1, s_1'\} \cup \{a^4, b^4\} \cup \{a^i_j, b^i_j \mid 1 \leqslant i \leqslant 3, j \geqslant -3\} \cup$$
$$\cup \{t(\beta', k', l') \mid P\colon (\alpha, m, n) \to (\beta', k', l')\};$$

отношение достижимости $\leqslant$ есть транзитивное и рефлексивное замыкание следующего бинарного отношения R:

$$xRy \rightleftharpoons (\exists i, j, k, k', l', \beta')\big(x = s_1 \vee \big(x = s_1' \mathbin{\&} (y = a^4 \vee x = b^4)\big) \vee$$
$$\vee \big(x = a^4 \mathbin{\&} y = a^3_{-2}\big) \vee \big(x = b^4 \mathbin{\&} y = b^3_{-2}\big) \vee \big(x = a^i_{-3} \mathbin{\&} y = a^{i-1}_{-2}\big) \vee$$
$$\vee \big(x = b^i_{-3} \mathbin{\&} y = b^{i-1}_{-2}\big) \vee \big(x = a^i_j \mathbin{\&} y = a^i_k \mathbin{\&} j \geqslant k\big) \vee$$
$$\vee \big(x = b^i_j \mathbin{\&} y = b^i_k \mathbin{\&} j \geqslant k\big) \vee \big(x = a^i_j \mathbin{\&} y = b^i_k \mathbin{\&} j \geqslant k + 2\big) \vee$$
$$\vee \big(x = b^i_j \mathbin{\&} y = a^i_k \mathbin{\&} j \geqslant k + 2\big) \vee \big(x = t(\beta', k', l') \mathbin{\&} y \in$$
$$\in \{a^1_{\beta'}, b^1_{\beta'}, a^2_{k'}, b^2_{k'}, a^3_{l'}, b^3_{l'}\}\big)\big).$$

Графическое изображение шкалы $\mathfrak{F}_1$ приведено на рис. 2.

Подразумеваемый «смысл» конструкции шкалы: пары миров a^1_0, b^1_0, $\ldots$, $a^1_{\beta'}$, $b^1_{\beta'}$, $\ldots$ изображают состояния машины Минского, пары миров a^2_0, b^2_0, $\ldots$, $a^2_{k'}$, $b^2_{k'}$, $\ldots$ — возможные положения головки на первой ленте, a^3_0, b^3_0, $\ldots$, $a^3_{l'}$, $b^3_{l'}$, $\ldots$ — возможные положения головки на второй ленте, миры $t(\beta', k', l')$ — возможные конфигурации.

Нетрудно видеть, что шкала $\mathfrak{F}_1$ содержит в себе шкалу с рис. 1. Это подчеркнуто в обозначениях. Причем эта подшкала с условием а) леммы 1 единственна с точностью до автоморфизма шкалы $\mathfrak{F}_1$, заключающегося в перемене букв a и b местами. Этот же автоморфизм действует и в п. в) леммы 1. Таким образом, мы в дальнейшем можем считать, что обозначения миров в шкале $\mathfrak{F}_1$ и в шкале из рис. 1 соответствуют друг другу и если оценка в шкале $\mathfrak{F}_1$ выбрана опровергающей S_1, то имеет место первый случай п. в) леммы 1. Кроме того, легко видеть, что множества из пп. б) и в) леммы 1 можно считать ограниченными универсумом миров $\mathfrak{F}_1$ (см. лемму 2).

Определим теперь формулы, в некотором смысле соответствующие мирам шкалы $\mathfrak{F}_1$:

$$A^1_{k+1} = B^1_k \supset A^1_k \vee B'_{k-1}, \quad B^1_{k+1} = A^1_k \supset B^1_k \vee A^1_{k-1},$$
$$A^2_{k+1} = A^3_{-3} \mathbin{\&} B^3_{-3} \mathbin{\&} B^2_k \supset A^2_k \vee B^2_{k-1} \vee A^2_{-3} \vee B^2_{-3},$$
$$B^2_{k+1} = A^3_{-3} \mathbin{\&} B^3_{-3} \mathbin{\&} A^2_k \supset B^2_k \vee A^2_{k-1} \vee A^2_{-3} \vee B^2_{-3},$$
$$A^3_{k+1} = B^3_k \supset A^3_k \vee B^3_{k-1} \vee A^3_{-3} \vee B^3_{-3},$$
$$B^3_{k+1} = A^3_k \supset B^3_k \vee A^3_{k-1} \vee A^3_{-3} \vee B^3_{-3},$$
$$T\big(\beta, A^2_i, A^3_j\big) = A^1_{\beta+1} \mathbin{\&} B^1_{\beta+1} \mathbin{\&} A^2_{i+1} \mathbin{\&} B^2_{i+1} \mathbin{\&} A^3_{j+1} \mathbin{\&} B^3_{j+1} \supset$$
$$\supset A^1_\beta \vee B^1_\beta \vee A^2_i \vee B^2_i \vee A^3_j \vee B^3_j$$
$$(k \geqslant -2,\ \beta,\ i,\ j \geqslant 0).$$

Лемма 2. *Пусть оценка V такова, что $\langle \mathfrak{F}_1, V\rangle \not\models S_1$. Тогда при этой оценке выполняются условия*

а) $\{x \mid x \not\models S_1\} = \{s_1\}$, $\quad \{x \mid x \not\Vdash S_1'\} = \{s_1'\}$,
$\{x \mid x \not\Vdash A^4\} = \{a^4\}$, $\quad \{x \mid x \not\Vdash B^4\} = \{b^4\}$,

б) $\{x \mid x \not\Vdash A^i_j\} = \{a^i_j\}$, $\quad \{x \mid x \not\Vdash B^i_j\} = \{b^i_j\}$ $\qquad (i \in \{1, 2, 3\},\ j \geqslant -3)$,

в) $$\{x \mid x \not\Vdash T\big(\beta', A^2_{k'}, A^3_{l'}\big)\} = \begin{cases} \{t(\beta', k', l')\}, & (\beta', k', l') \in P(\alpha, m, n), \\ \varnothing, & (\beta', k', l') \notin P(\alpha, m, n). \end{cases}$$

Доказательство п. а) очевидно (см. лемму 1). Пункт б) доказывается индукцией по j. Пункт в) следует из б).

Лемма 3. *Пусть* $(\beta, k, l) \notin P(\alpha, m, n)$. *Тогда*

$$\mathfrak{F}_1 \models \left(T\left(\beta, A_k^2, A_l^3\right) \supset T\left(\alpha, A_m^2, A_n^3\right) \vee S_1\right) \supset S_1.$$

Лемма 4. $(\beta, k, l) \in P(\alpha, m, n)$ *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{F}_1 \models$ $\models T\left(\beta, A_k^2, A_l^3\right) \supset T\left(\alpha, A_m^2, A_n^3\right) \vee S_1$.

Утверждения лемм 3 и 4 следуют из леммы 2.

Для имитации команд машины Минского нам понадобятся формулы, описывающие в духе п. в) леммы 2 произвольные положения головок на лентах, а не жестко фиксированные:

$$Q_{-2} = p_1, \quad Q'_{-2} = q_1, \quad Q_{-1} = p_2, \quad Q'_{-1} = q_2,$$
$$Q_{k+1} = A^3_{-3} \,\&\, B^3_{-3} \,\&\, Q'_k \supset Q_k \vee Q'_{k-1} \vee A^2_{-3} \vee B^2_{-3},$$
$$Q'_{k+1} = A^3_{-3} \,\&\, B^3_{-3} \,\&\, Q_k \supset Q'_k \vee Q_{k-1} \vee A^2_{-3} \vee B^2_{-3},$$
$$R_{-2} = p'_1, \quad R'_{-2} = q'_1, \quad R_{-1} = p'_2, \quad R'_{-1} = q'_2,$$
$$R_{k+1} = R'_k \supset R_k \vee R'_{k-1} \vee A^3_{-3} \vee B^3_{-3},$$
$$R'_{k+1} = R_k \supset R'_k \vee R_{k-1} \vee A^3_{-3} \vee B^3_{-3},$$
$$T(\beta, Q_i, R_j) = A^1_{\beta+1} \,\&\, B^1_{\beta+1} \,\&\, Q_{i+1} \,\&\, Q'_{i+1} \,\&\, R_{j+1} \,\&\, R'_{j+1} \supset$$
$$\supset A^1_\beta \vee B^1_\beta \vee Q_i \vee Q'_i \vee R_j \vee R'_j,$$
$$T\left(\beta, A^2_0, R_j\right) = A^1_{\beta+1} \,\&\, B^1_{\beta+1} \,\&\, A^2_1 \,\&\, B^2_1 \,\&\, R_{j+1} \,\&\, R'_{j+1} \supset$$
$$\supset A^1_\beta \vee B^1_\beta \vee A^2_0 \vee B^2_0 \vee R_j \vee R'_j,$$
$$T\left(\beta, Q_i, A^3_0\right) = A^1_{\beta+1} \,\&\, B^1_{\beta+1} \,\&\, Q_{i+1} \,\&\, Q'_{i+1} \,\&\, A^3_1 \,\&\, B^3_1 \supset$$
$$\supset A^1_\beta \vee B^1_\beta \vee Q_i \vee Q'_i \vee A^3_0 \vee B^3_0$$
$$(k \geqslant -1, \ \beta \geqslant 0, \ i, j \in \{1, 2\}).$$

Связь этих формул с введенными выше устанавливает

Лемма 5. *Пусть* $A \equiv B$ *означает* $\mathrm{Int} \vdash (A \supset B) \& (B \supset A)$. *Тогда при* β, i, $l \geqslant 0$, j, $k \in \{1, 2\}$ *выполняются условия*

а) $Q_j\left(A^2_{i-3}/p_1, B^2_{i-3}/q_1, A^2_{i-2}/p_2, B^2_{i-2}/q_2\right) \equiv A^2_{i+j-1}$,

б) $Q'_j\left(A^2_{i-3}/p_1, B^2_{i-3}/q_1, A^2_{i-2}/p_2, B^2_{i-2}/q_2\right) \equiv B^2_{i+j-1}$,

в) $R_j\left(A^3_{i-3}/p'_1, B^3_{i-3}/q'_1, A^3_{i-2}/p'_2, B^3_{i-2}/q'_2\right) \equiv A^3_{i+j-1}$,

г) $R'_j\left(A^3_{i-3}/p'_1, B^3_{i-3}/q'_1, A^3_{i-2}/p'_2, B^3_{i-2}/q'_2\right) \equiv B^3_{i+j-1}$,

д) $T(\beta, Q_j, R_k)\left(A^2_{i-3}/p_1, B^2_{i-3}/q_1, A^2_{i-2}/p_2, B^2_{i-2}/q_2,\right.$
$\left.A^3_{l-3}/p'_1, B^3_{l-3}/q'_1, A^3_{l-2}/p'_2, B^3_{l-2}/q'_2\right) \equiv T\left(\beta, A^2_{i+j-1}, A^3_{k+l-1}\right)$,

е) $T\left(\beta, A^2_0, R_k\right)\left(A^2_{i-3}/p_1, B^2_{i-3}/q_1, A^2_{i-2}/p_2, B^2_{i-2}/q_2,\right.$
$\left.A^3_{l-3}/p'_1, B^3_{l-3}/q'_1, A^3_{l-2}/p'_2, B^3_{l-2}/q'_2\right) \equiv T\left(\beta, A^2_0, A^3_{k+l-1}\right)$,

ж) $T\left(\beta, Q_j, A^3_0\right)\left(A^2_{i-3}/p_1, B^2_{i-3}/q_1, A^2_{i-2}/p_2, B^2_{i-2}/q_2,\right.$
$\left.A^3_{l-3}/p'_1, B^3_{l-3}/q'_1, A^3_{l-2}/p'_2, B^3_{l-2}/q'_2\right) \equiv T\left(\beta, A^2_{i+j-1}, A^3_0\right)$.

Доказательство. Пункты а) — г) проверяются непосредственно, пп. д) — ж) следуют из а) — г).

В утверждениях леммы 5 выполняются даже не просто эквивалентности, а графические равенства, т. е. утверждения леммы 5 можно считать тривиальными. Ее формулировка нужна для ссылок и для сравнения с аналогичной, но не столь тривиальной леммой 37.

Теперь определяем формулы, имитирующие команды машин Минского:

если $I = q_x \to q_y T_1 T_0$, то полагаем

$$\mathrm{AxI} = T(y,\ Q_2,\ R_1) \supset T(x,\ Q_1,\ R_1) \vee S_1;$$

если $I = q_x \to q_y T_0 T_1$, то полагаем

$$\mathrm{AxI} = T(y\ ,Q_1,\ R_2) \supset T(x,\ Q_1,\ R_1) \vee S_1;$$

если $I = q_x \to q_y T_{-1} T_0 (q_z T_0 T_0)$, то полагаем

$$\mathrm{AxI} = (T(y, Q_1, R_1) \supset T(x, Q_2, R_1) \vee S_1) \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} \left(T\left(z, A_0^2, R_1\right) \supset T\left(x, A_0^2, R_1\right) \vee S_1\right);$$

если $I = q_x \to q_y T_0 T_{-1} (q_z T_0 T_0)$, то полагаем

$$\mathrm{AxI} = (T(y, Q_1, R_1) \supset T(x, Q_1, R_2) \vee S_1) \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} \left(T\left(z, Q_1, A_0^3\right) \supset T\left(x, Q_1, A_0^3\right) \vee S_1\right).$$

Наконец, программе P сопоставляем формулу

$$\mathrm{AxP} = \mathop{\&}_{I \in P} \mathrm{AxI}.$$

Лемма 6. *Если* $P: (\alpha', m', n') \to (\beta', k', l')$, *то*

$$\mathrm{Int} + \mathrm{AxP} \vdash T\left(\beta', A_{k'}^2, A_{l'}^3\right) \supset T\left(\alpha', A_{m'}^2, A_{n'}^3\right) \vee S_1.$$

Доказательство проводится индукцией по длине вычисления с использованием леммы 5.

Замечание. Как будет видно из лемм 7 и 4, верно и обращение леммы 6. Эти же факты — аналоги леммы 6 и их обращения — будут верны и для других вариантов формулы AxP и им сопутствующих, которые приводятся в последующих параграфах.

Лемма 7. *Для всякой команды* $I \in P$ *выполняется* $\mathfrak{F}_1 \models \mathrm{AxI}$.

Доказательство представляет собой рутинное упражнение. Детальное его изложение с естественными изменениями в обозначениях можно найти в [46, 64], но заинтересованному сомневающемуся читателю полезно было бы восстановить детали самостоятельно. Я здесь ограничусь наброском, достаточно подробным для полного восстановления.

Итак, нам нужно доказать истинность в $\mathfrak{F}_1$ всех конъюнктивных членов AxP. Рассмотрим только $I \in P$ в случае $I = q_x \to q_y T_{-1} T_0 (q_z T_0 T_0)$. Остальные случаи аналогичны.

Пусть при некоторой оценке V AxI опровергается в $\mathfrak{F}_1$. Это означает, что опровергается какой-либо конъюнктивный член AxI. Рассмотрим оба случая отдельно.

Допустим, что $\langle \mathfrak{F}_1, V \rangle \not\models T(y, Q_1, R_1) \supset T(x, Q_2, R_1) \vee S_1$. Это значит, что для некоторого a из $\mathfrak{F}_1$

$$a \models T(y, Q_1, R_1), \tag{1}$$

$$a \not\models T(x, Q_2, R_1) \vee S_1. \tag{2}$$

Из (2) следует $a \not\models S_1$, что ввиду леммы 2 дает нам $a = s_1$ и все остальные условия из леммы 2, разумеется, тоже. Итак, $s_1 \not\models T(x, Q_2, R_1)$. Это условие показывает, что существует такой b, что $s_1 \leqslant b$ и

$$b \models A_{x+1}^1 \mathbin{\&} B_{x+1}^1 \mathbin{\&} Q_3 \mathbin{\&} Q_3' \mathbin{\&} R_2 \mathbin{\&} R_2', \tag{3}$$

$$b \not\models A_x^1 \vee B_x^1 \vee Q_2 \vee Q_2' \vee R_1 \vee R_1'. \tag{4}$$

Первые два конъюнктивных члена в (3) и дизъюнктивные члены в (4), тоже первые два, показывают, что $b = t(x, \eta, \zeta)$ для некоторых $\eta \geqslant 0$, $\zeta \geqslant 0$.

Третий и четвертый конъюнктивные члены в (3) и соответствующие дизъюнктивные члены в (4) показывают, что

$$a^2_{\eta+i} \Vdash\!\!\!\!/\; Q_{i+2}, \quad b^2_{\eta+i} \Vdash\!\!\!\!/\; Q'_{i+2} \quad \text{или} \quad a^2_{\eta+i} \Vdash\!\!\!\!/\; Q'_{i+2}, \quad b^2_{\eta+2} \Vdash\!\!\!\!/\; Q_{i+2}$$

($i \geqslant 0$). Отсюда, в частности, следует (см. определение Q_2, Q'_2 и лемму 2), что $\eta \geqslant 1$.

Аналогично, пятый и шестой в (3) и соответствующие дизъюнктивные в (4) члены показывают, что

$$a^3_{\zeta+i} \Vdash\!\!\!\!/\; R_{i+1}, \quad b^3_{\zeta+i} \Vdash\!\!\!\!/\; R'_{i+1} \quad \text{или} \quad a^3_{\zeta+i} \Vdash\!\!\!\!/\; R'_{i+1}, \quad b^3_{\zeta+i} \Vdash\!\!\!\!/\; R_{i+1}$$

($i \geqslant 0$).

Поскольку $\eta \geqslant 1$, к конфигурации (x, η, ζ) применима первая часть инструкции I, что дает наличие в $\mathfrak{F}_1$ мира $t(y, \eta-1, \zeta)$, для которого ввиду перечисленных выше и в лемме 2 условий выполняется $t(y, \eta-1, \zeta) \Vdash\!\!\!\!/\; T(y, Q_1, R_1)$, что с учетом $a = s_1$ противоречит (1). Истинность первого конъюнктивного члена AxI в шкале $\mathfrak{F}_1$ доказана.

Допустим теперь, что $\langle \mathfrak{F}_1, V \rangle \models\!\!\!\!/\; T(z, A^2_0, R_1) \supset T(x, A^2_0, R_1) \vee S_1$. Это означает, что для некоторого a из $\mathfrak{F}_1$ выполняются

$$a \models T(z, A^2_0, R_1), \tag{5}$$

$$a \models\!\!\!\!/\; T(x, A^2_0, R_1) \vee S_1. \tag{6}$$

Из (6) имеем $a \models\!\!\!\!/\; S_1$. Значит, выполняются все условия леммы 2 и, в частности, $a = s_1$. Итак, $s_1 \models\!\!\!\!/\; T(x, A^2_0, R_1)$. Это условие означает, что существует такой b, что $s_1 \leqslant b$ и

$$b \models A^1_{x+1} \mathbin{\&} B^1_{x+1} \mathbin{\&} A^2_1 \mathbin{\&} B^2_1 \mathbin{\&} R_2 \mathbin{\&} R'_2, \tag{7}$$

$$b \models\!\!\!\!/\; A^1_x \vee B^1_x \vee A^2_0 \vee B^2_0 \vee R_1 \vee R'_1. \tag{8}$$

Первые четыре конъюнктивных члена в (7) и первые четыре конъюнктивных члена в (8) показывают, что $b = t(x, 0, \zeta)$.

Пятый и шестой конъюнктивные члены в (7) и пятый и шестой дизъюнктивные члены (8) показывают, что

$$a^3_{\zeta+i} \Vdash\!\!\!\!/\; R_{i+1}, \quad b^3_{\zeta+i} \Vdash\!\!\!\!/\; R'_{i+1} \quad \text{или} \quad a^3_{\zeta+i} \Vdash\!\!\!\!/\; R'_{i+1}, \quad b^3_{\zeta+i} \Vdash\!\!\!\!/\; R_{i+1}$$

($i \geqslant 0$).

Поскольку в $t(x, 0, \zeta)$, точнее — в конфигурации $(x, 0, \zeta)$, вторая компонента есть 0, применима вторая часть команды I, т. е. в $\mathfrak{F}_1$ есть мир $t(z, 0, \zeta)$, для которого ввиду отмеченных выше и в лемме 2 условий выполняется $t(z, 0, \zeta) \Vdash\!\!\!\!/\; T(z, A^2_0, R_1)$, что с учетом $a = s_1$ противоречит (5).

Доказательство леммы 7 закончено.

Теперь все необходимые технические приготовления для первых результатов о неразрешимости свойств суперинтуиционистских логик сделаны, и мы можем приступить к их доказательству.

Определим формулу $B_1(\beta, k, l)$ так:

$$B_1(\beta, k, l) = \mathrm{AxP} \mathbin{\&} \left(\left(T(\beta, A^2_k, A^3_l) \supset T(\alpha, A^2_m, A^3_n) \vee S_1\right) \supset S_1\right).$$

Лемма 8. *Пусть P: $(\alpha, m, n) \to (\beta, k, l)$. Тогда*

а) $\mathrm{Int} + B_1(\beta, k, l) = \mathrm{Int} + S_1$;

б) $\mathrm{Int} + B_1(\beta, k, l)$ *аксиоматизируема бездизъюнктивной формулой*;

в) $\mathrm{Int} + B_1(\beta, k, l)$ *финитно аппроксимируема*;

г) $\mathrm{Int} + B_1(\beta, k, l)$ *разрешима.*

Доказательство. а) ⇒ б), поскольку S_1 не содержит отрицательных вхождений дизъюнкции, а такие формулы, как хорошо известно (см., например, [18]), дедуктивно эквивалентны бездизъюнктивным.

б) ⇒ в) ввиду известного факта, см. **[18, 73]**.

в) $\Rightarrow$ г) — стандартный факт.

Таким образом, нам достаточно установить а).

Сначала, заметив, что все конъюнктивные члены $B_1(\beta, k, l)$ имеют вид $A \supset B \vee S_1$ или $A \supset S_1$, мы получаем

$$\mathrm{Int} + S_1 \vdash B_1(\beta, k, l).$$

Теперь, используя условие доказываемой леммы, лемму 6 и второй конъюнктивный член $B_1(\beta, k, l)$, по правилу modus ponens получаем

$$\mathrm{Int} + B_1(\beta, k, l) \vdash S_1.$$

Тем самым а) доказано, значит, доказана и лемма 8.

Лемма 9. *Пусть* P: $(\alpha, m, n) \not\to (\beta, k, l)$. *Тогда*

а) $\mathrm{Int} + B_1(\beta, k, l) \subsetneqq \mathrm{Int} + S_1$;

б) $\mathrm{Int} + B_1(\beta, k, l)$ *не аксиоматизируема бездизъюнктивной формулой*;

в) $\mathrm{Int} + B_1(\beta, k, l)$ *не является финитно аппроксимируемой*;

г) $\mathrm{Int} + B_1(\beta, k, l)$ *неразрешима.*

Доказательство. Ввиду того, что г) $\Rightarrow$ в) $\Rightarrow$ б) $\Rightarrow$ а), см. доказательство леммы 8, нам достаточно установить г).

Леммы 6, 7, 3, 4 дают нам, что P: $(\alpha, m, n) \to (\beta', k', l')$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Int} + B_1(\beta, k, l) \vdash T(\beta', A^2_{k'}, A^3_{l'}) \supset T(\alpha, A^2_m, A^3_n) \vee S_1$, а это по выбору P и (α, m, n) обеспечивает неразрешимость логики $\mathrm{Int} + B_1(\beta, k, l)$.

Лемма 9 доказана.

Из лемм 9, 8 получаются следующие теоремы о неразрешимости.

Теорема 1. *Свойство разрешимости суперинтуиционистских логик неразрешимо.*

Теорема 2. *Свойство финитной аппроксимируемости суперинтуиционистских логик неразрешимо.*

Теорема 3. *Свойство аксиоматизируемости суперинтуиционистских исчислений бездизъюнктивными формулами неразрешимо.*

Теорема 4. *Существует бездизъюнктивная формула, которая неразрешима в расширениях* Int.

Формула S_1, помимо подтверждения теоремы 4, обладает еще одним свойством, которое сформулируем в виде леммы.

Лемма 10. *Формула* S_1 *не эквивалентна никакой позитивной, в частности, чисто импликативной или импликативно-дизъюнктивной, формуле.*

Доказательство. Позитивные формулы обладают следующим известным и легко проверяемым свойством сохранения истинности: если позитивная формула истинна в шкале с наибольшим элементом, то она истинна и в шкале, полученной из данной отбрасыванием этого наибольшего элемента. Теперь достаточно заметить, что S_1 опровергается в шкале, изображенной на рис. 1, но если к ней добавить еще один мир, достижимый из всех, то S_1 будет в полученной шкале истинна — не «срабатывают» подформулы $u_1 \,\&\, \neg v_1$ и $v_1 \,\&\, \neg u_1$, для истинности которых нужно отсутствие у a^4 и b^4 общих потомков, см. лемму 1.

В результате из лемм 8—10 следует

Теорема 5. *Множество суперинтуиционистских исчислений, аксиоматизируемых бездизъюнктивными формулами, но не аксиоматизируемых позитивными, в частности, импликативными или импликативно-дизъюнктивными, неразрешимо.*

Замечание. Отсутствие конъюнкции в формулировке последней теоремы связано с тем, что по всякой формуле A легко строится дедуктивно ей эквивалентная безконъюнктивная формула, которая кроме импликации не содержит связок и константы $\perp$, если они не входят в A.

§ 3. Полнота по Холдену и дизъюнктивное свойство

Основной результат этого параграфа — неразрешимость дизъюнктивного свойства — доказан М. В. Захарьящевым и мною в [11]. Попутно в [11] доказана неразрешимость и полноты по Холдену. Как нам удалось выяснить уже после написания [11], неразрешимость полноты по Холдену может быть доказана проще, это использовано в [12]. Материал предыдущего параграфа позволяет провести это доказательство «мгновенно».

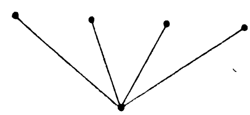

Рис. 3

Нам понадобится следующая формула S_2:

$$S_2 = \neg(u \,\&\, v) \vee \neg(u \,\&\, \neg v) \vee \vee \neg(\neg u \,\&\, v) \vee \neg(\neg u \,\&\, \neg v).$$

Простейшей шкалой, на которой она опровергается, является шкала $\mathfrak{F}^*$, изображенная на рис. 3.

Определяем формулу $B_2(\beta, k, l)$:

$$B_2(\beta, k, l) = B_1(\beta, k, l) \,\&\, (S_1 \vee S_2).$$

Лемма 11. *Пусть* P: $(\alpha, m, n) \not\to (\beta, k, l)$. *Тогда* $\mathrm{Int} + B_2(\beta, k, l)$ *не полна по Холдену.*

Доказательство. Заметим, что $\mathfrak{F}_1 \models S_2$, так как для опровержения S_2 необходимо наличие четырех миров, любые два из которых не имеют общих потомков. Отсюда и из § 2 получаем, что формула $B_2(\beta, k, l)$ истинна в шкале $\mathfrak{F}_1$. В то же время $\mathfrak{F}_1 \not\models S_1$, как это следует из леммы 1 и устройства шкалы $\mathfrak{F}_1$. Значит, $\mathrm{Int} + B_2(\beta, k, l) \nvdash S_1$.

Теперь воспользуемся шкалой $\mathfrak{F}^*$. По лемме 1 $\mathfrak{F}^* \models S_1$, а значит, $\mathfrak{F}^* \models B_2(\beta, k, l)$. Но $\mathfrak{F}^* \not\models S_2$. Значит, $\mathrm{Int} + B_2(\beta, k, l) \nvdash S_2$.

В итоге формулы S_1 и S_2, не имеющие общих переменных, логике $\mathrm{Int} + B_2(\beta, k, l)$ не принадлежат, хотя по определению $\mathrm{Int} + B_2(\beta, k, l) \vdash \vdash S_1 \vee S_2$.

Лемма 11 доказана.

Лемма 12. *Пусть* P: $(\alpha, m, n) \to (\beta, k, l)$. *Тогда* $\mathrm{Int} + B_2(\beta, k, l)$ *полна по Холдену.*

Доказательство. Как в лемме 8, получается $\mathrm{Int} + B_2(\beta, k, l) = \mathrm{Int} + S_1$, поэтому нам достаточно доказать полноту по Холдену логики $\mathrm{Int} + S_1$.

Пусть $\mathrm{Int} + S_1 \nvdash A$ и $\mathrm{Int} + S_1 \nvdash B$, где A и B не имеют общих переменных.

Логика $\mathrm{Int} + S_1$ финитно аппроксимируема, а значит, существуют конечные шкалы $\mathfrak{F}^1$ и $\mathfrak{F}^2$ с наименьшими элементами такие, что

$$\mathfrak{F}^1 \models S_1, \quad \mathfrak{F}^2 \models S_1, \quad \mathfrak{F}^1 \not\models A, \quad \mathfrak{F}^2 \not\models B,$$

где опровержения происходят при оценках V^1 и V^2 соответственно. Истинность S_1 по лемме 1 означает, что в шкалах $\mathfrak{F}^1$ и $\mathfrak{F}^2$ нет подшкал вида, изображенного на рис. 1, с условием отсутствия общих потомков у a^4 и b^4. Из шкал $\mathfrak{F}^1$ и $\mathfrak{F}^2$ образуем $\mathfrak{F}^3$, «склеив» их наименьшие миры (см. рис. 4). Определив оценку V^3 на $\mathfrak{F}^3$ так:

$$V^3(p) = \begin{cases} V^1(p) \cup (W^2 \setminus \{b\}), & p \in \mathrm{Var}\,A \,\&\, V^1(p) \neq \varnothing, \\ V^2(p) \cup (W^1 \setminus \{a\}), & p \in \mathrm{Var}\,B \,\&\, V^2(p) \neq \varnothing, \\ \varnothing, \ (p \in \mathrm{Var}\,A \to V^1(p) = \varnothing) \,\&\, (p \in \mathrm{Var}\,B \to V^2(p) = \varnothing) \end{cases}$$

(здесь $\mathrm{Var}\,C$ — множество переменных, входящих в C), мы получаем $\mathfrak{F}^3 \not\models A \vee B$. В то же время, попытавшись «вырисовать» в $\mathfrak{F}^3$ диаграмму из рис. 1, двигаясь снизу, мы сразу попадаем в $\mathfrak{F}^1$ или в $\mathfrak{F}^2$, ввиду элемента s_1, а значит, такой подшкалы в $\mathfrak{F}^3$ нет, т. е. по лемме 1 $\mathfrak{F}^3 \models S_1$. Окончательно, $\mathrm{Int} + S_1 \nvdash A \vee B$.

Лемма 12 доказана.

Из лемм 11 и 12 следует

Теорема 6 [11]. *Свойство полноты по Холдену в суперинтуиционистских логиках неразрешимо.*

Для доказательства неразрешимости дизъюнктивного свойства нам понадобится небольшое изменение формулы S_1:

$$S_3 = (A^1_{-2} \& B^1_{-2} \supset (u_1 \& \neg v_1 \supset A^1_{-3}) \vee (v_1 \& \neg u_1 \supset B^1_{-3})) \supset S_1.$$

Пусть $B_3(\beta, k, l)$ получена из $B_2(\beta, k, l)$ заменой везде S_1 на S_3.

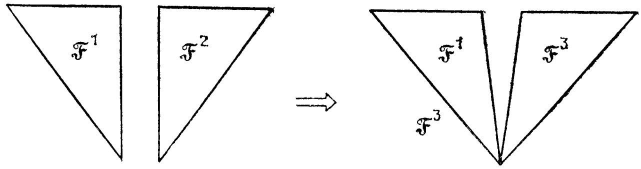

Рис. 4

Лемма 13. *Пусть* P: $(\alpha, m, n) \not\to (\beta, k, l)$. *Тогда логика* $\mathrm{Int} + B_3(\beta, k, l)$ *не обладает дизъюнктивным свойством.*

Доказательство. Заметим, что все рассуждения и утверждения, приведенные выше, за исключением части «только тогда» леммы 1, а значит, и леммы 12, останутся справедливыми и при использовании S_3 вместо S_1. В частности, справедлива лемма 11, т. е. $\mathrm{Int} + B_3(\beta, k, l)$ не полна по Холдену и потому не обладает дизъюнктивным свойством.

Аналогично лемме 8 доказывается

Лемма 14. *Пусть* P: $(\alpha, m, n) \to (\beta, k, l)$. *Тогда* $\mathrm{Int} + B_3(\beta, k, l) = \mathrm{Int} + S_3$.

Лемма 15 (М. В. Захарьящев [11]). *Логика* $\mathrm{Int} + S_3$ *обладает дизъюнктивным свойством.*

Доказательство (краткий набросок). Прежде всего заметим, что S_3, как и S_1, опровергается на шкале из рис. 1, но если в эту шкалу добавить достижимый из s_1 элемент, из которого достижимы, кроме него самого, только a^1_{-3} и b^1_{-3}, то S_3 уже опровергаться не будет, хотя S_1 по-прежнему опровергается. Воспользуемся этим наблюдением.

Пусть $\mathrm{Int} + S_3 \not\vdash A$ и $\mathrm{Int} + S_3 \not\vdash B$. Возьмем конечные шкалы с наименьшими элементами $\mathfrak{F}^1$ и $\mathfrak{F}^2$ такие, что

$$\mathfrak{F}^1 \models S_3, \quad \mathfrak{F}^2 \models S_3, \quad \mathfrak{F}^1 \not\models A, \quad \mathfrak{F}^2 \not\models B.$$

Теперь образуем $\mathfrak{F}^3$ из $\mathfrak{F}^1$ и $\mathfrak{F}^2$ (считаем, что они не пересекаются) следующим образом. Добавляем к их объединению наименьший мир, а для любых двух максимальных миров объединения $\mathfrak{F}^1$ и $\mathfrak{F}^2$ добавляем новый мир, достижимый из нового наименьшего и такой, что из него достижимы эти два максимальных, (рис. 5). Ясно, что $\mathfrak{F}^3 \models S_3$, но $\mathfrak{F}^3$ содержит $\mathfrak{F}^1$ и $\mathfrak{F}^2$ в виде непересекающихся «кусков», миры которых несравнимы и в которых опровергаются A и B соответственно, а поэтому $\mathfrak{F}^3 \not\models A \vee B$ при подходящей оценке. Для реализации этого построения нам нужна финитная аппроксимируемость $\mathrm{Int} + S_3$, которая выполняется в соответствии с признаком из [6].

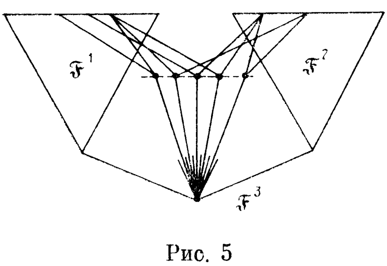

Рис. 5

Лемма 15 доказана.

Замечание. В [11, 63] для обоснования аналога леммы 15 М. В. Захарьящев использовал обобщенные шкалы с конечным покрытием, что позволяет не заботиться о финитной аппроксимируемости и даже полноте по Крипке рассматриваемой логики.

Итак, из лемм 13—15 следует

Теорема 7 [11]. *Дизъюнктивное свойство суперинтуиционистских логик неразрешимо.*

Для формулировки признака финитной аппроксимируемости из [6] нам понадобилась бы серия определений, которые в дальнейшем не используются, тем не менее, отослав читателя за определениями к [6, 9] или [8, 10], сформулирую получающийся попутно с доказательством теоремы 7 результат.

Теорема 8. *Проблема аксиоматизируемости каноническими формулами, удовлетворяющими признаку финитной аппроксимируемости* [6], *неразрешима в суперинтуиционистских логиках.*

В [23, 72] введено понятие принципа разделения переменных — логика L удовлетворяет этому принципу, если из $L \vdash A \& C \supset B \vee D$, где формулы $A \supset B$ и $C \supset D$ не имеют общих переменных, следует, что $L \vdash A \supset B$ или $L \vdash C \supset D$. В модальных логиках этот принцип эквивалентен полноте по Холдену, в то время как в суперинтуиционистских логиках любая нетривиальная булева комбинация свойств — полнота по Холдену, принцип разделения переменных (в [62, 63] называемый полнотой по Максимовой), дизъюнктивное свойство (которое уместно называть полнотой по Гёделю) — выполняется для континуального семейства логик, доказательство см. в [63]. Параллельно доказательству теоремы 7 доказывается (несложное упражнение)

Теорема 9 [63]. *Свойство полноты по Максимовой неразрешимо в суперинтуиционистских логиках.*

§ 4. Полнота по Крипке

Рекурсивную последовательность суперинтуиционистских исчислений, о которых невозможно алгоритмически судить, полны ли они по Крипке, мы «синтезируем» из конструкции, сходной с уже использованной, и неполного суперинтуиционистского исчисления, построенного в [50]. Хотя мы модифицируем формулы [50], обозначения их все же сохраняем, поскольку для результатов [50] изменения не существенны, точнее — новые формулы обладают похожими свойствами, в то же время сходство обозначений позволит полнее учесть аналогию дальнейших лемм с соответствующими леммами [50].

Прежде всего по программе P и конфигурации (α, m, n) определим шкалу $\mathfrak{F}_2$ (см. рис. 6):

множество миров —

$$\{s_4\} \cup \{g_1, g_2, h_1, h_2\} \cup \{a_j^i, b_j^i \mid i \in \{1, 2, 3\}, j \geqslant -3\} \cup$$
$$\cup \{t(\beta', k', l') \mid P\colon (\alpha, m, n) \to (\beta', k', l')\} \cup \{a_i, b_i, c_i, d_i \mid i \geqslant 0\};$$

отношение достижимости $\leqslant$ есть транзитивно-рефлексивное замыкание следующего бинарного отношения R:

$$xRy \rightleftharpoons (\exists i, j, k, k', l', \beta')\,(x = s_4 \vee (x = g_1 \,\&\, (y = g_2 \vee y = b_1)) \vee$$
$$\vee (x = h_1 \,\&\, (y = h_2 \vee y = c_1)) \vee \left(x = b_0 \,\&\, y = a_{-2}^3\right) \vee \left(x = c_0 \,\&\, y = b_{-2}^3\right) \vee$$
$$\vee \left(x = a_{-3}^i \,\&\, y = a_{-2}^{i-1}\right) \vee \left(x = b_{-3}^i \,\&\, y = b_{-2}^{i-1}\right) \vee$$
$$\vee \left(x = a_j^i \,\&\, y = a_k^i \,\&\, j \geqslant k\right) \vee \left(x = b_j^i \,\&\, y = b_k^i \,\&\, j \geqslant k\right) \vee$$
$$\vee \left(x = a_j^i \,\&\, y = b_k^i \,\&\, j \geqslant k + 2\right) \vee \left(x = b_j^i \,\&\, y = a_k^i \,\&\, j \geqslant k + 2\right) \vee$$
$$\vee \left(x = t(\beta', k', l') \,\&\, y \in \{a_{\beta'}^1, b_{\beta'}^1, a_{k'}^2, b_{k'}^2, a_{l'}^3, b_{l'}^3\}\right) \vee$$

$$\bigvee (x = b_i \mathbin{\&} y = b_j \mathbin{\&} i \geqslant j) \bigvee (x = c_i \mathbin{\&} y = c_j \mathbin{\&} i \geqslant j) \bigvee$$
$$\bigvee (x = b_i \mathbin{\&} y = c_j \mathbin{\&} i \geqslant j + 2) \bigvee (x = c_i \mathbin{\&} y = b_j \mathbin{\&} i \geqslant j + 2) \bigvee$$
$$\bigvee (x = a_i \mathbin{\&} (y = b_{i+1} \bigvee y = c_{i+1})) \bigvee (x = d_i \mathbin{\&} y = a_i) \bigvee$$
$$\bigvee (x = d_i \mathbin{\&} y = d_j \mathbin{\&} i \leqslant j).$$

Отмечу, что миры s_4, a_j^i, b_j^i, $t(\beta', k', l')$ образуют шкалу $\mathfrak{F}_1$ без s_1', а миры a_i, b_i, c_i, d_i — шкалу К. Файна, см. рис. 1 [50].

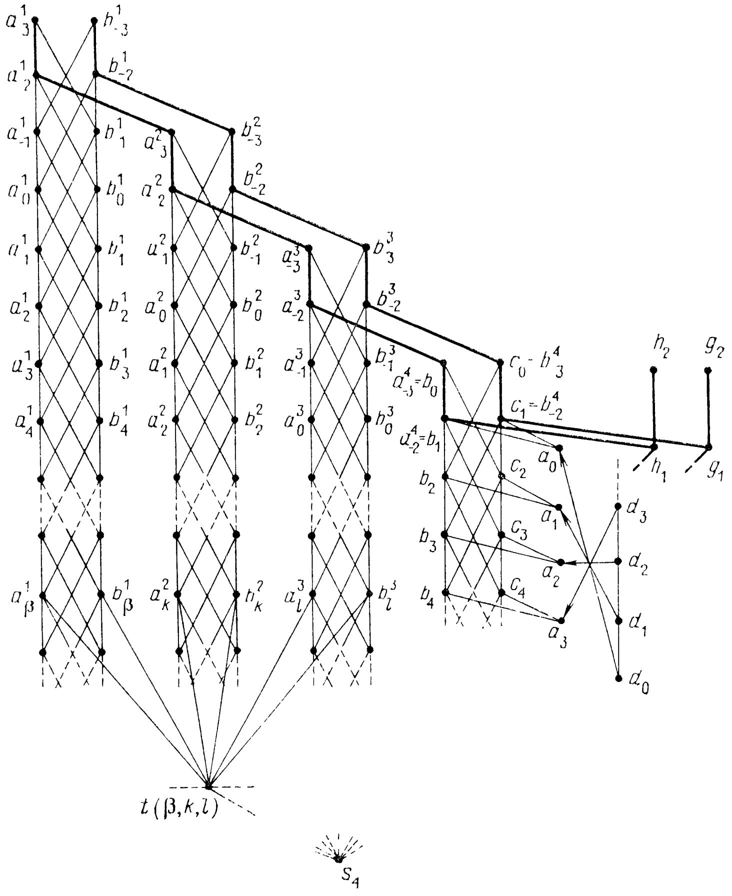

Рис. 6

Замечание. Миры b_0, b_1, c_0, c_1 имеют еще одно обозначение — a_0^4, a_1^4, b_0^4, b_1^4 соответственно. Это сделано для удобства формульного описания миров из шкалы на рис. 7, которые описываются «жестко», и миров из последовательности b_i, c_i, описание которых должно позволять «движение».

Подобно тому как в § 2 формула S_1 строилась так, что для ее опровержения требовалась шкала из рис. 1 и эта же шкала являлась «стартовой» частью $\mathfrak{F}_1$, здесь мы определим формулу S_4, для опровержения которой требуется шкала из рис. 7, и, как нетрудно видеть, эта же шкала входит в $\mathfrak{F}_2$, и это вхождение (оно на рис. 6 выделено жирными линиями) единственно с точностью до соответствия

$$a_j^i \leftrightarrow b_j^i, \quad b_i \leftrightarrow c_i, \quad h_i \leftrightarrow g_i,$$

которое определяет единственный нетривиальный автоморфизм и шкалы

$\mathfrak{F}_2$, и шкалы из рис. 7. При этом S_4 будем определять так, чтобы она была дедуктивно эквивалентна чисто импликативной формуле, допуская использование в S_4, кроме импликации, только положительных вхождений дизъюнкции (для возможности такого определения S_4 и введены «отростки» h_2 и g_2). Определяем S_4 так:

$$S_4 = u_0 \vee G_1 \vee H_1,$$
$$G_1 = u_0 \supset u_1 \vee r_1 \vee A^4_{-2} \vee G_2,$$
$$H_1 = u_0 \supset v_1 \vee t_1 \vee B^4_{-2} \vee H_2,$$
$$G_2 = u_1 \supset r_8 \vee t_8 \vee v_1, \qquad H_2 = v_1 \supset r_8 \vee t_8 \vee u_1,$$
$$A^4_{-1} = r_1 \supset r_2 \vee A^4_{-3}, \qquad B^4_{-2} = t_1 \supset t_2 \vee B^4_{-3},$$
$$A^4_{-3} = r_2 \supset r_3 \vee A^3_{-2}, \qquad B^4_{-3} = t_2 \supset t_3 \vee B^3_{-2},$$
$$A^3_{-2} = r_3 \supset r_4 \vee A^3_{-3}, \qquad B^3_{-2} = t_3 \supset t_4 \vee B^3_{-3},$$
$$A^3_{-3} = r_4 \supset r_5 \vee A^2_{-2}, \qquad B^3_{-3} = t_4 \supset t_5 \vee B^2_{-2},$$
$$A^2_{-2} = r_5 \supset r_6 \vee A^2_{-3}, \qquad B^2_{-2} = t_5 \supset t_6 \vee B^2_{-3},$$
$$A^2_{-3} = r_6 \supset r_7 \vee B^1_{-2}, \qquad B^2_{-3} = t_6 \supset t_7 \vee B^1_{-2},$$
$$A^1_{-2} = r_7 \supset r_8 \vee A^1_{-3}, \qquad B^1_{-2} = t_7 \supset t_8 \vee B^1_{-3},$$
$$A^1_{-3} = r_8 \supset t_8 \vee u_1 \vee v_1, \qquad B^1_{-3} = t_8 \supset r_8 \vee u_1 \vee v_1.$$

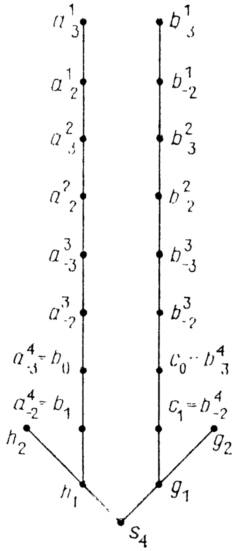

Рис. 7

Аналогична лемме 1

Лемма 16. *Формула S_4 опровергается в шкале тогда и только тогда, когда в этой шкале имеются миры, образующие диаграмму, изображенную на рис.* 7.

Как следствие из леммы 16 легко получается

Лемма 17. *Справедливо*

а) $\mathfrak{F}_2 \not\models S_4$;

б) *пусть V — такая оценка, что $\langle \mathfrak{F}_2, V\rangle \not\models S_4$, тогда $\{x \mid x \not\models S_4\} = \{s_4\}$ и либо*

$$\{x \mid x \not\Vdash A^i_j\} = \{a^i_j\}, \quad \{x \mid x \not\Vdash B^i_j\} = \{b^i_j\} \qquad (1 \leqslant i \leqslant 4,\ -3 \leqslant j \leqslant -2),$$
$$\{x \mid x \not\Vdash G_i\} = \{g_i\}, \quad \{x \mid x \not\Vdash H_i\} = \{h_i\} \qquad (1 \leqslant i \leqslant 2),$$

либо

$$\{x \mid x \not\Vdash A^i_j\} = \{b^i_j\}, \quad \{x \mid x \not\Vdash B^i_j\} = \{a^i_j\} \qquad (1 \leqslant i \leqslant 4,\ -3 \leqslant j \leqslant -2),$$
$$\{x \mid x \not\Vdash G_i\} = \{h_i\}, \quad \{x \mid x \not\Vdash H_i\} = \{g_i\} \qquad (1 \leqslant i \leqslant 2).$$

Альтернативные возможности в п. б) леммы 17 соответствуют отмеченному выше автоморфизму. В дальнейшем мы при выборе опровергающей оценки V в условиях леммы 17 будем считать, что выполняется первый случай.

По уже построенным формулам формулы A^i_j, B^i_j $(1 \leqslant i \leqslant 3,\ j \geqslant -1)$; $T(\beta, A^2_i, A^3_j)$ $(\beta, i, j \geqslant 0)$; Q_i, Q'_i, R_i, R'_i $(i \geqslant -2)$; $T(\beta, Q_i, R_j)$, $T(\beta, Q_i, A^3_0)$, $T(\beta, A^2_0, R_j)$ $(\beta, i, j \geqslant 0)$ определяются точно так же, как в § 2. Формулы AxI и AxP теперь определяются так же, как в § 2, но с использованием S_4 вместо S_1. То, что все перечисленные формулы имеют то же обозначение, что и их аналоги из § 2, не будет вызывать недоразумений, так как непосредственно формулы из § 2 в этом параграфе не используются.

Для введенных формул выполняются и сходным образом доказываются аналоги лемм 2, 3, 5, 6, 7. Приведем формулировки этих аналогов.

Лемма 18. *Пусть оценка V такова, что $\langle \mathfrak{F}_2, V\rangle \Vdash\!\!\!\!/\; S_4$. Тогда, кроме условий леммы 17 (имея ввиду первую из возможностей), выполняются условия:*

$$\{x \mid x \not\Vdash A_j^i\} = \{a_j^i\}, \quad \{x \mid x \not\Vdash B_j^i\} = \{b_j^i\} \qquad (1 \leqslant i \leqslant 3,\ j \geqslant -1);$$

$$\{x \mid x \not\Vdash T(\beta', A^2_{k'}, A^3_{l'})\} = \begin{cases} \{t(\beta', k', l')\},\ (\beta', k', l') \in P(\alpha, m, n), \\ \varnothing,\ (\beta', k', l') \notin P(\alpha, m, n). \end{cases}$$

Лемма 19. *Пусть P: $(\alpha, m, n) \not\to (\beta, k, l)$. Тогда* $\mathfrak{F}_2 \models \big(T(\beta, A_k^2, A_l^3) \supset T(\alpha, A_m^2, A_n^3) \vee S_4\big) \supset S_4$.

Лемма 20. *Дословная формулировка леммы* 5.

Лемма 21. *Если P: $(\alpha', m', n') \to (\beta', k', l')$, то*

$$\mathrm{Int} + \mathrm{AxP} \vdash T(\beta', A^2_{k'}, A^3_{l'}) \supset T(\alpha', A^2_{m'}, A^3_{n'}) \vee S_4.$$

Лемма 22. *Для всякой команды $I \in P$* $\mathfrak{F}_2 \models \mathrm{AxI}$.

Теперь определим формулы, аналогичные формулам из [50]:

$$B_{-1} = p, \quad C_{-1} = q, \quad B_0 = W \,\&\, q \supset p \vee (A^4_{-3} \,\&\, B^4_{-3}),$$

$$C_0 = W \,\&\, p \supset q \vee (A^4_{-3} \,\&\, B^4_{-3}),$$

$$B_{i+1} = W \,\&\, C_i \supset B_i \vee C_{i-1} \vee (A^4_{-3} \,\&\, B^4_{-3}),$$

$$C_{i+1} = W \,\&\, B_i \supset C_i \vee B_{i-1} \vee (A^4_{-3} \,\&\, B^4_{-3}),$$

$$A_i = W \,\&\, B_{i+2} \,\&\, C_{i+2} \supset B_{i+1} \vee C_{i+1} \vee (A^4_{-3} \,\&\, B^4_{-3}) \quad (i \geqslant 0),$$

$$F = W \,\&\, A_0 \supset A_1 \vee A_2 \vee (A^4_{-3} \,\&\, B^4_{-3}), \quad E = W \supset A_0 \vee A_1 \vee (A^4_{-3} \,\&\, B^4_{-3}),$$

$$D = (W \,\&\, F \supset E \vee (A^4_{-3} \,\&\, B^1_{-3})) \vee S_4, \quad K = (W \,\&\, A_1 \supset A_0 \vee B_2 \vee (A^4_{-3} \,\&\, B^4_{-3})) \vee S_4,$$

$$\mathrm{Br}_2 = \left(W \,\&\, \mathop{\&}_{i=0}^{2} \left(W \,\&\, \left(W \,\&\, Z_i \supset \bigvee_{j \neq i} Z_j \vee (A^4_{-3} \,\&\, B^4_{-3})\right) \supset \bigvee_{j \neq i} Z_j \vee (A^4_{-3} \,\&\, B^4_{-3})\right) \supset \bigvee_{i=0}^{2} Z_i \vee (A^4_{-3} \,\&\, B^4_{-3})\right) \vee S_4,$$

где

$$Z_0 = p, \quad Z_1 = q, \quad Z_2 = p \leftrightarrow q, \quad W = A^1_{-1} \,\&\, B^1_{-1} \,\&\, A^2_{-1} \,\&\, B^2_{-1} \,\&\, A^3_{-1} \,\&\, B^3_{-1} \,\&\, G_2 \,\&\, H_2.$$

$A \leftrightarrow B$ есть сокращение для $(A \supset B) \& (B \supset A)$.

Использование W в посылке импликации, а $A^4_{-3} \,\&\, B^4_{-3}$ в заключении при условии опровержения S_4 позволяет искать опровержение испытуемой формулы только в мирах, в которых истинна W и не истинна $A^4_{-3} \,\&\, B^4_{-3}$. остальные миры влияние на ее значение не оказывают. Так например, в шкале $\mathfrak{F}_2$ этим при условии выбора оценки, опровергающей S_4, «высекаются» миры b_i, c_i, a_i, d_i, см. лемму 17.

Определим формулу $B_4(\beta, k, l)$:

$$B_4(\beta, k, l) = \mathrm{AxP} \,\&\, \big(\big(T(\beta, A_k^2, A_l^3) \supset T(\alpha, A_m^2, A_n^3) \vee S_4\big) \supset S_4\big) \,\&\, D \,\&\, K \,\&\, \mathrm{Br}_2.$$

Лемма 23. *Пусть P: $(\alpha, m, n) \to (\beta, k, l)$. Тогда* а) $\mathrm{Int}+B_4(\beta, k, l)=\mathrm{Int}+S_4$;

б) $\mathrm{Int}+B_4(\beta, k, l)$ *аксиоматизируется импликативной формулой*;

в) $\mathrm{Int}+B_4(\beta, k, l)$ *финитно аппроксимируема*;

г) $\mathrm{Int}+B_4(\beta, k, l)$ *полна по Крипке.*

Доказательство. Поскольку а)$\Rightarrow$б)$\Rightarrow$в)$\Rightarrow$г), нам достаточно установить п. а), который доказывается так же, как и а) леммы 8.

Лемма 24. *Пусть* P: $(\alpha, m, n)\not\rightarrow(\beta, k, l)$. *Тогда*

а) $\mathrm{Int}+B_4(\beta, k, l)\subsetneqq\mathrm{Int}+S_4$;

б) $\mathrm{Int}+B_4(\beta, k, l)$ *не аксиоматизируется импликативными формулами*;

в) $\mathrm{Int}+B_4(\beta, k, l)$ *не является финитно аппроксимируемой*;

г) $\mathrm{Int}+B_4(\beta, k, l)$ *не полна по Крипке.*

Доказательство. Ввиду того, что г)$\Rightarrow$в)$\Rightarrow$б)$\Rightarrow$а), достаточно обосновать г). Доказательство этого пункта проводится так же, как доказательство теоремы 2 в [50], и мы будем свободно пользоваться этим с учетом роли формул W и $A^4_{-3}\ \&\ B^4_{-3}$.

В соответствии с [50] обозначим X^m для формулы X результат подстановки $X(B_{m-2}\vee C_{m-1}/p,\ C_{m-2}\vee B_{m-1}/q)$, $X^0=X$.

Аналогична лемме 1 [50]

Лемма 25. $B^m_n\equiv B_{n+m}$, $C^m_n\equiv C_{n+m}$, $A^m_n\equiv A_{n+m}$ $(n\geqslant 0, m\geqslant 1)$.

Эта лемма используется в доказательстве леммы 27.

Аналогична леммам 3 и 5 [50]

Лемма 26. а) $\mathfrak{F}_2\models D\ \&\ K$. б) *Если оценка* V *на* $\mathfrak{F}_2$ *такова, что выполняются условия первого случая леммы* 17 б) *и*

$$V(p)=\{x\mid b_0\leqslant x\},\quad V(q)=\{x\mid c_0\leqslant x\},$$

то $s_4\overset{V}{|\!\neq} E$. в) *Если оценка* V *на* $\mathfrak{F}_2$ *такая же, как в п.* б), *то в модели* $\langle\mathfrak{F}_2, V\rangle$ *истинны все подстановочные примеры формулы* Br_2.

Доказательство. Пункты а) и б) доказываются несложной проверкой. Пункт в) доказывается аналогично лемме 5 [50], но с учетом выбора оценки и леммы 17 при разборе подформул вида S_4, W, $A^4_{-3}\ \&\ B^4_{-3}$.

Наконец, лемме 4 [50] аналогична

Лемма 27. *Если* $\mathfrak{F}$ — *такая шкала, что* $\mathfrak{F}\models D\ \&\ K\ \&\ \mathrm{Br}_2$, *то* $\mathfrak{F}\models E$.

Доказательство этой леммы проводится подобно доказательству леммы 4 [50], но с учетом того, что при попытке опровержения E опровергается и S_4 и все дальнейшие построения множеств проводятся в подмножестве миров $\mathfrak{F}$, в которых истинна W и не истинна $A^4_{-3}\ \&\ B^4_{-3}$.

Теперь по следствию 20, лемме 22, лемме 26 мы имеем, что $\mathrm{Int}+B_4(\beta, k, l)\not\vdash E$, но по лемме 27 E истинна во всех шкалах, в которых истинна $B_4(\beta, k, l)$.

Лемма 24 доказана.

Из лемм 23, 24, кроме теоремы 2, следуют теоремы 10—12.

Теорема 10. *Свойство полноты по Крипке суперинтуиционистских логик неразрешимо.*

Теорема 11. *Свойство аксиоматизируемости суперинтуиционистских исчислений импликативными формулами неразрешимо.*

Пусть S'_4 импликативная формула, дедуктивно эквивалентная S_4. Формулу S'_4 можно получить из S_4, например, заменой каждой подформулы вида $A\vee B$ (напомню, что S_4 содержит только положительные вхождения дизъюнкции) на $(A\supset p_*)\supset((B\supset p_*)\supset p_*)$, где p_* — переменная, не входящая в S_4 и для каждой преобразуемой подформулы своя.

Теорема 12. *Импликативная формула* S'_4, *как и* S_4, *неразрешима в расширениях* Int.

§ 5. «Экономные» неразрешимые исчисление и формула

Важную роль при применении конструкции доказательств неразрешимости для того или иного свойства играл выбор подходящей стартовой формулы. В предыдущих параграфах это были довольно громоздкие S_1, S_3, S_4. Но их «громоздкость» позволяла сразу «запускать» машины Минского. В этом параграфе будет показано, что в качестве стартовой формулы можно использовать S_2 (см. § 3), т. е.

$$\neg(u \,\&\, v) \vee \neg(\neg u \,\&\, v) \vee \neg(u \,\&\, \neg v) \vee \neg(\neg u \,\&\, \neg v).$$

Эта формула требует для своего опровержения совсем немного.

Лемма 28. *Формула S_2 опровергается в шкале тогда и только тогда, когда в этой шкале найдутся элементы s_2, c_1, c_2, c_3, c_4 такие, что $s_2 \leqslant c_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ и никакие два из c_1, c_2, c_3, c_4 не имеют общих потомков.*

Доказательство очевидно (см. рис. 3).

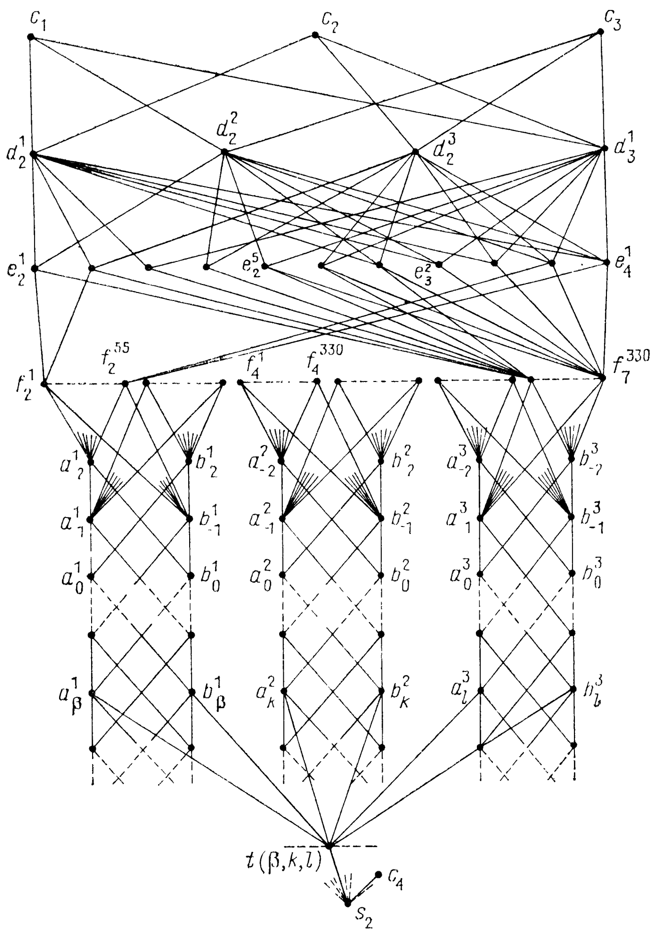

Рис. 8

Но непосредственно S_2 «запускать» машины Минского не может, мы вынуждены сконструировать для нее некий формульный «усилитель». Строим подходящие формулы в соответствии со шкалой $\mathfrak{F}_3$, изображенной на рис. 8 и построенной опять-таки по программе P и конфигурации (α, m, n). Формальное определение этой шкалы мы не приводим, поскольку, как читатель, по-видимому, заметил, такого рода формальные определения легко даются с помощью рисунка или иного содержательного описания, да и без рисунка их сознательно использовать довольно трудно. Будем пояснять устройство шкалы $\mathfrak{F}_3$ и попутно вводить формулы, соответствующие ее мирам (или точкам).

Точки s_2, c_1, c_2, c_3, c_4 образуют в ней единственную совокупность, позволяющую опровергать S_2 в соответствии с леммой 28. При этом если оценка на $\mathfrak{F}_3$ такова, что опровергается S_2, то

$$c_{i_1} \models u \,\&\, v, \quad c_{i_2} \models \neg u \,\&\, v, \quad c_{i_3} \models u \,\&\, \neg v, \quad c_{i_4} \models \neg u \,\&\, \neg v,$$

где

$$\{i_1, i_2, i_3, i_4\} = \{1, 2, 3, 4\},$$

причем других точек с подобными свойствами нет. Зафиксируем такую оценку и введем обозначения

$$C_{i_1} = \neg(u \,\&\, v), \quad C_{i_2} = \neg(\neg u \,\&\, v), \quad C_{i_3} = \neg(u \,\&\, \neg v), \quad C_{i_4} = \neg(\neg u \,\&\, \neg v).$$

Лемма 29. *При выбранной оценке точка c_i в шкале $\mathfrak{F}_3$ является наибольшей среди точек, в которых опровергается C_i.*

Доказательство основывается на лемме 28.

Следующий уровень на рис. 8, т. е. точки d_2^1, d_2^2, d_2^3, d_3^1, описывается так. Из точки d_2^1 (d_2^2, d_2^3) достижимы две из точек c_1, c_2, c_3, но не достижима третья. Верхний индекс здесь введен лишь для идентификации точек, но не для установления порядка. Из точки d_3^1 достижимы все c_1, c_2, c_3, но не достижима ни одна такая точка, из которой достижимы две из них, но не достижима третья. Определяем формулы

$$D_2^1 = C_3 \supset C_1 \vee C_2, \quad D_2^2 = C_2 \supset C_1 \vee C_3, \quad D_2^3 = C_1 \supset C_2 \vee C_3,$$
$$D_3^1 = D_2^1 \,\&\, D_2^2 \,\&\, D_2^3 \supset C_1 \vee C_2 \vee C_3.$$

Лемма 30. *При выбранной оценке точка d_j^i в шкале $\mathfrak{F}_2$ является наибольшей среди точек, в которых опровергается D_j^i.*

Доказательство основывается на лемме 29.

Уровень из точек e_j^i. Из точки e_2^1 ($e_2^2, \ldots, e_2^6$) достижимы две из точек d_y^x, но не достижимы остальные. Из точки e_3^1 (e_3^2, e_3^3, e_3^4) достижимы три точки d_y^x, но не достижима четвертая. Из точки e_4^1 достижимы все точки d_y^x, но не достижимы точки, из которых достижимы две или три точки d_y^x, но остальные не достижимы. Верхний индекс введен для идентификации, но не для упорядочения. Определяем формулы

$$E_2^1 = D_2^3 \,\&\, D_3^1 \supset D_2^1 \vee D_2^2, \ \ldots, E_2^6 = D_2^1 \,\&\, D_2^2 \supset D_2^3 \vee D_3^1,$$
$$E_3^1 = E_2^1 \,\&\, \ldots \,\&\, E_2^6 \,\&\, D_3^1 \supset D_2^1 \vee D_2^2 \vee D_2^3, \ \ldots,$$
$$E_3^4 = E_2^1 \,\&\, \ldots \,\&\, E_2^6 \,\&\, D_2^1 \supset D_2^2 \vee D_2^3 \vee D_3^1,$$
$$E_4^1 = E_2^1 \,\&\, \ldots \,\&\, E_2^6 \,\&\, E_3^1 \,\&\, \ldots \,\&\, E_3^4 \supset D_2^1 \vee D_2^2 \vee D_2^3 \vee D_3^1.$$

Лемма 31. *При выбранной оценке точка e_j^i в шкале $\mathfrak{F}_2$ является наибольшей среди точек, в которых опровергается E_j^i.*

Доказательство основывается на лемме 30.

Уровень из точек f_j^i. Читатель, по-видимому, уже может воспроизвести абзац, аналогичный абзацам, предваряющим леммы 30 и 31, поэтому ограничимся определением формул

$$F_2^1 = E_2^3 \,\&\, \ldots \,\&\, E_2^6 \,\&\, E_3^1 \,\&\, \ldots \,\&\, E_3^4 \,\&\, E_4^1 \supset E_2^1 \vee E_2^2, \ \ldots,$$
$$F_2^{55} = E_2^1 \,\&\, \ldots \,\&\, E_2^6 \,\&\, E_3^1 \,\&\, \ldots \,\&\, E_3^3 \supset E_3^4 \vee E_4^1,$$

$$F_3^1 = F_2^1 \,\&\, \dots \,\&\, F_2^{55} \,\&\, E_2^4 \,\&\, E_2^5 \,\&\, E_2^6 \,\&\, E_3^1 \,\&\, \dots \,\&\, E_3^4 \,\&\, E_4^1 \supset E_2^1 \vee E_2^2 \vee E_2^3, \dots,$$
$$F_7^{330} = F_2^1 \,\&\, \dots \,\&\, F_2^{55} \,\&\, F_3^1 \,\&\, \dots \,\&\, F_3^{165} \,\&\, F_4^1 \,\&\, \dots \,\&\, F_4^{330} \,\&\, F_5^1 \,\&\, \dots \,\&\, F_5^{462} \,\&\, \\ \&\, F_6^1 \,\&\, \dots \,\&\, F_6^{462} \,\&\, E_2^1 \,\&\, \dots \,\&\, E_2^4 \supset E_2^5 \vee E_2^6 \vee E_3^1 \vee \dots \vee E_3^4 \vee E_4^1.$$

Лемма 32. *При выбранной оценке точка f_j^i в шкале $\mathfrak{F}_2$ является наибольшей среди точек, в которых опровергается F_j^i.*

Доказательство основывается на лемме 31.

Итак, мы добрались до уже знакомой по предыдущим параграфам части $\mathfrak{F}_3$ (ср. с рис. 2 и 6), имитирующей машину Минского, до точек a_j^i, b_j^i, $t(\beta, k, l)$. Определим формулы, соответствующие этим точкам:

$$A_{-2}^1 = F_3^1 \,\&\, \dots \,\&\, F_3^{165} \supset F_2^1 \vee \dots \vee F_2^{55}, \quad B_{-2}^1 = F_2^1 \,\&\, \dots \,\&\, F_2^{55} \supset F_3^1 \vee \dots \vee F_3^{165},$$
$$A_{-1}^1 = B_{-2}^1 \supset A_{-2}^1 \vee F_3^1 \vee \dots \vee F_3^{165}, \quad B_{-1}^1 = A_{-2}^1 \supset B_{-2}^1 \vee F_2^1 \vee \dots \vee F_2^{55},$$
$$A_{-2}^2 = F_5^1 \,\&\, \dots \,\&\, F_5^{462} \supset F_4^1 \vee \dots \vee F_4^{330}, \quad B_{-2}^2 = F_4^1 \,\&\, \dots \,\&\, F_4^{330} \supset F_5^1 \vee \dots \vee F_5^{462},$$
$$A_{-1}^2 = B_{-2}^2 \supset A_{-2}^2 \vee F_5^1 \vee \dots \vee F_5^{462}, \quad B_{-1}^2 = A_{-2}^2 \supset B_{-2}^2 \vee F_4^1 \vee \dots \vee F_4^{330},$$
$$A_{-2}^3 = F_7^1 \,\&\, \dots \,\&\, F_7^{330} \supset F_6^1 \vee \dots \vee F_6^{462}, \quad B_{-2}^3 = F_6^1 \,\&\, \dots \,\&\, F_6^{462} \supset F_7^1 \vee \dots \vee F_7^{330},$$
$$A_{-1}^3 = B_{-2}^3 \supset A_{-2}^3 \vee F_7^1 \vee \dots \vee F_7^{330}, \quad B_{-1}^3 = A_{-2}^3 \supset B_{-2}^3 \vee F_6^1 \vee \dots \vee F_6^{462},$$

теперь индукция ($j \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant 3$)

$$A_j^1 = B_{j-1}^1 \supset A_{j-1}^1 \vee B_{j-2}^1, \quad B_j^1 = A_{j-1}^1 \supset B_{j-1}^1 \vee A_{j-2}^1,$$
$$A_j^2 = A_{-2}^3 \,\&\, B_{-2}^3 \,\&\, B_{j-1}^2 \supset A_{j-1}^2 \vee B_{j-2}^2 \vee A_{-2}^2 \vee B_{-2}^2,$$
$$B_j^2 = A_{-2}^3 \,\&\, B_{-2}^3 \,\&\, A_{j-1}^2 \supset B_{j-1}^2 \vee A_{j-2}^2 \vee A_{-2}^2 \vee B_{-2}^2,$$
$$A_j^3 = A_{-2}^2 \,\&\, B_{-2}^2 \,\&\, B_{j-1}^3 \supset A_{j-1}^3 \vee B_{j-2}^3 \vee A_{-2}^3 \vee B_{-2}^3,$$
$$B_j^3 = A_{-2}^2 \,\&\, B_{-2}^2 \,\&\, A_{j-1}^3 \supset B_{j-1}^3 \vee A_{j-2}^3 \vee A_{-2}^3 \vee B_{-2}^3,$$

формулы, имитирующие конфигурации:

$$T(\beta, A_i^2, A_j^3) = A_{\beta+1}^1 \,\&\, B_{\beta+1}^1 \,\&\, A_{i+1}^2 \,\&\, B_{i+1}^2 \,\&\, A_{j+1}^3 \,\&\, B_{j+1}^3 \supset \\ \supset A_\beta^1 \vee B_\beta^1 \vee A_i^2 \vee B_i^2 \vee A_j^3 \vee B_j^3 \qquad (\beta, i, j \geqslant 0).$$

Лемма 33. *При выбранной оценке в шкале* $\mathfrak{F}_3$

а) $\{x \mid x \nVdash A_j^i\} = \{a_j^i\}$, $\{x \mid x \nVdash B_j^i\} = \{b_j^i\}$;

б)

$$\{x \mid x \nVdash T(\beta, A_i^2, A_j^3)\} = \begin{cases} \{t(\beta, i, j)\}, & (\beta, i, j) \in P(\alpha, m, n), \\ \varnothing, & (\beta, i, j) \notin P(\alpha, m, n). \end{cases}$$

Доказательство а) проводится индукцией по j, базис обосновывается с помощью леммы 32; б) следует из а).

Замечание. Автоморфизма, меняющего a и b местами, в шкале $\mathfrak{F}_3$ нет, но есть автоморфизмы, переставляющие местами c_1, c_2, c_3, правда, эти перестановки не влияют ни на одно приводимое нами утверждение; именно для этого при конструировании шкалы по уровням d_y^x, e_u^z, f_w^v для *каждого* подмножества с данным количеством миров предыдущего уровня выбирался новый мир строимого уровня, и порядок между этими подмножествами оказывался несущественным. Можно было бы, конечно, несколько уменьшить громоздкость шкалы (скажем, миров f_w^v 2036 штук) за счет учета не *всех* подмножеств, но тогда было бы громоздким и труднообозримым построение нужных нам формул.

Утверждения лемм 30—33 основывались на одной заранее фиксированной оценке. В то же время для опровержения формулы S_2 мы имеем 4! возможных варианта выбора оценки переменных u, v в $\mathfrak{F}_3$. Из этих оценок для утверждений лемм 30—33 годятся 3!, как утверждает

Лемма 34. а) *Пусть для некоторой оценки выполняются (выполняется) утверждения (одно из утверждений) лемм* 30—33. *Тогда*

$$c_1 \mid\neq C_{j_1}, \quad c_2 \mid\neq C_{j_2}, \quad c_3 \mid\neq C_{j_3}, \quad c_4 \mid\neq C_4,$$

где $\{j_1, j_2, j_3\} = \{1, 2, 3\}$, *причем* c_1, c_2, c_3, c_4 — *наибольшие миры с этими свойствами.*

б) *Пусть оценка такова, что*

$$c_1 \mid\neq C_{j_1}, \quad c_2 \mid\neq C_{j_2}, \quad c_3 \mid\neq C_{j_3}, \quad c_4 \mid\neq C_4,$$

где $\{j_1, j_2, j_3\} = \{1, 2, 3\}$, *причем* c_1, c_2, c_3, c_4 — *наибольшие миры с этими*

Доказательство п. а) состоит в попытке опровержения формул из лемм 30—33 в шкале $\mathfrak{F}_3$. Пункт б) следует из отмеченного (см. абзац после леммы 33) автоморфизма, переставляющего c_1, c_2, c_3.

Таким образом, при построении формул, описывающих «устройство» $\mathfrak{F}_3$, нам на самом деле нужно учитывать четыре варианта определения C_4. Будем обозначать $(X)^{\&}$ конъюнкцию четырех формул вида X, построенных с помощью C_1, C_2, C_3, C_4, каждая из этих формул определяется выбором C_4, а C_1, C_2, C_3 при каждом таком выборе определяются как-нибудь, лишь бы

$$\{C_1, C_2, C_3, C_4\} = \{\neg(u \,\&\, v), \neg(\neg u \,\&\, v), \neg(u \,\&\, \neg v), \neg(\neg u \,\&\, \neg v)\}.$$

Леммы 29—34, точнее — их доказательства, дают нам следующие два утверждения.

Лемма 35. *Пусть* P: $(\alpha, m, n) \not\to (\beta, k, l)$. *Тогда*

$$\mathfrak{F}_3 \models ((T(\beta, A_k^2, A_l^3))^{\&} \supset (T(\alpha, A_m^2, A_n^3))^{\&} \vee S_2) \supset S_2.$$

Лемма 36. P: $(\alpha, m, n) \to (\beta, k, l)$ *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{F}_3 \models (T(\beta, A_k^2, A_l^3))^{\&} \supset (T(\alpha, A_m^2, A_n^3))^{\&} \vee S_2$.

Теперь введем формулы, позволяющие имитировать произвольные конфигурации машины Минского:

$$\begin{aligned}
Q_{-1} &= R_{-1} = p, \quad Q'_{-1} = R'_{-1} = q,\\
Q_0 &= A^3_{-2} \,\&\, B^3_{-2} \,\&\, q \supset p \vee A^2_{-2} \vee B^2_{-2},\\
Q'_0 &= A^3_{-2} \,\&\, B^3_{-2} \,\&\, p \supset q \vee A^2_{-2} \vee B^2_{-2},\\
Q_{k+1} &= A^3_{-2} \,\&\, B^3_{-2} \,\&\, Q'_k \supset Q_k \vee Q'_{k-1} \vee A^2_{-2} \vee B^2_{-2},\\
Q'_{k+1} &= A^3_{-2} \,\&\, B^3_{-2} \,\&\, Q_k \supset Q'_k \vee Q_{k-1} \vee A^2_{-2} \vee B^2_{-2},\\
R_0 &= A^2_{-2} \,\&\, B^2_{-2} \,\&\, q \supset p \vee A^3_{-2} \vee B^3_{-2},\\
R'_0 &= A^2_{-2} \,\&\, B^2_{-2} \,\&\, p \supset q \vee A^3_{-2} \vee B^3_{-2},\\
R_{k+1} &= A^2_{-2} \,\&\, B^2_{-2} \,\&\, R'_k \supset R_k \vee R'_{k-1} \vee A^3_{-2} \vee B^3_{-2},\\
R'_{k+1} &= A^2_{-2} \,\&\, B^2_{-2} \,\&\, R_k \supset R'_k \vee R_{k-1} \vee A^3_{-2} \vee B^3_{-2},
\end{aligned}$$

$$T(k, Q_i, R_j) = A^1_{k+1} \,\&\, B^1_{k+1} \,\&\, Q_{i+1} \,\&\, Q'_{i+1} \,\&\, R_{j+1} \,\&\, R'_{j+1} \supset$$
$$\supset A^1_k \vee B^1_k \vee Q_i \vee Q'_i \vee R_j \vee R'_j,$$

$$T(k, A_0^2, R_1) = A_{k+1}^1 \mathbin{\&} B_{k+1}^1 \mathbin{\&} A_1^2 \mathbin{\&} B_1^2 \mathbin{\&} R_2 \mathbin{\&} R_2' \supset$$
$$\supset A_k^1 \vee B_k^1 \vee A_0^2 \vee B_0^2 \vee R_i \vee R_1',$$
$$T(k, Q_1, A_0^3) = A_{k+1}^1 \mathbin{\&} B_{k+1}^1 \mathbin{\&} Q_2 \mathbin{\&} Q_2' \mathbin{\&} A_1^3 \mathbin{\&} B_1^3 \supset$$
$$\supset A_k' \vee B_k^1 \vee Q_i \vee Q_1' \vee A_0^3 \vee B_0^3$$
$$(i,\ j,\ k \geqslant 0).$$

Замечание. В только что определенных формулах мы использовали всего две новые (по сравнению с u, v) переменные, хотя в предыдущих параграфах в аналогичных случаях использовалось восемь переменных. Такая «экономия» оказывается возможной только за счет применения более громоздких подстановок, позволяющих из формул Q_i, Q_i', R_j, R_j' получать A_k^1, B_k^2, A_l^3, B_l^3, поскольку в подставляемой формуле приходится описывать, во что должна «превратиться» переменная, если она находится «внутри» Q_i, Q_i' или если она «внутри» R_j, R_j'. Такого рода подстановки уместно называть контекстными.

Обозначим $D_{i,j}$ и $D_{i,j}'$ формулы

$$(A_{-2}^3 \mathbin{\&} B_{-2}^3 \supset (A_{i-2}^2 \vee B_{i-1}^2) \vee A_{-2}^2 \vee B_{-2}^2) \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} (A_{-2}^2 \mathbin{\&} B_{-2}^2 \supset (A_{j-2}^3 \vee B_{j-1}^3) \vee A_{-2}^3 \vee B_{-2}^3)$$

и

$$(A_{-2}^3 \mathbin{\&} B_{-2}^3 \supset (B_{i-2}^2 \vee A_{i-1}^2) \vee A_{-2}^2 \vee B_{-2}^2) \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} (A_{-2}^2 \mathbin{\&} B_{-2}^2 \supset (B_{j-2}^3 \vee A_{j-1}^3) \vee A_{-2}^3 \vee B_{-2}^3)$$

соответственно.

Лемма 37. *При $i, j \geqslant 1$, $k, l \in \{0, 1, 2\}$, $\beta \geqslant 0$*

а) $Q_k(D_{i,j}/p, D_{i,j}'/q) \equiv A_{k+i-1}^2$,

б) $Q_k'(D_{i,j}/p, D_{i,j}'/q) \equiv B_{k+i-1}^2$,

в) $R_k(D_{i,j}/p, D_{i,j}'/q) \equiv A_{k+j-1}^3$,

г) $R_k'(D_{i,j}/p, D_{i,j}'/q) \equiv B_{k+j-1}^3$,

д) $T(\beta, Q_k, R_l)(D_{i,j}/p, D_{i,j}'/q) \equiv T(\beta, A_{k+i-1}^2, A_{l+j-1}^3)$,

е) $T(\beta, A_0^2, R_1)(D_{i,j}/p, D_{i,j}'/q) \equiv T(\beta, A_0^2, A_j^3)$,

ж) $T(\beta, Q_1, A_0^3)(D_{i,j}/p, D_{i,j}'/q) \equiv T(\beta, A_i^2, A_0^3)$.

Доказательство. Пункты а) — г) доказываются параллельно, при $k = 0, 1, 2$ (эти возможности рассматриваются последовательно, каждый раз индукцией по i); п.п. д) — ж) следуют из а) — г).

Теперь определяем формулу AxI по команде I:
если $I = q_x \to q_y T_1 T_0$, то

$$\mathrm{AxI} = (T(y, Q_2, R_1))^{\&} \supset (T(x, Q_1, R_1))^{\&} \vee S_2;$$

если $I = q_x \to q_y T_0 T_1$, то

$$\mathrm{AxI} = (T(y, Q_1, R_2))^{\&} \supset (T(x, Q_1, R_1))^{\&} \vee S_2;$$

если $I = q_x \to q_y T_{-1} T_0 (q_z T_0 T_0)$, то

$$\mathrm{AxI} = ((T(y, Q_1, R_1))^{\&} \supset (T(x, Q_2, R_1))^{\&} \vee S_2) \mathbin{\&} ((T(z, A_0^2, R_1))^{\&} \supset$$
$$\supset (T(x, A_0^2, R_1))^{\&} \vee S_2);$$

если $I = q_x \to q_y T_0 T_{-1} (q_z T_0 T_0)$, то

$$\mathrm{AxI} = ((T(y, Q_1, R_1))^{\&} \supset (T(x, Q_1, R_2))^{\&} \vee S_2) \mathbin{\&} ((T(z, Q_1, A_0^3))^{\&} \supset \supset (T(x, Q_1, A_0^3))^{\&} \vee S_2).$$

И, наконец, обозначаем $\mathrm{AxP} = \underset{I \in P}{\&} \mathrm{AxI}$.

С помощью леммы 37 доказывается

Лемма 38. *Если* P: $(\alpha', m', n') \to (\beta', k', l')$, *то*

$$\mathrm{Int} + \mathrm{AxP} \vdash (T(\beta', A_{k'}^2, A_{l'}^3))^{\&} \supset (T(\alpha', A_{m'}^2, A_{n'}^3))^{\&} \vee S_2.$$

Аналогично лемме 7 доказывается

Лемма 39. *Для всякой команды* $I \in P$ $\mathfrak{F}_3 \models \mathrm{AxI}$.

Определяем формулу $B_5(\beta, k, l)$:

$$B_5(\beta, k, l) = \mathrm{AxP} \mathbin{\&} (((T(\beta, A_k^2, A_l^3))^{\&} \supset (T(\alpha, A_m^2, A_n^3))^{\&} \vee S_2) \supset S_2).$$

Лемма 40. *Пусть* P: $(\alpha, m, n) \not\to (\beta, k, l)$. *Тогда*

а) $\mathrm{Int} + B_5(\beta, k, l) \not\subseteq \mathrm{Int} + S_2$;

б) $\mathrm{Int} + B_5(\beta, k, l)$ *не аксиоматизируема безимпликативными формулами*;

в) $\mathrm{Int} + B_5(\beta, k, l)$ *неразрешима.*

Доказательство. Ввиду того, что очевидным образом в) $\Rightarrow$ б) $\Rightarrow$ а), достаточно показать, что выполняется в).

Утверждение в) следует из лемм 35, 36, 38, 39 по выбору P, (α, m, n).

Лемма 41. *Пусть* P: $(\alpha, m, n) \to (\beta, k, l)$. *Тогда* $\mathrm{Int} + B_5(\beta, k, l) = \mathrm{Int} + S_2$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 8 а).

Теперь мы можем сформулировать результаты, следующие из лемм 40, 41.

Теорема 13. *Свойство аксиоматизируемости суперинтуиционистских логик безимпликативными формулами неразрешимо.*

Результат [33] о финитной аппроксимируемости суперинтуиционистских исчислений, аксиоматизируемых формулами, все переменные которых находятся в области действия отрицания, показывает, что в п. б) леммы 40 можно говорить и о такого рода формулах.

Теорема 14. *Свойство аксиоматизируемости суперинтуиционистских исчислений формулами, все вхождения переменных в которые находятся в области действия отрицания, неразрешимо.*

Теорема 15. *Существует суперинтуиционистское исчисление, аксиоматизируемое формулами с не более чем четырьмя переменными, для которого неразрешима проблема выводимости формул с двумя переменными.*

Теорема 16. *Безимпликативная формула* S_2, *построенная из двух лишь переменных, неразрешима в расширениях* Int.

Усилить утверждение теоремы 17 и последнюю фразу в утверждении теоремы 16 по числу переменных невозможно, поскольку из [56] следует, что все формулы от одной переменной разрешимы в расширениях Int.

В [60] описаны все с точностью до дедуктивной эквивалентности интуиционистские безимпликативные формулы

$$\alpha_{-1} = p,$$
$$\alpha_0 = p_1 \vee \neg p_1,$$
$$\alpha_1 = \neg p_1 \vee \neg\neg p_1,$$

$$\alpha_2 = \neg(p_1 \& p_2) \vee \neg(\neg p_1 \& p_2) \vee \neg(p_1 \& \neg p_2),$$

$$\ldots$$

$$\alpha_n = \neg(p_1 \& \ldots \& p_n) \vee \neg(\neg p_1 \& p_2 \& \ldots \& p_n) \vee \ldots \vee \neg(p_1 \& \ldots \& p_{n-1} \& \neg p_n),$$

$$\ldots$$

α_{-1} добавлено здесь для полноты картины). Ввиду [56] α_{-1}, α_0, α_1 разрешимы; теорема 17 и подходящие модификации ее доказательства показывают, что α_n при $n \geqslant 3$ неразрешимы. Мне неизвестно, является ли α_2 разрешимой.

К. Сасаки сообщил мне, что S_2 обладает свойством простой подстановки, введенным им в [79]: если $\mathrm{Int} + S_2 \vdash A$, то $\mathrm{Int} \vdash \Pi S_2 \supset A$, где ΠS_2 — конъюнкция всевозможных подстановочных примеров S_2, получающихся подстановкой переменных A вместо переменных S_2. Наличие свойства простой подстановки у какой-нибудь аксиоматики суперинтуиционистского исчисления — в этом случае о логике говорится, что она обладает свойством простой подстановки — позволяет сводить вопрос о выводимости в нем к выводимости в Int, в частности — логика оказывается разрешимой. Таким образом, из лемм 40, 41 и результата К. Сасаки следует, что свойство простой подстановки суперинтуиционистских исчислений неразрешимо.

В случае модальных логик формулы от одной переменной, обладающие свойством простой подстановки в нормальных расширениях логики K4 (разумеется, в случае нормальных модальных логик определение свойств простой подстановки для формулы Φ в расширениях L таково: если $L \oplus \Phi \vdash A$, то $L \vdash \Box^+ \Pi\Phi \supset A$),— это L-консервативные по [26] формулы. В [42, 43] имеются результаты, показывающие, что проблемы аксиоматизируемости GL-консервативными формулами — формулами со свойством простой подстановки в нормальных расширениях GL, а также проблемы аксиоматизируемости S-консервативными формулами — формулами со свойством простой подстановки в расширениях S — неразрешимы.

§ 6. Допустимость дизъюнктивного свойства

Здесь используется конструкция, очень близкая к конструкции предыдущего параграфа, поэтому в некоторых случаях будет достаточно лишь указать изменения, которые нужно внести в определения § 5. Прежде всего, в качестве стартовой формулы возьмем

$$S_5 = \neg(u \& v \& w) \vee \neg(\neg u \& v \& w) \vee \neg(u \& \neg v \& w) \vee \neg(\neg u \& \neg v \& w) \vee \neg\neg w$$

Лемма 42. *Формула S_5 опровергается в шкале тогда и только тогда, когда в этой шкале найдутся такие миры s_5, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, что $s_5 \leqslant c_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 5)$ и никакие два из c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 не имеют общих потомков.*

Доказательство очевидно (ср. с леммой 28).

Введем обозначения

$$C_1 = \neg(u \& v \& w), \quad C_2 = \neg(\neg u \& v \& w), \quad C_3 = \neg(u \& \neg v \& w),$$

$$C_4 = \neg(\neg u \& \neg v \& w), \quad C_5 = \neg\neg w,$$

$$D_1 = C_1 \supset C_2 \vee C_3 \vee C_4, \quad D_2 = C_2 \supset C_1 \vee C_3 \vee C_4,$$

$$D_3 = C_3 \supset C_1 \vee C_2 \vee C_4, \quad D_4 = C_4 \supset C_1 \vee C_2 \vee C_3.$$

По формулам D_i формулы $E^i_j, F^i_j, A^i_j, B^i_j, Q_i, Q'_i, R_i, R'_i$ с подходящими значениями индексов строятся точно так же, как в § 5, а формулы вида $T(k, A^2_i, A^3_j)$, $T(k, Q_i, R_j)$, $T(k, A^2_0, R_1)$, $T(k, Q_1, A^3_0)$ отличаются от определенных в § 5 тем, что в посылку формулы добавляется конъюнктивный член

$$G = ((C_1' \& C_2' \supset C_3' \vee C_4') \& (C_1' \& C_3' \supset C_2' \vee C_4') \& (C_1' \& C_4' \supset C_2' \vee C_3') \& \\ \& (C_2' \& C_3' \supset C_1' \vee C_4') \& (C_2' \& C_4' \supset C_1' \vee C_3') \& (C_3' \& C_4' \supset C_1' \vee C_2') \supset \\ \supset C_1' \vee C_2' \vee C_3' \vee C_4') \supset C_1' \vee C_2' \vee C_3' \vee C_4',$$

где

$$C_1' = \neg(u \& v), \quad C_2' = \neg(\neg u \& v), \quad C_3' = \neg(u \& \neg v), \quad C_4' = \neg(\neg u \& \neg v).$$

Наконец, в определениях формул AxI подформула S_2 заменяется на S_5, верхний индекс & стирается, формула AxP есть, как обычно, $\underset{I \in P}{\&} \mathrm{Ax}\, I$

Определяем формулу $B_6(\beta, k, l)$:

$$B_6(\beta, k, l) = \mathrm{Ax\,P} \& ((T(\beta, A_k^2, A_l^3) \supset T(\alpha, A_m^2, A_n^3) \vee S_5) \supset S_5).$$

Лемма 43. *Пусть* P: $(\alpha, m, n) \to (\beta, k, l)$. *Тогда* $\mathrm{Int} + B_6(\beta, k, l) = \mathrm{Int} + S_5$, *и поэтому логика* $\mathrm{Int} + B_6(\beta, k, l)$ *не имеет расширений с дизъюнктивным свойством.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 8 а).

Лемма 44. *Пусть* P: $(\alpha, m, n) \not\to (\beta, k, l)$. *Тогда логика* $\mathrm{Int} + B_6(\beta, k, l)$ *имеет расширение с дизъюнктивным свойством.*

Доказательство. Возьмем следующую последовательность шкал $\mathfrak{F}_n^*$ (рис. 9), где $n = 10$, n — число максимальных миров $\mathfrak{F}_n^*$.

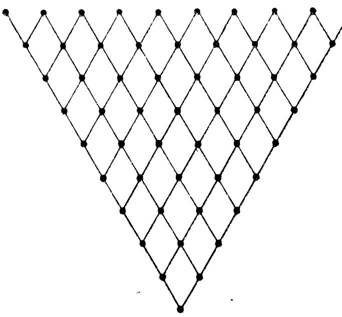

Рис. 9

Изменим шкалы $\mathfrak{F}_n^*$ так. Пусть s_5, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 — какие-нибудь миры $\mathfrak{F}_n^*$ такие, что $s_5 \leqslant c_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 5)$, а c_i $(1 \leqslant i \leqslant 5)$ — различные максимальные миры $\mathfrak{F}_n^*$. Добавляем в шкалу миры $d_i, e_j^i, f_j^i, a_j^i, b_j^i, t(k, i, j)$ (с подходящими значениями индексов) так, что они вместе с s_5, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 образуют шкалу, изображенную на рис. 10. Это делается для каждого возможного набора $\langle s_5, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\rangle$. Получившуюся из $\mathfrak{F}_n^*$ шкалу обозначим $\mathfrak{F}_n^{**}$.

Ясно, что логика класса шкал $\mathfrak{F}_n^{**}$ $(n \in \omega)$ обладает дизъюнктивным свойством, поскольку любые две шкалы $\mathfrak{F}_n^{**}, \mathfrak{F}_n^{**}$ вкладываются, не имея общих потомков, в $\mathfrak{F}_{2\max(m,n)}^{**}$. Таким образом, для обоснования леммы 44 нам достаточно показать, что выполняется

Лемма 45. *Если* P: $(\alpha, m, n) \not\to (\beta, k, l)$, *то при любом* n *справедливо* $\mathfrak{F}_n^{**} \models B_5(\beta, k, l)$.

Замечание к доказательству. Рассуждения проводятся аналогично соответствующим рассуждениям доказательств лемм 35, 39. Необходимо учесть только, что если при некоторой оценке на $\mathfrak{F}_n^{**}$ оказывается, что $x \not\Vdash T(\gamma, X, Y)$, то x не принадлежит $\mathfrak{F}_n^*$, т. е. это добавленный при перестройке мир, поскольку при этом должно быть $x \models G$, а истинность G по существу означает, что если из некоторого y, достижимого из x, достижимы миры, скажем c_1', c_2', c_3', c_4' такие, что $c_i' \not\Vdash C_i'$, то не может быть мира z, достижимого из y, такого, что $z \not\models C_{i_1}' \vee C_{i_2}'$, $z \models C_{i_3}' \& C_{i_4}'$, где $\{i_1, i_2, i_3, i_4\} = \{1, 2, 3, 4\}$, если же x был бы из $\mathfrak{F}_n^*$, то можно было бы выбрать среди максимальных миров два соседних, т. е. имеющих ровно одного общего предшественника, мира, скажем, h, g_1 и g_2, таких, что $g_1 \not\Vdash C_{i_1}'$, $g_2 \not\Vdash C_{i_2}'$, $i_1 \neq i_2$, и мы имели бы $h \not\Vdash C_{i_3}' \& \& C_{i_4}' \supset C_{i_1}' \vee C_{i_2}'$ при $\{i_1, i_2, i_3, i_4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Из лемм 43, 44 следует

Теорема 17. *Свойство «иметь расширение с дизъюнктивным свойством» в суперинтуиционистских логиках неразрешимо.*

Из леммы 44 ввиду [7] следует, что если P: $(\alpha, m, n) \to (\beta, k, l)$, то $\mathrm{Int} + B_5(\beta, k, l)$ имеет такой же бездизъюнктивный фрагмент, что и Int, а значит, и такой же безимпликативный фрагмент, что и Int, поскольку всякая безимпликативная формула в силу теоремы Гливенко

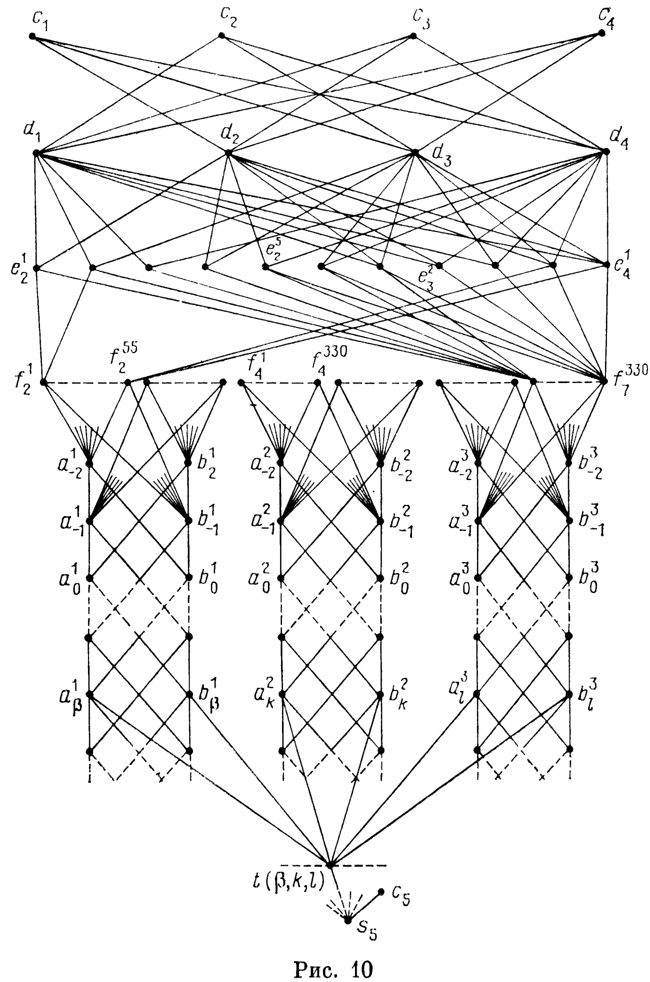

Рис. 10

эквивалентна в Int безимпликативной формуле, все вхождения дизъюнкции в которую положительны, а всякая такая формула дедуктивно эквивалентна бездизъюнктивной формуле. В случае же, когда P: $(\alpha, m, n) \to$ $\to (\beta, k, l)$, лемма 43 показывает, что $\mathrm{Int} + B_5(\beta, k, l)$ содержит безимпликативные формулы, например S_5, не принадлежащие Int. В результате получаются следующие две теоремы.

Теорема 18. *Свойство «иметь такой же бездизъюнктивный фрагмент, что и* Int*» в суперинтуиционистских логиках неразрешимо.*

Теорема 19. *Свойство «иметь такой же безимпликативный фрагмент, что и* Int*» в суперинтуиционистских логиках неразрешимо.*

В связи с этими утверждениями естественно рассмотреть и другие нетривиальные фрагменты Int — безконъюнктивный, импликативный, позитивный. Всякая интуиционистская формула, как известно, дедуктивно эквивалентна в Int безконъюнктивной, а значит, соответствующая проблема разрешима, поскольку это проблема совпадения с Int, т. е. проблема выводимости в Int дополнительных аксиом проверяемого исчисления. Ввиду результатов [54] суперинтуиционистское исчисление имеет такой же позитивный фрагмент, что и Int, тогда и только тогда, когда $\mathrm{Int} + \neg p \vee \neg\neg p \vdash A$, а значит, свойство «иметь такой же позитивный фрагмент, что и Int» разрешимо. Мне ничего не известно о разрешимости свойства «иметь такой же импликативный фрагмент, что и в Int». Еще один «почти тривиальный» фрагмент — формулы, построенные с помощью только конъюнкции и отрицания — одинаков, как хорошо известно, у всех непротиворечивых суперинтуиционистских логик, поэтому свойство «иметь такой же конъюнктивно-негативный фрагмент, как в Int» эквивалентно непротиворечивости и, значит, разрешимо.

§ 7. О применении основной идеи к модальным логикам

Представленную в предыдущих параграфах в различных модификациях идею доказательства неразрешимости свойств можно применять к модальным логикам по-разному. Первый способ, или, если угодно, уровень применения,— использование результатов (а не их доказательств!) для перенесения их на модальные логики с помощью теорем сохранения свойств при переходе от суперинтуиционистской логики L к ее модальным напарникам $\tau\mathrm{L}$, $\sigma\mathrm{L}$ и при обратном переходе, см. [9]. Так из предыдущих теорем получается

Следствие. *В нормальных расширениях* S4 *неразрешимы следующие свойства: разрешимость, финитная аппроксимируемость, дизъюнктивное свойство, полнота по Крипке, допустимость дизъюнктивного свойства.*

Следующий уровень — проведение доказательства в модальном варианте параллельно доказательству для суперинтуиционистских логик, когда вместо интуиционистских формул используются их T-переводы. Этот прием действует иногда и в тех случаях, когда соответствующая теорема о сохранении изучаемого свойства неверна. Таким способом доказывается

Теорема 20 [12]. *В нормальных расширениях* S4 *неразрешимо свойство полноты по Холдену.*

T-перевод позволяет, кроме того, «автоматически» получать из неразрешимых интуиционистских формул неразрешимые модальные формулы. Более точно, с помощью теорем о T-переводе [68, 53, 57] и возможностью алгоритмического выделения суперинтуиционистского фрагмента нормального расширения S4 [8, 10] легко получается

Предложение. *Интуиционистская формула A разрешима в суперинтуиционистских логиках тогда и только тогда, когда $T(A)$ разрешима в нормальных расширениях* S4, *и тогда и только тогда, когда $T(A)$ разрешима в нормальных расширениях* $\mathrm{S4Grz} = \mathrm{S4} \oplus \Box(\Box(p \supset \Box p) \supset$ $\supset p) \supset p$.

Наконец, третий уровень — применение идеи в модальных логиках с использованием модальной специфики, большей выразительности модального языка по сравнению с языком суперинтуиционистских логик. Приведу сначала один пример «улучшения» использованной в § 5, 6 модификации основной идеи.

Рассмотрим шкалу $\mathfrak{F}_4$, изображенную на рис. 11. Модальные формулы, которые будут соответствовать мирам этой шкалы с точностью до очевидных автоморфизмов, переставляющих пары (c^1, c^3) и (c^2, c^6) и/или переставляющих миры c^4 и c^5, можно выбрать так:

$C^1 = \Box p, \quad C^2 = \Box\neg p,$

$C^3 = \neg p \,\&\, \Diamond\Box p \,\&\, \Box((\neg p \,\&\, \Diamond\Box p) \vee \Box p),$

$C^4 = p \,\&\, \Diamond \Box p \,\&\, \Diamond \Box \neg p \,\&\, \Box ((p \,\&\, \Diamond \Box p \,\&\, \Diamond \Box \neg p) \vee \Box p \vee \Box \neg p)$,

$C^5 = \neg p \,\&\, \Diamond \Box p \,\&\, \Diamond \Box \neg p \,\&\, \Box ((\neg p \,\&\, \Diamond \Box p \,\&\, \Diamond \Box \neg p) \vee \Box p \vee \Box \neg p)$.

$C^6 = h \,\&\, \Diamond \Box \neg p \,\&\, \Box ((p \,\&\, \Diamond \Box \neg p) \vee \Box \neg p)$,

$D_2^1 = \Diamond C^4 \,\&\, \Diamond C^5 \,\&\, \Diamond C^6 \,\&\, \neg \Diamond C^3, \quad D_2^2 = \Diamond C^3 \,\&\, \Diamond C^5 \,\&\, \Diamond C^6 \,\&\, \neg \Diamond C^4$,

$D_2^3 = \Diamond C^3 \,\&\, \Diamond C^5 \,\&\, \Diamond C^6 \,\&\, \neg \Diamond C^4, \quad D_3^1 = \Diamond C^3 \,\&\, \Diamond C^4 \,\&\, \Diamond C^5 \,\&\, \neg \Diamond C^6$,

$D_4 = \Diamond C^3 \,\&\, \Diamond C^4 \,\&\, \Diamond C^5 \,\&\, \Diamond C^6 \,\&\, \neg \Diamond D_2^1 \,\&\, \neg \Diamond D_2^2 \,\&\, \neg \Diamond D_2^3 \,\&\, \neg \Diamond D_3^1$.

Здесь индексы в обозначении D_j^i не несут того смысла, что в § 5, но дальнейшие определения формул, описывающих миры шкалы $\mathfrak{F}_4$, сходны

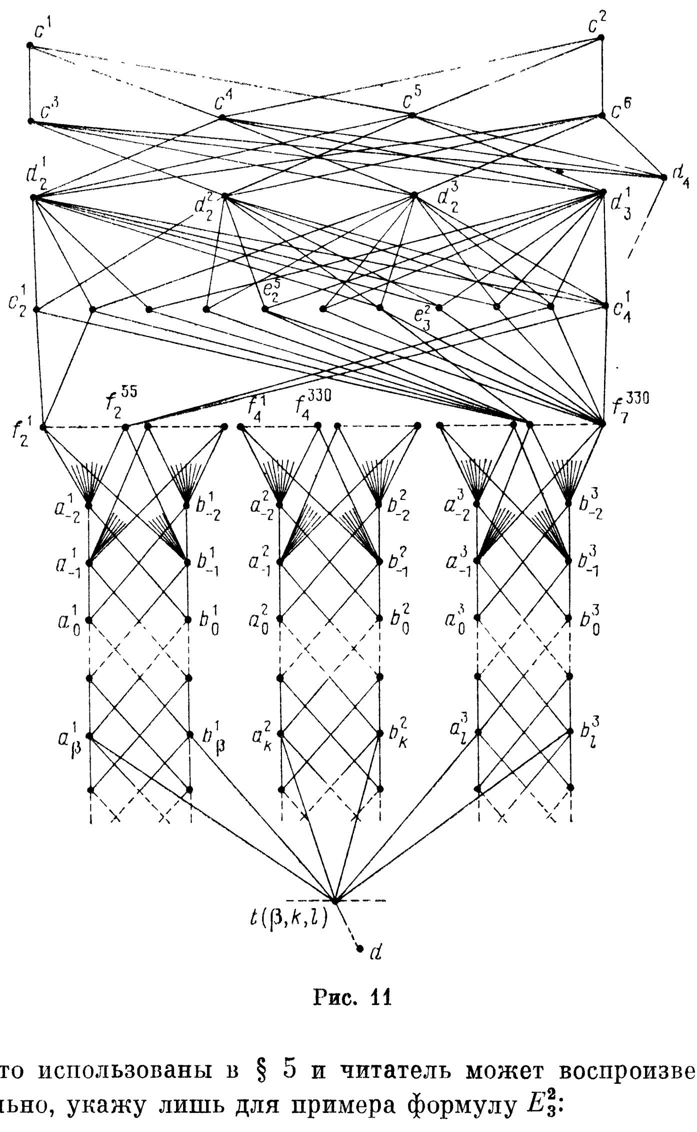

Рис. 11

с теми, что использованы в § 5 и читатель может воспроизвести их самостоятельно, укажу лишь для примера формулу E_3^2:

$$E_3^2 = \Diamond D_1^2 \,\&\, \Diamond D_2^2 \,\&\, \Diamond D_3^1 \,\&\, \neg \Diamond D_2^3.$$

Проведя все рассуждения, аналогичные соответствующим рассуждениям § 5, при использовании вместо S_2 формулы

$$D = \neg (\Diamond D_2^1 \,\&\, \Diamond D_2^2 \,\&\, \Diamond D_2^3 \,\&\, \Diamond D_3^1 \,\&\, \Diamond D_4),$$

мы, в частности, получим, что D — неразрешимая формула. Так получаются следующие две теоремы.

Теорема 21. *Существуют формулы от одной переменной, неразрешимые в нормальных расширениях* S4.

Дальнейшее «улучшение» в этом направлении невозможно, поскольку в S4 всякая константная формула эквивалентна либо $\perp$, либо $\neg\perp$.

Теорема 22. *В нормальных расширениях* S4 *существует исчисление, аксиоматизируемое формулами с не более чем тремя переменными, для которого неразрешима проблема выводимости формул с одной переменной.*

Существенное повышение выразительных возможностей модальных формул дает использование в их шкалах Крипке иррефлексивных миров, точнее — рассмотрение расширений GL или даже K4 вместо S4, в шкалах которой все миры рефлексивны. Что касается расширений GL, то разработки идей данной статьи для этого случая читатель может найти в [42, 43]. Здесь же я проиллюстрирую еще более широкие возможности расширений K4.

Рассмотрим шкалу $\mathfrak{F}_5$ (рис. 12): множество миров —

$$\{a, b, c, d, e, s_*, a_j^i, t(\beta, k, l) \mid i \in$$
$$\in \{1, 2, 3\}, j \in \omega, (\beta, k, l) \in P(\alpha, m, n)\};$$

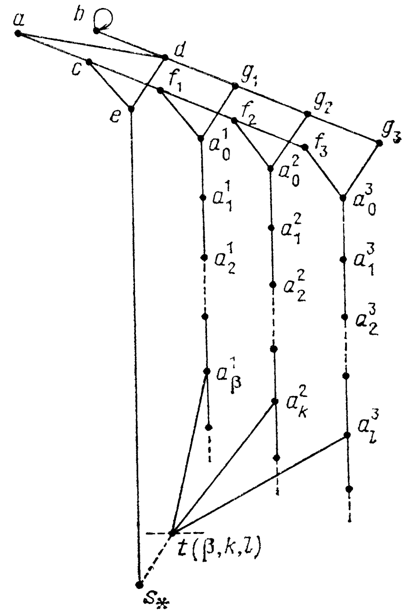

Рис. 12

отношение достижимости R — транзитивное замыкание следующего бинарного отношения R':

$$\langle x, y\rangle \in R' \rightleftharpoons \exists (i, j, k, l, \beta)((x = s_* \,\&\, y \neq s_*) \vee (x = b \,\&\, y = b) \vee$$
$$\vee (x = c \,\&\, y = a) \vee (x = d \,\&\, (y = a \vee y = b)) \vee (x = e \,\&\, (y = c \vee y = d)) \vee$$
$$\vee (x = f_1 \,\&\, y = c) \vee (x = g_1 \,\&\, y = d) \vee (x = f_i \,\&\, y = f_j \,\&\, i > j) \vee$$
$$\vee (x = g_i \,\&\, y = g_i \,\&\, i > j) \vee \bigl(x = a_0^i \,\&\, (y = f_i \vee y = g_i)\bigr) \vee$$
$$\vee \bigl(x = a_j^i \,\&\, y = a_k^i \,\&\, j > k\bigr) \vee (x = t(\beta, k, l) \,\&\, \bigl(y = a_\beta^1 \vee y = a_k^2 \vee y = a_l^3\bigr))).$$

Подчеркну, что в этой шкале ровно один рефлексивный мир — b.

Формулы, описывающие миры этой шкалы в том смысле, что каждая из них истинна в точности в одном мире, а именно в том, который имеет сходное обозначение, можно определить так:

$$A = \Box\perp,\ B = \Box\neg\Box\perp \,\&\, \neg\Box\perp,\quad C = \Box\Box\perp \,\&\, \neg\Box\perp,$$
$$D = \Diamond A \,\&\, \neg\Diamond\Diamond A \,\&\, \Diamond B,\quad B = \Diamond C \,\&\, \Diamond D \,\&\, \neg\Diamond\Diamond C \,\&\, \neg\Diamond\Diamond D,$$
$$F_i = \Diamond^i C \,\&\, \neg\Diamond^{i+1} C \,\&\, \neg\Diamond D,\quad G_i = \Diamond^i D \,\&\, \neg\Diamond^{i+1} D \,\&\, \neg\Diamond C,$$
$$A_0^1 = \Diamond F_1 \,\&\, \Diamond G_1 \,\&\, \neg\Diamond^2 F_1 \,\&\, \neg\Diamond^2 G_1,$$
$$A_0^2 = \Diamond F_2 \,\&\, \Diamond G_2 \,\&\, \neg\Diamond^2 F_2 \,\&\, \neg\Diamond^2 G_2 \,\&\, \neg\Diamond A_0^1,$$
$$A_0^3 = \Diamond F_3 \,\&\, \Diamond G_3 \,\&\, \neg\Diamond^2 F_3 \,\&\, \neg\Diamond^2 G_3 \,\&\, \neg\Diamond A_0^1 \,\&\, \neg\Diamond A_0^2,$$
$$A_j^i = \Diamond^j A_0^i \,\&\, \neg\Diamond^{j+1} A_0^i \,\&\, \mathop{\&}_{i \neq k = 1}^{3} \neg\Diamond A_0^k \quad (1 \leqslant i \leqslant 3,\ j > 0);$$
$$T(\beta, A_k^2, A_l^3) = \Diamond A_\beta^1 \,\&\, \neg\Diamond A_{\beta+1}^1 \,\&\, \Diamond A_k^2 \,\&\, \neg\Diamond\Diamond A_k^2 \,\&\, \Diamond A_l^3 \,\&\, \neg\Diamond\Diamond A_l^3,$$

$$Q_1 = (\Diamond A_0^2 \vee A_0^2) \mathbin{\&} \neg \Diamond A_0^1 \mathbin{\&} \neg \Diamond A_0^3 \mathbin{\&} p \mathbin{\&} \neg \Diamond p,$$

$$Q_2 = \Diamond A_0^2 \mathbin{\&} \neg \Diamond A_0^1 \mathbin{\&} \neg \Diamond A_0^3 \mathbin{\&} \Diamond ((\Diamond A_0^2 \vee A_0^2) \mathbin{\&} p) \mathbin{\&} \neg \Diamond \Diamond p,$$

$$R_1 = (\Diamond A_0^3 \vee A_0^3) \mathbin{\&} \neg \Diamond A_0^1 \mathbin{\&} \neg \Diamond A_0^2 \mathbin{\&} p \mathbin{\&} \neg \Diamond p,$$

$$R_2 = \Diamond A_0^3 \mathbin{\&} \neg \Diamond A_0^1 \mathbin{\&} \neg \Diamond A_0^2 \mathbin{\&} \Diamond ((\Diamond A_0^3 \vee A_0^3) \mathbin{\&} p) \mathbin{\&} \neg \Diamond \Diamond p,$$

$$T(\beta, Q_i, R_j) = \Diamond A_\beta^1 \mathbin{\&} \neg \Diamond A_{\beta+1}^1 \mathbin{\&} \Diamond Q_i \mathbin{\&} \neg \Diamond \Diamond Q_i \mathbin{\&} \Diamond R_j \mathbin{\&} \neg \Diamond \Diamond R_j,$$

$$T(\beta, A_0^2, R_1) = \Diamond A_\beta^1 \mathbin{\&} \neg \Diamond A_{\beta+1}^1 \mathbin{\&} \Diamond A_0^2 \mathbin{\&} \neg \Diamond \Diamond A_0^2 \mathbin{\&} \Diamond R_1 \mathbin{\&} \neg \Diamond \Diamond R_1,$$

$$T(\beta, Q_1 A_0^3) = \Diamond A_\beta^1 \mathbin{\&} \neg \Diamond A_{\beta+1}^1 \mathbin{\&} \Diamond Q_1 \mathbin{\&} \neg \Diamond \Diamond Q_1 \mathbin{\&} \Diamond A_0^3 \mathbin{\&} \neg \Diamond \Diamond A_0^3$$

$$(\beta \geqslant 0,\ k \geqslant 0,\ l \geqslant 0,\ i,\ j \in \{1,\ 2\}).$$

Обозначив $D_{k,l}$ формулу

$$((\Diamond A_0^2 \vee A_0^2) \mathbin{\&} \neg \Diamond A_0^1 \mathbin{\&} \neg \Diamond A_0^3 \supset \Diamond^k A_0^2) \mathbin{\&} ((\Diamond A_0^3 \vee A_0^3) \mathbin{\&} \neg \Diamond A_0^1 \mathbin{\&} \mathbin{\&} \neg \Diamond A_0^2 \supset \Diamond^l A_0^3),$$

получаем следующее утверждение (ср. с леммой 37).

Лемма 46. *Пусть* $A \equiv B$ *означает строгую эквивалентность* A *и* B *в логике* K4, *т. е.* $\mathrm{K4} \vdash \Box^+((A \supset B) \mathbin{\&} (B \supset A))$. *Тогда при* $\beta \geqslant 0$, $k \geqslant 0$, $l \geqslant 0$, $i, j \in \{1, 2\}$ *справедливо*

а) $T(\beta, Q_i, R_j)(D_{k,l}/p) \equiv T(\beta, A_{k+i-1}^2, A_{l+j-1}^3)$,

б) $T(\beta, A_0^2, R_1)(D_{k,l}/p) \equiv T(\beta, A_0^2, A_{l+j-1}^3)$,

в) $T(\beta, Q_1, A_0^3)(D_{k,l}/p) \equiv T(\beta, A_{k+i-1}^2, A_0^3)$.

Теперь определяем формулы, которые с помощью леммы 46 и теоремы о замене строго эквивалентных в K4 имитируют действия команд машины Минского:

если $I = q_x \to q_y T_1 T_0$, то

$$\mathrm{Ax}\,\mathrm{I} = \Diamond T(x, Q_1, R_1) \supset \Diamond T(y, Q_2, R_1) \vee S_?;$$

если $I = q_x \to q_y T_0 T_1$, то

$$\mathrm{Ax}\,\mathrm{I} = \Diamond T(x, Q_1, R_1) \supset \Diamond T(y, Q_1, R_2) \vee S_?;$$

если $I = q_x \to q_y T_{-1} T_0 (q_z T_0 T_0)$, то

$$\mathrm{Ax}\,\mathrm{I} = (\Diamond T(x, Q_2, R_1) \supset \Diamond T(y, Q_1, R_1) \vee S_?) \mathbin{\&} (\Diamond T(x, A_0^2, R_1) \supset \supset \Diamond T(z, A_0^2, R_1) \vee S_?);$$

если $I = q_x \to q_y T_0 T_{-1} (q_z T_0 T_0)$, то

$$\mathrm{Ax}\,\mathrm{I} = (\Diamond T(x, Q_1, R_2) \supset \Diamond T(y, Q_1, R_1) \vee S_?) \mathbin{\&} (\Diamond T(x, Q_1, A_0^3) \supset \supset \Diamond T(z, Q_1 A_0^3) \vee S_?),$$

где $S_?$ конкретизируется дальше в зависимости от того, что нам понадобится.

И, наконец, как обычно, обозначаем $\mathrm{Ax}\,\mathrm{P} = \mathop{\&}\limits_{I \in P} \mathrm{Ax}\,\mathrm{I}$.

Рассмотрим логику $M(\beta, k, l)$, которая определяется так:

$$M(\beta, k, l) = \mathrm{K4} \oplus \mathrm{Ax}\,\mathrm{P} \oplus (\Diamond T(\alpha, A_m^2, A_n^3) \supset \Diamond T(\beta, A_k^2, A_l^3) \vee S_?) \supset S_?,$$

а $S_?$ есть формула $\neg \Diamond E$ (см. выше).

Аналогична лемме 8

Лемма 47. *Пусть* P: $(\alpha, m, n) \to (\beta, k, l)$. *Тогда*

а) $M(\beta, k, l) = \mathrm{K4} \oplus \neg \Diamond E$;

б) $M(\beta, k, l)$ *аксиоматизируется в нормальных расширениях* K4 *константной формулой*;

в) *$M(\beta, k, l)$ разрешима.*

Аналогична лемме 9 (применить шкалу $\mathfrak{F}_5$ из рис. 12)

Лемма 48. *Пусть P: $(\alpha, m, n) \not\to (\beta, k, l)$. Тогда*

а) $M(\beta, k, l) \subsetneqq \mathrm{K4} \oplus \neg \Diamond E$;

б) *$M(\beta, k, l)$ не аксиоматизируема константными формулами (хотя по определению аксиоматизируется формулой с одной лишь переменной)*;

в) *$M(\beta, k, l)$ неразрешима.*

Из лемм 47 и 48 следующие три теоремы.

Теорема 23. *Свойство аксиоматизируемости константными формулами в (нормальных) расширениях K4 неразрешимо.*

Теорема 24. *Константная формула $\neg \Diamond E$ неразрешима в (нормальных) расширениях K4.*

В связи с этими теоремами отмечу, что в расширениях GL, в том числе нормальных, все константные формулы разрешимы и разрешимо свойство аксиоматизируемости константными формулами. В расширениях S4 и в расширениях Int все вопросы о константных формулах тривиальны — среди собственных расширений константными формулами здесь только противоречивые логики, а свойство непротиворечивости в этих случаях разрешимо.

Теорема 26. *Существуют неразрешимые исчисления, аксиоматизируемые в нормальных расширениях K4 формулами от одной переменной. При этом исчисление можно выбирать так, что в нем неразрешима проблема выводимости константных формул.*

Довольно близкая ситуация в нормальных расширениях GL. В [42] были построены неразрешимые исчисления от трех переменных. Идея использования контекстных подстановок, которая применена здесь в доказательствах теорем 16, 23, 26, возникла после написания [42, 43], она позволяет в неразрешимых исчислениях [42, 43] отождествить все три переменные. Подстановка в лемме 9 [42] (аналог леммы 46 этой статьи) должна быть такой: вместо отождествленных переменных p, p_1, p_2 надо подставлять формулу

$$((\Diamond A_0^2 \vee A_0^2) \mathbin{\&} \neg \Diamond A_0^1 \mathbin{\&} \neg \Diamond A_0^3 \supset \Diamond^k A_0^2) \mathbin{\&} ((\Diamond A_0^3 \vee A_0^3) \mathbin{\&} \\ \mathbin{\&} \neg \Diamond A_0^1 \mathbin{\&} \neg \Diamond A_0^2 \supset \Diamond^l A_0^3) \mathbin{\&} (\Box \bot \supset p).$$

Однако в отличие от теоремы 26 неразрешимой для полученных исчислений является проблема выводимости формул от одной переменной.

Теперь обратимся к крайнему случаю по эффективности применения основной конструкции — произвольным, т. е. не обязательно нормальным, расширениям K4.

Пусть $S_?$ — какая-нибудь формула, которую можно опровергнуть при какой-нибудь оценке в точке s_* шкалы $\mathfrak{F}_5$. Например, в качестве $S_?$ можно взять $\Box^+(\Box p \supset p)$, аксиоматизирующую S4, или $\Box^+(\Box(\Box p \supset p) \supset \supset \Box p)$, аксиоматизирующую GL, или конъюнкцию одной из этих формул с чем-нибудь еще, т. е. аксиоматизация (дополнительная к K4) любого исчисления в расширениях S4 или GL. Определим теперь логику $M(\beta, k, l)$ следующим образом:

$$M(\beta, k, l) = \mathrm{K4} + \mathrm{Ax\,P} + (\Diamond T(\alpha, A_m^2, A_n^3) \supset \Diamond T(\beta, A_k^2, A_l^3) \vee S_?) \supset S_?.$$

Стандартна

Лемма 49. *Пусть P: $(\alpha, m, n) \to (\beta, k, l)$. Тогда*

$$M(\beta, k, l) = \mathrm{K4} + S_?.$$

Лемма 50. *Пусть P: $(\alpha, m, n) \not\to (\beta, k, l)$. Тогда*

а) $M(\beta, k, l) \subsetneqq \mathrm{K4} + S_?$;

б) *существует бесконечно много попарно не эквивалентных в $M(\beta, k, l)$ константных формул.*

Для доказательства используется шкала $\mathfrak{F}_5$ с действительным миром, в качестве которого берется s_*. Попарно не эквивалентные в $M(\beta, k, l)$ константные формулы — это, например, $\Diamond^i A_0^2 \,\&\, \neg \Diamond^{i+1} A_0^2$, $i \in \omega$.

Из лемм 49, 50 получаются следующие теоремы.

Теорема 25. *Пусть M — какое-нибудь конечно-аксиоматизируемое расширение* S4 *или* GL. *Тогда свойство* «K4 + $A = M$» *неразрешимо.*

В частности, неразрешимо свойство непротиворечивости расширений K4.

Теорема 26. *Свойства табличности, предтабличности, локальной табличности расширений* K4 *неразрешимы.*

В самом деле, если взять в качестве $S_?$ аксиоматизацию какой-нибудь табличной логики в расширениях S4 или GL (хорошо известно, что в расширениях K4 все табличные логики конечно-аксиоматизируемы, что выполняется, например, ввиду леммы Йонссона, см. [59]), то в случае P: $(\alpha, m, n) \to (\beta, k, l)$ мы по лемме 49 получаем, что $M(\beta, k, l)$ таблична, а значит, и локально таблична. В случае P: $(\alpha, m, n) \not\to (\beta, k, l)$ п. б) леммы 50 показывает, что $M(\beta, k, l)$ не является локально табличной, а значит, и табличной. Для рассмотрения свойства предтабличности выбираем в качестве формулы $S_?$ аксиоматизацию какого-нибудь предтабличного расширения S4 или GL, например, $\mathrm{S5} = \mathrm{K4} + \Box^+(\Box p \supset p) + \Box^+(p \supset \Box \Diamond p)$. Нужно заметить только, что если P: $(\alpha, m, n) \not\to (\beta, k, l)$, то модели, определяемые по шкале $\mathfrak{F}_5$ (рис. 12) с выделенным миром s_*, не характеризуют точно $M(\beta, k, l)$, хотя пункт б) леммы 50 будет верен и для логик этих моделей, а значит — в этом случае $M(\beta, k, l)$ не предтаблична.

Подобные изменения конструкции возможны и для многих других свойств, иногда с довольно существенно иной детализацией. Я предполагаю посвятить этим результатам о модальных логиках отдельную статью, сейчас же отсылаю читателя за формулировкой большинства известных мне результатов такого рода к приложению А. Приведу еще лишь один пример, не требующий (с учетом предыдущего, разумеется) для своего обоснования больших усилий.

В [44] была доказана разрешимость свойства антитабличности в расширениях GL, причем это свойство нетривиально в этом множестве логик. В расширениях Int, S4, нормальных расширениях K4 (и даже K) это свойство тривиально, поскольку не имеет места ни для одной логики. В [44] упомянута неразрешимость антитабличности в расширениях K, которая была доказана с помощью некоторой модификации конструкции [70] сведе́нием проблемы остановки машины Минского к проблеме неантитабличности.

Теорема 27. *Свойство антитабличности расширений* K4 *неразрешимо.*

Для доказательства выберем в качестве $S_?$ формулу $\bot$, а логику $M(\beta, k, l)$ определим так:

$$M(\beta, k, l) = \mathrm{K4} + \mathrm{Ax\,P} + (\Diamond T(\alpha, A_m^2, A_n^3) \supset \Diamond T(\beta, A_k^2, A_l^3) \vee \bot) \supset \bot + \\ + \Diamond((\Diamond A_0^1 \vee A_0^1) \,\&\, p \,\&\, \neg \Diamond p) \supset \Diamond((\Diamond A_0^1 \vee A_0^1) \,\&\, \Diamond p \,\&\, \neg \Diamond\Diamond p) + \\ + \Diamond(A_0^1 \,\&\, \neg \Diamond A_0^1).$$

Лемма 51. *Пусть P: $(\alpha, m, n) \to (\beta, k, l)$. Тогда $M(\beta, k, l)$ противоречива, а значит, и не антитаблична.*

Доказательство стандартно.

Лемма 52. *Пусть P: $(\alpha, m, n) \not\to (\beta, k, l)$. Тогда $M(\beta, k, l)$ непротиворечива, но не имеет конечных моделей, и неразрешима.*

В самом деле, если P: $(\alpha, m, n) \not\to (\beta, k, l)$, то в шкале $\mathfrak{F}_5$ (рис. 12) с выделенным миром s_* истинны все формулы из $M(\beta, k, l)$, поэтому $M(\beta, k, l)$ непротиворечива. В то же время последние две аксиомы логики $M(\beta, k, l)$ позволяют вывести все формулы вида $\Diamond(\Diamond^i A_0^1 \,\&\, \neg \neg \Diamond^{i+1} A_0^1)$, $i \in \omega$, для истинности всего множества которых требуется наличие в модели (шкале) бесконечной совокупности попарно различных миров.

Неразрешимость $M(\beta, k, l)$ доказывается стандартно, см. доказательство леммы 9.

Из лемм 51, 52 следует теорема 29 и

Теорема 28. *В расширениях* K4 *неразрешимо свойство «иметь разрешимую проблему допустимости правил вывода».*

Действительно, если логика противоречива, то в ней проблема допустимости правил вывода тривиальна, а значит, и тривиально разрешима. Если же логика неразрешима, то неразрешима и проблема допустимости правил вывода, поскольку вопрос о выводимости формулы A в логике — это вопрос о допустимости в ней правила вывода $\neg \perp / A$ с тривиальной посылкой.

§ 8. Заключение

Отмечу некоторые оставшиеся открытыми вопросы о возможностях алгоритмического описания свойств суперинтуиционистских логик.

Некоторые из этих вопросов носят технический, по-видимому, характер, их, вероятно, удастся решить методами данной статьи, например, свойство «иметь такой же импликативный фрагмент, как в Int» (см. § 6). Еще одно свойство — «иметь разрешимую проблему допустимости правил вывода». Этим свойством обладают многие исчисления, в частности, Int, см. [77]. Поскольку из разрешимости проблемы допустимости правил вывода следует разрешимость самой логики, это свойство окажется неразрешимым, если в лемме 8 или в ее последующих аналогах можно добавить пункт о разрешимости в рассматриваемой там логике проблемы допустимости. Другими словами, для обоснования неразрешимости свойства разрешимости допустимости правил вывода достаточно хотя бы для одной из полученных неразрешимых формул доказать, что в аксиоматизируемой ею логике проблема допустимости разрешима.

Уместно заметить, что для обоснования неразрешимости свойства «иметь разрешимую проблему допустимости правил вывода в нормальных расширениях K4» достаточно было бы доказать наличие этого свойства у K4, поскольку тогда и K4 + $\neg \Diamond E$ имеет это свойство в силу константности $\neg \Diamond E$. Вообще, конечно, трудно представить себе, что для каких-то нетривиальных вопросов о «разрешимости — неразрешимости» имеются алгоритмы их решения, хотя бы из-за их «близости к чему-то неразрешимому», а значит, возможности использования этого, как это, по существу, и получилось в первой и последней теоремах этой статьи. Однако есть примеры, разрушающие такого рода представления: М. Ф. Раца доказал в [32], что среди нормальных расширений S4 есть исчисления, в которых проблема функциональной выразимости разрешима, и есть исчисления — в которых неразрешима; в то же время полное описание [32] имеющейся здесь ситуации дает алгоритм, разрешающий свойство «S4 $\oplus A$ имеет разрешимую проблему функциональной выразимости». Для суперинтуиционистских логик проблема существования такого алгоритма открыта; известна лишь ее нетривиальность (А. В. Кузнецов). Близкую алгоритмическую проблему — проблему функциональной полноты — можно считать для суперинтуиционистских логик «простой»; см. подробности в [31].

Более сложными представляются вопросы о разрешимости таких свойств, как предлокальная табличность и локальная табличность (проблемы Л. Л. Максимовой из [19]). Довольно легко положительно решаемые в (нормальных) расширениях модальной логики S4 (см. [22]), эти проблемы в суперинтуиционистских логиках гораздо более сложны, см. [28]. В то же время метод настоящей статьи не работает для доказательства их неразрешимости. Другие свойства, о разрешимости которых мне ничего не известно,— бедность (т. е. свойство «иметь не более чем счетное множество расширений», сформулировано А. В. Кузнецовым), различные наследственные свойства — наследственная разрешимость (т. е. разрешимость всех расширений данной логики), наследственная полнота по Крипке, наследственная финитная аппроксимируемость и т. п.

Хотелось бы подчеркнуть причину, по которой я упоминаю эти свойства,— невозможность применения конструкции данной статьи к ним, а значит, и необходимость дополнительных исследований как самих этих свойств, так и способов доказательства разрешимости и неразрешимости. Здесь же хотелось бы обратить внимание и на другую крайность — случай, когда конструкция кажется применимой к любому свойству,— расширения K4. Единственное известное мне разрешимое здесь свойство (указано мне В. Дзёбяком) — это свойство совпадения с K4. Существуют ли нетривиальные разрешимые для собственных расширений K4 свойства? Кроме того, существуют ли разрешимые в расширениях K4 не принадлежащие K4 формулы?

Теперь о вопросе, который должен возникнуть у всякого, кто исследует то или иное свойство и обнаружил его неразрешимость. Какова методологическая ценность этого результата? Означает ли он безнадежность возможности описания этого свойства, принципиальную его «непознаваемость»?

Разумеется, результаты о неразрешимости вряд ли могут вызвать какой-либо дополнительный энтузиазм исследователя природы свойств, и я далек от мысли внушать кому бы то ни было оптимизм по этому поводу. Однако и излишний пессимизм здесь, на мой взгляд, совершенно не оправдан. Взять хотя бы тот факт, что, как правило, в строимых с различными целями логиках интересующие нас свойства мы все же обнаруживаем или опровергаем, и методов такого обнаружения или опровержения довольно много. Причем если бы требуемый алгоритм и существовал, то он вряд ли был бы практически применим. В самом деле, простое, казалось бы, свойство — непротиворечивость суперинтуиционистских логик, и алгоритм чрезвычайно прост — $\mathrm{Int} + A$ непротиворечива в том и только том случае, когда A тождественно истинна в классической двузначной модели, но проверка этого факта требует (во всяком случае, это многим кажется правдоподобным), вообще говоря, экспоненциальных затрат времени (эта задача coNP-полна, см. [4]). Но даже для коротких аксиоматик никто, по-видимому, еще не применял «в лоб» такой алгоритм для обоснования непротиворечивости, поскольку непротиворечивость интересующих исследователей логик более или менее легко усматривается (вновь употреблю оборот «как правило», чтобы это утверждение не выглядело «доказанным») из вида аксиом.

Таким образом, можно было бы алгоритмическую задачу описания логик с данным свойством сформулировать так: задать, рекурсивно, разумеется, такой класс формул, чтобы формулами этого класса можно было аксиоматизировать произвольную (конечно-аксиоматизируемую) логику и по аксиоматике исчисления формулами этого класса можно было бы эффективно распознать наличие у этого исчисления интересующего свойства.

Конечно, только что сформулированная задача не очень определенна в том смысле, что если она имеет положительное решение, то полученный в результате класс формул не будет алгоритмически связан с имеющимся. Во всяком случае, не будет алгоритма, строящего по произвольной аксиоматике равнообъемную аксиоматику из формул найденного класса. В принципе, ничего уж очень плохого в этом нет, но это лишает возможности при поиске такого класса использовать привычную интуицию. Единственный известный мне полный в смысле возможности аксиоматизации всех логик класс формул, по которым можно определять некоторые свойства логики и ее семантики, по крайней мере, частично,— это канонические формулы М. В. Захарьящева (см. [8—10]), каноническая аксиоматизация логики по произвольной аксиоматике находится недетерминированным алгоритмом. Вполне возможно, что выделение какого-то подходящего подкласса канонических формул и даст решение задачи.

Тесно связаны по духу с поставленной задачей следующие общие вопросы о неразрешимом свойстве логик из данного класса. Является ли множество исчислений, (не) обладающих данным свойством, рекурсивно перечислимым? Существует ли рекурсивно перечислимое множество исчислений, (не) обладающих данным свойством, такое, что в нем для всякого исчисления с этим свойством (без него) найдется равнообъемное? Мне известен всего один результат в такого рода направлении — [66] (привожу по [30]): не существует эффективно перечислимой последовательности алгоритмов, которая состоит только из разрешающих алгоритмов для нормальных модальных логик, причем для каждой из разрешимых нормальных модальных логик содержит хотя бы один разрешающий алгоритм.

Следующая возможность для, теперь уже частичного, описания того или иного свойства — ограничение рассматриваемых аксиоматик по виду используемых формул. Если рассматривать только бездизъюнктивные формулы (точнее, я имею в виду формулы с пустым множеством дизъюнктивных областей по [8—10], в интуиционистском случае это бездизъюнктивные формулы с точностью до дедуктивной эквивалентности) в качестве аксиом, то задача алгоритмического описания свойств существенно упрощается, в частности и потому, что многие свойства становятся тривиально выполняющимися или невыполняющимися, но есть и исключения — дизъюнктивное свойство собственных нормальных расширений S4 такими формулами разрешимо нетривиально, это следует из [7]. Один конкретный вопрос М. В. Захарьящева (см. [63]): разрешима ли полнота по Холдену для суперинтуиционистских исчислений с бездизъюнктивными аксиомами? Вопрос нетривиален — логика $\mathrm{Int}+ ((p \supset q) \supset p) \supset p$ (классическая логика) полна по Холдену, а

$$\mathrm{Int} + ((p \supset q) \supset t) \,\&\, ((q \supset p) \supset t) \,\&\, (((r \supset (\neg\neg s \supset s)) \supset r) \supset r) \supset t) \supset t$$

(это логика шкалы, изображенной на рис. 13) не полна по Холдену.

Возможны, конечно, и другие ограничения на использование формул в качестве аксиом, но класс бездизъюнктивных формул интересен тем, что все исчисления, возникавшие из каких-либо содержательных соображений, а не технических побуждений, например, решения вопроса о существовании логик с какими-либо свойствами, можно задавать бездизъюнктивными аксиомами. Это же касается и модальных логик, аксиоматизируемых каноническими формулами [8] с пустым множеством дизъюнктивных областей. Кроме того, бездизъюнктивные формулы обладают однозначностью представления дедуктивно эквивалентными им каноническими формулами, точнее — алгоритм получения такого представления можно считать детерминированным. Это дает возможность алгоритмического выяснения соотношений типа включения, равенства и т. п. логик, аксиоматизируемых бездизъюнктивными формулами.

Два слова о еще одном направлении «алгоритмического» исследования свойств логик — рекурсивной (не) отделимости свойств. Свой основной результат — неразрешимость полноты по Крипке модальных логик, расширяющих K, С. К. Томасон в [80] доказывал с помощью предварительно доказанной рекурсивной неотделимости множества неполных по Крипке и множества противоречивых временны́х исчислений. Доказанные в предыдущих параграфах результаты тоже допускают такого рода формулировки: например, из лемм 8 и 9 следует рекурсивная неотделимость множеств неразрешимых и финитно аппроксимируемых исчислений, не аппроксимируемых финитно и аксиоматизируемых бездизъюнктивными формулами исчислений и т. д. Мне неизвестно, существуют ли такие два несовместных неразрешимых свойства, что множества исчислений с ними рекурсивно отделимы.

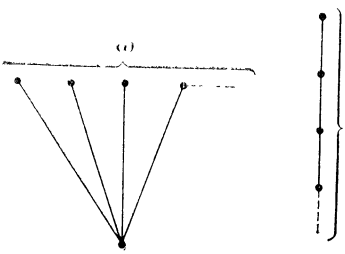

Рис. 13

Наконец, коснусь сформулированного в этой статье понятия, двойственного понятию (не)разрешимого исчисления — (не)разрешимые формулы. Несмотря на формальный, вроде бы, способ его введения, оно возникает и из некоторых естественных задач. Например, пусть нам задано исчисление $\mathrm{Int}+A$. Будет ли разрешимой проблема «$\mathrm{Int}+B=\mathrm{Int}+A$?»? Нетрудно понять, что ответ положителен в том и только том случае, когда логика $\mathrm{Int}+A$ разрешима и формула A разрешима в расширениях Int. В результате неразрешимы проблемы совпадения со следующими очень просто формулируемыми, да и не очень сложно устроенными (разрешимыми, финитно аппроксимируемыми и т. д.) логиками:

$$\mathrm{Int}+\neg(p\,\&\,q)\vee\neg(\neg p\,\&\,q)\vee\neg(p\,\&\,\neg q)\vee\neg(\neg p\,\&\,\neg q)$$

— в классе суперинтуиционистских логик, см. § 5;

$$\mathrm{GL}\oplus\Box(\Box^2\bot\supset\Box p\vee\Box\neg p)$$

— в классе нормальных расширений GL, см. [42];

$$S+\Box^+\neg\Box^+p\vee\Box^+\neg\Box^+\neg\Box^+p$$

(некоторый модальный вариант логики «слабого закона исключенного третьего») — в классе расширений S, см. [43];

$$\mathrm{K4}\oplus\neg\Diamond E$$

— в классе нормальных расширений K4, см. § 7;

$$\mathrm{K4}+\bot$$

— в классе расширений K4, см. § 7.

А можно ли алгоритмически по формуле A определять, является ли проблема «$\mathrm{Int}+B=\mathrm{Int}+A$?» разрешимой? (Вопрос Л. Л. Максимовой.) Другими словами, разрешима ли проблема: верно ли, что A задает разрешимое суперинтуиционистское исчисление и является разрешимой формулой? Интересен и близкий вопрос: разрешимо ли свойство формул «быть разрешимой в суперинтуиционистских логиках формулой»? Конечно, интересны варианты этих проблем и в случаях классов модальных логик и модальных формул. Кстати, все построенные выше неразрешимые формулы аксиоматизировали разрешимые логики. А существуют ли неразрешимые исчисления, аксиоматизируемые разрешимой формулой?

Можно вводить и другие вполне осмысленные свойства формул, двойственные известным свойствам исчислений. Например, будем называть формулу A финитно аппроксимируемой, если для всякой формулы B из $\mathrm{Int}+B\not\vdash A$ следует, что найдется конечная шкала, отделяющая A от $\mathrm{Int}+B$. Подобное понятие, но с использованием логики, а не исчисления $\mathrm{Int}+B$, ввел А. И. Циткин [37] под названием финитно отделимой логики; я не знаю, различны ли эти понятия (в случае исчисления $\mathrm{Int}+A$, а не произвольной логики, разумеется). Аналогично, будем называть формулу A полной по Крипке, если для всякой формулы B из $\mathrm{Int}+B\not\vdash A$ следует, что найдется шкала Крипке, отделяющая формулу A от $\mathrm{Int}+B$. Будут ли свойства формул «быть финитно аппроксимируемой формулой», «быть полной по Крипке формулой» разрешимыми?

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ТАБЛИЦА РЕЗУЛЬТАТОВ О РАЗРЕШИМОСТИ СВОЙСТВ МОДАЛЬНЫХ И СУПЕРИНТУИЦИОНИСТСКИХ ЛОГИК

В приводимой таблице собраны известные мне результаты о разрешимости свойств модальных и суперинтуиционистских исчислений. При этом отмечены не все свойства, даже из тех, которые рассматривались в данной статье. Это касается, например, свойств совпадения фрагментов логики с соответствующими фрагментами Int, см. § 6. Выбор (субъективный, конечно) определялся либо популярностью свойства, либо трудностями рассмотрения его алгоритмических аспектов, в частности, тем, что имеются открытые проблемы.

Условные обозначения в таблице:

$\mathscr{L}$Int($\mathscr{L}$S4, $\mathscr{L}$GL, $\mathscr{L}S$, $\mathscr{L}$K4) — свойство рассматривается в расширениях Int(S4, GL, S, K4);

N$\mathscr{L}$S4(N$\mathscr{L}$GL, N$\mathscr{L}$K4) — свойство рассматривается в нормальных расширениях S4 (GL, K4);

+ — свойство разрешимо;

— — свойство неразрешимо;

? — открытая проблема;

$\times$ — свойство не относится к данному классу логик;

Тр — свойство тривиально в данном классе логик.

Литературные ссылки в клетках таблицы указывают на источник, из которого можно извлечь соответствующий результат, не всегда тривиально, особенно в случае +; ссылка около ? означает источник, результаты которого позволяют выдвинуть гипотезу +. Ссылка [0] означает данную статью, [—1] — статью по неразрешимым свойствам модальных логик, готовящуюся к печати.

Несколько слов о свойствах из таблицы, в частности об определениях тех свойств, которые не определялись выше.

Свойство логики называем наследственным, если этим свойством обладают все ее расширения в рассматриваемом классе логик.

Полнота относительно ω-шкал вводилась в [40], а подразумеваемый здесь вариант — в [43].

Логика полна по Посту, если она непротиворечива и не имеет собственных непротиворечивых расширений в рассматриваемом классе логик.

Логика структурально полна, если всякое допустимое в ней правило вывода является производным.

Логика бедна, если она имеет не более чем счетное множество расширений в рассматриваемом классе логик.

Арифметическая полнота модальной или суперинтуиционистской логики понимается как в [1—3].

Таблица

	$\mathscr{L}_{\mathrm{Int}}$	$N\mathscr{L}_{\mathrm{S4}}$	$\mathscr{L}_{\mathrm{S4}}$	$N\mathscr{L}_{\mathrm{GL}}$	$\mathscr{L}_{\mathrm{GL}}$	$\mathscr{L}_{\mathrm{S}}$	$N\mathscr{L}_{\mathrm{K4}}$	$\mathscr{L}_{\mathrm{K4}}$
Непротиворечивость	+	+	+	+[71]	+[44]	+[44]	+[71]	—[0]
Разрешимость	—[0]	—[0]	—[0]	—[42]	—[42]	—[43]	—[42]	—[42]
Наследственная разрешимость	?	?	?	?	?	?	?	—[0]
Финитная аппроксимируемость	—[0]	—[0]	—[0]	—[42]	—[42]	×	—[42]	—[42]
Наследственная финитная аппроксимируемость	?	?	?	?	?	×	?	—[0]
Полнота по Крипке	—[0]	—[0]	—[0]	—[43]	—[43]	×	—[43]	—[43]
Наследственная полнота по Крипке	?	?	?	?	?	×	?	—[0]
Полнота относительно ω-шкал	×	×	×	×	—[43]	—[43]	×	—[43]
Полнота по Посту	+	+	+	+[58]	+[44]	+[44]	+[58]	—[0]
Полнота по Холдену	—[11], [0]	—[12], [0]	—[12], [0]	+[43]	—[43]	—[43]	—[43]	—[43]
Структуральная полнота	?	?	?	?	?	?	?	—[0], [—1]
Наследственная структуральная полнота	+[38]	?	?	?	?	?	?	—[0], [—1]
Полнота по Максимовой	—[63], [0]	—[63], [0]	—[63], [0]	+[43]	—[43]	—[43]	—[43]	—[43]
Разрешимость допустимости правил вывода	?	?	?	?	?	?	?	—[0]
Нормальность	×	Тр	—[—1]	Тр	—[43]	+[44]	Тр	—[43]
Наследственная нормальность	×	Тр	?	Тр	?	+[44]	Тр	—[—1]
Наследственная конечная аксиоматизируемость	?	?	?	?	?	?	?	—[0]

Бедность	?	?	?	?	?	?	?	—[0]
Замкнутость по правилу $\square A/A$	×	Тр	Тр	—[42], [43]	—[42], [43]	Тр	—[42], [43]	—[42], [43]
Арифметическая полнота	+[2]	+[2]	+[2]	+[1]	? [3]	+[1]	?	—[0]
Дизъюнктивное свойство	[—11], [0]	—[11], [0]	—[11], [0]	—[42]	—[42]	—[43]	—[42]	—[42]
Допустимость дизъюнктивного свойства	—[0]	—[0]	—[0]	—[0]	—[0]	—[0]	—[0]	—[0]
Интерполяционное свойство	+[24]	+[25]	?[25]	—[42]	—[42]	—[43]	—[42]	—[43]
Совпадение с фиксированной табличной логикой	+[17]	+[58]	+[58]	+[58]	+[58], [59]	+[44]	+[58]	—[0]
Табличность	+[20]	+[21]	+[41]	+[41]	+[41]	+[44]	?	—[0]
Предтабличность	+[20]	+[21]	+[41]	+[41]	+[41]	+[44]	?	—[0]
Локальная табличность	?	+[22]	+[22]	+[34]	+[34]	+[44]	?	—[0]
Предлокальная табличность	?	+[22]	+[22]	+[34]	+[34]	+[44]	?	—[0]
Антитабличность	Тр	Тр	Тр	Тр	+[44]	+[44]	Тр	—[0]
«Быть модальным напарником Int» в сигнатуре: с⊥, без ¬	×	+[53], [57]	+[81]	×	×	×	—[—1]	—[—1]
с ¬, без ⊥	×	[+53], [57]	+[81]	×	×	×	? [67]	—[—1]
«Быть доказуемостным напарником Int»	×	+[53], [57]	+[81]	+[49]	—[43]	—[43]	—[—1]	—[—1]
«Быть доказуемостным напарником S4Grz»	×	×	×	+[49]	+[49]	+[49]	?	—[—1]
Аксиоматизируемость формулами без $\vee$	—[0]	—[0]	—[0]	—[0]	—[0]	—[0]	—[0]	—[0]
Аксиоматизируемость формулами без $\supset$	—[0]	×	×	×	×	×	×	×
Аксиоматизируемость константными формулами	+	+	+	+	+	+	—[0]	—[0]
Аксиоматизируемость консервативными формулами	+[24]	+[25]	? [25]	—[42]	—[42]	—[43]	—[42]	—[42]
Свойство простой подстановки	—[0]	—[0]	—[0]	—[42]	—[42]	—[43]	—[42]	—[42]

Логика L обладает интерполяционным свойством, если из $L \vdash A \supset B$ следует, что существует C, все переменные которой входят и в A, и в B, такая, что $L \vdash A \supset C$ и $L \vdash C \supset B$.

Определение L-консервативной формулы для модальной логики L дано в [26], оно относится к формулам от одной переменной. Близкое понятие, но без ограничения числа переменных для суперинтуиционистских логик введено в [79].

Модальная логика называется доказуемостным модальным напарником Int, если Int вкладывается в нее T°-переводом, где $T^\circ(A) = (T(A))^\circ$, а $(B)^\circ$ — перевод, заменяющий $\Box$ на $\Box^+$.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

ТЕОРЕМА А. В. КУЗНЕЦОВА О НЕРАЗРЕШИМОСТИ СВОЙСТВ РЕКУРСИВНО ПЕРЕЧИСЛЕННЫХ ЛОГИК

Одним из поразительных (особенно при первом знакомстве) результатов теории алгоритмов и вычислений является теорема Г. Райса [76] (см. [13]) о невозмо́жности эффективного распознавания любого нетривиального свойства рекурсивных множеств по перечисляющим их алгоритмам, точнее — их индексам или программам их перечисления на каком-либо алгоритмическом языке, например, на языке машин Минского.

Оказывается, примерно такая же ситуация складывается и с нетривиальными свойствами рекурсивно-перечислимых логик и проблемами распознавания их свойств по задающим их алгоритмам, например по программам, перечисляющим их аксиомы. Впрочем, перечислять аксиомы или теоремы — это, в принципе, одно и то же. Более того, хорошо известна

Теорема [65]. *Следующие условия эффективно эквивалентны для всякой логики L:*

а) *L рекурсивно перечислима;*

б) *L имеет рекурсивно-перечислимую аксиоматику;*

в) *L имеет рекурсивную аксиоматику.*

Здесь я не конкретизирую класс логик, из которого берется логика L; требования, которые нужно предъявить к этому классу, достаточно слабые. Хотя только что сформулированная теорема не верна, скажем, для некоторых эквациональных логик, для всех «логических» логик она выполняется. Продемонстрирую вариант ее доказательства, подходящий для суперинтуиционистских и модальных логик.

Импликации в) $\Rightarrow$ а) $\Rightarrow$ б) верны, разумеется, для любой логики. Обоснуем б) $\Rightarrow$ в).

Пусть P — какая-нибудь программа, перечисляющая аксиоматику L, т. е. L задается аксиомами $A_0 = P(0)$, $A_1 = P(1)$, ..., $A_n = P(n)$, ... Определяем формулы B^n так: $B^n = \underbrace{\bot \vee \bot \vee \ldots \vee \bot}_{n \text{ раз}} \vee B$, где B — произвольная формула. Будем считать B^n «новой» аксиомой, если $B = A_n$. Ясно, что множество новых аксиом рекурсивно — чтобы проверить, является ли формула аксиомой, нужно сначала выяснить имеет ли она вид $\underbrace{\bot \vee \bot \vee \ldots \vee \bot}_{n \text{ раз}} \vee B$; если да, то запустить P на числе n и сравнить результат с B. В то же время ввиду допустимости во всех логиках правила $\bot \vee p/p$ новые аксиомы задают ту же логику L, позволяя получить все старые аксиомы, а из старых аксиом новые получаются по допустимому во всех логиках правилу $p/\bot \vee p$.

Другие варианты доказательства получатся, если использовать другие допустимые правила вывода (например, в чисто импликативных логиках $(p \supset p) \supset q/q$ и $q/(p \supset p) \supset q$), лишь бы эти правила позволяли вносить в формулу, меняя ее не «по существу», а только внешне, числовую информацию.

Не меньшей, чем доказанная теорема У. Крейга, общностью обладает

Теорема (А. В. Кузнецов, не опубликовано). *Каково бы ни было нетривиальное свойство рекурсивно задаваемых (каким-либо образом по теореме Крейга) логик, оно неразрешимо по программе, задающей логику.*

Доказательство для суперинтуиционистских и модальных логик.

Пусть Q — произвольное нетривиальное свойство рекурсивно-перечислимых логик. Допустим, что противоречивая логика обладает свойством Q (если это не так — нужно рассматривать свойство $\neg Q$), а логика L с рекурсивной последовательностью аксиом A_0, A_1, ..., задаваемой, например, программой P, т. е. $A_n = P(n)$, не обладает.

По произвольному числу x (индексу, перечисляющей программе, см. [13]) определяем аксиоматизацию некоторой логики L_x. По перечислению w_x, точнее — программе P^*, вычисляющей частично рекурсивную функцию, областью определения которой является w_x, полагаем

$$B_n = \begin{cases} A_n, & \text{если } P^*((n)_1) \text{ за } (n)_2 \text{ шагов не останавливается,} \\ \perp & \text{в противном случае} \end{cases}$$

(здесь $(n)_1$, $(n)_2$ — первая и вторая координата пары, кодируемой числом n при некотором фиксированном способе кодирования пар натуральных чисел) и считаем, что B_0, B_1, ... (рекурсивная, конечно, последовательность) и есть аксиоматизация L_x. Имеем

$w_x = \varnothing \Rightarrow$ при любом n P^*, запущенная на числе $(n)_1$, за $(n)_2$ шагов не останавливается $\Rightarrow$ при любом n $B_n = A_n \Rightarrow L_x = L \Rightarrow L_x$ не обладает свойством Q;

$w_x \neq \varnothing \Rightarrow$ для некоторого n P^*, запущенная на числе $(n)_1$, останавливается за $(n)_2$ шагов $\Rightarrow$ для некоторого n $B_n = \perp \Rightarrow L_x$ противоречива $\Rightarrow L_x$ обладает свойством Q.

Таким образом, неразрешимая (например, по теореме Райса) проблема непустоты рекурсивно-перечислимого множества эффективно сведена к проблеме выполнения свойства Q для рекурсивно-перечислимых логик.

Теорема доказана.

Считаю своим приятным долгом выразить свою признательность Л. Л. Максимовой, любезно сообщившей мне о теореме А. В. Кузнецова и доказательство этой теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артемов С. Н. О модальных логиках, аксиоматизирующих доказуемость // Изв. АН СССР. Сер. матем.— 1985.— Т. 49, № 6.— С. 1123—1154.
2. Артемов С. Н. Суперинтуиционистские логики, имеющие геделевскую доказуемостную интерпретацию // Докл. АН СССР.— 1986.— Т. 291, № 6.— С. 1289—1291.
3. Беклемишев Л. Д. О классификации пропозициональных логик доказуемости // Изв. АН СССР. Сер. матем.— 1989.— Т. 53, № 5.— С. 915—943.
4. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи.— М.: Мир, 1982.
5. Драгалин А. Г. Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств.— М.: Наука, 1979.
6. Захарьящев М. В. Об одном признаке финитной аппроксимируемости расширений Int и S4 // Восьмая всесоюзн. конф. по матем. логике: Тез. докл.— М.: МГПИ, 1986.— С. 70.
7. Захарьящев М. В. О дизъюнктивном свойстве суперинтуиционистских и модальных логик // Матем. заметки.— 1987.— Т. 42, № 5.— С. 729—738.

8. Захарьящев М. В. Синтаксис и семантика модальных логик, содержащих S4 // Алгебра и логика.— 1988.— Т. 27, № 6.— С. 659—689.
9. Захарьящев М. В. Модальные напарники суперинтуиционистских логик: синтаксис, семантика и теоремы о сохранении // Матем. сборник.— 1989.— Т. 180, № 10.— С. 1415—1427.
10. Захарьящев М. В. Синтаксис и семантика суперинтуиционистских логик // Алгебра и логика.— 1989.— Т. 28, № 4.— С. 402—429.
11. Захарьящев М. В., Чагров А. В. Неразрешимость дизъюнктивного свойства суперинтуиционистских исчислений.— Препринт/Ин-т прикл. матем. им. М. В. Келдыша АН СССР.— М., 1989.— № 57.
12. Захарьящев М. В., Чагров А. В. Неразрешимость свойства полноты по Холдену модальных исчислений.— Препринт/Ин-т прикл. матем. им. М. В. Келдыша АН СССР.— М., 1990.— № 82.
13. Катленд Н. Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций.— М.: Мир, 1983.
14. Клини С. К. Введение в метаматематику.— М.: ИЛ, 1957.
15. Клини С. К. Математическая логика.— М.: Мир, 1973.
16. Кузнецов А. В. О неразрешимости общих проблем полноты, разрешения и эквивалентности для исчислений высказываний // Алгебра и логика.— 1963.— Т. 2, № 4.— С. 47—65.
17. Кузнецов А. В. Некоторые свойства структуры многообразий псевдобулевых алгебр // XI Всесоюзн. алгебраический коллоквиум: резюме сообщ. и докл.— Кишинев, 1971.— С. 255—256.
18. Кузнецов А. В., Герчиу В. Я. О суперинтуиционистских логиках и финитной аппроксимируемости // Докл. АН СССР.— 1970.— Т. 195, № 5.— С. 1029—1032. Исправление опечаток: там же.— 1971.— Т. 199, № 6.— С. 1222.
19. Логическая тетрадь.— Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1986.
20. Максимова Л. Л. Предтабличные суперинтуиционистские логики // Алгебра и логика.— 1972.— Т. 11, № 5.— С. 558—570.
21. Максимова Л. Л. Предтабличные расширения логики S4 Льюиса // Алгебра и логика.— 1975.— Т. 14, № 1.— С. 28—55.
22. Максимова Л. Л. Модальные логики конечных слоев // Алгебра и логика.— 1975.— Т. 14, № 3.— С. 304—319.
23. Максимова Л. Л. Принцип разделения переменных в пропозициональных логиках // Алгебра и логика.— 1976.— Т. 15, № 2.— С. 168—184.
24. Максимова Л. Л. Теорема Крейга в суперинтуиционистских логиках и амальгамируемые многообразия псевдобулевых алгебр // Алгебра и логика.— 1977.— Т. 16, № 6.— С. 643—681.
25. Максимова Л. Л. Интерполяционные теоремы в модальных логиках и амальгамируемые многообразия топобулевых алгебр // Алгебра и логика.— 1979.— Т. 18, № 5.— С. 556—586.
26. Максимова Л. Л. Об интерполяции в нормальных модальных логиках // Неклассические логики. Математические исследования (Кишинев).— 1987.— Вып. 98.— С. 40—56.
27. Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции.— М.: Наука, 1986.
28. Мардаев С. И. О числе предлокально-табличных суперинтуиционистских логик // Алгебра и логика.— 1984.— Т. 23, № 1.— С. 74—87.
29. Новиков П. С. Конструктивная математическая логика с точки зрения классической.— М.: Наука, 1977.
30. Плиско В. Е. Реферат [66], РЖМат 1А68(1986).
31. Рапа М. Ф. О функциональной полноте в интуиционистской логике высказываний // Проблемы кибернетики. Вып. 39.— М.: Наука, 1982.— С. 107—150.
32. Рацa М. Ф. Алгоритмическая неразрешимость проблемы выразимости в модальных логиках // Математические проблемы кибернетики.— 1989.— Вып. 2.— С. 71—99.
33. Рыбаков В. В. Модальные логики с LM-аксиомами // Алгебра и логика.— 1978.— Т. 17, № 4.— С. 455—468.
34. Рыбаков В. В. Полнота модальных логик предконечной ширины // Матем. заметки.— 1982.— Т. 32, № 2.— С. 223—228.
35. Соболев С. К. О финитной аппроксимируемости суперинтуиционистских логик // Матем. сборник.— 1977.— Т. 102(144), вып. 2.— С. 289—301.
36. Циткин А. И. О структурально полных суперинтуиционистских логиках // Докл. АН СССР.— 1978.— Т. 241, № 1.— С. 40—43.
37. Циткин А. И. Об аксиоматизируемости финитно отделимых суперинтуиционистских логик // Восьмая Всесоюзная конференция по математической логике: Тез. докл.— М.: МГПИ, 1986.— С. 206.
38. Циткин А. И. Структурально полные суперинтуиционистские логики и примитивные многообразия псевдобулевых алгебр // Неклассические логики. Математические исследования (Кишинев).— 1987.— Вып. 98.— С. 134—151.

39. Циткин А. И., Чагров А. В. Об аппроксимируемости многообразий псевдобулевых алгебр // XIX Всесоюзная алгебраическая конференция. Львов, 9—11 сентября 1987 г.: Тез. докл. и сообщ. Часть первая.— Львов, 1987.— С. 305.
40. Чагров А. В. Многообразия логических матриц // Алгебра и логика.— 1985.— Т. 24, № 4.— С. 426—489.
41. Чагров А. В. Нетабличность — предтабличность, антитабличность, коантитабличность // Алгебро-логические конструкции.— Калинин: КГУ, 1989.— С. 105—111.
42. Чагров А. В. Неразрешимые свойства расширений логики доказуемости // Алгебра и логика.— 1990.— Т. 29, № 3.— С. 350—367.
43. Чагров А. В. Неразрешимые свойства расширений логики доказуемости. II // Алгебра и логика.— 1990.— Т. 29. № 5.— С. 613—623.
44. Чагров А. В., Чагрова Л. А. Разрешимость проблемы антитабличности расширений логики Гёделя — Лёба // Логические методы построения эффективных алгоритмов.— Калинин: КГУ, 1986.— С. 126—129.
45. Чагрова Л. А. О разрешимости противоречивых по Крипке модальных логик // Седьмая всесоюзная конференция по математической логике: Тез. докл.— Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1984.— С. 194.
46. Чагрова Л. А. Суперинтуиционистское исчисление. моделирующее машину Минского/КГУ.— Калинин, 1989.— 21 с.— Деп. в ВИНИТИ 19.06.89. № 4038—В89.
47. Чагрова Л. А. Неразрешимые проблемы, связанные с первопорядковой определимостью интуиционистских формул/КГУ.— Калинин, 1989.— 42 с.— Деп. в ВИНИТИ 19.06.89, № 4039 — В89.
48. Чагрова Л. А. Первопорядковая определимость некоторых суперинтуиционистских исчислений, моделирующих машины Минского/КГУ.— Калинин, 1989.— 46 с.— Деп. в ВИНИТИ 19.06.89, № 4040 — В89.
49. Шавруков В. Ю. О двух расширениях логики доказуемости GL // Матем. сборник.— 1990.— Т. 181, № 2.— С. 240—255.
50. Шехтман В. Б. О неполных логиках высказываний // Докл. АН СССР.— 1977.— Т. 235, № 3.— С. 542—545.
51. Шехтман В. Б. Неразрешимое суперинтуиционистское исчисление // Докл. АН СССР.— 1978.— Т. 240, № 3.— С. 549—553.
52. Шехтман В. Б. Неразрешимые исчисления высказываний // Неклассические логики и их применение. Вопросы кибернетики.— М.: Наука, 1982.— С. 74—115.
53. Эсакиа Л. Л. О многообразии алгебр Гжегорчика // Исследования по неклассическим логикам и теории множеств.— М.: Наука, 1979.— С. 257—287.
54. Янков В. А. Об исчислении слабого закона исключенного третьего // Изв. АН СССР. Сер. матем.— 1968.— Т. 32, № 5.— С. 1044—1051.
55. Янков В. А. Построение последовательности сильно независимых суперинтуиционистских исчислений // Докл. АН СССР.— 1968.— Т. 181, № 1.— С. 33—34.
56. Anderson J. G. Superconstructive propositional calculi with extra axiom schemes containing one variable // Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik.— 1972.— Bd 18.— S. 113—130.
57. Blok W. J. Varieties of interior algebras. Dissertation, University of Amsterdam, 1976.
58. Blok W. J. Pretabular varieties of modal algebras // Studia Logica.— 1980.— Vol. 39, № 2—3.— P. 101—124.
59. Blok B. J., Köhler P. Algebraic semantics for quasi-classical model logics // J. Symb. Log.— 1983.— Vol. 48.— P. 941—964.
60. Capińska E. On intermediate logics which can be axiomatized by means of implicationless formulas // Repts Math. Logic.— 1981.— № 13.— P. 11—16.
61. Chagrov A. V., Zakharyashchev M. V. Modal companions of intermediate propositional logics: A survey // Studia Logica.— 1992.— Vol. 51, № 1.— P. 49—82.
62. Chagrov A. V., Zakharyashchev M. V. The disjunction property of intermediate propositional logics // Studia Logica.— 1991.— Vol. 50, № 2.— P. 189—216.
63. Chagrov A. V., Zakharyashchev M. V. Undecidability of the disjunction property of propositional logics and other related problems. To appear in the Journal of Symbolic logic.
64. Chagrova L. A. An undecidable problem in correspondence theory // J. Symb. Log.— 1991.— Vol. 56, № 4.— P. 1261—1272.
65. Craig W. On axiomatizability within a system // J. Symb. Log.— 1953.— Vol. 18, № 1.— P. 30—32.
66. Cresswell M. J. The decidable normal modal logics are not recursively enumerable // J. Phil. Log.— 1985.— Vol. 14, № 3.— P. 231—233.
67. Došen K. Normal modal logics in which the Heyting propositional calculus can be embedded // (P. Petkov. Ed.).— Mathematical Logic. Plenum Press: New York, 1990.— P. 293—303.
68. Dummett M. A. E., Lemmon E. J. Modal logics between S4 and S5 // Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik.— 1959.— Bd 5.— S. 250—264.

69. Esakia L., Meskhi V. Five critical modal systems // Theoria.— 1977.— Vol. 43.— P. 52—60.
70. Isard S. A finitely axiomatizable undecidable extension of K // Theoria.— 1977.— Vol. 41, № 3.— P. 195—202.
71. Makinson D. Some embedding theorems for modal logic // Notre Dame J. Form. Logic.— 1971.— Vol. 12.— P. 252—254.
72. Maksimova L. Interpolation property of superintuitionistic logics // Studia Logica.— 1979.— Vol. 38.— P. 419—428.
73. Mckay J. The decidability of certain propositional logics // Symbol. Log.— 1968.— Vol. 33, № 2.— P. 258—264.
74. Mckay J. A class of decidable intermediate propositional logics // J. Symbol. Log.— 1971.— Vol. 36, № 1.— P. 127—128.
75. Minsky M. L. Recursively uncolvability of Post's problem of «Tag» and topics in theory of Turing machines // Ann. Math.— 1961.— Vol. 74.— P. 437—455.
76. Rice H. G. Classes of recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems // Trans. Amer. Math. Soc.— 1953.— Vol. 74, № 2.— P. 358—366.
77. Rybakov V. Problems of admissibility and substitution, logical equations and restricted theories of free algebras // (J. E. Fenstad et al., eds.) Logic, Methodology and Philosophy of Science VIII.— Elsevier Science Publishers B. V., 1989.— P. 121—139.
78. Sambin G., Valentini S. Post completeness and free algebras // Zeitschrift für mathematish Logik und Grundlagen der Mathematik.— 1980.— Bd 26.— S. 343—347.
79. Sasaki K. The simple substitution property of the intermediate propositional logics // Bulletin of the Section of Logic.— 1989.— Vol. 18.— P. 94—99.
80. Thomason S. K. Undecidability of the completeness of modal logic // Banach centre publication. «Universal algebra and Applications».— Warzawa, 1982.— Vol. 9.— P. 341—345.
81. Zakharyashchev M. V. The greatest extension of S4 in which the intuitionistic logic is embeddable. Third Logical Biennial, Kleene'90.— Sofia, 1990.— P. 81.

Поступило в редакцию 10 V 1991

ИССЛЕДОВАНИЕ ОТНОШЕНИЙ В КРИТЕРИАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И СИНТЕЗ ОПЕРАТОРОВ ГРУППОВОГО ВЫБОРА

Л. А. ШОЛОМОВ

(МОСКВА)

Широкое применение вычислительной техники в процессе принятия и реализации решений повысило интерес к формальным моделям выбора решений и к абстрактной теории выбора [1, 17, 23]. В данной работе установлена тесная связь задач анализа свойств отношений в моделях многокритериального выбора с проблематикой теории группового (коллективного) выбора, инициированной известной теоремой Эрроу [17, 19, 21, 23]. С помощью развитых в работе логических методов получено значительное продвижение в каждой из этих областей.

В задачах многокритериального выбора варианты характеризуются наборами оценок по некоторой совокупности критериев, а выбор осуществляется на основе бинарного отношения на множестве наборов, описывающего «предпочтительность» одних наборов оценок другим. Отношение называется *порядковым* [4] (*координатным* [10]), если для любой пары наборов оно однозначно определяется результатом сравнения (больше, меньше, равно) одноименных компонент. Порядковое отношение ρ может быть описано двузначной функцией g_ρ от трехзначных аргументов [4, 10].

При построении и исследовании моделей многокритериального выбора возникают задачи анализа свойств порядковых отношений, состоящие в том, чтобы по ρ (точнее, функции g_ρ) определить, является ли отношение ρ транзитивным, ацикличным и др. Этим задачам уделено большое внимание в [4, 10], но результаты там носят лишь качественный характер и не приводят к эффективным алгоритмам. В данной работе операции над отношениями ρ сведены к преобразованиям функций g_ρ и с помощью развитой здесь техники исследования двузначных функций от трехзначных аргументов получены эффективные (полиномиальные) алгоритмы анализа основных свойств монотонных (правильных [4]) порядковых отношений (в немонотонном случае эти задачи оказываются NP-трудными).

В теории группового выбора изучаются вопросы выработки согласованных решений относительно выбора «лучших» вариантов. Варианты здесь являются уже некоторыми абстрактными объектами, не имеющими критериального описания. В наиболее распространенных моделях каждый индивидуум i $(i=\overline{1, n})$, принимающий участие в групповом выборе, характеризуется бинарным отношением r_i, заданным на множестве вариантов и соответствующим его «системе предпочтений». Требуется «агрегировать» набор индивидуальных отношений в групповое отношение $r=F(r_1, \ldots, r_n)$, на основе которого будет производиться окончательный выбор.

Систематическое изучение операторов агрегирования ведет начало с исследований Эрроу [17], который сформулировал ряд аксиоматических требований к операторам, каждое из которых представляется необходимым, и доказал их несовместность. Данный факт получил в литературе название «парадокса Эрроу». Критический анализ использованных аксиом привел к рассмотрению некоторых других требований, видоизменивших парадокс, но не устранивших его.

Формальные требования к операторам агрегирования могут быть разделены на два класса — характеристические условия и структурные ограничения. Первые относятся к свойствам оператора, вторые — к областям его определения и значений. Основным характеристическим условием является бинарность («независимость от посторонних вариантов» в терминологии Эрроу), другими примерами могут служить монотонность операторов, нейтральность к вариантам (подробнее в § 3 данной работы). Структурные ограничения задаются классами отношений $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$. Любой набор отношений класса $\mathcal{R}_1$ оператор должен переводить в групповое отношение класса $\mathcal{R}_2$. Естественно предположить, что при совпадении индивидуальных отношений $r_1 = \ldots = r_n$ групповое отношение будет тем же самым, поэтому обычно считают $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$.

В последнее время изучение парадокса Эрроу приняло более конструктивный характер. Появился целый ряд исследований, в которых рассматриваются совместные наборы характеристических условий и структурных ограничений и находится явный вид удовлетворяющих им операторов [2, 3, 5—9, 12, 18, 20]. Эта задача получила название задачи синтеза операторов.

В данной работе показано, что задача синтеза операторов родственна задаче анализа свойств порядковых отношений, а в некоторых постановках — эквивалентна ей. Это позволило найти вид операторов для всех типов основных структурных ограничений, рассматриваемых в теории выбора, и для наиболее распространенного набора характеристических условий. Тем самым получено новое доказательство известных результатов о явном виде агрегирующих операторов, некоторые из известных результатов усилены, установлен ряд новых фактов.

Найденное соответствие операторов и порядковых отношений позволяет объединить исследования в этих областях, ранее проводившиеся параллельно. Оно дало возможность связать ряд результатов по агрегированию с фактами из классической теории отношений (леммой Шпильрайна, теоремой Душника — Миллера). Отметим также, что данный подход сводит достаточно сложные объекты (операторы на множестве отношений) к простым объектам (порядковым отношениям), что облегчает исследование операторов.

Различные логические методы, отличные от методов данной работы, применялись для исследования задач агрегирования в [5, 8, 9, 22], а для анализа порядковых отношений — в [4, 10].

Считаю необходимым выразить признательность Ф. Т. Алескерову, А. В. Владимирову, В. И. Данилову и В. С. Левченкову за полезные обсуждения.

§ 1. Логический метод исследования порядковых отношений

1.1. Бинарные отношения. Будем рассматривать бинарные отношения r на некотором множестве Ω $(r \subseteq \Omega^2)$. Пусть x, y, z, v — произвольные элементы из Ω. Отношение r называется *рефлексивным*, если xrx; *антирефлексивным*, если $x\bar{r}x$; *асимметричным*, если $xry \Rightarrow y\bar{r}x$; *антисимметричным*, если $(x \neq y \,\&\, xry) \Rightarrow y\bar{r}x$; *полным*, если $xry \vee yrx$; *связным*, если $x \neq y \Rightarrow xry \vee yrx$; *транзитивным*, если $xry \,\&\, yrz \Rightarrow xrz$; *негатранзитивным*, если $x\bar{r}y \,\&\, y\bar{r}z \Rightarrow x\bar{r}z$.

Двойственным к r назовем отношение $r^*=\overline{r^{-1}}=\Omega^2\backslash r^{-1}$, где r^{-1} обратно к r: $xr^{-1}y \Leftrightarrow yrx$. Поскольку $\overline{(r^{-1})}=(\overline{r})^{-1}$, то двойственное отношение будем записывать в виде $\overline{r}^{-1}$, не указывая очередности выполнения операций обращения и дополнения. Очевидно, $(r^*)^*=r$.

Легко проверить, что пары свойств: рефлексивность — антирефлексивность, асимметрия — полнота, антисимметрия — связность, транзитивность — негатранзитивность,— двойственны, т. е. если одно из отношений r, r^* обладает одним из этих свойств, другое обладает вторым. Кроме того, если $r=\Phi(r_1, \ldots, r_n)$, Φ — теоретико-множественная (т.-м.) операция, то $r^*=\Phi^*(r_1^*, \ldots, r_n^*)$, где $\Phi^*(x_1, \ldots, x_n)=\overline{\Phi}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ — операция, двойственная к Φ (черта означает дополнение множества). Действительно,

$$r^*=(\overline{\Phi}(r_1, \ldots, r_n))^{-1}=\overline{\Phi}(r_1^{-1}, \ldots, r_n^{-1})=\overline{\Phi}(\overline{r}_1^*, \ldots, \overline{r}_n^*).$$

1.2. Порядковые отношения. Дальше вплоть до § 3 будем считать, что множество Ω совпадает с n-мерным действительным пространством R^n. Исходя из интерпретации в терминах выбора, точки $\tilde{x}=(x_1, \ldots, x_n)\in R^n$ будем называть *вариантами*, компоненту x_i — *оценкой варианта* $\tilde{x}$ по i-му критерию, а само пространство R^n — *критериальным*.

Результат сравнения вариантов $\tilde{x}=(x_1, \ldots, x_n)$, $\tilde{y}=(y_1, \ldots, y_n)$ будем описывать набором $\Delta(\tilde{x}, \tilde{y})\in\{-1, 0, +1\}^n$, где $\Delta(\tilde{x}, \tilde{y})=(\operatorname{sign}(x_1-y_1), \ldots, \operatorname{sign}(x_n-y_n))$, $\operatorname{sign}(z)$ означает соответственно $+1$, -1, 0 при $z>0$, $z<0$, $z=0$. Отношение ρ на R^n ($\rho\subseteq R^{2n}$) назовем *порядковым*, если $(\Delta(\tilde{x}, \tilde{y})=\Delta(\tilde{z}, \tilde{v}))\Rightarrow(\tilde{x}r\tilde{y}\Leftrightarrow\tilde{z}r\tilde{v})$. Порядковое отношение ρ называется *правильным*, если выполнено свойство монотонности $(\tilde{z}\geqslant\tilde{x}\,\&\,\tilde{x}\rho\tilde{y})\Rightarrow\tilde{z}\rho\tilde{y}$, где $\tilde{z}\geqslant\tilde{x}\Leftrightarrow z_1\geqslant x_1, \ldots, z_n\geqslant x_n$.

Обозначим через $P_{3,2}$ класс двузначных функций $g(u_1, \ldots, u_n)=g(\tilde{u})$ от трехзначных аргументов, где $u_s\in\{-1, 0, +1\}$, $s=\overline{1, n}$, $(\forall\tilde{u})(g(\tilde{u})\in\{0, 1\})$. Порядковое отношение ρ однозначно задается представляющей функцией $g_\rho(\tilde{u})\in P_{3,2}$, связанной с ρ соотношением $\tilde{x}\rho\tilde{y}\Leftrightarrow g_\rho(\Delta(\tilde{x}, \tilde{y}))=1$. Нетрудно видеть, что отношение ρ правильно тогда и только тогда, когда g_ρ принадлежит множеству $M_{3,2}$ *монотонных функций* из $P_{3,2}$ (функция g монотонна, если из $\tilde{u}\geqslant\tilde{v}$ следует $g(\tilde{u})\geqslant g(\tilde{v})$).

1.3. Свойства функций класса $P_{3,2}$. Введем функции $p(u)$, $p'(u)\in P_{3,2}$ от одного (трехзначного) переменного, положив $p(u)=1\Leftrightarrow u>0$, $p'(u)=1\Leftrightarrow u\geqslant 0$. Очевидно, $p(u)\vee p'(u)=p'(u)$, $p(u)\,\&\,p'(u)=p(u)$.

Для функций $g\in P_{3,2}$ будем рассматривать представления

$$g(u_1, \ldots, u_n)=f(p(u_1), \ldots, p(u_n), p'(u_1), \ldots, p'(u_n)), \tag{1.1}$$

где f — булева функция. Введя обозначения p_i и p_i' вместо $p(u_i)$ и $p'(u_i)$ и положив $\tilde{p}=(p_1, \ldots, p_n)$, $\tilde{p}'=(p_1', \ldots, p_n')$, запишем (1.1) в виде

$$g(\tilde{u})=f(\tilde{p}, \tilde{p}'). \tag{1.2}$$

1.1°. *Всякая функция* g *из* $P_{3,2}$ *представима в виде* (1.2). Действительно, учитывая, что $u_i=1\Leftrightarrow p_i=1$, $u_i=0\Leftrightarrow\overline{p}_ip_i'=1$, $u_i=-1\Leftrightarrow\overline{p}_i'=1$, можно каждому набору $\tilde{\sigma}\in\{-1, 0, +1\}^n$ соотнести конъюнкцию, составленную из p_i, p_i' и их отрицаний, обращающуюся в 1 лишь на наборе $\tilde{\sigma}$, а в качестве представления (1.2) функции g взять дизъюнкцию конъюнкций, отвечающих ее единичным значениям. Эти рассуждения относятся к функциям, не равным тождественно нулю, а тождественно нулевая функция может быть записана, например, в виде $p_i\overline{p}_i$. □

Здесь и дальше значок □ указывает конец доказательства.

Конъюнкцию $q_{i_1}q_{i_2}\ldots q_{i_s}$, где $q_i\in\{p_i, p_i', \overline{p}_i, \overline{p}_i'\}$, назовем *элементарной*, если при каждом $i=\overline{1, n}$ в нее входит либо не более одного сомножителя, относящегося к переменной u_i, либо произведение двух сомножителей $p'_i\bar{p}_i$. Легко видеть, что всякая конъюнкция, если она не равна тождественно нулю, приводится к элементарной за счет устранения поглощаемых сомножителей. Элементарную конъюнкцию будем записывать также в виде $q_1 \ldots q_n$, где $q_i \in \{p_i, p'_i, \bar{p}_i, \bar{p}'_i, p'_i\bar{p}_i, 1\}$ называется *элементарным сомножителем*, причем $q_i = 1$ означает отсутствие сомножителя, относящегося к переменной u_i. Пустую конъюнкцию, тождественно равную 1, также удобно считать элементарной. Дизъюнкция элементарных конъюнкций называется *дизъюнктивной нормальной формой* (д. н. ф.). Из доказательства утверждения 1.1° следует

1.2°. *Для всякой функции g из $P_{3,2}$, $g \not\equiv 0$, существует д. н. ф.*

Конъюнкцию $K = q_1 \ldots q_n$, в которой $q_i \in \{p_i, p'_i, 1\}$, $i = \overline{1, n}$, будем называть *монотонной*. Если монотонная конъюнкция K_1 получена из монотонной конъюнкции K_2 заменой некоторых p'_i на 1, а p_i на p'_i либо 1, то $K_1 \vee K_2 = K_1$, и говорят, что K_1 *поглощает* K_2. Удаление конъюнкции K_2 по этому правилу называется *приведением*. Подобно случаю булевых функций, можно доказать

1.3°. *Если* $g \in M_{3,2}$, $g \not\equiv \mathrm{const}$, *то для* g *существует единственная д. н. ф., конъюнкции которой монотонны и не поглощают друг друга.* Такую д. н. ф. будем называть *приведенной*.

По аналогии с понятием двойственной булевой функции $f^*(u_1, \ldots, u_n) = \bar{f}(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)$ определим *двойственную* к $g(\tilde{u})$ *функцию*, положив $g^*(\tilde{u}) = \bar{g}(-\tilde{u})$, где $-\tilde{u} = -(u_1, \ldots, u_n) = (-u_1, \ldots, -u_n)$. Таким образом, здесь для трехзначной переменной $u \in \{-1, 0, +1\}$ роль отрицания играет диаметральное отрицание $-u$, а отрицание $\bar{g}$ понимается в булевом смысле.

Очевидно, $(g^*)^* = g$. Кроме того, если φ — булева функция и $g_1, \ldots, g_k \in P_{3,2}$, то

$$(\varphi(g_1(\tilde{u}), \ldots, g_k(\tilde{u})))^* = \varphi^*(g_1^*(\tilde{u}), \ldots, g_k^*(\tilde{u})). \qquad (1.3)$$

Действительно,

$$(\varphi(g_1(\tilde{u}), \ldots, g_k(\tilde{u})))^* = \bar{\varphi}(g_1(-\tilde{u}), \ldots, g_k(-\tilde{u})) =$$
$$= \varphi^*(\bar{g}_1(-\tilde{u}), \ldots, \bar{g}_k(-\tilde{u})) = \varphi^*(g_1^*(\tilde{u}), \ldots, g_k^*(\tilde{u})).$$

Переход в (1.2) к двойственной функции g^* сводится к построению двойственной булевой функции f^* и замене всех p_i на p'_i, а p'_i на p_i, поскольку справедливо

1.4°. *Если g представлена в виде* (1.2), *то*

$$g^*(\tilde{u}) = f^*(\tilde{p}', \tilde{p}).$$

Это вытекает из (1.3) с учетом легко проверяемого факта двойственности функций $p(u)$ и $p'(u)$. □

Обычное понятие самодвойственной функции как функции, удовлетворяющей условию $g = g^*$, в классе $P_{3,2}$ введено быть не может, так как на наборе $\tilde{0} = (0, \ldots, 0)$ имеет место $g^*(\tilde{0}) = \bar{g}(-\tilde{0}) = \bar{g}(\tilde{0})$. В связи с этим функцию g назовем *самодвойственной*, если

$$D_{\tilde{0}}g(\tilde{u}) = D_{\tilde{0}}g^*(\tilde{u}), \qquad (1.4)$$

где $D_{\tilde{0}} = p_1 \vee \bar{p}'_1 \vee \ldots \vee p_n \vee \bar{p}'_n$. С помощью функции $D_{\tilde{0}}$, равной 1 всюду кроме $\tilde{0}$, исключается различие g и g^* на нулевом наборе. Эквивалентное (1.4) двойственное определение имеет вид $K_{\tilde{0}} \vee g(\tilde{u}) = K_{\tilde{0}} \vee g^*(\tilde{u})$, где $K_{\tilde{0}} = \bar{p}_1 p'_1 \ldots \bar{p}_n p'_n$.

Для функций $g \in M_{3,2}$ эти определения могут быть заменены на

$$D_0^{\pm} g(\tilde{u}) = D_0^{\pm} g^*(\tilde{u}) \tag{1.5}$$

и $K_0^{\pm} \vee g(\tilde{u}) = K_0^{\pm} \vee g^*(\tilde{u})$, где $D_0^{\pm} = p_1 \vee \ldots \vee p_n$ и $K_0^{\pm} = p_1' \ldots p_n'$. Действительно, домножив обе части (1.4) на $p_1 \vee \ldots \vee p_n$, придем к (1.5). Для доказательства в другую сторону предположим, что имеет место (1.5), а (1.4) нарушено. Без ограничения общности можно считать, что на некотором наборе $\tilde{\sigma} \neq \tilde{0}$ правая часть (1.4) обращается в 1, а левая — в 0. В этом случае $g(\tilde{\sigma}) = 1$, а $g^*(\tilde{\sigma}) = \bar{g}(-\tilde{\sigma}) = 0$, т. е. $g(\tilde{\sigma}) = g(-\tilde{\sigma})$. Переобозначим через $\tilde{\sigma}$ тот из наборов $\tilde{\sigma}$ и $-\tilde{\sigma}$, который имеет хотя бы одну компоненту $+1$. Для него $p_1 \vee \ldots \vee p_n = 1$ и (1.5) дает $g(\tilde{\sigma}) = g^*(\tilde{\sigma}) = \bar{g}(-\tilde{\sigma})$, что противоречит равенству $g(\tilde{\sigma}) = g(-\tilde{\sigma})$, установленному ранее.

Двойственно элементарному сомножителю вводится понятие *элементарного слагаемого* $d_i \in \{p_i, p_i', \bar{p}_i, \bar{p}_i', p_i \vee \bar{p}_i', 0\}$, определяются *элементарная дизъюнкция* $D = d_1 \vee \ldots \vee d_n$ и *конъюнктивная нормальная форма* (к. н. ф.) — конъюнкция элементарных дизъюнкций. Любая функция $g \in P_{3,2}$, $g \neq 1$, представима в виде к. н. ф., а для всякой функции $g \in M_{3,2}$, $g \neq \text{const}$, существует единственная *приведенная к. н. ф.* (понятия, связанные с приведенной к. н. ф., двойственны соответствующим понятиям для д. н. ф.). Если g равна константе 0 или 1, по определению считаем, что ее приведенные д. н. ф. и к. н. ф. совпадают с этой константой.

1.4. Примеры порядковых отношений. Приведем важные для дальнейшего примеры отношений.

1) *Отношение Парето* π: $\tilde{x}\pi\tilde{y} \Leftrightarrow \tilde{x} \geqslant \tilde{y} \,\&\, \tilde{x} \neq \tilde{y}$. Ему соответствуют д. н. ф. и к. н. ф.

$$g_\pi = p_1 p_2' \ldots p_n' \vee p_1' p_2 p_3' \ldots p_n' \vee \ldots \vee p_1' \ldots p_{n-1}' p_n,$$

$$g_\pi = p_1' p_2' \ldots p_n' (p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n).$$

2) *Отношение лексикографии* λ:

$$\tilde{x}\lambda\tilde{y} \Leftrightarrow (x_{i_1} > y_{i_1}) \vee (x_{i_1} = y_{i_1} \,\&\, x_{i_2} > y_{i_2}) \vee \ldots$$
$$\ldots \vee (x_{i_1} = y_{i_1} \,\&\, \ldots \,\&\, x_{i_{n-1}} = y_{i_{n-1}} \,\&\, x_{i_n} > y_{i_n}), \quad i_1 \neq \ldots \neq i_n.$$

Д. н. ф. и к. н. ф. имеют вид

$$g_\lambda = p_{i_1} \vee p_{i_1}' p_{i_2} \vee \ldots \vee p_{i_1}' \ldots p_{i_{n-1}}' p_{i_n},$$

$$g_\lambda = p_{i_1}' (p_{i_1} \vee p_{i_2}') \ldots (p_{i_1} \vee \ldots \vee p_{i_{n-2}} \vee p_{i_{n-1}}')(p_{i_1} \vee \ldots \vee p_{i_n}). \tag{1.6}$$

Отношение λ' с представляющей функцией

$$g_{\lambda'} = p_{i_1} \vee p_{i_1}' p_{i_2} \vee \ldots \vee p_{i_1}' \ldots p_{i_{k-1}}' p_{i_k}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n, \quad i_1 \neq \ldots \neq i_k,$$

будем называть *неполной лексикографией*. Случай $k = 0$ соответствует пустому отношению λ'. Легко проверить, что функция g_λ самодвойственна, а $g_{\lambda'}$ при $k < n$ нет.

Укажем связь отношений лексикографии и Парето. Пусть λ_i, $i = \overline{1, n}$ — произвольная лексикография (полная), в которой старшей является переменная с номером i (т. е. $g_{\lambda_i} = p_i \vee \ldots$). Используя представления функций g_{λ_i} в виде к. н. ф. и правила булевой алгебры, преобразуем конъюнкцию

$$\mathop{\&}_{1 \leqslant i \leqslant n} g_{\lambda_i} = p_1' \ldots p_n' (p_1 \vee \ldots \vee p_n) = g_\pi.$$

Таким образом, пересечение λ_i, $i=\overline{1, n}$, дает π. Отметим также, что π совпадает с пересечением всех лексикографий.

1.5. Теоретико-множественные операции и обращение отношений. Операции над отношениями сводятся к определенным преобразованиям представляющих функций.

1.5°. *Обратному отношению* ρ^{-1} *отвечает представляющая функция* $g_{\rho^{-1}}(\tilde{u}) = g_\rho(-\tilde{u})$, *где* $-\tilde{u} = (-u_1, \ldots, -u_n)$.

Это вытекает из соотношения $\Delta(\tilde{y}, \tilde{x}) = -\Delta(\tilde{x}, \tilde{y})$. □

Отношение $\widehat{\rho}$, полученное из ρ инвертированием (сменой направлений) некоторых координатных осей в R^n, назовем *однотипным* с ρ. Легко проверить, что $p(-u)=\bar{p}'(u)$, $p'(-u)=\bar{p}(u)$. Поэтому, если функция g_ρ задана в виде (1.2), то $g_{\widehat{\rho}}$ получается из g_ρ заменой p_i на $\bar{p}'_i$ и p'_i на $\bar{p}_i$ для переменных u_i, соответствующих инвертированным осям. В частности, для нахождения $g_{\rho^{-1}}$ достаточно в (1.2) заменить все p_i на $\bar{p}'_i$, а p'_i на $\bar{p}_i$.

Отношение, однотипное с лексикографией λ (неполной лексикографией λ'), будем называть *обобщенной лексикографией* (*обобщенной неполной лексикографией*) и обозначать $\widehat{\lambda}$ (соответственно $\widehat{\lambda}'$). Нетрудно проверить, что представляющая функция отношения обобщенной лексикографии самодвойственна.

1.6°. *Если* $\rho = \Phi(\rho_1, \ldots, \rho_k)$, *где* Φ — *т.-м. операция, то* $g_\rho(\tilde{u}) = \varphi(g_{\rho_1}(\tilde{u}), \ldots, g_{\rho_k}(\tilde{u}))$, *где* φ — *булева функция, соответствующая операции* Φ.

Этот факт очевиден. □

1.7°. *Представляющая функция отношения, двойственного к* ρ, *двойственна к* g_ρ, *т. е.* $g_{\rho^*}(\tilde{u}) = g^*_\rho(\tilde{u})$.

Действительно, согласно 1.5° и 1.6°,

$$g_{\rho^*}(\tilde{u}) = g_{\bar{\rho}^{-1}}(\tilde{u}) = \bar{g}_{\rho^{-1}}(\tilde{u}) = \bar{g}_\rho(-\tilde{u}) = g^*_\rho(u). \quad \square$$

Отсюда и из монотонности представляющих функций правильных отношений следует, что ρ^* правильно тогда и только тогда, когда ρ правильно.

1.6. Произведение отношений. *Произведением отношений* ρ_1 *и* ρ_2 называется отношение $\rho_1 \circ \rho_2$, для которого $\tilde{x}(\rho_1 \circ \rho_2)\tilde{y} \Leftrightarrow (\exists \tilde{z})(\tilde{x}\rho_1\tilde{z} \mathbin{\&} \tilde{z}\rho_2\tilde{y})$.

1.8°. *Произведение порядковых отношений является порядковым отношением, а правильных отношений — правильным отношением.*

Первый факт следует из того, что если $\Delta(\tilde{x}, \tilde{y}) = \Delta(\tilde{x}', \tilde{y}')$, то по любому $\tilde{z}$ найдется $\tilde{z}'$, для которого $\Delta(\tilde{x}, \tilde{z}) = \Delta(\tilde{x}', \tilde{z}')$ и $\Delta(\tilde{z}, \tilde{y}) = \Delta(\tilde{z}', \tilde{y}')$. Второй вытекает из сохранения операцией произведения свойства монотонности порядковых отношений. □

Опишем теперь операцию *композиции* функций из $P_{3,2}$, соответствующую произведению отношений. Укажем вначале, как осуществляется композиция монотонных функций. При этом операцию композиции сперва определим для элементарных сомножителей, затем для элементарных конъюнкций и после этого — для произвольных функций из $M_{3,2}$.

Монотонные элементарные сомножители q_i имеют один из видов p_i, p'_i и 1. Операция композиции $q_i \circ q'_i$ выполняется по правилам: $q_i \circ 1 = 1 \circ q'_i = 1$, $q_i \circ q'_i = q_i q'_i$ (конъюнкция) при $q_i, q'_i \neq 1$. Композицию монотонных конъюнкций $K = q_1, \ldots, q_n, K' = q'_1 \ldots q'_n$ определим равенством

$$K \circ K' = (q_1 \circ q'_1) \ldots (q_n \circ q'_n). \tag{1.7}$$

Пусть теперь $g, g' \in M_{3,2}$, $g, g' \not\equiv \mathrm{const}$, произвольны и их приведенные д. н. ф. имеют вид $g = K_1 \vee \ldots \vee K_a$, $g' = K'_1 \vee \ldots \vee K'_b$. Композицией функций g и g' назовем функцию

$$g \circ g' = \bigvee_{s=\overline{1,a},\ t=\overline{1,b}} K_s \circ K'_t. \tag{1.8}$$

В силу единственности приведенной д. н. ф. эта операция задана однозначно. Если же $g \equiv \text{const}$ или $g' \equiv \text{const}$, то считаем по определению $g \circ g' = gg'$.

Операция композиции произвольных функций $g,\ g' \in P_{3,2}$ определяется на основе операции для $g,\ g' \in M_{3,2}$. Наряду с переменными u_i, $i = \overline{1,\ n}$, введем переменные $v_i = -u_i$, полученные инвертированием. Тогда $p(v_i) = p(-u_i) = \bar{p}'(u_i) = \bar{p}'_i$, $p'(v_i) = p'(-u_i) = \bar{p}(u_i) = \bar{p}_i$. Пусть $K = q_1 \ldots q_n$ — элементарная конъюнкция (немонотонная). Заменив в ней $\bar{p}_i$ на $p'(v_i)$, $\bar{p}'_i$ на $p(v_i)$ и учитывая, что $p_i = p(u_i)$, $p'_i = p'(u_i)$, придем к монотонной конъюнкции $K^+ = q'_1 q''_1 \ldots q'_n q''_n$ от переменных $u_1, \ldots, u_n$, $v_1, \ldots, v_n$. Здесь $q'_i \in \{p(u_i),\ p'(u_i),\ 1\}$, $q''_i \in \{p(v_i),\ p'(v_i),\ 1\}$, где 1 означает отсутствие соответствующего сомножителя.

Чтобы найти композицию $K_1 \circ K_2$ произвольных элементарных конъюнкций, нужно перейти от них к монотонным конъюнкциям K_1^+ и K_2^+, вычислить $K_3^+ = K_1^+ \circ K_2^+$ и, вернувшись к старым переменным (подстановкой $p(v_i) = \bar{p}'_i$, $p'(v_i) = \bar{p}_i$, $p(u_i) = p_i$, $p'(u_i) = p'_i$), превратить K_3^+ в немонотонную конъюнкцию K_3 и положить $K_1 \circ K_2 = K_3$. Результат композиции элементарных конъюнкций является элементарной конъюнкцией.

В дальнейшем понадобится явный вид операции композиции непосредственно для немонотонных элементарных сомножителей. Она представлена в табл. 1 (индекс i в обозначении сомножителей опущен).

Таблица 1

	p	p'	$\bar{p}$	$\bar{p}'$	$p'\ \bar{p}$	1
p	p	p	1	1	p	1
p'	p	p'	1	1	p'	1
$\bar{p}$	1	1	$\bar{p}$	$\bar{p}'$	$\bar{p}$	1
$\bar{p}'$	1	1	$\bar{p}'$	$\bar{p}'$	$\bar{p}'$	1
$p'\bar{p}$	p	p'	$\bar{p}$	$\bar{p}'$	$p'\ \bar{p}$	1
1	1	1	1	1	1	1

Из таблицы видно, что операция композиции выполняется по правилам: $q_i \circ 1 = 1 \circ q_i = 1$, $q_i \circ (p'_i \bar{p}_i) = (p'_i \bar{p}_i) \circ q_i = q_i$, $q_i \circ q'_i = q'_i \circ q_i = 1$ для $q_i \in \{p_i,\ p'_i\}$, $q'_i \in \{\bar{p}_i,\ \bar{p}'_i\}$, в остальных случаях $q_i \circ q'_i = q_i q'_i$ (конъюнкция). При наличии табл. 1 нет необходимости в переходе от K, K' к монотонным конъюнкциям. Композиция $K \circ K'$ элементарных конъюнкций $K = q_1 \ldots q_n$ и $K' = q'_1 \ldots q'_n$ может быть найдена в соответствии с (1.7).

Пусть функции $g,\ g' \in P_{3,2}$, $g,\ g' \not\equiv \text{const}$, заданы своими д. н. ф. $g = K_1 \vee \ldots \vee K_a$, $g' = K'_1 \vee \ldots \vee K'_b$. Их композицией назовем функцию, вычисляемую в соответствии с (1.8). Если g или g' равна константе, полагаем $g \circ g' = gg'$. Формально результат операции зависит от д. н. ф., используемых для представления $g,\ g'$. Но, как мы увидим дальше, этой зависимости на самом деле нет: разные д. н. ф. функций $g,\ g'$ приводят к разным д. н. ф. одной и той же функции $g \circ g'$.

Из табл. 1 видно, что операция композиции элементарных конъюнкций идемпотентна ($K \circ K = K$), коммутативна ($K_1 \circ K_2 = K_2 \circ K_1$), ассоциативна ($K_1 \circ (K_2 \circ K_3) = (K_1 \circ K_2) \circ K_3$) и монотонна ($K_1 \geqslant K_2 \Rightarrow K_1 \circ K_3 \geqslant$

$\geqslant K_2 \circ K_3$). Последние три свойства с учетом анонсированного выше факта независимости $g \circ g'$ от представления функций g и g' переносятся на произвольные $g, g' \in P_{3,2}$.

1.9°. *Операция композиции функций*

а) *коммутативна*: $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$;

б) *ассоциативна*: $g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3$;

в) *монотонна*: $g_1 \geqslant g_2 \Rightarrow g_1 \circ g_3 \geqslant g_2 \circ g_3$.

Из б) следует, что можно рассматривать многоместную операцию $g_1 \circ g_2 \circ \ldots \circ g_s$.

Связь операции произведения отношений и композиции функций видна из следующего утверждения.

1.10°. *Представляющая функция произведения* $\rho_1 \circ \rho_2$ *образуется композицией представляющих функций для* ρ_1 *и* ρ_2, *т. е.* $g_{\rho_1 \circ \rho_2} = g_{\rho_1} \circ g_{\rho_2}$.

Докажем этот факт для случая $g_{\rho_1}, g_{\rho_2} \not\equiv \mathrm{const}$ (при $g_{\rho_1} = \mathrm{const}$ или $g_{\rho_2} = \mathrm{const}$ он очевиден).

Легко видеть, что если элементарная конъюнкция $K = q_1 \ldots q_n$ обращается в 1 на наборе $\Delta(\tilde{x}, \tilde{y})$, то это имеет место тогда и только тогда, когда при каждом i выполнено соотношение $x_i \nu_i y_i$, где $\nu_i \in \{<, \leqslant, >, \geqslant, =, *\}$ (* означает отсутствие соотношений), а ν_i связано с q_i как указано в табл. 2 (индекс i опущен). При таком соответствии табл. 1 может быть переписана в виде табл. 3.

Таблица 2

q	p	p'	$\bar{p}$	$\overline{p'}$	$p'\,\bar{p}$	1
ν	$>$	$\geqslant$	$\leqslant$	$<$	$=$	*

Из ее рассмотрения видно, что если для любых чисел x, y и z взять столбец ν' и строку ν'' такие, что справедливы соотношения $x\nu' z$ и $z\nu'' y$, то в их пересечении находится соотношение, которому удовлетворяют x и y. При этом любое соотношение между x и y, указанное в клетке, может быть достигнуто при подходящем выборе z.

Таблица 3

	$>$	$\geqslant$	$\leqslant$	$<$	$=$	*
$>$	$>$	$>$	*	*	$>$	*
$\geqslant$	$>$	$\geqslant$	*	*	$\geqslant$	*
$\leqslant$	*	*	$\leqslant$	$<$	$\leqslant$	*
$<$	*	*	$<$	$<$	$<$	*
$=$	$>$	$\geqslant$	$\leqslant$	$<$	$=$	*
*	*	*	*	*	*	*

Пусть для порядковых отношений ρ_1 и ρ_2 имеет место $\tilde{x}\rho_1\tilde{z}$ и $\tilde{z}\rho_2\tilde{y}$. Тогда найдутся конъюнкции $K^{(1)} = q_1^{(1)} \ldots q_n^{(1)}$ из д. н. ф. g_{ρ_1} и $K^{(2)} = q_1^{(2)} \ldots q_n^{(2)}$ из д. н. ф. g_{ρ_2}, обращающиеся в 1 соответственно на наборах $\Delta(\tilde{x}, \tilde{z})$ и $\Delta(\tilde{z}, \tilde{y})$. Из сказанного выше следует, что при каждом i соотношения $(<, >, =)$ между x_i, z_i и между z_i, y_i лежат в пределах соотношений, отвечающих значениям $q_i^{(1)}$, $q_i^{(2)}$, а x_i, y_i удовлетворяют соотношению, отвечающему значению $q_i^{(1)} \circ q_i^{(2)}$. Поэтому конъюнкция $K^{(1)} \circ K^{(2)}$ обращается на наборе $\Delta(\tilde{x}, \tilde{y})$ в 1, а вместе с ней и функция $g_{\rho_1} \circ g_{\rho_2}$. Значит, отношение с представляющей функцией $g_{\rho_1} \circ g_{\rho_2}$ не меньше $\rho_1 \circ \rho_2$.

Обратно, если на наборе $\Delta(\tilde{x}, \tilde{y})$ функция $g_{\rho_1} \circ g_{\rho_2}$ равна 1, то обращается в 1 композиция $K^{(1)} \circ K^{(2)}$ некоторых конъюнкций из д. н. ф. g_{ρ_1}, g_{ρ_2}. В силу достижимости всех соотношений в табл. 3 найдется $\tilde{z}$, для которого $K^{(1)}(\Delta(\tilde{x}, \tilde{z})) = 1$ и $K^{(2)}(\Delta(\tilde{z}, \tilde{y})) = 1$. Это означает $\tilde{x}\rho_1\tilde{z}$ и $\tilde{z}\rho_2\tilde{y}$. Откуда $\tilde{x}(\rho_1 \circ \rho_2)\tilde{y}$ и отношение с представляющей функцией $g_{\rho_1} \circ g_{\rho_2}$ не больше $\rho_1 \circ \rho_2$. □

Утверждение 1.10° и независимость отношения $\rho_1 \circ \rho_2$ от способа представления функции $g_{\rho_1 \circ \rho_2}$ приводят к упоминавшемуся выше факту инвариантности операции $g_1 \circ g_2$ относительно представления функций

g_1 и g_2 в виде д. н. ф. Из 1.9° и 1.10° следует, что произведение порядковых отношений коммутативно (а также ассоциативно и монотонно, как для всяких отношений).

1.7. Степени отношений и транзитивное замыкание. Индуктивно определим s-ю *степень отношения* ρ, положив $\rho^1=\rho$, $\rho^s=\rho^{s-1}\circ\rho$ $(s\geqslant 2)$.

1.11°. *Степени порядковых отношений являются порядковыми отношениями, а степени правильных отношений — правильными отношениями. При этом* $\rho\subseteq\rho^2\subseteq\ldots\subseteq\rho^s\subseteq\rho^{s+1}\subseteq\ldots$

Порядковость (или правильность) отношения ρ^s следует из 1.8°. Согласно 1.10° функция g_{ρ^s} является дизъюнкцией всевозможных композиций $K_{u_1}\circ\ldots\circ K_{u_s}$, где $K_{u_1},\ldots,K_{u_s}$ взяты из д. н. ф. функций g_ρ. Но в $g_{\rho^{s+1}}$ имеются конъюнкции

$$K_{u_1}\circ\ldots\circ K_{u_{s-1}}\circ K_{u_s}\circ K_{u_s}=K_{u_1}\circ\ldots\circ K_{u_{s-1}}\circ\left(K_{u_s}\circ K_{u_s}\right)=K_{u_1}\circ\ldots\circ K_{u_s}.$$

Поэтому $g_{\rho^{s+1}}\geqslant g_{\rho^s}$ или, что то же самое, $\rho^{s+1}\supseteq\rho^s$. □

Обозначим через g^s s-кратную композицию $g\circ g\circ\ldots\circ g$. Из 1.10° следует, что $g_{\rho^s}=\overset{s}{g_\rho}$. Результат стабилизации последовательности $\{\rho^s\}$ обозначим через $[\rho]$ и назовем *транзитивным замыканием* отношения ρ. В силу 1.11° транзитивное замыкание порядкового отношения является порядковым отношением, а правильного отношения — правильным отношением. Если обозначить через $[g]$ результат стабилизации последовательности $g\leqslant g^2\leqslant g^3\leqslant\ldots$, то $g_{[\rho]}=[g_\rho]$.

Следующее утверждение дает верхнюю оценку числа s, при котором наступает стабилизация $g^s=[g]$.

1.12°. *Если д. н. ф. функции g содержит l конъюнкций, то стабилизация последовательности $\{g^s\}$ происходит при $s\leqslant\min(2n,\ l)$, а для $g\in M_{3,2}$ — при $s\leqslant\min(n,\ l)$.*

Действительно, пусть $g=K_1\vee\ldots\vee K_l$. Тогда

$$g^s=\bigvee_{i_1,\ldots,i_s}K_{i_1}\circ\ldots\circ K_{i_s}$$

(некоторые из чисел $i_1,\ldots,i_s$ могут совпадать). Одинаковые конъюнкции могут быть устранены из $K_{i_1}\circ\ldots\circ K_{i_s}$ (свойство идемпотентности). В результате получится композиция не более l конъюнкций, которая содержится в g^l. Отсюда следует, что можно взять $s\leqslant l$.

Из табл. 1 видно, что в множестве элементарных сомножителей $\{q_j^{(i_1)},\ldots,q_j^{(i_s)}\}$, относящихся к переменной u_j и конъюнкциям $K_{i_1},\ldots,K_{i_s}$, существуют два сомножителя $q_j^{(v)}$ и $q_j^{(w)}$, для которых $q_j^{(v)}\circ q_j^{(w)}=q_j^{(i_1)}\circ\ldots\circ q_j^{(i_s)}$. Выделим при каждом $j\in\overline{1,\ n}$ по два таких сомножителя; тем самым выделятся не более $2n$ конъюнкций из $K_{i_1},\ldots,K_{i_s}$, которым они принадлежат. Их композиция содержится в g^{2n} и совпадает с $K_{i_1}\circ\ldots\circ K_{i_s}$. Поэтому можно взять $s\leqslant 2n$.

В монотонном случае результат композиции $q_j^{(i_1)}\circ\ldots\circ q_j^{(i_s)}$ совпадает с одним из сомножителей. Поэтому оценка $s\leqslant 2n$ заменяется на $s\leqslant n$. □

Нетрудно привести примеры, показывающие, что оценки из 1.12° достигаются как по n, так и по l. Из утверждения 1.12° следует, что построение замыкания $[g]$ путем последовательного возведения в квадрат $g,\ g^2,\ g^4,\ \ldots$ требует не более $]\log_2(\min(2n,\ l)[$ шагов, где $]x[$ означает ближайшее целое к x сверху. Если $g\in M_{3,2}$, то $2n$ может быть заменено на n.

1.8. Анализ свойств порядковых отношений. Следующее утверждение связывает свойства порядковых отношений со свойствами представляющих функций.

1.13°. *Отношение* ρ а) *рефлексивно*, б) *антирефлексивно*, в) *асимметрично*, г) *антисимметрично*, д) *полно*, е) *связно*, ж) *транзитивно*, з) *негатранзитивно тогда и только тогда, когда* а) $g_\rho(\widetilde{0})=1$, б) $g_\rho(\widetilde{0})=0$, в) $g_\rho \leqslant g_\rho^*$, г) $D_{\widetilde{0}} g_\rho \leqslant D_{\widetilde{0}} g_\rho^*$, д) $g_\rho \geqslant g_\rho^*$, е) $D_{\widetilde{0}} g_\rho \geqslant D_{\widetilde{0}} g_\rho^*$, ж) $g_\rho \circ g_\rho \leqslant g_\rho$, з) $g_\rho^* \circ g_\rho^* \leqslant g_\rho^*$.

Пункты а), б) следуют из $\Delta(\widetilde{x}, \widetilde{x})=\widetilde{0}$, п. в) — из того, что если ρ асимметрично, то

$$g_\rho(\widetilde{u}) = 1 \Rightarrow g_\rho(-\widetilde{u}) = 0 \Rightarrow \bar{g}_\rho(-\widetilde{u}) = 1 \Rightarrow g_\rho^*(\widetilde{u}) = 1$$

и эти рассуждения могут быть обращены, п. г) вытекает из в), поскольку различие асимметрии и антисимметрии проявляется лишь при $\widetilde{u}=\widetilde{0}$, пп. д), е) двойственны в), г), п. ж) следует из 1.10° и того, что транзитивность эквивалентна условию $\rho^2 \subseteq \rho$, п. з) двойствен ж). □

Приведем результаты о сложности проверки свойств отношений по представляющим функциям, заданным в виде д. н. ф. и к. н. ф.

1.14°. *Свойства рефлексивности и антирефлексивности эффективно (т. е. полиномиально) проверяемы по д. н. ф. и к. н. ф. Свойства асимметрии и антисимметрии эффективно проверяемы по д. н. ф., а задача проверки этих свойств по к. н. ф.* NP-*полна. Свойства полноты и связности эффективно проверяемы по к. н. ф., а задача проверки этих свойств по д. н. ф.* NP-*полна. Задачи проверки транзитивности и негатранзитивности являются* NP-*полными как в случае д. н. ф., так и в случае к. н. ф.*

Очевидно, что соотношения а) и б) эффективно проверяемы по д. н. ф. и к. н. ф. Если функция g_ρ задана посредством д. н. ф., то двойственное представление g_ρ^* является к. н. ф. и, поскольку

$$(K_1 \vee \ldots \vee K_v \leqslant D_1 \ldots D_u) \Leftrightarrow (K_i \leqslant D_j,\ i=\overline{1, v},\ j=\overline{1, u}),$$

проверка асимметрии с помощью соотношения в) осуществляется эффективно. То же самое относится к свойству антисимметрии, ибо переход от д. н. ф. g_ρ к д. н. ф. функции $D_{\widetilde{0}} g_\rho$ полиномиален, а $D_{\widetilde{0}} g_\rho^*$ представляет собой к. н. ф. Двойственным образом эффективно решается задача распознавания полноты и связности по к. н. ф.

Все остальные задачи являются NP-полными. Докажем это, например, для задачи проверки транзитивности. Случай, когда g_ρ представлена своей д. н. ф., сводится к NP-полной задаче о тождественной истинности д. н. ф. булевых функций. Действительно, пусть задана д. н. ф. булевой функции $f(p_1, \ldots, p_n)$. Если все конъюнкции этой д. н. ф. содержат некоторую переменную p_i, причем в одной и той же форме (p_i либо $\bar{p}_i$), то $f \not\equiv 1$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда такой ситуации нет. Введем отношение ρ, для которого д. н. ф. g_ρ графически совпадает с д. н. ф. f. Композиция всех конъюнкций из д. н. ф. g_ρ тождественно равна 1, поэтому ρ транзитивно в том и только том случае, если $g_\rho \equiv 1$, т. е. $f \equiv 1$.

Проверка транзитивности по к. н. ф. сводится к NP-полной задаче о выполнимости к. н. ф. Пусть $D_1 \ldots D_v$ — к. н. ф. булевой функции $f(p_1, \ldots, p_n)$. Обозначим через $\widehat{f}$ функцию из $P_{3,2}$, задаваемую формулой, графически совпадающей с $D_1 \ldots D_v$, и рассмотрим отношение ρ с представляющей функцией $g_\rho = p_{n+1} \vee \widehat{f} = (p_{n+1} \vee D_1) \ldots (p_{n+1} \vee D_v)$. Если $f \not\equiv 0$, то в силу независимости $\widehat{f}$ от p_{n+1} и p'_{n+1} композиция p_{n+1} с любой конъюнкцией из д. н. ф. функции $\widehat{f}$ дает пустую конъюнкцию. Это означает $[g_\rho] \equiv 1 \not\equiv g_\rho$, т. е. что ρ нетранзитивно. Если же $f \equiv 0$, то $g_\rho = p_{n+1}$

и ρ транзитивно. Таким образом, к. н. ф. выполнима тогда и только тогда, когда ρ нетранзитивно. □

В заключение отметим, что для правильных отношений дизъюнкция $D_{\tilde{0}}$ в условиях г) и е) утверждения 1.13° может быть заменена на $D_{\tilde{0}}^{+}$. Это доказывается аналогично (1.5).

§ 2. Классы порядковых отношений

2.1. Классы отношений. Введем основные классы бинарных отношений (на множестве Ω), рассматриваемые в теории выбора.

Транзитивное антирефлексивное отношение называется (строгим) *частичным порядком* (ч. п.), связный ч. п.— *линейным порядком* (л. п.), а негатранзитивное асимметричное отношение — *слабым порядком* (с. п.). Ч. п. r с дополнительным свойством

$$xry \,\&\, zrv \Rightarrow xrv \vee zry \tag{2.1}$$

называется *интервальным порядком* (и. п.), а и. п. r со свойством $xry \,\&\, \&\, yrz \Rightarrow xrv \vee vrz$ — *полупорядком* (п. п.). Отношение r *ациклично*, если в нем отсутствуют *циклы* $x_1rx_2 \,\&\, x_2rx_3 \,\&\, \ldots \,\&\, x_{s-1}rx_s \,\&\, x_srx_1$, $s \geqslant 1$.

Обозначим соответственно через $\mathscr{P}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{W}$, $\mathscr{I}$ и $\mathscr{S}$ классы отношений частичного, линейного, слабого, интервального порядка и полупорядка, а через $\mathscr{A}$ — класс ацикличных отношений. Имеет место цепочка строгих включений [14]

$$\mathscr{L} \subset \mathscr{W} \subset \mathscr{S} \subset \mathscr{I} \subset \mathscr{P} \subset \mathscr{A}. \tag{2.2}$$

Классы цепочки (2.2) так или иначе связаны с возможностью критериального описания [14]. Отношения $W \in \mathscr{W}$ представимы скалярным критерием φ (числовой функцией на множестве Ω): $xWy \Leftrightarrow \varphi(x) > \varphi(y)$. При дополнительном условии $x \neq y \Rightarrow \varphi(x) \neq \varphi(y)$ получаем отношения класса $\mathscr{L}$. Отношения $I \in \mathscr{I}$ представимы критерием с погрешностью: $xIy \Leftrightarrow \varphi^-(x) > \varphi^+(y)$, где φ^- и φ^+ — нижняя и верхняя оценка критерия φ, $\varphi^-(x) \leqslant \varphi^+(x)$. В случае постоянной погрешности δ получаем отношения S класса $\mathscr{S}$: $xSy \Leftrightarrow \varphi(x) > \varphi(y) + \delta$. Отношения $P \in \mathscr{P}$ представимы набором критериев $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$:

$$xPy \Leftrightarrow (\forall j \in \overline{1, k})\, \varphi_j(x) \geqslant \varphi_j(y) \,\&\, (\exists s)\, \varphi_s(x) > \varphi_s(y),$$

а для всякого отношения $A \in \mathscr{A}$ существует критерий φ такой, что $xAy \Rightarrow \varphi(x) > \varphi(y)$.

Дополнительно к (2.2) будем рассматривать класс транзитивных отношений $\mathscr{T}$.

Легко проверить, что переход к однотипному отношению не нарушает введенных в п. 1.1 свойств отношений и не выводит отношения классов цепочки (2.2) за пределы этих классов.

2.2. Ацикличные отношения. Основным результатом данного пункта является теорема, дающая характеризацию представляющих функций ацикличных порядковых отношений и отвечающая на вопросы, относящиеся к трудности проверки ацикличности.

Теорема 2.1. а) *Отношение ρ ациклично тогда и только тогда, когда существует обобщенная лексикография $\widehat{\lambda}$ такая, что $g_\rho \leqslant g_{\widehat{\lambda}}$. В случае правильных отношений роль $\widehat{\lambda}$ играет лексикография λ.*

б) *Если g_ρ задана в виде д. н. ф., существует эффективный (полиномиальный) алгоритм проверки ацикличности. При задании g_ρ в виде к. н. ф. проверка ацикличности правильных отношений может быть осуществлена эффективно, а для произвольных порядковых отношений эта задача* NP-*полна.*

Доказательство теоремы 2.1 распадается на ряд лемм.

Лемма 2.1. *Если $\rho\in R^{2n}$ ациклично, то отношение $\rho'\in R^{2(n-1)}$, для которого функция $g_{\rho'}$ получена из g_ρ подстановкой $u_i=0$, также ациклично.*

Доказательство. Можно считать, что $i=1$. Если ρ' имеет цикл $\tilde{x}_1'\rho'\tilde{x}_2'\rho'\ldots\rho'\tilde{x}_s'\rho'\tilde{x}_1'$, то функция $g_{\rho'}$ обращается в 1 на наборах $\Delta(\tilde{x}_1', \tilde{x}_2'), \ldots, \Delta(\tilde{x}_{s-1}', \tilde{x}_s'), \Delta(\tilde{x}_s', \tilde{x}_1')$. Возьмем произвольное число a и положим $\tilde{x}_i=(a, \tilde{x}_i')$, $i=\overline{1, s}$. Тогда $\Delta(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j)=(0, \Delta(\tilde{x}_i', \tilde{x}_j'))$ и функция q_ρ обращается в 1 на наборах $\Delta(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), \ldots, \Delta(\tilde{x}_{s-1}, \tilde{x}_s), \Delta(\tilde{x}_s, \tilde{x}_1)$. Это означает, что ρ имеет цикл $\tilde{x}_1\rho\tilde{x}_2\rho\ldots\rho\tilde{x}_s\rho\tilde{x}_1$. □

Лемма 2.2. *Если $\rho\in\mathscr{A}$, то $(\exists\widehat{\lambda})g_\rho\leqslant g_{\widehat{\lambda}}$. Для правильных отношений роль $\widehat{\lambda}$ играет λ.*

Доказательство. Если $g_\rho\equiv0$, утверждение очевидно. Предположим, что $g_\rho\not\equiv0$ и $g_\rho=K_1\vee\ldots\vee K_t$ — представление в виде д. н. ф.

Будем говорить, что $K=q_1\ldots q_n$ является *конъюнкцией типа* $\tilde{0}$, если $q_i\in\{p_i', \bar{p}_i, p_i'\bar{p}_i, 1\}$. Конъюнкции типа $\tilde{0}$ и только они обращаются в 1 на наборе $\tilde{0}$. Если ρ ациклично, то $[\rho]$ антирефлексивно, а потому $[g_\rho]$ не имеет конъюнкций типа $\tilde{0}$ и, в частности, $K=K_1\circ\ldots\circ K_t$ не является конъюнкцией типа $\tilde{0}$. Пусть i_1 — один из индексов переменных, входящих в K. По определению композиции элементарные сомножители q_{i_1} всех конъюнкций $K_1, \ldots, K_t$ либо содержатся в множестве $\{p_{i_1}, p_{i_1}', p_{i_1}'\bar{p}_{i_1}\}$ и хотя бы один совпадает с p_{i_1}, либо — в множестве $\{\bar{p}_{i_1}, \bar{p}_{i_1}', p_{i_1}'\bar{p}_{i_1}\}$ и хотя бы один совпадает с $\bar{p}_{i_1}'$. Заменяя при необходимости переменную u_{i_1} на $-u_{i_1}$, можно считать, что имеет место первый случай (переход к однотипному отношению не влияет на ацикличность, п. 2.1). Тогда функция g_ρ может быть записана в виде

$$g_\rho=p_{i_1}g_1\vee p_{i_1}'g_2\vee p_{i_1}'\bar{p}_{i_1}g_3.$$

Заменяя g_1 на 1, воспользовавшись правилами булевой алгебры и обозначив $g^{(1)}=g_2\vee g_3$, получаем

$$g_\rho\leqslant p_{i_1}\vee p_{i_1}'g_2\vee p_{i_1}'\bar{p}_{i_1}g_3=p_{i_1}\vee p_{i_1}'g^{(1)}. \tag{2.3}$$

Введем отношение ρ_1, положив $g_{\rho_1}=g^{(1)}$. Функция g_{ρ_1} может быть получена из g_ρ подстановкой $u_{i_1}=0$. В силу леммы 2.1 отношение ρ_1 ациклично. Поэтому к g_{ρ_1} применимы те же рассуждения, и если $g_{\rho_1}=g^{(1)}\not\equiv0$, то (с точностью до однотипности) $g_{\rho_1}\leqslant p_{i_2}\vee p_{i_2}'g^{(2)}$. Подставляя это неравенство в (2.3), получаем

$$g_\rho\leqslant p_{i_1}\vee p_{i_1}'(p_{i_2}\vee p_{i_2}'g^{(2)})=p_{i_1}\vee p_{i_1}'p_{i_2}\vee p_{i_1}'p_{i_2}'g^{(2)}.$$

Продолжая эту цепочку, пока при некотором k не окажется $g^{(k)}\equiv0$, придем к

$$g_\rho\leqslant p_{i_1}\vee p_{i_1}'p_{i_2}\vee\ldots\vee p_{i_1}'\ldots p_{i_{k-1}}'p_{i_k}.$$

Если $k=n$, то выражение в правой части задает лексикографию, а если $k<n$, то оно может быть дополнено до лексикографии. Поскольку рассуждения велись с точностью до однотипности, то всякое ациклическое отношение может быть дополнено до обобщенной лексикографии. В случае правильных отношений инвертирований не требуется и получаем лексикографию. □

С элементарной конъюнкцией $K=q_1\ldots q_n$ свяжем множества $I(K)=\{i\in\overline{1, n}\mid q_i\neq1\}$ и $I_0(K)=\{i\in\overline{1, n}\mid q_i=p_i'p\}$.

Лемма 2.3. *Если ρ — правильное отношение, $g_\rho = K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_t$ — приведенная д. н. ф. и $I(K_1) \subseteq I(K_2) \subseteq \ldots \subseteq I(K_t)$, то ρ транзитивно.*

Доказательство. Композиция любых двух конъюнкций из приведенной д. н. ф. g_ρ не превосходит одной из них (более короткой), поэтому $[g_\rho] = g_\rho$. □

Лемма 2.4. *Если $g_\rho \leqslant g_{\widehat{\lambda}}$, то ρ ациклично.*

Доказательство. Из (1.6) и леммы 2.3 следует, что лексикография транзитивна. Кроме того, она антирефлексивна (g_λ не содержит конъюнкций типа $\widetilde{0}$), а потому ациклична. Однотипная с ней обобщенная лексикография $\widehat{\lambda}$ также ациклична, и всякое отношение ρ, вложенное в $\widehat{\lambda}$, ациклично. □

Из лемм 2.2 и 2.4 следует п. а) теоремы. В последующем понадобится другая формулировка п. а).

Следствие. *Отношение ρ ациклично тогда и только тогда, когда функция g_ρ представима в виде $g_\rho = g_{\widehat{\lambda}} g$, где $g \in P_{3,2}$, $\widehat{\lambda}$ — обобщенная лексикография. Аналогичный факт справедлив для правильных отношений при условии, что $g \in M_{3,2}$, а $\widehat{\lambda}$ является лексикографией.*

Для множества элементарных конъюнкций $\mathscr{K} = \{K_1, \ldots, K_t\}$ обозначим $I(\mathscr{K}) = I(K_1 \circ \ldots \bullet K_t)$. Если $g \in M_{3,2}$ ($g \neq \mathrm{const}$) и $\mathscr{K}_g$ — множество конъюнкций ее приведенной д. н. ф., положим $I(g) = I(\mathscr{K}_g)$. Далее, рассмотрим все одноэлементные дизъюнкции (имеющие вид $\widehat{p}_j \in \{p_j, p_j'\}$) приведенной к. н. ф. функции $g \in M_{3,2}$. Множество всех j, соответствующих этим дизъюнкциям, обозначим $J(g)$, т. е., если $J(g) = \{j_1, \ldots, j_s\}$, то $g = \widehat{p}_{j_1} \ldots \widehat{p}_{j_s} D_1 \ldots D_m$.

Лемма 2.5. *Для любой функции $g \in M_{3,2}$ имеет место $I(g) = J(g)$.*

Доказательство. Легко видеть, что $i \in I(g)$ тогда и только тогда, когда функция g на наборе $\widetilde{\sigma}_i$, в котором i-я компонента равна -1, а остальные равны 1, обращается в 0. Также легко видеть, что то же условие $g(\widetilde{\sigma}_i) = 0$ является необходимым и достаточным для $i \in J(g)$. □

Завершение доказательства теоремы 2.1. Из доказательства леммы 2.2 извлекается следующий алгоритм проверки ацикличности по д. н. ф. Если $g_\rho \equiv 0$, отношение ρ ациклично. Пусть $g_\rho \not\equiv 0$ и $\mathscr{K}g_\rho$ — множество конъюнкций д. н. ф. g_ρ. Если $I(\mathscr{K}g_\rho) = \varnothing$, то ρ неациклично. В случае $I(\mathscr{K}g_\rho) \neq \varnothing$ обозначим через $g_\rho^{(1)}$ функцию, полученную из g_ρ подстановкой $u_i = 0$ для всех $i \in I(\mathscr{K}g_\rho)$ и к ней применим ту же процедуру. Алгоритм остановится, если на некотором шаге t окажется $g_\rho^{(t)} \equiv 0$ (тогда ρ ациклично) либо $I(\mathscr{K}g_\rho^{(t)}) = \varnothing$ и $g_\rho^{(t)} \not\equiv 0$ (тогда неациклично). Поскольку $I(\mathscr{K}g)$ по д. н. ф. g находится эффективно, этот алгоритм эффективен.

Если функция $g_\rho \in M_{3,2}$ задана своей к. н. ф., может быть использован тот же алгоритм, но в соответствии с леммой 2.5 роль множеств $I(g) = I(\mathscr{K}g)$ в нем будут играть $J(g)$, которые по к. н. ф. находятся эффективно.

NP-полнота задачи проверки ацикличности по к. н. ф. для немонотонного случая (произвольных порядковых отношений) устанавливается тем же способом, что и в 1.14° для транзитивности, поскольку при $f \equiv 0$ там получается функция p_{n+1}, задающая ациклическое отношение. □

2.3. Линейные и слабые порядки. Сформулируем результаты, относящиеся к классу $\mathscr{L}$.

Теорема 2.2. а) *В классе порядковых отношений обобщенные лексикографии и только они являются линейными порядками. То же справедливо для правильных отношений при замене обобщенных лексикографий на лексикографии.*

б) *Для правильных отношений задачи распознавания линейных порядков по д. н. ф. и по к. н. ф. представляющих функций решаются эффективно, для порядковых отношений общего вида эти задачи* NP-*полны.*

Доказательство. Рассмотрим отношение лексикографии λ. Согласно лемме 2.3 оно транзитивно. Поскольку λ также антирефлексивно, то представляет собой ч. п. Из самодвойственности g_λ (п. 1.4) вытекает связность λ (1.13°), следовательно, λ — л. п. То же относится и к обобщенной лексикографии $\widehat{\lambda}$, ибо переход к однотипному отношению не выводит за пределы $\mathscr{L}$ (п. 2.1).

Обратно, пусть ρ — произвольный л. п. Он ацикличен и согласно лемме 2.2 может быть дополнен до обобщенной лексикографии $\widehat{\lambda}$. Но в силу связности л. п. не допускает расширения с сохранением свойства асимметрии, поэтому $\rho = \widehat{\lambda}$. Правильные л. п., будучи монотонными, совпадают с лексикографии. Пункт а) доказан.

Явный вид приведенных д. н. ф. и к. н. ф. лексикографий указан в п. 1.4. Задачи распознавания обобщенных лексикографий по к. н. ф. и по д. н. ф. сводятся к NP-полным задачам о выполнимости к. н. ф. и о тождественной истинности д. н. ф.

Рассмотрим, например, случай к. н. ф. Пусть $D_1\ldots D_v$ — к. н. ф. булевой функции, f — функция из $P_{3,2}$, графически совпадающая с $D_1\ldots D_v$, λ — лексикография, $\widehat{\lambda}$ — обобщенная лексикография, полученная из λ инвертированием всех переменных u_i, а $g_{\rho_1} = g_\lambda \vee f$, $g_{\rho_2} = g_{\widehat{\lambda}} \vee f$. Поскольку

$$\underset{1\leqslant i\leqslant u}{\&} D_i' \vee \underset{1\leqslant j\leqslant v}{\&} D_j = \underset{1\leqslant i\leqslant u,\, 1\leqslant j\leqslant v}{\&} (D_i' \vee D_j),$$

то к. н. ф. функций g_{ρ_1} и g_{ρ_2} находятся эффективно по к. н. ф. f, g_λ и $g_{\widehat{\lambda}}$. Можно доказать, что

$$D_1\ldots D_v \equiv 0 \Leftrightarrow \rho_1,\ \rho_2 \text{ — обобщенные лексикографии. } \square$$

Замечание. Если рассматривать нестрогие (рефлексивные) л. п., то они идентичны отношениям $\widehat{\lambda}^*$, двойственным обобщенной лексикографии.

Из интерпретации обобщенных лексикографий, даваемой теоремой 2.2, видно, что лемма 2.2 представляет собой аналог для порядковых отношений леммы Шпильрайна [13] о возможности расширения ч. п. до л. п.

Применительно к классу $\mathscr{W}$ теорема 2.2 модифицируется следующим образом.

Теорема 2.3. а) *В классе порядковых отношений обобщенные неполные лексикографии и только они являются слабыми порядками. То же справедливо для правильных отношений при замене обобщенных неполных лексикографий на неполные лексикографии.*

б) *Для правильных отношений задачи распознавания слабых порядков по д. н. ф. и по к. н. ф. представляющих функций решаются эффективно, для порядковых отношений общего вида эти задачи* NP-*полны.*

Доказательство. Отношение неполной лексикографии задается функцией $g_{\lambda'} = p_{i_1} \vee p'_{i_1}p_{i_2} \vee \ldots \vee p'_{i_1}\ldots p'_{i_{k-1}}p_{i_k}$, а двойственное к нему отношение $(\lambda')^*$ — функцией $g^*_{\lambda'} = p_{i_1} \vee \ldots \vee p'_{i_1}\ldots p'_{i_{k-2}}p_{i_{k-1}} \vee p'_{i_1}\ldots$ $\ldots p'_{i_k}$. Из неравенства $g_{\lambda'} \leqslant g^*_{\lambda'}$ следует асимметрия λ' (1.13°), а из транзитивности отношения $(\lambda')^*$ (в соответствии с леммой 2.3) — негатранзитивность λ'. Поэтому λ' — с. п., и то же относится к однотипному с ним отношению $\widehat{\lambda}'$.

Обратное утверждение, что все с. п. имеют указанный вид, будет следовать из более сильного факта, доказанного дальше (лемма 2.7).

Правильные с. п. очевидным образом эффективно распознаваемы по д. н. ф. и к. н. ф. NP-полнота этих задач для произвольных порядковых отношений устанавливается путем сведения к ним задач о тождественной истинности д. н. ф. $K_1 \vee \ldots \vee K_t$ и выполнимости к. н. ф. $D_1 \ldots D_v$ от переменных $p_1, \ldots, p_n$. Для этого нужно рассмотреть отношения ρ_1 и ρ_2 с $g_{\rho_1} = p_{n+1}(K_1 \vee \ldots \vee K_t)$ и $g_{\rho_2} = p_{n+1} \vee D_1 \ldots D_v$.

2.4. Интервальные порядки и полупорядки. Для $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \{-1, 0, +1\}^n$ введем конъюнкции $K_{\tilde{\sigma}} = q_1 \ldots q_n$ и $K^{+}_{\tilde{\sigma}} = q'_1 \ldots q'_n$, где при $i = \overline{1, n}$

$$q_i = \begin{cases} p_i, & \text{если } \sigma_i = 1, \\ p_i \bar{p}'_i, & \text{если } \sigma_i = 0, \\ \bar{p}'_i, & \text{если } \sigma_i = -1; \end{cases} \qquad q'_i = \begin{cases} p_i, & \text{если } \sigma_i = 1, \\ p'_i, & \text{если } \sigma_i = 0, \\ 1, & \text{если } \sigma_i = -1. \end{cases}$$

$K_{\tilde{\sigma}}$ и $K^{+}_{\tilde{\sigma}}$ являются наименьшей и наименьшей монотонной конъюнкциями, обращающимися в 1 на наборе $\tilde{\sigma}$.

Лемма 2.6 *Если ρ — и. п., то для любого $\tilde{\sigma} \in \{-1, 0, +1\}^n$ имеет место одно из соотношений $K_{\tilde{\sigma}} \circ g_\rho \leqslant g_\rho$ и $K_{-\tilde{\sigma}} \circ g_\rho \leqslant g_\rho$.*

Доказательство. Отметим вначале, что из условия (2.1) вытекает справедливость для любых $x, y \in \Omega$ одного из включений $r^{-1}(x) \supseteq r^{-1}(y)$ и $r^{-1}(y) \supseteq r^{-1}(x)$, где $r^{-1}(x) = \{z \in \Omega \mid zrx\}$.

Пусть ρ — и. п. и $\tilde{\sigma}$ — любой набор из $\{-1, 0, +1\}^n$. Возьмем произвольные $\tilde{x}, \tilde{y} \in R^n$ с $\Delta(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{\sigma}$. Поскольку ρ удовлетворяет условию (2.1), имеет место включение $\rho^{-1}(\tilde{x}) \supseteq \rho^{-1}(\tilde{y})$ либо $\rho^{-1}(\tilde{y}) \supseteq \rho^{-1}(\tilde{x})$ (пусть, для определенности, первое). Введем отношение ρ_1 с представляющей функцией $g_{\rho_1} = K_{-\tilde{\sigma}}$. Очевидно, $\tilde{y}\rho_1\tilde{x}$.

Рассмотрим произвольное $\tilde{z} \in \rho^{-1}(\tilde{y})$. Представив $\tilde{z} - \tilde{x} = (\tilde{y} - \tilde{x}) + (\tilde{z} - \tilde{y})$ и учитывая $\tilde{z}\rho\tilde{y}$ и $\tilde{y}\rho_1\tilde{x}$, заключаем, что $\tilde{z}(\rho_1 \circ \rho)\tilde{x}$. При варьировании $\tilde{z} \in \rho^{-1}(\tilde{y})$ набор $\Delta(\tilde{z}, \tilde{y})$ пробегает область истинности функции g_ρ, а набор $\Delta(\tilde{z}, \tilde{x})$ — область истинности функции $K_{-\tilde{\sigma}} \circ g_\rho$. В последнем можно убедиться с помощью рассуждений, аналогичных использованным в 1.11°, принимая во внимание, что $\Delta(\tilde{y}, \tilde{x}) = -\tilde{\sigma}$ является единственным набором, обращающим $K_{-\tilde{\sigma}}$ в 1. С другой стороны, из $\rho^{-1}(\tilde{x}) \supseteq \rho^{-1}(\tilde{y})$ следует, что $\Delta(\tilde{z}, \tilde{x})$ не выходит за пределы области истинности функции g_ρ, а потому $K_{-\tilde{\sigma}} \circ g_\rho \leqslant g_\rho$.

Случай включения $\rho^{-1}(\tilde{y}) \supseteq \rho^{-1}(\tilde{x})$ аналогичным образом приводит к соотношению $K_{\tilde{\sigma}} \circ g_\rho \leqslant g_\rho$. □

Элементарную конъюнкцию K будем называть *импликантом* функции $g \in P_{3,2}$, если $(\forall \tilde{\sigma})(K(\tilde{\sigma}) = 1 \Rightarrow g(\tilde{\sigma}) = 1)$. Импликант называется *простым*, если не существует другого импликанта K', такого что $K' \geqslant K$.

Лемма 2.7. *Всякий и. п. ρ является обобщенной неполной лексикографией.*

Доказательство. Пусть ρ — и. п. Рассмотрим ту д. н. ф. функции g_ρ, множество $\mathcal{K}g_\rho$ конъюнкций которой совпадает с множеством ее простых импликантов.

Композиция K всех конъюнкций из $\mathcal{K}g_\rho$ обладает свойствами

а) $K \in \mathcal{K}g_\rho$;

б) $K(\tilde{0}) \neq 1$;

в) $(\forall K' \in \mathcal{K}g_\rho)\, I(K) \subseteq I(K')$;

г) $(\forall K' \in \mathcal{K}g_\rho)\, I_0(K) \subseteq I_0(K')$.

Первые два свойства вытекают соответственно из транзитивности и антирефлексивности отношения ρ, два последних — из определения операции композиции. Путем инвертирования некоторых переменных u_i

можно добиться, чтобы сомножители q_i конъюнкции K принимали значения из множеств $\{p_i, p'_i, p'_i\bar{p}_i\}$. При этом ρ перейдет в однотипное отношение, также являющееся и. п. (чтобы не вводить переобозначений, будем считать, что оно совпадает с ρ).

Из б) следует, что в K найдется сомножитель q_{i_1}, имеющий вид p_{i_1}. Образуем набор $\tilde{\sigma}=(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, положив $\sigma_{i_1}=1$ и $\sigma_i=-1$ при $i\neq i_1$. Конъюнкция $K_{-\tilde{\sigma}}$ имеет i-м сомножителем $\bar{p}'_{i_1}$, поэтому $I\left(K_{-\tilde{\sigma}}\circ K\right)\subseteq \subset I((K)\setminus\{i_1\})$. Отсюда согласно в) $\left(K_{-\tilde{\sigma}}\circ K\right)\notin\mathscr{K}g_\rho$. Это означает, что $K_{-\tilde{\sigma}}\circ K$ не является импликантом, неравенство $K_{-\tilde{\sigma}}\circ K\leqslant g_\rho$ нарушено и, тем более, нарушено $K_{-\tilde{\sigma}}\circ g_\rho\leqslant g_\rho$.

Тогда в соответствии с леммой 2.6 должно быть выполнено $K_{\tilde{\sigma}}\circ g_\rho\leqslant g_\rho$. Откуда $K_{\tilde{\sigma}}\circ K\leqslant g_\rho$, т. е. $K_{\tilde{\sigma}}\circ K\in\mathscr{K}g_\rho$. Сомножители конъюнкции $K_{\tilde{\sigma}}=\widehat{q}_1\ldots\widehat{q}_n$ имеют вид $\widehat{q}_i=\widehat{p}'_i$, $i\neq i_1$, $\widehat{q}_{i_1}=p_{i_1}$. Поэтому $I_0\left(K_{\tilde{\sigma}}\right)=\varnothing$ и согласно г) $I_0(K)=\varnothing$. В этом случае по определению композиции имеет место $K_{\tilde{\sigma}}\circ K=p_{i_1}$. Учитывая $K_{\tilde{\sigma}}\circ K\in\mathscr{K}g_\rho$, из в) получаем $I(K)= =I\left(K_{\tilde{\sigma}}\right)=\{i_1\}$, что приводит к $K=p_{i_1}$.

Все конъюнкции $K'\in\mathscr{K}g_\rho$ имеют сомножитель $q'_{i_1}\in\{p_{i_1}, p'_{i_1}, p'_{i_1}\bar{p}_{i_1}\}$, иначе $i_1\notin I(K)$. Поэтому функция g_ρ может быть представлена в виде

$$g_\rho=p_{i_1}\vee p'_{i_1}g_1\vee p'_{i_1}\bar{p}_{i_1}g_2=p_{i_1}\vee p'_{i_1}(g_1\vee g_2)=p_{i_1}\vee p'_{i_1}g_{\rho_1}. \qquad (2.4)$$

Здесь g_{ρ_1} получено из g_ρ подстановкой $g_{i_1}=0$. Нетрудно видеть, что подстановка константы 0 сохраняет асимметрию, транзитивность и свойство (2.1). Поэтому ρ_1 также является и. п. и аналогично предыдущему допускает (с точностью до однотипности) представление $g_{\rho_1}=p_{i_2}\vee p'_{i_2}g_{\rho_2}$, что совместно с (2.4) дает $g_\rho=p_{i_1}\vee p'_{i_1}p_{i_2}\vee p'_{i_1}p'_{i_2}g_{\rho_2}$. Продолжая эти рассуждения, пока на некотором шаге $k+1$ не придем к функции $g_{\rho_{k+1}}\equiv \equiv 0$, получим представление

$$g_\rho=p_{i_1}\vee p'_{i_1}p_{i_2}\vee\ldots\vee p'_{i_1}\ldots p'_{i_{k-1}}p_{i_k},$$

дающее общий вид и. п. с точностью до однотипности. □

Из леммы 2.7, теоремы 2.3 и включений (2.1) вытекает

Теорема 2.4. *Для порядковых отношений классы $\mathscr{W}$, $\mathscr{S}$ и $\mathscr{I}$ совпадают.*

Отметим, что для отношений на произвольном Ω эти классы существенно различны [14].

2.5. Частичные порядки. Основным результатом данного пункта является

Теорема 2.5. а) *Отношение ρ представляет собой ч. п. тогда и только тогда, когда g_ρ преобразуется к виду $g_\rho=g_{\widehat{\lambda}_1}\ldots g_{\widehat{\lambda}_k}$, где $\widehat{\lambda}_i$ $(i= =\overline{1, k})$ — обобщенная лексикография.*

б) *Правильное отношение ρ является ч. п. тогда и только тогда, когда g_ρ преобразуется к виду $g_\rho=g_{\lambda'_1}\ldots g_{\lambda'_k}$, где λ'_i $(i=\overline{1, k})$ — неполная лексикография. Неполные лексикографии здесь могут быть заменены на полные тогда и только тогда, когда $g_\rho\geqslant g_\pi$.*

в) *Для правильных отношений задачи распознавания ч. п. по д. н. ф. и к. н. ф. представляющих функций решаются эффективно, для произвольных порядковых отношений они* NP-*полны.*

Пункт а) является аналогом для порядковых отношений известной теоремы Душника — Миллера [13], утверждающей возможность разложения всякого ч. п. (на произвольном Ω) в пересечение л. п. Пункт б) показывает, что для правильных ч. п. это не так, но они могут быть представлены как пересечение с. п. Пересечением л. п. могут быть образованы те и только те правильные ч. п., которые включают отношение Парето.

В одну сторону утверждения пп. а) и б) очевидны, поскольку пересечения л. п. и с. п. дают ч. п.

Лемма 2.8. *Порождающая функция всякого ч. п.* ρ *представима в виде* $g_\rho = g_{\widehat{\lambda}_1} \ldots g_{\widehat{\lambda}_k}$.

Доказательство. Достаточно убедиться, что если ρ — ч. п. и $g_\rho(\tilde{\sigma}) = 0$ для некоторого $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\sigma} \neq \tilde{0}$, то ρ можно дополнить до обобщенной лексикографии $\widehat{\lambda}$ с сохранением свойства $g_{\widehat{\lambda}}(\tilde{\sigma}) = 0$. Тогда ρ получается пересечением всех $\widehat{\lambda}$, построенных по наборам $\tilde{\sigma}$, таким что $g_\rho(\tilde{\sigma}) = 0$. Рассуждения будем проводить с точностью до однотипности отношений, поэтому можно считать, что компонентами набора $\tilde{\sigma}$ являются -1 и 0.

Убедимся в ацикличности отношения с представляющей функцией $g_\rho \vee K_{-\tilde{\sigma}}$, где $K_{-\tilde{\sigma}}$ определено для набора $-\tilde{\sigma}$ как перед леммой 2.7. Если предположить противное, то найдется конъюнкция $K = q_1 \ldots q_n$ из д. н. ф. g_ρ, для которой $K \circ K_{-\tilde{\sigma}}$ является конъюнкцией типа $\tilde{0}$. Если $\sigma_i = -1$ (при некотором i), то в $K_{-\tilde{\sigma}}$ присутствует сомножитель p_i, а потому $q_i \in \{1, \bar{p}_i, \bar{p}'_i\}$ (иначе $K \circ K_{-\tilde{\sigma}}$ не имеет типа $\tilde{0}$). Если же $\sigma_i = 0$, то в $K_{-\tilde{\sigma}}$ присутствует сомножитель $p'_i \bar{p}_i$ и $q_i \in \{1, p'_i, \bar{p}_i, p'_i\bar{p}_i\}$. Отсюда получаем $K(\tilde{\sigma}) = 1$, что приводит к противоречию $g_\rho(\tilde{\sigma}) = 1$.

Воспользовавшись леммой 2.2, дополним ацикличное отношение, представленное функцией $g_\rho \vee K_{-\tilde{\sigma}}$, до обобщенной лексикографии $\widehat{\lambda}$. Тогда $g_{\widehat{\lambda}}(-\tilde{\sigma}) \geqslant K_{-\tilde{\sigma}}(-\tilde{\sigma}) = 1$ и в силу асимметрии $\widehat{\lambda}$ выполнено $g_{\widehat{\lambda}}(\tilde{\sigma}) = 0$. □

Лемма 2.9. *Порождающая функция правильного ч. п.* ρ *представима в виде* $g_\rho = g_{\lambda'_1} \ldots g_{\lambda'_k}$.

Доказательство. Достаточно убедиться, что если ρ — правильный ч. п. и $g_\rho(\tilde{\sigma}) = 0$ для некоторого $\tilde{\sigma} \neq \tilde{0}$, то ρ можно дополнить до неполной лексикографии λ' с сохранением свойства $g_{\lambda'}(\tilde{\sigma}) = 0$.

Пусть $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Рассмотрим 2 случая.

Случай 1 ($(\exists i)\, \sigma_i = -1$). Убедимся вначале, что отношение с представляющей функцией $g_\rho \vee K^+_{-\tilde{\sigma}}$ ($K^+_{-\tilde{\sigma}}$ определено перед леммой 2.6) ациклично.

Предположим противное. Тогда найдется конъюнкция K из д. н. ф. g_ρ, такая что $K \circ K^+_{-\tilde{\sigma}}$ — конъюнкция типа $\tilde{0}$. Отсюда можно заключить, что $K(\tilde{\sigma}) = 1$. Действительно, если $\sigma_i = -1$, то в $K^+_{-\tilde{\sigma}}$ присутствует сомножитель p_i, а потому $i \notin I(K)$. Если же $\sigma_i = 0$, то в $K^+_{-\tilde{\sigma}}$ входит сомножитель p'_i, поэтому в K сомножитель q_i либо отсутствует, либо входит в форме p'_i. Равенство $K(\tilde{\sigma}) = 1$ приводит к противоречию $g_\rho(\tilde{\sigma}) = 1$.

Воспользовавшись леммой 2.2, дополним ацикличное отношение, представленное функцией $g_\rho \vee K^+_{-\tilde{\sigma}}$, до лексикографии λ. Тогда $g_\lambda(-\tilde{\sigma}) \geqslant K^+_{-\tilde{\sigma}}(-\tilde{\sigma}) = 1$ и в силу асимметрии λ выполнено $g_\lambda(\tilde{\sigma}) = 0$.

Случай 2 ($\tilde{\sigma} \in \{0, 1\}^n$). Пусть $I = \{i | \sigma_i = 0\}$. Обозначим через $g_\rho|_I$ функцию, полученную из g_ρ подстановкой $u_i = 1$ (т. е. $p_i = p_i' = 1$) для $i \in I$. Отношение ρ_I на множестве $R^{|I|}$, определяемое равенством $g_{\rho_I} = g_\rho|_I$, является ч. п. Его транзитивность вытекает из транзитивности ρ, а антирефлексивность — из $g_{\rho_I}(\tilde{0}_I) = g_\rho(\tilde{\sigma}) = 0$, где $\tilde{0}_I$ — нулевой набор из $R^{|I|}$.

По лемме 2.2 дополним ρ_I до лексикографии λ_I на $R^{|I|}$. Отношение λ' на R^n с представляющей функцией $g_{\lambda'} = g_{\lambda_I}$ является неполной лексикографией. При этом $g_{\lambda'} \geqslant g_\rho|_I \geqslant g_\rho$ и, кроме того,

$$g_{\lambda'}(\tilde{\sigma}) = g_{\lambda_I}(\tilde{0}_I) = g_{\rho_I}(\tilde{0}_I) = g_\rho(\tilde{\sigma}) = 0. \ \square$$

Лемма 2.10. *Правильный ч. п. ρ представим в виде пересечения лексикографий тогда и только тогда, когда $\rho \supseteq \pi$.*

Доказательство. Всякая лексикография λ содержит π, поэтому π включено в пересечение лексикографий. В другую сторону, если $\rho \supseteq \pi$, то $\lambda_i' \supseteq \pi$ для всех λ_i', дающих в пересечении ρ, а это, как нетрудно видеть, означает, что все λ_i' являются лексикографиями. $\square$

Завершение доказательства теоремы 2.5. Пусть функция $g_\rho \in M_{3,2}$ правильного отношения ρ задана своей приведенной д. н. ф. и $\mathcal{K}g_\rho$ — множество ее конъюнкций. Из утверждений 1.10° и 1.13° следует, что ρ — ч. п. тогда и только тогда, в $\mathcal{K}g_\rho$ нет конъюнкций типа $\tilde{0}$ и для любых $K_1, K_2 \in \mathcal{K}g_\rho$ найдется конъюнкция $K_3 \in \mathcal{K}g_\rho$ такая, что $K_1 \circ K_2 \leqslant K_3$. Этот алгоритм проверки эффективен.

Пусть теперь функция $g_\rho \in M_{3,2}$ задана посредством приведенной к. н. ф. Обозначим через Σ_ρ множество верхних нулей функции g_ρ, т. е. множество всех таких наборов $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \{-1, 0, +1\}^n$, что $g_\rho(\tilde{\sigma}) = 0$ и для всех $\tilde{\sigma}' > \tilde{\sigma}$ выполнено $g_\rho(\tilde{\sigma}') = 1$. Пусть $\Sigma_\rho' = \Sigma_\rho \cap \{0, 1\}^n$, $\Sigma_\rho'' = \Sigma_\rho \setminus \Sigma_\rho'$. Анализируя доказательство леммы 2.9, нетрудно заключить, что правильное отношение ρ является ч. п. тогда и только тогда, когда для любого $\tilde{\sigma} \in \Sigma_\rho''$ отношение с представляющей функцией $g_\rho \vee K^+_{-\tilde{\sigma}}$ и для любого $\tilde{\sigma} \in \Sigma_\rho'$ отношение с представляющей функцией $g_\rho|_{I_{\tilde{\sigma}}}$, где $I_{\tilde{\sigma}} = \{i \mid \sigma_i = 0\}$, ацикличны.

Между дизъюнкциями D_s приведенной к. н. ф. g_ρ и наборами $\tilde{\sigma}^{(s)} = (\sigma_1^{(s)}, \ldots, \sigma_n^{(s)}) \in \Sigma_\rho$ существует взаимно однозначное соответствие

$$D_s = \left(\bigvee_{\sigma_i^{(s)}=0} p_i \right) \vee \left(\bigvee_{\sigma_j^{(s)}=-1} p_j' \right),$$

поэтому верхние нули находятся эффективно по к. н. ф.. Проверку ацикличности отношения, задаваемого функцией $g_0 = g_\rho \vee K^+_{-\tilde{\sigma}}$, можно осуществлять с помощью алгоритма, аналогичного использованному при завершении доказательства теоремы 2.1. Некоторое отличие состоит лишь в способе нахождения множеств $J(g_i)$ для функций g_i, возникающих в процессе работы алгоритма. Если g_i имеет вид $g_i' \vee K_i$, где g_i' задана в виде к. н. ф., а K_i — конъюнкция, то согласно лемме 2.5 и определению $I(g)$

$$J(g_i) = I(g_i) = I(g_i') \cap I(K_i) = J(g_i') \cap I(K_i).$$

Проверка ацикличности отношения, задаваемого функцией $g_\rho|_{I_{\tilde{\sigma}}}$, получаемой из g_ρ подстановками констант, производится прежним способом. Указанный метод распознавания ч. п. по к. н. ф. представляющих функций правильных отношений эффективен.

NP-полнота задач распознавания ч. п. по д. н. ф. и к. н. ф. для произвольных порядковых отношений устанавливается путем сведения к ним задач о тождественной истинности д. н. ф. $K_1 \vee \ldots \vee K_t$ и выполнимости к. н. ф. $D_1 \ldots D_v$ от переменных $p_1, \ldots, p_n$. Для этого нужно рассмотреть отношения ρ_1 и ρ_2 с $g_{\rho_1} = p_{n+2}(p_{n+1} \vee K_1 \vee \ldots \vee K_t)$ и $g_{\rho_2} = p_{n+1} \vee D_1 \ldots D_v$. □

2.6. Транзитивные отношения. Пусть $I = \{i_1, \ldots, i_s\}$ — некоторое подмножество множества $\{1, \ldots, n\}$, а $R^I = R^s$ — соответствующее ему подпространство пространства R^n. Будем говорить, что порядковое отношение является *лексикографией на* R^I, если оно представляет собой неполную лексикографию на R^n и множество I_ρ номеров существенных переменных функции g_ρ совпадает с I. Аналогично вводится понятие *обобщенной лексикографии на* R^I. Основным результатом данного пункта является

Теорема 2.6. а) *Отношение* ρ *транзитивно тогда и только тогда, когда* g_ρ *преобразуется к виду, указанному в* а) *теоремы* 2.5 (если ρ антирефлексивно), *либо к виду* $g_\rho = g_{\widehat{\lambda}_1^*} \ldots g_{\widehat{\lambda}_k^*}$, *где* $\widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_k$ — *обобщенные лексикографии на одном и том же множестве* I (если ρ рефлексивно).

б) *Правильное отношение* ρ *транзитивно тогда и только тогда, когда* g_ρ *преобразуется к виду, указанному в* б) *теоремы* 2.5 (если ρ антирефлексивно), *либо к виду* $g_\rho = g_{\lambda_1^*} \ldots g_{\lambda_k^*}$, *где* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — *лексикографии на одном и том же множестве* I (если ρ рефлексивно).

в) *Для правильных отношений задачи распознавания транзитивности по д. н. ф. и к. н. ф. представляющих функций решаются эффективно, для произвольных порядковых отношений они* NP-*полны.*

Будем различать отношения ρ с точностью до эквивалентности. Отношения ρ_1 на R^{I_1} и ρ_2 на R^{I_2} будем считать *эквивалентными*, если $g_{\rho_1} = g_{\rho_2}$ (с точностью до несущественных переменных). Наряду со строгими ч. п. будем рассматривать *нестрогие ч. п.*— транзитивные, антисимметричные, рефлексивные отношения. Из теоремы 2.6 получаем

Следствие. *Всякое (правильное) транзитивное отношение эквивалентно (правильному) ч. п. (строгому или нестрогому) на некотором множестве* R^I.

Действительно, если ρ антирефлексивно, то оно эквивалентно строгому ч. п., а если рефлексивно, то допускает представление, указанное в теореме, где все $\widehat{\lambda}_i^*$ являются нестрогими линейными порядками на R^I (замечание в п. 2.3). Пересечение линейных порядков дает ч. п. на R^I. □

Таким образом, фактически не существует транзитивных отношений, отличных от ч. п.

Доказательство теоремы 2.6 разбивается на ряд лемм. Обозначим через I_ρ множество номеров всех существенных переменных функции g_ρ.

Лемма 2.11. *Если порядковое отношение* ρ *транзитивно, то оно совпадает с ч. п. либо его представляющая функция может быть записана в виде* $g_\rho = K_0 \vee g_{\rho'}$, *где* ρ' — *ч. п.*, $K_0 = p'_{i_1}\bar{p}_{i_1} \ldots p'_{i_s}\bar{p}_{i_s}$, $\{i_1, \ldots, i_s\} = I_\rho$.

Доказательство. Будем считать, что транзитивное отношение ρ непусто и отлично от R^{2n}, иначе утверждение тривиально. Рассмотрим д. н. ф. функции g_ρ, образованную всеми ее импликантами. Через $\mathcal{K}g_\rho$ обозначим множество конъюнкций этой д. н. ф. Если ρ не является ч. п., то в $\mathcal{K}g_\rho$ имеются конъюнкции типа $\widetilde{0}$. Обозначим через $K^{(0)}$ композицию всех этих конъюнкций. Легко проверить, что $K^{(0)}$ имеет тип $\widetilde{0}$ и поглощает любую конъюнкцию типа $\widetilde{0}$ из $\mathcal{K}g_\rho$.

Убедимся, что $I(K^{(0)}) = I_\rho$. Предположим, что в $K^{(0)}$ отсутствует некоторая переменная с номером из I_ρ, и пусть K — содержащий ее простой импликант. Тогда нетрудно видеть, что $K^{(0)} \circ K$ строго больше K. Из транзитивности ρ и 1.10° следует, что $K^{(0)} \circ K$ является импликантом функции g_ρ, а это противоречит простоте импликанта K.

Очевидно, что функция g_ρ может быть представлена в виде $g_\rho = K_0 \vee D_0 g_\rho$, где K_0 взято из формулировки утверждения, а $D_0 = \overline{K}_0 = p_{i_1} \vee \overline{p}'_{i_1} \vee \ldots \vee p_{i_s} \vee \overline{p}'_{i_s}$. Осталось убедиться, что отношение ρ' с $g_{\rho'} = D_0 g_\rho$ является ч. п. Поскольку оно антирефлексивно (не содержит конъюнкций типа $\widetilde{0}$), нужно доказать лишь его транзитивность.

Образуем д. н. ф., составленную из всех простых импликантов функции $g_{\rho'}$ и обозначим через $\mathscr{K}_{g_{\rho'}}$ множество входящих в нее конъюнкций. Пусть $K_1, K_2 \in \mathscr{K}_{g_{\rho'}}$. Композиция $K_1 \circ K_2$ не является конъюнкцией типа $\widetilde{0}$, поскольку иначе $I(K_1 \circ K_2)$ строго меньше $I(K_0)$ и конъюнкция K_0 не поглощает $K_1 \circ K_2$. Отсюда $D_0(K_1 \circ K_2) = K_1 \circ K_2$. Из транзитивности ρ вытекает, что $K_1 \circ K_2$ является импликантом g_ρ, а в силу полученного соотношения — импликантом $g_{\rho'}$. Поэтому $K_1 \circ K_2 \leqslant g_{\rho'}$, что в силу произвольности $K_1, K_2 \in g_{\rho'}$ свидетельствует о транзитивности ρ'. □

Лемма 2.12. *Рефлексивное порядковое отношение ρ транзитивно тогда и только тогда, когда $g_\rho = g^*_{\widehat{\lambda}_1} \ldots g^*_{\widehat{\lambda}_k} = g_{\widehat{\lambda}^*_1} \ldots g_{\widehat{\lambda}^*_k}$, где все $\widehat{\lambda}_i$ являются обобщенными лексикографиями на одном и том же множестве R^I.*

Доказательство. Если имеет место указанное представление, то ρ транзитивно как пересечение транзитивных отношений $\widehat{\lambda}^*_i$ (двойственных к негатранзитивным отношениям $\widehat{\lambda}_i$).

Обратно, пусть ρ — рефлексивное и транзитивное отношение. Воспользовавшись леммой 2.11 и теоремой 2.5 (роль R^n играет R^{I_ρ}), запишем g_ρ в виде $g_\rho = K_0 \vee g_{\widehat{\lambda}_1} \ldots g_{\widehat{\lambda}_k} = (K_0 \vee g_{\widehat{\lambda}_1}) \ldots (K_0 \vee g_{\widehat{\lambda}_k})$, где K_0 образовано произведением сомножителей $\overline{p}'_j p_j$ для всех $j \in I_\rho$, а $\widehat{\lambda}_i$ — обобщенная лексикография на R^{I_ρ}. Для доказательства достаточно убедиться, что $K_0 \vee g_{\widehat{\lambda}_i} = g_{\widehat{\lambda}^*_i}$.

Будем считать для простоты, что $I_\rho = \{1, \ldots, s\}$. Путем инвертирования некоторых переменных превратим обобщенную лексикографию $\widehat{\lambda}_i$ в лексикографию λ_i. Конъюнкция K_0 при инвертировании перейдет в себя. Последовательно преобразуя с применением булева равенства $\bar{x}y \vee x = x \vee y$, получаем

$$K_0 \vee g_{\lambda_i} = \overline{p}'_1 p_1 \ldots \overline{p}'_s p_s \vee p_1 \vee p'_1 p_2 \vee \ldots \vee p'_1 \ldots p'_{s-1} p_s =$$
$$= p'_1 \ldots p'_s \vee p_1 \vee p'_1 p_2 \vee \ldots \vee p'_1 \ldots p'_{s-1} p_s = g_{\lambda^*_i}.$$

Осуществив в обоих частях обратное инвертирование переменных, приходим к требуемому равенству. □

Лемма 2.13. *Правильное отношение ρ транзитивно тогда и только тогда, когда ρ — ч. п. либо $g_\rho = K_0^+ \vee g_{\rho'}$, где ρ' — непустой ч. п., K_0^+ — монотонная конъюнкция типа $\widetilde{0}$, для которой $I(K_0) = I_\rho$.*

Доказательство в одну сторону получается некоторой модификацией доказательства леммы 2.11. В другую сторону, пусть $g_\rho = K_0^+ \vee g_{\rho'}$, где K_0^+ и ρ' удовлетворяют условиям леммы. Чтобы установить транзитивность ρ, достаточно убедиться, что для $K \in \mathscr{K}_{g_{\rho'}}$ композиция $K_0^+ \circ K$ поглощается конъюнкцией из $\mathscr{K}g_\rho$. Но это действительно так, поскольку $I(K_0^+) \supseteq I(K)$ и, следовательно, $K_0^+ \circ K = K$. □

Лемма 2.14. *Правильное рефлексивное отношение* ρ *транзитивно тогда и только тогда, когда* $g_\rho = g^*_{\lambda_1} \ldots g^*_{\lambda_k} = g_{\lambda_1^*} \ldots g_{\lambda_k^*}$, *где все* λ_i *являются лексикографиями на одном и том же множестве* R^I.

Доказательство проводится как в лемме 2.12 и отличается тем, что здесь g_ρ разлагается в произведение сомножителей $K_0^+ \vee g_{\lambda_i'}$. Рассмотрим один из них. Пусть для простоты $I_\rho = \{1, \ldots, s\} = I$ и

$$K_0^+ \vee g_{\lambda_i'} = p_1' \ldots p_s' \vee p_1 \vee p_1'p_2 \vee \ldots \vee p_1' \ldots p_{t-1}'p_t, \quad t \leqslant s.$$

Если $t < s$, возьмем совокупность лексикографий $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(r)}$ на множестве $R^{s-t} = R^{I'}$, $I' = \{t+1, \ldots, s\}$, дающих в пересечении отношение Парето π_{s-t} на R^{s-t} (см. п. 1.4), и введем лексикографии λ_{ij} на $R^s = R^I$, положив $g_{\lambda_{ij}} = g_{\lambda_i'} \vee p_1' \ldots p_t' g_{\lambda^{(j)}}$, $j = \overline{1, r}$. Тогда

$$\mathop{\&}_{1 \leqslant j \leqslant r} g^*_{\lambda_{ij}} = \mathop{\&}_{1 \leqslant j \leqslant r} \left(g_{\lambda_{ij}} \vee K_0^+\right) = \mathop{\&}_{1 \leqslant j \leqslant r} \left(g_{\lambda_i'} \vee p_1' \ldots p_t' g_{\lambda^{(j)}} \vee K_0^+\right) =$$
$$= g_{\lambda_i'} \vee K_0^+ \vee p_1' \ldots p_t' \mathop{\&}_{1 \leqslant j \leqslant r} g_{\lambda^{(j)}} = g_{\lambda_i'} \vee K_0^+ \vee p_1' \ldots p_t' g_{\pi_{s-t}} = g_{\lambda_i'} \vee K_0^+.$$

Таким образом, при $t < s$ выражение $K_0^+ \vee g_{\lambda_i'}$ разлагается в конъюнкцию функций g_{λ^*}, соответствующих лексикографиям λ на R^I. При $t = s$ отношение λ_i' является лексикографией λ на R^I, а $K_0^+ \vee g_{\lambda_i'}$ совпадает с g_{λ^*}. Остается заменить каждый сомножитель $K_0^+ \vee g_{\lambda_i'}$ в разложении g_ρ указанным способом. □

Лемма 2.15. *Правильное отношение* ρ *транзитивно тогда и только тогда, когда отношение* ρ' *с представляющей функцией* $g_{\rho'} = \left(p_{i_1} \vee \ldots \vee p_{i_s}\right) g_\rho$, *где* $\{i_1, \ldots, i_s\} = I_\rho$, *является ч. п.*

Доказательство. Пусть ρ — транзитивное отношение. Если ρ — ч. п., то $g_{\rho'} = g_\rho$ и ρ' является ч. п. В противном случае g_ρ представимо в соответствии с леммой 2.13 и там же доказано, что ρ' — ч. п.

Обратно, пусть ρ' — ч. п. Убедимся, что если в $\mathscr{K}g_\rho$ имеется конъюнкция типа $\tilde{0}$, то она единственна. Предположим, что это не так и K', K'' — две такие конъюнкции. Ни одна из них не поглощает другую, поэтому найдутся $i_1 \in I(K') \setminus I(K'')$ и $i_2 \in I(K'') \setminus I(K')$. Рассмотрим конъюнкции $p_{i_1}K'$, $p_{i_2}K'' \in \mathscr{K}_{g_{\rho'}}$. Поскольку $p_{i_1}K' \circ p_{i_2}K''$ является конъюнкцией типа $\tilde{0}$, это противоречит тому, что ρ' — ч. п. Единственную конъюнкцию типа $\tilde{0}$ обозначим через K_0, тогда $g_\rho = K_0 \vee g$, где g — дизъюнкция всех конъюнкций из $\mathscr{K}g_\rho \setminus \{K_0\}$. При этом $g_{\rho'} = K_0\left(p_{i_1} \vee \ldots \vee p_{i_s}\right) \vee \vee g$.

Если $g \equiv 0$, то $g_{\rho'}$ — ч. п. в силу леммы 2.3. Пусть $g \not\equiv 0$. Покажем, что для любой конъюнкции $K \in \mathscr{K}_{g_{\rho'}}$ имеет место $I(K_0) \supseteq I(K)$. Предположим, что это не так и $i_1 \in I(K) \setminus I(K_0)$. В конъюнкцию K должна входить некоторая нештрихованная переменная p_{i_2}, где $i_2 \in I(K) \cap I(K_0)$, иначе $K \circ K_0$ поглощает K_0 в g_ρ. Но тогда $K \circ p_{i_2}K_0$ поглощает K в $g_{\rho'}$. Полученное противоречие доказывает, что g_ρ представима в виде, указанном в лемме 2.13, и в соответствии с ней ρ транзитивно. □

Завершение доказательства теоремы 2.6. Если отношение ρ правильно, его транзитивность может быть распознана по приведенной д. н. ф. функции g_ρ эффективно: в этой д. н. ф. композиция любых двух конъюнкций поглощается некоторой конъюнкцией. По приведенной к. н. ф. функции g_ρ транзитивность также распознается эффективно: согласно лемме 2.15 достаточно образовать функцию $g_{\rho'} = (p_{i_1} \vee \ldots \vee p_{i_s}) g_\rho$ и, воспользовавшись способом, изложенным при завершении доказательства теоремы 2.5, проверить по к. н. ф. $g_{\rho'}$, является ли ρ' ч. п.

NP-полнота задач проверки транзитивности по д. н. ф. и к. н. ф. установлена в утверждении 1.14°. □

§ 3. Синтез операторов агрегирования

3.1. Требования к операторам. Одним из основных направлений в теории группового выбора является исследование свойств операторов $r = F(r_1, \ldots, r_n)$, агрегирующих индивидуальные отношения $r_1, \ldots, r_n$ в групповое отношение r. Отношения $r, r_1, \ldots, r_n$ предполагаются заданными на одном и том же множестве вариантов Ω, которое будем считать конечным. (Отметим, что варианты здесь уже не считаются точками пространства R^n.)

Известная теорема Эрроу [17, 19, 21, 23] о невозможности совмещения ряда естественных требований к агрегирующим операторам F инициировала целый ряд исследований [2, 3, 5—9, 12, 18, 20], посвященных явному описанию операторов $F\colon \mathcal{R}_1^n \to \mathcal{R}_2$, обладающих определенными свойствами и переводящих произвольные наборы отношений $r_1, \ldots, r_n$ класса $\mathcal{R}_1$ в отношения r класса $\mathcal{R}_2$. Опишем требования (см., например, [3]), которые будут предъявляться к операторам F.

Пусть x, y, x', y' — произвольные варианты из Ω, $(r_1, \ldots, r_n)$, $(r_1', \ldots, r_n')$ — произвольные n-ки отношений на множестве Ω. Для оператора F (n-местного) будем предполагать выполненными следующие свойства:

1) *бинарность*

$$(\forall i = \overline{1, n})\left(\left(x r_i y \Leftrightarrow x r_i' y\right) \& \left(y r_i x \Leftrightarrow y r_i' x\right)\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left((x, y) \in F(r_1, \ldots, r_n) \Leftrightarrow (x, y) \in F\left(r_1', \ldots, r_n'\right)\right),$$

2) *ненавязанность*

$$(\forall x, y \in \Omega)\left(\exists r_1, \ldots, r_n, r_1', \ldots, r_n'\right)\left((x, y) \in F(r_1, \ldots, r_n)\, \&\right.$$
$$\left.\& \,(x, y) \notin F\left(r_1', \ldots, r_n'\right)\right),$$

3) *нейтральность* (к вариантам)

$$(\forall i = \overline{1, n})\left((x r_i y \Leftrightarrow x' r_i y') \& (y r_i x \Leftrightarrow y' r_i x')\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left((x, y) \in F(r_1, \ldots, r_n) \Leftrightarrow (x', y') \in F(r_1, \ldots, r_n)\right).$$

Будем рассматривать также случай, когда к этим условиям добавляется

4) *монотонность*

$$(\forall i = \overline{1, n})\left(\left(x r_i y \Rightarrow x r_i' y\right) \& \left(y r_i' x \Rightarrow y r_i x\right)\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left((x, y) \in F(r_1, \ldots, r_n) \Rightarrow (x, y) \in F\left(r_1', \ldots, r_n'\right)\right).$$

Содержательно условие бинарности означает, что взаимоотношение вариантов x и y в групповом отношении определяется лишь их взаимоотношениями в индивидуальных отношениях (и не зависит от других вариантов), условие ненавязанности состоит в том, что для любых вариантов x и y существует набор индивидуальных отношений, при котором x предпочитается y в групповом отношении, и существует набор отношений, при котором это не так, условие нейтральности означает равноценность вариантов при агрегировании, условие монотонности — что улучшение позиций варианта x в индивидуальных отношениях не ухудшает его позиций в групповом отношении.

Нетрудно видеть, что операторы, удовлетворяющие условиям (1)—(3), и только они могут быть записаны в виде

$$F(r_1, \ldots, r_n) = \Phi\left(r_1, \ldots, r_n, r_1^{-1}, \ldots, r_n^{-1}\right),$$

где Φ — т.-м. операция, не являющаяся тривиальной, т. е. не дающая тождественно пустого или универсального (полного) множества независимо от значений аргументов.

В дальнейшем вместо r^{-1} будет удобно иметь дело с отношениями $\overline{r_i^{-1}} = \Omega^2 \setminus r^{-1} = r_i^*$. Заменив операцию $\Phi(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n)$ на $\Phi' = \Phi(X_1, \ldots, X_n, \overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_n)$, где черта обозначает дополнение множества (до Ω^2), приведем агрегирующий оператор к виду (штрих опущен)

$$F(r_1, \ldots, r_n) = \Phi\left(r_1, \ldots, r_n, r_1^*, \ldots, r_n^*\right) \tag{3.1}$$

и будем рассматривать только такие операторы.

Оператору F может быть сопоставлена булева функция $\varphi(p_1, \ldots, p_n, p_1', \ldots, p_n')$, полученная путем замены т.-м. операций в Φ соответствующими булевыми операциями, а переменных отношений r_i, r_i^* — переменными p_i, p_i'. С ее помощью равенство

$$r = \Phi\left(r_1, \ldots, r_n, r_1^*, \ldots, r_n^*\right)$$

запишется в виде

$$xry = \varphi\left(xr_1y, \ldots, xr_ny, xr_1^*y, \ldots, xr_n^*y\right).$$

Отношения r_i будем предполагать асимметричными. Из условия асимметрии $r_i \cap r_i^{-1} = \varnothing$ вытекает соотношение $r_i \subseteq r_i^*$, и можно считать, что p_i, p_i' удовлетворяют неравенству $p_i' \geqslant p_i$. Поэтому для φ справедливы те же представления в виде д. н. ф. и к. н. ф., что и для функций из $P_{3,2}$, и по тем же правилам может быть найдена двойственная функция φ^*. На основе этого можно определить двойственный к (3.1) оператор F^*. Оператор F монотонен, если он описывается монотонной функцией φ. Нетривиальный монотонный оператор выразим через операции $\cap$ и $\cup$.

3.2. Универсально аксиоматизируемые классы отношений. Классы отношений обычно задаются системами аксиом. Отношение r можно рассматривать как двуместный предикат $r(x, y)$ на Ω, для которого более употребительна запись xry. Аксиомы, с помощью которых определяются содержательные свойства отношений, в большинстве случаев имеют вид

$$(\forall x_1, \ldots, x_s)\, P(x_1, \ldots, x_s), \tag{3.2}$$

где P — формула, содержащая вхождения единственного предикатного символа r и символов логических операций. Отметим (и это существенно), что в P не допускается предикат равенства и, таким образом, P является формулой чистого исчисления предикатов в терминах [11]. Класс отношений $\mathscr{R}$, задаваемый системой аксиом указанного вида, будем называть *универсально аксиоматизируемым*.

Система аксиом не обязательно предполагается конечной. Класс ацикличных отношений, например, описывается счетной системой аксиом

$$(\forall x_1, \ldots, x_s)(x_1rx_2 \mathbin{\&} x_2rx_3 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} x_{s-1}rx_s \to x_s\bar{r}x_1), \quad s = 1, 2, \ldots$$

Все рассматривавшиеся нами свойства отношений, исключая антисимметрию и связность (в формулировке которых присутствуют неравенства — отрицания равенств), описываются аксиомами вида (3.2), а все классы цепочки (2.2), исключая $\mathscr{L}$, являются универсально аксиоматизируемыми. Предлагаемый ниже подход применим ко всем универсально аксиоматизируемым классам отношений.

3.3. Связь агрегирования с распознаванием свойств отношений. Явное описание операторов $\mathscr{W}^n \to \mathscr{R}$ может быть получено на основе следующего утверждения.

Теорема 3.1. *Пусть $\mathscr{R}$ — универсально аксиоматизируемый класс отношений. Оператор $\Phi(r_1, \ldots, r_n, r_1^*, \ldots, r_n^*)$ осуществляет отображение $\mathscr{W}^n \to \mathscr{R}$ тогда и только тогда, когда порядковое отношение ρ с представляющей функцией $g_\rho = \varphi(p_1, \ldots, p_n, p_1', \ldots, p_n')$ содержится в $\mathscr{R}$.*

Этот факт основывается на следующей лемме (дальше через $\mathscr{R}(\Omega)$ обозначается множество отношений класса $\mathscr{R}$, заданных на Ω).

Лемма 3.1. *Пусть* $r = \Phi(r_1, \ldots, r_n, r_1^*, \ldots, r_n^*)$ *и* $g_\rho = \varphi(p_1, \ldots$ $\ldots, p_n, p_1', \ldots, p_n')$. *Тогда*

а) $(\forall \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_s \in R^n)(\exists \Omega)(\exists r_1, \ldots, r_n \in \mathscr{W}(\Omega))(\exists x_1, \ldots, x_s \in \Omega)$
$$x_i r x_j \Leftrightarrow \tilde{x}_i \rho \tilde{x}_j, \quad i, j = \overline{1, s},$$

б) $(\forall \Omega)(\forall r_1, \ldots, r_n \in \mathscr{W}(\Omega))(\forall x_1, \ldots, x_s \in \Omega)(\exists \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_s \in R^n)$
$$x_i r x_j \Leftrightarrow \tilde{x}_i \rho \tilde{x}_j, \quad i, j = \overline{1, s}.$$

Доказательство. а) Пусть $\tilde{x}_i = (x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n)})$, $i = \overline{1, s}$. Каждому $\tilde{x}_i$ сопоставим символ x_i и на множестве $\Omega = \{x_1, \ldots, x_s\}$ определим отношения r_t $(t = \overline{1, n})$, положив $x_i r_t x_j \Leftrightarrow x_i^{(t)} > x_j^{(t)}$. Рассмотрим набор значений переменных $p_t = p(u_t)$, $p_t' = p'(u_t)$, $t = \overline{1, n}$, для $\tilde{u} = \Delta(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j)$. Имеем
$$x_i r_t x_j \Leftrightarrow x_i^{(t)} > x_j^{(t)} \Leftrightarrow p_t = 1,$$
$$x_i r_t^* x_j \Leftrightarrow x_j^{(t)} \not> x_i^{(t)} \Leftrightarrow x_i^{(t)} \geqslant x_j^{(t)} \Leftrightarrow p_t' = 1.$$

Если $x_i r x_j$, то при подстановке в φ значений $p_t = x_i r_t x_j$, $p_t' = x_i r_t^* x_j$, $t = \overline{1, n}$, она примет значение 1. По определению функции g_ρ на соответствующем наборе p_t, p_t', $t = \overline{1, n}$,
$$g_\rho(p_1, \ldots, p_n, p_1', \ldots, p_n') = \varphi(p_1, \ldots, p_n, p_1', \ldots, p_n') = 1.$$

Это означает $\tilde{x}_i \rho \tilde{x}_j$, а потому справедлива импликация $x_i r x_j \Rightarrow \tilde{x}_i \rho \tilde{x}_j$. Обратная импликация $\tilde{x}_i \rho \tilde{x}_j \Rightarrow x_i r x_j$ доказывается путем обращения этих рассуждений.

б) Поскольку множество Ω, на котором задано отношение $r \in \mathscr{W}$, конечно, то Ω может быть разбито на уровни так, что xry тогда и только тогда, когда уровень элемента x больше, чем уровень y [19]. Уровень элемента x_i в отношении r_t обозначим через $x_i^{(t)}$. Положим $\tilde{x} = (x_i^{(1)}, \ldots$ $\ldots, x_i^{(n)})$. В этом случае $x_i r_t x_j \Leftrightarrow x_i^{(t)} > x_j^{(t)}$, $t = \overline{1, n}$, т. е. x_i, x_j связаны с $\tilde{x}_i, \tilde{x}_j$ теми же соотношениями, что и в (а). Далее, рассуждая как в (а), приходим к $x_i r x_j \Leftrightarrow \tilde{x}_i \rho \tilde{x}_j$, $i, j = \overline{1, s}$. □

Доказательство теоремы 3.1. Пусть F — оператор, переводящий произвольные $r_1, \ldots, r_n \in \mathscr{W}$ в $r \in \mathscr{R}$ и отношение ρ построено по F указанным в утверждении способом. Возьмем некоторую аксиому вида (3.2), участвующую в определении класса $\mathscr{R}$. Пусть $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_s$ — произвольные наборы из R^n. Воспользуемся отношениями $r_1, \ldots, r_n \in \mathscr{W}$ и элементами, гарантируемыми утверждением а). Отношение $r \in \mathscr{R}$ удовлетворяет формуле $P(x_1, \ldots, x_s)$ из (3.2). Согласно а), $\tilde{x}_i \rho \tilde{x}_j \Leftrightarrow x_i r x_j$, поэтому для ρ выполнено $P(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_s)$. В силу произвольности $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_s$ отношение ρ удовлетворяет аксиоме (3.2). Эти рассуждения применимы к любой аксиоме, участвующей в задании $\mathscr{R}$, поэтому $\rho \in \mathscr{R}$.

Обратно, пусть $\rho \in \mathscr{R}$. Убедимся, что оператор F переводит произвольные $r_1, \ldots, r_n \in \mathscr{W}$ в отношение $r \in \mathscr{R}$. Рассмотрим аксиому вида

(3.2). Пусть $x_1, \ldots, x_s$ произвольны. Воспользовавшись б), возьмем соответствующие $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_s$. Отношение ρ удовлетворяет формуле $P(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_s)$, а потому для r выполнено $P(x_1, \ldots, x_s)$. Остается сослаться на произвольность аксиомы (3.2) и элементов $x_1, \ldots, x_s$. □

3.4. Операторы $\mathscr{W}^n \to \mathscr{R}$. Несколько модифицируя определение из [11], будем оператор, соответствующий лексикографии λ, называть *линейной иерархией* (л. и.) и обозначать Λ. Она имеет вид

$$\Lambda = r_{i_1} \cup \left(r^*_{i_1} \cap r_{i_2}\right) \cup \ldots \cup \left(r^*_{i_1} \cap \ldots \cap r^*_{i_{n-1}} \cap r_{i_n}\right), \tag{3.3}$$

где $i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_n$, $\{i_1, \ldots, i_n\} = \{1, \ldots, n\}$. Аналогично определим неполную л. и. Λ', обобщенную л. и. $\widehat{\Lambda}$, обобщенную неполную л. и. $\widehat{\Lambda}'$ и (обобщенную) л. и. на множестве I на основе соответствующих типов лексикографии. Обобщенная л. и. получается из л. и. заменой некоторых отношений r_i на обратные r_i^{-1}. То же относится и к другим типам обобщенной л. и. Оператор Λ^*, двойственный к (3.3), образуется из (3.3) заменой r_{i_n} на $r^*_{i_n}$. Подобным образом осуществляется переход к двойственным операторам и для других типов л. и.

Укажем теперь явный вид агрегирующих операторов F: $\mathscr{W}^n \to \mathscr{R}$ для различных классов $\mathscr{R}$. Из теорем 2.3, 2.4 и 3.1 вытекает

Теорема 3.2. *Оператор* (3.1) *осуществляет отображение $\mathscr{W}^n \to \mathscr{R}$, где $\mathscr{R} \in \{\mathscr{W}, \mathscr{S}, \mathscr{I}\}$, тогда и только тогда, когда он является обобщенной неполной л. и. $\widehat{\Lambda}'$, а в случае монотонного оператора — неполной л. и. Λ'.*

Для класса $\mathscr{R} = \mathscr{W}$ и монотонных операторов этот результат опубликован в [20], но был известен раньше (соображения об его авторстве см. в [7]), для $\mathscr{R} = \mathscr{W}$ и операторов общего вида он имеется в [5, 9, 12]. Для $\mathscr{R} = \mathscr{S}$ и монотонных операторов данный факт доказан В. И. Даниловым [7]. Как выяснилось при обсуждении результата, теорема 3.2 в полном объеме была известна Ф. Т. Алескерову и А. В. Владимирову. Из нее следует, что при отображениях $\mathscr{W}^n \to \mathscr{S}$ и $\mathscr{W}^n \to \mathscr{I}$ агрегированное отношение всегда оказывается в более узком классе $\mathscr{W}$.

На основе теоремы 2.5 получаем описание всех отображений в класс частичных порядков.

Теорема 3.3. *Оператор F осуществляет отображение $\mathscr{W}^n \to \mathscr{P}$ тогда и только тогда, когда он является пересечением обобщенных л. и.*

$$F = \widehat{\Lambda}_1 \cap \ldots \cap \widehat{\Lambda}_k, \tag{3.4}$$

а в монотонном случае — пересечением неполных л. и.

$$F = \Lambda'_1 \cap \ldots \cap \Lambda'_k. \tag{3.5}$$

Этот результат в монотонном случае совпадает с теоремой В. И. Данилова из [7], а в немонотонном несколько уточняет результаты из [5, 9] (где в представлении типа (3.4) могут участвовать обобщенные неполные л. и.). Лемма 2.10 показывает, что в (3.5) неполные л. и. не могут быть, подобно немонотонному случаю, заменены на л. и. На связь своего результата с теоремой Душника — Миллера обратил внимание В. И. Данилов [7], но не дал этому объяснения. Теорема 3.1 делает эту связь прозрачной.

Для более широкого класса транзитивных отношений общий вид агрегирующих операторов вытекает из теоремы 2.6.

Теорема 3.4. *Оператор F осуществляет отображение $\mathscr{W}^n \to \mathscr{T}$ тогда и только тогда, когда он представим в одном из двух видов:*

$$F = \widehat{\Lambda}_1 \cap \ldots \cap \widehat{\Lambda}_k, \quad F = \widehat{\Lambda}^*_1 \cap \ldots \cap \widehat{\Lambda}^*_k,$$

где все $\widehat{\Lambda}_i$ являются обобщенными л. и. на одном и том же множестве I.

Если оператор F монотонен, то он представим в одном из двух видов:

$$F = \Lambda_1' \cap \ldots \cap \Lambda_k', \quad F = \Lambda_1^* \cap \ldots \cap \Lambda_k^*, \tag{3.6}$$

где Λ_i' — неполные линейные иерархии, а все Λ_i — линейные иерархии на одном и том же множестве I.

Это утверждение несколько уточняет соответствующие результаты из [5, 9].

Отметим, что первое представление в (3.6) нельзя усилить таким образом, чтобы все Λ_i были л. и. на одном и том же множестве I.

Теорема 2.1 дает возможность описать все операторы, отображающие слабые порядки в класс ацикличных отношений.

Теорема 3.5. *Оператор F осуществляет отображение $\mathscr{W}^n \to \mathscr{A}$ тогда и только тогда, когда он может быть представлен в виде $F = \widehat{\Lambda} \cap G$, где $\widehat{\Lambda}$ — обобщенная линейная иерархия, а G — произвольный оператор вида* (3.1). *В случае монотонного F оператор G должен быть взят монотонным, а роль $\widehat{\Lambda}$ играет линейная иерархия Λ.*

Этот результат в несколько иной эквивалентной форме получен в [5].

Напомним, что класс линейных порядков не является универсально аксиоматизируемым из-за использования равенств в определении свойства связности. Попытка построить на основе теоремы 2.2 оператор для отображения $\mathscr{W}^n$ в $\mathscr{L}$, показывает, что условие отсутствия равенств в формулах P из (3.2) принципиально.

3.5. Свойство представляющих функций транзитивных отношений. Выше указан общий вид операторов $\mathscr{W}^n \to \mathscr{R}$ для всех классов $\mathscr{R}$ цепочки (2.2), удовлетворяющих естественному условию $\mathscr{W} \subseteq \mathscr{R}$. Теперь рассмотрим оставшиеся случаи операторов $\mathscr{R}_1^n \to \mathscr{R}_2$, $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{R}_2$ — произвольные классы цепочки (2.2), такие, что $\mathscr{R}_2 \supseteq \mathscr{R}_1 \supseteq \mathscr{S}$. Здесь уже нельзя впрямую воспользоваться теоремой 3.1, но общий подход, сводящий задачу описания операторов $\mathscr{R}_1^n \to \mathscr{R}_2$ к исследованию представляющих функций g_ρ, $\rho \in \mathscr{R}_2$, сохраняет свою силу.

Различные случаи операторов $\mathscr{R}_1^n \to \mathscr{R}_2$ сводятся к двум основным: $\mathscr{R}^n \to \mathscr{P}$ и $\mathscr{R}^n \to \mathscr{A}$. Явный вид операторов $\mathscr{R}^n \to \mathscr{P}$ является следствием более общего результата об операторах $\mathscr{R}^n \to \mathscr{T}$, который будет получен на основе свойств представляющих функций g_ρ транзитивных отношений ρ. Как и сами отношения, представляющие функции будем рассматривать с точностью до однотипности, т. е. с точностью до инвертирования и перенумерации переменных u_i.

Лемма 3.2. *Если представляющая функция g_ρ транзитивного отношения ρ отлична от тождественной константы, то она либо*

а) *однотипна конъюнкции $p_1 \ldots p_s$, $s \geqslant 1$, либо переходом к однотипной функции, отождествлениями переменных u_i и подстановками $u_i = 0$ приводится к одному из видов*:

б) $p_1'\bar{p}_1$, в) $p_1'\bar{p}_1 p_2$, г) p_1', д) $p_1 \vee p_1' p_2$, е) $p_1 p_2' \vee g$, $g \leqslant p_1' p_2'$.

Доказательство будем вести индукцией по числу n переменных u_i. Базис индукции при $n = 1$ очевиден.

Пусть теперь $n \geqslant 2$. Обозначим через K композицию всех конъюнкций из д. н. ф. g_ρ. В силу транзитивности ρ

$$g_\rho = K \vee g, \tag{3.7}$$

где g — дизъюнкция всех конъюнкций из д. н. ф. g_ρ, не поглощаемых K. С точностью до однотипности

$$K = p_1 \ldots p_l p_{l+1}' \ldots p_m' p_{m+1}' \bar{p}_{m+1} \ldots p_s' \bar{p}_s. \tag{3.8}$$

Из свойств композиции следует, что все конъюнкции из g содержат при каждом $i = \overline{1, m}$ один из сомножителей p_i, p'_i и $p'_i\overline{p}_i$, а при $i = \overline{m+1, s}$ — сомножитель $p'_i\overline{p}_i$. Поэтому

$$g \leqslant p'_1 \ldots p'_m p'_{m+1}\overline{p}_{m+1} \ldots p'_s\overline{p}_s. \tag{3.9}$$

Рассмотрим различные соотношения параметров l, m и s, которыми исчерпываются все возможности.

1) $m < s$. Из (3.7), (3.8) и (3.9) следует, что функция g_ρ представима в виде

$$g_\rho = p'_{m+1}\overline{p}_{m+1} \ldots p'_s\overline{p}_s g'.$$

Если $g' = p_v \ldots p_w$ (с точностью до однотипности), то, полагая $u_{m+1} = \ldots = u_s$, $u_v = \ldots = u_w$, приходим к функции вида в). Если $g' \equiv 1$, то, отождествив $u_{m+1} = \ldots = u_s$, получаем функцию вида б). В остальных случаях подставим $u_{m+1} = \ldots = u_s = 0$ и воспользуемся для g' предположением индукции.

2) $m = s$, т. е. $K = p_1 \ldots p_l p'_{l+1} \ldots p'_m$. Здесь возникает ряд подслучаев.

2.1) $l = 0$, т. е. $K = p'_1 \ldots p'_m$. При $u_1 = \ldots = u_m$ приходим к г).

2.2) $1 \leqslant l < m$. Произведя отождествления $u_1 = \ldots = u_l$, $u_{l+1} = \ldots = u_m$, получаем из K конъюнкцию $p_l p'_m$, а из g — функцию g', которая в силу (3.9) (при $s = m$) удовлетворяет неравенству $g' \leqslant p'_l p'_m$. Здесь имеет место случай е).

2.3) $l = m$, т. е. $K = p_1 \ldots p_l$. Из (3.7), (3.8) и (3.9) при $l = m = s$ заключаем, что

$$g_\rho = p_1 \ldots p_l \vee p'_1 \ldots p'_l g'. \tag{3.10}$$

2.3.1) $(\forall i \in \overline{1, l})\; p_i \geqslant p'_1 \ldots p'_l g'$. Тогда $g_\rho = p_1 \ldots p_l$, т. е. имеет место а).

2.3.2) $(\exists i \in \overline{1, l})\; p_i \not\geqslant p'_1 \ldots p'_l g'$ (пусть $i = 1$). Подставив в (3.10) $u_1 = 0$, приходим к функции $p'_2 \ldots p'_l g''$, где g'' — результат подстановки $u_1 = 0$ в g'. Пусть K' означает произвольную конъюнкцию вида $p_a \ldots p_b$ (с точностью до однотипности), возможно, пустую.

2.3.2.1) $(\forall K')\; p'_2 \ldots p'_l g'' \neq K'$. К $p'_2 \ldots p'_l g''$ применимо предположение индукции.

2.3.2.2) $(\exists K')\; p'_2 \ldots p'_l g'' = K'$. Разложим g' по переменной u_1:

$$g' = p_1 f_1 \vee p'_1 f_2 \vee p'_1\overline{p}_1 f_3 = p_1(f_1 \vee f_2) \vee p'_1\overline{p}_1(f_2 \vee f_3). \tag{3.11}$$

Подставив сюда $u_1 = 0$, получаем

$$K' = p'_2 \ldots p'_l g'' = p'_2 \ldots p'_l (f_2 \vee f_3).$$

Обозначив $f_1 \vee f_2 = f'$ и воспользовавшись (3.10), (3.11), приходим к равенству

$$g_\rho = p_1 \ldots p_l \vee p'_1 \ldots p'_l (p_1 f' \vee p'_1\overline{p}_1 K').$$

Отметим, что из $p'_2 \ldots p'_l g'' = K'$ следует $K' = p_2 \ldots p_l K''$, где $K'' = p_v \ldots p_w$ (допустима пустая конъюнкция $K'' \equiv 1$).

2.3.2.2.1) $l = 1$, т. е. $g_\rho = p_1 \vee p'_1 K'$. Если $K' \equiv 1$, то $g_\rho = p'_1$ и имеет место в). В случае $K' = p_a \ldots p_b$, положив $u_a = \ldots = u_b$, приходим к функции $p_1 \vee p'_1 p_a$ вида д).

2.3.2.2.2) $l \geqslant 2$. Отождествив $u_2 = \ldots = u_l$, получаем функцию

$$p_1 p_2 \vee p_1 p'_2 f'' \vee p'_1\overline{p}_1 p_2 K'' = p_1 p_2 \vee p_1 p'_2 f'' \vee p'_1 p_2 K''.$$

Если $K'' \equiv 1$, имеем е), а при $K'' = p_v \ldots p_w$, отождествив $p_v = \ldots = p_w$, приходим к е). □

3.6. Операторы $\mathscr{R}^n \to \mathscr{P}$. Общий вид операторов, приводящих к транзитивным групповым отношениям, дается следующим утверждением.

Теорема 3.6. *Оператор F осуществляет отображение $\mathscr{R}^n \to \mathscr{T}$, где $\mathscr{R} \in \{\mathscr{S}, \mathscr{I}, \mathscr{P}\}$, тогда и только тогда, когда $F = r_{i_1}^{\alpha_1} \cap r_{i_2}^{\alpha_2} \cap \ldots \cap r_{i_s}^{\alpha_s}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \{1, -1\}$ (r^α означает r при $\alpha = 1$, r^{-1} при $\alpha = -1$). Если оператор F монотонен, то $F = r_{i_1} \cap r_{i_2} \cap \ldots \cap r_{i_s}$.*

Доказательство. Поскольку пересечение транзитивных отношений транзитивно, а отношения $r \in \mathscr{P}$ и обратные им отношения транзитивны, то оператор F указанного в утверждении вида осуществляет нужное отображение.

Для доказательства в обратную сторону достаточно ограничиться случаем $\mathscr{R} = \mathscr{S}$. Из включения $\mathscr{W} \subseteq \mathscr{S}$ и теоремы 3.1 следует, что отношение ρ с представляющей функцией $g_\rho = \varphi$ (где φ соответствует оператору F) транзитивно. Если g_ρ подпадает под случай а) в лемме 3.2, то F имеет нужный вид.

В остальных случаях функция g_ρ приводится к одному из видов б) — е). Применительно к оператору F преобразования однотипности сводятся к замене r_i на r_i^{-1} и к перенумерации отношений. Это не выводит за пределы класса $\mathscr{S}$. Отождествления $u_i = u_j$ означают равенства $r_i = r_j$ используемых отношений, а подстановки $u_i = 0$ — применение пустых отношений r_i (которые содержатся в $\mathscr{S}$). Установив, что для каждого из операторов, описываемых функциями б) — е), существуют отношения полупорядка, переводимые ими в нетранзитивные отношения, мы тем самым докажем, что функционалов $\mathscr{S}^n \to \mathscr{T}$, отличных от указанных в формулировке теоремы, нет.

Примеры отношений будем задавать на множестве $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Нетрудно проверить, что в случаях б) и г) достаточно взять $r_1 = \{(1, 2)\}$, в случае в) — отношения $r_1 = \{(1, 2)\}$ и $r_2 = \{(2, 3), (3, 1), (2, 1)\}$, в случае д) — отношения $r_1 = \{(1, 2)\}$ и $r_2 = \{(3, 1)\}$, в случае е) — отношения $r_1 = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$ и $r_2 = \{(3, 1)\}$. □

Результат теоремы для случая $\mathscr{R} = \mathscr{P}$ доказан А. В. Владимировым [5].

Теорема 3.7. *Оператор F осуществляет отображение $\mathscr{R}^n \to \mathscr{P}$ для $\mathscr{R} \in \{\mathscr{S}, \mathscr{I}, \mathscr{P}\}$ тогда и только тогда, когда $F = r_{i_1}^{\alpha_1} \cap \ldots \cap r_{i_s}^{\alpha_s}$. Если оператор F монотонен, то $F = r_{i_1} \cap \ldots \cap r_{i_s}$.*

Доказательство. Этот факт вытекает из теоремы 3.6, поскольку операторы указанного вида отображают $\mathscr{P}^n$ в $\mathscr{P}$. □

Часть теоремы 3.7, относящаяся к монотонным отображениям $\mathscr{P}^n \to \mathscr{P}$, принадлежит Д. Брауну [18].

Поскольку оператор $r_{i_1}^{\alpha_1} \cap \ldots \cap r_{i_s}^{\alpha_s}$ является обобщенной неполной л. и. лишь в случае $s = 1$, в качестве простого следствия теорем 3.2, 3.7 получаем следующий факт.

Теорема 3.8. *Оператор F осуществляет отображение $\mathscr{R}_1^n \to \mathscr{R}_2$, $\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2 \in \{\mathscr{S}, \mathscr{I}\}$, $\mathscr{R}_1 \subseteq \mathscr{R}_2$, тогда и только тогда, когда он имеет вид $F = r_i^\alpha$, $\alpha \in \{1, -1\}$, а в монотонном случае — вид $F = r_i$.*

3.7. Некоторые утверждения об отношениях. Для нахождения общего вида функционалов $\mathscr{R}^n \to \mathscr{A}$ понадобится ряд вспомогательных утверждений. Мы не будем различать отношения с соответствующими им ориентированными графами и в рассуждениях об отношениях будем пользоваться терминологией теории графов.

Пусть $C = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_{s-1}, x_s), (x_s, x_1)\}$, $s \geqslant 3$ — ориентированный цикл. Противоположно ориентированный цикл $\{(x_s, x_{s-1}), \ldots$

$\ldots, (x_2, x_1), (x_1, x_s)\}$ обозначим C^{-1}. Будем говорить, что множество дуг M *порождено циклом* C, если $M \subseteq C \cup C^{-1}$. Множество M *асимметрично*, если в нем нет противоположно ориентированных пар (x_i, x_j) и (x_j, x_i). Вершину x_i, через которую проходит цикл C, назовем *изолированной* в M, если в M нет дуг, одним из концов которых является x_i. Дуги множества $M \cap C$ будем называть ориентированными *вдоль цикла* C, дуги множества $M \cap C^{-1}$ — ориентированными *против цикла* C.

Лемма 3.3. *Пусть множество M, порожденное циклом C, асимметрично и $M \cap C \neq \varnothing$, $M \cap C^{-1} \neq \varnothing$. Тогда существует отношение $W \in \mathscr{W}$ такое, что $W \cap (C \cup C^{-1}) = M$.*

Доказательство. Будем считать для определенности, что дугой множества M, ориентированной против C, является (x_1, x_s), $s = |C|$ — длина C. Последовательно, начиная с x_1, припишем каждой вершине x_i число $\varphi(x_i)$. Для этого $\varphi(x_1)$ возьмем произвольным. Если числа $\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_{i-1})$, $i \leqslant s$, уже приписаны, назначим $\varphi(x_i) < \varphi(x_{i-1})$ произвольно в случае $(x_{i-1}, x_i) \in M$, $\varphi(x_i) > \varphi(x_{i-1})$ произвольно в случае $(x_i, x_{i-1}) \in M$, $\varphi(x_i) = \varphi(x_{i-1})$ при $(x_i, x_{i-1}), (x_{i-1}, x_i) \notin M$. Если в результате окажется $\varphi(x_s) < \varphi(x_1)$, то отношение W, задаваемое критерием φ в соответствии с п. 2.1, обладает требуемым свойством. Если же $\varphi(x_s) \geqslant \varphi(x_1)$, возьмем дугу множества $M \cap C$ (пусть это будет (x_{u-1}, x_u)) и к $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_{u-1})$ прибавим одинаковое столь большое число, чтобы после прибавления оказалось $\varphi(x_s) < \varphi(x_1)$. □

Лемма 3.4. *Пусть множество M, порожденное циклом C, асимметрично и содержит изолированную вершину. Тогда существует отношение $I \in \mathscr{I}$ такое, что $I \cap (C \cup C^{-1}) = M$.*

Доказательство. Будем считать для определенности, что изолированной вершиной в M является x_s. Последовательно, начиная с x_1, припишем каждой вершине x_i числа $\varphi^-(x_i)$ и $\varphi^+(x_i)$, $\varphi^-(x_i) < \varphi^+(x_i)$. Для этого значения $\varphi^-(x_1) < \varphi^+(x_1)$ назначим произвольно. Если $\varphi^-(x_1), \varphi^+(x_1), \ldots, \varphi^-(x_{i-1}), \varphi^+(x_{i-1})$, $i \leqslant s-1$, $s = |C|$, уже определены, полагаем $\varphi^-(x_i) < \varphi^+(x_i) < \varphi^-(x_{i-1})$ произвольно в случае $(x_{i-1}, x_i) \in M$, полагаем $\varphi^+(x_i) > \varphi^-(x_i) > \varphi^+(x_{i-1})$ произвольно в случае $(x_i, x_{i-1}) \in M$, а при $(x_{i-1}, x_i), (x_i, x_{i-1}) \notin M$ полагаем $\varphi^-(x_i) = \varphi^-(x_{i-1})$, $\varphi^+(x_i) = \varphi^+(x_{i-1})$. После того, как найдены величины φ^-, φ^+ для $x_1, \ldots, x_{s-1}$, берем

$$\varphi^+(x_s) = \max_{1 \leqslant i \leqslant s-1} \varphi^+(x_i), \quad \varphi^-(x_s) = \min_{1 \leqslant i \leqslant s-1} \varphi^-(x_i).$$

Легко видеть, что отношение I, задаваемое функциями φ^-, φ^+ в соответствии с п. 2.1, обладает нужными свойствами. □

Лемма 3.5. *Если $M \subseteq C$, то отношение $S \in \mathscr{S}$, удовлетворяющее условию $S \cap (C \cup C^{-1}) = M$, существует тогда и только тогда, когда $|M| < |C|/2$, где $|M|$ — число дуг в множестве M.*

Доказательство. Будем считать, что $|M| \geqslant 1$, иначе утверждение тривиально. Предположим, что отношение S с указанным свойством существует и оно задается функцией φ и числом δ в соответствии с п. 2.1 (можно полагать $\delta = 1$). Поскольку $M \subseteq C$, то $(x_{i+1}, x_i) \notin S$, где $i = \overline{1, s}$, $x_{s+1} = x_1$, а потому $(\forall i = \overline{1, s})\ (\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}) \geqslant -1)$. Кроме того, если $(x_i, x_{i+1}) \in S$, то $\varphi(x_i) - \varphi(x_{i+1}) > 1$. С учетом этого получаем

$$(\varphi(x_1) - \varphi(x_2)) + \ldots + (\varphi(x_{s-1}) - \varphi(x_s)) + (\varphi(x_s) - \varphi(x_1)) >$$
$$> |M| - (|C| - |M|) = 2|M| - |C|.$$

Поскольку левая сумма равна 0, приходим к требуемому соотношению.

Обратно, пусть $|M| < |C|/2$. Будем считать для определенности, что одной из дуг множества M является (x_s, x_1). Обозначим $|C| - 2|M| = t$

и последовательно, начиная с x_1, припишем вершинам x_i цикла C значения $\varphi(x_i)$. Величину $\varphi(x_1)$ назначим произвольно. Если $\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_{i-1})$, $i<s$, уже определены, полагаем $\varphi(x_i)=\varphi(x_{i-1})+1$ в случае $(x_{i-1}, x_i)\notin M$ и $\varphi(x_i)=\varphi(x_{i-1})-1-t/M$ в случае $(x_{i-1}, x_i)\in M$. Условие $(x_i, x_{i+1})\in S \Leftrightarrow (x_i, x_{i+1})\in M$ для $i=\overline{1, s-1}$ выполнено по построению. Осталось убедиться, что $\varphi(x_s)-\varphi(x_1)>1$. Имеем

$$\varphi(x_s)-\varphi(x_1)=-((\varphi(x_1)-\varphi(x_2))+\ldots+(\varphi(x_{s-1})-\varphi(x_s)))=$$
$$=-((|M|-1)(1+t/|M|)-(|C|-|M|))=1+t/|M|. \ \square$$

3.8. Операторы $\mathcal{R}^n\to\mathcal{A}$, $\mathcal{R}\supseteq\mathcal{I}$. Общий вид операторов $\mathcal{R}^n\to\mathcal{A}$ для всех классов $\mathcal{R}$ цепочки (2.2), начиная с $\mathcal{I}$, дается следующим утверждением.

Теорема 3.9. *Оператор F осуществляет отображение $\mathcal{R}^n\to\mathcal{A}$ для $\mathcal{R}\in\{\mathcal{I}, \mathcal{P}, \mathcal{A}\}$ тогда и только тогда, когда $F=r_i^\alpha\cap G$, где $\alpha\in\{1, -1\}$, G — произвольный оператор. Если оператор F монотонен, то $F=r_i\cap G$, а G — произвольный монотонный оператор.*

Доказательство. В одну сторону это утверждение очевидно, поскольку отношения классов $\mathcal{I}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{A}$ ацикличны и меньшие отношения также ацикличны. Для доказательства в другую сторону достаточно рассмотреть случай $\mathcal{R}=\mathcal{I}$.

Пусть оператор F отображает $\mathcal{I}^n$ в $\mathcal{A}$ и ему соответствует функция $\varphi(p_1, \ldots, p_n, p_1', \ldots, p_n')$. Если предположить, что F имеет вид, отличный от указанного в утверждении, то $\varphi\neq p_i\psi$ и $\varphi\neq\bar{p}_i'\psi$. Запишем φ в виде д. н. ф. $\varphi=K_1\vee\ldots\vee K_s$, положим $\Omega=\{a_1, a_2, \ldots, a_{2s-1}, a_{2s}\}$ и построим на Ω отношения $I_1, \ldots, I_n\in\mathcal{I}$. С этой целью введем обозначения $v_l=(a_{2l-1}, a_{2l})$, $v_l'=(a_{2l}, a_{2l+1})$, $w_l=(a_{2l}, a_{2l-1})$, $w_l'=(a_{2l+1}, a_{2l})$, где $l=\overline{1, s}$, $a_{2s+1}=a_1$, и образуем множества

$$M_i=\{v_l, v_l' \mid p_i\in K_l\}\cup\{w_l, w_l' \mid p_i'\in K_l\}, \quad i=\overline{1, n}.$$

Отметим, что множество $C=\{v_1, v_1', \ldots, v_s, v_s'\}$ представляет собой ориентированный цикл, а $C^{-1}=\{w_1, w_1', \ldots, w_s, w_s'\}$.

Множества M_i асимметричны и, поскольку $\varphi\neq p_i\psi$, $\varphi\neq\bar{p}_i'\psi$, каждое из них отлично от C и от C^{-1}. Это означает, что при всех i либо $M_i\cap C\neq\varnothing$ и $M_i\cap C^{-1}\neq\varnothing$, либо M_i строго содержится в одном из множеств C и C^{-1} (пусть в C). В первом случае в соответствии с леммой 3.3 дополним M_i до отношения $I_i\in\mathcal{W}\subset\mathcal{I}$. Во втором случае в множестве M_i отсутствует некоторая пара v_l, v_l' последовательных дуг, вершина a_{2l} оказывается изолированной и по лемме 3.4 множество M_i может быть дополнено до отношения $I_i\in\mathcal{I}$.

Отношению I_i сопоставим набор значений переменных $u_l^{(i)}$, $l=\overline{1, s}$, положив

$$u_l^{(i)}=\begin{cases} 1, & v_l\in I_i,\\ -1, & w_l\in I_i,\\ 0, & v_l,\ w_l\notin I_i.\end{cases}$$

По построению I_i при каждом $l=\overline{1, s}$ конъюнкция $K_l\in P_{3,2}$ обращается в 1 на наборе $\tilde{u}_l=(u_l^{(1)}, \ldots, u_l^{(n)})$, и, следовательно, $v_l\in r=F(I_1, \ldots, I_n, I_1^{-1}, \ldots, I_n^{-1})$. Дуги v_l, v_l' входят в одни и те же отношения I_i, и то же самое относится к дугам w_l, w_l'. Поэтому v_l' также содержатся в r, а это означает, что $r\supseteq C$. $\square$

3.9. Операторы $\mathcal{S}^n\to\mathcal{A}$. Этот случай приводит к типам операторов, ранее не встречавшихся в литературе. Введем ряд понятий.

Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *пороговой*, если существуют такие числа $w_1, \ldots, w_n$ (веса) и t (порог), что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 1 \Leftrightarrow w_1x_1 + \ldots + w_nx_n \geqslant t.$$

Набор $(w_1, \ldots, w_n, t)$ называется *реализацией* функции f. Дальше функцию f будем считать монотонной. При этом все веса можно предполагать неотрицательными. Обозначим через $Th_{1/2}$ класс всех монотонных пороговых функций, для которых существует реализация $(w_1, \ldots, w_n, t)$ с $t = (w_1 + \ldots + w_n)/2$. Путем нормировки она приводится к виду $(w_1, \ldots, w_n, 1/2)$, где $w_1 + \ldots + w_n = 1$.

Каждой монотонной булевой функции

$$f = \bigvee_{\{i_1, \ldots, i_s\}} x_{i_1} \ldots x_{i_s}$$

сопоставим функцию

$$\theta_f = \bigvee_{\{i_1, \ldots, i_s\}} \mathop{\&}_{i \in \{i_1, \ldots, i_s\}} p_i \mathop{\&}_{j \in \overline{1,n} \setminus \{i_1, \ldots, i_s\}} p_j', \tag{3.12}$$

а через T_f обозначим соответствующий ей агрегирующий оператор. Класс операторов T_f, отвечающих функциям $f \in Th_{1/2}$, обозначим через $\mathcal{T}h^0_{1/2}$, а более общий класс всех однотипных с ними операторов — через $\mathcal{T}h_{1/2}$.

Теорема 3.10. *Оператор F осуществляет отображение $\mathcal{S}^n \to \mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда он представим в виде $F = T \cap G$, где $T \in \mathcal{T}h_{1/2}$, а G — произвольный оператор. Если F монотонен, то $T \in \mathcal{T}h^0_{1/2}$, а G — произвольный монотонный оператор.*

Пусть $\varphi(p_1, \ldots, p_n, p_1', \ldots, p_n')$ — функция, соответствующая оператору F, а $\varphi = K_1 \vee \ldots \vee K_t$ — ее представление в виде некоторой д. н. ф. Положим $I(\varphi) = I(K_1 \circ \ldots \circ K_t)$. Из теоремы 3.1 и включения $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{S}$ следует, что отношение с представляющей функцией φ ациклично. Поэтому $K_1 \circ \ldots \circ K_t$ не является конъюнкцией типа $\widetilde{0}$ и, следовательно, $I(\varphi) \neq \varnothing$. Пусть $|I(\varphi)| = d$.

Путем перехода от φ к однотипной функции (за счет инвертирования некоторых u_i) можно добиться того, чтобы элементарные сомножители конъюнкций $K_1, \ldots, K_t$, относящиеся к переменным u_i, $i \in I(\varphi)$, имели не более 3 видов: p_i, p_i', $p_i'\bar{p}_i$. Чтобы не вводить переобозначений, будем считать, что этим свойством обладает исходная функция φ.

Упорядочим переменные функции φ так, чтобы первые d мест занимали переменные с индексами из $I(\varphi)$. Обозначим через $q_i^{(l)}$ элементарный сомножитель конъюнкции K_l, относящийся к переменной u_i. Образуем $(d \times t)$— матрицу $B_0 = \|b_{li}\|$ (с d строками и t столбцами), положив при $i = \overline{1, d}$, $l = \overline{1, t}$

$$b_{li} = \begin{cases} 1, & q_i^{(l)} = p_i, \\ 0, & q_i^{(l)} \in \{p_i', p_i'\bar{p}_i\}. \end{cases}$$

На основе B_0 введем функцию $\varphi_0(u_1, \ldots, u_d)$:

$$\varphi_0 = K_1^0 \vee \ldots \vee K_t^0, \quad K_l^0 = \mathop{\&}_{i:\, b_{li}=1} p_i \mathop{\&}_{j:\, b_{lj}=0} p_j', \quad l = \overline{1, t}.$$

Здесь и дальше одинаковые конъюнкции K_l^0, отвечающие разным K_l, удобно считать разными. Через F_0 обозначим оператор, соответствующий функции φ_0.

Доказательство теоремы 3.10 разобьем на ряд лемм.

Лемма 3.6. *Оператор F_0 осуществляет отображение $\mathcal{S}^d \to \mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда не существует таких положительных чисел $h_1, \ldots, h_t$, $h_1 + \ldots + h_t = 1$, что*

$$\sum_{1 \leqslant l \leqslant t} h_l b_{li} < 1/2, \quad i = \overline{1, d}. \tag{3.13}$$

Доказательство. Предположим, что оператор F_0 в применении к $S_1, \ldots, S_d \in \mathcal{S}$ дает отношение r, обладающее циклом $C = \{v_1, \ldots, v_s\}$, где $v_j = (a_j, a_{j+1})$, $j = \overline{1, s}$, $a_{s+1} = a_1$. Через u_j обозначим дугу (a_{j+1}, a_j), обратную v_j. Каждой дуге v_j сопоставим набор $\widetilde{\beta}_j = (\beta_j^{(1)}, \ldots, \beta_j^{(d)})$, где

$$\beta_j^{(i)} = \begin{cases} 1, & v_j \in s_i, \\ -1, & u_j \in s_i, \\ 0, & v_j, u_j \notin s_i. \end{cases}$$

Из $v_j \in r$ следует, как нетрудно видеть, что $\varphi_0(\widetilde{\beta}_j) = 1$. Обозначим через $K^{(j)}$ одну из конъюнкций K_l^0, обращающихся на наборе $\widetilde{\beta}_j$ в 1. Поскольку в K_l^0 при каждом $i = \overline{1, d}$ входит сомножитель p_i либо p_i', набор $\widetilde{\beta}_j$ состоит лишь из 0 и 1, а это означает, что отношения S_i не имеют дуг, направленных против цикла C.

Если обозначить через $\widetilde{b}_l$ набор, соответствующий l-му столбцу матрицы B_0, то в силу монотонности φ_0 выполнено $\widetilde{b}_l \leqslant \widetilde{\beta}_j$, где $K^{(j)} = K_l^0$. Пусть среди конъюнкций $K^{(j)}$, $j = \overline{1, s}$, конъюнкция K_l^0 встречается $m_l \geqslant 0$ раз, $m_1 + \ldots + m_t = s$. Из $\widetilde{b}_l \leqslant \widetilde{\beta}_j$ и из леммы 3.5 следует, что при каждом $i = \overline{1, d}$

$$\sum_{1 \leqslant l \leqslant t} m_l b_{li} \leqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant s} \beta_j^{(i)} < s/2 = 1/2 \sum_{1 \leqslant l \leqslant t} m_l.$$

Разделив обе части на $s = m_1 + \ldots + m_t$ и положив $h_l = m_l/s$, придем к (3.13). Среди чисел h_l здесь могут встречаться нулевые, но поскольку неравенства (3.13) строгие, можно, не нарушив их, сделать все числа h_l положительными.

Обратно, пусть выполнены неравенства (3.13). Можно считать числа h_l рациональными и, домножив на общий знаменатель, привести (3.13) к виду

$$\sum_{1 \leqslant l \leqslant t} m_l b_{li} < 1/2 \sum_{1 \leqslant l \leqslant t} m_l,$$

где все m_l целые. Возьмем произвольный цикл C длины $s = m_1 + \ldots + m_t$, сопоставим m_l $(l = \overline{1, t})$ дугам этого цикла конъюнкцию K_l^0 и построим в соответствии с леммой 3.5 отношения $S_1, \ldots, S_d \in \mathcal{S}$ такие, что дуга v_j цикла C принадлежит S_i тогда и только тогда, когда конъюнкция K_l^0, сопоставленная дуге v_j, имеет сомножитель p_i. Нетрудно проверить, что оператор F_0 в применении к $S_1, \ldots, S_d$ дает отношение, содержащее цикл C. □

Лемма 3.7. *Оператор F отображает $\mathcal{S}^n$ в $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда F_0 отображает $\mathcal{S}^d$ в $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Предположим, что существуют $S_1, \ldots, S_d \in \mathcal{S}$, в применении к которым оператор F_0 дает отношение, содержащее цикл. Из доказательства леммы 3.6 видно, что тогда найдутся некоторые другие d отношений из $\mathcal{S}$ (чтобы не вводить переобозначений, будем считать их теми же самыми), результат агрегирования которых содержит цикл $C = \{v_1, \ldots, v_s\}$ такой, что каждой его дуге v_j соответствует конъюнкция $K^{(j)}$, совпадающая с некоторой K_l^0, и каждая K_l^0 соответствует некоторой дуге. При этом если образовать $(d \times s)$-матрицу $B = \|b_{ji}\|$, j-м столбцом которой при $j=\overline{1, s}$ является столбец $\tilde{b}_l$ матрицы B_0, где $K_l^0 = K^{(j)}$, то $S_i \cap C^{-1} = \varnothing$ и $S_i \cap C = \{v_j | b_{ji} = 1\}$, $i = \overline{1, d}$.

Построим теперь $((n-d)\times s)$-матрицу $B' = \|b'_{ji}\|$, соответствующую $n-d$ индексам из $\overline{I}(\varphi)$. Пусть дуге $v_j \in C$ сопоставлена конъюнкция $K^0_{l_j}$, а $q_i^{(l)}$ обозначает элементарный сомножитель, относящийся в конъюнкции K_l к переменной u_i. Тогда при $i=\overline{1, n-d}$, $j=\overline{1, s}$ полагаем

$$b'_{ji} = \begin{cases} 1, & q_{d+i}^{(l_j)} \in \{p_{d+i}, p'_{d+i}\}, \\ -1, & q_{d+i}^{(l_j)} \in \{\overline{p}_{d+i}, \overline{p}'_{d+i}\}, \\ 0, & q_{d+i}^{(l_j)} = p'_{d+i}\overline{p}_{d+i}, \\ *, & q_{d+i}^{(l_j)} = 1. \end{cases}$$

По определению операции композиции каждая строка матрицы B' содержит либо элемент $*$, либо противоположные элементы 1 и -1. Это означает, что путем подстановки вместо элементов $*$ значений 1 либо -1 можно добиться того, чтобы в каждой строке встречались элементы 1 и -1. Полученную в результате матрицу обозначим B''.

Пусть u_j означает дугу, противоположную v_j. С каждой строкой i матрицы B'' свяжем множество дуг M_i, включив в него дуги v_j, соответствующие в строке i элементам 1, и дуги u_j, соответствующие элементам -1. В соответствии с леммой 3.3 дополним множество M_i до отношения $W_i \in \mathscr{W}$. В результате получим отношения $W_1, \ldots, W_{n-d}$.

Путем записывания матрицы B'' под B образуем $(n\times s)$-матрицу B'''. Легко видеть, что при $j=\overline{1, s}$ набор, расположенный в столбце j матрицы B''', обращает конъюнкцию K_{l_j} в 1. Отсюда вытекает, что в результате агрегирования набора отношений $S_1, \ldots, S_d, W_1, \ldots, W_{n-d}$ применением оператора F получаем отношение, содержащее цикл C. Таким образом, если F_0 не отображает $\mathscr{S}^d$ в $\mathscr{A}$, то и F не отображает $\mathscr{S}^n$ в $\mathscr{A}$.

Предположим теперь, что F_0 осуществляет отображение $\mathscr{S}^d \to \mathscr{A}$. Оператор F_0, рассматриваемый на множестве $\mathscr{S}^n$ (существенно зависящий от первых d отношений), дает отношения из $\mathscr{A}$. Очевидно, что $\varphi_0 \geqslant \varphi$, а потому F представим в виде $F_0 \cap G$ при некотором G. Отсюда следует, что F переводит набор отношений из $\mathscr{S}^n$ в отношение из $\mathscr{A}$. □

Лемма 3.8. *Если оператор F_0 осуществляет отображение $\mathscr{S}^d \to \mathscr{A}$, то он представим в виде $F_0 = T \cap G$, $T \in \mathscr{T}h_{1/2}$.*

Доказательство. Согласно лемме 3.6 не существует таких чисел $h_l > 0$, $l=\overline{1, t}$, что выполнены неравенства (3.13), которые с учетом $h_1 + \ldots + h_t = 1$ можно переписать в виде

$$\sum_{1\leqslant l\leqslant t} h_l (b_{li} - 1/2) < 0, \quad i = \overline{1, d}.$$

В процессе доказательства леммы 3.6 установлено, что не существует таких чисел h_l, удовлетворяющих и более слабому условию $h_l \geqslant 0$.

Отсюда на основании теоремы Д. Гейла (следствие 2.10 в [16]) заключаем, что найдутся положительные $w_1, \ldots, w_d$ (можно считать $w_1 + \ldots + w_d = 1$), для которых

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant d} w_i (b_{li} - 1/2) \geqslant 0, \quad l = \overline{1, t}.$$

Эти неравенства могут быть переписаны в виде

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant d} w_i b_{li} \geqslant 1/2, \quad l = \overline{1, t}, \tag{3.14}$$

и означают, что столбец $\tilde{b}_l$, $l=\overline{1,t}$, матрицы B_0 обращает в 1 пороговую функцию $f\in\mathscr{T}h_{1/2}$, имеющую реализацию $(w_1, \ldots, w_d, 1/2)$. Отсюда следует соотношение $\varphi_0\leqslant f$, которое применительно к операторам может быть переписано в виде $F_0=T_f\cap G$ при некотором G. □

Лемма 3.9. *Оператор F, осуществляющий отображение $\mathscr{S}^n\to\mathscr{A}$, представим в виде $F=T\cap G$, $T\in\mathscr{T}h_{1/2}$.*

Доказательство. Если F отображает $\mathscr{S}^n$ в $\mathscr{A}$, то согласно лемме 3.7 оператор F_0 отображает $\mathscr{S}^d$ в $\mathscr{A}$ и в силу леммы 3.8 он представим в виде $F_0=T\cap G$. С другой стороны, поскольку $\varphi_0\geqslant\varphi$, то $F=F_0\cap G_1$ при некотором G_1, а потому $F=T\cap G_2$, где $G_2=G\cap G_1$. □

Лемма 3.10. *Всякий оператор F, представимый в виде $F=T\cap G$, $T\in\mathscr{T}h_{1/2}$, отображает $\mathscr{S}^n$ в $\mathscr{A}$.*

Доказательство. Достаточно убедиться, что оператор $T\in\mathscr{T}h^0_{1/2}$ переводит наборы отношений из $\mathscr{S}^n$ в ацикличные отношения. Пусть $\theta=K_1\vee\ldots\vee K_t$ — функция из $M_{3,2}$, соответствующая оператору T. Будем считать, что θ зависит существенно от d переменных и в представлении θ в виде д. н. ф. присутствуют только эти переменные. Обозначим через B_0 $(d\times t)$-матрицу, столбцы $\tilde{b}_l$ которой соответствуют конъюнкциям $K_l=q_1^{(l)}\ldots q_d^{(l)}$, $l=\overline{1,t}$:

$$b_{li}=\begin{cases}1, & q_i^{(l)}=p_i,\\ 0, & q_i^{(l)}=p_i',\end{cases}$$

где $i=\overline{1,d}$. Тогда при некоторых $w_i>0$, $i=\overline{1,d}$, выполнены неравенства (3.14). Обращая рассуждения из леммы 3.8 и используя теорему Д. Гейла в другую сторону, заключаем, что система неравенств (3.13) не имеет неотрицательного решения, а потому согласно лемме 3.6 оператор T отображает $\mathscr{S}^d$ в $\mathscr{A}$. □

Из лемм 3.9, 3.10 следует утверждение теоремы 3.10.

3.10. Выяснение агрегирующих возможностей операторов. Теоремы 3.2—3.10 описывают способ порождения всех операторов заданного типа $\mathscr{R}_1^n\to\mathscr{R}_2$ для классов цепочки (2.2). Однако они не дают способа проверки по произвольному оператору, представим ли он в виде, указанном в теоремах. Каждому оператору F, удовлетворяющему условиям 1)—3) из п. 3.1, однозначно отвечает функция $\varphi(p_1, \ldots, p_n, p_1', \ldots, p_n')$. Будем считать, что φ задана в форме д. н. ф. или к. н. ф. Соответствующую форму оператора F будем обозначать через $\cup\cap$ или $\cap\cup$.

Сформулируем результаты о сложности проверки по оператору F (заданному в форме $\cup\cap$ или $\cap\cup$), осуществляет ли он требуемое отображение $\mathscr{R}_1^n\to\mathscr{R}_2$. Ответ на этот вопрос нам неизвестен лишь в случае монотонных операторов F: $\mathscr{S}^n\to\mathscr{A}$ в форме $\cap\cup$.

Теорема 3.11. *Для пар классов $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{R}_2$ $(\mathscr{R}_1\subseteq\mathscr{R}_2)$ цепочки (2.2) задача выяснения по оператору F, заданному в одной из форм $\cup\cap$ и $\cap\cup$, осуществляет ли он отображение $\mathscr{R}_1^n\to\mathscr{R}_2$,*

а) *решается эффективно во всех случаях, когда F монотонен, исключая, быть может, указанный выше случай, где ответ неизвестен;*

б) *является NP-полной во всех случаях, когда F немонотонен, исключая случай $\mathscr{R}_2=\mathscr{A}$ и F в форме $\cup\cap$, в котором она решается эффективно.*

Доказательство. Результаты для $\mathscr{R}_1=\mathscr{W}$ вытекают из теорем 2.1, 2.3—2.5 в силу теоремы 3.1. Остановимся на отображениях $\mathscr{R}_1^n\to\mathscr{R}_2$, $\mathscr{R}_1\neq\mathscr{W}$.

Нетрудно доказать, что задачи распознавания операторов $\mathscr{R}_1^n\to\mathscr{R}_2$, $\mathscr{R}_2\in\{\mathscr{S}, \mathscr{I}, \mathscr{P}\}$, $\mathscr{R}_1\subseteq\mathscr{R}_2$, $\mathscr{R}_2\neq\mathscr{W}$, в немонотонном случае являются NP-полными (это относится и к представлениям $\cup\cap$ и к $\cap\cup$). В монотонном случае указанные задачи тривиальны, так как операторы имеют вид r_i либо $r_{i_1} \cap \ldots \cap r_{i_s}$.

Задачи распознавания операторов типа $\mathscr{R}^n \to \mathscr{A}$, $\mathscr{R} \in \{\mathscr{S}, \mathscr{I}, \mathscr{P}, \mathscr{A}\}$, решаются эффективно даже в немонотонном случае, если они заданы в форме $\cup\cap$. Для $\mathscr{R} \supseteq \mathscr{I}$ этот факт очевиден, ибо функция φ, соответствующая оператору F, имеет вид $p_i\psi$ (либо $\overline{p_i'}\psi$) и сомножитель p_i (либо $\overline{p_i'}$) входит во все конъюнкции д. н. ф. φ. В случае $\mathscr{R} = \mathscr{S}$ задача распознавания решается следующим образом. По функции $\varphi = K_1 \vee \ldots \vee K_t$ эффективно находятся множество $I(\varphi) = I(K_1 \circ \ldots \circ K_t)$ и функция φ_0 на $I(\varphi)$. Инвертированием переменных функция φ_0 превращается в монотонную, и в силу лемм 3.6 и 3.7 вопрос о том, имеет ли оператор F тип $\mathscr{S}^n \to \mathscr{A}$, сводится к выяснению существования у системы (3.13) неотрицательного решения. Это может быть сделано с полиномиальной сложностью [15].

Если используется задание операторов в форме $\cap\cup$, то, как нетрудно доказать, в немонотонном случае задача распознавания операторов $\mathscr{R}^n \to \mathscr{A}$, $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{A}$, является NP-полной. В монотонном случае эта задача для $\mathscr{R} \supseteq \mathscr{I}$ очевидным образом решается эффективно (относительно $\mathscr{R} = \mathscr{S}$ нам ничего не известно). □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзерман М. А., Алескеров Ф. Т. Выбор вариантов.— М.: Наука, 1990.
2. Айзерман М. А., Алескеров Ф. Т. Задача Эрроу в теории группового выбора (анализ проблемы) // Автоматика и телемеханика.— 1983.— № 9.— С. 127—151.
3. Алескеров Ф. Т., Владимиров А. В. Квазилокальные операторы коллективного выбора // Автоматика и телемеханика.— 1987.— № 3.— С. 127—140.
4. Березовский Б. А., Борзенко В. И., Кемпнер Л. Н. Бинарные отношения в многокритериальной оптимизации.— М.: Наука, 1981.
5. Владимиров А. В. Функции алгебры логики в теории коллективного выбора // Управление сложными техническими системами: сборник трудов.— М.: Ин-т проблем управления, 1987.
6. Владимиров А. В. Исследование процедур построения коллективных решений.— Автореф. дис. ... канд. техн. наук/Ин-т проблем управления.— М., 1987.
7. Данилов В. И. Модели группового выбора // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика.— 1983.— № 1.— С. 143—164.
8. Левченков В. С. Теория группового выбора: алгебраический подход/Препринт ВНИИСИ.— М., 1985.
9. Левченков В. С. Теория группового выбора: общий вид функций агрегирования/Препринт ВНИИСИ.— М., 1985.
10. Макаров И. М., Виноградская Т. М., Рубчинский А. М., Соколов В. Б. Теория выбора и принятия решений.— М.: Наука, 1982.
11. Мальцев А. И. Алгебраические системы.— М.: Наука, 1970.
12. Моркялюнас А. Групповой выбор при независимости и слабой симметрии альтернатив // Математические методы в социальных науках. Вильнюс: Ин-т математики и кибернетики АН ЛитССР, 1985.— Вып. 18.— С. 57—60.
13. Оре О. Теория графов.— М.: Наука, 1980.
14. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений.— М.: Наука, 1978.
15. Хачиян Л. Г. Полиномиальный алгоритм линейного программирования // ДАН СССР.— 1979.— Т. 244, № 5.— С. 1093—1096.
16. Черников С. Н. Линейные неравенства.— М.: Наука, 1968.
17. Arrow K. J. Social choice and individual values.— 2nd edition.— New Heaven, London: Yale University Press, 1963.
18. Brown D. J. Aggregation of preferences // Quart. J. Econom.— 1975.— V. 89.— P. 45—56.
19. Fishburn P. C. The theory of social choice.— Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1973.
20. Fishburn P. C. Axioms for lexicographic preferences // Rev. of Econ. Stud.— 1975.— V. XVII(3), N 131.— P. 415—419.
21. Kelly J. S. Arrow impossibility theorems.— N. Y.: Acad. Press, 1978.
22. Murakami Y. Logic and social choice.— London: Routledge & Kegan Paul Ltd, N. Y.: Dover Publication Inc, 1968.
23. Sen A. K. Collective choice and social welfare.— San Francisco: Holden-Day, 1970.

Поступило в редакцию 14 X 1990

О СЛОЖНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ СХЕМАМИ И ФОРМУЛАМИ В ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ И НЕКОТОРЫХ ДРУГИХ БАЗИСАХ

С. Б. ГАШКОВ

(МОСКВА)

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение

Многие задачи теории приближений могут быть сформулированы следующим образом. Пусть $(\mathscr{X}, \|\ \|)$ — банахово пространство, а $\mathscr{K}$ и $\mathscr{A}$ — его подмножества такие, что для любых $x \in \mathscr{K}$ и $\varepsilon > 0$ найдется $y \in \mathscr{A}$, удовлетворяющий неравенству $\|x - y\| \leqslant \varepsilon$. Пусть также $\mathscr{L}$: $\mathscr{A} \to \mathbb{R}_+$ — некоторый функционал, сопоставляющий каждому $y \in \mathscr{A}$ число $\mathscr{L}(y)$, называемое далее сложностью элемента y. Тогда сложностью ε-приближения элемента $x \in \mathscr{K}$ назовем число

$$\mathscr{L}(x, \varepsilon) = \inf \mathscr{L}(y) : y \in \mathscr{A}, \|x - y\| \leqslant \varepsilon\},$$

а сложностью ε-приближения класса $\mathscr{K}$ — число

$$\mathscr{L}(\mathscr{K}, \varepsilon) = \sup \{\mathscr{L}(x, \varepsilon) : x \in \mathscr{K}\},$$

Например, в качестве $\mathscr{X}$ можно взять пространство $C(I^n)$ всех непрерывных функций f: $I^n \to \mathbb{R}$, определенных на n-мерном замкнутом интервале (параллелепипеде) $I^n = I_1 \times \ldots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$, $I_i = [a_i, b_i]$, $1 \leqslant i \leqslant n$, с чебышевской нормой

$$\|f\| = \max \{|f(\mathbf{x})| : \mathbf{x} \in I^n\},$$

а в качестве $\mathscr{A}$ — класс всех полиномиальных (или рациональных) функций; под сложностью функции обычно понимается степень полинома (или рациональной дроби), реализующей эту функцию (см., например, [18, 19, 33, 39, 40, 44, 47]). Если мы хотим, чтобы мера сложности функции более точно отражала количество времени, затраченного на ее вычисление, то в качестве такой меры лучше взять минимальное число арифметических операций, необходимое для ее вычисления. Поэтому представляет интерес изучение следующего класса мер сложности. Пусть

$$B = \{w_k : k = 1, 2, \ldots\}$$

— некоторое множество непрерывных функций w_k: $\mathbb{R}^{m_k} \to \mathbb{R}$, называемое далее *базисом*. *Схемой* в базисе B назовем произвольную последовательность непрерывных функций $f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_L(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, в которой $f_i(\mathbf{x}) = x_i$ при $1 \leqslant i \leqslant n$, а каждая следующая функция f_l вычисляется через какие-то предшествующие функции $f_{j_1}, \ldots, f_{j_m}$ с помощью некоторой базисной функции w: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ согласно следующему равенству: $f_l(\mathbf{x}) = w(f_{j_1}(\mathbf{x}), \ldots, f_{j_m}(\mathbf{x}))$.

Сложностью схемы назовем число L, а глубиной — максимальную длину последовательности $f_{l_1}, \ldots, f_{l_D}$, каждая функция которой используется в этой схеме для вычисления следующей за ней функции из этой подпоследовательности. Схему будем называть *формулой*, если каждая функция f_l, $l > n$, используется в ней для вычисления других функций не более одного раза.

Подобно тому, как это сделано в теории сложности булевых функций [27—31], можно ввести и более общие определения.

Будем говорить, что *функция f реализуется схемой S*, если f совпадает с одной из функций f_l подпоследовательности S. Минимальную сложность схемы в базисе B, реализующей f, обозначим $L_B(f)$; число $L_B(f)$ назовем *сложностью схемной реализации функции f* в базисе B. Аналогично определяем $\tilde{L}_B(f)$ — сложность формульной реализации и $D_B(f)$ — глубину функции f. Аналогичные определения вводим и для вектор-функций.

Возвращаясь к началу параграфа, в качестве $\mathscr{A}$ возьмем множество всех функций $f(\mathbf{x}) \in C(I^n)$, реализуемых схемами в базисе B, а в качестве $\mathscr{L}$ — любой из функционалов L_B, $\tilde{L}_B$, D_B. Будем изучать асимптотическое поведение при $\varepsilon \to 0$ функций $L_B(\mathscr{K}, \varepsilon)$, $\tilde{L}_B(\mathscr{K}, \varepsilon)$, $D_B(\mathscr{K}, \varepsilon)$, которые, следуя установившейся в теории булевых функций традиции, назовем *функциями Шеннона класса $\mathscr{K}$ в базисе B*. Если функция не зависит от ε, то знак ε в соответствующем обозначении опускаем.

Величина $L_B(f, \varepsilon)$, где $B = \{x \pm y, xy, x/y, 1\}$, является достаточно естественной мерой сложности приближенного вычисления функции f с точностью ε, хотя в этом утверждении есть большая доля идеализации (предполагается, что все операции выполняются точно и с одинаковой скоростью). Для различных базисов (как правило, содержащихся в B) и для различных индивидуальных функций и вектор-функций (как правило, алгебраических полиномов) вопрос о вычислении $L_B(f)$ и других мер сложности интенсивно исследуется в алгебраической теории сложности вычислений (см., например, [22, 43, 46, 48, 49]). Для булевых функций и базисов аналогичные исследования еще раньше начались в теории сложности булевых функций (см., например, [27—31]). Вопросы о сложности приближенной реализации непрерывных функций с разных точек зрения давно рассматриваются в теории приближений и в вычислительной математике (см., например, [42] и указанную там литературу).

Мы будем исследовать асимптотическое поведение при $\varepsilon \to 0$ функций Шеннона $L_B(\mathscr{K}, \varepsilon)$, $\tilde{L}_B(\mathscr{K}, \varepsilon)$, $D_B(\mathscr{K}, \varepsilon)$ для классов $\mathscr{K}$, которые обычно рассматриваются в книгах по теории приближений, и для некоторых конечных и континуальных базисов B, состоящих, как правило, из полиномиальных, рациональных и кусочно-линейных функций.

По-видимому, впервые подобные вопросы рассматривались в [48], а именно в случае $\mathscr{K} \subset \mathbb{R}$ и $B = \{x \pm y,\ xy,\ x/y,\ 1\}$ там найдены асимптотики для $L_B(\mathscr{K}, \varepsilon)$ и $D_B(\mathscr{K}, \varepsilon)$. Не зная в тот момент о [48], автор в [9—13]) повторил эти результаты в несколько усиленной и обобщенной форме, а также перенес их на случай некоторых классов аналитических функций и исследовал подобные вопросы для некоторых других базисов.

Далее будут подробно изложены несколько усиленные результаты из [9—15], а также многочисленные дополнения к ним. Мы не будем ограничиваться базисами, содержащимися в $\{x \pm y,\ xy,\ x/y,\ 1\}$, оправдывая это тем обстоятельством, что компьютерные программы часто содержат, кроме арифметических операций, еще и различные элементарные функции. Кроме конечных базисов будем рассматривать также базисы, состоящие из конечного числа функций и континуума констант, и называть эти базисы *почти-конечными*. Схемы в этих базисах можно интерпретировать как модели аналоговых вычислительных устройств, а $L_B(f, \varepsilon)$ — как минимальную стоимость такого устройства для вычисления функции f с точностью ε.

Так как параметры, управляющие изменением функций, реализуемых элементами аналоговых устройств, а также входы и выходы этих элементов имеют ограниченную область изменения, то целесообразно среди почти-конечных базисов выделить класс, состоящий из базисов, имеющих лишь ограниченные константы (т. е. принадлежащие данному отрезку), а в этом классе — подкласс, состоящий из базисов, содержащих только функции, удовлетворяющие условию Липшица (так как функции, реализуемые элементами аналоговых устройств, являются достаточно гладкими); такие базисы далее будем называть *липшицевыми*.

Наряду со схемной будем рассматривать также формульную реализацию. Формулы образуют простой и важный подкласс схем, причем любую схему можно, не изменяя глубины, преобразовать в формулу. *Глубина* является важной мерой сложности, так как она оценивает время вычисления функции с учетом возможности параллельного использования многих процессоров. Изучение формул оправдывается также тем, что некоторые виды вычислительных устройств моделируются именно формулами.

Почти все нижние оценки функций Шеннона, приводимые далее, являются энтропийными в том смысле, что для их получения используются оценки ε-энтропии соответствующих функциональных компактов, полученные А. Н. Колмогоровым, В. М. Тихомировым, А. Г. Витушкиным [2, 6, 23]. Кроме этих оценок используется в случае конечных базисов мощностной метод К. Э. Шеннона — О. Б. Лупанова [27—30], а в случае почти-конечных полиномиальных базисов он комбинируется с методом А. Г. Витушкина [6], основанным на применении теоремы И. Г. Петровского — О. А. Олейник [35]. Верхние оценки, по порядку совпадающие с нижними, удается получить только для некоторых конкретных базисов. Так, для класса $W(r, M, N, I^n)$, состоящего из всех функций $f\colon I^n \to [-N, N] \subset \mathbb{R}$ таких, что для любого i выполняется условие Гельдера

$$\omega_i\left(D_i^{\tilde{r}_i} f, t\right) \leqslant M_i t^{\alpha_i},$$

где $r_i = \tilde{r}_i + \alpha_i$, $0 < \alpha_i \leqslant 1$, $\tilde{r}_i \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{r}_i = (r_1, \ldots, r_n)$, $\mathbf{M} = (M_1, \ldots, M_n)$, ω_i — модуль непрерывности по переменной x_i, а D_i — оператор частного дифференцирования переменной x_i, используется базис $\{x + y,\ xy,\ -1/2\}$ или эквивалентный ему базис $\{x - y,\ xy,\ +1/2\}$ (в этих базисах можно с тем же успехом заменить $1/2$ на $1/m$, $m \in \mathbb{N}$, $m > 2$). Тогда соответствующий результат можно сформулировать следующим образом: при фиксированных r, M, N, I^n и $\varepsilon \to 0$

$$L(W, \varepsilon) \asymp H_\varepsilon(W)/\log H_\varepsilon(W).$$

Оценка для $H_\varepsilon(W)$ имеется в [2]. Сформулированное утверждение является количественным аналогом теоремы Вейерштрасса о полиномиальной аппроксимации в той же мере, что и теорема Джексона. Предлагаемое далее доказательство этого утверждения основано не на применении теоремы Джексона, а на использовании сплайновых методов [2, 38]. Поэтому в первоначальном варианте доказательства, кратко изложенном в [10, 12], использовался базис $\{x+y,\ xy,\ |x|,\ -1/2\}$. Далее мы устраняем использование $|x|$ за счет его приближенной реализации с малой схемной сложностью в базисе $\{x+y,\ xy,\ -1/2\}$. Все это можно рассматривать как возвращение на новом (теоретико-сложностном) уровне к лебеговскому доказательству теоремы Вейерштрасса.

Сформулированное выше утверждение, а также некоторые другие следующие далее утверждения являются «надстройкой» над работами А. Н. Колмогорова и других авторов об ε-энтропии в том же смысле, как и внешне очень похожие на них результаты из работ [1, 24, 34, 41, 45].

Задача о сложности приближенной реализации непрерывных функций была поставлена А. Н. Колмогоровым в начале шестидесятых годов (см. [24]). Колмогоровская постановка задачи отличается от рассматриваемой в этой статье постановки тем, что в ней проблема получения верхней оценки сводится к получению верхней оценки функции Шеннона некоторого класса булевых операторов, которая потом решается в рамках теории сложности булевых функций (в работах [41, 45] — с помощью метода локального кодирования О. Б. Лупанова [28]). В нашей постановке сведение к теории сложности булевых функций не удается, хотя в доказательствах тоже используются идеи, параллельные идеям О. Б. Лупанова из теории сложности булевых функций. Другое отличие состоит в возможности использования различных не эквивалентных друг другу базисов, в том числе и континуальных; все конечные полные булевы базисы, как известно, эквивалентны друг другу, что позволяет их все сводить к базису $\{\&, \vee, {}^-\}$ (см., например, [30, 31]). Проблема получения нижних оценок в случае почти конечных и других континуальных базисов также отличается от решаемой мощностным методом соответствующей проблемы из [1, 3, 4, 24, 41, 45].

Колмогоровскую сложность можно интерпретировать как оценку числа битовых операций, необходимых для вычисления функции; она особенно полезна для оценки сложности вычислений с очень большим числом значащих цифр. А величину $L_B(f, \varepsilon)$, где $B = \{x \pm y,\ xy,\ x/y\} \cup \mathbb{R}$, можно интерпретировать как сложность приближенного вычисления f при не слишком малых ε, позволяющих использовать для выполнения арифметических операций машинную арифметику (или калькулятор).

Вопросы о сложности точной и приближенной «интерполяции» булевых функций схемами и формулами в непрерывных базисах рассматривались автором в [8]. Методы получения нижних оценок, излагаемые далее, похожи на соответствующие методы [8].

Задача о сложности приближенной реализации непрерывных функций схемами и формулами в непрерывных базисах была поставлена передо автором О. Б. Лупановым. Выражаю ему глубокую благодарность за внимание и поддержку.

§ 2. Определения, обозначения и вспомогательные сведения

Используем следующие обозначения (векторы и мультииндексы обозначаем жирными буквами):

$$\mathbf{1} = (1, \ldots, 1); \quad \|\mathbf{v}\| = \max\{|v_i| : 1 \leqslant i \leqslant n\};$$

$$|\mathbf{v}| = \sum_{i=1}^{n} |v_i|; \quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = (v_1 w_1, \ldots, v_n w_n); \quad (\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i;$$

$$\mathbf{v} \geqslant \mathbf{w} \Leftrightarrow v_i \geqslant w_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n;\ I^n = I^n(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} : \mathbf{a} \leqslant \mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}\};$$

$$|I^n| = \prod_{i=1}^{n} |a_i - b_i|.$$

Для любой $f(\mathbf{x}) \in C(I^n)$ обозначим $\omega_{i,k}(f, \tau)$ k-й модуль непрерывности по переменной x_i,

$$\omega_{i,k}(f, \tau) = \sup\{|\Delta_{i,h}^k(f, x_i)| : \mathbf{x}, \mathbf{x} + hk\mathbf{e}_i \in I^n, |h| \leqslant \tau\},$$
$$\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0),$$

где $\Delta_{i,h}^k(f, x_i) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x_1, \ldots, x_i + jh, \ldots, x_n)$.

Вместо $\omega_{i,1}$ будем писать ω_i и введем еще обозначения

$$\omega(f, \tau) = \sup\{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leqslant \tau\},$$
$$\omega_*(f, \tau) = \sup\{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leqslant \tau\}.$$

Обозначим $C^{\mathbf{r}}(I^n)$ класс всех $f(x) \in C(I^n)$, имеющих на I^n частные производные по переменным x_i порядков r_i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Будем рассматривать следующие функциональные компакты:

$$W_1(\mathbf{r}, \mathbf{M}, N, I^n) = \left\{f:\ f \in C^{\tilde{\mathbf{r}}}(I^n), \|f\| \leqslant N,\ \forall i \forall \tau \omega_i\left(D_i^{\tilde{r}_i} f, \tau\right) \leqslant M_i \tau^{\alpha_i}\right\},$$

где $\mathbf{M} = (M_i)$, $\mathbf{r} = (r_i) = (\tilde{r}_i + \alpha_i)$, $0 < \alpha_i \leqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$, и

$$W_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{M}, N, I^n) = \left\{f:\ f(x) \in C(I^n), \|f\| \leqslant N,\ \forall i \forall \tau \omega_{i, r_1'}(f, \tau) \leqslant M_i \tau^{r_i}\right\},$$

где $\mathbf{r}' = (r_i') \geqslant \tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{1}$ (в противном случае $W_2 = \varnothing$). В случае $\mathbf{r}' = \tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{1}$ будем писать просто $W_2(\mathbf{r}, \mathbf{M}, N, I^n)$. Известно ([18, 39]), что

$$W_1(\mathbf{r}, \mathbf{M}, N, I^n) \subset W_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{M}', N, I^n),$$

где $\mathbf{M}' = (M_i') = \left(2^{r_i' -]r_i[} M_i\right)$; $]x[$ здесь и далее обозначает $\min\{n : n \in \mathbb{Z}, n \geqslant x\}$. Известно также, что справедливы следующие оценки (в случаях $j = 1$ или $\mathbf{r}' = \tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{1}$ вместо $a_{\mathbf{r}',\mathbf{r}}$ можно взять $a_{\|\mathbf{r}\|}$):

$$a_{\mathbf{r}',\mathbf{r}}\left(|I^n|(\mu/\varepsilon)^{n/\rho} + \log\frac{N}{\varepsilon}\right) \leqslant H_\varepsilon(W_j) \leqslant |I^n|\left((b_{\|\mathbf{r}\|}^n \mu/\varepsilon)^{n/\rho} + b_{\|\mathbf{r}\|}^n \log\frac{N}{\varepsilon} + b_{\|\mathbf{r}\|}\right),$$

где ρ — среднее гармоническое чисел r_i, а $\mu = \prod_{i=1}^{n} M_i^{\rho/nr_i}$ (см. [2] и [4]; обозначения несколько отличаются от [12] и [2]). При $n = r = 1$ согласно [23] $H_\varepsilon(W_1) = M|I|/\varepsilon + \log(N/\varepsilon) + O(1)$. Здесь и далее применяем обычные обозначения o, O, $\sim$, $\asymp$, $\lesssim$, $\leqslant$, а зависимость констант от различных параметров отмечаем индексами. Знаком $\square$ обозначаем конец доказательства.

Далее понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. (i) *Если* $\mathbf{0} \in I^n$, $p(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{d}} c_{\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}} \in C(I^n)$, *то*

$$|c_{\mathbf{k}}| \leqslant O(1)^{|\mathbf{d}|} \|p(\mathbf{x})\|_{C(I^n)} \prod_{i=1}^{n} |I_i|^{-k_i}.$$

(ii) *Коэффициенты любого тригонометрического полинома* $t(x_1, \ldots, x_n)$ *по модулю меньше* $(4/\pi)^n \|t(\mathbf{x})\|$.

Точные неравенства можно вывести по индукции из неравенств В. А. Маркова (см. [39, с. 79]) и Ю. И. Рыжакова (см. ДАН СССР.— 1963.— Т. 153, № 2, или более элементарное доказательство в заметке автора в сб. «Дифференциальные уравнения, гармонический анализ и их приложения», Изд-во МГУ, 1987, С. 79—82), но они нам не понадобятся.

Лемма 2. *Для* $B=\{x(\pm)y,\ xy,\ (\mp)1/2\}$ *и* $a\in\mathbb{R}_+$ *при* $|x|\leqslant a$ *и* $a/\varepsilon\to\infty$

$$L_B(x,\ \varepsilon)\leqslant(1+o(1))\,(\log a/\varepsilon)/\log\log a/\varepsilon+O(\log(1+|\log a|)),$$
$$\tilde{L}_B(x,\ \varepsilon)\leqslant O(\log a/\varepsilon+|\log a|),$$
$$D_B(x,\ \varepsilon)\leqslant \max((1+o(1))\log\log a/\varepsilon,\ O(\log(1+|\log a|))).$$

Доказательство можно извлечь из [48] и [9]. □

Лемма 3. (i) *Для* $B=\{x+y,\ xy\}\cup\mathbb{R}$ *и* $p(\mathbf{x})=\sum\limits_{\mathbf{k}<\mathbf{d}}c_{\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{k}}$

$$\tilde{L}_B(p)\leqslant 3\operatorname{mon}(p)-2,$$
$$D_B(p)\leqslant\log\operatorname{mon}(p)+O(\log\operatorname{mon}(p))^{1/2},\quad \textit{где}\quad \operatorname{mon}(p)=\prod_j(d_j+1),$$

причем при $n=1$ *вместо* $O(\log\operatorname{mon}(p))^{1/2}$ *можно взять* $O(1)$.

(ii) *Для* $B=\left\{x+y,\ xy,\ \begin{pmatrix}\cos\\ \sin\end{pmatrix}x\right\}\cup\mathbb{R}$ *и* $t(x)=\operatorname{Re}\sum\limits_{\mathbf{k}<\mathbf{d}}c_{\mathbf{k}}e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}$

$$\tilde{L}_B(t)\leqslant O(\operatorname{mon}(t)),\ D_B(t)\leqslant\log\operatorname{mon}(t)+O_n(1).$$

Первое неравенство доказывается по индукции с помощью схемы Горнера. Второе доказывается методом [46], третье вытекает из первого, а последнее неравенство очевидно. □

Лемма 4. *Пусть* $B=\left\{x(\pm)y,\ xy,(\mp)1/2\right\},\ p(\mathbf{x})=\sum\limits_{\mathbf{k}<\mathbf{d}}c_{\mathbf{k}}\mathbf{x}^{\mathbf{k}}\in C(I^n)$, $\|\mathbf{p}\|/\varepsilon\to\infty$. *Тогда*

$$L_B(p,\ \varepsilon)\leqslant O\left(\operatorname{mon}(p)\left(\frac{|\mathbf{d}|+\log(\|p\|\operatorname{mon}(p)/\varepsilon)}{\log(|\mathbf{d}|+\log(\|p\|\operatorname{mon}(p)/\varepsilon))}+\log(|\log\|p\||+|\mathbf{d}|)\right)\right)+$$
$$+O(n)\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\log|I_i||+\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\log|a_i||\right),$$
$$\tilde{L}_B(p,\ \varepsilon)\leqslant O\left(\operatorname{mon}(p)\left(|\mathbf{d}|+\log\|p\|\frac{\operatorname{mon}(p)}{\varepsilon}+|\log\|p\||+\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\log|I_i||+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\log|a_i||\right)\right),$$
$$D_B(p,\ \varepsilon)\leqslant O\left(\log\operatorname{mon}(p)+\max\left(\log\log\frac{\|p\|}{\varepsilon},\ \log(1+|\log\|p\||)\right)+\right.$$
$$\left.+\max_{1\leqslant i\leqslant n}\log(1+|\log|I_i||)+\max_{1\leqslant i\leqslant n}\log(1+|\log|a_i||)\right)$$

(*здесь и далее по определению* $\log 0=0$).

Лемма выводится из лемм 2, 3, если представить $p(\mathbf{x})$ в виде

$$\sum_{\mathbf{k}\leqslant\mathbf{d}}{}' c_{\mathbf{k}}\prod_{i=1}^{n}((x_i-a_i)/|I_i|)^{k_i}$$

и оценить $|c'_{\mathbf{k}}|$ с помощью леммы 1. □

Лемма 5 (о продолжении). *Для любых* $\mathbf{r}\in\mathbb{N}^n$, $I^n\subset J^n\subset\mathbb{R}^n$ *можно определить операторы* A_j, *продолжающие функции с интервала* I^n *на*

J^n, *для которых*

$$\|A_j\| \leqslant a = a_{\|\mathbf{r}\|}\left(|J^n|/|I^n|\right)^{a_{\|\mathbf{r}\|}}$$

и для любых функций $f_1 \in C(I^n)$, $f_2 \in C^{\mathbf{r}}(I^n)$ *и любых* i, τ, $\mathbf{k}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^n$, $\mathbf{k} \leqslant \mathbf{r}$,

$$\omega_{i,k_i}(A_1 f_1, \tau) \leqslant a\omega_{i,k_i}(f_1, \tau),$$

$$\omega_i\left(D_i^{r_i} A_2 f_2, \tau\right) \leqslant a\omega_i'\left(D_i^{r_i} f_2, \tau\right), \quad \left\|D_i^{k_i} A_2 f_2\right\|_{C(J^n)} \leqslant a\left\|D_i^{k_i} f_2\right\|_{C(I^n)}.$$

Лемма выводится по индукции из теорем Ю. А. Брудного [5] и Х. Уитни. □

Благодаря ей можно далее в случае необходимости считать, что $I^n = I^n(-\mathbf{b}, \mathbf{b})$, и все b_i — степени двойки с целыми показателями.

Лемма 6. *Пусть* $B = \{x(\pm)y,\ xy,\ (\mp)1/2\}$ *и* $f(x) \in C^{\mathbf{r}}(I^n)$. *Тогда найдется* $g(x) \in C^{\mathbf{r}}\left([-1, 1]^n\right)$ *такая, что*

$$\|g\| = \|f\|,$$

$$\omega_i\left(D_i^{r_i} g, \tau\right) \leqslant |I_i|^{r_i} \omega_i\left(D_i^{r_i} f, |I_i|\tau\right),$$

$$L_B(f, \varepsilon) \leqslant L_B(g, \varepsilon) + O\left(\sum_i |\log|I_i|/2|\right),$$

$$\widetilde{L}_B(f, \varepsilon) \leqslant 0\left(\max_{1 \leqslant i \leqslant n}(|\log|I_i|| + 1)\right)\widetilde{L}_B(g, \varepsilon),$$

$$D_B(f, \varepsilon) \leqslant D_B(g, \varepsilon) + O\left(\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \log(1 + |\log|I_i|/2|)\right).$$

Для доказательства достаточно положить

$$g(\mathbf{x}) = f(x_1|I_1|/2, \ldots, x_n|I_n|/2). \ \square$$

Благодаря этой лемме можно в случае необходимости считать, что $I^n = [-1, 1]^n$.

Лемма 7. *Для любой функции* $f(x) \in C^{\mathbf{r}}(I)$ *и* $k \leqslant r$

$$\|D^k f\| \leqslant O(1)^r(\omega(D^r f, |I|)|I|^r + \|f\|)/|I|^k.$$

Лемма следует из леммы 1 и формулы Тейлора. Более точная оценка имеется в [19, с. 222]. □

Лемма 8. *Пусть* $B = \{x(\pm)y,\ xy,\ (\mp)1/2\}$ *и* $f(x) \in C(I^n)$, $\mathbf{r} \in \mathbb{N}^n$. *Обозначим* $\sum_i \omega_{i,r_i}(f, |I_i|/r_i)$ *через* $\omega_\Sigma(f)$. *Тогда найдется* $g(x) \in C(I^n)$ *такая, что*

$$\|g\| \leqslant O\left(2^{|\mathbf{r}|}\right)\omega_\Sigma(f), \quad \omega_{i,r_i}(g, \tau) = \omega_{i,r_i}(f, \tau),$$

$$L_B(f - g, \varepsilon) \leqslant$$

$$\leqslant c_{\|\mathbf{r}\|}^n \log\left((1 + \|f\| + \omega_\Sigma(f))c_{\|\mathbf{r}\|}^n/\varepsilon\right)/\log\log\left((1 + \|f\| + \omega_\Sigma(f))c_{\|\mathbf{r}\|}^n/\varepsilon\right) + O_{I^n}(1),$$

$$\widetilde{L}_B(f - g, \varepsilon) \leqslant c_{\|\mathbf{r}\|}^n \log\left((1 + \|f\| + \omega_\Sigma(f))c_{\|\mathbf{r}\|}^n/\varepsilon\right) + O_{I^n}(1),$$

$$D_B(f - g, \varepsilon) \leqslant O\left(\log\log\left((1 + \|f\| + \omega_\Sigma(f))c_{\|\mathbf{r}\|}^n/\varepsilon\right)\right) + O_{I^n}(1) + nO_{\|\mathbf{r}\|}(1).$$

Если $f \in C^{\mathbf{r}-1}(I^n)$, *то и* $g \in C^{\mathbf{r}-1}(I^n)$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность операторов P_{1,r_1}, $P_{2,r_2} \circ P_{1,r_1}$, $\ldots$, $P_{n,r_n} \circ \ldots \circ P_{1,r_1}$, где $P_{i,ri}$ — оператор интерполирования по переменной x_i с узлами $b_{i,j} = a_i + j|I_i|/(r_i + 1)$, $1 \leqslant j \leqslant r_i$,

$P_{i,r_i}=\sum_{j=1}^{r_i} l_{j,i,r_i}(x_i)f(x_1,\ldots,b_{i,j},\ldots,x_n)$, а $l_{j,i,r_i}(x_i)$ — фундаментальные полиномы Лагранжа. Индукцией по i с помощью теоремы 2.2 и леммы 2.1 [36] получаем, что при $k>i$ и $\tau>0$

$$\omega_{k,r_k}\left(P_{i,r_i}\circ\ldots\circ P_{1,r_1}(f),\tau\right)\leqslant\sum_{1\leqslant j\leqslant r}\binom{r_1}{j_1}\ldots\binom{r_i}{j_i}\omega_{k,r_k}(f,\tau)\leqslant 2^{|\mathbf{r}|}\omega_{k,r_k}(f,\tau),$$

$$\|f-P_{i,r_i}\circ\ldots\circ P_{1,r_1}(f)\|\leqslant\|f-P_{1,r_1}(f)\|+\|P_{2,r_2}\circ P_{1,r_1}(f)-P_{1,r_1}(f)\|+\ldots$$
$$\ldots+\|P_{i,r_i}\circ\ldots\circ P_{1,r_1}(f)-P_{i-1,r_{i-1}}\circ\ldots\circ P_{1,r_1}(f)\|\leqslant O\left(2^{|\mathbf{r}|}\right)\omega_\Sigma(f).$$

Теперь для доказательства леммы достаточно положить $g=f-P_{n,r_n}\circ\ldots\circ P_{1,r_1}(f)$ и оценить с помощью леммы 4 $L_B^{\mathbf{r}}\left(P_{n,r_n}\circ\ldots\circ P_{1,r_1}(f),\varepsilon^2\right)$. □

Лемма 9. *Если для любых i, τ*

$$\|f_i\|\leqslant N,\ N\geqslant 1,\ \omega(f_i,\tau)\leqslant\omega(\tau),$$

то для любого алгебраического полинома $p(x)$

$$\|p(f_1,\ldots,f_n)\|\leqslant H(p)N^{\deg p},\ \omega(p(f_1,\ldots,f_n),\tau)\leqslant H(p)N^{\deg p-1}\deg p\,\omega(\tau),$$

где $H(p)$ — сумма модулей его коэффициентов.

Лемма доказывается по индукции.

Лемма 10 (модификация теоремы Джексона). *Для любой 2π-периодической по всем переменным функции $f\in C^s(\mathbb{R}^n)$ и любых $\mathbf{r}$, $\mathbf{d}\in\mathbb{N}^n$, $\mathbf{d}\geqslant\mathbf{a}_{\|\mathbf{r}\|}$, существует тригонометрический полином $t(x)$ порядка d_i по переменным x_i такой, что*

$$\|f-t\|\leqslant c_{\|\mathbf{r}\|}^n\sum_{i=1}^n\omega_{i,r_i}(f,1/d_i)=\delta,$$

для любых $\mathbf{k}\geqslant\mathbf{1}$, $l\in[0,s]$, $i\in[1,n]$, $\tau\in\mathbb{R}_+$

$$\omega_{i,k_i}\left(D_i^{l_i}t,\tau\right)\leqslant 2^{|\mathbf{r}|}\omega_{i,k_i}\left(D_i^{l_i}f,\tau\right),\quad\left\|D_i^{l_i}t\right\|\leqslant 2^{|\mathbf{r}|}\left\|D_i^{l_i}f\right\|$$

и все его коэффициенты по модулю меньше $2^n(\|f\|+\delta)$ и $2^{|\mathbf{r}|+n}\|f\|$.

Доказательство. При $n=1$ полином $t(x)$ определяем как

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-\Delta_\tau^r(f,x)\right)J_{p,d'}(\tau)\,d\tau,\qquad\text{где}\qquad p=]1+\mathbf{r}/2[,\qquad d'=[d/l]+1,$$

$J_{p,d'}(\tau)$ — обобщенное ядро Джексона (см. [19, с. 210]), а при $n>1$ — с помощью индукции (подобно лемме 8 и [44, с. 87—88]). Тогда первые неравенства леммы выводятся по индукции из теоремы С. Б. Стечкина [19, с. 210] и оценки

$$\left.\Delta_h^k(D^lt,x)\right|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\Delta_h^k(D^lf,x)-\Delta_\tau^{\mathbf{r}}\left(\Delta_h^k(D^lf,x),x\right)\right|J_{p,d'}(\tau)\,d\tau\leqslant$$
$$\leqslant 2^{\mathbf{r}}\omega_k\left(D^lf,h\right),$$

а последнее следует из леммы 1. □

Лемма 11 (еще одна модификация теоремы Джексона). *Для любых $f(\mathbf{x})\in C[-1,1]^n$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{d}\in\mathbb{N}^n$, $\mathbf{d}\geqslant\mathbf{a}_{\|\mathbf{r}\|}$, найдутся алгебраические полиномы $p_j(\mathbf{x})$ степени d_i по переменным x_i такие, что*

(i) $\|f-p_1\|\leqslant c_{\|\mathbf{r}\|}^n\sum_{i=1}^n\left(d_i^{-2r_i-1}\|f\|+\omega_{i,r_i}(f,1/d_i)\right)$.

(ii) $p_2=\sum_{\mathbf{l}\leqslant\mathbf{d}}a_lT_{l_1}(x_1/2)\ldots T_{l_n}(x_n/2)$, *где* $T_{l_i}(x_i)=\cos(l_i\arccos x)$,

$$\max_l |a_l| \leqslant c^n_{\|\mathbf{r}\|} \|f\|,\ \|f - p_2\| \leqslant c^n_{\|\mathbf{r}\|} \sum_{i=1}^n \left(d_i^{-r_i} \|f\| + \omega_{i,r_i}(f, 1/d_i)\right),\ \left\|D_i^{k_i} p_2\right\|_{C[-1,1]^n} \leqslant$$

$$\leqslant c^n_{\|\mathbf{r}\|}\left(\|f\| + d_i^{k_i} O_r\left(\omega_{i,k_i}(f, 1/d_i)\right)\right),\ \omega_{i,k_i}(p_2, \tau) \leqslant c^n_{\|\mathbf{r}\|}\left(\omega_{i,k_i}(f, \tau) + \|f\| \tau^{k_i}\right).$$

Доказательство. Сначала докажем (i) при $n = 1$. Положим

$$p(x) = \sum_{i=1}^{r} \frac{(-1)^{r-i+1}}{2i} \binom{r}{i} \int_{-2}^{2} f(u) \widehat{J}_{r+1,d'}((u - x)/2i)\, du,$$

где $d' = 1 + [d/(2r + 2)]$, $\widehat{J}_{r+1,d'}(u)$ — алгебраическое ядро типа Джексона (см. [19, с. 136—138]), предварительно продолжив функцию f с отрезка $[-1, 1]$ на отрезок $[-1-2r, 1 + 2r]$ с помощью леммы 5 так, чтобы при любом $k \leqslant r$

$$\omega_k(f, \tau)_{C[-1-2r,1+2r]} \leqslant O_r(\omega_k(f, \tau)_{C[-1;1]}).$$

Так как

$$p(x) = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{r-i-1} \binom{r}{i} \int_{(-2-x)/2i}^{(2-x)/2i} f(x + 2i\tau) \widehat{J}_{r+1,d'}(\tau)\, d\tau,$$

то, согласно [19, с. 136—138],

$$\|f(x) - p(x)\|_{C[-1,1]} = \left\| \int_{-1}^{1} f(x) \widehat{J}_{r+1,d'}(\tau)\, d\tau - p(x) \right\|_{C[-1,1]} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-1}^{1} |\Delta_{2\tau}^r(f, x)| \widehat{J}_{r+1,d'}(\tau)\, d\tau + 2^{r+1} \|f\| \int_{1/2r}^{2} \widehat{J}_{r+1,d'}(\tau)\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-1}^{1} \omega_r(f, 2\tau)_{C[-1-2r,1+2r]} \widehat{J}_{r+1,d'}(\tau)\, d\tau + O_r\left(\|f\|/d^{2r+1}\right) \leqslant$$

$$\leqslant O_r(\omega_r(f, 1/d)) \int_{-1}^{1} (\tau d)^r \widehat{J}_{r+1,d'}(\tau)\, d\tau + O_r\left(\|f\|/d^{2r+1}\right) \leqslant$$

$$\leqslant O_r\left(\omega_r(f, 1/d) + \|f\|/d^{2r+1}\right).$$

Утверждение (i) при $n = 1$ доказано.

Так как оператор $A(f) = f \to p$ линеен и его норма меньше $O_r(1)$, то, определив полином $P(\mathbf{x})$ как $P_n \circ \ldots \circ P_1(f)$, где P_i — построенные выше операторы полиномиальной аппроксимации по переменным x_i, и заметив, что операторы P_i и $\Delta_{j,h}^k$ коммутируют при $i \neq j$, можно доказать утверждение (i) при $n > 1$ по индукции подобно лемме 8 и [44, с. 87—88].

Утверждение (ii) можно вывести из лемм 5, 7, если предварительно «сгладить» функцию $f(\mathbf{x})$ с помощью теоремы 2.8 [36]. Пусть $n = 1$. Согласно теореме Ю. А. Брудного (см. теорему 2.8 или неравенства (2.36) и (2.38) из [36]) существует функция

$$f_{r,d}(x) \in C^r[-1, 1]$$

такая, что

$$\|f_{r,d} - f\| \leqslant 2^r \omega_r(f, 1/d), \quad \|f_{r,d}\| \leqslant 2^r \|f\|,$$

и при любом $k \leqslant r$

$$\|D^k f_{r,d}\| \leqslant d^k O_r(\omega_k(f, 1/d)).$$

Продолжив ее с помощью леммы 5 на отрезок $[-2, 2]$ и сделав замену

$x = 2\cos y$, из леммы 10 с помощью леммы 7 и формулы для кратной производной суперпозиции выводим, что для некоторого полинома

$$p(x) = \sum_{l \leqslant d} a_l(f)\, T_l(x/2),$$

где $a_l(f)$ — линейные функционалы с нормой $O_r(1)$, при любом $k \leqslant r$ справедливы неравенства

$$\|f - p\| \leqslant \|f - f_{r,d}\| + \|f_{r,d} - p\| \leqslant$$
$$\leqslant O_r(\omega_k(f,\ 1/d)) + O_r(d^{-k}\|f_{r,d}\| + d^{-k}\|D^k f_{r,d}\|) \leqslant$$
$$\leqslant O_r(d^{-k}\|f\| + \omega_k(f,\ 1/d)).$$

Поэтому при $\tau \leqslant 1/d$

$$\omega_k(p,\ \tau) \leqslant \tau^k \|D^k p\|_{C[-1,1]} \leqslant O_r(\tau^k)\,(\|p\| + \|D^k f_{r,d}\|) \leqslant$$
$$\leqslant O_r(\tau^k)\,(\|f\| + d^k\omega_k(f,\ 1/d)) \leqslant O_r(\tau^k)\,(\|f\| + \omega_k(f,\ \tau)),$$

а при $\tau > 1/d$

$$\omega_k(p,\ \tau) \leqslant \omega_k(f,\ \tau) + \omega_k(f - p,\ \tau) \leqslant \omega_k(f,\ \tau) + O_r(\|f - p\|) \leqslant$$
$$\leqslant O_r(\omega_k(f,\ \tau) + \tau^k\|f\|),$$

т. е. при любом τ

$$\omega_k(p,\ \tau) \leqslant O(\tau^k)\,(\|f\| + \omega_k(f,\ \tau)),$$

а также $\|D^k p\|_{C[-1,1]} \leqslant O_r(\|f\| + d^k\omega_k(f,\ 1/d))$.

В случае $n > 1$ доказательство проводится по индукции, подобно леммам 8, 10. □

§ 3. Нижние оценки функций Шеннона

Пусть B — произвольный конечный или почти конечный базис, m — максимальное число существенных переменных у функций из B. Как и в [29], положим $\rho_B = 1/(m-1)$ и $\tau_B = 1/\log m$ (логарифмы всюду двоичные). Далее используются следующие леммы (в скобках указаны источники, из которых можно извлечь доказательства).

Лемма 12 [27]. *Число всех различных формул в конечном базисе B сложности не выше L, содержащих переменные $x_1, \ldots, x_n$, меньше, чем $(nc_{|B|})^L$.*

Лемма 13 [28]. *Число всех различных неприводимых неизоморфных схем в конечном базисе B, имеющих n выходов, m выходов и сложность не выше L, меньше, чем $(c_{|B|}L)^{m+L/\rho_B}$ (в отличие от [28], входы учитываются в сложности схемы).*

Лемма 14 [29]. $D_B(\Phi) \geqslant \tau_B \log L_B(\Phi)$.

Лемма 15 [8]. *Функция $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, реализуемая схемой S в липшицевом базисе B, удовлетворяет условию Липшица $\omega(f,\tau) \leqslant c_B^{D_B(S)}\tau$. Если все функции из B удовлетворяют условию Липшица с константой 1, то f также удовлетворяет этому условию.*

Лемма 16 [8]. *Пусть все функции липшицева базиса B удовлетворяют условию $\omega_*(f,\tau) \leqslant \tau$. Если в формулу Φ в базисе B каждая переменная входит только один раз, то реализуемая ею функция f удовлетворяет условию $\omega_*(f,\tau) \leqslant \tau$.*

Базис B назовем *рациональным* (*полиномиальным*), если он состоит только из рациональных (алгебраических полиномиальных) функций. Рациональный или полиномиальный базис назовем *жегалкинским*, если его функции содержат каждую переменную только в первой степени.

Лемма 17 [8]. *Степень функции, реализуемой схемой S в рациональном или полиномиальном базисе B, меньше* $c_B^{D_B(S)}$. *Степень функции, реализуемой формулой в жегалкинском базисе B, не выше числа вхождений переменных в эту формулу.*

Лемма 18 [8]. *Если B является объединением липшицева и жегалкинского базисов и все его константы принадлежат отрезку $I \subset \mathbb{R}$, то для функции, реализуемой формулой Φ в базисе B, справедливо на интервале I^n условие Липшица* $\omega(f, \tau) \leqslant c_B^{\widetilde{L}_B(\Phi)}\tau$.

Лемма 19 [8]. *Пусть $\vartheta = 2^{1/(n+1)}$. Тогда для любых $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon > 0$ найдется такое $a \in \mathbb{Z}$, что*

$$|a| < n^{4n^2}/\varepsilon^n \quad \text{и} \quad 1 \leqslant j \leqslant n \Rightarrow \{\vartheta^j a - v_j\} < \varepsilon,$$

где здесь и далее $\{x\} = \min\{|x - m|:\ m \in \mathbb{Z}\}$.

Лемма 20 [23]. *Для любых $\varepsilon > 0$ и функции $f \in C[0, 1]$, для которой $f(0) = 0$ и выполнено условие Липшица $\omega(f, \tau) \leqslant \tau$, найдется кусочно-линейная функция g, график которой имеет угловые коэффициенты ± 1 и узлы в точках с абсциссами $k\varepsilon \in \mathbb{N}\varepsilon$, для которой $g(0) = 0$ и $\|f - g\| \leqslant \varepsilon$.*

Лемма 21 [23]. *Для каждого компакта $\mathscr{K}$ справедливы следующие неравенства между ε-емкостью и ε-энтропией: $C_{2\varepsilon}(\mathscr{K}) \leqslant H_\varepsilon(\mathscr{K}) \leqslant C_\varepsilon(\mathscr{K})$.*

Лемма 22 [23]. *Пусть $\mathscr{K}_1$ — класс всех функций $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx$, у которых $|c_n| \leqslant 2^{-n}$, а $\mathscr{K}_2$ — у которых $|c_n| \leqslant 1/n!$. Тогда*

$$H_\varepsilon(\mathscr{K}_1) \asymp (\log \varepsilon)^2, \quad H_\varepsilon(\mathscr{K}_2) \asymp (\log \varepsilon)^2/\log\log(1/\varepsilon).$$

Аналогичные утверждения справедливы для соответствующих классов функций $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n x^n$.

Лемма 23 [6]. *Множество уровня каждой рациональной функции ${}^m \to \mathbb{R}$ степени k разбивает $\mathbb{R}^m$ не более чем на $(k+1)^m$ связных компонент.*

Лемма 24 [20]. *Для любого рационального отображения G из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^p$ степени k максимальное ε-различимое подмножество в $G(\mathbb{R}^m) \cap$ $\cap\, [-N\varepsilon, N\varepsilon]^p$ при $m < p$ состоит не более чем из $18(8k)^m \sum\limits_{i=1}^{m} \binom{i}{p} (2N+1)^i$ точек.*

Лемма 25 [3]. *Если алгебраический полином $p(x)$ степени d удовлетворяет неравенствам $|p(\cos \pi k/2d)| \leqslant \delta$, $0 \leqslant k \leqslant 2d$, то $\|p\|_{C[-1,1]} \leqslant$ $\leqslant 2\delta$* (см. также [19, с. 228]).

Лемма 26 [21]. *Для того чтобы имела решение система неравенств*

$$\begin{cases} \{a_i y - b_i\} < \varepsilon, & 1 \leqslant i \leqslant n, \\ |y| < X, \ y \in \mathbb{Z}, \end{cases} \qquad y \text{ — неизвестное},$$

достаточно, чтобы при $\gamma = 2^n/((n+1)!)^2$ и любом $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n$ таком, что $0 < \|\mathbf{u}\| \leqslant 1/2\varepsilon\gamma$, выполнялось неравенство $\{(a, \mathbf{u})\} \geqslant 1/2\gamma X$.

Далее $\mathscr{K}$ обозначает произвольное компактное подмножество $C(I^n)$, для которого при любом $\varepsilon > 0$ определена функция Шеннона $L_B(\mathscr{K}, \varepsilon)$. Предполагаем, что ε достаточно мало, чтобы все встречающиеся далее выражения имели смысл. Следующая теорема является аналогом нижней оценки функции Шеннона из [28].

Теорема 1. *Для любого конечного базиса справедливы неравенства*

$$L_B(\mathscr{K}, \varepsilon) \geqslant \rho_B \frac{H_\varepsilon(\mathscr{K})}{\log H_\varepsilon(\mathscr{K})}\left(1 + \frac{\log\log H_\varepsilon(\mathscr{K}) - O_{|B|, \rho_B, n}(1)}{\log H_\varepsilon(\mathscr{K})}\right),$$

$$\tilde{L}_B(\mathscr{K}, \varepsilon) \geqslant c_{|B|,n} H_\varepsilon(\mathscr{K}),\ D_B(\mathscr{K}, \varepsilon) \geqslant \tau_B(\log H_\varepsilon(\mathscr{K}) - O_{|B|,n}(1)).$$

Доказательство проводится мощностным методом [28—30] с помощью лемм 12—14. □

Следующая теорема была сформулирована в [14].

Теорема 2. (i) *Если B — липшицев базис и $\varepsilon < \varepsilon(\mathscr{K})$, то*

$$L_B(\mathscr{K}, \varepsilon) \succcurlyeq c_B \min\left(\sqrt{H_{2\varepsilon}(\mathscr{K})}, H_{2\varepsilon}(\mathscr{K})/\log(1/\varepsilon)\right),$$

$$D_B(\mathscr{K}, \varepsilon) \geqslant \tau_B \log H_{2\varepsilon}(\mathscr{K}) - c_B \log\log\max(H_{2\varepsilon}(\mathscr{K}), 1/\varepsilon).$$

(ii) *Если все функции из B удовлетворяют условию $\omega(f, \tau) \leqslant \tau$, то при $\varepsilon \to 0$*

$$L_B(\mathscr{K}, \varepsilon) \gtrsim \frac{\rho_B}{\rho_B + n} H_{2\varepsilon}(\mathscr{K})/\log(1/\varepsilon).$$

(iii) *Если B удовлетворяет условиям леммы 16, то при $\varepsilon \to 0$*

$$\tilde{L}_B(\mathscr{K}, \varepsilon) \gtrsim H_{2\varepsilon}(\mathscr{K})/2\log\max(H_{2\varepsilon}(\mathscr{K}), 1/\varepsilon).$$

(iv) *Если B удовлетворяет условиям леммы 18 и $\varepsilon < \varepsilon(\mathscr{K})$, то $\tilde{L}_B(\mathscr{K}, \varepsilon)$ удовлетворяет тому же неравенству, что и $L_B(\mathscr{K}, \varepsilon)$ в п.* (i).

Доказательство. Введем некоторые обозначения и сформулируем вспомогательные леммы. Пусть S — произвольная схема в базисе B и $c_1, \ldots, c_m$ — все ее константы. Заменим их на новые входы $y_1, \ldots, y_m$ и полученную схему обозначим $S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, а функцию, реализуемую ею,— $F_S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Множество всех констант базиса B обозначим J. Можно считать, что J — отрезок, содержащий $\bigcup\limits_i I_i$, где $I_1 \times \ldots \times I_n = I^n$, $\mathscr{K} \subset C(I^n)$.

Обозначим $\mathfrak{A}_S$ множество всех функций вида $F_S(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \in C(J^n)$, где $\mathbf{a} \in J^m \subset \mathbb{R}^n$, J^n — n-мерный куб $J \times \ldots \times J$. Пусть $\mathscr{M}_B(n, m, L)$ — множество всех схем в базисе $B \setminus J$ сложности не выше $L - m$. Мощность его обозначим $M_B(n, m, L)$. *Множество* $\cup\{\mathfrak{A}_S : S \in \mathscr{M}_B(n, m, L)\}$ обозначим $\mathscr{N}_B(n, m, L)$. Обозначим G_S отображение $J^m \to \mathfrak{A}_S$, сопоставляющее каждому $\mathbf{a} \in J^m$ функцию $F_S(\mathbf{x}, \mathbf{a})$.

Лемма 27. *Отображение G_S удовлетворяет условию Липшица*

$$\|G_S(\mathbf{y}) - G_S(\mathbf{z})\| \leqslant c_B^{D_B(S)} \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{b} \in J^n$. Из леммы 15 следует, что

$$|F_S(\mathbf{b}, \mathbf{y}) - F_S(\mathbf{b}, \mathbf{z})| \leqslant c_B^{D_B(S)} \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|.$$

Значит,

$$\|G_S(\mathbf{y}) - G_S(\mathbf{z})\| = \sup_{\mathbf{b} \in J^n} |F_S(\mathbf{b}, \mathbf{y}) - F_S(\mathbf{b}, \mathbf{z})| \leqslant c_B^{D_B(S)} \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|. \ \square$$

Лемма 28 (аналог леммы 20 [8]).

$$C_\varepsilon(\mathfrak{A}_S) \leqslant c_B L_B(S) D_B(S) + L_B(S)\log(1/\varepsilon).$$

Доказательство. Пусть $\{f_1, \ldots, f_N\} \subset \mathfrak{A}_S$ — ε-различимое подмножество, $f_i = G_S(\mathbf{a}_i)$, $\mathbf{a}_i \in J^m$, $1 \leqslant i \leqslant N$. Обозначим $c_B^{D_B(S)}$ через l. Из леммы 27 следует, что кубы с центрами a_i и ребрами ε/l не пересекаются, а так как они лежат в кубе с ребром $|J| + \varepsilon/l$, то из сравнения объемов имеем, что $N \leqslant (|J| + \varepsilon/l)^m (l/\varepsilon)^m$, откуда, учитывая, что $m \leqslant L_B(S)$, получаем неравенство леммы. □

Докажем п. (i). Так как при $L = L_B(\mathscr{K}, \varepsilon)$ множество

$$\mathscr{N}_B(n, L) = \bigcup_{m \leqslant L} \mathscr{N}_B(n, m, L)$$

является ε-сетью для $\mathscr{K}$, и

$$\mathscr{N}_B(n, L) = \bigcup \{\mathfrak{A}_S : S \in \mathscr{M}_B(n, m, L)\},$$

то, выбрав для каждого $\mathfrak{A}_S$ наименьшую ε-сеть, получаем, что

$$H_{2\varepsilon}(\mathscr{K}) \leqslant \max\{H_\varepsilon(\mathfrak{A}_S)\colon\ S \in \mathscr{M}_B(n, m, L)\} + \log \sum_{m \leqslant l} M_B(n, m, L).$$

Оценивая $H_\varepsilon(\mathfrak{A}_S)$ с помощью лемм 21 и 28, а последнее слагаемое с помощью леммы 13 и применяя лемму 14, получаем, что

$$H_{2\varepsilon}(\mathscr{K}) \leqslant a_B L^2 + L \log(1/\varepsilon) + b_B L \log L,\ H_{2\varepsilon}(\mathscr{K}) \leqslant c_B 2^{D/\tau_B} (D + \log(1/\varepsilon)),$$

где $D = D_B(\mathscr{K}, \varepsilon)$, откуда и следуют неравенства п. (i).

Если ввести меру сложности $V(S) = L(S) D(S)$ и определить функцию Шеннона $V_B(\mathscr{K}, \varepsilon)$, то тем же методом доказывается, что при $\varepsilon \to 0$

$$V_B(\mathscr{K}, \varepsilon) \gtrsim H_{2\varepsilon}(\mathscr{K})/\log(1/\varepsilon).$$

Для доказательства п. (ii) нужно следующее уточнение леммы 27.

Лемма 29. *Если B удовлетворяет условиям п.* (ii), *то в лемме* 27 *можно взять $c_B = 1$.*

Доказывается она совершенно аналогично лемме 27. □

Лемма 29 позволяет уточнить и лемму 28 следующим образом.

Лемма 30. *Если B удовлетворяет условиям п.* (ii), *то*

$$C_\varepsilon(\mathfrak{A}_S) \leqslant L_B(S)\,(c_B + \log(1/\varepsilon)).$$

Доказательство повторяет доказательство леммы 28 с дополнительным замечанием, что в качестве l можно взять 1. □

Повторяя доказательство п. (i) и используя вместо леммы 28 лемму 30, получаем неравенство

$$H_{2\varepsilon}(\mathscr{K}) \leqslant L\,(c_B + \log(1/\varepsilon) + (1/\rho_B) \log L),$$

из которого следует, что при любом $c \in (0, 1)$ и $\varepsilon \to 0$

$$L_B(\mathscr{K}, \varepsilon) \gtrsim \min(c H_{2\varepsilon}(\mathscr{K})/\log(1/\varepsilon),\ (1 - c)\rho_B H_{2\varepsilon}(\mathscr{K})/\log H_{2\varepsilon}(\mathscr{K})).$$

Класс функций, удовлетворяющих условию $\omega(f, \tau) \leqslant \tau$, замкнут и относительно операций суперпозиции и относительно сходимости по норме, поэтому $L_B(\mathscr{K}, \varepsilon)$ определена в условиях п. (i) только для класса

$$\mathscr{K} \subset W(1, 1, N, I^n).$$

Но тогда, согласно [23],

$$H_\varepsilon(\mathscr{K}) \leqslant O(\varepsilon^{-n}),$$

и из неравенства для $L_B(\mathscr{K}, \varepsilon)$ при $c = \rho_B/(\rho_B + n)$ следует неравенство п. (ii). Для доказательства п. (iii) нужны следующие леммы.

Лемма 31. *Если B удовлетворяет условиям п.* (iii), *то для любой формулы Φ в базисе B отображение G_Φ удовлетворяет условию Липшица*

$$\|G_\Phi(\mathbf{y}) - G_\Phi(\mathbf{z})\| \leqslant \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 27, только вместо леммы 15 используется лемма 16. □

Лемма 32 (аналог леммы 23 [8]). *Если B удовлетворяет условиям п.* (iii), *и Φ — произвольная формула в базисе B, то*

$$C_\varepsilon(\mathfrak{A}_\Phi) \leqslant \tilde{L}_B(\Phi)\,(c_B + \log(\tilde{L}_B(\Phi)/\varepsilon)).$$

Доказательство подобно доказательству леммы 28. □

Из леммы 31 следует, что $\varepsilon/2$-окрестности точек a_i по норме $|\cdot|$ попарно не пересекаются. Учитывая, что объем такой окрестности равен $\varepsilon^m/m!$, как и в лемме 28, получаем неравенство

$$N \leqslant (|J| + \varepsilon)^m \varepsilon^{-m} m!,$$

из которого с помощью неравенства

$$m \leqslant \tilde{L}_B(S)$$

выводим неравенство леммы. □

Аналогично доказательству п. (i) с помощью лемм 12, 21, 32 имеем, что

$$H_{2\varepsilon}(\mathscr{K}) \leqslant \tilde{L}(c + \log(n\tilde{L}/\varepsilon)), \text{ где } \tilde{L} = \tilde{L}_B(\mathscr{K}, \varepsilon),$$

откуда и следует неравенство п. (iii).

Для доказательства п. (iv) понадобится

Лемма 33. *Если B удовлетворяет условиям п.* (iv) *и Φ — формула в базисе B, то отображение G_Φ удовлетворяет тому же условию Липшица, что и в лемме* 27.

Доказательство аналогично доказательству леммы 27, только вместо леммы 15 используется лемма 18. □

Повторяя доказательство п. (i) с использованием лемм 12 и 33 вместо лемм 13 и 27, получаем, что

$$H_{2\varepsilon}(\mathscr{K}) \leqslant \tilde{L}(\log(n/\varepsilon) + c_B\tilde{L}),$$

откуда следует, что при $\varepsilon < \varepsilon(n)$

$$\tilde{L}_B(\mathscr{K}, \varepsilon) \geqslant \min(a_B\sqrt{H_{2\varepsilon}(\mathscr{K})},\quad H_{2\varepsilon}(\mathscr{K})/2\log(1/\varepsilon)). \ \square$$

Замечание 1. Условие ограниченности констант в базисе B необходимо для справедливости всех утверждений теоремы, что видно из следующего примера.

Пусть класс $\mathscr{K}$ состоит из всех функций $f \in C[0, 1]$ таких, что

$$f(0) = 0 \text{ и } w(f, \tau) \leqslant \tau/2.$$

Тогда можно указать функцию $g \in C(\mathbb{R}^2)$, удовлетворяющую условию Липшица $\|g(\mathrm{x}) - g(\mathrm{y})\| \leqslant \|x - y\|$, и такую, что для любых $f \in \mathscr{K}$ и $\varepsilon \in (0, 1/4)$ найдется константа $c \in \mathbb{R}$, для которой справедливо неравенство

$$\|g(x, c) - f(x)\|_{C[0,1]} \leqslant \varepsilon.$$

Функцию g определим так. Сопоставим каждому булеву вектору $\alpha \in \{0, 1\}^n$, $n > 2$, такую непрерывную кусочно-линейную функцию g_α, что $g_\alpha(0) = 0$, угловые коэффициенты на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(1, +\infty)$ равны 1/2, а на интервалах $((i-1)/n, i/n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, равны $(-1)^{\alpha_i}/2$. Расположим все векторы из $\{0, 1\}^n$ по циклу

$$(\alpha^1, \ldots, \alpha^{2^n})$$

так, чтобы любые соседние векторы отличались ровно одной компонентой (такие циклы называются кодами Грея). Тогда любая разность

$$r_i = g_{\alpha^i} - g_{\alpha^{i+1}}$$

удовлетворяет неравенству $\|r_i\|_{C[0,1]} \leqslant 1/n$. Рассмотрим все булевы векторы размерностей 2^k, $k > 1$, и занумеруем их в следующем порядке. Выпишем все векторы длины 4 в порядке, указанном кодом Грея. Дублируя каждую компоненту последнего из них, получим вектор длины 8. Начиная с него, расположим все векторы длины 8 соответственно коду Грея и т. д. Рассмотрим соответствующую этой нумерации векторов последовательность функций g_α и обозначим ее $\{g_n\}$. Определим функцию

$$g(x,y)=\begin{cases} g_i(x), \text{ если } y=i\in\mathbb{N},\\ g(x,1), \text{ если } y<1,\\ \mu g_i(x)+(1-\mu)g_{i+1}(x), \text{ если } y=\mu i+(1-\mu)(1+i), 0\leqslant\mu\leqslant 1, i\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

Если вектор β получен из α дублированием компонент, то $g_\beta=g_\alpha$. Поэтому при любом $c\in\mathbb{R}$ функции $g(c, x)$ и $g(x, c)$ удовлетворяют условию $\omega(f, \tau)\leqslant\tau/2$. Значит, выполнено также условие Липшица

$$\|g(\mathbf{x})-g(\mathbf{y})\|\leqslant\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|.$$

Для любого $\varepsilon\leqslant 1/4$ выберем n так, чтобы $\varepsilon\geqslant 2^{-n}$, а потом для любой $f\in\mathscr{K}$ с помощью леммы 20 выберем g_α так, чтобы

$$\alpha\in\{0,1\}^{2^n} \text{ и } \|f-g_\alpha\|_{C[0,1]}\leqslant 2^{-n}.$$

Так как при некотором $i\in\mathbb{N}$ $g_\alpha=g_i$, то

$$\|f(x)-g(x, i)\|_{C[0,1]}\leqslant\varepsilon,$$

т. е. в качестве c можно взять i.

Замечание 2. В п. (iv) заменить $\tilde{L}$ на L, вообще говоря, нельзя, что видно из следующего примера.

Рассмотрим функцию $f(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{-n}\sin nx\sin\alpha_n y$, где последовательность $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n\in[0, 2\pi]$, будет определена далее. Тогда базис

$$B=\{f(x, y), x+y, xy\}\cup[-1, 1]$$

удовлетворяет условиям п. (iv). Покажем, что можно выбрать $\{\alpha_n\}$ и $\mathscr{K}$ так, что при $\varepsilon\to 0$

$$H_\varepsilon(\mathscr{K})/\log(1/\varepsilon)\to\infty, \text{ а } L_B(\mathscr{K}, \varepsilon)/\min(\sqrt{H_{2\varepsilon}(\mathscr{K})}, H_{2\varepsilon}(\mathscr{K})/\log(1/\varepsilon))\to 0.$$

В качестве $\mathscr{K}$ возьмем класс всех функций $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\sin nx$ таких, что $|c_n|\leqslant 2^{-n}$. Из леммы 21 следует, что

$$H_\varepsilon(\mathscr{K})\asymp(\log\varepsilon)^2.$$

Выберем $\alpha_n=2\pi a_n$ так, чтобы при любом n линейная форма $l_n(\mathbf{x})=(a, \mathbf{x})$ удовлетворяла бы при любом $\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}$ неравенству

$$\{l_n(\mathbf{x})\}>(2\|\mathbf{x}\|+1)^{-n-2}, \text{ где } \{y\}=\min\{|y-n|: n\in\mathbb{Z}\}.$$

Сделаем это с помощью индукции. База $(n=1)$ выполняется, если взять $a_1=\sqrt{2}$. Допустим, что $a_1, \ldots, a_{n-1}$ уже выбраны, и покажем, как выбрать a_n. Рассмотрим множество всех чисел $a_n\in[0, 1]$, для которых существует вектор $\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}$ такой, что

$$\{(a, \mathbf{x})\}\leqslant(2\|\mathbf{x}\|+1)^{-n-2}.$$

При фиксированных $x_1, \ldots, x_n$ это неравенство можно записать как

$$\{c+a_nx_n\}\leqslant(2\|\mathbf{x}\|+1)^{-n-2},$$

поэтому множество всех его решений относительно $a_n\in[0, 1]$ является объединением не более чем $\|\mathbf{x}\|+1$ отрезков суммарной длины не более чем $2(2\|\mathbf{x}\|+1)^{-n-2}$ (в случае $x_n=0$ это множество пусто вследствие предположения индукции). Значит, его мера меньше, чем

$$\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)^n 2(2k+1)^{-n-2}=2(\pi^2/8-1)<1,$$

и искомое a_n в отрезке $[0, 1]$ выбрать можно.

Докажем теперь, что для любых $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$ и $\varepsilon>0$ найдется $y\in\mathbb{Z}$ такое, что $|y|\leqslant X=\varepsilon^{-n-2}(n+1)^{2(n+1)(n+3)}$ и при любом $i\in[1, n]$

$$\{a_i y-b_i\}<\varepsilon.$$

Согласно лемме 26 достаточно проверить, что при $0<\|\mathbf{u}\|\leqslant 1/2\varepsilon\gamma$, где $\gamma=2^n/((n+1)!)^2$, выполняется неравенство

$$\{(a, \mathbf{u})\}\geqslant 1/2\gamma X.$$

Можно считать, что $2\varepsilon\gamma\leqslant 1$. Но тогда согласно выбору последовательности $\{a_n\}$ при $1\leqslant\|\mathbf{u}\|\leqslant 1/2\varepsilon\gamma$ справедливо неравенство

$$\{(a, \mathbf{u})\}>(3\|\mathbf{u}\|)^{-n-2}\geqslant(2\varepsilon\gamma/3)^{n+2}\geqslant 1/2\gamma X.$$

Выберем теперь $n\leqslant O(\log(1/\varepsilon))$ так, чтобы $2^{-n}\leqslant\varepsilon/2$ и для любой функции $g(x)\in\mathscr{K}$ выполнялось неравенство

$$\left\|g(x)-\sum_{k=1}^{n}c_k\sin kx\right\|<\varepsilon/4,$$

и выберем $m\in\mathbb{Z}$ так, чтобы

$$|m|<(8\pi/\varepsilon)^{n+2}(n+1)^{2(n+1)(n+3)}$$

и при любом $k\leqslant n$

$$|\sin\alpha_k m-2^k c_k|<\varepsilon/4.$$

Тогда

$$\left\|g(x)-\sum_{k=1}^{n}2^{-k}\sin\alpha_k m\sin kx\right\|<\varepsilon/2,$$

значит,

$$\|g(x)-f(x, m)\|<\varepsilon.$$

Реализуя константу m в виде произведения $2^{2^k}(m/2^{2^k})$, где $\left|m/2^{2^k}\right|\leqslant 1$, получаем, что $L_B(m)\leqslant k+O(1)$. В качестве k можно взять $O(\log\log(1/\varepsilon))$, поэтому

$$L_B(\mathscr{K}, \varepsilon)\preccurlyeq\log\log(1/\varepsilon)=o\left(\min\left(\sqrt{H_{2\varepsilon}(\mathscr{K})}, H_{2\varepsilon}(\mathscr{K})/\log(1/\varepsilon)\right)\right).$$

Следующая далее теорема 3 показывает, что нижние оценки такого же типа, что и в теореме 2, можно получить и для почти конечных базисов, содержащих все действительные константы, а также функции, не удовлетворяющие условию Липшица, но для этого надо наложить на базис другие ограничения. Частично эта теорема была сформулирована в [9] и [14].

Теорема 3. (i) *Если B — полиномиальный базис и $\varepsilon<\varepsilon(\mathscr{K})$, то*

$$L_B(\mathscr{K}, \varepsilon)\succcurlyeq\min\left((c_B/n)\sqrt{H_{2\varepsilon}(\mathscr{K})}, H_{2\varepsilon}(\mathscr{K})/2\log(1/\varepsilon)\right),$$
$$D_B(\mathscr{K}, \varepsilon)\geqslant\tau_B\log H_{2\varepsilon}(\mathscr{K})-O_B(\log\log\max(H_{2\varepsilon}(\mathscr{K}), 1/\varepsilon)).$$

(ii) *Если B — полиномиальный жегалкинский базис, то при $\varepsilon\to 0$*

$$L_B(\mathscr{K}, \varepsilon)\succcurlyeq((1+\rho_B)/(n+1))H_{2\varepsilon}(\mathscr{K})/\log\max(H_{2\varepsilon}(\mathscr{K}), 1/\varepsilon).$$

(iii) *Если B — рациональный базис, $\mathscr{K} \subset W(r, M, N, I^n)$ и $\varepsilon < \varepsilon(\mathscr{K})$, то*

$$L_B(\mathscr{K}, \varepsilon) \geqslant \min\left(c_B \sqrt{H_{5\varepsilon+2\varepsilon^2}(\mathscr{K})}, \frac{c_r}{n} H_{5\varepsilon+2\varepsilon^2}(\mathscr{K})/\log(1/\varepsilon)\right),$$

$$D_B(\mathscr{K}, \varepsilon) \geqslant \tau_B \log H_{5\varepsilon+2\varepsilon^2}(\mathscr{K}) - O_{B,n,r}\left(\log\log\max\left(H_{5\varepsilon+2\varepsilon^2}(\mathscr{K}), 1/\varepsilon\right)\right).$$

(iv) *Если B — рациональный жегалкинский базис, $\mathscr{K} \subset W(r, M, N, I^n)$ и $\varepsilon < \varepsilon(\mathscr{K}, B)$, то*

$$\tilde{L}_B(\mathscr{K}, \varepsilon) \geqslant (c_r(1 + \rho_B)/n) H_{5\varepsilon+2\varepsilon^2}(\mathscr{K})/\log(1/\varepsilon).$$

Доказательство проводится по той же схеме, что и в теореме 2. Для доказательства п. (i) повторяем соответствующие рассуждения теоремы 2, только вместо леммы 28 используется

Лемма 34. *Справедливо неравенство*

$$H_\varepsilon(\mathfrak{A}_S \cap \{f : \|f\| \leqslant \|\mathscr{K}\| + \varepsilon\}) \leqslant nc_B D_B(S) L_B(S) + L_B(S) \log(\|\mathscr{K}\|/\varepsilon),$$

где $\|\mathscr{K}\| = \sup\{\|f\| : f \in \mathscr{K}\}$.

Доказательство. Обозначим d_i степень полинома F_S относительно переменной x_i. Рассмотрим в интервале $I^n \subset \mathbb{R}^n$ точки

$$\mathbf{v_k} = \left(v^1_{k_1}, \ldots, v^n_{k_n}\right), \quad \mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n),$$

где $v^i_{k_i} = a_i + (1 + \cos k_i\pi/2d_i)\,|I_i|\,/2, 0 \leqslant k_i \leqslant 2d_i, \quad I_i = [a_i, b_i], 1 \leqslant i \leqslant n$. Каждой функции $F_S(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \in \mathfrak{A}_S$ сопоставим вектор $\mathbf{V}_S(\mathbf{a})$, состоящий из ее значений во всех точках $\mathbf{v_k}$. Тем самым определено отображение $\mathbf{v}_S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^P$, где $p = \prod_{i=1}^{n} (2d_i + 1)$. Обозначим $\mathscr{A}_S$ множество

$$\mathbf{V}_S(\mathbb{R}^m) \cap [-\|\mathscr{K}\| - \varepsilon, \|\mathscr{K}\| + \varepsilon]^P.$$

Из леммы 25 с помощью индукции по n выводим импликацию

$$\|\mathbf{V}_S(\mathbf{a}) - \mathbf{V}_S(\mathbf{b})\| \leqslant \delta \Rightarrow \|F_S(\mathbf{x}, \mathbf{a}) - F_S(\mathbf{x}, \mathbf{b})\|_{C(I^n)} \leqslant 2^n\delta.$$

Из этой импликации следует, что ε-емкость множества

$$\mathfrak{A}_S \cap \{f : \|f\| \leqslant \|\mathscr{K}\| + \varepsilon\}$$

не превосходит 2^{-n} ε-емкости множества $\mathscr{A}_S$. Оценим ε-емкость $\mathscr{A}_S$ сверху, пользуясь рассуждениями леммы 26 из [8]. Пусть $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\} \subset \mathscr{A}_S$ произвольное ε-различимое подмножество, $\mathbf{a}_i = \mathbf{V}_S(\mathbf{b}_i), \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^m, 1 \leqslant i \leqslant \mathbb{N}$. Обозначим $V_{S,i}$ компоненты вектор-функции $\mathbf{V}_S$, а g — полином

$$\prod_{i=1}^{P} \prod_{|j| \leqslant [\|\mathscr{K}\|/\varepsilon]+1} (V_{S,i} - j\varepsilon).$$

Из леммы 17 следует, что степени полиномов $V_{S,i}$ меньше $c_B^{D_B(S)}$, значит, степень полинома g меньше

$$p(2\|\mathscr{K}\|/\varepsilon + 3)\, c_B^{D_B(S)}.$$

Поэтому, согласно лемме 22, число связных компонент, на которые пространство $\mathbb{R}^m$ разбивается нулевым уровнем полинома g, не превосходит

$$\left(p(2\|\mathscr{K}\|/\varepsilon + 3)\, c_B^{D_B(S)} + 1\right)^m.$$

Можно считать, что координаты точек $\mathbf{a}_i$ не делятся нацело на ε. Тогда точки $\mathbf{b}_i \notin g^{-1}(0)$. Покажем, что разные точки $\mathbf{b}_i$, $\mathbf{b}_j$ лежат в разных компонентах. Допустим противное и рассмотрим точки $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{a}_j$, $\mathbf{a}_i = \mathbf{V}_S(\mathbf{b}_i)$, $\mathbf{a}_j = \mathbf{V}_S(\mathbf{b}_j)$. Так как $\|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j\| > \varepsilon$, то существуют $l \in [1, m]$ и $t \in \mathbb{Z}$ такие, что $t\varepsilon \in [a_{il}, a_{jl}]$. Поэтому в той же связной компоненте найдется точка $\mathbf{c}$ такая, что $V_{S,l}(\mathbf{c}) = t\varepsilon$ (непрерывный образ связного множества связен, а связное подмножество $\mathbb{R}$ выпукло, поэтому образ связной компоненты при отображении $V_{S,l}$ вместе с a_{il}, a_{jl} содержит и t_ε). Но тогда $\mathbf{c}$ принадлежит $g^{-1}(0)$ и одновременно связной компоненте множества $\mathbb{R}^m \setminus g^{-1}(0)$, чего не может быть. Значит, N не превосходит числа связных компонент, т. е.

$$N \leqslant (p(2\|\mathscr{K}\|/\varepsilon + 3))^m a_B^{mD_B(S)}.$$

Из леммы 17 следует, что

$$p = \prod_{i=1}^{n} (2d_i + 1) \leqslant b_B^{nD_B(S)}.$$

Логарифмируя неравенство для N и учитывая неравенство для p, имеем

$$C_\varepsilon(\mathfrak{A}_S \cap \{f : \|f\| \leqslant \|\mathscr{K}\| + \varepsilon\}) \leqslant c_B nmD_B(S) + m \log(2^{n+1}\|\mathscr{K}\|/\varepsilon + 3).$$

Применяя неравенство $m \leqslant L_B(S)$ и лемму 21, получаем неравенство леммы 34. □

В доказательстве леммы 34 можно применить вместо леммы 25 неравенство А. А. Маркова для производных, а вместо повторения доказательства леммы 26 [8] применить лемму 24. Пункт (ii) доказывается аналогично, только вместо леммы 34 используется лемма 35.

Лемма 35. *Если Φ — произвольная формула в базисе B, удовлетворяющем условиям* (ii), *то*

$$H_\varepsilon(\mathfrak{A}_\Phi \cap \{f : \|f\| \leqslant \|\mathscr{K}\| + \varepsilon\}) \leqslant \tilde{L}_B(\Phi)\,(n \log c_B \tilde{L}_B(\Phi)\|\mathscr{K}\|/\varepsilon)/(1 + \rho_B).$$

Доказательство аналогично лемме 34, только для оценки числа p и степеней полиномов $V_{S,i}$ используем второе неравенство леммы 17, а для оценки N — лемму 24. Число m оцениваем как $\tilde{L}_B(\Phi)/(1 + \rho_B)$.□

Повторяя рассуждения, доказывающие теорему 2 (ii), получаем, что

$$H_{2\varepsilon}(\mathscr{K}) \leqslant \tilde{L}(n \log c_B \tilde{L} + \log \|\mathscr{K}\|/\varepsilon)/(1 + \rho_B) \lesssim \tilde{L}(n \log \tilde{L}/\varepsilon)/(1 + \rho_B),$$

откуда и следует п. (ii). Следующий пункт также доказывается аналогично, только вместо леммы 34 используется

Лемма 36. *Обозначим $O_\varepsilon(\mathscr{K})$ ε-окрестность множества $\mathscr{K}$. Тогда*

$$H_{4\varepsilon + 2\varepsilon^2}(\mathfrak{A}_S \cap O_\varepsilon(\mathscr{K})) \leqslant (c_r/n)\, L_B(S) \log c_{\mathscr{K}}/\varepsilon + c_B L_B(S)\, D_B(S).$$

Доказательство аналогично лемме 34. Рассмотрим в интервале I^n точки $\mathbf{v}_\mathbf{k} = (v^1_{k_1}, \ldots, v^n_{k_n})$, где $v^i_{k_i} = a_i + k_i\delta$, $\delta = \omega^{-1}(\varepsilon^2/2) = a\varepsilon^c$, $c = c_r$, $a = a_{r,M,N,I^n}$, $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$, $0 \leqslant k_i \leqslant |I_i|/\delta$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\omega(\tau)$ — верхняя граница для всех модулей непрерывности $\omega(f, \tau)$, $f \in \mathscr{K}$. Аналогично доказательству леммы 34 определим отображение

$$\mathbf{V}_S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^P, \text{ где } p = \prod_{i=1}^{n} [(I_i/\delta) + 1] \leqslant |I|\,(2/\delta)^n \leqslant c_{\mathscr{K}} \varepsilon^{-nb_r}.$$

Обозначим $\mathscr{A}_S$ образ при этом отображении множества $\mathfrak{A}_S \cap O_\varepsilon(\mathscr{K})$. Пусть $F_S(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ и $F_S(\mathbf{x}, \mathbf{b})$ — произвольные функции из этого множества и $\mathbf{V}_S(\mathbf{a})$ и $\mathbf{V}_S(\mathbf{b})$ — соответствующие векторы из $\mathscr{A}_S$. Проверим, что

$$\|\mathbf{V}_S(\mathbf{a}) - \mathbf{V}^S(\mathbf{b})\| \leqslant \varepsilon^2 \Rightarrow \|F^S(\mathbf{x}, \mathbf{a}) Fs - (\mathbf{x}, \mathbf{b})\|_{C(I^n)} \leqslant 4\varepsilon + 2\varepsilon^2.$$

Выберем функции $f, g \in \mathscr{K}$ так, чтобы

$$\|f(\mathbf{x}) - F_S(\mathbf{x}, \mathbf{a})\| \leqslant \varepsilon \text{ и } \|g(\mathbf{x}) - F_S(\mathbf{x}, \mathbf{b})\| \leqslant \varepsilon.$$

Тогда разность $f-g$ удовлетворяет при любом $\mathbf{k}$ неравенствам

$$|(f-g)(\mathbf{v_k})|\leqslant 2\varepsilon+\varepsilon^2,$$

так как

$$|F_S(\mathbf{v_k},\mathbf{a})-F_S(\mathbf{v_k},\mathbf{b})|\leqslant\|\mathbf{V}_S(\mathbf{a})-\mathbf{V}_S(\mathbf{b})\|\leqslant\varepsilon^2.$$

В то же время $\omega(f-g,\tau)\leqslant\omega(f,\tau)+\omega(g,\tau)\leqslant 2\omega(\tau)$. Поэтому

$$\|f-g\|\leqslant\max_{\mathbf{k}}|f(\mathbf{v_k})-g(\mathbf{v_k})|+\sup_{\mathbf{x}}2\omega(\min_{\mathbf{k}}\|\mathbf{x}-\mathbf{v_k}\|)\leqslant$$
$$\leqslant 2\varepsilon+\varepsilon^2+2\omega(\delta)\leqslant 2(\varepsilon+\varepsilon^2),$$

откуда следует, что

$$\|F_S(\mathbf{x},\mathbf{a})-F_S(\mathbf{x},\mathbf{b})\|\leqslant\|f(\mathbf{x})-F_S(\mathbf{x},\mathbf{a})\|+\|f-g\|+\|g(\mathbf{x})-F_S(\mathbf{x},\mathbf{b})\|\leqslant$$
$$\leqslant 4\varepsilon+2\varepsilon^2,$$

и проверка закончена. Из доказанной импликации следует неравенство

$$C_{4\varepsilon+2\varepsilon^2}(\mathfrak{A}_S\cap O_\varepsilon(\mathscr{K}))\leqslant C_{\varepsilon^2}(\mathscr{A}_S).$$

Последнюю величину оцениваем так же, как и в лемме 34:

$$2^{C_{\varepsilon^2}(\mathscr{A}_S)}\leqslant p^m a_B^{mD_B(S)}(\|\mathscr{K}\|/\varepsilon^2)^m.$$

Логарифмируя и учитывая неравенства

$$p\leqslant c_{\mathscr{K}}\varepsilon^{-nb_r}\ \text{ и }\ m\leqslant L_B(S),$$

получаем, что

$$C_{\varepsilon^2}(\mathscr{A}_S)\leqslant c_r nL_B(S)\log c_{\mathscr{K}}/\varepsilon+c_B L_B(S)D_B(S).$$

Из доказанных неравенств и леммы 21 следует теперь неравенство леммы 36. □

Рассуждая аналогично теореме 2(i) получаем, что

$$H_{5\varepsilon+2\varepsilon^2}(\mathscr{K})\leqslant\max\Big\{H_{4\varepsilon+2\varepsilon^2}(\mathfrak{A}_S\cap O_\varepsilon(\mathscr{K})):S\in\bigcup_{m\leqslant L}\mathscr{M}_B(n,m,L)\Big\}+$$
$$+\log\sum_{m\leqslant L}M_B(n,m,L).$$

Применяя леммы 13, 14, 36, имеем:

$$H_{5\varepsilon+2\varepsilon^2}(\mathscr{K})\leqslant\begin{cases}c_r nL\log c_{\mathscr{K}}/\varepsilon+c_B L^2,\\ c_{n,B}D2^{D/\tau_B}+c_{\mathscr{K}}2^{D/\tau_B}\log c_{\mathscr{K}}/\varepsilon.\end{cases}$$

Из этих неравенств и следуют неравенства п. (iii). Пункт (iv) доказывается аналогично, только вместо леммы 36 используется

Лемма 37. *Если Φ — произвольная формула в базисе B, удовлетворяющая условиям п.* (iv), *то вместо оценки леммы* 36 *можно использовать оценку*

$$\widetilde{L}_B(\Phi)\big((nc_r\log(1/\varepsilon)+\log\widetilde{L}_B(\Phi))/(1+\rho_B)+c_{\mathscr{K}}\big).$$

Доказательство аналогично лемме 36, только для оценки $C_{\varepsilon^2}(\mathscr{A}_\Phi)$ используем лемму 17 и получаем, что

$$C_{\varepsilon^2}(\mathscr{A}_\Phi)\leqslant m\log(pm\|\mathscr{K}\|/\varepsilon^2)<\widetilde{L}_B(\Phi)\big((nc_r\log(1/\varepsilon)+$$
$$+\log\widetilde{L}_B(\Phi))/(1+\rho_B)+c_{\mathscr{K}}\big).\ \square$$

Из леммы 37 так же, как в доказательстве теоремы 2 (iii), выводим, что

$$H_{5\varepsilon+2\varepsilon^2}(\mathscr{K}) \leqslant \tilde{L}\left((nc_r \log(1/\varepsilon) + \log \tilde{L})/(1+\rho_B) + c_{\mathscr{K}}\right),$$

откуда, учитывая, что $\varepsilon < \varepsilon(\mathscr{K}, B)$ и $\log H_\varepsilon(\mathscr{K}) < b_r n \log(1/\varepsilon)$, получаем неравенство (iv). □

Замечание 3. Заменить условие рациональности базиса на более слабое условие аналитичности, вообще говоря, нельзя, что видно из следующего примера. Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (n!)^{-1} \sin nx \sin \alpha_n y,$$

где последовательность $\{\alpha_n\}$ выбирается так же, как в замечании 2, положим $B = \{f\} \cup \mathbb{R}$, а в качестве $\mathscr{K}$ возьмем второй из классов леммы 22. Тогда $H_\varepsilon(\mathscr{K}) \asymp (\log \varepsilon)^2/\log\log(1/\varepsilon)$ и $\tilde{L}_B(\mathscr{K}, \varepsilon) = 2$. Ясно, что f — аналитическая функция и $\mathscr{K}$ — аналитический класс, причем

$$f \in W((1, 1), (e, 2\pi(e-1)), e-1, [0, 2\pi]^2), \ \mathscr{K} \subset W(1, e, e-1, [0, 2\pi]).$$

Так же, как в замечании 2, проверяется, что для базиса

$$B = \{f(x, y), x+y, xy\} \cup [-1, 1]$$

справедливо неравенство

$$L_B(\mathscr{K}, \varepsilon) \preccurlyeq \log\log(1/\varepsilon).$$

Согласно теореме 2 (iv)

$$\tilde{L}_B(\mathscr{K}, \varepsilon) \succcurlyeq (\log(1/\varepsilon))/\log\log(1/\varepsilon).$$

В то же время для базиса $B = \{f(x, y), x+y, xy, x^2\} \cup [-1, 1]$ справедливо неравенство

$$\tilde{L}_B(\mathscr{K}, \varepsilon) \preccurlyeq \log\log(1/\varepsilon).$$

Приведенные примеры показывают также, что если убрать ограничения на полиномы, входящие в базис, то теорема 2 (iv) перестает, вообще говоря, быть справедливой. Если же в качестве f взять функцию

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (\operatorname{arctg} x)^n \sin \alpha_n y$$

с той же последовательностью $\{\alpha_n\}$, а в качестве $\mathscr{K}$ — класс всех

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\operatorname{arctg} x)^n, \quad |c_n| \leqslant 2^{-n},$$

и положить $B = \{f(x, y), x+y, xy, \operatorname{arctg} x\} \cup [-1, 1]$, то аналогичным образом можно показать, что

$$H_\varepsilon(\mathscr{K}) \asymp (\log \varepsilon)^2, \ L_B(\mathscr{K}, \varepsilon) \preccurlyeq \log\log(1/\varepsilon), \ \tilde{L}_B(\mathscr{K}, \varepsilon) \asymp \log(1/\varepsilon).$$

Приведенный пример показывает также, что оценка теоремы 2 (iv), вообще говоря, достижимая по порядку. Отметим еще, что базис

$$B = \{f(x, y) + \operatorname{arctg} y + x + z, xy\} \cup [-1, 1],$$

состоящий только из двух функций, обладает упомянутыми свойствами предыдущего базиса.

Рассмотрим еще базисы $B_1 = \{x+y, xy\} \cup \mathbb{R}$ и $B_2 = \{x+y, \varphi(x)\varphi(y)\} \cup [-1, 1]$, где $\varphi(x) = (|x+1| - |x-1|)/2$, и класс

$\mathcal{K} \subset C[-1, 1]$, состоящий из всех

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n, \quad |c_n| \leqslant 2^{-n}.$$

Тогда

$$H_\varepsilon(\mathcal{K}) \asymp (\log \varepsilon)^2, \; L_{B_i}(\mathcal{K}, \varepsilon) \asymp \log(1/\varepsilon), \; i = 1, 2,$$

и приведенные примеры показывают, что оценки теорем 2 (i), (iii) и 3, вообще говоря, достижимые по порядку. Упомянутыми свойствами обладают также состоящие из одной функции базисы

$$B_3 = \{(x+y)z + xy(1-z)\} \cup \mathbb{R} \text{ и } B_4 = \{x_1 + x_2 + \varphi(x_3)\varphi(x_4)\} \cup [-1, 1].$$

Может быть, несколько более простой пример, показывающий, что теорема 3 не верна для аналитических базисов, дают базис

$$B = \{f(x, y, z)\} \cup \mathbb{R}, \text{ где } f(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n/n!) \cos(2\pi y^{n+1} z),$$

и класс $\mathcal{K} \subset C[-1, 1]$, состоящий из всех $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$, $|c_n| \leqslant 1/n!$. Из леммы 19 следует, что $\tilde{L}_B(\mathcal{K}, \varepsilon) = 3$. Вместо $f(x, y, z)$ в подобном примере можно использовать

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x} \cos(\ln n) y,$$

которая аналитична на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Из известной теоремы С. М. Воронина следует, что для любой функции f, аналитичной на некотором интервале $I \subset \mathbb{R}$ и имеющей аналитическое продолжение на круг, содержащий I, справедливо неравенство $L_B(f, \varepsilon) \leqslant O(1)$, где $B = \{v(x, y), x + y, xy\} \cup \mathbb{R}$.

Замечание 4. Для произвольных компактов $\mathcal{K} \subset C(I^n)$ теорема 3 (iii), (iv) не верна, что видно из следующего примера. Обозначим $\delta/((x-a)^2 + \delta)$ через $f_{a,\delta}(x)$ и рассмотрим класс $\mathcal{K} \subset C[0, 1]$, состоящий из всех $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_{a_n, \delta_n}(x)$, где $|c_n| \leqslant 2^{-n}$, $\delta_n = 2^{-2^{n+2}}$, $a_n = m_n 2^{-2^n}$, $0 < m_n < 2^{2^n}$, m_n — произвольные нечетные числа. Тогда для базиса $B = \{x - y, 1/x\} \cup [0, 1]$ справедливы неравенства

$$\tilde{L}_B(\mathcal{K}, \varepsilon) \preccurlyeq \log(1/\varepsilon).$$

Действительно, пусть $g(x) \in \mathcal{K}$, $2^{-n} \leqslant \varepsilon < 2^{-n+1}$. Так как

$$\left\| g - \sum_{k=1}^{n} c_k f_{a_k, \delta_k} \right\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k| \leqslant 2^{-n} \leqslant \varepsilon,$$

то $\tilde{L}_B(g, \varepsilon) \leqslant \tilde{L}_B\left(\sum_{k=1}^{n} c_k f_{a_k, \delta_k}\right) \preccurlyeq n \preccurlyeq \log(1/\varepsilon)$, значит, $\tilde{L}_B(\mathcal{K}, \varepsilon) \preccurlyeq \log(1/\varepsilon)$.

Проверим теперь, что $H_\varepsilon(\mathcal{K}) \succcurlyeq 1/\varepsilon$. Пусть $2^{-n-1} < 3\varepsilon \leqslant 2^{-n}$. Рассмотрим все возможные функции $g_a(x)$ вида $3\varepsilon \sum_{k=1}^{n} f_{a_k, \delta_k}$. Они образуют в $\mathcal{K}$ 2ε-различимое подмножество. Действительно, проверим, что для различных векторов $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ справедливо неравенство $\|g_{\mathbf{a}} - g_{\mathbf{b}}\| > 2\varepsilon$. Пусть j — первый индекс, для которого $a_j \neq b_j$. Тогда

$$g_{\mathbf{a}} - g_{\mathbf{b}} = 3\varepsilon \sum_{k=j}^{n} (f_{a_k, \delta_k} - f_{b_k, \delta_k}).$$

Оценим $|g_{\mathfrak a}(a_j)-g_{\mathfrak b}(a_j)|$. Ясно, что $f_{a_j,\delta_j}(a_j)=1$, и в то же время значения $f_{a_k,\delta_k}(a_j)$ при $k>j$ и $f_{b_k,\delta_k}(a_j)$ при $k\geqslant j$ положительны и не превосходят

$$\delta_k/((a_j-b_k)^2+\delta_k)\leqslant\delta_k\big/\left(\delta_k+2^{-2^{k+1}}\right)<2^{-2^{k+1}}.$$

Значит, $|g_{\mathfrak a}(a_j)-g_{\mathfrak b}(a_j)|\geqslant 3\varepsilon\left(1-\sum_{k=j}^{n}2^{-2^{k+1}}\right)>2\varepsilon$, следовательно, $\|g_{\mathfrak a}-g_{\mathfrak b}\|>2\varepsilon$. Оценим теперь снизу мощность рассматриваемого 2ε-различимого подмножества. Она равна числу различных векторов $m=(m_1,\ldots,m_n)$ таких, что

$$m_i\in\{1,3,5,\ldots,2^{2^i}-1\},\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

Значит, нижняя оценка такова:

$$\prod_{i=1}^{n}2^{2^i-1}>2^{2^n}>2^{1/6\varepsilon},$$

откуда следует, что

$$H_\varepsilon(\mathscr{K})>1/6\varepsilon.$$

Можно показать, что на самом деле $H_\varepsilon(\mathscr{K})\asymp 1/\varepsilon$.

Из доказанных неравенств следует, что для рассматриваемого класса $\mathscr{K}$ теорема 3 (iii), (iv) не верна. Однако и ее условие для класса $\mathscr{K}$ не выполнено, так как для функции $g=2^{-n}f_{a_n,\delta_n}$

$$\omega\left(g,\delta_n^{1/2}\right)\geqslant g(a_n)-g\left(a_n+\delta_n^{1/2}\right)=2^{-n-1}\succcurlyeq\left(\delta_n^{1/2}\right)^{(n+1)/2^{n+1}},$$

поэтому $\mathscr{K}$ не содержится ни в одном из классов $W(r,M,N,[0,1])$.

Тем же методом можно доказать, что для любой $L_1(\varepsilon)\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$ и любой $L_2(\varepsilon)\succcurlyeq(\log\varepsilon)^2$ существует класс $\mathscr{K}$ такой, что

$$H_\varepsilon(\mathscr{K})\succcurlyeq L_2(\varepsilon),\ L_{\{+,\cdot\}\cup\mathbb{R}}(\mathscr{K},\varepsilon)\succcurlyeq(L_2(\varepsilon))^{1/2},$$
$$L_{\{-,1/x\}\cup[0,1]}(\mathscr{K},\varepsilon)\preccurlyeq L_1(\varepsilon).$$

С другой целью близкая идея использовалась в [16].

§ 4. О сложности приближения кусочно-аналитических функций схемами и формулами в полиномиальных и рациональных базисах

В этом параграфе будут доказаны некоторые вспомогательные утверждения, которые имеют и самостоятельный интерес.

Лемма 38. *Пусть $B=\{x-y,\ xy,\ 1/2\}$. Для любых $a>0$ и $n\in\mathbb{N}$ можно построить алгебраический полином f_n степени n такой, что при $|x|\leqslant a$*

$$\max(0,\ |x|-O((3/4)^n a))\leqslant f_n(x)\leqslant|x|\ \text{и}\ L_B(f_n)\leqslant O(n+\log(|\log a|+1)).$$

Доказательство. Можно считать, что $a=1$, так как общий случай сводится к случаю $a=1$ заменой f_n на $2^m f(2^{-m}x)$, где $m\in\mathbb{Z}$, $2^m\geqslant a>2^{m-1}$, а константа 2^m реализуется со сложностью $O(\log(|m|+2))$ как аддитивная цепочка (см. [22]). Рассмотрим рекуррентную последовательность $f_n(x)=3f_{n-1}(x)/2-f_{n-1}^3(x)/2x^2$, где $f_1(x)=x^2$ (такие последовательности применяются при итеративных процедурах вычисления квадратных корней). Обозначим $|x|-f_n(x)$ через $\delta_n(x)$, а $\|\delta_n(x)\|$ —

через δ_n. Рассуждая по индукции, получаем, что

$$\delta_n^2(x)/|x| \leqslant \delta_{n+1}(x) = 3\delta_n^2(x)/2|x| - \delta_n^3(x)/2x^2 \leqslant 3\delta_n^2(x)/2|x|,$$
$$0 \leqslant \delta_{n+1}(x) \leqslant \delta_n(x) \leqslant |x|, \ 0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_{n+1} \leqslant |x|.$$

Обозначим $f_n(x)/|x|$ через $g_n(x)$. Тогда $g_1(x) = |x|$, $g_{n+1} = 3g_n/2 - g_n^3/2$, и по индукции получаем, что

$$\delta_{n+k}(x) \leqslant (3/2|x|)^{2^k-1}\delta_n^{2^k}(x) = (3/2|x|)^{2^k-1}(|x|(1-g_n(x)))^{2^k} =$$
$$= (2|x|/3)(3(1-g_n(x))/2)^{2^k},$$
$$g_n(0) = 0, g_n(1) = 1 \geqslant g_{n+1}(x) \geqslant g_n(x) \geqslant |x|, Dg_n(x)/|x| \geqslant 0.$$

Обозначим x_n единственный положительный корень уравнения $g_n(x) = 2/3$. Тогда $x_n \leqslant |x| \leqslant 1 \Rightarrow 2/3 \leqslant g_n(x)$, значит, $x_n \leqslant |x| \leqslant 1 \Rightarrow \Rightarrow \delta_{n+k}(x) \leqslant 2^{-2^k}$. Обозначим $\varphi(y)$ функцию $[0, 1] \to [0, 1]$, обратную к $\psi(y) = 3y/2 - y^3/2$. Ясно, что $\varphi(y)$ возрастает, $0 \leqslant \varphi(y) \leqslant y$, $D\varphi(0) = 2/3$ и

$$\underbrace{\varphi(\varphi\ldots(\varphi(2/3))\ldots)}_{n} = x_n.$$

Согласно известным результатам о методе итераций, получаем, что $x_n \asymp \asymp (2/3)^n$. Поэтому

$$\delta_{n+k} \leqslant \max(2^{-2^k}, x_n) \leqslant O(\max(2^{-2^k}, (2/3)^n)),$$

значит, $\delta_{n+]\log n[} \leqslant O((2/3)^n)$, откуда следует, что

$$\delta_n \leqslant O((2/3)^{n-\log n}) \leqslant O((2/3)^n n) \leqslant O((3/4)^n).$$

Так как $f_n = x^2 h_n$, где $h_1 = 1$, $h_{n+1} = 3h_n/2 - h_n^3 x^2/2$, то

$$L_B(h_n) \leqslant L_B(h_{n-1}) + O(1) \leqslant O(n),$$

значит, $L_B(f_n) \leqslant O(n)$. □

Замечание 5. К формулировке леммы 38 можно добавить, что $\|Df_n\|_{C[-a,a]} \leqslant O(1)$, но это утверждение далее не понадобится.

Лемма 39. *Пусть $B = \{x - y, xy, 1/2\}$. Для любых $\varepsilon \in (0, a/2)$, $m \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ можно построить алгебраический полином $p(x_1, \ldots, x_m)$ такой, что*

$$\|p(\mathbf{x}) - \max(x_1, \ldots, x_m)\|_{C[-a,a]^m} \leqslant \varepsilon, \ p\colon [-a, a]^m \to [-a\ a],$$
$$L_B(p) \leqslant O(m \log((a \log m)/\varepsilon)).$$

Аналогичное утверждение верно и для функции $\min(x_1, \ldots, x_m)$.

Доказательство. Пусть $m = 2$. Так как $\max(x, y) = = (x + y + |x - y|)/2$, то все будет доказано, если взять полином $p(x, y) = = (x + y + f_n(|x - y|))/2$, где $f_n(x)$ — полином из леммы 38, а $n \asymp \log a/\varepsilon$ выбрать так, чтобы $\|p - \max\| \leqslant \varepsilon$. В случае $m > 2$ удобней доказывать оценку $L_B(p) \leqslant O((m-1)\log((a \log m)/\varepsilon) + m \log k)$, где $2^{k-1} \leqslant m \leqslant 2^k$.

Сделаем это индукцией по m. Представим m в виде $m_1 + m_2$, где $0 \leqslant m_2 - m_1 \leqslant 1$, тогда $2^{k-2} \leqslant m_i \leqslant 2^{k-1}$, $i = 1, 2$. С помощью предположения индукции построим полиномы p_1 и p_2 такие, что

$$\|p_1(x_1, \ldots, x_{m_1}) - \max(x_1, \ldots, x_{m_1})\|_{C[-a,a]^{m_1}} \leqslant (k-1)\varepsilon/k,$$
$$\|p_2(x_{m_1} + 1, \ldots, x_m) - \max(x_{m_1} + 1, \ldots, x_m)\|_{C[-a,a]^{m_2}} \leqslant (k-1)\varepsilon/k,$$
$$p_i\colon [-a, a]^{m_i} \to [-a, a],$$

$$L_B(p_i) \leqslant O((m_i-1)\log((ka\log m_i)/(k-1)\varepsilon)+m_i\log(k-1)) \leqslant$$
$$\leqslant O((m_i-1)\log((a\log m)/\varepsilon)+(m_i-1)\log(k/(k-1))+m_i\log(k-1)) =$$
$$= O((m_i-1)\log((a\log m)/\varepsilon)+m_i\log k-\log(k/(k-1))),\ i=1,2;$$

в случае $m=3$ положим $p_1=x_1$.

С помощью доказанного при $m=2$ утверждения леммы выберем полином $f(x, y):[-a, a]^2\to[-a, a]$ так, чтобы

$$\|f-\max\| \leqslant \varepsilon/k \text{ и } L_B(f) \leqslant O(\log ak/\varepsilon).$$

Положим $p(x_1, \ldots, x_m)=f(p_1, p_2)$. Тогда

$$\|p-\max\| \leqslant \|f(p_1, p_2)-\max(p_1, p_2)\|+\|\max(p_1, p_2)-\max(x_1, \ldots, x_m)\| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon/k+\max_i\|p_i-\max\| \leqslant \varepsilon/k+(k-1)\varepsilon/k \leqslant \varepsilon$$

согласно предположению индукции, выбору f и неравенству $\omega(\max, \tau) \leqslant \leqslant \tau$. Кроме того, согласно предположению индукции, выбору f и неравенствам

$$k \leqslant \log m+1,\ \log(k/(k-1)) \geqslant \log(1+1/\log m)$$

справедлива оценка

$$L_B(p) \leqslant L_B(f)+L_B(p_1)+L_B(p_2) \leqslant$$
$$\leqslant O((m-2)\log((a\log m)/\varepsilon)+m\log k-2\log(k/(k-1))+\log ak/\varepsilon) \leqslant$$
$$\leqslant O((m-1)\log((a\log m)/\varepsilon)+m\log k-2\log(k/(k-1))+$$
$$+\log(1+1/\log m)) \leqslant O((m-1)\log((a\log m)/\varepsilon)+m\log k).$$

Так как константы во всех знаках O могут быть выбраны одинаковыми, то шаг индукции сделан и лемма доказана. □

Замечание 6. К формулировке леммы 39 можно добавить, что $p \in W(1, M, a, [-a, a]^m)$, где $M=(m^{O(1)})$, и

$$\|\mathbf{x}\| \leqslant a \ \&\ 2^{k-1} \leqslant m \leqslant 2^k \Rightarrow 2^{-k}\sum_{i=1}^m x_i \leqslant p(\mathbf{x}) \leqslant \max_i x_i,$$

но это далее не понадобится.

Следующая теорема будет использована в § 6.

Теорема 4. *Пусть $B=\{x-y, xy, 1/2\}$ и $f(x) \in C(I)$ — кусочно-рациональная функция, составленная из s рациональных функций f_i степени меньше d. Тогда при $\varepsilon<1/4$*

$$L_B(f, \varepsilon) \leqslant O(s\log(1/\varepsilon)+sd(\log(1/\varepsilon))/\log\log(1/\varepsilon)+O_f(1).$$

Если же $f(x)$ кусочно-полиномиальна, причем при любом i полином $f_i(x) \in W(1, M, N, I_i)$, $I_i=[a_i, b_i]=[c_i-\delta, c_{i+1}+\delta]$, $a=c_1<\ldots<c_{s+1}= =b$, $0 \in I=[a, b]$, и $N/\varepsilon\to\infty$, $sM\delta/\varepsilon\to\infty$, тогда

$$L_B(f, \varepsilon) \leqslant O\Big(s\Big(d\Big(\frac{d+\log(sNd/\varepsilon)}{\log(d+\log(sNd/\varepsilon))}+\log(|\log N|+d)\Big)+\log(|I|Ms/\varepsilon)+$$
$$+\log(1+|\log|I||)+\max_i|\log|I_i||+\max_i|\log|c_i||+\max_i|\log|a_i||\Big)+$$
$$+\frac{\log(sN/\varepsilon)}{\log\log(sN/\varepsilon)}+\log(1+|\log sN|)\Big).$$

Доказательство. Положим $\varphi_i(x)=(|x-c_i|-|x-c_{i+1}|+c_i+ +c_{i+1})/2$, тогда $f(x)=\sum_{i=1}^s f(\varphi_i(x))-\sum_{i=2}^s f(c_i)$, значит,

$$L_B(f, \varepsilon) \leqslant \sum_{i=1}^s L_B(f(\varphi_i), \varepsilon/2s)+L_B\Big(\sum_{i=2}^s f(c_i), \varepsilon/2\Big)+O(s).$$

Предпоследнее слагаемое оцениваем с помощью леммы 2 как

$$O\left(\frac{\log(sN/\varepsilon)}{\log\log(sN/\varepsilon)}+\log(1+|\log sN|)+1\right),$$

а $L_B(f(\varphi_i),\ \varepsilon/2s)$ оцениваем как

$$L_B(f_i,\varepsilon/4s)+L_B(\varphi_i,\varepsilon/4Ms),\ \text{ где } f_i=f|_{I_i}.$$

Последнее слагаемое оцениваем с помощью лемм 2 и 38 как

$$2L_B(|x|,\ \varepsilon/8Ms)+L_B(c_i,\ \varepsilon/16Ms)+L_B(c_{i+1},\ \varepsilon/16Ms)+O(1)\leqslant$$
$$\leqslant O(\log(|I|Ms/\varepsilon)+\log(1+|\log|I||)+|\log|c_i||+|\log|c_{i+1}||).$$

Если $f(x)$ кусочно-полиномиальная, то $L_B(f_i,\ \varepsilon/4s)$ оцениваем с помощью леммы 4 как

$$O\left(d\left(\frac{d+\log(sNd/\varepsilon)}{\log(d+\log(sNd/\varepsilon))}+\log(|\log N|+d)\right)+|\log|I_i||+|\log|a_i||\right).$$

Если f кусочно-рациональна, то используем лемму 40.

Лемма 40. *Если $f\in C(I)$ — рациональная функция степени d, то*

$$L_B(f,\ \varepsilon)\leqslant O(d(\log(1/\varepsilon))/\log\log(1/\varepsilon))+O_f(1).$$

Доказательство. Пусть $f(x)=p(x)/q(x)$, $\min\{|q(x)|:x\in I\}=$ $=\sigma_f>0$. Тогда

$$L_B(f,\ \varepsilon)\leqslant L_B(p,\ \sigma\varepsilon/2)+L_B(1/q,\ \varepsilon/2(\|p\|+\sigma\varepsilon/2)).$$

Оценим $L_B(1/q,\ \varepsilon)$ при $\varepsilon<1/2\sigma^2$ как

$L_B(q,\ \ \varepsilon\sigma^2/6)+L_B(1/x,\ \ \varepsilon/2)+O(\log(1/\varepsilon\sigma^2)),$ где $1/x\in C[\sigma,\ \|q\|+\varepsilon\sigma^2/2]$

(для этого выбираем $q'(x)$ так, чтобы при $x\in I$ $q'(x)/q(x)>0$,

$\sigma<|q(x)|\leqslant|q'(x)|\leqslant|q(x)|+\varepsilon\sigma^2/2,\quad L_B(q')\leqslant L_B(q,\ \ \varepsilon\sigma^2/6)+O|\log\varepsilon\sigma^2|,$

замечаем, что при $x\in I$

$$|1/q-1/q'|\leqslant(|q'|-|q|)/|q'\|q|\leqslant(|q'|-|q|)\sigma^{-2}\leqslant\varepsilon/2,$$

и приближаем $1/q'$ с точностью $\varepsilon/2$). Оценим теперь $L_B(1/x,\ \varepsilon)$ для $1/x\in$ $\in C[a_0,\ b_0]$, $0<a_0<b_0$. Сделаем это с помощью известной итерационной последовательности

$$g_{n+1}(x)=2g_n(x)-xg_n^2(x),\quad g_1(x)=2^{-k},\quad 2^{-k}\leqslant b_0^{-1}<2^{-k+1}.$$

Положим $\delta_n(x)=1/x-g_n(x)$, тогда при $x\in[a_0,\ b_0]$

$$0\leqslant x\delta_1(x)\leqslant 1-2^{-k}a_0,$$
$$\delta_{n+1}(x)=1/x-g_{n+1}(x)=x(1/x-g_n(x))^2=x(\delta_n(x))^2,$$

откуда

$$\delta_{n+1}(x)\leqslant x(\delta_1(x))^{2^{n-1}}\delta_1(x)<\left(1-2^{-k}a_0\right)^{2^{n-1}}/x<\left(1-2^{-k}a_0\right)^{2^{n-1}}/a_0.$$

Поэтому при некотором $n=\log\log(1/\varepsilon)+O_{a_0}(1)$ получаем, что для $x\in$ $\in[a_0,\ b_0]$ $|\delta_n(x)|\leqslant\varepsilon$, значит,

$$L_B(1/x,\ \varepsilon)\leqslant L_B(g_n)\leqslant O(n)+O_{b_0}(1)\leqslant O(\log\log(1/\varepsilon))+O_{a_0,b_0}(1).$$

Применяя это неравенство и лемму 4 для оценки $L_B(p,\ \sigma\varepsilon/2)$ и $L_B(q,\ \varepsilon\sigma^2/6)$ и суммируя полученные оценки, получаем, что

$$L_B(f,\ \varepsilon)\leqslant O(d(\log(1/\varepsilon))\log\log(1/\varepsilon))+O_f(1).\ \square$$

Суммируя полученные оценки, получаем оценку теоремы. $\square$

Замечание 7. Согласно лемме 40 для любой рациональной функции f справедлива оценка $L_B(f, \varepsilon) \preccurlyeq (\log(1/\varepsilon))/\log\log(1/\varepsilon)$.

Если все коэффициенты функции f двоично-рациональны, то справедлива даже оценка $L_B(f, \varepsilon) \preccurlyeq \log\log(1/\varepsilon)$, но в общем случае улучшить предыдущую оценку нельзя, так как уже для некоторых констант f бывает справедлива оценка $L_B(f, \varepsilon) \succcurlyeq (\log(1/\varepsilon))/\log\log(1/\varepsilon)$.

В случае же базиса $B = \{x+y, xy\} \cup \mathbb{R}$ для любой рациональной функции f все же $L_B(f, \varepsilon) \preccurlyeq \log\log(1/\varepsilon)$, и улучшить порядок в этой оценке, вообще говоря, нельзя, так как из известной теоремы С. Н. Бернштейна о конструктивной характеристике аналитических функции (см. [39] или [44]) следует, что $\infty > \overline{\lim}(E_n(f))^{1/n} > 0$, откуда с помощью леммы 17 получаем, что $\infty > \overline{\lim}\, \tilde{L}_B(f, \varepsilon)/\log(1/\varepsilon) > 0$, и вообще для любого почти-конечного полиномиального базиса B справедлива оценка

$$\overline{\lim}\, D_B(f, \varepsilon)/\log\log(1/\varepsilon) > 0.$$

Если f кусочно аналитическая, то справедливо неравенство

$$\log(1/\varepsilon) \preccurlyeq D_B(f, \varepsilon) \leqslant L_B(f, \varepsilon) \preccurlyeq \log(1/\varepsilon).$$

Верхняя оценка доказывается подобно теореме 4. Нижняя оценка: пусть r — такое минимальное число, что $D^r f$ имеет разрывы первого рода; тогда из одной теоремы С. М. Никольского (см. [39, п. 7.3.2] или [32]) следует, что $E_n(f) \asymp n^{-r}$, откуда с помощью леммы 17 получается нужная нам оценка, а в случае $B = \{x+y, xy\} \cup \mathbb{R}$ — равенство

$$\tilde{L}_B(f, \varepsilon) \asymp \varepsilon^{-1/r}.$$

Если же f — аналитическая функция, то из упоминавшейся теоремы С. Н. Бернштейна и леммы 3 в случае $B = \{x+y, xy\} \cup \mathbb{R}$ следует оценка

$$\tilde{L}_B(f, \varepsilon) \preccurlyeq \log(1/\varepsilon),$$

причем существует аналитическая функция $f \in C(I)$ такая, что

$$\log(1/\varepsilon) \asymp \tilde{L}_B(f, \varepsilon).$$

В случае, когда f — кусочно-линейная функция, в качестве r можно взять 1, и все предыдущие утверждения можно доказать без использования леммы 40, а вместо теоремы С. М. Никольского использовать теорему С. Н. Бернштейна о приближении $|x|$ полиномами (см. [19]).

В случае базиса $B = \{x-y, xy, 1/x\} \cup \mathbb{R}$ с помощью результатов [7, 17] и лемм 3, 14 для любой кусочно-аналитической функции f можно получить равенства

$$\tilde{L}_B(f, \varepsilon) \asymp (\log\varepsilon)^2 \quad \text{и} \quad D_B(f, \varepsilon) = 2\log\log(1/\varepsilon) + O_f(1),$$

причем нижние оценки справедливы для любой кусочно бесконечно-дифференцируемой функции f и любого жегалкинского базиса B.

§ 5. Верхние оценки функций Шеннона для классов W. Формулировки результатов и леммы о грубом приближении. Доказательство теоремы 7

Пусть W_i — любой из классов $W_i(r, r', M, N, I^n)$, где $0 \in I^n$, r, r', M, N, I^n фиксированы, а число ε стремится к нулю. Тогда справедливы следующие теоремы (в оценках которых с целью простоты записи зависимость констант в знаках $\preccurlyeq, \asymp, O$ от различных параметров класса W_i не отмечается).

Теорема 5. *Для базисов $B = \{x(\pm)y,\ xy,\ (\mp)1/2\}$ справедлива оценка*

$$L_B(W_i, \varepsilon) \asymp H_\varepsilon(W_i)/\log H_\varepsilon(W_i).$$

Теорема 6. *Для базисов* $B=\{x(\pm)y,\ xy,\ |x|,\ (\mp)1/2\}$ *справедлива оценка*

$$\text{(i)}\qquad \tilde{L}_B(W_i,\ \varepsilon)\asymp H_\varepsilon(W_i).$$

Для базисов $B=\{x-y,\ xy,\ |x|\}\cup[0,\ 1]$ или $\{x+y,\ xy,\ |x|\}\cup[-1,\ 1]$ *справедливы оценки*

$$\text{(ii)}\qquad \sqrt{H_\varepsilon(W_i)}\preccurlyeq\tilde{L}_B(W_i,\ \varepsilon)\preccurlyeq H_\varepsilon(W_i)/\log H_\varepsilon(W_i).$$

Для базисов $B=\{x(\pm)y,\ xy\}\cup\mathbb{R}$ *или* $\{x(\pm)y,\ xy,\ 1/x\}\cup\mathbb{R}$ *справедливы оценки*

$$\text{(iii)}\qquad H_\varepsilon(W_i)/\log H_\varepsilon(W_i)\preccurlyeq\tilde{L}_B(W_i,\ \varepsilon)\preccurlyeq H_\varepsilon(W_i),$$

а в случае $n=1$ — *равенство*

$$\text{(iv)}\qquad \tilde{L}_B(W_i,\ \varepsilon)\asymp H_\varepsilon(W_i).$$

Теорема 7. *Для базисов* $B=\{x(\pm)y,\ xy,\ |x|\}\cup\mathbb{R}$ *или* $\left\{x(\pm)y,\ xy,\ \begin{smallmatrix}\cos\\(\sin)\end{smallmatrix}x\right\}\cup\mathbb{R}$ *справедлива оценка*

$$\text{(i)}\qquad D_B(W_i,\ \varepsilon)\leqslant\log H_\varepsilon(W_i)+O(1).$$

Для базиса $B=\{x+y,\ xy\}\cup\mathbb{R}$ *справедливы оценки*

(ii)

$$\log H_\varepsilon(W_i)-O(\log\log H_\varepsilon(W_i))\leqslant D_B(W_i,\ \varepsilon)\leqslant\log H_\varepsilon(W_i)+$$
$$+O\left(\sqrt{\log H_\varepsilon(W_i)}\right)+O(1),$$

причем в случае $n=1$ *справедлива оценка*

$$\text{(iii)}\qquad D_B(W_i,\ \varepsilon)\geqslant\log H_\varepsilon(W_i)-O(1).$$

Для базисов $B=\{x-y,\ 1/x\}\cup\mathbb{R}$ *или* $\{x(\pm)y,\ xy,\ 1/x\}\cup\mathbb{R}$ *справедлива нижняя оценка из* (ii) *и верхняя оценка*

$$\text{(iv)}\qquad D_B(W_i,\ \varepsilon)\leqslant\log H_\varepsilon(W_i)+O(\log\log H_\varepsilon(W_i))+O(1),$$

причем в случае $n=1$ *справедлива оценка* (iii).

(v) *Для базисов* $B=\{x-y,\ 1/x,\ 1/2\}$, $\{x(\pm)y,\ xy,\ |x|,\ (\mp)1/2\}$, $\left\{x(\pm)y,\ xy,\ \begin{smallmatrix}\cos\\(\sin)\end{smallmatrix}x,(\mp)1/2\right\}$ *справедливы оценки* (iii) *и* (iv).

В теоремах 5—7 достаточно доказать лишь верхние оценки. Нижняя оценка теоремы 6 (iv) будет следовать из теоремы 9 § 9, оценка теоремы 7 (iv) в случае $n=1$ следует из леммы 14 § 3 и теоремы 6 (iv), а остальные оценки вытекают из соответствующих теорем § 3.

В случае $i=r=n=1$ оценка теоремы 5 будет усилена в § 8 до асимптотически точной. В [12] теорема 5 была доказана для классов W_1, $n\geqslant 2$, и базиса $\{x+y,\ xy,\ |x|,\ -1/2\}$, а в [10] — для классов W_1, $n=1$. Теорема 6 (i) для классов W_1, $n>1$, доказана в [12], а в случае $n=1$ — в [11].

Далее понадобятся следующие леммы.

Лемма 41 [38]. *Пусть* $e_{j,r,h,a}(x)$ — *сплайн степени* r, *совпадающий на каждом отрезке* $[kh+(r-1)h/2,\ kh+(r+1)h/2]$, $k\in\mathbb{Z}$, *с некоторым полиномом степени* r, *имеющий непрерывную на* $\mathbb{R}$ *производную* $D^{r-1}e_{j,r,h,a}(x)$, *и такой, что* $e_{j,r,h,a}(kh)=\delta_{j,k}=\begin{cases}1, & j=k,\\ 0, & j\neq k\end{cases}$ *при* $|k|\leqslant a/h$, *и r-е разности* $\Delta_h^r(e_{j,r,h,a}, kh)$ *не зависят от k при $k \geqslant a/h$ и при $k \leqslant -a/h$. Тогда*

$$e_{j,r,h,a}(x) = p_{j,r,h,a}(x) + \sum_{k,|\xi+kh|\leqslant a} b_{j,r,h,a} \max(0, \xi + kh + x)^r,$$

где $\xi = \begin{cases} h/2, & \text{если } r \text{ четно,} \\ 0, & \text{если } r \text{ нечетно,}\end{cases}$ $|b_{j,r,h,a}| \leqslant O_r(h^{-r})$, $p_{j,r,h,a}(x)$ *— полином степени r, у которого все коэффициенты равны $O_r(h^r)$,*

$$\|e_{j,r,h,a}(x)\|_{C[-a,a]} \leqslant O_r(1), \|D^r e_{j,r,h,a}(x)\|_{C[-a,a]} \leqslant O_r(h^{-r}).$$

Почти все утверждения леммы доказаны в [38] (см. в гл. 3 теорему 1, формулу (18), теорему 3, формулу (23)), а остальные следуют из них с помощью леммы 1. □

Далее вместо $[-a, a]$ пишем I. Пусть $S_{r,h,a}$ — линейный сплайн-оператор $C(I) \to C(I)$, определяемый равенством

$$S_{r,h,a}(f) = \sum_{j,|j|\leqslant a/h} f(jh)\, e_{j,r,h,a}.$$

Лемма 42 [37, 39].

(i) $\|S_{r,h,a}\| \leqslant O_r(1)$,

(ii) $\|D^l f - D^l S_{r,h,a}\|_{C(I)} \leqslant O_r(\omega_{r-l}(D^l f, h))$,

(iii) $\|D^k S_{r,h,a}\|_{C(I)} \leqslant O_r(\omega_k(f, h) h^{-k})$, $k \leqslant r$,

(iv) $\omega_k(D^l S_{r,h,a}(f), \tau) \leqslant O_r(\omega_k(D^l f, \tau))$, $l + k \leqslant r$, $\tau > 0$.

Доказательство. Утверждение (i) вытекает из теоремы 2 и 3 [38], если рассмотреть $\|S_{r,h,a}(f)\|/\|f\|$ для кусочно-линейных $f(x)$ с узлами в точках kh, $|k| \leqslant a/h$, $k \in \mathbb{Z}$. Утверждение (iii) следует из теоремы 3 той же главы. Утверждение (ii) следует из теоремы 1 [37]. При $\tau \leqslant h$

$$\omega_k(D^l S_{r,h,a}(f), \tau) \leqslant \tau^k \|D^{k+l} S_{r,h,a}(f)\| \leqslant O_r(\tau^{-l}(\tau/h)^{k+l}\omega_{k+l}(f, h)) \leqslant$$
$$\leqslant O_r(\tau^{-l}\omega_{k+l}(f, \tau)) \leqslant O_r(\omega_k(D^l f, \tau))$$

согласно (iii), а при $\tau > h$

$$\omega_k(D^l S_{r,h,a}(f), \tau) \leqslant \omega_k(D^l f, \tau) + \omega_k(D^l(S - f), \tau) \leqslant \omega_k(D^l f, \tau) +$$
$$+ O_r(\|D^l(S_{r,h,a} - f)\|) \leqslant \omega_k(D^l f, \tau) + O_r(\omega_{r-l}(D^l f, h)) \leqslant$$
$$\leqslant \omega_k(D^l f, \tau) + O_r(\omega_k(D^l f, h)) \leqslant O_r(\omega_k(D^l k, \tau))$$

согласно (ii), т. е. (iv) следует из (ii) и (iii). □

Лемма 43. *Для любого алгебраического полинома $p(x)$ степени d и $k \leqslant d$*

$$\|D^k p\|_{C(I)} \leqslant O_{k,d}(|I|^{-k}\|P\|_{C(I)}).$$

Лемма следует из леммы 1. Точное неравенство доказано В. А. Марковым.

Лемма 44. *Для базиса $B = \{x - y,\ 1/x,\ 1/2\}$ и полинома $p(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$, где a_i двоично-рациональны, справедливы оценки*

$$\widetilde{L}(p) \leqslant O(d^2 (\log d)^{O(1)} + d \max_i \widetilde{L}_B(a_i)), \quad D_B(p) \leqslant O\left(\max_i D_B(a_i) + \log d\right).$$

Для доказательства заметим, что

$$D_B(x_1 + \ldots + x_n) \leqslant \log n + O(1), \quad D_B(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n) \leqslant O(\log n),$$
$$\widetilde{L}_B(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n) \leqslant O(n^{O(1)}), \ x^2 = 1/4 + 1/((x - 1/2)^{-1} - (x + 1/2)^{-1}),$$

по индукции получим, что $\widetilde{L}_B(x^{2^k}) \leqslant Q(2^k)$, откуда, применив двоичное разложение n, выводим, что $\widetilde{L}_B(x^n) \leqslant O(n(\log n)^{O(1)})$, и в заключение применим оценку $\widetilde{L}_B(f_1 g_1 + \ldots + f_n g_n) \leqslant Q\left(\sum_{i=1}^{n} (\widetilde{L}_B(f_i) + \widetilde{L}_B(g_i))\right)$. □

Лемма 45. *Для любого B, упомянутого в теореме 7, и $a\in\mathbb{R}_+$ при $a/\varepsilon\to\infty$ и $|x|\leqslant a$* $D_B(x,\varepsilon)\leqslant O(\log\max(\log(a/\varepsilon),\ 1+|\log a|))$,

$$\tilde{L}_B(x,\ \varepsilon)\leqslant O((\log(a/\varepsilon)^{o(1)})+O(|\log a|^{o(1)}).$$

Лемма вытекает из предыдущей. □

Лемма 46 (модификация теоремы Ньюмена). *Для любого n найдется рациональная функция $r_n(x)$ степени n такая, что при $|x|\leqslant 1$*

$$\max\left(0,\ |x|-e^{-c\sqrt{n}}\right)\leqslant r_n(x)\leqslant|x|,$$

а для базиса B из леммы 45

$$\tilde{L}_B(r_n(x))\leqslant O(n^{o(1)}),\ D_B(r_n(x))\leqslant O(\log n).$$

Доказательство. Следуя [19] или [44], положим

$$r_n(x)=x\,\frac{p(x)-p(-x)}{p(x)+p(-x)},\ \text{где}\ p(x)=\prod_{k=0}^{n-1}(x+a^k),$$

но в качестве a вместо $e^{-1/\sqrt{n}}$ возьмем $1-2^{-m}$, где $m=\left[\log\sqrt{n}\right]$. Повторяя рассуждения из [19, с. 139—141], получаем первое неравенство леммы. Остальные вытекают из леммы 44 и оценок, приведенных в ее доказательстве. □

Лемма 47 [38]. *Для любых $f(\mathbf{x})\in C(I^n)$, $I^n=I(-\mathbf{a},\ \mathbf{a})$, $\mathbf{a}\in\mathbb{R}_+^n$, $\mathbf{r}\in\mathbb{N}^n$, $\mathbf{h}\in\mathbb{R}_+^n$, $\mathbf{h}\leqslant\mathbf{a}\times\mathbf{a}_{\|\mathbf{r}\|}$,* можно построить гладкий интерполяционный сплайн $g(x)$ такой, что при $k_i+l_i\leqslant r_i$

$$\|f-g\|\leqslant c_{\|\mathbf{r}\|}^n\sum_{i=1}^n\omega_{i,r_i}(f,\ h_i),\quad \omega_{i,k_i}\left(D_i^{l_i}g,\ \tau\right)\leqslant O_{\|\mathbf{r}\|}\left(\omega_{i,k_i}\left(D_i^{l_i}f,\ \tau\right)\right).$$

Доказательство. Положим $g=S_{\mathbf{r},\mathbf{h},\mathbf{a}}$, где

$$S_{\mathbf{r},\mathbf{h},\mathbf{a}}=S_n\cdot\ldots\cdot S_1,\quad S_i=S_{r_i,h_i,a_i}$$

— сплайн-операторы по переменным x_i, определенные перед леммой 42. Первое неравенство леммы доказывается индукцией по n аналогично теореме 4 гл. 3 [38] (и леммам 8, 10, 11 § 2) с помощью леммы 42 (ii) одновременно со вторым неравенством, которое проверяется с помощью леммы 42 (i), (iv), учитывая перестановочность операторов S_j, D_i, Δ_i и S_j при $i\neq j$ и операторов Δ_i, D_i. □

Для любых $f(\mathbf{x})\in C(I^n)$, $I^n=I(-\mathbf{a},\ \mathbf{a})$, $\mathbf{a}\in\mathbb{R}_+^n$, $\mathbf{r}\in\mathbb{N}^n$, $\varepsilon>0$ определим $\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon)$ равенством

$$\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon)=|I^n|\Big/\prod_{i=1}^n\omega_{i,r_i}^{-1}(f,\ \varepsilon),\ \text{где}\ \omega_{i,r_i}^{-1}(f,\ \varepsilon)=\max\{\tau\colon\ \omega_{i,r_i}(f,\ \tau)=\varepsilon\}.$$

Лемма 48. *Для любого $c>2^{\|\mathbf{r}\|}$*

(i) $\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon)\geqslant c^{n/\rho}2^{-n}\lambda_{\mathbf{r},f}(c\varepsilon)$,

(ii) $\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon)\geqslant 2^{-n}\left(\prod_{i=1}^n\left(\omega_{i,r_i}(f,\ |I_i|/r_i)\right)^{1/r_i}\right)\varepsilon^{-n/\rho}$.

Доказательство. Достаточно проверить, что

$$\omega_{i,r_i}^{-1}(f,\ c\varepsilon)\geqslant 2^{-1}c^{1/r_i}\omega_{i,r_i}^{-1}(f,\ \varepsilon),\quad \omega_{i,r_i}^{-1}(f,\ \varepsilon)\leqslant\frac{2\,|I_i|\,\varepsilon^{1/r_i}}{r_i\left(\omega_{i,r_i}(f,\ |I_i|/r_i)\right)^{1/r_i}},$$

а это следует из неравенств

$$\omega_r\left(2^{-1}c^{1/r}\tau\right)\leqslant c\omega_r(\tau),\ c>2^r,\ \omega_r(\tau)\geqslant\tau^r\omega_r(|I|/r)\left(r/2|I|\right)^r,\quad 0\leqslant\tau\leqslant\frac{|I|}{r}.\ \square$$

Обозначим $\sum_{i=1}^{n} \omega_{i,r_i}(f, |I_i|/r_i)$ через $\omega_\Sigma(f)$, $\min_i \omega_{i,r_i}(f, |I_i|/r_i)$ — через $\omega_m(f)$, $\min_i |I_i|^{-r_i}\omega_{i,r_i}(f, |I_i|/r_i)$ — через $\omega_I(f)$.

Лемма 49. (i) *Для любых* $\mathbf{f} \in C(I^n)$, $\mathbf{r} \in \mathbb{N}^n$, $\varepsilon < \min\left\{1, \frac{\omega_m(\mathbf{f})}{c_{\|\mathbf{r}\|}}, \frac{\omega_I(\mathbf{f})}{c_{\|\mathbf{r}\|}}, \frac{\|\mathbf{f}\|}{4}\right\}$ *найдется* $g(\mathbf{x}) \in C(I^n)$ *такая, что* $\|f-g\| \leqslant \varepsilon$, *при любых* i, τ, $\mathbf{k}$, $\mathbf{k} \leqslant \mathbf{r}$,

$$\omega_{i,k_i}(g, \tau) \leqslant c_{\|\mathbf{r}\|}^{n}\omega_{i,k_i}(f, \tau),$$

и для любого $\delta \in (0, 1)$ *и* $B = \{x-y,\ xy,\ 1/2\}$

$$L_B(g, \delta) \leqslant \lambda_{\mathbf{r},f}(c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\varepsilon)\left(\log \lambda_{\mathbf{r},f}(c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\varepsilon)/\delta + \log(\omega_\Sigma(f)+1) + O_{\mathbf{r},I}(1)\right) + \\ + c_{\|\mathbf{r}\|}^{n}(\log(\|f\|/\delta)/\log\log(\|f\|/\delta).$$

(ii) *Для* $B = \{x-y,\ xy,\ |x|,\ 1/2\}$ *справедлив аналог* (i) *с оценкой*

$$\widetilde{L}_B(g, \delta) \leqslant \lambda_{\mathbf{r},f}(c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\varepsilon)\left(\log(\lambda_{\mathbf{r},f}(c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\varepsilon)/\delta) + \log(\omega_\Sigma(f)+1) + O_{\mathbf{r},I}(1)\right) + \\ + c_{\|\mathbf{r}\|}^{n}\log(\|f\|/\delta).$$

(iii) *Для* $B = \{x-y,\ 1/x,\ 1/2\}$ *справедлив аналог* (i) *с оценками*

$$\widetilde{L}_B(g, \delta) \leqslant \lambda_{\mathbf{r},f}(c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\varepsilon)\left(\log \lambda_{\mathbf{r},f}(c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\varepsilon)/\delta + \log(\omega_\Sigma(f)+1) + O_{\mathbf{r},i}(1)\right)^{O(1)} + \\ + c_{\|\mathbf{r}\|}^{n}(\log(\|f\| + \omega_\Sigma(f)+1)/\delta)^{O(1)},$$

$$D_B(g, \delta) \leqslant \max\left(\log \lambda_{\mathbf{r},f}(c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\varepsilon) + O\left(\log\max\left(\log(\lambda_{\mathbf{r},f}(c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\varepsilon)/\delta), O_{\mathbf{r},I}(1),\right.\right.\right. \\ \left.\left.\left.\log(\omega_\Sigma(f)+1)\,c_{\|\mathbf{r}\|}^{n}\right)\right), nc_{\|\mathbf{r}\|} + O_I(1) + O(\log\log\|f\|/\varepsilon)\right),$$

причем последняя оценка справедлива также для $B = \{x-y,\ xy,\ |x|,\ 1/2\}$.

(iv) *Для* $B = \{x-y,\ xy,\ |x|\} \cup \mathbb{R}$ *справедлив аналог* (i) *с оценкой*

$$D_B(g, \delta) \leqslant \log(\lambda_{\mathbf{r},f}(c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\varepsilon)).$$

Доказательство. Применим лемму 47 при $h_i = c_i\omega_{i,r_i}^{-1}(c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\varepsilon) < \alpha_{\|\mathbf{r}\|}a_i$, где c_i и $c_{\|\mathbf{r}\|}$ выбраны так, чтобы

$$1/2 \leqslant c_i \leqslant 1,\quad h_i = 2^{-m_i},\quad m_i \in \mathbb{N},\quad 1 \leqslant i \leqslant n,\quad \lambda_{\mathbf{r},f}(c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\varepsilon) \geqslant c_{\|\mathbf{r}\|},$$

и сплайн $g(\mathbf{x}) = S_{\mathbf{r},\mathbf{h},\mathbf{a}}(f) = \sum_{\mathbf{j},-\mathbf{a}\leqslant\mathbf{j}\times\mathbf{h}\leqslant\mathbf{a}} f(\mathbf{j}\times\mathbf{h})\,e_{\mathbf{r},\mathbf{j},\mathbf{h},\mathbf{a}}$ удовлетворял бы неравенствам

$$\|f-g\| \leqslant \varepsilon,\ \omega_{i,k_i}(g, \tau) \leqslant c_{\|\mathbf{r}\|}^{n}\,\omega_{i,k_i}(f, \tau).$$

Подставим в формулу для $g(\mathbf{x})$ выражение из леммы 41, раскроем скобки и, изменив порядок суммирования, получим, что

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k},-\mathbf{a}+\boldsymbol{\xi}\leqslant\mathbf{k}\times\mathbf{h}\leqslant\mathbf{a}-\boldsymbol{\xi}+1} \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\,p_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}),\ \text{ где } \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \varphi_{k_1}(x_1)\cdot\ldots\cdot\varphi_{k_n}(x_n),$$

$$\varphi_{k_i}(x_i) = \begin{cases} \max(0, x_i + k_ih_i + \xi_i)^{r_i}, & \text{если } |k_ih_i + \xi_i| \leqslant a_i, \\ 1, \ \text{если } k_i = 1 + (a_i - \xi_i)/h_i,\ \xi_i = \begin{cases} h_i/2, & \text{если } r_i \text{ четно}, \\ 0 & \text{в противном случае}, \end{cases} \end{cases}$$

$$p_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{j},-\mathbf{a}\leqslant\mathbf{j}\times\mathbf{h}\leqslant\mathbf{a}} f(\mathbf{j}\times\mathbf{h}) \prod_{i,|k_ih_i+\xi_i|<a_i} b_{k_ij_i} \prod_{i,k_i=1+(a_i-\xi_i)/h_i} p_{j_i}(x_i).$$

Из леммы 41 следует, что коэффициенты полинома $p_k(x)$ по модулю меньше

$$\frac{2^n \|f\| |I^n|}{h_1 \ldots h_n} c^n_{\|\mathbf{r}\|} \prod_{i=1}^n h_i^{-r_i} \leqslant \|f\| c^n_{\|\mathbf{r}\|} |I^n|^{-\|\mathbf{r}} \left(\lambda_{\mathbf{r},f}\left(c^{-n}_{\|\mathbf{r}\|}\varepsilon\right)\right)^{1+\|\mathbf{r}\|},$$

значит,

$$\|p_{\mathbf{k}}\|_{C(I^n)} \leqslant c_I^{\|\mathbf{r}\|} \|f\| \left(\lambda_{\mathbf{r},f}\left(c^{-n}_{\|\mathbf{r}\|}\varepsilon\right)\right)^{1+\|\mathbf{r}\|}.$$

Из леммы 2 при $\sigma < 1$ следует, что

$$\widetilde{L}_B(p_{\mathbf{k}}, \sigma) \leqslant c^n_{\|\mathbf{r}\|}\left(\log\left(\lambda_{\mathbf{r},f}\left(c^{-n}_{\|\mathbf{r}\|}\varepsilon\right)(\|f\|+1)/\sigma\right) + O_I(1)\right),$$
$$D_B(p_{\mathbf{k}}, \sigma) \leqslant O\left(\log\log\left(\lambda_{\mathbf{r},f}\left(c^{-n}_{\|\mathbf{r}\|}\varepsilon\right)(\|f\|+1)/\sigma\right)\right) + nO_{\|\mathbf{r}\|}(1) + O_I(1).$$

Положив $\sigma = \delta h_1 \ldots h_n \Big/ \left(2^{n+|\mathbf{r}|} |I^n| \prod_{i=1}^n (\max(|I_i|, 1))^{r_i}\right)$ и $B = \{x - y, xy, |x|, 1/2\}$, и учитывая, что

$$\widetilde{L}_B(\varphi_{\mathbf{k}}) \leqslant O\left(\log\left(\lambda_{\mathbf{r},f}\left(c^{-n}_{\|\mathbf{r}\|}\varepsilon\right)\right) + |\mathbf{r}|\right) + O_I(1),$$
$$D_B(\varphi_{\mathbf{k}}) \leqslant O\left(\log\log\left(\lambda_{\mathbf{r},f}\left(c^{-n}_{\|\mathbf{r}\|}\varepsilon\right)\right)\right) + \log|\mathbf{r}| + O_I(1),$$

получаем, применяя лемму 48, неравенства

$$\widetilde{L}_B(g, \sigma) \leqslant \left(2^n |I^n|/h_1 \ldots h_n\right)\left(\max_{\mathbf{k}}\left(\widetilde{L}_B(p_{\mathbf{k}}, \sigma) + \widetilde{L}_B(\varphi_{\mathbf{k}})\right)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \lambda_{\mathbf{r},f}\left(c^{-n}_{\|\mathbf{r}\|}\varepsilon\right)\left(\log\left(\lambda_{\mathbf{r},f}\left(c^{-n}_{\|\mathbf{r}\|}\varepsilon\right)(\|f\|+1)/\sigma\right) + O_I(1)\right),$$
$$D_B(g, \delta) \leqslant 1 + \log\left(2^n |I^n|/h_1 \ldots h_n\right) + \max_{\mathbf{k}}\left(D_B(p_{\mathbf{k}}, \sigma), D_B(\varphi_{\mathbf{k}})\right) \leqslant$$
$$\leqslant \log \lambda_{\mathbf{r},f}\left(c^{-n}_{\|\mathbf{r}\|}\varepsilon\right) + O\left(\log\log\left(\lambda_{\mathbf{r},f}\left(c^{-n}_{\|\mathbf{r}\|}\varepsilon\right)(\|f\|+1)/\delta\right)\right) + nO_{\|\mathbf{r}\|}(1) + O_I(1).$$

Пусть теперь $B = \{x - y, xy, 1/2\}$, σ вдвое меньше, чем раньше, $p_{\mathbf{k},\sigma}$ — полином такой, что

$$\widetilde{L}_B(p_{\mathbf{k},\sigma}) = \widetilde{L}_B(p_{\mathbf{k}}, \sigma), \quad \|p_{\mathbf{k}} - p_{\mathbf{k},\sigma}\|_{C(I^n)} \leqslant \sigma.$$

Положим

$$\eta = \sigma \Big/ \left(n \max_{\mathbf{k}} \|p_{\mathbf{k}}\|_{C(I^n)}\right) \geqslant \delta \Big/ \left(c_I^{\|\mathbf{r}\|} \|f\| \left(\lambda_{\mathbf{r},f}\left(c^{-n}_{\|\mathbf{r}\|}\varepsilon\right)\right)^{1+\|\mathbf{r}\|}\right)$$

и выберем с помощью леммы 38 полиномы $q_\eta(x)$ так, чтобы $-\eta \leqslant q_\eta(x) \leqslant \leqslant 0$ при $-2 \leqslant x \leqslant 0$, $x - \eta \leqslant q_\eta(x) \leqslant x$ при $0 \leqslant x \leqslant 2$,

$$L_B(q_\eta(x)) \leqslant O(\log(1/\eta)) \leqslant c_{\|\mathbf{r}\|}\left(\log\left(\lambda_{\mathbf{r},f}\left(c^{-n}_{\|\mathbf{r}\|}\varepsilon\right)(\|f\|+1)/\sigma\right) + O_I(1)\right).$$

С помощью неравенства

$$\left|\prod_{i=1}^n (x_i + y_i) - \prod_{i=1}^n x_i\right| \leqslant \|\mathbf{y}\| \sum_{i=1}^n \prod_{j=1, j\neq i}^n \max(|x_j + y_j|, |x_j|)$$

получим, что

$$\left\|\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) - \prod_{i=1}^n q_\eta^{r_i}(x_i + k_i h_i + \xi_i)\right\|_{C(I^n)} \leqslant 2^{|\mathbf{r}|} n\eta,$$

значит, для полинома g_σ, равного

$$\sum_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k},\sigma} \prod_{i=1}^n q_\eta^{r_i}(x_i + k_i h_i + \xi_i),$$

справедливо неравенство

$$\|g-g_\sigma\|_{C(I^n)}\leqslant\left\|g-\sum_{\mathbf{k}}p_{\mathbf{k}}\prod_{i=1}^{n}q_\eta^{r_i}(x_i+k_ih_i+\xi_i)\right\|+2^{|\mathbf{r}|}\sum_{\mathbf{k}}\|p_{\mathbf{k}}-p_{\mathbf{k},\sigma}\|\leqslant$$
$$\leqslant\left(\sigma+n\eta\max_{\mathbf{k}}\|p_{\mathbf{k}}\|_{C(I^n)}\right)2^{|\mathbf{r}|+n}|I^n|/h_1\ldots h_n\leqslant\delta.$$

Поэтому

$$L_B(g,\sigma)\leqslant L_B(g_\sigma)\leqslant\frac{2^n|I^n|}{h_1\ldots h_n}\left(\max_{\mathbf{k}}\widetilde{L}_B(p_{\mathbf{k},\sigma})+nL_B(q_\eta)+O\left(\log\frac{2^n|I^n|}{h_1\ldots h_n}\right)+\right.$$
$$\left.+nO_{\|\mathbf{r}\|}(1)\right)\leqslant\lambda_{\mathbf{r},f}\left(c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\varepsilon\right)\left(\log\left(\lambda_{\mathbf{r},f}\left(c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\varepsilon\right)(\|f\|+1)/\sigma\right)+O_I(1)\right).$$

Применив лемму 8, можно считать, что

$$\|f\|\leqslant O\left(2^{|\mathbf{r}|}\right)\sum_{i=1}^{n}\omega_{i,r_i}(f,|I_i|/r_i),$$

тогда из полученных оценок для $\widetilde{L}_B(g,\delta)$, $L_B(g,\delta)$, $D_B(g,\delta)$ следуют утверждения (i) и (ii), а также часть утверждения (iii). Остальные утверждения п. (iii) доказываются аналогично, только вместо леммы 38 применяется лемма 46. Утверждение (iv) следует непосредственно из формулы $g(\mathbf{x})=\sum\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})p_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$, леммы 48 и оценок

$$D_B(\varphi_{\mathbf{k}})\leqslant\log|\mathbf{r}|+O(1),\quad D_B(p_{\mathbf{k}})\leqslant nc_{\|\mathbf{r}\|}.\ \square$$

Лемма 50. (i) *Для любых* $f(\mathbf{x})\in C(I^n)$, $\mathbf{r}\in\mathbb{N}^n$, $\varepsilon<\min\{\|f\|/4,\ c\omega_m(f)\}$ *найдется алгебраический полином* $p(\mathbf{x})\in C(I^n)$ *такой, что* $\|f-p\|_{C(I^n)}\leqslant\varepsilon$, *для любых* τ, i, $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}\leqslant\mathbf{r}$,

$$\omega_{i,k_i}(p,\tau)\leqslant c_{\|\mathbf{r}\|}^{n}(\omega_\Sigma(f)/\omega_m(f))\,\omega_{i,k_i}(f,\tau),$$

и для любого $\delta<1$ *и базиса* $B=\{x-y,\ xy,\ 1/2\}$

$$L_B(p,\delta)\leqslant\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon/\left(c_{\|\mathbf{r}\|}^{n}\omega_\Sigma(f)/\omega_m(f)\right)\right)\left(\log\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon/\left(c_{\|\mathbf{r}\|}^{n}\omega_\Sigma(f)/\omega_m(f)\right)\right)/\delta+\right.$$
$$\left.+\log(1+\omega_\Sigma(f))+O_{\mathbf{r},I}(1)\right)+c_{\|\mathbf{r}\|}^{n}(\log\|f\|/\delta)/\log\log(\|f\|/\delta).$$

(ii) *Для любого* $\varepsilon<\varepsilon(f)$ *найдется алгебраический полином* $p(x)\in C(I^n)$ *такой, что* $\|f-p\|_{C(I^n)}\leqslant\varepsilon$ *и для базиса* $B=\{x+y,\ xy\}\cup\mathbb{R}$

$$\widetilde{L}_B(p)\leqslant\lambda_{\mathbf{r},f}\left(c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\varepsilon\right),\quad D_B(p)\leqslant\log\lambda_{\mathbf{r},f}\left(c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\varepsilon\right)+O\left(\log\lambda_{r,f}\left(c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\varepsilon\right)\right)^{1/2}.$$

(iii) *Для* $\varepsilon<\min\{\|f\|/4,\ c\omega_m(f)\}$ *и* $B=\{x-y,\ xy,\ \cos x,\ 1/2\}$ *найдется функция* $t(x)$ *такая, что* $\|f-t\|\leqslant\varepsilon$, *для любых* i, τ

$$\omega_{i,r_i}(t,\tau)\leqslant c_{\|\mathbf{r}\|}^{n}(\omega_\Sigma(f)/\omega_m(f))\,\omega_{i,r_i}(f,\tau),$$

и для любого $\delta<1$

$$\widetilde{L}_B(t,\delta)\leqslant\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon/\left(c_{\|\mathbf{r}\|}^{n}\omega_\Sigma(f)/\omega_m(f)\right)\right)\left(\log\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon/\left(c_{\|\mathbf{r}\|}^{n}\omega_\Sigma(f)/\omega_m(f)\right)\right)/\delta+\right.$$
$$\left.+\log(1+\omega_\Sigma(f))+O_{\mathbf{r},I}(1)\right)+c_{\|\mathbf{r}\|}^{n}\log\|f\|/\delta,$$

$$D_B(t,\delta)\leqslant\max\left\{O(\log\log 4\|f\|/\delta),\ \log_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon/\left(c_{\|\mathbf{r}\|}^{n}\omega_\Sigma(f)/\omega(f)\right)\right)+\right.$$
$$\left.+O\left(\log\log\max\left\{\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon/\left(c_{\|\mathbf{r}\|}^{n}\omega_\Sigma(f)/\omega_m(f)\right)\right),\ (1+\omega_\Sigma(f))/\delta\right\}\right)\right\}+nO_{\|\mathbf{r}\|}(1)+O_I(1).$$

Если же $B=\{x-y,\ xy,\ \cos x\}\cup\mathbb{R}$, *то*

$$D_B(t)\leqslant\log\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon/\left(c_{\|\mathbf{r}\|}^{n}\omega_\Sigma(f)/\omega_m(f)\right)\right).$$

Доказательство (i). Применив лемму 5, можно считать, что $I^n=[-\mathbf{a},\ \mathbf{a}]$, где $a_i=2^{m_i}\in\mathbb{Z}$, $1\leqslant i\leqslant n$. Применив к функции $f_1(\mathbf{x})=f(\mathbf{a}\times\mathbf{x})\in C[-1,\ 1]^n$ лемму 11, построим для любого $\mathbf{d}\geqslant\alpha_{\|\mathbf{r}\|}$ полином

$$p_1(\mathbf{x})=\sum_{\mathbf{l}<\mathbf{d}} b_\mathbf{l}\prod_{i=1}^{n} T_{l_i}(x_i/2)$$

такой, что для полинома $p_1(\mathbf{x})=p_1(x_1/a_1,\ \ldots,\ x_n/a_n)$ $\max_\mathbf{l}|b_\mathbf{l}|\leqslant c_{\|\mathbf{r}\|}^n\|f\|$,

$$\|f-p\|=\|f_1-p_1\|\leqslant c_{\|\mathbf{r}\|}^n\sum_{i=1}^{n}\left(d_i^{-r_i}\|f\|+\omega_{i,r_i}(f,\ |I_i|/d_i)\right)\leqslant$$

$$\leqslant c_{\|\mathbf{r}\|}^n(1+\|f\|/\omega_m(f))\sum_{i=1}^{n}\omega_{i,r_i}(f,\ |I_i|/d_i),$$

$$\omega_{i,k_i}(p,\ \tau)=\omega_{i,k_i}(p_1,\ \tau/|I_i|)\leqslant c_{\|\mathbf{r}\|}^n\left(\omega_{i,k_i}(f,\ \tau)+\|f\|(\tau/|I_i|)^{k_i}\right)\leqslant$$

$$\leqslant c_{\|\mathbf{r}\|}^n(1+\|f\|/\omega_m(f))\omega_{i,k_i}(f,\ \tau).$$

Применив предварительно лемму 8, при оценке $L_B(p,\ \delta)$ можно далее считать, что

$$\|f\|\leqslant c_{\|\mathbf{r}\|}^n\omega_\Sigma(f).$$

Выберем d_i так, чтобы

$$\|f-p\|\leqslant\varepsilon\ \text{ и }\ d_1\ \ldots\ d_n\leqslant\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon/\left(c_{\|\mathbf{r}\|}^n\omega_\Sigma(f)/\omega_m(f)\right)\right).$$

Реализуя последовательность $T_\mathbf{l}(\mathbf{x})$ с помощью известного рекуррентного соотношения, получаем при подходящем $c_{\|\mathbf{r}\|}$ оценку

$$L_B\left(\left\{\prod_{i=1}^{n}T_{l_i}(x_i/2a_i):\mathbf{l}\leqslant\mathbf{d}\right\}\right)\leqslant O\left(\sum_{i=1}^{n}d_i+n\prod_{i=1}^{n}(d_i+1)\right)+O_I(1)\leqslant$$

$$\leqslant\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon/\left(c_{\|\mathbf{r}\|}^n\omega_\Sigma(f)/\omega_m(f)\right)\right)+O_I(1).$$

Используя эту оценку, лемму 8 и реализуя константы $b_\mathbf{l}$ с точностью

$$\delta\Big/\prod_{i=1}^{n}(d_i+1)$$

с помощью леммы 2, получаем оценку п. (i).

Докажем п. (ii). Как и в п. (i), с помощью линейной замены переменных выводим из леммы 11 существование такого полинома $p(\mathbf{x})$ степени d_i по переменным x_i, что

$$\|f-p\|_{C(I^n)}\leqslant c_{\|\mathbf{r}\|}^n\sum_{i=1}^{n}\left(d_i^{-2^{r_i-1}}\|f\|+\omega_{i,r_i}(f,\ |I_i|/d_i)\right).$$

При $\varepsilon<\varepsilon(f)$ можно выбрать d_i так, чтобы при подходящем $c_{\|\mathbf{r}\|}$

$$\|f-p\|\leqslant c_{\|\mathbf{r}\|}^n\sum_{i=1}^{n}\omega_{i,r_i}(f,\ |I_i|/d_i)\leqslant\varepsilon,\quad\prod_{i=1}^{n}(d_i+1)\leqslant\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon/c_{\|\mathbf{r}\|}^n\right).$$

Из леммы 3 тогда следуют нужные оценки для $\bar{L}_B(p)$ и $D_B(p)$.

Докажем п. (iii). Как и в п. (i) рассмотрим функцию

$$f_1(\mathbf{x})=f(\mathbf{a}\times\mathbf{x})\in C[-1,\ 1]^n.$$

При $n=1$ продолжим f_1 с помощью леммы 5 на отрезок $[-\pi,\ \pi]$, сгладим с помощью теоремы 2.8 [36], так же, как в лемме 11 (ii), умножим на функцию, равную 1 на $[-1,\ 1]$ и равную 0 вместе со всеми производными порядка не выше r в точках $\pm\pi$, и периодически продолжим с периодом 2π на $\mathbb{R}$. Так же, как в лемме 11 (ii), проверим, что полученная функция g удовлетворяет неравенствам

$$\|g\| \leqslant O_{\mathbf{r}}(\|f\|),\ \|g - f_1\| \leqslant O_{\mathbf{r}}(\omega_{\mathbf{r}}(f, |I|/d)),\ \|D^k g\| \leqslant O_{\mathbf{r}}\left(\|f\| + d^{\mathbf{r}}\omega_k(f, |I|/d)\right),$$

из которых следует, что при $k \leqslant r$

$$\omega_k(g, \tau) \leqslant O_{\mathbf{r}}(\|f\|\tau^k + \omega_k(f, |I|\tau),$$

и с помощью индукции получим, что при любом n найдется g такая, что

$$\|g - f_1\| \leqslant c^n_{\|\mathbf{r}\|}\sum_{i=1}^n \omega_{i,r_i}(f, |I_i|/d_i),$$

$$\omega_{i,\ i}(g, \tau) \leqslant c^n_{\|\mathbf{r}\|}\left(\omega_{i,k_i}(f, |I_i|\tau) + \|f\|\tau^{k_i}\right).$$

Применив к $g(\mathbf{x})$ лемму 10, получаем полином $t_1(\mathbf{x})$ степени d_i по переменным x_i такой, что

$$\|f_1 - t_1\| \leqslant c^n_{\|\mathbf{r}\|}\sum_{i=1}^n\left(d_i^{-r_i}\|f\| + \omega_{i,r_i}(f, |I_i|/d_i)\right),$$

$$\omega_{i,k}(t_1, \tau) \leqslant c^n_{\|\mathbf{r}\|}\left(\omega_{i,k_i}(f, |I_i|\tau) + \|f\|\tau^{k_i}\right).$$

Положив $t(\mathbf{a}\times\mathbf{x}) = t_1(\mathbf{x})$, получаем, что

$$\|f - t\| = \|f_1 - t_1\| \leqslant c^n_{\|\mathbf{r}\|}(1 + \|f\|/\omega_m(f))\sum_{i=1}^n \omega_{i,r_i}(f, |I_i|/d_i),$$

$$\omega_{i,k_i}(t, \tau) \leqslant \omega_{i,}\ (t_1, \tau/|I_i|) \leqslant c^n_{\|\mathbf{r}\|}\left(\omega_{i,k_i}(f, \tau) + \|f\|(\tau/|I_i|)^{k_i}\right).$$

Применяя лемму 8, выбирая d_i так, чтобы $\|f - t\| \leqslant \varepsilon$ и при некотором $c_{\|\mathbf{r}\|}$

$$\prod_{i=1}^n(2d_i + 1) \leqslant \lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon/\left(c^n_{\|\mathbf{r}\|}\omega_\Sigma(f)/\omega_m(f)\right)\right),$$

приближая (с помощью леммы 2) $\sin lx$ с точностью

$$\sigma = \delta/\|f\|c^n_{\|\mathbf{r}\|}\prod_{i=1}^n d_i$$

формулами $\cos(lx + \alpha)$, где $|\alpha - \pi/2| < \sigma$, и с той же точностью — коэффициенты полинома $t(\mathbf{x})$, получаем первые две оценки п. (iii). Последняя оценка получается с помощью леммы 3. □

Доказательство теорем 7 и 6 (iii), (iv). Пусть

$$f \in W_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{M}, N, I^n).$$

Тогда

$$\omega_{i,r_i'}(f, \tau) \leqslant M_i\tau^{r_i},$$

откуда

$$\lambda_{\mathbf{r}',f}(\varepsilon) \leqslant |I^n|\prod_{i=1}^n(M_i/\varepsilon)^{1/r_i} = |I^n|(\mu/\varepsilon)^{n/p}.$$

Поэтому из лемм 49, 50 следует, что при $B = \{x - y,\ xy,\ |x|,\ 1/2\}$ и $\varepsilon < \min\{1, c^{-1}_{\|\mathbf{r}'\|}\min\{M_i|I_i|^{r_i}, M_i\}, N/4\}$ справедливы неравенства

$$D_B(f, \varepsilon) \leqslant \log\lambda_{\mathbf{r}',f}\left(\varepsilon/c^n_{\|\mathbf{r}'\|}\right) \leqslant \log|I^n|(\mu/\varepsilon)^{n/p} + O_{\|\mathbf{r}'\|}(n^2/p),$$

при $B = \{x - y,\ 1/x,\ 1/2\}$, $\{x - y,\ xy,\ |x|,\ 1/2\}$ или $\{x - y,\ xy,\ \cos x,\ 1/2\}$

и $\varepsilon \leqslant N$ — неравенства

$$D_B(f, \varepsilon) \leqslant \max\big(O(\log\log 4N/\varepsilon), \log|I^n|(\mu/\varepsilon)^{n/\rho} + \\ + O\big(\log\log|I^n|(\mu/\varepsilon)^{n/\rho}\big)\big) + O_{I^n,\mathbf{M},\mathbf{r}}(1),$$

при $B = \{x+y, xy\} \cup \mathbb{R}$ и $\varepsilon < \min\left\{N, \min\limits_i M_i\left(\dfrac{\left(\min\limits_i M_i|I_i|^{r_i}\right)^2}{\|M\|\sum\limits_{i=1}^n M_i|I_i|^{r_i}}\right)^{O_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}(1)}\right\}$

неравенства

$$D_B(f, \varepsilon) \leqslant \log|I^n|(\mu/\varepsilon)^{n/\rho} + O\big(\log|I^n|(\mu/\varepsilon)^{n/\rho}\big)^{1/2} + O_{\|\mathbf{r}'\|}(n^2/\rho),$$

$$\widetilde{L}_B(f, \varepsilon) \leqslant c_{\|\mathbf{r}'\|}^{n^2/\rho}|I^n|(\mu/\varepsilon)^{n/\rho},$$

при $B = \{x-y, xy, \cos x, 1/2\} \cup \mathbb{R}$ и $\varepsilon < \min\{N, c\min M_i|I_i|^{r_i}\}$

$$D_B(f, \varepsilon) \leqslant \log|I^n|(\mu/\varepsilon)^{n/\rho} + O_{\|\mathbf{r}'\|}(n^2/\rho) + (n/\rho)\log\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^n M_i|I_i|^{r_i}}{\min\limits_i M_i|I_i|^{r_i}}\right).$$

Если $n=1$, то в случае $f \in W_1(\mathbf{r}, \mathbf{M}, N, I)$ в оценке для $\widetilde{L}_B(f, \varepsilon)$ вместо $c_{\|\mathbf{r}\|}$ можно взять абсолютную константу c, а в оценке для $D_B(f, \varepsilon)$ вместо $O_{\|\mathbf{r}'\|}(n^2/\rho)$ — слагаемое $O(1/r)$. Из полученных оценок и соотношений для $H_\varepsilon(W)$ (см. § 2) следуют теоремы 7 и 6 (iii), (iv). □

§ 6. Приближение лагранжевыми сплайнами. Доказательство теорем 5 и 6 в одномерном случае

Обозначим $e_{r,k,h,a}(x)$ сплайн, который на каждом отрезке $[jh, jh+h]$, где $j \leqslant a/h - r^*$, $r^* = \max(r-1, 1)$, совпадает с полиномом $p_j(x)$ степени r^*, удовлетворяющим равенствам

$$p_j((j+i)h) = \delta_{k,j+i}, \quad 0 \leqslant i \leqslant r^*,$$

а на интервале $(a - r^*h, +\infty)$ совпадает с полиномом $p_{a/h-r^*}(x)$.

Лемма 51 (следствие из теоремы 2.2 [36]). *Если полином $p(x)$ степени $r-1$ интерполирует функцию $f \in C(I)$ в точках $a + i|I|/(r+1)$, $1 \leqslant i \leqslant r$, отрезка $I = [a, b]$, то*

$$\|f-p\|_{C(I)} \leqslant O(\omega_r(f, |I|/(r+1))), \quad \|p\|_{C(I)} \leqslant O(2^r)\|f\|_{C(I)}.$$

Лемма 52. *Сплайн $e_{r,k,h,a}(x)$ равен нулю на отрезках $[-a, \max\{-a, (k-r)h\}]$ и $[\min\{a, (k+r)h\}, a]$. Составляющие его полиномы $p_j(x)$ принадлежат классам $W(s, O_r(h^{-s}), O(2^r), [(j-r)h, (j+r)h])$ при любых s, j таких, что $1 \leqslant s \leqslant r$, $\max\{-a/h, k-r\} \leqslant j \leqslant a/h - r^*$. Коэффициенты полиномов $p_j(x)$ по модулю меньше $O_r(\max\{a, 1\}/h)^r$. При любом $k \leqslant a/h - r^*$ справедливо тождество*

$$e_{r,k,h,a}(x+kh) = e_{r,0,h,a}(x).$$

Лемма доказывается с помощью интерполяционной формулы Лагранжа и лемм 43 и 51. □

Для любых

$$\mathbf{r} \in \mathbb{N}^n, \ \mathbf{a}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}_+^n, \quad \mathbf{h} \leqslant \alpha_{\|\mathbf{r}\|} \times \mathbf{a},$$

определим линейный оператор

$$\mathscr{L}_{\mathbf{r},\mathbf{h},\mathbf{a}}\colon \mathbb{R}^{\{\mathbf{k}:-\mathbf{a}<\mathbf{k}\times\mathbf{h}<\mathbf{a}\}} \to C(I^n), \text{ где } I^n = \{\mathbf{x}\colon -\mathbf{a} \leqslant \mathbf{x} \leqslant \mathbf{a}\},$$

равенством

$$\mathscr{L}_{\mathbf{r},\mathbf{h},\mathbf{a}}(\mathbf{v}) = \sum_{\mathbf{k},-\mathbf{a}\leqslant\mathbf{k}\times\mathbf{h}\leqslant\mathbf{a}} v_{\mathbf{k}}\mathbf{e}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}), \quad \text{где} \quad \mathbf{v} = (v_{\mathbf{k}}\colon -\mathbf{a}\leqslant\mathbf{k}\times\mathbf{h}\leqslant\mathbf{a}),$$

$$\mathbf{e}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} e_{r_i,k_i,h_i,a_i}(x_i).$$

Лемма 53. $\|\mathscr{L}_{\mathbf{r},\mathbf{h},\mathbf{a}}\| \leqslant c^n 2^{|\mathbf{r}|}$.

Лемма следует из леммы 52. Из леммы 2.1 [36] можно вывести, что в качестве c можно взять 1. □

Лемма 54. *Для любой функции* $f\in C(I^n)$ *и любого вектора* $\mathbf{v}$

$$\|f-\mathscr{L}_{\mathbf{r},\mathbf{h},\mathbf{a}}\|_{C(I^n)} \leqslant c^n 2^{|\mathbf{r}|}\left(\sum_{i=1}^{n}\omega_{i,r_i}(f,h_i) + \|\mathbf{v}-(f(\mathbf{k}\times\mathbf{h}))\|\right).$$

Доказательство проводится по индукции с помощью лемм 51, 53 и по существу не отличается от соответствующих рассуждений из гл. 1 [2]. □

Для доказательства теорем 5, 6 достаточно для любой функции $f\in C(I^n)$ установить следующие неравенства: при $B=\{x-y,\ xy,\ 1/2\}$ и $n=1$ $L(f,\varepsilon)\lesssim\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}})/\log\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}})+O_f(1)$, а при $n\geqslant 2$ $L_B(f,\varepsilon)\lesssim$ $\lesssim\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n})/\log\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n})+\varepsilon^{\frac{1}{\|\mathbf{r}\|+1}}\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n})\log\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n})$, $\widetilde{L}_B(f,\varepsilon)\lesssim$ $\lesssim\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n})/\log\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n})$, где $B=\{x+y,\ xy,\ |x|\}\cup[-1,\ 1]$, $\widetilde{L}_B(f,\varepsilon)\lesssim\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n})$, где $B=\{x-y,\ xy,\ |x|,1/2\}$, а $c_{\|\mathbf{r}\|}$ — некоторые константы, большие 1 (с целью краткости используем всюду без оговорок одинаковые обозначения для различных констант); при $n=1$ предполагаем, что $\log\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon)\lesssim\log(1/\varepsilon)$.

Лемма 55. *Для любой функции* $f\in C(I^n)$ *и любого* $\varepsilon<\varepsilon(f)$ *найдется функция* $g\in C(I^n)$ *такая, что*

$$\|g\|\leqslant\varepsilon\left(\log\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n})\right)^{c_{\|\mathbf{r}\|}},$$

$$\omega_{i,r_i}(g,\tau)\leqslant c_{\|\mathbf{r}\|}^{n}\omega_{i,r_i}(f,\tau),\ \lambda_{\mathbf{r},g}(\varepsilon)\leqslant\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}),$$

$$L_B(f,\varepsilon)\leqslant L_B(g,\varepsilon/2)+c_{\|\mathbf{r}\|}^{n}(\log(\|f\|/\varepsilon)/\log\log(\|f\|/\varepsilon)+$$
$$+\frac{\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n})\left(\log\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n})+\log((\omega_\Sigma(f)+1)/\omega_m(f))+O_{I^n,\mathbf{r}}(1)\right)}{\left(\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n})\right)^3}$$

и такое же неравенство справедливо для $\widetilde{L}_B(f,\varepsilon)$, *только предпоследнее слагаемое заменяется на* $c_{\|\mathbf{r}\|}^{n}\log\|f\|/\varepsilon$.

Доказательство. Применяем лемму 49, в которой в качестве ε возьмем

$$\varepsilon\left(\log\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n})\right)^{c_{\|\mathbf{r}\|}},$$

а в качестве δ возьмем $\varepsilon/2$, а потом — лемму 48. □

Лемма 56. *Для любой функции* $f(\mathbf{x})\in C(I^n)$ *и* $\varepsilon<c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\omega_m(f)$ *найдутся векторы* $\mathbf{h}$ *и* $\mathbf{v}$ *такие, что*

$$h_i=c_i\omega_{i,r_i}(c^{-n}2^{-|\mathbf{r}|})=2^{m_i},\quad m_i\in\mathbb{Z},\quad 1/2\leqslant c_i\leqslant 1,\quad 1\leqslant i\leqslant n,$$

$$2^m\mathbf{v}\in\mathbb{Z}^{\{\mathbf{k}:-\mathbf{a}\leqslant\mathbf{k}\times\mathbf{h}\leqslant\mathbf{a}\}},\quad m\in\mathbb{N},\quad m=\log(1/\varepsilon)+O_{\|\mathbf{r}\|}(n),$$

$$I^n=\{-\mathbf{a}\leqslant\mathbf{x}\leqslant\mathbf{a}\},\quad \|\mathbf{v}\|\leqslant\|f\|_{C(I^n)},\quad \|f-\mathscr{L}_{\mathbf{r},\mathbf{h},\mathbf{a}}(\mathbf{v})\|_{C(I^n)}\leqslant\varepsilon.$$

и для любого $\mathbf{k}\in\{\mathbf{k}\colon -\mathbf{a}\leqslant\mathbf{k}\times\mathbf{h}\leqslant\mathbf{a}\}$, *такого, что при любом* i

$$-a_i/h_i+r_i^*<k_i\leqslant a_i/h_i,$$

выполняется при любом i неравенство

$$\left|\Delta_i^{\overset{*}{r}_i+1}(v_k)\right| = \left|\sum_{j=0}^{\overset{*}{r}_i+1}(-1)^j\left(\overset{*}{r}_{ij}+1\right)v_{\mathbf{k}-j\mathbf{e}_i}\right| \leqslant O(\varepsilon),\quad \mathbf{e}_i=(0,\ \ldots,\ \underset{i}{1},\ \ldots,\ 0).$$

Доказательство. Выберем $\mathbf{h}$ и m так, чтобы выполнялись условия леммы и неравенство

$$c^n 2^{|\mathbf{r}|}\left(2^{-m}+\sum_{i=1}^{n}\omega_{i,r_i}(g,\ h_i)\right)\leqslant\varepsilon,$$

а потом выберем вектор $\mathbf{v}$ так, чтобы

$$v_{\mathbf{k}} = \left[f(\mathbf{k}\times\mathbf{h})\,2^m\right]2^{-m},\quad \text{если}\quad f(\mathbf{k}\times\mathbf{h})\geqslant 0,$$
$$v_{\mathbf{k}} = \left]f(\mathbf{k}\times\mathbf{h})\,2^m\right[2^{-m},\quad \text{если}\quad f(\mathbf{k}\times\mathbf{h})< 0.$$

Из леммы 54 следует, что при достаточно большом $c_{\|\mathbf{r}\|}$

$$\|f-\mathscr{L}_{\mathbf{r},\mathbf{h},\mathbf{a}}(\mathbf{v})\|_{C(I^n)}\leqslant\varepsilon.$$

Далее, при любом i

$$\left|\Delta_i^{\overset{*}{r}_i+1}(v_{\mathbf{k}})\right|\leqslant\left|\Delta_i^{\overset{*}{r}_i+1}(f(\mathbf{k}\times\mathbf{h})\right|+2^{\overset{*}{r}_i+1}\|\mathbf{v}-(f(\mathbf{k}\times\mathbf{h}))\|\leqslant$$
$$\leqslant 2^{\overset{*}{r}_i+1-r_i}\omega_{i,r_i}(f,\ h_i)+2^{\overset{*}{r}_i+1-m}\leqslant 2\varepsilon.\ \square$$

Теперь для доказательства теорем 5, 6 достаточно, согласно леммам 55 и 56, оценить сверху $L_B(g,\ \varepsilon)$ и $\tilde{L}_B(g,\ \varepsilon)$, где $g=\mathscr{L}_{\mathbf{r},\mathbf{h},\mathbf{a}}(\mathbf{v})$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{h}$, $\mathbf{a}$ такие, что выполнены условия леммы 56, кроме неравенства для $\|\mathbf{v}\|$, которое заменяется на

$$\|\mathbf{v}\|\leqslant\varepsilon\left(\log\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\right)\right)^{c_{\|\mathbf{r}\|}}.$$

Далее до конца параграфа рассматриваем случай $n=1$. Согласно лемме 6 при получении оценки для $L_B(g,\ \varepsilon)$ можно предполагать, что $I = [-a,\ a]=[-1,\ 1]$.

Выберем степень двойки l так, чтобы

$$1/4\leqslant l\,(r+c)/\log\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}})\leqslant 1/2,$$

где константа c будет указана позднее, и положим $k=l^3$. Согласно леммам 52, 56 можно выбрать $p=2^s$, $s\in\mathbb{Z}$, так, чтобы

$$\max\left\{\left\|\sum_{j=a}^{b}v_jDe_j\,(x)\right\|_{C[ah,ah,+h]}:-1/h\leqslant a<b\leqslant 1/h,\ b-a<r^*\right\}<$$
$$<p<\frac{O_{\mathbf{r}}\left(\varepsilon\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}})\right)}{\left(\log\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}})\right)^{c_{\mathbf{r}}}}.$$

Обозначим $g_i(x)$ непрерывную функцию, равную $g(x)$ на отрезке $[ikh,\ (i+1)kh]$ и линейную на отрезках $[-1,\ ikh]$ и $[(i+1)kh,\ 1]$ с угловыми коэффициентами p и $-p$ соответственно. Из определения p и леммы 52 следует, что

$$\max_{i,j}\|Dg_i\|_{C[jh,jh+h]}<p,$$

и при любом $x\in[ikh,\ (i+1)kh]$

$$g_i(ikh)-(x-ikh)p\leqslant g_i(x)\geqslant g_i((i+1)kh)+(x-(i+1)kh)p.\qquad(1)$$

Поэтому при любом $x \in [-1, 1]$ справедливо равенство

$$g(x) = \max_{-1/kh \leqslant i < 1/kh} g_i(x). \tag{2}$$

Рассмотрим все функции вида

$$\sum_{j=sl}^{sl+l-1} v_j e_j(x), \quad \text{где} \quad 0 \leqslant s \leqslant k/l,$$

а $\mathbf{v}$ — произвольный вектор, удовлетворяющий условиям, указанным после леммы 56. Оценим сверху число этих функций. Так как индекс s принимает не более

$$k/l + 1 < O(l^2)$$

различных значений, каждая компонента

$$v_{sl}, \ldots, v_{sl+r^*}$$

принимает не более

$$2^{m+1}\|\mathbf{v}\| + 1 < O_{\mathbf{r}}\left((\log \lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_r))^{O_{\mathbf{r}}(1)}\right)$$

различных значений, а каждая из остальных компонент v_i вычисляется через

$$v_{i-1}, \ldots, v_{i-r^*-1}$$

с помощью (r^*+1)-й разности

$$\Delta^{r^*+1}(v_i),$$

которая принимает не более

$$O(2^{m+1}\varepsilon) + 1 < O(2^r)$$

различных значений, то искомая оценка имеет вид

$$2^{(r+c)l}(\log \lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}}))^{O_{\mathbf{r}}(1)} < (\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}}))^{1/2}(\log \lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}}))^{O_{\mathbf{r}}(1)},$$

если константа c достаточно велика.

Занумеруем все рассматриваемые функции в произвольном порядке

$$f_1, \ldots, f_q, \; q < (\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}}))^{1/2}(\log \lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}}))^{O_{\mathbf{r}}(1)}.$$

Обозначим $u(x)$ $2kh$-периодическую функцию, равную $|x|$ на отрезке $[-kh, kh]$. Занумеруем в произвольном порядке $f'_1, \ldots, f'_{q'}$, где $q' \leqslant 2q$, все различные функции вида $f_i(u(x))$ и $f_i(kh - u(x))$. С помощью тождества леммы 52 заметим, что при $x \in [ikh, (i+1)kh]$

$$g_i^{\mathbf{r}}(x) = \varphi_i(x) + \sum_{j \in A_i} f'_j(x), \quad \text{где} \quad A_i \subseteq \{1, \ldots, q'\}, \quad |A_i| \leqslant k/l + 1,$$

$$\varphi_i(x) = \sum_{j=1/h-r^*}^{1/h} v_j(e_j(x) - e_0(x - jh)) \quad \text{при} \quad i = 1/kh - 1,$$

и равна нулю при $i < 1/kh - 1$. Из этих равенств и неравенств (1) следует, что при $|x| \leqslant 1$ справедливо равенство

$$g_i(x) = \min\left(\psi_i(x), \; \varphi_i(x) + \sum_{j \in A_i} f'_j(x)\right), \tag{3}$$

где $\psi_i(x) = \min((x - ikh)p + v_{ik}, \; ((i+1)kh - x)p + v_{(i+1)k})$.

Отметим, что в равенствах (2) и (3) функции max и min используются только для аргументов, по модулю меньших

$$2p + O_{\mathbf{r}}(\|\mathbf{v}\|) \leqslant O_{\mathbf{r}}\left(\varepsilon\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}})(\log \lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}}))^{O_{\mathbf{r}}(1)}\right),$$

так как при $|x|\leqslant 1$

$$|(x-ikh)p+v_{ik}|\leqslant 2p+\|\mathbf{v}\|\geqslant |((i+1)kh-x)p+v_{(i+1)k}|,$$

$$|g_i(x)|\leqslant 2p+\|g\|\leqslant 2p+O_{\mathbf{r}}(\|\mathbf{v}\|),\quad \Bigl|\sum_{j\in A_i} f_j'(x)\Bigr|\leqslant O_{\mathbf{r}}(\|\mathbf{v}\|).$$

Поэтому, используя леммы 2 и 39, получаем, что

$$L_B(g,\varepsilon)\leqslant$$

$$\leqslant L_B\left(\left(g_i\colon \frac{-1}{kh}\leqslant i<\frac{1}{kh}\right),\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{O(1)}{kh}\log\left(O_{\mathbf{r}}\left(\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\frac{\varepsilon}{c_{\mathbf{r}}}\right)\left(\log\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\frac{\varepsilon}{c_{\mathbf{r}}}\right)\right)^{O_{\mathbf{r}}(1)}\log\frac{1}{kh}\right)\right),$$

$$L_B\left(\left(g_i\colon \frac{-1}{kh}\leqslant i<\frac{1}{kh}\right),\frac{\varepsilon}{2}\right)\leqslant\frac{O(1)}{kh}+\frac{O(1)}{lh}+\sum_{i=-1/kn}^{1/kh-1}L_B(\psi_i,\varepsilon/4)+L_B(\varphi,\varepsilon/8)+$$

$$+L_B\left((f_i'\colon 1\leqslant i\leqslant q'),\frac{\varepsilon}{8l^2+8}\right)+\frac{O(1)}{kh}\log\left(O_{\mathbf{r}}\left(\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\frac{\varepsilon}{c_{\mathbf{r}}}\right)\left(\log\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\frac{\varepsilon}{c_{\mathbf{r}}}\right)\right)^{O_{\mathbf{r}}(1)}\right)\right),$$

$$L_B(\psi_i,\varepsilon/4)\leqslant$$

$$\leqslant O\left(|\log p|+\log 2^m\|\mathbf{v}\|\frac{1}{kh}+|\log\|\mathbf{v}\||+\log\left(O_{\mathbf{r}}\left(\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\frac{\varepsilon}{c_{\mathbf{r}}}\right)\left(\log\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\frac{\varepsilon}{c_r}\right)\right)^{O_{\mathbf{r}}(1)}\right)\right)\right).$$

Согласно лемме 52 для оценки $L_B(\varphi,\varepsilon/8)$ можно применить теорему 4 при s, $d=O_r(1)$, a_i, b_i, $c_i\in\mathbb{Z}h$, $\delta=O_r(h)$, $N=O_r(\|\mathbf{v}\|)$, $M=O_r(\|\mathbf{v}\|/h)$. Получаем оценку

$$L_B(\varphi,\varepsilon/8)\leqslant O_{\mathbf{r}}(\log(1/\varepsilon)+\log\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}}))\leqslant O_{\mathbf{r}}(\log\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}})).$$

Аналогично получаем, что

$$L_B(f_i,O(\varepsilon l^{-2}))\leqslant O_{\mathbf{r}}(l)(\log(1/\varepsilon)+\log\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}}))\leqslant O_{\mathbf{r}}(l^2),$$

откуда

$$L_B\left((f_i'\colon 1\leqslant i\leqslant q')\frac{O(\varepsilon)}{l^2}\right)\leqslant$$

$$\leqslant 2L_B\left((f_i\colon 1\leqslant i\leqslant q),\frac{O(\varepsilon)}{l^2}\right)+L_B\left(u(x),\frac{O_r(\varepsilon h)}{l^2\|\mathbf{v}\|}\right)+O\left(\log\frac{1}{kh}\right)\leqslant$$

$$\leqslant L_B\left(u(x),O_{\mathbf{r}}\left(\left(\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\frac{\varepsilon}{c_{\mathbf{r}}}\right)\right)^{-1}\left(\log\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\frac{\varepsilon}{c_{\mathbf{r}}}\right)^{-c_{\mathbf{r}}}\right)\right)+\right.$$

$$\left.+O_{\mathbf{r}}\left(\left(\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\frac{\varepsilon}{c_{\mathbf{r}}}\right)\right)^{1/2}\left(\log\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\frac{\varepsilon}{c_{\mathbf{r}}}\right)\right)^{O_{\mathbf{r}}(1)}\right)\right..$$

Из теоремы 4 (или леммы 39) следует, что

$$L_B(u(x),\delta)\leqslant O_{\mathbf{r}}(1/kh)\log(1/\delta)\leqslant O_{\mathbf{r}}(1/kh)\log\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}})\leqslant O_{\mathbf{r}}(1/hl^2).$$

Складывая полученные неравенства, получаем оценку

$$L_B(g,\varepsilon)\leqslant O_{\mathbf{r}}(1/hl)\leqslant O_{\mathbf{r}}(\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}})/\log\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}})),$$

из которой следует, что при $\varepsilon<\varepsilon(f)$

$$L_B(f,\varepsilon)\leqslant\frac{O_{\mathbf{r}}(\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}}))}{\log\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}})}\left(1+\frac{\log(1+1/\omega_m(f))+O_{I,\mathbf{r}}(1)}{(\log\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}}))^2}\right)+\frac{c_{\mathbf{r}}\log(\|f\|/\varepsilon)}{\log\log(\|f\|/\varepsilon)}.$$

Из этого неравенства следует при $\varepsilon<N/4$ оценка

$$L_B(W_2(r,r',M,N,I),\varepsilon)\leqslant\frac{O_{r,r'}|I|(M/\varepsilon)^{1/r}}{\log|I|(M/\varepsilon)^{1/r}}+\frac{O_{r'}(\log(N/\varepsilon))}{\log\log(N/\varepsilon)}+O_{\mathbf{r},r',M,|I|}(1),$$

которая означает, что при $\varepsilon < N/4$

$$L_B(W_2, \varepsilon) \leqslant O_{r,r'}(H_\varepsilon(W_2))/\log H_\varepsilon(W_2) + O_{r,r',M,|I|}(1).$$

Теорема 5 при $n=1$ доказана. □

В доказательстве аналогичной оценки для базиса $\{x-y,\ xy,\ |x|,\ 1/2\}$ можно обойтись без леммы 39 и теоремы 4 (см. [22]).

Докажем теорему 6 (ii) в случае $n=1$. Для этого оценим сверху

$$\tilde{L}_B(g, \varepsilon),$$

где

$$g = \mathscr{L}_{r,h,a}(\mathbf{v}),\ B = \{x-y,\ xy,\ |x|,\ 1/2\} \quad \text{или} \quad \{x-y,\ xy,\ |x|\} \cup [-1, 1].$$

Пусть k и l — степени двойки, удовлетворяющие неравенствам

$$k > l^4 > c_{\mathbf{r}},$$

точные значения которых выберем позднее. Представим

$$g(x) = \sum_{|j| \leqslant a/h} v_j e_j(x)$$

в виде

$$g(x) = \varphi(x) + \sum_{i,m} g_{i,m}(x),$$

где

$$\varphi(x) = \sum_{j \in A} v_j e_j(x), \quad A = \{j\colon |j| \leqslant a/h \,\&\, \exists m\, (m \in \mathbb{Z} \,\&\, |j - mk| \leqslant k/l^3)\}$$

и для любых i, m, таких, что

$$0 \leqslant i \leqslant \frac{k}{l} - \frac{2k}{l^4} - 1, \quad \frac{-a}{hk} \leqslant m < \frac{a}{hk},$$

$$g_{i,m}(x) = \sum_{j=P}^{Q} v_j e_j(x), \quad P = mk + k/l^3 + il,\ Q = P + l - 1.$$

Из леммы 52 следует, что функция $g_{i,m}(x)$ равна нулю вне отрезка

$$[(mk + k/l^3 - r^*)h,\ ((m+1)k - k/l^3)h].$$

Обозначим $f_{i,m}$ четную $2kh$-периодическую функцию, равную $g_{i,m}$ на отрезке $[mkh,\ (m+1)kh]$. Функция $f_{i,m}$ определяется однозначно, если даны числа $(-1)^m$, i и вектор $(v_P, \ldots, v_Q)$ (это проверяется с помощью равенства, указанного в лемме 52). Рассуждениями, подобными проведенным при получении оценки для $L_B(g, \varepsilon)$, можно показать, что число различных среди функций $f_{i,m}$ не превосходит

$$O_{\mathbf{r}}(k/l)\, c_{\mathbf{r}}^l \left(\log \lambda_{\mathbf{r},f}\left(\frac{\varepsilon}{c_{\mathbf{r}}}\right)\right)^{O_{\mathbf{r}}(1)}.$$

Выбрав l так, чтобы

$$c_{\mathbf{r}}^{-1} \log \lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}}) \leqslant l \leqslant 2c_{\mathbf{r}}^{-1} \log \lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}}),$$

получаем при любом $\delta > 0$ и достаточно большом $c_{\mathbf{r}}$ оценку

$$O_{\mathbf{r}}(k/l)\,(\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}}))^{\delta}\,(\log \lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}}))^{O_{\mathbf{r}}(1)}.$$

Занумеруем все рассмотренные функции в произвольном порядке $f_1, \ldots, f_q$. Из леммы 52 следует, что при любом j таком, что $1 \leqslant j \leqslant q$,

$$\|f_j\| \leqslant O_{\mathbf{r}}(\|\mathbf{v}\|) \leqslant O_{\mathbf{r}}(\varepsilon)\,(\log \lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}}))^{O_{\mathbf{r}}(1)}.$$

Выберем $p = 2^m$ так, чтобы $m \in \mathbb{Z}$ и

$$2\varepsilon + \max_j \|f_j\| \leqslant p \leqslant O_{\mathbf{r}}(\varepsilon)\,(\log \lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}}))^{O_{\mathbf{r}}(1)}.$$

Для каждой функции f_j выпишем все функции $g_{i,m}$ такие, что $f_{i,m} = f_j$. Пусть это будут функции $g_{i_1,m_1}, \ldots, g_{i_s,m_s}$, где $s = s_j$. Индексы $m_1, \ldots, m_s$ попарно различны, так как ненулевые функции $g_{i,m}$ с разными индексами i и одинаковыми индексами m не могут совпадать.

Обозначим ψ_j непрерывную кусочно-линейную функцию, равную числу p на отрезках

$$[(m_t k + k/2l^3)h,\ ((m_t+1)k - k/2l^3)h], \quad \text{где} \quad 1 \leqslant t \leqslant s_j,$$

равную числу $-p$ вне интервалов

$$(m_t kh,\ (m_t+1)kh), \quad 1 \leqslant t \leqslant s_j,$$

и линейную на всех остальных интервалах. График ψ_j состоит из не более чем $4s_j + 1$ отрезков, и их угловые коэффициенты равны 0 и $\pm 4pl^3/kh$.

Обозначим φ_j непрерывную кусочно-линейную функцию, равную числу p вне интервалов

$$(m_t kh,\ (m_t+1)kh), \quad 1 \leqslant t \leqslant s_j,$$

равную нулю на отрезках

$$[(m_t k + k/4l^3)h,\ ((m_t+1)k - k/4l^3)h], \quad 1 \leqslant t \leqslant s_j,$$

и линейную на всех остальных интервалах. График ψ_j состоит из не более чем $4s_j + 1$ отрезков, и их угловые коэффициенты равны 0 и $\pm 4pl^3/kh$.

Вне отрезков

$$[(m_t k + k/4l^3)h,\ ((m_t+1)k - k/4l^3)h], \quad 1 \leqslant t \leqslant s_j,$$

функции φ_j и ψ_j противоположны по знаку.

Рассмотрим функцию

$$\varphi_j + \min(f_j,\ \psi_j).$$

Из предыдущего следует, что вне отрезков

$$[(m_t k + k/4l^3)h,\ ((m_t+1)k - k/4l^3)h], \quad 1 \leqslant t \leqslant s_j,$$

эта функция равна 0 (так как тогда $\min(f_j, \psi_j) = \psi_j$ и $\varphi_j + \psi_j = 0$), а внутри них она равна f_j (так как тогда $\min(f_j, \psi_j) = f_j$ и $\varphi_j = 0$). Поэтому функция

$$\varphi_j + \min(f_j,\ \psi_j)$$

на интервалах

$$(m_t kh,\ (m_t+1)kh), \quad 1 \leqslant t \leqslant s_j,$$

равна функции g_{i_t,m_t}, а вне их равна нулю.

Теперь заметим, что функция

$$g - \varphi = \sum_{i,m} g_{i,m}$$

на произвольном отрезке $[mkh,\ (m+1)kh]$ равна

$$\sum_i g_{i,m}$$

(так как остальные слагаемые на этом отрезке равны 0), и функция

$$\sum_{j=1}^{q} (\varphi_j + \min(f_j,\ \psi_j))$$

равна той же сумме (так как каждому ненулевому на отрезке $[mkh,\ (m+1)kh]$ слагаемому в сумме

$$\sum_{j=1}^{q} (\varphi_j + \min(f_j,\ \psi_j))$$

однозначно соответствует равное ему на этом отрезке слагаемое в сумме

$$\sum_i g_{i,m}$$

и наоборот, каждому слагаемому $g_{i,m}$ соответствует равное ему слагаемое $\varphi_j + \min(f_j, \psi_j)$, где $f_j = f_{i,m}$).

Значит, справедливо тождество

$$g = \varphi + \sum_{j=1}^{q} (\varphi_j + \min(f_j, \psi_j)). \tag{4}$$

Далее понадобится

Лемма 57. *Пусть $f(x) \in W_1(1, M, N, I)$ кусочно-полиномиальная функция, состоящая из полиномов $p_i(x)$, $1 \leqslant i \leqslant s$, степени d с коэффициентами, по модулю меньшими K. Тогда для базиса $B = \{x+y, xy, |x|\} \cup \cup [-1, 1]$ справедлива оценка*

$$\tilde{L}_B(f) \leqslant O(ds)\log(\max(|I|, 2)\max(K, 2)) + O(\log\max(Ns, 2)),$$

а для базиса $B = \{x-y, xy, |x|, 1/2\}$ и $\varepsilon < 1$ справедлива оценка

$$\tilde{L}_B(f, \varepsilon) \leqslant O(ds\log(\max(|I|, 2)\max(K, 2)\max(M, 2)s/\varepsilon) + \log\max(Ns, 2)).$$

Доказательство. Воспользуемся тождеством $f(x) = \sum_{i=1}^{s} p_i(\chi_i(x)) - \sum_{i=2}^{s} f(c_i)$, где $f(x) = p_i(x) \Leftrightarrow x \in [c_i, c_{i+1}]$, $\chi_i(x) = (|x - c_i| - |x - c_{i+1}| + c_i + c_{i+1})/2$, и выведем из него неравенство

$$\tilde{L}_B(f, \varepsilon) \leqslant \sum_{i=1}^{s} \tilde{L}_B(p_i(\chi_i(x)), \varepsilon/2s) + \tilde{L}_B\left(\sum_{i=2}^{s} f(c_i), \varepsilon/2\right) + O(s).$$

Оценим сложность $L_B\left(\sum_{i=2}^{s} f(c_i), \varepsilon/2\right)$ с помощью леммы 2 как $O(\log\max(Ns, 2)/\varepsilon)$, а в случае $\varepsilon = 0$ и $B = \{x+y, xy, |x|\} \cup [-1, 1]$ как $O(\log\max(Ns, 2))$. С помощью лемм 2, 3 получаем, что

$$\tilde{L}_B(p_i(\chi_i(x)), \varepsilon/2s) \leqslant \tilde{L}_B(p_i, \varepsilon/4s) + O(d)(\tilde{L}_B(c_i, \varepsilon/4Ms) + \tilde{L}_B(c_{i+1}, \varepsilon/4Ms)) \leqslant$$
$$\leqslant O(d)(\log(\max(K, 2)s/\varepsilon) + \log(\max(|I|, 2)s/\varepsilon) + \log\max(|I|, 2)\max(M, 2)s/\varepsilon).$$

В случае $\varepsilon = 0$ и $B = \{x+y, xy, |x|\} \cup [-1, 1]$

$$\tilde{L}_B(p_i(\chi_i(x))) \leqslant O(d)\log\max(|I|, 2)\max(K, 2).$$

Для завершения доказательства достаточно сложить полученные неравенства. □

Оценим теперь $\tilde{L}_B(g)$ при базисе $B = \{x+y, xy, |x|\} \cup [-1, 1]$. Так как

$$\min(x, y) = (x + y - |x - y|)/2,$$

то из (4) следует, что

$$\tilde{L}_B(g) \leqslant \tilde{L}_B(\varphi) + O(q) + \sum_{j=1}^{q} \left(\tilde{L}_B(\varphi_j) + 2\left(\tilde{L}_B(f_j) + \tilde{L}_B(\psi_j)\right)\right). \tag{5}$$

Из лемм 51, 57 следует оценка

$$\tilde{L}_B(\varphi) \leqslant \frac{O_{\mathbf{r}}(a)}{hk}\left(\frac{2k}{l^3} + 1\right)\left(\log\max\left(2, \varepsilon(\log\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}}))^{O_{\mathbf{r}}(1)}\right) + \max_j \tilde{L}_B(e_j)\right) \leqslant$$
$$\leqslant O_{\mathbf{r}}(\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}})\log\lambda_{\mathbf{r},}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}}))/(\log\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}}))^3. \tag{6}$$

Заметим, что коэффициенты линейных функций, составляющих φ_j и ψ_j, не превосходят по модулю

$$\max(p,\ O(\max(1,\ |I|)pl^3/kh)).$$

Выберем k так, чтобы при $\varepsilon \leqslant h$

$$pl^4/\varepsilon \leqslant k < 2pl^4/\varepsilon,$$

а при $\varepsilon > h$

$$\max(1,\ |I|)pl^4/h \leqslant k < 2\max(1,\ |I|)pl^4/h.$$

Такой выбор возможен, так как при $\varepsilon < \varepsilon(\mathbf{r}, |I|, \omega_{\mathbf{r}}(|I|))$

$$l^4 < k < |I|/2h \asymp \lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}}),$$

и при этом выборе

$$\max(p,\ O(\max(1,\ |I|)pl^3/kh)) \leqslant O(1).$$

Применив лемму 57 и заметив, что

$$\sum_{j=1} s_j \leqslant |I|/hl \leqslant O_{\mathbf{r}}(\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}})/\log\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}})),$$

получаем оценку

$$\sum_{j=1}^{q}(\widetilde{L}_B(\varphi_j) + \widetilde{L}_B(\psi_j)) \leqslant O\left(\sum_{j=1}^{q}(s_j\log(O(\max(|I|, 2))) + O(\log\max(ps_j, 2))\right) \leqslant$$
$$\leqslant O_{\mathbf{r}}(\log(\max(|I|, 2))\,\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}})/\log\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}})). \quad (7)$$

Так как при любом j для некоторых i, m функция f_j равна

$$g_{i,m}(kmh + u(x)) \quad \text{или} \quad g_{i,m}(k(m+1)h - u(x)),$$

то согласно лемме 57

$$\widetilde{L}_B(f_j) \leqslant (\widetilde{L}_B(u(x)) + O(\log\max(|I|, 2)))\,O_{\mathbf{r}}(l)(\log\max(|I|, 2) +$$
$$+ \log\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}})) \leqslant O_{\mathbf{r}}(l^2)\,\widetilde{L}_B(u(x)).$$

Оценим теперь $\widetilde{L}_B(u(x))$. Так как $u(x)$ можно получить из функции

$$u_0(x) = \min(x + a,\ a - x)$$

с помощью итерации

$$u_n(x) = a\,2^{-n} - |u_{n-1}(x) - a\,2^{-n}|, \quad u(x) = u_{\log a/hk},$$

то

$$\widetilde{L}_B(u(x)) \leqslant O(\log\max(|I|, 2))\log a/hk \leqslant O_{|I|}(\log|I|/h) \leqslant O_{|I|}(\log\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}})).$$

Из двух полученных неравенств следует, что

$$\sum_{j=1}^{q}\widetilde{L}_B(f_j) \leqslant qO_{\mathbf{r}}(l^2)\,\widetilde{L}_B(u(x)) \leqslant O_{\mathbf{r}}(\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}}))^{1-\delta}(\log\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}}))^{O_r(1)}. \quad (8)$$

Из неравенств (5) — (8) выводим при $\varepsilon < \varepsilon(\mathbf{r}, |I|, \omega_{\mathbf{r}}(|I|))$ оценку

$$\widetilde{L}_B(g) \leqslant O_{\mathbf{r}}(\log\max(|I|, 2))\,\lambda_{\mathbf{r},f}(c/\varepsilon_{\mathbf{r}})/\log_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}}),$$

следовательно, согласно лемме 55 при $\varepsilon < \varepsilon(f)$, справедливо неравенство

$$\widetilde{L}_B(f, \varepsilon) \leqslant \frac{O_{\mathbf{r}}(\log(\max(|I|, 2)))\,\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}})}{\log\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}})}\left(1 + \frac{\log(1 + 1/\omega_m(f)) + O_{I,\mathbf{r}}(1)}{\log^2\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}})}\right) +$$
$$+ O_{\mathbf{r}}(\log\max(\|f\|, 1)).$$

Значит, при $\varepsilon < N$

$$\widetilde{L}_B(W_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', M, N, I), \varepsilon) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{O_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}(\log\max(|I|, 2))\,|I|\,(M/\varepsilon)^{1/\mathbf{r}}}{\log|I|\,(M/\varepsilon)^{1/\mathbf{r}}} + O_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}(\log\max(N, 1)) + O_{\mathbf{r},\mathbf{r}',I,M}(1) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{O_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}(\log\max(|I|, 2))\,H_\varepsilon(W_2)}{\log H_\varepsilon(W_2)} + O_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}(\log\max(N, 1)) + O_{\mathbf{r},\mathbf{r}',I,M}(1).$$

Теорема 6 (ii) при $n = 1$ доказана.

Докажем теорему 6 (i) при $n = 1$. Для этого, используя изложенный выше метод, оценим $\widetilde{L}_B(g, \varepsilon)$ при $B = \{x - y,\ xy,\ |x|,\ 1/2\}$. Из тождества (4) выводим неравенство

$$\widetilde{L}_B(g, \varepsilon) \leqslant \widetilde{L}_B(\varphi, \varepsilon/2) + O(q) + 2\sum_{j=1}^{q}\left(\widetilde{L}_B(\varphi_j, \varepsilon/4q) + \widetilde{L}_B(f_j, \varepsilon/4q) + \widetilde{L}_B(\psi_j, \varepsilon/4q)\right), \tag{9}$$

а из лемм 2, 51, 57 — оценку

$$\widetilde{L}_B(\varphi, \varepsilon/2) \leqslant \frac{O_{\mathbf{r}}(a)}{hl^3}\left(m + \max_j \widetilde{L}_B(e_j, O_{\mathbf{r}}(\varepsilon hl^3/a)\right) \leqslant$$
$$\leqslant O_{\mathbf{r}}(\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}})(\log(1/\varepsilon) + \log\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}}) + O_{|I|}(1))/(\log_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}}))^3 \leqslant$$
$$\leqslant O_{\mathbf{r}}(\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}}))/(\log\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}}))^2. \tag{10}$$

Применив лемму 57, получаем оценки

$$\sum_{j=1}^{q}\left(\widetilde{L}_B(\varphi_j, \varepsilon/4q) + \widetilde{L}_B(\psi_j, \varepsilon/4q)\right) \leqslant$$
$$\leqslant O\left(\sum_{j=1}^{q}(s_j\log(O(\max(|I|, 2))s_jq/\varepsilon h) + O(\log\max(ps_j, 2))\right) \leqslant$$
$$\leqslant O\left(\sum_{j=1}^{q} s_j\right)(\log(1/\varepsilon) + \log\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}}) + O_{|I|}(1)) \leqslant O_{\mathbf{r}}(\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}})), \tag{11}$$

$$\widetilde{L}_B(f_j, \varepsilon/4q) \leqslant \left(\widetilde{L}_B(u(x)\right) + O(\log 1/kh))\,O_{\mathbf{r}}(l)\log\frac{\max(|I|, 2)\,lq}{h\varepsilon} \leqslant$$
$$\leqslant O_{\mathbf{r}}(l^2)\,\widetilde{L}_B(u(x)) + O_{\mathbf{r}}(l^3). \tag{12}$$

Оценивая $\widetilde{L}_B(u(x))$ тем же способом, что и в п. (ii), получаем оценку

$$\widetilde{L}_B(u(x)) = \widetilde{L}_B(u_{\log a/hk}(x)) \leqslant O(\log\max(|I|, 2))\log a/hk + O(\log^2 a/hk) \leqslant$$
$$\leqslant O(\log\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}}))^2.$$

Из нее и оценки (12) следует, что

$$\sum_{j=1}^{q}\widetilde{L}_B(f_j, \varepsilon/4q) \leqslant qO_{\mathbf{r}}(l^4) \leqslant O_{\mathbf{r}}(\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}}))^{1/2}(\log\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}}))^{O_{\mathbf{r}}(1)}. \tag{13}$$

Из неравенств (9)—(11) и (13) следует, что при $\varepsilon < \varepsilon(\mathbf{r}, |I|, \omega_{\mathbf{r}}(I))$

$$\widetilde{L}_B(g, \varepsilon) \leqslant O_{\mathbf{r}}(\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}})),$$

поэтому, согласно лемме 55, при $\varepsilon < \varepsilon(f)$ справедливо неравенство

$$\widetilde{L}_B(f, \varepsilon) \leqslant O_{\mathbf{r}}(\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}}))\left(1 + \frac{\log(1 + 1/\omega_m(f)) + O_{I,\mathbf{r}}(1)}{\log^2\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c_{\mathbf{r}})}\right) + O_{\mathbf{r}}(\log(\|f\|/\varepsilon)),$$

следовательно, при $\varepsilon < N$

$$\widetilde{L}_B(W_2(r, r', M, N, I), \varepsilon) \leqslant O_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}\left(|I|(M/\varepsilon)^{1/\mathbf{r}}\right) + O_{r,r'}(\log N/\varepsilon) + O_{r,r',I,M}(1) \leqslant$$
$$\leqslant O_{r,r'}(H_\varepsilon(W_2)) + O_{r,r',I,M}(1).$$

Теорема 6 (i) при $n=1$ доказана. Другой вариант доказательства имеется в [11].

Для базиса $B=\{x+y,\ xy,\ \max(x, y),\ |x|\} \cup [-1, 1]$ можно доказать, что

$$\widetilde{L}_B(\varphi_j)+\widetilde{L}_B(\psi_j) \leqslant O(s_j),$$

откуда следует, что при $\varepsilon < N$

$$\widetilde{L}_B(W_2(r, r', M, N, I), \varepsilon) \leqslant$$
$$\leqslant O_{r,r'}(H_\varepsilon(W_2))/\log H_\varepsilon(W_2) + O_{r,r'}(\log\max(N, 1)) + O_{r,r',I,M}(1).$$

§ 7. Доказательство теорем 5, 6 в случае $n > 1$

Далее понадобится

Лемма 58. *Для любых* $\mathbf{k}$, ε, δ,

$$-\mathbf{a} \leqslant \mathbf{k} \times \mathbf{h} \leqslant \mathbf{a}, \quad \varepsilon < \varepsilon(r, I^n, \omega_m), \quad \delta \in (0, 1),$$

справедливы неравенства

$$L_B(\mathbf{e_k}(\mathbf{x}), \delta) \leqslant O_{\|\mathbf{r}\|}\left(\log\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon/c^n_{\|\mathbf{r}\|}\right) + n\log(1/\delta)\right),$$

где $B=\{x-y,\ xy,\ 1/2\}$,

$$\widetilde{L}_B(\mathbf{e_k}(\mathbf{x}), \delta) \leqslant O_{\|\mathbf{r}\|}\left(\log\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon/c^n_{\|\mathbf{r}\|}\right) + n\log(1/\delta)\right),$$

где $B=\{x-y,\ xy,\ |x|,\ 1/2\}$,

$$\widetilde{L}_B\left(\mathbf{e_k}(\mathbf{x})/\left(\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon/c^n_{\|\mathbf{r}\|}\right)\right)^{\|\mathbf{r}\|+2}\right) \leqslant O_{\|\mathbf{r}\|}(n),$$

где $B=\{x-y,\ xy,\ |x|\} \cup [-1,1]$.

Доказательство. Так как

$$\mathbf{e_k}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} e_{k_i,r_i,h_i,a_i}(x_i),$$

то

$$L_B(\mathbf{e_k}(\mathbf{x}), \delta) \leqslant n + \sum_{i=1}^{n} L_B\left(e_{k_i}(x_i),\ \delta/c^n_{\|\mathbf{r}\|}\right),$$

если $c_{\|\mathbf{r}\|}$ выбрано так, чтобы

$$\sum_{i=1}^{n} \delta c^{-n}_{\|\mathbf{r}\|} \prod_{j\neq i}\left(\|e_{k_j}\| + \delta c^{-n}_{\|\mathbf{r}\|}\right) \leqslant n c^{-n}_{\|\mathbf{r}\|}\delta\left(O_{\|\mathbf{r}\|}(1) + \delta c^{-n}_{\|\mathbf{r}\|}\right) \leqslant \delta.$$

Из теоремы 4 и леммы 52 следует, что

$$L_B\left(e_{k_i}(\mathbf{x}),\ \delta/c^n_{\|\mathbf{r}\|}\right) \leqslant O_{\|\mathbf{r}\|}(n + \log(1/\delta) + \log|I_i|/h_i + |\log|I_i||).$$

Складывая, получаем, что

$$L_B(\mathbf{e_k}(\mathbf{x}), \delta) \leqslant n + O_{\|\mathbf{r}\|}\left(n^2 + n\log(1/\delta) + \log\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon/c^n_{\|\mathbf{r}\|}\right) + O_{I^n}(1)\right) \leqslant$$
$$\leqslant O_{\|\mathbf{r}\|}\left(n^2 + n\log(1/\delta) + \log\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon/c^n_{\|\mathbf{r}\|}\right)\right).$$

Увеличив $c_{\|\mathbf{r}\|}$, можно устранить слагаемое $O_{\|\mathbf{r}\|}(n^2)$.

Аналогичным образом доказываем второе неравенство, используя следующую оценку, получаемую с помощью лемм 52 и 57:

$$\widetilde{L}_B\left(e_{k_i}(\mathbf{x}),\ \delta/c^n_{\|\mathbf{r}\|}\right) \leqslant O_{\|\mathbf{r}\|}(n + \log(1/\delta) + \log\max(|I_i|, 2)/h_i).$$

Докажем последнее неравенство. Из леммы 52 следует. что коэффициенты полиномов, составляющих сплайн $e_{k_i}(x_i)$, по модулю меньше

$$O_{r_i}\left((\max(1, |I_i|)/h_i)^{r_i}\right).$$

Положив

$$e^i_{k_i}(x_i) = c^{-1}_{\|\mathbf{r}\|}(h_i/\max(1, |I_i|))^{r_i} e_{k_i}(x_i)$$

и применив лемму 57, получаем оценку

$$\widetilde{L}_B\left(\mathbf{e_k}(\mathbf{x})/\left(\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c^n_{\|\mathbf{r}\|})\right)^{\|\mathbf{r}\|+2}\right) \leqslant n + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{L}_B\left(e^i_{k_i}(x_i)\right) \leqslant O_{\|\mathbf{r}\|}(n). \quad \square$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$h_n/|I_n| = \max_i h_i/|I_i|,$$

поэтому

$$|I_n|/h_n \leqslant 2\left(\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c^n_{\|\mathbf{r}\|})\right)^{1/n}.$$

Представим функцию

$$g(\mathbf{x}) = \mathscr{L}_{\mathbf{r},\mathbf{h},\mathbf{a}}(\mathbf{v})$$

в виде

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{\widehat{\mathbf{k}},\, -\widehat{\mathbf{a}} \leqslant \widehat{\mathbf{k}} \times \widehat{\mathbf{h}} \leqslant \widehat{\mathbf{a}}} \mathbf{e}_{\widehat{\mathbf{k}}}(\widehat{\mathbf{x}}) \sum_{j,\, |j| \leqslant a_n/h_n s} g_{\widehat{\mathbf{k}},j}(x_n), \tag{14}$$

где $0 < s = \left[\left(\log \lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c^n_{\|\mathbf{r}\|})\right)/c^n_{\|\mathbf{r}\|}\right] < a_n/h_n$, а для любого вектора $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ через $\widehat{\mathbf{w}}$ обозначается вектор

$$(w_1, \ldots, w_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1},$$

$$\mathbf{e}_{\widehat{\mathbf{k}}}(\widehat{\mathbf{x}}) = \prod_{i=1}^{n-1} e_{k_i, r_i, h_i, a_i}(x_i),$$

а $g_{\widehat{\mathbf{k}},j}(x_n)$ определяется равенством

$$g_{\widehat{\mathbf{k}},j}(x_n) = \sum_{i,\, js \leqslant i < (j+1)s} v_{(\widehat{\mathbf{k}},i)} e_{i, r_n, h_n, a_n}(x_n). \tag{15}$$

Занумеруем все различные функции $g_{\widehat{\mathbf{k}},j}(x_n)$ в произвольном порядке $f_1, \ldots, f_q$. Число q оцениваем так же, как в параграфе 6:

$$q \leqslant O(a_n/h_n s)\, c^{ns+n}_{\|\mathbf{r}\|}\left(\log \lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c^n_{\|\mathbf{r}\|})\right)^{c_{\|\mathbf{r}\|}} \leqslant$$
$$\leqslant (a_n/h_n)\left(\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c^n_{\|\mathbf{r}\|})\right)^{1/4}\left(\log \lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c^n_{\|\mathbf{r}\|})\right)^{c_{\|\mathbf{r}\|}} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c^n_{\mathbf{r}})\right)^{3/4}\left(\log \lambda_{\mathbf{r},f}(\varepsilon/c^n_{\|\mathbf{r}\|})\right)^{c_{\|\mathbf{r}\|}},$$

если $c_{\|\mathbf{r}\|}$ достаточно велико. Так как согласно леммам 52 и 56

$$\|\mathbf{e}_{\widehat{\mathbf{k}}}(\widehat{x})\| \leqslant c^n_{\|\mathbf{r}\|},$$

$$\left\|\sum_{j,\, |j| \leqslant a_n/h_n s} g_{\widehat{\mathbf{k}},j}(x_n)\right\| \leqslant O_{\|\mathbf{r}\|}(\|\mathbf{v}\|) \leqslant O_{\|\mathbf{r}\|}\left(\varepsilon\left(\log \lambda_{\mathbf{r},f}(c^{-n}_{\mathbf{r}}\varepsilon)\right)^{c_{\|\mathbf{r}\|}}\right) \leqslant 1,$$

то из тождества (14) следует неравенство

$$L_B(g, \varepsilon) \leqslant \frac{2^n |I^n|}{s h_1 \ldots h_n} + \frac{O(2^n |I^n|)}{|I_n| h_1 \ldots h_{n-1}} \max_{\widehat{\mathbf{k}}} L_B\left(\mathbf{e}_{\widehat{\mathbf{k}}}, \frac{\varepsilon h_1 \ldots h_n}{2^n |I^n|}\right) +$$
$$+ q \max_j L_B\left(f_j, \frac{|I_n| \varepsilon h_1 \ldots h_{n-1}}{c^n_{\|\mathbf{r}\|} 2^n |I^n|}\right). \tag{16}$$

Из тождества (15) следует неравенство

$$\max_j L_B\left(f_j, \frac{|I_n|\,\varepsilon h_1\ldots h_{n-1}}{c_{\mathbf{r}}^n\, 2^n\,|I^n|}\right)\leqslant O(s)+O(m)+s\max_i \widetilde{L}_B\left(e_i, \frac{\varepsilon h_1\ldots h_n}{c_{\|\mathbf{r}\|}^n\,|I^n|}\right),$$

из которого с помощью оценки для q, неравенства

$$\frac{\varepsilon h_1\ldots h_n}{c_{\|\mathbf{r}\|}^n\,|I^n|}\geqslant 1/\left((2c_{\|\mathbf{r}\|})^n\left(\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon/c_{\mathbf{r}}^n\right)\right)\right)\geqslant 1/\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon/c_{\mathbf{r}}^n\right),$$

и леммы 58 получаем, что для достаточно большого $c_{\|\mathbf{r}\|}$

$$q\max_j L_B\left(f_j, \frac{|I_n|\varepsilon h_1\ldots h_{n-1}}{c_{\|\mathbf{r}\|}^n 2^n\,|I^n|}\right)\leqslant qO_{\|\mathbf{r}\|}(s)\left(n+O_{I^n}(1)+\right.$$

$$\left.+\log(1/\varepsilon)+\log\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon/c_{\mathbf{r}}^n\right)\right)\leqslant\left(\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon/c_{\|\mathbf{r}\|}^n\right)\right)^{3/4}\left(\log\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon/c_{\mathbf{r}\|}^n\right)\right)^{c_{\|\mathbf{r}\|}}. \qquad (17)$$

Из лемм 48 и 58 следует, что

$$\frac{O(2^n|I^n|)}{|I_n|\,h_1\ldots h_{n-1}}\max_{\widehat{\mathbf{k}}} L_B\left(\mathbf{e}_{\widehat{\mathbf{k}}}, \frac{\varepsilon h_1\ldots h_n}{2^n\,|I^n|}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon/c_{\|\mathbf{r}\|}^n\right)(\varepsilon/\omega_m)^{1/(r_n+1)}c_{\|\mathbf{r}\|}^{n/(r_n+1)}\,|I_n|^{(-r_n)/(r_n+1)}\max_{\widehat{k}} L_B\left(\mathbf{e}_{\widehat{\mathbf{k}}},\right.$$

$$\left.\frac{\varepsilon}{\left(\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\right)\right)^{a\|\mathbf{r}\|}}\right)\leqslant O_{\mathbf{r},I^n,\omega_m}\left(\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon/c_{\mathbf{r}\|}^n\right)\varepsilon^{1/(\|\mathbf{r}\|+1)}\right)\log\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon/c_{\mathbf{r}\|}^n\right). \qquad (18)$$

Из (16)—(18) следует, что при $\varepsilon<\varepsilon(\mathbf{r}, I^n, \omega_m)$

$$L_B(g,\varepsilon)\leqslant O_{\|\mathbf{r}\|}\left(\frac{n\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\right)}{\log\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\right)}\right)+O_{\mathbf{r},I^n,\omega_m}\left(\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\right)\varepsilon^{1/(\|\mathbf{r}\|+1)}\right)\log\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\right),$$

откуда, с помощью лемм 55 и 48, следует, что при $\varepsilon<\varepsilon(f)$

$$L_B(f,\varepsilon)\leqslant\frac{\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon c_{\mathbf{r}\|}^{-n}\right)}{\log\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon c_{\mathbf{r}}^{-n}\right)}\left(1+\frac{\log\left((1+\omega_\Sigma(f))/\omega_m(f)\right)+O_{I^n,\mathbf{r}}(1)}{\log^2\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\right)}\right)+$$

$$+O_{\mathbf{r},I^n,\omega_m}\left(\varepsilon^{1/(\|\mathbf{r}\|+1)}\right)\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\right)\log\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-1}\right)+\frac{c_{\mathbf{r}\|}^n\log\|f\|/\varepsilon}{\log\log\|f\|/\varepsilon}.$$

Следовательно, при $\varepsilon<N/4$

$$L_B\left(W_2(\mathbf{r},\mathbf{r}',\mathbf{M},N,I^n),\varepsilon\right)\leqslant\frac{c_{\|\mathbf{r}'\|}^{n^2/\rho}\,|I^n|\,(\mu/\varepsilon)^{n/\rho}}{\log|I^n|\,(\mu/\varepsilon)^{n/\rho}}+\frac{c_{\|\mathbf{r}'\|}^n\log N/\varepsilon}{\log\log N/\varepsilon}+O_{\mathbf{r},\mathbf{r}',\mathbf{M},I^n}(1)\leqslant$$

$$\leqslant c_{\|\mathbf{r}'\|}^{n^2/\rho}H_\varepsilon(W_2)/\log H_\varepsilon(W_2)+O_{\mathbf{r},\mathbf{r}',\mathbf{M},I^n}(1). \qquad \square$$

Для базиса $\{x-y,\ xy,\ |x|,\ 1/2\}$ оценка теоремы была автором ранее получена в [12].

Для доказательства теоремы 6 (i) перепишем тождество (14) в виде

$$g(\mathbf{x})=\sum_{j=1}^{q} f_j\sum_{\widehat{\mathbf{k}}\in A_j}\mathbf{e}_{\widehat{\mathbf{k}}}(\mathbf{x}), \qquad (19)$$

где A_j — некоторые множества мультииндексов, сумма мощностей которых не превосходит при достаточно большом $c_{\|\mathbf{r}\|}$

$$2^n\,|I^n|/sh_1\ldots h_n\leqslant\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\right)/\log\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\right).$$

Из (19) следует, что

$$\widetilde{L}_B(g, \varepsilon) \leqslant \sum_{j=1}^{q} \widetilde{L}_B\left(f_j, \frac{\varepsilon}{\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\right)}\right) + \sum_{j=1}^{q} |A_j| \max_{\widehat{\mathbf{k}}} \widetilde{L}_B\left(\mathbf{e}_{\widehat{\mathbf{k}}}, \frac{\varepsilon}{\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon c_{\mathbf{r}}^{-n}\right)}\right) + \\ + \sum_{j=1}^{q} |A_j| + O(q). \quad (20)$$

Используя леммы 48, 58 и тождество (15), получаем оценки

$$\max_{\widehat{\mathbf{k}}} \widetilde{L}_B\left(\mathbf{e}_{\widehat{\mathbf{k}}}, \frac{\varepsilon}{\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\right)}\right) \leqslant O_{\|\mathbf{r}\|}(n) \log \lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\right), \quad (21)$$

$$\max_{j} \widetilde{L}_B\left(f_j, \frac{\varepsilon}{\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\right)}\right) \leqslant O_{\|\mathbf{r}\|}(s)\left(m + n + O_{I^n}(1) + \log \lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\right)\right) \leqslant \\ \leqslant O_{\|\mathbf{r}\|}\left(\log^2 \lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}}^{-n}\right)\right). \quad (22)$$

Из (20) — (22) следует, что при $\varepsilon < \varepsilon(\mathbf{r}, I^n, \omega_m(f))$

$$\widetilde{L}_B(g, \varepsilon) \leqslant \lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\right),$$

поэтому, согласно лемме 55, при $\varepsilon < \varepsilon(f)$

$$\widetilde{L}_B(f, \varepsilon) \leqslant \lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon c_{\mathbf{r}}^{-n}\right)\left(1 + \frac{\log\left((1 + \omega_{\Sigma}(f))/\omega_m(f)\right) + O_{I^n,\mathbf{r}}(1)}{\log^2 \lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\right)}\right) + c_{\|\mathbf{r}\|}^{n} \log \frac{\|f\|}{\varepsilon}.$$

Следовательно, при $\varepsilon < N$

$$\widetilde{L}_B\left(W_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{M}, N, I^n), \varepsilon\right) \leqslant c_{\|\mathbf{r}'\|}^{n^2/\rho} \left|I^n\right| \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{n/\rho} + c_{\|\mathbf{r}'\|}^{n} \log \frac{N}{\varepsilon} + O_{\mathbf{r},\mathbf{r}',\mathbf{M},I^n}(1) \leqslant \\ \leqslant c_{\|\mathbf{r}'\|}^{n^2/\rho} H_{\varepsilon}(W_2) + O_{\mathbf{r},\mathbf{r}',\mathbf{M},I^n}(1). \quad \square$$

Ранний вариант доказательства изложен в [12].

Для доказательства теоремы 6 (ii) перепишем тождество (19) в виде

$$g(\mathbf{x}) = \left(\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\right)\right)^{2c_{\|\mathbf{r}\|}} \sum_{j=1}^{q} \frac{f_j(x_n)}{\left(\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\right)\right)^{c_{\|\mathbf{r}\|}}} \sum_{\widehat{\mathbf{k}} \in A_j} \frac{\mathbf{e}_{\widehat{\mathbf{k}}}(\widehat{\mathbf{x}})}{\left(\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\right)\right)^{c_{\|\mathbf{r}\|}}}. \quad (23)$$

Из (23) следует неравенство

$$\widetilde{L}_B(g) \leqslant \sum_{j=1}^{q} \widetilde{L}_B\left(\frac{f_j(x_n)}{\left(\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\right)\right)^{c_{\|\mathbf{r}\|}}}\right) + \sum_{j=1}^{q} |A_j| \max_{\widehat{\mathbf{k}}} \widetilde{L}_B\left(\frac{\mathbf{e}_{\widehat{\mathbf{k}}}(\widehat{\mathbf{x}})}{\left(\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\right)\right)^{c_{\|\mathbf{r}\|}}}\right) + \\ + \sum_{j=1}^{q} |A_j| + O_{\|\mathbf{r}\|}\left(\log \lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}}^{-n}\right)\right) + O(q). \quad (24)$$

Используя лемму 58 и тождество (15), получаем оценки

$$\max_{j} \widetilde{L}_B\left(\frac{f_j(x_n)}{\left(\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon c_{\mathbf{r}}^{-n}\right)\right)^{c_{\|\mathbf{r}\|}}}\right) \leqslant O_{\|\mathbf{r}\|}(s), \quad (25)$$

$$\max_{\widehat{\mathbf{k}}} \widetilde{L}_B\left(\frac{\mathbf{e}_{\widehat{\mathbf{k}}}(\widehat{\mathbf{x}})}{\left(\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\right)\right)^{c_{\|\mathbf{r}\|}}}\right) \leqslant n O_{\|\mathbf{r}}(1). \quad (26)$$

Из (24) — (26) следует, что при $\varepsilon < \varepsilon(\mathbf{r}, I^n, \omega_m(f))$

$$\widetilde{L}_B(g) \leqslant \lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\right) / \log \lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\right),$$

поэтому, согласно лемме 55, при $\varepsilon < \varepsilon(f)$

$$\widetilde{L}_B(f, \varepsilon) \leqslant \frac{\lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\right)}{\log \lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\right)}\left(1 + \frac{\log\left((1+\omega_\Sigma(f))/\omega_m(f)\right) + O_{I^n,\mathbf{r}}(1)}{\log^2 \lambda_{\mathbf{r},f}\left(\varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}^{-n}\right)}\right) + \\ + c_{\|\mathbf{r}\|}^n \log\max(\|f\|, 1).$$

Следовательно, при $\varepsilon < N$

$$\widetilde{L}_B\left(W_2\left(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{M}, N, I^n\right), \varepsilon\right) \leqslant \\ \leqslant \frac{c_{\|\mathbf{r}'\|}^{n^2/\rho} \, |I^n| \, (\mu/\varepsilon)^{n/\rho}}{\log |I^n| \, (\mu/\varepsilon)^{n/\rho}} + c_{\|\mathbf{r}'\|}^n \log\max(N, 1) + O_{\mathbf{r},\mathbf{r}',\mathbf{M},I^n}(1) \leqslant \\ \leqslant c_{\mathbf{r}'\|}^{n^2/\rho} H_\varepsilon(W_2)/\log H_\varepsilon(W_2) + c_{\|\mathbf{r}'\|}^n \log\max(N, 1) + O_{\mathbf{r},\mathbf{r}'\mathbf{M},I^n}(1). \quad \square$$

В доказательстве теорем 5, 6 можно использовать вместо леммы 49 лемму 50. Однако тогда в случае $n > 1$ константа в знаке неравенства по порядку будет зависеть от M и I^n, а в теореме 6 придется расширить базис, добавив к нему функцию $\cos x$ или $\sin x$.

Из теорем 5, 6 и лемм 13, 14 следуют верхние оценки для $H_\varepsilon(W_2)$:

$$H_\varepsilon(W_2) \leqslant O_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}\left(|I^n| \, (\mu/\varepsilon)^{n/\rho} + \log N/\varepsilon + 1\right).$$

§ 8. О сложности реализации классов $M(\mathbf{r}, \mathbf{M}, N, L)$ при $n = 1$ и $r \leqslant 2$ в некоторых кусочно-линейных и полиномиальных базисах

Здесь будет доказана теорема 8, несколько уточняющая при $n = 1$ и $r \leqslant 2$ результаты § 5. Для краткости вместо $W_1(\mathbf{r}, \mathbf{M}, N, I)$ пишем W.

Теорема 8. *Пусть $M|I|^{\mathbf{r}}/\varepsilon \to \infty$. Тогда справедливы неравенства*

(i) $$\frac{H_\varepsilon(W)}{\log H_\varepsilon(W)} \lessapprox L_B(W, \varepsilon) \leqslant \frac{O(H_\varepsilon(w))}{\log H_\varepsilon(W)} + O(\log\max(N, 1)) + O_{I,M}(1);$$

(ii) $$cH_\varepsilon(W) \leqslant \widetilde{L}_B(W, \varepsilon) \leqslant O(H_\varepsilon(W)) + O_{I,M}(1),$$

где $B = \{x - y, x/2, |x|, 1\}$, c — некоторая константа;

(iii) $$\frac{H_\varepsilon(W)}{4\log H_\varepsilon(W)} \lessapprox \widetilde{L}_B(W, \varepsilon) \leqslant \frac{O(H_\varepsilon(W))}{\log H_\varepsilon(W)} + O(\log\max(N, 1)) + O_{I,M}(1),$$

где $B = \{x - y, \max(x, y), |x|, 1\} \cup \{cx\colon 0 < c < 1\}$;

(iv) $$\log(H_\varepsilon(W)) - c\log\log H_\varepsilon(W) \leqslant D_B(W, \varepsilon) \leqslant \log(H_\varepsilon(W)) + \\ + O(\log\max(N, 1)) + O_{I,M}(1),$$

где $1 \leqslant r \leqslant 2$, $B = \{x - y, |x|, 1\} \cup \{cx\colon 0 < c < 1\}$; а при $\varepsilon < \varepsilon(M, N, I)$

$$D_B(W, \varepsilon) \leqslant \log H_\varepsilon(W) + O_{I,M}(1);$$

(v) $$\frac{H_\varepsilon(W)}{\log H_\varepsilon(W)}\left(1 + \frac{\log\log H_\varepsilon(W) - O(1)}{\log H_\varepsilon(W)}\right) \leqslant L_B(W, \varepsilon) \leqslant \\ \leqslant \frac{H_\varepsilon(W)}{\log H_\varepsilon(W)}\left(1 + \frac{4\log\log H_\varepsilon(W) + O_N(1)}{\log H_\varepsilon(W)}\right) + O_{I,M,N}(1),$$

где $r = 1$ и $B = \{x - y, x/2, |x|, 1\}$; а при $B = \{x - y, xy, 1/2\}$,

(vi) $$L_B(W, \varepsilon) \leqslant \frac{H_\varepsilon(W)}{\log H_\varepsilon(W)}\left(1 + \frac{6\log\log H_\varepsilon(W) + O_N(1)}{\log H_\varepsilon(W)}\right) + O_{I,M,N}(1).$$

Нижние оценки получаются с помощью теорем 1, 2. Для доказательства верхних оценок понадобятся следующие леммы.

Лемма 59. *Для* $B=\{x-y,\ x/2,\ 1\}$ *и* $\varepsilon<1$

$$\tilde{L}_B(ax+b,\ \varepsilon)\leqslant |a|+|b|+O(\log(\max(|I|,\ 2)/\varepsilon)).$$

Для $B=\{x-y,\ 1\}\cup\{cx\colon\ 0<c<1\}$

$$\tilde{L}_B(ax+b)\leqslant |a|+|b|+O(1),\quad D_B(ax+b)\leqslant\log(1+\max(|a|,\ |b|))+O(1).$$

Для доказательства первого неравенства достаточно заметить, что для любого двоично-рационального числа $a=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i 2^{-i}\in(0,1)$ справедливо тождество $ax=(\ldots(x/2+\alpha_{m-1})/2+\ldots+\alpha_1 x)/2$, и вывести из него, что для любых $a,b\in\mathbb{R}$

$$\tilde{L}_B(ax,\ \varepsilon/2|I|)\leqslant |a|+O(\log\max(|I|,\ 2)/\varepsilon),$$
$$\tilde{L}_B(b,\ \varepsilon/2)\leqslant |b|+O(\log(2/\varepsilon)).$$

Второе неравенство доказывается с помощью тождеств

$$x_1+\ldots+x_n=x_0-(\ldots((x_0-x_1)-x_2)-\ldots)-x_n),$$
$$-(x_1+\ldots+x_n)=(\ldots((x_0-x_0)-x_1)-\ldots)-x_n,$$

а третье — с помощью получаемой по индукции оценки

$$D_B(\pm(x_1+\ldots+x_n))\leqslant\log n+O(1).\quad\square$$

Лемма 60. *Для любой кусочно-линейной функции* $f\in W(1,M,N,I)$, *составленной из* s *линейных функций, справедливы при* $\varepsilon<1$ *оценки*

$$\tilde{L}_B(f)\leqslant O(s(M+N+1)(|I|+1)),$$
$$D_B(f)\leqslant\log s+O(\log\max(M,\ 2)\max(N,\ 2)\max(|I|,\ 2)),$$

где $B=\{x-y,\ |x|,\ 1\}\cup\{cx\colon\ 0<c<1\}$,

$$\tilde{L}_B(f,\ \varepsilon)\leqslant O(s)(\log Ms/\varepsilon+N+M(1+|I|)),$$

где $B=\{x-y,\ x/2,\ |x|,\ 1\}$.

Доказательство состоит в повторении рассуждений леммы 57 при $d=1$, $K=\max(M,\ N+M|I|)$ и применении леммы 59. Для оценки глубины используем лемму 59 и неравенство

$$D_B(f)\leqslant\max\Big(\log s+\max_i(D_B(p_i)+D_B(x_i)),\ D_B\Big(\sum_{i=2}^{s}f(c_i)\Big)\Big)+O(1).$$

Лемма 61. *Пусть* $f(x)$ — *непрерывная функция, равная константе* c_0 *на множестве* $(-\infty,\ a_1]\cup[a_4,\ a_5]\cup\ldots\cup[a_{4s},\ +\infty)$, *равная константе* c_1, $c_1>c_0$, *на множестве* $[a_2,\ a_3]\cup[a_6,\ a_7]\cup\ldots\cup[a_{4s-2},\ a_{4s-1}]$ *и линейная на отрезках* $[a_1,\ a_2]$, $[a_3,\ a_4]$, …, $[a_{4s-1},\ a_{4s}]$, *где* $a_1<a_2\leqslant a_3<a_4\leqslant\ldots\leqslant a_{4s-1}<a_{4s}$. *Тогда справедлива оценка*

$$\tilde{L}_B(f)\leqslant O(s)+\sum_{i=1}^{2s}\frac{c_1-c_0+|c_0a_{2i}-c_1a_{2i-1}|}{a_{2i}-a_{2i-1}}+|c_1|+|c_0|,$$

где $B=\{x-y,\ \max(x,\ y),\ 1\}\cup\{cx\colon\ 0<c<1\}$.

Доказательство. Обозначим ограничение функции $f(x)$ на отрезок $[a_{2i-1},\ a_{2i}]$ через $f_i(x)$. Из леммы 59 следует, что

$$\tilde{L}_B(f_i)\leqslant\frac{c_1-c_0+|c_0a_{2i}-c_1a_{2i-1}|}{a_{2i}-a_{2i-1}}+O(1).$$

Непосредственно проверяется, что

$$f=\min(c_1,\ \max(c_0,\ \min(f_1,\ f_2),\ \ldots,\ \min(f_{2s-1},\ f_{2s}))).$$

Так как
$$\min(x, y) = -\max(-x, -y), \quad -x = (1-1) - x,$$
то из этого тождества и предыдущей оценки следует неравенство леммы. □

Лемма 62 [25, 26]. *Для любой функции $f \in C^r(I)$, $r = 0, 1$, и кусочно-линейной функции g, линейной на каждом отрезке*
$$[a + ih, a + ih + h], \quad 0 \leqslant i \leqslant |I|/h - 1,$$
и совпадающей с функцией f в их концах, справедлива оценка
$$\|f - g\|_{C(I)} \leqslant \begin{cases} \omega(f, h), & \text{если } r = 0, \\ h\omega(Df, h)/4, & \text{если } r = 1. \end{cases}$$

Неравенства (i)—(iii) доказываются тем же методом, что и теоремы 5, 6 в случае $n = 1$, только вместо лемм 2, 57 и теоремы 4 используем леммы 59, 60. При этом для базиса $B = \{x - y, |x|, 1\} \cup \{cx: 0 < c < 1\}$ получается оценка
$$\tilde{L}_B(W, \varepsilon) \leqslant \frac{O(H_\varepsilon(W)(|I| + 1))}{\log H_\varepsilon(W)} + O(\log\max(N, 1)) + O_{I,M}(1).$$

Но если оценить в случае $B = \{x - y, \max(x, y), 1\} \cup \{cx: 0 < c < 1\}$
$$\tilde{L}_B(\varphi_i) + \tilde{L}_B(\psi_i)$$
с помощью леммы 61 как $O(s_j)$, то так же, как в теореме 6 (ii), получаем оценку
$$\tilde{L}_B(W, \varepsilon) \leqslant \frac{O(H_\varepsilon(W))}{\log H_\varepsilon(W)} + O(\log\max(N, 1)) + O_{I,M}(1).$$

Докажем неравенство (iv). Пусть $f(x) \in C^1(I)$. С помощью лемм 7, 8 можно представить $f(x)$ в виде $cx + d + g(x)$, где
$$|d| \leqslant \|f\|, \quad |c| \leqslant O(\omega(Df, |I|) + \|f\|/|I|), \quad \|g\| \leqslant \omega(Df, |I|)|I|,$$
$$\omega(Df, \tau) = \omega(Dg, \tau), \quad g \in W(1, \omega(Df, |I|), \omega(Df, |I|)|I|, I).$$
Применяя к функции g лемму 62 при таком h, что $h\omega(Df, h) = 4\varepsilon$, а затем лемму 60 при
$$s =]\,|I|/h\,[, \; N = \omega(Df, |I|)|I|, \; M = \omega(Df, |I|)$$
и лемму 59, получаем, что при $\varepsilon < \varepsilon(|I|, \|f\|, \omega(Df, |I|))$
$$D_B(f, \varepsilon) \leqslant \max(D_B(cx + d), D_B(g, \varepsilon) + O(1)) \leqslant \log(1/h) + O_{|I|,\omega(Df,|I|)}(1).$$
В случае $f \in W(1, M, N, I)$, представив f в виде
$$f(a) + g, \quad \text{где} \quad g \in W(1, M, M|I|, I),$$
и, применив лемму 62, при $h = |I|/]\lambda_f(\varepsilon)[$ получаем, что при $\varepsilon < \varepsilon(M, N, I)$
$$D_B(f, \varepsilon) \leqslant \max(D_B(f(a)), D_B(g, \varepsilon) + O(1)) \leqslant \log\lambda_f(\varepsilon) + O_{M,|I|}(1).$$
Из полученных оценок следует утверждение (iv).

Докажем неравенство (v). Достаточно для любой функции $f \in W(1, M, N, I)$ при $M|I|/\varepsilon \to \infty$ установить неравенство
$$L_B(f, \varepsilon) \leqslant \frac{M|I|/\varepsilon}{\log(M|I|/\varepsilon)}\left(1 + \frac{4\log\log(M|I|/\varepsilon) + O(1)}{\log(M|I|/\varepsilon)}\right) + O(\log\max(N, 1)) + O_{I,M}(1).$$
Повторив рассуждения из [25, с. 547—8], заметим, что оно вытекает из справедливой для любой функции $f \in W(1, 1, 1, [0, 1])$, $f(0) = 0$, оценки
$$L_B(f, \varepsilon) \leqslant \frac{1/\varepsilon}{\log(1/\varepsilon)}\left(1 + \frac{4\log\log(1/\varepsilon) + O(1)}{\log(1/\varepsilon)}\right). \tag{27}$$

Для любого $\eta \in (0, 1)$ обозначим $\mathfrak{M}_\eta$ множество всех кусочно-линейных непрерывных функций, линейных с угловыми коэффициентами ± 1 на отрезках $[i\eta, i\eta + \eta]$, $0 \leqslant i < [1/\eta]$, и равных нулю в нуле. Из леммы 21 следует, что $\mathfrak{M}_\eta$ является η-сетью для класса

$$\{f : f \in W(1, 1, 1, [0, 1]) \& f(0) = 0\}.$$

Лемма 63. *Если η — двоично-рациональное число, то*

$$\max_{f \in \mathfrak{M}_\eta} L_B(f) \leqslant O(1/\eta) + L_B(\eta).$$

Доказательство. Представим $f(x)$ в виде алгебраической суммы «ступенек»

$$f_i(x) = (|x - i\eta| - |x - i\eta - \eta| + \eta)/2, \quad 0 \leqslant i <]1/\eta[.$$

Тогда

$$L_B((f_i : 0 \leqslant i <]1/\eta[)) \leqslant O(1/\eta) + L_B(\eta)$$

и

$$L_B(f) \leqslant 1/\eta + L_B((f_i : 0 \leqslant i <]1/\eta[)) + O(1) \leqslant O(1/\eta) + L_B(\eta). \ \square$$

Положим $\mu = 2^{-2^n} m$, где $2^{-n} \leqslant \varepsilon < 2^{1-n}$, $\mu \leqslant \varepsilon < \mu + 2^{-2^n}$, тогда

$$\mu = \varepsilon(1 - O(\varepsilon)), \quad n = \log(1/\varepsilon) + O(1), \quad \log m = O(\log(1/\varepsilon)),$$

и $\mathfrak{M}_\mu$ является ε-сетью для класса

$$\{f : f \in W(1, 1, 1, [0, 1]) \& f(0) = 0\}.$$

Поэтому для получения оценки (27) достаточно для любой $f \in \mathfrak{M}_\mu$ получить оценку

$$L_B(f) \leqslant \frac{1/\varepsilon}{\log(1/\varepsilon)} \left(1 + \frac{4 \log\log(1/\varepsilon) + O(1)}{\log(1/\varepsilon)}\right). \tag{28}$$

Положим

$$\nu = \mu k, \quad k =]\log(1/\varepsilon)[s, \quad s =]\log(1/\varepsilon) - 4\log\log(1/\varepsilon)[$$

и представим функцию f в виде

$$f = g + h, \quad \text{где } h \in \mathfrak{M}_\nu, \quad \|g\| \leqslant \nu.$$

Так как из леммы 63 и леммы 3 [15] следует, что

$$L_B(h) \leqslant O(1/\nu) + L_B(\nu) \leqslant O(1/\nu) + O(\log(1/\varepsilon)) \leqslant O(1/\varepsilon \log^2 \varepsilon),$$

а

$$L_B(f) \leqslant L_B(g) + L_B(h) + O(1),$$

то для получения оценки (28) достаточно для $L_B(g)$ получить ту же оценку.

Для каждого i, $0 \leqslant i <]1/\nu[$, обозначим g_i четную 2ν-периодическую функцию, совпадающую с функцией g на отрезке $[i\nu, i\nu + \nu]$. На отрезках

$$[j\mu, j\mu + \mu] \subset [i\nu, i\nu + \nu], \quad j \in \mathbb{N},$$

функция g имеет угловые коэффициенты, принадлежащие $\{0, 2\}$ или $\{0, -2\}$ в зависимости от i (если $(i+1)\nu > 1$, то предполагаем, что функция g продолжена на отрезок $[1, (i+1)\nu]$ так, чтобы предыдущее утверждение оставалось верным). Поэтому справедливо при $0 \leqslant x \leqslant 1$ аналогичное равенству (2) равенство

$$g(x) = \max_{0 \leqslant i <]1/\nu[} \{\min(g_i(x), l_i(x))\}, \tag{29}$$

где $l_i(x) = \min\{2x + g(i\nu) - 2i\nu, \ -2x + 2(i+1)\nu + g(i\nu + \nu)\}$.

Из леммы 3 [15] следует, что
$$L_B(\mu)\leqslant O(\log(1/\varepsilon)),$$
откуда, учитывая, что
$$g(iv)=f(iv)-h(iv)\in\mu\mathbb{Z}-\nu\mathbb{Z}\subseteq\mu\mathbb{Z},\quad |g(iv)|\leqslant\nu=k\mu,$$
получаем неравенства
$$L_B((\mu,\ 2\mu,\ \ldots,\ k\mu))\leqslant L_B(\mu)+O(k)\leqslant O(\log^2(1/\varepsilon)),$$
$$L_B((2\nu,\ 4\nu,\ \ldots,\ 2]\,1/\nu\,[\nu))\leqslant L_B(\nu)+O(1/\nu)\leqslant O(\log^2\varepsilon+1/\nu)\leqslant O(1/\nu),$$
$$L_B((l_0(x),\ldots,l_{]1/\nu[-1}(x)))\leqslant O(1/\nu)+L_B((2\nu,4\nu,\ldots,2]\,1/\nu\,[\nu))+$$
$$+L_B((g(0),g(\nu),\ldots,g(]1/\nu[)))\leqslant O(1/\nu)+L_B((\mu,2\mu,\ldots,k\mu))\leqslant\frac{O(1/\varepsilon)}{\log^2\varepsilon}.$$

Поэтому из (29) следует неравенство
$$L_B(g)\leqslant O(1/(\varepsilon\log^2\varepsilon))+L_B[(g_0(x),\ \ldots,\ g_{]1/\nu[-1}(x))].\tag{30}$$

Обозначим f_i сужение функции g_i на отрезок $[0,\ \nu]$. Тогда при $0\leqslant x\leqslant 1$ в зависимости от четности i
$$g_i(x)=f_i(u(x))\quad\text{или}\quad f_i(\nu-u(x)),$$
где $u(x)$ — функция, равная на отрезке $[0,\ 1]$ 2ν-периодической функции, совпадающей с функцией $|x|$ на отрезке $[-\nu,\ \nu]$. Для каждого j,
$$0\leqslant j<k/s=]\log(1/\varepsilon)[,$$
положим
$$f_{i,j}(x)=\begin{cases}0, & x\in[-1,js\mu],\\ f_i(x)-f_i(js\mu), & x\in[js\mu,(j+1)\mu],\\ f_i((j+1)s\mu)-f_i(js\mu), & x\in[(j+1)s\mu,1].\end{cases}$$

Тогда
$$f_i(x)=f_i(0)+\sum_j f_{i,j}(x),$$
и поэтому при $0\leqslant x\leqslant 1$ справедливо, что в зависимости от четности i
$$g_i(x)=f_i(0)+\sum_j f_{i,j}(u(x))\quad\text{или}\quad f_i(0)+\sum_j f_{i,j}(\nu-u(x)).\tag{31}$$

Оценим сверху число q всех различных функций во множестве
$$\mathcal{F}=\{f_{i,j}(u(x)),f_{i,j}(\nu-u(x)):\ i,j\in\mathbb{N}\}.$$
Каждая из этих функций однозначно определяется, если заданы числа
$$(-1)^i\in\{-1,\ 1\},\quad j\in\{0,\ 1,\ \ldots,\ ]\log(1/\varepsilon)[-1\}$$
и двоичный вектор длины s угловых коэффициентов этих функций на отрезках
$$[l\mu,l\mu+\mu]\subset[js\mu,(j+1)s\mu],\quad l\in\mathbb{N}.$$
Поэтому
$$q\leqslant 2^{s+2}k/s\leqslant O(1/(\varepsilon\log^3(1/\varepsilon))).$$

Лемма 64. $L_B(f_{i,j})\leqslant O(\log(1/\varepsilon))+L_B((\mu,\ 2\mu,\ \ldots,\ k(\mu))$.

Доказательство аналогично лемме 63. Представим $f_{i,j}$ в виде алгебраической суммы «ступенек»
$$|x-l\mu|-|x-l\mu-\mu|+\mu,\quad js\leqslant l<js+s\leqslant k,$$

вычислим $\mu, \ldots, k\mu$ и получим оценку

$$L_B(f_{i,j}) \leqslant O(s) + L_B((\mu, 2\mu, \ldots, k\mu)) \leqslant O(\log(1/\varepsilon)) + \\ + L_B((\mu, 2\mu, \ldots, (k\mu)). \quad \square$$

Лемма 65. $L_B(u) \leqslant O(\log(1/\varepsilon))$.

Доказательство. Пусть

$$\nu\, 2^{n-1} < 1 \leqslant \nu\, 2^n.$$

Положим

$$u_0(x) = \min(x, \nu\, 2^n - x),$$

и для любого $m \in \mathbb{N}$

$$u_{m+1}(x) = \nu\, 2^{n-m-1} - |u_m(x) - \nu\, 2^{n-m-1}|,$$

тогда

$$u = u_n \text{ и } L_B(u) \leqslant O(n) + L_B(\nu\, 2^n) \leqslant O(\log 1/\varepsilon). \quad \square$$

Из леммы 64, 65 и оценки для q следует, что

$$L_B(\mathscr{F}) \leqslant O(q \log(1/\varepsilon)) + O(L_B(u)) + L_B((\mu, 2\mu, \ldots, k\mu)) \leqslant \\ \leqslant O(1/(\varepsilon \log^2 \varepsilon)).$$

Учитывая это и то, что

$$f_i(0) = g_i(0) \in \{-k\mu, \ldots, k\mu\},$$

из (31) выводим оценку

$$L_B((g_0(x), \ldots, g_{]1/\nu[-1}(x))) \leqslant L_B((\mu, 2\mu, \ldots, k\mu)) + L_B(\mathscr{F}) + \\ + (k/s + O(1))\,]1/\nu[\leqslant 1/s\mu + O(1/(\varepsilon \log^2 \varepsilon)) \leqslant \frac{1}{\varepsilon \log(1/\varepsilon)}\left(1 + \frac{4 \log\log(1/\varepsilon) + O(1)}{\log 1/\varepsilon}\right). \tag{32}$$

Из (32) и (30) следует нужная нам оценка. Утверждение (v) доказано.

Доказательство (iv) можно, подобно (v), свести к проверке справедливости для любой функции $f(x) \in \mathfrak{M}_\mu$ неравенства

$$L_B(f, \varepsilon^2) \leqslant \frac{1}{\varepsilon \log(1/\varepsilon)}\left(1 + \frac{6 \log\log(1/\varepsilon) + O(1)}{\log(1/\varepsilon)}\right). \tag{33}$$

Положим

$$s =]\log(1/\varepsilon) - 6 \log\log(1/\varepsilon)[, \quad k = s]\log^2 \varepsilon[, \quad \nu = k\mu$$

и представим f в виде

$$h + g, \quad \text{где} \quad h \in \mathfrak{M}_\nu, \quad \|g\| \leqslant \nu.$$

Далее понадобится

Лемма 66. *Если $t(x) \in \mathfrak{M}_\eta$, где число η двоично-рационально, то*

$$\max_{t \in \mathfrak{M}_\eta} L_B(t, \delta) \leqslant O(1/\eta) \log(1/\eta\delta) + L_B(\eta).$$

Доказательство. Как и в лемме 63, представим f в виде

$$\sum_{i=0}^{]1/\eta[-1} f_i.$$

Тогда

$$L_B(f, \delta) \leqslant O(1/\eta) + L_B((f_0(x), \ldots, f_{]1/\nu[-1}(x)), \eta\delta/(\eta+1)) \leqslant \\ \leqslant O(1/\eta) L_B(|x|, \eta\delta/(\eta+1)) + L_B(\eta).$$

Применяя лемму 38, получаем нужную оценку. $\square$

Так как

$$L_B(f,\ \varepsilon^2) \leqslant L_B(g,\ \varepsilon^2/2) + L_B(h,\ \varepsilon^2/2) + O(1),$$

то оценку (33) можно вывести с помощью лемм 2, 66 из неравенства

$$L_B(g, \varepsilon^2/2) \leqslant \frac{1}{\varepsilon \log(1/\varepsilon)}\left(1 + \frac{6\log\log(1/\varepsilon) + O(1)}{\log(1/\varepsilon)}\right). \tag{34}$$

Для его доказательства воспользуемся тождеством (29). Аналогично (v) проверяем, что

$$L_B[(l_0(x),\ \ldots,\ l_{]1/\nu[-1}(x))] \leqslant O(1/\varepsilon \log^2 \varepsilon). \tag{35}$$

Так как в (29) функции max и min вычисляются для аргументов из отрезка $[-3, 3]$, то из (29) и (35) с помощью леммы 39 следует, что

$$L_B\left(g, \frac{\varepsilon^2}{2}\right) \leqslant L_B\left(\max(x_0, \ldots, x_{]1/\nu[-1}), \frac{\varepsilon^2}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\nu}\right) L_B\left(\min(x, y), \frac{\varepsilon^2}{8}\right) +$$

$$+ L_B((l_0(x), \ldots, l_{]1/\nu[-1}(x)) + L_B\left((g_0(x), \ldots, g_{]1/\nu[-1}(x)), \frac{\varepsilon^2}{8}\right) \leqslant$$

$$\leqslant O(1/(\varepsilon \log^2 \varepsilon)) + L_B\left((g_0(x), \ldots, g_{]1/\nu[-1}(x)), \frac{\varepsilon^2}{8}\right). \tag{36}$$

Оценим последнее слагаемое с помощью тождества (31). Получим, что

$$L_B\left((g_0(x), \ldots, g_{]1/\nu[-1}(x)), \frac{\varepsilon^2}{8}\right) \leqslant O(1/(\varepsilon \log^2 \varepsilon)) + \frac{1}{s\mu} + L_B\left(F, \frac{O(\varepsilon)^2}{\log^2 \varepsilon}\right). \tag{37}$$

Далее понадобятся следующие аналоги лемм 64, 65.

Лемма 67.

$$L_B(f_{i,j},\ \delta) \leqslant O(\log(1/\varepsilon))(\log(1/\delta) + \log\log(1/\varepsilon)) + L_B((\mu,\ 2\mu,\ \ldots,\ k\mu)).$$

Доказательство. Представим $f_{i,j}$ в виде алгебраической суммы «ступенек»

$$|x - l\mu| - |x - l\mu - \mu| + \mu, \quad js \leqslant l < js + s \leqslant k.$$

Применяя лемму 38, получаем, что

$$L_B(f_{i,j},\ \delta) \leqslant O(s)\log(2s/\delta) + L_B((\mu,\ 2\mu,\ \ldots,\ k\mu)),$$

откуда и следует оценка леммы. □

Лемма 68. $L_B(u,\ \delta) \leqslant O(\log(1/\varepsilon))(\log(1/\delta) + \log\log(1/\varepsilon))$.

Доказательство. Воспользуемся последовательностью $\{u_m(x)\}$, указанной в лемме 65. Применяя леммы 38, 39, замечаем, что если $\nu 2^n$ заранее вычислено, то

$$L_B(u_{m+1},\ (m+2)\delta/(n+1)) \leqslant$$

$$\leqslant L_B(u_m,\ (m+1)\delta/(n+1)) + L_B(|x|,\ \delta/(n+1)) + O(1) \leqslant$$

$$\leqslant L_B(u_m,\ (m+1)\delta/(n+1)) + O(\log(n+1)/\delta),$$

где $n =]\log(1/\nu)[$, $0 \leqslant m < n$, откуда

$$L_B(u,\ \delta) = L_B(u_n,\ \delta) \leqslant O(n\log((n+1)/\delta)) + L_B(\nu\, 2^n) \leqslant$$

$$\leqslant O(\log(1/\varepsilon))(\log(1/\delta) + \log\log(1/\varepsilon)). \ \square$$

Так как угловые коэффициенты функции $f_{i,j}$ равны 0, 2, −2, то

$$f_{i,j} \in W(1,\ 2,\ 1,\ [0,\ 1]),$$

значит,

$$L_B(F, \delta) \leqslant 2q \max_{i,j} L_B(f_{i,j}, \delta/2) + 2L_B(u,\ \delta/4) + L_B(\nu) +$$

$$+ L_B((\mu,\ 2\mu,\ \ldots,\ k\mu)) + O(1).$$

Применяя леммы 67, 68 и оценки

$$L_B(\nu)\leqslant O(\log(1/\varepsilon)),\quad q\leqslant 2^{s+2}k/s\leqslant O(1/(\varepsilon\log^4\varepsilon)),$$

получаем, что

$$L_B(F,\ O(\varepsilon^2)/\log^2\varepsilon)\leqslant O(1/(\varepsilon\log^2\varepsilon))+O(\log^2\varepsilon)+O(\log(1/\varepsilon))+ \\ +O(1/(\varepsilon\log^3\varepsilon))\leqslant O(1/(\varepsilon\log^2\varepsilon)). \qquad (38)$$

Из (36)—(38) следует оценка

$$L_B(g,\varepsilon^2/2)\leqslant O(1/(\varepsilon\log^2\varepsilon))+1/(s\mu)=\frac{1}{\varepsilon\log(1/\varepsilon)}\left(1+\frac{6\log\log(1/\varepsilon)+O(1)}{\log(1/\varepsilon)}\right).$$

Следовательно, оценка (34), а потому и последний пункт теоремы 8 доказаны. □

Замечание 8. *Аналогичным образом для класса*

$$\mathcal{K}=\left\{f: f\in W\left(1,\frac{1}{8},\frac{1}{8},[0,1]\right)\ \&\ f(0)=0\right\}$$

и базиса $B=\left\{\frac{x+y}{2},\max(x,y),-x,1\right\}$ можно доказать оценку

$$L_B(\mathcal{K},\ \varepsilon)\lesssim 1/(8\varepsilon\log(1/\varepsilon)).$$

Из теоремы 1 и равенства

$$H_\varepsilon(\mathcal{K})\sim 1/(8\varepsilon),$$

вытекающего из результатов [23], следует тогда, что

$$L_B(\mathcal{K},\ \varepsilon)\sim 1/(8\varepsilon\log(1/\varepsilon))\sim H_\varepsilon(\mathcal{K})/\log H_\varepsilon(\mathcal{K}).$$

Для базиса

$$B=\left\{\frac{x+y}{2},\max(x,y),\ -x\right\}\cup(0,1)$$

справедлива та же верхняя оценка, а из теоремы 2 (ii) следует нижняя оценка

$$L_B(\mathcal{K},\varepsilon)\gtrsim\frac{1}{2}H_\varepsilon(\mathcal{K})/\log H_\varepsilon(\mathcal{K})\sim 1/32\varepsilon\log(1/\varepsilon).$$

Приведенный пример показывает, что оценка теоремы 2 (ii), вообще говоря, по порядку точная.

Отличия в доказательстве от теоремы 8 (v) следующие. Вместо леммы 3 из [15] используем, то, что для любого числа

$$a=\pm p2^{-q}\in[-1,\ 1],\ p,\ q\in\mathbb{N},$$

справедлива оценка

$$L_B(a)\leqslant O(q).$$

Вместо леммы 63 используем то, что для любой функции $f(x)$, $f(0)=0$, кусочно-линейной с угловыми коэффициентами $\pm 1/8$ и узлами в точках с абсциссами

$$8i\delta,\ i\in\mathbb{N},\ \delta=p2^{-q},\quad p,q\in\mathbb{N},$$

справедлива оценка

$$L_B(f)\leqslant O(q/\delta).$$

Для ее доказательства функция f выражается через max, min и линейные функции вида

$$\pm(x-a)/8=\pm(x/2+a/2)/4,\quad |a|\leqslant 2,$$

а их сложность оценивается с помощью неравенства

$$L_B(p\,2^{-q}) \leqslant O(q).$$

Положим

$$s = \,]\log(1/\varepsilon) - 6\log\log(1/\varepsilon)\,[,\quad k = s]\log^2\varepsilon\,[,\quad \nu = 8k\mu$$

и используем тождество (29) при

$$l_i(x) = \min(x/4 + g(i\nu) - i\nu/4,\ -x/4 + (i+1)\nu/4 + g(i\nu + \nu)).$$

Получаем оценку

$$L_B[(l_0(x),\ \ldots,\ l_{]1/\nu[-1}(x))] \leqslant O(1/\nu)\log(1/\varepsilon) \leqslant O(1/(\varepsilon\log^2\varepsilon)).$$

Определяем функцию $f_{i,j}$ как совпадающую с функцией $f_i(2x)$ на отрезке $[4js\mu,\ 4(j+1)s\mu]$ и линейную с коэффициентами $\pm1/2$ на отрезках $[0,\ 4js\mu]$ и $[4(j+1)s\mu,\ 1]$. Тогда

$$g_i(x) = \max_j\{f_{i,j}(u(x))\}\ \text{ или }\ \max_j\{f_{i,j}(\nu/2 - u(x))\}$$

в зависимости от i, где $u(x)$ — 2ν-периодическая функция, равная $|x|/2$ на отрезке $[-\nu,\ \nu]$ (вдвое меньшая, чем в теореме 8 (v)). Вместо леммы 64 используем оценку

$$L_B(f_{i,j}) \leqslant O(s\log(1/\varepsilon)) = O(\log^2\varepsilon),$$

для доказательства которой выражаем $f_{i,j}$ через $O(s)$ функций max, min, констант из множества $\{-k\mu,\ \ldots,\ k\mu\}$ и линейных функций вида

$$\pm(x+a)/2,\ a \in \{-2k\mu,\ \ldots,\ 4k\mu\}.$$

Вместо леммы 65 используем оценку

$$L_B(u) \leqslant O(1/\nu)\log(1/\varepsilon) \leqslant O(1/(\varepsilon\log^2\varepsilon)),$$

для доказательства которой поступаем аналогично.

Число q оцениваем как

$$O(2^s k/s) \leqslant O(1/(\varepsilon\log^4\varepsilon)).$$

Заканчиваем доказательство оценки $L_B(\mathscr{K},\ \varepsilon)$ так же, как и в теореме 8.

Замечание 9. Для произвольного базиса B определим меру сложности $L_B^*(f)$ как наименьшую длину неветвящейся программы, состоящей из команд вида $u_i = g(u_i,\ u_j,\ \ldots)$, выполняющих операции g из базиса B, и команд пересылки $u_i := u_j$, и реализующей функцию f. Ясно, что

$$L_B^*(f) \geqslant L_B(f).$$

Эта мера сложности более близка к реальным машинным вычислениям, так как учитывает память, нужную для хранения промежуточных результатов.

Легко показать, что теоремы 1—8 справедливы и для этой меры сложности. Достаточно обосновать верхние оценки. В случае теорем 4—7 они следуют из неравенства

$$L_B^*(f) \leqslant 2L_B(f).$$

Для его доказательства достаточно преобразовать произвольную схему $f_1,\ \ldots,\ f_L$, где $f_i = g(f_{i_1},\ \ldots,\ f_{i_k})$, $g \in B$, $n \leqslant i \leqslant L$, $i_1,\ \ldots,\ i_k < i$, в неветвящуюся программу, заменив каждую f_i на пару равенств

$$u_i = u_{i_1},\quad u_i = g(u_i, u_{i_2},\ \ldots, u_{i_k}),$$

и доказать по индукции, что $u_i = f_i$.

Для обоснования аналогов теоремы 8 (v) и (vi) достаточно внести в доказательство следующие изменения. Во всех оценках вида

$$L_B(\cdot) \leqslant O(\cdot)$$

заменим L_B на L_B^*. Так как

$$L_B^*(x_1 + \ldots + x_n) \leqslant n + O(1),$$

то неравенства (32) и (37) справедливы также и для L_B^*. Так как именно они обусловливают появление главного члена в асимптотике, то неравенства (v) и (vi) теоремы 8 справедливы также и для L_B^*.

Замечание 10. Можно доказать, что для любой функции $f \in C(I)$ и базиса $B = \{x - y, xy, 1/2\}$ справедлива оценка

$$L_B^*(f, \varepsilon) \lesssim (|I| \log 3)/\left(\omega^{-1}(f, 2\varepsilon/3 + \varepsilon^2) \,|\log \omega^{-1}(f, 2\varepsilon/3 + \varepsilon^2)|\right).$$

§ 9. О сложности реализации классов $W(\mathrm{r}, \mathrm{M}, N, I)$ формулами в некоторых континуальных базисах

В этом параграфе рассматриваются некоторые базисы, не удовлетворяющие условиям теорем 1—3.

Обозначим через M базис, состоящий из всех монотонных функций одной переменной (в том числе и всех констант) и всех функций max и min от любого числа переменных, через R — базис, состоящий из всех жегалкинских рациональных дробей, через P — базис, состоящий из всех жегалкинских полиномов, через B_n — базис, состоящий из всех функций базиса B, зависящих не более чем от n переменных.

Обозначим L° меру сложности формул, равную числу вхождений всех переменных и констант.

Несколько менее общий вариант следующей теоремы сформулирован в [14].

Теорема 9. *При любом $n \geqslant 2$ справедливо, что*

(i) *для любых $f \in C(I)$, $r \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \leqslant \min\left(\|f\|, c_r^{-1}\omega_r(f, |I|)\right)$*

$$\overset{\circ}{L}_M(f, \varepsilon) \asymp \widetilde{L}_M(f, \varepsilon) \asymp \overset{\circ}{L}_{M_n}(f, \varepsilon) \asymp \widetilde{L}_{M_n}(f, \varepsilon) \lesssim \overset{\circ}{L}_R(f, \varepsilon) \asymp \overset{\circ}{L}_{R_n}(f, \varepsilon) \asymp$$

$$\asymp \widetilde{L}_{R_n}(f, \varepsilon) \leqslant \widetilde{L}_{P_n}(f, \varepsilon) \asymp \overset{\circ}{L}_{P_n}(f, \varepsilon) \asymp \overset{\circ}{L}_P(f, \varepsilon) \asymp \widetilde{L}_{\{x+y, xy\} \cup \mathbb{R}}(f, \varepsilon) \asymp$$

$$\asymp \overset{\circ}{L}_{(x+y, xy) \cup \mathbb{R}}(f, \varepsilon) \lesssim \lambda_{f,r}(\varepsilon/c_r),$$

(ii) *для любых классов $W(r, r', M, N, I)$ и $\varepsilon < N$*

$$\widetilde{L}_{\{x+y, xy\} \cup \mathbb{R}}(W, \varepsilon) \asymp \overset{\circ}{L}_{\{x+y, xy\} \cup \mathbb{R}}(W, \varepsilon) \asymp \widetilde{L}_{P_n}(W, \varepsilon) \asymp \overset{\circ}{L}_{P_n}(W, \varepsilon) \asymp$$

$$\asymp \widetilde{L}_{R_n}(W, \varepsilon) \asymp \overset{\circ}{L}_{R_n}(W, \varepsilon) \asymp \widetilde{L}_{M_n}(W, \varepsilon) \asymp \overset{\circ}{L}_{M_n}(W, \varepsilon) \asymp \widetilde{L}_M(W, \varepsilon) \asymp$$

$$\asymp \overset{\circ}{L}_M(W, \varepsilon) \asymp \overset{\circ}{L}_P(W, \varepsilon) \asymp \overset{\circ}{L}_R(W, \varepsilon) = O_{r,r'}\left(|I| \left(\frac{M}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{r}}\right) + O_{r,I,M}(1).$$

Сначала докажем три леммы.

Лемма 69. *Для любой рациональной дроби $f(x)$ справедливо неравенство*

$$\widetilde{L}_M(f) \leqslant 4 \deg f(x) + 1.$$

Доказательство. Можно считать, что

$$\deg f(x) > 0.$$

Так как $Df(x)$ имеет менее $2 \deg f(x)$ корней, то $f(x)$ имеет не более

$2\deg f(x)$ интервалов монотонности

$$I_i = (a_{i-1}, a_i), \quad a = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = b, \quad I = [a, b].$$

Пусть $f(x)$ на I_1 возрастает. Обозначим f_{2i-1} возрастающую непрерывную функцию, равную f на интервале I_{2i-1}, постоянную на интервале $(a_{2i-1}, +\infty)$ и линейную с угловым коэффициентом $\|Df\|_{C(I)}$ на интервале $(-\infty, a_{2i-2})$. Аналогично определим убывающие функции f_{2i}. Тогда

$$f(x) = \max\{\min(f_{2i-1}, f_{2i})\},$$

откуда и следует неравенство леммы. Случай, когда f на I_1 убывает, рассматривается аналогично. □

Лемма 70 [27]. *Для любых функции f и базиса B справедливо неравенство*

$$\widetilde{L}_{B_n}(f) \geqslant \frac{1}{n-1}\left(\overset{\circ}{L}_{B_n}(f) - 1\right) \geqslant \frac{1}{n-1}\left(\overset{\circ}{L}_B(f) - 1\right).$$

Лемма 71. *Для любой кусочно-монотонной функции f*

$$\overset{\circ}{L}_M(f) \asymp \widetilde{L}_M(f) \asymp \widetilde{L}_{M_n}(f).$$

Доказательство. Так как класс монотонных функций замкнут относительно суперпозиции, а класс, состоящий из max и min, замкнут относительно отождествления переменных, то можно рассматривать только формулы, в которых к каждому элементу max или min присоединяется не более чем один из входов формулы, и одновходовые элементы не соединяются друг с другом. Замечая, что в таких формулах число многовходовых элементов меньше числа вхождений переменных, получаем, что

$$\overset{\circ}{L}_M(f) \leqslant \widetilde{L}_M(f) \leqslant \widetilde{L} \quad (f) \leqslant 3\overset{\circ}{L}_M(f) - 2. \ \square$$

Из лемм 17, 69, 70 следует неравенство

$$\widetilde{L}_M(f) \precsim \deg f \leqslant \overset{\circ}{L}_R(f) \leqslant \overset{\circ}{L}_{R_n}(f) \precsim \widetilde{L}_{R_n}(f).$$

Так как класс R_1 замкнут относительно суперпозиции и сохраняет множество R_n, и оно замкнуто относительно бесповторной суперпозиции с функциями из класса R_1, то можно рассматривать только формулы, не содержащие одновходовых элементов и констант, и поэтому

$$\widetilde{L}_{R_n}(f) \leqslant \overset{\circ}{L}_{R_n}(f) - 1.$$

Для произвольного полинома f очевидны неравенства

$$\widetilde{L}_{R_n}(f) \leqslant \widetilde{L}_{P_n}(f) \leqslant \widetilde{L}_{\{x+y, xy\}\cup\mathbb{R}}(f).$$

Пусть $f \in C(I)$, $d \in \mathbb{N}$. Из леммы 11 следует, что для некоторого полинома p степени d справедливо неравенство

$$\|f - p\|_{C(I)} \leqslant c_r \omega_r(f, |I|/(d+1)).$$

Выбрав d так, чтобы

$$d \asymp \lambda_{f,r}(\varepsilon/c_r) \text{ и } c_r\omega_r(f, |I|/(d+1)) \leqslant \varepsilon,$$

получаем тогда, что

$$\widetilde{L}_{\{x+y, xy\}\cup\mathbb{R}}(f, \varepsilon) \precsim \lambda_{f,r}(\varepsilon/c_r).$$

Утверждение (i) доказано.

Лемма 72. *Обозначим J булеву алгебру множеств, являющихся объединениями конечного числа интервалов, полуинтервалов и отрезков.*

Для каждого $A \in J$ обозначим $m(A)$ число попарно не пересекающихся интервалов, полуинтервалов и отрезков, объединение которых составляет множество A. Тогда для любых $A, B \in J$ справедливо неравенство

$$\max(m(A \cup B), m(A \cap B)) \leqslant m(A) + m(B).$$

Доказательство. Неравенство $m(A \cup B) \leqslant m(A) + m(B)$ очевидно. Неравенство для $m(A \cap B)$ получается из предыдущего переходом к дополнениям. □

Лемма 73. *Для каждой кусочно-монотонной функции $f \in C(I)$ положим*

$$m(f) = \max_{c \in \mathbb{R}} \left(\max \left(m\left(f^{-1}(-\infty, c)\right), m\left(f^{-1}(c, +\infty)\right)\right)\right).$$

Тогда справедливо неравенство

$$\overset{\circ}{L}_M(f) \geqslant m(f).$$

Доказательство. Пусть Φ — произвольная формула в базисе M, реализующая функцию f. Докажем индукцией, что

$$\overset{\circ}{L}_M(f) \geqslant m(f).$$

База индукции проверяется непосредственно. Шаг индукции. Пусть

$$\Phi = \max(\Phi_1, \ldots, \Phi_k).$$

Тогда при любом $c \in \mathbb{R}$ справедливы равенства

$$\left(f^{-1}(-\infty, c)\right) = \bigcap_{i=1}^{k} \Phi_i^{-1}(-\infty, c) \quad \text{и} \quad f^{-1}(c, +\infty) = \bigcup_{i=1}^{k} \Phi_i^{-1}(c, +\infty).$$

Из них с помощью леммы 72 следует, что

$$m(f) \leqslant \sum_{i=1}^{k} m(\Phi_i).$$

Применяя предположение индукции, отсюда выводим, что

$$\overset{\circ}{L}_M(\Phi) = \sum_{i=1}^{k} \overset{\circ}{L}_M(\Phi_i) \geqslant \sum_{i=1}^{k} m(\Phi_i) \geqslant m(f).$$

Случаи

$$\Phi = \min(\Phi_1, \ldots, \Phi_h) \quad \text{и} \quad \Phi = \varphi(\Phi_1),$$

где φ — монотонная функция, рассматриваются аналогично. □

Известно ([23, § 5] или [18, гл. 3, § 3]), что для любых r, M, h,

$$r,\ M,\ h > 0,\ I = [a, b],\ N \geqslant c_r M h^r$$

существует функция

$$\varphi_h \in W_1(r, M, N, I),$$

равная 0 на отрезке $[a+h, b]$ и в точке a, положительная на интервале $(a, a+h)$, производная которой порядка $]r-1[$ в точках a и $a+h$ равна 0. Рассмотрим функцию

$$f(x) \in W_1(r, M, N, I),$$

равную на каждом отрезке $[a+ih, a+ih+h]$ функции

$$(-1)^i \varphi_h(x - ih).$$

Пусть функция $g \in C(I)$ такова, что

$$\|f - g\|_{C(I)} \leqslant \varepsilon < \|f\| = O_r\left(Mh^r\right) \quad \text{и} \quad \overset{\circ}{L}_M(g) = \overset{\circ}{L}_M(f, \varepsilon).$$

Тогда

$$m(g) \geqslant m(g^{-1}(0, +\infty)) \geqslant |I|/2h - 1,$$

и при $h < |I|/4$ согласно лемме 73

$$\overset{\circ}{L}_M(f, \varepsilon) = \overset{\circ}{L}_M(g) \succcurlyeq |I|/h.$$

Выберем

$$h \asymp (\varepsilon/M)^{1/r}$$

так, чтобы $\varepsilon < \|f\|$. Тогда при $\varepsilon < \min\left(N, c_r^{-1} M \mid I \mid^r\right)$

$$L_M(W_1(r, M, N, I), \varepsilon) \geqslant c_r(|I|(M/\varepsilon)^{1/r}).$$

Подобное же неравенство для классов W_2 вытекает из включения, упомянутого в § 2. Верхние оценки следуют из неравенств п. (i). □

Из теоремы 9 следует, что при

$$\log(N/\varepsilon) \leqslant O(|I|(M/\varepsilon)^{1/r})$$

$$\widetilde{L}_{\{x+y, xy\} \cup \mathbb{R}}(W, \varepsilon) = O_{r,r'}(H_\varepsilon(W)) + O_{r,I,M}(1).$$

Тем самым теорема 6 (iv) полностью доказана.

Замечание 11. Так как произвольный полином

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

представим в виде

$$f(x) = p(x, \ldots, x),$$

где

$$p(x_1, \ldots, x_n) = a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_1 \ldots x_n \in P_n,$$

то для любого класса $\mathscr{K} \subset C(I)$

$$\widetilde{L}_P(\mathscr{K}, \varepsilon) = \widetilde{L}_R(\mathscr{K}, \varepsilon) = D_P(\mathscr{K}, \varepsilon) = D_P(\mathscr{K}, \varepsilon) = 1.$$

Замечание 12. Для произвольной функции $f \in C(I)$ определим $E^{-1}(f, \varepsilon)$ как наименьшую степень алгебраического полинома, уклоняющегося от f не более чем на ε. В случае рациональных приближений аналогично определим $R^{-1}(f, \varepsilon)$. Из леммы 17 тогда следует, что

$$\overset{\circ}{L}_R(f, \varepsilon) \geqslant R^{-1}(f, \varepsilon), \quad \overset{\circ}{L}_P(f, \varepsilon) \geqslant E^{-1}(f, \varepsilon),$$

а из леммы 3 — что

$$\overset{\circ}{L}_{\{x+y, xy\} \cup \mathbb{R}}(f, \varepsilon) \preccurlyeq E^{-1}(f, \varepsilon),$$

$$\overset{\circ}{L}_{\{x+y, xy, 1/x\} \cup \mathbb{R}}(f, \varepsilon) \preccurlyeq R^{-1}(f, \varepsilon).$$

$$D_{\{x+y, xy\} \cup \mathbb{R}}(f, \varepsilon) \leqslant \log E^{-1}(f, \varepsilon) + O(1),$$

$$D_{\{x+y, xy, 1/x\} \cup \mathbb{R}}(f, \varepsilon) \leqslant \log R^{-1}(f, \varepsilon) + O(1).$$

Поэтому цепочку соотношений теоремы 9 (i) можно уточнить, вставив в нее соотношения

$$\widetilde{L}_R(f, \varepsilon) \asymp R^{-1}(f, \varepsilon), \quad \overset{\circ}{L}_P(f, \varepsilon) \asymp E^{-1}(f, \varepsilon) \asymp \widetilde{L}_{\{x+y, xy\} \cup \mathbb{R}}(f, \varepsilon).$$

Цепочки соотношений, подобные теореме 9, можно написать и для мер сложности типа D, кроме, разумеется, $D_P(f, \varepsilon)$ и $D_R(f, \varepsilon)$. В них знаки будут заменены на равенства с точностью до аддитивной константы, а соответствующие величины прологарифмированы.

Можно доказать, что для любого полного в пространстве $C(I)$ базиса B такого, что $\mathbb{R} \subset B \subset P$, справедливо, что

$$\overset{\circ}{L}_B(f, \varepsilon) \asymp E^{-1}(f, \varepsilon).$$

Замечание 13. Из известных результатов [7, 32] следует, что для функции

$$f(x) = x^{[r-1]}|x|^{r-[r-1]} \in W_1(r, c_r, 1, [-1, 1])$$

справедливы соотношения

$$\overset{\circ}{L}_M(f, \varepsilon) = 2, \quad \overset{\circ}{L}_R(f, \varepsilon) \asymp (\log \varepsilon)^2, \quad \overset{\circ}{L}_P(f, \varepsilon) \asymp \varepsilon^{-1/r}.$$

Значит, неравенства в п. (i) теоремы 9, вообще говоря, нельзя заменить па равенства, а последнее неравенство достижимое по порядку.

Замечание 14. Для любых r, $M > 0$, $I = [a, b]$ и возрастающей положительной функции $\varphi(n)$ такой, что сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/\varphi(n),$$

можно эффективно построить функции

$$f_1, f_2 \in W(r, M, N, I)$$

такие, что

$$\overset{\circ}{L}_R(f_1, \varepsilon) \geqslant c_r |I| (M/\varepsilon\varphi [\log M/\varepsilon])^{1/r},$$
$$L_{\{x-y, xy, 1/2\}}(f_1, \varepsilon) \leqslant O_r(\log^2 M/\varepsilon),$$
$$\overset{\circ}{L}_M(f_2, \varepsilon) \geqslant c_r |I| (M/\varepsilon)^{1/r}/\varphi([\log M/\varepsilon]).$$

Для любой стремящейся к нулю функции $\delta(\varepsilon)$ можно эффективно построить функции

$$f_1, f_2 \in W(r, M, N, I)$$

такие, что

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \overset{\circ}{L}_R(f_1, \varepsilon)/(\delta(\varepsilon)(M/\varepsilon)^{1/r}) \geqslant 1,$$
$$L_{\{x+y, xy\} \cup \mathbb{R}}(f_1, \varepsilon) \leqslant O_r(\log^2 M/\varepsilon),$$
$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \overset{\circ}{L}_M(f_2, \varepsilon)/(\delta(\varepsilon)(M/\varepsilon)^{1/r}) \geqslant 1.$$

Поэтому все неравенства в п. (i) теоремы 9, вообще говоря, по порядку близки к достижимым, а распространить теорему на меры сложности типа L нельзя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Асарин Е. А. О сложности равномерных приближений непрерывных функций // УМН.— 1984.— Т. 39, № 3.— С. 157—169.
2. Бабенко И. К. и др. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики.— М.: Наука, 1979.
3. Бернштейн С. Н. Сочинения.— Т. 2.— М.: Изд. АН СССР, 1954.
4. Брудный Ю. А., Котляр Б. Д. О порядке роста ε-энтропии на некоторых компактных классах функций // ДАН СССР.— 1963.— Т. 148, № 5.— С. 1001—1004.
5. Брудный Ю. А. Теорема продолжения для одного семейства функциональных пространств // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.— 1976.— Т. 56.
6. Витушкин А. Г. Оценка сложности задачи табулирования.— М.: ФМ, 1958.
7. Вячеславов Н. С. Скорость аппроксимации частично-аналитических функций рациональными дробями в метрике L_p // Мат. сб.— 1979.— Т. 108, № 2.— С. 203—212.
8. Гашков С. Б. Сложность реализации булевых функций схемами из функциональных элементов и формулами в базисах, элементы которых реализуют непрерывные функции // Проблемы кибернетики.— Вып. 37.— М.: Наука, 1980.— С. 57—118.
9. Гашков С. Б. О сложности приближенной реализации аналитических функций схемами и формулами // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика.— 1983.— № 4.— С. 36—43.

10. Гашков С. Б. О сложности приближенной реализации некоторых классов дифференцируемых функций одной переменной схемами из функциональных элементов // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика.— 1984.— № 3.— С. 35—41.
11. Гашков С. Б. О сложности приближенной реализации некоторых классов дифференцируемых функций одной переменной формулами в непрерывных базисах // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика.— 1984.— № 6.— С. 53—57.
12. Гашков С. Б. О сложности приближенной реализации некоторых классов дифференцируемых функций многих переменных при помощи схем и формул в некоторых базисах, состоящих из непрерывных функций // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика.— 1986.— № 3.— С. 48—57.
13. Гашков С. Б. О сложности приближенной реализации непрерывных функций и о континуальных аналогах эффекта Шеннона // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика.— 1986.— № 6.— С. 25—33.
14. Гашков С. Б. О сложности приближенной реализации непрерывных функций схемами и формулами в непрерывных базисах // Сб. тезисов конф. FCT — 87, **Казань**, 1987.— Lecture Notes in Computer Sciences.— Spinger.— V. 278.— P. 140—144.
15. Гашков С. Б. О сложности приближенной реализации функций, удовлетворяющих условию Липшица, схемами в непрерывных базисах // Мат. заметки.— 1988.— Т. 43, № 4.— С. 543—557.
16. Гончар А. А. Обратные теоремы для наилучших приближений рациональными функциями // Изв. АН СССР.— 1961.— Т. 25.— С. 347—356.
17. Гончар А. А. Оценки роста рациональных функций и некоторые их приложения // Мат. сб.— 1967.— Т. 72(114).— С. 489—503.
18. Даугавет И. К. Введение в теорию приближения функций.— М.: Изд-во ЛГУ, 1977.
19. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М.: Наука, 1976.
20. Иванов Л. Д. Вариации функций и множеств.— М.: Наука, 1975.
21. Касселс Д. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений.— М.: ИЛ, 1961.
22. Кнут Д. Искусство программирования на ЭВМ. Т. 2.— М.: Мир, 1977.
23. Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М. ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах // УМН.— 1959.— Т. 14, № 2(86).— С. 3—86.
24. Колмогоров А. Н. Различные подходы к оценке трудности приближенного задания и вычисления функций // Proc. Intern. Congr. Math. Stockholm.— 1963.— P. 369—376.
25. Корнейчук Н. П. Сплайны в теории приближений.— М.: Наука, 1984.
26. Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения.— М.: Наука, 1987.
27. Лупанов О. Б. О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. Вып. 3.— М.: ФМ, 1960.— С. 61—80.
28. Лупанов О. Б. Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования // Проблемы кибернетики. Вып. 14.— М.: Наука, 1965.— С. 31—110.
29. Лупанов О. Б. О схемах из функциональных элементов с задержками // Проблемы кибернетики. Вып. 23.— М.: Наука, 1970.— С. 43—81.
30. Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем.— М.: Изд-во МГУ, 1984.
31. Нигматуллин Р. Г. Сложность булевых функций.— М.: Наука, 1991.
32. Никольский С. М. О наилучшем приближении функций, r-тые производные которых имеют разрывы первого рода // ДАН СССР.— 1947.— Т. 55.— С. 99—102.
33. Никольский С. М. Теория приближений функций многих переменных и теоремы вложения.— М.: Наука, 1976.
34. Офман Ю. П. Об алгоритмической сложности дискретных функций // ДАН СССР.— 1962.— Т. 145, № 1.— С. 48—51.
35. Петровский И. Г. Работы по дифференциальным уравнениям в частных производных и топологии алгебраических поверхностей.— М.: Наука, 1987.
36. Сендов Б., Попов В. Усредненные модули гладкости.— М.: Мир, 1988.
37. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Добавление к книге Дж. Альберга, Э. Нильсона, Дж. Уолша «Теория сплайнов и ее приложения».— М.: Мир, 1972.
38. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике.— М.: Наука, 1976.
39. Тиман А. Ф. Теория приближений функций действительного переменного.— М.: ФМ, 1960.
40. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений.— М.: Изд-во МГУ, 1976.
41. Тогер А. В. О сложности некоторых функциональных классов // ДАН СССР.— 1971.— Т. 199, № 4.— С. 789—791.

42. Трауб Дж., Вожьняковский Х. Общая теория оптимальных алгоритмов.— М.: Мир, 1983.
43. Borodin A., Munro I. Computational complexity of algebraic and numeric problems.— New York: American Elsevier, 1975.
44. Lorentz G. G. Approximation of functions.— Holt, Rinehart and Winston, 1966.
45. Makovoz J. On the Kolmogorov complexity of functions of finite smoothness // J. of complexity.— 1986.— V. 2.— P. 121—130.
46. Munro I., Paterson M. Optimal algorithms for parallel polinomial evaluation.— IBM RC 34 97, August 11, 1971, Computer sciences.
47. Newman D. Approximation with rational functions.— Amer. Math. Soc. Publ., 1979.
48. Strassen V. Berechnungen in partiellen Algebren endlichen Typs // Computing.— 1973.— V. 11, № 3.— P. 181—196.
49. Strassen V. Algebraische Berechnungskomplexität // Perspect. in Math. Anniv. of Oberwolfach, 1984.— P. 509—550.

Поступило в редакцию 12 VI 1989

О СВОБОДНЫХ СХЕМАХ В ФОРМАЛЬНЫХ МОДЕЛЯХ ПРОГРАММ

В. А. ЗАХАРОВ

(МОСКВА)

Одной из центральных задач теоретического программирования является проблема эквивалентности программ. Формулировка ее такова. Формализованная программа задается двумя составляющими компонентами: схемой — графовой или языковой конструкцией, представляющей синтаксическое описание программы,— и семантикой, имеющей, как правило, интерпретационный характер и определяющей функциональные свойства программы [8]. Класс программ, в свою очередь, задается рекурсивным множеством схем и семантикой, единой для всех программ данного класса. Рассматривается класс формализованных программ; каждой программе сопоставляется реализуемая ею функция. Программы, реализующие одинаковые функции, считаются эквивалентными. Задача состоит в разработке процедуры, способной для любой пары программ из заданного класса установить, являются ли эти программы эквивалентными или нет. Исследование проблемы эквивалентности программ создает теоретическую основу и предпосылку для решения других задач программирования, имеющих более ярко выраженный прикладной характер,— автоматизированный синтез, верификация, оптимизация и трансляция программ.

Широко известная в теории алгоритмов теорема Райса [24] гласит, что в (рекурсивном) классе программ, вычисляющем все частично-рекурсивные функции, алгоритмически неразрешимо всякое функциональное свойство (в том числе и функциональная эквивалентность). Примером подобного класса может служить множество стандартных программ с элементарными операторами $x := 0$ $x := x + 1$ и элементарным логическим условием $x = y$ [21]. Проблема эквивалентности, таким образом, не имеет алгоритмического решения для классов программ с весьма простым синтаксисом и семантикой.

Один из методов преодоления возникшей трудности предусматривает поиск подходящих синтаксических ограничений, налагаемых на исследуемые программы, с тем чтобы существенно сократить множество реализуемых функций. В рамках этого подхода был выделен ряд классов программ [21, 25] с рекурсивным отношением функциональной эквивалентности. В целом, однако, подобные попытки продвинуться в решении проблемы функциональной эквивалентности принесли пока мало успеха. Используемые синтаксические ограничения (например, предельная глубина вложенности циклов в схеме) оказались слишком жесткими: сформированные на их основе классы программ либо реализуют очень простые функции, выражаемые формулами арифметики Пресбургера, либо попадают в сферу влияния теоремы Райса и ее аналогов [23].

Другой метод анализа проблемы функциональной эквивалентности программ предусматривает погружение исходного формализма программ в более обширную среду формализмов схем программ. Синтаксическая структура программ и схем одинакова, но отношение эквивалентности для схем может быть определено разнообразными способами в отличие от функциональной эквивалентности программ при заданной интерпретации. Класс схем программ вместе с выбранным отношением эквивалентности называют моделью программ [11]. Модель программ M считается пригодной для изучения заданной функциональной эквивалентности программ, если эквивалентность схем в M влечет эквивалентность соответствующих программ. Выбор перспективной для анализа модели программ M имеет решающее значение. С одной стороны, отношение эквивалентности схем в модели M должно быть рекурсивно, а с другой стороны, желательно, чтобы эквивалентность схем в M была как можно более точным приближением функциональной эквивалентности программ, т. е. M должна отражать особенности семантики программ. Кроме того, при выборе M необходимо предусмотреть возможность построения полной системы эквивалентных преобразований схем программ. Примерами моделей, удовлетворяющих указанным требованиям, могут служить схемы Янова [3, 20], стандартные схемы программ с логико-термальной эквивалентностью [6, 19] и др. В серии работ [11—17] разработана одна из методик выделения перспективных классов моделей программ. Суть ее состоит в следующем. На множестве схем программ задается набор отношений $R_1 \supseteq \ldots \supseteq R_k$ — свойств пар схем, последнее из которых — отношение изоморфизма. Для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant k$, рассматривается задача построения алгоритма эквивалентного преобразования пары схем, обладающих свойством R_{i-1}, в пару схем, удовлетворяющих отношению R_i. Перспективными надлежит считать те модели, в которых разрешима каждая из указанных задач. Удачный выбор контрольных свойств позволяет уточнить путем последовательных приближений класс перспективных моделей программ и одновременно построить алгоритм, разрешающий проблему эквивалентности схем программ в данных моделях, и полную систему правил эквивалентных преобразований схем. Подобная процедура приведения пары эквивалентных схем к общему виду через цепочку контрольных свойств получила название алгоритма канонизации [16]. На основе описанной методики в [15—17] выделены классы коммутативных s-моделей и моделей с монотонными операторами, исследована проблема эквивалентности и построены алгоритмы канонизации. Выбор контрольных свойств определялся при этом особенностями семантики программ и типом схем.

Одно из свойств схем программ — свойство свободной схемы — имеет, однако, столь общий характер, что оно всегда возглавляет цепочку контрольных свойств в алгоритме канонизации. Схема считается свободной в модели M, если любой синтаксически допустимый путь вычисления в этой схеме реализуем в модели M. Это означает, что свободная в M схема π безызбыточна (в π отсутствуют «лишние», нереализуемые пути вычислений) и значительная часть ее семантических особенностей отражается в синтаксической структуре схемы. Это свойство неоднократно использовалось для выделения классов схем программ с разрешимой проблемой эквивалентности [7, 18]. Известна гипотеза М. Патерсона [10] о разрешимости проблемы эквивалентности для свободных стандартных схем программ, не получившая до сих пор ни опровержения, ни прямого подтверждения. Основной темой настоящего исследования является именно это свойство схем программ и возможности его применения в алгоритме канонизации для одного класса моделей программ — формальных моделей [11, 16].

Статья состоит из 8 разделов. В § 1 приведены основные понятия теории формальных моделей программ и указаны условия, при которых формальная модель становится пригодной для анализа функциональной эквивалентности программ. В § 2 установлены некоторые общие свойства формальных моделей программ. Введение операции замыкания множества функций разметки позволяет ограничиться изучением гладких моделей и переформулировать задачу эквивалентности схем программ на теоретико-языковом уровне. В своей основе эти результаты восходят к работам [12, 13]. В том же разделе введен канонический нормальный вид схемы. Главная особенность его состоит в том, что значения всех элементарных логических условий (логических переменных) на каждом этапе выполнения схемы однозначно определяются маршрутом схемы, реализуемым в процессе этого выполнения. В § 3 определено понятие свободной схемы. Формальная модель M удовлетворяет условию свободной схемы (УСС), если любая схема π имеет в модели M эквивалентную свободную схему π'. Исследованы основные свойства свободных схем программ и УСС-моделей. В § 4 введено понятие вполне-свободной схемы — свободной схемы, представленной в нормальной форме. Вполне-свободные схемы занимают в УСС-моделях то же место, что и совершенные дизъюнктивные нормальные формы среди различных булевых формул, и могут служить канонической формой представления свободной схемы программ. Формальная модель, в которой каждая схема π имеет эквивалентную вполне-свободную схему π', удовлетворяет условию вполне-свободной схемы (УВСС) и называется УВСС-моделью. Естественно возникают следующие вопросы. Верно ли, что любая УСС-модель является одновременно УВСС-моделью? Возможно ли каждую свободную схему представить в канонической форме? В данном разделе показано, что хотя класс УВСС-моделей достаточно обширен, существуют УСС-модели, не удовлетворяющие условию вполне-свободной схемы. В § 5 рассмотрены некоторые простейшие типы синтаксического расширения формальных моделей за счет добавления к имеющемуся базису новых элементарных операторов и логических условий. Показано, что формальная модель M', образованная из УСС-модели M путем введения новых операторов, сохраняет УСС в том и только том случае, когда M удовлетворяет более сильному УВСС. В § 6 исследована взаимосвязь УСС и УВСС при расширении формальной модели за счет новых логических условий, значения которых в процессе выполнения схемы могут изменяться произвольным образом. В § 7 введено понятие регулярной (автоматной) модели [4, 5], являющееся обобщением схем программ со сдвигами Янова [20]. Установлено одно характеристическое свойство регулярных моделей, свидетельствующее о том, что этот класс моделей является наибольшим классом УСС-моделей, устойчивым по отношению к упомянутым типам синтаксического расширения. В § 8 подведены итоги изучения формальных УСС-моделей.

§ 1. Основные понятия

Символьным базисом называется пара конечных множеств

$$S = \{s^1, \ldots, s^n\}, \quad n \geqslant 0, \quad P = \{p_1, \ldots, p_m\}, \quad m \geqslant 0.$$

Элементы S называются *операторными символами* (о. с.), а элементы множества P — *логическими переменными* (л. п.).

Схемой над базисом (S, P) называется нагруженный ориентированный граф π специального вида. В графе выделены две вершины — *вход* и *выход* схемы. Вход имеет одну исходящую дугу и не имеет ведущих в него дуг; выход не имеет ни одной исходящей дуги. Все остальные вершины π распадаются на два класса. Вершины одного класса имеют одну исходящую дугу и называются *преобразователями* (на рисунках они изображаются прямоугольниками); вершины другого класса имеют 2 исходящие дуги, помеченные символами 0 и 1, и называются *распознавате-*

лями (на рисунках они изображаются овалами, причем дуга с пометкой 1 выделена жирной точкой у основания). Вершины, в которые ведут эти дуги, называются соответственно 0- и 1-преемниками распознавателя. Каждому преобразователю сопоставляется о. с. из S, а каждому распознавателю — булева формула над множеством л. п. из P.

Интерпретацией (*семантикой*) *базиса* (S, P) будем называть алгебраическую систему $\sigma = \langle \Sigma, \Sigma_0, I \rangle$ сигнатуры (S, P), где Σ — непустое множество состояний памяти, Σ_0 — множество начальных состояний, а I — отображение, сопоставляющее каждому о. с. $s \in S$ всюду определенную функцию $Is\colon \Sigma \to \Sigma$, а каждой л. п. $p \in P$ — одноместное отношение $Ip\colon \Sigma \to \{0, 1\}$.

Программой над базисом (S, P) будем называть пару (π, σ), где π — схема, а σ — интерпретация базиса (S, P).

Процедура выполнения программы $\langle \pi, \sigma \rangle$ с начальным состоянием памяти $\xi_0 \in \Sigma_0$ представляет собой обход схемы π, начинающийся во входе схемы и сопровождающийся изменением текущего состояния памяти ξ_t. При прохождении через преобразователь с о. с. s память переходит из состояния ξ_t в состояние $\xi_{t+1} = Is(\xi_t)$. При прохождении через распознаватель с булевой формулой $f(p_1, \ldots, p_m)$ состояние памяти ξ_t не изменяется, и обход продолжается по дуге с пометкой δ, исходящей из данного распознавателя, где δ — значение формулы f на наборе $Ip_1(\xi_t), \ldots, Ip_m(\xi_t)$. Если обход схемы достигает ее выхода, то выполнение программы завершается и состояние памяти ξ_T, при котором произошло это событие, считается результатом выполнения программы $\langle \pi, \sigma \rangle$ с начальным состоянием ξ_0; в противном случае результат выполнения неопределен и $\langle \pi, \sigma \rangle$ считается неприменимой к состоянию памяти ξ_0.

Программы $\langle \pi_1, \sigma \rangle$ и $\langle \pi_2, \sigma \rangle$ называются (*функционально*) *эквивалентными* $(\pi_1 \simeq_\sigma \pi_2)$, если для любого начального состояния ξ_0 либо обе программы $\langle \pi_1, \sigma \rangle$, $\langle \pi_2, \sigma \rangle$ неприменимы к ξ_0, либо обе применимы, и результаты их выполнения с начальным состоянием ξ_0 совпадают.

Под *формализмом программ* подразумевается множество программ над общим базисом (S, P) с общей семантикой σ.

Опишем теперь устройство формальных моделей программ. Для заданного базиса (S, P) обозначим через S^* (S^ω) множество всех конечных цепочек (сверхцепочек — цепочек бесконечной длины), образованных о. с. из S, а через B_P — множество двоичных наборов значений л. п. из P. Пустое слово e также содержится в S^*.

Функцией разметки [13] над базисом (S, P) назовем любую всюду определенную функцию $\mu : S^* \to B_P$. Множество всех функций разметки над базисом (S, P) обозначим $\mathscr{L}(S, P)$.

Процедура выполнения схемы π на функции разметки μ, как и в случае программы, представляет собой обход, сопровождаемый построением цепочки о. с. Обход начинается во входе схемы с пустой цепочкой e. Прохождение через преобразователь с о. с. s сопровождается приписыванием s к текущей цепочке h_t. При прохождении через распознаватель с булевой формулой $f(p_1, \ldots, p_m)$ вычисляется значение $\mu(h_t) = (\delta_1, \ldots \ldots, \delta_m)$ функции разметки μ на текущей цепочке $h_t \in S^*$, и дальнейшее движение продолжается по исходящей из данного распознавателя дуге с пометкой $f(\delta_1, \ldots, \delta_m)$. Процедура выполнения завершается, если в процессе обхода будет достигнут выход схемы; полученная при этом цепочка о. с. h_T считается результатом выполнения схемы π на функции разметки μ. Иначе результат выполнения не определен. Таким образом, каждой схеме π над базисом (S, P) можно сопоставить частичную функцию $F_\pi : \mathscr{L}(S, P) \to S^*$. Значение $F_\pi(\mu)$ определено и равно h в том и только том случае, когда схема π на функции разметки μ заканчивает выполнение с результатом h.

Этапом выполнения схемы π будем называть всякую часть указанного обхода, которая начинается прохождением через преобразователь v или вход схемы и оканчивается вхождением в следующий по порядку выполнения преобразователь u или выход схемы. Если значения л. п. $p_1, \ldots, p_m$ на этапе выполнения схемы образуют набор $\Delta \in B_P$, то вершина u называется при этом *Δ-преемником вершины* v.

Пусть на множестве S^* задано отношение эквивалентности τ и выбрано множество функций разметки $L \subseteq \mathscr{L}(S, P)$. Схемы π_1 и π_2 называются *(τ, L)-эквивалентными* ($\pi_1 \simeq_{\tau,L} \pi_2$), если для любой функции разметки $\mu \in L$ либо оба значения $F_{\pi_1}(\mu)$ и $F_{\pi_2}(\mu)$ не определены, либо $F_{\pi_1}(\mu) = h_1$, $F_{\pi_2}(\mu) = h_2$ и $h_1 \tau h_2$ (h_1 и h_2 — τ-эквивалентные цепочки о. с. из S^*).

Множество схем над базисом (S, P) с соотношением (τ, L)-эквивалентности схем образуют *формальную модель*, которую будем обозначать $K(\tau, L)$. Тождественное отношение эквивалентности на множестве S^* будет обозначено ε, а формальные модели вида $K(\varepsilon, L)$ будут обозначаться $K(L)$.

Пригодность формальной модели $K(\tau, L)$ для анализа функциональной эквивалентности программ с семантикой $\sigma = \langle \Sigma, \Sigma_0, I \rangle$ устанавливается на основании следующей теоремы.

Теорема 1. *При выполнении условий*

$$\forall \xi \in \Sigma_0 \exists \mu \in L\ \forall h \in S^* \mu(h) = (Ip_1(Ih(\xi)), \ldots, Ip_m(Ih(\xi))), \tag{1}$$

$$\forall h_1, h_2 \in S^*\ \forall \xi \in \Sigma_0 h_1 \tau h_2 \Rightarrow Ih_1(\xi) = Ih_2(\xi), \tag{2}$$

где Ih для цепочки $h = s_1 s_2 \ldots s_k$ обозначает композицию $Is_k \circ \ldots \circ Is_2 \circ Is_1$, (τ, L)-эквивалентность схем π_1, π_2 влечет функциональную эквивалентность программ (π_1, σ) *и* (π_2, σ).

Справедливость теоремы следует из определения процедур выполнения программ в семантике σ и схем программ в формальной модели $K(\tau, L)$.

Формальные модели, удовлетворяющие условиям (1) и (2), в дальнейшем будем называть *пригодными* (для семантики σ).

§ 2. Гладкие формальные модели

На множестве формальных моделей над базисом (S, P) можно ввести отношение квазипорядка. Модель $K(\tau_1, L_1)$ будем считать *более сильной,* чем $K(\tau_2, L_2)$ $(K(\tau_2, L_2) \preccurlyeq K(\tau_1, L_1))$, если для любых схем π_1, π_2 $\pi_1 \simeq_{\tau_2,L_2} \pi_2 \Rightarrow \pi_1 \simeq_{\tau_1,L_1} \pi_2$. Модели $K(\tau_1, L_1)$ и $K(\tau_2, L_2)$ считаются *равносильными* $(K(\tau_1, L_1) \approx K(\tau_2, L_2))$, если $K(\tau_1, L_1) \preccurlyeq K(\tau_2, L_2)$ и $K(\tau_2, L_2) \preccurlyeq K(\tau_1, L_1)$.

Утверждение 1. *Если $L_1 \subseteq L_2$ и для любых $h', h'' \in S^*$, выполняется $h' \tau_2 h'' \Rightarrow h' \tau_1 h''$, то* $K(\tau_2, L_2) \preccurlyeq K(\tau_1, L_1)$.

Доказательство. Пусть $\pi_1 \simeq_{\tau_2,L_2} \pi_2$. Рассмотрим произвольную функцию разметки $\mu \in L_1$. Поскольку $L_1 \subseteq L_2$, то при $F_{\pi_1}(\mu) = h'$ значение $F_{\pi_2}(\mu) = h''$ также определено и $h' \tau_2 h''$. Значит, $F_{\pi_1}(\mu) \tau_1 F_{\pi_2}(\mu)$. Поменяв местами π_1, π_2 в этом рассуждении, приходим к выводу $\pi_1 \simeq_{\tau_1,L_1} \pi_2$. $\square$

Для произвольной семантики программ $\sigma = \langle \Sigma, \Sigma_0, I \rangle$ определим формальную модель $K(\tau(\sigma), L(\sigma))$ следующим образом:

1) для любых h_1, h_2 из S^* $h_1 \tau(\sigma) h_2$ тогда и только тогда, когда для всякого состояния памяти $\xi \in \Sigma_0$ выполняется $Ih_1(\xi) = Ih_2(\xi)$;

2) $L(\sigma) = \{\mu_\xi : \xi \in \Sigma_0\}$, где μ_ξ — функция разметки, значения которой определяются соотношением $\mu_\xi(h) = (Ip_1(Ih(\xi)), \ldots, Ip_m(Ih(\xi)))$.

Утверждение 2. *Формальные модели* $K(\tau(\sigma), L(\sigma))$ *и* $K(\mathscr{L}(S, P))$ *пригодны для семантики* σ.

Справедливость утверждения 2 следует из теоремы 1.

Утверждение 3. *Для любой модели* $K(\tau, L)$, *пригодной для семантики* σ, *выполняется* $K(\mathscr{L}(S, P)) \preccurlyeq K(\tau, L) \preccurlyeq K(\tau(\mathrm{o}), L(\sigma))$.

Справедливость утверждения 3 следует из теоремы 1 и утверждения 1.

$K(\tau(\sigma), L(\sigma))$ — максимальная пригодная для σ формальная модель: при ее задании функциональные свойства семантики σ учитываются наиболее полно, в связи с чем анализ ее становится весьма затруднительным. При задании $K(\mathscr{L}(S, P))$, напротив, свойства семантики программы вообще не принимаются в расчет, и $K(\mathscr{L}(S, P))$ пригодна для любой семантики σ. Фактически, $K(\mathscr{L}(S, P))$ — это формализм схем Янова с универсальным распределением сдвигов; для данной модели доказана разрешимость проблемы эквивалентности и построена полная система эквивалентных преобразований [3, 20]. В связи с этим представляется целесообразным выделить классы формальных моделей с разрешимой проблемой эквивалентности, расположенные между $K(\mathscr{L}(S, P))$ и $K(\tau(\sigma), L(\sigma))$, а затем для изучения функциональной эквивалентности программ в семантике σ подбирать пригодную формальную модель из этих выделенных классов. В настоящей работе основное внимание сосредоточено на моделях вида $K(L)$ с тождественным отношением в S^*.

Отметим вначале некоторые общие свойства моделей $K(L)$, $L \subseteq \mathscr{L}(S, P)$.

Простым замыканием L назовем множество $[L] \subseteq \mathscr{L}(S, P)$

$$[L] = \{\mu\colon\ \forall h = s_1 \ldots s_k \in S^* \exists \mu' \in L \forall i,\ 0 \leqslant i \leqslant k,\ \mu(s_1 \ldots s_i) = \mu'(s_1 \ldots s_k)\},$$

состоящее из всевозможных функций разметки μ, поведение которых на каждой цепочке $h \in S^*$ совпадает с поведением некоторой функции разметки $\mu' \in L$ (выбор μ' определяется цепочкой h). Множество функций разметки L называется *гладким* [13], если $L = [L]$. При анализе семантики программ $\sigma = \langle \Sigma, \Sigma, I \rangle$ целесообразно ввести также замыкание L по операции сдвига [13]. *Замыкание* L *по операции сдвига* на операторную цепочку образуется из всевозможных функций разметки $\mu' \in \mathscr{L}(S, P)$, для каждой из которых найдется цепочка $h' \in S^*$ и функция $\mu \in L$ такие, что при любой цепочке $h \in S^*$ выполняется $\mu'(h) = \mu(h'h)$. Гладкая формальная модель $K(L)$ с замкнутым по операции сдвига на операторную цепочку множеством функций разметки L называется *полугрупповой моделью* [13] (при более общем определении формальной модели $K(\tau, L)$ помимо того требуется, чтобы отношение τ было полугрупповой эквивалентностью в S^* $(h_1 \tau h_2 \,\&\, h_3 \tau h_4 \Rightarrow h_1 h_3 \tau h_2 h_4)$, согласованной с множеством $L (h_1 \tau h_2 \Rightarrow \mu(h_1) = \mu(h_2))$.

Утверждение 4. $[[L]] = [L]$.

Утверждение 5. $K(L) \approx K([L])$.

Доказательство. Из $L \subseteq [L]$ следует $K([L]) \preccurlyeq K(L)$. Рассмотрим (ε, L)-эквивалентные схемы π_1, π_2 и произвольную функцию разметки $\mu \in [L]$. Если $F_{\pi_1}(\mu) = s_1 \ldots s_k = h$, то по определению $[L]$ имеется $\mu' \in L$ такая, что для любого i, $0 \leqslant i \leqslant k$, $\mu'(s_1 \ldots s_i) = \mu(s_1 \ldots s_i)$. Выполнение π_1 в этом случае одинаково на функциях μ, μ', т. е. $F_{\pi_1}(\mu') = h$. Поскольку $\pi_1 \simeq_{\varepsilon, L} \pi_2$, то $F_{\pi_2}(\mu') = h$. Схема π_2 одинаково выполняется на μ и μ', что влечет $F_{\pi_2}(\mu) = h$. Поменяв местами в приведенном рассуждении схемы π_1, π_2, приходим к выводу $\pi_1 \simeq_{\varepsilon, L} \pi_2$. Таким образом, $K(L) \preccurlyeq K([L])$. □

Тождественная эквивалентность ε на S^* играет здесь существенную роль; для произвольной модели соотношений $K(\tau, L) \approx K(\tau, [L])$ может, вообще говоря, не выполняться, о чем свидетельствует

Пример 1. Рассмотрим базис (S, P), $S = \{s^1, s^2\}$, $P = \{p_0\}$ и пару схем π_1, π_2, изображенных на рис. 1. Цепочки h', h'' из S^* будем считать

τ-эквивалентными, если h', h'' содержат одинаковое количество о. с. каждого вида (τ-отношение коммутативной эквивалентности [15]). Множество L состоит из двух функций разметки μ_1, μ_2 таких, что $\mu_1(s^1) = \mu_2(s^2) = 1$, $\mu_1(s^2) = \mu_2(s^1) = 0$. Нетрудно убедиться в том, что $F_{\pi_1}(\mu_1) = s^1s^2$, $F_{\pi_2}(\mu_1) = s^2s^1$, а значения $F_{\pi_1}(\mu_2)$, $F_{\pi_2}(\mu_2)$ неопределенные. Поскольку $(s^1s^2)\,\tau\,(s^2s^1)$, схемы π_1, π_2 эквивалентны в модели $K(\tau, L)$. В то же время простое замыкание $[L]$ содержит функцию разметки μ_3, для которой $\mu_3(s^1) = \mu_1(s^1) = 1$ и $\mu_3(s^2) = \mu_2(s^2) = 1$. Ввиду того, что $F_{\pi_1}(\mu_3) = s^1s^2$, а значение $F_{\pi_2}(\mu_3)$ неопределенное, схемы π_1, π_2 не являются эквивалентными в модели $K(\tau, [L])$. В данном случае $K(\tau, [L]) \preccurlyeq K(\tau, L)$, но $K(\tau, [L]) \not\approx K(\tau, L)$.

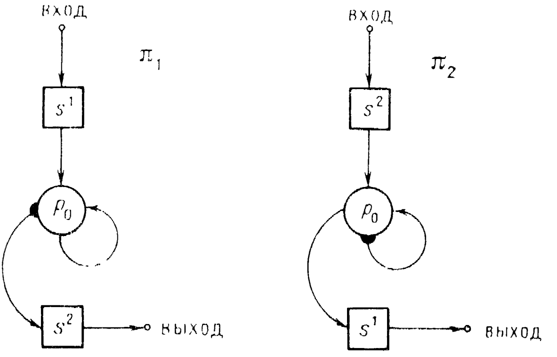

Рис. 1

Утверждение 6. *Если* $K(L_1) \preccurlyeq K(L_2)$, *то* $[L_2] \subseteq [L_1]$.

Доказательство. Предположим, что $\mu_0 \in [L_2]$, но $\mu_0 \notin [L_1]$. Последнее означает, что для некоторой цепочки о. с. $h = s_1 \ldots s_k$ при любой функции разметки $\mu' \in L_1 \mu'(s_1 \ldots s_i) \neq \mu_0(s_1 \ldots s_i)$ хотя бы для одного i, $0 \leqslant i \leqslant k$. Пусть $\mu_0(s_1 \ldots s_j) = (\delta_1^j, \ldots, \delta_m^j)$, $0 \leqslant j \leqslant k$. Рассмотрим

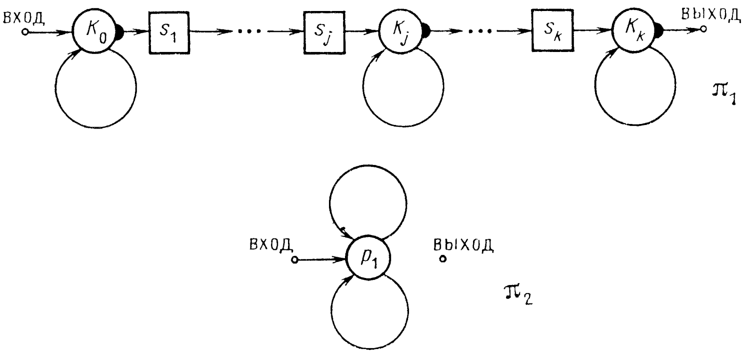

Рис. 2

схемы π_1, π_2, изображенные на рис. 2. Здесь каждая формула K_j представляет собой элементарную конъюнкцию вида $p_1^{\delta_1^j} \& \ldots \& p_m^{\delta_m^j}$. Очевидно, значение $F_{\pi_2}(\mu)$ не определено для любой $\mu \in \mathscr{L}(S, P)$. Согласно выбору цепочки h значение $F_{\pi_1}(\mu')$ также не определено для любой $\mu' \in L_1$. В то же время $F_{\pi_1}(\mu_0) = h$. Таким образом, $\pi_1 \simeq_{\varepsilon, L_1} \pi_2$, но $\pi_1 \not\simeq_{\varepsilon, L_2} \pi_2$, что противоречит $K(L_1) \preccurlyeq K(L_2)$. Противоречие снимается при $[L_2] \subseteq [L_1]$. □

Замечание. Утверждение 6 справедливо также при всяком другом отношении эквивалентности τ на множестве S^*.

Следствие 1. *Если* $K(L_1) \approx K(L_2)$, *то* $[L_1] = [L_2]$.

Утверждения 4—6 свидетельствуют о том, что каждый класс эквивалентности моделей $K(L)$ по отношению $\approx$ содержит единственную гладкую модель. Поэтому целесообразно в дальнейшем ограничиться рассмотрением одних лишь гладких моделей. Модели такого типа удобны еще и тем, что гладкие множества функций разметки можно задавать теоретико-языковыми средствами в виде множества слов в некотором фиксированном алфавите.

Введем в употребление новый о. с. $s_0 \notin S$, которым будем обозначать вход схемы. *Конфигурацией* [15, 20] *в базисе* (S, P) назовем всякую конечную цепочку пар $\mathrm{Conf} = (s_0, \Delta_0)(s_1, \Delta_1)\ldots(s_k, \Delta_k)$, у которой $s_i \in S$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $\Delta_j \in B_P$, $0 \leqslant j \leqslant k$. *Графиком функции разметки* $\mu \in \mathscr{L}(S, P)$ будем называть множество Γ_μ всевозможных конфигураций $(s_0, \Delta_0)(s_1, \Delta_1)\ldots(s_k, \Delta_k)$, удовлетворяющих условию $\mu(s_1\ldots s_i) = \Delta_i$ для всех i, $0 \leqslant i \leqslant k$. Из определения $[L]$ следует $\mu' \in [L] \Leftrightarrow \Gamma_{\mu'} \subseteq \subseteq \bigcup_{\mu \in L} \Gamma_\mu$, т. е. замыкание множества функций разметки L однозначно задается совокупностью конфигураций $\Gamma_L = \bigcup_{\mu \in L} \Gamma_\mu$. Для множеств L_1, L_2 обозначим через $L_1 \cup L_2$ и $L_1 \cap L_2$ множества функций разметки L', L'' соответственно такие, что $\Gamma_{L'} = \Gamma_{L_1} \cup \Gamma_{L_2}$ и $\Gamma_{L''} = \Gamma_{L_1} \cap \Gamma_{L_2}$.

Следствие 2. *Множество формальных гладких моделей над базисом* (S, P) *с отношением* $\preccurlyeq$ *образуют частично-упорядоченную решетку.*

Доказательство. Из утверждений 4—6 следует, что $\preccurlyeq$ на множестве гладких моделей является отношением частичного порядка. Нетрудно убедиться в том, что $\sup(K(L_1), K(L_2)) = K(L_1 \cap L_2)$, $\inf(K(L_1), K(L_2)) = K(L_1 \cup L_2)$, $K(\varnothing)$ — наибольший элемент (все схемы программ в $K(\varnothing)$ эквивалентны друг другу), $K(\mathscr{L}(S, P))$ — наименьший элемент решетки. □

Следствие 3. *Множество формальных гладких моделей* $K(L)$, *пригодных для семантики* σ, *образуют решетку по отношению частичного порядка* $\preccurlyeq$, *наибольшим элементом которой является модель* $K(L(\sigma))$.

В дальнейшем ограничимся исследованием только гладких моделей.

Подобно тому, как это было осуществлено для множеств функций разметки L, сопоставим каждой схеме π над базисом (S, P) множество Γ_π конфигураций $(s_0, \Delta_0)(s_1, \Delta_1)\ldots(s_k, \Delta_k)$ таких, что для некоторой функции разметки $\mu \in \mathscr{L}(S, P)$ выполняются $F_\pi(\mu) = s_1\ldots s_k$ и $\mu(s_1\ldots \ldots s_i) = \Delta_i$ при любом i, $0 \leqslant i \leqslant k$. Слова из Γ_π однозначно определяются множеством маршрутов, ведущих в схеме π из входа в выход. Для любой схемы π множество слов Γ_π регулярное. Но помимо регулярности Γ_π обладает еще одним свойством, которое будем называть S-однозначностью. Множество конфигураций Γ над базисом (S, P) является *S-однозначным*, если для всякой пары конфигураций из Γ вида $w(s_i, \Delta_i)w'$ и $w(s_j, \Delta_j)w''$ выполняются два соотношения:

1) $s_i = s_j$;

2) при $\Delta_i = \Delta_j$ равенство $w' = e$ влечет $w'' = e$, где e — пустое слово.

Утверждение 7. Γ *является регулярным S-однозначным множеством конфигураций тогда и только тогда, когда* $\Gamma = \Gamma_\pi$ *для некоторой схемы* π.

Доказательство. Достаточное условие следует из определения Γ_π. Обоснуем необходимое условие. Регулярность Γ позволяет построить конечный автомат, распознающий Γ. Рассмотрим диаграмму Мура D минимального частичного автомата, распознающего Γ. Условие 1) S-однозначности и минимальность D приводят к тому, что из каждой вершины-состояния v допустимы переходы только по элементам (парам) вида (s, Δ) с одним и тем же для каждого v о. с. s. Условие 2) S-однозначности Γ означает, что D имеет единственную заключительную вершину-состояние, из которой не выходит ни одна дуга-переход. Поэтому диаграмму D можно преобразовать в схему π следующим образом: начальную вершину D следует считать входом π, заключительную вершину — выходом π, а каждую внутреннюю вершину v необходимо заменить фрагментом схемы по правилу, указанному на рис. 3, где каждая из формул K_i есть элементарная конъюнкция вида $p_1^{\delta_1} \& \ldots \& p_m^{\delta_m}$, соответствующая набору $\Delta_i = (\delta_1, \ldots, \delta_m)$ значений л. п. Из построения π видно что $\Gamma = \Gamma_\pi$. □

Будем говорить, что схема π представлена в нормальном виде, если каждый ее логический фрагмент имеет вид, изображенный на рис. 3б.

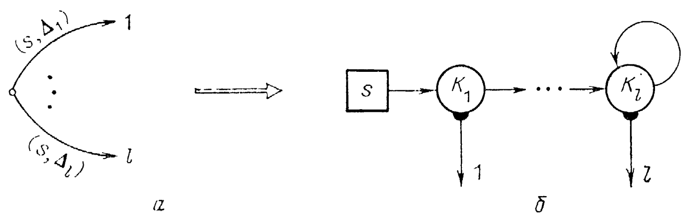

Рис. 3

Из утверждения 7 следует, что в любой модели $K(L)$ всякая схема π имеет эквивалентную ей нормальную схему. Главная особенность нормальной схемы состоит в том, что любой маршрут, ведущий из входа схемы в ее выход, реализуется при выполнении схемы на некоторой функции разметки $\mu \in \mathscr{L}(S, P)$. При этом значения всех л. п. на каждом этапе выполнения однозначно определяются выбранным маршрутом.

В дальнейшем будет широко использоваться представление схем π в виде соответствующего множества конфигураций Γ_π. В частности, определение эквивалентности схем π_1, π_2 в модели $K(L)$ допускает следующую переформулировку: $\pi_1 \simeq_{\varepsilon,L} \pi_2 \Leftrightarrow \Gamma_L \cap \Gamma_{\pi_1} = \Gamma_L \cap \Gamma_{\pi_2}$ [2].

§ 3. Свободные схемы программ

Схема π называется *свободной в модели* $K(L)$, если любой маршрут, ведущий в схеме из входа в выход, реализуется при выполнении π на некоторой функции разметки $\mu \in L$. Модель $K(L)$ удовлетворяет *условию свободной схемы* (УСС) и называется УСС-моделью, если любая схема π имеет эквивалентную ей в модели $K(L)$ свободную схему π. Если при этом существует алгоритм построения свободной схемы π, то $K(L)$ удовлетворяет УСС эффективно. Рассмотрим некоторые свойства свободных схем и УСС-моделей.

Непосредственно из определения следует

Утверждение 8. *Если схема π свободна в модели $K(L)$, то множество цепочек о. с. $F_\pi(L) = \{h : h = F_\pi(\mu),\ \mu \in L\}$ регулярное.*

Следствие. *Для любой схемы π в УСС-модели $K(L)$ множество цепочек $F_\pi(L)$ регулярное.*

Схема π считается *пустой в модели* $K(L)$, если при любой функции разметки $\mu \in L$ значение $F_\pi(\mu)$ не определено. Очевидно, что схема π пуста в модели $K(L)$ тогда и только тогда, когда $\Gamma_\pi \cap \Gamma_L = \varnothing$. В моделях $K(L)$, удовлетворяющих УСС эффективно, проблема пустоты схем разрешима. Для заданной схемы π достаточно построить эквивалентную свободную схему π' и убедиться в том, что вход и выход π' не связываются ни одним маршрутом.

Теорема 2. *Проблема эквивалентности схем разрешима в модели $K(L)$ тогда и только тогда, когда в $K(L)$ разрешима проблема пустоты.*

Доказательство. Необходимость условия теоремы очевидна. Докажем, что проблема эквивалентности сводится к проблеме пустоты. Известно, что $\pi_1 \simeq_{\varepsilon,L} \pi_2$ в том и только том случае, когда $\Gamma_{\pi_1} \cap \Gamma_L = \Gamma_{\pi_2} \cap \Gamma_L$. Последнее равенство равносильно $\Gamma_L \cap (\Gamma_{\pi_1} - \Gamma_{\pi_2}) = \Gamma_L \cap$

$\cap\left(\Gamma_{\pi_2} - \Gamma_{\pi_1}\right) = \varnothing$. Легко видеть, что $\Gamma_{\pi_1} - \Gamma_{\pi_2}$ и $\Gamma_{\pi_2} - \Gamma_{\pi_1}$ являются регулярными S-однозначными множествами конфигураций, которым можно поставить в соответствие схемы π_3, π_4. Таким образом, $\pi_1 \simeq_{\varepsilon, L} \pi_2$, если π_3, π_4 пусты в модели $K(L)$. □

Следствие. *В моделях $K(L)$, удовлетворяющих* УСС *эффективно, проблема эквивалентности схем разрешима.*

Необходимо отметить, что класс моделей с разрешимой проблемой эквивалентности не исчерпывается УСС-моделями. Проблема пустоты, а значит, и проблема эквивалентности разрешима, например, в моделях $K(L_{cs})$, где $\Gamma_{L_{cs}}$ — контекстно-свободный язык конфигураций, хотя УСС при этом может не выполняться. Подтверждением тому служит

Пример 2. Рассмотрим множество конфигураций M в базисе $(\{s\}, \{p\})$:

$$M = \{(s^0, 0)(s, 0)^i(s, 1)(s, 1)^i(s, 0)^j : i \geqslant 0, j \geqslant 0\}.$$

Модель $K(L)$ определяется множеством $\Gamma_L = \mathrm{INIT}(M)$, состоящим из всевозможных начальных подцепочек конфигураций множества M. Поскольку M и $\mathrm{INIT}(M)$ — контекстно-свободные множества, то для любой схемы π таковым же будет и множество конфигураций $\Gamma_L \cap \Gamma_\pi$. Таким образом, в модели $K(L)$ разрешима проблема эквивалентности схем. Однако схема π_0, изображенная на рис. 4, не имеет эквивалентной свободной в $K(L)$ схемы. Действительно, выберем произвольную схему π с N вершинами, эквивалентную π_0. Функция разметки $\mu_N \in L$, $\mu((s)^i) = 1$ при $N \leqslant i < 2N$, $\mu((s)^i) = 0$ при $0 \leqslant i < N$ или $2N < i$ задает в схеме π маршрут выполнения, начинающейся во входе схемы, последовательно проходящий через преобразователи $v_1, \ldots, v_N, v_{N+1}, \ldots, v_{2N}, v_{2N+1}$ и оканчивающийся в выходе π. Поскольку значение μ изменяется лишь дважды на протяжении функционирования, существуют $t > 0$ и $r > 0$ такие, что $v_{N-r} = v_N$ и $v_{2N+1-t} = v_{2N+1}$. Если бы для всех j, $0 \leqslant j \leqslant r$, имело место $v_{N-r+j} = v_{N+j}$, то обход цикла $v_{N-r}, \ldots, v_N$ осуществлялся бы независимо от значений логической переменной, и схема π на функции разметки μ зациклилась, в то время как $F_{\pi_0}(\mu) = (s)^{zN}$. Значит имеется l, $0 < l \leqslant r$ такое, что $v_{N-r+j} = v_{N+j}$, $0 \leqslant j < l$ и $v_{N-r+l} \neq v_{N+l}$, т. е. в схеме π из преобразователя $v_{N-r+l-1} = v_{N+l-1}$ при $p = 0$ осуществляется переход в преобразователь v_{N-r+l}, а при $p = 1$ — в преобразователь $v_{N+l} \neq v_{N-r+l}$. Совпадение v_{2N+1} и v_{2N+1-t} означает, что в схеме π из преобразователя $v_{2N+1} = v_{2N+1-t}$ при $p = 1$ осуществляется переход в преобразователь v_{2N+2-t}, а при $p = 0$ — в выход схемы. В результате можно заметить, что маршрут $v_1, \ldots, v_{N-r}$, $(v_{N-r+1}, \ldots, v_N)^3$, $v_{N+1}, \ldots, v_{2N}$, v_{N2+1}, ведущий в схеме π из входа в выход, реализуется лишь на таких функциях разметки μ, у которых $\mu((s^{N+r+l-1})) = 0$, $\mu((s^{N+2r+l-1})) = 1$, $\mu((s^{2N+2r+1})) = 0$. Из определения L видно, что подобные функции разметки $\mu \notin L$. Следовательно, схема π не является свободной в модели $K(L)$.

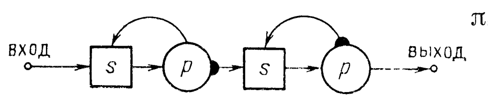

Рис. 4

Здесь следует отметить, что для любой схемы π в рассмотренной модели $K(L)$ множество $F_\pi(L) = \{F_\pi(\mu) : \mu \in L\}$ регулярное. Таким образом, регулярность $F_\pi(L)$ является необходимым, но не достаточным свойством, характеризующим класс УСС-моделей.

Привлекательность свободных схем программ при изучении проблемы эквивалентности объясняется еще и тем, что свободные схемы обладают синтаксически выраженным свойством безызбыточности. Элемент (вершина или дуга) схемы π называется *несущественным* в модели $K(L)$, если ни один маршрут в π, связанный с результативным выполнением π на функциях разметки $\mu \in L$, не проходит через этот элемент. Несущественный элемент не оказывает влияния на функционирование схемы в рамках рассматриваемой формальной модели, поэтому он допускает достаточно произвольное изменение или удаление. В свободной схеме несущественным является всякий элемент, не лежащий ни на одном маршруте из входа схемы в ее выход. Если УСС-модель $K(L)$ является σ-пригодной, то свободные схемы можно применять для минимизации объема программ путем преобразования несущественных фрагментов.

Анализ УСС-моделей порождает ряд естественных вопросов. Каковы должны быть свойства множества функций разметки L для того, чтобы формальная модель $K(L)$ удовлетворяла УСС? В § 2 было показано, что гладкие модели $K(L)$ образуют решетку по отношению $\preccurlyeq$. Обладают ли подобным свойством гладкие УСС-модели? Ранее было отмечено, что каждую схему π можно представить в нормальной форме. Верно ли, что в УСС-моделях для каждой схемы π существует эквивалентная свободная схема π', представленная в нормальной форме? Исследованию этих вопросов посвящен следующий параграф статьи

§ 4. Вполне-свободные схемы программ

Свободная в модели $K(L)$ схема π, представленная в нормальной форме, называется *вполне-свободной*. Гладкая формальная модель $K(L)$ удовлетворяет *условию вполне-свободной схемы* и называется УВСС-*моделью*, если каждая схема π имеет эквивалентную вполне-свободную в $K(L)$ схему π'. Вполне-свободные схемы, сочетающие в себе свойства свободных и нормальных схем программ, предлагают весьма привлекательную форму представления схем программ с точки зрения алгоритма канонизации. Каждый маршрут из входа схемы в ее выход реализуем на некоторой функции разметки $\mu \in L$, и при этом значения всех л. п. на каждом этапе выполнения однозначно определяется выбранным маршрутом. Влияние логической компоненты L модели $K(L)$ на функционирование вполне-свободной схемы π полностью и однозначно отражается в синтаксической структуре схемы. Если рассматривать гладкие модели более общего вида $K(\tau, L)$ с $\tau \neq \varepsilon$, то после построения для схемы π эквивалентной вполне-свободной в модели $K(L)$ схемы π' все дальнейшее внимание можно сосредоточить на отношении эквивалентности τ цепочек о. с. и анализировать поведение схемы π' в модели $K(\tau, \mathcal{L}(S, P))$, заботясь лишь о том, чтобы в процессе дальнейших преобразований схема оставалась вполне-свободной в модели $K(L)$.

Отметим ряд полезных свойств УВСС-моделей. В силу определения нормальной формы схемы справедливо

Утверждение 9. *Если π — вполне-свободная в модели $K(L)$ схема, то $\Gamma_\pi \cap \Gamma_L = \Gamma_\pi$.*

Теорема 3. *Схема π имеет эквивалентную вполне-свободную в модели $K(L)$ схему тогда и только тогда, когда множество конфигураций $\Gamma_\pi \cap \Gamma_L$ регулярное.*

Доказательство. Необходимое условие следует из утверждения 9. Для обоснования достаточного условия рассмотрим множество конфигураций $\Gamma = \Gamma_L \cap \Gamma_\pi$. Поскольку $\Gamma \subseteq \Gamma_\pi$, то Γ — регулярное S-однозначное множество. Согласно утверждению 7 существует представленная в нормальной форме схема π' такая, что $\Gamma = \Gamma_{\pi'}$. Равенство $\Gamma = \Gamma_L \cap \Gamma_{\pi'}$ влечет $\pi \simeq_{\varepsilon, L} \pi'$. Равенство $\Gamma_{\pi'} = \Gamma_L \cap \Gamma_{\pi'}$ означает, что схема π' свободна в модели $K(L)$. $\square$

Следствие 1. *Модель $K(L)$ удовлетворяет* УВСС *тогда и только тогда, когда для произвольной схемы π множество конфигураций $\Gamma_L \cap \Gamma_\pi$ регулярное.*

Следствие 2. УВСС-*модели образуют решетку по отношению частичного порядка $\preccurlyeq$.*

Широко известные классы формальных моделей с яновскими сдвигами [3, 15, 20] и монотонными операторами [17] удовлетворяют не только УСС, но и более сильному свойству УВСС. На самом деле справедлива.

Теорема 4. *Если* Γ_L — *контекстно-свободное множество конфигураций, то модель* $K(L)$, *удовлетворяющая* УСС, *является* УВСС-*моделью.*

Доказательство. Предположим противное — $K(L)$ не удовлетворяет УВСС. Покажем, что в этом случае существует схема π_0, не имеющая в $K(L)$ эквивалентной свободной схемы. Если Γ_L — контекстно-свободное множество конфигураций, а $K(L)$ не удовлетворяет УВСС, то согласно теореме 3 для некоторой схемы π множество конфигураций $\Gamma = \Gamma_L \cap \Gamma_\pi$ является контекстно-свободным, но не регулярным. Тогда из леммы Огдена [1] следует, что Γ содержит конфигурацию $w = w_1w_2w_3w_4w_5$ такую, что $w_2 \neq e$, $w_4 \neq e$ и для любого $i \geqslant 1$ конфигурация $w(i) = w_1(w_2)^iw_3(w_4)^iw_5 \in \Gamma$, но при этом для бесконечного числа различных $j \geqslant 1$ и бесконечного числа различных $k \geqslant 1$ конфигурации $w(j, k) = w_1(w_2)^jw_3(w_4)^kw_5 \notin \Gamma$. Рассмотрим множество Γ', состоящее из всевозможных конфигураций вида $w(j, k)$, $j \geqslant 0$, $k \geqslant 0$. Γ' — регулярное S-однозначное множество конфигураций. Следовательно, существует схема π' такая, что $\Gamma_{\pi'} = \Gamma'$. Например, для множества конфигураций $\Gamma' = \{(s^0, 0)(s, 0)^j(s, 1)(s, 1)^k(s, 0) : j \geqslant 0, k \geqslant 0\}$ схема π' представлена на рис. 4. Поскольку $\Gamma_L \cap \Gamma_{\pi'}$ — контекстно-свободное нерегулярное множество конфигураций, то, рассуждая далее так же, как при анализе примера 2, можно убедиться в том, что π' не имеет эквивалентной свободной в $K(L)$ схемы вопреки УСС. Противоречие снимается, если $K(L)$ — УВСС-модель. □

Теорема 4 свидетельствует о том, что достаточно широкий класс УСС-моделей удовлетворяет УВСС. Возникает предположение о совпадении классов УСС-моделей и УВСС-моделей. Однако имеет место

Теорема 5. *Существуют* УСС-*модели, не удовлетворяющие* УВСС.

Доказательство. Построим одну из таких моделей в базисе $(\{s\}, \{p\})$. В дальнейшем для удобства обозначений будем считать, что $0! = 0$ и $w^k = e$ для любого слова w при $k = 0$.

Множество функций разметки L определим следующим образом:

1) обозначим через U множество всевозможных цепочек, состоящих из пар $(s, 0)$ и $(s, 1)$, т. е. $U = ((s, 0) + (s, 1))^*$;

2) обозначим через D множество цепочек вида $(s, 1)^{2k+1}(s, 0)$, $k \geqslant 0$;

3) обозначим через w_1' пару $(s^0, 0)$, через w_k' — цепочку $((s, 0)(s, 1))^{k!}$, $k > 1$, через w_k'' — цепочку $((s, 1)(s, 1))^{k!}$, $k \geqslant 1$;

4) обозначим через w_n конфигурацию вида $w_1'w_1''w_2'w_2'' \ldots w_n'w_n''$, $n \geqslant 0$, а через W_n — множество конфигураций $\{w_{n!}w_Dw_U : n \geqslant 0, w_D \in D, w_U \in U\}$.

В качестве Γ_L возьмем множество $\mathrm{INIT}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} w_n\right)$, состоящее из всевозможных начальных подцепочек конфигураций множеств W_n. Модель $K(L)$ не удовлетворяет УВСС, так как для схемы π, изображенной на рис. 5, $\Gamma_L \cap \Gamma_\pi = \{w_{n!}w_D : n \geqslant 0, w_D \in D\}$ — нерегулярное множество конфигураций.

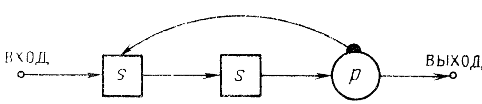

Рис. 5

Отметим, что π при этом является свободной в модели $K(L)$ схемой.

Убедимся теперь в том, что модель $K(L)$ удовлетворяет УСС. Рассмотрим произвольную схему π. Если существует $N \geqslant 0$ такое, что $\Gamma = \Gamma_L \cap \Gamma_\pi = \mathrm{INIT}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{N} W_n\right) \cap \Gamma_\pi$, то в силу регулярности каждого из множеств W_n множество конфигураций Γ является регулярным

S-однозначным. Тогда π согласно теореме 3 имеет эквивалентную вполне-свободную в $K(L)$ схему.

Предположим теперь, что для любого $N \geqslant 0$ выполняется соотношение $\mathrm{INIT}\left(\bigcup_{n=0}^{N} W_n\right) \cap \Gamma_\pi \subset \Gamma_L \cap \Gamma_\pi$. Это означает, что для бесконечно большого количества различных значений k множество $\Gamma_L \cap \Gamma_\pi$ содержит конфигурацию вида $w = w_{k!} w^D w^U$. Выделим бесконечную последовательность преобразователей u_1', u_1'', u_2', u_2'', $\ldots$, u_n', u_n'', $\ldots$ схемы π, которыми оканчиваются маршруты обхода схемы, соответствующие конфигурациям w_1', w_1, $w_1 w_2'$, w_2, $\ldots$, $w_{n-1} w_n'$, w_n, $\ldots$ Если схема π имеет M различных вершин-преобразователей, то для некоторых n и m, $n \geqslant M$, $0 < m \leqslant M$, выполняется $u_n' = u_{n+m}'$. В маршруте, соответствующем конфигурации $w_n = w_{n-1} w_n' w_n''$, выделим заключительный участок, связывающий вершины u_n' и u_n'' схемы π. Выделенный подмаршрут однозначно определяется вершиной u_n' и цепочкой $w_n'' = ((s, 1)(s, 1))^{n!}$. Поскольку значение л. п. p на нем неизменно равно 1 и $n \geqslant M$, последовательность преобразователей, через которые проходит данный подмаршрут, начиная с некоторой вершины становится периодической и ее можно представить в виде v_0, v_1, $\ldots$, v_r, $(v_{r+1}, \ldots, v_{r+t})^k$, где $v_0 = u_n'$, $v_{r+t} = u_n''$, $t < M$, $r + tk = 2n!$. Иными словами рассматриваемый переход из u_n' в u_n'' завершается k-кратным прохождением цикла через преобразователь u_n''. Подобный переход из вершины u_{n+m}' в вершину u_{n+m}'' определяется цепочкой $w_{n+m}'' = ((s, 1)(s, 1))^{(n+m)!} = \left(w_n''\right)^{(n+1)\ldots(n+m)}$. В силу того, что $u_n' = u_{n+m}'$, значение л. п. p неизменно равно 1 и $2(n+m)! = 2n! + t(j-k)$ для некоторого натурального j (следует учесть $t < M \leqslant n$), последовательность преобразователей, через которые проходит данный подмаршрут, допускает представление в виде v_0, v_1, $\ldots$, v_r, $(v_{r+1}, \ldots, v_{r+t})^l$. Отсюда следует $u_n'' = u_{n+m}''$. Совершенно аналогично устанавливаются и прочие равенства $u_{n+1}' = u_{n+m+1}'$, $u_{n+1}'' = u_{n+m+1}''$ и т. д. Это означает, что, начиная с некоторого N, конфигурации $w = w_{N!} w_D w_U \in \Gamma_L \cap \Gamma_\pi$ соответствует маршрутам обхода некоторого макроцикла в схеме π, изображенного условно на рис. 6, *а*, и последующего перехода в выход π. Применяя эквивалентные преобразования копирования вершин схемы π, указанный макроцикл можно выделить в отдельный фрагмент Ф с единственным входом, ведущим в вершину $u_{N!}''$, где $N = k!$ для некоторого $k > M$. При таком N можно придать одинаковую длину всем подциклам и линейным участкам, входящим в состав макроцикла Ф.

Исследуем свойства фрагмента Ф в преобразованной схеме применительно к семантике L. Какова бы ни была функция разметки $\mu \in L$, один полный обход макроцикла сопровождается присоединением к строящейся в процессе обхода конфигурации цепочек вида $w_{k!+mi+1}'$, $w_{k!+mi+1}''$, $\ldots$, $w_{k!+mi+m}''$, $w_{k!+mi+m}'$, $i \geqslant 0$. Так как $w_i w_D w_U \in \Gamma_L \cap \Gamma_\pi$ только при $l = n!$ для различных n (иначе бы имел место случай $\mathrm{INIT}\left(\bigcup_{n=0}^{N} W_n\right) \supset \supset \Gamma_L \cap \Gamma_\pi\right)$ и $k > m$, то выйти из макроцикла можно лишь после совершения нескольких полных его обходов. Значит, все существенные выходы из фрагмента Ф сосредоточены в подцикле Ω, содержащем преобразователь $u_{N!}''$ (на рис. 6, *а* подцикл Ω выделен двойной стрелкой). Кроме того, состав цепочек w_j' и w_j'', определяющих обход макроцикла, позволяет выделить несущественные дуги (на рис. 7 они перечеркнуты). Теперь, осуществляя эквивалентные преобразования изменения направления несущественных дуг в подциклах, изображенных на рис. 7, и «склеивания» вершин макроцикла Ф, можно «свернуть» фрагмент Ф и привести его в виду Φ_0, представленному на рис. 6, *б*. Полученную в результате проведенных эквивалентных преобразований схему обозначим π'.

Схема π' не является свободной в $K(L)$, но может быть легко преобразована в свободную схему π''. Для этого в π' выделяются все преобразователи z_i, которыми оканчиваются маршруты обхода схемы, соответствующие конфигурациям $w_{n!}w_D$. Для каждой вершины z_i строится фрагмент схемы Φ_i, $i > 0$, следующим образом:

— из входа схемы единственная дуга направляется в вершину z_i;

— полученная схема преобразуется в эквивалентную вполне-свободную в модели $K(\mathscr{L}(\{s\}, \{p\}))$ схему;

— вход схемы удаляется.

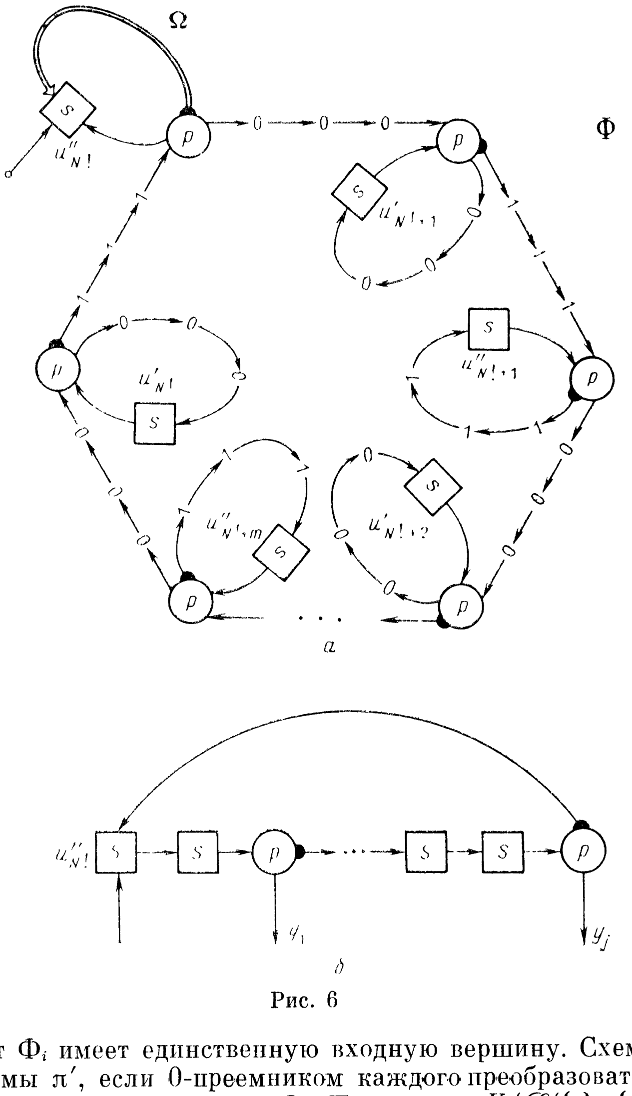

Рис. 6

Фрагмент Φ_i имеет единственную входную вершину. Схема π'' образуется из схемы π', если 0-преемником каждого преобразователя z_i назначить входную вершину фрагмента Φ_i. Поскольку $K(\mathscr{L}(\{s\}, \{p\})) \preccurlyeq K(L)$, то подобное преобразование π' дает в результате эквивалентную в модели $K(L)$ схему π''.

Остается убедиться в том, что π'' — свободная в модели $K(L)$ схема. Рассмотрим произвольный маршрут, ведущий из входа схемы π'' в ее выход. Если данный маршрут не проходит через цикл Φ_0, то соответствующая конфигурация w определяется однозначно вершиной $u''_{n!}$, $n<N$, и одним из фрагментов Φ_i. В этом случае $w = w_{n!}w_D w_U \in \Gamma_L \cap \Gamma_\pi$. Если же маршрут проходит через цикл Φ_0, то ему может соответствовать, вообще говоря, несколько различных конфигураций, одна из которых имеет вид $w_{N!}w_D w_U \in \Gamma_L \cap \Gamma_\pi$ (обход цикла Φ_0 здесь осуществляется за счет цепочки w_D). В обоих случаях маршрут обхода схемы реализуется при выполнении π'' на некоторой функции разметки $\mu \in L$.

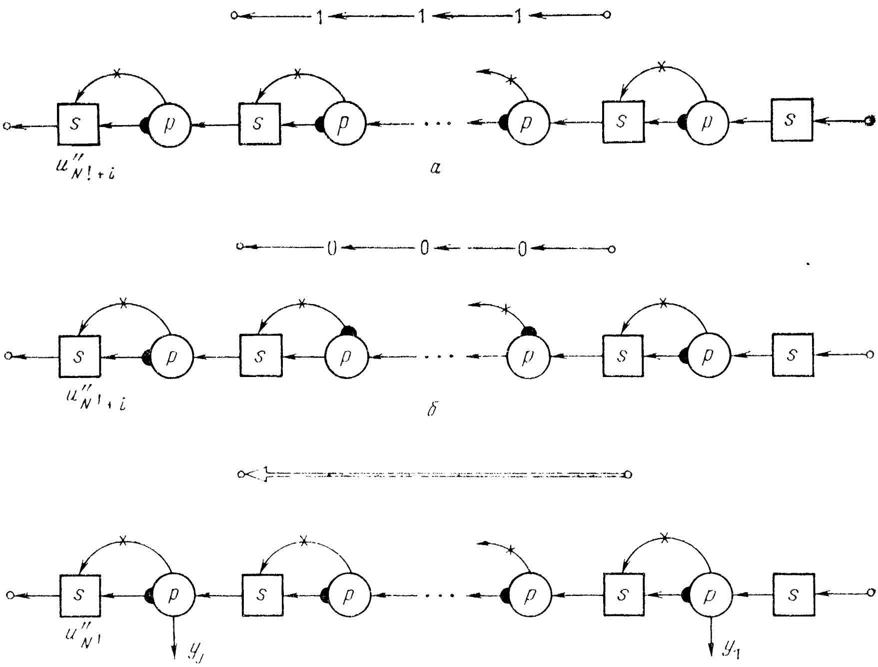

Рис. 7

Таким образом, любая схема π имеет эквивалентную свободную $K(L)$ схему π''. Значит, модель $K(L)$ удовлетворяет УСС. □

Приведенное доказательство допускает обобщение для произвольного базиса (S, P).

Теорема 6. *Существуют гладкие* УСС-*модели, пересечение которых не удовлетворяет* УСС.

Доказательство. В процессе обоснования будут в значительной мере использоваться модель $K(L)$ из теоремы 5 и связанные с ней преобразования схем (рис. 6 и 7).

Рассмотрим две модели $K(L)$ и $K(L')$, одна из которых заимствована из доказательства теоремы 5, а множество функций разметки L' другой задается регулярным множеством конфигураций

$$\Gamma_{L'} = \mathrm{INIT}\,((((s,\ 0)(s,\ 1))^*((s,\ 1)(s,\ 1))^*)^*(s,\ 1)(s,\ 0)^*).$$

Согласно доказательству теоремы 5 $K(L)$ — УСС-модель. Поскольку множество $\Gamma_{L'}$ регулярное, то $K(L')$ удовлетворяет УВСС. Нетрудно убедиться в том, что модель $K(L'') = K(L \cap L')$ задается множеством конфигураций $\Gamma_{L''} = \mathrm{INIT}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} w_n\right)$, где $W_n = \{w_{n!}(s,\ 1)(s,\ 0)(s,\ 0)^*\}$, а $w_{n!}$ определяется так же, как в доказательстве теоремы 5. Покажем, что всякая схема π, у которой множество значений $F_\pi(L'')$ бесконечно, не является свободной в модели $K(L'')$. К числу таковых относится схема, изображенная на рис. 5.

Если множество $\Gamma_{L''} \cap \Gamma_\pi$ бесконечно большое, то для бесконечного числа различных n в нем содержатся конфигурации вида $w_{n!}(s, 1)(s, 0)^k$. Поэтому, следуя ходу доказательства теоремы 5, в схеме π можно выделить макроцикл Φ (рис. 6, *а*), обход которого неизбежен для каждого маршрута, соответствующего указанным выше конфигурациям, начиная с некоторого n. Однако этим аналогия L, L'' исчерпывается, поскольку единственным существенным в модели $K(L'')$ выходом из фрагмента Φ является первый выход y_1 из подцикла Ω (рис. 6, *б* и 7, *в*), причем значение л. п. p на этом выходе равно 0 и остается неизменным на протяжении дальнейшего функционирования схемы π. Таким образом, какова бы ни была функция разметки $\mu \in L''$, если значение $F_\pi(\mu)$ определено и в процессе выполнения схемы π осуществлялся обход макроцикла Φ, то переход из фрагмента Φ в выход схемы будет происходить по одному и тому же маршруту, соответствующему цепочке вида $(s, 0)^m$. Предположим, что упомянутый маршрут проходит через T преобразователей. Тогда, начиная с некоторого $n = N$, в схеме π на функциях разметки μ из L'' реализуются только маршруты, соответствующие конфигурациям

$w_{n!}(s, 1)(s, 0)^T$ и проходящие через $1 + T + \sum_{i=1}^{n!} 4i!$ преобразователей. Следовательно, множество цепочек о. с. $F_\pi(L'')$ не является регулярным, а схема π согласно утверждению 8 не является свободной в модели $K(L'')$. □

Следствие. *Класс УСС-моделей не образует решетки по отношению частичного порядка* $\preccurlyeq$.

Незначительная модификация приведенных выше конструкций позволяет доказать теоремы 5 и 6 для полугрупповых моделей программ $K(L)$. Так, при доказательстве теоремы 5 достаточно в качестве U взять множество цепочек пар вида $U = ((s, 0))^*$.

Итак, УВСС-модели образуют собственное подмножество класса УСС-моделей. Условие свободной схемы в общем случае не наследуется при пересечении моделей и не гарантирует возможности представления всякой свободной схемы в нормальной форме. Поэтому с позиции использования свойств свободной схемы в алгоритме канонизации УВСС-модели обладают гораздо большими преимуществами, чем модели, удовлетворяющие простому условию свободной схемы.

§ 5. Расширения формальных моделей

Рассматривая некоторую исходную формальную модель $K(L)$ над базисом (S, P), вполне естественно допустить возможность обогащения базиса новыми элементами — элементарными операторами и логическими условиями. Введение новых элементов базиса влечет за собой расширение программной семантики, а значит, и формальной модели. Данный раздел посвящен изучению вопроса о том, насколько условия свободной и вполне-свободной схемы устойчивы по отношению к некоторым простым расширениям формальных моделей.

Формальная модель $K(L_1)$ над базисом (S_1, P_1) называется *проекцией* модели $K(L_2)$ над базисом (S_2, P_2), если

1. $S_1 \subseteq S_2$; $P_1 \subseteq P_2$;

2. $\mu \in L_1 \Leftrightarrow \exists \mu' \in L_2 \forall h \in S_1^*$ значение $\mu(h)$ есть проекция набора значений логических переменных из P_2 на множество P_1.

Модель $K(L_2)$ называется при этом *расширением* $K(L_1)$.

Очевидно следующее

Утверждение 10. *Если формальная модель удовлетворяет* УСС (УВСС), *то и любая ее проекция обладает тем же свойством.*

Рассмотрим некоторые простейшие типы расширений формальных моделей.

Модель $K(L_2)$ над базисом (S_2, P) называется (операторным) *расщеплением* модели $K(L_1)$ над базисом (S_1, P), если

1) S_1 — гомоморфный образ S_2 при некотором отображении $\Phi : S_2 \to S_1$;

2) $S_1 \subseteq S_2$, и для любого $s \in S_1$ $\Phi(s) = s$;

3) $\mu \in L_2 \Leftrightarrow \exists \mu' \in L_1 \forall h = s_1 \ldots s_k \in S_2^*$ выполняется соотношение $\mu(h) = \mu'(\Phi(s_1) \ldots \Phi(s_k))$.

Если о. с. $s \in S_1$ имеет не более r прообразов из S_2, то $K(L_2)$ будет называться r-расщеплением формальной модели $K(L_1)$.

Содержательное истолкование операторного расщепления формальной модели можно продемонстрировать на следующем примере. Предположим, что о. с. $s \in S_1$ соответствует программный оператор $x := f(y)$. Если возникает необходимость установить промежуточные значения переменной x, то часть операторов $x := f(y)$ можно заменить составным оператором begin $x := f(y)$ output(x)end. В среде формальных моделей программ это приводит к расщеплению о. с. s на два о. с.: s — соответствующий оператору присваивания, и s' — соответствующий новому составному оператору. Поскольку s, s' изменяют значения л. п. одинаковым образом, то в результате образуется операторное расщепление первоначальной модели.

Формальная модель $K(L_2)$ над базисом (S_2, P) называется *неподвижным* (операторным) *расширением* модели $K(L_1)$ над базисом (S_1, P), если

1) $S_1 \subseteq S_2$;

2) функция разметки $\mu \in L_2$ в том и только том случае, когда

а) $\forall h \in S_2^* \forall s \in S_2 - S_1 \mu(h) = \mu(hs)$;

б) $\exists \mu' \in L_1 \forall h \in S_2^* \mu(h) = \mu'(h')$, где h' образована из h удалением всех о. с., не принадлежащих S_1.

При неподвижном расширении к имеющемуся набору программных операторов добавляются новые, не изменяющие в процессе своего выполнения значений элементарных логических условий. Таковыми могут быть, например, операторы вывода или операторы присваивания $x := f(y)$ в том случае, когда логические условия не зависят от значения x.

Формальная модель $K(L_2)$ над базисом (S, P_2) называется *универсальным* (логическим) *расширением* модели $K(L_1)$ над базисом (S, P_1), если

1) $P_1 \subseteq P_2$;

2) $\mu \in L_2 \Leftrightarrow \exists \mu' \in L_1 \forall h \in S^*$ значения $\mu'(h)$ есть проекция набора $\mu(h)$ значений л. п. из P_2 на множество л. п. P_1.

Если при этом $|P_2| - |P_1| = r$, то $K(L_2)$ называется *универсальным r-расширением модели* $K(L_1)$.

При универсальном расширении базис обогащается новыми элементарными логическими условиями, но характер зависимости их значений от хода выполнения программы никак не отражается в семантике множества функций разметки (допустимо произвольное изменение значений новых логических условий).

Представленные далее результаты свидетельствуют о том, что простые расширения формальной модели удовлетворяют УСС в том и только в том случае, когда сама модель удовлетворяет более сильному УВСС. Доказательства этих теорем основываются на одном общем методе — новые элементы базиса используются для кодирования наборов значений л. п. и последующего преобразования свободной схемы во вполне-свободную.

1. Операторное расщепление. Рассмотрим операторное расщепление $K(L_2)$ модели $K(L_1)$, порожденное некоторым гомоморфизмом $\Phi : S_2 \to S_1$. Отображение Φ можно распространить на множество схем программ и конфигураций, заменяя каждый о. с. $s \in s_2$ его образом $\Phi(s)$.

В этом случае справедливы соотношения $\Gamma_{L_1} = \Phi(\Gamma_{L_2})$, $\Gamma_{L_2} = \Phi^-(\Gamma_{L_1})$ и для любой схемы π над базисом (S_2, P) выполняется $\Phi(\Gamma_\pi) = \Gamma_{\Phi(\pi)}$. Нетрудно доказать

Утверждение 11. *Схема π свободна в модели $K(L_2)$ тогда и только тогда, когда $\Phi(\pi)$ свободна в модели $K(L_1)$.*

Теорема 7. *Следующие три утверждения эквивалентны*

1) *модель $K(L_1)$ над базисом (S_1, P) удовлетворяет* УВСС;

2) *любое расщепление модели $K(L_1)$ удовлетворяет* УВСС;

3) *любое 2-расщепление модели $K(L_1)$ удовлетворяет* УСС.

Доказательство. 1) $\to$ 2). Для произвольного расщепления $K(L_2)$ модели $K(L_1)$, порожденного гомоморфизмом Φ, и для всякой схемы π над базисом $(S_2, P) = (\Phi^-(S_1), P)$ выполняется соотношение

$$\Gamma_{L_2} \cap \Gamma_\pi = \Phi^-(\Gamma_{L_1}) \cap \Phi^-(\Gamma_{\Phi(\pi)}) \cap \Gamma_\pi = \Phi^-(\Gamma_{L_1} \cap \Gamma_{\Phi(\pi)}) \cap \Gamma_\pi,$$

поскольку $\Phi^-(\Gamma_{\Phi(\pi)}) \supseteq \Gamma_\pi$ и $\Phi^-(\Gamma_1) \cap \Phi^-(\Gamma_2) = \Phi^-(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$. В силу того, что $K(L_1)$ — УВСС-модель, множество конфигураций $\Gamma_{L_1} \cap \Gamma_{\Phi(\pi)}$ является регулярным. Так как обращение гомоморфизма Φ сохраняет регулярность языка, то множество $\Gamma_{L_2} \cap \Gamma_\pi$ также регулярно. Поскольку схема π была выбрана произвольно, то регулярность $\Gamma_{L_2} \cap \Gamma_\pi$ согласно следствию из теоремы 3 влечет выполнимость УВСС для модели $K(L_2)$.

2) $\to$ 3). Следует из определения УВСС.

3) $\to$ 1). Рассмотрим полное 2-расщепление $K(L_2)$ модели $K(L_1)$, порожденное гомоморфизмом Φ и удваивающее количество о. с. базиса. Согласно следствию из теоремы 3 достаточно показать, что в случае выполнимости УСС для модели $K(L_2)$ множество конфигураций $\Gamma_{L_1} \cap \Gamma$ регулярно для произвольной схемы π над базисом (S_1, P). Для каждого набора Δ значений л. п., копируя вершины схемы π, можно построить эквивалентную в модели $K(\mathscr{L}(S_1, P))$ схему π_Δ, обладающую следующим свойством. Преобразователи схемы π_Δ распадаются на два непересекающихся класса C_1 и C_2; класс C_1 составляют всевозможные Δ-преемники преобразователей схемы π_Δ, а класс C_2 — все прочие Δ'-преемники преобразователей π при всевозможных прочих наборах $\Delta' \neq \Delta$. Поскольку $C_1 \cap C_2 = \varnothing$, то в схеме π_Δ все о. с. $s \in S_1$ в преобразователях класса C_1 можно заменить их прообразами $s' \in S_2 - S_1$. Полученную в результате проведенных преобразований схему над базисом (S_2, P) обозначим π'_Δ. В π'_Δ преобразователи с о. с. из $S_2 - S_1$ выделяют набор Δ, так как в процессе любого обхода схемы эти преобразователи можно достичь лишь с набором Δ значений л. п. Для каждой цепочки о. с. $h = s_1 \ldots \ldots s_i s_{i+1} \ldots s_m \in F_{\pi'_\Delta}(L_2)$ построим всевозможные конфигурации вида

$$w = (s_0, \Delta_0)(\Phi(s_1), \Delta_1) \ldots (\Phi(s_i), \Delta_i)(\Phi(s_{i+1}), \Delta_{i+1}) \ldots (\Phi(s_m), \Delta_m),$$

где для всякого i, $0 \leqslant i \leqslant m$, либо $\Delta_i = \Delta$ при $s_{i+1} \in S_2 - S_1$, либо Δ_i — произвольный набор из множества $B_P - \{\Delta\}$ при $s_{i+1} \in S_1$. Обозначим через Γ_Δ множество всевозможных конфигураций подобного вида для различных цепочек h из $F_{\pi'}(L_2)$. Из построения π'_Δ и Γ_Δ следует, что $\Gamma_{L_1} \cap \Gamma_\pi \subseteq \Gamma_\Delta$. Поскольку $K(L_2)$ является УСС-моделью, то множество цепочек о. с. $F_{\pi'}(L_2)$ регулярное. Поэтому множество конфигураций Γ_Δ также регулярное. И наконец, для каждой конфигурации w индукцией по длине w можно показать, что $w \in \bigcap_{\Delta \in B_P} \Gamma_\Delta$ влечет $w \in \Gamma_{L_1}$. Таким образом, приходим к выводу о том, что $\Gamma_{L_1} \cap \Gamma_\pi = \bigcap_{\Delta \in B_P} \Gamma_\Delta \cap \Gamma_\pi$. Так как множество наборов B_P конечное, то $\Gamma_{L_1} \cap \Gamma_\pi$ является регулярным множеством конфигураций. □

2. Неподвижное операторное расширение. Операторы модели $K(L)$, не изменяющие значения логических переменных, могут быть использованы для выделения различных выходов из логических фрагментов схем программ. Если при этом окажется, что каждый выход из логического фрагмента достижим на единственном наборе значений л. п., то свободная в модели $K(L)$ схема легко преобразуется во вполне-свободную.

Теорема 8. *Следующие три утверждения эквивалентны:*

1) *модель* $K(L)$ *над базисом* (S, P) *удовлетворяет* УВСС;

2) *любое неподвижное расширение модели* $K(L)$ *удовлетворяет* УВСС;

3) *некоторое неподвижное расширение модели* $K(L)$ *удовлетворяет* УСС.

Доказательство. 1) $\to$ 2). Ограничимся анализом случая, когда неподвижное операторное расширение $K(L')$ модели $K(L)$ образовано путем добавления к S нового о. с. $s' \notin S$, не изменяющего значений л. п. Положим $S' = S \cup \{s'\}$. Рассмотрим произвольную схему π из модели $K(L')$, содержащую t преобразователей с о. с. s'. Поскольку s' не изменяет значений л. п., то любая конфигурация w из $\Gamma_\pi \cap \Gamma_{L'}$ содержит не более t идущих подряд пар вида (s', Δ) (иначе происходит зацикливание схемы π на соответствующей функции разметки из L'). Обозначим через Γ^t_π, $\Gamma^t_{L'}$ и $\Gamma^t_{\mathscr{L}(S',P)}$ подмножества конфигураций Γ_π, $\Gamma_{L'}$ и $\Gamma_{\mathscr{L}(S',P)}$, в которых пары вида (s', Δ) не встречаются более t раз подряд. Очевидно, $\Gamma_\pi \cap \Gamma_{L'} = \Gamma^t_\pi \cap \Gamma^t_{L'}$.

Рассмотрим $(t+1)$-расщепление $K(L_0)$ модели $K(L)$, порожденное гомоморфизмом $\varphi\colon S_0 \to S$, при котором каждый о. с. $s \in S$ имеет $t+1$ прообразов $s, s^1, \ldots, s^t$ в S_0. Используя расщепленный базис (S_0, P), определим мономорфизм $\psi\colon \Gamma_{\mathscr{L}(S_0,P)} \to \Gamma^t_{\mathscr{L}(S',P)}$ следующими соотношениями:

$$\Psi((s^i, \Delta)) = (s, \Delta)((s', \Delta))^i, \quad 0 \leqslant i \leqslant t.$$

Отметим некоторые свойства взаимно однозначного гомоморфизма ψ. Из определения Ψ, неподвижного расширения $K(L')$ и расщепления $K(L_0)$ следует $\psi(\Gamma_{L_0}) = \Gamma^t_{L'}$. Прообразом $\psi^-(\Gamma^t_\pi)$ регулярного S-однозначного множества конфигураций Γ^t_π является некоторое регулярное множество $R \subseteq \mathscr{L}(S_0, P)$, которое в общем случае не обладает свойством S-однозначности. Однако образ множества R относительно гомоморфизма φ является регулярным S-однозначным множеством конфигураций, и при этом $\varphi(R) \subseteq \mathscr{L}(S, P)$. Согласно утверждению 7 существует схема π_1 над базисом (S, P) такая, что $\Gamma_{\pi_1} = \varphi(R)$. Таким образом, справедливы следующие равенства:

$$\Gamma_\pi \cap \Gamma_{L'} = \Gamma^t_\pi \cap \Gamma^t_{L'} = \psi\psi^-(\Gamma^t_\pi \cap \Gamma^t_{L'}) = \psi(\psi^-(\Gamma^t_\pi) \cap \psi^-(\Gamma^t_{L'})) =$$
$$= \psi(R \cap \Gamma_{L_0}) = \psi(R \cap \varphi^-(\Gamma_{\pi_1}) \cap \varphi^-(\Gamma_L)) = \psi(R \cap \varphi^-(\Gamma_{\pi_1} \cap \Gamma_L)).$$

Вследствие того, что модель $K(L)$ удовлетворяет УВСС, множество конфигураций $\Gamma_{\pi} \cap \Gamma_L$ регулярное. Таковым же является и множество $\Gamma_\pi \cap \Gamma_{L'}$, поскольку гомоморфизмы φ, ψ, а также их обращения сохраняют регулярность языков. Коль скоро схема π была выбрана произвольно, то согласно следствию из теоремы 3 $K(L')$ является УВСС-моделью.

2) $\to$ 3). Справедливо в силу определения УВСС.

3) $\to$ 1). Предположим, что неподвижное операторное расширение $K(L')$ модели $K(L)$ над базисом (S, P) удовлетворяет УСС и имеет о. с. $s' \notin S$, не изменяющий значений л. п.. Занумеруем все наборы зна-

чений л. п. $p_1, \ldots, p_m$ из B_P целыми числами от 1 до 2^m. Набор с номером i будем обозначать Δ_i.

Рассмотрим произвольную схему π, представленную в нормальной форме, над базисом (S, P). Для доказательства исследуемого утверждения достаточно убедиться в том, что $\Gamma_\pi \cap \Gamma_L$ — регулярное множество конфигураций. В схеме π для каждого распознавателя с элементарной конъюнкцией вида $K(\Delta_i)$ поместим между ним и его 1-преемником цепочку, состоящую из i преобразователей с о. с. s'. Полученную в результате этого преобразования схему обозначим π'. Определим далее отображение $\Phi : S \times B_P \to (S \cup \{s'\})^*$, сопоставляя каждой паре (s, Δ_i) цепочку о. с. $h_{s,i} = s(s')^i$. Нетрудно видеть, что подобное отображение Φ является мономорфизмом и для него выполняется равенство $\Phi(\Gamma_\pi \cap \Gamma_L) = F_{\pi'}(L')$. Поскольку модель $K(L')$ удовлетворяет УСС и справедливо утверждение 8, множество конфигураций $\Gamma_\pi \cap \Gamma_L = \Phi^-(F_{\pi'}(L'))$ регулярное. □

Теоремы 7 и 8 показывают, что УВСС наследуется при операторных расширениях модели, а класс УВСС-моделей в точности совпадает с классом гладких формальных моделей, удовлетворяющих УСС и сохраняющих это свойство при простейших операторных расширениях. Несколько иначе обстоит дело с универсальным логическим расширением формальных моделей программ.

§ 6. Универсальные логические расширения моделей программ

Теорема 9. *Формальная модель $K(L)$ над базисом (S, P), $|S| > 1$, удовлетворяет* УВСС, *если некоторое ее универсальное логическое расширение удовлетворяет* УСС.

Доказательство. Утверждение 10 позволяет ограничиться анализом универсального логического расширения $K(L')$ с единственной новой свободной л. п. $p_0 \notin P$. Покажем, что для произвольной схемы π, представленной в нормальной форме над базисом (S, P), множество конфигураций $\Gamma_\pi \cap \Gamma_L$ регулярное, если $K(L')$ — УСС-модель.

Занумеруем все наборы значений л. п. из P, сопоставляя каждому $\Delta \in B_P$ его лексикографический порядковый номер $N(\Delta)$. Преобразуем далее π в схему π' над базисом $(S, P \cup \{p_0\})$ следующим образом. В каждом логическом фрагменте схемы π, на входе которого расположен преобразователь с о. с. s' (рис. 8, *а*), заменим распознаватели с элементарными конъюнкциями вида $K(\Delta) = p_1^{\delta_1} \& \ldots \& p_m^{\delta_m}$, $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_m) \in B_P$, фрагментами, изображенными на рис. 8, *б*, где $s'' \neq s'$, $s'' \in S$. Тем самым в схеме π' все распознаватели оказались «закодированными» цепочками о. с. из S^*. Для каждой функции разметки $\mu \in L$ и $t \geqslant 0$ обозначим через μ' функцию разметки из L', принимающую на всякой цепочке о. с. $h \in S^*$ значение $\mu'(h) = (1, \delta_1, \ldots, \delta_m)$ в том случае, если $\mu(h) = (\delta_1, \ldots, \delta_m)$, а через $L'_{\mu,t}$ — множество всевозможных функций μ'' из L', значения которых $\mu''(h) = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_m)$ на любой цепочке $h \in S^*$ удовлетворяют условиям $\delta_0 = 0$ при $|h| \geqslant t$, $\delta_0 = 1$ при $|h| < t$, $(\delta_1, \ldots, \delta_m) = \mu(h)$ при $|h| \leqslant t$.

Исходя из построения схемы π' видно, что для любой функции разметки $\mu \in L$ конфигурация $w = (s_0, \Delta_0)(s_1, \Delta_1) \ldots (s_N, \Delta_N)$ принадлежит множеству $\Gamma_\pi \cap \Gamma_\mu$ тогда и только тогда, когда конфигурация $w' = (s_0, (1, \Delta_0))(s_1, (1, \Delta_1)) \ldots (s_N, (1, \Delta_N))$ содержится в $\Gamma_{\pi'} \cap \Gamma_{\mu'}$. В то же время на основании структуры схемы π' (упомянутого кодирования наборов значений л. п. цепочками преобразователей) можно сделать следующее заключение: $w' \in \Gamma_{\pi'} \cap \Gamma_{\mu'}$ в том и только том случае, когда выполнены условия

1′) $s_0 s_1 \ldots s_N \in F_{\pi'}(L')$;

2$'$) для любого t, $0 \leqslant t \leqslant N$, найдется $\mu'' \in L'_{\mu,t}$ такая, что $F_{\pi'}(\mu'') = s_0 s_1 \ldots s_t (s')^{N(\Delta_t)}$, где s' — некоторый о. с., отличный от s_t.

Поскольку модель $K(L')$ удовлетворяет УСС, множество $F_{\pi'}(L')$ регулярное. Поэтому для завершения доказательства теоремы достаточно убедиться в том, что последнее условие, связанное с функциями разметки μ'', может быть проверено регулярным образом.

Обратимся к свободной в модели $K(L')$ схеме π'', (ε, L')-эквивалентной схеме π'. Учитывая определение функций разметки из $L'_{\mu,t}$ и специфику структуры схемы π', условие 2$'$) допускает следующую переформулировку применительно к схеме π'':

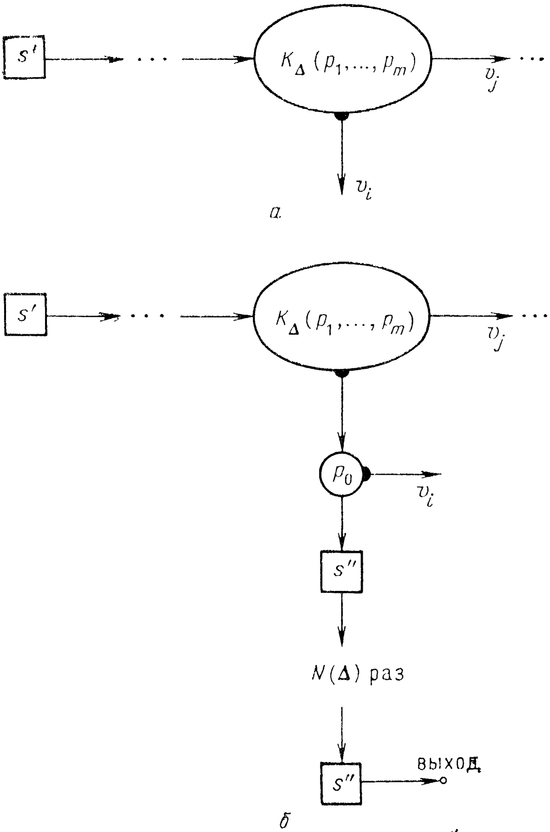

Рис. 8

2$''$) для любого t, $0 \leqslant t \leqslant N$, в схеме π'' из преобразователя с о. с. s_t, которым оканчивается маршрут, соответствующий конфигурации $w'_t = (s_0, (1, \Delta_0))(s_1, (1, \Delta_1)) \ldots (s_{t-1}, (1, \Delta_{t-1}))$, можно достичь выхода схемы с неизменным установленным значением л. п. $p_0 = 0$, пройдя через $N(\Delta_t)$ преобразователей с одним и тем же о. с. $s' \neq s_t$.

Ввиду того, что схема π'' имеет конечное число вершин, проверка условия 2$''$), а значит, и условия $w \in \Gamma_\pi \cap \Gamma_L$, может быть осуществлена конечным автоматом. Тем самым установлена регулярность множества конфигураций $\Gamma_\pi \cap \Gamma_L$. □

В отличие от теорем 7 и 8 утверждение теоремы 9 не допускает обращения, т. е. выполнимость УВСС для формальной модели $K(L)$, вообще говоря, не влечет за собой выполнимости УСС для 1-универсального логического расширения модели $K(L)$. Об этом свидетельствует

Пример 3. Рассмотрим модель $K(L)$ над базисом (S, P), $S = \{s_1, s_2\}$. $P = \{p_1\}$, множество функций разметки L которой состоит из единственной функции μ. На каждой цепочке о. с. $h \in S^*$ значение $\mu(h) = (0)$ в том и только том случае, когда h представима в одном из следующих двух видов:

$$h = s_1 s_2 (s_1)^2 (s_2)^2 \ldots (s_1)^n (s_2)^n (s_1)^k$$

или

$$h = s_1 s_2 (s_1)^2 (s_2)^2 \ldots (s_1)^n (s_2)^n (s_1)^{n+1} (s_2)^k,$$

где n — произвольное целое число и $0 \leqslant k \leqslant n$.

Подобная функция разметки μ однозначно определяется указанием некоторой сверхцепочки о. с. $h_\omega \in S^\omega$ (в данном случае $h_\omega = s_1 s_2 (s_1)^2 (s_2)^2 \ldots (s_1)^n (s_2)^n \ldots$), на каждом префиксе которой она принимает некоторое выделенное значение.

Для того чтобы лучше представить структуру множества конфигураций Γ_L, введем следующие обозначения.

1. Обозначим через U множество всевозможных цепочек, состоящих из пар $(s_1, 1)$ и $(s_2, 1)$, т. е. $U = ((s_1, 1) + (s_2, 1))^*$.

2. Будем считать, что w_0' и w_0'' равны пустой цепочке e, а w_k' и w_k'' равны цепочкам пар $((s_1, 0))^k$ и $((s_2, 0))_k$ соответственно при $k > 0$.

3. Обозначим через W_n множество, состоящее из всевозможных конфигураций двух видов $w_0'w_0''w_1'w_1'' \dots w_n'w_n''w_k'(s_2, 1)\,w_U$ и $w_0'w_0''w_1'w_1'' \dots$ $\dots w_n'w_n''w_{n+1}'w_k''(s_1, 1)\,w_U$, где $0 \leqslant k \leqslant n$ и $w_U \in U$.

Тогда $\Gamma_L = \mathrm{INIT}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} W_n\right)$ состоит из всевозможных начальных подцепочек конфигураций множеств W_n. Покажем, что для любой схемы π над базисом (S, P), содержащей не более N различных вершин, справедливо соотношение $\Gamma_\pi \cap \Gamma_L = \Gamma_\pi \cap \mathrm{INIT}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{N} W_n\right)$. Действительно, если в процессе выполнения схемы π на функции разметки μ будет впервые пройдено подряд N преобразователей с одним и тем же о. с. s и значением л. п. $p_1 = 0$, то и следующий в порядке прохождения преобразователь будет иметь тот же о. с. s. После прохождения через этот преобразователь функция μ согласно определению обязательно изменяет значение p_1 на 1. Поскольку μ при наращивании цепочки о. с. в процессе выполнения схемы π изменяет значение л. п. p_1 не более одного раза, дальнейшее выполнение π осуществляется с неизменным значением $p_1 = 1$. Процесс выполнения в этом случае либо продолжается бесконечно долго (схема π зацикливается на функции разметки μ), либо завершается спустя не более N этапов. Это означает, что конфигурации из множеств W_n, $n > N$, при построении $\Gamma_L \cap \Gamma_\pi$ можно не принимать во внимание. Ввиду того, что $\Gamma_L \cap \mathrm{INIT}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{N} W_n\right)$ — конечное множество конфигураций, модель $K(L)$ удовлетворяет УВСС.

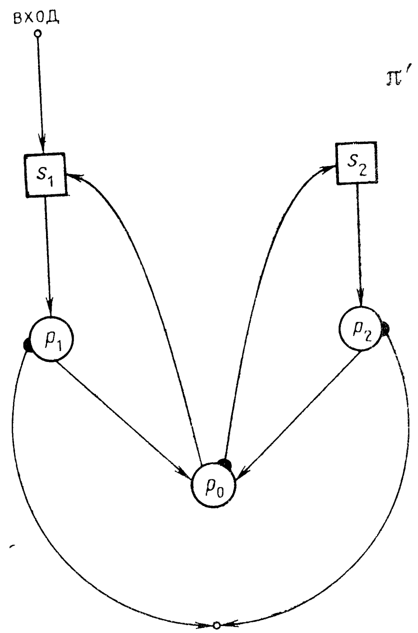

Рис. 9

В то же время, если к базису (S, P) добавить новую л. п. p_0 и образовать за счет нее универсальное логическое расширение $K(L')$ модели $K(L)$, то $K(L')$ не будет удовлетворять даже УСС. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть схему π', изображенную на рис. 9. Исходя из определения множества Γ_L, можно заметить, что множество $F_{\pi'}(L')$ состоит из всевозможных цепочек $h \in S^*$ следующих двух видов:

$$h = s_1 s_2 (s_1)^2 (s_2)^2 \dots (s_1)^n (s_2)^n (s_1)^{n+1} (s_2)^k s_1,$$

$h_t = s_1 \dots s_k s_{k+1} \dots s_{k+m}$, не сохраняет значение л. п.

где n — произвольное целое число и $0 \leqslant k \leqslant n$. Ввиду того, что $F_{\pi'}(L')$ — нерегулярное множество цепочек о. с. и справедливо утверждение 8, в модели $K(L')$ не существует свободной схемы, эквивалентной π'.

На самом деле имеет место более общая

Теорема 10. *Для всякого базиса* (S, P), $|S| = M > 1$, *и произвольного* r, $0 \leqslant r \leqslant \log_2(M)$, *существует формальная модель* $K(L)$, *универсальное логическое* r-*расширение которой является* УВСС-*моделью, а универсальное* $(r+1)$-*расширение не удовлетворяет* УСС.

Доказательство. Ограничимся тем, что установим справедливость теоремы для базиса (S, P), $S = \{s^1, \dots s^M\}$, $M > 1$, $P = \{p^0\}$. Как будет видно из дальнейших рассуждений, это ограничение множества P не умаляет общности доказательства, основная идея которого почерпнута из примера 3.

Введем ряд вспомогательных понятий, которые будут использованы при доказательстве теоремы. Рассмотрим универсальное логическое r-расширение $K(L^r)$ модели $K(L)$ над базисом (S, P^r), $P^r = \{p_0, p_1, \dots, p_r\}$, где $p_1, \dots, p_r$ — свободные л. п. базиса модели $K(L^r)$. Множество V вершин схемы π назовем s-однородным, если оно удовлетворяет одному из трех условий: а) $V = \varnothing$, б) V состоит из единственной вершины — входа схемы π, в) V — некоторое множество преобразователей, которым приписан один и тот же о. с. $s \in S$. Для однородного множества V, о. с. $s' \in S$ и двоичного символа δ' обозначим через $V(s', \delta')$ s'-однородное множество (возможно, пустое), состоящее из преобразователей с о. с. s', являющихся Δ-преемниками вершин множества V при всевозможных наборах Δ значений л. п. вида $\{\delta', \delta_1, \dots, \delta_r\}$, где δ_i, $1 \leqslant i \leqslant r$,— произвольные двоичные символы. Определение множества $V(s', \delta')$ может быть расширено для цепочек о. с. $s'_1 \dots s'_{k-1}s'_k$ и двоичных символов $\delta'_1 \dots \delta'_{k-1}\delta'_k$ на основании следующего соглашения:

$$V(s'_1 \dots s'_{k-1}s'_k,\ \delta'_1 \dots \delta'_{k-1}\delta'_k) = V(s'_1 \dots s'_{k-1},\ \delta'_1 \dots \delta'_{k-1})(s'_k, \delta'_k).$$

Иными словами, $V(s'_1 \dots s'_k,\ \delta'_1 \dots \delta'_k)$ — это множество преобразователей с о. с. s'_k, достижимых из вершин множества V на k-м этапе некоторого вычисления, в процессе которого последовательно проходятся преобразователи с о. с. $s'_1, \dots, s'_{k-1}$, значения л. п. p_0 выбираются последовательно из цепочки $\delta'_1 \dots \delta'_k$, а значения свободных л. п. $p_1, \dots, p_r$ изменяются произвольным образом.

Исследуем сначала случай $r < \log_2(M)$. Так же, как и в приведенном выше примере, множество L будет стоять из единственной функции разметки μ. Функция μ однозначно определяется некоторой сверхцепочкой $h_\omega \in S^\omega$: для каждой цепочки $h \in S^*$ значение $\mu(h)$ равно (0), если $h \in \mathrm{INIT}(h_\omega)$, и равно (1) в противном случае. Для доказательства теоремы достаточно построить сверхцепочку h_ω, удовлетворяющую следующим трем требованиям:

1) h_ω состоит только из о. с. $s^1, \dots, s^{2^r+1}$;

2) $\mathrm{INIT}(h_\omega)$ — нерегулярное множество цепочек о. с.;

3) какова бы ни была схема π над базисом (S, P^r), $P^r = \{p_0, p_1, \dots \dots, p_r\}$, существует $N > 0$ такое, что при выполнении π на произвольной функции разметки μ' в рамках универсального логического r-расширения $K(L^r)$ модели $K(L)$ л. п. p_0 спустя N этапов выполнения приобретает значение 1.

Действительно, обозначим для произвольной цепочки (сверхцепочки) о. с. h через $W_n(h)$ множество всевозможных конфигураций вида

$$(s_0, \Delta_0)(s_1, \Delta_1) \dots (s_n, \Delta_n) \dots (s_m, \Delta_m), \quad 0 \leqslant n \leqslant m,$$

где $h_n = s_1 \dots s_n \in \mathrm{INIT}(h)$, $s_1 \dots s_n s_{n+1} \notin \mathrm{INIT}(h)$, $\Delta_i = (0, \delta_1, \dots, \delta_r)$ при $0 \leqslant i \leqslant n$, $\Delta_j = (1, \delta_1 \dots, \delta_r)$ при $n < j \leqslant m$. Тогда по определению универсального r-расширения $K(L^r)$ модели $K(L)$ имеем $\Gamma_{L^r} = \bigcup_{n=0}^{\infty} W_n(h_\omega)$.

Если h удовлетворяет требованию 3), то для произвольной схемы π при некотором $N > 0$ выполняется соотношение $\Gamma_\pi \cap \Gamma_{L^r} = \Gamma_\pi \cap \bigcup_{n=0}^{N} W_n(h_\omega)$. Поскольку каждое множество конфигураций $W_n(h_\omega)$ регулярное, таковым же будет и множество $\Gamma_\pi \cap \Gamma_{L^r}$. Согласно следствию из теоремы 3 $K(L^r)$ является в этом случае УВСС-моделью.

Невыполнимость УСС для универсального логического $(r+1)$-расширения $K(L^{r+1})$ модели $K(L)$ подтверждает схема π', представленная на рис. 10. π' содержит в точности 2^r+1 преобразователей $v_1, \ldots, v_{2^r+1}$, помеченных о. с. $s^1, \ldots, s^{2^r+1}$. Дуги, исходящие из этих вершин, а также из входа схемы ведут в однотипные логические фрагменты F', представленные на рис. 10, *б*. Через K_i обозначены различные элементарные

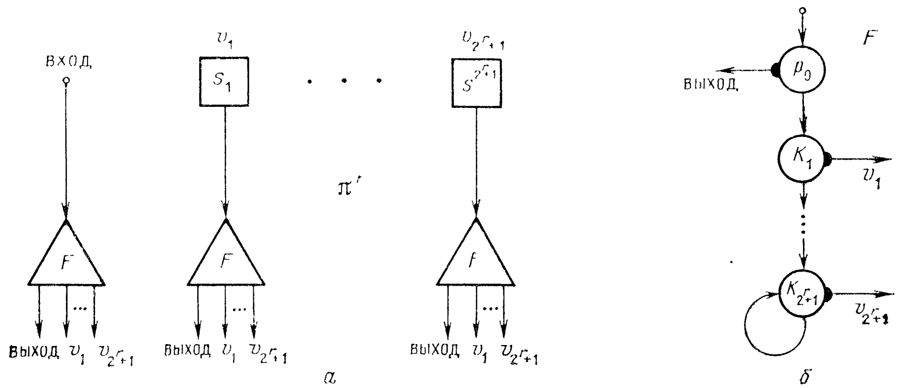

Рис. 10

конъюнкции, зависящие от свободных переменных $p_1, \ldots, p_{r+1}$. Исходя из определения μ и универсального расширения модели $K(L)$ за счет свободных л. п. $p_1, \ldots, p_{r+1}$, легко видеть, что $F_{\pi'}(L^{r+1}) = \{h\colon h = h's,\ h' \in \in \mathrm{INIT}(h_\omega),\ h's \notin \mathrm{INIT}(h_\omega)\}$. Требования 1) и 2), которым должна удовлетворять сверхцепочка о. с. h_ω, приводят к тому, что множество цепочек $F_{\pi'}(L^{r+1})$ становится нерегулярным. Согласно утверждению 8 это означает, что формальная модель $K(L^{r+1})$ не удовлетворяет УСС.

Перейдем к построению сверхцепочки h_ω, согласованной с требованиями 1) — 3). Воспользуемся для этого диагональным методом. Занумеруем все схемы программ над базисом (S, P^r). Выбрав в качестве исходной цепочки h_0 пустую цепочку e, будем последовательно в порядке возрастания номеров t просматривать все схемы программ π_t над указанным базисом, наращивая при этом текущую цепочку о. с. h_t с тем, чтобы обеспечить выполнимость требования 3) для схем π_i, $1 \leqslant i \leqslant t$. Предположим, что по окончании исследования первых $t-1$ схем была построена такая цепочка $h_{t-1} = s_1 \ldots s_k$, состоящая из о. с. $s^1, \ldots, s^{2^r+1}$, что для любой схемы π_i, $1 \leqslant i \leqslant t-1$, спустя k этапов любого ее выполнения в рамках модели $K(L_k^r)$, где $\Gamma_{L_k^r} = \bigcup_{n=0}^{k} W_n(h_{t-1})$, либо достигается выход схемы, либо л. п. p_0 приобретает значение 1. Обратимся к схеме π_t и, выбрав в качестве V_0 однородное множество, состоящее из входа схемы, рассмотрим другое однородное множество $V_1 = V_0(s_1 \ldots \ldots s_k, 0 \ldots 0)$. Если $V_1 = \varnothing$, то это означает, что в модели $K(L_k^r)$ не допустимо ни одно выполнение схемы π_t, при котором значение л. п. $p_0 = 0$ на протяжении k начальных этапов. Тогда h_t полагается равной h_{t-1} и осуществляется переход к анализу следующей по порядку схемы π_{t+1}. Предположим, что $V_1=\{v_1, \ldots, v_T\}\neq\varnothing$. Оценим мощность однородных множеств $U_j=V_1(s^j, 0)$ вершин схемы π для различных о. с. $s^j\in S$, $1\leqslant j\leqslant l=2^r+1$. Очевидно, что $\sum\limits_{j=1}^{l}|U_j|=\left|\bigcup\limits_{j=1}^{l}U_j\right|\leqslant T2^r$. Поскольку в данном случае $2^r<l\leqslant M$, то среди множеств вершин U_j найдется s^{j_1}-однородное множество U_{j_1} такое, что $|U_{j_1}|<T=|V_1|$. Добавим к цепочке h_{t-1} о. с. $s_{k+1}=s^{j_1}$ и повторим приведенные выше рассуждения применительно к множеству вершин $V_2=U_{j_1}$. В результате будет построена последовательность однородных множеств $V_1, V_2, \ldots, V_m$, $0\leqslant m\leqslant T$, такая, что $|V_1|>|V_2|>\ldots>|V_m|=0$, и соответствующая им последовательность о. с. $s_{k+1}, s_{k+2}, \ldots, s_{k+m}$. Равенство $|V_m|=0$ означает, что ни одно выполнение схемы π_t на функциях разметки из L^r_{k+m}, где $\Gamma_{L^r_{k+m}}=\bigcup\limits_{n=0}^{k+m}W_n(h_t)$, $h_t=s_1\ldots s_ks_{k+1}\ldots s_{k+m}$, не сохраняет значение л. п. p_0 равным 0 на протяжение $k+m$ или более этапов. Поскольку нумерация π_t охватывает все схемы над базисом (S, P^r), то сверхцепочка h_ω, образующаяся в процессе построения h_t при $t\to\infty$, удовлетворяет требованиям 1) и 3).

Покажем, что $\mathrm{INIT}(h_\omega)$ — нерегулярное множество. Предположим противное. Выберем произвольные два набора $\Delta'=(0, \delta_1, \ldots, \delta_r)$ и $\Delta''=(1, \delta_1, \ldots, \delta_r)$, отличающиеся только значением первой компоненты p_0. Рассмотрим множество конфигураций $\Gamma=\{(s_0, \Delta')(s_1, \Delta')\ldots(s_{k-1}, \Delta')\times\times(s_k, \Delta''): s_1\ldots s_{k-1}s_k\in\mathrm{INIT}(h_\omega),\ 0\leqslant k\}$. Нетрудно убедиться в том, что Γ является S-однозначным множеством конфигураций. Ввиду того, что регулярность $\mathrm{INIT}(h_\omega)$ влечет регулярность Γ, к данному множеству конфигураций применимо утверждение 9. Поэтому для некоторой схемы π над базисом (S, P^r) справедливо соотношение $\Gamma_\pi=\Gamma$. Однако структура конфигураций множества Γ свидетельствует о том, что схема π способна сохранять значение л. п. p_0 равным 0 как угодно долго в процессе различных результативных выполнений в модели $K(L^r)$. Таким образом, предположение о регулярности множества цепочек $\mathrm{INIT}(h_\omega)$ вступает в противоречие с требованием 3), которому h_ω удовлетворяет в силу проведенного выше построения.

Итак, при $r<\log_2(M)$ построены модели $K(L)$, подтверждающие справедливость доказываемой теоремы.

Перейдем к изучению случая $r=\log_2(M)$. Множество L вновь будет состоять из единственной функции разметки μ. Однако теперь μ будет однозначно определяться двумя параметрами: сверхцепочкой о. с. $h_\omega=s_1\ldots s_k$ и бесконечной последовательностью двоичных символов $\delta_1^0, \ldots, \delta_k^0, \delta_{k+1}^0, \ldots$ Для всякой цепочки о. с. $h\in S^*$ значение $\mu(h)$ равно (δ^0_{k+1}), если $h=s_1\ldots s_k\in\mathrm{INIT}(h_\omega)$, и равно (1), если $h\notin\mathrm{INIT}(h_\omega)$. Упомянутые параметры функции μ должны удовлетворять следующим двум требованиям:

1′) $C=\{h:\mu(h)=0\}$ — нерегулярное множество цепочек;

2′) какова бы ни была схема π над базисом (S, P^r), $P^r=\{p_0, p_1, \ldots, p_r\}$, существует $N>0$ такое, что при любом результативном выполнении π на произвольной функции разметки μ' в рамках универсального логического r-расширения $K(L^r)$ модели $K(L)$ на некотором i-м этапе, $1\leqslant i<N$, либо достигается выход схемы, либо л. п. p_0 приобретает значение, отличное от δ_i^0.

Требование 2′), так же как и аналогичное требование 3) в случае $r<\log_2(M)$, означает, что для произвольной схемы π, начиная с некоторого фиксированного этапа в процессе всякого результативного выполнения π в модели $K(L^r)$, л. п. p_0 принимает только значение 1. Поэтому множество конфигураций $\Gamma_\pi \cap \Gamma_{L^r}$ всегда будет регулярным. Тем самым требование 2′) обеспечивает выполнимость УВСС для модели $K(L^r)$.

Схема π'', позволяющая убедиться в том, что универсальное логическое $(r+1)$-расширение $K(L^{r+1})$ модели $K(L)$ не удовлетворяет УСС, имеет структуру, подобную рассмотренной выше схеме π'. Схема π'' содержит в точности M преобразователей $v_1, \ldots, v_M$, помеченных о. с. $s^1, \ldots, s^M$. Дуги, исходящие из этих вершин, а также из входа схемы, ведут в однотипные логические фрагменты F'', представленные на рис. 11. Через K_i обозначены различные элементарные конъюнкции, зависящие от свободных переменных $p_1, \ldots, p_r$. Поскольку значение л. п. p_0 на каждом этапе выполнения схемы π'' определяется функцией разметки μ, $p_1, \ldots, p_r, p_{r+1}$ способны принимать произвольные значения, множество $F_{\pi''}(L^{r+})$ состоит в точности из всех тех цепочек $h \in S^*$, для которых $\mu(h)=(0)$, т. е. $F_{\pi''}(L^{r+1})=C$. Если при построении функции μ будет соблюдено требование 1′), то модель $K(L^{r+1})$ согласно утвержнию 8 не будет удовлетворять УСС.

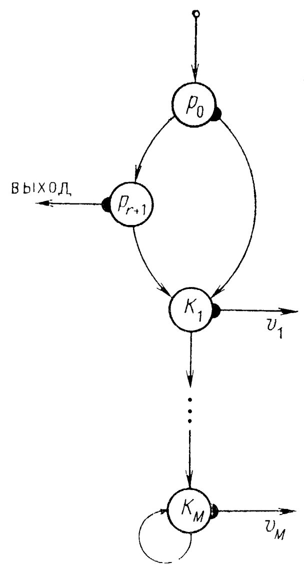

Рис. 11

Построение функции разметки μ осуществляется диагональным методом. Занумеруем все схемы программ, представленные в нормальной форме над базисом (S, P^r). Положим $h_0=e$ и $\delta_1^0=0$. Просматривая последовательно в порядке возрастания номеров t схемы π_t, будем наращивать текущую цепочку о. с. h_t и добавлять новые символы к двоичной последовательности $\{\delta_n^0\}$. Предположим, что после анализа первых $t-1$ схем была построена цепочка $h_{t-1}=s_1\ldots s_k$ и последовательность двоичных символов $\delta_1^0, \ldots, \delta_k^0, \delta_{k+1}^0$, гарантирующие выполнение требования 2′) для схем π_i, $1 \leqslant i \leqslant t-1$, если полагать $\mu(h)=\delta_{j+1}^0$ при $h=s_1\ldots s_j \in \mathrm{INIT}(h_{t-1})$ и $\mu(h)=(1)$ при $h \notin \mathrm{INIT}(h_{t-1})$. Обратимся к схеме π_t. Возьмем в качестве V_0 однородное множество, состоящее из входа схемы π_t, и, выбрав произвольный о. с. $s_{k+1} \in S^*$, рассмотрим однородное множество вершин

$$V_1 = V_0'(s_1\ldots s_k s_{k+1}, \delta_1^0\ldots\delta_k^0\delta_{k+1}^0).$$

Если $V_1=\varnothing$, то это означает, что π_t не допускает ни одного выполнения в рамках модели $K(L^r)$, при котором могут быть последовательно пройдены преобразователи с о. с. $s_1\ldots s_k s_{k+1}$ и л. п. p_0 будет принимать значения $\delta_1^0\ldots\delta_k^0\delta_{k+1}^0$. Требование 2′) будет выполнено для схем π'', если положить $h_t=h_{t-1}s_{k+1}$ и $\delta_{k+2}^0=0$.

Предположим, что $V_1=\{v_1, \ldots, v_T\}\neq\varnothing$. Рассмотрим однородные множества вершин $U_{j,\delta}=V_1(s^j, \delta)$, $s^j \in S^*$, $1 \leqslant j \leqslant M$, $\delta \in \{0, 1\}$. Поскольку в нашем распоряжении имеется в точности $2^r=M$ различных наборов значений свободных л. п. и $U_{j_1,\delta}\cap U_{j_2,\delta}=\varnothing$ при $j_1 \neq j_2$ и фиксированном δ, то $\left|\bigcup_{j=1}^{M} U_{j,\delta}\right| = \sum_{j=1}^{M} |U_{j,\delta}| \leqslant TM$. Поэтому либо для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant M$, выполняется $|U_{i,\delta}|<T$, либо $|U_{1,\delta}|=\ldots=|U_{M,\delta}|=|V_1|=T$. В последнем случае выход схемы π'' не является Δ-преемником ни одного преобразователя из множества V_1, если набор Δ имеет вид $(\delta, \delta_1, \ldots, \delta_r)$, где $\delta_1, \ldots, \delta_r$ — произвольные значения л. п. $p_1, \ldots, p_r$. Обнаруженная

закономерность позволяет выделить следующие две исчерпывающие возможности расположения преобразователей множества V_1 в схеме π_t.

а) Существует цепочка о. с. $h' = h_1'h_2' \dots h_m'$, $1 \leqslant m \leqslant T$, и последовательность двоичных символов $\delta_1' \dots \delta_{i_1}'\delta_{i_1+1}' \dots \delta_{i_2}' \dots \delta_{i_m}'$ такие, что для однородных множеств $V_l' = V_1(h_1' \dots h_l', \delta_1' \dots \delta_{i_l}')$, $l \leqslant m$, выполняются неравенства $|V_1| > |V_1'| > |V_2'| > \dots > |V_m'| = 0$. Отсюда видно, что требование 2′) будет соблюдено для схемы π_t, если h_t положить равной $h_{t-1}s_{k+1}h'$, а в качестве соответствующей двоичной последовательности взять $\delta_1^0, \dots, \delta_{k+1}^0, \delta_1', \dots, \delta_{i_1}'\delta_{i_1+1}' \dots \delta_{i_2}' \dots \delta_{i_m}', 0$.

б) Существует цепочка о. с. h' длины m и двоичная последовательность $\delta_1', \dots, \delta_m'$ такие, что для всякой цепочки $h'' \in S^*$ и произвольной последовательности $\delta_1'', \dots, \delta_l''$ подходящей длины выполняется соотношение $|V_1(h', \delta_1' \dots \delta_m')| = |V_1(h'h'', \delta_1' \dots \delta_m'\delta_1'' \dots \delta_l'')| \neq 0$. Это означает, что в π'' не имеется маршрутов, связывающих преобразователи из $V_1(h', \delta_1' \dots \delta_m')$ с выходом схемы, т. е. ни одно выполнение схемы π'', при котором достигаются вершины указанного множества, не может быть результативным. Следовательно, соблюдение требования 2′) для π'' будет обеспечено, если положить $h_t = h_{t-1}s_{k+1}h'$, а в качестве соответствующей двоичной последовательности взять $\delta_1^0, \dots, \delta_{k+1}^0, \delta_1', \dots, \delta_m', 0$. Поскольку каждая схема программ представима в нормальной форме и нумерация π_t охватывает все схемы над базисом (S, P^r), то сверхцепочка h_ω, образующаяся в процессе построения h_t при $t \to \infty$, удовлетворяет требованию 2′).

Подобно тому как это было сделано в случае $r < \log_2 (M)$, можно показать, что предположение о регулярности множества $C = \{h : \mu(h) = 0\}$ для построенной функции разметки μ вступает в противоречие с требованием 1′).

Итак, данная теорема доказана для случая $r = \log_2 (M)$. □

§ 7. Регулярные модели программ

Формальная модель программ $K(L)$ называется *регулярной*, или *автоматной* [4, 5], если Γ_L — регулярное множество конфигураций. Непосредственно из определения регулярной модели вытекает справедливость следующих высказываний

Утверждение 12. *Каждая регулярная модель удовлетворяет* УВСС.

Утверждение 13. *Множество регулярных моделей над базисом* (S, P) *с отношением* $\leqslant$ *образует частично-упорядоченную решетку.*

Утверждение 14. *Любое из рассмотренных ранее расширений регулярной модели (операторное расщепление, неподвижное операторное расширение, универсальное логическое расширение) также является регулярной моделью.*

Всякое замкнутое множество функций разметки L регулярной модели $K(L)$ над базисом (S, P) допускает простой способ задания посредством конечного автомата $\mathfrak{A}(Q, S \cup B_P, q_0, \Phi, \Psi)$. Здесь Q — конечное множество внутренних состояний автомата $\mathfrak{A}$, q_0 — начальное состояние, $S \cup B_P$ — входной алфавит автомата $\mathfrak{A}$, $\Phi : Q \times (S \cup B_P) \to Q$ — функция перехода, ψ: $Q \to 2^{B_P}$ — функция выхода. Обозначим через Φ^* обобщенную функцию перехода вида $Q \times (S \cup B_P)^* \to Q$ такую, что $\Phi^*(q, e) = q$ и $\Phi^*(q, y_1 \dots y_n) = \Phi(\Phi^*(q, y_1 \dots y_{n-1}), y_n)$, $y_1 \dots y_n \in (S \cup B_P)^*$, $n \geqslant 1$, а через Ψ — обобщенную функцию выхода вида $Q \times (S \cup B_P)^* \to 2^{B_P}$ такую, что $\Psi^*(q, y_1 \dots y_m) = \Psi(\Phi^*(q, y_1 \dots y_m))$, $m \geqslant 0$. Функция разметки μ принадлежит множеству L в том и только том случае, когда для каждой цепочки о. с. $h = s_1 \dots s_n \in S^*$, $n \geqslant 0$, выполняется соотношение

$$\mu(h) \in \Psi^*(q_0, \mu(e) s_1 \mu(s_1) s_2 \mu(s_1 s_2) \dots s_{n-1} \mu(s_1 s_2 \dots s_{n-1}) s_n).$$

Выполнение схемы π в рамках регулярной модели $K(L)$, заданной конечным автоматом $\mathfrak{A}$, представляет собой обход схемы, на каждом этапе которого схема π для определения очередных значений л. п. обращается к автомату $\mathfrak{A}$. На основании имеющейся истории выполнения π (текущей конфигурации) $\mathfrak{A}$ выдает множество допустимых на данном этапе наборов значений л. п.; π недетерминированным образом выбирает один из предложенных наборов и, установив новые значения л. п., продолжает выполнение. Поскольку схема π может мыслиться как конечный автомат (см. утверждение 7), то выполнение схемы в регулярной модели представляет собой процесс взаимодействия двух замкнутых друг на друга конечных автоматов, подобный функционированию вычислительной модели В. М. Глушкова [2]. В модели Глушкова один из автоматов играет роль программы, а другой — роль вычислительной (информационной) среды, в которую погружена программа. В данном случае автомату $\mathfrak{A}$ придается несколько иная трактовка. Если регулярная формальная модель $K(L)$ пригодна для семантики $\sigma = \langle \Sigma, \Sigma_0, I \rangle$, то автомат $\mathfrak{A}$, задающий множество функций разметки L, содержит некоторую совокупность сведений о семантических характеристиках операторов и элементарных логических условий заданного программного базиса. Эта информация о семантике σ позволяет выделить в каждой схеме π допустимые траектории (маршруты) ее выполнения. Тем самым формальная модель $K(L)$ является конечно-автоматной аппроксимацией программной семантики σ. Конечность автомата $\mathfrak{A}$ позволяет разрешить проблему эквивалентности и построить конечную полную систему локальных правил эквивалентных преобразований схем программ в модели $K(L)$ [5]. Формальные модели схем Янова являются частным случаем автоматных моделей. Если о. с. s соответствует оператору присваивания вида $y := f(x_1, \dots, x_k)$, то яновский сдвиг о. с. s (множество л. п., способных изменить значение после прохождения через преобразователь с о. с. s) однозначно определяется совокупностью элементарных логических условий, существенно зависящих от предметной переменной y. Нетрудно видеть, что это естественное свойство программной семантики может быть выражено конечным автоматом. Чуть более изощренный способ применения конечных автоматов для аппроксимации заданной семантики программ демонстрирует следующий

Пример 4. Рассмотрим программный базис (S, P), который в числе прочих содержит о. с. s_1, s_2 и л. п. p_1, p_2. Предположим, что s_1 соответствует оператору $u := f(x)$, s_2 — оператору $v := f(y)$, p_1 — логическому условию $x = y$, а p_2 — условию $u = v$. Кроме того, будем считать, что о. с. множества $s'(s'')$ соответствуют операторам, не изменяющим значений переменных x, $y(u, v)$. Тогда в рассматриваемой программной семантике значения л. п. p_1, p_2 будут совпадать после выполнения всякой цепочки операторов вида $h_1 s_1 h_2 s_2 h_3$, где h_1, $h_2 \in (S')^*$, $h_3 \in (S'')^*$. Ясно, что данное свойство семантики легко выражается регулярными моделями при подходящем выборе автомата $\mathfrak{A}$. Проанализировав подобные свойства семантики программ σ, можно построить для каждого из них свой автомат $\mathfrak{A}_i$ и модель $K(L_i)$, а затем рассматривать в качестве аппроксимирующей формальной модели σ-пригодную регулярную модель $K(\cap L_i)$.

Основное характеристическое свойство регулярных моделей, определяющее их положение в иерархии УСС-моделей, устанавливает

Теорема 11. *Следующие три утверждения эквивалентны*:

1) $K(L)$ — *регулярная модель над базисом* (S, P), $|S| = M \geqslant 2$;

2) *любое универсальное логическое расширение модели* $K(L)$ *удовлетворяет* УВСС;

3) *универсальное логическое r-расширение модели* $K(L)$ *удовлетворяет* УСС *при некотором* $r \geqslant \log_2(M+1)$.

Доказательство. 1) $\to$ 2). Следует из утверждений 12 и 14. 2) $\to$ 3). Следует из определения УВСС-модели.

3) $\to$ 1). Согласно утверждению 10 достаточно доказать справедливость теоремы при $r =]\log_2(M+1)[$. Предположим, что $S = \{s^1, \ldots, s^M\}$, $P = \{p_1, \ldots, p_m\}$ и логическое r-расширение $K(L^r)$ модели $K(L)$ сопровождается введением свободных л. п. $p_{m+1}, \ldots, p_{m+r}$. Для каждого набора Δ значений л. п. условимся обозначать через $N(\Delta)$ лексикографический порядковый номер этого набора. Рассмотрим схему π, представленную

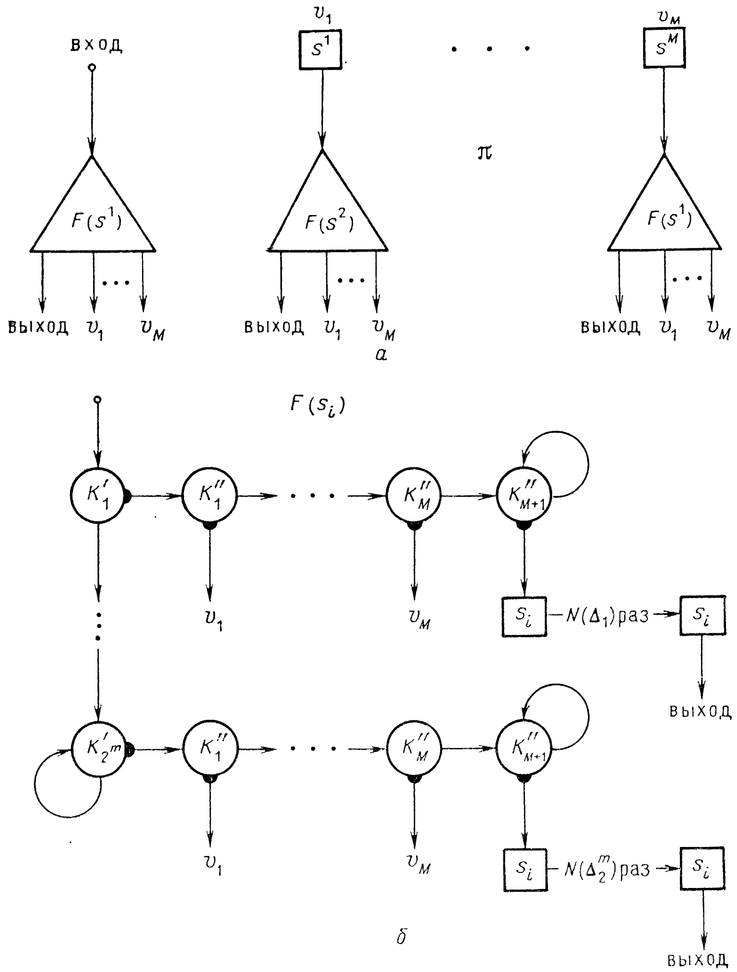

Рис. 12

на рис. 12. В схеме выделены M преобразователей $v_1, \ldots, v_M$, помеченных о. с. $s^1, \ldots, s^M$ соответственно. Дуги, исходящие из входа схемы, а также из вершин $v_1, \ldots, v_M$, ведут в логические фрагменты $F(s_i)$, изображенные на рис. 12, *б* и отличающиеся друг от друга только наименованием используемого в них о. с. s_i. В каждом таком фрагменте через $K_j'(K_j'')$ обозначена элементарная конъюнкция $p_1^{\delta_1'} \& \ldots \& p_m^{\delta_m'}$ (соответственно $p_{m+1}^{\delta_r''} \& \ldots \& p_{m+r}^{\delta_r''}$), сопоставленная j-му в лексикографическом порядке набору $\Delta' = (\delta_1', \ldots, \delta_m')$ $(\Delta'' = (\delta_1'', \ldots, \delta_r''))$ значений л. п. $p_1, \ldots, p_m$ (свободных л. п. $p_{m+1}, \ldots, p_{m+r}$). Фрагменты устроены таким образом, что для каждой пары выделенных преобразователей v_i, v_k и произвольного набора $\Delta' = (\delta_1', \ldots, \delta_m') \in B_P$ вершина v_i является $(\delta_1', \ldots, \delta_m', \delta_1'', \ldots, \delta_r'')$-преемником v_k в том и только том случае, когда набор $\Delta'' = (\delta_1'', \ldots, \delta_r'')$ значений свободных л. п. $p_{m+1}, \ldots, p_{m+r}$ имеет порядковый номер $N(\Delta'') = i$, $1 \leqslant i \leqslant M$. Если же $N(\Delta'') > M$, а значения л. п. $p_1, \ldots, p_m$ образуют набор Δ', то из преобразователя v_k независимо от дальнейших изменений значений л. п. будет достигнут выход схемы после прохождения через $N(\Delta')$ преобразователей с некоторым о. с. $s' \neq s^k$. Тем самым все наборы значений, которые могут быть присвоены «связанным» л. п. $p_1, \ldots, p_m$ в процессе выполнения схемы, оказались «закодированными» цепочками о. с. Исходя из указанных замечаний, индукцией по длине конфигурации можно показать, что $w = (s_0, \Delta_0)(s_1, \Delta_1) \ldots (s_n, \Delta_n)$ принадлежит множеству Γ_L тогда и только тогда, когда для каждого t, $0 \leqslant t \leqslant n$, множество $F_\pi(L^r)$ содержит цепочку $h_t = s_1 \ldots s_t (s_l)^{N(\Delta_t)}$, где $l = 1$ при $t = 0$, $l = 1 + (t \bmod M)$ при $t > 0$. Поскольку модель $K(L^r)$ удовлетворяет УСС, то $F_\pi(L^r)$, а следовательно, и Γ_L являются регулярными множествами. □

§ 8. Заключение

Суммируем основные результаты исследования иерархии УСС-моделей. Для заданного базиса (S, P), $|S| = M > 1$, обозначим через

$\mathcal{M}_f$ — класс УСС-моделей,

$\mathcal{M}_{cf}$ — класс УВСС-моделей,

$\mathcal{M}_f^b$ — класс моделей, операторное расщепление которых удовлетворяет УСС,

$\mathcal{M}_f^{se}$ — класс моделей, неподвижное операторное расширение которых удовлетворяет УСС,

$\mathcal{M}_f^{le}(i)$ — класс моделей, универсальное логическое i-расширение которых удовлетворяет УСС,

$\mathcal{M}_r$ — класс регулярных (автоматных) моделей.

Теорема 12. *Для данных классов моделей справедливы соотношения*

$$\mathcal{M}_r = \mathcal{M}_f^{le}(\,]\log_2(M+1)[\,) \subset \mathcal{M}_f^{le}([\log_2 M]) \subset \ldots \subset \mathcal{M}_f^{le}(1) = \mathcal{M}_f^{se} = \\ = \mathcal{M}_f^b = \mathcal{M}_{cf} \subset \mathcal{M}_f.$$

Приведенные здесь результаты исследования относятся к формальным моделям программ $K(\varepsilon, L)$ с тождественным отношением эквивалентности ε на множестве S^*. При изучении формальных моделей $K(\tau, L)$ более общего вида с произвольным отношением эквивалентности τ возникают следующие вопросы.

1. Какова должна быть взаимосвязь τ и L для того, чтобы выполнялось соотношение $K(\tau, L) \approx K(\tau, [L])$?

2. При каких условиях свободная в модели $K(\varepsilon, L)$ схема π останется свободной в модели $K(\tau, L')$, где L' — максимальное в L подмножество функций разметки, согласованное с отношением эквивалентности τ?

3. При каких условиях выполнимости УСС (УВСС) для модели $K(\varepsilon, L)$ влечет выполнимость УСС (УВСС) для модели $K(\tau, L)$?

4. При каких τ сохраняется справедливость равенств и включений, приведенных в теореме 12?

В заключение автор выражает признательность Р. И. Подловченко за постановку задачи и стимулирующие дискуссии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахо А., Ульман Дж. Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции.— М.: Мир, 1978.
2. Глушков В. М., Летичевский А. А. Теория дискретных преобразователей // Избранные вопросы алгебры и логики. Сборник, посвященный памяти А. И. Мальцева.— Новосибирск: Наука, 1973.— С. 5—39.
3. Ершов А. П. Об операторных схемах Янова // Проблемы кибернетики. Вып. 20.— М.: Наука, 1967.— С. 181—200.
4. Захаров В. А. Автоматные модели машин Тьюринга // ДАН СССР.— 1986.— Т. 291, № 2.— С. 197—201.
5. Захаров В. А. Автоматные модели программ // ДАН СССР.— 1989.— Т. 309, № 1.— С. 24—27.
6. Иткин В. Э. Логико-термальная эквивалентность схем программ // Кибернетика.— 1972.— № 1.— С. 5—27.
7. Иткин В. Э. Эквивалентность свободных схем программ // Кибернетика.— 1978.— № 1.— С. 1—9.
8. Котов В. Е. Введение в теорию схем программ.— Новосибирск.: Наука, 1978.
9. Ляпунов А. А. О логических схемах программ // Проблемы кибернетики. Вып. 1.— М.: Физматгиз, 1958.— С. 56—74.
10. Патерсон М. С. Проблемы разрешимости в вычислительных моделях // Теория программирования. Т. 1.— Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1972.— С. 119—139.
11. Подловченко Р. И. Модели последовательностных программ, применяемые для изучения функциональной эквивалентности программ // Кибернетика.— 1979.— № 1.— С. 20—28.
12. Подловченко Р. И. Иерархия моделей программ // Программирование.— 1981.— № 2.— С. 3—14.
13. Подловченко Р. И. Полугрупповые модели программ // Программирование.— 1981.— № 4.— С. 3—13.
14. Подловченко Р. И. Модели программ над структурированным базисом // Программирование.— 1982.— № 1.— С. 9—19.
15. Подловченко Р. И. Исследование s-моделей программ с позиции построения для них алгоритма канонизации // Программирование.— 1986.— № 2.— С. 3—13.
16. Подловченко Р. И. О проблеме эквивалентных преобразований программ // Программирование.— 1986.— № 6.— С. 3—13.
17. Подловченко Р. И. Схемы программ с монотонными операторами // Программирование.— 1988.— № 6.— С. 10—21.
18. Сабельфельд В. К. Новый класс схем с разрешимой функциональной эквивалентностью // Информат.-инструм. средства.— Новосибирск, 1988.— С. 108—126.
19. Син Мен Де. Логико-термально эквивалентные преобразования схем программ // Кибернетика.— 1976.— № 5.
20. Янов Ю. И. О логических схемах алгоритмов // Проблемы кибернетики. Вып. 1.— М.: Физматгиз, 1958.— С. 75—127.
21. Янов Ю. И. О вычислениях в одном классе программ // Проблемы кибернетики. Вып. 32.— М.: Наука, 1977.— С. 237—245.
22. Luckham D. C., Park D. M. R., Paterson M. S. On formalized computer programs // Journal of the Computer and System Science.— 1970.— V. 2, № 3. (Русский перевод: Лакхем Д., Парк Д. М., Патерсон М. С. О формализованных машинных программах // Кибернетический сборник (новая серия). Вып. 12.— М.: Мир, 1975.— С. 78—114).
23. Meyer A. R., Ritchie D. M. Computational complexity and programm structure // Res. Paper RC — 1817, IBM T. J., Watson Res. Ctr., Yorktown Heights, N. Y., May 1967.
24. Rice H. G. Classes of recursively enumerable sets and their decision problems. // Trans. Amer. Math. Soc.— 1953.— V. 74, № 2.
25. Tsichritzis D. The equivalence problem of simple programs. // Journal of the Association of Computing Machinery.— 1970.— V. 17, № 4.

Поступило в редакцию 3 VII 1991

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ В УЗЛАХ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ РЕШЕТКИ

В. П. ТАРАСОВА

(МОСКВА)

В настоящей работе решается задача оптимального восстановления функций (формализация варианта игры «морской бой»). Исследуемые функции являются характеристическими, определены в узлах целочисленной решетки, и каждая из них принимает единичные значения на некотором дискретном отрезке. Восстановление функции из указанного класса осуществляется путем отыскания соответствующего ей единичного отрезка. Таким образом, данная задача является задачей оптимального поиска [1—3, 10, 15]. Здесь мы под задачей оптимального поиска будем понимать задачу построения (нахождения) оптимальной стратегии первого игрока в многоходовой (позиционной) игре.

Для решения задачи применяется метод СП моделирования стратегии противника, который на протяжении ряда лет применялся автором для решения задач поиска и впервые в явном виде был опубликован в [14]. Метод позволяет регулярным способом конструировать эффективные стратегии поиска и одновременно доказывать их оптимальность. Последнее, как правило, представляет значительную трудность.

В первых трех параграфах на языке антагонистических детерминированных игр излагается теория, используемая затем в § 4 для описания и обоснования метода СП. В пятом параграфе решается задача восстановления характеристических функций.

В работе используются следующие обозначения:

$\#$ — конец доказательства,

$\rightleftharpoons$ — равно по определению,

$\varnothing$ — пустое множество,

$|M|$ — мощность множества M,

$M/_{\equiv}$ — фактор-множество множества M по эквивалентности $\equiv$,

т. н. г. $\mathfrak{M}$ — точная нижняя грань множества $\mathfrak{M}$,

т. в. г. $\mathfrak{M}$ — точная верхняя грань множества $\mathfrak{M}$,

МП — модель противника,

СП — синкретическая стратегия второго игрока (синкретический противник),

$|H|$ — длина интервала H,

$$\left.\begin{array}{c}\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \leqslant\rangle \\ \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \delta\rangle \\ I\langle \mathfrak{B}, \delta\rangle \\ I\langle \mathfrak{B}\rangle\end{array}\right\}$$ — антагонистическая игра в нормальной форме и ее краткие обозначения,

$\mathfrak{A}$ — множество стратегий первого игрока,

$\mathfrak{B}$ — множество стратегий второго игрока (противника),

$A_1, A_2, A', A'', \bar{A}, \tilde{A}, A$ — стратегии из $\mathfrak{A}$,
B_1, B_2, B', B'', B — стратегии из $\mathfrak{B}$,
$\langle\mathfrak{M}, \leqslant\rangle$ — линейно упорядоченное множество,
δ, δ' — функции выигрыша,
$\delta(A, \mathfrak{B})$ — гарантированный выигрыш A,
(A, B) — ситуация,

$$\left.\begin{array}{l}\langle\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; X, Y; \delta, \leqslant\rangle \\ \quad\langle\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \delta\rangle \\ \quad I\langle\mathfrak{B}, \delta\rangle \\ \quad I\langle\mathfrak{B}\rangle\end{array}\right\}$$ — многоходовая антагонистическая игра и ее краткие обозначения,

X — множество ходов первого игрока,
Y — множество ходов второго игрока (противника),
$(A, B)=(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$ — n-ходовая партия (ситуация),
$(A_iB_i)=(a_1, b_1, \ldots, a_i, b_i)$ — позиция после i-го хода в партии (A, B),
$\operatorname{rang}(A, B)=r(A, B)$ — число ходов в партии (A, B),
$I\langle\mathfrak{B}\rangle \mapsto I\langle\mathfrak{B}'\rangle$ — игра $I\langle\mathfrak{B}'\rangle$ ассоциирована с $I\langle\mathfrak{B}\rangle$,
$\mathfrak{B} \mapsto \mathfrak{B}'$ — множество стратегии $\mathfrak{B}'$ ассоциировано с $\mathfrak{B}$,
$B \equiv B'$ — стратегия B эквивалентна B',
$\langle\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, X, Y, \mathfrak{M}; \delta, \delta_i, \leqslant\rangle$ — многоходовая антагонистическая игра.
Пунктами в § 5 будут шаги метода СП.

§ 1. Антагонистические игры в нормальной форме

Как правило, конкретные задачи поиска представимы в виде позиционных (многоходовых) игр. Однако многие используемые идеи справедливы для антагонистических игр в нормальной форме. А так как нормальная форма более удобна для формулировки понятий и получения общих результатов, то начнем с рассмотрения такого вида игр.

1. Определение основных понятий антагонистических игр. Предварительно дадим нужные для дальнейшего сведения из теории упорядоченных множеств.

Пусть $\mathfrak{M}'$ — подмножество линейно упорядоченного множества $\mathfrak{M}$. Тогда элемент m из $\mathfrak{M}$ называется нижней гранью для $\mathfrak{M}'$, если он меньше или равен любому элементу m' из $\mathfrak{M}$. Элемент m из $\mathfrak{M}$ называется верхней гранью для $\mathfrak{M}'$, если он больше или равен любому элементу m' из $\mathfrak{M}'$. Если среди нижних граней в множестве $\mathfrak{M}$ есть наибольшая, то она называется точной нижней гранью $\mathfrak{M}'$ и обозначается т. н. г. $\mathfrak{M}'$ или $\inf\mathfrak{M}'$. Если среди верхних граней в множестве $\mathfrak{M}$ есть наименьшая, то она называется точной верхней гранью $\mathfrak{M}'$ и обозначается т. в. г. $\mathfrak{M}'$ или $\sup\mathfrak{M}'$. Если $\inf\mathfrak{M}'$ существует и содержится в $\mathfrak{M}'$, то он обозначается через $\min\mathfrak{M}'$. Если $\sup\mathfrak{M}'$ существует и содержится в $\mathfrak{M}'$, то он обозначается $\max\mathfrak{M}'$.

Теорема 1. *Пусть имеются: множества $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, линейно упорядоченное множество $\mathfrak{M}$, функция δ, $\delta: \mathfrak{A}\times\mathfrak{B}\to\mathfrak{M}$, и существуют*

$$\sup_{A\in\mathfrak{A}}\inf_{B\in\mathfrak{B}}\delta(A, B), \quad \inf_{B\in\mathfrak{B}}\sup_{A\in\mathfrak{A}}\delta(A, B).$$

Тогда выполняется неравенство

$$\sup_{A\in\mathfrak{A}}\inf_{B\in\mathfrak{B}}\delta(A, B)\leqslant\inf_{B\in\mathfrak{B}}\sup_{A\in\mathfrak{A}}\delta(A, B).$$

Доказательство. Из определения т. н. г., т. в. г. и функции δ для любых A из $\mathfrak{A}$, B из $\mathfrak{B}$ имеем $\inf\limits_{B\in\mathfrak{B}}\delta(A, B)\leqslant\delta(A, B)\leqslant\sup\limits_{A\in\mathfrak{A}}\delta(A, B)$ и, значит, $\inf\limits_{B\in\mathfrak{B}}\delta(A, B)\leqslant\sup\limits_{A\in\mathfrak{A}}\delta(A, B)$. Из последнего неравенства получаем

$\inf\limits_{B\in\mathfrak{B}} \delta(A, B) \leqslant \inf\limits_{B\in\mathfrak{B}} \sup\limits_{A\in\mathfrak{A}} \delta(A, B)$ — на основании того, что величина $\inf\limits_{B\in\mathfrak{B}} \delta(A, B)$ не зависит от B. И, наконец, $\sup\limits_{A\in\mathfrak{A}} \inf\limits_{B\in\mathfrak{B}} \delta(A, B) \leqslant \inf\limits_{B\in\mathfrak{B}} \sup\limits_{A\in\mathfrak{A}} \delta(A, B)$ на основании того, что величина $\inf\limits_{B\in\mathfrak{B}} \sup\limits_{A\in\mathfrak{A}} \delta(A, B)$ не зависит от A. #

Система $\langle\mathfrak{M}, +, \leqslant\rangle$ называется линейно упорядоченной группой, если $\mathfrak{M}$ является группой относительно двуместной операции $+$, линейно упорядоченно относительно $\leqslant$, и дополнительно выполняется следующая аксиома монотонности для a, b, c из $\mathfrak{M}$: из $a \leqslant b$ следует $a+c \leqslant b+c$ и $c+a \leqslant c+b$. Аддитивная группа вещественных чисел с их естественным порядком будет линейно упорядоченной группой. Любая подгруппа этой группы будет также линейно упорядоченной группой.

Более подробно об упорядоченных множествах, группах и полях см. в [7].

Антагонистической игрой в нормальной форме будем называть систему $I = \langle\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \leqslant\rangle$, состоящую из некоторых множеств $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{M}$, функции δ: $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B} \to \mathfrak{M}$ и отношения $\leqslant$ линейной упорядоченности на $\mathfrak{M}$. При этом множество $\mathfrak{A}$ называется множеством стратегий первого игрока; множество $\mathfrak{B}$ — множеством стратегий второго игрока (противника), $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$ — множеством ситуаций (A, B) при $A\in\mathfrak{A}$, $B\in\mathfrak{B}$, δ — платежная функция, или функция выигрыша первого игрока. Заметим, что если $\mathfrak{M}$ есть линейно упорядоченная группа, то приведенное определение превращается в традиционное определение антагонистической игры как парной игры с нулевой суммой, в которой функция выигрыша второго игрока δ' задается равенством $\delta'(A, B) = -\delta(A, B)$ для $A\in\mathfrak{A}$ $B\in\mathfrak{B}$ [4].

Линейная упорядоченность на $\mathfrak{M}$ позволяет определить гарантированный выигрыш и оптимальные (максминные, минимаксные) стратегии. Если первый игрок стремится максимировать свой выигрыш, то гарантированный выигрыш (результат) стратегии A из $\mathfrak{A}$ обозначается через $\delta(A, \mathfrak{B})$ и определяется равенством $\delta(A, \mathfrak{B}) = \inf\{\delta(A, B) \mid B\in\mathfrak{B}\}$ при условии, что соответствующий inf в множестве $\mathfrak{M}$ существует. Если же задачей первого игрока является минимизация выигрыша, то гарантированный выигрыш стратегии A из $\mathfrak{A}$ определяется равенством $\delta(A, \mathfrak{B}) = \sup\{\delta(A, B) \mid B\in\mathfrak{B}\}$, при условии, что соответствующий sup в $\mathfrak{M}$ существует. Заметим, что этот случай сводится к первому с помощью замены порядка на $\mathfrak{M}$ на противоположный. Для $E\in\mathfrak{M}$ стратегии A_0 из $\mathfrak{A}$ называется *E-оптимальной*, если $\delta(A_0, \mathfrak{B}) \leqslant E$. Стратегия A_0 из $\mathfrak{A}$ называется оптимальной, если выполняется $\delta(A_0, \mathfrak{B}) = \sup\{\delta(A, \mathfrak{B}) \mid A\in\mathfrak{A}\}$, т. е. стратегия A_0 имеет наибольший гарантированный выигрыш. Определяемые так оптимальные стратегии обычно называются *максминными*.

Выигрыш первого игрока $\delta(A_0, B)$, применяющего стратегию A_0, будем называть также проигрышем второго игрока (противника), применяющего стратегию B, а $\delta(\mathfrak{A}, B) \rightleftharpoons \sup\{\delta(A, B) \mid A\in\mathfrak{A}\}$ — гарантированным проигрышем второго игрока, применяющего стратегию B. Стратегия B_0 из $\mathfrak{B}$, имеющая наименьший гарантированный проигрыш, называется *оптимальной* (минимаксной) стратегией второго игрока, т. е. $\delta(\mathfrak{A}, B_0) = \inf\{\delta(\mathfrak{A}, B) \mid B\in\mathfrak{B}\}$. В случае если $\mathfrak{M}$ — упорядоченная группа, можно определить выигрыш $\delta'(A, B)$ второго игрока равенством $\delta'(A, B) = -\delta(A, B)$, а гарантированный выигрыш второго игрока $\delta'(\mathfrak{A}, B) = \sup\{-\delta(A, B) \mid A\in\mathfrak{A}\}$.

Величина $\alpha = \sup\{(\inf\{\delta(A, B) \mid B\in\mathfrak{B}\}) \mid A\in\mathfrak{A}\}$ называется *нижней ценой игры*. Величина $\beta = \inf\{(\sup\{\delta(A, B) \mid A\in\mathfrak{A}\}) \mid B\in\mathfrak{B}\}$ называется *верхней ценой игры*.

На основании теоремы 1 имеет место неравенство $\alpha \leqslant \beta$. Если $\alpha = \beta = \nu$, то ν называется значением или ценой игры. Пара (A_0, B_0) оптимальных стратегий соответственно первого и второго игрока называется седловой точкой, если $\delta(A_0, B_0) = \nu$.

Введем отношение доминирования $\succ$ на множестве $\mathfrak{A}$ стратегий первого игрока. Считаем, A_1 *доминирует над* A_2, если для любого B из $\mathfrak{B}$ выполняется $\delta(A_1, B) \geqslant \delta(A_2, B)$, т. е. $A_1 \succ A_2 \rightleftharpoons \forall B \in \mathfrak{B}(\delta(A_1, B) \geqslant \delta(A_2, B))$. Очевидно, что отношение доминирования будет отношением частичного порядка. Аналогично вводится отношение доминирования для стратегий второго игрока.

Стратегия $\bar{A}_0$ из $\mathfrak{A}$ называется *абсолютно оптимальной*, если она доминирует над любой стратегией из $\mathfrak{A}$. Стратегия $\tilde{A}_0$ из $\mathfrak{A}$ называется наилучшей, если она доминирует над любой стратегией из множества $\mathfrak{O}$ оптимальных стратегий первого игрока. Проиллюстрируем введенные понятия.

В игре I, у которой $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, $\mathfrak{B} = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$, δ задано табл. 1, имеем: $\mathfrak{O} = \{A_1, A_2\}$ — множество оптимальных стратегий, A_2 — наилучшая стратегия, но не абсолютно оптимальная, B_4 — абсолютно оптимальная стратегия второго игрока. Если игра I' такова, что $\mathfrak{A}$ — то же, что и в игре I, а $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}' = \{B_1, B_2, B_3\}$, то в ней нет наилучшей, а значит, и абсолютно оптимальной стратегии второго игрока.

Таблица 1

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	7	6	5	5
A_2	8	6	5	5
A_3	9	3	4	3
A_4	7	6	4	4

Игра $I = \langle \mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{M}'; \delta', \leqslant' \rangle$ называется *подыгрой игры* $I = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \leqslant \rangle$, если $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$, δ' — ограничение δ на $\mathfrak{A}' \times \mathfrak{B}'$, $\leqslant'$ — ограничение $\leqslant$ на $\mathfrak{M}$.

2. Игровое представление задачи поиска корня функции. Обозначим через $\mathfrak{B}$ множество непрерывных вещественных возрастающих функций, заданных на отрезке вещественных чисел $[a, b]$ и принимающих на концах отрезка значения разных знаков. Поиск корня для произвольной функции f из $\mathfrak{B}$ осуществляются вычислителем путем последовательного выбора n точек x_i (ходов вычислителя) из отрезка $[a, b]$ и вычисления значений $f(x_i)$ в этих точках, т. е. выборы и вычисления производятся в следующем порядке: $x_1, f(x_1), \ldots, x_n, f(x_n)$. Предполагается также, что значения функции могут быть вычислены точно. Результатом поиска будет наименьший интервал из $[a, b]$, содержащий корень f, называемый интервалом локализации корня и получаемый на основании следующих индуктивно сформулированных свойств функций из $\mathfrak{B}$. Пусть x_{i+1} — $(i+1)$-й выбор (ход) вычислителя, H_{i+1} — интервал локализации, полученный после $(i+1)$-го хода вычислителя, $x' < x_{i+1} < x''$, $f(x') < 0$, $f(x'') > 0$. Тогда если $f(x_{i+1}) < 0$, то $H_{i+1} = (x_{i+1}, x'')$; если $f(x_{i+1}) > 0$, то $H_{i+1} = (x', x_{i+1})$. Эффективность поиска полностью определяется выбором точек из $[a, b]$ и оценивается для каждого набора $X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$ из $[a, b]$ длиной $\delta(X_n, f) = |H_n|$ определенного этим набором интервала H_n локализации корня f. Гарантированным результатом произвольного набора X_n в классе будет такой интервал локализации, длина которого равна $\sup \delta(X_n, f)$, где sup берется по всем f из $\mathfrak{B}$.

Требуется указать такой набор X_n^0, который гарантировал бы наименьший в классе $\mathfrak{B}$ интервал локализации корня, т. е.

$$\sup_{f \in \mathfrak{B}} \delta(X_n^0, f) = \inf_{X_n \in 2^{\{X_n\}}} \sup_{f \in \mathfrak{B}} \delta(X_n, f).$$

Приведенная задача имеет игровое представление в виде антагонистической игры в нормальной форме $I = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \leqslant \rangle$, где $\mathfrak{A} = 2^{\{X_n\}}$,

$\mathfrak{B}$ — класс $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{M}=R^+$ (множество положительных вещественных чисел) $\delta(X_n, f)$ — длина интервала локализации корня, $\leqslant$ — обычный порядок на R^+. Решением сформулированной задачи поиска будет минимаксная стратегия первого игрока (вычислителя).

§ 2. Многоходовые (позиционные) антагонистические игры

В этом разделе будут введены не вполне традиционно [8] многоходовые (позиционные) антагонистические игры с оценкой позиций в виде, достаточном для наших целей. Особенности следующие. Во-первых, значения платежной функции принадлежат некоторому линейно упорядоченному множеству, а не подмножеству вещественных чисел, как обычно. Во-вторых, рассматриваются только детерминированные (чистые) стратегии. В-третьих, кроме платежной функции, оценивающей партию, вводится функция оценки каждой позиции, определяющая целесообразность такого продолжения игры, для которого эта позиция является начальной.

1. Многоходовые антагонистические игры. Система $\langle\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, X, Y, \mathfrak{M}; \delta, \leqslant\rangle$ называется многоходовой или позиционной антагонистической игрой, если $\langle\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \leqslant\rangle$ — антагонистическая игра в нормальной форме, X, Y — некоторые множества и, кроме того, имеет место еще следующее. Каждая A из $\mathfrak{A}$ есть функция, определенная на конечных последовательностях вида $(a_1, b_1, \ldots, a_i, b_i)$, $a_i\in X$, $b_i\in Y$ со значениями в X, A: $(a_1, b_1, \ldots, a_i, b_i)\to a_{i+1}$, $i=1, 2, \ldots, n-1$. При этом $a_1=A(\varnothing)$, т. е. описание задания первого хода a_1 первого игрока, которым начинается игра, входит в определение стратегии (функции) A. Каждая B из $\mathfrak{B}$ есть функция, определенная на конечных последовательностях вида $(a_1, b_1, \ldots$ $\ldots, a_i, b_i, a_{i+1})$ со значениями в Y, B: $(a_1, b_1, \ldots, a_i, b_i, a_{i+1})\to b_{i+1}$, $i+1, \ldots, n-1$. После первого хода первого игрока свой первый ход b_1 в игре делает второй игрок $b_1=B(a_1)$. Затем делается второй ход первого игрока и второй ответный ход второго и т. д., чередуясь.

Последовательности $(a_1, b_1, \ldots, a_i, b_i)$, $(a_1, b_1, \ldots, a_i)$ называются позициями первого и второго игроков соответственно, а X, Y — множествами ходов первого и второго игрока. Таким образом, функция A «выбирает» следующий ход в позициях, принадлежащих первому игроку, а функция B «выбирает» ответные ходы в позициях, принадлежащих второму игроку.

Последовательность ходов $(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$, определяемую в ходе n-ходовой игры ситуацией (A, B) из $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$ так, что ход a_1 сделан по стратегии A, b_1 — ответный ход, сделанный по стратегии B, и т. д., назовем партией. Пару (i, i), i-ходов игроков назовем i-м ходом, а позицию $(a_1, b_1, \ldots, a_i, b_i)$, являющуюся отрезком партии $(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$,— позицией после i-го хода. Позицию $(a_1, b_1, \ldots, a_i)$ будем считать получившейся после хода $(i, i-1)$. Позицию после i-го хода обозначим через (A_i, B_i). Равенство ситуаций $(A, B)=(C, D)$ в n-ходовых играх понимается как равенство соответствующих им партий, т. е. из $(A, B)=$ $=(C, D)$, $(A, B)=(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$, $(C, D)=(c_1, d_1, \ldots, c_n, d_n)$ следует $a_1=c_1$, $b_1=d_1$, $\ldots$, $a_n=c_n$, $b_n=d_n$, и обратно. Позиция $(a_1, b_1, \ldots, a_i, b_i)$, $a_k\in X$, $b_k\in Y$, $k=1, \ldots, i$ называется допустимой, если существуют такие стратегии A из $\mathfrak{A}$, B из $\mathfrak{B}$, что $(A_i, B_i)=(a_1, b_1, \ldots, a_i, b_i)$, $i=1, \ldots, n$.

В дальнейшем рассматриваются только игры, в которых все партии конечны, т. е. конечно число ходов каждой партии. Это ограничение соответствует взгляду на алгоритм как на конечную процедуру, что удобно при использовании ЭВМ. Правило остановки игры определяется некоторым числом, заданным для каждого конкретного случая.

Число ходов в партии (A, B) будем называть ее *рангом* и обозначать через $\mathrm{rang}(A, B)$ или $r(A, B)$.

Функция выигрыша δ в многоходовой игре ставит в соответствие каждой окончательной позиции $(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$, определяемой ситуацией (A, B), где $n = \mathrm{rang}(A, B)$, элемент из $\mathfrak{M}$.

Для широкого класса многоходовых игр стратегии игроков представляют собой вычислимые функции, т. е. являются алгоритмами.

Информационные состояния игроков в исследуемых играх могут быть различны. А именно, первый игрок всегда обладает к моменту выбора хода полной информацией о всей предыстории игры. Второй же игрок может не иметь такой информации, а знать только о ходе первого игрока, сделанном непосредственно перед его ходом. В дальнейшем, с целью сокращения записи, множества X, Y в обозначении многоходовой игры I будем опускать.

2. Оценка позиции. Пусть $\mathfrak{C}_i$ — множество всех допустимых позиций (A_i, B_i), $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$, $i = 1, \ldots, n$ в многоходовой игре $I = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \leqslant \rangle$. Тогда оценкой позиции (A_i, B_i) назовем функцию δ_i, удовлетворяющую следующим двум условиям: 1) δ_i: $\mathfrak{C}_i \to \mathfrak{M}$; $i = 0, 1, \ldots$, 2) если $\mathrm{rang}(A, B) = n$, $\mathrm{rang}(C, D) = k$ и $\delta_n(A, B) > \delta_k(C, D)$, то $\forall n, k$ $\delta(A, B) > \delta(C, D)$. Игру $I = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \leqslant \rangle$ с оценкой позиций δ_i обозначим $I = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \delta_i, \leqslant \rangle$.

Функцию δ_i будем также называть *выигрышем первого игрока после i-го хода*. Дословно определяется функция оценки позиции после хода $(i, i-1)$.

Примером n-ходовой игры будет игровое представление задачи из § 1 п. 2. Оптимальной стратегией первого игрока в этой задаче, как нетрудно видеть, является дихотомия — стратегия, по которой первый ход вычислитель делает в середину отрезка $[a, b] = H_0$, а каждый $(i+1)$-й ход — в середину интервала H_i локализации корня, получившегося после i ходов в силу свойств функций класса $\mathfrak{B}$. Заметим также, что приведенная игра не имеет седловой точки. Действительно, для каждой функции из $\mathfrak{B}$ существует такая стратегия первого игрока (вычислителя), по которой на n-м ходе выбирается искомый корень функции из класса $\mathfrak{B}$. Отсюда следует, что гарантированный проигрыш игрока при любой его стратегии один и тот же и равен 0, в то время как гарантированный выигрыш оптимальной стратегии первого игрока равен $|a, b|/2^n$.

Введем ряд необходимых понятий для доказываемых далее принципиально важных теорем 2, 3 о существовании наилучшей, в некотором определенном смысле, функции оценки позиций.

Дадим вначале определение оптимальной, для позиции (A_i, B_i), стратегии A, т. е., нестрого говоря, такой оптимальной стратегии, для которой позиция (A_i, B_i) будет начальной. Будем называть *пучком, определяемым позицией* (A_i, B_i), следующее множество пар: $P(A_i, B_i) = \{(A', B') \mid A' \in \mathfrak{A}, B' \in \mathfrak{B}, (A'_i, B'_i) = (A_i, B_i)\}$.

Лемма 1. *Для любого пучка $P(A_i, B_i)$ существуют такие множества $\mathfrak{A}'$ из $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}'$ из $\mathfrak{B}$, которые удовлетворяют условию $P(A_i, B_i) = \mathfrak{A}' \times \mathfrak{B}'$.*

Доказательство следует непосредственно из определения пучка. #

Рассмотрим подыгру $I' = \langle \mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{M}'; \delta, \leqslant \rangle$ игры $I = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \leqslant \rangle$ такую, что $\mathfrak{A}' \times \mathfrak{B}' = P(A_i, B_i)$. Теперь *оптимальной для позиции* (A_i, B_i) *стратегией* назовем оптимальную в игре I' стратегию из $\mathfrak{A}'$.

Стратегию A назовем *позиционно-оптимальной*, если она является оптимальной для любой допустимой позиции (A_i, B_i) при любой B из $\mathfrak{B}$. Нетрудно видеть, что понятие позиционно-оптимальной стратегии и наилучшей стратегии из § 1 совпадают. Однако для многоходовых игр будем пользоваться термином «позиционно-оптимальной». В литературе [5] позиционно-оптимальные стратегии известны как последовательно-оптимальные. А. Г. Сухаревым [10, 11] неоднократно отмечалось преимущество последовательно-оптимальных стратегий, их существенное отличие от оптимальных минимаксных стратегий.

Лемма 2 *Любая оптимальная стратегия первого игрока в игре с единственной стратегией второго игрока позиционно-оптимальна.*

Стратегию A из $\mathfrak{A}$ назовем *походово-оптимальной*, если для любого i она оптимальна для позиции (A_i, B_i) на один ход с функцией выигрыша первого игрока δ_{i+1}, т. е. оптимальна в одноходовой игре вида $I' = \langle \mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{M}'; \delta_{i+1}, \leqslant \rangle$, где $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}'$ такие, что $\mathfrak{A}' \times \mathfrak{B}' = P(A_i, B_i)$, $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$.

Теорема 2 (Цермело). *Пусть в игре $I = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \delta_i, \leqslant \rangle$ для любой допустимой позиции существует оптимальная стратегия первого игрока. Тогда существует такая оценка позиции γ_i в игре $I' = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \gamma_i, \leqslant \rangle$, что походово-оптимальная в игре I' стратегия первого игрока является позиционно-оптимальной* (*в игре* $I = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \delta_i, \leqslant \rangle$).

Доказательство. Пусть (A_i, B_i) — позиция в игре I после хода (i, i). Тогда для игры I' положим по определению $\gamma_i(A_i, B_i) = m$, m — гарантированный выигрыш некоторой оптимальной для позиции (A_i, B_i) стратегии в игре I. Теперь из определения γ_i следует справедливость теоремы. Аналогично утверждение теоремы доказывается для позиции после хода $(i, i-1)$. #

Оценку позиции γ_i, построенную в доказательстве теоремы 2, назовем *цермеловской оценкой позиции* [16].

Следствие. *В игре с цермеловской оценкой позиции стратегия первого* (*второго*) *игрока оптимальна тогда и только тогда, когда она походово-оптимальна.*

Доказательство непосредственно следует из определения цермеловской оценки и походовой оптимальности. #

Определение оптимальной стратегии в многоходовой игре, заданной в нормальной форме, имеет существенный недостаток. А именно, не учитывается такой важный фактор, как число ходов в партии. Для этой цели вместе с игрой $I = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \leqslant \rangle$ рассмотрим производную от нее игру $I' = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M} \times \{0, 1, \ldots,\}, (\delta, r), \leqslant \rangle$, в которой $(\delta, r)(A, B) \rightleftharpoons (\delta(A, B), r(A, B))$, и при этом порядок $\leqslant$ на $\mathfrak{M} \times \{0, 1, \ldots\}$ определяется так:

$$(\delta(A, B), r(A, B)) \leqslant (\delta(A', B'), r(A', B')) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \delta(A, B) < \delta(A', B') \text{ или } \delta(A, B) = \delta(A', B'),\ r(A, B) \geqslant r(A', B').$$

Нетрудно видеть, что оптимальная стратегия в игре I' будет оптимальной и в игре I, но, вообще говоря, не наоборот. Построение производной игры I'' по производной от I игре I'' дополнительной градации на множестве оптимальных стратегий не дает. Это вытекает из следующих утверждений.

Лемма 3. *Для производных игр имеет место*

1) $\delta(A, B) \leqslant \delta(A', B') \Rightarrow (\delta, r)(A, B) \leqslant (\delta, r)(A', B')$,

2) $(\delta, r)(A, B) \leqslant (\delta, r)(A', B') \Leftrightarrow ((\delta, r), r)(A, B) \leqslant ((\delta, r), r) \times (A', B')$.

Доказательство. 2) Действительно, из правого неравенства получаем $((\delta(A, B), r(A, B)), r(A, B)) \leqslant ((\delta(A', B'), r(A', B')), r(A', B'))$, откуда $(\delta(A, B), r(A, B)) \leqslant (\delta(A', B'), r(A', B'))$, т. е. получаем левое неравенство. Аналогично из левого неравенства получаем правое. #

Для учета числа ходов введем одну оценку позиции β_i, которую назовем *тонкой оценкой позиции*. Положим по определению $\beta_i(A_i, B_i) = (m, j)$, где m — цермеловская оценка позиции (A_i, B_i), $j = \max\{l \mid l = k - i,\ k = r(A, B)\}$, где A пробегает множество всех оптимальных для позиции (A_i, B_i) стратегий, B — любое из $\mathfrak{B}$. На множестве значений тонкой оценки позиций $\mathfrak{M}' = \{(m, j)\} = \mathfrak{M} \times \{0, 1, \ldots\}$ введем линейный порядок следующим образом: $(m, j) \leqslant (m', j')$, если $m < m'$, а при $m = m'$, если $j \geqslant j'$.

Теорема 3 (Кокорин, Тарасова). *Пусть в игре* $I = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \delta_i, \leqslant \rangle$ *число ходов в любой партии не превышает некоторого фиксированного N и для любой допустимой позиции существует оптимальная стратегия первого игрока. Тогда для тонкой оценки позиции β_i в игре* $I' = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \beta_i, \leqslant \rangle$ *походово-оптимальная в игре I' стратегия первого игрока является позиционно-оптимальной.*

Доказательство непосредственно следует из определений понятий, входящих в формулировку теоремы. #

Следствие. *В игре с тонкой оценкой позиции стратегия первого (второго) игрока оптимальна тогда и только тогда, когда она походово-оптимальна.*

Доказательство непосредственно следует из определения тонкой оценки позиции и походовой оптимальности. #

Замечание. Пусть в игре $I = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \delta_i, \leqslant \rangle$ число ходов в любой партии не превышает некоторого фиксированного N и для любой допустимой позиции существует оптимальная стратегия первого игрока. Тогда для тонкой оценки позиции β_i в производной игре $I' = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M} \times \{0, 1, \ldots\}, (\delta, r), \beta_i, \leqslant \rangle$ походово-оптимальная в игре стратегия первого игрока будет позиционно-оптимальной стратегией в игре I.

Доказательство следует непосредственно из определения входящих в теорему понятий. #

§ 3. Ассоциированные игры. Модели противника

В этом разделе для позиционных антагонистических игр вводятся важнейшие для метода СП понятия: ассоциированные игры, модели противника (коротко МП) и синкретическая стратегия или синкретический противник, коротко СП.

1. Ассоциированные игры. Игру $I' = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}', \delta' \rangle$ назовем *ассоциированной с игрой* $I = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \delta \rangle$, если имеет место следующее:

1) из $B' \in \mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}'$ следует $\delta'(A, B') = \delta(A, B')$;

2) для любых A из $\mathfrak{A}$ и B' из $\mathfrak{B}'$ существует B из $\mathfrak{B}$ такая, что $(A, B) \equiv (A, B')$.

Очевидно, из условия 2) вытекает следующее свойство: множество ходов стратегий из $\mathfrak{B}'$ содержится в множестве Y, т. е. в том множестве, которому принадлежат ходы стратегий из $\mathfrak{B}$.

Введем обозначения: $I \mapsto I'$ — игра I' ассоциирована с игрой I, игру I', ассоциированную с игрой I, обозначим через $I\langle \mathfrak{B}' \rangle$, в частности $I = I\langle \mathfrak{B} \rangle$, так как $I \mapsto I$. Без боязни ошибиться функцию δ' из $I\langle \mathfrak{B}' \rangle$ будем обозначать δ. Если $I\langle \mathfrak{B} \rangle \mapsto I\langle \mathfrak{B}' \rangle$, то будем говорить. что $\mathfrak{B}'$ ассоциировано с $\mathfrak{B}$ и обозначать $\mathfrak{B} \mapsto \mathfrak{B}'$. Стратегию B' назовем ассоциированной с $\mathfrak{B}$, если $\mathfrak{B} \mapsto \{B'\}$. Следующие утверждения непосредственно вытекают из определений.

Лемма 5. $\mathfrak{B} \mapsto \mathfrak{B}' \Rightarrow \forall A \in \mathfrak{A} \forall B' \in \mathfrak{B}' \exists B \in \mathfrak{B} (\delta(A, B') = \delta(A, B))$. #

Лемма 6. *Если* $\mathfrak{B} \mapsto \mathfrak{B}'$, *то* $\delta(A, \mathfrak{B}') \geqslant \delta(A, \mathfrak{B})$. #

Лемма 7. *Если для любого ω из Ω имеет место* $\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}_\omega$, *то* $\mathfrak{B} \mapsto \bigcup_{\omega \in \Omega} \mathfrak{B}_\omega$. #

Лемма 8. *Если для любого ω из Ω имеет место* $\mathfrak{B} \mapsto \mathfrak{B}_\omega$ *и* $\bigcap_{\omega \in \Omega} \mathfrak{B}_\omega \neq \varnothing$, *то* $\mathfrak{B} \mapsto \bigcap_{\omega \in \Omega} \mathfrak{B}_\omega$. #

Пусть $\mathfrak{B} \mapsto \mathfrak{B}', \mathfrak{B} \mapsto \mathfrak{B}''$, $B' \in \mathfrak{B}'$, $B'' \in \mathfrak{B}''$. Тогда введем отношение $\equiv$ следующим образом: $B' \equiv B'' \rightleftharpoons \forall A ((A, B') = (A, B''))$. Очевидно, что $\equiv$ есть отношение эквивалентности.

Проиллюстрируем введенные понятия на примере игр, задаваемых с помощью табл. 2.

Возьмем $\mathfrak{A}=\{A_1, A_2\}$, $\mathfrak{B}=\{B_1, B_2\}$, $\mathfrak{M}=\{1, 2, 3, 4\}$. Тогда, например, множества $\mathfrak{B}_1'=\{B_3\}, \mathfrak{B}_2'=\{B_3, B_4\}, \mathfrak{B}_3'=\{B_3, B_4, B_5\}$ будут ассоциированы с $\mathfrak{B}$, $B_1 \equiv B_5$. Если же положить $\mathfrak{A}=\{A_1, A_2\}$, $\mathfrak{B}=\{B_1, B_3\}$, $\mathfrak{B}'=\{B_4\}$, то $\mathfrak{B}'$ неассоциировано с $\mathfrak{B}$, так как $\delta(A_1, B_4) \notin \{\delta(A_1, B_1), \delta(A_1, B_3)\}$.

Таблица 2

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	2	1	2	1	2
A_2	4	5	5	4	4

Замечание 1. На множестве игр, ассоциированных с игрой $I\langle\mathfrak{B}\rangle$, отношение $\mapsto$ будет рефлексивно и транзитивно. Однако оно не будет антисимметричным. Действительно, пусть и $\mathfrak{B} \mapsto \mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{B}'$, тогда $\mathfrak{B}' \mapsto \mathfrak{B}$.

Пусть, далее, $\mathfrak{B} \mapsto \mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}'/_{\equiv}$ — фактор-множество множества $\mathfrak{B}$ по эквивалентности. Тогда если элементы $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}'$, то из $B_1 \equiv B_2$ следует $B_1/_{\equiv} = B_2/_{\equiv}$. Кроме того, $\mathfrak{B} \mapsto \mathfrak{B}'/_{\equiv}$. Нетрудно показать для мощности любого фактор-множества справедливость следующего утверждения.

Лемма 9. *Если* $\mathfrak{B} \mapsto \mathfrak{B}'/_{\equiv}$, *то* $|\mathfrak{B}'/_{\equiv}| \leqslant |\mathfrak{B}/_{\equiv}|^{|\mathfrak{A}|}$.

Из лемм 7 и 8 следует существование наибольшего по включению элемента $\overline{\mathfrak{B}}$ в множестве всех факторизованных множеств, ассоциированных с множеством $\mathfrak{B}$. Назовем множество $\overline{\mathfrak{B}}$ замыканием $\mathfrak{B}$.

Лемма 10. *Любое непустое подмножество из замыкания* $\overline{\mathfrak{B}}$ *ассоциировано с* $\mathfrak{B}$.

Замечание 2. Замыкание $\overline{\mathfrak{B}}$ можно определить как множество всех различных ассоциированных с $\mathfrak{B}$ стратегий.

Примером замыкания для игры, определяемой табл. 2 при $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2\}$, $\mathfrak{B}=\{B_1, B_2\}$, будет множество $\overline{\mathfrak{B}}=\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$.

2. Модели противника. Множество стратегий $\widetilde{\mathfrak{B}}$, ассоциированное с $\mathfrak{B}$, называется моделью противника (коротко МП) для игры $I\langle\mathfrak{B}\rangle$, если оно удовлетворяет следующему условию: существует оптимальная в игре $I\langle\widetilde{\mathfrak{B}}\rangle$ стратегия $A_0 \in \mathfrak{A}$, для которой $\delta(A_0, \widetilde{\mathfrak{B}}) = \delta(A_0, \mathfrak{B})$. Например, моделями противника для игры, заданной табл. 2 при $\mathfrak{A}=\{A_1, A_2\}$, $\mathfrak{B} = \{B_1, B_2\}$, являются множества $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1=\{B_3, B_4\}$, $\mathfrak{B}_2=\{B_4\}$, $\mathfrak{B}_3=\{B_5\}$, $\mathfrak{B}_4=\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$. Простейшие примеры МП для $I\langle\mathfrak{B}\rangle$ можно получать с помощью следующего утверждения.

Теорема 4. *Моделями противника для* $I\langle\mathfrak{B}\rangle$ *являются*:

а) *любое подмножество* $\mathfrak{B}'$ *из замыкания* $\overline{\mathfrak{B}}$, *содержащее* $\mathfrak{B}/_{\equiv}$;

б) *оптимальная стратегия второго игрока в игре с седловой точкой*;

в) *любое подмножество* $\widetilde{\mathfrak{B}}$ *из* $\mathfrak{B}$, *для которого имеет место равенство* $\delta(A_0, \widetilde{\mathfrak{B}}) = \delta(A_0, \mathfrak{B})$, *где* A_0 — *некоторая оптимальная стратегия первого игрока.*

Доказательство. а) если A_0 из $\mathfrak{A}$ оптимальна в игре $I\langle\mathfrak{B}'\rangle$, где $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B} \subset \overline{\mathfrak{B}}$, то из леммы 10, леммы 6 и из условия $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}'$ следует $\delta(A_0, \mathfrak{B}') \leqslant \delta(A_0, \mathfrak{B})$. Поэтому $\delta(A_0, \mathfrak{B}') = \delta(A_0, \mathfrak{B})$, и, значит, $\mathfrak{B}'$ — МП по определению; в) из $\widetilde{\mathfrak{B}} \subset \mathfrak{B}$ следует $\mathfrak{B} \mapsto \widetilde{\mathfrak{B}}$. Это, а также условие $\delta(A_0, \widetilde{\mathfrak{B}}) = \delta(A_0, \mathfrak{B})$ определяет $\widetilde{\mathfrak{B}}$ как модель противника. Утверждение б) следует из определения седловой точки. #

Модель противника, состоящая из одной стратегии, называется *синкретической стратегией или синкретическим противником*, коротко СП.

Стратегией СП в игре, задаваемой табл. 2 при $\mathfrak{B}=\{B_1, B_2\}$, будут стратегия B_1 (оптимальная стратегия второго игрока) и B_4, B_5.

Теорема 5. *Пусть* $I\langle\mathfrak{B}\rangle \mapsto I\langle\widetilde{\mathfrak{B}}\rangle$. *Тогда если стратегия* A_0 *из* $\mathfrak{A}$ *оптимальна* (*соответственно* E-*оптимальна*) *в игре* $I\langle\widetilde{\mathfrak{B}}\rangle$ *и* $\delta(A_0, \widetilde{\mathfrak{B}}) = \delta(A_0, \mathfrak{B})$, *то* A_0 *оптимальна* (E-*оптимальна*) *в* $I\langle\mathfrak{B}\rangle$, *а множество* $\widetilde{\mathfrak{B}}$ *будет моделью противника для игры* $I\langle\mathfrak{B}\rangle$.

Доказательство. Пусть A — любая стратегия из $\mathfrak{A}$. Покажем, что $\delta(A_0, \mathfrak{B}) \geqslant \delta(A, \mathfrak{B})$. Имеем неравенства: 1) $\delta(A, \widetilde{\mathfrak{B}}) \geqslant \delta(A, \mathfrak{B})$ — лемма 6; 2) $\delta(A_0, \widetilde{\mathfrak{B}}) \geqslant \delta(A, \widetilde{\mathfrak{B}})$ — из условия теоремы (оптимальность A_0); 3) $\delta(A_0, \widetilde{\mathfrak{B}}) \geqslant \delta(A, \mathfrak{B})$ — из 1), 2). Из последнего и равенства $\delta(A_0, \mathfrak{B}) = \delta(A_0, \widetilde{\mathfrak{B}})$ следует $\delta(A_0, \mathfrak{B}) \geqslant \delta(A, \mathfrak{B})$.

Справедливость теоремы, когда A_0 E-оптимальна в $I\langle\mathfrak{B}\rangle$, следует непосредственно из определения E-оптимальности и равенства $\delta(A_0, \mathfrak{B}) = \delta(A_0, \widetilde{\mathfrak{B}})$. #

Предложение 1. *Если S является* СП *для игры* $I\langle\mathfrak{B}\rangle$, *то любая оптимальная в* $I\langle\mathfrak{B}\rangle$ *стратегия* A_0 *из* $\mathfrak{A}$ *будет оптимальна также в* $I\langle S\rangle$.

Доказательство. По определению S существует такая оптимальная против S стратегия A' из $\mathfrak{A}$, что имеет место равенство $\delta(A', S) = \delta(A', \mathfrak{B})$. Отсюда по теореме 5 следует, что стратегия A' оптимальна в $I\langle\mathfrak{B}\rangle$, и, значит, $\delta(A', \mathfrak{B}) = \delta(A_0, \mathfrak{B})$. Сравнивая два последних равенства, имеем $\delta(A_0, \mathfrak{B}) = \delta(A', S)$, отсюда, очевидного неравенства $\delta(A_0, \mathfrak{B}) \leqslant \delta(A_0, S)$ и оптимальности A' против S имеем $\delta(A_0, S) = \delta(A', S)$. Значит, A_0 оптимальна в $I\langle S\rangle$. #

Предложение 2. *Любая* СП *для игры* $I\langle\mathfrak{B}\rangle$ *является оптимальной стратегией второго игрока в игре* $I\langle\overline{\mathfrak{B}}\rangle$, *и наоборот, любая оптимальная стратегия второго игрока в игре* $I\langle\overline{\mathfrak{B}}\rangle$ *будет* СП *для игры* $I\langle\mathfrak{B}\rangle$.

Справедливость этого утверждения следует непосредственно из определения оптимальной стратегии второго игрока, стратегии СП и игры $I\langle\overline{\mathfrak{B}}\rangle$.

Таблица 3

	B_1	B_2	B_3	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
A_1	10	9	8	8	8	8	8	8	8	8	8
A_2	7	6	5	5	5	6	6	6	7	7	7
A_3	4	2	3	2	4	2	3	4	2	3	4

Предложение 3. *Пусть m — мощность множества всех* СП *из* $\overline{\mathfrak{B}}$ *для игры* $I\langle\mathfrak{B}\rangle$, $\mathfrak{D}$ — *множество всех оптимальных стратегий из* $\mathfrak{A}$. *Тогда* $m \leqslant |\mathfrak{B}/_{\equiv}|^{|\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{D}|}$.

Приведем пример, показывающий, что верхняя граница в неравенстве из предложения 3 достижима. Рассмотрим игру $I = \langle\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \leqslant\rangle$, в которой $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$, $\mathfrak{B} = \{B_1, B_2, B_3\}$, δ задается табл. 3. Здесь $\mathfrak{D} = \{A_1\}$, множеством всех СП будет $\{B_3, X_1, \ldots, X_8\}$, $m = 9$, $|\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{D}| = 2$, $|\mathfrak{B}| = 3$, и, значит, $m = |\mathfrak{B}|^{|\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{D}|}$. Кроме того, в этом же примере стратегия X_1 будет абсолютно оптимальной, а над стратегией X_8 доминируют все остальные стратегии СП. «Промежуточные» стратегии СП находятся между X_1 и X_8.

Пусть элемент B_1 ассоциирован с $\mathfrak{B}$, $A \in \mathfrak{A}$, тогда A-*ипостасью элемента* B_1 называем элемент B такой, что $(A, B') = (A, B)$.

Предложение 4. *Множество всех A-ипостасей, синкретической стратегии является* МП.

§ 4. Метод синкретического противника

Настоящий раздел посвящен подробному описанию метода синкретического противника (коротко СП). Основная идея (общая характеристика) метода СП заключается в следующем. Задачу оптимального поиска сводим к нахождению оптимальной стратегии первого игрока в многоходовой игре $I = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \delta_i, \leqslant \rangle$. Существенным является рассмотрение системы трех игр $\{I\langle \mathfrak{B} \rangle, I\langle \bar{\mathfrak{B}} \rangle, I\langle S \rangle\}$, где S — синкретическая стратегия в $I\langle \mathfrak{B} \rangle$. Результатом этого рассмотрения будет сведение задачи поиска к задаче нахождения позиционно-оптимальной стратегии первого игрока в игре $I\langle S \rangle$, т. е., можно сказать, к решению задачи динамического программирования.

Предлагаемый метод можно применять, по-видимому, в таких взаимопроникающих разделах математики, как кибернетика, вычислительная математика, исследование операций, теория игр, оптимальное управление.

Описание метода дается в виде методических инструкций разной степени конструктивности и обоснования. Для понимания и овладения этим методом недостаточно прочтения настоящего раздела. Нужно также рассмотреть его применение на следующем конкретном примере (см. § 5) — задаче восстановления характеристических функций. Заметим, что аналогично обстоит дело с динамическим программированием. Цель конструктивного описания метода недостижима. Это следует из работы [6], в которой показано, что элементарная теория класса систем $\{I\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \leqslant \rangle\}$ неразрешима, а класса систем $\{I\langle \mathfrak{A}, \{S\}, \mathfrak{M}; \delta, \leqslant \rangle\}$ — разрешима. Заметим также следующее. Широкий класс задач поиска представим в виде многоходовых игр, в которых первый игрок — вычислитель, а второй — некоторый класс функций. Такие игры являются играми с неполной информацией и не имеют седловой точки. В ходе применения метода СП осуществляется переход от исходной игры $I\langle \mathfrak{B} \rangle$ к игре $I\langle \mathfrak{B} \cup S \rangle$ с полной информацией, имеющей, следовательно, седловую точку [8].

1. Описание метода. Вначале кратко перечислим 7 шагов, из которых состоит метод. В зависимости от ситуации шаги могут делаться последовательно, взаимосвязанно или циклично. Об этом будет говориться специально в описании метода.

Шаги метода:

I. Теоретико-игровое представление задачи.

II. Разбиение задачи на этапы.

III. Решение задачи на последнем этапе.

IV. Уточнение задачи начального этапа.

V. Построение предполагаемой синкретической стратегии $\tilde{S}$.

VI. Построение оптимальной $\tilde{S}$ стратегии первого игрока.

VII. Доопределение оптимальной против $\tilde{S}$ стратегии до позиционно-оптимальной или оптимальной стратегии первого игрока в игре $I\langle \mathfrak{B} \rangle$.

Переходим к подробному описанию шагов.

I. Теоретико-игровое представление задачи. Задачу оптимального поиска сводим к задаче нахождения оптимальной стратегии первого игрока в антагонистической многоходовой игре $I = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \delta, \delta_i, \leqslant \rangle$. При этом принципиально вводятся в рассмотрение дополнительно к игре $I\langle \mathfrak{B} \rangle$ две игры — $I\langle \bar{\mathfrak{B}} \rangle$ и $I\langle \{S\} \rangle$ с синкретической стратегией S. Чрезвычайно важным в этом шаге для дальнейшего успешного применения метода является удачный выбор игрового представления, так как оно, очевидно, не единственное. Существование такого «удачного» выбора строго и детально обосновывается в п. 2 § 2. Ценность игрового представления прежде всего определяется выбором функций оценки позиции $\mathcal{E}$, а именно «близостью» δ к цермеловской оценке позиции.

Первоначально выбранная оценка позиции, а значит, и игровое представление, может меняться (корректироваться) в ходе решения задачи. Окончательное определение функции выигрыша дается после последнего применения четвертого шага.

Значение первого шага иллюстрируется, например, чрезвычайной важностью оценки обстановки в военном деле, оценкой позиции в шахматах, правильностью диагноза в медицине. Нетрудно видеть, что все виды жизнедеятельности, из которых взяты примеры, представимы в виде антагонистической игры.

II. Разбиение задачи на этапы. Разбиение на этапы определяется существом задачи или проделывается искусственно.

Примерами разбиения на этапы может служить: в шахматах разбиение игры на дебют, миттельшпиль, эндшпиль; в авиации — подъем, полет и посадка самолета. В военном деле этапы сражения для наступающих и обороняющихся определяются с учетом рубежей обороны. Разбиению задачи на этапы соответствует разбиение целей игроков на подцели, которые, в свою очередь, определяют игровое представление для каждого этапа. Таким образом, происходит соответственно разбиению расчленение стратегий игроков и оценки позиции, т. е. фактически происходит расчленение игрового представления исходной задачи.

Необходимым условием разбиения на этапы будет выполнение следующих двух свойств.

Пусть α_k — условие, определяющее цель k-го этапа. Тогда имеется возможность проверять выполнение этого условия после каждого хода в игре, т. е. для любой позиции.

Пусть S — синкретическая стратегия в игре I и A — произвольная стратегия первого игрока. Тогда в партии (A, S) для любого k стратегия A может достигнуть цели k-го этапа лишь после того, как ею была достигнута цель $(k-1)$-го этапа. Свойством этапа, существенно облегчающим решение задачи на этом этапе, является следующее. Оптимальные стратегии игроков в игровом представлении этапа походово-оптимальны. Обоснованием этого служат теорема 2 и теорема 3.

Особо значимым является выполнение последнего этапа. Задача на последнем этапе формулируется так, чтобы результат ее решения совпадал с результатом решения исходной задачи. Последний этап выделяется всегда, так как всегда приходится рассматривать общую ситуацию, хотя бы перед последним ходом. Вообще, аргументы в пользу важности выделения последнего этапа те же, что и в динамическом программировании.

В принципе, для применения последующих шагов метода можно считать, что разбиение содержит один либо два этапа: последний и начальный. В этом случае поступаем индуктивно по отношению к начальному этапу, разбивая его снова на два этапа [12, 13].

III. Решение задачи на последнем этапе проделывается с помощью шагов V—VII. Обоснование решения в начале задачи на последнем этапе заключается в том, что только после этого появляется возможность определить «предпочтительные» начальные позиции последнего этапа, т. е. цели начального этапа, а значит, и игровое представление начального этапа. Например, в шахматах последнему этапу соответствует эндшпиль, а начальному — дебют и миттельшпиль. В миттельшпиле игрок старается сыграть так, чтобы достичь выигрышных эндшпилей, которые он должен знать заранее.

Сформулируем строго отношение «предпочтительности» на начальных позициях последнего этапа, которые одновременно являются конечными позициями начального этапа. Обозначим через $\mathfrak{N}$ множество всех начальных позиций последнего этапа. Введем далее функцию оценки $\overline{\delta}$

начальных позиций последнего этапа $\overline{\delta}\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$ следующим образом. Пусть $(A_i, B_i) \in \mathfrak{N}$, тогда $\overline{\delta}(A_i, B_i) = m$, где m — гарантированный выигрыш оптимальной для позиции (A_i, B_i) стратегии первого игрока.

IV. Уточнение задачи начального этапа и ее решение. После определения на третьем шаге предпочтительных начальных позиций последнего этапа задача начального этапа заключается в том, чтобы «наилучшим» образом достигнуть этих позиций. Другими словами, нужно описываемым методом решить задачу начального этапа при условии, что множество стратегий первого игрока $\mathfrak{A}'$ является подмножеством таких стратегий из $\mathfrak{A}$, которые достигают предпочтительных начальных позиций последнего этапа.

V. Построение предполагаемой синкретической стратегии $\tilde{S}$. Во-первых, предполагаемая синкретическая стратегия всегда ищется в ассоциированном замыкании. Далее, если $S_п$ — синкретическая стратегия на последнем этапе, $\tilde{S}_н$ — предполагаемая синкретическая стратегия на начальном этапе, то $\tilde{S}$ ищется в виде $\tilde{S} = S_п * \tilde{S}_н$, где $*$ — операция последовательного применения сначала $\tilde{S}_н$ до выполнения условия $\alpha_н$ — условия окончания начального этапа, а затем стратегии $S_п$.

Лемма 11. *Пусть $S_п$ — синкретическая стратегия на последнем этапе, $S_н$ — синкретическая стратегия на начальном этапе. Тогда стратегия S, равная композиции $S_п * S_н$, является синкретической стратегией для игры $I\langle\mathfrak{B}\rangle$.*

Доказательство следует из определения $S_н$ и $S_п$, полученных на третьем и четвертом шаге, а также определения функции оценки начальных позиций последнего этапа (см. шаг III). #

Рассмотрим теперь случай, когда разбиение содержит один этап, т. е. не видна возможность дальнейшего разбиения, что говорит в пользу однородности действий противника. В этом случае рекомендуется строить синкретическую стратегию S как походово-оптимальную стратегию. Тогда если оценка позиций в игре является цермеловской, то на основании следствия из п. 2 § 2 стратегия S будет синкретической. Цермеловская же оценка по теореме 2 существует, когда у первого игрока есть позиционно-оптимальная стратегия. В качестве примера для этого случая можно привести игровое представление задачи оптимального поиска корня монотонно-возрастающей (убывающей) функции.

VI. Построение оптимальной против стратегии $\tilde{S}$ стратегии O. Пусть игра разбита на два этапа и, значит, $\tilde{S} = S_п * S_н$. Тогда оптимальную против $\tilde{S}$ стратегию O из $\mathfrak{A}$ строим в виде $O = O_п * O_н$, где $O_п$ — оптимальная против $S_п$ стратегия из $\mathfrak{A}$, $O_н$ — оптимальная против $\tilde{S}_п$ стратегия первого игрока, найденная после уточнения задачи начального этапа на шаге IV, т. е. оптимальная из множества $\mathfrak{A}'$. Здесь под $O_п * O_н$ понимается результат последовательного применения сначала стратегии $O_н$ до выполнения условия $\alpha_н$, а затем стратегии $O_п$.

Лемма 12. *Стратегия O оптимальна против стратегии $\tilde{S}$ в игре $I\langle\tilde{S}\rangle$.*

Доказательство. На основании аксиомы (свойства из шага II) для синкретической стратегии любая оптимальная против S стратегия первого игрока имеет все этапы разбиения. В силу этого и определения $O_п$, $O_н$ любая оптимальная в игре $I\langle\tilde{S}\rangle$ стратегия из $\mathfrak{A}$ не доминирует над стратегией O. #

Рассмотрим теперь случай, когда разбиение содержит один этап. Если $\tilde{S}$ — походово-оптимальная в игре $I\langle\tilde{S}\rangle$, тогда стратегию O строим как походово-оптимальную против $\tilde{S}$ (см. теорему 3).

В общем случае, при любой $\tilde{S}$ при построении оптимальной против $\tilde{S}$ стратегии O всегда можно пользоваться методом динамического программирования.

VII. Доопределение оптимальной против $\tilde{S}$ стратегии O до позиционно-оптимальной или оптимальной стратегии в игре. Доопределение стратегии O приходится делать против всех стратегий из $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B} \backslash \mathscr{G}$, где $\mathscr{G}$ — множество ипостасей стратегии $\tilde{S}$.

Важность и особенность этого шага заключается в том, что на нем решается задача построения позиционно-оптимальной стратегии в игре $I\langle\mathfrak{B}\rangle$. На основании того, что стратегия O будет в игре $I\langle\tilde{S}\rangle$ позиционно-оптимальной (лемма 2), остается доопределить ее наилучшим образом против стратегий из $\mathfrak{B}'$.

Перейдем к обоснованию этого шага. Пусть в игре $I\langle\mathfrak{B}\rangle$ позиции (A_i, B_i) соответствует пучок $P(A_i, B_i)$, который определяет подыгру I' игры I (см. лемму 1). Считаем, что, определив понятие синкретической стратегии, гарантированного выигрыша и ассоциированного множества для подыгры I' так же, как для игры I, мы тем самым определим эти понятия для позиции (A_i, B_i). Тогда, очевидно, справедлива

Теорема 6. *Пусть $I' = \langle\mathfrak{A}, \mathfrak{B}', \mathfrak{M}; \delta, \leqslant\rangle$ — подыгра игры $I\langle\mathfrak{B}\rangle$, определяемая пучком $P(A_i, B_i)$. Тогда если стратегия A из $\mathfrak{A}$ оптимальна в игре $I'\langle\tilde{\mathfrak{B}}'\rangle$, где $\tilde{\mathfrak{B}}'$ — множество, ассоциированное множеству $\mathfrak{B}'$ для позиции (A_i, B_i), и гарантированный на множестве $\tilde{\mathfrak{B}}'$ выигрыш A равен ее гарантированному для позиции (A_i, B_i) выигрышу, т. е. $\delta(A, \tilde{\mathfrak{B}}') = \delta(A, \mathfrak{B}')$, то стратегия A будет оптимальной для позиции (A_i, B_i) стратегией первого игрока.*

Таким образом, применением метода СП к каждой возникающей в игре позиции можно получать позиционно-оптимальные стратегии первого игрока. Облегчающим обстоятельством при доопределении является то, что при построении стратегии $\tilde{S}$ на шаге V делалось рассмотрение общих возможных позиций в игре $I\langle\mathfrak{B}\rangle$.

Если не удается наилучшим образом доопределить стратегию O, то доопределим ее только лишь до оптимальной в игре $I\langle\mathfrak{B}\rangle$ стратегии. Для этого достаточно не снизить гарантированный выигрыш доопределенной стратегии O^* из $\mathfrak{A}$, т. е. должно выполняться условие $\delta(O, \tilde{S}) = \delta(O^*, \mathfrak{B})$. Из выполнимости этого условия и оптимальности стратегии в игре $I\langle\tilde{S}\rangle$ следует выполнимость условий теоремы 5, из которой вытекает оптимальность O^* в игре $I\langle\mathfrak{B}\rangle$.

2. Особенности метода СП. В этом пункте приведем важнейшие особенности, характеризующие метод СП.

1. Теория, изложенная в первых трех параграфах, на языке которой формулируется и обосновывается метод СП, безусловно, по своему характеру относится к дискретной математике в широком смысле, так как рассматриваемые игры являются многоосновными алгебраическими системами [17].

2. Использование языка антагонистических позиционных игр. В настоящее время теоретико-игровой язык широко используется в различных разделах математики: математической кибернетике, вычислительной математике, математической логике. Использование теории игр в кибернетике и математической логике восходит к первой работе по позиционным играм, опубликованной Цермело в 1912 г.

Использование теории игр в вычислительной математике восходит к работе Бореля, относящейся к 1921 году. Вообще, использование игр как моделей жизнедеятельности человека восходит к глубочайшей древности, к возникновению игр.

3. Использование принципа минимакса или наибольшего гарантированного результата. Этот принцип применяется во многих разделах современной математики и восходит

к работам Чебышева. Принципу минимакса в общечеловеческом смысле соответствует перестраховочный подход. Такой подход применяется, например, на производстве, когда качество работы оценивается по количеству выданного брака.

4. Использование оценки позиции. Различные оценки часто встречаются в математике: оценка погрешностей, остаточный член и т. п. Правильные оценки в жизнедеятельности человека часто имеют решающее значение. Например, в военном деле оценка обстановки, в шахматах — оценка позиции, в медицине — диагноз, в политике — оценка международной обстановки, в любой борьбе — оценка своих возможностей и возможностей противной стороны.

5. Разбиение на этапы и решение с конца. Эта особенность характерна также для динамического программирования. Вообще, разбиение на этапы используется при решении различных математических задач. То же можно сказать и о задачах и целях в жизни человека.

6. Использование понятий ассоциированная игра, модели противника, синкретическая стратегия, ипостась. Метод СП состоит в сведении решения задачи в исходном игровом представлении к такой же задаче в ассоциированной игре, в которой противник имеет одну стратегию. При этом отметим, что первоначальная игра не имеет седловой точки, а вторая, очевидно, имеет. На модели противника и синкретическую стратегию можно смотреть как на формализацию иктуитивного понятия «наихудшего поведения функции» в вычислительной математике, а также «природы» в так называемых играх с природой. Ипостась формализует «худшую» функцию. Синкретическую стратегию можно рассматривать как своеобразный синтез алгоритмов, если стратегии в игре являются алгоритмами. В мифологии синкретизм человека и коня создает кентавра, синкретичными будут также сфинкс, конек-горбунок и т. д. В религии христианский бог ассоциирован со своими ипостасями. Идея синкретической стратегии, по-видимому, восходит к следующей общечеловеческой мудрости: умей поставить себя на место другого.

Замечание 3. Приведенные особенности говорят в пользу возможности разнообразного применения метода в кибернетике.

§ 5. Оптимальное восстановление характеристических функций, заданных в узлах целочисленной решетки

1. Постановка задачи. Задачу оптимального восстановления характеристической функции, заданной в узлах целочисленной решетки, можно рассматривать как математическую модель известной игры «морской бой» с одним «крейсером».

Пусть $N_r = \{1, 2, \ldots, r\}$, множество Ω представляет собой совокупность узлов целочисленной решетки $\Omega = N_r \times N_r$. Отрезком длины p назовем набор таких p точек множества Ω, у которых одна из координат фиксирована, а другая принимает p последовательных значений. Таким образом, Ω образует на плоскости дискретный квадрат, ограниченный отрезками длины r. Каждое подмножество из Ω можно определить заданием характеристической функции, принимающей единичные значения в точках этого подмножества и нулевые значения во всех других точках множества Ω.

Рассмотрим множество Q всех характеристических функций, определенных на Ω. Выделим из множества Q класс $\mathfrak{B}$ таких функций, каждая из которых определяет в Ω отрезок Δ фиксированной длины δ. При этом пусть для простоты выполняется следующее равенство $k\delta = r$, где k — натуральное число.

Требуется восстановить любую функцию B из $\mathfrak{B}$ путем последовательного вычисления ее значений в точках Ω. Предполагается, что значения функции могут быть вычислены точно. Очевидно, что характеристическая функция оказывается восстановленной сразу, как только указаны все точки ее характеристического отрезка.

Характеристический отрезок произвольной функции B из $\mathfrak{B}$ ищется с помощью множества $\mathfrak{A}$ последовательных многоходовых стратегий, определяющих выбор точек из Ω так, что выбор a_{i+1} из Ω, сделанный по стратегии A из $\mathfrak{A}$ на $(i+1)$-м ходе, зависит от всей предыдущей информации, т. е.

$$a_{i+1} = A(a_1, B(a_1), \ldots, a_i, B(a_i)).$$

Таким образом, каждая A из $\mathfrak{A}$ есть функция, определенная на конечных последовательностях вида $(a_1, B(a_1), \ldots, a_i, B(a_i))$, $i = 1, \ldots$ со значениями в Ω, т. е. A: $(a_1, B(a_1), \ldots, a_i, (B(a_i)) \to a_{i+1}$.

Результат (выигрыш) $\tau(A, B)$ от применения стратегии A из $\mathfrak{A}$ к функции B из $\mathfrak{B}$ определим равным минимальному числу ходов (выборов точек из Ω), позволяющих найти все точки единичного отрезка функции B. Эффективность стратегии для класса $\mathfrak{B}$ оценивается ее гарантированным в классе $\mathfrak{B}$ результатом, т. е. величиной, равной $\max\limits_{B\in\mathfrak{B}} \tau(A, B)$. Оптимальной стратегией восстановления функций из $\mathfrak{B}$ будет такая стратегия A_0 из $\mathfrak{A}$, гарантированный выигрыш которой равен

$$\tau(A_0, \mathfrak{B}) = \min_{A\in\mathfrak{A}} \max_{B\in\mathfrak{B}} \tau(A, B).$$

Задача настоящей работы состоит в построении оптимальной стратегии восстановления функций класса $\mathfrak{B}$. Для решения задачи будет использован метод СП.

2. Решение задачи методом СП.

I. Теоретико-игровое представление задачи. Сформулированная задача оптимального восстановления функций класса $\mathfrak{B}$ представима как задача нахождения оптимальной стратегии первого игрока в антагонистической многоходовой игре вида $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \tau, d_i, \leqslant \rangle$, где $\mathfrak{A}$ — множество стратегий первого игрока (вычислителя), каждая из которых определяет выбор точек (ходов) $a_1, \ldots, a_n$ из Ω, $\mathfrak{B}$ — множество всех характеристических функций класса $\mathfrak{B}$ (стратегий второго игрока), каждая B из которых определяет соответствующие значения (ответные ходы) $B(a_1), \ldots, B(a_n)$ из $\{0, 1\}$, $\mathfrak{M} = N$, где N — множество натуральных чисел, $\tau(A, B)$ — выигрыш стратегии A из $\mathfrak{A}$ при восстановлении ею функции B из $\mathfrak{B}$, равной по определению минимальному числу ходов стратегии A, за которые она полностью восстанавливает функцию B, τ: $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \to N$, $\leqslant$ — естественный порядок на натуральных числах, d_i — число возможных расположений отрезка Δ после i-го хода.

II. Разбиение задачи на этапы. Задача разбивается на два этапа: начальный и последний.

Задача начального этапа состоит в отыскании хотя бы одной точки из отрезка Δ (первое попадание).

Задача последнего этапа — нахождение концов отрезка Δ (полное уничтожение «крейсера»).

Более точные формулировки этих задач будут даны на шагах IV и III метода.

III. Решение задачи на последнем этапе. Введем следующее вспомогательное понятие. Пусть первый игрок пользуется некоторой стратегией A из $\mathfrak{A}$. Тогда центром поиска (игры) или просто центром назовем такой ход стратегии A (точку из Ω), для которого ответным ходом второго игрока (значением восстанавливаемой функции) впервые с начала игры будет 1, т. е. a_{i+1} — центр игры $I\langle B\rangle = \langle A, B, \mathfrak{M}; \tau, d_i\rangle$, если $B(a_1) = B(a_2) = \ldots = B(a_i) = 0$, $B(a_{i+1}) = 1$, где $a_1, a_2, \ldots, a_i, a_{i+1}$ — ходы первого игрока, $B(a_1), B(a_2), \ldots, B(a_i), B(a_{i+1})$ — соответствующие ответные ходы второго игрока. Пользуясь терминологией «морского боя», можно определить центр игры как точку первого попадания в «крейсер».

Позицию, возникающую в игре после нахождения центра, назовем центральной позицией. Центральная позиция является, таким образом, конечной позицией начального этапа и одновременно начальной позицией последнего этапа.

Задача последнего этапа состоит в построении оптимальной для центральной позиции стратегии первого игрока в игре $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}; \tau, d_i\rangle$. Будем решать эту задачу также методом СП, помечая номер шага метода одним штрихом и опуская название шагов.

1′. Пусть G множество всех возможных в игре центральных позиций (очевидно, что $|G| = |\Omega|$). Тогда для любой g из G игровое представление задачи последнего этапа имеет вид $I' = \langle \mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{M}; \tau, d_i\rangle$, где $\mathfrak{A}'$ из $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}'$ из $\mathfrak{B}$ таковы, что $\mathfrak{A}' \times \mathfrak{B}' = P(g)$, $P(g)$ — пучок, определяемый позицией g (см. § 2, п. 2), $\mathfrak{M}$, τ — те же, что в исходном игровом представлении, d_i — функция оценки позиции, возникающей после i-го хода на последнем этапе, равная числу возможных расположений отрезка Δ в этой позиции. При этом если выигрыш $\tau(A, B)$ стратегии A из $\mathfrak{A}$ в игре $I\langle B\rangle$ равен n, то из определения τ и d_i имеем $d_n(A, B) = 1$.

Второй, третий и четвертый шаги метода (II′, III′, IV′) для задачи последнего этапа (III) вырождены, поэтому переходим к пятому шагу.

V′. Введем необходимые понятия. Обозначим через Δ_0, Δ_i множества точек из Ω, которые могут принадлежать отрезку Δ в центральной позиции и в позиции, возникающей после i-го хода в игре $I' = \langle \mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{M}; \tau, d_i\rangle$ на втором этапе соответственно. Очевидно, что множество Δ_0 (Δ_0-окрестность) представляет собой «крест», состоящий из сходящихся в центре нижней и верхней вертикальных частей и левой и правой горизонтальных частей. В зависимости от расположения возможных центров относительно границ (сторон) квадрата Ω Δ_0-окрестности могут быть полными или усеченными. «Крест» полных Δ_0-окрестностей составляют отрезки длины δ. «Крест» неполных Δ_0-окрестностей усечен либо по одной горизонтальной или одной вертикальной части, либо по горизонтальной и вертикальной частям одновременно. При этом заметим, что Δ_0-окрестность имеет обязательно по одной горизонтальной или одной вертикальной части, длины которых не меньше δ. Теперь установим соответствие между мощностью $|\Delta_0|$ Δ_0-окрестности, равной числу входящих в нее точек, и числом d возможных расположений отрезка Δ («крейсера») в этой окрестности. Нетрудно видеть, что для полных Δ_0-окрестностей $d = 2\delta$, а для неполных — d равно сумме длин усеченных частей «креста». Так, для Δ_0-окрестности на рис. 1 $\delta = 9$, $d = 18$, а на рис. 2 $\delta = 9$, $d = 14$. Из определения Δ_0-окрестности ясно, что она является областью неопределенности и ее мощность уменьшается по мере получения информации первым игроком.

Стратегию S_n будем определять, руководствуясь следующим принципом. Информация, выдаваемая в каждом ответном ходе S_n, должна быть такой, чтобы сокращение области неопределенности после этого хода (при переходе от одной позиции к другой) было бы минимальным. Стратегию S_n определим индуктивно.

Пусть a_i — i-й ход первого игрока на последнем этапе, $s_n(a_i)$ — ответный i-й ход S_n, $i = 1, 2, \ldots$. Обозначим через $d(a_i, 0)$, $d(a_i, 1)$ число возможных расположений «крейсера» в Δ_i-окрестности, полученной после i-го хода в игре (i-й ход первого игрока и ответный i-й ход второго) при ответном ходе, равном 0 или 1, соответственно. Тогда стратегия S_n

такова, что

$$s_n(a_i)=0, \quad \text{если} \quad d(a_i,\ 0)>d(a_i,\ 1),$$
$$s_n(a_i)=1, \quad \text{если} \quad d(a_i,\ 1)>d(a_i,\ 0).$$

VI. Нетрудно видеть, что при любом ходе первого игрока a_i, сделанном в Δ_{i-1}-окрестность имеет место равенство $d(a_i,\ 0)+d(a_i,\ 1)=d_{i-1}$, где d_{i-1} — число возможных расположений «крейсера» в Δ_{i-1}. Отсюда и из определения S_n очевидно, что оптимальной против S_n будет такая

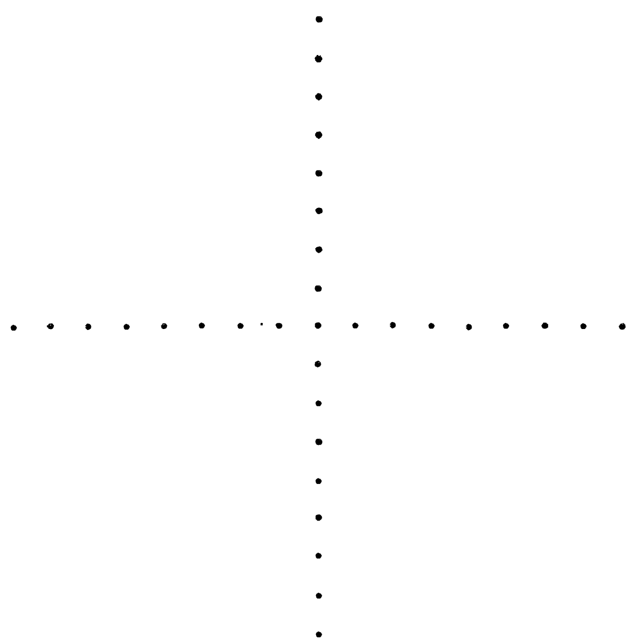

Рис. 1

стратегия первого игрока, при которой после каждого ее i-го хода разность $|d(a_i,\ 0)-d(a_i,\ 1)|$ была бы минимальной. Выигрыш оптимальной в игре $\langle\mathfrak{A}',\ S_n,\ \tau,\ d_i\rangle$ стратегии равен, таким образом, $]\log_2 d_0[$, где $]a[$ — наименьшее целое, большее или равное a, d_0 — число возможных расположений «крейсера» в Δ_0 [1].

VI. Перейдем теперь непосредственно к построению оптимальной стратегии O_n первого игрока в игре $\langle\mathfrak{A}',\ S_n,\ \tau\rangle$. Построим сначала оптимальную стратегию первого игрока для некоторой центральной позиции в следующей наиболее общей ситуации (рис. 3). Здесь $|A,\ 0|=|0,\ B|=\delta$, $|0,\ C|=p$, $|0,\ D|=l$, $l<p$. Очевидно, что первый ход a стратегии O_n не может быть выбран из отрезка $[A,\ 0]$, так как в этом случае после ответного нуля стратегии S_n получим, что $d(a,\ 0)>p$. Пусть a выбирается на отрезке $[0,\ B]$, причем так, чтобы $|a,\ B|<p$ и чтобы выполнялся принцип построения оптимальной стратегии первого игрока. Нетрудно подсчитать, что $|a, B|=\left[\frac{p+l}{2}\right]<p$.

Рассмотрим конкретный пример (см. рис. 3), когда $|A,\ 0|=|0,\ B|=$ $=9$, $|0,\ C|=6$, $|0,\ D|=3$, т. е. здесь Δ_0-окрестность усечена по нижней вертикали и правой горизонтали «креста». Очевидно, что первый ход оптимальной для этой позиции стратегии первого игрока должен быть сделан в вертикаль «креста», так как число содержащихся в ней возможных расположений отрезка Δ, равне 6,— больше чем число этих расположений по горизонтали равное 3. Общее число возможных расположений Δ равно 9. Выбираем a так, чтобы $|a, B| = 4$. Тогда имеем $d(a, 1) = 4$, $d(a, 0) = 5$.

Аналогичными подсчетами определяются последующие ходы оптимальной в приведенном примере стратегии первого игрока, а также ходы оптимальных для всех других центральных позиций в игре $\langle \mathfrak{A}, S_n, \tau\rangle$ стратегий первого игрока и их выигрыши (см. теорему 5).

VII′. Лемма 13. *Стратегия* A_0 *оптимальна в игре* $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \tau, d_i\rangle$ *на последнем этапе.*

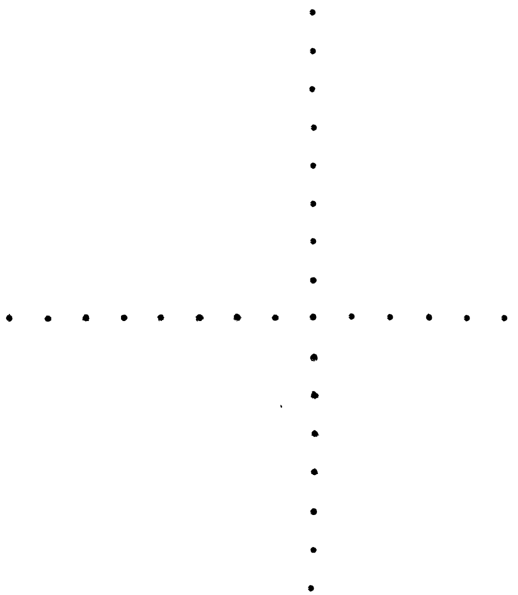

Рис. 2

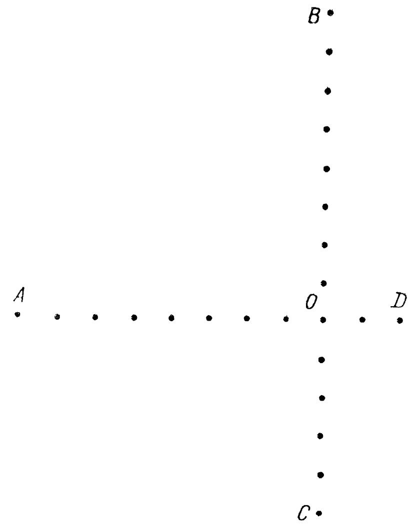

Рис. 3

Действительно, нетрудно видеть, что для любой центральной позиции и оптимальной для нее стратегии A_0 из $\mathfrak{A}$ имеет место равенство $\tau(A_0, \mathfrak{B}) = \tau(A_0, S_n)$ и, значит, эта стратегия является оптимальной стратегией первого игрока на последнем этапе в игре $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \tau, d_i\rangle$. #

IV. Уточнение задачи начального этапа и ее решение. Уточненная задача начального этапа формулируется следующим образом. Построить такую стратегию первого игрока, которая реализует попадание в наиболее перспективную центральную позицию. При этом будем говорить, что центральная позиция G_1 перспективнее центральной позиции G_2, если выигрыш (число ходов) оптимальной для позиции G_1 стратегии первого игрока меньше, чем выигрыш оптимальной для G_2 стратегии первого же игрока.

Для решения сформулированной задачи воспользуемся также методом СП, помечая номера шагов метода двумя штрихами.

I″. Игровое представление задачи имеет вид $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}', \tau', \leqslant\rangle$, где $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}$ — те же, что в игровом представлении исходной (основной) задачи, а $\tau'(A, B)$ равно числу ходов, за которые стратегия A реализует попадание в центральную позицию при условии, что второй игрок применяет стратегию B.

Шаги II″—IV″ метода для задачи начального этапа вырождены.

V″. Предполагаемая синкретическая стратегия $\tilde{S}_н$ на начальном этапе определяется следующим образом. Во всех точках (ходах), выбранных по любой стратегии A из $\mathfrak{A}$, стратегия $\tilde{S}_н$ выдает нулевые значения до тех пор, пока в Ω имеется хотя бы один отрезок длины δ, точки которого еще не выбирались по стратегии A.

VI″. Для определения оптимальной в игре $\langle\mathfrak{A}, \tilde{S}_н, \tau'\rangle$ стратегии первого игрока необходимо упорядочить центральные позиции по перспективности, что нетрудно сделать, используя результаты третьего шага основной задачи. Очевидно, что наименее перспективными будут позиции, имеющие полные Δ_0-окрестности, содержащие по 2δ возможных расположений отрезка Δ, затем те позиции, Δ_0-окрестности которых содержат $2\delta - 1$ расположений и т. д. Наиболее перспективными будут, таким образом, центральные позиции с центрами в углах квадрата Ω.

Определим теперь некоторое множество $\mathfrak{C}$ стратегий первого игрока такое, что любая стратегия C из $\mathfrak{C}$ будет оптимальной в игре $\langle\mathfrak{A}, \tilde{S}_н, \tau'\rangle$. Для определения множества $\mathfrak{C}$ разобьем квадрат Ω, длина стороны которого равна $k\delta$, на прямую сумму целочисленных квадратов, каждый из которых имеет сторону длины δ. Затем в каждом полученном квадрате выделим все точки решетки Ω, лежащие на диагонали этого квадрата, соединяющей левую нижнюю вершину с правой верхней. Обозначим все множество таких точек в Ω через V. Легко подсчитать, что $|V| = k^2\delta$. Множеством $\mathfrak{C}$ будет множество таких стратегий из $\mathfrak{A}$, каждая из которых на первом этапе (до получения точки из Δ) выбирает на каждом ходе точку из V в соответствии с заданным для этой стратегии порядком.

Лемма 14. *Любая стратегия C из $\mathfrak{C}$ является оптимальной стратегией первого игрока в игре* $\langle\mathfrak{A}, \tilde{S}_н, \tau'\rangle$.

Доказательство. Покажем вначале, что любая C из $\mathfrak{C}$ решает задачу, т. е. реализует попадание в центральную позицию (конечную в игре $\langle\mathfrak{A}, \tilde{S}_н, \tau'\rangle$). Действительно, из определения множества V видно, что в Ω не найдется ни одного отрезка длины δ, у которого хотя бы одна из точек не совпадала бы с точкой из V и, значит, стратегия C из $\mathfrak{C}$ реализует попадание в центральную позицию. При этом из определения стратегии $\tilde{S}_н$ следует, что число ходов, затраченное стратегией C для решения задачи начального этапа, равно $|V| - 1 = k^2\delta - 1$.

Далее нетрудно подсчитать, что максимальное число непересекающихся отрезков длины δ во всем квадрате Ω равно $(k\delta)^2/\delta = k^2\delta$, например число всех горизонтальных (вертикальных) непересекающихся отрезков длины δ в Ω. Следовательно, число «выстрелов» (ходов первого игрока), необходимых для нахождения точки из отрезка Δ, когда второй игрок применяет стратегию $\tilde{S}_н$, должно быть не меньше, чем $k^2\delta - 1$. Таким образом, все стратегии C из $\mathfrak{C}$ оптимальны в игре $\langle\mathfrak{A}, \tilde{S}_н, \tau'\rangle$. #

VII′. Выделим из множества $\mathfrak{C}$ некоторое подмножество $\mathfrak{C}_0$ стратегий, определив любую стратегию C_0 из $\mathfrak{C}_0$ следующим образом.

Сначала стратегия C_0 из $\mathfrak{C}_0$ выбирает точки из V, имеющие полные Δ_0-окрестности в произвольном, выбранном для нее порядке. Затем C_0 также в произвольном порядке выбирает точки, Δ-окрестности которых содержат $(2\delta - 1)$ возможных расположений отрезка Δ и т. д., до тех пор пока стратегия C_0 не реализует попадание в центральную позицию и тем самым не закончится начальный этап.

Лемма 15. *Любая C_0 из $\mathfrak{C}_0$ является оптимальной стратегией первого игрока на начальном этапе.*

Легко видеть, что выигрыш любой стратегии C_0 из $\mathfrak{C}_0$ против стратегии $\tilde{S}_н$ равен ее гарантированному на начальном этапе выигрышу, а так как C_0 оптимальна против $\tilde{S}_н$ по определению множества $\mathfrak{C}_0$, то она является оптимальной стратегией первого игрока на начальном этапе. #

V. Стратегия $\tilde{S}$ в игре $\langle\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \tau, d_i\rangle$ определяется как композиция $\tilde{S} = S_п * \tilde{S}_н$, где $\tilde{S}_н$ — стратегия синкретического противника на начальном этапе, $S_п$ — на последнем. Стратегия $\tilde{S}_н$ определяется на четвертом шаге метода, $S_п$ — на третьем шаге.

VI. Лемма 16. *Стратегия $O = O_п * O_н$, где $O_н$ — оптимальная стратегия первого игрока на начальном этапе, определяемая на шаге* IV *ме-*

тода, $O_п$ — оптимальная стратегия первого игрока на последнем этапе, определяемая на шаге III, *будет оптимальной стратегией первого игрока в игре* $\langle \mathfrak{A}, \tilde{S}, \tau, d_i \rangle$.

Справедливость леммы следует из определения O и оптимальности $O_н$ и $O_п$.

VII. Теорема 7. *Стратегия O является позиционно-оптимальной стратегией первого игрока в игре* $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \tau, d_i \rangle$.

Для доказательства позиционной оптимальности стратегии O необходимо показать, что ее выигрыш в игре $\langle \mathfrak{A}, \tilde{S}, \tau, d_i \rangle$ равен ее гарантированному выигрышу в игре $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \tau, d_i \rangle$. Перейдем к доказательству этого факта.

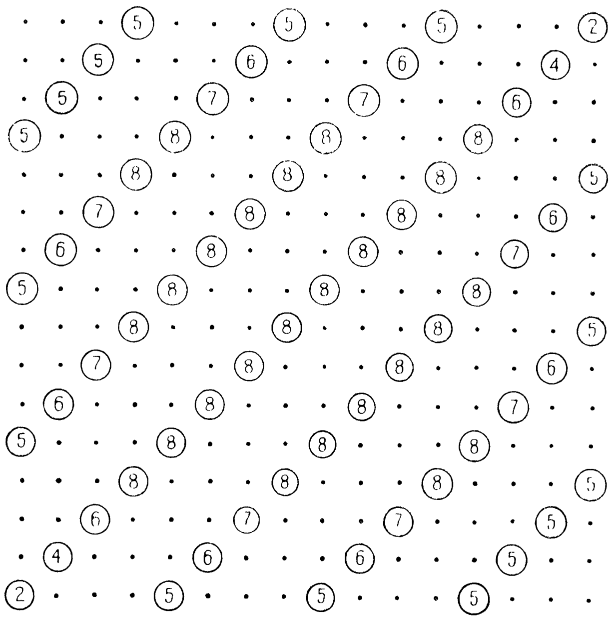

Рис. 4

Оценим каждую точку v множества V числом d возможных расположений отрезка Δ при условии, что точка v является центром в игре $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \tau \rangle$ (см. шаг V′ последнего этапа и пример на рис. 4). Далее разобьем все множество V на множество $\{K_d\}$ таких классов, каждый из которых содержит точки с одной и той же оценкой d. Упорядочим эти классы в порядке возрастания d. В результате получим ряд вида

$$K_2,\ K_4,\ \ldots,\ K_{\delta-1},\ K_{\delta+1},\ \ldots,\ K_{2\delta} \qquad \text{при нечетном } \delta,$$

$$K_2,\ K_4,\ \ldots,\ K_{\delta-2},\ K_{\delta},\ K_{\delta+1},\ \ldots,\ K_{2\delta} \quad \text{при четном } \delta.$$

Дальнейшие рассуждения для простоты изложения проделаем только для нечетного δ. При четном δ эти рассуждения аналогичны.

Для каждого класса K_d определим его мощность $|K_d|$. Имеем: $|K_d| = 2$, при любом $2 \leqslant d \leqslant \delta - 1$, т. е. в K_d, $2 \leqslant d \leqslant \delta - 1$, входит по одной точке из нижнего левого и правого верхнего квадрата. Для $d = (\delta + 1)$ имеем $|K_{\delta+1}| = 2\delta + 4(k-2) + 2$ — т. е. все точки из V, находящиеся в левом верхнем и правом нижнем квадратах, по точке из квадратов, имеющих с Ω по одной общей стороне, и по точке из левого нижнего и правого верхнего квадратов. Далее, при любом p, $2 \leqslant p \leqslant \delta - 1$, имеем

$$|K_{\delta+p}| = \begin{cases} 4(k-2) & \text{при } p\text{-четном}, \\ 4(k-2)+2 & \text{при } p\text{-нечетном}, \end{cases}$$

И, наконец, имеем $|K_{2\delta}|=2+4(k-2)+\delta(k-2)^2$. Число членов ряда $|K_2|, |K_4|, \ldots, |K_{\delta-1}|, |K_{\delta+1}|, \ldots, |K_{2\delta}|$ равно $(\delta-1)/2+\delta$. Переобозначим мощности $|K_2|, |K_4|, \ldots, |K_{\delta-1}|, |K_{\delta+1}|, \ldots, |K_{2\delta}|$ через $D_1, D_2, \ldots, D_{(\delta-1)/2}, D_{(\delta-1)/2+1}, \ldots, D_{(\delta-1)/2+\delta}$ соответственно.

Пусть теперь B_d из $\mathfrak{B}$ такова, что центр поиска в игре $\langle\mathfrak{A}, B_d, \tau\rangle$ совпадает с некоторой точкой v из класса K_d $|K_d|=D_l$, $2\leqslant l\leqslant(\delta-1)/2+\delta$. Тогда выигрыш стратегии O в игре $\langle\mathfrak{A}, B_d, \tau\rangle$ равен $\tau(O, B_d)=T+]\log_2 d[$, где T — число ходов, сделанных стратегией O на начальном этапе. Выигрыш же стратегии O в игре $\langle O, \tilde{S}, \tau\rangle$ можно оценить через T следующим образом:

$$\tau(O,\tilde{S})\geqslant T+\sum_{j=1}^{l-1}D_j,\ \text{где}\ l=\begin{cases} d/2 & \text{при } 2\leqslant d\leqslant\delta-1,\\ (\delta-1)/2+i & \text{при } d=\delta+i,\ 1\leqslant i\leqslant\delta.\end{cases}$$

Знак равенства имеет место, когда рассматриваемый центр совпадает с последней выбираемой по стратегии O точкой из $\{K_d\}$. Следовательно, для проверки теоремы-метода достаточно показать, что для любой B_d из $\mathfrak{B}$ имеет место неравенство вида

$$\sum_{j=1}^{l-1}D_j\geqslant]\log_2 d[,\quad l=\begin{cases} d/2,\ d\in\{4,6,\ldots,\delta-1\},\\ (\delta-1)/2+i,\ d=\delta+i,\ 1\leqslant i\leqslant\delta.\end{cases}\tag{1}$$

При $d=2$, $l=1$ равенство $\tau(O,\tilde{S})=\tau(O,B_2)$ очевидно. Рассмотрим случай, когда $d\in\{4, 6, \ldots, \delta-1\}$. Здесь имеем

$$\sum_{j=1}^{l-1}D_j=2(l-1)=d-2.$$

Таким образом, требуется доказать, что $(d-2)\geqslant]\log_2 d[$ при $d\geqslant 4$. После преобразований получаем эквивалентное неравенство вида

$$2^d\geqslant 4d,\quad d\geqslant 4.$$

Последнее неравенство легко доказывается методом математической индукции.

1. При $d=4$ неравенство превращается в равенство.
2. Пусть при $d=k$ выполняется $2^k\geqslant 4k$, $k\geqslant 4$.

Докажем, что тогда выполняется неравенство вида

$$2^{k+1}\geqslant 4(k+1).$$

Имеем $2^k\cdot 2-4k-4=2^k\cdot 2-8k+4k-4=2(2^k-4k)+4(k-1)\geqslant 0$, так как $2^k-4k\geqslant 0$ по предположению индукции, и $4(k-1)\geqslant 0$, так как $k\geqslant 4$.

Покажем теперь справедливость неравенства (1) и для $d>\delta-1$. Для $d=\delta+1$ имеем

$$\sum_{j=1}^{l-1}D_j=2(l-1)=2[(\delta-1)/2+1-1]=\delta-1.$$

Нетрудно видеть, что при нечетном δ функция $f(\delta)=\delta-1$, начиная с $\delta=5$ растет быстрее, чем функция $\varphi(\delta)=\log_2(\delta+1)$, а при $\delta=3$ получаем $\delta-1=\log_2(\delta+1)$.

Легко подсчитать, что для любого $d=\delta+i$, $1\leqslant i\leqslant\delta$, и $k\geqslant 3$ сумма $\sum_{j=1}^{l-1}D_j$ больше, чем $(\delta+i)$, и, значит, имеем $\sum_{j=1}^{l-1}D_j\geqslant]\log_2(\delta+i)[$.

Например, для $d=\delta+2$ имеем $\sum_{j=1}^{l-1}D_j=(\delta-1)+|k_{\delta+2}|=(\delta-1)+4(k-2)\geqslant\delta+3\geqslant]\log_2(\delta+2)[$. #

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альсведе Р., Вагнер И. Задачи поиска.— М.: Мир, 1982.
2. Бахвалов Н. С. Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы.— М.: Наука, 1964.
3. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач.— М.: Наука, 1980.
4. Воробьев Н. Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры.— М.: Наука, 1984.
5. Гермейер Ю. Б. Введение в теорию исследования операций.— М.: Наука, 1971.
6. Кокорин А. И. Связь вопросов разрешимости и оценки метода СПФ построения оптимальных стратегий // Тр. VIII Всесоюзной конф. «Проблемы теоретической кибернетики».— Иркутск, 1985.
7. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре.— М.: Физматгиз, 1962.
8. Мак Кинси Дж. Введение в теорию игр.— М.: Физматгиз, 1960.
9. Мальцев А. И. Алгебраические системы.— М.: Наука, 1970.
10. Сухарев А. Г. Оптимальный поиск экстремума.— М.: Изд-во МГУ, 1975.
11. Сухарев А. Г., Федоров В. В. Минимаксные задачи и минимаксные алгоритмы.— М.: Изд-во МГУ, 1979.
12. Тарасова В. П. Оптимальные алгоритмы поиска отрезка наибольших значений для некоторого класса функций // ЖВМ и МФ, 1981, Т. 21, № 5.— С. 1108—1115.
13. Тарасова В. Н. Оптимальный поиск экстремума для класса локально-унимодальных функций // Кибернетика.— 1984.— № 1.
14. Тарасова В. П. Метод СМП построения оптимальных стратегий. ДАН СССР.— 1985.— Т. 283, № 3.— С. 569—572.
15. Уайльд Д. Методы поиска экстремума.— М.: Наука, 1967.
16. Цермело Э. О применении теории множеств к теории шахматной игры // Матричные игры.— М.: Физматгиз, 1961.

Поступило в редакцию 15 X 1990

СЛОЖНОСТЬ ПРИБЛИЖЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ СХЕМАМИ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А. А. СЕМЕНОВ

(ЯКУТСК)

Введение

Задача приближенной реализации булевых функций в общем виде ставится следующим образом. Пусть для каждой булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из множества P_2^n всех булевых функций от n переменных определена ее τ-окрестность, состоящая из некоторого подмножества множества P_2^n, содержащего саму функцию f. В этом случае будем говорить, что задана система окрестности τ. Схема S из функциональных элементов τ-приближенно реализует функцию f, если она реализует какую-либо функцию из τ-окрестности функции f. Требуется построить оптимальную по сложности схему, τ-приближенно реализующую заданную функцию f. Задача построения оптимальной схемы имеет тривиальное решение, заключающееся в переборе всех схем определенной сложности. Но он малоэффективен, так как требует для своего выполнения очень большого числа шагов.

В данной работе рассматривается асимптотический подход к задаче синтеза оптимальных схем из функциональных элементов для приближенной реализации булевых функций в случае хэмминговых систем окрестностей. Асимптотики функции Шеннона в случаях сильной, средней и слабой определенностей функций, другими словами, в случаях малой, средней и большой мощности окрестностей функций, соответственно, устанавливаются в отдельных параграфах. Среди работ, касающихся оптимальной приближенной реализации булевых функций, отметим [1, 8—10]. Основные результаты данной работы были изложены в [5, 6].

§ 1. Определения и вспомогательные результаты

Пусть B^n — множество двоичных наборов длины n. Через I_m будем обозначать множество $\{1, \ldots, m\}$. *Проекцией набора* $\tilde{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ *из* B^m *на подмножество номеров* разрядов $I = \{i_1, \ldots, i_t\}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_t \leqslant m$ является набор $\mathrm{Pr}_I \tilde{a} = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_t})$ длины t. *Проекцию множества наборов* $M \subseteq B^m$ *на подмножество* $I \subseteq I_m$ определим как $\mathrm{Pr}_I M = \{\mathrm{Pr}_I \tilde{a} \mid \tilde{a} \in M\}$.

Расстояние $\rho(\tilde{a}, \tilde{b})$ между наборами $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ из B^m равно числу разрядов, в которых наборы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ отличаются. *Расстояние* $\rho_I(\tilde{a}, \tilde{b})$ *на подмножестве* $I \subseteq I_m$ определим как $\rho_I(\tilde{a}, \tilde{b}) = \rho(\mathrm{Pr}_I \tilde{a}, \mathrm{Pr}_I \tilde{b})$.

Пусть $J^1, \ldots, J^s$ — попарно непересекающиеся подмножества множества I_m. Обозначим $I = J^1 \cup \ldots \cup J^s$. Пусть $V_i \subseteq B^{|J^i|}$, $i = 1, \ldots, s$. *Обобщенным прямым произведением пар* $(V_1, J^1), \ldots, (V_s, J^s)$ назовем множество

$$(V_1, J^1)\times\ldots\times(V_s, J^s) = \{\mathrm{Pr}_I\tilde{a} \mid \tilde{a}\in B^m, \mathrm{Pr}_{J^i}\tilde{a}\in V_i,\ i=1,\ldots,s\}.$$

Пусть множество I_m разбито на конечное число подмножеств, $I_m = I^1\cup\ldots\cup I^k$, и каждому подмножеству I^i сопоставлено число p_i, $0\leqslant p_i\leqslant 1$, $i=1,\ldots,k$. Для множества пар $\tau = \langle (I^1, p_1), \ldots, (I^k, p_k)\rangle$ *окрестностью набора* $\tilde{a}\in B^m$ объявим множество наборов $V_\tau(\tilde{a}) = \{\tilde{b} \mid \tilde{b}\in B^m, \rho_{I^i}(\tilde{a},\tilde{b})\leqslant p_i|I^i|,\ i=1,\ldots,k\}$.

Такие системы окрестностей будем называть *хэмминговыми*. Мощности окрестностей $V_\tau(\tilde{a})$ будем обозначать $v(\tau)$. Для хэмминговой системы окрестностей τ и для произвольного подмножества $I\subseteq I_m$ введем индуцированную хэммингову систему окрестностей τ_I, определенную на множестве $B^{|I|}$. Пусть $\tau' = \langle (I\cap I^1, p_1), \ldots, (I\cap I^k, p_k), (I_m\setminus I, 0)\rangle$. *Окрестностью* $V_{\tau_I}(\tilde{\beta})$ *набора* $\tilde{\beta}\in B^{|I|}$ объявим множество $V_{\tau_I}(\tilde{\beta}) = \mathrm{Pr}_I V_{\tau'}(\tilde{b})$, где $\tilde{b}$ — произвольный набор из B^m, удовлетворяющий условию $\mathrm{Pr}_I\tilde{b} = \tilde{\beta}$.

Заметим, что хэммингова система окрестностей $\tau = \langle (I^1, p_1), \ldots, (I^k, p_k)\rangle$, заданная на B^m, обладает следующими свойствами.

1°. *Симметричность.* Из условия $\tilde{\alpha}\in V_{\tau_I}(\tilde{\beta})$ следует $\tilde{\beta}\in V_{\tau_I}(\tilde{\alpha})$ для любого $I\subseteq I_m$.

2°. Для каждого τ_I, $I\subseteq I_m$, справедливо $|V_{\tau_I}(\tilde{\alpha})| = |V_{\tau_I}(\tilde{\beta})| = v(\tau_I)$ для всех $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\in B^{|I|}$.

3°. Число всех различных индуцированных хэмминговых систем окрестностей τ_I, где $I\subseteq I_m$, $|I| = l$, не превосходит k^l.

4°. Во множестве всех индуцированных хэмминговых систем окрестностей τ_I, $I\subseteq I_m$, $|I| = l$, найдется не более чем l^k индуцированных τ_I с попарно различными мощностями окрестностей.

5°. Для любого разбиения $I_m = J^1\cup\ldots\cup J^s$ и набора $\tilde{a}\in B^m$

$$\left(V_{\tau_{J^1}}(\mathrm{Pr}_{J^1}\tilde{a}), J^1\right)\times\ldots\times\left(V_{\tau_{J^s}}(\mathrm{Pr}_{J^s}\tilde{a}), J^s\right)\subseteq V_\tau(\tilde{a}).$$

Пусть $T = \{\tau^1, \tau^2, \ldots\}$ — последовательность некоторых хэмминговых систем окрестностей τ^n, заданных на B^{2^n}, $n = 1, 2, \ldots$ Для булевой функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ из P_2^n через $\vec{f}$ будем обозначать набор $(f(0,\ldots,0,0), f(0,\ldots,0,1), \ldots, f(1,\ldots,1,1))$ значений функции f. Для заданного τ^n под τ^n-*окрестностью* булевой функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ будем понимать множество булевых функций $g(x_1,\ldots,x_n)$ таких, что $\vec{g}\in V_{\tau^n}(\vec{f})$.

Возьмем произвольный конечный полный базис $\{E_1,\ldots,E_k\}$ с приведенным весом ρ [4]. Для произвольной функции $g(x_1,\ldots,x_n)$ положим $L(g) = \min L(S)$, где минимум берется по всем схемам S, реализующим g. Для функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ и τ^n из последовательности T введем величину

$$L_{\tau^n}(f) = \min_{\vec{g}\in V_{\tau^n}(\vec{f})} L(g).$$

Функцию Шеннона $L_T(n)$ для заданной последовательности $T = \{\tau^1, \tau^2, \ldots\}$ определим следующим образом:

$$L_T(n) = \max_{f\in P_2^n} L_{\tau^n}(f).$$

Далее приведем одну лемму с полным ее доказательством и дадим формулировки известных утверждений, которые используются в данной работе. Здесь и далее под log и ln будут подразумеваться логарифмы по основаниям 2 и e соответственно.

Через $E^{k}_{\tilde{\alpha}}$, где $\tilde{\alpha} \in B^l$, обозначается множество наборов вида $(\tilde{\alpha}^{\sigma_1}, \ldots$ $\ldots, \tilde{\alpha}^{\sigma_k}) \in B^{kl}$, где $\sigma_i \in \{0, 1\}$, $\tilde{\alpha}^1 = \tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$, $\tilde{\alpha}^0 = \bar{\tilde{\alpha}} = (\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_l)$.

Лемма 1. *Пусть $m = lk$ и $I^1 \cup \ldots \cup I^q \subseteq I_m$, где $I^i \cap I^j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $|I^i| \geqslant \delta k$, $\delta > 0$, $i = 1, \ldots, q$. Тогда для любого $\varepsilon > \psi(q, \delta)$, где*

$$\psi(q, \delta) = \frac{\log \delta}{2\sqrt[4]{\delta}} + \frac{1}{\sqrt{\delta}} + q\sqrt{2c_1}\,2^{-\frac{\log^2\delta}{16\ln 2} - \frac{1}{2}\log\log\delta},$$

и любого $\tilde{a} \in B^m$ найдется набор $\tilde{\alpha} \in B^l$ такой, что для всех наборов $\tilde{\beta} \in E^{k}_{\tilde{\alpha}}$ и i, $1 \leqslant i \leqslant q$,

$$\rho_{I^i}(\tilde{a}, \tilde{\beta}) < \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)|I^i|.$$

Доказательство. Множество I_m разобьем на k подмножеств $I_m = J^1 \cup \ldots \cup J^k$, где $J^j = \{l(j-1)+1, l(j-1)+2, \ldots, lj\}$, $j = 1, \ldots, k$. Пусть $I^0 = I_m \setminus \{I^1 \cup \ldots \cup I^q\}$ и $I^{i,j} = I^i \cap J^j$, $i = 0, 1, \ldots, q$, $j = 1, \ldots, k$.

Для мощностей подмножеств $I^{i,j}$, I^i введем обозначения $|I^i| = l_i$, $|I^{i,j}| = l_{i,j}$, $i = 0, 1, \ldots, q$, $j = 1, \ldots, k$. Справедливы соотношения

$$\frac{1}{l_i}\sum_{j=1}^{k} l_{i,j} = 1, \quad i = 0, 1, \ldots, q, \tag{1}$$

$$\sum_{i=0}^{q} l_{i,j} = l, \quad j = 1, \ldots, k. \tag{2}$$

Для произвольного множества чисел J и числа μ через $\{J - \mu\}$ будем обозначать множества $\{j - \mu \mid j \in J\}$.

Пусть $\varphi(\delta) = \dfrac{\log \delta}{2\sqrt[4]{\delta}}$. Для наборов $\tilde{b} \in B^l$ определим k различных окрестностей $\Omega_j(\tilde{b})$, $j = 1, \ldots, k$,

$$\Omega_j(\tilde{b}) = \Big\{\tilde{c} \in B^l \,\Big|\, \text{для } i \text{ таких, что } l_{i,j} \geqslant \sqrt{\delta},\ 1 \leqslant i \leqslant q, \text{ выполнено } \left(\frac{1}{2} - \varphi(\delta)\right) l_{i,j} \leqslant \rho_{\{I^{ij} - (j-1)l\}}(\tilde{b}, \tilde{c}) \leqslant \left(\frac{1}{2} + \varphi(\delta)\right) l_{i,j}\Big\}. \tag{3}$$

Из определения (3) следует $\Omega_j(\tilde{b}) = \Omega_j(\bar{\tilde{b}})$ и

$$|\Omega_j(\tilde{b})| = 2^{l_{0,j} + \sum\limits_{i: i\neq 0, l_{i,j} < \sqrt{\delta}} l_{i,j}} \prod_{i: i \neq 0, l_{i,j} \geqslant \sqrt{\delta}} \left(\sum_{\left(\frac{1}{2} - \varphi(\delta)\right) l_{i,j} \leqslant \xi \leqslant \left(\frac{1}{2} + \varphi(\delta)\right) l_{i,j}} C^{\xi}_{l_{i,j}}\right).$$

Воспользуемся соотношением, выводимым из теоремы о больших уклонениях [2],

$$\sum_{\frac{n}{2} - \sqrt{n}\log n \leqslant i \leqslant \frac{n}{2} + \sqrt{n}\log n} C^i_n \geqslant 2^n\left(1 - c_1 2^{-\frac{\log^2 n}{2\ln 2} - \log\log n}\right). \tag{4}$$

Так как $\varphi(\delta) = \log\sqrt{\delta}/\sqrt[4]{\delta}$, то для $l_{i,j} \geqslant \sqrt{\delta}$ выполнено $\varphi(\delta) l_{i,j} \geqslant \geqslant \sqrt{l_{i,j}}\log l_{i,j}$ и в силу (2), (4)

$$|\Omega_j(\tilde{b})| \geqslant 2^l(1 - \sigma(\delta))^q \geqslant 2^l(1 - q\sigma(\delta)), \text{ где } \sigma(\delta) = c_1 2^{-\frac{\log^2\sqrt{\delta}}{2\ln 2} - \log\log\sqrt{\delta}}.$$

Обозначая $\Phi(q, \delta) = q\sqrt{\sigma(\delta)} = q\sqrt{2c_1}\cdot 2^{-\frac{\log^2\delta}{16\ln 2} - \frac{1}{2}\log\log\delta}$, имеем

$$|\Omega_j(\tilde{b})| \geqslant 2^l\left(1 - \frac{\Phi^2(q, \delta)}{q}\right), \quad j = 1, \ldots, k. \tag{5}$$

Введем параметры $\chi_i(\tilde{a}, \tilde{b})$, $\eta_i(\tilde{a}, \tilde{b})$, $i=1, \ldots, q$, определенные для всех пар наборов $\tilde{a} \in B^m$, $\tilde{b} \in B^l$ следующим образом:

$$\chi_i(\tilde{a}, \tilde{b}) = \frac{1}{l_i} \sum_{j=1}^{k} l_{i,j} \Delta_j(\tilde{b}, \Pr_{J^j}\tilde{a}), \tag{6}$$

$$\eta_i(\tilde{a}, \tilde{b}) = \frac{1}{l_i} \sum_{j=1}^{k} l_{i,j} (1 - \Delta_j(\tilde{b}, \Pr_{J^j}\tilde{a})), \tag{7}$$

где

$$\Delta_j(\tilde{b}, \Pr_{J^j}\tilde{a}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Pr_{J^j}\tilde{a} \in \Omega_j(\tilde{b}), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Из определения (3) окрестности $\Omega_j(\tilde{b})$ и (6) параметра χ_i следует, что для любого набора $\tilde{a} \in B^m$ и номера i справедливо

$$\sum_{\tilde{b} \in B^l} \chi_i(\tilde{a}, \tilde{b}) = \frac{1}{l_i} \sum_{j=1}^{k} l_{i,j} \left| \Omega_j(\Pr_{J^j}\tilde{a}) \right|. \tag{8}$$

Из (1), (5) и (8) имеем $\frac{1}{2^l} \sum_{\tilde{b} \in B^l} \chi_i(\tilde{a}, \tilde{b}) \geqslant 1 - \frac{\Phi^2(q, \delta)}{q}$.

Так как $\chi_i(\tilde{a}, \tilde{b}) + \eta_i(\tilde{a}, \tilde{b}) = 1$, $i=1, \ldots, q$, то

$$\frac{1}{2^l} \sum_{\tilde{b} \in B^l} \eta_i(\tilde{a}, \tilde{b}) \leqslant \frac{\Phi^2(q, \delta)}{q}. \tag{9}$$

Из соотношения (9) можно заключить, что для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant q$, и набора $\tilde{a} \in B^m$ найдется подмножество наборов $B_\delta(i, \tilde{a}) \subseteq B^l$ такое, что $|B_\delta(i, \tilde{a})| \geqslant 2^l \left(1 - \frac{\Phi(q, \delta)}{q}\right)$ и для всех $\tilde{b} \in B_\delta(i, \tilde{a})$ верно $\eta_i(\tilde{a}, \tilde{b}) \leqslant \Phi(q, \delta)$.

Действительно, предположив существование подмножества $B_\delta(i, \tilde{a})$ такого, что $|B_\delta(i, \tilde{a})| < 2^l \left(1 - \frac{\Phi(q, \delta)}{q}\right)$ и для всех наборов $\tilde{b}$ из $B^l \setminus B_\delta(i, \tilde{a})$ верно $\eta_i(\tilde{a}, \tilde{b}) > \Phi(q, \delta)$, получим

$$\frac{1}{2^l} \sum_{\tilde{b} \in B^l} \eta_i(\tilde{a}, \tilde{b}) = \frac{1}{2^l} \left(\sum_{\tilde{b} \in B_\delta} \eta_i + \sum_{\tilde{b} \in B^l \setminus B_\delta} \eta_i \right) >$$

$$> \frac{1}{2^l} \left(0 + 2^l \frac{\Phi(q, \delta)}{q} \Phi(q, \delta) \right) = \frac{\Phi^2(q, \delta)}{q},$$

что противоречит соотношению (9).

Возьмем $B_\delta(\tilde{a}) = B_\delta(1, \tilde{a}) \cap \ldots \cap B_\delta(q, \tilde{a})$. Ясно, что

$$|B_\delta(\tilde{a})| \geqslant 2^l - q \cdot \max_{1 \leqslant i \leqslant q} |B^l \setminus B_\delta(i, \tilde{a})| \geqslant 2^l (1 - \Phi(q, \delta))$$

и для каждого $\tilde{b} \in B_\delta(\tilde{a})$ верно

$$\eta_i(\tilde{a}, \tilde{b}) \leqslant \Phi(q, \delta), \quad i = 1, \ldots, q. \tag{10}$$

Пусть $\tilde{a} \in B^m$, $\tilde{\alpha} \in B_\delta(\tilde{a})$, $\tilde{\beta} \in E^k_{\tilde{\alpha}}$. Из определений окрестностей Ω_j, $j=1, \ldots, k$, параметров χ_i, η_i, $i=1, \ldots, q$, условия леммы $l_i \geqslant k\delta$, соотношения (10), следует

$$\rho_{I^i}(\tilde{a}, \tilde{\beta}) \leqslant \sqrt{\delta} k + l_i \eta_i(\tilde{a}, \tilde{\alpha}) + l_i \left(\frac{1}{2} + \varphi(\delta)\right) \chi_i(\tilde{a}, \tilde{\alpha}) \leqslant$$

$$\leqslant l_i \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} + \Phi(q, \delta) + \frac{1}{2} + \varphi(\delta) \right) \leqslant |I^i| \left(\frac{1}{2} + \psi(\delta) \right),$$

$i = 1, \ldots, q$. Лемма доказана.

Замечание. В случае, когда $l=2^r$, утверждение леммы 1 будет верно для некоторого набора $\tilde{\alpha}\in B^{2^r}$, являющегося набором значений линейной функции от r переменных, и для функции $\psi(q,\delta)=\frac{1}{\sqrt{\delta}}+$ $+\frac{1}{\sqrt[6]{\delta}}+\frac{q}{2\sqrt[12]{\delta}}$.

Дадим некоторые пояснения. Пусть $\mathscr{L}_r$ — множество линейных функций от r переменных. Параметры $\chi_i(\tilde{a},\vec{g})$, $\eta_i(\tilde{a},\vec{g})$, где $g\in\mathscr{L}_r$ определяются для окрестности $O_j(\tilde{b})=\{\vec{g}\mid g\in\mathscr{L}_r\}\cap\Omega_j(\tilde{b})$ при $\varphi(\delta)=\frac{1}{\sqrt[6]{\delta}}$. Тогда

$$\frac{1}{2^{r+1}}\sum_{g\in\mathscr{L}_r}\chi_i(\tilde{a},\vec{g})\geqslant 1-\frac{\Phi^2(q,\delta)}{q},\quad\text{где}\quad \Phi(q,\delta)=\frac{q}{2\sqrt[12]{\delta}},$$

и аналогичные, тем, что и в лемме 1, рассуждения приведут к доказательству данного замечания.

Лемма 2 [2, лемма 9]. *Пусть A — произвольное конечное множество и $D=\{K_1,\ldots,K_l\}$ — такая совокупность его подмножеств, что каждый элемент $\alpha\in A$ принадлежит не менее чем γl подмножествам из D. Тогда существует покрытие множества A подмножествами из D, содержащее не более $\frac{1}{\gamma}(\ln(\gamma|A|)+1)+1$ подмножеств.*

Лемма 3 [8, лемма 3]. *Пусть заданы N произвольных наборов $\tilde{\sigma}_1,\ldots,\tilde{\sigma}_N$ из B^n и число r. Тогда найдется такой $(r,n-r)$-оператор $F(x_1,\ldots,x_r)=(f_1(x_1,\ldots,x_r),\ldots,f_{n-r}(x_1,\ldots,x_r))$, что среди наборов $\varphi_F(\tilde{\sigma}_i)=\varphi_F(\sigma_{i,1},\ldots,\sigma_{i,n})=(\alpha_{i,1},\ldots,\alpha_{i,n-r})$, где $\alpha_{i,j}=\sigma_{i,r+j}\oplus f_j(\sigma_{i,1},\ldots,\sigma_{i,r})$, $j=1,\ldots,n-r$, $i=1,\ldots,N$, будет не менее $N-\frac{N^2}{2^{n-r}}$ различных.*

§ 2. Случай сильной определенности реализуемой функции

Пусть последовательность $T=\{\tau^1,\tau^2,\ldots\}$ хэмминговых систем окрестностей $\tau^n=\langle(J^{1,n},p_{1,n}),\ldots,(J^{k,n},p_{k,n})\rangle$, заданных на B^{2^n} и определяющих окрестности функций из P_2^n, удовлетворяют условию

$$\log(2^n-\log v(\tau^n))\sim n. \tag{11}$$

Будем считать, что условие (11) означает сильную определенность функций и малую мощность хэмминговых окрестностей. Предполагаем k фиксированным числом.

Теорема 1. *Если последовательность $T=\{\tau^1,\tau^2,\ldots\}$, $\tau^n=$ $=\langle(J^{1,n},p_{1,n}),\ldots,(J^{k,n},p_{k,n})\rangle$ удовлетворяет условию (11) и* $\max\limits_{i,n:p_{i,n}<1/2}p_{i,n}\leqslant\frac{1}{2}-\varepsilon$, $\varepsilon>0$, *тогда*

$$L_T(n)\sim\rho\frac{2^n-\log v(\tau^n)}{\log(2^n-\log v(\tau^n))}.$$

Доказательство. Нижняя оценка. Введем множество функций

$$G_{\tau^n}=\left\{g\in P_2^n\;\middle|\;\exists f\in P_2^n\colon L(g)=\min_{\vec{g}'\in V_{\tau^n}(\vec{f})}L(g'),\ \vec{g}\in V_{\tau^n}(\vec{f})\right\}.$$

Из определений функции Шеннона $L_T(n)$ множества G_{τ^n} и свойств 1°, 2° (§ 1) следует, что $L_T(n) = \max_{g \in G_{\tau^n}} L(g)$ и

$$|G_{\tau^n}| \geqslant \frac{2^{2^n}}{v(\tau^n)}. \tag{12}$$

Условие теоремы 1.1 [4] $\frac{(n+1)\log\log|G_{\tau^n}|}{\log|G_{\tau^n}|} \to 0$ выполняется в силу (11), (12), следовательно,

$$L_T(n) \geqslant \rho \frac{\log|G_{\tau^n}|}{\log\log|G_{\tau^n}|} \geqslant \rho \frac{2^n - \log v(\tau^n)}{\log(2^n - \log v(\tau^n))}.$$

Верхняя оценка. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная булева функция от n переменных, $\tau = \tau^n = \langle (J^1, p_1), \ldots, (J^k, p_k) \rangle$ — хэммингова система окрестностей из T. Параметр $\lambda = \lambda(n)$ удовлетворяет условию

$$\lambda(n) \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{13}$$

Функцию f представим в виде таблицы D размера $2^\lambda \times 2^{n-\lambda}$, где 2^λ строкам соответствуют наборы $(\sigma_{n-\lambda+1}, \ldots, \sigma_n)$, а столбцам — наборы $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-\lambda})$. На пересечении строки $(\sigma_{n-\lambda+1}, \ldots, \sigma_n)$ и столбца $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})$ стоит значение $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Обозначим столбцы этой таблицы в порядке расположения слева направо через $D_1, D_2, \ldots, D_{2^{n-\lambda}}$, $D_i \in B^{2^\lambda}$. Каждому столбцу D_i соответствует множество $I^i = \{2^\lambda(i-1)+1, 2^\lambda(i-1)+2, \ldots, 2^\lambda i\}$ такое, что $D_i = \mathrm{Pr}_{I^i}\vec{f}$, $i = 1, \ldots, 2^{n-\lambda}$.

Для $\tau = \tau^n$ из T введем функционал $\varphi_\tau(I) = |I| - \log v(\tau_I)$, определенный на множестве всех подмножеств $I \subseteq I_{2^n}$.

Введем параметр $M = M(n)$, удовлетворяющий условиям

$$M \sim n, \tag{14}$$

$$\lambda \sim o(M). \tag{15}$$

Разделим каждый столбец D_i таблицы на такие куски $D_{i,1}, \ldots, D_{i,m_i}$, что $D_i = (D_{i,1}, \ldots, D_{i,m_i})$, $D_{i,1} = \mathrm{Pr}_{I^{i,1}}\vec{f}, \ldots, D_{i,m_i} = \mathrm{Pr}_{I^{i,m_i}}\vec{f}$ и

$$M - 1 \leqslant \varphi_\tau(I^{i,j}) \leqslant M, \quad j = 1, \ldots, m_i - 1, \tag{16}$$

$$\varphi_\tau(I^{i,m_i}) < M - 1. \tag{17}$$

Множество кусков $D_{i,j}$ таблицы, за исключением кусков D_{i,m_i}, $i = 1, \ldots, 2^{n-\lambda}$, разобьем на группы, отнеся в одну группу куски, имеющие одинаковую длину и одинаковую мощность окрестности. Полученные группы обозначим $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r$. Аналогичным образом на группы разобьем куски D_{i,m_i}, $i = 1, \ldots, 2^{n-\lambda}$. Группы обозначим $\mathfrak{A}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{A}_\mu$. Так как длины кусков не превышают 2^λ, то из выполнения свойства 4° для τ следует, что число различных групп μ не превышает $2^\lambda(2^\lambda)^k$, т. е.

$$\mu \leqslant 2^{\lambda(k+1)}. \tag{18}$$

Пусть ν_i — длина кусков группы $\mathfrak{A}_i$, v_i — мощность окрестностей кусков из $\mathfrak{A}_i$, l_i — число кусков группы $\mathfrak{A}_i$, $i = 1, \ldots, \mu$.

Из свойства 5° для τ следует

$$\prod_{i=1}^{2^{n-\lambda}} \prod_{j=1}^{m_i} \left(V_{\tau_{I^{i,j}}}(D_{i,j}), I^{i,j}\right) \subseteq V_\tau(\vec{f}). \tag{19}$$

Т. е. при замене кусков $D_{i,j}$ на наборы из своих окрестностей получается таблица, соответствующая некоторой функции $g \in P_2^n$ такой, что $\vec{g} \in V_\tau(\vec{f})$. В каждой группе $\mathfrak{A}_i$ куски заменим на наборы из их окрестностей так, чтобы число попарно различных наборов было, по возможности, минимальным. Такую замену найдем с помощью алгоритма градиентного покрытия (лемма 2). Считаем, что набор $\tilde{a} \in B^{\nu_i}$ покрывает кусок $D_{\xi,\eta} \in \mathfrak{A}_i$, если $\tilde{a} \in V_{\tau_{I\xi,\eta}}(D_{\xi,\eta})$. Тогда $\gamma = v_i/2^{\nu_i}$. Два куска $D_{\xi,\eta}$ и $D_{s,t}$ назовем идентичными, если $D_{\xi,\eta} = D_{s,t}$ и $\tau_{I\xi,n} = \tau_{Is,t}$. Из свойства 3° (§ 1) следует, что число попарно неидентичных кусков группы $\mathfrak{A}_i$ не превосходит $2^{\nu_i}k^{\nu_i}$. Следовательно, градиентный алгоритм позволяет покрыть группу $\mathfrak{A}_i$ не более чем

$$\frac{2^{\nu_i}}{v_i}\left(\ln\left(\frac{v_i}{2^{\nu_i}}(2k)^{\nu_i}\right)+1\right)+1 \tag{20}$$

наборами из B^{ν_i}, $i = 1, \ldots, \mu$.

Согласно алгоритму все куски $D_{i,j}$ таблицы D заменим на наборы $G_{i,j}$ из их окрестностей. Получим новую таблицу G, соответствующую некоторой функции $g(x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{g} \in V_\tau(\vec{f})$.

Учитывая (16), (17) и (18), оценим число попарно различных кусков $G_{i,j}$ таблицы G

$$\sum_{i=1}^{\mu}\left(\frac{2^{\nu_i}}{v_i}\left(\ln\left(\frac{v_i}{2^{\nu_i}}(2k)^{\nu_i}\right)+1\right)+1\right) \leqslant 2^{M+\lambda(k+2)+c_2},$$

где $c_2 = 2 + \log\ln(ek)$.

Произвольным образом занумеруем все различные куски $G_{i,j}$ таблицы G двоичными наборами $\tilde{\varkappa}(G_{i,j})$ длины $\delta =]M + \lambda(k+2) + c_2[$. *Кодом столбца* G_i назовем набор

$$\tilde{\varkappa}(G_i) = (\tilde{\varkappa}(G_{i,1}), \ldots, \tilde{\varkappa}(G_{i,m_i})),$$

а *кодом функции* g длины h —

$$\tilde{\varkappa}(g) = (\tilde{\varkappa}(G_1), \ldots, \tilde{\varkappa}(G_{2^{n-\lambda}})).$$

Справедливы следующие соотношения:

$$h \leqslant \delta \sum_{i=1}^{\mu} l_i, \tag{21}$$

$$M - 1 \leqslant \nu_i - \log v_i \leqslant M, \quad i = 1, \ldots, r. \tag{22}$$

Из (19) следует

$$\prod_{i=1}^{\mu} v_i^{l_i} \leqslant v(\tau). \tag{23}$$

Для некоторого ε_1, $0 < \varepsilon_1 < 1$, верно

$$\sum_{i=1}^{\mu} l_i \log v_i = (1 - \varepsilon_1)\log v(\tau),$$

а также при соответствующем выборе параметров λ и M

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(n) = o\left(\frac{2^n - \log v(\tau^n)}{\log v(\tau^n)}\right). \tag{24}$$

В силу (22) и $\log v_i \leqslant \nu_i$, $i = r+1, \ldots, \mu$,

$$(1-\varepsilon_1)\log v(\tau) = \sum_{i=1}^{r} l_i \log v_i + \sum_{i=r+1}^{\mu} l_i \log v_i \leqslant \sum_{i=1}^{r} l_i(\nu_i - M + 1) + \sum_{i=r+1}^{\mu} l_i\nu_i = \sum_{i=1}^{\mu} l_i\nu_i - (M-1)\sum_{i=1}^{r} l_i = 2^n - (M-1)\sum_{i=1}^{r} l_i,$$

откуда, учитывая (24), имеем

$$\sum_{i=1}^{r} l_i \leqslant \frac{2^n - (1-\varepsilon_1)\log v(\tau)}{M-1} \lesssim \frac{2^n - \log v(\tau)}{M}. \qquad (25)$$

Следовательно, для длины h, учитывая (15), (21), (25), получаем

$$h \leqslant \left(\sum_{i=1}^{r} l_i + 2^{n-\lambda}\right)\cdot]M + \lambda(k+2) + c_2[\lesssim 2^n - \log v(\tau) + M\cdot 2^{n-\lambda}. \qquad (26)$$

Обозначим через Q максимум длин наборов $\tilde{\varkappa}(G_i)$, $i = 1, \ldots, 2^{n-\lambda}$. В каждом столбце G_i содержится не более чем $W = \left]\dfrac{2^\lambda}{\min(\nu_1, \ldots, \nu_r)}\right[+ 1$ кусков, поэтому $Q \leqslant W\delta$. Из определения групп $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r$ следует $M - 1 \leqslant \nu_i - \log v_i \leqslant M$, $i = 1, \ldots, r$, а $M \sim n$. Тогда

$$Q \lesssim \frac{2^\lambda}{n}\delta. \qquad (27)$$

Опишем схему для реализации функции $g(x_1, \ldots, x_n)$ (рис. 1). Схема строится в соответствии с принципом неравномерного кодирования [4]. Пусть $\tilde{\sigma}' = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-\lambda})$, $\tilde{\sigma}'' = (\sigma_{n-\lambda+1}, \ldots, \sigma_n)$.

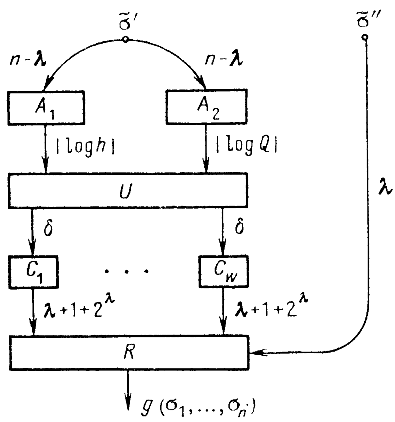

Рис. 1

A_1: $(n-\lambda,\ ]\log h[)$-оператор, по набору $\tilde{\sigma}'$ вычисляющий номер начального разряда куска кода $\tilde{\varkappa}(G_i)$ в коде $\tilde{\varkappa}(g)$ функции g. По теореме Д.4 из [4]

$$L(A_1) \lesssim \frac{2^{n-\lambda}}{n-\lambda}\log h.$$

A_2: $(n-\lambda,\ ]\log Q[)$-оператор по набору $\tilde{\sigma}'$ вычисляющий длину набора $\tilde{\varkappa}(G_i)$

$$L(A_2) \lesssim \frac{2^{n-\lambda}}{n-\lambda}\log Q.$$

U: $(]\log h[+]\log Q[,\ W\delta)$-оператор. По номеру начального разряда и длине кода $\tilde{\varkappa}(G_i)$ выдает набор $\left(\tilde{\varkappa}(G_{i,1}), \ldots, \tilde{\varkappa}(G_{i,m_i}), 0, \ldots, 0\right)$.

C_j: $(\delta,\ \lambda + 1 + 2^\lambda)$-оператор. По набору $\tilde{\varkappa}(G_{i,j})$ выдает в крайних слева выходах набор длины $\lambda+1$, являющийся двоичной записью длины набора $G_{i,j}$, а по следующим выходам выдает набор $(G_{i,j}, 0, \ldots, 0) \in B^{2^\lambda}$,

$$L(C_j) \lesssim (\lambda + 1 + 2^\lambda)\frac{2^\delta}{\delta}, \quad j = 1, \ldots, m_i.$$

Блоки C_j, $j = m_i + 1, \ldots, W$, выдают $(0, \ldots, 0) \in B^{\lambda+1+2^\lambda}$.

R: $((\lambda+1+2^{\lambda})W+\lambda,\ 1)$-оператор. По набору $\tilde{\sigma}''$ и выходам блоков $C_1, \ldots, C_W$ выдает $(\|\sigma''\|+1)$-й разряд набора $(G_{i,1}, \ldots, G_{i,m_i}) = G_i$, т. е. выдает $g(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Схема R строится с использованием леммы 2.2 из [4];

$$L(R) \leqslant 2^{\lambda} W.$$

Выберем параметры $\lambda = \lambda(n)$ и $M = M(n)$ следующим образом. Пусть $\psi(n) = \dfrac{2^n}{2^n - \log v(\tau^n)}$, тогда

$$\lambda = \,]\,2\log(\psi(n)n)\,[\,, \quad M = n -]\,\lambda(k+4) + c_2\,[\,.$$

По условию теоремы $\log(2^n - \log v(\tau^n)) \sim n$, поэтому $\log\psi(n) = \bar{o}(n)$ и параметры λ и M удовлетворяют условиям (14), (15).

Из оценки (12) следует нижняя оценка для длины кода

$$h \geqslant \log \frac{2^{2^n}}{v(\tau^n)} = 2^n - \log v(\tau^n). \tag{28}$$

Условия теоремы 2.3 из [4] будут выполнены, если

1) $h \sim 2^n - \log v(\tau^n)$,

2) $\dfrac{Q\log^2 h}{h} \to 0$,

3) $L(A_1) + L(A_2) + L(R) + \sum\limits_{j=1}^{W} L(C_j) = o\left(\dfrac{h}{\log h}\right)$.

Из (26), (27), (28) и выше определенных параметров λ и M следует, что условия 1), 2) и 3) выполнены и по теореме 2.3 [4]

$$L(g) \leqslant \rho \frac{2^n - \log v(\tau^n)}{\log(2^n - \log v(\tau^n))}.$$

Так как $\vec{g} \in V_{\tau^n}(\vec{f})$, то $L_{\tau^n}(f) \leqslant L(g)$ и в силу произвольности функции f

$$L_T(n) \leqslant \rho \frac{2^n - \log v(\tau^n)}{\log(2^n - \log v(\tau^n))}.$$

Теорема доказана

§ 3. Случай средней определенности реализуемой функции

Под случаем средней определенности функций из P_2^n или случаем средней мощности хэмминговых окрестностей будем понимать тот случай, когда для τ^n выполняется

$$2^{n-\log^2 n} \geqslant 2^n - \log v(\tau^n) \geqslant \frac{1}{n} 2^{n/2}. \tag{29}$$

Теорема 2. *Пусть для последовательности $T = \{\tau^1, \tau^2, \ldots\}$ хэмминговых систем окрестностей $\tau^n = \langle (I^{1,n}, p_{1,n}), \ldots, (I^{k,n}, p_{k,n})\rangle$, заданных на B^{2^n}, выполняется* (29) *и* $\left|p_{i,n} - \frac{1}{2}\right| > \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $i = 1, \ldots, k$, $n = 1, 2, \ldots$ *Тогда*

$$L_T(n) \sim \rho \frac{2^n - \log v(\tau^n)}{\log(2^n - \log v(\tau^n))}.$$

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная булева функция и $\tau = \tau^n$. Без ограничения общности будем считать, что $p_{i,n} < 1/2$, $i = 1, \ldots, q$, $p_{j,n} > 1/2$, $j = q+1, \ldots, k$, $q = q(n)$.

Сначала получим некоторые вспомогательные соотношения.

Известно следующее соотношение [2, приложение]:

$$2^{nH(p)-\log n} \leqslant \sum_{i=0}^{pn} C_n^i \leqslant 2^{nH(p)}, \tag{30}$$

где $0 \leqslant p < 1/2$, $H(p) = -p\log p - (1-p)\log(1-p)$.

Мощность $v(\tau)$ окрестности любого набора из B^{2^n} при заданной системе окрестностей τ равна

$$v(\tau) = \prod_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{p_i|I^{i,n}|} C^j_{|I^{i,n}|}.$$

Учитывая, что $\sum_{i=1}^{k} |I^{i,n}| = 2^n$, и (30), оценим выражение $2^n - \log v(\tau)$:

$$\sum_{i=1}^{q} \left[|I^{i,n}|(1 - H(p_i)) + \log|I^{i,n}| \right] + (k-q) \geqslant$$

$$\geqslant 2^n - \log v(\tau) \geqslant \sum_{i=1}^{q} |I^{i,n}|(1 - H(p_i)). \tag{31}$$

Откуда следует

$$2^n - \log v(\tau^n) \sim \sum_{i=1}^{q} |I^{i,n}|(1 - H(p_i)).$$

Пусть для произвольных подмножеств $I_0^{i,n} \subseteq I^{i,n}$, $i = 1, \ldots, q$, может быть пустых, выполнено

$$|I_0^{1,n} \cup \ldots \cup I_0^{q,n}| \sim |I^{1,n} \cup \ldots \cup I^{q,n}|. \tag{32}$$

Обозначим $I^0 = I_0^{1,n} \cup \ldots \cup I_0^{q,n}$, $I = I^{1,n} \cup \ldots \cup I^{q,n}$. Из (30), (32) и аналогичных (31) неравенств следует

$$2^n - \log v(\tau) \sim |I| - \log v(\tau_I) \sim |I^0| - \log v(\tau_{I^0}). \tag{33}$$

Подмножества $I, I^{q+1,n}, \ldots, I^{k,n}$ множества $I_{2^n} = \{1, 2, \ldots, 2^n\}$ будем разбивать на два класса следующим образом.

Введем обозначения $2^n - \log v(\tau) = M(n)$, $|I| = l_0(n)$, $|I^{q+1,n}| = l_1(n), \ldots, |I^{k,n}| = l_{k-q}(n)$.

Без ограничения общности положим $l_1(n) \leqslant \ldots \leqslant l_{k-q}(n)$.

Обозначим $a_i(n) = \dfrac{\log l_i(n) - \log M(n)}{\log n}$, $i = 1, \ldots, k-q$, тогда $l_i(n) = n^{a_i(n)} M(n)$ и $a_1(n) \leqslant \ldots \leqslant a_{k-q}(n)$.

Если $a_1(n) \geqslant 4$, то образуем два класса $G_1 = \{I\}$ и $G_2 = \{I^{q+1,n} \cup \ldots \cup I^{k,n}\}$. Если же $a_1(n) < 4$, то найдем номер p такой, что $a_{p+1} \geqslant 2a_p + 4$. В силу конечности числа k такой номер найдется. Образуем классы $G_1 = \{I \cup I^{q+1,n} \cup \ldots \cup I^{q+p,n}\}$ и $G_2 = \{I^{q+p+1,n} \cup \ldots \cup I^{k,n}\}$. Обозначим $|G_1| = N$. Тогда $|G_2| = 2^n - N$.

Из (31) следует оценка для $|I|$

$$|I| \leqslant c_3 M(n), \text{ где } 1/c_3 = \min_{1 \leqslant i \leqslant q} (1 - H(p_i)).$$

Для $|I^{q+i,n}| = l_i(n)$ имеем оценки $|I^{q+i,n}| \leqslant n^{a_p(n)} M(n)$, $i = 1, \ldots, p$. Тогда

$$N \leqslant (c_3 + kn^t) M(n), \quad |I^{i,n}| \geqslant n^{2t+4} M(n), \quad i = q+p+1, \ldots, k, \tag{34}$$

где, если $a_1(n) \geqslant 4$, то $p = 0$, $t = 0$, а если $a_1(n) < 4$, то $t = a_p(n)$.

Пусть $r = n - \log M(n) - (2t+3)\log n$, тогда

$$n - r \sim \log M(n), \tag{35}$$

$$2^{n-r} = 2^{2t+3} M(n), \tag{36}$$

$$|I^{i,n}| \geqslant n \cdot 2^{n-r}, \quad i = q+p+1, \ldots, k. \tag{37}$$

В таблице T значений функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ наборы $(0, \ldots, 0), \ldots$ $\ldots, (1, \ldots, 1)$ пронумеруем номерами $1, \ldots, 2^n$ соответственно. Выделим в таблице T наборы $D = \{\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_N\} \subseteq B^n$ с номерами из G_1. К наборам из D при выбранном r применим лемму 3. Отображение φ_F: $B^n \to B^{n-r}$ является сюръективным, и каждый набор из B^{n-r} имеет ровно 2^r прообразов.

В таблице T строка состоит из набора и значения функции f на этом наборе, т. е. имеет вид $(\tilde{\sigma}, f(\tilde{\sigma}))$. Таблицу T разрежем на полосы по 2^{n-r} строк и заметим, что отображение φ_F отображает множество наборов каждой полосы биективно в множество B^{n-r}.

Таблицу T преобразуем в таблицу T' такого же размера, состоящую из 2^{n-r} полос по 2^r строк по следующему правилу. Сначала в 1-й, 2-й, ..., 2^r-й полосах таблицы T найдем те строки $(\tilde{\sigma}, f(\tilde{\sigma}))$, для которых выполнено $\varphi_F(\tilde{\sigma}) = (0, \ldots, 0)$. Эти 2^r строк образуют первую полосу новой таблицы T', причем порядок следования строк такой же, как и в таблице T. Аналогично поступим со строками $(\tilde{\sigma}, f(\tilde{\sigma}))$ такими, что $\varphi_F(\sigma) = (0, \ldots, 0, 1)$. Они составят вторую полосу таблицы T'. Аналогичным образом составим 3-ю, ..., 2^{n-r}-ю полосы таблицы T'.

В результате проделанной процедуры 1-я, 2-я, ..., 2^n-я строки таблицы T становятся i_1-й, i_2-й, ..., i_{2^n}-й строками таблицы T'. Данную перестановку обозначим $\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & 2^n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_{2^n} \end{pmatrix}$. Операцию перестановки Π будем применять как к подмножествам $I \subseteq I_{2^n}$, так и к подмножествам наборов $A \subseteq B^{2^n}$ следующим образом:

$$\Pi(1) = i_1, \ldots, \Pi(2^n) = i_{2^n},$$

$$\Pi(I) = \{\Pi(i) \mid i \in I\},$$

$$\Pi(\tilde{a}) = \Pi(a_1, \ldots, a_{2^n}) = (a_{\Pi(1)}, \ldots, a_{\Pi(2^n)}),$$

$$\Pi(A) = \{\Pi(\tilde{a}) \mid \tilde{a} \in A\}, \quad A \subseteq B^{2^n},$$

$$\Pi(\tilde{a}) = \tilde{b} \Leftrightarrow \tilde{a} = \Pi^{-1}(\tilde{b}), \text{ где } \Pi^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_{2^n} \\ 1 & 2 & \ldots & 2^n \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\Pi(I^{i,n}) = J^{i,n}$, $i = 1, \ldots, k$, $\Pi(G_1) = G_1' = \{J^{1,n} \cup \ldots \cup J^{q+p,n}\}$, $\Pi(G_2) = G_2' = \{J^{q+p+1,n} \cup \ldots \cup J^{k,n}\}$, $\Pi(\vec{f}) = \vec{f}'$. Введем новую хэммингову систему окрестностей $\tau' = \langle (J^{1,n}, p_1), \ldots, (J^{k,n}, p_k) \rangle$. Тогда

$$V_{\tau'}(\tilde{b}) = \Pi(V_\tau(\Pi^{-1}(\tilde{b}))) \text{ для любого } \tilde{b} \in B^{2^n}.$$

Согласно лемме 3 перестановка Π обладает тем свойством, что не менее чем $N - \dfrac{N^2}{2^{n-r}}$ полос таблицы T' содержат строки с наборами из $D = \{\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_N\}$.

В тех полосах таблицы T', которые содержат набор из D, отметим один из наборов D. Пусть $J' \subseteq G_1'$ — множество номеров отмеченных наборов. Из леммы 3 следует

$$|J'| \geqslant N - \frac{N^2}{2^{n-r}}. \tag{38}$$

Из леммы 1, примененной к множествам $J^{q+p+1,n}, \ldots, J^{k,n}$, где $|J^{i,n}| \geqslant n2^{n-r}$, $i = q+p+1, \ldots, k$ (37), при $m = 2^n$, $l = 2^r$ следует, что для любого $\varepsilon_1 \geqslant \psi(k-q-p, n)$ найдется набор $\tilde{\alpha} \in B^{2^r}$ такой, что для произвольного $\tilde{c} \in E_{\tilde{\alpha}}^{2^{n-r}}$ верно

$$\rho_{J^{i,n}}(\vec{f'}, \tilde{c}) \leqslant \left(\frac{1}{2} + \varepsilon_1\right)|J^{i,n}|, \quad i = q+p+1, \ldots, k. \tag{39}$$

Так как $\psi \to 0$ при $n \to \infty$, то для ε (из условия теоремы) найдется n_0: $\psi(q+p+1, n) \leqslant \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_0$, и соотношение (39) верно для $\varepsilon_1 = \varepsilon$.

Полосы таблицы T' пронумеруем от 1 до 2^{n-r}. Пусть I^1 — номера полос, содержащих наборы с номерами из $J' \cap (J^{1,n} \cup \ldots \cup J^{q,n})$, $I^1 \subseteq I_{2^{n-r}} = \{1, 2, \ldots, 2^{n-r}\}$, I^2 — номера полос, содержащих наборы с номерами из $J' \setminus (J^{1,n} \cup \ldots \cup J^{q,n})$, $I^3 = I_{2^{n-r}} \setminus (I^1 \cup I^2)$.

Полосам таблицы T' сопоставим 0 или 1 по следующему правилу. Полосам с номерами из I^3 сопоставим произвольным образом 0 или 1. Все остальные полосы содержат наборы с номерами из J', т. е. отмеченные наборы. Если в полосе заменим кусок столбца f' на набор $\tilde{\alpha}$ (из леммы 1) и если при этом строка с отмеченным набором остается неизменной, то этой полосе сопоставим 0. В противном случае сопоставим 1. Сопоставленные числа запишем в порядке следования полос. Полученный набор длины 2^{n-r} обозначим g. Набору $\vec{g}$ соответствует некоторая булева функция $g(x_1, \ldots, x_{n-r})$.

На множестве $B^{2^{n-r}}$ введем хэммингову систему окрестностей τ'' следующим образом. Обозначим

$$J_0^{i,n} = J' \cap J^{i,n}, \quad i = 1, \ldots, q+p. \tag{40}$$

Через I_i^1 обозначим номера полос таблицы T', содержащих наборы с номерами из $J_0^{i,n}$, $i = 1, \ldots, q$, а I_j^2 — номера полос, содержащих наборы с номерами $J_0^{j,n}$, $j = q+1, \ldots, q+p$.

Теперь определим

$$\tau'' = \langle (I_1^1, p_1), \ldots, (I_q^1, p_q), (I_{q+1}^2, p_{q+1}), \ldots, (I_{q+p}^2, p_{q+p}), (I^3, 1) \rangle.$$

Из определений τ' и τ'' следует, что для $J_0 = J_0^{1,n} \cup \ldots \cup J_0^{q,n}$ и I^1 индуцированные τ'_{J_0} и τ''_{I^1} равны.

Сравним мощности J_0 и $J = J^{1,n} \cup \ldots \cup J^{q,n}$. Так как $J_0 = J' \cap J$ (40), $J \subseteq G_1'$, $J' \subseteq G_1'$, $|G_1'| = N$, то учитывая (34), (36), (38) имеем

$$|J| \geqslant |J_0| \geqslant |J| - \frac{N^2}{2^{n-r}} \geqslant |J| - M(n)\left(\frac{c_3^2}{n^{2t+3}} + \frac{2kc_3}{n^{t+3}} + \frac{k^2}{n^3}\right).$$

Так как из (31) следует $M(n) \leqslant |J| + q\log|J| + (k-q)$, то

$$|J_0| \sim |J|,$$

т. е. выполнено условие (32), поэтому в силу (33)

$$|J_0| - \log v(\tau'_{J_0}) \sim 2^n - \log v(\tau^n).$$

А имея в виду, что $|J_0| = |I^1|$ и $v(\tau'_{J_0}) = v(\tau''_{I^1})$, получаем

$$|I^1| - \log v(\tau''_{I^1}) \sim 2^n - \log v(\tau^n).$$

Для τ'' справедливо $v(\tau'') = v(\tau''_{I^1})\, v(\tau''_{I^2})\, v(\tau''_{I^3})$, значит,

$$2^{n-r} - \log v(\tau'') \sim 2^{n-r} - |I^2| - |I^3| - \log v(\tau''_{I^1}) = |I^1| - \log v(\tau''_{I^1}) \sim 2^n - \log v(\tau^n) = M(n). \quad (41)$$

Возьмем набор $\tilde{\alpha} \in B^{2^r}$, для которого верно (39), и набор $\vec{g}'$ из окрестности $V_{\tau''}(\vec{g})$ набора $\vec{g}$. Одновременной подстановкой в наборе $\vec{g}'$: вместо 0 — набор $\tilde{\alpha}$, а вместо 1 — набор $\tilde{\tilde{\alpha}}$ — получим набор $\tilde{c} \in E^{2^{n-r}}_{\tilde{\alpha}}$. Если $n \geqslant n_0$, то из (39) следует

$$\rho_{I^{i,n}}(\vec{f}, \Pi^{-1}(\tilde{c})) = \rho_{J^{i,n}}(\vec{f}', \tilde{c}) \leqslant p_i\,|J^{i,n}|, \quad i = q+p+1, \ldots, k.$$

Обозначим $H = G'_1 \setminus J'$ и $\overline{H} = I_{2^n} \setminus H$. Из описанной выше конструкции следует $\mathrm{Pr}_{\overline{H}}\tilde{c} \in V_{\tau'_{\overline{H}}}(\mathrm{Pr}_{\overline{H}}\vec{f}')$.

Возьмем набор $\vec{h}$ длины 2^n с не более чем $|H|$ единицами такой, что $\mathrm{Pr}_{\overline{H}}\vec{h} = (0, \ldots, 0) \in B^{|\overline{H}|}$ и $\mathrm{Pr}_H\vec{h} = \mathrm{Pr}_H(\tilde{\tau} \oplus \vec{f}')$, где $\oplus$ — операция поразрядного сложения наборов по модулю 2. Для такого набора $\vec{h}$ имеем

$$\tau \oplus \vec{h} \in V_{\tau'}(\vec{f}') \quad \text{и} \quad \Pi^{-1}(\tau \oplus \vec{h}) \in V_{\tau}(\vec{f}).$$

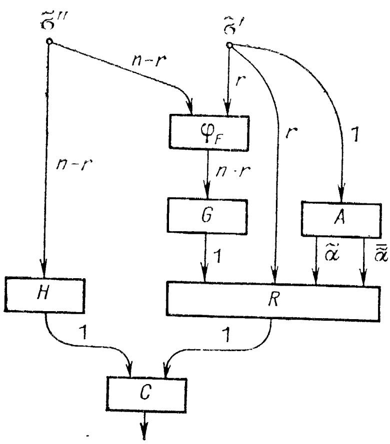

Рис. 2

Для числа единиц $\rho(\vec{h}, \tilde{0})$ набора $\vec{h}$ в силу (38) справедливо

$$\rho(\vec{h}, \tilde{0}) \leqslant |H| = |G'_1 \setminus J'| \leqslant N^2/2^{n-r}.$$

Опишем схему, τ^n-приближенно реализующую $f(x_1, \ldots, x_n)$ (рис. 2). Пусть $\tilde{\sigma}' = (\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$, $\tilde{\sigma}'' = (\sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_n)$.

φ_F: $(n, n-r)$-оператор. По наборам $\tilde{\sigma}'$, $\tilde{\sigma}''$ вычисляет $\varphi_F(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \tilde{\sigma}'' \oplus F(\tilde{\sigma}')$, где F — $(r, n-r)$-оператор из леммы 3. Из теоремы Д.4 [4]

$$L(\varphi_F) \lesssim (n-r)\frac{2^r}{r} + (n-r).$$

G: τ''-приближенно реализует функцию $g(x_1, \ldots, x_{n-r})$.

A: по одному из входов $\tilde{\sigma}'$ вычисляет константы 0 и 1. Константы выдаются на выход таким образом, чтобы получились наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\tilde{\alpha}}$,

$$L(A) = \mathrm{const}.$$

R: $(1 + r + 2^{r+1}, 1)$-оператор. Если выход блока G равен 0, то в наборе $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2^r})$ выделяется $(\|\tilde{\sigma}'\| + 1)$-й разряд и выдается на выход. Если же выход блока G равен 1, то на выход выдается $(\|\tilde{\sigma}'\| + 1)$-й разряд набора $\tilde{\tilde{\alpha}}$. Схема строится по лемме 2.2 [4],

$$L(R) \lesssim 2^r + r.$$

H: реализует функцию $h(x_1, \ldots, x_n)$. Функция h равна 1 не более чем на $N^2/2^{n-r}$ наборах, поэтому, представив функцию h в виде совершенной д. н. ф., имеем

$$L(H) \leqslant nN^2/2^{n-r}.$$

C: суммирует по модулю 2 выходы блоков H и R

$$L(C) = \text{const}.$$

Так как $r = n - \log M(n) - (2t+3)\log n$, $N \leqslant (c_3 + kn^t)M(n)$ и для $M(n) = 2^n - \log v(\tau^n)$ выполняется (29), то

$$\log M(n) \sim n - r, \tag{42}$$

$$(n-r)\frac{2^r}{r} + 2^r + r + n\frac{N^2}{2^{n-r}} = \bar{o}\left(\frac{M(n)}{\log M(n)}\right). \tag{43}$$

Из (41), (42) имеем

$$\log(2^{n-r} - \log v(\tau''))\sim \log M(n) \sim n - r.$$

Следовательно, условие теоремы 1 (§ 2) выполняется для последовательности систем окрестности τ''. Тогда получаем

$$L(G) = L_{\tau''}(g) \leqslant \rho\,\frac{2^{n-r} - \log v(\tau'')}{\log(2^{n-r} - \log v(\tau''))} \sim \rho\,\frac{2^n - \log v(\tau^n)}{\log(2^n - \log v(\tau^n))},$$

$$L_{\tau^n}(f) \leqslant L(\varphi_F) + L(H) + L(A) + L(R) + L(C) + L(G) \leqslant \rho\,\frac{2^n - \log v(\tau^n)}{\log(2^n - \log v(\tau^n))}.$$

В силу произвольности функции f такая же верхняя оценка верна для $L_T(n)$.

Нижняя оценка доказывается так же, как в теореме 1. Теорема доказана.

§ 4. Случай слабой определенности реализуемой функции

Если для хэмминговой системы окрестностей τ^n, заданной на B^{2^n} и определяющей окрестности функций из P_2^n, выполняются

$$2^{\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\log n} \geqslant 2^n - \log v(\tau^n) \geqslant n\log^{1+\delta} n, \tag{44}$$

где $\delta > 0$, то будем говорить, что имеем случай слабой определенности функций из P_2^n и случай большой мощности хэмминговых окрестностей.

Теорема 3. *Пусть для последовательности* $T = \{\tau^1, \tau^2, \ldots\}$, $\tau^n = \langle (I^{1,n}, p_{1,n}), \ldots, (I^{q,n}, p_{q,n}), \quad (I^{q+1,n}, p_{q+1,n}), \ldots, (I^{k,n}, p_{k,n})\rangle$, *заданных на* B^{2^n}, *выполняются* (44) *и*

$$\begin{gathered} p_{i,n} < 1/2,\ i = 1, \ldots, q,\ p_{j,n} > 1/2,\ j = q+1, \ldots, k, \\ |p_{i,n} - 1/2| > \varepsilon,\ i = 1, \ldots, k,\ n = 1, 2, \ldots, \\ |I^{j,n}| \geqslant \varphi(n)\,|I^{1,n} \cup \ldots \cup I^{q,n}|^2,\quad j = q+1, \ldots, k, \end{gathered} \tag{45}$$

где $\varphi(n)$ — *произвольная функция, стремящаяся к* ∞ *при* $n \to \infty$, $\varepsilon > 0$. *Тогда*

$$L_T(n) \sim \rho\,\frac{2^n - \log v(\tau^n)}{\log(2^n - \log v(\tau^n))}.$$

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная булева функция, n достаточно большое, τ^n — хэммингова система окрестностей из T. Образуем два класса $G_1 = \{I^{1,n} \cup \ldots \cup I^{q,n}\}$ и $G_2 = \{I^{q+1,n} \cup \ldots \ldots \cup I^{k,n}\}$. Введем обозначения

$$2^n - \log v(\tau^n) = M(n), \quad |G_1| = N.$$

Используя неравенства (30) для $M(n)$, получим аналогичное (31) соотношение

$$\sum_{i=1}^{q} \left[|I^{i,n}| (1 - H(p_i)) + \log |I^{i,n}| \right] + (k-q) \geqslant M(n) \geqslant \sum_{i=1}^{q} |I^{i,n}| (1 - H(p_i)),$$

откуда следует, что найдутся константы c_4, c_5 такие, что

$$c_4 M(n) \leqslant N \leqslant c_5 M(n). \tag{46}$$

Положим $d =]2 \log N[$. Наборы $\tilde{\sigma} \in B^n$ будем разбивать на куски длины d, за исключением, может быть, крайнего левого куска. Будем обозначать $\tilde{\sigma} = (\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_r)$, где $r =]n/d[$, $\tilde{\sigma}_i \in B^d$, $i = 2, \ldots, r$, $\tilde{\sigma}_1 \in B^{d'}$, $d' \leqslant d$. Наборы $\tilde{\sigma}_i$ являются двойчными записями чисел $\|\tilde{\sigma}_i\|$. Возьмем простое число p из интервала $(2^d, 2^{d+1})$. Наборы $\tilde{\sigma} \in B^n$ будем рассматривать как элементы r-мерного векторного пространства $V_r(p)$ над полем Галуа $GF(p) = \{0, 1, \ldots, p-1\}$, т. е. набору $\tilde{\sigma} = (\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_r) \in B^n$ соответствует вектор $\bar{\sigma} = (\|\tilde{\sigma}_1\|, \ldots, \|\tilde{\sigma}_r\|) \in V_r(p)$.

Для N справедливы соотношения

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} 2^{(d+1)/2} \leqslant N \leqslant 2^{d/2}, \tag{47}$$

$$N^2 \geqslant \frac{1}{4} p. \tag{48}$$

В таблице F значений функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ пронумеруем строки $(0, \ldots, 0, f(\tilde{0})), \ldots, (1, \ldots, 1, f(\tilde{1}))$ сверху вниз номерами $1, \ldots, 2^n$ соответственно. Пусть $\tilde{b}^1, \ldots, \tilde{b}^N$ — наборы из B^n, соответствующие строкам таблицы F с номерами из G_1. Наборам $\tilde{b}^1, \ldots, \tilde{b}^N$ соответствуют векторы $\bar{b}^1, \ldots, \bar{b}^N$ из $V_r(p)$.

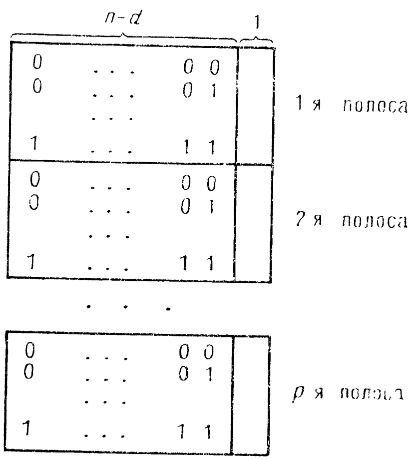

Рис. 3

Из работы [3] следует существование отображения f пространства $V_r(p)$ в поле $GF(p)$ такого, что все $f_i(\bar{b}^1), \ldots, f_i(\bar{b}^N)$ будут попарно различными. Отображение $f_i(\bar{u})$, $\bar{u} = (u_1 \ldots \ldots, u_r) \in V_r(p)$, представляет собой линейную функцию с коэффициентами $a_1, \ldots, a_r$ из $GF(p)$, т. е. $f_i(\bar{u}) = a_1 u_1 + \ldots \ldots + a_r u_r$, где умножение и сложение берутся по модулю p. Отображению $f_i(\bar{u})\colon V_r(p) \to GF(p)$ сопоставим функционал Φ: $B^n \to GF(p)$ такой, что для всех $\tilde{b} \in B^n$, $\Phi(\tilde{b}) = f_i(\bar{b}) = a_1\|\tilde{b}_1\| + \ldots \ldots + a_r\|\tilde{b}_r\|$. Ясно, что значения функционала Φ на наборах $\tilde{b}^1, \ldots, \tilde{b}^N$ попарно различны.

Построим таблицу T размера $p2^{n-d} \times (n - d + 1)$. Сначала таблицу заполним, за исключением правого крайнего столбца, так, как показано на рис. 3. Все p полос одинаковы и заполнены наборами из B^{n-d}, которые следуют в лексикографическом порядке. Таблицу F задания функции f разрежем на полосы по 2^d наборов. Для заполнения правого столбца таблицы T будем последовательно просматривать все строки таблицы F.

Пусть $(\tilde{\beta}, f(\tilde{\beta}))$ — очередная просматриваемая строка, $\tilde{\beta}=(\tilde{\beta}_1, \ldots, \tilde{\beta}_r)$. Вычислим значение функционала $\Phi(\tilde{\beta})$. В таблице T в $(\Phi(\tilde{\beta})+1)$-й полосе найдем строку с набором $(\tilde{\beta}_1, \ldots, \tilde{\beta}_{r-1})$ и в правую незаполненную клетку впишем значение $f(\tilde{\beta})$. При этом номеру строки таблицы F с набором $\tilde{\beta}$ сопоставим номер строки таблицы T, куда вписали значение $f(\tilde{\beta})$. Строки таблицы T пронумерованы от 1 до $p2^{n-d}$ сверху вниз. В результате просмотра всех 2^n строк таблицы F в таблице T окажутся заполненными полностью 2^n строк. Остальные пустые клетки заполним 0 или 1 произвольным образом. Множество пар сопоставлений номеров строк таблицы F и T является инъективным отображением χ: $I_{2^n}\to I_{2^{-d}}$.

Обозначим $\{\chi(j)\,|\,j\in I^{i,n}\}=J^{i,n}$, $i=1, \ldots, k$. Строки с номерами из $G_1'=\{J^{1,n}\cup\ldots\cup J^{q,n}\}$ расположены в различных полосах.

Правый крайний столбец таблицы T обозначим $\vec{T}$. К набору $\vec{T}$ и множествам $J^{q+1,n}, \ldots, J^{k,n}$ применим лемму 1. Условия леммы 1 выполнены. Действительно, из (45) и (48) имеем

$$|J^{i,n}|\geqslant\varphi(n)N^2\geqslant\frac{\varphi(n)}{4}p,\quad i=q+1, \ldots, k.$$

Согласно замечанию леммы 1, найдется набор $\vec{\alpha}\in B^{2^{n-d}}$, являющийся набором значений некоторой линейной функции $\alpha(x_1, \ldots, x_{n-d})$ такой, что для произвольного набора $\tilde{c}\in E^p_{\vec{\alpha}}$ и $\varepsilon_1>\psi\left(k-q, \frac{\varphi(n)}{4}\right)$, $\psi(\xi, \delta)=\frac{1}{\sqrt{\delta}}+\frac{1}{\sqrt[6]{\delta}}+\frac{\xi}{2\sqrt[12]{\delta}}$ выполнены неравенства

$$\rho_{J^{i,n}}(\tilde{T}, \tilde{c})\leqslant\left(\frac{1}{2}+\varepsilon_1\right)|J^{i,n}|,\qquad i=q+1, \ldots, k. \tag{49}$$

Найдется номер n_0 такой, что для всех $n\geqslant n_0$ будет выполнено $\psi\left(k-q, \frac{\varphi(n)}{4}\right)<\varepsilon$, где $\varepsilon>0$, $\left|p_{i,n}-\frac{1}{2}\right|>\varepsilon$ и соотношение (49) будет верно для $\varepsilon_1=\varepsilon$.

Множество номеров полос таблицы T, в которых расположены строки с номерами из G_1', обозначим K. Для K выполняются $K\subseteq I_p$, $|K|=|G_1'|=|G_1|$. Множество номеров полос, содержащих строки с номерами из $J^{i,n}$, обозначим через $K^{i,n}$, $i=1, \ldots, q$.

Теперь определим функцию $g(y_1, \ldots, y_{d+1})$. Пусть на наборах $\tilde{\gamma}\in B^{d+1}$ таких, что $\|\tilde{\gamma}\|+1\in I_{2^{d+1}}\setminus K$, функция g принимает значение 0 или 1 произвольным образом. Значение функции g на наборах $\tilde{\gamma}$ таких, что $\|\tilde{\gamma}\|+1\in K$, определим так. Если при замене в $(\|\tilde{\gamma}\|+1)$-й полосе таблицы T крайнего правого столбца на $\vec{\alpha}$, строка с номером из G_1' остается неизменной, то в наборе $\tilde{\gamma}$ функция принимает значение 0, в противном случае — 1.

Введем хэммингову систему окрестностей τ', определенную на множестве $B^{2^{d+1}}$:

$$\tau'=\left\langle\left(K^{1,n}, p_{1,n}\right), \ldots, \left(K^{q,n}, p_{q,n}\right), \left(I_{2^{d+1}}\setminus K, 1\right)\right\rangle. \tag{50}$$

Так как $|K^{i,n}|=|J^{i,n}|=|I^{i,n}|$, $i=1, \ldots, q$, то индуцированные хэмминговы системы окрестностей τ_{G_1} и τ_K' равны.

Для $v(\tau')$ и $v(\tau^n)$ справедливы

$$v(\tau')=v(\tau_K')\,2^{2^{d+1}-|K|},\quad v(\tau^n)=v(\tau_{G_1})\prod_{i=q+1}^{K}\left(\sum_{j=0}^{p_i|I^{i,n}|}C^j_{|I^{i,n}|}\right),$$

где $p_i>1/2$, $i=q+1, \ldots, k$.

Поэтому

$$\log v(\tau_{G_1}) + 2^n - |G_1| - (k-q) \leqslant \log v(\tau^n) \leqslant \log v(\tau_{G_1}) + 2^n - |G_1|,$$

и, учитывая, что $v(\tau_{G_1}) = v(\tau'_K)$, $|K| = |G_1|$, получаем

$$|K| - \log v(\tau'_K) \leqslant 2^n - \log v(\tau^n) \leqslant |K| - \log v(\tau'_K) + (k-q). \qquad (52)$$

Из (46), (47), (51) и (52) следует

$$2^{d+1} - \log v(\tau') = |K| - \log v(\tau'_K) \geqslant 2^n - \log v(\tau^n) - (k-q) =$$
$$= M(n) - (k-q) \geqslant \frac{1}{c_5 2\sqrt{2}} 2^{(d+1)/2} - (k-q);$$

т. е. для последовательности хэмминговых систем окрестностей, определенных по (50), выполняются условия теоремы 2 (§ 3), и поэтому

$$L_{\tau'}(g) \leqslant \rho \frac{2^{d+1} - \log v(\tau')}{\log(2^{d+1} - \log v(\tau'))} \sim \rho \frac{2^n - \log v(\tau^n)}{\log(2^n - \log v(\tau^n))}.$$

Опишем схему, τ^n-приближенно реализующую функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ (рис. 4). Пусть $\tilde{\sigma} = (\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_r)$, где $r =]n/d[$.

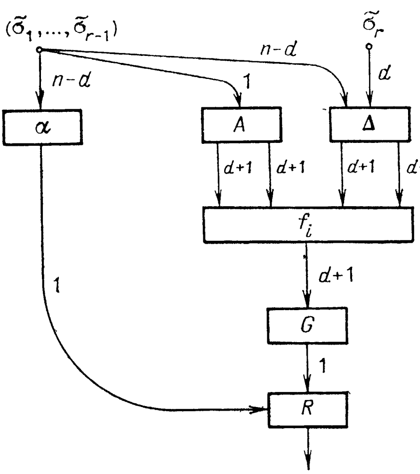

Рис. 4

α: $(n-d,\ 1)$-оператор. Вычисляет значение линейной функции $\alpha(x_1, \ldots, x_{n-d})$ в наборе $(\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_{r-1})$,

$$L(\alpha) \leqslant n - d.$$

A: $(1,\ r(d+1))$-оператор. По одному из входов вычисляет константы 0 и 1, и выдает их в таком порядке, чтобы на выходе получились двоичные записи длины $d+1$ коэффициентов $a_1, \ldots, a_r \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ линейного отображения f_i

$$L(A) = \text{const}.$$

Δ: $(n,\ r(d+1))$-оператор. Выдает r наборов длины $d+1$: $(0, \ldots, 0, \tilde{\sigma}_1)$, $(0, \tilde{\sigma}_2), \ldots, (0, \tilde{\sigma}_r)$,

$$L(\Delta) = \text{const}.$$

f_i: $(2r(d+1),\ d+1)$-оператор. Вычисляет значение выражения $a_1\|\tilde{\sigma}_1\| + \ldots + a_r\|\tilde{\sigma}_r\| \pmod p$. Известно, что умножение двух двоичных чисел длины $d+1$ осуществляется схемой, сложность которого не превышает $(d+1)^{1+c_6/\sqrt{d+1}}$ [7],

$$L(f_i) \leqslant n.$$

G: $(d+1,\ 1)$-оператор; τ'-приближенно реализует $g(y_1, \ldots, y_{n-d})$.

R: $(2,\ 1)$-оператор. Если выход блока G равен 0, то на выход подается $\alpha(\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_{r-1})$, в противном случае — $\bar{\alpha}(\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_{r-1})$,

$$L(R) = \text{const}.$$

Итак, при $2^n - \log v(\tau^n) \geqslant n \log^{1+\delta} n$, $\delta > 0$ имеем

$$L_{\tau^n}(f) \leqslant L(\alpha) + L(A) + L(\Delta) + L(f_i) + L(R) + L(G) \leqslant \rho \frac{2^n - \log v(\tau^n)}{\log(2^n - \log v(\tau^n))}.$$

Ввиду произвольности функции f заключаем, что

$$L_T(n) \leqslant \rho \frac{2^n - \log v(\tau^n)}{\log (2^n - \log v(\tau^n))}.$$

Нижняя оценка получается так же, как и в теореме 1. Теорема доказана.

В заключение автор выражает глубокую благодарность С. А. Ложкину, под руководством которого выполнена настоящая работа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев А. Е. Универсальный принцип самокорректирования // Математический сборник. Новая серия.— 1985.— Т. 127, вып. 2.— С. 147—172.
2. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики/Под общей редакцией С. В. Яблонского и О. Б. Лупанова. Т. 1.— М.: Наука, 1974.
3. Ложкин С. А., Семенов А. А. Об одном методе сжатия информации и о сложности реализации монотонных симметрических функций // Изв. вузов. Математика.— 1988.— № 7.— С. 44—52.
4. Лупанов О. Б. Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования // Проблемы кибернетики.— Вып. 14.— М.: Наука, 1965.— С. 31—110.
5. Семенов А. А. О сложности приближенной реализации булевых функций // Некоторые вопросы вычислительной математики, математической физики и программного обеспечения.— М.: Изд-во МГУ, 1988.— С. 84—86.
6. Семенов А. А. Приближенная реализация булевых функций для хэмминговых систем окрестностей // Тез. докл. VIII Всесоюзной конф. «Проблемы теоретической кибернетики». Ч.2. Горький, июль 1988 г.— Горький, 1988.— С. 105.
7. Тоом А. Л. О сложности схемы из функциональных элементов, реализующей умножение целых чисел // Докл. АН СССР.— 1963.— Т. 3.— С. 496—498.
8. Шоломов Л. А. О реализации недоопределенных булевых функций схемами из функциональных элементов // Проблемы кибернетики.— Вып. 21.— М.: Наука, 1969.— С. 215—226.
9. Pippenger N. J. Information theory and the complexity of switching network // 16th Ann. IEEE Symp. on Fourd. Comput. Sci.— Berkeley, 1975.— P. 113—118.
10. Pippenger N. J. Information theory and the complexity of boolean functions // Mathemotical Systems Theory.— 1977.— № 10.— P. 129—167.

Поступило в редакцию 20.I.1991

О САМОКОРРЕКТИРОВАНИИ СХЕМ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Н. И. ТУРДАЛИЕВ

(ТАШКЕНТ)

Известно, что для почти всех булевых функций минимальные самокорректирующиеся схемы имеют ту же сложность, что и обычные минимальные схемы [1—3, 6—10, 12, 13, 17, 19]. Но методы синтеза самокорректирующихся схем «для почти всех булевых функций» рассчитаны на сложнореализуемые функции и при применении к простореализуемым функциям не дают заметного выигрыша по сравнению с тривиальным дублированием. В работах [14—16] описаны методы синтеза нетривиальных самокорректирующихся схем из функциональных элементов для функций, допускающих простую декомпозицию.

В настоящей работе предложен метод синтеза нетривиальных самокорректирующихся схем из функциональных элементов для более сложных функций и операторов.

Рассматриваются схемы из элементов двух типов — надежных, имеющих достаточно большие веса, и ненадежных. Надежный элемент всегда реализует приписанную ему булеву функцию. Ненадежный элемент может находиться в исправном и неисправном состояниях. В исправном состоянии такой элемент реализует приписанную ему функцию, а в неисправном состоянии реализует любую булеву функцию от подаваемых на его входы переменных.

Схема из функциональных элементов [4, 18] называется *a-самокорректирующейся*, если при переходе в неисправное состояние любых a' $(a' \leqslant a)$ ненадежных элементов она реализует ту же функцию, что и при исправном состоянии всех элементов.

Рассмотрим конечную полную систему булевых функций $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_b\}$. Пусть у нас имеются надежные функциональные элементы, реализующие функции $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_b$, и ненадежные функциональные элементы, реализующие $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_b$. В совокупности эти элементы образуют базис $Б$, в котором мы будем осуществлять синтез схем. Таким образом, базис $Б$ состоит из «надежной» части $Б^1$ и «ненадежной» части $Б^2$; эти части функционально совпадают. Каждому элементу базиса приписано некоторое число — его вес. Вес любого ненадежного элемента положим равным 1, вес любого надежного элемента — равным N. Сложность схемы определяется суммой весов элементов схемы и обозначается через $L(S)$.

Упорядоченный набор m булевых функций от n переменных (одних и тех же) называется (n, m)-оператором. Сложность функции f (оператора F) в $Б^i$ $(i=1, 2)$ определяется как $\min L(S)$, где минимум берется по всем схемам S, состоящим только из элементов $Б^i$ и реализующим функцию f (оператор F); сложность функции f (оператора F) в $Б^i$ обозначается через $L_i(f)$ (соответственно $L_i(F)$). Схему S, состоящую из элементов $Б^i$ $(i=1, 2)$, реализующую функцию f (оператор F), и такую, что $L(S)=L_i(f)$ (соответственно $L(S)=L_i(F)$), будем называть *i-минимальной.*

Замечание. Нетрудно заметить, что от любой 1-минимальной (2-минимальной) схемы можно перейти к 2-минимальной (1-минимальной) схеме, заменив каждый надежный (ненадежный) элемент на соответствующий ему ненадежный (надежный).

Через $L^a(f)$ $(L^a(F))$ обозначим $\min L(S)$, где минимум берется по всем a-самокорректирующимся схемам S, реализующим функцию f (оператор F).

Обозначим через $f_i(\tilde{x})$ функцию, реализуемую на выходе i-го элемента схемы S при отсутствии в ней неисправных элементов. Пусть значения переменных $x_1, \ldots, x_n$, подаваемых на входы схемы S, равны соответственно $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Значение на выходе i-го элемента схемы будем называть *правильным*, если оно равно $f_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Пусть $(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k})$ — набор значений на выходах i_1-го, ..., i_k-го элементов схемы на входном наборе $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$; набор $(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k})$ будем называть *правильным*, если

$$(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}) = (f_{i_1}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n), \ldots, f_{i_k}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)).$$

§ 1. Пример, демонстрирующий алгоритм самокорректирования

В этом параграфе мы на простом примере покажем алгоритм, положенный в основу метода синтеза самокорректирующихся схем.

Пусть схема, реализующая функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, состоит из семи последовательно соединенных одинаковых блоков (рис. 1). В 5-самокорректирующуюся схему S для функции f будут входить в качестве подсхем шесть схем $A_1, \ldots, A_6$, реализующих функцию f и построенных из ненадежных элементов (рис. 2). Кроме того, схема S содержит пять блоков $B_1, \ldots, B_5$, каждый из которых устроен так же, как и блоки A_{ji} (напомним, что они все одинаковы), и состоит из ненадежных элементов. Пусть в схеме S имеется не более пяти неисправных элементов. Работу схемы S продемонстрируем на примере, изображенном на рис. 2. Предположим, к примеру, что выходы блоков $A_{11}, \ldots, A_{61}$ совпадают и равны 0. Так как по крайней мере одна из схем $A_1, \ldots, A_6$ не содержит неисправных элементов, то значение 0 — правильное. Выходы блоков $A_{12}, \ldots, A_{62}$ отличаются. Следовательно, либо в двух блоках A_{12}, A_{32}, либо в четырех блоках A_{22}, A_{42}, A_{52}, A_{62} имеются неисправные элементы. Последовательно на входы блоков B_1, B_2, ... подается значение 0 (именно это правильное значение подавалось на входы блоков $A_{12}, \ldots, A_{62}$) до тех пор, пока на выходах блоков $A_{12}, \ldots, A_{62}, B_1, B_2, \ldots$ не будет пяти одинаковых значений. Пусть после подачи значения 0 на входы блоков B_1, B_2 их выходы имеют значение 1. Поскольку неисправных элементов в схеме S не более пяти, то правильное значение — на выходах блоков A_{22}, A_{42}, A_{52}, A_{62} (в противном случае в шести блоках A_{22}, A_{42}, A_{52}, A_{62}, B_1, B_2 имелось бы по неисправному элементу, что невозможно). Далее нас будут интересовать лишь блоки A_2, A_4, A_5, A_6, так как среди них есть блок без неисправных элементов.

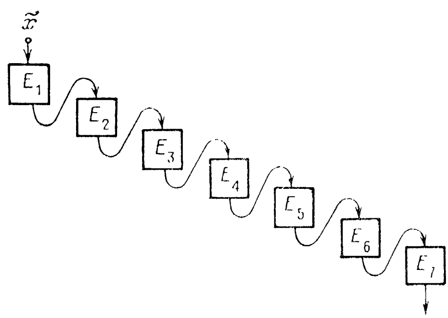

Рис. 1

Блоки A_1, A_3 заведомо содержат неисправные элементы. Поэтому в блоках A_2, A_4, A_5, A_6, B_3, B_4 может быть не более трех неисправных элементов. Выходы блоков A_{23}, A_{43}, A_{53}, A_{63} совпадают и равны. 1. Учитывая вышесказанное, заключаем, что значение 1 правильное. Выходы блоков A_{24}, A_{44}, A_{54}, A_{64} отличаются. На вход блока B_3 подаем значение 1 (именно это правильное значение подавалось на входы блоков

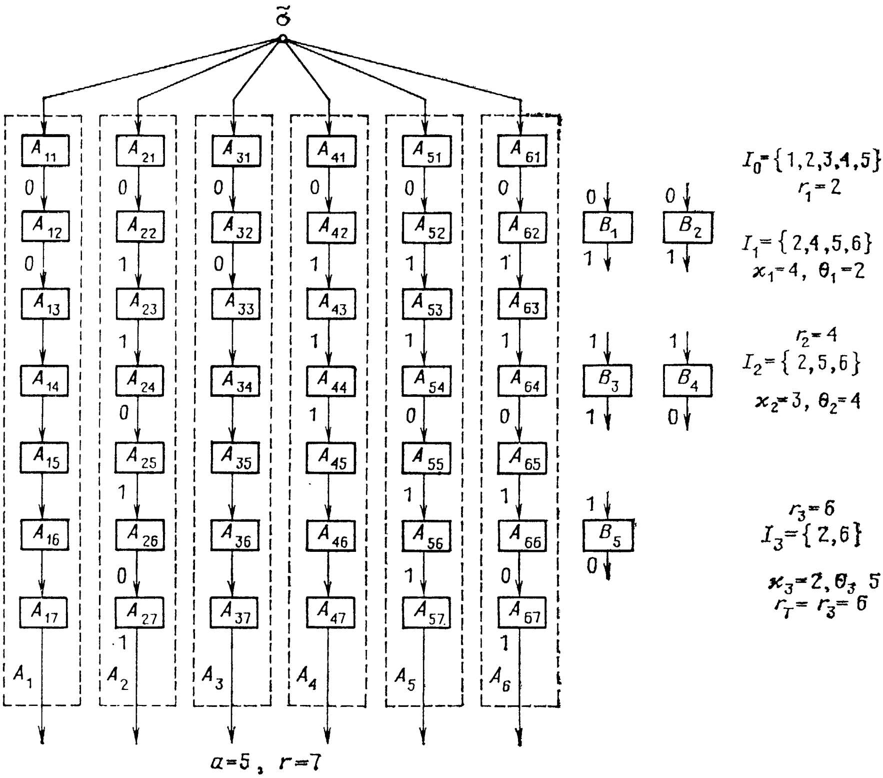

Рис. 2

A_{24}, A_{44}, A_{54}, A_{64}). На выходе B_3 получаем значение 1. На вход B_4 подаем значение 1 и на выходе получаем значение 0. На выходах блоков A_{24}, A_{54}, A_{64}, B_4 — четыре одинаковых значения. Так как в этих блоках не может быть четырех неисправных элементов, то значение 0 — правильное. Далее нас будут интересовать блоки A_2, A_5, A_6. Блоки A_1, A_3, A_4 заведомо содержат неисправные элементы. Поэтому в блоках A_2, A_5, A_6, B_5 может быть не более двух неисправных элементов (на самом деле, учитывая неисправный элемент в блоке B_3, можно сказать, что в блоках A_2, A_5, A_6, B_5 может быть не более одного неисправного элемента, но нам достаточно и более слабого вывода — подобные рассуждения встречаются и в общем случае в § 3). Выходы блоков A_{25}, A_{55}, A_{65} совпадают. Следовательно, значение 1 на выходах A_{25}, A_{55}, A_{65} является правильным. Выходы блоков A_{26}, A_{56}, A_{66} отличаются. На вход блока B_5 подается значение 1. На его выходе получаем 0. На выходах A_{26}, A_{66}, B_5 — три одинаковых значения. Следовательно, значение 0 на выходах этих блоков является правильным. Далее мы рассматриваем лишь блоки A_2, A_6, в одном из которых отсутствуют неисправные элементы. Выходы блоков A_{27}, A_{67} совпадают. Следовательно, значение 1 на выходах блоков A_2, A_6 является правильным, т. е. значение функции f на наборе $\tilde{\sigma}$ равно 1: $\tilde{f}(\sigma) = 1$.

В приведенном примере мы не показали схемную реализацию алгоритма выбора блока A_{i_0}, правильно вычисляющего значение функции f (в нашем примере в качестве A_{i_0} можно выбрать A_2 или A_6). Это будет сделано в § 3 для общего случая. Следует отметить, что в общем случае, во-первых, не обязательно все блоки A_{ji} должны быть устроены одинаково, во-вторых, на входы блоков A_{ji} могут подаваться входы схемы, в-третьих, связи между блоками A_{ji} могут быть более сложными.

§ 2. Некоторые обозначения, вспомогательные функции и операторы

В этом параграфе примем некоторые необходимые обозначения, определим вспомогательные функции и операторы.

Введем следующие обозначения:

$\tilde{0}$ — нулевой набор $(0, \ldots, 0)$;

$\|(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\| = \sigma_1 + \ldots + \sigma_n$;

$N_1(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ — номер первой единичной компоненты набора $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, например $N_1(0, 0, 1, 1, 0) = 3$;

$N(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ — множество номеров единичных компонент набора $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, например $N(0, 1, 0, 1, 1) = \{2, 4, 5\}$;

$S_n^i(x_1, \ldots, x_n)$ — симметрическая функция с рабочим числом i;

$S_n^k(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1$, если $\|(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\| = k$ (известно [9, С. 59], что

$$L_i\left(S_n^k\right) \leqslant c_1 n, \quad i = 1, 2; \tag{1}$$

здесь и ниже через c, c_1, c_2 и т. д. обозначены абсолютные константы);

$$|(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)| = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i 2^{i-1};$$

$\varphi_{\text{совп}}^n(\tilde{x}, \tilde{y})$ — функция совпадения от двух наборов переменных $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ длины n, которая определяется так:

$$\varphi_{\text{совп}}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \tilde{\alpha} = \tilde{\beta}, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

(очевидно, что

$$L_i\left(\varphi_{\text{совп}}^n\right) \leqslant c_2 n, \quad i = 1, 2); \tag{2}$$

$\varphi_{\text{срав}}^n(\tilde{x}, \tilde{y})$ — функция сравнения двух наборов переменных $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ длины n, которая определяется так:

$$\varphi_{\text{срав}}^n(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \begin{cases} 1, & \text{если } |\tilde{\alpha}| < |\tilde{\beta}|, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В дальнейшем нам понадобится $(b + d_1 + \ldots + d_b,\ d)$-оператор $H(\tilde{\xi}^1, \ldots, \tilde{\xi}^b, \tilde{\eta}) = (h_1(\tilde{\xi}^1, \ldots, \tilde{\xi}^b, \tilde{\eta}), \ldots, h_d(\tilde{\xi}^1, \ldots, \tilde{\xi}^b; \tilde{\eta}))$; где $\tilde{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_b)$, $\tilde{\xi}^i = \left(\xi_1^i, \ldots, \xi_{d_i}^i\right)$, $i = 1, \ldots, b$; $d = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant b} d_i$, здесь b, $d_1, \ldots, d_b$ — некоторые параметры. Функции $h_1, \ldots, h_d$ вычисляются по формулам

$$h_j = \xi_j^1 \eta_1 \vee \xi_j^2 \eta_2 \vee \ldots \vee \xi_j^b \eta_b, \quad j = 1, \ldots, d; \tag{3}$$

здесь $\xi_j^i \equiv 0$ при $j > d_i$ $(i = 1, \ldots, b)$. Такой оператор H будем обозначать через $H^{b,d}(\tilde{\xi}^1, \ldots, \tilde{\xi}^b; \tilde{\eta})$ или $H^{b,d}$. Схемная реализация оператора $H^{b,d}(\tilde{\xi}^1, \ldots, \tilde{\xi}^b; \tilde{\eta})$ показана на рис. 3. Отметим следующее свойство этого оператора. Если у набора $\tilde{\eta}$ лишь одна k-я компонента равна 1, то

$$H^{b,d}(\tilde{\xi}^1, \ldots, \tilde{\xi}^b; \tilde{\eta}) = (\tilde{\xi}^k, \tilde{0}) = \Big(\overbrace{\xi_1^k, \ldots, \xi_{d_k}^k, 0, \ldots, 0}^{d}\Big),$$

т. е. в этом случае оператор H «отбирает» из наборов $\tilde{\xi}^1, \ldots, \tilde{\xi}_b$ набор $\tilde{\xi}^k$. Например,

$$H^{4,3}((0, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1); (0, 1, 0, 0)) = (1, 1, 0).$$

Из (3) видно, что

$$L_i(H^{b,d}) \leqslant c_3 bd, \quad i = 1, 2. \tag{4}$$

Функция $R^{b,q,p}(\tilde{\xi}^1, \ldots, \tilde{\xi}^b; \tilde{\eta}; \tilde{\zeta})$, или кратко $R^{b,q,p}$, определяется следующим образом. Пусть $\tilde{\xi}^1, \ldots, \tilde{\xi}^b$ — наборы длины q, $\tilde{\eta}$ — набор длины b, $\tilde{\zeta}$ — набор длины p. Будем говорить, что набор $\tilde{\xi}^i$ соответствует набору $\tilde{\eta}$, если i-я компонента набора $\tilde{\eta}$ равна 1. Равенство

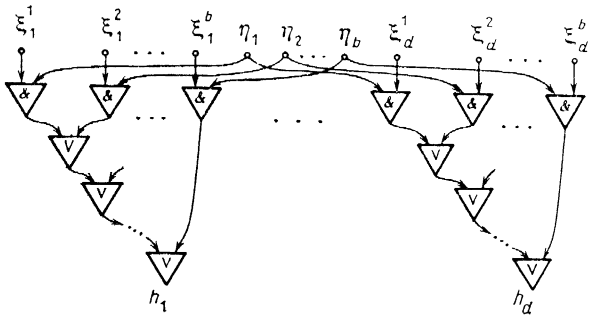

Рис. 3

$$R^{b,q,p}(\tilde{\xi}^1, \ldots, \tilde{\xi}^b; \tilde{\eta}; \tilde{\zeta}) = 1$$

выполняется тогда и только тогда, когда среди наборов $\tilde{\xi}^1, \ldots, \tilde{\xi}^b$ будет не менее $\|\tilde{\zeta}\|$ наборов, соответствующих $\tilde{\eta}$ и равных между собой. Например:

$$R^{4,3,5}((1, 1, 0), (0, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1); (1, 0, 1, 1); (1, 0, 0, 1, 0)) = 1,$$

так как два набора $(1, 1, 0)$ из трех соответствующих набору $(1, 0, 1, 1)$, равны друг другу, причем $2 \geqslant \|(1, 0, 0, 1, 0)\|$. Легко видеть, что если b, p — константы, то

$$L_i(R^{b,q,p}) \leqslant c_4 q, \quad i = 1, 2. \tag{5}$$

Функция $Q^{b,q,p}(\tilde{\chi}; \tilde{\xi}^1, \ldots, \tilde{\xi}^b; \tilde{\eta}; \tilde{\zeta})$, или просто $Q^{b,q,p}$, определяется следующим образом. Пусть $\tilde{\chi}, \tilde{\xi}^1, \ldots, \tilde{\xi}^b$ — наборы длины q, $\tilde{\eta}$ — набор длины b, $\tilde{\zeta}$ — набор длины p. Равенство $Q^{b,q,p}(\tilde{\chi}; \tilde{\xi}^1, \ldots, \tilde{\xi}^b; \tilde{\eta}; \tilde{\zeta}) = 1$ выполняется тогда и только тогда, когда среди наборов $\tilde{\xi}^1, \ldots, \tilde{\xi}^b$ будет не менее $\|\tilde{\zeta}\|$ наборов, соответствующих $\tilde{\eta}$ и равных набору $\tilde{\chi}$. Например:

$$Q^{4,3,5}((101); (000), (101), (101), (101); (1011); (01000)) = 1,$$

$$Q^{4,3,5}((101); (000), (101), (101), (111); (1110); (11100)) = 0.$$

Нетрудно убедиться, что если b, p — константы, то

$$L_i(Q^{b,q,p}) \leqslant c_5 q, \quad i = 1, 2. \tag{6}$$

§ 3. Синтез самокорректирующихся схем

В этом параграфе мы приведем метод синтеза самокорректирующихся схем для операторов, удовлетворяющих некоторым требованиям.

Пусть множество переменных $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ представимо в виде

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_r,$$

где множества $X_1, \ldots, X_r$ могут пересекаться. Мощность множества X_i $(i = 1, \ldots, r)$ обозначается через q_i. Наборы, соответствующие множествам $X, X_1, \ldots, X_r$, обозначим через $\tilde{x}, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_r$. Рассмотрим (n, m)-оператор $F(\tilde{x})$. Пусть схема S удовлетворяет следующим условиям.

1) Схема S состоит из ненадежных элементов; при правильной работе элементов схема реализует оператор F.

2) Схема S состоит из r блоков $E_1, \ldots, E_r$ (рис. 4). На входы блока E_i $(i = 1, \ldots, r)$ подаются набор переменных $\tilde{x}_i$ и S_i выходов блоков $E_1, \ldots, E_{i-1}$ (на входы первого блока E_1 подается лишь набор входных переменных $\tilde{x}_1$). Число выходов блока E_i равно t_i. Таким образом, блок E_i реализует $(q_i + s_i, t_i)$-оператор, где $s_1 = 0$.

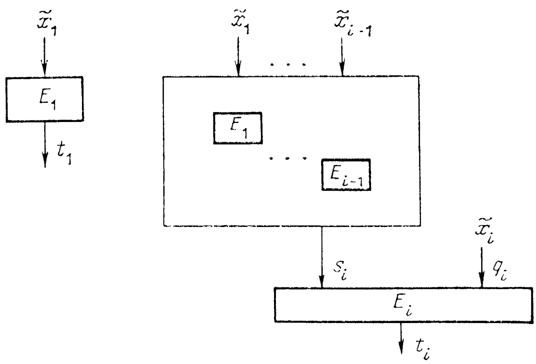

Рис. 4

3) Выходами схемы S являются выходы блока E_r.

4) Каждый из блоков $E_1, \ldots, E_r$ совпадает с одним из r' $(r' < r)$ блоков $G_1, \ldots, G_{r'}$ (т. е. число разных блоков среди $E_1, \ldots, E_r$ равно r').

Блок G_i $(i = 1, \ldots, r')$ реализует $(q_i^0 + s_i^0, t_i^0)$-оператор. Ясно, что

$$(q_i, s_i, t_i) \in \{(q_1^0, s_1^0, t_1^0), (q_2^0, s_2^0, t_2^0), \ldots, (q_{r'}^0, s_{r'}^0, t_{r'}^0)\}.$$

Введем обозначения

$$s = \max_{1 \leqslant i \leqslant r'} s_i^0, \quad t = \max_{1 \leqslant i \leqslant r'} t_i^0, \quad q = \max_{1 \leqslant i \leqslant r'} q_i^0.$$

Теорема 1. *Для оператора F верно неравенство*

$$L^a(F) \leqslant \min \Big\{ NL(S), (a+1)L(S) + aL_2(H^{r,q}) + \\ + a \sum_{i=1}^{r'} L(G_i) + c(r \max(r', s, t) + m) \Big\}.$$

Доказательство. Пусть $a > N - 1$. В этом случае в качестве a-самокорректирующейся схемы для F предлагается схема S', получающаяся из схемы S заменой каждого ненадежного элемента соответствующим надежным элементом (см. замечание на с. 281). Схема S' реализует оператор F и $L(S') = NL(S) < (a+1)L_2(F)$, что удовлетворяет теореме.

Пусть $a \leqslant N - 1$. Рассмотрим схему S^a, представленную на рис. 5 (устройство блока B подробно описано ниже). Далее мы подробно опишем устройство схемы S^a и докажем, что она является a-самокорректирующейся схемой для оператора F.

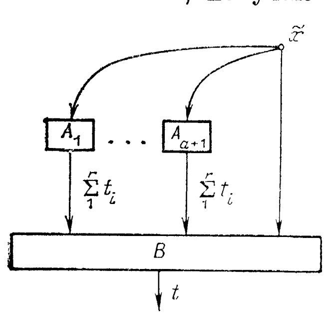

Рис. 5

Все блоки схемы S^a, кроме блоков $A_1, \ldots, A_{a+1}, D_1, \ldots, D_a$, построены из надежных элементов.

Каждый из блоков $A_1, \ldots, A_{a+1}$ состоит из ненадежных элементов и совпадает со схемой S (рис. 4). Если в схеме S^a имеется не более a неисправных элементов, то среди блоков A_j найдется блок, в котором нет неисправных элементов и который правильно вычисляет значение оператора F. Блок B находит этот блок и выдает правильное значение оператора F.

Зафиксируем набор $\tilde{\sigma}$ значений входных переменных $\tilde{x}$. Обозначим набор значений переменных $\tilde{x}_i$ через $\tilde{\sigma}_i$.

Блок A_j ($j=1, \ldots, a+1$) состоит из r блоков $A_{j1}, \ldots, A_{jr}$, совпадающих с блоками $E_1, \ldots, E_r$ схемы S. Обозначим значение выходов блока A_{ji} ($i=1, \ldots, r$) на наборе $\tilde{\sigma}_i$ через $\tilde{\alpha}_i^j$. На входы блока A_{ji} (рис. 6) подаются входной набор $\tilde{\sigma}_i$ и набор $\tilde{\beta}_i^j$ значений выходов блоков $A_{j1}, \ldots, A_{j,i-1}$ (см. п. 2) описания схемы S). Выходами блока A_j являются выходы всех блоков $A_{j1}, \ldots, A_{jr}$, т. е. наборы $\tilde{\alpha}_1^j, \ldots, \tilde{\alpha}_r^j$. Введем обозначения:

$\tilde{\alpha}_i$ ($i=1, \ldots, r$) — правильный набор значений выходов блока E_i схемы S на наборе $\tilde{\sigma}$;

$\tilde{\beta}_i$ ($i=2, \ldots, r$) — правильный набор значений выходов блоков $E_1, \ldots, E_{i-1}$, подаваемых на входы блока E_i (см. п. 2) описания схемы S);

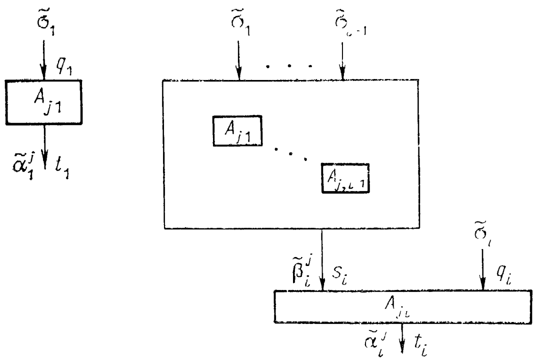

Рис. 6

$\tilde{\alpha}$ — это набор $(\tilde{\alpha}_1^1, \ldots, \tilde{\alpha}_r^1, \ldots, \tilde{\alpha}_1^{a+1}, \ldots, \tilde{\alpha}_r^{a+1})$;

$\tilde{\beta}$ — это набор $(\tilde{\beta}_2^1, \ldots, \tilde{\beta}_r^i, \ldots, \tilde{\beta}_2^{a+1}, \ldots, \tilde{\beta}_r^{a+1})$.

Пусть в схеме S^a имеется a' неисправных элементов. Опишем алгоритм поиска среди блоков $A_1, \ldots, A_{a+1}$ такого блока $A_{\,0}$, который выдает правильное значение $F(\tilde{\sigma})$. Схема S^a построена в соответствии с этим алгоритмом. Поиск числа i_0 заключается в построении последовательности множеств $I_0, I_1, \ldots, I_T$, где $I_0=\{1, 2, \ldots, a+1\}$, $I_0 \supset I_1 \supset \ldots \supset I_T$, I_T таково, что в качестве i_0 можно выбрать любой элемент из I_T (в примере § 1 $I_T=I_3=\{2, 6\}$).

Полагаем $I_0=\{1, \ldots, a+1\}$ (заметим, что здесь $a+1$ — недопустимое число неисправных элементов в S^a). Очевидно, что если все наборы $\tilde{\alpha}_1^1, \ldots, \tilde{\alpha}_1^{a+1}$ совпадают между собой, то они правильные (в противном случае в схеме S^a нашлось бы $a+1$ неисправных элементов, что невозможно по предположению). Тогда на входы блоков $A_{12}, \ldots, A_{a+1,2}$ подаются правильные наборы $\tilde{\beta}_2^1, \ldots, \tilde{\beta}_2^{a+1}$, совпадающие с набором $\tilde{\beta}_2$. Если все наборы $\tilde{\alpha}_2^1, \ldots, \tilde{\alpha}_2^{a+1}$ совпадают между собой, то они также правильные. Сравнивая таким образом выходы блоков $A_{1i}, \ldots, A_{a+1,i}$ ($i=1, 2, \ldots$), придем к одному из следующих двух случаев:

1) для любого i, $1 \leqslant i \leqslant r$, выполняются равенства $\tilde{\alpha}^1 = \ldots = \tilde{\alpha}_i^{a+1}$;

2) не для всякого i выполняются равенства $\tilde{\alpha}^1 = \ldots = \tilde{\alpha}_i^{a+1}$.

В первом случае все наборы $\tilde{\alpha}^1, \ldots, \tilde{\alpha}_i^{a+1}$ правильны, в том числе наборы $\tilde{\alpha}_r^1, \ldots, \tilde{\alpha}_r^{a+1}$, являющиеся выходами блоков $A_1, \ldots, A_{a+1}$, и поэтому в качестве i_0 можно выбрать любое число из множества $I_0 = \{1, \ldots, a+1\}$. Во втором случае найдется число r_1, $1 \leqslant r_1 \leqslant r$, такое, что

$$\tilde{\alpha}_1^1 = \ldots = \tilde{\alpha}_1^{a+1} = \tilde{\alpha}_1,$$
$$\tilde{\alpha}_2^1 = \ldots = \tilde{\alpha}_2^{a+1} = \tilde{\alpha}_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\tilde{\alpha}_{r_1-1}^1 = \ldots = \tilde{\alpha}_{r_1-1}^{a+1} = \tilde{\alpha}_{r_1-1},$$

но не все наборы $\tilde{\alpha}_{r_1}^1, \ldots, \tilde{\alpha}_{r_1}^{a+1}$ совпадают между собой (т. е. не все из них совпадают с $\tilde{\alpha}_{r_1}$). В этом случае дополнительно в блоках $D_1, \ldots, D_{\theta_1}$ (рис. 7) вычисляется набор $\tilde{\alpha}_{r_1}$. Из-за возможности наличия неисправных элементов не все значения выходов блоков $D_1, \ldots, D_{\theta_1}$ равны $\tilde{\alpha}_{r_1}$. Обозначим наборы на выходах $D_1, \ldots, D_{\theta_1}$ через $\tilde{\gamma}^1, \ldots, \tilde{\gamma}^{\theta_1}$. Дополнительные вычисления проводим до тех пор, пока среди наборов $\tilde{\alpha}^1_{r_1}, \ldots$ $\ldots, \tilde{\alpha}^{a+1}_{r_1}, \tilde{\gamma}^1, \ldots, \tilde{\gamma}^{\theta_1}$ не найдется $a+1$ одинаковых. Эти $a+1$ одинаковых наборов равны правильному набору $\tilde{\alpha}_{r_1}$ (так как в противном случае

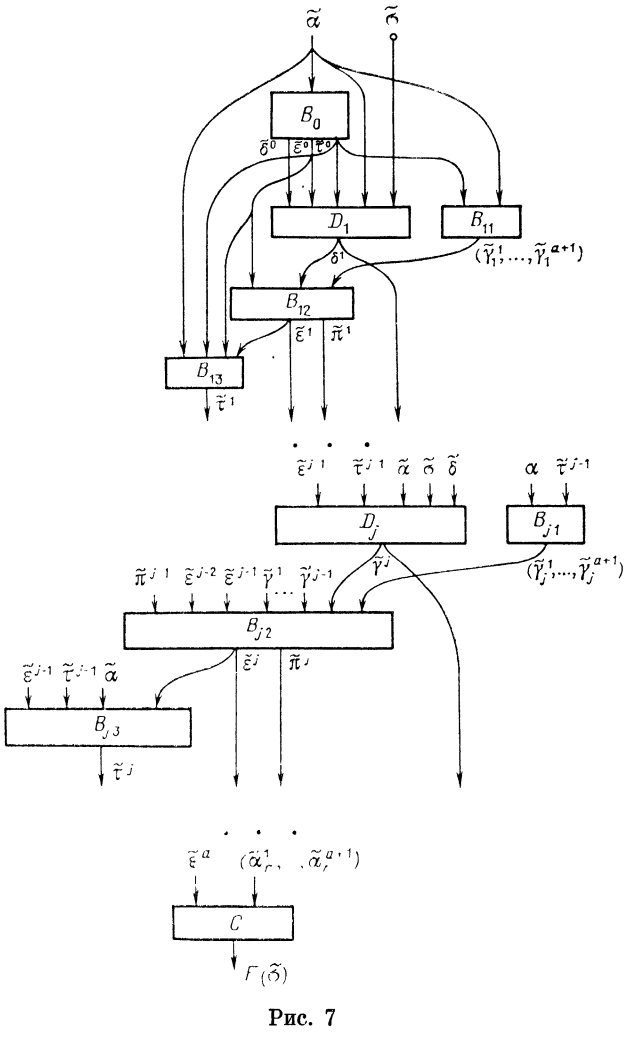

Рис. 7

в схеме S^a нашлось бы $a+1$ неисправных элементов). Остальные θ_1 наборов — неправильные. Следовательно, среди блоков $A_{1r_1}, \ldots, A_{a+1,r_1}$, $D_1, \ldots, D_{\theta_1}$ найдется θ_1 блоков, в каждом из которых имеется неисправный элемент.

Пусть из наборов $\tilde{\alpha}^1_{r_1}, \ldots, \tilde{\alpha}^{a+1}_{r_1}$ правильному набору $\tilde{\alpha}_{r_1}$ равны следующие: $\tilde{\alpha}^{j(1,1)}_{r_1}, \ldots, \tilde{\alpha}^{j(1,\varkappa_1)}_{r_1}$. Полагаем $I_1 = \{j(1, 1), \ldots, j(1, \varkappa_1)\}$ (для примера из § 1 $I_1 = \{2, 4, 5, 6\}$). Понятно, что $I_1 \subset I_0$. В каждом блоке A_j, где $j \notin I_1$, имеется неисправный элемент. Поэтому в блоках $A_{j(1,1)}, \ldots, A_{j(1,\varkappa_1)}, D_{\theta_1+1}, \ldots, D_a$ не может быть $\varkappa_1$ неисправных элементов. Действительно, если бы в этих блоках было бы $\varkappa_1$ неисправных элементов, то, учитывая $a+1-\varkappa_1$ неисправных элементов в блоках A_j, $j \notin I_1$, мы пришли бы к выводу, что в схеме S^a имеется $a+1$ неисправных элементов.

Пусть определены числа $\varkappa_{l-1}$, θ_{l-1}, r_{l-1} и множество $I_{l-1} = \{j(l-1, 1), j(l-1, 2), \ldots, j(l-1, \varkappa_{l-1})\}$. Пусть известно, что

а) в блоках $A_j\,(j \notin I_{l-1}), D_1, \ldots, D_{\theta_{l-1}}$ имеется θ_{l-1} неисправных элементов;

б) в каждом блоке A_j $(j \in I_{l-1})$ имеется неисправный элемент. Тогда в блоках $A_{j(l-1,1)}, \ldots, A_{j(l-1,\varkappa_{l-1})}, D_{\theta_{l-1}+1}, \ldots, D_a$ не может быть $\varkappa_{l-1}$ неисправных элементов. В противном случае в схеме S^a было бы $a+1$ неисправных элементов, что невозможно.

Далее возможны два случая:

1) для любого i, $r_{l-1} \leqslant i \leqslant r$, выполняются равенства

$$\tilde{\alpha}_i^{j(l-1,1)} = \ldots = \tilde{\alpha}_i^{j(l-1,\varkappa_{l-1})};$$

2) не для всякого i выполняются равенства

$$\tilde{\alpha}_i^{j(l-1,1)} = \ldots = \tilde{\alpha}_i^{j(l-1,\varkappa_{l-1})}.$$

В первом случае все наборы $\tilde{\alpha}_i^{j(l-1,1)}, \ldots, \tilde{\alpha}^{j(l-1,\varkappa_{l-1})}$ правильны, в том числе наборы $\tilde{\alpha}_r^{j(l-1,1)}, \ldots, \tilde{\alpha}_r^{j(l-1,\varkappa_{l-1})}$. Поэтому в качестве i_0 можно выбрать любое число из I_{l-1}.

Во втором случае найдется число r_l, $r_{l-1} < r_l \leqslant r$, такое, что

$$\tilde{\alpha}_{r_{l-1}}^{j(l-1,1)} = \ldots = \tilde{\alpha}_{r_{l-1}}^{j(l-1,\varkappa_{l-1})} = \tilde{\alpha}_{r_{l-1}},$$
$$\tilde{\alpha}_{r_{l-1}+1}^{j(l-1,1)} = \ldots = \tilde{\alpha}_{r_{l-1}+1}^{j(l-1,\varkappa_{l-1})} = \tilde{\alpha}_{r_{l-1}+1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\tilde{\alpha}_{r_l-1}^{j(l-1,1)} = \ldots = \tilde{\alpha}_{r_l-1}^{j(l-1,\varkappa_{l-1})} = \tilde{\alpha}_{r_l-1},$$

но не все наборы $\tilde{\alpha}_{r_l}^{j(l-1,1)}, \ldots, \alpha_{r_l}^{j(l-1,\varkappa_{l-1})}$ совпадают между собой (т. е. не все из них совпадают с правильным набором $\tilde{\alpha}_{r_l}$). В этом случае дополнительно в блоках $D_{\theta_{l-1}+1}, \ldots, D_{\theta_l}$ вычисляется набор $\tilde{\alpha}_{r_l}$. Так как блоки $D_1, \ldots, D_a$ построены из ненадежных элементов, то не все значения выходов блоков $D_{\theta_{l-1}+1}, \ldots, D_{\theta_l}$ равны α_{r_l}. Обозначим наборы на выходах блоков D_j $(j = \theta_{l-1}+1, \ldots, \theta_l)$ через $\tilde{\gamma}^j$. Так как в «непросмотренной» части схемы S^a не может быть $\varkappa_{l-1}$ неисправных элементов (см. выше), то дополнительные вычисления проводим до тех пор, пока среди наборов $\tilde{\alpha}_{r_l}^{j(l-1,1)}, \ldots, \tilde{\alpha}_{r_l}^{j(l-1,\varkappa_{l-1})}, \tilde{\gamma}^{\theta_{l-1}+1}, \ldots, \tilde{\gamma}^{\theta_l}$ не найдется $\varkappa_{l-1}$ одинаковых. Эти $\varkappa_{l-1}$ одинаковых наборов равны правильному набору $\tilde{\alpha}_{r_l}$. Остальные $\theta_l - \theta_{l-1}$ наборов — неправильные, т. е. в блоках $A_{j(l-1,1)}, \ldots, A_{j(l-1,\varkappa_{l-1})}, D_{\theta_{l-1}+1}, \ldots, D_{\theta_l}$ имеется $\theta_l - \theta_{l-1}$ неисправных элементов.

Пусть правильному набору $\tilde{\alpha}_{r_l}$ равны следующие наборы $\tilde{\alpha}_{r_l}^{j(l,1)}, \ldots, \tilde{\alpha}_{r_l}^{j(l,\varkappa_l)}$ на выходах блоков $A_{j(l,1),r_l}, \ldots, A_{j(l,\varkappa_l),r_l}$. Полагаем

$$I_l = \{j(l, 1), \ldots, j(l, \varkappa_l)\}.$$

Понятно, что $I_l \subset I_{l-1}$.

Из вышесказанного следует, что в каждом блоке A_j $(j \notin I_l)$ имеется неисправный элемент. Учитывая, что, во-первых, в блоках $A_j\,(j \notin I_{l-1}), D_1, \ldots, D_{\theta_l}$ имеется θ_{l-1} неисправных элементов (п. а) из предположения) и, во-вторых, в блоках A_j $(j \in I_{l-1} \setminus I_l)$, $D_{\theta_{l-1}+1}, \ldots$

$\ldots, D_{\theta_l}$ имеется $\theta_l - \theta_{l-1}$ неисправных элементов, мы заключаем, что в блоках A_j $(j \notin I_l)$, $D_1, \ldots, D_\theta$ имеется θ_l неисправных элементов.

Итак, мы имеем:

а) в блоках $A_j\,(j \notin I_l), D_1, \ldots, D_{\theta_l}$ имеется θ_l неисправных элементов;

б) в каждом блоке A_j $(j \in I_l)$ имеется неисправный элемент.

Пусть число T таково, что для всех $i \geqslant r_T$ выполняются равенства $\tilde{\alpha}_i^{j'} = \tilde{\alpha}_i^{j''}$ для любых $j', j'' \in I_T$ (для примера из § 1 $r_T = r_3 = 6$). Тогда в качестве искомого i_0 можно выбрать любой элемент множества I_T, например $j(T, 1)$, т. е. значение оператора F на наборе $\tilde{\sigma}$ равно $\tilde{\alpha}_r^{j(T,1)}$. Из п. а) следует, что число дополнительных вычислений, т. е. число блоков D_j, не превышает числа допустимых неисправных элементов в схеме S^a. Поэтому для всех дополнительных вычислений будет достаточно блоков $D_1, \ldots, D_a$.

Перейдем к непосредственному описанию блока B схемы S^a (рис. 7). Заметим, что ниже в описании схемы S^a

наборы $\tilde{\varepsilon}^j$ кодируют множества I_l;

наборы $\tilde{T}^j$ кодируют числа r_l.

Блок B_0. Этот блок по набору $\tilde{\alpha}$ выдает наборы $\tilde{\delta}_1, \ldots, \tilde{\delta}_r, \tilde{\varepsilon}^0, \tilde{\tau}^0$. Набор $\tilde{\delta}_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ длины r' кодирует тип блока E_i в схеме S: если блок E_i совпадает с блоком G_k $(1 \leqslant k \leqslant r')$, то набор $\tilde{\delta}_i$ имеет вид: $\tilde{\delta}_i = (0, \ldots, 0, \overset{k}{1}, 0, \ldots, 0)$. Обозначим для удобства набор $(\tilde{\delta}_1, \ldots, \tilde{\delta}_r)$ через $\tilde{\delta}$.

Набор $\tilde{\varepsilon}^0$ длины $a + 1$ кодирует множество I_0, а именно множество номеров единичных компонент набора $\tilde{\varepsilon}^0$ совпадает с множеством I_0: $\tilde{\varepsilon}^0 = (\overbrace{1, \ldots, 1}^{a+1})$. Набор $\tilde{\tau}^0$ длины r кодирует число r_1 и имеет вид

$$\tilde{\tau}^0 = (0, \ldots, 0, \overset{r_1}{1}, 0, \ldots, 0).$$

В случае, если для всех $i = 1, \ldots, r$ выполняются равенства

$$\tilde{\alpha}_i^1 = \tilde{\alpha}_i^2 = \ldots = \tilde{\alpha}_i^{a+1},$$

полагаем $r_1 = r$. Компоненты набора $\tilde{\tau}^0$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \tau_1^0 &= \overline{\mathop{\&}_{j=2}^{a+1} \varphi_{\text{совп}}^{t_1}(\tilde{\alpha}_1^1, \tilde{\alpha}_1^j)}, \\ \tau_i^0 &= \left(\mathop{\&}_{k=1}^{i-1} \bar{\tau}_k\right) \overline{\mathop{\&}_{j=2}^{a+1} \varphi_{\text{совп}}^{t_i}(\tilde{\alpha}_i^1, \tilde{\alpha}_i^j)}, \quad i = 2, \ldots, r-1, \qquad (7) \\ \tau_r^0 &= \mathop{\&}_{k=1}^{r-1} \bar{\tau}_k^0. \end{aligned}$$

Далее при описании блоков схемы S^a будем считать, что $\theta_{l-1} + 1 \leqslant j \leqslant \theta_l$ (см. алгоритм). Отметим, что ниже набор $\tilde{\varepsilon}^{j-1}$ длины $a + 1$ кодирует множество I_{l-1}, а именно: множество единичных компонент набора $\tilde{\varepsilon}^{j-1}$ совпадает с множеством I_{l-1}: $N(\tilde{\varepsilon}^{j-1}) = I_{l-1}$; набор $\tilde{\tau}^{j-1}$ длины r кодирует число r_l:

$$\tilde{\tau}^{j-1} = (0, \ldots, 0, \overset{r_l}{1}, 0, \ldots, 0).$$

Блок D_j (рис. 8). Этот блок состоит из ненадежных элементов и при отсутствии неисправных элементов в нем вычисляет набор $\tilde{\alpha}_{r_l}$. Описание работы D_j приведем для случая отсутствия неисправных элементов в блоке. Блок D_j состоит из шести блоков $D_{j1}, \ldots, D_{j6}$.

Блок D_{j1} вычисляет наборы $\widetilde{\beta}^1_{r_l}, \ldots, \widetilde{\beta}^{a+1}_{r_l}$. Он состоит из $a+1$ блоков $D^1_{j1}, \ldots, D^{a+1}_{j1}$. Блок D^k_{j1} $(k = 1, \ldots, a+1)$ по наборам $\widetilde{\beta}^k_2, \ldots, \widetilde{\beta}^k_r$ и $\widetilde{\tau}^{j-1}$ выдает набор $\widetilde{\lambda}^r_j$ длины S, который равен набору $\left(\widetilde{\beta}^k_{r_l}, \widetilde{0}\right)$ или нулевому набору $\widetilde{0}$ (при $r_l = 1$) и вычисляется по формуле

$$\widetilde{\lambda}^k_j = H^{r-1,s}\left(\widetilde{\beta}^k_2, \ldots, \widetilde{\beta}^k_r;\ \left(\tau^{j-1}_2, \ldots, \tau^{j-1}_r\right)\right). \tag{8}$$

Блок D_{j2} по $\widetilde{\lambda}^1_j, \ldots, \widetilde{\lambda}^{a+1}_j$ и $\widetilde{\varepsilon}^{j-1}$ выдает набор $\widetilde{\lambda}^j$ длины s, который равен $\left(\widetilde{\beta}^k_{r_l}, \widetilde{0}\right)$, где $k \in I_{l-1}$, т. е. правильному набору $\left(\widetilde{\beta}_{r_l}, \widetilde{0}\right)$. Набор $\widetilde{\lambda}^j$ вычисляется по формуле

$$\widetilde{\lambda}^j = H^{a+1,s}\left(\widetilde{\lambda}^1_j, \ldots, \widetilde{\lambda}^{a+1}_j;\ \widetilde{\varepsilon}^{j-1}\right). \tag{9}$$

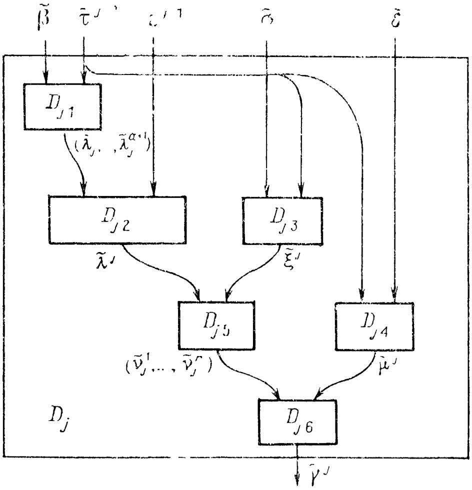

Рис. 8

Блок D^{j3} по $\widetilde{\sigma}_1, \widetilde{\sigma}_2, \ldots, \widetilde{\sigma}_r$ и $\widetilde{\tau}^{j-1}$ выдает набор $\widetilde{\xi}^j$ длины q, который равен $\left(\widetilde{\sigma}_{r_l}, \widetilde{0}\right)$ и вычисляется по формуле

$$\widetilde{\xi}^j = H^{r,q}(\widetilde{\sigma}_1, \ldots, \widetilde{\sigma}_r;\ \widetilde{\tau}^{j-1}). \tag{10}$$

Блок D_{j4} по $\widetilde{\delta}_1, \ldots, \widetilde{\delta}_r$ и $\widetilde{\tau}^{j-1}$ выдает набор $\widetilde{\mu}^j$ длины r', который равен $\widetilde{\delta}_{r_l}$ и вычисляется по формуле

$$\widetilde{\mu}^j = H^{r,r'}\left(\widetilde{\delta}_1, \ldots, \widetilde{\delta}_r;\ \widetilde{\tau}^{j-1}\right). \tag{11}$$

Блок D_{j5} состоит из r' блоков $D^1_{j5}, \ldots, D^{r'}_{j5}$, которые совпадают с блоками $G_1, \ldots, G_{r'}$ соответственно. Так как заранее неизвестно, с каким из блоков $G_1, \ldots, G_{r'}$ совпадает блок E_{r_l} (заранее не известно число r_l), то в блоке D_{j5} вычисляются значения на выходах всех блоков $G_1, \ldots, G_{r'}$. На входы каждого блока D^k_{j5} $(k = 1, \ldots, r')$ подаются $\widetilde{\lambda}^j$ и $\widetilde{\xi}^j$ (точнее, начала этих наборов: первые s^0_k и q^0_k компонент соответственно). Напомним, что при отсутствии неисправных элементов в D_j наборы $\widetilde{\lambda}^j$ и $\widetilde{\xi}^j$ равны соответственно наборам $\overbrace{\left(\widetilde{\beta}_{r_l}, \widetilde{0}\right)}^{s}$ и $\overbrace{\left(\widetilde{\sigma}_{r_l}, \widetilde{0}\right)}^{s}$. На выходах блока B^k_{j5} реализуется набор $\widetilde{\nu}^j_k$ длины t^0_k. На выходе блока $D^{N_1(\widetilde{\mu}^j)}_{j5}$ (число $N_1(\widetilde{\mu}^j)$ равно $N_1\left(\widetilde{\delta}_{r_l}\right)$, т. е. номеру блока из множества $G_1, \ldots, G_{r'}$, с которым совпадает блок E_{r_l} схемы S) будет реализован набор $\widetilde{\alpha}_{r_l}$, т. е.

$$\widetilde{\nu}_j^{N_1(\widetilde{\mu}^j)} = \widetilde{\alpha}_{r_l}.$$

Блок D_{j6} по $\widetilde{\nu}^1_j, \ldots, \widetilde{\nu}^{r'}_j$ и $\widetilde{\mu}^j$ отбирает нужный набор $\widetilde{\alpha}_{r_l}$, а именно: выдает набор $\widetilde{\gamma}^j$ длины t, который равен $\left(\widetilde{\nu}_j^{N_1(\widetilde{\mu}^j)}, \widetilde{0}\right) = \left(\widetilde{\alpha}_{r_l}, \widetilde{0}\right)$. Набор $\widetilde{\gamma}^j$ вычисляется по формуле

$$\widetilde{\gamma}^j = H^{r',t}\left(\widetilde{\nu}^1_j, \ldots, \widetilde{\nu}^{r'}_j;\ \widetilde{\mu}^j\right). \tag{12}$$

Итак, при отсутствии неисправных элементов в блоке D_j на его выходах реализуется набор $\big(\tilde{\alpha}_{r_l}, \overbrace{\tilde{0}}^{t}\big)$, т. е. блок D_j дублирует работу блока E_{r_l} схемы S.

Блок B_{j1}. Этот блок состоит из $a+1$ блоков $B_{j1}^1, \ldots, B_{j1}^{a+1}$. Блок B_{j1}^k $(k=1, \ldots, a+1)$ по $\tilde{\alpha}_1^k, \ldots, \tilde{\alpha}_r^k$ и $\tilde{\tau}^{j-1}$ отбирает $\tilde{\alpha}_{r_l}^k$, точнее, на его выходах реализуется набор $\tilde{\gamma}_j^k$ длины l, равный $\big(\tilde{\alpha}_{r_l}^k, \tilde{0}\big)$. Верна формула

$$\tilde{\gamma}_j^k = H^{r,t}\big(\tilde{\alpha}_1^k, \ldots, \tilde{\alpha}_r^k;\ \tilde{\tau}^{j-1}\big). \tag{13}$$

Блок B_{j2}. В описании алгоритма отмечалось, что дополнительные вычисления набора $\tilde{\alpha}_{r_l}$ производятся $\theta_l - \theta_{l-1}$ раз до появления $\varkappa_{l-1}$ одинаковых наборов. Каждое дополнительное вычисление реализуется, как описывалось выше, в одном из блоков $D_{\theta_{l-1}+1}, \ldots, D_{\theta_l}$. Необходимо запомнить номера $\theta_{l-1}+1, \ldots, j$ блоков $D_{\theta_{l-1}+1}, \ldots, D_j$, в которых уже произведены дополнительные вычисления. Это «запоминание» осуществляется блоком B_{j2}. Кроме того, в блоке B_{j2} кодируется множество I_{l-1}. На входы B_{j2} подаются наборы $\tilde{\gamma}_j^1, \ldots, \tilde{\gamma}_j^{a+1}, \tilde{\gamma}^1, \ldots, \tilde{\gamma}^j, \tilde{\pi}^{j-1}, \tilde{\varepsilon}^{j-2}, \tilde{\varepsilon}^{j-1}$. На выходах B_{j2} реализуется набор $\tilde{\pi}^j$ длины a, который «запоминает» номера $\theta_{l-1}+1, \ldots, j$, и набор $\tilde{\varepsilon}^j$ длины $a+1$, кодирующий множество I_{l-1}. У набора $\tilde{\pi}^j$ компоненты с номерами $\theta_{l-1}+1, \ldots, j$ равны 1, остальные равны 0: $\tilde{\pi}^j = (0, \ldots, 0, \overset{\theta_{l-1}+1}{1}, 1, \ldots, \overset{j}{1}, 0, \ldots, 0)$. Компоненты набора $\tilde{\pi}^j$ можно выразить формулами

$$\pi_k^j = \varphi_{\text{совп}}^{a+1}\big(\tilde{\varepsilon}^{j-2}, \tilde{\varepsilon}^{j-1}\big)\cdot \overline{R}^{a+j+1,t,a+1}\big(\tilde{\gamma}_j^1, \ldots, \tilde{\gamma}_j^{a+1}, \tilde{\gamma}^1, \ldots, \tilde{\gamma}^j;$$
$$\big(\tilde{\varepsilon}^{j-1}, \pi_1^{j-1}, \ldots, \pi_{j-1}^{j-1}, 1\big);\ \tilde{\varepsilon}^{j-1}\big)\pi_k^{j-1} \quad \text{при } k<j, \tag{14}$$
$$\pi_j^j = 1, \quad \pi_k^j = 0 \quad \text{при} \quad k>j.$$

Набор $\tilde{\varepsilon}^j$ при $\theta_{l-1}+1 \leqslant j < \theta_l$ кодирует множество I_{l-1}, а при $j=\theta_l$ — множество I_l: если $k \in I_{l-1}$ $(k \in I_l$ при $j=\theta_l)$, то k-я компонента набора $\tilde{\varepsilon}^j$ равна 1, в противном случае k-я компонента равна 0. Ясно, что $\tilde{\varepsilon}_k^j = 1$ тогда и только тогда, когда:

во-первых, $k \in I_{l-1}$;

во-вторых, либо в множестве $\{\tilde{\gamma}_j^t, t \in I_{l-1}\} \cup \{\tilde{\gamma}^v, \theta_{l-1}+1 \leqslant v \leqslant j\}$ нет $\varkappa_{l-1}$ одинаковых наборов (т. е. $j<\theta_l$), либо в множестве $\{\tilde{\gamma}_j^t, t \in I_{l-1}\} \cup \{\tilde{\gamma}^v, \theta_{l-1}+1 \leqslant v \leqslant j\}$ есть $\varkappa_{l-1}$ одинаковых (т. е. $j=\theta_l$), и набор $\tilde{\gamma}_j^k$ является одним из них.

Поэтому верны формулы

$$\varepsilon_k^j = \varepsilon_k^{j-1}\big[Q^{a+1+j,t,a+1}\big(\tilde{\gamma}_j^k;\ \tilde{\gamma}_j^1, \ldots, \tilde{\gamma}_j^{a+1}, \tilde{\gamma}^1, \ldots, \tilde{\gamma}^j;\ \big(\tilde{\varepsilon}^{j-1}\pi_1^j, \ldots, \pi_j^j\big);\ \tilde{\varepsilon}^{j-1}\big) \vee$$
$$\vee\ \overline{R}^{a+1+j,t,a+1}\big(\tilde{\gamma}_j^1, \ldots, \tilde{\gamma}_j^{a+1}, \tilde{\gamma}^1, \ldots, \tilde{\gamma}^j;\ \big(\tilde{\varepsilon}^{j-1}, \pi_1^j, \ldots, \pi_j^j\big);\ \tilde{\varepsilon}^{j-1}\big)\big], \tag{15}$$
$$k=1, \ldots, a+1.$$

Блок B_{j3}. Этот блок по $\tilde{\alpha}, \tilde{\varepsilon}^{j-1}, \tilde{\varepsilon}^j, \tilde{\tau}^{j-1}$ выдает набор $\tilde{\tau}^j$, который кодирует

либо r_l при $\theta_{l-1}+1 \leqslant j < \theta_l$: $\tilde{\tau}^j = (0, \ldots, 0, \overset{r_l}{1}, 0, \ldots, 0)$,

либо r_{l+1} при $j=\theta_l$: $\tilde{\tau}^j = (0, \ldots, 0, \overset{r_{l+1}}{1}, 0, \ldots, 0)$.

Ясно, что

$$\tilde{\tau}^j = \begin{cases} \tilde{\tau}^{j-1} \text{ при } \tilde{\varepsilon}^{j-1} = \tilde{\varepsilon}^j \text{ или при равенстве наборов } \tilde{\alpha}_r^v, v \in I_l, \\ (0, \ldots, 0, \overset{k}{1}, 0, \ldots, 0) \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь $k = \min\{i | i > r_l\}$, не все наборы $\tilde{\alpha}_i^v, v \in I_l$, равны между собой. Компоненты набора $\tilde{\tau}^j$ вычисляются по следующим формулам (в которых сомножитель $S_{i-1}^1(\tau_1^{j-1}, \ldots, \tau_{i-1}^{j-1})$ соответствует условию $i > r_l$, т. е. $i > N_1(\tilde{\tau}^{j-1})$, а сомножитель $S_{i-1}^0(\tau_1^j, \ldots, \tau_{i-1}^j)$ — условию, что в наборе $\tilde{\tau}^j$ не может быть двух единиц):

$$\tau_i^j = \Big[\varphi_{\text{совп}}^{a+1}(\tilde{\varepsilon}^{j-1}, \tilde{\varepsilon}^j) \vee \mathop{\&}_{1 \leqslant v', v'' \leqslant a+1} (\bar{\varepsilon}_{v'}^j \vee \varphi_{\text{совп}}^{a+1}(\tilde{\alpha}_r^{v'}, \tilde{\alpha}_r^{v''}) \vee \bar{\varepsilon}_{v''}^j)\Big] \tau_i^{j-1} \vee$$
$$\vee \Big[\bar{\varphi}_{\text{совп}}^{a+1}(\tilde{\varepsilon}^{j-1}, \tilde{\varepsilon}^j) \mathbin{\&} \bigvee_{1 \leqslant u', u'' \leqslant a+1} (\varepsilon_{u'}^j \varepsilon_{u''}^j \bar{\varphi}_{\text{совп}}^{a+1}(\tilde{\alpha}_i^{u'}, \tilde{\alpha}_i^{u''}))\Big] \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} S_{i-1}^1(\tau_1^{j-1}, \ldots, \tau_{i-1}^{j-1}) S_{i-1}^0(\tau_1^j, \ldots, \tau_{i-1}^j); \quad i = 1, \ldots, r. \qquad (16)$$

Здесь $S_0^0 \equiv 1$, $S_0^1 \equiv 0$.

Блок C (рис. 7). Этот блок, на входы которого подаются наборы $\tilde{\alpha}_r^1, \ldots, \tilde{\alpha}_r^{a+1}, \tilde{\varepsilon}^a$, из множества $\{\tilde{\alpha}_r^1, \ldots, \tilde{\alpha}_r^{a+1}\}$ выбирает значение правильного набора, заведомо имеющегося в этом множестве. На выходах C реализуется набор $\tilde{\varphi}$ длины m, определяемый так:

$$\varphi = H^{a+1, m}(\tilde{\alpha}_r^1, \ldots, \tilde{\alpha}_r^{a+1}; \tilde{\varepsilon}^a). \qquad (17)$$

То, что описанная схема S^a является a-самокорректирующейся, непосредственно следует из изложенного выше алгоритма самокорректирования и построения схемы.

Подсчитаем сложность схемы S^a. Очевидно, что

$$\sum_{j=1}^{a+1} L(A_j) = (a+1) L(S).$$

Далее учтем, что a — константа. Из (2) и (7) следует, что

$$L(B_0) \leqslant c_6 rt.$$

Из (10) и описания блоков D_{j5} следует, что

$$L(D_{j3}) = L_2(H^{r,q}), \quad L(D_{j5}) = \sum_{i=1}^{r'} L(G_i), \quad j = 1, \ldots, a.$$

Из (4), (8), (9), (11), (12) получаем

$$L(D_{j1}) + L(D_{j2}) + L(D_{j4}) + L(D_{j6}) \leqslant c_7 r \max(r', s, t), \quad j = 1, \ldots, a.$$

Тогда

$$L(D_j) \leqslant L_2(H^{r,q}) + \sum_{i=1}^{r'} L(G_i) + c_7 r \max(r', s, t), \quad j = 1, \ldots, a.$$

Из (1), (4)—(6), (13)—(16) получаем

$$L(B_{j1}) + L(B_{j2}) + L(B_{j3}) \leqslant c_8 rt.$$

Сложность блока C оцениваем по (17):

$$L(C) \leqslant c_9 m.$$

Следовательно,

$$L(S^a) \leqslant (a+1)L(S) + aL_2(H^{r,q}) + a\sum_{i=1}^{r'} L(G_i) + c(r\max(r', s, t) + m).$$

Теорема доказана

Теорема 2. *Пусть*

$$\sum_{i=1}^{r'} L(G_i) = o(n); \quad r\max(r', s, t) = o(n); \quad m = o(n);$$

$$L_2(H^{r,q}) \leqslant \varepsilon L_2(F), \quad \text{где} \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Тогда

$$L^a(F) \leqslant ((1+\varepsilon)a + 1)L_2(F).$$

Доказательство следует из теоремы 1.

Следствие. *Для базиса* $Б = \{\&, \vee, {}^-\}$ *верна оценка*

$$L^a(\varphi^n_{\text{срав}}) \leqslant (1{,}8a + 1)5n \sim (1{,}8a + 1)L_2(\varphi^n_{\text{срав}}).$$

Доказательство. Известно [11], что $L_2(\varphi^n_{\text{срав}}) = 5n - 3$, причем существует минимальная схема для $\varphi^n_{\text{срав}}$, для которой выполняются условия теорем 1 и 2, где $q = [2n/r]$. Из (3) следует, что $L_2(H^{r,q}) \leqslant 2rq \leqslant 4n$. Очевидно, что $m = 1$ ($\varphi^n_{\text{срав}}$ является $(2n, 1)$-оператором) и $\varepsilon = 0{,}8$. Отсюда и из теоремы 2 следует требуемое неравенство.

В частности, изложенный метод позволяет построить 1-самокорректирующуюся схему для $\varphi^n_{\text{срав}}$, сложность которой асимптотически не превышает $14n$, в то время как при тривиальном способе самокорректирования сложность схемы асимптотически не меньше чем $15n$.

В заключение автор выражает благодарность Н. П. Редькину за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев А. Е. О синтезе самокорректирующихся управляющих систем // ДАН СССР.— 1984.— Т. 227. № 3.— С. 521—525.
2. Кириенко Г. И. О самокорректирующихся схемах из функциональных элементов // Проблемы кибернетики. Вып. 12.— М.: Наука, 1964.— С. 29—37.
3. Кириенко Г. И. Синтез самокорректирующихся схем из функциональных элементов для случая растущего числа ошибок в схеме // Дискретный анализ. Вып. 16.— Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1970.— С. 38—43.
4. Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем.— М.: Изд-во МГУ. 1984.
5. Лупанов О. Б. Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования // Проблемы кибернетики. Вып. 14.— М.: Наука, 1965.— С. 31—110.
6. Мадатян Х. А. О синтезе схем корректирующих размыкание контактов // ДАН СССР.— 1964.— Т. 159, № 2.— С. 290—293.
7. Нечипорук Э. И. О корректировании обрывов в вентильных и контактных схемах // Кибернетика.— 1968.— № 5.— С. 40—48.
8. Нечипорук Э. И. О топологических принципах самокорректирования // ДАН СССР.— 1968.— Т. 179 № 4.— С. 786—789.
9. Нечипорук Э. И. О топологических принципах самокорректирования // Проблемы кибернетики. Вып. 21.— М.: Наука, 1968.— С. 5—102.
10. Потапов Ю. Г., Яблонский С. В. О синтезе самокорректирующихся контактных схем // ДАН СССР.— 1960.— Т. 134, № 3.— С. 544—547.
11. Редькин Н. П. Доказательство минимальности некоторых схем из функциональных элементов // Проблемы кибернетики. Вып. 23.— М.: Наука, 1970.— С. 83—101.
12. Редькин Н. П. О самокорректировании контактных схем // Проблемы кибернетики. Вып 33.— М.: Наука, 1978.— С. 119—138.
13. Редькин Н. П. О самокорректировании контактных схем // Проблемы кибернетики. Вып. 36.— М.: Наука, 1979.— С. 195—208.

14. Турдалиев Н. И. О самокорректировании схем для некоторых последовательностей булевых функций // Дискретная математика.— 1989.— Т. 1, вып. 3.— С. 77—86.
15. Турдалиев Н. И. О схемах, самокорректирующихся относительно однотипных константных неисправностей // Дискретный анализ. Вып. 49.— Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1989.— С. 60—74.
16. Турдалиев Н. И. О самокорректирующихся схемах из функциональных элементов для линейной функции // Дискретная математика.— 1990.— Т. 2, вып. 2.— С. 150—154.
17. Улиг Д. О синтезе самокорректирующихся схем из функциональных элементов с малым числом надежных элементов // Мат. заметки.— 1974.— Т. 15, № 6.— С. 937—944.
18. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику.— М.: Наука, 1986.
19. Яблонский С. В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1.— М.: Наука, 1988.— С. 5—25.

Поступило в редакцию 3 IV 1991

ХРОНИКА

СЕМИНАР ПО КИБЕРНЕТИКЕ В МГУ

В 1989/90 учебном году в МГУ продолжал работать семинар по математическим вопросам кибернетики под руководством чл.-кор. АН СССР С. В. Яблонского. В течение года было проведено 21 заседание, на которых заслушаны следующие доклады.

Горская И. В. Парадоксы материальной импликации и естественные логические формулы. (06.10.89). См. Математические вопросы кибернетики. Вып. 4.— М.: Наука, 1991.

Касим-Заде О. М. О реализации булевых функций в одной модели электронных схем. (13.10.89). См. Математические вопросы кибернетики. Вып. 2.— М.: Наука, 1989.

Кудрявцев Г. Ю. Об анализе геометрических структур при помощи автоматов. (20.10.89). См. Материалы всесоюзного семинара по дискретной математике и ее приложениям.— М.: МГУ, 1989.

Марков А. А., Смирнова Т. Г. Вопросы локально-префиксного кодирования. (27.10.89). См. Дискретная математика.— 1989.— Т. 1, вып. 3; Дискретная математика.— 1990.— Т. 2, вып. 2.

Асратян А. С., Мирумян А. Н. Полные системы преобразований для некоторых классов комбинаторных объектов. (03.11.89). См. Дискретная математика.— 1990.— Т. 2, вып. 3.

Турдалиев Н. И. Самокорректирующиеся схемы из функциональных элементов для некоторых последовательностей булевых функций. (17.11.89). См. Дискретная математика.— 1989.— Т. 1, вып. 3; Дискретная математика.— 1990.— Т. 2, вып. 2.

Захаров В. А. К вопросу о построении алгоритма канонизации для схем программ. (24.11.89).

Схема программы называется свободной в заданной семантике, если любой путь в схеме реализуем. Свободная схема программы называется сильно-свободной, если на любом этапе каждого пути в схеме значения логических переменных восстанавливаются однозначно. Установлено, что класс семантик, удовлетворяющих условию сильно-свободной схемы, строго содержится в классе семантик, удовлетворяющих условию свободной схемы. Исследованы вопросы инвариантности условия сильно-свободной схемы при различных преобразованиях схемного базиса.

Данг Зуй Руан. О сложности автоматных реализаций регулярных и сверхрегулярных языков. (01.12.89). См. Дискретная математика.— 1989.— Т. 1, вып. 4.

Доу Ж. О функциональных системах предикатов Постовского типа. (08.12.89). См. Дискретная математика.— 1990.— Т. 2, вып. 4.

Левенштейн В. И. Совершенные коды с исправлением одиночных выпадений и упорядоченной системой Штейнера. (16.02.90). См. Дискретная математика.— 1991.— Т. 3, вып. 1.

Япов Ю. И. Об одном методе получения нижних оценок времени вычислений на машинах Тьюринга. (02.03.90). См. Дискретная математика.— 1990.— Т. 2, вып. 1.

Марченков С. С. О равномерном *id*-разложении булевых функций. (11.03.90). См. Дискретная математика.— 1990.— Т. 2, вып. 3.

Гоцко Б. З. О расшифровке пороговых функций. (16.03.90). См. Материалы всесоюзного семинара по дискретной математике и ее приложениям.— М.: Изд-во МГУ, 1989.

Чухров И. П. О пространствах, порожденных случайными ± 1 векторами. (23.03.90).

Рассматривалась следующая задача. Пусть даны m случайных векторов длины n, компоненты которых равны ± 1. Посчитать вероятность того, что линейная комбинация с вещественными коэффициентами из этих векторов дает ± 1 вектор, отличный от исходных и их отрицаний. Ранее эта задача была решена в работе Odlyzko A. M. On subspaces spaned by random selections of ± 1 vectors. Journal of combinatorial theory.— Series A-47.— 1988.— Vol. 17.— N 1. Здесь же предложено новое, более короткое и прозрачное решение этой задачи.

Зуев Ю. А. О числе пороговых функций. (30.03.90). См. ДАН СССР.— 1989— Т. 306, № 3.

Сапоженко А. А. О диаметре и радиусе случайных подграфов n-мерного двоичного куба. (06.04.90). Получены верхние и нижние оценки диаметра и радиуса для почти всех случайных подграфов n-мерного двоичного куба. Результаты получены докладчиком совместно с К. Вебером.

Строгалов А. С. О регулярных языках с полиномиальным характером роста длин слов. (13.06.90). См. Дискретная математика.— 1990.— Т. 2, вып. 3.

Гашков С. Б. О сложности приближенной реализации функциональных компактов в некоторых пространствах с базисом и о существовании функций с заданной по порядку сложностью. (20.04.90).

Для ряда семейств функциональных компактов найдены оценки сложности приближенного вычисления принадлежащих им функций схемами в некоторых полиномиальных, рациональных и «сплайновых» базисах, как конечных, так и континуальных. Во многих случаях доказано, что эти оценки асимптотически точны для почти всех функций из рассматриваемых компактов (относительно некоторой колмогоровской меры).

Сидельников В. М. О декодировании кодов Рида — Маллера при большом числе ошибок. (04.05.90).

Предложены новые алгоритмы для декодирования кодов Рида — Маллера. Проведено исследование свойств алгоритмов, найдена их сложность, даны результаты численных экспериментов с алгоритмами. Результаты получены докладчиком совместно с Першаковым А. С.

Зыричев А. Н. Универсальный подход для лабиринтов с ограниченными «дырами». (11.05.90). См. Дискретная математика.— 1991.— Т. 3, вып. 1.

Стеценко В. А. О предмаксимальных базисах в P_2. (18.05.90). См. ДАН СССР.— 1990.— Т. 315, № 6.

IV МЕЖГОСУДАРСТВЕННЫЙ СЕМИНАР ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯМ

Со 2 по 4 февраля 1993 г. механико-математический факультет МГУ проводил IV Межгосударственный семинар по дискретной математике и ее приложениям. Семинар собрал более 250 участников (из них 38 докторов наук) из 34 научных центров России, Украины, Беларуси, Молдовы, Узбекистана и Армении.

Работа семинара проходила в пяти секциях — синтез управляющих систем и сложность вычислений, комбинаторный анализ и смежные вопросы (с подсекциями по теории графов и дискретной геометрии), теория функциональных систем, интеллектуальные системы и автоматы, теория кодирования.

Было заслушано 16 пленарных и 135 секционных докладов.

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

О. Б. Лупанов (Москва). Асимптотический подход к задачам теории сложности.

В. М. Сидельников (Москва). Декодирование кодов Рида — Маллера и Рида — Соломона — проблемы и достижения.

С. С. Марченков (Москва). Проблема полноты для итеративных алгебр Поста.

Е. Г. Белоусов (Москва). Овраги, функции и некоторые вопросы целочисленных решеток.

В. Б. Кудрявцев (Москва). О поведении автоматов в геометрических средах.

В. С. Анашин (Москва). Равномерно распределенные последовательности целых p-адических чисел.

А. А. Нечаев (Москва). Рекуррентные последовательности над квазифробениусовыми модулями.

О. Н. Василенко (Москва). Факторизация целых чисел.

И. А. Семаев (Москва). Оценки сложности алгоритмов логарифмирования на абелевых многообразиях, определенных над конечными полями, и в конечных полях.

Р. И. Подловченко (Ереван). От схем рекурсивных программ к схемам программ без рекурсий.

А. А. Сапоженко (Москва). Метод граничных функционалов в изопериметрических задачах.

А. Е. Андреев (Волгоград). Градиентные методы синтеза управляющих систем.

С. Б. Гашков (Москва). О сложности приближенного вычисления непрерывных функций.

А. Б. Угольников (Москва). Сложность функций из замкнутых классов.

А. С. Подколзин (Москва). Принципы построения интеллектуальных систем для автоматического решения задач.

Ю. Н. Черемных (Москва). Теоретические и прикладные модели экономической динамики.

СЕКЦИОННЫЕ ДОКЛАДЫ

Синтез управляющих систем и сложность вычислений

Ф. М. Аблаев (Казань). Нижняя оценка сложности для вероятностных коммуникационных протоколов.

М. А. Алехина (Пенза). Синтез надежных схем из ненадежных двухвходовых функциональных элементов.

С. Ф. Винокуров, Ю. В. Манцивода, Н. А. Перязев (Иркутск). Метод минимизации булевых функций в классах нормальных форм методом разложения и его программная реализация.

С. Ф. Винокуров, Н. А. Перязев (Иркутск). Полиномиальные разложения булевых функций по смешанным операторам.

С. Б. Гашков, В. В. Кочергин (Москва). О сложности вычисления степеней и целочисленных линейных форм.

М. И. Гринчук (Москва). Формулы глубины 3 моделируются схемами ширины 2.

К. А. Зыков (Москва). О сложности реализации систем булевых функций, удовлетворяющих некоторым ограничениям на структуру существенных переменных.

М. Г. Зырянов (Москва). О сложности реализации систем ортогональных функций ориентированными итеративными контактными схемами.

П. И. Ильин (Казань). Нижние оценки функций специального вида в классе формул глубины 3.

О. М. Касим-Заде (Москва). О мощности индивидуальных функций.

Р. М. Колпаков (Москва). О порождении некоторых классов рациональных чисел вероятностными контактными сетями.

Н. К. Косовский (Санкт-Петербург). Сложность разрешимости систем ПИ-сравнений по модулю два.

Ли Да Мин (Китай). О сложности реализации деревьев клеточными схемами.

С. А. Ложкин (Москва). О сложности реализации некоторых систем функций многослойными клеточными схемами.

Н. М. Моржаков (Нижний Новгород). Об экспоненциальной нижней оценке сложности схемного представления множества единиц булевой функции.

М. Ю. Мошков (Нижний Новгород). Локальный подход к исследованию деревьев решений.

В. А. Мощенский (Минск). Существенная сложность вычисления на машинах Тьюринга.

В. Н. Носков (Новосибирск). Приведение схем из функциональных элементов к виду, удобному для контроля.

Н. Н. Нурмеев (Казань). Оценки сложности реализации преобразователей вероятностей схемами из функциональных элементов.

Е. А. Окольнишникова (Новосибирск). О нижних оценках для бинарных программ.

Н. А. Перязев (Иркутск). Реализация булевых функций бесповторными формулами.

Э. Е. Рубцова (Ярославль). Разработка методов формализованного анализа систем, представленных функциональными схемами, сетями Петри на основе эквивалентных преобразований.

А. И. Рыбко, О. А. Задорожнюк (Москва). Об одной модели плоских контактных схем.

И. О. Соколов (Москва). Верхняя оценка сложности для схем без нулевых цепей, реализующих характеристические функции групповых кодов.

С. Е. Степанов (Калуга). Идентификация нелинейных систем управления с использованием дискретизации, основанной на разложении в ряды Фурье — Чебышева.

В. П. Супрун (Минск). Нижняя оценка функции Шеннона в классе канонических поляризованных полиномов.

М. В. Черкашин (Москва). Об асимптотических оценках сложности для классов функций, связанных с языками.

Комбинаторный анализ

В. А. Емеличев, М. К. Кравцов (Минск). Задачи векторной оптимизации на системах подмножеств.

И. А. Ефимов (Москва). Быстро декодируемые коды с минимальным расстоянием 6.

А. А. Запорожец (Минск). Полиномиально-оракульный алгоритм максимизации вогнутой сепарабельной функции на целых точках полиматроида.

А. Н. Исаченко (Минск). Полиэдральный подход к задаче о максимальном разрезе графа.

А. М. Каменецкий (Москва). Решение проблемы димеров произвольной размерности.

М. М. Ковалев, А. В. Мощенский (Минск). Сложность вычисления максимума выпуклой функции дискретного аргумента.

В. Б. Колесов (Мурманск). Решетка частичных порядков длины $\leqslant 1$ на конечном множестве.

Г. Н. Копылов (Волгоград). Об одной экстремальной задаче теории чисел.

А. Д. Коршунов (Новосибирск). О линейных расширениях частично упорядоченных множеств.

М. К. Кравцов (Минск). Новые результаты полиэдральной комбинаторики в транспортных задачах.

О. В. Кузьмин (Иркутск). Обобщенная пирамида Паскаля.

А. Д. Лумпов (Глазов). Обратимые C-квазигруппы.

А. Е. Малых (Пермь). Обзор конечных геометрий (основные результаты, открытые проблемы).

Е. Е. Маренич (Мурманск). Редуцированные алгебры пересечений конечного множества.

Л. И. Пантелеева (Курск). Об исследовании одного класса квазигрупп.

А. Я. Петренюк (Кировоград). О спектре максимальных совершенных семейств 1-факторов в полных графах.

В. И. Петренюк (Кировоград). Характеризация 3-минимальных плоских графов.

В. К. Пулатов (Ташкент). Комбинаторно-методическая теория выпуклого многогранника.

А. М. Ревякин (Москва). О некоторых открытых проблемах в теории матроидов.

С. Г. Сальников (Москва). Вложимость в разбиение с ограниченными частями.

А. В. Угланов (Ярославль). Преферанс вслепую.

В. С. Шевелев (Ростов-на-Дону). Перечисление перестановок с ограниченными позициями и заданной цикловой структурой.

В. Н. Шевченко, А. Ю. Чирков (Нижний Новгород). О сложности ЗЦЛП.

В. Д. Шматков (Москва). Изоморфизмы алгебр инцидентности.

Теория функциональных систем

В. Б. Алексеев, А. А. Вороненко (Москва). О некоторых замкнутых классах в частичной двухзначной логике.

И. В. Горская (Москва). Соотношение формальной и содержательной семантики логических формул.

Я. Н. Гхалиех, М. Ф. Раца (Кишинев). Критерий полноты для одного семейства нецепных расширений двойственно-интуиционистской логики.

В. А. Захаров (Москва). Об одном критерии сравнимости формальных моделей программ.

О. И. Ковалжиу (Кишинев). Моделирование трех классов булевых функций в трехзначном расширении доказуемостно-интуиционистской логики.

Д. Г. Мещанинов (Москва). Метод построения полиномов для функций k-значной логики.

Е. А. Михеева (Ульяновск). О минимальных классах k-значных логик.

В. А. Орлов (Москва). О полноте автоматных базисов.

В. И. Пантелеев (Иркутск). Полиномиальные канонические формы k-значных функций.

А. Г. Руссу (Кишинев). Осложнение вопросов полноты по выразимости в логике доказуемости.

В. Д. Соловьев (Казань). Функциональные системы рекурсивных функций с сильными программными средствами замыкания.

В. А. Харитонов, Д. А. Новиков, Ю. В. Панюшкин (Пермь). Структурная устойчивость функционально избыточных систем управления реального времени.

А. Н. Черепов (Смоленск). О представлении функций P_{x_0} рядами Ньютона.

Теория кодирования

Н. П. Варновский (Москва). k-надежные псевдослучайные генераторы.

М. А. Ериков (Москва). Проблемы конечной порожденности эллиптических модулей.

Л. П. Жильцова (Нижний Новгород). Асимптотически оптимальное кодирование стохастических контекстно свободных языков.

А. С. Кузьмин, А. А. Нечаев (Москва). Построение кодов, корректирующих ошибки, с использованием рекуррент над кольцами Галуа.

А. С. Кузьмин (Москва). Оценки линейной сложности координатных последовательностей линейных рекуррент над кольцами вычетов.

В. Л. Куракин (Москва). Аналитическое строение и представление линейных рекуррентных последовательностей над конечными коммутативными кольцами.

А. А. Марков, А. А. Кочетов (Нижний Новгород). Кодирование речевых языков.

В. А. Носов (Москва). Построение латинских квадратов размера $2^n \times 2^n$.

И. Б. Ошкин, Г. В. Проскурин (Москва). Об экстремальном свойстве разбиений единичного куба.

Г. В. Проскурин (Москва). Некоторые результаты и задачи по исследованию способов построения последовательностей, близких к равновероятной схеме Бернулли, с помощью некачественных датчиков случайных чисел.

В. М. Сидельников, В. В. Ященко, М. А. Черепнев (Москва). Система открытого шифрования на основе некоммутативных полугрупп и результаты ее исследования для некоторых вариантов групп.

А. В. Черемушкин (Москва). Классификация двоичных функций от шести переменных.

А. В. Черемушкин (Москва). Кубические формы от семи переменных над полем $GF(2)$.

И. А. Юров (Москва). О функциях биективных по каждому примарному модулю степени n.

Интеллектуальные системы и автоматы

Г. П. Агибалов (Томск). Дискретные автоматы на полурешетках.

А. Е. Алексеев (Нижний Новгород). Об аппроксимации непрерывного автомата конечным автоматом.

П. А. Алисейчик (Москва). Об автоматном моделировании поведения управляющих систем.

Л. А. Арутюнян (Москва). О решетке замкнутых классов неоднородных функций.

Д. Н. Бабин (Москва). О полноте автоматных функций.

А. В. Баранов (Москва). О фрагментах булевых таблиц.

Э. Э. Гасанов (Москва). О сложности поиска в базах данных.

Н. В. Евтушенко (Томск). Контроль автомата при отсутствии прямого доступа к выходу автомата.

Н. Е. Иванников (Москва). О сложности реализации «геометрических» функций схемами из функциональных элементов.

М. А. Иорданский (Нижний Новгород). Оптимизационные задачи поиска информации в базах знаний.

А. А. Ирматов (Москва). Современное состояние проблемы нахождения числа пороговых функций.

В. Б. Кудрявцев, А. С. Строгалов, К. Вашик, П. А. Алисейчик, В. В. Перетрухин (Москва). Экспертная система «Учитель».

Л. П. Лисовик (Киев). Преобразователи над размеченными деревьями и проблема относительной эквивалентности.

В. В. Макаров (Москва). О группах автоматных перестановок.

М. В. Носов (Москва). Полиномиальные процедуры классификации.

Н. Е. Ремизова (Москва). Об обходе лабиринтов автоматами со следом.

А. Б. Фролов (Москва). Об устойчивости и сложности распознавания частично упорядоченных объектов.

И. А. Чижова (Москва). Экспертная система «Астра».

Л. С. Чудновский (Москва). Декодирование слов слитной речи.

В. И. Шевченко (Нижний Новгород). О сложности условных тестов, диагностирующих $\&(\vee)$-замыкания схем из функциональных элементов.

Дискретная геометрия

В. В. Балкан (Кишинев). О ненормальных разбиениях n-мерного пространства Лобачевского.

И. С. Гуцул (Кишинев). Разбиения $3D$-пространства Лобачевского многогранниками с иррациональными углами.

Ф. Л. Дамиану, В. С. Макаров (Кишинев). 3-мерные гиперболические многообразия икосаэдрической симметрии.

Н. П. Долбилин (Москва). К вопросу Данцера — Сепешаль о существовании периодической структуры.

Н. П. Долбилин (Москва). Опровержение гипотезы Борсука о разбиении тела на части меньшего диаметра (реферат работы Кана и Калаи).

Н. П. Долбилин, М. А. Штанько, М. И. Штогрин (Москва). Кубические многообразия в решетках.

Е. А. Заморзаева (Кишинев). О мультиправильных разбиениях пространства.

М. Д. Ковалев (Москва). Некоторые общие свойства шарнирных устройств.

В. С. Макаров, К. П. Макарова (Кишинев). Алгоритм Пуанкаре и геодезические на призматических многообразиях.

П. В. Макаров (Кишинев). О кельвиновских разбиениях пространства Лобачевского на компактные и некомпактные многогранники.

И. Г. Максимов (Москва). Минимальное число изгибаемых многогранников.

Н. Г. Мощевитин (Москва). Простейшие свойства паруса алгебраической решетки.

О. Р. Мусин (Москва). Триангуляции Делоне.

О. В. Павлова (Москва). К гипотезе об инвариантности объема изгибаемого многогранника.

К. А. Рыбников, мл. (Москва). О плотности трехмерных компактов.

И. Х. Сабитов (Москва). Алгоритмическое решение проблемы изгибаемости многогранников.

С. С. Савлов (Нижний Новгород). О двух задачах вычислительной геометрии.

С. А. Чепанов (Москва). Разбиение 3-мерного евклидова пространства на равные тетраэдры.

Теория графов

А. В. Бакурова (Запорожье). Исследование сложности и устойчивости векторной задачи коммивояжера.

В. В. Беляевский, Н. А. Лепешинский (Минск). Об одной задаче спектральной реконструкции графов.

Г. М. Бродский, Ю. Л. Лустгартен, С. В. Садова (Ярославль). О теориях центра в деревьях.

Г. М. Бродский, А. О. Гетманенко (Ярославль). О теориях центра — близнецах.

А. В. Воронин (Петрозаводск). О монотонных покрытиях графов.

Ф. Ф. Драган (Кишинев). НТ-графы: центры, связанное r-доминирование и деревья Штейнера.

И. Э. Зверович (Минск). Одна задача о графах пересечений.

В. Н. Землеченко, Ю. Л. Павлов (Петрозаводск). Плоские корневые леса и ветвящиеся процессы.

Г. Л. Козина (Запорожье). Исследование сложности векторных задач на многоцветных графах.

И. В. Козин (Запорожье). Оценки мощности полного множества альтернатив для некоторых двухкритериальных задач на орграфах.

В. П. Козырев (Москва). О числе интервальных графов.

В. П. Коржик (Черновцы). Нижняя оценка на 1-хроматическое число поверхности.

Д. В. Коробицын (Нижний Новгород). О сложности некоторых задач теории графов.

Н. А. Лихолат, В. В. Оглих (Днепропетровск). Алгоритм решения задачи покрытия графа цепями.

К. Ф. Присакарь (Кишинев). О вложенности графов в n-мерный куб.

IX ВСЕСОЮЗНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ПРОБЛЕМАМ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ

С 9 по 15 сентября 1990 г. в Волгограде проходила IX Всесоюзная конференция по проблемам теоретической кибернетики.

На конференции были заслушаны следующие пленарные доклады.

Кудрявцев В. Б., Подколзин А. С. Теория автоматов: основные направления и результаты.

Сидельников В. М. Коды Рида — Миллера: последние достижения.

Пулатов А. К. Комбинаторные и комбинаторно-метрические структуры выпуклого многогранника.

Лупанов О. Б. Некоторые результаты в теории сложности и синтеза управляющих систем.

Богомолов А. М., Грунский И. С. Контроль и диагностика автоматов.

Сапоженко А. А. Свойства типичных подмножеств в дискретных структурах.

Андреев А. Е. Частичные булевы функции и сложность.

Галанов В. А. О доле выполняемости логических формул.

Егорычев Г. П. Кольца нормирований в перечислительном комбинаторном анализе.

Марков Ал. А. Схемная сложность дискретной оптимизации.

Подловченко Р. И. Верхняя полурешетка моделей рекурсивных программ.

Федоткин М. А. Модели систем массового обслуживания.

Работа конференции проходила в пяти секциях.

1. Автоматы, алгоритмы, теоретическое программирование.
2. Распознавание образов, диагностика и надежность управляющих систем.
3. Синтез и сложность.
4. Оптимальное управление, исследование операций, дискретная оптимизация.
5. Дискретная математика (функциональные системы, кодирование, графы, комбинаторика и др.).

На заседаниях секций было заслушано более 40 кратких сообщений.

Научное издание

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ КИБЕРНЕТИКИ

Под редакцией С. В. Яблонского
Сборник статей, выпуск 5

Заведующий редакцией *Е. Ю. Ходан*
Редактор *М. В. Захарьящев*
Переплет художника *Б. М. Рябышева*
Художественный редактор *Г. М. Коровина*
Технический редактор *М. Ш. Аксельрод*
Корректоры: *Т. К. Кармакулова, О. М. Карпова*

ИБ № 41507

ЛР № 020297 от 27.11.91.
Сдано в набор 03.11.92. Подписано к печати 07.04.94. Формат 70×108/16. Бумага тип. № 1. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Усл. печ. л. 26,6. Усл. кр.-отт. 26,6. Уч.-изд. л. 25. Тираж 2000 экз. Заказ изд. № 904270. Заказ тип. № 452. С-047.

Издательская фирма
«Физико-математическая литература» ВО «Наука»
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Новосибирская типография № 4 РАН
630077 г. Новосибирск-77, Станиславского, 25

ИСПРАВЛЕНИЯ К ВЫПУСКУ

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
11	13 св.	$\mathscr{E}_k^2 = \{kp_k + k,\ kp_k + k + 1, \ldots, kp_k + 2k - 1\}$.	$\mathscr{E}_k^2 = \{kp_k + k + t_k,\ kp_k + k + 1 + t_k, \ldots, kp_k + 2k - 1 + t_k\}$, где $t_k = \dfrac{k(k-1)}{2} + 3$.
11	16 св.	$s_k = (kp_k + k) - \left(\dfrac{k(k-1)}{2} + 3\right)$.	$s_k = kp_k + k$.
11	19 св.	$x_2 \neq kp_k + 2k - 1$,	$x_2 \neq kp_k + 2k - 1 + t_k$,