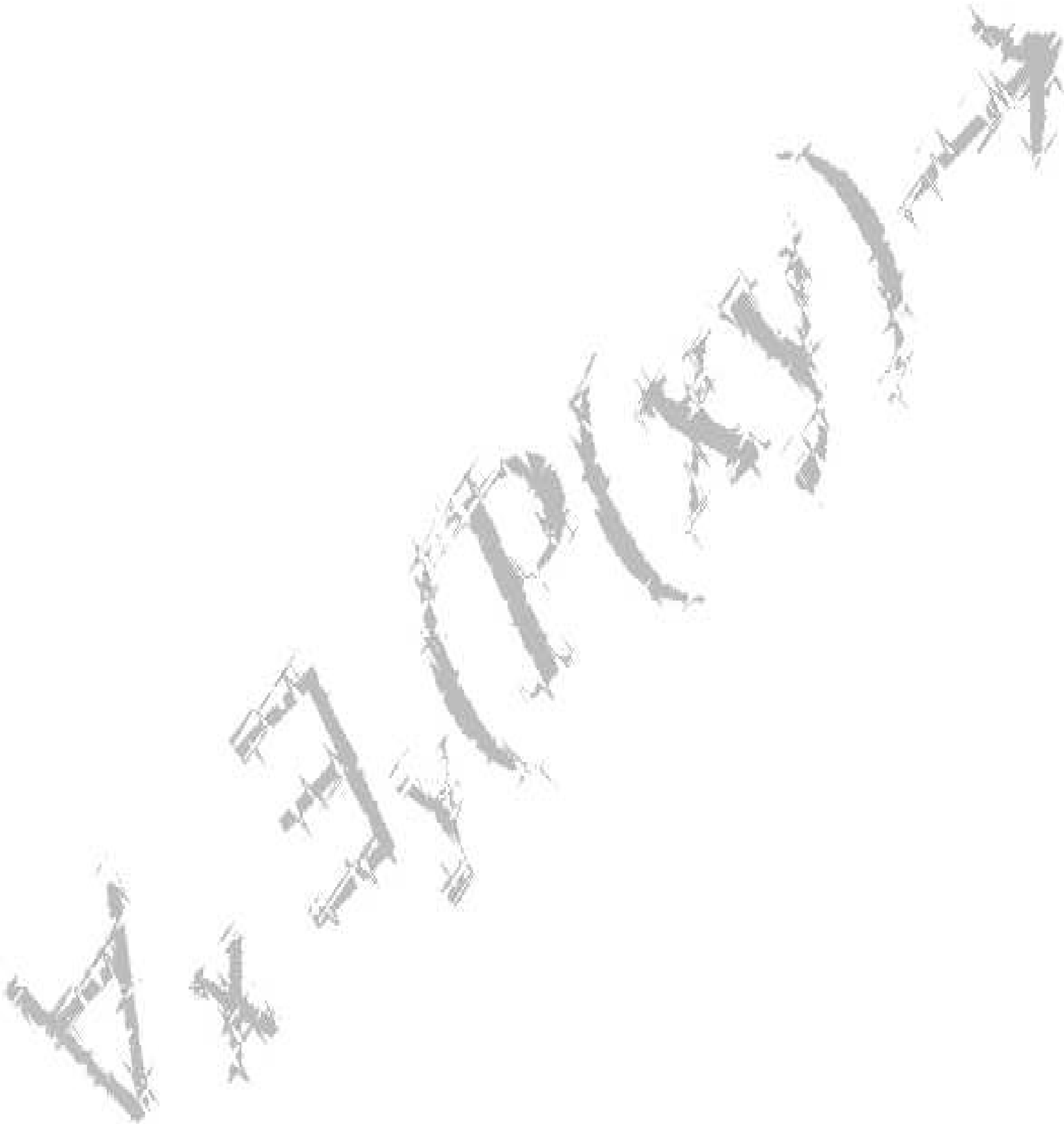
Калининградский государственный технический университет



В.Ф. Пономарев

# математическая логика

часть 1

## Логика высказываний. Логика предикатов

Утверждено Ученым советом университета в качестве учебного пособия для студентов направления 552800 – Информатика и вычислительная техника и специальности 654600 – Информатика и вычислительная техника

Калининград

2001г.

ББК. 22

Л 55

В.Ф. Пономарев Математическая логика.

часть 1. Логика высказываний. Логика предикатов. Учебное пособие – Калининград: КГТУ, 2001, с.140

Учебное пособие предназначено для студентов университета, изучающих “Математическую логику”. В нем изложены основные принципы формирования языка, основные правила дедуктивного вывода, основные механизмы доказательства истинности заключения в логике высказываний и логике предикатов. Все доказательства подкреплены множеством примеров. Каждый студент выполняет расчетно-графическую работу. В расчетно-графической работе по логике высказываний доказывается истинность заключения методами дедуктивного вывода и по принципу резолюции. В расчетно-графической работе по логике предикатов выполняется преобразование формулы к виду ПНФ и ССФ с последующей унификацией контрарных атомов дизъюнктов.

# ВВЕДЕНИЕ

Родоначальником науки о логике является греческий философ Аристотель (384-322 г. до н.э.). Он, используя законы человеческого мышления, формализовал известные до него правила рассуждений. Лишь в конце XVII века немецкий математик Г. Лейбниц предложил математизировать формальные рассуждения Аристотеля, вводя символьное обозначение для основных понятий и используя особые правила, близкие к вычислениям. Лейбниц утверждал, что “мы употребляем знаки не только для того, чтобы передать наши мысли другим лицам, но и для того, чтобы облегчить сам процесс нашего мышления”.

Применение математики в логике определило новую науку – ***математическую логику***. Математическое описание рассуждений позволило получить точные утверждения и эффективные процедуры в решении конкретных задач логики. Рассуждения в математической логике изучаются с точки зрения формы описания процесса, явления или события и формального преобразования этого описания. Такой процесс называют ***выводом заключения*** Иногда математическое описание рассуждений называют логико-математическим моделированием.

Основными объектами при изучения математической логики являются формальный язык логики и правила вывода. Формальный язык необходим для символьного описания процессов, явлений или событий и логических связей между ними. Правила вывода необходимы для формирования процедуры рассуждения. Для обеспечения вывода вводится система аксиом, формализующая весь механизм вывода заключения.

Математическое описание логики следует воспринимать, как некую формальную систему, оперирующую с символами по определенным правилам, облегчающим интерпретацию в реальном мире.

Выделяют несколько типов математических моделей формальной логики. Среди них можно выделить Логику высказываний, Логику предикатов, Логику нечетких множеств и отношений, Реляционную логику и др.

Логика высказываний (prepositional calculus) есть модель формальной системы, предметом которой являются высказывания или повествовательные предложения, взятые целиком без учета их внутренней структуры.

Логика предикатов (predicate calculus) есть модель формальной системы, предметом которой являются повествовательные предложения с учетом их внутренних состава и структуры.

Логика нечетких множеств и отношений (fuzzi calculus) есть модель формальной системы, предметом которой являются повествовательные предложения с учетом их внутреннеих состава и структуры и при нечетком (размытом) задании характерных признаков отдельных элементов или отношений между ними.

Логика реляционная (relation calculus) есть модель формальной системы, предметом которой являются отношения в виде множества однородных повествовательных предложений, существенно расширяющие логику предикатов.

Учебное пособие состоит из четырех частей, знакомящих студента с методами рассуждения и вывода заключения в четырех вышеуказанных логоках. По каждому разделу студент выполняет индивидуальное задание в виде расчетно-графической работы.

# 1.Логика высказываний

Исходным понятием математической логики является “высказывание”. Поэтому любое повествовательное предложение, которое может быть признано истинным или ложным, называют ***высказыванием***. Логическим значением высказывания являются “истина” или “ложь”.

Например, повествовательное предложение "3 есть простое число" является истинным, а “3.14… - рациональное число" - ложным, "Колумб открыл Америку" - истинным, а "Киев - столица Узбекистана" – ложным, “Число 6 делится на 2 и на 3” – истинным, а “Сумма чисел 2 и 3 равна 6” – ложным и т.п.

Такие высказывания называют простыми или элементарными. При формальном исследовании сложных текстов вместо понятие “простые высказывания” замещают понятием “***пропозициональные переменные***” (от лат. propositio - предложение), которые обозначают прописными буквами латинского алфавита “A”, “B”, “C”,… Истинность или ложность высказывания будем отмечать символами “и” – истина или “л” – ложь.

Пример:

**1)**если $A_1$:=“3 - простое число”, то $A_1$ = и;

**2)**если $A_2$:=“3 - вещественное число”, то $A_2$ = и;

**3)**если $A_3$:=“3 - целое число”, то $A_3$ = и;

**4)**если $B_1$:=“3, 14…- рациональное число”, то $B_1$ = л;

**5)**если $B_2$:=“3, 14…- не рациональное число”, то $B_2$ = и;

**6)**если C:=“Колумб открыл Америку”, то C = и;

**7)**если D:=“Киев - столица Узбекистана”, то D = л;

**8)**если E:= “Число 6 делится на 1, 2 и 3”, то E = и;

**9)**если G:=“Число 6 есть сумма чисел 1, 2, 3”, то G = и.

Примечание: символ “:=” означает, что пропозициональной переменной, стоящей слева, присвоить значение высказывания, стоящего справа от символа.

Высказывания, которые получаются из простых предложений с помощью грамматических связок “не”, “и”, “или”, “если…, то…”, “… тогда и только тогда, когда…” и т.п., называют сложными или составными. Для обозначения грамматических связок вводят символы, которые называют ***логическими*** (или ***пропозициональными***) ***связками***. Например, :=”или”, **&**:=“и”, :=”не”, :=“если…, то…”, :=“…тогда и только тогда, когда …”.

Для построения сложных пропозициональных высказываний используют вспомогательные символы “**(**“, “**)**” - скобки.

Пример:

**1)** если высказывание “3 – вещественное или целое число”, то формула ($A_1$ $A_2$) = и;

**2)** если высказывание ”3,14… - рациональное число”, то формулы $B_1$=л или $B_1$ = и;

**3)** если высказывание “число 6 делится на 1, 2, 3 и представляет сумму делителей 1, 2, 3”, то формула (E&G)= и;

**4)** если высказывание “если 3 - целое число, то оно вещественное”, то формула ($A_3$ $A_2$)=и;

**5)** если высказывание ”если 3 – простое число ,то оно целое”, то формула ($A_1$ $A_3$)=и;

**6)** если высказывание “3 есть простое число тогда и только тогда, когда оно целое”, то формула ($A_1$ $A_2$)=и.

Обозначения элементарных высказываний $A_1$, $A_2$, $A_3$, $B_1$, E, G взяты из предыдущего примера.

Правила построения сложных высказываний в виде последовательности пропозициональных переменных, логических связок и вспомогательных символов определяют возможность формального описания любого текста.

При формальной записи сложного высказывания всегда нужно исходить из его содержания. До тех пор пока не определена логическая структура сложного высказывания, его нельзя формально описывать.

Правила исполнения логических операций над сложными высказываниями на основе заданных логических связок и пропозициональных переменных формирует алгебру высказываний.

Правила вывода новых высказываний, основанные на известных отношениях между заданными пропозициональным переменными, формируют исчисление высказываний. Высказывания, из которых делают вывод новых высказываний, называют ***посылками***, а получаемое высказывание – ***заключением***.

Математическая логика рассматривает формальный способ рассуждения, встречающийся не только в математике, но и в повседневной жизни.

## 1.1 Алгебра высказываний

Множество пропозициональных переменных **T**={A, B, C,…} с заданными над ним логическими операциями ***F***={ ; ; ; ; } формируют алгебру высказываний, т.е.

$$\mathbf{A_B=<T;}\ \boldsymbol{F}\mathbf{;>}$$

Символы логических операций заданы логическими связками:

- отрицание, - конъюнкция, - дизъюнкция, - импликация, - эквиваленция.

Всякое сложное высказывание, которое может быть получено из элементарных высказываний посредством применения логических связок отрицания, коньюнкции, дизьюнкции, импликации и эквиваленции, называют ***формулой*** алгебры логики.

Любую пропозициональную переменную можно назвать формулой нулевого порядка, т. е. $A_i = F_i$.

Если $F_1$ и $F_2$ – пропозициональные формулы, то $F_1$; $F_2$; $F_1$ $F_2$; $F_1$ $F_2$; F $F_2$ и $F_1$ $F_2$ также пропозициональные формулы.

Никаких других формул в исчислении высказываний нет.

Множество формул образуют язык математической логики. Это множество перечислимо и разрешимо.

Для формирования сложных формул используют вспомогательные символы “(“ и “)”.

## 1.1.1 Логические операции

Логическая связка указывает на необходимость исполнения логической операции над пропозициональными переменными или формулами, окружающими логическую связку.

Логические операции бывают ***унарные*** (или одноместные) и ***бинарные*** (или двухместные). Этому отвечает наличие одного или двух операндов у данной операции.

Значение формулы полностью определяется значениями входящих в нее пропозициональных переменных.

Значения логических операций также принадлежат множеству {и; л}.

Все значения логической формулы в зависимости от значений входящих в нее элементарных высказываний, могут быть полностью описаны с помощью ***таблицы истинности***.

**Отрицание ( F)** есть одноместная операция, посредством которой ее значение есть отрицание значения операнда. В программировании для этого используют оператор NOT:

NOT F истинно тогда и только тогда, когда F ложно.

| F | F |
|---|---|
| и | л |
| л | и |

Эту операцию наглядно можно изобразить с помощью таблицы истинности, связывающей значения истинности операнда и операции.
Эту операцию наглядно можно изобразить с помощью таблицы истинности, связывающей значения истинности операнда и операции.

На естественном языке эта операция определяет высказывание “неверно, что F истинно (ложно)”.

Если F есть высказывание, то F также высказывание. Если F есть высказывание, то ( F) также есть высказывание.

Пример: Пусть есть высказывание “А:=“4 - простое число”. Такое высказывание ложно или “неверно, что 4 –простое число”, т.е.

А = и **;**

Пусть высказывание D:=“Киев - столица Узбекистана”.

Такое высказывание ложно или “неверно, что Киев – столица Узбекистана”, т.е. D = и.

**Конъюнкция** ($F_1$ $F_2$) есть двухместная операция, посредст вом которой из двух формул $F_1$ и $F_2$ получают новую формулу $F = F_1\ F_2$, описывающую сложное высказывание. Значение этого высказывания истинно тогда и только тогда, когда истинны значения двух операндов $F_1$ и $F_2$.

В программировании для этого используют оператор AND:

$F_1$ AND $F_2$ истинно тогда и только тогда, когда истинны $F_1$ и $F_2$.

| $F_1$ | $F_2$ | $F_1$ $F_2$ |
|---|---|---|
| л | л | л |
| л | и | л |
| и | л | л |
| и | и | и |

Таблица истинности операции конъюнкции, описывающая значения истинности операндов и операции имеет следующий вид:

Таблица истинности операции конъюнкции, описывающая значения истинности операндов и операции имеет следующий вид:

Из определения операций коньюнкции и отрицания очевидно, что (F F)=л.

Если даны формулы $F_1$, $F_2$,…$F_n$, то истинное значение формулы
F= $F_1$ $F_2$ … $F_n$ определяется истинностью всех формул $F_1$, $F_2$,…$F_n$.
На естественном языке эта операция выражается соединительными словами:
“..и..“, “..также..“, “как ..,так..“, “..несмотря на ..“ и т.п.

Пример: Пусть даны высказывания A:="компьютер содержит основной микропроцессор", B:="компьютер содержит оперативную память", C:=”компьютер содержит контроллеры"; D:="компьютер содержит порты ввода - вывода".

Тогда формула F = (A&B&C&D) отражает высказывание "компьютер содержит основной микропроцессор, оперативную память, контроллеры и порты ввода-вывода" [8].

**Дизъюнкция** ($F_1$ $F_2$) есть двухместная операция, посредством которой из двух формул $F_1$ и $F_2$ получают новую формулу F= $F_1$ $F_2$, описывающую сложное высказывание. Значение этого высказывания ложно тогда и только тогда, когда ложны значения двух операндов $F_1$ или $F_2$.

В программировании для этого используют оператор OR:

$F_1$ OR $F_2$ ложно тогда и только тогда, когда ложны $F_1$ и $F_2$.

| $F_1$ | $F_2$ | $F_1$ $F_2$ |
|---|---|---|
| л | л | л |

| | | |
|---|---|---|
| л | и | и |
| и | л | и |
| и | и | и |

Эту операцию наглядно можно изобразить с помощью таблицы истинности.

Эту операцию наглядно можно изобразить с помощью таблицы истинности.

Из определения операций дизьюнкции и отрицания очевидно, что (F F)=и.

Если даны формулы $F_1$, $F_2$,…$F_n$, то истинностное значение формулы

$F = F_1\ F_2\ \ldots\ F_n$ определяется истинностью хотя бы одной формулы $F_1$, $F_2$,…или $F_n$.

В естественном языке эта операция выражается разъединительными словами “..или..“, “..либо.. “ и т.п. Следует обратить внимание, что в повседневной речи союз “или” употребляется в двух смыслах: “исключающее или”, когда истинность составного высказывания определяется истинностью только одного из высказываний, и “не исключающее или”, когда истинность составного высказывания определяется истинностью хотя бы одного из высказываний.

<u>Пример</u>: Пусть даны высказывания A:="монитор есть машинная программа, которая наблюдает, регулирует, контролирует или проверяет операции в системе обработки данных", B - "монитор в языках программирования есть высокоуровневый механизм взаимодействия и синхронизации процессов, обеспечивающий доступ к неразделяемым ресурсам” и C - "монитор есть дисплей, используемый для контроля процессов и управления системой".

Тогда формула F = (A B C) отражает высказывание "монитор есть машинная программа, которая наблюдает, регулирует, контролирует или проверяет операции в системе обработки данных, или в языках программирования - это высокоуровневый механизм взаимодействия и синхронизации процессов, обеспечивающих доступ к неразделяемым ресурсам или дисплей, используемый для контроля процессов и управления системой"[8].

Пример: Пусть даны высказывания A:="в компьютере применяют матричный принтер", B:="в компьютере применяют струйный принтер", C:="в компьютере применяют лазерный принтер"; D:="в компьютере применяют литерный принтер".

Тогда формула F = (A B C D) отражает высказывание " в компьютере применяют матричный, струйный, лазерный или литерный принтеры"[8].

**Импликация ($F_1$ $F_2$)** есть двуместная операция, посредством которой из формул $F_1$ и $F_2$ получают новую формулу F=($F_1$ $F_2$), отражающую сложное высказывание. Значение этого высказывания ложно тогда и только тогда, когда истинно значение $F_1$ и ложно $F_2$.

В программировании для этого используют оператор IMPLIES:

$F_1$ IMPLIES $F_2$ ложно тогда и только тогда, когда $F_1$ истинно, а $F_2$ ложно.

Таблица истинности имеет следующий вид:

| $F_1$ | $F_2$ | $F_1$ $F_2$ |
|---|---|---|
| л | л | и |
| л | и | и |
| и | л | л |
| и | и | и |

Высказывание $F_1$ называют посылкой, а $F_2$ – заключением.

Высказывание $F_1$ называют посылкой, а $F_2$ – заключением.

Импликация играет особую роль в математической логике, т.к. многие доказательства представляются в условной форме: “если…, то…”. При этом из истинности посылки ($F_1$) и истинности импликации ($F_1$ $F_2$) следует истинность заключениея $F_2$.

На естественном языке эта операция выражается словами "если ..., то ... ", "тогда ..., когда ... ", "постольку ..., поскольку ... ", "при наличии ..., следует ... ", " ... есть достаточное условие для ... ", "... есть необходимое условие для ... ", "... при условии, что ..." и т. п..

Употребление в повседневной речи слов “если…, то…” несколько отличается от использования их в математической логике. Так в повседневной речи, если высказывание $F_1$ ложно, то сложное высказывание $F_1$ $F_2$ вообще не имеет смысла. В математической логике при ложном высказывании $F_1$ значение сложного высказывания (импликации) всегда истинно.

<u>Пример:</u> Пусть даны высказывания A:="по проводнику протекает электрический ток" и B - "вокруг проводника есть магнитное поле".

Тогда формула F=A B отражает высказывание "если по проводнику протекает электрический ток, то вокруг проводника возникает магнитное поле".

<u>Пример:</u> Пусть даны высказывания A:="на упругое тело оказывают влияние внешние силы" и B:="в упругом теле возникают внутренние силы, препятствующие изменению формы”. Тогда формула F=(A B) отражает высказывание "если на упругое тело оказывают влияние внешней силы, то в нем возникают внутренние силы, препятствующие изменению формы"

**<u>Эквиваленция (</u>**$F_1$ $F_2$) есть двухместная операция, посредством которой из двух формул $F_1$ и $F_2$ получают новую формулу $F=(F_1 \quad F_2)$, описывающую сложное высказывание. Значение этого высказывания истинно тогда и только тогда, когда оба операнда $F_1$ и $F_2$ имеют одинаковые значения.

В программировании для этого используют оператор IFF:

$\underline{F}_1$ IFF $\underline{F}_2$ истинно тогда и только тогда, когда $\underline{F}_1$ и $\underline{F}_2$ имеют одинаковое значение.

Эту операцию наглядно можно изобразить с помощью таблицы истинности.

Эквиваленция позволяет выполнять в процессе логического доказательства теорем замещения одной формулы другой.

Эквиваленция позволяет выполнять в процессе логического доказательства теорем замещения одной формулы другой.

| $F_1$ | $F_2$ | $F_1 \; F_2$ |
|---|---|---|
| л | л | и |
| л | и | л |
| и | л | л |
| и | и | и |

На естественном языке это выражается словами "для того чтобы…, необходимо и достаточно…", "… лишь при условии..." и т. п..

<u>Пример</u>: Пусть даны высказывания A:="быть четным числом" и B:="число делится на два".

Тогда формула $\underline{F}=(A \quad B)$ отображает высказывание “для того, чтобы число было четным необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на два”.

Пример: Пусть даны высказывания A:=“выполнить загрузку операционной системы в kомпьютер” и B:=“установить в компьютер дискету с записанной операционной системой“.

Тогда формула F= (A B) отображает высказывание “для того, чтобы выполнить загрузку операционной системы в компьютер, необходимо и достаточно установить в компьютер дискету с записанной операционной системой"[9].

Пример: Пусть даны высказывания S:=“полная система функций математической логики ", A:="система функций содержит хотя бы одну нелинейную функцию", B:="система функций содержит хотя бы одну немонотонную функцию", C:="система функций содержит хотя бы одну не самодвойственную функцию", D:="система функций содержит хотя бы одну функцию, не сохраняющую "0" ", E:="система функций содержит хотя бы одну функцию, не сохраняющую “1“”. Тогда формула F=(S (A&B&C&D&E)) отражает сложное высказывание “для того чтобы система функций математической логики была полной, необходимо и достаточно, чтобы она содержала хотя бы по одной нелинейную, немонотонную и не самодвойственную функции, а также функции, не сохраняющие “0“ и “1“[9].

Пример: Пусть даны высказывания A:=”урожай будет стабильным ежегодно” и B:="выполнены все ирригационные работы".

Тогда формула F=(A B) отображает высказывание "урожай будет ежегодно стабильным тогда и только тогда, когда будут выполнены все ирригационные работы"[10].

### 1.1.2 Правила записи сложных формул

Для определения истинности сложного суждения необходимо анализировать значение истинности каждого составного высказывания и формировать последовательно значение истинности каждой подформулы, входящей в формулу сложного суждения. Логическое значение формулы алгебры логики полностью определяется логическими значениями входящих в нее пропозициональных переменных. Все возможные логические значения формулы в зависимости от значений входящих в нее элементарных высказываний, могут быть полностью описаны с помощью ***таблицы истинности***.

Пример: Суждение "если инвестиции на текущий год не изменятся (A), то возрастет расходная часть бюджета (B) или возникнет безработица (C), а если возрастет расходная часть бюджета, то налоги не будут снижены (D) и, наконец, если налоги не будут снижены и инвестиции не изменятся, то безработица не возникнет" [10 ].

В этом суждении есть четыре повествовательных предложения, которые следует заместить пропозициональными переменными и формально описать суждение. Тогда формула сложного суждения имеет вид:

F =(A (B C))&(B D)&((D&A) C).

Для различных значений истинности пропозициональных переменных и подформул, построенных на логических связках, можно последовательно определить значение истинности формулы F. Таблица, в которой рассматриваются любые наборы пропозициональных переменных и определяются значения всех подформул формулы, называют таблицей истинности.

Ниже представлена таблица истинности для этого суждения.

| |
|---|
| |
| |
| |

Для удобства записи любой подформулы и формулы каждый столбец пронумерован и логические операции выполняются с индексами столбцов. В 12-ом столбце таблицы выделены те строки, в которых формула имеет истинное значение при различных наборах значений пропозициональных переменных (A, B,C и D).

Пример: "Если в строительстве внедряются современные методы планирования и руководства (A), то стройки будут расти быстрее (B), а стоимость строительства будет снижаться (C). В строительстве уже внедряются современные методы планирования и руководства. Следовательно, стройки будут расти быстрее, а стоимость строительства будет снижаться."[2]

A B&C; A

B&C.

| A | B | C | 2&3 | 1 4 |
|---|---|---|---|---|

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| л | л | л | л | и |
| л | л | и | л | и |
| л | и | л | л | и |
| л | и | и | и | и |
| и | л | л | л | л |
| и | л | и | л | л |
| и | и | л | л | л |
| **и** | и | и | **и** | **и** |

Выделенная восьмая строка показывает при каких значениях пропозициональных переменных (А, В, С) истинны посылки и заключение.

Выделенная восьмая строка показывает при каких значениях пропозициональных переменных (А, В, С) истинны посылки и заключение.

Пример:Суждение: ”Контракт будет выполнен (А) тогда и только тогда, когда дом будет сдан в эксплуатацию (В). Если дом будет сдан в декабре, то в январе можно переезжать в новые квартиры (С). Если в январе квартиросъемщики не переезжают, то они не оплачивают квартирную плату. Даже если контракт не выполнен, то квартиросъемщики должны внести квартирную плату. Квартиросъемщики внесут квартирную плату” [10].

В этом суждении пять высказываний. Формулы первых четырех высказываний формируют посылки, а формула пятого высказывания – заключение. Посылки и заключение также разделены между собой чертой.

A B; B C; C D; A D

D.

Ниже представлена таблица истинности для такого суждения.

| A | B | C | D | 1 2 | 2 3 | 3 4 | 1 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Л | Л | Л | Л | И | И | И | Л |
| Л | Л | Л | И | И | И | Л | И |
| Л | Л | И | Л | И | И | И | Л |
| Л | Л | И | **И** | **И** | **И** | **И** | **И** |
| Л | И | Л | Л | Л | Л | И | Л |
| Л | И | Л | И | Л | Л | Л | И |
| Л | И | И | Л | Л | И | И | Л |
| Л | И | И | И | Л | И | И | И |
| И | Л | Л | Л | Л | И | И | И |
| И | Л | Л | И | Л | И | Л | И |
| И | Л | И | Л | Л | И | И | И |
| И | Л | И | И | Л | И | И | И |
| И | И | Л | Л | И | Л | И | И |
| И | И | Л | И | И | Л | Л | И |
| И | И | И | Л | И | И | И | И |
| И | И | И | И | И | И | И | Л |

Четвертая строка показывает когда истинны посылки и заключение.

Четвертая строка показывает когда истинны посылки и заключение.

Пример: Суждение: “Если цены высокие (А), то и заработная плата должна быть также высокой (В). Цены высокие или применяется регулирование цен (С). Если применяется регулирование цен, то нет инфляции ( D). Инфляция есть. Следовательно, заработная плата должна быть высокой” [10].

В этом суждении пять высказываний. В первом есть два простых предложения (А, В), во втором – два (А, С), в третьем – два (С, D), в четвертом – одно (D) и в пятом – одно (В). Формулы первых четырех высказываний формируют посылки, а формула пятого высказывания – заключение. Посылки и заключение разделены между собой чертой.

A B; A C; C D; D

B.

| A | B | C | D | 1 2 | 1 3 | 4 | 3 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Л | Л | Л | Л | И | Л | И | И |
| Л | Л | Л | И | И | Л | Л | И |
| Л | Л | И | Л | И | И | И | И |
| Л | Л | И | И | И | И | Л | Л |
| Л | И | Л | Л | И | Л | И | И |
| Л | И | Л | И | И | Л | Л | И |
| Л | И | И | Л | И | И | И | И |
| Л | И | И | И | И | И | Л | Л |
| И | Л | Л | Л | Л | И | И | И |
| И | Л | Л | И | Л | И | Л | И |
| И | Л | И | Л | Л | И | И | И |
| И | Л | И | И | Л | И | Л | Л |
| И | И | Л | Л | И | И | И | И |
| И | **И** | Л | **И** | **И** | **И** | Л | **И** |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| И | И | И | Л | И | И | И | И |
| И | И | И | И | И | И | Л | Л |

Выделенная четырнадцатая строка таблицы показывает при каких значениях пропозициональных переменных (A, B, C и D) истинны посылки и заключение.

Выделенная четырнадцатая строка таблицы показывает при каких значениях пропозициональных переменных (A, B, C и D) истинны посылки и заключение.

Пример: “Распространение заведомо ложных, позорящих другое лицо измышлений (A) является клеветой (B). Умышленное извращение фактов в заявлении на другое лицо (C) представляет собой распространение заведомо ложных, позорящих другое лицо измышлений. Клевета уголовно наказуема (D). Следовательно, умышленное извращение фактов в заявлении на другое лицо уголовно наказуемо”[4].

В этом суждении четыре сложных высказывания, три из которых являются посылками, а одно - заключением.

A B; C A; B D

C D.

| A | B | C | D | 1 2 | 3 1 | 2 4 | 3 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Л | Л | Л | Л | **И** | **И** | **И** | **И** |
| Л | Л | Л | И | **И** | **И** | **И** | **И** |
| Л | Л | И | Л | И | Л | И | Л |
| Л | Л | И | И | И | Л | И | И |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Л | И | Л | Л | И | И | Л | И |
| Л | И | Л | И | **И** | **И** | **И** | **И** |
| Л | И | И | Л | И | Л | Л | Л |
| Л | И | И | И | И | Л | И | И |
| И | Л | Л | Л | Л | И | И | И |
| И | Л | Л | И | Л | И | И | И |
| И | Л | И | Л | Л | И | И | Л |
| И | Л | И | И | Л | И | И | И |
| И | И | Л | Л | И | И | Л | И |
| И | И | Л | И | **И** | **И** | **И** | **И** |
| И | И | И | Л | И | И | Л | Л |
| И | И | И | И | **И** | **И** | **И** | **И** |

Выделенные строки таблицы показывают при каких значениях пропозициональных переменных (A, B, C и D) истинны посылки и заключение.

Выделенные строки таблицы показывают при каких значениях пропозициональных переменных (A, B, C и D) истинны посылки и заключение.

Пример: суждение “если курс ценных бумаг возрастет (A) или процентная ставка снизится (B), то курс акций упадет (C) или налоги не повысятся (D); курс акций падает тогда и только тогда, когда растет курс ценных бумаг и растут налоги; если процентная ставка снизится, то либо курс акций не понизится, либо курс ценных бумаг не возрастет.

Следовательно, если налоги повысить, то не вырастет курс ценных бумаг и вырастет курс акций” [10].

В этом суждении есть четыре сложных высказывания, три из которых являются посылками, а одно - заключением.

В первом высказывании есть четыре простых предложения, которые должны быть замещены пропозициональными переменными: A:=”курс ценных бумаг возрастет”, “B:=”процентная ставка снизится”, C:=”курс акций упадет” и D:=”налоги не повысятся”. Во втором высказывании – три предложения (A, C, D). В третьем – три предложения (A, B, C), в четвертом – три предложения (F, C, D). Формулы первых трех высказываний формируют посылки, а формула четвертого высказывания – заключение. Посылки и заключение разделены между собой чертой.

(A B) (C D); C (A& D); B ( C A)

( D ( A& C )).

| A | B | C | D | 1 2 | 1& 4 | 3 4 | 5 7 | 3 6 | 3 1 | 2 10 | 1& 3 | 4 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л | **И** | **И** | И | **И** | И | **И** |
| Л | Л | Л | И | Л | Л | И | **И** | **И** | И | **И** | И | **И** |
| Л | Л | И | Л | Л | Л | И | И | Л | И | И | Л | Л |
| Л | Л | И | И | Л | Л | И | И | Л | И | И | Л | И |
| Л | И | Л | Л | И | Л | И | **И** | **И** | И | **И** | И | **И** |
| Л | И | Л | И | И | Л | И | **И** | **И** | И | **И** | И | **И** |
| Л | И | И | Л | И | Л | И | И | Л | И | И | Л | Л |
| Л | И | И | И | И | Л | И | И | Л | И | И | Л | И |
| И | Л | Л | Л | И | И | Л | Л | Л | И | И | Л | Л |
| И | Л | Л | И | И | Л | И | **И** | **И** | И | **И** | Л | **И** |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| И | Л | И | Л | И | И | И | И | И | Л | И | Л | Л |
| И | Л | И | И | И | Л | И | И | Л | Л | И | Л | И |
| И | И | Л | Л | И | И | Л | Л | Л | И | И | Л | Л |
| И | И | Л | И | И | Л | И | **И** | **И** | И | **И** | Л | **И** |
| И | И | И | Л | И | И | И | И | И | Л | Л | Л | Л |
| И | И | И | И | И | Л | И | И | Л | Л | Л | Л | И |

Выделенные строки таблицы показывают при каких значениях пропозициональных переменных (A, B, C и D) истинны посылки и заключение.

Пример: Суждение: “Или Катя и Вася одного возраста (A), или Катя старше Васи (B). Если Катя и Вася одного возраста, то Маня и Вася не одного возраста (C). Если Катя старше Васи, то Вася старше Толи (D). Следовательно, или Маня и Вася не одного возраста, или Вася старше Толи” [2].

A B; A C; B D

C D

| A | B | C | D | 1 2 | 1 3 | 2 4 | 3 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Л | Л | Л | Л | Л | И | И | Л |
| Л | Л | Л | И | Л | И | И | И |
| Л | Л | И | Л | Л | И | И | И |
| Л | Л | И | И | Л | И | И | И |
| Л | И | Л | Л | И | И | Л | Л |
| Л | И | Л | И | **И** | **И** | **И** | **И** |
| Л | И | И | Л | И | И | Л | И |
| Л | И | И | И | **И** | **И** | **И** | **И** |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| И | Л | Л | Л | И | Л | И | Л |
| И | Л | Л | И | И | Л | И | И |
| И | Л | И | Л | **И** | **И** | **И** | **И** |
| И | Л | И | И | **И** | **И** | **И** | **И** |
| И | И | Л | Л | И | Л | Л | Л |
| И | И | Л | И | И | Л | И | И |
| И | И | И | Л | И | И | Л | И |
| И | И | И | И | **И** | **И** | **И** | **И** |

Выделенные строки таблицы показывают при каких значениях пропозициональных переменных (A, B, C и D) истинны посылки и заключение.

Выделенные строки таблицы показывают при каких значениях пропозициональных переменных (A, B, C и D) истинны посылки и заключение.

Пример: Если 2 - простое число (A), то это наименьшее простое число (B). Если 2 - наименьшее простое число, то 1 не простое число (C). Число 1 - не простое число. Следовательно, 2 -простое число. [7]

A B; B C; C

A.

| A | B | C | 1 2 | 2 3 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| л | л | л | и | и |
| л | л | и | и | и |
| л | и | л | и | л |
| л | и | и | и | и |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| и | л | л | л | и |
| и | л | и | л | и |
| и | и | л | и | л |
| **и** | и | **и** | **и** | **и** |

Выделенная восьмая строка таблицы показывает при каких посылках истинно и заключение

Выделенная восьмая строка таблицы показывает при каких посылках истинно и заключение

Приведенные примеры позволяют сформулировать некоторые правила записи сложных суждений. Так при записи сложных высказываний следует обращать внимание, чтобы в формулах не было двух рядом стоящих логических связок - они должны быть разъединены формулами либо вспомогательными символами и не было двух рядом стоящих формул - они должны быть разъединены логической связкой.

При записи сложных формул следует помнить, что

1) каждое вхождение логической связки “ ” относится к пропозициональной переменной или формуле, следующей непосредственно за логической связкой справа;

2) каждое вхождение логической связки “ ” после расстановки скобок связывает пропозициональные переменные или формулы, непосредственно окружающие логическую связку;

3) каждое вхождение логической связки “ ” после расстановки скобок связывает пропозициональные переменные или формулы, непосредственно окружающие эту связку и т.д.

При использовании этих правил к одной и той же формуле скобки следует расставлять постепенно, продвигаясь слева направо.

Логические связки по силе и значимости могут быть упорядочены так: ; ; ; ; . То есть самой сильной связкой является отрицание, затем коньюнкция, дизьюнкция, импликация и, наконец, эквиваленция. Зная правила о силе логических связок, можно опускать те пары скобок, без которых ясен порядок исполнения логических операций.

Пример: пусть дана формула F=((($F_1$ ( $F_2$)) $F_3$) $F_4$).

Необходимо удалить скобки.

1) убрать внешние скобки для формулы, так как они не определяют старшинство никаких операций:

F=(($F_1$ ( $F_2$)) $F_3$) $F_4$;

2) убрать скобки, охватывающие формулу импликации, так как операция эквиваленции будет исполняться только после выполнения операции импликации:

F=($F_1$ ( $F_2$)) $F_3$ $F_4$;

3) убрать скобки, охватывающие формулу дизъюнкции, так как операция импликации будет исполняться только после выполнения операции дизъюнкции:

F=$F_1$ ( $F_2$) $F_3$ $F_4$;

4) убрать скобки, охватывающие формулу отрицания, так как операция дизъюнкции будет исполняться только после выполнения операции отрицания:

F=$F_1$ $F_2$ $F_3$ $F_4$;

Итак, последовательность исполнения операций после задания значений пропозациональных переменных следующая: сначала необходимо определить значение формулы ( $F_2$), затем ($F_1$ ( $F_2$)) затем (($F_1$ ( $F_2$)) $F_3$) и, наконец, ((($F_1$ ( $F_2$)) $F_3$) $F_4$)

Пример: Дана формула F=F1 F2 F3 F1 F3 F1. Необходимо расставить все скобки.

1) поставить скобки на формулу, реализующую операцию отрицания:

F1 F2 F3 ( F1) F3 F1;

2) поставить скобки на формулу, реализующую операцию конъюнкции:

F=((F1 F2) F3) ( F1) F3 F1;

3) поставить скобки на формулу, реализующую операцию дизъюнкции:

F=(((F1 F2) F3) ( F1)) F3 F1;

4) поставить скобки на формулу, реализующую операцию импликации:

F=((((F1 F2) F3) ( F1)) F3) F1;

5) поставить скобки на формулу, реализующую операцию эквиваленции:

F=(((((F1 F2) F3) ( F1)) F3) F1).

## 1.1.3 Законы алгебры логики

Две формулы $F_1$ и $F_2$ называются равносильными, если они имеют одинаковое значение “и” или “л” при одинаковых наборах пропозициональных переменных, включаемых в $F_1$ и $F_2$, т.е. $F_1 = F_2$ . Если две формулы равносильны, то они эквивалентны, т.е. ($F_i$ $F_i$).

Если формула F имеет вхождением подформулу $F_i$, для которой существует эквивалентная подформула $F_j$, т.е. $F_i$ $F_j$, то возможна подстановка всюду в формулу F вместо формулы $F_i$ подформулу $F_j$ без нарушения истинности формулы F.

Подмножество эквивалентных формул позволяющих выполнять преобразования сложных логических суждений формируют законы алгебры высказываний. Основные законы алгебры высказываний представлены в таблице.

| Наименование закона | Равносильные формулы $F_i$=$F_j$ |
|---|---|
| Коммутативности | ($F_1$ $F_2$)=($F_2$ $F_1$); ($F_1$ $F_2$)=($F_2$ $F_1$) |
| Ассоциативности | $F_1$ ($F_2$ $F_3$)=($F_1$ $F_2$) $F_3$; |

| | |
|---|---|
| | $F_1$ $(F_2$ $F_3)$ = $(F_1$ $F_2)$ $F_3$ |
| Дистрибутивности | $F_1$ $(F_2$ $F_3)$=$(F_1$ $F_2)$ $(F_1$ $F_3)$;<br>$F_1$ $(F_2$ $F_3)$=$F_1$ $F_2$ $F_1$ $F_3$ |
| Идемпотентности | F F = F;<br>F F = F |
| Исключенного третьего | F F = и; |
| Противоречия | F F = л |
| Де Моргана | $(F_1$ $F_2)$ = $F_1$ $F_2$; $(F_1$ $F_2)$ = $F_1$ $F_2$ . |
| Поглощения | $F_1$ $(F_1$ $F_2)$ = $F_1$; $F_1$ $(F_1$ $F_2)$ = $F_1$ |
| Дополнения | ( F) = F |
| Свойства констант | F л = F; F л= л;<br>F и = и; F и = F |

Справедливость некоторых законов подтверждается в примерах таблицами истинности.

| F1 | F2 | 1 2 | 1 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| Л | Л | Л | Л |
| Л | И | Л | Л |

| | | | |
|---|---|---|---|
| И | Л | Л | И |
| И | И | И | И |

| F1 | F2 | 1 2 | 1 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| Л | Л | Л | Л |
| Л | И | Л | Л |
| И | Л | Л | И |
| И | И | И | И |

<u>Пример:</u> $F_1$ ($F_1$ $F_2$) = $F_1$

Сравните значения логических функций в третьем и четвертом столбцах. Так можно проверить закон поглощения.

<u>Пример:</u> $F_1$ ($F_1$ $F_2$) = $F_1$

| F1 | F2 | 1 2 | 1 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| Л | Л | Л | Л |
| Л | И | И | Л |
| И | Л | И | И |
| И | И | И | И |

| F1 | F2 | 1 2 | 1 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| Л | Л | Л | Л |
| Л | И | И | Л |
| И | Л | И | И |
| И | И | И | И |

Сравните значения логических функций в третьем и четвертом столбцах. Так можно проверить второй закон поглощения.

<u>Пример:</u> $(F_1\ F_2) = F_1\ F_2$

| F1 | F2 | (1 2) | 1 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| Л | Л | И | И |
| Л | И | Л | Л |
| И | Л | Л | Л |
| И | И | Л | Л |

| F1 | F2 | (1 2) | 1 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| Л | Л | И | И |
| Л | И | Л | Л |
| И | Л | Л | Л |

| | | | |
|---|---|---|---|
| И | И | Л | Л |

Сравните значения логических функций в третьем и четвертом столбцах. Так можно проверить закон де Моргана.

<u>Пример:</u> $(F_1\ F_2) = F_1\ F_2$

| $F_1$ | $F_2$ | (1 2) | 1 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| Л | Л | И | И |
| Л | И | И | И |
| И | Л | И | И |
| И | И | Л | Л |

| $F_1$ | $F_2$ | (1 2) | 1 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| Л | Л | И | И |
| Л | И | И | И |
| И | Л | И | И |
| И | И | Л | Л |

Сравните значения логических функций в третьем и четвертом столбцах. Так можно проверить второй закон де Моргана..

Пример: $F_1$ ($F_2$ $F_3$)=($F_1$ $F_2$) ($F_1$ $F_3$).

| $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | 2 3 | 1 4 | 1 2 | 1 3 | 6 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л |
| Л | Л | И | Л | Л | Л | И | Л |
| Л | И | Л | Л | Л | И | Л | Л |
| Л | И | И | И | И | И | И | И |
| И | Л | Л | Л | И | И | И | И |
| И | Л | И | Л | И | И | И | И |
| И | И | Л | Л | И | И | И | И |
| И | И | И | И | И | И | И | И |

Сравните значения логических функций в пятом и восьмом столбцах. Так можно проверить первый закон дистрибутивности.

Сравните значения логических функций в пятом и восьмом столбцах. Так можно проверить первый закон дистрибутивности.

Пример: $F_1$ ($F_2$ $F_3$)=$F_1$ $F_2$ $F_1$ $F_3$

Сравните значения логических функций в пятом и восьмом столбцах. Так можно проверить второй закон дистрибутивности.

Сравните значения логических функций в пятом и восьмом столбцах. Так можно проверить второй закон дистрибутивности.

| $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | 2 3 | 1 4 | 1 2 | 1 3 | 6 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л |
| Л | Л | И | И | Л | Л | Л | Л |
| Л | И | Л | И | Л | Л | Л | Л |
| Л | И | И | И | Л | Л | Л | Л |
| И | Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л |
| И | Л | И | И | И | Л | И | И |
| И | И | Л | И | И | И | Л | И |
| И | И | И | И | И | И | И | И |

## 1.1.4 Эквивалентные преобразования формул

Знание законов алгебры высказываний позволяет выполнять эквивалентные преобразования любых логических формул, сохраняя их значения для любых наборов пропозициональных переменных. Ниже на примерах рассмотрены эквивалентные преобразования основных логических операций.

Пример 26: $F_1 F_2$ = $F_1 F_2$ = $(F_1 F_2)$.

| $F_1$ | $F_2$ | 1 2 | 1 2 | (1 2) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Л | Л | И | И | И |
| Л | И | И | И | И |
| И | Л | Л | Л | Л |
| И | И | И | И | И |

| $F_1$ | $F_2$ | 1 2 | 1 2 | (1 2) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Л | Л | И | И | И |
| Л | И | И | И | И |
| И | Л | Л | Л | Л |
| И | И | И | И | И |

Сравните значения логических функций в третьем, четвертом и пятом столбцах. То есть
операцию импликации всегда можно заместить исполнением операций дизъюнкции и отрицания или коньюнкции и отрицания.

Пример: $F_1$ $F_2$ = ($F_1$ $F_2$) ($F_2$ $F_1$) = ( $F_1$ $F_2$) ( $F_2$ $F_1$) =
= ( ( $F_1$ $F_2$) ( $F_2$ $F_1$)).

| $F_1$ | $F_2$ | $F_1$ $F_2$ | $F_1$ $F_2$ | $F_2$ $F_1$ | 4 5 | $F_1$ $F_2$ | $F_2$ $F_1$ | 7 8 | 7 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| Л | Л | И | И | И | И | И | И | И | Л | И |
| Л | И | Л | И | Л | Л | И | Л | Л | И | Л |
| И | Л | Л | Л | И | Л | Л | И | Л | И | Л |
| И | И | И | И | И | И | И | И | И | Л | И |

Сравните значения логических функций в третьем, шестом, девятом и одиннадцатом столбцах. То есть исполнение операции эквиваленции всегда можно заместить исполнением операций импликации и конъюнкции или дизъюнкции и отрицания.

Пример: $F_1$ $F_2$ = $F_1$ $F_2$ $F_1$ $F_2$= ( ( $F_1$ $F_2$) ($F_1$ $F_2$)).

| $F_1$ | $F_2$ | 1 2 | 1 2 | 1 2 | 4 5 | 4 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Л | Л | И | И | Л | И | Л | И |
| Л | И | Л | Л | Л | Л | И | Л |
| И | Л | Л | Л | Л | Л | И | Л |
| И | И | И | Л | И | И | Л | И |

Сравните значения логических функций в третьем, шестом и восьмом столбцах. Это -значения трех эквивалентных функций.

Сравните значения логических функций в третьем, шестом и восьмом столбцах. Это -значения трех эквивалентных функций.

Выполненные примеры показывают, что всякую формулу алгебры логики можно заместить равносильной ей формулой, содержащей вместо импликации или эквиваленции только две логических операции: дизьюнкцию и отрицание или коньюнкцию и отрицание. Этот факт показывает, что множество логических связок дизъюнкции и отрицания, конъюнкции и отрицания формируют функционально полные алгебраические системы. Они достаточны для выражения любой логической функции, любой таблицы истинности

Если формула F содержит подформулу $F_i$, то замена подформулы $F_i$ в формуле F на эквивалентную ей формулу $F_j$ не изменяет значения формулы F при любом наборе пропозициональных переменных. Если необходима подстановка в формулу F вместо формулы $F_i$ новой формулы $F_j$ , то эту операцию нужно выполнить всюду по символу $F_i$ .

Правила замены и подстановки расширяют возможности эквивалентных преобразований формул сложных высказываний.

Пример: Дано $F=(F_1\ F_2)\ ((F_2\ F_3)\ (F_1\ F_2\ F_3)$.

Выполнить преобразования для упрощения алгебраического выражения.

**1)**Удалить всюду логическую связку “ ”:

$F= (\ F_1\ F_2)\ (\ (\ F_2$ F3) $(\ (F_1\ F_2)\ F_3)$;

**2)**Опустить отрицание на элементарные формулы по закону де Моргана:

$F=F_1\ F_2\ F_2\ F_3\ F_1\ F_2\ F_3$;

**3)**Выполнить преобразование по закону дистрибутивности:

$F=(\ F_1\ F_1)\ F_2\ F_2\ F_3\ F_3$;

**4)**Удалить член $(\ F_1\ F_1)$, так как $(\ F_1\ F_1)$=и:

$F=\ F_2\ F_2\ F_3\ F_3$;

**5)**Выполнить преобразование по закону дистрибутивности:

$F=\ F_2\ (F_2$ F3) $(\ F_3\ F_3)$;

**6)**Удалить член $(\ F_3\ F_3)$=и:

$F=\ F_2\ (F_2$ F3);

7) Применить закон ассоциативности:

$F=(\ F_2\ F_2)\ F_3$;

**7)**Приравнять “истине” значение формулы F, т.к. $(\ F_2\ F_2)$=и:

F=и $F_3$=и.

Пример:Дано F= ($F_1$ $F_2$) ( $F_3$ $F_4$) ($F_1$ $F_2$) ($F_3$ $F_4$).

Выполнить эквивалентные преобразования для упрощения алгебраического выражения.

**1)**Удалить логическую связку “ ”:

F= ( $F_1$ $F_2$) ( $F_3$ $F_4$) ($F_1$ $F_2$) ($F_3$ $F_4$);

2) Опустить отрицание на элементарные формулы по закону де Моргана:

F=$F_1$ $F_2$ ( $F_3$ $F_4$) $F_1$ $F_2$ ( $F_3$ $F_4$);

**3)**Выполнить преобразование по закону дистрибутивности:

F=( $F_1$ $F_1$) $F_2$ ( $F_3$ $F_4$);

4) Удалить член ( $F_1$ $F_1$)=и:

F= $F_2$ ( $F_3$ $F_4$).

Дальнейшее упрощение формулы F невозможно.

Пример: Дано суждение "или верно, что Петр поступил в университет (A), и при этом неверно, что Петр не поступил и Андрей не поступил, или Петр поступил и Семен поступил (C), или даже Петр поступил и Семен поступил, и Андрей поступил (B)"[2].

Формула сложного высказывания имеет вид:

A ( A B) A C A B C;

1) преобразовать, используя закон де Моргана:

A (A B) A C A B C;

2) применить закон идемпотентности:

A (A B) A A C A B C;

3) применить закон дистрибутивности по переменной A:

A ((A B) A C B C);

4) применить закон дистрибутивности по переменной C:

A ((A B) C (A B));

5) ввести константу "и":

А ((А В) ”и” С (А В));

6) применить закон дистрибутивности для подформулы (А В):

А (А В) (“и” С);

7) удалить (“и” С):

А (А В);

8) применить закон поглощения:

А.

Следовательно, в данном высказывании утверждается только то, что Петр поступил в университет, а об Андрее и Семене никакой информации нет.

Пример: Шесть школьников - Андрей, Борис, Григорий, Дмитрий, Евгений и Семен - участвовали в олимпиаде. Двое из них решили все задачи. На вопрос, кто решил все задачи, последовали ответы:1) Андрей и Дмитрий; 2) Борис и Евгений; 3) Евгений и Андрей; 4)Борис и Григорий; 5) Семен и Андрей. В четырех из этих ответов одна часть неверна, другая верна. В одном - обе части неверны. Кто решил все задачи? [2]

Введем обозначения:

А:= Андрей решил все задачи;

Б:= Борис решил все задачи;

Г:= Григорий решил все задачи;

Д:= Дмитрий решил все задачи;

Е:= Евгений решил все задачи;

С:= Семен решил все задачи.

Так как в одном из ответов обе части неверны, а в остальных - одна, то необходимо составить пять формул, отражающих пять различных высказываний:

А Д ( Б Е Б Е) ( Е А Е А) ( Б Г Б Г)

( С А С А);

Б Е ( А Д А Д) ( Е А Е А) ( Б Г Б Г)

( С А С А);
Е А ( А Д А Д) ( Б Е Б Е) ( Б Г Б Г)
( С А С А);
Б Г ( А Д А Д) ( Б Е Б Е) ( Е А Е А)
( С А С А);
С А ( А Д А Д) ( Б Е Б Е) ( Е А Е А)
( Б Г Б Г).
Если допустить, что А=и и Д=и, то первая формула может быть записана так:
А Д ( Б Е Б Е) Е А ( Б Г Б Г) С А,
т.к. член Е А=0.
Если допустить, что Б=и и Е=и, то вторая формула может быть записана так:
Б Е ( А Д А Д) Е А Б Г ( С А С А),
т.к. члены Е А=0 и Б Г=0.
Если допустить, что Е=и и А=и, то третья формула может быть записана так:
Е А А Д Б Е ( Б Г Б Г) С А,
т.к. члены А Д=0, Б Е=0, и С А=0.
Если допустить, что Б=и и Г=и, то четвертая формула может быть записана так:
Б Г ( А Д А Д) Б Е ( Е А Е А) ( С А С А), т.к. член Б Е=0.
Если допустить, что С =и и А=и, то пятая формула может быть записана так:
С А А Д ( Б Е Б Е) Е А ( Б Г Б Г),
т.к. член А Д=0.

Применив законы дистрибутивности, идемпотентности и поглощения эти формулы можно упростить так:

А Д Б Е Г С;

Б Е Д С А Г;

Е А Г Д С Б;

Б Г А Д Е С;

С А Б Д Е Г.

По условиям задачи только два участника решили все задачи. Поэтому формулы, содержащие по три пропозициональных переменных без отрицания, не отвечают поставленным условиям, а одна, содержащая только две переменных без отрицания, отвечает условиям задачи. Это - Б Е Д С А Г. Следовательно, все задачи на олимпиаде решили Андрей (А) и Григорий (Г).

## 1.1.5 Нормальные формы формул

В алгебре высказываний используют две нормальные формы: ***дизъюнктивную и конъюнктивную нормальные формы формулы*** (ДНФ и КНФ).

ДНФ формулы есть формула, равносильная формуле исходной логической функции и записанная в виде дизъюнкции элементарных конъюнкций, построенных на пропозициональных переменных, т.е.

$$F = K_1\ K_2\ K_3 \ldots, \text{ где } K_i = (\ A\ B\ C \ldots).$$

В элементарной коньюнкции нет двух одинаковых пропозициональных переменных, т.к. по закону идемпотентности F F=F. В ДНФ нет двух одинаковых элементарных коньюнкций, т.к. по закону идемпотентности F F=F. Если одна из элементарных коньюнкций содержит F и F, то элементарную коньюнкцию следует удалить, т.к. F F=л.

<u>Пример</u>: $F=F_1\ (F_1\ F_2)\ F_2\ (F_1\ F_2)$.

**1)**по закону дистрибутивности:

$F=F_1\ F_1\ F_1\ F_2\ F_1\ F_2\ F_2\ F_2$;

**2)**по законам идемпотентности и противоречия:

$F=F_1\ F_1\ F_2$;

**3)**по закону поглощения:

$F=F_1$.

КНФ формулы есть формула, равносильная формуле исходной логической функции и записанная в виде конъюнкции элементарных дизъюнкций, построенных на пропозициональных переменных, т.е.
$F = D_1\ D_2\ D_3\ \ldots$ , где $D_i = (\ A\ B\ C\ \ldots\ )$.

В элементарной дизьюнкции нет двух одинаковых пропозициональных переменных, т.к. по закону идемпотентности F F=F. В КНФ нет двух одинаковых элементарных дизьюнкций, т.к. по закону идемпотентности F F=F. Если одна из элементарных дизьюнкций содержит F и F, то следует удалить,

т.к. F F = и.

Пример: $F=F_1\ (F_1\ F_2)\ F_2\ (F_1\ F_2)$.
**1)**по закону дистрибутивности:

$F= (F_1\ (F_1\ F_2)\ F_2)\ (F_1\ (F_1\ F_2)\ (F_1\ F_2))$;
**2)**по закону дистрибутивности:

$F=(F_1\ F_2)\ (F_1\ F_2\ F_2)\ (F_1\ F_1\ F_2)\ (F_1\ F_2\ F_1\ F_2)$;
**3)**по закону идемпотентности и исключенного третьего:

$F=(F_1\ F_2)\ (F_1\ F_2)\ (F_1\ F_2)$;
**4)**по закону идемпотентности:

$F=(F_1\ F_2)\ (F_1\ F_2)$;
**5)**по закону дистрибутивности:

$F=F_1\ (F_2\ F_2)$;
**6)**по закону противоречия:

$F=F_1$.

Наибольшее распространение в логике высказываний получили формулы вида КНФ, элементарные дизъюнкции которых $D_i$ принято называть ***дизъюнктами***, а члены каждого дизъюнкта A, B, C –***атомами*.**

# 1.1.5.1 Алгоритм приведения к нормальной форме

Шаг 1. Устранить логические связки “ ” и “ ” всюду по правилам:

$F_1$ $F_2$ =($F_1$ $F_2$) ($F_2$ $F_1$)=( $F_1$ $F_2$) ( $F_2$ $F_1$)=( $F_1$ $F_2$) ( $F_1$ $F_2$);

$F_1$ $F_2$ = $F_1$ $F_2$ = ($F_1$ ( $F_2$)).

Шаг 2. Продвинуть отрицание до элементарной формулы (пропозициональной переменной) по правилам:

( F) = F ;

($F_1$ $F_2$ ) = ( $F_1$) ( $F_2$);

($F_1$ $F_2$) = ( $F_1$) ( $F_2$).

Шаг 3. Применить закон дистрибутивности:

a) для КНФ: $F_1$ ($F_2$ $F_3$) = ($F_1$ $F_2$) ($F_1$ $F_3$);

b) для ДНФ: $F_1$ ($F_2$ $F_3$) = ($F_1$ $F_2$) ($F_1$ $F_3$).

<u>Пример</u>: Дана формула F=(($F_1$ ($F_2$ $F_3$)) $F_4$).

Привести формулу к виду КНФ:

1) F=( $F_1$ ($F_2$ $F_3$)) $F_4$ ;

2) F= ( $F_1$ ($F_2$ $F_3$)) $F_4$ ;

3) F=($F_1$ ( $F_2$) $F_3$) $F_4$ ;

4) F=($F_4$ $F_1$) ($F_4$ ( $F_2$) $F_3$);

5) F=($F_4$ $F_1$) ($F_4$ $F_2$) ($F_4$ $F_3$).

<u>Пример</u>: Дана формула F=( ($F_1$ $F_2$) ($F_1$ $F_2$)).

Привести формулу к виду ДНФ:

**1)**F=( $F_1$ $F_2$) ($F_1$ $F_2$);

**2)**F=(( $F_1$ $F_2$) $F_1$) (( $F_1$ $F_2$) $F_2$);

**3)**$F=(F_1\ F_1)\ (F_2\ F_1)\ (F_1\ F_2)\ (F_2\ F_2)$;
**4)**$F=(F_2\ F_1)\ (F_1\ F_2)$.

Если каждая элементарная конъюнкция (или элементарная дизъюнкция) формулы содержат символы всех пропозициональных переменных, то такая формула называется совершенной. Есть ***совершенные дизъюнктивные нормальные формы*** формулы (СДНФ) и ***совершенные конъюнктивные нормальные формы*** формулы (СКНФ).

## 1.1.5.2 Алгоритм преобразования ДНФ к виду СДНФ.

Шаг 1: если в элементарную конъюнкцию F не входит подформула $F_i$ или $F_i$, то дополнить элементарную конъюнкцию высказыванием ($F_i\ F_i$) и выполнить преобразование формулы по закону дистрибутивности:

$$F\ (F_i\ F_i)=F\ F_i\ F\ F_i;$$

Шаг 2: если в элементарную конъюнкцию F не входит подформула $F_j$ или $F_j$, то повторить шаг 1, иначе – конец.

Пример: Дано $F=F_1\ F_2\ F_1\ F_3\ F_4\ F_1\ F_2\ F_3\ F_4$.

Преобразовать формулу к виду СДНФ:

1) $F=F_1\ F_2\ (F_3\ F_3)\ F_1\ F_3\ F_4\ (F_2\ F_2)\ F_1\ F_2\ F_3\ F_4$;
2) $F=F_1\ F_2\ F_3\ F_1\ F_2\ F_3\ F_1\ F_2\ F_3\ F_4\ F_1\ F_2\ F_3\ F_4\ F_1\ F_2\ F_3\ F_4$;
**3)**$F=F_1\ F_2\ F_3\ (F_4\ F_4)\ F_1\ F_2\ F_3\ (F_4\ F_4)\ F_1\ F_2\ F_3\ F_4\ F_1\ F_2\ F_3\ F_4\ F_1\ F_2\ F_3\ F_4$;
4) $F=(F_1\ F_2\ F_3\ F_4)\ (F_1\ F_2\ F_3\ F_4)\ (F_1\ F_2\ F_3\ F_4)$
$(F_1\ F_2\ F_3\ F_4)\ (F_1\ F_2\ F_3\ F_4)\ (F_1\ F_2\ F_3\ F_4)\ (F_1\ F_2\ F_3\ F_4)$.

## 1.1.5.3 Алгоритм преобразования КНФ к виду СКНФ.

Шаг 1: если в элементарную дизьюнкцию F не входит подформула $F_i$ или $F_i$, то дополнить элементарную дизьюнкцию высказыванием ($F_i\ F_i$) и выполнить преобразование формулы по закону дистрибутивности:

$F\ (F_i\ F_i) = (F\ F_i)\ (F\ Fi)$;

Шаг 2: если в элементарную конъюнкцию F не входит подформула $F_j$ или $F_j$, то повторить шаг 1, иначе – конец.

<u>Пример</u>: Дано $F=(F_1\ F_2)\ (\ F_1\ F_2\ F_3\ F_4)$.

Преобразовать формулу к виду СКНФ:

**1)**$F=(F_1\ F_2\ F_3\ F_3)\ (\ F_1\ F_2\ F_3\ F_4)$;

**2)**$F=(F_1\ F2\ F_3)\ (F_1\ F_2\ F_3)\ (\ F_1\ F_2\ F_3\ F_4)$;

**3)**$F=(F_1\ F2\ F_3\ F4\ F4)\ (F_1\ F_2\ F_3\ F4\ F4)\ (\ F_1\ F_2\ F_3\ F_4)$;

**4)**$F=(F_1\ F2\ F_3\ F4)\ (F_1\ F2\ F_3\ F4)\ (F_1\ F_2\ F_3\ F4)\ (F_1\ F_2\ F_3\ F4)\ (\ F_1\ F_2\ F_3\ F_4)$.

Совершенные нормальные формы формул удобно записывать, используя таблицы истинности, по значениям пропозициональных переменных и значению описываемой формулы.

Элементарные коньюнкции СДНФ формируются для значений формулы “и”. Число элементарных коньюнкций равно числу истинных значений формулы. Пропозициональные переменные, входящие в элементарную коньюнкцию, записываются без изменений, если их значение равно “и” и с логической связкой “ ”, если их значение равно “л”.

Элементарные дизьюнкции СКНФ формируются для значений формулы “л”. Число элементарных дизьюнкций равно числу ложных значений формулы. Пропозициональные переменные, входящие в элементарную дизьюнкцию, записываются без изменений, если их значение равно “л” и с логической связкой “ ”, если их значение равно “и”.

<u>Пример</u>: Записать СДНФ и СКНФ для функции, заданной таблицей истинности

| A | B | C | F(A,B,C) |
|---|---|---|---|
| Л | Л | Л | И |
| Л | Л | И | Л |
| Л | И | Л | Л |
| Л | И | И | И |
| И | Л | Л | И |
| И | Л | И | Л |

| | | | |
|---|---|---|---|
| И | И | Л | Л |
| И | И | И | И |

| A | B | C | F(A,B,C) |
|---|---|---|---|
| Л | Л | Л | И |
| Л | Л | И | Л |
| Л | И | Л | Л |
| Л | И | И | И |
| И | Л | Л | И |
| И | Л | И | Л |
| И | И | Л | Л |
| И | И | И | И |

a) Формула СДНФ:

F(A,B,C) = A B C A B C

A B C A B C;

b) Формула СКНФ:

F(A,B,C) = (A B C) (A B C)

( A B C) ( A B C).

## 1.2 Исчисление высказываний

Определение исчисления высказываний, как и любой формальной системы, следует начинать с задания множества аксиом и правил вывода, обеспечивающих последовательное их использование при доказательстве истинности заключения.

***Доказательством*** называют конечную последовательность высказываний, каждое из которых является либо аксиомой, либо выводится из одного или более предыдущих высказываний этой последовательности по правилам вывода.

Определение минимально возможного множества аксиом определяет семантическую полноту исчисления, а определение правил, обеспечивающих последовательное использование аксиом и промежуточных высказываний в процессе формирования заключения – метод дедуктивного вывода.

### 1.2.1 Интерпретация формул

Если дана некоторая формула F и каждой ее пропозициональной переменной приписано значение "и" или "л", то говорят что дана интерпретация формулы F.

Все множество формул логики высказываний можно разбить на три класса: тождественно истинные, тождественно ложные и теоремы. В каждом классе может быть перечислимое и счетное множество формул.

***Тождественно истинные формулы*** (или общезначимые)– это особый класс формул, которые принимают значение “истины” при любом значении пропозициональных переменных, входящих в эту формулу. Эти формулы играют роль аксиом и законов логики высказываний.

***Тождественно ложные формулы*** (или противоречия)- это особый класс формул, которые принимают значение “ложь” при любых значениях пропозициональных переменных, входящих в формулу.

***<u>Выполнимые формулы </u>***- это особый класс формул, которые принимают значения “истина” или “ложь” в зависимости от значений пропозициональных переменных.

Поиск алгоритма, определяющего к какому классу принадлежит та или иная формула, формирует проблему разрешимости исчисления высказываний.

<u>Пример</u>: Определить, к какому классу относятся формулы:

а) F = ((A B) (A C) (A (B C))

| A | B | C | A B | A C | B C | 4 5 | 1 6 | 7 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Л | Л | Л | И | И | Л | И | И | **И** |
| Л | Л | И | И | И | Л | И | И | **И** |
| Л | И | Л | И | И | Л | И | И | **И** |
| Л | И | И | И | И | И | И | И | **И** |
| И | Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л | **И** |
| И | Л | И | Л | И | Л | Л | Л | **И** |
| И | И | Л | И | Л | Л | Л | Л | **И** |
| И | И | И | И | И | И | И | И | **И** |

Формула принадлежит классу тождественно истинных формул (см. столбец 9).

б) F=A ( B C) (A B) (A C)

| А А б) F = (А ( | 5 6 |
|---|---|

| B C) (A B) (A C)). A | B | C | 2 3 | 1 4 | 1 2 | 1 3 | | 8 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Л | Л | Л | И | Л | И | И | Л | **Л** |
| Л | Л | И | И | Л | И | И | Л | **Л** |
| Л | И | Л | И | Л | И | И | Л | **Л** |
| Л | И | И | Л | Л | И | И | Л | **Л** |
| И | Л | Л | И | И | Л | Л | Л | **Л** |
| И | Л | И | И | И | Л | Л | Л | **Л** |
| И | И | Л | И | И | И | Л | И | **Л** |
| И | И | И | Л | Л | И | И | Л | **Л** |

Формула принадлежит классу тождественно ложных формул (см. столбец 9).

в) F = (A B) (B C).

| A | B | C | 1 2 | 2 3 | 4 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Л | Л | Л | Л | И | Л |
| Л | Л | И | Л | И | Л |
| Л | И | Л | **И** | **И** | **И** |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Л | И | И | И | Л | Л |
| И | Л | Л | **И** | **И** | **И** |
| И | Л | И | **И** | **И** | **И** |
| И | И | Л | **И** | **И** | **И** |
| И | И | И | И | Л | Л |

Формула принимает значение “и” или “л” для различных наборов значений

Формула принимает значение “и” или “л” для различных наборов значений

Любая формула исчисления высказываний может рассматриваться как формула алгебры высказываний и, следовательно, можно рассматривать ее логические значения на различных наборах значений входящих в нее пропозициональных переменных по таблицам истинности.

Недостаток использования таблиц истинности состоит в том, что при большом числе пропозициональных переменных сама процедура построения этих таблиц становится громоздкой, так как число строк этой таблицы равно 2n , где n - число пропозициональных переменных формулы, а число столбцов не меньше (n+m), где m – число логических связок в формуле.

Пример: В семье есть договоренность относительно пользования телевизором на субботние вечера: а) если не смотрит отец( А), то смотрит дочь (С) и не смотрит мать ( В), т.е. $F_1$=( А С В);б) если не смотрит дочь ( С), то смотрит мать (В) и не смотрит отец ( А), т.е. $F_2$=( С В А); в) если смотрит отец (А), то не смотрит дочь ( С), т.е. $F_3$=( А С). В каком случае совместимы эти условия? [2]

Формальная запись этого суждения имеет вид:

F=$F_1$ $F_2$ $F_3$=( А С В) ( С В А) (А С).

| A | B | C | 3 2 | 1 4 | 2 1 | 3 6 | 1 3 | 5 7 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л | И | Л |
| Л | Л | И | И | **И** | Л | **И** | **И** | **И** |
| Л | И | Л | Л | Л | И | И | И | Л |
| Л | И | И | Л | Л | И | И | И | Л |
| И | Л | Л | Л | И | Л | Л | И | Л |
| И | Л | И | И | И | Л | И | Л | Л |
| И | И | Л | Л | И | Л | Л | И | Л |
| И | И | И | Л | И | Л | И | Л | Л |

Анализ таблицы показывает (см. столбец 9), что эти  условия совместимы (см. строку 2), когда A=л, B=л и C=и (см. строку 2).

Анализ таблицы показывает (см. столбец 9), что эти  условия совместимы (см. строку 2), когда A=л, B=л и C=и (см. строку 2).

## 1.2.2 Аксиомы исчисления высказываний

Как уже отмечалось множество формул, удовлетворяющих условиям тождественной истинности, бесконечно. Однако в качестве аксиом всегда выбирают  только такие, которые при истинности посылок обеспечивают дедуктивный вывод истинности заключения. При этом стремятся создать такую систему аксиом, которая содержала бы минимальное число формул для заданного набора логических связок. Так известна система, которая для логических связок импликации и отрицания содержит только три аксиомы,

а для логических связок импликации и дизъюнкции только пять аксиом.
Для полного набора логических связок: импликация, отрицание, конъюнкция и дизъюнкция система содержит десять аксиом. В силу полноты систем, использующих логические связки а) импликации и отрицания, б) импликации и дизъюнкции, в) импликации, отрицания, конъюнкции и дизъюнкции можно использовать в процессе дедуктивного вывода любую из указанных систем.

Ниже приведена одна из систем аксиом:

A1. $F_1$ ($F_2$ $F_1$);

A2. ($F_1$ $F_2$) (($F_2$ $F_3$)) ($F_1$ $F_3$));

A3. ($F_1$ $F_2$) $F_1$;

A4. ($F_1$ $F_2$) $F_2$;

A5. $F_1$ ($F_2$ ($F_1$ $F_2$));

A6. $F_1$ ($F_1$ $F_2$);

A7. $F_2$ ($F_1$ $F_2$);

A8. ($F_1$ $F_3$) (($F_2$ $F_3$) (($F_1$ $F_2$) $F_3$));

A9. ($F_1$ $F_2$) (( $F_1$ $F_2$) $F_1$);

A10. ($F_1$ $F_2$) (($F_1$ $F_3$) ($F_2$ $F_3$));

A11. ($F_1$ $F_2$) (($F_1$ $F_3$) ($F_2$ $F_3$));

A12. $F_1$ $F_1$.

Для проверки тождественной истинности аксиом рассмотрим таблицы истинности для А2 и А8:

A2. ($F_1$ $F_2$) (( $F_1$ ( $F_2$ $F_3$)) ( $F_1$ $F_3$))

| F1 | F2 | F3 | 1 2 | 1 3 | 2 3 | 1 6 | 7 5 | 4 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| л | л | л | и | и | и | и | и | **и** |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| л | л | и | и | и | и | и | и | **и** |
| л | и | л | и | и | л | и | и | **и** |
| л | и | и | и | и | и | и | и | **и** |
| и | л | л | л | л | и | и | л | **и** |
| и | л | и | л | и | и | и | и | **и** |
| и | и | л | и | л | л | л | и | **и** |
| и | и | и | и | и | и | и | и | **и** |

A8. ($F_1$ $F_3$) (( $F_2$ $F_3$) (( $F_1$ $F_2$) $F_3$))

| $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | 1 2 | 1 3 | 2 3 | 4 3 | 6 7 | 5 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| л | л | л | л | и | и | и | и | **и** |
| л | л | и | л | и | и | и | и | **и** |
| л | и | л | и | и | л | л | и | **и** |
| л | и | и | и | и | и | и | и | **и** |
| и | л | л | и | л | и | л | л | **и** |
| и | л | и | и | и | и | и | и | **и** |
| и | и | л | и | л | л | л | и | **и** |
| и | и | и | и | и | и | и | и | **и** |

.

## 1.2.3 Правила вывода

Выводом формулы **B** из множества формул $\mathbf{F}_1$; $\mathbf{F}_2$; . . . $\mathbf{F}_n$ называется такая последовательность формул, что любая $\mathbf{F}_i$ есть либо аксиома, либо непосредственно выводима из подмножества предшествующих ей формул $\mathbf{F}_1; \mathbf{F}_2; \ldots \mathbf{F}_n$.

В этом случае формулу **B** называют заключением, а последовательность формул $\mathbf{F}_1$; $F_2$; . . . $\mathbf{F}_n$, сформированная отношением логического вывода, представляет схему дедуктивного вывода.

Схему дедуктивного вывода записывают так:

$$\mathbf{F}_1; \mathbf{F}_2; \ldots \mathbf{F}_n \ \mathbf{B},$$

где символ означает “верно, что **B** выводима из $\mathbf{F}_1$; $\mathbf{F}_2$;... $\mathbf{F}_n$“.

Есть определенная связь между отношением логического вывода в схеме дедукивного вывода и импликацией в схеме закона алгебры высказываний .

Этот факт записывают так:

$$\mathbf{F}_1 \ \mathbf{F}_2 \ \ldots \ \mathbf{F}_n \ B.$$

Известна другая форма записи дедуктивного вывода формулы **B**:

$$\mathbf{F}_1; \mathbf{F}_2; \ldots \mathbf{F}_n$$

**B**,

где над чертой записывают множество посылок и аксиом $\mathbf{F}_1$; $\mathbf{F}_2$;...$F_n$, а под чертой заключение **B**, принимающее значение “истины” при истинности всех посылок.

## 1.2.3.1 Правила подстановки

Если выводимая формула **F** содержит некоторую переменную **A** (обозначим этот факт **F**(**A**)) и существует произвольная формула **B**, то формула **F**(**B**), получающаяся заменой всех вхождений **A** на формулу **B**, также выводима в исчислении высказываний. Этот факт формально описывают так:

Этот факт записывают так:

A BF(A)

F(B).

Если **F**(**A**)=**A**, то A BA

B.

Если **F** ( **A)**, то A BF( A)

F( B).

Следует еще раз обратить внимание, что формула **F** должна быть выводимой в исчислении высказываний.

Пример: Пусть даны формулы F=A C A и B=C A.

Если выполнить подстановку формулы B в формулу F вместо формулы A, то получим новую формулу F`.

A CA (A C A)

(C A) C (C A).

| A | B | C | 1 3 | 4 1 | 3 1 | 6 3 | 7 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| л | л | л | л | **и** | и | л | **и** |
| л | л | и | л | **и** | и | и | **и** |
| л | и | л | л | **и** | и | л | **и** |
| л | и | и | л | **и** | и | и | **и** |
| и | л | л | л | **и** | и | л | **и** |
| и | л | и | и | **и** | л | л | **и** |
| и | и | л | л | **и** | и | л | **и** |
| и | и | и | и | **и** | л | л | **и** |

Проверим значения двух формул F и F’по таблицам истинности.
Выделенные столбцы показывают тождество двух формул.

Проверим значения двух формул F и F’по таблицам истинности.
Выделенные столбцы показывают тождество двух формул.

## 1.2.3.2. Правила введения и удаления логических связок

При выводе заключения удобно правила введения и удаления логических связок представить также как и правила вывода:

**1)**если посылки $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ имеют значение “и”, то истинной является их конъюнкция, т.е.

$\mathbf{F}_1$ ; $\mathbf{F}_2$

($\mathbf{F}_1$&$\mathbf{F}_2$) .

Эта запись при истинности посылок $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ предусматривает возможность введения в заключение логической связки конъюнкции; это правило тождественно аксиоме А5;

**2)**если ($\mathbf{F}_1$&$\mathbf{F}_2$) имеет значение “и”, то истинными являются подформулы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, т.е. ($\mathbf{F}_1$&$\mathbf{F}_2$) ($\mathbf{F}_1$&$\mathbf{F}_2$)

$\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}_2$.

Эта запись при истинности ($\mathbf{F}_1$&$F_2$) предусматривает возможность удаления в заключении логической связки конъюнкции и рассматривать истинные значения подформул $F_1$ и $\mathbf{F}_2$; это правило тождественно аксиомам А3 и А4;

**3)**если $\mathbf{F}_1$ имеет значение “и”, а ($\mathbf{F}_1$&$\mathbf{F}_2$) – “л”, то ложной является подформулы $\mathbf{F}_2$, т.е.

$\mathbf{F}_1$; ($\mathbf{F}_1$&$\mathbf{F}_2$)

$\mathbf{F}_2$.

Эта запись при ложности ($\mathbf{F}_1$&$\mathbf{F}_2$) и истинности одной из подформул предусматривает возможность <u>удаления в заключении логической связки конъюнкции</u> и рассматривать ложным значение второй подформулы;

4) если истинна хотя бы одна посылка $\mathbf{F}_1$ или $\mathbf{F}_2$, то истинной является их дизъюнкция, т.е.

$\mathbf{F}_1$ $\mathbf{F}_2$

($\mathbf{F}_1$ $\mathbf{F}_2$) или ($\mathbf{F}_1$ $F_2$).

Эта запись при истинности хотя бы одной подформулы $\mathbf{F}_1$ или $\mathbf{F}_2$ предусматривает возможность <u>введения в заключение логической связки дизъюнкции</u>; это правило тождественно аксиомам A6 и A7;

5) если ($\mathbf{F}_1$ $\mathbf{F}_2$) имеет значение “и” и одна из подформул $\mathbf{F}_1$ или $\mathbf{F}_2$ имеет значение “л”, то истинной является вторая подформулаы $\mathbf{F}_2$ или $F_1$, т.е.

($\mathbf{F}_1$ $\mathbf{F}_2$); $\mathbf{F}_1$ ($\mathbf{F}_1$ $\mathbf{F}_2$); $\mathbf{F}_2$

$\mathbf{F}_2$ или $\mathbf{F}_1$.

Эта запись при истинности ($\mathbf{F}_1$ $F_2$) предусматривает возможность <u>удаления в заключении логической связки дизъюнкции</u> и рассматривать истинные значения подформул $\mathbf{F}_1$ или $\mathbf{F}_2$;

6) если подформула $\mathbf{F}_2$ имеет значение “и”, то истинной является формула ($\mathbf{F}_1$ $\mathbf{F}_2$) при любом значении подформулы $\mathbf{F}_1$, т.е

$\mathbf{F}_2$

($\mathbf{F}_1$ $\mathbf{F}_2$).

Эта запись при истинном значении $\mathbf{F}_2$ предусматривает возможность <u>введения в заключение логической связки импликации</u> при любом значении подформулы $\mathbf{F}_1$ (“истина из чего угодно”); это правило тождественно аксиоме 1;

7) если подформула $\mathbf{F}_1$ имеет значение “л”, то истинной является формула ($\mathbf{F}_1$ $\mathbf{F}_2$) при любом значении подформулы $\mathbf{F}_2$, т.е

$\mathbf{F}_1$

$$(\mathbf{F}_1\ \mathbf{F}_2).$$

Эта запись при ложном значении $\mathbf{F}_1$ предусматривает возможность введения в заключение логической связки импликации при любом значении подформулы $\mathbf{F}_2$ (“ из ложного что угодно”);

8) если формула ($\mathbf{F}_1$ $\mathbf{F}_2$) имеет значение “и”, то истинной является формула ( $\mathbf{F}_2$ $\mathbf{F}_1$), т.е

($\mathbf{F}_1$ $\mathbf{F}_2$)

( $\mathbf{F}_2$ $\mathbf{F}_1$).

Эта запись при истинном значении ($\mathbf{F}_1$ $\mathbf{F}_2$) определяет возможность замены местами полюсов импликации при одновременном изменении их значений; это- закон контрапозиции;

9) если формула ($\mathbf{F}_1$ $\mathbf{F}_2$) имеет значение “и”, то истинной является формула (($\mathbf{F}_1$ $\mathbf{F}_3$) ($\mathbf{F}_2$ $\mathbf{F}_3$) при любом значении $\mathbf{F}_3$, т.е

$$(\mathbf{F}_1\ \mathbf{F}_2)$$

(($\mathbf{F}_1$ $\mathbf{F}_3$) ($\mathbf{F}_2$ $\mathbf{F}_3$).

Эта запись при истинном значении ($\mathbf{F}_1$ $\mathbf{F}_2$) определяет возможность выполнить операцию дизъюнкции при любом значении формулы $\mathbf{F}_3$ над каждым полюсом импликации; это правило тождественно аксиоме А11.

10) если формула ($\mathbf{F}_1$ $\mathbf{F}_2$) имеет значение “и”, то истинной является формула (($\mathbf{F}_1$&$\mathbf{F}_3$) ($\mathbf{F}_2$&$\mathbf{F}_3$) при любом значении $\mathbf{F}_3$, т.е

$$(\mathbf{F}_1\ \mathbf{F}_2)$$

(($\mathbf{F}_1$&$\mathbf{F}_3$) ($\mathbf{F}_2$&$\mathbf{F}_3$).

Эта запись при истинном значении ($\mathbf{F}_1$ $\mathbf{F}_2$) определяет возможность выполнить операцию конъюнкции при любом значении формулы $\mathbf{F}_3$ над каждым полюсом импликации; это правило тождественно аксиоме А10.

11) если формулы $(\mathbf{F}_1\ \mathbf{F}_2)$ и $(\mathbf{F}_2\ F_3)$ имеют значение “и”, то истинной является формула $(\mathbf{F}_1\ F_3)$, т.е

$(\mathbf{F}_1\ \mathbf{F}_2)$; $(\mathbf{F}_2\ \mathbf{F}_3)$

$$(\mathbf{F}_1\ \mathbf{F}_3).$$

Эта запись при истинном значении $(\mathbf{F}_1\ \mathbf{F}_2)$ и $(\mathbf{F}_2\ \mathbf{F}_3)$ предусматривает возможность формирования импликации $(\mathbf{F}_1\ \mathbf{F}_3)$ (закон силлогизма);
это правило тождественно аксиоме А2;

12) если формулы $\mathbf{F}_1$ и $(\mathbf{F}_1\ \mathbf{F}_2)$ имеют значение “и”, то истинной является формула $\mathbf{F}_2$, т.е

$\mathbf{F}_1$; $(\mathbf{F}_1\ \mathbf{F}_2)$

$$\mathbf{F}_2.$$

Эта запись при истинном значении посылки $\mathbf{F}_1$ и импликации $(\mathbf{F}_1\ \mathbf{F}_2)$ позволяет удалить логическую связку импликации и определить истинное значение заключения $\mathbf{F}_2$;

13) если формулы $\mathbf{F}_2$ и $(\mathbf{F}_1\ \mathbf{F}_2)$ имеют значение “и”, то истинной является формула $\mathbf{F}_1$, т.е

$\mathbf{F}_2$; $(\mathbf{F}_1\ \mathbf{F}_2)$

$$\mathbf{F}_1.$$

Эта запись при истинном значении посылки $\mathbf{F}_2$ и импликации $(\mathbf{F}_1\ \mathbf{F}_2)$ позволяет удалить логическую связку импликации и определить истинное значение заключения $\mathbf{F}_1$;

14) если формулы $(\mathbf{F}_1\ \mathbf{F}_2)$ и $(\mathbf{F}_2\ \mathbf{F}_1)$ имеют значение “и”, то истинной является формула $(\mathbf{F}_1\ \mathbf{F}_2)$, т.е

$(\mathbf{F}_1\ \mathbf{F}_2)$; $(\mathbf{F}_2\ \mathbf{F}_1)$

$$(\mathbf{F}_1\ \mathbf{F}_2).$$

Эта запись при истинном значении $(\mathbf{F}_1\ \mathbf{F}_2)$ и $(F_2\ \mathbf{F}_1)$ позволяет ввести логическую связку эквиваленции и определить значение формулы ($\mathbf{F}_1\ \mathbf{F}_2$);

15) если формула ($\mathbf{F}_1\ \mathbf{F}_2$) имеет значение “и”, то истинными являются формулы ($\mathbf{F}_1\ \mathbf{F}_2$) и ($\mathbf{F}_2\ \mathbf{F}_1$), т.е

($\mathbf{F}_1\ \mathbf{F}_2$) ($\mathbf{F}_1\ \mathbf{F}_2$)

($\mathbf{F}_1\ \mathbf{F}_2$) и ($\mathbf{F}_2\ \mathbf{F}_1$).

Эта запись при истинном значении ($\mathbf{F}_1\ \mathbf{F}_2$) позволяет удалить логическую связку эквиваленции и определить истинное значение формул ($\mathbf{F}_1\ \mathbf{F}_2$) и ($\mathbf{F}_2\ \mathbf{F}_1$).

## 1.2.3.3 Правила заключения

При выводе формулы из множества аксиом и посылок используют два основных правила:

a) если $\mathbf{F}_i$ и ( $\mathbf{F}_i\ \mathbf{F}_j$ ) есть выводимые формулы, то $\mathbf{F}_j$ также выводимая формула, т.е.

$\mathbf{F}_i$; ($\mathbf{F}_i\ \mathbf{F}_j$)

$\mathbf{F}_j$.

это правило называют modus ponens (m.p.).

b) если формулы $\mathbf{F}_j$ и ($\mathbf{F}_i\ \mathbf{F}_j$) есть выводимые формулы, то $\mathbf{F}_i$ также выводимая формула, т.е

$\mathbf{F}_j$; ($\mathbf{F}_i\ \mathbf{F}_j$)

$\mathbf{F}_i$.

это правило называют modus tollens (m.t.).

Пример: Суждение: “Сумма внутренних углов многоугольника равна $180^{o}$ (A). Если сумма внутренних углов многоугольника равна $180^{o}$ (A), то многоугольник есть треугольник (B). Следовательно, дан треугольник”.

A;A B

B.

Пример: Суждение: ”Дан не треугольник ( B); если сумма внутренних углов многоугольника равна $180^{o}$(A), то многоугольник есть треугольник (B). Следовательно, сумма внутренних углов многоугольника не равна $180^{o}$( A)”.

B; A B

A.

## 1.3. Метод дедуктивного вывода

Как уже отмечалось, теорема $F_1$; $F_2$;...$F_n$ B равносильна доказательству ($F_1$ $F_2$ ... $F_n$ B ). Если каждая $F_i$=и, то $F_1$ $F_2$ ... $F_n$ )=и, а если ($F_1$ $F_2$ ... $F_n$ B)=и, то B=и.

Следовательно, при истинности всех посылок и истинности импликации (см. правило m.p.), заключение всегда будет истинным.

Используя правила эквивалентных преобразований алгебры высказываний, можно показать дедуктивный характер вывода заключения:

1) ($F_1$ $F_2$ ... $F_n$ B);

2) ( ($F_1$ $F_2$ ... $F_n$ ) B);

3) ( $F_1$ $F_2$ ... $F_n$ B);

4) ( $F_1$ $F_2$ ... $F_{n-1}$ ($F_n$ B));

5) ( $F_1$ $F_2$ ... ($F_{n-1}$ ($F_n$ B)));

6) ( $F_1$ ($F_2$ ... ($F_{n-1}$ ($F_n$ B))...));

7) ($F_1$ ($F_2$ ... ($F_{n-1}$ ($F_n$ B))...)

Так формируется система дедуктивного вывода от посылок до заключения.

Пример. Дано суждение: “Всякое общественно опасное деяние (A) наказуемо (B). Преступление (C) есть общественно опасное деяние (A). Дача взятки (D) - преступление (C)**.** Следовательно, дача взятки наказуема ?”[6].

A B;C A; D C

D B.

1) $F_1$=A B посылка;

2) $F_2$=C A посылка;

3) $F_3$=D C посылка;

4) $F_4$=C B заключение по формулам $F_1$ и $F_2$ и аксиоме A2 или правилу 11);

5) $F_5$=D B заключение по формулам $F_3$ и $F_4$ и аксиоме A2 или правилу 11).

Следовательно, дача взятки (D) наказуема (B).

<u>Пример:</u> “Если Петров не трус (A), то он поступит в соответствие с собственными убеждениями (B). Если Петров честен (C), то он не трус (A). Если Петров не честен (C), то он не признает своей ошибки (D). Но Петров признает свои ошибки (D). Следовательно, он поступит согласно собственным убеждениям (B)?"[1]

A B; C A; C D; D

B.

1) $F_1$=A B посылка;

2) $F_2$=C A посылка;

3) $F_3$= C D посылка;

4) $F_4$= D посылка;

5) $F_5$=C B заключение по формулам $F_1$, $F_2$ и аксиоме A2 или правилу 11);

B C заключению по формуле $F_5$ и правилу 8);

7) $F_7$= B D заключение по формулам $F_3$ и $F_6$ и аксиоме A2 или правилу 11);

8) $F_8$=B заключение по формулам $F_4$, $F_7$ и правилу m.t..

Так доказано, что Петров поступает согласно собственным убеждениям.

Пример: “Если команда А выигрывает в футболе то город А’ торжествует, а если выигрывает команда В, то торжествовать будет город В’. Выигрывают или А или В. Однако, если выигрывают А, то город В’ не торжествует, а если выигрывают В, то не будет торжествовать город А’. Следовательно, город В’ будет торжествовать тогда и только тогда, когда не будет торжествовать город А’”[1]

(А А’) (В В’); (А В); (А В’) (В А’)
(В’ А’).

1) $F_1$=(А А’) (В В’) - посылка;

2) $F_2$=(А А’) - заключение по формуле $F_1$ и правилу удаления логической связки конъюнкции;

3) $F_3$=(В В’) - заключение по формуле $F_1$ и правилу удаления логической связки конъюнкции;

4) $F_4$=(А В’) (В А’) - посылка;

5) $F_5$=(А В’) - заключение по формуле $F_4$ и правилу удаления логической связки конъюнкции;

6) $F_6$=(В А’) - заключение по формуле $F_4$ и правилу удаления логической связки конъюнкции;

7) $F_7$=(В’ А) - заключение по формуле $F_5$ и закону контрапозиции;

8) $F_8$=(А’ В) - заключение по формуле $F_6$ и закону контрапозиции;

9) $F_9$=(А В) - посылка;

10) $F_{10}$= А В - заключение по формуле $F_9$ и правилу эквивалентного преобразования;

11) $F_{11}$= А А’ - заключение по формулам $F_6$, $F_{10}$ и закону силлогизма;

12) $F_{12}$= В’ А’ - заключение по формулам $F_7$, $F_{11}$ и закону силлогизма;

13) $F_{13}$= А’ А - заключение по формуле $F_2$ и закону контрапозиции;

14) $F_{14}$= А’ В - заключение по формулам $F_{10}$, $F_{13}$ и закону силлогизма;

15) $F_{15}$= A’ B’ - заключение по формулам $F_3$, $F_{14}$ и закону силлогизма;

16) $F_{16}$= (B’ A’)( A’ B’)=(B’ A’) – заключение по формулам $F_{12}$, $F_{15}$ и правилу введения логической связки конъюнкции.

Так доказана истинность формулы (B’ A’).

Пример. "Если Петров говорит неправду (A), то он заблуждается (B) или сознательно вводит в заблуждение других (C). Петров говорит неправду и явно не заблуждается. Следовательно, он сознательно вводит в заблуждение других" [2]

A (B C); A B

C.

1) $F_1$=A (B C) - посылка;

2) $F_2$=A B - посылка;

3) $F_3$=A - заключение по формуле $F_2$ и правилу 2);

4) $F_4$= B - заключение по формуле $F_2$ и правилу 2);

5) $F_5$=(B C) - заключение по формулам $F_1$, $F_3$ и правилу m. p.;

6) $F_6$=C - заключение по формулам $F_4$, $F_5$ и правилу 5).

Так доказано, что Петров сознательно вводит в заблуждение других.

Пример: Доказать истинность заключения

A;B;(A C B)

C. 1) $F_1$=A C B - посылка;2) $F_2$=B - посылка;

3) $F_3$= ( A C ) - заключение по формулам $F_1$, $F_2$ и правилу m. t.;

4) $F_4$= A - посылка;

5) $F_5$= C - заключение по формула $F_3$, $F_4$ и правилу 2).

Процесс дедуктивного вывода удобно проследить на графе, вершинами которого являются формулы, а дугами – отношения между ними (см. рис.1).

B

B

A C B

A C B
A
A

(A C)
(A C)
C
C

Рис.1. Граф вывода заключения

<u>Пример.</u> Доказать истинность заключения

(A B); (A C); (B D)

(C D).

1) $F_1$=(A C) посылка;

**4)**$F_2$=(A B) (C B) заключение по формуле $F_1$ и правилу 9);

3) $F_3$=(B D) посылка;

4) $F_4$=(C B) (C D) заключение по формуле $F_3$ и правилу 9);

5) $F_5$=(A B) (C D) заключение по формулам $F_2$ и $F_4$ и правилу 11);

6) $F_6$=(A B) посылка;

7) $F_7$=(C D) заключение по формулам $F_5$ и $F_6$ и правилу m. p..

Так доказана истинность заключения (C D).

A C
A C
B D
B D
A B
A B

(A B) (C B)

(A B) (C B)
(C B) (C D)
(C B) (C D)

(A B) (C D)
(A B) (C D)

C D
C D

Рис. 2. Граф вывода заключения

Пример: Доказать истинность заключения

(A B) (C D); ( D B E ); E

C A.

1) $F_1$=(D B E) посылка;

2) $F_2$= E посылка;

3) $F_3$= (D B) заключение по формулам $F_1$ и $F_2$ и правилу m. t.;

4) $F_4$=(A B) (C D) посылка;

по формуле $F_4$ и правилу 2);

6) $F_6$=(C D) заключение по формуле $F_4$ и правилу 2);

7) $F_7$=( B A) заключение по формуле $F_5$ и правилу 8);

8) $F_8$=( D B) заключение по формуле $F_3$ и закону де Моргана;

ключение по формуле 8) и правилу введения ипликации;

10) $F_{10}$=(D A) заключение по формулам $F_7$ и $F_9$ и правилу 11);

11) $F_{11}$=(C A) заключение по формулам $F_6$ и $F_{10}$ и правилу 11);

ключение по формуле $F_{II}$ и правилу введения дизъюнкции.

(A B) (C D)
(A B) (C D)

(D B E)
(D B E)

E
E

(A B)
(A B)

(C D)
(C D)

(D B)
(D B)

( D B)
( D B)

( B A)
( B A)

(D A)
(D A)

(D B)
(D B)

Рис.3. Граф вывода заключения

Рис.3. Граф вывода заключения

( C A)
( C A)

(C A)
(C A)

Пример: Доказать истинность заключения :

((A B) C); (C (D M )); (M N); (( D) (  N))

A.

1) $F_1$=(( D) ( N))        посылка;

заключение по формуле $F_1$ и правилу 2);

3) $F_3$=(M N); посылка ;

4) $F_4$= M        заключение по формулам $F_2$ и $F_3$ и правилу m.t;

заключение по формуле $F_1$ и правилу 2);

6) $F_6$=( D) ( M) заключение по формулам $F_4$ и $F_5$ и правилу 1);

ние по формуле $F_6$ и закону де Моргана;

8) $F_8$=(( A B) C)        посылка;

9) $F_9$=(C (D M)) посылка;

10) $F_{10}$=((A B) (D M)) заключение по формулам $F_8$ и $F_9$ и правилу 11);

11) $F_{11}$= (A B)        заключение по формулам $F_7$ и $F_{10}$ и правилу m.t.;

ение по формуле $F_{11}$ и закону де Моргана;

13) $F_{13}$= A        заключение по формуле $F_{12}$ и правилу 2).

(( D) ( N))
(( D) ( N))
(M N)
(M N)
(( A B) C)
(( A B) C)
(C (D M))
(C (D M))

( D)
( D)
( N)
( N)

( M)
( M)
( A B) (D M)
( A B) (D M)

( D) ( M)
( D) ( M)
(D M)
(D M)
(A B)
(A B)

( A) ( B)
( A) ( B)
A
A

Рис. 4. Граф вывода заключения

Эти примеры показывают, что правила вывода обеспечивают логическую последовательность в преобразовании формул, каждая из которых есть либо посылка, либо промежуточный результат, либо заключение.

## .4.Принцип резолюции

Существует эффективный алгоритм логического вывода - алгоритм резолюции. Этот алгоритм основан на том, что выводимость формулы B из множества посылок $F_1$; $F_2$; $F_3$; . . . $F_n$ равносильна доказательству теоремы

($F_1$ $F_2$ $F_3$ . . . $F_n$ B),

формулу которой можно преобразовать так:

($F_1$ $F_2$ $F_3$ . . . $F_n$ B) =

( ($F_1$ $F_2$ $F_3$ . . . $F_n$) B) =

($F_1$ $F_2$ $F_3$ . . . $F_n$ ( $F_2$ B)).

Следовательно, заключение B истинно тогда и только тогда, когда формула ($F_1$ $F_2$ $F_3$ ... $F_n$ ( B))=л. Это возможно при значении “л” хотя бы одной из подформул $F_i$ или B.

Для анализа этой формулы все подформулы $F_i$ и B должны быть приведены в конъюнктивную нормальную форму и сформировано множество дизъюнктов, на которые распадаются все подформулы. Два дизъюнкта этого множества, содержащие пропозициональные переменные с противоположными знаками (*контрарные атомы)* формируют третий дизъюнкт - *резольвенту*, в которой будут исключены контрарные пропозициональные переменные. Неоднократно применяя это правило к множеству дизъюнктов и резольвент, стремятся получить пустой дизъюнкт. Наличие пустого дизъюнкта свидетельствует о выполнении условия $F_1$ $F_2$ $F_3$ ... $F_n$ B=л.

## 1.4.1 Алгоритм вывода по принципу резолюции

Шаг 1. принять отрицание заключения, т.е. B;

Шаг 2. привести все формулы посылок и отрицания заключения к конъюнктивной нормальной форме (см. с.35);

Шаг 3. выписать множество дизъюнктов всех посылок и отрицания заключения:

$$K = \{D_1; D_2; . . . D_k \};$$

Шаг 4. выполнить анализ пар множества $K$ по правилу:

“если существуют дизъюнкты $D_i$ и $D_j$, один из которых ($D_i$) содержит литеру A, а другой ($D_j$) - контрарную литеру A, то соединить эту пару логической связкой дизъюнкции ($D_i$ $D_j$) и сформировать новый дизъюнкт - резольвенту, исключив контрарные литеры A и A;

Шаг5. если в результате соединения дизъюнктов, содержащих контрарные литеры, будет получена пустая резольвента - , то конец (доказательство подтвердило противоречие), в противном случае включить резольвенту в множество дизъюнктов $K$ и перейти к шагу 4.

Пример: Работа автоматического устройства, имеющего три клапана A, B и C, удовлетворяет следующим условиям: если не срабатывают клапаны A или B или оба вместе, то срабатывает клапан C; если срабатывают клапаны A или B или оба вместе, то не срабатывает клапан C. Следовательно, если срабатывает клапан C, то не срабатывает клапан A [2].

(( A B A B) C); ((A B A B) C)
(C A).

1) $F_1$=(( A B A B) C)= (A C) (B C) - посылка;

2) $F_2$=((A B A B) C)= ( A C) ( B C) -посылка;

3) $F_3$= (C A)=C A –отрицание заключения;

**4)** множество дизъюнктов: $K$={(A C); (B C); ( A C); ( B C); C; A };

**5)**C ( A C)= A – резольвента из 2) и 3);

**6)** $K_1$={(A C); (B C); ( A C); ( B C); C; A; A };

**7)**A (A C)=C – резольвента из 1) и 5);

**8)** $K_2$={(A C); (B C); ( A C); ( B C); C; A; A };

**9)**C ( B C)= B –резольвента из 2) и 5);

10) $K_3$={(A C); (B C); ( A C); ( B C); C; A; A ; B };

11) B (B C)=C – резольвента из 1) и 9);

**12)**C A=(C A) – резольвента из 5) и 11);

**13)** $K_4$={(A C); (B C); ( A C); ( B C); C; A; A; B; (C A)};

**14)**(C A) ( A C)= A – резольвента из 2) и 12);

**15)** $K_5$={(A C); (B C); ( A C); ( B C); C; A; A; B; (C A)};

**16)**A A= - пустая резольвента.

Так доказано, что если срабатывает клапан C, то не срабатывает клапан A.

Пример: Доказать истинность заключения

A; B; (C A B)

C.

1) A - посылка;

2) B - посылка;

3) C A B = ( C A B) - посылка;

4) ( C) = C - отрицание заключения;

5) множество дизъюнктов: K={A; B; ( C A B); C};

6) A ( C A B)=( C B) - резольвента из 1) и 3);

7) $K_1$={A; B; ( C A B); C; ( C B)};

8) B ( C B)= C - резольвента из 2) и 6);

9) $K_2$={A; B; ( C A B); C; ( C B); C };

10) C C = - пустая резольвента из 4) и 7).

Так доказана истинность заключения C по принципу резолюции.

Пример: Доказать истинность заключения

( A B C ); (C D M); ( N D M )

A B N.

1) A B C= (A B) C=( A B C) - посылка;

2) C D M= (C D) M=( C D M) - посылка;

3) N D M= ( N) D M=( N D ) ( N M ) - посылка;

4) ((A B) N)=A B N - отрицание заключения;

**5)** множество дизъюнкций:

K={( A B C); ( C D M); (N D); (N M); A; B; N};6) (M N) N=M - резольвента из 3) и 4);

7) $K_1$={( A B C); ( C D M); (N D); (N M); A; B; M; N};

8) (D N) N=D - резольвента из 3) и 4);

9) $K_2$={( A B C); ( C D M); (N D); (N M);A; B; M; N; D};

10) ( A B C) B=( A C) – резольвента из 1) и 4);

$_3$={( A B C); ( C D M); (N D); (N M);A; B; M; N; D; ( A C)};

12) ( A C) A=C - резольвента из 4) и 10);

$_4$={( A B C); ( C D M); (N D); (N M);A; B; M; N; D; ( A C); C};

14) ( C D M) C =( D M) - резольвента из 2) и 12);

$_5$={( A B C); ( C D M); (N D); (N M);A; B; M; N; D; ( A C); C; ( D M)};

16) D ( D M)= M - резольвента из 8) и 15;

$_6$={( A B C); ( C D M); (N D); (N M);A; B; M; N; D; ( A C); C; ( D M); M};

12) M M = - пустая резольвента.

Так доказана истинность заключения (A B N).

Для иллюстрации вывода удобно использовать граф типа дерево, корнем которого является один из дизъюнктов отрицания заключения, а концевыми вершинами ветвей – оставшиеся дизъюнкты отрицания заключения и всех посылок. Узлами графа типа дерево являются резольвенты. Ниже даны примеры, сопровождаемые графом.

Пример: Доказать истинность заключения

(A B) (C D); (D B M); M

( A C)

1) (A B) (C D)=( A B) ( C D)  - посылка;

2) D B M= (D B) M=( D B M) - посылка;

3) M - посылка;

4) ( A C ) = A C - отрицание заключения;

5) K ={A; C; M; ( A B); ( C D); ( D B M)}

6) A ( A B)=B - резольвента;

7) B ( D B M)=( D M) - резольвента;

8) ( D M) ( C D)=( C M) - резольвента;

9) ( C M) M= C - резольвента;

10) C C= - пустая резольвента.

Так доказана истинность заключения ( A C).

A
A

( A B)
( A B)

B

( D M)

( D B M)

( D B M)

( C M)

( C D)

( C D)

M

M

C

C

C

Рис.6. Граф доказательства

Пример: Доказать истинность заключения

(( A B) C); (C (D B)); (C N); (( D) ( N))

A.

1) ((A B) C)=( A C) ( B C) - посылка;

2) (C (D B))=(B C D) - посылка;

3) (C N) = ( C N) - посылка;

4) D - посылка;

5) N - посылка;

6) ( A)=A – отрицание заключения;

7) K={( A C); ( B C); (B C D); ( C N); D; N; A};

8 ) A ( A C)=C – резольвента из 1) и 6);

A

A

( A C)

( A C)

9) C (B C D)=(B D) – резольвента из 2) и 7);

10) (B D) ( B C)=(C D) – резольвента из 1) и 8);

11) (C D) D=C – резольвента из 4) и 9);

12) C ( C N)=N – резольвента из 3) и 10);

13) N N= - пустая резольвента.

Следует обратить внимание, что при выводе заключения дважды получена резольвента C. Это говорит об избыточности посылок. Например, можно удалить (C (D B)), формирующую дизъюнкт (B C D). Это существенно сократит вывод заключения. На рис. 8 показан вывод заключения без учета посылки (C (D B)).

Следует обратить внимание, что при выводе заключения дважды получена резольвента C. Это говорит об избыточности посылок. Например, можно удалить (C (D B)), формирующую дизъюнкт (B C D). Это существенно сократит вывод заключения. На рис. 8 показан вывод заключения без учета посылки (C (D B)).

A

A

C

C

( A C)

( A C)

C

(B C D)

(B C D)

(B D)

(B D)

( B C)
( B C)
(C D)
(C D)

D
D
C
C

( C N)
( C N)
N
N

N
N
N

Рис. 7. Граф доказательства.

1) A ( A C)=C – резольвента из 1) и 6);
A
A

2) C ( C N)=N – резольвента из 3) и 14);
( A C)
( A C)
C
C

3) N N= - пустая резольвента.

( C N)

( C N)

N

N

N

N

N

N

Рис. 8 Граф доказательства

Так как резольвенты включаются в множество дизъюнктов S, то возможно неоднократное их использование в процессе вывода. Многократное использование дизъюнкт множества S оправдано законом идемпотентности, т.к. $D_i$=$D_i$ $D_i$ ... $D_i$.

<u>Пример:</u> Доказать истинность заключения

<u>(A B); (A B)</u>;

(A B).

1) (A B) - посылка;

2) (A B)=( A B) ( B A) - посылка;

3) (A B)=( A B) –отрицание заключения;

(⌉A∧⌉B)

(⌉A∧B)

(A∧B)

(⌉B∧A)

$\rceil A$

B

A

$(\rceil A \wedge \rceil B)$

$(\rceil A \wedge B)$

$(A \wedge B)$

$(\rceil B \wedge A)$

$\rceil A$

B

A

4) K = {(A B); ( A B); ( B A); ( A B)};

5) ( A B) ( A B)= A - резольвента;

6) A (A B)=B - резольвента;

7) B ( B A)=A - резольвента;

8) A A= - пустая резольвента.

A

A

Рис. 9 Граф доказательства

Достоинством принципа резолюции является то, что при доказательстве истинности заключения применяют только одно правило: поиск и удаление контрарных литер на множестве дизъюнктов до получения пустой резольвенты.

## .5Проблемы в исчислении высказываний

Для обоснования исчисления высказываний, как для любой аксиоматической теории, необходимо рассмотреть проблемы разрешимости и непротиворечивости.

***Проблема разрешимости*** исчисления выказываний заключена в доказательстве существования алгоритма, который позволил бы для любой формулы исчисления высказываний определить ее доказуемость. Любая формула исчисления высказываний может быть представлена формулой алгебры высказываний. Эффективность процедуры разрешения показана таблицами истинности для различных наборов значений пропозициональных переменных.

***Проблема непротиворечивости*** исчисления высказываний заключена в доказательстве невыводимости формулы и ее отрицания. Исчисление высказываний непротиворечиво, т. к. каждая формула, доказуемая в исчислении высказываний, является тождественно истинной формулой в алгебре высказываний и легко проверяется на таблицах истинности. Тогда отрицание формулы не является тождественно истинной формулой, что проверяется на таблицах истинности и при доказательстве в исчислении высказываний ведет к противоречию.

## 1.6 Описание высказываний на языке PROLOG

Для программирования задач исчисления высказываний используют язык программирования Prolog.Само название Prolog есть сокращение, означающее ***про****граммирование в терминах* ***логи****ки*.

Пролог-программа состоит из предложений, которые бывают трех типов: факты, правила и вопросы.

***Факты*** есть высказывания, которые заканчиваются точкой и имеют значение только “и”. Структура такого предложения описана предикатом или n-местным отношением, все аргументы которого есть термы или предметные постоянные. Предметные постоянные на языке PROLOG называют атомами. Термы описывают структуру или какие-то функциональные отношения между атомами. Предметные постоянные всегда начинаются со сточной буквы латинского алфавита и представляют собой последовательность букв, цифр и знака подчеркивания.

Например,

- простое_число(3).

Это есть высказывание A1 (см. с. 5), структура которого описана предикатом P1(x):=”x-простое число”, где x=3 есть атом.

- частное_от_деления(6, 2, 3).

Это есть высказывание E (см. с.6), структура которого описана предикатом $P_3$(x, y, z):=”z есть частное от деления числа x на y”, где x=6, y=2, z=3 есть атомы.

- студент_университета,_обучающийся_по_специальности(Петров, КГТУ, прикладная информатика").

Это есть высказывание, структура которого описана предикатом
$P_6$(x, y, z):= "студент x университета y, обучающийся по специальности z”, где x=”Петров”, y=”КГТУ”, z=”прикладная информатика” есть атомы.

- родословная русских князей X века:

отец(игорь, святослав).
отец(святослав,владимир).
отец(владимир, борис).
отец(владимир,глеб).
дед(игорь, владимир).
дед(святослав, борис).
дед(святослав, глеб).
брат(борис,глеб).,

где игорь, святослав, владимир, борис, глеб есть атомы.***Правила*** есть предложения, истинность которых зависит от истинности условий: “если истинны условия (посылки), то истинно и заключение (вывод)”.

На языке Prolog эти правила записывают так:

<заключение>:- <условия>.

Символ “:-“ соответствует символу обратной импликации ” ”.

Левую часть правила называют головой предложения, а правую – телом предложения. В теле предложения перечисляют условия, определяющие вывод заключения. Если условия имеют между собой конъюнктивную связь, то между ними ставится запятая “,”. Если условия в правиле имеют между собой дизъюнктивную связь, то между ними ставится точка с запятой (“;”). Голова предложения всегда сдвинута влево относительно перечня условий. Каждое условие начинается с новой строки.

Например, для родословной русских князей X века имеем:

- дед(игорь, владимир):-
  отец(игорь, святослав),
  отец(святослав, владимир).

Это - высказывание о том, что если игорь был отцом святослава, а святослав – отцом владимира, то игорь был дедом владимиру.

- дед(святослав, борис); дед(святослав, глеб):-отец(святослав,владимир),
  отец(владимир, борис);
  отец(святослав,владимир),
  отец(владимир,глеб).

Это есть высказывание о том, что святослав был отцом владимира и дедом борису или глебу.

- брат(борис, глеб):-.
  родитель (владимир, борис),
  родитель (владимир,глеб).

Это есть высказывание о том, что если владимир был отцом бориса и отцом глеба, то борис и глеб были братьями

.

# Контрольные вопросы

1) Запишите символически следующие суждения:

а) “вертолет является средством передвижения по воздуху, имеет двигатель, пилотскую кабину, систему управления, несущий винт, помещение для пассажиров или грузов”;

б) “подготовка специалистов высокой квалификации возможна лишь на базе всемерного развития вузовской науки, усиления связи вузовской, академической и отраслевой науки, обеспечения единства научной и учебной работы, широкого привлечения студентов к научным исследованиям" ;

в) "хлеба уцелеют в различных климатических и погодных усло -виях тогда и только тогда, когда будут выполнены все мелиоративные работы; если хлеба не уцелеют, то фермеры обанкротятся и оставят фермы; следовательно, необходимо выполнить все мелиоративные работы"[15].

г) “если я поеду автобусом и автобус опоздает, то я опоздаю на работу; если я опоздаю на работу и стану огорчаться, то я не попадусь на глаза моему начальнику; если я не сделаю в срок важную работу, то я начну огорчаться и попадусь на глаза моему начальнику. Следовательно, если я поеду автобусом, а автобус опоздает, то я сделаю в срок важную работу [1]”.

Докажите эквивалентность следующих формул:

а) (A B) (A B)=A;

б) (A B) (B C) (C A)=(A B) (B C) (C A);

в) (A B) (A C) (B D) (C D)=((A D) (B C)).

3) Приведите к дизъюнктивной и конъюнктивной нормальным формам: а)

а)(((A B) (C A)) ( B C));

б) (((((A B) A) B) C) C);

в) (A (B C)) (A C) (A B).

4) Выполнить подстановку:

**a)** $A^{BC}$(A B);

**b)**$(BA^{(BC)})A^{(BA)}$ (A B C);

**c)** $A^{B}$ (A B) ( B A)

4) Докажите выводимость заключения методов дедукции:

а) (A B); (A C); (B D)

( C D ).

б) ( A B); (C B)

( A C ).

в) ((A B) (C D)); ((D E) F)

(A F).

5) Докажите выводимость заключения по принципу резолюции:

а) ( A B); (A B); (B A)

(A B).

б) (A B); (C D); (A C); (A D); (C D)

(D B).

в) (A B); (C B) .

(A C).

## Расчетно-графическая работа

**1)**составить таблицу истинности; 2) доказать истинность заключения методом дедукции и нарисовать граф дедуктивного вывода; 3) доказать истинность заключения по принципу резолюции и нарисовать граф вывода пустой резольвенты.

| Вариант | Доказать истинность заключения |
|---|---|
| 1. | (B A); (B ( A C)) (B ( B C)) |
| 2 | ( A B); (C B) (A C) (A C) |
| 3. | ( A B) ( B A) (A C) |
| 4. | (A B) (( B C) ( A C)) |
| 5 | (A B); (C D) (A C B D) |
| 6 | (A B); ( A B) B (A C) |
| 7. | (B A); (B (A C)) (B C) |
| 8. | (A B) ( C A) ( C B) |
| 9 | (A B); (A ( B C)) (A C) |
| 10. | (A B A B) (A C) (B C) |
| 11. | (A (B C));(A B);A C |
| 12. | (A B C) (A (B C)) |
| 13. | (B (A C)); (B A) (B (B C)) |
| 14 | (A B C D); (A A) C |
| 15. | (A (B C)); ( D A);B (D C) |
| 16. | (A B); (A C); (B D) C D |
| 17. | (A B); (C B); (D (A C)); D B |
| 18. | (A B); (B C); (C D) (A D) |
| 19 | (B (A C)); (B A) (B (B C)) |

| | |
|---|---|
| 20 | (A (C B)); ( D A); C; D D B |
| 21 | (A B) (C A) (C B) |
| 22. | A; (A B) (C A B C) |
| 23 | (A B); (B C) A |
| 24 | (A (B C)); ( D A);B (D C) |
| 25 | (A C); (A B);A (A C) (B C) |
| 26 | (A (B C)); (A B) (A C) |
| 27 | ( A B); (C B) A C |
| 28 | C; (A B) ((C A) (C B)) |
| 29 | (A (B C)) ((A B) C) |
| 30 | (A B) A C B C |
| 31. | (A (B C)); ( D A);B (D C) |
| 32. | (A B); (B C); (C D) (A D) |
| 33. | (B (A C)); (B A) (B C) |
| 34. | (A B) (A C) B C) |
| 35. | (B (A C)); (B A) (B (B C)) |
| 36. | (A (B C); (A B) (A (A C)) |
| 37. | (B (A C)); (B A) (B (B C) |
| 38. | (A C); (B A) ( C B) |
| 39. | (A B); (C B); (D (A C)); D B |
| 40. | (A B) ( A C B C) |
| 41. | (B (A C)); (B A) (B (B C)) |
| 42. | (A B C) (A (B C)) |
| 43 | (A (B C)); ( D A);B (D C) |
| 44. | (A (B C));(A B);A C |
| 45. | (A (B C)); (A B) (A C) |
| 46. | (A (B C)) (B (A C)) |
| 47. | (A B); (B C); (C D) (A D) |

| | |
|---|---|
| 48. | (A B) (A C) (B C) |
| 49. | (A B); B A C B C |
| 50. | (A B) (A C) (B C) |

# 2. ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

Если объект высказывания, т.е. о чем говорится в предложении, не определен, то это предложение называют ***высказывательной функцией***. Аргументами высказывательной функции являются ***предметные переменные***, которые обозначают строчными буквами латинского алфавита x, y, z Эта функция приобретет значение "и" или "л" только при подстановке в высказывательную функцию вместо предметных переменных их конкретных значений. Конкретные значения аргументов высказывательной функции называют ***предметными постоянными***, которые обозначают строчными буквами латвийского алфавита а, в, с, **.**

Высказывательную функцию иначе называют ***предикатом*** (лат. praedicatum - логическое сказуемое).

Например,

а) если на множестве натуральных чисел задать высказывательные функции или предикаты

$P_1$(x):= "x - простое число",

$P_2$(6, y):="y меньше 6",

$P_3$(6, y, z):="z есть частное от деления числа 6 на y",

где z и y есть предметные переменные (целые числа), а 6 – предметная постоянная (целое число), то высказываниями будут

$P_1(3)$ = и, $P_1(4)$ = л,

$P_2(6,2)$ = и,   $P_2(6,7)$ = л,

$P_3(6,2,3)$ = и, $P_3(6,2,5)$ = л,

б) если на множестве имен индивидов, университетов и специальностей задать высказывательные функции или предикаты

$P_4$(x):="x - студент",

$P_5$(x, КГТУ):="студент x университета КГТУ",

$P_6$(x, y, прикладная информатика):= "студент x университета y,

обучающийся по специальности "прикладная информатика””,
где x и y есть предметные переменные, а КГТУ и “прикладная информатика” – предметные постоянные, то высказываниями будут

$P_4$(Петров) = и, $P_4$(Сидоров) = л,

$P_5$(Петров, КГТУ) = и, $P_5$(Сидоров, КГТУ) = л,

$P_6$(Петров, КГТУ, "прикладная информатика") = и,

$P_6$(Сидоров, КГТУ, "прикладная информатика") = л.

При ограничении области определения предметных переменных вводят операторы, которые называют ***кванторами***.

Суждение, в котором утверждается или отрицается наличие каких-либо признаков или отношений у части предметных переменных области определения, называют ***частным суждением***. Как правило, эти суждения на естественном языке отражают словами “один”, "несколько", "часть" и т.п. Для формализации таких суждений используют логическую операцию, ограничивающую область определения предиката. Этот оператор получил название ***квантора существования***, который обозначают так: “ $\mathbf{x}$”. Предикат записывают после квантора существования в круглых скобках
$_{\mathbf{x}}(\mathbf{P_n}(\mathbf{x}))$ На естественном языке эта запись означает: “существуют такие элементы x, что Pn(x) истинно (или ложно)".

Если частное суждение распространяется на несколько предметных переменных, то перед предикатом записывают все предметные переменные, по которым есть частное суждение, т.е.
$_{x, y, z,...}(P_n(x, y, z, ...))$.

Для обозначения числа аргументов предиката часто используют верхние индексы. Например, часто записывают так

$P(x_1, x_2, x_3, x_n) = P^n(x)$.

Например,

$_x(P_1(x))$:= "существуют целые числа, которые являются простыми".

Это условие выделяет на множестве целых чисел подмножество X = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,...}, для которого предикат $P_1(x)$ принимает значение “и”.

$_{y}(P^{2}_{2}(6,y))$:="существуют числа y, которые меньше 6". Это условие выделяет на множестве целых чисел подмножество
Y= {1, 2, 3, 4, 5}, для которого предикат $P_2(6,y)$ принимает значение “и”.

$_{y}(P^{3}_{3}(6,2,z))$:="существует число z, которое является частным от деления 6 на 2". Это условие выделяет на множестве целых чисел единственное число Z=3, для которого предикат $P_3(6,2,z)$ принимает значение “и”.

Если $P_7(x)$:="x имеет зачетную книжку", то

$_{x}(P_4(x)\& P_7(x))$:= "существуют студенты (x), которые не имеют зачетной книжки";

x $_{y}(P^{2}_{5}(x,y)\& P_7(x))$:="существуют студенты (x) некоторых университетов (y), которые не имеют зачетной книжки".

Суждение, в котором утверждается или отрицается наличие каких-либо признаков или отношений для всех предметных переменных области определения, называют ***общими суждениями***. Как правило, эти суждения в естественном языке отмечают словами "все", "каждый", "любой" и т.п. Для формализации этих суждений используют логическую операцию над всей областью определения предиката. Оператор этой логической операции получил название ***квантора всеобщности***, который обозначают так: $_{\mathbf{x}}$. Предикат записывают после квантора всеобщности в круглых скобках $_{x}(\mathbf{P_n}(x))$ . На естественном языке эта формальная запись означает: “для всех x истинно (или ложно) значение $P_n(x)$".

Если общее суждение распространяется на несколько предметных переменных, то перед предикатом записывают все предметные переменные, по которым есть общее суждение, т.е.

$_{x}, _{y}, _{z},\dots (P_n(x, y, z, \dots))$.

Например,

$x(P_4(x)\&P_7(x))$:= "все (или каждый) студенты (x) имеют зачетную книжку";

$x(P_5(x, КГТУ)\&P_7(x))$:="все (или каждый) студенты (x) университета КГТУ имеют зачетную книжку";

$x\ y(P_5(x,y)\&P_7(x))$:="все (или каждый) студенты (x) всех (или каждого) университетов (y) имеют зачетную книжку";

$x(P^3_6($x, КГТУ, "прикладная информатика"$)\&P_7(x))$:= "все (или каждый) студенты (x) университета КГТУ, обучающиеся по специальности "прикладная информатика", имеют зачетную книжку";

$x\ z(P^3_6(x, КГТУ, z)\&P_7(x))$:= "все (или каждый) студенты (x) университета КГТУ, обучающиеся на всех специальностях (z), имеют зачетную книжку";

$x\ y\ z(P^3_6(x,y,z)\&P_7(x))$:= "все (или каждый) студенты (x) всех (или каждого) университетов (y), обучающиеся на всех (или каждой) специальностях (z), имеют зачетную книжку".

Существуют предикаты, для которых область определения по различным предметным переменным ограничивают различными кванторами.

Например,

$x\ y(P^2_2(x, y))$:= "для всех целых чисел x существует меньшее число y".

$x\ y\ z(P^3_3(x, y, z))$:="для всех целых чисел x и y существует число z, которое является частным от деления x на y".

Предметная переменная предиката, если по меньшей мере одно ее вхождение связано квантором, называют ***связанной переменной.*** Предметная переменная предиката, если по меньшей мере одно ее вхождение в формулу свободно от квантора, называют ***свободной переменной***.

Например,

$_y(P^2_2(x,y))$:="для всех целых чисел x существуют меньшие числа y". В этом примере x – свободная, а y –связанная переменные.

$x\ z(P^3_6(x,y,z)\&\ P_7(x))$:= “есть студенты университета, которые не имеют зачетной книжки”. В этом примере x и z –связанные, а y –свободная переменные.

$_{x\ y}\ (P^2_1(x;\ y)\ _z\ (P_2(z))$ все предметные переменные связаны.

$_z\ (P_1(z)\ _x(P^2_2(x;\ z))\ (P^2_2(z;\ y)\ (P^2_2(x;\ z))$ предметные переменные x и z связанные, а y – свободная.

$P_1\ (z)\ (\ _x\ (P^2_2(\ x;\ z\ ))\ _y\ (P^2_2(z;\ y)))$ предметные переменные x, y- связанные, а z – свободная.

Понятие свободной переменной подобно понятию глобальной переменной, т.е. переменной вне текущей процедуры, а понятие связанной переменной подобно понятию локальной переменной для текущей процедуры.

Если высказывательная функция содержит один аргумент, то задан ***одноместный предикат***, если она содержит n аргументов, то - ***n-местный предикат***. Одноместный предикат, как правило, описывает наличие какого-либо признака у предмета, а предмета, а n-местный предикат наличие отношений между n предметами.

Пример: Если $P_1(x)$ – одноместный предикат “ быть простым числом", то для x=5 имеем высказывание “верно, что 5-простое число" или $P_1(5)$=и, а для x=4 имеем высказывание “неверно, что 4-простое число" или $P_1(4)$=л.

Пример: Если $P_4(x)$ – одноместный предикат "быть студентом", то для x=”Петров” имеем высказывание “верно, что Петров - студент" или $P_4$(Петров)=и, а для x=”Сидоров” имеем высказывание “неверно, что Сидоров – студент” или $P_4$(Сидоров)=л.

Пример: Если $P^2_8(x;\ y)$ – двухместный предикат "студент x находится в аудитории y", то для x="Петров" и y="аудитория_382" имеем P(Петров, аудитория_382) имеем высказывание "Студент Петров находится в аудитории 382", или $P^2_8$(Петров, аудитория 382)=и.

Пример: Если $P^3_9(x; y; z)$ - предикат "z равен сумме чисел x и y", то для x=5 имеем высказывательную функцию “существуют такие z и y, что z равен сумме 5 и y” или $_y\ _zP^3_9(5; y; z)$, для x=5 и y=2 имеем высказывательную функцию “существует такое z, которое равно сумме 5 и 2 или $_zP^3_9(5; 2; z)$, а для x=5, y=2 и z =7 имеем высказывание $P^3_9(5; 2; 7)$.

Следует еще раз обратить внимание, что когда все предметные переменные замещены предметными постоянными, тогда предикат превращается в высказывание.

Между элементами области определения может быть задана некоторая структура или установлены какие-то функциональные отношения. Тогда функциональный символ f указывает на задание этого отношения между предметными переменными и/или предметными постоянными области определения, а для обозначения числа аргументов этого отношения используют верхние индексы, т.е. $f^n(x_1, x_2,...x_n)$.

Например, дату для Prolog-программы можно рассматривать как структуру, заданную на предметных переменных: число, месяц и год. В этом случае функциональным символом является слово “дата”, а аргументами число, месяц и год, т.е.

“дата(число, месяц, год)”.

Для предметных постоянных эта структура формирует выражение (например, “дата (1 января 2001)”), при подстановке которого в предикат определяет истинность или ложность высказывания.

Треугольник на плоскости также можно рассматривать для Prolog-программы как структуру на предметных переменных, описывающих координаты вершин треугольника. Тогда функциональным символом является слово “треугольник”, а аргументами этой функции - вершина(координаты_x,y), вершина(координаты x,y), вершина(координаты_x,y), т.е. "треугольник(вершина(координаты_x,y),вершина(координаты_x,y),вершина x,y))".

Для предметных постоянных эта структура формирует выражение, при подстановке которого в предикат определяет истинность или ложность высказывания.

Арифметическое выражение (x+y) может быть записано в Prolog-программе так: +(x, y). В этом случае предикат задает логическую операцию сравнения предметной постоянной и значения функции +(x, y).

<u>Пример</u>**:** если x, y, z – натуральные числа и $f^2_+(x;y)$:="сложить числа x и y", то предикат $P^3_9(x; y; z)$ может быть представлен так $P^2_9(z, f^2_1(x;y))$:="z равно сумме чисел x и y".

<u>Пример:</u> Если x - палуба, y - краска, z - окрашенная палуба, $f^2_2$ (x;y)= красить(x, y), то $P^2_{10}(f^2_2(x; y); z)$:="окрашенная палуба есть результат покраски палубы x краской y".

# 2.1 Алгебра предикатов

Множество предметных переменных $T_1$= {x, y, z,..} и постоянных $T_2$= {a, b, c,..}, функциональных символов $T_3=\{f^i_1; f^j_2; f^k_3;..\}$ и предикатных $T_4=(P^i_1; P^j_2; P^k_3;..\}$ с заданными над **T**={$T_1$; $T_2$; $T_3$; $T_4$} логическими операциями ***F***={ ; ; ; ; ; ; } формируют алгебру предикатов, т.е.

**$A_п$=<T; *F*;>.**

Любую предметную переменную и предметную постоянную называют ***терм*** и обозначают символом $t_i$.

Если $f^n_i$ есть n - местный функциональный символ и $t_1$, $t_2$, $t_n$ - ***термы,*** то $f^n_i(t_1; t_2; t_n)$ также есть терм, где n –число аргументов функции, i –

числовой индекс функции.

Никаких иных термов нет.

Если $P^n_i$– n-местный предикатный символ и $t_1$; $t_2$; $t_n$ - термы, то F= $P^n$ ($t_1$; $t_2$; $t_n$ ) - ***элементарная формула*** или ***атом***. Предметные переменные, входящие в термы атома, являются свободными.

Если $F_1$ и $F_2$ формулы, то

( $F_1$ ); ($F_1$ $F_2$); ($F_1$ $F_2$); ($F_1$ $F_2$ );($F_1$ $F_2$ ) также формулы.

В этих формулах предметные переменные также являются свободными.

Если F формула, а x - предметная переменная, входящая в атомы формулы F, то $_x$(F) и $_x$(F) также формулы. В этих формулах предметная переменная x среди множества термов формулы F является связанной.

Никаких иных формул нет.

Для формирования сложных формул используют вспомогательные символы “(“ и “)”.

## 2.1.1 Логические операции

Простейшими логическими операциями над предикатами также, как в исчислении высказываний, являются отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация и эквиваленция.

<u>Отрицание ( F($t_1$; $t_2$; $t_n$))</u> есть одноместная операция, посредством которой из данной формулы F($t_1$; $t_2$; $t_n$) получают ее отрицание.

<u>Пример:</u> Если $P^2$ (x; a):= "x находится на *a*" и *a*=”стол”, то формулы:

а) $_x$( $P^2$ (x; *a*)):= "для всех x верно, что x не находится на *a* “;

б) $_x$( $P^2$ (x; *a*)):= "не для каждого x верно, что x находится на *a*”;

в) $_x$( $P^2$ (x; *a*)):= “не существует x, для которого верно, что x находится на *a*”.

В логике предикатов недостаточно использовать таблицы истинности Для доказательства истинности суждения необходимо использовать аксиомы исчисления предикатов.

Конъюнкция $(F_1(t_{11};\ t_{12};\ ..t_{1n})\ F_2(t_{21};\ t_{22};..t_{2n}))$ есть двуместная операция, посредством которой из двух формул $F_1$ и $F_2$ получают новую формулу F $(t_{11};\ t_{12};\ \ t_{1n};\ t_{21};\ t_{22};\ \ t_{2n}\ )$ с числом предметных переменных и постоянных, равным их объединению у исходных формул. Значение формулы истинно тогда и только тогда, когда истинны обе формулы $F_1$ и $F_2$.

Пример: Если $P_1(x)$:=“выдающийся музыкантом” и
$P_2(x)$:= "талантливый писатель”, то формулы:

а) $_x(P_1(x))\ _x(P_2(x))$:= ”существуют выдающиеся музыканты и существуют талантливые писатели";

б) $_x(P_1(x)\ \ P_2(x))$:= ”существуют лица, являющиеся талантливыми писателями и выдающимися музыкантами”.

Пример: Если x - предметная переменная для индивида,
***a***-предметная постоянная для индивида (например, Саша) и
$P^2_1(x; a)$:=”x дружит с a”, $P^2_2\ (x; a)$:=“x встретил *a* ”, то формулы :

а) $_x(P^2_1(x; a)\ P^2_2(x; a))$:= “Саша встретил друга”;

б) $_x(\ P^2_1(x; a)\ P^2_2(x; a))$:=“Саша встретил недруга”;

в) $_x(P^2_1(x; a)\ P^2_2(x; a))$:= “не каждый встречный есть друг Саши”;

г) $_x(P^2_1(x; a)\ (\ P^2_2(x; a)))$:= “существуют друзья, с которыми Саша не встречается”.

Дизъюнкция $(F_1(t_{11};\ t_{12};\ ..t_{1n})\ F_2(t_{21};\ t_{22};\ ..t_{2n}))$ есть двуместная операция, посредством которой из двух формул $F_1$ и $F_2$ получают новую формулу F $(t_{11};\ t_{12};\ \ t_{1n};\ t_{21};\ t_{22};\ \ t_{2n}\ )$ с числом предметных переменных и постоянных, равным их объединению у исходных формул. Значение формулы истинно тогда и только тогда, когда истинна хотя бы одна из формул $F_1$ или $F_2$.

<u>Пример:</u> Если x, y предметные переменные для городов России, $P^2_1$(x; y):= “переезд из x в y поездом”; $P^2_2$(x;y):= “переезд из x в y самолетом”; $P^2_3$ (x; y):= “переезд из x в y автобусом”, то формулы:

а) $_{x}\ _{y}(P^2_1(x; y)\ P^2_2(x; y)\ P^2_3(x; y))$:= “для всех городов России возможен переезд поездом, автобусом или самолетом”;

б) $_{x}\ _{y}(P^2_1\ (x; y)\ P^2_2\ (x; y)\ P^2_3\ (x; y))$ - "не для всех городов x существуют города y, между которыми невозможен переезд автобусом или самолетом, но возможен поездом”.

<u>Импликация ($F_1(t_{11}; t_{12};..t_{1n})$ $F_2(t_{21}; t_{22};..t_{2n})$)</u> есть двухместная операция, посредством которой из двух формул $F_1$и $F_2$ получают новую формулу $F(t_{11}; t_{12};..t_{1n}; t_{21}; t_{22};..t_{2n}$ ) с числом предметных переменных и постоянных, равным их объединению у исходных формул. Значение формулы ложно тогда и только тогда, когда $F_1$ истинно, а $F_2$ - ложно.

<u>Пример:</u> Если x - предметные переменные для индивида, $P_1$(x):= "быть судьей", $P_2$(x):= "быть юристом", то допустимы формулы:

а) $_x(P_1(x)\ P_2(x))$:= "все судьи - юристы";

б) $_x(P_2(x)\ P_1(x))$:= "неверно, что все юристы - судьи",

<u>Пример:</u> Если x - предметная переменная для животного и $P_1$(x):= "хищное животное", а $P_2$(x):= "кошка", то допустима формула:

$_x(P_2(x)\ P_1(x))$ "все кошки - хищные животные".

<u>Пример:</u> Если x-предметная переменная для индивида и $P_1$(x):="x принадлежит к большинству", а $P_2$(x):= "x стремится к миру", то допустима формула:

$_x(P_1(x)\ P_2(x))\ _x(P_1(x)\ P_2(x))$:= “большинство людей стремится к миру".

<u>Пример:</u> Если x,y - предметная переменная для индивида и $P_1$(x):=

"быть юношей", $P_2(x)$:="быть девушкой", $P^2_3(x; y)$:="x любит y", $P^2_4(x;$ $y)$:="x женат на y",

то допустимы формулы:

**а)**$_x(P_1(x)$ $_y(P_2(x)$ $P^2_3$ $(x; y))$:= “каждый юноша любит хотя бы одну девушку";

б) $_x$ $_y(P_1(x)$ $P_2(y)$ $P^2_3(x; y)$ $P^2_4(x; y))$:=“юноши и девушки, которые любили друг друга, сформировали семьи".

Эквиваленция $(F_1(t_{11};t_{12};..t_{1n})$ $F_2(t_{21};\ t_{22};..t_{2n}))$ есть двуместная операция, посредством которой из двух формул $F_1$ и $F_2$ получают новую формулу $F$ $(t_{11};\ t_{12};\ \ t_{1n};\ t_{21};\ t_{22};\ \ t_{2n})$ с числом предметных переменных и постоянных, равным их объединению у исходных формул. Значение формулы истинно тогда и только тогда, когда обе формулы $F_1$ и $F_2$ имеют одно и то же значение истины или лжи.

Пример: Если x-предметная переменная для животных и $P_1(x)$:= "быть тюленем", $P_2(x)$:= "быть ластоногим живатным", то допустима формула:

$_x(P_1(x)$ $P_2(x))$:= "все тюлени-ластоногие животные".

Пример: Если x - предметная переменная, P(x) - предикат, то допустима формула $_x(P(x))$ x( P(x)):= "существует переменная x, для которой P(x) истинно, эквивалентноне для всех x P(x) ложно".

## 2.1.2 Правила записи сложных формул

Рассмотренные логические операции позволяют формализовать с помощью термов, предикатов и кванторов внутреннюю структуру предложения и формировать сложные суждения.

Пример: Суждение “Некоторые действительные числа являются рациональными”.

В этом суждении есть два предиката $P_1(x)$:=”быть действительным числом” и $P_2(x)$:=”быть рациональным числом”. Формула сложного суждения должна быть записана так:

F= $_{x}(P_1(x)\ P_2(x))$.

Ошибочной является формула F= $_{x}(P_1(x)\ P_2(x))$:=”некоторые числа, если они являются действительными, то они рациональные, т.к. замена безкванторной части на эквивалентную дает F= $_{x}(\ P_1(x)\ P_2(x))$:=”некоторые числа не являются действительными или являются рациональными”.

<u>Пример:</u> Суждение “Все рациональные числа действительные”.

Формула сложного суждения должна быть записана так:

F= $_{x}(P_1(x)\ P_2(x))$.

Ошибочной является формула F= $_{x}(P_1(x)\ P_2(x))$:=”все числа являются и действительными и рациональными”.

<u>Пример:</u> Суждение “Ни один человек не является четвероногим. Все женщины – люди. Следовательно, не одна женщина не является четвероногой”[15].

В этом суждении три одноместных предиката $P_1(x)$:”быть индивидом”, $P_2(x)$:=”быть женщиной” и $P_3(x)$:=”быть четвероногим”.

Формула сложного суждения должна быть записана так:

$_{x}(P_1(x)\ P_3(x))$; $_{x}(P_2(x)\ P_1(x))$

$_{x}(P_2(x)\ P_3(x))$.

<u>Пример:</u> Суждение “Некоторые республиканцы любят всех демократов. Ни один республиканец не любит ни одного социалиста. Следовательно, ни один один демократ не является социалистом”[13].

В этом суждении три одноместных предиката $P_1(x)$:=”быть республиканцем”, $P_2(x)$:=”быть демократом”, $P_3(x)$:=”быть социалистом” и один двухместный предикат $P^2_4(x; y)$:=”x любит y”.

Формула сложного суждения должна быть записана так:

$_{x}\ (P_1(x)\ _{y}(P_2(y)\ P^2_4(x; y)))$; $_{x}(P_1(x)\ _{y}(P_3(y)\ P^2_4(x; y)))$

$_{x}(P_2(x)\ P_3(x))$.

Пример: Суждение “Ни один торговец наркотиками не является наркоманом. Некоторые наркоманы привлекались к ответственности. Следовательно, некоторые люди, привлекавшиеся к ответственности, не являются торговцами наркотиков”.

В этом суждении три одноместных предиката $P_1(x)$:=”быть торговцем наркотиков”, $P_2(x)$:=”быть наркоманом”, $P_3(x)$:=”привлекаться к ответственности ”.

Формула сложного суждения должна быть записана так:

$_x(P_1(x)\ P_2(x));\ _x(P_2(x)\ P_3(y))$

$_x(P_3(x)\ P_1(x))$.

Пример: Суждение “Саша – мальчик, у которого нет машины. Таня – девочка, которая любит мальчиков, имеющих машины. Следовательно, Таня не любит Сашу”.

В этом суждении два одноместных предиката

$P_1(x)$:=”быть мальчиком”, $P_2(x)$:=”быть девочкой”, и два двухместных $P_3(x; y)$:=”x любит y”, $P_4(x; y)$:=”x имеет y” три высказывания $P_1(a)$:=”Саша – мальчик”, $P_2(b)$:=”Таня - девочка” и $P_4(a; c)$:=”Саша не имеет машины (c)”.

Формула сложного суждения должна быть записана так:

$P_1(a);\ P_2(b);\ P_4(a; c);\ _x(P_2(x)\ _y(P_1(y)\ P_4(y; c)\ P_3(x; y))$

$P_2(b)\ P_3(b; a))$.

Приведенные примеры позволяют сформулировать некоторые правила записи сложных суждений.

1) каждое вхождение логической связки “ ” относится к формуле, следующей непосредственно за логической связкой справа;

2) каждое вхождение логической связки “ ” после расстановки скобок связывает формулы, непосредственно окружающие логическую связку;

3) каждое вхождение логической связки “ ” после расстановки скобок связывает формулы, непосредственно окружающие эту связку.

4)Логические связки по силе и значимости могут быть упорядочены так:

; ; ; ; .

5) за квантором общности чаще всего следует логическая связка импликации, а за квантором существования - конъюнкции;

6) если формула содержит подформулу, то внутренняя формула не должна содержать кванторов, связывающих ту же переменную, что и квантор формулы;

7) значения всех предметных переменных и постоянных должны принадлежать одной области определения предиката или функции;

**8)** если в одной формуле есть кванторы общности и существования, то при формализации суждений следует стремиться поставить квантор существования слева всей формулы.

## 2.1.3 Законы алгебры предикатов

Формулы называют ***равносильными***, если при любых подстановках предметных постоянных они принимают одинаковое значение. Если две формулы $F_1$ и $F_2$ равносильны, т.е $F_1=F_2$, то они эквивалентны.

Если формула алгебры предикатов F имеет вхождением подформулу $F_i$, т.е. $F(\ t_1;\ t_2;\ ;\ F_i;\ )$, для которой существует экви -валентная ей подформула $F_j$ т.е. $F_i = F_j$, то возможна подстановка всюду в формулу F вместо формулы $F_i$ подформулу $F_j$ без нарушения истинности формулы, т.е.

$$F(\ t_1;\ t_2;\ ;\ F_i;\ )= F(\ t_1;\ t_2;\ ;\ F_j;\ ).$$

Если в законах логики высказываний вместо имеющихся пропозициональных переменных всюду подставить предикаты так, чтобы вместо одной и той же пропозициональной переменной стоял один и тот же предикат, то получится закон логики предикатов.

Основные законы эквивалентных преобразований алгебры предикатов представлены в таблице.

| Наименование закона и правила | Равносильные формулы $F_i=F_j$ |
|---|---|
| коммутативности | $x\ y(F^2(x;\ y))=\ y\ x(F^2(x;\ y))$ *); <br> $x\ y(F^2(x;\ y))=\ y\ x(F^2(x;\ y))$ *). <br> *) только для одноименным кванторов. |
| дистрибутивности | $_x(F_1(x))\ _x(F_2(x))=\ _x(F_1(x)\ F_2(x))$ *); <br> $_x(F_1(x))\ _x(F_2(x))=\ _x(F_1(x)\ F_2(x))$ **); <br> *)для логической связки “ ” формул только с кванторами по одной переменной x. <br> **)для логической связки “ ” формул только с кванторами по одной переменной x. |
| идемпотентности { ; } | $_x(F(x))\ _x(F(x))=\ _x(F(x))$; <br> $_x(F(x))\ _x(F(x))=\ _x(F(x))$ |
| исключенного третьего | $_x(F(x))\ _x(F(x))$=и, где { ; } |
| противоречия | $_x(F(x))\ _x(F(x))$=л, где { ; } |
| де Моргана | x( F(x))= x(F(x)); x( F(x))= x(F(x)) |
| дополнения | ( $_x(F(x)))=\ _x(F(x))$, где { ; } |
| свойства констант | $_x(F(x))$ и=и; $_x(F(x))$ л= $_x(F(x))$; <br> $_x(F(x))$ л=л; $_x(F(x))$ и= $_x(F(x))$, <br> где { ; }. |

<u>Пример</u>: F= $_{x1}\ _{x2}(P_1\ (x_1)\ _{x3}\ (P^2_2\ (x_1;\ x_3)\ P^2_3(x_2;x_3))))$.

Упростить формулу.

**1)**выполнить операцию отрицания формулы:

F= $_{x1}\ _{x2}(P_1\ (x_1)\ _{x3}\ (P^2_2\ (x_1;\ x_3)\ P^2_3(x_2;x_3))))$;

**2)**выполнить операцию отрицания формулы:

F= x1 x2 ($P_1$ ($x_1$) x3 ($P^2_2$ ($x_1$; $x_3$) $P^2_3$($x_2$;$x_3$)));

3) удалить логическую связку “ ”:

F= x1 x2 ( $P_1$ ($x_1$) x3 ($P^2_2$ ($x_1$; $x_3$) $P^2_3$($x_2$;$x_3$)));

4) выполнить операцию отрицания формулы:

F= x1 x2($P_1$ ($x_1$) x3 ($P^2_2$ ($x_1$; $x_3$) $P^2_3$($x_2$;$x_3$)));

5) выполнить операцию отрицания формулы:

F= x1 x2($P_1$ ($x_1$) x3 ($P^2_2$ ($x_1$; $x_3$) $P^2_3$($x_2$;$x_3$)));

6) выполнить операцию отрицания формулы:

F= x1 x2($P_1$ ($x_1$) x3 ( $P^2_2$ ($x_1$; $x_3$) $P^2_3$($x_2$;$x_3$)));

**7)**перенести квантор x3 влево:

F= x1 x2 x3 ($P_1$ ($x_1$) $P^2_2$ ($x_1$; $x_3$) $P^2_3$($x_2$;$x_3$)).

<u>Пример:</u> F= $_x$($P_1$(x) $P_2$(x)) ( $_x$($P_1$(x)) $_x$($P_2$(x))).

Упростить формулу.

**1)**удалить логическую связку “ ”:

F= ( $_x$( $P_1$(x) $P_2$(x))) ( $_x$($P_1$(x)) $_x$($P_2$(x)));

**2)**выполнить операцию отрицания формулы:

F= $_x$( ( $P_1$(x) $P_2$(x)))) $_x$( $P_1$(x)) $_x$( $P_2$(x)));

**3)**выполнить операцию отрицания формулы:

F= $_x$($P_1$(x) $P_2$(x)) $_x$( $P_1$(x)) $_x$( $P_2$(x)));

4) применить закон дистрибутивности по квантору $_x$:

F= $_x$($P_1$(x) $P_2$(x) $P_2$(x)) $_x$( $P_1$(x));

5)применить закон дистрибутивности к формуле:

F= $_x$(($P_1$(x) $P_2$(x)) ($P_2$(x) $P_2$(x))) $_x$( $P_1$(x));

6) применить закон исключенного третьего и свойство констант для логической связки “ ”:

F= $_x$(($P_1$(x) $P_2$(x))) $_x$( $P_1$(x));

7) применить закон де Моргана:

F= x(($P_1$(x) $P_2$(x))) x($P_1$(x));

8) применить закон дистрибутивности по квантору x:

F= x($P_1$(x)) x( $P_2$(x)) x($P_1$(x));

9) применить закон исключенного третьего:

F= x( $P_2$(x)) и;

**10)**применить свойство констант для логической связки “ ”:

F=и,

т.е. формула F= x($P_1$(x) $P_2$(x)) ( x($P_1$(x)) x($P_2$(x))) является тождественно истиной.

# 2.1.4 Предваренная нормальная форма

Для облегчения анализа сложных суждений формулы алгебры предикатов рекомендуется приводить к нормальной форме. Если в алгебре высказываний приняты две нормальные формы (ДНФ - дизъюнктивная и КНФ -конъюнктивная), то в алгебре предикатов - одна ***предваренная нормальная форма*** (ПНФ), суть которой сводится к разделению формулы на две части: кванторную и безкванторную. Для этого все кванторы формулы выносят влево, используя законы и правила алгебры предикатов.

В результате этих алгебраических преобразований может быть получена формула вида: $x_1$ $x_2$ $x_n$(М), где { ; } , а М – матрица формулы. Кванторную часть формулы $x_1$ $x_2$ $x_n$ иногда называют префиксом ПНФ.

В последующем матрицу формулы преобразуют к виду КНФ, что облегчает механизм по принципу резолюции.

<u>Пример:</u>

F= x y(($P_1^2$(x; y) $P_2$(x)) $P_3$(y)) формула, приведенная к ПНФ; F= x($P_1^2$(x; y) x($P_2$(x)) y($P_3$(y)) формула, неприведенная к ПНФ.

x($P_1$(x)) x($P_2$(x))= x($P_1$(x) $P_2$(x)) слева от знака равенства формула, неприведенная к ПНФ, а справа, равносильная ей формула, но приведенная к ПНФ.

### 2.1.4.1 Алгоритм приведения формулы к виду ПНФ

Шаг 1. Исключить всюду логические связки и по правилам:

$(F_1\ F_2)=(F_1\ F_2)\ (F_2\ F_1)=(\ F_1\ F_2)\ (\ F_2\ F_1)$;

$(F_1\ F_2)=(\ F_1\ F_2)$;

Шаг 2. Продвинуть отрицание до элементарной формулы по правилам:

$x(F)=\ x(\ F)$; $(F_1\ F_2)=(\ F_1\ F_2)$;

$x(F)=\ x(\ F)$;. $(F_1\ F_2)=(\ F_1\ F_2)$;

Шаг 3. Переименовать связанные переменные по правилу:

‘ найти самое левое вхождение предметной переменной такое, что это вхождение связано некоторым квантором, но существует еще одно вхождение этой же переменной; затем сделать замену связанного вхождения на вхождение новой переменной “, операцию повторять пока возможна замена связанных переменных;

Шаг 4. Вынести кванторы влево по законам алгебры логики.

Шаг 5. Преобразовать бескванторную матрицу к виду КНФ. Алгоритм приведения матрицы формулы к виду КНФ приведен в алгебре высказываний.

<u>Пример</u> <u>:</u> $F=(\ _x(P_1(x)\ _y(P_2(y)\ P_3(z))))\ (\ _y(P^2{}_4(x;y)\ P_5(z)))$.

Привести формулу к виду ПНФ.

l) удалить логические связки “ ”:

$F=(\ _x(\ P_1(x)\ _y(\ P_2(y)\ P_3(z))))\ (\ _y(\ P^2{}_4(x;y)\ P_5(z)))$;

2) применить закон де Моргана $_x(\ F(x))=\ _x(\ F(x))$:

$F=(\ _x(\ P_1(x)\ _y(\ P_2(y)\ P_3(z))))\ (\ _y(\ (\ P^2{}_4(x;y)\ P_5(z)))$;

3) применить закон де Моргана $(F_1\ F_2)=(\ F_1\ F_2)$:

$F=\ _{x}(\ P_1(x)\ _{y}(\ P_2(y)\ P_3(z)))\ (\ _{y}(P^2{}_4(x;\ y)\ (\ P_5(z))))$;

4) переименовать связанную переменную x=w:

$F=\ _{w}(\ P_1(w)\ _{y}(\ P_2(y)\ P_3(z)))\ (\ _{y}(P^2{}_4(x;\ y)\ (\ P_5(z))))$;

5) переименовать связанную переменную y=v:

$F=\ _{w}(\ P_1(w)\ _{v}(\ P_2(v)\ P_3(z)))\ (\ _{y}(P^2{}_4(x;\ y)\ (\ P_5(z))))$;

6) вынести квантор $_{v}$ влево:

$F=\ _{w}\ _{v}(\ P_1(w)\ P_2(v)\ P_3(z))\ (\ _{y}(P^2{}_4(x;\ y)\ (\ P_5(z))))$;

7) вынести квантор $_{y}$ влево:

$F=\ _{w}\ _{v}\ _{y}(\ P_1(w)\ P_2(v)\ P_3(z))\ P^2{}_4(x;\ y)\ P_5(z)$.

Матрица ПНФ содержит три элементарных дизъюнкта:

$K=\{(\ P_1(w)\ P_2(v)\ P_3(z));\ P_4(x;\ y);\ P_5(z)\}$.

<u>Пример</u>**:** $F=\ _{x}(P_1(x)\ _{x}(P_2(x)))\ _{y}(P_3(y))$.

Привести формулу к виду ПНФ.

1) удалить логические связки “ ”:

$F=\ _{x}((P_1(x)\ _{x}(P_2(x)))\ (\ _{x}(P_2(x))\ P_1(x)))\ _{y}(P_3(y))$;

2) удалить логические связки “ ”:

$F=(\ _{x}((\ P_1(x)\ _{x}(P_2(x)))\ (\ _{x}(P_2(x))\ P_1(x)))\ _{y}(P_3(y))$;

3) применить закон $x(F(x))=\ x(\ F(x))$:

$F=\ _{x}(\ ((\ P_1(x)\ _{x}(P_2(x)))\ (\ _{x}(P_2(x))\ P_1(x))))\ _{y}(P_3(y))$;

4) применить закон де Моргана $(F_1\ F_2)=(\ F_1\ F_2)$:

$F=\ _{x}((\ (\ P_1(x)\ _{x}(P_2(x)))\ (\ (\ _{x}(P_2(x))\ P_1(x))))\ _{y}(P_3(y))$;

5) применить закон де Моргана $(F_1\ F_2)=(\ F_1\ F_2)$:

$F=\ _{x}((P_1(x)\ (\ _{x}(P_2(x))))\ (\ _{x}(P_2(x))\ (\ P_1(x))))\ _{y}(P_3(y))$;

6) применить закон $_{x}(F(x))=\ _{x}\ (\ F(x))$:

$F={}_x((P_1(x)\ {}_x(\ P_2(x)))\ (\ {}_x(P_2(x))\ (\ P_1(x))))\ {}_y(P_3(y));$

7) переименовать связанную переменную x=z:

$F={}_z((P_1(z)\ {}_x(\ P_2(x)))\ (\ {}_x(P_2(x))\ (\ P_1(z))))\ {}_y(P_3(y));$

8) переименовать связанную переменную x=w:

$F={}_z(P_1(z)\ {}_w(\ P_2(w))\ {}_x(P_2(x)\ P_1(z)))\ {}_y(P_3(y));$

9) вынести квантор $_w$, $_x$ и $_y$ влево:

$F={}_z\ {}_w\ {}_x\ {}_y(P_1(z)\ P_2(w)\ P_2(x)\ P_1(z)\ P_3(y));$

10) преобразовать матрицу к виду КНФ:

$F={}_z\ {}_w\ {}_x\ {}_y((P_1(z)\ P_2(x)\ P_3(y))\ (\ P_2(w)\ P_2(x)\ P_3(y))\ (\ P_2(w)\ P_1(z)\ P_3(y))).$

Матрица ПНФ содержит три элементарных дизъюнкта:

$K=\{(P_1(z)\ P_2(x)\ P_3(y));\ (\ P_2(w)\ P_2(x)\ P_3(y));\ (\ P_2(w)\ P_1(z)\ P_3(y))\}.$

<u>Пример:</u> $F={}_x\ {}_y(P^2_1\ (x;y))\ (\ {}_x\ {}_y(P^2_2(x;y))).$

Привести формулу к виду ПНФ.

**1)**применить закон $_x(F(x))={}_x(\ F(x))$:

$F={}_x\ {}_y(P^2_1(x;y))\ (\ {}_x\ (\ {}_y(P22(x;y))));$

**2)**применить закон $_x(F(x))={}_x(\ F(x))$:

$F={}_x\ {}_y(P^2_1(x;y))\ (\ {}_x\ {}_y(\ (P^2_2(x;y))));$

**3)**вынести квантор $_x$ по закону дистрибутивности:

$F={}_x(\ {}_y(P^2_1(x;y))\ {}_y(\ (P^2_2(x;y))));$

4) переименовать связанную переменную y=v:

$F={}_x(\ {}_z(P^2_1(x;z))\ {}_y(\ (P^2_2(x;y))));$

5) вынести кванторs $_z$ и $_y$ влево:

$x\ z\ {}_y(P^2_1(x;z)\ P^2_2(x;y)).$

Матрица ПНФ содержит два элементарных дизъюнкта:

$K=\{P^2_1(x;z);\ P^2_2(x;y)\}.$

Пример: $\mathrm{M}=P_1(z)\ P_2(w)\ P_2(x)\ P_1(z)\ P_3(y)$;

**1)** по закону дистрибутивности:

$$\mathrm{M}=P_1(z)\ P_2(w)\ (P_2(x)\ P_3(y))\ (\ P_1(z)\ (P_3(y));$$

**2)** по закону дистрибутивности:

$$\mathrm{M}=(P_1(z)\ P_2(w)\ P_2(x)\ P_3(y))\ (P_1(z)\ P_2(w)\ P_1(z)\ P_3(y));$$

**3)** по закону дистрибутивности:

$$\mathrm{M}=(P_1(z)\ P_2(x)\ P_3(y))\ (\ P_2(w)\ P_2(x)\ P_3(y))$$
$$(P_1(z)\ P_1(z)\ P_3(y))\ (\ P_2(w)\ P_1(z)\ P_3(y));$$

**4)** по закону исключенного третьего:

$$\mathrm{M}=(P_1(z)\ P_2(x)\ P_3(y))\ (\ P_2(w)\ P_2(x)\ P_3(y))$$
$$(\ P_2(w)\ P_1(z)\ P_3(y)).$$

Матрица содержит три элементарных дизъюнкта:
$K=\{(P_1(z)\ P_2(x)\ P_3(y));\ (\ P_2(w)\ P_2(x)\ P_3(y));\ (\ P_2(w)\ P_1(z)\ P_3(y))\}$.

Дизъюнкты матрицы содержат контрарные атомы $P_1(z)$ и $P_1(z)$, $P_2(x)$ и $P_2(w)$, свободные переменные которых могут быть одинаковыми или разными.

## 2.1.5 Сколемовская стандартная форма

Наличие разноименных кванторов усложняет вывод заключения. Поэтому рассмотрим класс формул, содержащих только кванторы всеобщности. Формула **F** называется - формулой, если она представлена в ПНФ и содержит только кванторы всеобщности, т.е.
$F = x1\ x2\ xn\ (\mathrm{M})$.

Для устранения кванторов существования из префикса формулы разработан алгоритм Сколема, вводящий ***сколемовскую функцию*** для связывания предметной переменной квантора существования с другими предметными переменными.

# 2.1.5.1 Алгоритм Сколема

Шаг 1. Представить формулу **F** в виде ПНФ, т.е.

**F**= $x_1$ $x_2$ $x_n$(M), где $_i$ { ; }Шаг 2. Найти в префиксе самый левый квантор существования:

а) если квантор находится на первом месте префикса, то вместо переменной, связанной квантором существования, подставить всюду предметную постоянную ***a*** , отличную от встречающихся предметных постоянных в матрице формулы, а квантор существования удалить;

б) если квантор находится не на первом месте префикса, т.е. x1 x2 xi-1 xi .., то выбрать (i-1)-местный функциональный символ, отличный от функциональных символов матрицы M и выполнить замену предметной переменной $x_i$, связанной квантором существования, на функцию f($x_1$;$x_2$ ; $x_{i-1}$ ) и квантор существования удалить.

Шаг 3. Найти следующий справа квантор существования и перейти к исполнению шага 2, иначе конец.

Формулу ПНФ, полученную в результате введения сколемовской функции называют ***сколемовской стандартной формой формулы (ССФ)***.

<u>Пример:</u>

F= x1 x2 x3 x4 x5 x6 (($P^2_1(x_1; x_2)$ $P^3_2(x_3; x_4; x_5)$) $P^2_3(x_4; x_6)$).

1) заменить предметную переменную $x_1$ на постоянную *a*:

F= x2 x3 x4 x5 x6 (($P^2_1$ (*a*; $x_2$) $P^3_2(x_3; x_4; x_5)$) $P^2_3(x_4; x_6)$);

2) заменить предметную переменную $x_4$ на функцию $f^2_1$($x_2$;$x_3$):

F= $x2\ x3\ x5\ x6\ ((P^2_1(a; x_2)\ P^3_2(x_3; f^2_1(x_2; x_3); x_5))\ P^2_3(f^2_1(x_2; x_3); x_6));$

**4)**заменить предметную переменную $x_6$ на функцию

$f^3_2(x_2; x3 ; x_5 )$:

F= $x2\ x3\ x5((P^2_1(a; x_2)\ P^3_2(x_3; f^2_1(x_2; x_3); x_5))$

$P^2_3(f^2_1(x_2; x_3);f^3_2(x_2; x_3 ; x_5 ))).$

K=$\{(P^2_1(a; x_2)\ P^3_2(x_3; f^2_1(x_2; x_3); x_5)); P^2_3(f^2_1(x_2; x_3);f^3_2(x_2; x_3 ; x_5 ))\}.$

## 2.2. Исчисление предикатов

Все методы и результаты исчисления высказываний можно перенести на исчисление предикатов, т. е. каждая теорема и любой вывод исчисления высказываний становятся теоремой и выводом исчисления предикатов, если пропозициональные переменные заменить формулами языка предикатов, причем все вхождения одной и той же переменной везде заменить одной и той же формулой. Каждая схема теоремы и каждая схема вывода также сохраняются, если под знаками пропозициональных переменных принимать формулы языка предикатов.

Для того, чтобы формализовать процесс рассуждения в исчислении предикатов, необходимо выделить класс формул, определяющих их эквивалентные преобразования при наличии кванторов, и класс отношений между формулами формирующих последовательную цепь формул от посылок до заключения. Следует отметить, что правила, аксиомы и законы исчисления высказываний есть подмножество правил, аксиом и законов исчисления предикатов. Дополнительные правила, аксиомы и законы определяют возможности введения и удаления кванторов, подстановки и смены кванторов.

# 2.2.1 Интерпретация формул

Под ***интерпретацией*** следует понимать систему, состоящую из непустого множества V, называемом ***универсумом,*** и однозначного отображения на двухэлементное множество {и; л}, которое каждому предикатному символу $P^n(t_1; t_2; t_n)$ ставит в соответствие n - местное отношение на множестве V, каждому функциональному символу $f^n_i(t_1; t_2; t_n)$ - n-местную операцию на множестве V, каждой предметной постоянной - элемент множества V.

При заданной интерпретации предметные переменные рассматриваются как переменные, пробегающие область универсума V, а символам логических и кванторных операций придается их обычный смысл.

Например, если универсум задан множеством целых чисел, то для x y z $(P^2(+(x, y); z))$:= “существуют числа x, y, z, для которых z больше суммы чисел x и y", то при x=2, y=3, z=10 имеем двухместную операцию =5 и двухместное отношение между целым числом 10 и значением операции +(2,3)=5. Отображение $P^2(5;10)$ на двухэлементное множество дает значение “и”. При x=2, y=3, z=4 имеем +(2,3)=5 и $P^2(5; 4)$=л.

На рис. 10 приведена графическая интерпретация этой задачи.

**V**10

$P^2(5;10)$

2

+(2,3) 5

3

4

$V_{10}$

$P^2(5;10)$

2

+(2,3) 5

3

4

4

и

л

и

л

$P^2(5; 4)$

$P^2(5; 4)$

.10 Интерпретация $x\ y\ z\ (P^2(+(x, y); z))$ для x=2, y=3, z=10 или z=4.

Другими словами, интерпретация функциональных символов определяется по значениям функции на универсуме, заданном на множестве термов, входящих аргументами в эту функцию, а интерпретация предикатных символов по отображению на двухэлементное множество {и; л}.

Особо следует рассмотреть влияние свободных переменных на интерпретацию формул исчисления предикатов.

Формула, не содержащая свободных переменных, называется ***замкнутой*** и представляет собой высказывание об элементах, функциях и отношениях, которое принимает значение и или л. На рис. 10 рассмотрен случай замкнутой формулы.

Формула, содержащая свободные переменные, называется ***открытой*** и представляет собой отношений, заданное на множестве V,
Это отношение может быть истинным для одних значений из области интепретации и ложным для других.

При такой интерпретации выделяют три класса формул, тождественно истинные, тождественно ложные и выполнимые.

***Тождественно истинные формулы*** (или тавтологии) -это особый класс формул исчисления предикатов, которые принимают значение “истины” для всех интерпретаций входящих в нее предметных постоянных, функциональных и предикатных символов; эти формулы играют роль законов и аксиом исчисления предикатов; любые подстановки и замещения в тождественно истинной формуле не изменяют ее значения.

Например,
для предиката $P^2(x, y)$:=”число x меньше числа y” формула $_x\ _y(P^2(x, y))$:=”для любого целого числа x найдется число y, большее числа x” является тождественно истинной;
для любой F(x) формула $_x(F(x))\ _x(\ F(x))$:=“формула ”существуют x, для которых F(x)=и”, эквивалентна формуле “не для всех x F(x)=л”” является тождественно истинной.

***Тождественно ложные формулы*** (или противоречие)-это особый класс формул исчисления предикатов, которые принимают значение “ложь” для всех интерпретаций входящих в нее предметных постоянных, функциональных и предикатных символов; любые подстановки и замещения в тождественно ложной формуле не изменяют ее значения.

Например, для предиката $P^2(x, y)$:=”число x меньше числа y” формула $_x$ $_y(P^2(x, y))$:=”существует целое число x, которое меньше любого целого числа y” является тождественно ложной;

для любой F(x) формула $_x$(F(x)) $_x$( F(x)):=”“существует *x*, для которой F(x)=и”, и “для всех x F(x)=л ”” является тождественно ложной.

***Выполнимые формулы*** - это особый класс формул исчисления предикатов, которые принимают значение “истина”в некоторой области, т.е. не для всех интерпретаций входящих в нее предметных постоянных, функциональных и предикатных символов.

Например, формула $_x$(F(x)) $_x$(F(x)) является истинной для одного элемента множества V и ложной для всех элементов этого множества, т.к.

$_x$(F(x)) $_x$(F(x)):=” если существует x, для которого F(x)=и, то не для всех x универсума F(x)=и” .

## 2.2.2 Правила вывода

Вывод заключения из множества посылок записывается так же, как в исчислении высказываний

$F_1;F_2; F_n$ B, где слева от знака “ ” записывают множество формул посылок и необходимые аксиомы $F_1;F_2;$ $F_n$, а справа – формулу заключения B. Тогда знак “ ” означает “верно, что B выводима из $F_1;F_2;$ $F_n$.

Отношение логического вывода эквивалентно теореме

$F_1; F_2; F_n\ B$.

Другая форма записи : $F_1;\ F_2; F_n$

$B$,

где над чертой записывают множество посылок и аксиом $F_1; F_2; F_n$, а под чертой заключение $B$.

Для организации вывода заключения из множества посылок используют правила подстановки и правила заключения.

## 2.2.2.1 Правила подстановки

Если в формулу $F(x)$, содержащей свободную переменную **x**, выполнить всюду подстановку вместо **x** терма **t** , то получим формулу $F(t)$.

Этот факт записывают так:

$x^{t} F(x)$

$F(t)$.

Подстановка некоторого терма t в формулу F(x) вместо ее свободной переменной x состоит в замещении всех свободных вхождений этой переменной данным термом t. Такая подстановка называется правильной. Подстановка будет неправильной если в результате подстановки сколемовской функции свободная переменная окажется в области действия квантора.

Например,

1. $x_1\ x^2\ x_3(\ P^2{}_1(x_1,\ x_3)\ P_2\ (x_2))$

$x_3(\ P^2{}_1(x_2,\ x_3)\ P_2\ (x_2))$.

Это правильная подстановка, т.к. $x_1$ –свободная переменная.

2. $x_1$ $f(x2, t)$ $x_3($ $P^2{}_1(x_1, x_3)$ $P_2$ $(x_2))$

$x_3($ $P^2{}_1(f(x2, t), x_3)$ $P_2$ $(x_2))$.

Это - правильная подстановка, т.к. $x_1$ –свободная переменная.

3. $x_3$ $x_2$ $x_3($ $P^2{}_1(x_1, x_3)$ $P_2$ $(x_2))$

$x_3($ $P^2{}_1(x_1, x_2)$ $P_2$ $(x_2))$.

Это - неправильная подстановка, т.к. $x_3$ –связанная квантором .

4. $x_2$ $x_3$ $x_3($ $P_1(x_1, x_3)$ $P_2$ $(x_2))$

$x_3($ $P_1(x_1, x_3)$ $P_2$ $(x_3))$.

Это - неправильная подстановка, т.к. предикат $P_2$ $(x_3)$ попадает в область действия квантора .

Понятие правильной подстановки необходимо, например, для формулировки законов снятия квантора общности

$_x$ F(x)

F(t)

и введения квантора существования

F(t)

$_x$F(x).

# 2.2.2.2 Правила введения и удаления кванторов

Наиболее распространенными правилами являются:

1) Введение квантора общности: “если $F_1(t)$ $F_2(x)$ выводимая

формула и $F_1(t)$ не содержит свободной переменной $x$, то $F_1(t)$ $x(F_2(x))$ также выводима", т.е.

$(F_1(t)\ F_2(x))$

$(F_1(t)\ x(F_2(x)))$.

2) Удаление квантора общности: "если $x(F(x))$ выводимая формула, то вместо $x$ можно выполнить подстановку терма $t$, свободного от $x$, и получить также выводимую формулу $F(t)$, т.е.

$x(F(x))$

. $F(t)$.

3) Введение квантора существования: "если терм $t$ входит в предикат $F(t)$, то существует, по крайней мере одна предметная переменная $x$, удовлетворяющая требованиям $x(F(x))$ ", т.е.

$F(t)$

$x(F(x))$.

1. 4) Смена квантора:

$x(F(x))\ x(F(x))$

$x(\ F(x))$; $x(\ F(x))$.

2. 5) Перенос квантора, если терм $t$ не содержит переменной $x$:

a) $x(F_1(x))\ F_2(t)$

$x(F_1(x)\ F_2(t))$;

b) $x(F_1(x))\ F_2(t)$

$x(F_1(x)\ F_2(t)$;

c) $F_1(t)\ x(F_2(x))$

$x(F_1(t)\ F_2(x))$;

d) $x(P(x))\ F(t)$

$x(P(x)\ F(t))$;

e) $x(P(x))\ F(t)$

$x(P(x)\ F(t))$.

6) Введение новой переменной:

a) $x(F_1(x))\ x(F_2(x))$

$y\ x(F_1(y)\ F_2(x))$;

b) $x(F_1(x))\ x(\ F_2(x))$

$y\ x(F_1(y)\ F_2(x))$.

## 2.2.2.3 Правила заключения

Существует два основных правила определения истинности заключения:

a) если $F_1$ и $(F_1\ F_2)$ выводимые формулы, то $F_2$ также выводима. Это - правило ***modus ponens*** (m.p).

$F_1;\ (F_1\ F_2)$

$$F_2.$$

b) если $F_2$ и $(F_1\ F_2)$ выводимые формулы, то $F_1$ также. выводима. Это - правило ***modus tollens*** (m.t).

$F_2;\ (F_1\ F_2)$

$$F_1.$$

Эти правила определяют схему вывода и позволяют использовать правила подстановки, введения и удаления кванторов и делать вывод об истинности заключения.

# 2.2.3 Метод дедуктивного вывода

В логике предикатов вывод определяется так же, как в исчислении высказываний. Все правила вывода логики высказываний включены в множество правил логики предикатов.

<u>Пример</u>: “Таможенные чиновники обыскивают каждого, кто въезжает в страну, кроме высокопоставленных лиц. Если некоторые люди способствуют провозу наркотиков, то на внутреннем рынке есть наркотик. Никто из высокопоставленных лиц не способствовает провозу наркотиков. Следовательно, некоторые из таможников способствуют провозу наркотиков?”

Пусть $P_1(x)$:=”x - таможенный чиновник”, $P_2(x,y)$:=”x обыскивает y”, $P_3(y)$:=”y въезжает в страну”, $P_4(y)$:=”y – высокопоставленное лицо”, $P_5(y)$:=”y способствует провозу наркотиков”.

$_y(P_3(y)\ P_4(y)\ _x(P_1(x)\ P_2(x,y)));$

$_y(P_3(y)\ P_5(y));$

$_y(P_3(y)\ P_4(y\ P_5(y));$

$_x(P_1(x)\ P_5(x)).$

1) $F_1 = {}_y(P_3(y)\ P_5(y))$ - посылка;

2) $F_2=P_3(a)\ P_5(a)$ - заключение по формуле $F_1$ и правилу удаления квантора существования;

3) $F_3= P_3(a)$ - заключение по формуле $F_2$ и правилу удаления логической связки конъюнкции;

4) $F_4= P_5(a)$ - заключение по формуле $F_2$ и правилу удаления логической связки конъюнкции;

5) $F_5= {}_y(P_3(y)\ P_4(y\ P_5(y))$ посылка;

6) $F_6= P_3(t)\ P_4(t\ P_5(t)$ - заключение по формуле $F_5$ и правилу удаления квантора общности;

7) $F_7= P_3(t)\ P_4(t)\ P_5(t)$ - заключение по формуле $F_6$ и ее эквивалентным преобразованиям;

8) $F_8= P_4(a)$ - заключение по формуле $F_7$ при t=a для $P_3(a)$=л и $P_5(a)$=л;

9) $F_9= {}_y(P_3(y)\ P_4(y)\ {}_x(P_1(x)\ P_2(x,y)))$ - посылка;

10) $F_{10}= {}_y\ {}_x\ (P_3(y)\ P_4(y)\ (P_1(x)\ P_2(x,y)))$ - заключение по формуле $F_9$ и правилу приведения к ПНФ;

11) $F_{11}=P_3(a)\ P_4(a)\ P_1(t)\ P_2(t,a)$ - заключение по формуле $F_{10}$ и правилу удаления квантора общности;

12) $F_{12}= P_3(a)\ P_4(a)$ - заключение по формулам $F_3$ и $F_8$ и правилу введения логической связки конъюнкции исчисления высказываний;

13) $F_{13}=(P_1(t)\ P_2(t,a))$ - заключение по формулам $F_{11}$ и $F_{12}$ и правилу modus ponens;

14) $F_{14}= P_1(t)$ -заключение по формуле F13 и правилу удаления логической связки конъюнкции исчисления высказываний;

15) $F_{15}=P_5(a)=P_5(t)$ -заключение по формуле $F_4$ и замене предметной постоянной термом;

16) $F_{16}= P_1(t)\ P_5(t)$ -заключение по формулам F14 и A15 и правилу введения логической связки конъюнкция исчисления высказываний;

17) $F_{17}= {}_x(P_1(x)\ P_5(x))$ -заключение по формуле F16 и правилу введения квантора существования. Так доказана истинность формулы ${}_x(P_1(x)\ P_5(x))$.

$_{y}(P_3(y)\ P_4(y)\ _{x}(P_1(x)\ P_2(x,y)))$
$_{y}(P_3(y)\ P_4(y)\ _{x}(P_1(x)\ P_2(x,y)))$
$_{y}(P_3(y)\ P_4(y\ P_5(y));$
$_{y}(P_3(y)\ P_4(y\ P_5(y));$

$_{y}(P_3(y)\ P_5(y))$
$_{y}(P_3(y)\ P_5(y))$

$y\ x\ (P_3(y)\ P_4(y)\ (P_1(x)\ P_2(x,y)))$
$y\ x\ (P_3(y)\ P_4(y)\ (P_1(x)\ P_2(x,y)))$
$P_3(t)\ P_4(t\ P_5(t)$
$P_3(t)\ P_4(t\ P_5(t)$

$P_3(a)\ P_5(a)$
$P_3(a)\ P_5(a)$

$P_3(a)\ P_4(a)\ P_1(t)\ P_2(t,a)$
$P_3(a)\ P_4(a)\ P_1(t)\ P_2(t,a)$

$P_3(t)\ P_4(t)\ P_5(t)$
$P_3(t)\ P_4(t)\ P_5(t)$
$P_3(a)$
$P_3(a)$
$P_5(a)$
$P_5(a)$
$(P_1(t)\ P_2(t,a))$
$(P_1(t)\ P_2(t,a))$

$t=a$

$P_4(a)$

$P_4(a)$

$P_1(t)$

$P_1(t)$

$P_3(a)\ P_4(a)$

$P_3(a)\ P_4(a)$

a=t

$P_1(t)\ P_5(t)$

$P_1(t)\ P_5(t)$

$P_5(t)$

$P_5(t)$

${}_x(P_1(x)\ P_5(x))$

${}_x(P_1(x)\ P_5(x))$

Рис. 11. Граф вывода заключения

Пример: Доказать истинность заключения

$x(\ P_1(x)\ (\ P_2(x)))$; $x(P_3(x)\ P_1(x))$

$x(P_3(x)\ (\ P_2(x)))$.

1) $F_1= x(\ P_1(x)\ (\ P_2(x)))$ - посылка;

2) $F_2= x(P_3\ (x)\ P_1\ (x))$ -посылка;

3) $F_3=(P_1\ (t)\ (\ P_2\ (t)))$ - заключение по формуле $F_1$ и правилу 2) удаления квантора общности**;**

4) $F_4= P_3\ (t)\ P_1\ (t)$ - заключение по формуле $F_2$ и правилу 2) удаления квантора общности;

5) $F_5= (P_3\ (t)\ (\ P_2\ (t)))$ - заключение по формулам $F_3$, $F_4$ и закону силогизма исчисления высказываний (см 1.2.3.2 правило 11);

6) $F_6 = {}_x(P_3(x)\ (\ P_2(x)))$ - заключение по формуле $F_5$ и правилу 1 введения квантора общности.

Так доказана истинность формулы ${}_x(P_3(x)\ (\ P_2(x)))$.

На рис. 12 приведен граф, иллюстрирующий процесс дедуктивного вывода.

$${}_x(\ P_1(x)\ (\ P_2(x)))$$
$${}_x(\ P_1(x)\ (\ P_2(x)))$$
$${}_x(P_3\ (x)\ P_1\ (x))$$
$${}_x(P_3\ (x)\ P_1\ (x))$$

$$(P_1\ (t)\ (\ P_2\ (t)))$$
$$(P_1\ (t)\ (\ P_2\ (t)))$$
$$P_3\ (t)\ P_1\ (t)$$
$$P_3\ (t)\ P_1\ (t)$$

$$(P_3\ (t)\ (\ P_2\ (t)))$$
$$(P_3\ (t)\ (\ P_2\ (t)))$$

$${}_x(P_3(x)\ (\ P_2(x)))$$
$${}_x(P_3(x)\ (\ P_2(x)))$$

Рис. 12. Граф вывода заключения

Пример: Доказать истинность заключения

$_x(\ _y(P^2_1(x; y)\ P_2(y))\ _y((P_3(y)\ P^2_4(x; y)));\ _x(P_3(x))$

$_x(P_3(x))\ _x\ _y(P^2_1(x; y)\ (\ P_2(y)))$.

1) $F_1=\ _x(\ _y(P^2_1(x; y)\ P_2(y))\ _y((P_3(y)\ P^2_4(x; y)))$ - посылка;

2) $F_2=\ _x(P_3(x))$ -посылка;

3) $F_3=\ _x(\ P_3(x))$ - заключение по формуле $F_2$ и правилу 5) смены кванторов (закон де Моргана);

4) $F_4= P_3\ (t)$ - заключение по формуле $F_3$ и правилу 2) удаления квантора общности;

5) $F_5= P_3(t)\ P^2_4(x;t)$ - заключение по формуле $F_4$ и правилу 4) исчисления высказываний;

6) $F_6=\ _y(\ P_3(y)\ (\ P^2_4(x; y)))$ - заключение по формуле $F_5$ и правилу 1) введения квантора общности;

7) $F_7=\ _y(P_3(y)\ P^2_4(x; y))$ - заключение по формуле $F_6$ и правилу смены кванторов (закон де Моргана);

8) $F_8=\ _y(P^2_1(t; y)\ P_2(y)\ y(P_3(y)\ P^2_4(t; y))$ - заключение по формуле $F_1$ и правилу 2) удаления квантора общности;

9) $F_9= y(P^2_1(t; y)\ P_2(y))$ - заключение по формулам $F_7$ и $F_8$ при условии t=x и правилу modus tollens;

10) $F_{10}=\ _y(\ P^2_1(t; y)\ P_2(y))$ - заключение по формуле $F_9$ и правилу смены кванторов (закон де Моргана);

11) $F_{11}=\ _y(P^2_1\ (t; y)\ (P_2\ (y))$ - заключение по формуле $F_{10}$ и эквивалентным преобразованиям алгебры предикатов;

12) $F_{12}=\ _x\ _y(P^2_1\ (x; y)\ (P_2\ (y))$ - заключение по формуле $F_{11}$ и правилу 1) введения квантора общности;

13) $_x(P_3(x))\ _x\ _y(P^2_1(x; y)\ (\ P_2(y)))$ – заключение по формулам $F_2$ и $F_{12}$ и правилу modus ponens. Что и требовалось доказать.

На рис. 13 приведен граф вывода этой задачи.

$$_{x}(P_3(x))$$

$$_{x}(P_3(x))$$

$$_{x}(\ _{y}(P^2_1(x; y)\ P_2(y))\ _{y}((P_3(y)\ P^2_4(x; y)))$$

$$_{x}(\ _{y}(P^2_1(x; y)\ P_2(y))\ _{y}((P_3(y)\ P^2_4(x; y)))$$

$$_{x}(\ P_3(x))$$

$$_{x}(\ P_3(x))$$

$$_{y}(P^2_1(t; y)\ P_2(y)\ _{y}(P_3(y)\ P^2_4(t; y))$$

$$_{y}(P^2_1(t; y)\ P_2(y)\ _{y}(P_3(y)\ P^2_4(t; y))$$

$$P_3\ (t)$$

$$P_3\ (t)$$

$$y(P^2_1(t; y)\ P_2(y))$$

$$y(P^2_1(t; y)\ P_2(y))$$

$$P_3(t)\ P^2_4(x;t)$$

$$P_3(t)\ P^2_4(x;t)$$

$$_{y}(\ P^2_1(t; y)\ P_2(y))$$

$$_{y}(\ P^2_1(t; y)\ P_2(y))$$

$$_{y}(P^2_1\ (t; y)\ (P_2\ (y))$$

${}_y(P^2_1\ (t; y)\ (P_2\ (y))$

${}_y(\ P_3(y)\ (\ P^2_4(x; y)))$

${}_y(\ P_3(y)\ (\ P^2_4(x; y)))$

${}_y(P_3(y)\ P^2_4(x; y))$

${}_y(P_3(y)\ P^2_4(x; y))$

${}_x\ {}_y(P^2_1\ (x; y)\ (P_2\ (y))$

${}_x\ {}_y(P^2_1\ (x; y)\ (P_2\ (y))$

${}_x(P_3(x))\ {}_x\ {}_y(P^2_1(x; y)\ (\ P_2(y)))$

${}_x(P_3(x))\ {}_x\ {}_y(P^2_1(x; y)\ (\ P_2(y)))$

рис. 13 Граф вывода заключения

Пример. Доказать истинность заключения

${}_x(P_1(x)\ {}_y(P_2(y)\ P^2_4(x; y)));\ {}_x(P_1(x)\ {}_y(P_3(y)\ P^2_4(x; y)))$

${}_x(P_2(x)\ P_3(x))$.

1) $F_1 = {}_x(P_1(x)\ {}_y(P_2(y)\ P^2_4(x; y)))$ - посылка**;**

2) $F_2 = {}_x(P_1(x)\ {}_y(P_3(y)\ P^2_4(x; y)))$ - посылка;

3) $F_3 = P_1(a)\ {}_y(P_2(y)\ P^2_4(a; y))$ -заключение по формуле $F_1$, правилу формирования ССФ;

4) $F_4 = P_1(a)$- заключение по формуле $F_3$ и правилу удаления конъюнкции исчисления высказываний

5) $F_5 = {}_y(P_2(y)\ P^2_4(a; y))$ - заключение по формуле $F_3$ и правилу

удаления конъюнкции исчисления высказываний;

6) $F_6=P_2(t)\ P^2_4(a; t)$ - заключение по формуле $F_5$ и правилу 2) удаления квантора общности;

7) $F_7=P_1(t)\ _y(P_3(y)\ P^2_4(t; y))$ - заключение по формуле $F_2$ и правилу 2) удаления квантора общности;

8) $F_8=\ _y(P_3(y)\ P^2_4(a; y))$ - заключение по формулам $F_3$ и $F_7$ при t=a и правилу modus ponens;

9) $F_9=P_3(t)\ P^2_4(a; t)$ - заключение по формуле $F_8$ и правилу 2) удаления квантора общности;

10) $F_{10}=P^2_4(a; t)\ P_3(t)$ - заключение по формуле $F_9$ и закону контрапозиции (правило 8) исчисления высказываний);

11) $F_{11}=P_2(t)\ P_3(t)$ - заключение по формулам $F_6$ и $F_{10}$ и закону силлогизма (правило 11) исчисления высказываний);

12) $F_{12}=\ _x(\ P_2\ (x)\ P_3(x))$ - заключение по формуле $F_{11}$ и правилу 1) введения квантора $_x$. Что требовалось доказать.

На рис. 14 приведен граф вывода этой задачи.

$_x(P_1(x)\ _y(P_2(y)\ P^2_4(x; y)))$

$_x(P_1(x)\ _y(P_2(y)\ P^2_4(x; y)))$

$_x(P_1(x)\ _y(P_3(y)\ P^2_4(x; y)))$

$_x(P_1(x)\ _y(P_3(y)\ P^2_4(x; y)))$

x=a

$P_1(a)\ _y(P_2(y)\ P^2_4(a; y))$

$P_1(a)\ _y(P_2(y)\ P^2_4(a; y))$

$P_1(t\ )\ {}_y(P_3(y)\ P^2_4(t;\ y))$

$P_1(t\ )\ {}_y(P_3(y)\ P^2_4(t;\ y))$

$P_1(a)$

$P_1(a)$

${}_y(P_2(y)\ P^2_4(a;\ y))$

${}_y(P_2(y)\ P^2_4(a;\ y))$

$P_1(a\ )\ {}_y(P_3(y)\ P^2_4(a;\ y))$

$P_1(a\ )\ {}_y(P_3(y)\ P^2_4(a;\ y))$

${}_y(P_3(y)\ P^2_4(a;\ y))$

${}_y(P_3(y)\ P^2_4(a;\ y))$

$P_2(t)\ P^2_4(a;\ t)$

$P_2(t)\ P^2_4(a;\ t)$

$P_3(t)\ P^2_4(a;\ t)$

$P_3(t)\ P^2_4(a;\ t)$

$P^2_4(a; t)\ P_3(t)$

$P^2_4(a; t)\ P_3(t)$

$P_2(t)\ P_3(t)$

$P_2(t)\ P_3(t)$

$_x(\ P_2\ (x)\ P_3(x))$

$_x(\ P_2\ (x)\ P_3(x))$

Рис. 14. Граф вывода заключения

## 2.2.4 Принцип резолюции

Если матрица формулы в результате приведения к виду ПНФ не будет содержать свободных переменных и сколемовских функций, то для вывода заключения полностью применим алгоритм принципа резолюции, рассмотренный в исчислении высказываний. Этот алгоритм основывается на том, что если две формулы состоящие из дизъюнкции атомов (в дальнейшем такие формулы будем называть дизъюнктами ) связаны конъюнкцией, и в них имеются два одинаковых или приводимых к одинаковым (унифицируемых ) атома с разными знаками, то из них можно получить третий дизъюнкт , который будет логическим следствием первых двух, и в нем будут исключены эти два атома. Однако, если в результате приведения к виду ССФ аргументы атомов содержат сколемовские функции, то для поиска контрарных атомов необходимо выполнить подстановки термов вместо предметных переменных и получить новые формулы дизъюнктов, которые допускают их унификацию при формировании контрарных пар. Множество подстановок нужно формировать последовательно, просматривая каждый раз только одну предметную переменную.

Например, если даны два дизъюнкта ($P_1(x)$ $P_2(x)$) и ( $P_1(f(x))$ $P_3(y)$), то для получения контрарной пары атомов возможна подстановка

$x^{f(x)}(P_1(x)\ P_2(x))=(P_1(f(x))\ P_2(f(x)))$ и

$x^{f(x)}(\ P_1(f(x))\ P_3(y))=(\ P_1(f(x))\ P_3(y))$.

В результате склеивания этих дизъюнктов может быть получена резольвента: $(P_1(f(x))\ P_2(f(x)))\ (\ P_1(f(x))\ P_3(y))=(\ P_2(f(x))\ P_3(y))$.

Если пара дизъюнктов имеет вид ($P_1(f_1(x))$ $P_2(x)$) и ( $P_1(f_2(x))$ $P_3(y)$), то никакая подстановка не позволит сформировать резольвенту.

<u>Пример:</u> Даны две формулы $P^3(a;x;f(q(y)))$ и $P^3(z;f(z);f(u))$.

Выполнить унификацию контрарных атомов.

1) $z^{a}\ P^3(z;f(z);f(u))=P^3(a;f(a);f(u))$;

2) $x^{f(a)}\ P3(a;x;f(q(y)))=P^3(a;f(a);f(q(y)))$;

3) $u^{q(y)}\ P^3(a;f(a);f(u))=P^3(a;f(a);f(q(y)))$.

В результате получены два контрарных атома: $P^3(a;f(a);f(q(y)))$ и $P^3(a;f(a);f(q(y)))$. Если в эти формулы атомов вместо предметной переменной **y** сделать подстановку предметной постоянной b, т.е.

$y^{b}P^3(a;f(a);f(q(y)))=P^3(a;f(a);f(q(b)))$ и

$y$ $b$ P3(a;f(a);f(q(y)))= $P^3$(a;f(a);f(q(b))),
то получим два контрарных высказывания.

Пример. Даны две формулы $P^3$(x;a;f(q(a))) и $P^3$(z;y;f(u)).

Выполнить унификацию контрарных формул.

1) $x$ $b$ $P^3$(x;a;f(q(a)))=$P^3$(b;a;f(q(a)));

2) $y$ $a$ $P^3$(z;y;f(u))= $P^3$(z;a;f(u));

3) $y$ $a$ $P^3$(z;a;f(u))= $P^3$(b;a;f(u));

4) $u$ $q(a)$ $P^3$(b;a;f(u))= $P^3$(b;a;f(q(a))).

В результате получены две контрарных формулы: $P^3$(b;a;f(q(a))) и $P^3$(b;a;f(q(a))).

Принцип резолюции может быть усилен линейным выводом, упорядочением атомов в дизъюнкте и использованием информации о резольвируемых атомах.

***Линейным выводом*** из множества дизъюнктов $K$ называется последовательность дизъюнктов $D_1$, $D_2$,...$D_n$, где каждый член $D_i$ $K$, а каждый $D_{i+1}$ является резольвентой центрального дизъюнкта (или предшествующей резольвенты) и бокового дизъюнкта из множества $K$.

***Упорядоченным дизъюнктом*** называется дизъюнкт с заданной последовательностью атомов. Атом $\mathbf{P}_j$ старше атома $\mathbf{P}_i$ в упорядоченном дизъюнкте тогда и только тогда, когда j > i. Например, в упорядоченном дизъюнкте ($P_1$ $P_2$ $P_3$ $P_4$) младшим считается атом $P_1$, а старшим - $P_4$. При наличии в упорядоченном дизюънкте двух одинаковых атомов, по закону идемпотенции, следует удалить старший атом, сохранив на прежнем месте младший.

Другим усилением принципа резолюции является использование информации о резольвируемых атомах. Обычно при выполнении процедуры унификации происходит удаление резольвируемых атомов. Однако они несут полезную информацию. Поэтому вместо удаления резольвируемых атомов при унификации предлагается удалять только старший атом, а младший - сохранить в резольвенте, выделив какой-либо рамкой. Если за обрамленным атомом в резольвенте не следует никакой другой атом, то обрамленный атом удалить. Если за обрамленным атомом резольвенты следует какой-либо необрамленный атом, то его следует оставить для последующего исследования. И наконец, если последний необрамленный атом резольвенты унифицируется с отрицанием атома боковой ветви, то его следует обрамить и удалить вместе с литерой боковой ветви. Используя резольвенты на последующих этапах, можно получить обрамленными все атомы последней резольвенты, т.е.получить пустой дизъюнкт.

Пример: Суждение “Преподаватели принимали зачеты у всех студентов, не являющихся отличниками. Некоторые аспиранты и студенты сдавали зачеты только аспирантам. Ни один из аспирантов не был отличником. Следавательно, некоторые преподаватели были аспирантами.” [1] Пусть $P_1(x)$:=”x – отличник”, $P_2(x)$:=”x – аспирант”, $P_3(x)$:=”x – студент”, $P^2_4(x; y)$:=”x сдает зачет y”, $P_5(x)$:=”x – преподаватель”. Формулы этого суждение имеют вид:

$_x(P_3(x)\ P_1(x)\ _y(P_5(y)\ P^2_4(x; y)))$; $_x(P_2(x)\ P_3(x)\ _y(P^2_4(x; y)\ P_2(y)))$;

$_x(P_2(x)\ P_1(x))$ .

$_x(P_5(x)\ P_2(x))$.

- Преобразовать посылки и отрицание заключения в ССФ:

1) $F_1 = {}_x(P_3(x)\ P_1(x)\ _y(P_5(y)\ P^2_4(x; y)))=$

$x\ y(P_3(x)\ P_1(x)\ (P_5(y)\ P^2_4(x; y)))=$

$x(P_3(x)\ P_1(x)\ (P_5(f(x))\ P^2_4(x; f(x))))$.

$M_1=(P_3(x)\ P_1(x)\ P_5(f(x))\ P^2_4(x; f(x)))=$

$(P_3(x)\ P_1(x))\ P_5(f(x))\ P^2_4(x; f(x)) =$

$(\ P_3(x)\ P_1(x)\ P_5\ (f(x))\ P^2_4(x; f(x))=$

$(\ P_3(x)\ P_1(x)\ P_5(f(x)))\ (\ P_3(x)\ P_1(x)\ P^2_4(x; f(x)))$.

2) $F_2=\ x(P_2(x)\ P_3(x)\ y(P^2_4(x; y)\ P_2(y)))=$

$x\ y(P_2(x)\ P_3(x)\ (P^2_4(x; y)\ P_2(y)))=$

$y(P_2(a)\ P_3(a)\ (P^2_4(a; y)\ P_2(y)))$.

$M_2=(P_2(a)\ P_3(a)\ (P^2_4(a; y)\ P_2(y)))=$

$P_2(a)\ P_3(a)\ (\ P^2_4(a; y)\ P_2(y)))$.

3) $F_3=\ x(P_2(x)\ P_1(x))$.

$M_3=(P_2(x)\ P_1(x))=(\ P_2(x)\ P_1(x))$.

4) $F_4=\ x(P_5(x)\ P_2(x))=\ x(\ (P_5(x)\ P_2(x)))$.

$M_4=(\ (P_5(x)\ P_2(x)))=(\ P_5(x)\ P_2(x)))$.

- Выписать множество дизъюнктов:

  $K=\{(\ P_3(x)\ P_1(x)\ P_5(f(x)));\ (\ P_3(x)\ P_1(x)\ P^2_4(x; f(x)));\ P_2(a);\ P_3(a);$
  $(\ P^2_4(a; y)\ P_2(y));\ (\ P_1(x)\ P_2(x));\ (\ P_5(x)\ P_2(x))\};$

- Выполнить унификацию и формирование резольвент

1) $x\ a\ (P_1(x)\ P_2(x))\ P_2(a) = P_1(a) = P_1(a)$;

$P_2(a)$

$P_2(a)$

2) $P_1(a)\ x\ a (P_3(x)\ P_1(x)\ P^2_4(x; f(x))) = P_3(a)\ P^2_4(a; f(a))$;

$P_1(a)$

$P_1(a)$

3) $P_3(a)\ P^2_4(a; f(a))\ y\ f(a)\ (P^2_4(a; y)\ P_2(y)) =$

$P_1(a)\ _1(a)$

$P_1(a)\ _1(a)$

$P_3(a)\ P_2(f(a))$;

$P_1(a)$

$P_1(a)$

$P^2_4(a; f(a))$

$P^2_4(a; f(a))$

4) $P_3(a)\ P_2(f(a))\ x\ f(a) (P_5(x)\ P_2(x)) =$

$P_1(a)$

$P_1(a)$

$P^2_4(a; f(a))$

$P^2_4(a; f(a))$

$P_3(a)\ P_5(f(a))$;

$P_1(a)$

$P_1(a)$

$P^2_4(a; f(a))$

$P^2_4(a; f(a))$

$P_2(f(a))$

$P_2(f(a))$

5) $P_3(a)$ $P_5(f(a))$

$P_1(a)$

$P_1(a)$

$P^2_4(a; f(a))$

$P^2_4(a; f(a))$

$P_2(f(a))$

$P_2(f(a))$

a( $P_3(x)$ $P_1(x)$ $P_5(f(x)))$= $P_3(a)$ $P_1(a)$;

$P_1(a)$

$P_1(a)$

$P_5(f(a))$

$P_5(f(a))$

$P_2(f(a))$

$P_2(f(a))$

$P^2_4(a; f(a))$

$P^2_4(a; f(a))$

6) $P_3(a)$ $P_1(a)$ $P_1(a)$=

$P_1(a)$

$P_1(a)$

$P^2_4(a; f(a))$

$P^2_4(a; f(a))$

$P_2(f(a))$

$P_2(f(a))$

$P_5(f(a))$

$P_5(f(a))$

$P_3(a) =$

$P_1(a)$

$P_1(a)$

$P_1(a)$

$P_1(a)$

$P^2_4(a; f(a))$

$P^2_4(a; f(a))$

$P_2(f(a))$

$P_2(f(a))$

$P_5(f(a))$

$P_5(f(a))$

$P_3(a);$

$P_1(a)$

$P_1(a)$

7) $P_3(a)$ $P_3(a)= =$ .

$P_1(a)$

$P_1(a)$

$P_1(a)$

$P_1(a)$

$P_3(a)$

$P_3(a)$

На рис. 14 дан граф линейной унификации этого примера.

$P_1(x)$ $P_2(x)$

$P_1(a)$ $P_2(a)$

$P_3(a)$ $P^2_4(a; f(a))$ $P_3(x)$ $P_1(x)$ $P^2_4(x; f(x))$

$P_1(a)$
$P_1(a)$

$P_3(a)$ $P_2(f(a))$ $P^2_4(a; y)$ $P_2(y)$
$P^2_4(a; f(a))$
$P^2_4(a; f(a))$
$P_1(a)$
$P_1(a)$

$P_3(a)$ $P_5(x)$ $P_2(x)$
$P_1(a)$
$P_1(a)$
$P^2_4(a; f(a))$
$P^2_4(a; f(a))$
$P_2(f(a))$
$P_2(f(a))$

$P_5(f(a))$
$P_2(f(a))$
$P_2(f(a))$
$P^2_4(a; f(a))$
$P^2_4(a; f(a))$
$P_1(a)$
$P_1(a)$
$P_3(a)$ $P_3(x)$ $P_1(x)$ $P_5(f(x))$

$P_1(x)$
$P_1(a)$
$P_1(a)$
$P_5(f(a))$
$P_5(f(a))$
$P_3(a)$ $P_1(a)$

- $P_3(a)$

Рис. 14. Граф линейной унификации

Пример: Существуют студенты, которые любят всех преподавателей. Ни один из студентов не любит невежд. Следовательно, ни один из преподавателей не является невеждой. [1]

Пусть $P_1(x)$:=" x – студент", $P_2(y)$:="y – преподаватель", $P^2_3(x, y)$:="x любит y", $P_4(y)$:="y - невежда".

Формулы этого суждение имеют вид:

$_x(P_1(x)\ _y(P_2(y)\ P^2_3(x; y)))$;

$_x(P_1(x)\ _y(P_4(y)\ P^2_3(x; y)))$;

$_y(P_2(y)\ P_4(y))$;

- Преобразовать посылки и отрицание заключения в ССФ:

**1)**$F_1=\ _x(P_1(x)\ _y(P_2(y)\ P^2_3(x; y)))=\ _{x\ y}(P_1(x)\ (P_2(y)\ P^2_3(x; y)))=\ _y(P_1(a)\ (P_2(y)\ P^2_3(a; y)))=\ _y(P_1(a)\ (\ P_2(y)\ P^2_3(a; y)))$;

$M_1=P_1(a)\ (\ P_2(y)\ P^2_3(a; y))$;

**2)**$F_2=\ _x(P_1(x)\ _y(P_4(y)\ P^2_3(x; y)))=$

$_{x\ y}\ (P_1(x)\ (P_4(y)\ P^2_3(x; y)))=\ _{x\ y}\ (\ P_1(x)\ P_4(y)\ P^2_3(x; y)))$;

$M_2=(\ P_1(x)\ P_4(y)\ P^2_3(x; y))$;

**3)**F3= $_y(P_2(y)\ P_4(y))=\ _y(\ (\ P_2(y)\ P_4(y))=\ _y(P_2(y)\ P_4(y))=$

$P_2(b)\ P_4(b)$;

$M_3=P_2(b)\ P_4(b)$.

- Выписать множество дизъюнктов:

K$=\{P_1(a)$; $(P_2(y)\ P^2_3(a; y))$; $(P_1(x)\ P_4(y)\ P^2_3(x; y))$; $P_2(b)$; $P_4(b)\}$;

- Выполнить унификацию и формирование резольвент:

1) $P_2(b)$ x b $(P_2(y)\ P^2_3(a; y))= P^2_3(a; b)$;

$P_2(b)$

$P_2(b)$

2) $P^2_3(a; b)$ y b $(P_1(x)\ P_4(y)\ P^2_3(x; y))=$

$P_2(b)$

$P_2(b)$

$P^2_3(a; b)\ (P_1(x)\ P_4(b)\ P^2_3(x; b))$;

$P_2(b)$

$P_2(b)$

3) $P^2_3(a; b)$ x a $(P_1(x)\ P_4(b)\ P^2_3(x; b))=$

$P_2(b)$

$P_2(b)$

- $P_1(a)\ P_4(b)$;

$P_2(b)$

$P_2(b)$

$P^2_3(a; b)$

$P^2_3(a; b)$

4) $P_1(a)\ P_4(b)\ P_1(a)=$

$P_2(b)$

$P_2(b)$

$P^2_3(a; b)$

$P^2_3(a; b)$

$P_4(b)$;

$P_2(b)$

$P_2(b)$

$P^2{}_3(a; b)$

$P^2{}_3(a; b)$

$P_1(a)$

$P_1(a)$

5) $P_4(b)$ $P_4(b)$=

$P_2(b)$

$P_2(b)$

$P^2{}_3(a; b)$

$P^2{}_3(a; b)$

$P_1(a)$

$P_1(a)$

= .

$P_2(b)$

$P_2(b)$

$P^2{}_3(a; b)$

$P^2{}_3(a; b)$

$P_1(a)$

$P_1(a)$

$P_4(b)$

$P_4(b)$

На рис. 15 приведен граф линейной унификации для этого примера.

$P_2(b)$

$P^2{}_3(a; b)$ $P_2(y)$ $P^2{}_3(a; y)$

$P_2(b)$

$P_2(b)$

$P_2(b)$

$P_2(b)$

x) $P_4(b)$ $P_1(x)$ $P_4(y)$ $P^2_3(x; y)$

$P^2_3(x; b))$

$P_2(b)$

$P_2(b)$

$P_1(a)$ $P_4(b)$ $P_1(x)$ $P_4(b)$ $P^2_3(x; b))$

$P^2_3(a; b)$

$P^2_3(a; b)$

$P_1(a)$

$P_1(a)$

$P_4(b)$ $P_1(a)$

$P_2(b)$

$P_2(b)$

$P^2_3(a; b)$

$P^2_3(a; b)$

$P_4(b)$

Рис. 15. Граф линейной унификации

## 2.3 Проблемы в исчислении предикатов

Для обоснования исчисления предикатов, как для любой аксиоматической теории, необходимо рассмотреть проблемы разрешимости и непротиворечивости.

***Проблема разрешимости*** исчисления предикатов есть проблема поиска эффективной процедуры в доказательстве. Исчисление предикатов –

пример неразрешимой формальной системы, т.к. нет единого эффективного алгоритма в доказательстве любой формулы. Наличие кванторов, ограничивающих области определения, наличие сколемовских функций не позволяет использовать таблицы истинности.

***Проблема непротиворечивости*** исчисления предикатов заключена в доказательстве невыводимости формулы и ее отрицания. Исчисление предикатов непротиворечиво, т. к. каждая доказуемая формула является тождественно истинной формулой. Тогда ее отрицание является тождественно ложной формулой и при доказательстве в исчислении предикатов ведет к противоречию.

## 2.4 Логическое программирование

Типичным представителем языка программирования для описания последовательности действий в процессе логического вывода является Prolog.

Пролог-программа состоит из предложений, которые бывают трех типов: факты, правила и вопросы.

- ***Факты*** есть повествовательные предложения, имеющие значение только “истина” (см. 1.5). Множество фактов формирует так называемую экстенсиональную базу знаний о предметной области.***Правила*** это условные предложения, истинность заключения которых зависит от истинности условий, поэтому в структуру правила включены предметные переменные, имена которых начинаются с прописной буквы и предметные постоянные, имена которых начинаются со строчной буквы. Множество правил формирует интенсиональную базу знаний о предметной области и определяет механизм достижения цели при заданных условиях.

Левая часть правила - <голова> - есть формализованное описание заключения, а правая часть правила – <тело> - формализованное описание условий, определяющих истинность вывода заключения, т.е.

<голова>:-<тело>”.”

Символ “:-“ соответствует символу обратной импликации ” ”.

Если множество условий имеют между собой конъюнктивную связь, то между ними ставится запятая, т.е.

очение>:-<условие>{“,”<условие>}”.”.

Если условия имеют между собой дизъюнктивную связь, то между ними ставится точка с запятой, т.е.

<заключение>:-<условие>{“;”<условие>}”.”.

На языке Prolog эти правила записывают так:

<заключение>:-

<условие_1>”,”

<условие_2>”;”

<условие_3>”.”

Голова предложения при написании программы всегда сдвинута влево относительно перечня условий. Каждое условие начинается с новой строки.

Смысл этого правила таков:“если истинны условия 1 и 2 или 3, то истинно и заключение ”.

Предметные переменные и предметные постоянные являются аргументами заключения и условий.

Если тело пусто, то голова есть истинное утверждение или аксиома. Факты –это предложения, имеющие пустое тело.

<заключение>”.”.

Если голова пуста, то тело продставляет ***вопрос***, т.е.

? - <тело>”.”.

С помощью вопросов пользователь может спрашивать систему о том, какие утвреждения являются истинными или ложными. Предметные переменные, включаемые в вопросы, сравниваются с помощью правил с предметными постоянными, вкючаемыми в факты, и система формирует ответ.

Например, множество правил для определения степени родства:

```
дед(X, Y):-
 родитель(X, Z),
  родитель(Z, Y).
брат(X, Y):-
                     родитель(Z, X),
потомок(X; U; Z, Y):-
 родитель(Y, Z),
родитель(Z, U),
родитель(U, X).
 родитель(Z, Y).
```

можно применить к родословной русских князей X века:

```
отец(игорь, святослав).
отец(святослав,владимир).
отец(владимир, борис).
отец(владимир,глеб).
?-дед(святослав, Y).
Y=борис.
Y=глеб.
?-брат(X, Y).
                     X=борис.
                     Y=глеб.
?-потомок(X; Y; Z, игорь).
Z=святослав.
U=владимир.
X=борис.
X=глеб.
```

Предметные переменные заключения, как правило, связаны квантором

общности, а для условий - квантором существования. Например, правило “дед(X, Y):- родитель(X, Z), родитель(Z, Y)” утверждает, что если для всех X и Y существует Z, то  X -дед для Y.
Правило “брат(X, Y):-родитель(Z, X), родитель(Z, Y)” утверждает, что если для всякого X и Y существует общий Z, то X брат Y.

Рассмотренный метод обобщает механизм унификации. Аргументы вызова это имена переменных, которые подставляют на место формальных параметров. Формальными параметрами могут быть термы. Поэтому процесс вызова включает совмещение термов, яляющихся аргументами вызова с термами из заголовка.

В отличие от общепринятых алгоритмических языков языки логического программирования не определяют жесткой последовательности действий в процессе вывода, а, уделив основное внимание структуре задачи и множеству правил вывода, допускают несколько последовательностей действий в решении одной задачи. Выполнение программы на языке Prolog осуществляется специальной программой-интерпретатором, осуществляющей пооператорную обработку запроса, опираясь на механизм принципа резолюции.

## Контрольные_вопросы.

1) Запишите символически следующие суждения:

а) "все судьи - юристы, но не все юристы – судьи”;

б) "лица, проходившие ранее подготовку в аспирантуре, ис - пользовавшие отпуск для завершения диссертации как соискатели или бывшие в творческом отпуске для завершения диссертации, правом поступления в аспирантуру не пользуются".

в) “Судья, являющийся родственником потерпевшего, не может участвовать в рассмотрении дела. Судья Х - родственник потерпевшего. Следовательно, судья Х не может участвовать в рассмотрении дела.”[5]

г) “К уголовной ответственности привлекаются лица, совершившие тайное похищение личного имущества граждан. Обвиняемый Х не совершал тайного похищения личного имущества граждан. Следовательно, обвиняемый Х не может быть привлечен к уголовной ответственности”.

д) “Если иск предъявлен недееспособным лицом, то суд оставляет иск без рассмотрения. Иск предъявлен недееспособным лицом. Следовательно, суд оставляет иск без рассмотрения”.

2) Привести к предваренной нормальной форме:

а) ( x y($P^2_1$(x; y)) ( x y($P^2_2$(x; y)));

б) ( x y($P^2_1$(x; y)) ( x y($P^2_2$(x; y)));

в) ( x y($P^2_1$(x; y)) ( x y($P^2_2$(x; y)));

г) x y z u(P(x, y, u, z).

3) Привести к сколемовской стандартной форме:

а) ( x y($P^2_1$(x; y)) ( x y($P^2_2$(x; y)));

б) ( x y z w($P^4$(x; y; z; w));

в) ( x y($P^2_1$(x; y)) ( x y($P^2_2$(x; y)))).

**4)**Какие из нижеприведенных формул являются тождестивенно истинными:

**а)**x($P_1$(x)) x($P_2$(x)) x($P_1$(x) $P_2$(x));

б) y($P_1$(x)) y ($P_2$(x)) y($P_1$(x) ($P_2$(x));

в) $x(P_1(x)\ P_2(x))\ x(P_1(x))\ x(P_2(x))$;

г) $y(P_1(x)\ (P_2(x))\ y(P_1(x))\ y\ (P_2(x))$

5) Докажите выводимость заключения методом дедукции:

а) $x(P_1(x)\ P_2(x))$; $x(P_3(x)\ P_1(x))$

$x(P_3(x)\ P_2(x))$;

б) $x(\ y(P^2_1(x;\ y)\ P_2(y)\ y(P_3(y)\ P^2_4(x;\ y)))$

$x(P_3(x)\ x\ y(P^2_1(x;\ y)\ P_2(y)))$;

в) $x(P_1(x)\ P_2(x)\ P_3(x))$; $x(P_1(x)\ P_4(x))$

$x(P_4(x)\ P_3(x))$.

6) Докажите выводимость заключения по принципу резолюции:

$x(P_1(x)\ y(P_2(y)\ P^2_3(x;\ y)))$;

$x(P_1(x)\ y(P_4(y)\ P^2_3(x;\ y)))$

$y(P_2(y)\ P_4(y))$.

б) $y(P_1(y)\ P_2(y))$

$x(\ y(P_1(y)\ P^2_3(x;\ y))\ y(P_2(y)\ P^2_3(x;\ y)))$.

в) $x((P_1(x)\ P_2(x))\ y(P_3(y)\ P^2_4(x;y)))$;

$x(P_5(y)\ P_1(x)\ y(P^2_4(x;y)\ P_5(y)))$;

$x(P_3(x)\ P_5(x))$.

## Расчетно-графическая работа

Найти формулы ПНФ и ССФ, выполнить унификацию атомов дизънктов.

| Вариант | Формула |
|---|---|
| 1 | x(A(x) B(y)) y(B(y) A(x)) |
| 2 | x( A(x) x( C(x))) x((C(x) A(x)) |
| 3 | x(A(x) x(B(x))) y( A(x) C(y) C(y) B(x)) |
| 4 | x(A(x) x(B(y))) x( A(x) B(y)) |
| 5 | x(A(x) B(y)) y(A(x) (B(y) C(z)) z(A(x) C(z)) |
| 6 | x(A(x) y(B(y) C(z))) z(A(x) B(y) C(z)) |
| 7 | x(A(x) B(z)) y(C(y) A(x)) z(C(y) B(z)) |
| 8 | x(A(x) B(y)) y((C(y) A(x)) (C(y) y(B(y))) |
| 9 | x(A(x) B(y)) y(A(x) (B(y) C(z))) (A(x) z(C(z))) |
| 10 | x(A(x) B(y) A(x) y(B(y) C(z))) (A(x) z(C(z))) |
| 11 | x(A(x) z(B(y) C(z))) y(B(y) (A(x) C(z))) |
| 12 | ( x(A(x)) x(B(x))) z((B(x) C(z)) (A(x) C(z))) |
| 13 | ( x( A(x)) x( B(x))) ( B(x) A(x)) |
| 14 | ( x(A(x))) ( x(B(x))) y(C(y) A(x) C(y) B(x)) |
| 15 | x( A(x) y(B(y))) ( B(y) A(x)) |
| 16 | ( x(B(x)) x(A(x))) y((A(x) C(y)) ( C(y) B(x))) |
| 17 | x( A(x) y(B(y))) (B(y) A(x)) |
| 18 | x( A(x) y( B(y))) (B(y) A(x)) |
| 19 | x(A(x) B(x)) y(B(x) C(y) z(C(y) D(z))) |
| 20 | ( x(A(x) B(x)) z(C(z) A(x))) y(C(z) B(y)) |
| 21 | ( x(B(x) y(A(y))) ( y(B(y) (A(x) C(z)))) z(C(z)) |
| 22 | x(B(x)) y(A(y) B(x)) |
| 23 | x(A(x) B(x)) ( y(C(y) A(x)) z(C(z) B(x))) |

| | |
|---|---|
| 24 | x(B(x) A(y)) (B(x) y(A(y) C(z))) z(C(z))) |
| 25 | x(A(x) B(z)) y(C(y) A(x) z(C(y) B(z))) |
| 26 | ( x(B(x)) x(A(x))) (A(y) yC(y)) ( A(x) C(y)) |
| 27 | ( x(A(x)) x(B(x))) y((A(x) C(y)) (B(x) C(y))) |
| 28 | x(A(x) y(B(y))) ( A(x) y(B(y))) B(y) |
| 29 | x(A(x) y(B(y))) ( A(x) B(x)) B(x) |
| 30 | x( A(x)) (A(x) y(B(y))) |
| 31 | ( x(B(x)) x(A(x))) ( B(x) A(x)) A(x) |
| 32 | ( x(B(x)) x(C(x))) (A(y) B(x) A(y) C(x)) |
| 33 | x(A(x) B(y)) y z((C(z) A(x)) (C(z) B(y))) |
| 34 | ( x(A(x)) x(C(x))) y(C(x) B(y)) (A(x) B(y)) |
| 35 | x(A(x)) y(B(y)) y(C(y) xD(x)) (A(x) C(y)) D(y)) |
| 36 | x(A(x)) ( A(x) y(B(y))) |
| 37 | x(B(x)) y(A(y) B(x)) |
| 38 | x(B(x) y(A(y))) y(B(y) (A(x) C(z))) z(B(z) C(z)) |
| 39 | x(B(x) A(y)) (B(x) y(A(y) C(z))) z(B(x) C(z)) |
| 40 | x(A(x) B(x)) y((C(y) A(x)) (C(y) B(x))) |
| 41 | ( x( A(x) y( C(y))) (C(x) A(x)) |
| 42 | x(A(x) B(y)) y(B(y) A(x)) |
| 43 | x(A(x) B(z)) y((C(y) A(x)) z(C(y) B(z))) |
| 44 | x(A(x) B(y)) z(C(z) A(x)) y(C(z) B(y)) |
| 45 | x(A(x) B(x)) y(B(x) C(y)) z(C(y) D(z))) |
| 46 | x( A(x) y( B(y))) (B(x) A(x)) |
| 46 | |
| 47 | x( A(x) x(B(x))) (B(x) A(x)) |

| | |
|---|---|
| 48 | ( x(B(x) y(A(y)))) y(A(x) C(y)) C(y) B(x) |
| 49 | ( x( A(x) y(B(y)))) ( B(x) A(x)) |
| 50 | x(A(x) B(y)) y(A(x) (B(y) C(z))) z(A(x) C(z)) |

# Литература


1. Вагин В.Н. Дедукция и обобщение в системах принятия решений.- М.: Наука, 1988г. – 384 с.
2. Войшвилло Е.К., Дектярев М.Г. Логика как часть теории познания и научной методологии. кн.1. Учебное пособие. –М.: Наука, 1994г. – 312с.

Вегет В. Элементарная логика. - М.: Высшая школа, 1985г..- 256 с.

Кириллов В.И., Старченко А.А. Логика. - М.: Высшая школа, 1987г.– 271с.

Кузнецов О.П., Андельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика. для инженера.- М.: Энергоатомиздат, 1988г.—480 с.

Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов 240с.

ЛихтарниковЛ.М., Сукачева Т.Г. Математическая логика *курс лекций* - СПб.: “Лань”, 1998г..-288с.

Першиков В.И., Савинков В.М. Толковый словарь по информатике – М.: Финансы и статистика, 1991г. –543с.

Пономарев В.Ф. Математические методы и модели в обработке информации и управлении. Методические разработки по разделу “Формальные системы”- Калининград: КГТУ, 1992г..

. Роберт Р. Столл. Множества. Логика. Аксиоматические теории.- М.:

Просвещение, 1968. – 231 с.

# Предметный указатель

# Оглавление