УЧЕБНЫЙ ЦЕНТР при
МОСКОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ ТЕХНИЧЕСКОМ
УНИВЕРСИТЕТЕ имени Н.Э. БАУМАНА
«ОРИЕНТИР»

**А.А. ЛЯПИН, Е.М. РОДИОНОВ,
С.Л. СИНЯКОВА**

МАТЕМАТИКА

СБОРНИК ЗАДАЧ

Издание 4-е, переработанное и дополненное

Москва
2006

ББК 22.1

Л 97 **Ляпин А.А., Родионов Е.М., Синякова С.Л.** Математика. Сборник задач. М.: Ориентир, 2006. – 392 с.

Содержание сборника соответствует современной программе по математике для поступающих в вузы и охватывает все ее разделы. Сборник может быть использован для подготовки к вступительным экзаменам на подготовительных отделениях или курсах, с преподавателем, а также самостоятельно.

ОТ АВТОРОВ

Настоящий сборник содержит более 1500 задач по всем разделам начального курса математики (за исключением планиметрии) – это задачи, большая часть которых предлагалась в разные годы на вступительных экзаменах в технические вузы, и прежде всего в МГТУ им. Н.Э. Баумана. Они распределены по традиционным разделам школьного курса математики, а внутри каждого раздела сгруппированы по степени сложности (обозначены римскими цифрами I – IV), хотя это расположение носит условный характер. Порядок разделов соответствует используемому на Подготовительных курсах при МГТУ пособию. Все задачи снабжены ответами.

Часть представленных в сборнике задач составлена Л.П. Паршевым, в остальных случаях установить авторство не представляется возможным.

Книгу могут использовать учащиеся школ и в повседневных занятиях, и при подготовке к экзамену как самостоятельно, так и под руководством преподавателя.

1. ПРОСТЕЙШИЕ ОПЕРАЦИИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Операции над множествами

Найти пересечение, объединение и разность следующих множеств:

1. $(0;3)$ и $[-1;2]$. **2.** $[1;3)$ и $(2;5)$. **3.** $[1;3]$ и $(3;5)$.

4. $[1;3]$ и $[3;5)$. **5.** $[1;2)$ и $(3;5)$. **6.** $[1;3]$ и $(2;5)$.

Найти пересечение и объединение следующих множеств:

7. $A=[1;4]\cup[5;7]$, $B=(2;5]$, $C=(3;+\infty)$.

8. $A=[-3;2]\cup[4;15]$, $B=(0;4]$, $C=(1;+\infty)$.

9. $A=(2;6]$, $B=[0;3]\cup[5;10]$, $C=(-\infty;7)$.

Ответы:

1. $(0;2],[-1;3),(2;3),[-1;0]$. **2.** $(2;3),[1;5),[1;2],[3;5)$.

3. $\varnothing,[1;5),[1;3],(3;5)$. **4.** $\{3\},[1;5),[1;3),(3;5)$.

5. $\varnothing,[1;2)\cup(3;5),[1;2),(3;5)$. **6.** $(2;3],[1;5),[1;2],(3;5)$.

7. $A\cap B\cap C=(3;4]\cup\{5\}$, $A\cup B\cup C=[1;+\infty)$.

8. $A\cap B\cap C=(1;2]\cup\{4\}$, $A\cup B\cup C=[-3;+\infty)$.

9. $A\cap B\cap C=(2;3]\cup[5;6]$, $A\cup B\cup C=(-\infty;10]$.

Уравнения и неравенства. Многочлены

Написать уравнения прямых, содержащих точки:

1. (45;87) и (−19;−41).

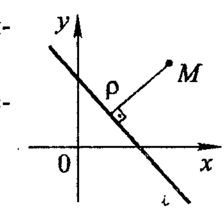
2. (1;3) и пересекающей ось OY в точке (0;3).

3. Прямая ℓ содержит точки с координатами (2;3) и (18;27). Вычислить угол между прямой ℓ и прямой, проходящей через начало координат и точку (18;27).

4. Точки $A(-2;2)$ и $B(2;6)$ лежат на прямой $y=2x+2$. Вычислить углы треугольника ABC, если точка $C(4;-6)$.

5. Вычислить расстояние от точки $C(4;-6)$ до прямой $y=2x+2$.

6. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;3)$: а) параллельно прямой $3x+5y=1$; б) перпендикулярно этой прямой. Вычислить расстояние от точки $M(2;3)$ до прямой $3x+5y=1$.



7. Написать уравнения прямых, проходящих через точку $M(1;2)$ прямой $y+1=3x$ и образующих с ней угол $45°$.

8. Найти угол α между прямыми: а) $y=3x+1$ и $y=2-x$;
б) $5x-y=1$ и $x+5y=2$.

Ответы:

1. $y=2x-3$. **2.** $y=3$. **3.** 0. **4.** $\pi-\operatorname{arctg}8$; $\operatorname{arctg}(8/11)$; $\operatorname{arctg}(16/15)$. **5.** $16/\sqrt{5}$.
6. а) $3x+5y=21$; б) $5x-3y=1$; $20/\sqrt{34}$. **7.** $y=4-2x$, $x-2y+3=0$.
8. а) $\alpha=\operatorname{arctg}2$; б) $90°$.

Арифметические вычисления

Вычислить без калькулятора:

1. $\left(\left(\frac{7}{9}-\frac{47}{72}\right):1,25+\left(\frac{6}{7}-\frac{17}{28}\right):(0,358-0,108)\right)\cdot 1,6-\frac{19}{25}$.

2. $\dfrac{\left(0,5:1,25+\frac{7}{5}:1\frac{4}{7}-\frac{3}{11}\right)\cdot 3}{\left(1,5+\frac{1}{4}\right):18\frac{1}{3}}$. **3.** $\dfrac{2\frac{3}{4}:1,1+3\frac{1}{3}}{2,5-0,4\cdot 3\frac{1}{3}}:\frac{5}{7}-\dfrac{\left(2\frac{1}{6}+4,5\right)\cdot 0,375}{2,75-1\frac{1}{2}}$.

4. $\dfrac{\left(140\frac{7}{30}-138\frac{5}{12}\right):18\frac{1}{6}}{0,002}$. **5.** $\dfrac{0,3(88)+\frac{1}{9}}{0,13(8)+\frac{1}{36}}$.

6. $|-7|+|-19|-|4|-|5|-|-9|$. **7.** $|(-15)-(-4)+(-2)-(+1)|$.

Вычислить $\dfrac{\left(\left(3\frac{7}{12}-2\frac{11}{18}+2\frac{1}{24}\right)\cdot 1\frac{5}{31}-\frac{3}{52}\left(3\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right)\right)\cdot 1\frac{7}{13}}{\frac{19}{84}:\left(5\frac{13}{42}-2\frac{13}{28}+\frac{5}{24}\right)+1\frac{2}{27}-\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}}$.

Преобразование алгебраических выражений

Упростить, выполнив указанные действия:

1. $(-2a)^6-(-8a^3)^2-\left(-(2a)^2\right)^3-\left(2(-a)^3\right)^2$.

2. $(-2a)^{10}-(-13a^5)^2-\left(-(2a)^2\right)^5-\left(2(-a^5)\right)^2$.

3. $\left(\left(\frac{a^2b}{cd^3}\right)^3\left(\frac{ac^4}{b^2d^3}\right)^2\right):\left(\left(\frac{a^2b^2}{cd^3}\right)^4\left(\frac{c^2}{b^3d}\right)^3\right)$.

4. $\left(\left(\dfrac{mnp}{a^2b}\right)^4 : \left(\dfrac{m^2n^2}{a^3b^2}\right)^2\right)\cdot\left(\left(\dfrac{a^3b^4c}{mp^3}\right)^6 : \left(\dfrac{a^5b^8c^2}{m^2p^5}\right)^3\right)$.

Найти значения выражений:

5. $\left(\left(\dfrac{a^{1/3}}{a^{1/9}}\right)^{-9}\right)^{1/4}$ при $a = 0,25$.

6. $\left(\left(\dfrac{a^{1/3}}{a^{1/6}}\right)^{-6}\right)^{1/3}$ при $a = 0,05$.

7. $\sqrt{x\sqrt[5]{x\sqrt[3]{x}}}$ при $x = 5^{-30/19}$.

8. $\sqrt{x\sqrt[4]{x\sqrt[7]{x}}}$ при $x = 5^{-14/9}$.

9. $\dfrac{\left(\sqrt[5]{a^{4/3}}\right)^{3/2}}{\left(\sqrt[5]{a^4}\right)^3}\cdot\dfrac{\left(\sqrt{a\cdot\sqrt[3]{a^2b}}\right)^4}{\left(\sqrt[4]{a\sqrt{b}}\right)^6}$.

10. $\dfrac{5c^3-5}{c+2} : \dfrac{(c+1)^2-c}{13c+26}$.

11. $\dfrac{(a+b)^2-2ab}{4a^2} : \dfrac{a^2+b^2}{ab}$.

12. $\dfrac{x^2-4x}{x^2+7x} : \dfrac{24-6x}{49-x^2}$.

13. $\dfrac{y^3-16y}{2y+18} : \dfrac{4-y}{y^2+9y}$.

Упростить выражения и вычислить их значения:

14. $\dfrac{a^3+b^3}{a+b}-(a-b)^2$ при $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{18}$.

15. $\left(a^{0,3}\right)^{0,2} : a^{-1,94}$ при $a = 0,5$.

16. $\left(\dfrac{a}{a-1}+\dfrac{1}{ab-b}\right) : \dfrac{ab+1}{b}-\dfrac{a}{a^2-1}$ при $a=\sqrt{3}$.

17. $\dfrac{2\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x^2y^3}-y}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{y}} : \left(2y^{-1/4}-\dfrac{\sqrt[4]{y}}{\sqrt[3]{x}}\right)$ при $x=3\sqrt{3}$, $y=9$.

18. $(a^2-b^2-c^2+2bc) : \dfrac{a+b-c}{a+b+c}$ при $a=8,6$, $b=\sqrt{3}$, $c=-6\dfrac{3}{5}$.

19. $\dfrac{a^2}{a^2-ab-ac+bc}+\dfrac{b^2}{b^2-ab+ac-bc}+\dfrac{c^2}{c^2-cb-ac+ab}$.

20. $\dfrac{x^{1/3}+1}{x^{2/3}+x^{1/3}+1} : \dfrac{1}{x-1}\cdot\left(\dfrac{1}{x^{-2/3}}-1\right)^{-1}$.

21. $\dfrac{a^2-1}{n^2+an}\cdot\left(\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{n}}-1\right)\cdot\dfrac{a-an^3-n^4+n}{1-a^2}$.

22. $\dfrac{x}{ax-2a^2}-\dfrac{2}{(x^2+x-2ax-2a)}\cdot\left(1+\dfrac{3x+x^2}{3+x}\right)$.

23. $\dfrac{2a}{a^2-4x^2}+\dfrac{1}{2x^2+6x-ax-3a}\cdot\left(x+\dfrac{3x-6}{x-2}\right)$.

24. $\left(\dfrac{2a+10}{3a-1}+\dfrac{130-a}{1-3a}+\dfrac{30}{a}-3\right)\cdot\dfrac{3a^3+8a^2-3a}{1-\dfrac{1}{4}a^2}$.

25. $\dfrac{a^2-b^2}{a-b}-\dfrac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$.

26. $\dfrac{x}{x^2+y^2}-\dfrac{y(x-y)^2}{x^4-y^4}$.

27. $\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}+\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}\right)$.

28.

$\left(\dfrac{a-1}{a^2-2a+1}+\dfrac{2(a-1)}{a^2-4}-\dfrac{4(a+1)}{a^2+a-2}+\dfrac{a}{a^2-3a+2}\right)\cdot\dfrac{36a^3-144a-36a^2+144}{a^3+27}$.

29. $\left(\dfrac{3(x+2)}{2(x^3+x^2+x+1)}+\dfrac{2x^2-x-10}{2(x^3-x^2+x-1)}\right):\left(\dfrac{5}{x^2+1}+\dfrac{3}{2(x+1)}-\dfrac{3}{2(x-1)}\right)$.

30. $\left(\dfrac{x-y}{2y-x}-\dfrac{x^2+y^2+y-2}{x^2-xy-2y^2}\right):\dfrac{4x^4+4x^2y+y^2-4}{x^2+y+xy+x}$.

31. $\dfrac{a^2+a-2}{a^{n+1}-3a^n}\cdot\left(\dfrac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4}-\dfrac{3}{a^2-a}\right)$.

32. $\dfrac{1}{a(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{b(b-a)(b-c)}+\dfrac{1}{c(c-a)(c-b)}$.

33. $\dfrac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\cdot\left(1-\dfrac{1-(a^2+x^2)}{2ax}\right)$ при $x=\dfrac{1}{a-1}$.

34. $\left(\dfrac{2+ba^{-1}}{a+2b}-6b(4b^2-a^2)^{-1}\right):\left(2a^nb+3a^{n+1}-\dfrac{6a^{n+2}}{2a-b}\right)^{-1}$.

35. $\dfrac{\left(1-\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-2}\right)\cdot a^2}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+2\sqrt{ab}}$.

36. $\sqrt[6]{8x(7+4\sqrt{3})}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{6x}-4\sqrt{2x}}$.

37. $\dfrac{a}{2}\cdot\sqrt[4]{(a+1)(a^2-1)(1+2a+a^2)}\cdot\left(\dfrac{a^2+3a+2}{\sqrt{a-1}}\right)^{-1}$.

38. $\sqrt{\dfrac{(1+a)\cdot\sqrt[3]{1+a}}{3a}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{3}}{9+18a^{-1}+9a^{-2}}}$.

39. $\left(\dfrac{a^3+b^3}{a+b}-ab\right):(a^2-b^2)+\dfrac{2b}{a+b}$.

40. $\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2+\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{-2}+2\left(1-2x^2\right)$.

41. $\left(\left(\dfrac{2^{3/2}+27y^{3/5}}{\sqrt{2}+3\sqrt[5]{y}}+3\sqrt[10]{32y^2}-2\right)\cdot 3^{-2}\right)^5$.

42. $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}$.

43. $\dfrac{\left(a^{1/m}-a^{1/n}\right)^2+4a^{(m+n)/mn}}{\left(a^{2/m}-a^{2/n}\right)\left(\sqrt[m]{a^{m+1}}+\sqrt[n]{a^{n+1}}\right)}$.

44. $\left(\dfrac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}+\dfrac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}-x+a}\right):\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}-1}$.

45. $\dfrac{\left((3b^2+2a^2)^2-24a^2b^2\right)^{1/2}}{3b-a^2\cdot 2^{1-\log_2 b}}+\sqrt{a-b^2}-\sqrt{a+2b\sqrt{a-b^2}}$, если $\dfrac{a}{b}>\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

46. $\dfrac{\sqrt{ab}\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)^2\cdot\sqrt[4]{b}}-\dfrac{\sqrt[4]{16ab}\cdot\left(a+\sqrt[4]{a^3b}+\sqrt{ab}\right)}{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3}}$.

47. $\left(\dfrac{\left(x^2+a^2\right)^{-1/2}+\left(x^2-a^2\right)^{-1/2}}{\left(x^2+a^2\right)^{-1/2}-\left(x^2-a^2\right)^{-1/2}}\right)^{-2}$, если $a>0$, $n>m>0$, и $x=a\left(\dfrac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{1/2}$.

48. $\dfrac{(m+x)^{1/2}+(m-x)^{1/2}}{(m+x)^{1/2}-(m-x)^{1/2}}$, где $m>0$, $0<n<1$, $x=\dfrac{2mn}{n^2+1}$.

49. $\left(a+\sqrt{x}\right)^{-1/2}+\left(a-\sqrt{x}\right)^{-1/2}$, где $x=4(a-1)$, а) $1<a<2$ и б) $a>2$.

2. УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА, СИСТЕМЫ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ И СВОДЯЩИЕСЯ К НИМ

Уравнения

Группа I

Решить уравнения:

1. $0,2(x-1)+0,5(3x-9)=\frac{x}{3}-2$.

2. $\frac{3(1,2-x)}{10}-\frac{5+7x}{4}=x+\frac{9x+0,2}{20}-\frac{4(13x-0,6)}{5}$.

3. $x+2-\frac{2x-\frac{4-3x}{5}}{15}=\frac{7x-\frac{x-3}{2}}{5}$.

4. $\frac{(x-1)(x-2)}{x^2-1}=0$.

5. $\frac{x^2-25}{x+5}=x-5$.

6. $(x-2)^3+(x+2)^3=2(x-3)(x^2+3x+9)$.

7. $\frac{1}{2x-3}+\frac{3}{x(2x-3)}=\frac{5}{x}$.

8. $\frac{2x+19}{5x^2-5}+\frac{7}{x^2-1}=\frac{3}{x-1}$.

9. $\frac{x-1}{x-2}+\frac{x-6}{x-7}=\frac{x-5}{x-6}+\frac{x-2}{x-3}$.

10. $(a^2+a)x=a^2-4a$.

11. $\frac{3+2x}{2-x}=3a$.

12. $\frac{1}{3x-a}=\frac{2}{x-1}$.

13. $\frac{x-2}{x+a}=0$.

14. $\frac{x-a}{x+3}=0$.

15. $\frac{x-a}{a-2}=0$.

16. $\frac{a(x-2)}{x-a}=0$.

17. $\frac{a(x-a)}{x-2}=0$.

18. $\frac{x-a}{(x-4)(x+1)}=0$.

19. $\frac{(x-4)(x+1)}{x-a}=0$.

20. $ax-a^2=bx-b^2$.

21. $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

22. $\frac{4x+m^2-m-6}{x-1}=m^2$.

23. При каких значениях параметра a уравнения
$ax+x=a^2+2a+1$ и $a^2x+2ax+x=3a^2-3$ равносильны?

При каких значениях параметров k и m не имеют решений уравнения:

24. $(2k-7)y=1-3m$.

25. $(3k+4)x=m^2+1$

26. $(k^2+5)x=m-3$.

27. $(k-1)x=k^2-4$.

28. При каком значении параметра a уравнение $\frac{a+x}{a}-2=\frac{x+2}{2}$ имеет положительный корень?

29. При каких значениях параметра a уравнение $4-a=\frac{2}{x-1}$ имеет положительные решения?

30. При каких значениях параметров a и k уравнение $\frac{4x+3a}{3}=\frac{5x-2k}{4}$ имеет отрицательные решения?

31. При каком значении параметра a корень уравнения $\frac{3x-a}{2a+4x}-\frac{5ax-7}{a+2x}=3$ расположен между числами $-\frac{1}{3}$ и $-\frac{1}{2}$?

Ответы:

1. $\left\{\frac{81}{41}\right\}$. **2.** $\{0,2\}$. **3.** $\left\{\frac{263}{71}\right\}$. **4.** $\{2\}$. **5.** $\mathbb{R}\setminus\{-5\}$. **6.** $\left\{-\frac{9}{4}\right\}$. **7.** $\{2\}$. **8.** $\{51\}$. **9.** $\{4,5\}$. **10.** При $a=0$ $x\in\mathbb{R}$, при $a=-1$ – решений нет, при $a\notin\{0;-1\}$ $x=\frac{a-4}{a+1}$. **11.** При $a=-\frac{2}{3}$ – решений нет, при $a\neq-\frac{2}{3}$ $x=\frac{6a-3}{3a+2}$. **12.** При $a=3$ – решений нет, при $a\neq3$ $x=\frac{2a-1}{5}$. **13.** При $a=-2$ – решений нет, при $a\neq-2$ $x=2$. **14.** При $a=-3$ – решений нет, при $a\neq-3$ $x=a$. **15.** При $a\neq2$ $x=a$. **16.** При $a=0$ $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$; при $a=2$ решений нет, при $a\in\mathbb{R}\setminus\{0;2\}$ $x=2$. **17.** При $a=0$ $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$; при $a=2$ решений нет, при $a\in\mathbb{R}\setminus\{0;2\}$ $x=a$. **18.** При $a\in\{-1;4\}$ – решений нет, при $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1;4\}$ $x=a$. **19.** При $a=-1$ $x=4$; при $a=4$ $x=-1$; при $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1;4\}$ $x\in\{-1;4\}$. **20.** При $a=b$ $x\in\mathbb{R}$, при $a\neq b$ $x=a+b$. **21.** При $a=-b\neq0$ $x=0$, при $a\neq-b$, $a\neq0$, $b\neq0$ $x=a+b$, при $a\neq-b$, $a\neq b$, $a\neq0$, $b\neq0$ $x\in\left\{a+b;\frac{2ab}{a+b}\right\}$. **22.** При $m\notin\{2;-2;-1\}$ $x=\frac{2m+3}{m+2}$, при $m=2$ $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, при $m\in\{-2;-1\}$ решений нет.

23. $a=-1$. **24.** $k=\frac{7}{2}$, $m\neq\frac{1}{3}$. **25.** $k=-\frac{4}{3}$; $m\in\mathbb{R}$. **26.** Таких k и m не существует. **27.** $k=1$. **28.** $a\in(0;2)$. **29.** $a\in(-\infty;4)\cup(6;+\infty)$. **30.** $a>-k/2$.
31. $a\in\left(\frac{61}{11};\frac{37}{4}\right)$.

Группа II

1. Определить значения k, при которых корни уравнения $\frac{3}{8-k}=\frac{1}{kx-2}$ положительны.

2. Решить уравнение $\frac{5}{ax-4}=\frac{1}{9x-a}$.

Решить уравнения и определить знаки корней:

3. $ax+2x+3=1-x$.

4. $40x+13a=\sqrt{a}+15x$.

5. $40x+12a=\sqrt{a-2}+\sqrt{a}+36x$.

6. $3x+9=a(a-x)$.

7. Найти все значения b, при каждом из которых решение уравнения $6-3b+4bx=4b+12x$ меньше 1.

8. Найти все значения m, при каждом из которых решение уравнения $5x-18m=21=5mx-m$ больше 3.

9. Найти все значения a, при каждом из которых решение уравнения $15x-7a=2+6a-3ax$ меньше 2.

Решить уравнения:

10. $a^2x=a(x+2)-2$.

11. $4+mx=3x+1$.

12. $ax-7=2x+10$.

13. $ax-a=x-1$.

14. $mx+1=x+m$.

15. $\frac{mx-3}{x-1}=0$.

16. $\frac{2mx+5}{x-10}=0$.

17. $\frac{2a}{x-1}=1$.

18. $\frac{x}{a-1}-\frac{x}{a}=\frac{4a^2-1}{a(a-1)}$.

19. $\frac{mx}{m-x}=1$.

20. $\frac{ax}{3a-x}=2$.

21. $\frac{ax-4}{a-x}=1$.

22. $\frac{1}{x-2a}=\frac{2}{ax-1}$.

23. $\frac{a^3-1}{a^3+1}=\frac{a(x-1)+a^2-x}{a(x-1)-a^2+x}$.

24. $\frac{x-3m}{x^2-9}-\frac{2m+3}{x+3}=\frac{m-5}{x-3}$.

Ответы:

1. $\frac{8}{3}<k<4$; $4<k<6$. **2.** $x=\frac{5a-4}{45-a}$ при $a\neq\pm6$ и $a\neq45$. **3.** При $a\neq-3$ $x=\frac{-2}{a+3}$, при $a<3$ $x>0$. **4.** При $a\geq0$ $x=\frac{\sqrt{a}-13a}{25}$; $x>0$ при $0<a<\frac{1}{169}$. **5.** Если $a\geq2$, $x=\frac{\sqrt{a-2}+\sqrt{a}-12a}{4}$; $x=0$ при $a>\sim36$.

6. Если $a=-3$, $x\in R$; если $a\neq-3$, $x=a-3$. **7.** $-2<b<3$. **8.** $m<-3$ и $m>-1$. **9.** $-5<a<4$. **10.** Если $a\neq0$, $a\neq1$, то $x=21a$; если $a=0$, то нет решений; если $a=1$, то $x\in R$. **11.** Единственный корень $x=\frac{3}{3-m}$ при $m\neq3$; нет корней при $m=3$. **12.** Единственный корень $x=\frac{17}{a-2}$ при $a\neq2$; нет корней при $a=2$. **13.** Единственный корень $x=1$ при $a\neq1$; x – любое число при $a=1$. **14.** Единственное решение $x=1$ при $m\neq1$; x – любое при $m=1$. **15.** Единственное решение $x=\frac{3}{m}$ при $m\neq0$ и $m\neq3$; нет решений при $m=0$ и $m=3$. **16.** Единственное решение $x=-\frac{5}{2}m$ при $m=-\frac{1}{4}$ и $m\neq0$; нет решений при $m=-\frac{1}{4}$ и $m=0$.

17. Единственное решение $x=2a+1$ при $a\neq0$, нет решении при $a=0$.

18. Единственное решение $x=2a+1$ при $a\neq0$, $a\neq\frac{1}{2}$ и $a\neq1$; x – любое при $a=\frac{1}{2}$; нет решений при $a=0$ и $a=1$. **19.** Единственное решение $x=\frac{m}{m+1}$ при $m\neq-1$ и $m\neq0$; нет решений при $m=-1$ и $m=0$.

20. Единственное решение $x=\frac{6a}{a+2}$ при $a\neq-2$ и $a\neq0$; нет решения при $a=-2$ и $a=0$. **21.** Единственное решение $x=\frac{a+4}{a+1}$ при $a\neq-1$ и $a\neq\pm2$; нет решения при $a=-1$ и $a=\pm2$. **22.** Единственное решение $x=\frac{4a-1}{2-a}$ при $a\neq2$ и $a\neq\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; нет решения при $a=2$ и $a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

23. Если $a \neq 0$ и $a \neq \pm 1$, то $x = a^2 + 1$; если $a = 0$, $x \in R \setminus \{0\}$; если $a = 1$, $x \in R \setminus \{1\}$; если $a = -1$, $x \in \varnothing$. 24. При $m \neq 11/3$, $m \neq -5/3$, $m \neq 1$ $x = \dfrac{8}{m-1}$; при $m = 11/3$, $m = -5/3$, $m = 1$ $x \in \varnothing$.

Системы уравнений

Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{11y-27}, \\ \dfrac{x+3}{5} = \dfrac{y+8}{11}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x + 5y = 12 + 5\sqrt{7}, \\ 2x - \sqrt{7}y = -1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x : y = 3 : 4, \\ (x-1) : (y+2) = 1 : 2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} (x-4)(y-5) = 0, \\ 9x - 7y = 2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{5x-4}{3y+2} = \dfrac{15x-2}{9y+4}, \\ 3(3y+2) + 4(5x-4) = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4(0,1x+1) + 5 = 1,1y, \\ \dfrac{11+0,3-x}{x} - 5 = 4\left(\dfrac{1}{x} - 1\right). \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} - \dfrac{10}{x-y} = 1, \\ \dfrac{1}{x+y} - \dfrac{2}{x-y} = -\dfrac{3}{5}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{x+y+1}{3} + \dfrac{x-y+4}{2} = 3, \\ \dfrac{x+y+1}{3} - \dfrac{x-y+4}{2} = -1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x + \dfrac{9}{y} = 21, \\ \dfrac{18}{y} = 17 - 3x. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y+2} + \dfrac{1}{1-x-y} = 0,1, \\ \dfrac{1}{x-y+2} + \dfrac{1}{x+y-1} = 0,3. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{11}{2x-3y} + \dfrac{18}{3x-2y} = 13, \\ \dfrac{27}{3x-2y} - \dfrac{2}{2x-3y} = 1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x + y = 3, \\ x + z = 4, \\ y + z = 5. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{x-6}{3} = \dfrac{y+4}{-2} = \dfrac{z+2}{-2}, \\ 2x - 3y - z + 16 = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} xy + xz = 5, \\ xy + yz = 8, \\ yz + xz = 9. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x+y-z=2, \\ 2x-y+4z=1, \\ -x+6y+z=5. \end{cases}$ 16. $\begin{cases} 2x+3y-z=6, \\ x-y+7z=8, \\ 3x-y+2z=7. \end{cases}$

При каких значениях параметра a система имеет единственное решение? Найти это решение.

17. $\begin{cases} 16ax+y=1, \\ 4x+ay=a. \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} (a+1)x-y=a, \\ (a-3)x+ay=-9. \end{cases}$ **19.** $\begin{cases} (a+1)x-y=a+1, \\ x+(a-1)y=2. \end{cases}$

При каких значениях параметра a система не имеет решений:

20. $\begin{cases} ax+y=4, \\ 2x-y=1. \end{cases}$ **21.** $\begin{cases} (a+1)x+y=3, \\ 2x-(a-2)y=6. \end{cases}$ **22.** $\begin{cases} a^2x+(2-a)y=a^2+4, \\ ax+(2a-1)y=a^5-2. \end{cases}$

При каких значениях параметров a и b система имеет бесконечно много решений?

23. $\begin{cases} x+2y=2a-3, \\ 2x+a^2y=b. \end{cases}$ **24.** $\begin{cases} (a-1)x+by=2, \\ 9x+2y=-1. \end{cases}$ **25.** $\begin{cases} a^2x-by=a^2-b, \\ bx-b^2y=2+4b. \end{cases}$

26. При всех значениях параметра a решить систему уравнений

$$\begin{cases} a^2x+y=a^2, \\ x+ay=1. \end{cases}$$

Исследовать число решений системы:

27. $\begin{cases} 3x+2ky=1, \\ 3(k-1)x-ky=1. \end{cases}$ **28.** $\begin{cases} 2ax-(a-1)y=a, \\ 2x+(a-1)y=3-2a. \end{cases}$

29. При каких значениях параметра p система

$\begin{cases} x+8y=4p-px, \\ px+py=3p-3y-1 \end{cases}$ несовместна?

30. Пусть $(x_0;y_0)$ – решение системы $\begin{cases} 3x-y=2-b, \\ x+2y=b+1. \end{cases}$ При каком значении параметра b выражение $\left(x_0^2+y_0^2\right)$ принимает наименьшее значение?

Ответы:

1. $\{(2;3)\}$. **2.** $\{(3;\sqrt{7})\}$. **3.** $\{(6;8)\}$. **4.** $\left\{\left(4;\frac{34}{7}\right);\left(\frac{37}{9};5\right)\right\}$. **5.** $\left\{\left(\frac{4}{5};-\frac{2}{3}\right)\right\}$.

6. $\{(5;10)\}$. **7.** $\{(-3;2)\}$. **8.** $\{(1;1)\}$. **9.** $\{(5;9)\}$. **10.** $\{(7;4)\}$. **11.** $\{(5;3)\}$.

12. $\{(1;2;3)\}$. **13.** $\{(-3;2;4)\}$. **14.** $\{(1;2;3)\}$, $\{(-1;-2;-3)\}$. **15.** $\{(1;1;0)\}$. **16.** $\{(2;1;1)\}$. **17.** При $a\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$ $x=0$, $y=1$. **18.** При $a\in\mathbb{R}\setminus\{-3;1\}$ $x=\frac{a-1}{a-3}$, $y=\frac{-(a+3)}{a-1}$. **19.** При $a\neq 0$ $x=\frac{a^2+1}{a^2}$; $y=\frac{a+1}{a^2}$. **20.** $a=-2$. **21.** $a\in\{0;1\}$. **22.** $a\in\{-1;1\}$. **23.** $a=2=b$. **24.** $a=-17$, $b=-4$. **25.** $a=1$, $b=-1$; $a=1$, $b=-2$; $a=-1$, $b=-1$; $a=-1$; $b=-2$. **26.** При $a\neq 1$ $x=1$, $y=0$; при $a=1$ бесконечное множество решений: $\{(t;1-t),\ t\in\mathbb{R}\}$. **27.** При $k\in\mathbb{R}\setminus\left\{0;\frac{1}{2}\right\}$ – одно решение; при $k=\frac{1}{2}$ решений нет; при $\mathbb{R}=0$ бесконечно много решений. **28.** При $a\in\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$ – одно решение, при $a=1$ – бесконечно много решений, при $a=-1$ – решений нет. **29.** $p=3$. **30.** $b=1/17$.

Линейные неравенства. Совокупности и системы неравенств

Группа I

Решить неравенства:

1. $-8x+3(x-2)>-x+2$.

2. $\frac{5x-3}{3}+\frac{4x+1}{4}<2x+\frac{2x-1}{3}$.

3. $\frac{2x-1}{4}+\frac{3x-1}{3}\leq\frac{x+5}{2}-\frac{4x-3}{6}$.

4. $2(3x-5)(x-1)-3\left(1-(2x+1)(3-x)+\frac{4-x}{2}\right)<13$.

5. $3\left(x-1+\frac{4-3x}{4}-\left(1-2\left(x-1-\frac{x+2}{5}\right)\right)\right)>5-x$.

6. $\left(5-\sqrt{26}\right)(2x-7)<0$.

7. $\left(1-\sqrt{2}\right)(4-5x)\leq\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$.

8. $\left(3\sqrt{10}-6\sqrt{3}\right)x<5\left(2\sqrt{3}-\sqrt{10}\right)$.

Найти область определения функций:

9. $y=\frac{x+1}{\sqrt{3-2(7-5x)}}$.

10. $y=\sqrt{2-\sqrt{3}\left(x+\sqrt{3}\right)-2x}$.

11. $y=\dfrac{1}{\sqrt{(3x-1)\sqrt{3}-3x+3}}$. **12.** $y=\dfrac{2}{\left(\sqrt{\left(x-\sqrt{2}\right)\sqrt{2}-2x+1}\right)^2}$.

Найти наименьшее целое x, удовлетворяющее условию:

13. $\dfrac{3-2x}{3}-1>\dfrac{3-2x}{6}-x$.

14. $(3x-5)(2x-5)-(2x-3)(x-3)+6x>(2x-5)^2+6$.

15. $\begin{cases}13-\dfrac{3-7x}{10}+\dfrac{x+1}{2}<14-\dfrac{7-8x}{2},\\ 7(3x-5)+4(17-x)>18-\dfrac{5(2x-6)}{2}.\end{cases}$ **16.** $\begin{cases}2x+3\ge 4x-17,\\ 2x+5\ge 23-x,\\ 4x-2\le 2x+10.\end{cases}$

17. Найти натуральные x, удовлетворяющие системе неравенств

$\begin{cases}x+3<4+2x,\\ 5x-3<4x-1.\end{cases}$

Найти наибольшее целое x, удовлетворяющее системе неравенств:

18. $\begin{cases}0,5(2x-5)>\dfrac{2-x}{2}+1,\\ 0,2(3x-2)+3>\dfrac{4x}{3}-0,5(x-1).\end{cases}$ **19.** $\begin{cases}3x-2>5x-16,\\ 3x-7<18-2x,\\ x-\dfrac{2}{3}>\dfrac{11}{5}-\dfrac{2x}{5}.\end{cases}$

Решить системы (совокупности) неравенств:

20. $\begin{cases}\dfrac{3x+5}{7}+\dfrac{10-3x}{5}>\dfrac{2x+7}{3}-8,\\ \dfrac{7x}{3}-\dfrac{11(x+3)}{6}>\dfrac{3x-1}{5}-\dfrac{13-x}{2}.\end{cases}$

21. $\begin{cases}2x-\dfrac{x-1}{2}>\dfrac{1}{3}+3x,\\ \dfrac{2x+1}{4}>\dfrac{4x-1}{3}.\end{cases}$ **22.** $\begin{cases}\dfrac{3}{5}+\dfrac{3x-1}{10}\ge\dfrac{2-x}{5}-0,3,\\ 1\ge\dfrac{x-1}{3}+0,5(x+3).\end{cases}$

23. $\left[\begin{array}{l}\dfrac{2x+1}{2}-\dfrac{2-x}{7}>1,\\ -4x-1<0.\end{array}\right.$ **24.** $\begin{cases}-7<5x+3<11,\\ \left[\begin{array}{l}6-2x<5,\\ 4+3x\le 1.\end{array}\right.\end{cases}$

25. $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1<2x-1<5,\\ 2\le 3x-1<11,\end{cases}\\ \begin{cases}10\le 4x-2<26,\\ 3<2x-1<11.\end{cases}\end{array}\right.$

26. $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-1<x<4,\\ \left[\begin{array}{l}x\le 2,\\ x>3,\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}0<x<6,\\ \left[\begin{array}{l}x\ge 3,5,\\ x<-1.\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$

Решить неравенства (системы неравенств) с параметром:

27. $(3a-7)x>5a-3$.

28. $(2-3a)x<3a-1$.

29. $ax-b>3-2x$.

30. $x+\dfrac{x-1}{p+1}>\dfrac{x+1}{p+1}-px$.

31. $\dfrac{x}{2p}+\dfrac{1-x}{6}>\dfrac{x+1}{8p}$.

32. $\dfrac{7x-5}{m-1}\le 7+x+\dfrac{3x-2m}{2(m-1)}$.

33. $\begin{cases}m(x-1)>x-2,\\ (3m+3)x>3mx+5.\end{cases}$

34. $\begin{cases}a(x-2)>x-3,\\ (3+2a)(x-1)>(a-1)(x+2).\end{cases}$

35. $\begin{cases}m(x-2)>x-3,\\ 9x(m+1)>8+9mx.\end{cases}$

36. $(m+1)x+4<(3-2m)x-1$.

37. $\dfrac{2x-1}{m+1}-\dfrac{x+1}{2(m-1)}>\dfrac{2x-3}{m+1}$.

38. При каких значениях a система $\begin{cases}x>3,\\ x\le a\end{cases}$ несовместна?

39. При каких значениях a система $\begin{cases}x\ge 5,\\ x\le 3-a\end{cases}$ имеет единственное решение?

40. При каких значениях a система $\begin{cases}x\ge 2,\\ x<a\end{cases}$ имеет ровно три целочисленных решения?

41. При каких значениях a решением системы $\begin{cases}x>3,\\ x>a\end{cases}$ является промежуток: а) $(5;+\infty)$; б) $(3;+\infty)$; в) $[3;+\infty)$; г) $[2;+\infty)$?

42. При каких значениях a решением системы $\begin{cases} x \le 5, \\ x < a \end{cases}$ является промежуток: а) $(-\infty;7)$; б) $(-\infty;5)$; в) $(-\infty;5]$; г) $(-\infty;2)$?

43. При каких значениях a неравенство $2x-a>0$ является следствием неравенства $x+2a-3>0$?

44. При каких значениях a система $\begin{cases} 3-7x<3x-7, \\ 1+2x<a+x \end{cases}$ несовместна?

45. При каких значениях a система $\begin{cases} 3(a-5x)<x+1, \\ 2-\dfrac{x}{2}>3+5(x-a) \end{cases}$ совместна?

46. Найти все значения a, при которых неравенство $(x-3a)(x-a-3)<0$ выполняется для всех $x \in [1;3]$.

47. При каких значениях a неравенство $\dfrac{x-\dfrac{a}{4}}{x-2a}<0$ выполняется для всех $x \in [2;4]$?

При всех значениях a решить системы:

48. $\begin{cases} a(x-2) \ge x-3, \\ 8(a+1)x > 8ax+9. \end{cases}$

49. $\begin{cases} \dfrac{ax}{a-2}-\dfrac{x-1}{3}<\dfrac{2x+3}{4}, \\ x\cdot\dfrac{a-10}{2}+a>a\cdot\dfrac{x+2}{2}-5x-6. \end{cases}$

50. $\begin{cases} \dfrac{(1-a)x-a}{x+2a-2} \ge 0, \\ x-8 \ge ax. \end{cases}$

51. $\begin{cases} 7-\left(\dfrac{15a}{4}-30\right)x>10, \\ \dfrac{x-1}{a-1}-1<\dfrac{a}{1-a}-x. \end{cases}$

Ответы:

1. $(-\infty;-2)$. **2.** $(-\infty;+\infty)$. **3.** $\left(-\infty;\dfrac{43}{20}\right]$. **4.** $(-\infty;6)$. **5.** $(-8;+\infty)$.

6. $(3{,}5;+\infty)$. **7.** $(-\infty;1]$. **8.** $\left(-\dfrac{5}{3};+\infty\right)$. **9.** $(1{,}1;+\infty)$. **10.** $\left(-\infty;5\left(2-\sqrt{3}\right)\right]$.

11. $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right)$. **12.** $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$. **13.** $\{1\}$. **14.** $\{2\}$. **15.** $\{1\}$. **16.** $\{6\}$. **17.** $\{1\}$.

18. $\{8\}$. **19.** $\{4\}$. **20.** $(-\infty;2)$. **21.** $\left(-\infty;\frac{1}{9}\right)$. **22.** $\left[-\frac{4}{5};-\frac{1}{5}\right]$. **23.** $\left(-\frac{1}{4};+\infty\right)$.

24. $\left(-\frac{1}{4};+\infty\right)$. **25.** $(-2;-1]\cup\left(\frac{1}{2};\frac{8}{5}\right)$. **26.** $(1;6)$. **27.** При $a>\frac{7}{3}$ $x>\frac{5a-3}{3a-7}$; при $a<\frac{7}{3}$ $x<\frac{3-5a}{3a-7}$; при $a=\frac{7}{3}$ решений нет. **28.** При $a<\frac{2}{3}$ $x<\frac{3a-1}{2-3a}$; при $a>\frac{2}{3}$ $x>\frac{1-3a}{2-3a}$; при $a=\frac{2}{3}$ $x\in(-\infty;+\infty)$. **29.** При $a<-2$ $x<\frac{b+3}{a+2}$; при $a>-2$ $x>\frac{b+3}{a+2}$; при $a=-2$ и $b<-3$ $x\in(-\infty;+\infty)$, при $a=-2$ и $b\geq-3$ решений нет. **30.** При $p>-1$ $x>\frac{2}{(p+1)^2}$, при $p<-1$ $x<\frac{2}{(p+1)^2}$, при $p=-1$ решений нет. **31.** При $0<p<2{,}25$ $x>\frac{3-4p}{9-4p}$, при $p<0$ или $p>2{,}25$ $x<\frac{3-4p}{9-4p}$, при $p=2{,}25$ $x\in(-\infty;+\infty)$. **32.** При $1<m<6{,}5$ $x\leq\frac{12m-4}{13-2m}$, при $m<1$ или $m>6{,}5$ $x\geq\frac{12m-4}{13-2m}$, при $m=6{,}5$ $x\in(-\infty;+\infty)$. **33.** При $m\in[1;+\infty)$ $x>\frac{5}{3}$; при $m\in\left(-\frac{1}{2};1\right)$ $\frac{5}{3}<x<\frac{m-2}{m-1}$, при $m\leq-\frac{1}{2}$ решений нет. **34.** При $a\leq-4$ $x<\frac{2a-3}{a-1}$; при $a\in(-4;1)$ $\frac{4a+1}{a+4}<x<\frac{2a-3}{a-1}$. при $a\geq1$ $x>\frac{4a+1}{a+4}$. **35.** При $m>1{,}9$ $x>\frac{2m-3}{m-1}$, при $1\leq m\leq1{,}9$ $x>\frac{8}{9}$, при $m<1$ $\frac{8}{9}<x<\frac{2m-3}{m-1}$. **36.** При $m<\frac{2}{3}$ $x>\frac{5}{2-3m}$, при $m>\frac{2}{3}$ $x<\frac{5}{2-3m}$, при $m=\frac{2}{3}$ решений нет.

37. При $m<-1$ или $-1<m<1$ $x>\frac{3m-5}{m+1}$, при $m>1$ $x<\frac{3m-5}{m+1}$, при $m\in\{-1;1\}$ решений нет. **38.** $a\leq3$. **39.** $a=-2$. **40.** $a\in(4;5]$. **41.** а) $a=5$; б) $a\leq3$; в) не существует; г) не существует. **42.** а) Не существует; б) $a\geq5$;

в) $a>5$; г) $a=2$. **43.** $a\le\frac{6}{5}$. **44.** $a\le 2$. **45.** $a>\frac{21}{127}$. **46.** $a\in\left(0;\frac{1}{3}\right)$;

47. $a\in(2;8)$. **48.** При $a<1$ $\frac{9}{8}<x\le\frac{2a-3}{a-1}$, при $a\in\left[1;\frac{15}{7}\right]$ $x>\frac{9}{8}$, при $a>\frac{15}{7}$ $x\ge\frac{2a-3}{a-1}$. **49.** При $a<-10$ или $a>2$ $x<\frac{5(a-2)}{2(a+10)}$, при $a=-10$ $x\in\mathbb{R}$, при $-10<a<2$ $x>\frac{5(a-2)}{2(a+10)}$, при $a=2$ нет решений.

50. При $a<-1$ $x>2-2a$, при $-1\le a<1$ $x>\frac{8}{1-a}$, при $1\le a\le 3$ нет решений, при $3<a\le 8$ $2-2a<x\le\frac{8}{1-a}$, при $a>8$ $2-2a<x\le\frac{a}{1-a}$.

51. При $0<a<1$ $x>\frac{4}{40-5a}$; при $a>8$ $x<\frac{4}{40-5a}$; при $a\le 0$ или $1\le a\le 8$ решений нет.

Группа II

1. Решить линейное неравенство $ax+x-3a+1>0$. Подобрать значения a так, чтобы решение удовлетворяло условию $x<a$.
2. Решить линейное неравенство $ax+x+1<0$. Подобрать значения a так, чтобы решение удовлетворяло условию $1<x<2$.

Решить неравенства:

3. $ax-a^2\ge x-1$. **4.** $ax+16\le 4x+a^2$. **5.** $mx>1+3x$.

6. $mx<4-2x$. **7.** $x-5>nx-1$. **8.** $5+kx\le 5x+k$.

9. $\frac{a^2x+1}{2}-\frac{a^2x+3}{3}<\frac{a+9x}{6}$. **10.** $\frac{ax+1}{3}-\frac{x-4a}{2}\ge\frac{a^2}{6}$.

11. $\frac{3x+1}{a^2-1}-\frac{2x-1}{a-1}\le\frac{x-1}{a+1}$.

Ответы:

1. При $a<-1$ $x<\frac{2a-1}{a+1}$; при $a=-1$ $x\in R$; при $a>-1$ $x>\frac{2a-1}{a+1}$.

2. При $a<-1$ $x>-\frac{1}{a-1}$; при $a=-1$ $x\in\varnothing$; при $a>-1$ $x<-\frac{1}{a+1}$.

3. $x \ge a+1$ при $a>1$; $x \le a+1$ при $a<1$, x – любое при $a=1$.
4. $x \le a+4$ при $a>4$; $x \ge 1+4$ при $a<4$; x – любое при $a=4$.
5. $x > \dfrac{1}{m-3}$ при $m>3$; $x < \dfrac{1}{m-3}$ при $m<3$; при $m=3$ решений нет.
6. $x < \dfrac{4}{m+2}$ при $m>-2$; $x > \dfrac{4}{m+2}$ при $m<-2$; при $m=-2$ решений нет.
7. $x > \dfrac{4}{1-n}$ при $n<1$; $x < \dfrac{4}{1-n}$ при $n>1$; при $n=1$ решений нет.
8. $x \le 1$ при $k>5$; $x \ge 1$ при $k<5$; x – любое при $k=5$. **9.** При $|a|>3$ $x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{a-3}\right)$; при $|a|<3$ $x \in \left(\dfrac{1}{a-3}; +\infty\right)$; при $a=-3$ решений нет; при $a=3$ $x \in \mathrm{R}$. **10.** При $a<\dfrac{3}{2}$ $x \in \left(-\infty; \dfrac{a^2-12a-2}{2a-3}\right)$; при $a=\dfrac{3}{2}$ $x \in R$; при $a>\dfrac{3}{2}$ $x \in \left(\dfrac{a^2-12a-2}{2a-3}; +\infty\right)$. **11.** $\forall a \in \left(-1; \dfrac{2}{3}\right) \cup (1; +\infty)$ $x \in \left[\dfrac{2a+1}{3a-2}; +\infty\right)$; $\forall a \in (-\infty; -1) \cup \left(\dfrac{2}{3}; 1\right)$ $x \in \left(-\infty; \dfrac{2a+1}{3a-2}\right]$; при $a=\dfrac{2}{3}$ $x \in \mathrm{R}$.

3. УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА, СИСТЕМЫ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ И СВОДЯЩИЕСЯ К НИМ

Квадратные уравнения и уравнения, к ним приводимые

Решить уравнения:

1. $3x^2-5x-2=0$.

2. $5x^2-8x+3=0$.

3. $x^2-2{,}4x-13=0$.

4. $x^2-5{,}6x+6{,}4=0$.

5. $4x^2+6x=9x^2-15x$.

6. $12x^2-5x=9x^2+7x$.

7. $8{,}5x-3x^2=3{,}5x+2x^2$.

8. $x^2=2$.

9. $x(x-15)=3(108-5x)$.

10. $47-x(3x+4)=2(17-2x)-62$.

11. $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x}{x-1}=2\dfrac{2}{3}$.

12. $\dfrac{5+2x}{4x-3}=\dfrac{3x+3}{7-x}$.

13. $\dfrac{x+3}{x-3}+\dfrac{x-3}{x+3}=3\dfrac{1}{3}$.

14. $\dfrac{5x+7}{x-2}-\dfrac{2x+21}{x+2}=8\dfrac{2}{3}$.

15. $\dfrac{3x-7}{x+5}=\dfrac{x-3}{x+2}$.

16. $\dfrac{2x-5}{x-1}=\dfrac{5x-3}{3x+5}$.

17. $\dfrac{30}{x^2-1}-\dfrac{13}{x^2+x+1}=\dfrac{7+18x}{x^3-1}$.

18. $\dfrac{x\sqrt{5}}{2x-\sqrt{5}}=\dfrac{2x}{x\sqrt{5}-3}$.

19. $\dfrac{2x}{x\sqrt{3}-5}=\dfrac{x\sqrt{3}}{x-2\sqrt{3}}$.

20. $\dfrac{2y-1}{14y^2+7y}+\dfrac{8}{12y^2-3}=\dfrac{2y+1}{6y^2-3y}$.

21. $\dfrac{20+x}{2x-2}-\dfrac{9x^2+x+2}{6x^2-6}=\dfrac{5-3x}{x+1}-\dfrac{10-4x}{3x+3}$.

Уравнения высокой степени, приводимые к квадратным

22. $\dfrac{x+1}{x^3+x-1}+\dfrac{x^3+x-1}{x+1}=2$.

23. $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2+\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2=\dfrac{17}{4}$.

24. $16x^4+8x^3-7x^2+2x+1=0$.

25. $x^4-x^3-10x^2+2x+4=0$.

26. $x^4-4x^3-3x^2+14x+12=0$.

27. $\dfrac{4x}{4x^2-8x+7}+\dfrac{3x}{4x^2-10x+7}=1$.

28. $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{48}{x^2}=10\cdot\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{4}{x}\right)$.

29. $\dfrac{4x}{x^2+x+3}+\dfrac{5x}{x^2-5x+3}=-\dfrac{3}{2}$.

30. $(x^2+3x+1)(x^2-x+1)=5x^2$.

О т в е т ы:

1. $\left\{2;-\frac{1}{3}\right\}$. **2.** $\left\{1;\frac{3}{5}\right\}$. **3.** $\{5;-2,6\}$. **4.** $\{4;1,6\}$. **5.** $\{0;4,2\}$. **6.** $\{0;4\}$.

7. $\{0;1\}$. **8.** $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$. **9.** $x_{1,2}=\pm 18$. **10.** $x_{1,2}=\pm 5$. **11.** $x_{1,2}=\pm 2$.

12. $\left\{2;-\frac{11}{7}\right\}$. **13.** $x_{1,2}=\pm 6$. **14.** $x_{1,2}=\pm 4$. **15.** $\left\{1;\frac{1}{2}\right\}$. **16.** $\{-7;4\}$.

17. $\{-4;9\}$. **18.** $\{0;\sqrt{5}\}$. **19.** $\{0;\sqrt{3}\}$. **20.** $\varnothing$. **21.** $\left\{-2;-\frac{17}{2}\right\}$. **22.** $\{\sqrt[3]{2}\}$.

23. $\left\{-2;-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};1\right\}$. **24.** $\left\{-1;-\frac{1}{4}\right\}$. **25.** $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$. $x_{3,4}=-1\pm\sqrt{3}$.

26. $x_1=-1$, $x_2=3$, $x_{3,4}=1\pm\sqrt{5}$. **27.** $\left\{\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right\}$. **28.** $x_1=-2$, $x_2=6$, $x_{3,4}=3\pm\sqrt{21}$. **29.** $x=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$. **30.** $\{1;-2\pm\sqrt{3}\}$.

Квадратные уравнения. Теорема Виета

Группа I

Решить уравнения:

1. $(k-5)x^2+3kx-(k-5)=0$.

2. $\frac{ax+1}{x(x+a)}=-1$.

3. $\frac{x^2+1}{n^2x-2n}+\frac{1}{nx-2}=\frac{x}{n}$.

4. $2x^2-(a-1)x+a+1=0$.

5. $ax^2-(a+1)x+a^2+a=0$.

6. $x^2-ax+2a+4=0$.

7. $(a+1)x^2-x+(1-a)=0$.

8. $ax^2=1$.

9. $(a-1)x^2+2(a+1)x+a-2=0$.

10. $x^2-2(a-1)x+2a+1=0$.

11. $x^2+2x-8-a(x-4)=0$.

12. $(a+1)x^2-(a-1)x-2a=0$.

О т в е т ы:

1. При $k=5$ $x=0$; при $k\neq 5$ $x=\frac{-3k\pm\sqrt{9k^2+4(k-5)^2}}{2(k-5)}$. **2.** При $|a|>1$ $x=-a\pm\sqrt{a^2+1}$; при $|a|\le 1$ $x\in\varnothing$. **3.** При $n\neq 1$, $n\neq 0$ $x=\frac{n+1}{n-1}$; при

$n=1$ $x=-1$; при $n=0$ уравнение не имеет смысла. **4.** $x=1+\sqrt{2}$ при $a=5+4\sqrt{2}$; $x=1-\sqrt{2}$ при $a=5-4\sqrt{2}$; два разных корня $x=\dfrac{a-1+\sqrt{a^2-10a-7}}{4}$ и $x=\dfrac{a+1+\sqrt{a^2-10a-7}}{4}$ при $a<5-4\sqrt{2}$.

5. $x=\dfrac{-\sqrt{17}+1}{4}$ при $a=\dfrac{1-\sqrt{17}}{8}$; $x=0$ при $a=-1$; $x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$ при $a=\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$; два разных корня $x=\dfrac{a+1+\sqrt{2a+1-3a^2-4a^3}}{2a}$ и $x=\dfrac{a+1-\sqrt{2a+1-3a^2-4a^3}}{2a}$ при $a<-1$, $\dfrac{1-\sqrt{17}}{7}<a<0$ и $0<a<\dfrac{\sqrt{17}-1}{8}$.

6. $x=2(1+\sqrt{2})$ при $a=4(1+\sqrt{2})$; $x=2(1-\sqrt{2})$ при $a=4(1-\sqrt{2})$; два разных корня $x=\dfrac{a+\sqrt{a^2-8a-16}}{2}$ и $x=\dfrac{a-\sqrt{a^2-8a-16}}{2}$ при $a<2(1-\sqrt{2})$ и $a>4(1+\sqrt{2})$. **7.** $x=2+\sqrt{3}$ при $a=-\sqrt{3}/2$; $x=2-\sqrt{3}$ при $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; два различных корня $x=\dfrac{1-\sqrt{4a^2-3}}{2(a+1)}$ и $x=\dfrac{1+\sqrt{4a^2-3}}{2(a+1)}$ при $\forall a\in(-\infty;-1)\cup\left(-1;-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};+\infty\right)$: при $a=-1$ $x=2$. **8.** $x=-\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ и $x=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$, если $a>0$. **9.** $x=\dfrac{1}{4}$ при $a=1$; $x=\dfrac{3}{2}$ при $a=\dfrac{1}{5}$; $x=\dfrac{-(a+1)+\sqrt{5a-1}}{a-1}$ и $x=\dfrac{-(a+1)-\sqrt{5a-1}}{a-1}$ при $\dfrac{1}{5}<a<1$ и $a>1$.

10. $x=-1$ при $a=0$; $x=3$ при $a=4$; $x=(a-1)+\sqrt{a(a-4)}$, $x=(a-1)-\sqrt{a(a-4)}$ при $a<0$ и $a>4$. **11.** $x=0$ при $a=2$; $x=8$ при $a=18$; $x=\dfrac{(a-2)+\sqrt{(a-2)(a-18)}}{2}$ и $x=\dfrac{(a-2)-\sqrt{(a-2)(a-18)}}{2}$ при $a<2$ или $a>18$. **12.** При $a=-1$ $x=-1$; при $a=-\dfrac{1}{3}$ $x=-1$; $\forall a\in R\setminus\left\{-1;-\dfrac{1}{3}\right\}$ $x=\dfrac{-a-1}{a+1}$ и $x=\dfrac{2a}{a+1}$.

Группа II

Решить уравнения:

1. $x^2+2\left(1+\sqrt{8}\right)x+8\sqrt{2}=0$. **2.** $x^2+4x-\sqrt{3}+1=0$.

3. $x^2+5bx+4b^2=0$. **4.** $x^2+(3a-2)x-6a=0$.

5. $x^2-4bx+3b^2-4b-4=0$. **6.** $ax^2-(a+1)x+1=0$.

7. $abx^2+\left(a^2-b^2\right)x+(a-b)^2=0$. **8.** $345x^2+137x-208=0$.

9. $1998x^2-385x-1613=0$.

10. $4x^2-9x-11=4\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-9\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-11$.

11. Указать корни уравнения $x^2+x+\sqrt{6}-6=0$, удовлетворяющие условию $x<\sqrt{2}$.

12. Сравнить больший корень уравнения $x^2-2x-1=0$ с меньшим корнем уравнения $x^2-14x+28=0$.

13. Сравнить меньший корень уравнения $x^2-3\left(\sqrt{14}+\sqrt{5}\right)x+2\left(\sqrt{14}+\sqrt{5}\right)^2=0$

с числом $\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}-\dfrac{\sqrt{15-6\sqrt{6}}}{2\sqrt{6}-5}$.

14. Не вычисляя корней x_1 и x_2 квадратного уравнения

$3x^2+8x-1=0$, найти: а) $x_1^2+x_2^2$; б) $x_1x_2^3+x_1^3x_2$; в) $\dfrac{x_1}{x_2^2}+\dfrac{x_2}{x_1^2}$; г) $x_1^4+x_2^4$.

15. Не вычисляя корней x_1 и x_2 уравнения $2x^2-5x-4=0$, найти:

а) $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}$; б) $x_1x_2^4+x_2x_1^4$; в) $x_1^3+x_2^3$; г) $\dfrac{1}{2x_1+3x_2}+\dfrac{1}{2x_2+3x_1}$.

16. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $2x^2-7x-3=0$. Не решая его, составить квадратное уравнение, корнями которого будут числа:

а) x_1-2 и x_2-2; б) $2x_1+3$ и $2x_2+3$;

в) $\dfrac{1}{x_1}$ и $\dfrac{1}{x_2}$; г) $x_1+\dfrac{1}{x_2}$ и $x_2+\dfrac{1}{x_1}$.

17. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2-7x+3=0$. Составить квадратное уравнение:

а) единственным корнем которого является число $\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}$;

б) корнями которого являются числа -1 и $\dfrac{x_1+x_2}{x_1^2+x_2^2}$.

Найти все значения параметра, при которых выполняются заданные условия:

18. Уравнение имеет единственный корень:

а) $ax^2-(2a+6)x+3a+3=0$; в) $(a-1)x^2+(a+4)x+a+7=0$;

б) $ax^2+(4a+2)x+3a+\dfrac{3}{2}=0$; г) $(2a-5)x^2-2(a-1)x+3=0$.

19. Уравнение имеет не более одного корня: $(2a-1)x^2+ax+2a-3=0$.

20. Уравнение не имеет действительных корней: $(2-3a)x^2-2ax+1-a=0$.

21. Уравнение имеет корни:

а) $(a-1)x^2+2(a+3)x+2a=0$; б) $ax^2-2(a-2)x+2a-1=0$;

в) $(a^2-1)x^2+2(a-1)x+2=0$.

22. Уравнение имеет два различных корня. Определить знаки корней:

а) $(a-2)x^2-2ax+2a-3=0$; б) $x^2+2x-8=a(x-4)$;

в) $(a+5)x^2+(2a-3)x+a-10=0$.

23. Уравнение $(a^2-6a+8)x^2+(a^2-4)x+(10-3a-a^2)=0$ имеет более двух корней.

24. Уравнение $x^2+(4+2a)x+5+4a=0$ имеет: а) единственный корень; б) корни, противоположные по знаку, но равные по абсолютной величине.

25. Один корень уравнения $x^2+(2a-1)x+a^2+2=0$ вдвое больше другого.

26. Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2-(3a+2)x+a^2=0$ удовлетворяют соотношению $x_1=9x_2$.

27. Корни x_1 и x_2 уравнения $5x^2+bx-28=0$ удовлетворяют соотношению $5x_1+2x_2=1$ и b – целое число.

28. Уравнение $0{,}5x^2+2x-5a+1=0$ имеет два различных корня, сумма кубов которых меньше 40.

29. Корни уравнения $ax^2+3x+2a^2-3=0$ целые.

30. Уравнение $x(x+1)(x+h)(x+1+h)=h^2$ имеет четыре корня.

31. Пусть x_1 и x_2 – действительные корни уравнения $ax^2+(2a-3)x+2=0$, причем $a>0$. Найти наименьшее значение выражения $S=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$ и указать, при каком a оно достигается.

32. Найти наибольшее значение суммы кубов действительных корней уравнения $3(x^2-ax-1)+a^2-a=0$ и указать, при каких значениях a оно достигается.

При каких значениях параметра p графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ имеют только одну общую точку?

33. $f(x)=x^2+2p+10$,
$g(x)=-x^2+px+p^2$.

34. $f(x)=x^2$,
$g(x)=-x^2+px+p^2-4p-2$.

Ответы:

1. $\left\{-2;-4\sqrt{2}\right\}$. **2.** $\left\{-2\pm\sqrt{3+\sqrt{3}}\right\}$. **3.** $\{-4b;-b\}$. **4.** $\{-3a;2\}$. **5.** $\{3b+2;b-2\}$.
6. $\{1;1/a\}$ при $a\neq 0$; $\{1\}$, при $a=0$. **7.** $\mathbb{R}$ при $a=b=0$, $\{1\}$ при $a=0$, $b\neq 0$, $\varnothing$ при $a\neq 0$, $b=0$, $\left\{\frac{a-b}{a};\frac{a-b}{b}\right\}$ при $a\neq 0$, $b\neq 0$. **8.** $\left\{-1;\frac{208}{345}\right\}$.
9. $\left\{1;-\frac{1613}{1998}\right\}$. **10.** $\left\{\sqrt{2}+\sqrt{3},\frac{9-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4}\right\}$. **11.** $\left\{-\sqrt{6}\right\}$. **12.** Больший корень первого уравнения меньше, чем меньший корень второго уравнения. **13.** Меньший корень больше α; *указание*: корни уравнения равны $\left(\sqrt{14}+\sqrt{5}\right)$ и $2\left(\sqrt{14}+\sqrt{5}\right)$, $\alpha=6$. **14.** а) $\frac{70}{9}$; б) $-\frac{70}{27}$; в) $\frac{584}{3}$; г) $\frac{4882}{81}$.
15. а) $\frac{41}{16}$; б) $-\frac{165}{4}$; в) $\frac{595}{8}$; *указание*:
$x_1^5+x_2^5=(x_1+x_2)\left(\left(x_1^2+x_2^2\right)-x_1^2x_2^2-x_1x_2\left(x_1^2+x_2^2\right)\right)$; г) $25/71$.
16. а) $2x^2+x-9=0$; б) $x^2-13x+24=0$; в) $3x^2+7x-2=0$; г) $6x^2-7x-1=0$. **17.** а) $9x^2-258x+1849=0$; б) $43x^2+36x-7=0$.
18. а) $a\in\left\{0;3;-\frac{3}{2}\right\}$; б) $a\in\left\{0;-2;-\frac{1}{2}\right\}$; в) $a\in\left\{1;2;-\frac{22}{3}\right\}$; г) $a\in\left\{\frac{5}{2};4\right\}$.

19. $a \in \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left(-\infty; \frac{16-2\sqrt{19}}{15}\right] \cup \left[\frac{16+2\sqrt{19}}{15}; +\infty\right)$.

20. $a \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$. **21.** а) $a \in [-1; 9]$; б) $a \in [-4; 1]$; в) $a \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$.

22. а) $a \in (1; 2) \cup (2; 6)$; если $a \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$, то $x_1 < 0$, $x_2 < 0$; если $a = \frac{3}{2}$, то $x_1 < 0$, $x_2 = 0$, если $a \in (3/2; 2)$, то $x_1 < 0$, $x_2 > 0$; если $a \in (2; 6)$, то $x_1 > 0$, $x_2 > 0$; б) $a \in (-\infty; 2) \cup (18; +\infty)$; если $a < 2$, то $x_1 < 0$, $x_2 > 0$; если $a > 18$, то $x_1 > 0$, $x_2 > 0$; в) $a \in \left(-\frac{209}{8}; -5\right) \cup (-5; +\infty)$; если $a \in \left(-\frac{209}{8}; -5\right) \cup (10; +\infty)$, то $x_1 < 0$, $x_2 < 0$; если $a \in (-5; 10)$, то $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, если $a = 10$, то $x_1 < 0$, $x_2 = 0$. **23.** $a = 2$. **24.** а) $a = \pm 1$; б) $a = -2$.

25. $\left\{\sqrt{5}; -2-\sqrt{5}\right\}$. **26.** При $a = 6$ $x_1 = 18$, $x_2 = 2$; при $a = -\frac{6}{19}$ $x_1 = \frac{18}{19}$, $x_2 = \frac{2}{19}$. **27.** $b = -13$. **28.** $a \in \left(-\frac{1}{5}; 0\right)$. **29.** $a \in \left\{0; -\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right\}$.

30. $h \in \left(-\infty; -2-\sqrt{5}\right) \cup \left(2-\sqrt{5}; 0\right) \cup \left(0; \sqrt{5}-2\right) \cup \left(2+\sqrt{5}; +\infty\right)$; *указание*: группируя в левой части уравнения первый множитель с четвертым, а второй с третьим, и вводя замену $t = x^2 + x + hx$, получаем уравнение $t(t+h) = h^2$. **31.** $S_{\min} = \frac{1}{2}$ при $a = \frac{1}{2}$. **32.** $S_{\max} = 54$ при $a = 6$.

33. $p \in \left\{-\frac{20}{9}; 4\right\}$. **34.** $p \in \left\{4; -\frac{4}{9}\right\}$.

Квадратные уравнения при особых условиях

Группа I

1. Определить значение числа a так, чтобы один из корней уравнения $4x^2 - 15x + 4a^3 = 0$ был квадратом другого.
2. При каких значениях a уравнение $(5a-1)x^2 - (5a+2)x + 3a - 2 = 0$ имеет равные корни?

3. При каком значении m выражение $x^2+m(m-1)x+36$ есть полный квадрат?

4. В уравнении $x^2-2x+q=0$ квадрат разности корней равен 16. Определить свободный член уравнения.

5. При каких значениях m уравнение $9x^2-18mx-8m+16=0$ имеет корни, отношение которых равно 2?

6. Какими должны быть значения p и q, чтобы уравнение $x^2+px+q=0$ имело корни p и q?

7. Показать, что уравнение $(x-1)(x-3)+m(x-2)(x-4)=0$ имеет корни при любом $m\in R$.

8. При каких целых значениях k корни уравнения $kx^2-(1-2k)x+k=2$ рациональны?

9. При каком значении k корни уравнения $(k-1)x^2-2(k+1)x+k+4=0$ равны между собой?

10. Определить значение k так, чтобы один из корней уравнения $x^2-(2k+1)x+k^2+2=0$ был вдвое больше другого.

11. Дано уравнение $x^2+px+q=0$. Составить уравнение с корнями $x_1{}^2+x_2{}^2$ и $x_1{}^3+x_2{}^3$, где x_1 и x_2 – корни данного уравнения.

12. При каком значении a один из корней уравнения $4x^2-15x+4a^3=0$ есть квадрат другого?

13. При каком значении a сумма квадратов корней уравнения $x^2-ax+a-1=0$ равна 17?

14. При каком действительном значении a сумма квадратов корней уравнения $x^2+ax+a-2=0$ будет наименьшей?

15. При каком целом значении k один из корней уравнения $4x^2-(3k+2)x+(k^2-1)=0$ втрое меньше другого?

16. При каком целом значении p уравнения $3x^2-4x+p=0$ и $x^2-2px+5=0$ имеют общий корень? Найти этот корень.

17. Найти все значения a, при которых сумма корней уравнения $x^2-2a(x-1)-1=0$ равна сумме квадратов корней.

18. При каком значении a уравнения $x^2+ax+8=0$ и $x^2+x+a=0$ имеют общий корень?

19. В уравнении $x^2+2x+c=0$ определить то значение c, при котором его корни x_1 и x_2 удовлетворяют условию $7x_2-4x_1=47$.

20. При каком значении p отношение корней уравнения $x^2+px-16=0$ равно –4?

21. При каком целом значении b уравнения $2x^2+(3b-1)x-3=0$ и $6x^2-(2b-3)x-1=0$ имеют общий корень?

22. При каком положительном значении c один корень уравнения $8x^2-6x+9c^2=0$ равен квадрату другого?

23. При каком положительном значении p корни уравнения $5x^2-4(p+3)x+4=p^2$ противоположны по знаку? Найти эти корни.

Решить уравнения:

24. $ax^2=1$.

25. $(a-1)x^2+2(a+1)x+a-2=0$.

26. $x^2-2(a-1)x+2a+1=0$.

27. $x^2+2x-8-a(x-4)=0$.

28. $(a+1)x^2-(a-1)x-2a=0$.

29. $\dfrac{x^2+1}{n^2x-2n}+\dfrac{1}{nx-2}=\dfrac{x}{n}$.

30. $2x^2-(a-1)x+a+1=0$.

31. $ax^2-(a+1)x+a^2+a=0$.

32. $x^2-ax+2a+4=0$.

33. $(a+1)x^2-x+(1-a)=0$.

34. При каких значениях a сумма корней квадратного уравнения $x^2+(2-a-a^2)x-a^2=0$ равна нулю?

Найти все значения параметра a, при которых уравнения имеют хотя бы один корень:

35. $x^2-2(a-1)x+2a+1=0$.

36. $(a-2)x^2-2ax+2a-3=0$.

Найти все значения a, при которых квадратные уравнения имеют два неравных корня:

37. $ax^2+2(a+1)x+a+3=0$.

38. $(a-2)x^2+ax+1=0$.

Известно, что квадратные уравнения имеют корни. Не решая уравнений, определить знаки его корней:

39. $ax^2+2(a+1)x+2a=0$.

40. $(a^2-5a+3)x^2+(3a-1)x+2=0$.

41. Найти все значения a, при которых квадратное уравнение $(a+2)x^2-2ax-a=0$ имеет два корня, расположенные на числовой прямой симметрично относительно точки $x=1$.

42. Найти все значения a, для которых один корень квадратного уравнения $(a^2-5a+3)x^2+(3a-1)x+2=0$ в два раза больше другого.

43. Найти все значения a, при которых уравнение $x^2+3ax+a^2=0$ имеет два корня x_1 и x_2, удовлетворяющие условию $x_1^2+x_2^2=1{,}75$.

44. Найти все значения a, при которых один из корней уравнения $4x^2-15x+4a^2=0$ равен квадрату другого корня.

Найти все значения a, при которых квадратные уравнения имеют корни, и определить знаки этих корней:

45. $x^2-2(a-1)x+2a+1=0$.

46. $3ax^2+(4-6a)x+3(a-1)=0$.

47. $(a-3)x^2-2(3a-4)x+7a-6=0$.

48. $(a-2)x^2-2ax+2a-3=0$.

49. $x^2+(3-2a)x-3a+2=0$.

Найти все значения параметра a, при которых сумма квадратов корней уравнения $x^2-(a-2)x-(a+3)=0$ равна:

50. 9.

51. k^2.

Решить уравнения:

52. $x^4+4a^3x=a^4$.

53. $ax^2+2x+1=0$.

54. При каком m имеют общий корень уравнения $2x^2-(3m+2)x+12=0$, $4x^2-(9m-2)x+36=0$?

55. Найти все значения параметра a, для которых квадратные уравнения $(1-2a)x^2-6ax-1=0$ и $ax^2-x+1=0$ имеют по крайней мере один общий корень.

Ответы:

1. $a=3/2$, $a=-5/2$. **2.** $a=2$, $a=2/35$. **3.** $m=4$, $m=-3$. **4.** $q=-3$. **5.** $m=-2$, $m=1$. **6.** $p_1=0$, $q_1=0$; $p_2=1$, $q_2=-2$. **8.** $k=n(n+1)$, где $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$. **9.** $k=5$. **10.** $k=4$. **11.** $x^2+(p^3-p^2-3pq+2q)x+$ $+(p^2-3q)(3pq-p^3)=0$. **12.** $a=-2{,}5$, $a=1{,}5$. **13.** $a=-3$, $a=5$. **14.** $a=1$. **15.** $k=2$. **16.** $p=3$, $x=1$. **17.** $a=1$, $a=1/2$. **18.** $a=-6$. **19.** $c=-15$. **20.** $p_1=-6$, $p_2=6$. **21.** $b=2$. **22.** $c=1/3$. **23.** $p>2$, $x_1=p+2$.

$x_2 = \dfrac{2-p}{5}$. **24.** $x_1 = -1/\sqrt{a}$ и $x_2 = 1/\sqrt{a}$ при $a > 0$. **25.** $x_1 = \dfrac{1}{4}$ при $a = 1$;

$x_1 = x_2 = \dfrac{3}{2}$ при $a = \dfrac{1}{5}$; $x_{1,2} = \dfrac{-(a+1) \pm \sqrt{5a-1}}{a-1}$ при $\dfrac{1}{5} < a < 1$ и $a > 1$.

26. $x_1 = x_2 = -1$ при $a = 0$; $x_1 = x_2 = 3$ при $a = 4$; $x_{1,2} = (a-1) \pm \sqrt{a(a-4)}$ при $a < 0$ и $a > 4$. **27.** $x_1 = x_2 = 0$ при $a = 2$; $x_1 = x_2 = 8$ при $a = 18$; $x_{1,2} = \dfrac{(a-2) \pm \sqrt{(a-2)(-18)}}{2}$ при $a < 2$ или $a > 18$. **28.** $x = -1$ при $a = -1$; $x_1 = x_2 = -1$ при $a = -\dfrac{1}{3}$; $x_1 = -1$ и $x_2 = \dfrac{2a}{a+1}$ при $a < -1$, $-1 < a < -\dfrac{1}{3}$ и $a > -\dfrac{1}{3}$. **29.** $x = \dfrac{n+1}{n-1}$ при $n \neq 1$, $n \neq 0$; $x = -1$ при $n = 1$. Уравнение не имеет смысла при $n = 0$. **30.** $a = -2$, $a = 1$. **31.** $x_1 = x_2 = 1 + \sqrt{2}$ при $a = 5 + 4\sqrt{2}$; $x_1 = x_2 = 1 - \sqrt{2}$ при $a = 5 - 4\sqrt{2}$; два разных корня $x = \dfrac{a - 1 \pm \sqrt{a^2 - 10a - 7}}{4}$ при $a < 5 - 4\sqrt{2}$ и $a > 5 + 4\sqrt{2}$.

32. $x_1 = x_2 = \dfrac{1-\sqrt{17}}{4}$ при $a = \dfrac{1-\sqrt{17}}{8}$; $x_1 = x_2 = 0$ при $a = -1$; $x_1 = x_2 = \dfrac{1-\sqrt{17}}{4}$ при $a = \dfrac{1-\sqrt{17}}{8}$; два разных корня $x = \dfrac{a + 1 \pm \sqrt{2a + 1 - 3a^2 - 4a^3}}{2a}$ при $a < -1$. $\dfrac{1-\sqrt{17}}{8} < a < 0$ и $0 < a < \dfrac{1-\sqrt{17}}{8}$

33. $x_1 = x_2 = 2(1+\sqrt{2})$ при $a = 4(1+\sqrt{2})$; $x_1 = x_2 = 2(1-\sqrt{2})$ при $a = 4(1-\sqrt{2})$; два разных корня $x = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2 - 8a - 16}}{2}$ при $a < 4(1-\sqrt{2})$ и $a > 4(1+\sqrt{2})$. **34.** $x_1 = x_2 = 2 + \sqrt{3}$ при $a = -\sqrt{3}/2$; $x_1 = x_2 = 2 - \sqrt{3}$ при $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; два разных корня $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{4a^2 - 3}}{2(a+1)}$ при $a < -1$ и $-1 < a < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ или $a > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **35.** $a \le 0$ или $a \ge 4$. **36.** $1 \le a \le 6$. **37.** $a < 0$ и $0 < a < 1$.
38. $|a| > 2$. **39.** Оба корня положительны при $1 - \sqrt{3} \le a < 0$; оба корня

отрицательны при $0 < a \le 1+\sqrt{2}$ (так как при $a \ne 0$ $D = -4(a^2-2a-1) = -4(a-(1-\sqrt{2}))(a-(1+\sqrt{2}))$), при этом, если x_1 и x_2 – корни уравнения, то $x_1x_2 = 2$, а $x_1+x_2 = \dfrac{-2(a+1)}{a}$. **40.** Оба корня положительны при $a < \dfrac{-17-\sqrt{312}}{2}$ и оба корня отрицательны при $a > \dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$, имеют разный знак при $\dfrac{-17-\sqrt{312}}{2} < a < \dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$. **41.** $\varnothing$ (если x_1 и x_2 – корни, симметричные относительно $x=1$, то $x_1+x_2=2$, кроме того, $x_1+x_2 = \dfrac{2a}{a+2}$, поэтому $2 = \dfrac{2a}{a+2}$, что ложно при любом a, поэтому задача решений не имеет). **42.** $a = 2/3$. **43.** $a = \pm 1/2$.

44. $a = \pm 3\sqrt{6}/4$. **45.** Корни разных знаков при $a < -1/2$; оба корня положительны при $a \ge 4$; оба корня отрицательны при $-1/2 < a \le 0$; один нуль, а другой отрицателен при $a = -1/2$; корней нет при $0 < a < 4$.

46. Оба корня положительны при $a < 0$ и $1 < a \le 4/3$; корни разных знаков при $0 < a < 1$; один нуль, другой положителен при $a = 1$; корней нет при $a > 4/3$. **47.** Оба корня положительны при $a \le 2$, $1/2 \le a < 6/7$ и $a > 3$; корни разных знаков при $6/7 < a < 3$; один нуль, другой положителен при $a = 6/7$; корней нет при $-2 < a < 1/2$. **48.** Оба корня отрицательны при $1 \le a < 3/2$; один нуль, другой отрицателен при $a = 3/2$; корни разных знаков при $3/2 < a < 2$; оба корня положительны при $2 < a \le 6$; корней нет при $a < 1$ и $a > 6$. **49.** Оба корня отрицательны при $a < 2/3$; один корень отрицателен, а другой равен нулю при $a = 2/3$; корни разных знаков при $a > 2/3$. **50.** $a = 1$. **51.** $a = 1$, если $k = 3$ и $k = -3$; $a_1 = 1-\sqrt{k^2-9}$ и $a_2 = 1+\sqrt{k^2-9}$ при $k > 3$ и $k < -3$. **52.** $x_1 = 0$ при $a = 0$; $x = \dfrac{(-1 \pm \sqrt{2\sqrt{2}-1})a}{\sqrt{2}}$ при $a < 0$ и $a > 0$. **53.** $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{1-a}}{a}$, $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{1-a}}{a}$ при $a < 1, a \ne 0$; $x = -1/2$ при $a = 0$;

$(a-2)x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0$ при $a = 1$. **54.** $m = 3$. **55.** $a = 2/9$.

Группа II

Найти все значения параметра, удовлетворяющие заданным условиям (№№1-21):

1. Уравнение $(2-x)(x+1)=a$ имеет различные положительные корни.

2. Уравнение $(a-1)x^2-2ax+a+3=0$ имеет различные положительные корни.

3. Уравнение $x+2(a+1)\sqrt{x}+a^2-2a-8=0$ имеет: а) решение; б) два различных решения; в) единственное решение.

4. Уравнение имеет одно решение:

а) $(p-2)x-2(p+3)\sqrt{x}+p=0$; б) $16\sqrt{x}-\dfrac{a^2-400}{\sqrt{x}}+6a=0$;

в) $(p+5)x+6\sqrt{x}+p-3=0$.

5. Уравнение не имеет решений:

а) $x^2+2(a-1)x+a+5=0$; б) $x+2(2a+1)\sqrt{x}+4a^2-3=0$.

6. Уравнения имеют решения:

а) $(a-3)x-8\sqrt{x}+a+3=0$; б) $(a+1)x+8\sqrt{x}+a-5=0$.

7. Число a расположено между корнями уравнения $2x^2-2(2a+1)x+a(a-1)=0$.

8. Корни уравнения $(1+a)x^2-3ax+4a=0$ больше 1.

9. Один корень уравнения $2ax^2-2x-3a-2=0$ больше 1, другой меньше 1.

10. Единственный корень уравнения $(a-1)x^2-2ax+2-3a=0$ больше 1.

11. Интервалу $(1;3)$ принадлежит только один корень уравнения $x^2-ax+2=0$.

12. Все корни уравнения $(2-a)x^2-3ax+2a=0$ больше $1/2$.

13. Все корни уравнения $x^2-2ax+a^2-2=0$ расположены на отрезке $[2;5]$.

14. Все корни уравнения $x^2-2ax+a^2-a=0$ расположены на отрезке $[-2;6]$.

15. Один корень уравнения $(a-2)x^2-2(a+3)x+4a=0$ меньше 2, второй – больше 3.

16. Уравнение $(x-a)^2\left(a(x-a)^2-a-1\right)=-1$ имеет больше положительных корней, чем отрицательных.

17. Уравнение $x^4+(a-1)x^3+x^2+(a-1)x+1=0$ имеет не более двух отрицательных корней.

18. Оба корня уравнения $a^2x^2-2a(a+1)x+1-16a^2=0$ лежат между 0 и 1.

19. Уравнение $\frac{x}{(1+x)^2}+2a\frac{\sqrt{x}}{1+x}+1=0$ имеет решение.

20. Уравнение $(p-1)x^2+2px+3p-2=0$ имеет два различных решения каждое из которых не больше 2.

21. Все корни уравнения $ax^2-2(2a-1)x+2-3a=0$ больше 1.

22. Сколько корней больше -1 имеет уравнение $x^2+(2a+6)x+4a+12=0$?

23. Сколько корней меньше 1 имеет уравнение $(1+a)x^2-3ax+4a=0$?

24. Сколько корней уравнения $4x^2-2x+a=0$ удовлетворяет условию $|x|\le 1$?

25. При каких значениях параметра k корни x_1 и x_2 уравнения $x^2-4kx+1=0$ удовлетворяют условиям $x_1\ge k$, $x_2\ge 0$?

26. Найти все значения параметра a, при которых больший корень уравнения $(a-1)x^2+2x+1=0$ больше 100.

27. Найти все значения параметра a, при которых только один корень уравнения $x^2+2(a-3)x+9-2a=0$ меньше 2.

28. Найти все значения параметра b, при которых только один корень уравнения $x^2-2x(b+1)+6b-3=0$ больше 2.

29. При каких значениях параметра m один из корней уравнения $x^2-(2m+1)x+m^2+m-2=0$ расположен на интервале $(0;2)$, а второй – на интервале $(3;5)$?

30. При каких значениях параметра a все корни уравнения $x^4+(3a-2)x^2(x+1)+(2a^2-a-3)(x+1)=0$ лежат на отрезке $[-3;0]$?

Ответы:

1. $a\in\left(2;\frac{9}{4}\right)$. **2.** $a\in(-\infty;-3)\cup\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **3.** а) $a\in\left[-\frac{9}{4};4\right]$; б) $a\in\left(\frac{9}{4};-2\right]$;

в) $a\in\{-9/4\}\cup(-2;4]$. **4.** а) $p\in[0;2]$; б) $a\in(-\infty;-20]\cup\{-16\}\cup(20;1]$;

в) $p\in\{-6\}\cup[-5;3]$. **5.** а) $a\in(-1;4)$; б) $a\in(-\infty;-1)\cup\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};+\infty\right)$.

6. $a\in[-3;5]$; б) $a\in[-1;7]$. **7.** $a\in(-\infty;-3)\cup(0;+\infty)$. **8.** $a\in\left[-\dfrac{16}{7};-1\right]$.

9. $a\in(-\infty;-4)\cup(0;+\infty)$. **10.** $a\in\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$. **11.** $a\in\left[3;\dfrac{11}{3}\right)\cup\left\{2\sqrt{2}\right\}$.

12. $a\in\left[\dfrac{16}{17};2\right]$. **13.** $a\in\left[2+\sqrt{2};5-\sqrt{2}\right]$. **14.** $a\in[0;9]$. **15.** $a\in(2;5)$.

16. $a\in[1;+\infty)$. **17.** $a\in\left(\dfrac{5}{2};+\infty\right)$; *указание*: уравнение является возвратным.

18. Таких значений a не существует. **19.** $a\in(-\infty;-5/4]$; *указание*: сделаем замену $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$. Нетрудно видеть, что $0\le y\le\dfrac{1}{2}$. Необходимо определить, при каких a уравнение $y^2+2ay+1=0$ имеет хотя бы один корень на отрезке $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$. **20.** $p\in\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{6}{11}\right]\cup(1;2)$. **21.** Таких a не существует.

22. При $a<-\dfrac{7}{2}$ один корень больше -1, при $-\dfrac{7}{2}\le a\le-3$ – 2 корня больше -1, при $a>-3$ таких корней нет. **23.** При $-1<a\le-\dfrac{1}{2}$ один корень меньше 1, при $-\dfrac{1}{2}<a\le 0$ оба корня меньше 1, при $a\le-1$ и $a>0$ таких корней нет. **24.** При $a\in[-6;-2)\cup\left\{\dfrac{1}{4}\right\}$ – 1 корень, при $a\in\left[-2;\dfrac{1}{4}\right)$ – 2 корня, при $a\in(-\infty;-6)\cup\left(\dfrac{1}{4};+\infty\right)$ – таких корней нет. **25.** $k\in\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

26. $a\in(0{,}9799;1)$. **27.** $a\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)\cup\{4\}$. **28.** $b\in\{2\}\cup\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right]$.

29. $m\in(1;3)$. **30.** $a\in\left\{\dfrac{3}{2}\right\}\cup\left[3;\dfrac{7}{2}\right]$; *указание*: уравнение является однородным.

Квадратные неравенства с параметром

Группа I

Решить неравенства:

1. $x^2+\frac{8}{a}x-2a<0$. **2.** $x^2+\frac{6}{a}x-a>0$. **3.** $x^2+2x+1>\frac{1}{a}-\frac{2}{a^2}$.

4. $x^2+2x+a>0$. **5.** $ax^2+x+1>0$. **6.** $ax>1/x$.

7. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+a}>0{,}5$. **8.** $\frac{2a}{x}-\frac{1}{x-1}>1$. **9.** $ax^2-2ax-1<0$.

При каких значениях параметра a неравенства верны при всех x?

10. $\frac{2-ax-x^2}{1-x+x^2}\le 3$. **11.** $\frac{x^2+ax+1}{x^2+4x+8}<8$. **12.** $\frac{ax^2+3x+4}{x^2+2x+2}<5$.

13. При каких значениях параметра a квадратный трехчлен $y=(a^2+6a-4)x^2-2(a-1)x-1$ принимает отрицательные значения при всех $x\in R$?

14. Найти все $a\in R$, при которых трехчлен $y=(a^2-1)x^2+2(a-1)x+1$ принимает положительные значения $\forall x\in R$.

15. При каких значениях параметра m трехчлен $y=mx^2+4x+3m+1$ принимает положительные значения при всех $x>0$?

16. При каких значениях параметра m трехчлен $y=(6m-5)x^2-5(m-1)x+2m-6$ есть полный квадрат?

17. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $ax^2+(a-1)x+a-3<0$ выполняется при всех $x\in R$.

Для каждого значения параметра a решить неравенства:

18. $ax<\frac{1}{x}$. **19.** $x^4-ax^2+1<0$. **20.** $\frac{x-1}{a-1}+x<\frac{1}{1-a}$.

21. $\frac{2a+1}{(a-3)x}>\frac{x+2}{x}$. **22.** $\frac{2a+1}{ax-3x-2a+6}\ge\frac{x}{x-2}$.

23. При каких значениях параметра a неравенство $ax^2+4x>1-3a$ справедливо при всех положительных значениях переменной?

Ответы:

1. $x_1=\frac{-4-\sqrt{16+2a^3}}{a}$ и $x_2=\frac{-4+\sqrt{16+2a^3}}{a}$ при $a>-2$ $(a\ne 0)$; при

$a\in(-2;0)$ $x_1>x_2$ тогда $x\in(x_2;x_1)$; при $a>0$ $x\in(x_1;x_2)$; $\forall a\le-2$ и $a=0$ $x\in\varnothing$. **2.** $x_1=\dfrac{-3-\sqrt{9+a^3}}{a}$ и $x_2=\dfrac{-3+\sqrt{9+a^3}}{a}$; при $a\in(\sqrt[3]{9};0)$ $x\in(-\infty;x_2)\cup(x_1;+\infty)$; $\forall a>0$ $x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$.

3. $\forall a\in(-\infty;0)\cup(0;2)$ $x\in R$; $a=2$ $x\in R\setminus\{-1\}$; $\forall a>2$ $x\in\left(-\infty;-1-\dfrac{\sqrt{a-2}}{a}\right)\cup\left(-1+\dfrac{\sqrt{a-2}}{a};+\infty\right)$. **4.** При $a<1$ $x<-1-\sqrt{1-a}$, $x>-1+\sqrt{1-a}$; при $a=1$ $x\in R\setminus\{-1\}$; при $a>1$ $x\in R$. **5.** При $a<0$ $\dfrac{-1+\sqrt{1-4a}}{2a}<x<\dfrac{-1-\sqrt{1-4a}}{2a}$; при $a=0$ $x>-1$; при $0<a<\dfrac{1}{4}$ $x<\dfrac{-1-\sqrt{1-4a}}{2}$ и $x>\dfrac{-1+\sqrt{1-4a}}{2a}$; при $a=\dfrac{1}{4}$ $x\in R$. **6.** При $a\le0$ $x<0$; при $a>0$ $-\dfrac{1}{\sqrt{a}}<x<0$ $x>\dfrac{1}{\sqrt{a}}$. **7.** При $a<0$ $0<x<-\dfrac{a}{2}$ и $x>-a$; при $a=0$ $x>0$; при $a>0$ $-a<x<-a/2$ $x>0$. **8.** При $a<0$ $a+\sqrt{a^2-2a}<x<1$; при $0\le a\le2$ $0<x<1$; при $a>2$ $a-\sqrt{a^2-2a}<x<a+\sqrt{a^2-2a}$. **9.** При $a\le-1$ $x<1-\sqrt{\dfrac{1+a}{a}}$ и $x>1+\sqrt{\dfrac{1+a}{a}}$; при $-1\le a\le0$ $x\in R$; при $a>0$ $1-\sqrt{\dfrac{1+a}{a}}<x<1+\sqrt{\dfrac{1+a}{a}}$.

10. $-1\le a<7$. **11.** $-10<a<74$. **12.** $a<\dfrac{71}{24}$. **13.** $-1-\sqrt{2,5}<a<-1+\sqrt{2,5}$. **14.** $a>1$. **15.** $m>0$. **16.** 5. **17.** $a<\dfrac{5-2\sqrt{7}}{3}$. **18.** При $a\le0$ $x>0$; при $a>0$ $x<-\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ и $0<x<\dfrac{1}{\sqrt{a}}$. **19.** При $a\le-2$ решений нет; при $a>2$ $-\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}}<x<-\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}}$ и $\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}}<x<\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}}$.

20. При $a<0$ и $a<1$ $x<0$; при $0<a<1$ $x>0$; при $a=0$, $a=1$ решений нет. **21.** $a<3$ $x\in\left(\dfrac{7}{a-3};0\right)$; при $a=3$ решений нет; при $a>3$

$x \in \left(0; \frac{7}{a-3}\right)$. **22.** При $a < 3$ $x \in \left[\frac{2a+1}{a-3}; 2\right)$; при $a = 3$ решений нет; при $a > 3$ $x \in \left(2; \frac{2a+1}{a-3}\right]$. **23.** $a \geq \frac{1}{3}$.

Группа II

Решить неравенства:

1. $x^2 - ax + 3 \leq 0$. **2.** $ax^2 - x + 2 < 0$.

3. $x^2 - 2ax + 2a^2 - 2a + 1 > 0$. **4.** $16x^2 + 13a^2 + 4a > 24ax - 1$.

При каких значениях параметра выполняются условия (№№ 5–20):

5. Неравенство верно для любого действительного значения x:

а) $(a+4)x^2 - 2ax + 2a - 6 < 0$; б) $(a-3)x^2 - 2ax + 3a - 6 > 0$;

в) $(a^2-1)x^2 - 2(a-1)x + 2 > 0$; г) $2x^2 - 10x + 5 > a(x^2 + 10)$.

6. Неравенство не имеет решений:

а) $bx^2 + 4bx + 5 \leq 0$; б) $bx^2 + (2b+3)x + b - 1 \geq 0$;

в) $(4 - b^2)x^2 + (2+b)x - 1 > 0$.

7. Все решения неравенства $x^2 - a(1+a^2)x + a^4 < 0$ удовлетворяют неравенству $x^2 + 4x + 3 < 0$.

8. Все решения неравенства $ax^2 - 2(a^2 - 3)x - 12a \geq 0$ являются решениями неравенства $x^2 \geq 49$.

9. Для любого $x \in (1; 2)$ выполняется неравенство:

а) $x^2 + ax + a^2 + 6a < 0$; б) $x^2 + ax - 7a < 0$.

10. Каждое число $x \in [1; 2]$ удовлетворяет неравенству $x^2 + (a-2)x - a \leq 0$.

11. Неравенство $(x - 3a)(x + 2a + 1) < 0$ выполняется для всех $x \in [1; 3]$.

12. Все решения неравенства $ax^2 - 2x - a(a^2 + 2) < 0$ удовлетворяют условию $x^2 \leq 9$.

13. Решением неравенства $(x-a)^2(x+4) \geq 0$ является луч.

14. Каждое решение неравенства $4x^2 + 8x + 3 < 0$ содержится среди решений неравенства $2ax^2 - (7a-4)x - 14 > 0$.

15. Все решения неравенства $(k-1)x^2+(k^2-2k+2)x+k+1>0$ положительны и меньше 2.

16. Все решения неравенства $-1<2x<0$ заключены в решениях неравенства $mx^2-2(m-3)x+m-1>0$.

17. Неравенство $\dfrac{3}{x+1}>1$ имеет своим следствием неравенство $(k+1)x^2-(3k+4)x+3>0$.

18. Каждое решение неравенства $x^2-x-2<0$ больше любого решения неравенства $ax^2-4x-1\geq 0$.

19. Система неравенств имеет решение:

а) $\begin{cases} x^2-(a+1)x+a<0, \\ x^2+(a+3)x+3a<0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} ax^2+(1-a^2)x-a>0, \\ x^2-4\leq 0. \end{cases}$

20. Система имеет единственное решение:

а) $\begin{cases} x^2+2x+a\leq 0, \\ x^2-4x-6a\leq 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x^2+12x-a\geq 0, \\ x\leq 2. \end{cases}$

Решить системы неравенств:

21. $\begin{cases} x^2-5x+4\geq 0, \\ x^2-a^2<0. \end{cases}$ **22.** $\begin{cases} x^2-6x-7\leq 0, \\ x^2>a^2. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x^2+2x+a\leq 0, \\ x^2-4x-6a\leq 0. \end{cases}$ **24.** $\begin{cases} x^2+4x+3+a<0, \\ 2x+a+6>0. \end{cases}$

25. На плоскости xy указать все точки, через которые не проходит ни одна из кривых семейства:

а) $y=x^2-4px+2p^2-3$; б) $y=p^2+(4-2p)x-x^2$;

в) $y=p^2+(2p-1)x+2x^2$.

Ответы.

1. При $a\in\left(-2\sqrt{3};2\sqrt{3}\right)$ решений нет, при $a\in\left\{\pm 2\sqrt{3}\right\}$ $x=\dfrac{a}{2}$, при $a\in\left(-\infty;-2\sqrt{3}\right)\cup\left(2\sqrt{3};+\infty\right)$ $x\in\left[\dfrac{a-\sqrt{a^2-12}}{2};\dfrac{a+\sqrt{a^2-12}}{2}\right]$. **2.** При $a\geq\dfrac{1}{8}$

решений нет, при $a<0$ $x\in\left(-\infty;\frac{1+\sqrt{1-8a}}{2a}\right)\cup\left(\frac{1-\sqrt{1-8a}}{2a};+\infty\right)$, при $a\in\left(0;\frac{1}{8}\right)$ $x\in\left(\frac{1-\sqrt{1-8a}}{2a};\frac{1+\sqrt{1-8a}}{2a}\right)$; при $a=0$ $x\in(2;+\infty)$. **3.** При $a\neq1$ $x\in\mathbb{R}$, при $a=1$ $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **4.** При $a\neq-\frac{1}{2}$ $x\in\mathbb{R}$, при $a=-\frac{1}{2}$ $x\in\mathbb{R}\setminus\{-0{,}375\}$. **5.** а) $a<-6$; б) $a>6$; в) $a\in(-\infty;-3)\cup[1;+\infty)$; г) $a\in(-\infty;1)\cup\left(\frac{3}{2};2\right)$. **6.** а) $b\in\left[0;\frac{5}{4}\right)$; б) $b\in\left(-\infty;-\frac{9}{16}\right)$; в) $b\in(-\infty;-2]$. **7.** $a\in\left(-\sqrt[3]{3};1\right)$. **8.** $a\in\left(0;\frac{7}{3}\right]$. **9.** а) $a\in\left[\frac{-7-3\sqrt{5}}{2};-4+2\sqrt{3}\right]$; б) $a\in[4/5;+\infty)$. **10.** $a\in(-\infty;0]$. **11.** $a\in(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$. **12.** $a\in[1;2]$. **13.** $a\in[-4;+\infty)$. **14.** $a\in[4;+\infty)$. **15.** $k\in(-1;0)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **16.** $m\in\left(\frac{16}{9};+\infty\right)$. **17.** $k\in\left[-2;-\frac{1}{2}\right]$. **18.** Таких значений a не существует. **19.** а) $a\in(-\infty;0)$; б) $a\in\mathbb{R}$. **20.** а) $a\in\{0;1\}$; б) $a=20$. **21.** а) Если $a\in\{0;1;-1\}$, то решений нет, если $a\in(-1;1)$, то $x\in(-|a|;|a|)$; если $a\in[-4;-1)\cup(1;4]$, то $x\in(-|a|;1]$, если $a\in(-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$, то $x\in(-|a|;1]\cup[4;|a|)$. **22.** Если $a\in(-1;1)$, то $x\in[-1;-|a|)\cup(|a|;7]$, если $a\in\{-1;1\}$, то $x\in(1;7]$; если $a\in(-7;-1)\cup(1;7)$, то $x\in(|a|;7]$, если $a\in(-\infty;-7]\cup[7;+\infty)$, то решений нет. **23.** Если $a=0$, то $x=0$, если $a=1$, то $x=-1$, если $a\in(0;1]$ $x\in\left[2-\sqrt{4+6a};-1+\sqrt{1-a}\right]$, если $a<0$ или $a>1$ решений нет. **24.** При $a\in[0;1)$ $x\in\left(-2-\sqrt{1-a};-2+\sqrt{1-a}\right)$, при $-8<a<0$ $x\in\left(\frac{-a-6}{2};-2+\sqrt{1-a}\right)$, при $a\le-8$ и $a>1$ решений нет.

25. а) $\{(x;y)\,|\,y<-x^2-3\}$; б) $\{(x;y)\,|\,y<4x-2x^2\}$; в) $\{(x;y)\,|\,y<x^2-x\}$.

4. СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИИ

Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases} y^2 + xy = 231, \\ x^2 + xy = 210. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y + \dfrac{x}{y} = 9, \\ \dfrac{(x+y)x}{y} = 20. \end{cases}$

3. $\begin{cases} (x-y)\left(x^2 - y^2\right) = 45, \\ x + y = 5. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + xy - y = 13, \\ x^2 y - xy^2 = 30. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2 + xy + 2y^2 = 37, \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 26. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ x^2 + xy + y^2 = 7. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x - y = 4, \\ 27x^3 - y^3 = 28. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 - xy + y^2 = 7. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + x - 2y = 1, \\ 5x^2 + 2,5y^2 + 3x - 4y = 4. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 + 12x - 4y + 8 = 0, \\ 2x^2 - y^2 + 8x + 2y + 9 = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x + y = 10, \\ \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = 2,5. \end{cases}$

12. $\begin{cases} y^2 + xy + y = 20, \\ x^2 + xy + x = 10. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x^2 = 13x + 4y, \\ y^2 = 13y + 4x. \end{cases}$

14. $\begin{cases} xy = 12, \\ y(x+z) = 32, \\ x(y+z) = 27. \end{cases}$

15. $\begin{cases} xy = 6, \\ yz = 2, \\ x^2 + z^2 = 10. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \left(x^2 + xy + y^2\right)\sqrt{x^2 + y^2} = 185, \\ \left(x^2 - xy + y^2\right)\sqrt{x^2 + y^2} = 65. \end{cases}$

17. Найти все решения **системы** $\begin{cases} (x-2)^2 + \left(y^2 - 1\right)^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = x - y \end{cases}$ удовлетворяющие условию $x \le 0$.

18. Решить систему $\begin{cases} \dfrac{x}{a+3} - \dfrac{y}{a+2} + 1 = 0, \\ \dfrac{y}{x} - \dfrac{2}{y-2} = 1 \end{cases}$, где $a > 0$.

19. Найти все значения параметра a, при котором окружность $x^2+y^2=1$ касается: а) окружности $(x-a)^2+y^2=4$;

б) окружности $(x-3)^2+(y-4)^2=a^2$, $a>0$.

20. Прямая $y=5x+a$ проходит через центр окружности $x^2+y^2-2x+4y=21$. Найти координаты точек пересечения прямой и окружности.

21. Найти все значения a $(a>0)$, при которых окружность $x^2+y^2=a^2$ касается прямой $3x+4y=12$. Найти координаты точки касания.

22. При каких значениях параметров a и b областью определения функции $f(x)=\sqrt{ax^2+\left(b^2+4b\right)x-a+7b+10}$ является множество $M=(-\infty;-2]\cup[1;+\infty)$?

23. При каких значениях параметров a и b области определения функций $f(x)=\sqrt{(2-x)(x+3)}$ и $g(x)=\sqrt{\dfrac{ax^2+\left(a^2-2b\right)x+4b-16}{b}}$ совпадают?

При каких значениях параметра a имеют решения системы:

24. $\begin{cases} y=x^2-2x+a, \\ x^2-2x+y^2=0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} y=2x-x^2+a, \\ y^2=x(2-x). \end{cases}$

26. $\begin{cases} y=1-x^2, \\ y^2-x^2+(a-2)y-(a+2)x-2a=0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} y=x^2+2x+2, \\ x^2+2x+y^2-2ay+a^2=0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x^2+2y=4x, \\ x^2+y^2+a^2=4x+2ay. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x-a=2y, \\ y^4-x^2+4x+8y^2+12=0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} y+x^2+2=0, \\ x^2-y^2-ax-ay+\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{a}-1=0. \end{cases}$

31. $\begin{cases} y=\dfrac{x^2}{2}+2, \\ y^2-x^2+ay+ax-\dfrac{y}{a}-\dfrac{x}{a}+1=0. \end{cases}$

32. $\begin{cases} x^2-6x+(y-a)^2=16, \\ \dfrac{x}{\sqrt{xy}}+1=0. \end{cases}$

33. $\begin{cases} y=2x-x^2, \\ y^2-x^2+(a-1)x-(a+1)y+a=0. \end{cases}$

Найти все значения параметра, при которых системы имеют два различных решения:

34. $\begin{cases}(x+a-2)^2+y^2=1,\\ y^2=2ax.\end{cases}$ **35.** $\begin{cases}y=\sqrt{x},\\ 4a(y-2)=x-4.\end{cases}$

36. $\begin{cases}y=\sqrt{3-2x-x^2},\\ x=a\left(y-\sqrt{3}\right).\end{cases}$ **37.** $\begin{cases}y=2\sqrt{x},\\ \dfrac{y-3}{x-2}=a.\end{cases}$

38. При каких значениях параметра m системы

1) $\begin{cases}(x-2m+1)^2+y^2=m^2,\\ y^2=2x;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(x+m+2)^2+y^2=1,\\ y^2=2mx\end{cases}$ имеют:

а) два различных решения; б) четыре различных решения.

39. При каких значениях параметра a система $\begin{cases}a\left(2x^2-y^2-1\right)=x^2+y^2-5\\ y^2+2x=0\end{cases}$

имеет не менее трех различных решений?

40. При каких значениях параметра a система $\begin{cases}2x-3y=a\\ y+2\sqrt{9-2x-x^2}=3\end{cases}$

совместна?

При каких значениях параметра a системы имеют единственное решение? Указать это решение при каждом значении a:

41. $\begin{cases}y=\sqrt{16-6x-x^2},\\ x=a(y-4).\end{cases}$ **42.** $\begin{cases}x-2y+1=0,\\ y=\sqrt{ax-2}.\end{cases}$

43. $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{a-2-y}}{x}+1=0,\\ y=x-a.\end{cases}$ **44.** $\begin{cases}2\sqrt{y}=x-a,\\ y^2-x^2-2x+6y+8=0.\end{cases}$

Ответы:

1. $\{(-10;-11);(10;11)\}$. **2.** $\left\{(4;1);\left(\dfrac{10}{3};\dfrac{2}{3}\right)\right\}$. **3.** $\{(4;1);(1;4)\}$.

4. $\left\{\left(5+2\sqrt{7};-5+2\sqrt{7}\right);\left(5-2\sqrt{7};-5-2\sqrt{7}\right)\right\}$.

5. $\{(1;4);(-5;4);(-1;-4);(5;-4)\}$.

6. $\left\{(2;1);(-2;-1);\left(-\frac{5\sqrt{3}}{3};\frac{4\sqrt{3}}{3}\right);\left(\frac{5\sqrt{3}}{3};-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)\right\}$.

7. $\{(1;-1);(1/3;-3)\}$. **8.** $\{(3;2);(-2;-3)\}$. **9.** $\{(-1;2);(7/9;2/9)\}$.

10. $\left\{\left(-2+\sqrt{\frac{2}{7}};1+3\sqrt{\frac{2}{7}}\right);\left(-2+\sqrt{\frac{2}{7}};1-3\sqrt{\frac{2}{7}}\right);\left(-2-\sqrt{\frac{2}{7}};1+3\sqrt{\frac{2}{7}}\right);\right.$

$\left.\left(-2-\sqrt{\frac{2}{7}};1-3\sqrt{\frac{2}{7}}\right)\right\}$. **11.** $\{(2;8);(8;2)\}$. **12.** $\left\{(-2;-4);\left(\frac{5}{3};\frac{10}{3}\right)\right\}$.

13. $\{(0;0);(17;17);(12;-3);(-3;12)\}$. **14.** $\{(3;4;5);(-3;-4;-5)\}$.

15. $\{(3;2;1);(-3;-2;-1)\}$. **16.** $\{(3;4);(4;3);(-1;-6);(-6;-1)\}$. **17.** $\{(0;-1)\}$; *указание*: докажитс, что при $x<0$ первое уравнение не имеет решений.

18. $\{(-a;-3;0);(a^2+3a;a^2+3a+2)\}$. **19.** а) $a\in\{1;-1;3;-3\}$; б) $a\in\{4;6\}$.

20. $(2;3);(0;-7)$. **21.** $a=2{,}4;(1{,}44;1{,}92)$. **22.** $a=-3;\ b=-1$.

23. $a=-4;\ b=10$. **24.** $a\in[-2;1/4]$. **25.** $a\in[-2;1/4]$. **26.** $a\in[-5/4;+\infty)$.

27. $a\in[0;9/4]$. **28.** $a\in[-1/2;4]$. **29.** $a\in[1;+\infty)$. **30.** $a\in(0;4/7]\cup[7/4;+\infty)$.

31. $a\in(-\infty;-3/2]\cup[-2/3;0)$. **32.** $a\in\left[3-5\sqrt{2};4\right)$. **33.** $a\in(-\infty;9/4]$.

34. $a\in\{1/3\}\cup(1;3)\cup\{0\}$. **35.** $a\in[1/2;1)\cup(1;+\infty)$. **36.** $a\in\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup$

$\cup\left(-\sqrt{3};-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\cup\left[\sqrt{3};+\infty\right)$. **37.** $a\in\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(1;\frac{3}{2}\right]$. **38.** 1) а) $a\in\left(\frac{1}{3};1\right)\cup\{3\}$;

б) $a\in(3;+\infty)$; 2) а) $a\in(-3;-1)\cup\{-1/3;0\}$; б) $a\in(-1/3;0)$.

39. $a\in(1/2;1)\cup(2;5]$. **40.** $a\in\left[-11-2\sqrt{10};9\right]$. **41.** $a\in\{-4/3\}\cup(-1/2;2)$, $x=0,\ y=4$. **42.** $a\in(-\infty;-2]\cup\{2\}$, $x=2a-1+2\sqrt{a^2-a-2}$, $y=a+\sqrt{a^2-a-2}$. **43.** При $a=7/8$ $x=-1/2$, $y=-11/8$; при $a=1$ $x=-1$, $y=-2$; при $a>1$ $x=\frac{-1-\sqrt{8a-7}}{2}$, $y=\frac{-2a-1-\sqrt{8a-7}}{2}$.

44. При $a=-4$ $x=-4,\ y=0$; при $a=1$ $x=3,\ y=1$; при $a<-4$ $x=a-2+2\sqrt{-a-3}$, $y=-2-a-2\sqrt{-a-3}$; при $a>2$ $x=a+2+2\sqrt{a-1}$, $y=a+2\sqrt{a-1}$.

5. УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ

Решить уравнения:

1. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4,5\left(x+\frac{1}{x}\right)+5=0$.

2. $\frac{2}{x^2-4}+\frac{x-4}{x^2+2x}=\frac{1}{x^2-2x}$.

3. $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=-\frac{5}{2}$.

4. $(6x+5)^2(3x+2)(x+1)=35$.

5. $x^4-2x^3-x^2-2x+1=0$.

6. $x(x-1)(x-2)(x-3)=15$.

7. $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)=18$.

8. $\frac{4x}{x^2+x+3}+\frac{5x}{x^2-5x+3}=-\frac{3}{2}$.

9. $\frac{24}{x^2+2x-8}-\frac{15}{x^2+2x-3}=2$.

10. $\frac{x-1}{x}-\frac{3x}{2x-2}=-\frac{5}{2}$.

11. $x^3-3x^2-3x+1=0$.

12. $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x(x-4)}{x^2-4}=\frac{x-2}{x+2}-\frac{4(x+1)}{1-x^2}$.

13. $\frac{x-1}{x+2}-\frac{x-2}{x+3}=\frac{x-4}{x+5}-\frac{x-5}{x+6}$.

14. $\frac{2x-1}{x+1}+\frac{3x-1}{x+2}=\frac{x-7}{x-1}+4$.

15. $\frac{1}{x^2-3x+3}+\frac{2}{x^2-3x+4}=\frac{6}{x^2-3x+5}$.

16. $\frac{x^2+1}{x+1}+\frac{x^2+2}{x-2}=-2$.

17. $x^3-x^2-\frac{8}{x^3-x^2}=2$.

18. $\frac{2x}{x^2-4x+2}+\frac{3x}{x^2+x+2}+\frac{5}{4}=0$.

19. $(x^2-2x)^2-3x^2+6x-4=0$.

20. $3x^3-7x^2-7x+3=0$.

21. $\frac{x+1}{x^3+x-1}+\frac{x^3+x-1}{x+1}=2$.

22. $(x^2+3x-2)^2+3(x^2+3x-2)-2=x$.

23. $\frac{2x^2+x+2}{3x^2-x+3}=\frac{2x^2-3x+2}{x^2-x+1}$.

24. $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=\frac{40}{9}$.

25. $(x-2)(x+1)(x+4)(x+7)=63$.

26. $(x^2-x-1)^2+3x^2=3x+7$.

27. $(x+1)^4=2(x^4+1)$.

28. $\left(\frac{x^2-2x+3}{x}\right)^2-5x=\frac{15}{x}-16$.

29. $\frac{3(x^2+1)^2}{(x^2-2x+3)^2}-\frac{4x^2+4}{x^2-2x+3}+1=0$.

30. $5x^4-36x^3+62x^2-36x+5=0$.

31. $x^4-7x^3+14x^2-7x+1=0$. **32.** $2x^4-15x^3+40x^2-45x+18=0$.

33. $5\left(x^2+2x\right)^2-11\left(x^2+2x\right)\left(x^2+x+1\right)+6\left(x^2+x+1\right)^2=0$.

34. $x^3+3x^2-6x-8=0$. **35.** $x^3+5x^2+15x+27=0$.

36. $8x^3-6x^2+3x-1=0$. **37.** $27x^3-15x^2+5x-1=0$.

38. $243x^4-108x^3+1=0$. **39.** $6x^3+11x^2-x-6=0$.

40. $\dfrac{2x}{x-b}-\dfrac{12x^2}{x^2-b^2}=\dfrac{b-x}{b+x}$. **41.** $\dfrac{2a^2+x^2}{a^3-x^3}-\dfrac{2x}{ax+a^2+x^2}+\dfrac{1}{x-a}=0$.

42. $\dfrac{a^2+2x}{x-a}=\dfrac{x-a}{x+a}$. **43.** $\dfrac{ax^2}{x-1}-2a=a^2+1$.

44. $\dfrac{x+p}{p-x}+\dfrac{x-p}{x+p}=\dfrac{p}{p^2-x^2}$. **45.** $1-\dfrac{3}{x+a-1}=\dfrac{5a}{(x+a-1)(x+1)}$.

46. $\dfrac{(x-4)(x+a)}{x^2-(2a-2)x-2a+1}=0$. **47.** $x^4-\left(a^2+3\right)x^2+3a^2=0$.

48. $x^6+\left(8a^3+27\right)x^3+216a^3=0$.

Найти все значения параметра, при которых уравнения имеют единственное решение:

49. $\dfrac{x^2+(3b-1)x+2b^2-2}{x^2-3x-4}=0$. **50.** $\dfrac{x^2+(3-2k)x+4k-10}{\sqrt{2x^2-2x-1}}=0$.

Ответы:

1. $\left\{\frac{1}{2};1;2\right\}$. **2.** $\{3\}$. **3.** $\{-1\}$. **4.** $\left\{\frac{\sqrt{21}-5}{6};\frac{-\sqrt{21}-5}{6}\right\}$. **5.** $\left\{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

6. $\left\{\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}\right\}$. **7.** $\left\{-3\pm\sqrt{7}\right\}$. **8.** $\left\{\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}\right\}$. **9.** $\left\{0;\ -2;\ \frac{-2\pm\sqrt{66}}{2}\right\}$.

10. $\left\{2;\ \frac{1}{4}\right\}$. **11.** $\left\{-1;\ 2\pm\sqrt{3}\right\}$. **12.** $\left\{4\pm\sqrt{10}\right\}$. **13.** $\left\{-\frac{1}{4};\ -4\right\}$. **14.** $\left\{-\frac{5}{4};\ 5\right\}$.

15. $\{1;\ 2\}$. **16.** $\{1\}$. **17.** $\{-1;\ 2\}$. **18.** $\left\{-2\pm\sqrt{2};\ \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$. **19.** $\left\{1;\ 1\pm\sqrt{5}\right\}$.

20. $\left\{-1;\ 3;\ \frac{1}{3}\right\}$. **21.** $\left\{\sqrt[3]{2}\right\}$. **22.** $\left\{-1\pm\sqrt{3};\ -2\pm\sqrt{2}\right\}$. **23.** $\{1\}$. **24.** $\left\{\pm 2;\ \pm\sqrt{\frac{5}{11}}\right\}$.

25. $\left\{\frac{-5\pm\sqrt{93}}{2}\right\}$. **26.** $\{-1;\ 2\}$. **27.** $\left\{1+\sqrt{3}\pm\sqrt{3+2\sqrt{3}}\right\}$. **28.** $\left\{1;\ 3;\ \frac{5\pm\sqrt{13}}{2}\right\}$.

29. $\{0;\ \pm1\}$. **30.** $\left\{1;\ 5;\ \frac{1}{5}\right\}$. **31.** $\left\{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2};\ 2\pm\sqrt{3}\right\}$. **32.** $\left\{1;\ 2;\ \frac{3}{2};\ 3\right\}$. **33.** $\{1\}$.

34. $\{-4;\ -1\}$. **35.** $\{-3\}$. **36.** $\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **37.** $\left\{\frac{1}{3}\right\}$. **38.** $\left\{\frac{1}{3}\right\}$. **39.** $\left\{-\frac{3}{2};\ \frac{2}{3};\ -1\right\}$.

40. При $b\neq0$ $x=\pm\frac{b}{3}$; при $b=0$ решений нет. **41.** При $a\neq0$ $x=\frac{a}{2}$; при $a=0$ решений нет. **42.** При $a\neq-2$ и $a\neq0$ $x\in\left\{-a^2;\ -a\right\}$, при $a\in\{-2;\ 0\}$ решений нет. **43.** При $a\neq0$ и $a\neq1$ $x\in\left\{a+1;\ 1+\frac{1}{a}\right\}$, при $a=1$ $x=2$, при $a=0$ решений нет. **44.** При $p=0$ $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, при $p\in\left\{\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\right\}$ решений нет, при $p\in\mathbb{R}\setminus\left\{0;-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$ $x=\frac{1}{2}$. **45.** При $a=-3$ $x=2$, при $a=0$ $x=4$, при $a\in\mathbb{R}\setminus\{0;\ -3\}$ $x\in\{4;\ -a-1\}$. **46.** При $a=2{,}5$ $x=-2{,}5$, при $a\in\left\{1;\ \frac{1}{3}\right\}$ $x=4$, при $a\notin\left\{2{,}5;\ 1;\ \frac{1}{3}\right\}$ $x\in\{-a;\ 4\}$.

47. $\left\{\pm a;\ \pm\sqrt{3}\right\}$. **48.** $\{-2a;\ -3\}$. **49.** $b\in\{-1;\ 3/2;\ -5;\ 0\}$.

50. $k\subset\left[\frac{3-\sqrt{3}}{4};\ \frac{3+\sqrt{3}}{4}\right]\cup\{3{,}5\}$.

6. РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА И СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ

Решить неравенства:

1. $x+\dfrac{2}{x}>3$. **2.** $2x+1>\dfrac{1}{x}$. **3.** $x^2>\dfrac{1}{x^2}$.

4. $\dfrac{x^2-5x+2}{x-3}>x$. **5.** $\dfrac{(3x-1)(4-x)}{(2x+3)^2}\le 0$. **6.** $\dfrac{\sqrt{4-x^2}\,(x-1)(x+1)^2}{x-3}>0$.

7. $4x<x^2<4x+5$. **8.** $\dfrac{\sqrt{3+2x-x^2}}{x-2}<0$. **9.** $\dfrac{1-x}{\sqrt{2+x-x^2}}<0$.

10. $(x+3)\sqrt{4-3x-x^2}\ge 0$. **11.** $\dfrac{4x-17}{x-4}+\dfrac{10x-13}{2x-3}>\dfrac{8x-30}{2x-7}+\dfrac{5x-4}{x-1}$.

12. $\dfrac{x+6}{x-6}\left(\dfrac{x-4}{x+4}\right)^2+\dfrac{x-6}{x+6}\left(\dfrac{x+9}{x-9}\right)^2>2\dfrac{x^2+36}{x^2-36}$.

13. $\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}+\dfrac{x^2+8x+20}{x+4}>\dfrac{x^2+4x+6}{x+2}+\dfrac{x^2+6x+12}{x+3}$.

14. $x^2+\dfrac{4x^2}{(x+2)^2}<5$. **15.** $2x^2+2x+1-\dfrac{15}{x^2+x+1}<0$.

16. $\dfrac{1}{2x+1}-\dfrac{2}{2x+3}+\dfrac{3}{3+4x}<\dfrac{4}{5x+4}$. **17.** $\dfrac{(x+1)^4}{x(x^2+1)}<\dfrac{128}{15}$.

18. $\dfrac{(2x-1)^3(-2x^2+3x-2)(x^2-6x+9)}{(x^3-1)(x-2)^6(x^2+3x+2)}\ge 0$.

19. $(x^2+7x-8)^2+(x^3+2x-3)^2\le 0$.

20. $\dfrac{1}{x^2-4}+\dfrac{4}{2x^2+7x+6}\le\dfrac{1}{2x+3}+\dfrac{4}{2x^3+3x^2-8x-12}$.

21. $(2x^2-5x+3)(3-x^3)<0$. **22.** $\dfrac{(2x-1)^2(x^2-6x+8)(3x+2)^3}{(2x+1)^2(x^2-6x+5)(3x-2)^3}\le 0$.

23. $\dfrac{x^2}{4-x}+\dfrac{2x-8}{x^2}\ge 1$. **24.** $\dfrac{(x+3)(2x+1)}{x+4}<\dfrac{(x+3)(x-1)}{x+4}$.

25. $(x^2+3x)(2x+3)-\dfrac{16(2x+3)}{x^2+3x}\ge 0$. **26.** $\dfrac{x^2-x-1}{2x^2+x-2}\ge\dfrac{x}{3x^2-x-3}$.

27. $x^2+\dfrac{x^2-8x+16}{x^2-2x+1}>\dfrac{8x-2x^2}{x-1}$.

28. Найти целые положительные значения x, удовлетворяющие неравенству $\dfrac{5x+1}{x-1}>2x+2$.

Решить неравенства для каждого значения a:

29. $ax>\dfrac{1}{x}$.

30. $\dfrac{2a}{x}-\dfrac{1}{x-1}>1$.

Найти область определения функций:

31. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}}$.

32. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}}$.

33. $f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{x^2-6x-16}{x^2-12x+11}}+\dfrac{2}{x^2-49}$.

34. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x-6}}{7x-12-x^2}+\dfrac{x-3}{4-x^2}$.

35. При каких значениях параметра p функция

$\sqrt{(4-p)x^2-5x+\dfrac{5}{8}(1-p)}$ определена при всех $x\in\mathbb{R}$?

Найти все значения параметра p, при которых неравенство верно для всех $x\in\mathbb{R}$:

36. $2x^2-10x+5>p\left(x^2+10\right)$.

37. $-9<\dfrac{3x^2+px-6}{x^2-x+1}<6$.

38. Решить неравенство $a^3x^4+6a^2x^2-x+9a+3\geq 0$ для каждого значения $a\geq 0$.

Решить системы неравенств:

39. $\begin{cases}4x^2-4x-3\leq 0,\\ \dfrac{1}{x^2}\geq 1.\end{cases}$

40. $\begin{cases}x^2-4<0,\\ x+1>0,\\ \dfrac{1}{2}-x>0.\end{cases}$

41. $\begin{cases}x+\dfrac{3}{x}\geq -4,\\ \dfrac{x+1}{x-2}>\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

42. $\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{2x+3}{3}+\dfrac{x^2}{3}<2-\dfrac{x+5}{2},\\ 1-\dfrac{x+5}{4}+\dfrac{4-x}{2}<x^2-\dfrac{x+1}{4}.\end{cases}$

43. $\begin{cases}x^3-5x^2+10x-12\leq 0,\\ x^2-4x+3\geq 0,\\ x^2-6x+8\leq 0.\end{cases}$

44. Найти все значения параметра a, при которых решением системы $\begin{cases} \dfrac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}<2, \\ \dfrac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}>-3 \end{cases}$ является вся числовая прямая.

Ответы:

1. $(0;1)\cup(2;+\infty)$. **2.** $(-1;0)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **3.** $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **4.** $(1;3)$.

5. $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{3}\right]\cup[4;+\infty)$. **6.** $(-2;-1)\cup(-1;1)$. **7.** $(-1;0)\cup(4;5)$.

8. $(-1;2)$. **9.** $(1;2)$. **10.** $\{-4\}\cup[-3;1]$. **11.** $(-\infty;1)\cup\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{7}{2};4\right)$.

12. $\left(-6;\frac{6-6\sqrt{26}}{5}\right)\cup(0;6)\cup\left(\frac{6+6\sqrt{26}}{5};9\right)\cup(9;+\infty)$.

13. $(-4;-3)\cup\left(-\frac{5}{2};-2\right)\cup(-1;0)$. **14.** $(-1;2)$. **15.** $(-2;1)$.

16. $\left(-\frac{4}{5};-\frac{3}{4}\right)\cup\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{2}\right)\cup(0;+\infty)$. **17.** $(-\infty;0)\cup\left(\frac{1}{3};3\right)$.

18. $(-2;-1)\cup\left[\frac{1}{2};1\right)\cup\{3\}$. **19.** $\{1\}$. **20.** $\left(-2;-\frac{3}{2}\right)\cup[1;2)\cup[5;+\infty)$.

21. $(1;\sqrt[3]{3})\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$. **22.** $\left[-\frac{2}{3};-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)\cup(1;2]\cup[4;5)$.

23. $(-\infty;-4]\cup[2;4)$. **24.** $(-\infty;-4)\cup(-3;-2)$.

25. $[-4;-3)\cup\left[-\frac{3}{2};0\right)\cup[1;+\infty)$. **26.** $\left[1-\sqrt{2};\frac{1-\sqrt{37}}{6}\right)\cup\{0\}$.

27. $\mathbb{R}\setminus\{-2;2;1\}$. **28.** $\{2\}$. **29.** При $a>0$ $x\in\left(-\frac{1}{\sqrt{a}};0\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{a}};+\infty\right)$, при $a\le 0$ $x\in(-\infty;0)$; **30.** $a>2$ $x\in\left(a-\sqrt{a^2-2a};a+\sqrt{a^2-2a}\right)$, при $a\in[0;2]$ $x\in(0;1)$, при $a<0$ $x\in\left(a+\sqrt{a^2-2a};1\right)$.

31. $(-\infty; -1)\cup[4; +\infty)$. **32.** $(1; +\infty)$.

33. $(-\infty; -7)\cup(-7; -2]\cup(1; 7)\cup(7; 8]\cup(11; +\infty)$.

34. $(-\infty; -3)\cup(2; 3)\cup(3; 4)\cup(4; +\infty)$. **35.** $(-\infty; -1]$. **36.** $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right)$.

37. $(-3; 6)$. **38.** При $a=0$ $x\in[-2; -1)$, при $a\in\left(0; \dfrac{1}{12}\right)$ $x\in\left(-\infty; \dfrac{1-\sqrt{1-12a}}{2a}\right]\cup\left[\dfrac{1+\sqrt{1-12a}}{2a}; +\infty\right)$, при $a\ge\dfrac{1}{12}$ $x\in\mathbb{R}$.

39. $\left[-\dfrac{1}{2}; 0\right)\cup(0; 1]$. **40.** $\left(-1; \dfrac{1}{2}\right)$. **41.** $[-3; -1]\cup(0; 2)\cup(2; +\infty)$. **42.** $(1; 3)$.

43. $\{3\}$. **44.** $(-1; 2)$.

7. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Задачи на движение

1. Поезд был задержан на переезде на 16 мин и ликвидировал опоздание на перегоне в 80 км, идя со скоростью на 10 км/ч большей, чем полагалось по расписанию. Какова скорость поезда по расписанию?

2. Моторная лодка прошла 90 км по течению реки и 44 км против течения, затратив на весь путь 10 ч. Найти скорость лодки в стоячей воде, зная, что скорость течения реки 2 км/ч.

3. Два автобуса выехали одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми 1764 км. В пункт C, расположенный на расстоянии 900 км от A, второй автобус прибыл на 1 ч раньше первого. Найти скорости автобусов, если у второго она была больше на 6 км/ч.

4. Из города A в город B, расстояние между которыми 150 км, одновременно отправляются два автомобиля. Первый проезжает в час на 10 км больше второго и приезжает в B на полчаса раньше него. Найти скорость первого автомобиля.

5. Две автомашины вышли одновременно из пунктов A и B, при этом до пункта C первая машина должна пройти 216 км, а вторая – 252 км. В пункт C первая машина пришла на 1 ч позже второй; скорость первой машины была на 9 км/ч меньше, чем скорость второй. С какими скоростями двигались машины?

6. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 40 км, выехал велосипедист. Второй велосипедист выехал из пункта A на 3 мин позже первого, и, проехав 4 км, обогнал его. Доехав до пункта B, второй велосипедист повернул обратно, и на расстоянии 4 км от пункта B велосипедисты встретились. Определить скорости велосипедистов.

7. Два лыжника стартовали друг за другом с интервалом в 15 мин. Второй лыжник догнал первого в 15 км от места старта. Пройдя 50 км, второй лыжник повернул обратно и встретил первого на расстоянии 5 км от места поворота. Найти скорости лыжников.

8. Из города A в город B, расстояние между которыми 20 км, была отправлена грузовая машина. Через 8 мин вслед за ней выехал автобус, который прибыл в город B одновременно с машиной. Скорость автобуса на 5 км/ч больше скорости грузовой машины. Найти скорость автобуса.

9. Два велосипедиста выезжают одновременно из городов A и B навстречу друг другу. Первый проезжает в час на 2 км больше второго и прибывает в B на 1 ч раньше, чем второй в A. Расстояние между A и B равно 24 км. Сколько километров проезжает каждый в час?

10. Первый велосипедист выехал из пункта A, второй одновременно с ним – из пункта B. В пункт C, отстоящий от A на 90 км и от B на 84 км, первый велосипедист приехал на 2 ч раньше, чем второй; при этом выяснилось, что скорость первого велосипедиста была больше скорости второго на 6 км/ч. Найти скорости велосипедистов.

11. Расстояние между A и B равно 650 км. Из A и B навстречу друг другу отправляются два автобуса. Если они выйдут одновременно, то встреча произойдет через 10 ч; если же первый выйдет на 4 ч 20 мин раньше второго, то они встретятся через 8 ч после отправления второго. Определить среднюю скорость каждого автобуса.

12. Расстояние между пунктами A и B равно 60 км, причем 2/3 – шоссе, а остальная часть – грунтовая дорога. Найти скорость движения автомобиля на грунтовой дороге и шоссе, если скорость его движения на шоссе на 20 км/ч больше скорости на грунтовой дороге, а на весь путь он затратил всего 2 ч.

13. Два тела при движении по окружности в одном и том же направлении сходятся через каждые 56 мин. Если бы они двигались с теми же скоростями, но в противоположных направлениях, то встречались бы через каждые 8 мин. Известно, что при движении по окружности в противоположных направлениях расстояние между сближающимися телами уменьшилось на 14 м за 24 с. Какова скорость каждого тела?

14. Два спортсмена бегают по одной замкнутой дорожке стадиона. Скорость каждого постоянна, но на пробег всей дорожки один тратит на 5 с меньше другого. Если они начнут бег с общего старта одновременно и в одном направлении, то снова окажутся рядом через 30 с. Через какое время они встретятся, если побегут одновременно с общей линии старта в противоположных направлениях?

15. Поезд вышел из пункта A в пункт B в 13 ч. В 19 ч он остановился на 2 ч, затем увеличил скорость на 20%, но в пункт B прибыл с опозданием на 1 ч. В другой раз поезд, шедший по тому же расписанию, остановился на 150 км дальше, чем накануне, и простоял 2 ч. После, увеличив скорость на 20%, пришел в B с опозданием на 1,5 ч. Найти расстояние между A и B.

16. Поезд прошел 60 км и был остановлен на 12 минут. Оставшиеся 60 км поезд проехал со скоростью, на 15 км/ч большей первоначальной, и потому прибыл в пункт назначения вовремя. Найти первоначальную скорость поезда.

17. Велосипедисту надо было проехать расстояние в 30 км. Выехав на 3 мин позже назначенного срока, велосипедист ехал со скоростью, большей на 1 км/ч, и прибыл на место вовремя. Определить скорость, с которой ехал велосипедист.

18. По сигналу тренера два бегуна одновременно побежали по круговой дорожке стадиона в противоположных направлениях. Первый бегун пробежал к месту встречи на 500 м больше второго. Продолжая бег в том же направлении, первый прибежал к месту старта через 9 минут после встречи, а второй – через 16 минут после встречи. Каков диаметр дорожки?

19. Из пункта A кольцевого шоссе одновременно в одном направлении выехали автомобиль и мотоцикл. Автомобиль проехал дважды без остановок по всему маршруту в одном направлении. В тот момент, когда автомобиль догнал мотоциклиста, мотоциклист повернул обратно, увеличил скорость на 16 км/ч и через 22,5 мин после разворота одновременно с автомобилем прибыл в пункт A. Найти весь путь мотоциклиста, если этот путь на 5,25 км короче всего шоссе.

20. Катер обеспечивает регулярный перевоз пассажиров между пунктами A и B, расположенными вдоль по течению реки. Если бы собственная скорость катера возросла в 2 раза, то путь от A до B и обратно потребовал бы в 5 раз меньше того времени, которое катер обычно затрачивает на этот путь. Во сколько раз собственная скорость катера больше скорости течения реки?

Ответы:

1. 50 км/ч. **2.** 13 км/ч. **3.** 90 и 96 км/ч. **4.** 60 км/ч. **5.** 27 и 36 км/ч. **6.** 16 и 20 км/ч. **7.** 15 и 20 км/ч. **8.** 30 км/ч. **9.** 8 и 6 км/ч. **10.** 18 и 2 км/ч. **11.** 35 и 30 км/ч. **12.** 20 и 40 км/ч. **13.** 20 и 15 м/мин. **14.** 6 с. **15.** 600 км. **16.** 60 км/ч. **17.** 25 км/ч. **18.** $\frac{3500}{\pi}$ м. **19.** 21 км. **20.** В $\sqrt{3/2}$ раз.

Задачи на совместную работу и планирование

1. Бригада рабочих должна была погрузить 144 т зерна. Чтобы закончить погрузку на 1 ч раньше, чем планировалось, в бригаду добавили одного рабочего. Сколько рабочих было занято на погрузке, если каждый из них грузил по 2 т в час?

2. Два насоса, работая одновременно, могут выкачать воду из котлована за 3 ч 36 мин. Один первый насос затратит на эту работу на 3 ч больше, чем один второй. За какое время может выкачать воду каждый насос?

3. Два каменщика, из которых второй начинает работать на 3 дня позже первого, могут выстроить стену в 14 дней. Если бы эта работа была поручена каждому отдельно, то для ее выполнения первому потребовалось бы на 6 дней больше, чем второму. За сколько дней каждый из них может выстроить такую стену?

4. Две бригады собрали вместе 1794 ц зерна. Первая бригада собрала зерно с 46 га, а вторая бригада – с 35 га. Сколько центнеров собрала в среднем с 1 га каждая бригада в отдельности, если первая собрала с каждых 8 га на 57 ц больше, чем вторая бригада собрала с 5 га?

5. Первый рабочий может окончить некоторую работу на 5 дней позже, чем второй рабочий, и на 9 дней позже, чем третий рабочий. Первый и второй рабочие, работая вместе, могут окончить эту работу во столько дней, во сколько ее может закончить третий рабочий. За сколько дней каждый рабочий в отдельности может закончить эту работу?

6. Первая мастерская должна была сшить 180 костюмов, а вторая 161 костюм. Первая затратила на выполнение заказа на 3 дня меньше, чем вторая. Сколько костюмов в день шила каждая мастерская, если первая шила в день на 2 костюма больше, чем вторая?

7. Трое рабочих могут выполнить работу за 4 ч. Первый может выполнить эту работу вдвое быстрее второго и на 3 ч быстрее третьего. За какое время каждый рабочий может выполнить эту работу?

8. Бак емкостью 2400 $м^3$ наполняется топливом. При опорожнении этого же бака производительность насоса на 10 $м^3/мин$ выше, чем производительность насоса при наполнении. В результате время опорожнения бака на 8 мин меньше времени наполнения. Определить производительность насоса при наполнении бака.

9. Машинистка рассчитала, что если она будет печатать ежедневно на 2 листа больше установленной нормы, то окончит работу ранее намеченного срока на 3 дня, если же она будет печатать на 4 листа сверх нормы, то окончит работу на 5 дней раньше срока. Сколько листов она должна напечатать и в какой срок?

10. Некоторым числом насосов нужно перекачать 1440 $м^3$ жидкого топлива. Увеличение числа насосов на 4 привело к тому, что количество топлива, которое должен был перекачать каждый насос, уменьшилось на 18 $м^3$. Определить первоначальное число насосов.

11. Комбайн работал на уборке урожая в течение 26 ч. После этого ему стал помогать второй комбайн, и через 4 ч совместной работы был убран весь урожай. За сколько часов мог бы убрать урожай каждый комбайн, работая отдельно, если известно, что второму для этого понадобилось бы на 12 ч меньше, чем первому?

12. Две бригады, работая совместно, могут закончить сенокос за 4 дня. За сколько дней могла бы выполнить эту работу одна первая бригада, если известно, что производительность второй бригады в 1,5 раза больше производительности труда первой бригады?

13. Два трактора могут вспахать поле за 60 ч. Однако после 12 ч совместной работы первый трактор был переведен на другой участок, и второй трактор, проработав еще 80 ч, закончил вспашку один. За сколько часов мог бы вспахать поле каждый трактор в отдельности?

14. Два крана различной мощности, работая вместе, разгружают корабль за 6 ч. Мощность первого крана в три раза больше мощности второго. За какое время может разгрузить корабль каждый кран в отдельности?

15. Одна бригада выполняла задание в течение 3,5 дней, затем она была заменена второй, которая работала еще 6 дней. За сколько дней каждая бригада в отдельности выполнила бы задание, если известно, что второй бригаде для этого нужно на 5 дней больше, чем первой?

16. Один из двух заводов может выполнить некоторый заказ на 4 дня скорее, чем другой. Во сколько времени может каждый из них выполнить этот заказ, если известно, что при совместной работе они выполнили за 24 дня заказ, в пять раз больший?

17. Перейдя на более производительный станок, рабочий стал экономить 3 мин при обработке одной детали, а за 6-часовую смену обрабатывать на 10 деталей больше, чем прежде. Сколько деталей делает теперь рабочий за смену?

18. Если сначала половину заказа выполнит один рабочий, а потом другую половину – второй, то весь заказ будет выполнен за 2 ч. Если же первый рабочий выполнит одну треть заказа, а потом оставшуюся часть выполнит второй, то весь заказ будет выполнен за 2 ч 10 мин. За сколько времени каждый рабочий отдельно может выполнить весь заказ?

19. Два автомобиля, работая вместе, должны были перевезти некоторый груз в течение 20 ч. Однако работу смог начать только один автомобиль, до прибытия второго автомобиля он перевез 80% груза. Остальную часть груза перевез второй автомобиль, и весь груз был перевезен таким образом за 36 ч. Сколько времени нужно было бы каждому автомобилю в отдельности для перевозки всего груза?

20. Бассейн наполняется через две трубы за 6 ч 40 мин. Через одну первую трубу он наполняется на 3 ч скорее, чем через одну вторую. За какое время через каждую трубу, действующую отдельно, может заполниться бассейн?

21. Два комбайна разной мощности, работая вместе, убирают на участке хлеб за 12 ч. Если бы первый комбайн работал один в течение 8 ч, а затем второй – в течение 2 ч, то они убрали бы 50% всего хлеба. За сколько часов каждый комбайн может убрать хлеб с этого участка?

22. Несколько рабочих взялись выгрузить 160 т зерна. Так как на работу явилось на 4 человека больше, то каждому пришлось выгрузить на 2 т меньше. Сколько рабочих было занято на выгрузке?

23. Один рабочий взялся выполнить заказ за 16 дней при условии, что в течение 9 дней ему будет помогать второй рабочий. Если бы этот заказ был поручен каждому рабочему отдельно, то для его выполнения первому потребовалось бы на 7 дней, больше чем второму. За сколько дней каждый из них может выполнить заказ?

24. Рабочий должен был по плану изготовить за несколько дней 72 детали. Так как рабочий каждый день изготавливал на 2 детали меньше плана, то закончил работу через 3 дня после срока. Сколько деталей в день должен был изготавливать рабочий по плану?

25. Первый насос перекачивает на 6 $м^3/мин$ воды больше, чем второй, поэтому для наполнения бассейна объемом 720 $м^3$ ему требуется на 4 мин меньше, чем второму. Сколько кубометров воды перекачивает каждый насос в минуту?

26. Двое рабочих, работая одновременно, выполнили всю работу за 5 дней. Если бы первый рабочий работал в два раза быстрее, а второй в два раза медленнее, то всю работу они выполнили бы за 4 дня. Во сколько дней выполнил бы всю работу первый рабочий?

27. Рабочий должен изготовить 40 деталей. После того как была выполнена четверть работы, он стал изготавливать на одну деталь в час больше, чем планировал, а всю работу выполнил за 7 ч. За какое время он должен был выполнить эту работу по плану?

28. Двое рабочих должны были изготовить по 27 деталей. Второй рабочий приступил к работе на 9 мин позднее первого. По трети задания они выполнили к одному времени, а чтобы закончить работу одновременно, второй рабочий сделал за первого 2 детали. Сколько деталей в час изготавливал каждый рабочий?

29. Два каменщика, работая вместе, сложили стену за 20 дней. За сколько дней выполнил бы эту работу каждый из них в отдельности, если известно, что первый должен работать на 9 дней больше второго?

30. Заводу было поручено изготовить 8000 деталей к определенному сроку. Работая точно по графику, завод выполнил 25% заказа, а затем стал изготавливать ежедневно по 100 деталей сверх дневного задания и выполнил заказ за 2 дня до срока. Сколько дней понадобилось заводу для выполнения заказа?

31. Бассейн наполняется водой двумя трубами за 6 ч. Одна первая труба наполняет его на 5 ч быстрее, чем одна вторая. За какое время отдельно каждая труба может заполнить бассейн?

32. Двум машинисткам было поручено выполнить некоторую работу. Вторая из них приступила к работе на 1 ч позднее первой. Через 3 ч после того, как первая начала работу, им оставалось выполнить еще 0,45 всей работы. По окончании работы оказалось, что каждая машинистка выполнила половину всей работы. За сколько часов каждая из них в отдельности могла бы выполнить всю работу?

33. В бак проведены две трубы. Если сначала половину бака наполнить через одну первую трубу, а потом другую половину через одну вторую трубу, то весь бак наполнится через 2 ч. Если же через первую трубу наполнить одну треть бака, а потом оставшуюся часть наполнить через одну вторую трубу, то весь бак наполнится через 2 ч 10 мин. За какое время каждая труба отдельно может наполнить весь бак?

34. При выполнении всей работы двое рабочих работали по очереди: сначала первый 2 ч, а затем второй 3 ч. Всю работу первый рабочий может выполнить самостоятельно на 2 ч быстрее, чем второй. За сколько времени всю работу может выполнить каждый рабочий?

35. На прокладке двух параллельных трубопроводов работали два экскаватора. Первый из них начал работу на 30 мин раньше второго. Когда второй экскаватор прокопал 27 м, оказалось, что он отстает от первого на 1 м. С какой скоростью копали экскаваторы, если известно, что второй выкапывает за 1 ч на 4 м больше, чем первый?

36. Для перевозки 17,5 т угля выделены автомашины. Так как две из них были использованы на другой работе, то на каждую машину погрузили на 1 т больше, чем предполагалось. Сколько автомашин было занято на перевозке угля?

37. Трое рабочих могут выполнить работу за $2\frac{1}{7}$ ч. Первый может выполнить эту работу вдвое быстрее второго и на 1 ч быстрее третьего. За какое время каждый рабочий может выполнить эту работу?

Ответы:

1. 9 раб. **2.** 9 и 6 ч. **3.** 28 и 22 дн. **4.** 21.5 и 23 ц. **5.** 15; 10 и 6 дн. **6.** 9 и 7 кост. **7.** 9; 18; 12 ч. **8.** 50 $м^3$/мин. **9.** 120 л за 15 дн. **10.** 16 нас. **11.** 36 и 24 ч. **12.** 10 дн. **13.** 100 и 150 ч. **14.** 8 и 24 ч. **15.** 7 и 12 дн. **16.** 12 и 8 дн. **17.** 40 дет. **18.** 90 и 150 мин. **19.** 30 и 60 ч. **20.** 12 и 15 ч. **21.** 18 и 36 ч. **22.** 20 раб.

23. 21 и 28 дн. **24.** 8 дст. **25.** 36 и 30 $м^3/мин$. **26.** 10 дн. **27.** 8 ч. **28.** 12 и 15 дет/ч. **29.** 45 и 36 дн. **30.** 14 дн. **31.** 10 и 15 ч. **32.** 10 и 8 ч. **33.** 1,5 и 2,5 ч. **34.** 4 и 6 ч. **35.** 14 и 18 м/ч. **36.** 5 авт. **37.** 5, 10, 6 ч.

Задачи на зависимость между компонентами арифметических действий

1. Сумма квадратов цифр положительного двузначного числа равна 13. Если из этого числа отнять 9, то получится число, записанное этими же цифрами в обратном порядке. Найти это число.

2. Среднее геометрическое двух чисел на 12 больше меньшего из них, а среднее арифметическое тех же чисел на 24 меньше большего из них. Найти эти числа.

3. Найти два таких числа, чтобы их сумма, произведение и разность квадратов были равны.

4. Знаменатель несократимой дроби на 2 больше, чем числитель. Если у дроби, обратной данной, уменьшить числитель на 3 и вычесть из полученной дроби данную дробь, то получится 1/15. Найти данную дробь.

5. Трехзначное число оканчивается цифрой 3. Если эту цифру перенести влево, т.е. поместить вначале, то новое число будет на единицу больше утроенного первоначального. Найти первоначальное число.

6. Произведение цифр двузначного числа в 3 раза меньше самого числа. Если к искомому числу прибавить 18, то получится число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти это число.

7. Найти двузначное число, если известно, что оно в 5 раз больше суммы его цифр и в 2,25 раза превышает произведение его цифр.

8. При делении двузначного числа на произведение его цифр получается 1 и в остатке 16. Если же к квадрату разности цифр этого числа прибавить произведение его цифр, то получится заданное число. Найти это число.

9. Сумма двух чисел равна 20, их произведение равно 96. Найти эти числа.

10. Сумма квадратов цифр некоторого двузначного числа равна 65. Если к этому числу прибавить 27, то получится число, которое записывается теми же цифрами, что и первоначальное, но в обратном порядке. Найти это число.

11. На дороге на расстоянии 10 м один от другого лежало нечетное число столбов, которые требовалось собрать в то место, где находится средний по счету столб. Начав с одного из крайних столбов, рабочий перевез все столбы по одному, причем для этого в общей сложности ему пришлось пройти 3 км. Сколько столбов перевез рабочий?

12. От шнура отрезана $1/2$ всего шнура и $1/2$ см, потом отрезана $1/2$ остатка и еще $1/2$ см, наконец, $1/2$ остатка и еще $1/2$ см, после чего осталось 12 см. Какой длины был шнур?

13. Мальчик покупал игрушки: за первую он заплатил $1/5$ своих денег, за вторую – $3/7$ оставшихся денег, за третью – $3/5$ оставшихся денег, после чего у мальчика осталось 1 руб. 92 коп. Сколько денег было у мальчика?

Ответы:

1. 32. **2.** 6 и 54. **3.** $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; или $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; или 0 и 0.

4. $\frac{3}{5}$. **5.** 103. **6.** 24. **7.** 45. **8.** 37 и 48. **9.** 8 и 12. **10.** 47. **11.** 24. **12.** 103 см.

13. 10 руб. 50 коп.

Задачи на проценты

1. В банк помещен вклад в размере 3900 тыс. руб. под 50% годовых. В конце каждого из первых четырех лет хранения после начисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года после начала начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725%. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял к вкладу?

2. За год работы предприятия объем дневной выработки продукции вырос на p%, а за следующий год еще на $(p+50)$%. Определить, на сколько процентов увеличилась выработка за первый год, если известно, что за два года она возросла в общей сложности в 3 раза.

3. Партию обуви, купленную за 180 млн. руб., в первую неделю продавали по цене, больше закупочной на 25%, затем наценка была снижена до 16% от закупочной цены, а вся партия обуви была продана по цене на 20% дороже, чем куплена. На какую сумму продали обуви в первую неделю?

4. Рабочий день уменьшился с 8 до 7 ч. На сколько процентов нужно повысить производительность труда, чтобы при тех же расценках заработная плата возросла на 5%?

5. Найти три числа, если первое составляет 80% второго, второе относится к третьему как 1/2 к 9/20, а сумма первого и третьего на 70 больше второго числа.

6. Свежие грибы содержат по массе 90% воды, а сухие – 12%. Сколько получится сухих грибов из 22 кг свежих?

7. На вступительных экзаменах по математике 15% поступающих не решили ни одной задачи, 144 человека решили задачи с ошибками, а число решивших все задачи верно относится к числу не решивших вовсе как 5:3. Сколько человек экзаменовалось по математике?

8. Выработка продукции за год работы предприятия возросла на 4%, за следующий год она увеличилась на 8%. Найти средний ежегодный прирост продукции за этот период.

9. Цена на товар была повышена на 25%. На сколько процентов надо теперь ее снизить, чтобы получить первоначальную цену товара?

10. Рабочий IV разряда зарабатывает на 25% больше, чем рабочий III разряда. На сколько процентов меньше зарабатывает рабочий III разряда по сравнению с рабочим IV разряда?

11. На овощной базе имелся крыжовник, влажность которого составляла 99%. За время хранения влажность уменьшилась на 1%. На сколько процентов уменьшилась масса крыжовника?

12. На первом поле 65% площади засеяно овсом. На втором поле под овес занято 45% площади. Известно, что на первом и втором полях вместе под овес занято 53% общей площади. Какую часть всей засеянной площади составляет первое поле?

13. Число 51,2 трижды увеличивали на одно и то же число процентов, а потом трижды уменьшали на то же самое число процентов. В итоге получилось число 21,6. На сколько процентов увеличивали, а затем уменьшали это число?

14. Кооператив назначил на свои изделия цену, на определенное число процентов выше государственной, а потом уценил свои изделия на то же самое число процентов, в результате его цена стала на 1% ниже государственной. На какое число процентов кооперативная цена первоначально превышала государственную?

15. Брат и сестра нашли вместе 36 белых грибов. Известно, что количество процентов, выражающее, на сколько брат собрал больше, чем сестра, в 2 раза больше, чем количество процентов, выражающее, на сколько сестра собрала меньше брата. Сколько грибов нашел брат и сколько – сестра?

16. В спортивной секции девочки составляют 60% числа мальчиков. Сколько процентов числа всех участников составляют девочки?

17. На некотором участке пути машинист увеличил скорость поезда на 25%. На сколько процентов уменьшилось время прохождения этого участка?

Ответы:

1. 210 тыс. руб. **2.** 50%. **3.** 100 млн. руб. **4.** 20%. **5.** 80; 100; 90. **6.** 2,5 кг. **7.** 240 чел. **8.** 6,16%. **9.** 20%. **10.** На 20%. **11.** На 50%. **12.** $2/5$. **13.** На 50%. **14.** На 10%. **15.** 24 и 12. **16.** 37,5%. **17.** На 20%.

Задачи на сплавы и смеси

1. Имеются два слитка, содержащие медь. Масса второго слитка на 3 кг больше, чем масса первого слитка. Процентное содержание меди в первом слитке 10%, во втором – 40%. Когда их сплавили, получился слиток, в котором содержится 30% меди. Найти массу полученного слитка.

2. Один сплав содержит два металла в соотношении 1:2, а другой сплав содержит те же металлы в соотношении 2:3. Из скольких частей обоих сплавов можно получить новый сплав, содержащий те же металлы в соотношении 17:27?

3. Кусок сплава весом 700 г, содержащий 80% олова, сплавили с куском олова весом 300 г. Определить процентное содержание олова в полученном сплаве.

4. Имеется два слитка – сплавы цинка с медью. Масса первого слитка – 2 кг, второго – 3 кг. Эти два слитка сплавили с третьим – сплавом цинка с медью весом 5 кг, в котором цинка было 45% и получили сплав, в котором цинка стало 50%. Если бы процентное содержание цинка в первом слитке было бы равно процентному содержанию цинка во втором слитке, а процентное содержание цинка во втором слитке такое же, как в первом, то сплавив эти два слитка с 5 кг сплава, в котором 60% цинка, мы бы получили сплав, в котором цинка содержится 55%. Найти процентное содержание цинка в первом и во втором слитках.

5. Имеется два слитка сплавов золота и меди. В первом слитке отношение золота к меди равно 1:2, а во втором – 2:3. Если сплавить $1/3$ первого слитка с $5/6$ второго, то в получившемся слитке окажется столько золота, сколько было в первом меди, а если $2/3$ первого слитка сплавить с половиной второго, то в получившемся слитке окажется меди на 1 кг больше, чем было золота во втором слитке. Сколько золота в каждом слитке?

6. Имеется три сплава. Первый сплав содержит 60% алюминия, 15% меди и 25% магния, второй – 30% меди и 70% магния, третий – 45% алюминия и 55% меди. Из них необходимо приготовить новый сплав, содержащий 20% меди. Какое наименьшее и какое наибольшее процентное содержание алюминия может быть в новом сплаве?

7. От двух сплавов массой 7 и 3 кг с разным процентным содержанием магния отрезали по куску одинаковой массы. Затем кусок, отрезанный от первого сплава, сплавили с остатком второго сплава, а кусок, отрезанный от второго – с остатком первого. Определить массу каждого из отрезанных кусков, если в новых сплавах одинаковое процентное содержание магния.

8. К раствору, который содержит 40 г соли, добавили 200 г воды, после чего его концентрация уменьшилась на 10%. Сколько воды содержал раствор и какова была его концентрация?

9. Смешали 10%-ный и 25%-ный растворы соли и получили 3 кг 20%-ного раствора. Какое количество каждого раствора в килограммах было использовано?

10. Имеется два сосуда, содержащих 4 кг и 6 кг раствора кислоты разных концентраций. Если их слить вместе, то получится раствор, содержащий 35% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 36% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в каждом сосуде?

11. В двух одинаковых сосудах, объемом по 30 л каждый содержится всего 30 л кислоты. Первый сосуд доливают доверху водой и полученной смесью дополняют второй сосуд, затем из второго сосуда отливают в первый 12 л смеси. Сколько кислоты было первоначально в первом сосуде, если во втором сосуде после переливаний оказалось на 2 л кислоты меньше, чем в первом?

12. В сосуде находится смесь воды с кислотой. Чтобы уменьшить концентрацию кислоты на 34%, надо долить 3 л воды, а чтобы уменьшить ее на 17%, надо долить 1 л воды. Какова концентрация кислоты в сосуде?

13. Имеются два сосуда. В одном содержится 3 л 100%-ной серной кислоты, а в другом – 2 л воды. Из первого сосуда во второй перелили один стакан кислоты, а затем из второго в первый – один стакан смеси. Эту операцию повторили еще 2 раза. В результате во втором сосуде образовалась 42%-ная серная кислота. Каков процент кислоты в первом сосуде?

14. Из сосуда, доверху наполненного чистым глицерином, отлили литр глицерина, а взамен долили литр воды. После перемешивания снова отлили литр смеси и долили литр воды. Затем еще раз проделали то же самое. В результате объем воды в сосуде оказался в 7 раз больше объема оставшегося глицерина. Сколько литров глицерина и сколько воды осталось в сосуде?

Ответы:

1. 9 кг. **2.** 9:35. **3.** 86%. **4.** 40% и 65%. **5.** 1,2 кг и 2,4 кг. **6.** От 15% до 40%. **7.** 2,1 кг. **8.** 160 г; 20%. **9.** 1 кг и 2 кг. **10.** 1,64 кг и 1,86 кг. **11.** 20 л. **12.** 68%. **13.** 72%. **14.** $\frac{1}{4}$ л глиц.; $\frac{7}{4}$ л воды.

8. ЗАДАЧИ НА ПРОГРЕССИИ

1. Сколько членов арифметической прогрессии нужно взять, чтобы их сумма равнялась 91, если ее третий член равен 9, а разность седьмого и второго членов равна 20?

2. Найти возрастающую арифметическую прогрессию, у которой сумма первых трех членов равна 27, а сумма их квадратов равна 275.

3. Все члены арифметической прогрессии – натуральные числа. Сумма ее девяти последовательных членов, начиная с первого, больше 200, но меньше 220. Найти прогрессию, если ее второй член равен 12.

4. В арифметической прогрессии четвертый член равен 4. При каком значении разности этой прогрессии сумма попарных произведений первых трех членов прогрессии будет наименьшей?

5. Доказать, что числа $\dfrac{1}{\log_3 2}$; $\dfrac{1}{\log_6 2}$; $\dfrac{1}{\log_{12} 2}$ образуют арифметическую прогрессию.

6. Найти четыре целых числа, составляющих арифметическую прогрессию, в которой наибольший член равен сумме квадратов остальных членов.

7. Сумма трех чисел равна 11/18, а сумма обратных им чисел, составляющих возрастающую арифметическую прогрессию, равна 18. Найти эти числа.

8. Четвертый член геометрической прогрессии больше второго члена на 24, а сумма второго и третьего членов равна 6. Найти эту прогрессию.

9. Сумма первых четырех членов геометрической прогрессии равна 30, а сумма следующих четырех членов равна 480. Найти сумму первых двенадцати членов.

10. Сумма первых трех чисел, образующих геометрическую прогрессию, равна 13, а сумма их квадратов равна 91. Найти эти числа.

11. Разность между первым и пятым членами геометрической прогрессии, все члены которой – положительные числа, равна 15, а сумма первого и третьего членов этой прогрессии равна 20. Вычислить сумму первых пяти членов прогрессии.

12. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 31, а сумма первого и третьего членов равна 26. Найти седьмой член прогрессии.

13. Число членов геометрической прогрессии четное. Сумма всех членов прогрессии в 3 раза больше суммы членов, стоящих на нечетных местах. Найти знаменатель прогрессии.

14. В геометрической прогрессии первый, третий и пятый члены соответственно равны первому, четвертому и шестнадцатому членам некоторой арифметической прогрессии. Вычислить четвертый член арифметической прогрессии, если ее первый член равен 5.

15. Три числа, сумма которых равна 28, образуют геометрическую прогрессию. Если к первому числу прибавить 3, ко второму 1, а от третьего отнять 5, то полученные числа образуют арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

16. Три числа образуют арифметическую прогрессию. Если к первому числу прибавить 8, получится геометрическая прогрессия с суммой членов 26. Найти эти числа.

17. Найти четыре числа, из которых первые три составляют геометрическую прогрессию, а последние три – арифметическую прогрессию. Сумма крайних чисел равна 14, а сумма средних равна 12.

18. Между числом 3 и неизвестным числом вставлено еще одно число так, что все три числа образуют арифметическую прогрессию. Если средний член уменьшить на 6, то получится геометрическая прогрессия. Найти неизвестное число.

19. Разность арифметической прогрессии отлична от нуля. Числа, равные произведениям первого члена этой прогрессии на второй, второго члена на третий и третьего на первый, образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найти ее знаменатель.

20. Найти трехзначное число, если его цифры образуют геометрическую прогрессию, а цифры числа, меньшего на 400, – арифметическую.

21. Найти трехзначное число, цифры которого образуют геометрическую прогрессию, если известно, что после его уменьшения на 495 получается число, записанное такими же цифрами, какими записано искомое число, но расположенными в обратном порядке; если цифры числа, получившегося после вычитания, уменьшить (слева направо) соответственно на 1, на 1 и на 2, то получится арифметическая прогрессия.

22. Сумма трех последовательных членов геометрической прогрессии равна 62, а сумма их десятичных логарифмов равна 3. Найти члены прогрессии.

23. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, второй член которой, удвоенное произведение первого члена на четвертый и третий член образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью, равной $1/3$.

24. Две бесконечно убывающие геометрические прогрессии таковы, что первый член и знаменатель первой прогрессии являются соответственно знаменателем и первым членом второй прогрессии. Отношение суммы первой прогрессии к сумме квадратов всех ее членов равно $3/8$, а такое же отношение для второй прогрессии равно 4,5. Найти сумму каждой прогрессии.

25. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, сумма которой равна 13,5, содержит член, равный $1/3$. Отношение суммы всех членов прогрессии, стоящих до него, к сумме всех членов прогрессии, стоящих после него, равно 78. Найти порядковый номер этого члена.

26. Числа $x_1; x_2; x_3; x_4$ образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найти a и b, если: а) $x_1; x_2$ – корни уравнения $x^2-3x+a=0$, $x_3; x_4$ – корни уравнения $x^2-12x+b=0$; б) $x_1; x_2$ – корни уравнения $x^2+ax+4=0$, $x_3; x_4$ – корни уравнения $x^2+bx+16=0$.

Решить уравнения:

27. $(x+1)+(x+4)+...+(x+28)=155$. **28.** $1+7+13+...+x=280$.

29. $1+x+x^2+...+x^{109}=0$. **30.** $\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}+\frac{x-3}{x}+...+\frac{1}{x}=3$.

31. $2x+1+x^2-x^3+x^4-x^5+...=\frac{13}{6}$, где $|x|<1$. **32.** $\frac{1}{x}+x+x^2+...x^{100}=0$.

33. $1+2x+4x^2+...+(2x)^n+...=3,4-1,2x$, где $|x|<0,5$.

34. При каких значениях x три числа в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию:

а) $\sqrt{x}; \sqrt[3]{x}; \sqrt[4]{x}$; б) $\sqrt{x-1}; \sqrt{5x-1}; \sqrt{12x-1}$?

Ответы:

1. 7. **2.** $a_1=5; d=4$. **3.** $a_1=8; d=4$. **4.** $d=24/11$. **6.** –1; 0; 1; 2. **7.** 1/9; 1/6; 1/3. **8.** 1/5; 1; 5; 25. **9.** 8190. **10.** 1; 3; 9. **11.** 31. **12.** 1/625 или 15625. **13.** 2. **14.** 5 или 20. **15.** 4; 8; 16. **16.** 10; 6; 2 или –6; 6; 18. **17.** 2; 4; 8; 12 или 12,5; 7,5; 4,5; 1,5. **18.** 27 или 3. **19.** –2. **20.** 931. **21.** 964. **22.** 2; 10; 50 или 50; 10; 2. **23.** 1,125. **24.** $3/4$; $2/3$. **25.** 4. **26.** а) $a=2; b=32$, или $a=-18; b=-288$; б) $a=-5$; $b=-10$, или $a=5; b=10$, или $a=-5$; $b=10$ или $a=5$; $b=-10$. **27.** $\{1\}$. **28.** $\{55\}$. **29.** $\{-1\}$. **30.** $\{7\}$. **31.** $\{1/2; -7/9\}$. **32.** $\varnothing$. **33.** $\{1/3\}$. **34.** а) $\left\{0; 1; \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{12}\right\}$; б) $\{2; 10\}$.

9. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ

Уравнения с модулем

Группа I

Решить уравнения:

1. $|5-3x|=2x+1$.

2. $|2x-3|=3-2x$.

3. $|x^2-3x|+x=2$.

4. $x^2+7x=|3x+2|-4$.

5. $||2x-3|-1|=x$.

6. $11x+|x^2-x+3|=0$.

7. $x|3x+5|=3x^2+4x+3$.

8. $x^2-7=|3x-7|$.

9. $2|x^2+2x-5|=x-1$.

10. $|6x+15|=2x^2+7x+5$.

11. $1+x+|x^2-x-3|=0$.

12. $|3x^2-x|=8+x$.

13. $x^2+|6-x|=4$.

14. $|x^2-6|x|+4|=1$.

15. $x^2-7|x|+6=0$.

16. $|3x^2-3x+5|=|2x^2+6x-3|$.

17. $|3x^2-6x-1|=2|3-x|$.

18. $\left|\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+4x-12}\right|+\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+4x-12}=0$.

19. $\dfrac{2x^2+3}{x^2+x}+\left|\dfrac{4x^2+6}{x^2+x}\right|=6$.

20. $|x-1|+|x-3|=2x-4$.

21. $|x|-x+2=|2x-2|$.

22. $|7x-12|-|7x-11|=1$.

23. $(1+x)|x+2|+x|x-3|=6x+2$.

24. $x^2-3x+\dfrac{3,5-x}{|x-3,5|}=0$.

25. $(x^2-5x+6)^2+3|x-3|=0$.

26. $||x+3|-|x-1||=2-x^2$.

27. $|x^3+x+1|=|x^2+3x-1|$.

28. $\dfrac{5}{3-|x-1|}=|x|+2$.

29. $||3x+2|-x|=4-x$.

30. $\dfrac{1-2x}{3-|x-1|}=1$.

31. $|6-2x|=|2x|-6$.

32. $|2x+1|+|3x-5|=5x+1$.

33. $|2x-3|-|x+1|=|3-x|-1$

34. $||2x-1|-3x|=2$.

35. $||x-1|-|2x+1||=4$.

36. $||3x+2|-x|=4-x$.

37. $|||x-1|+2|-1|+1|=2$.

38. $2|x+6|-|x|-|x-6|=18$.

39. $|x^2-1|=1-|x|$.

40. $|x-1||x+2|=4$.

41. $|9-x^2|=5$.

42. $|x-6|=|x^2-5x+9|$.

43. $\dfrac{4}{|x+1|-2}=|x+1|$.

44. $x^2+4x+(|x+2|+2)^2=6$.

45. $|4x-5|-|2-x|=0$.

46. $x^2-4x\dfrac{|x-\pi|}{x-\pi}+2=0$.

47. $x^2+\dfrac{5x^2}{|x|}-6=0$.

48. $|x-|x-|x-1|||=\dfrac{1}{2}$.

49. $|(x+1)|x|-x|=1$.

50. $|x|^3+|1-x|^3=9$.

51. $\left(\dfrac{x-4}{|x-3|-1}\right)^2+\dfrac{2x-8}{x-2}-8=0$.

52. $\dfrac{12|x|-3x^2}{x^2-4|x|+1}=x^2-4|x|$.

53. $||x^3-\sqrt{x+1}|-3|=x^3+\sqrt{x+1}-7$.

54. $(x-2)\left(|x|+\sqrt{3}-1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$.

55. $|px-1|=1-px$.

56. $a|x+3|+2|x+4|=2$.

57. $|x-2|+a|x+3|=5$.

58. $|x+3|-a|x-1|=4$.

59. $|2x+a|=4a-x$.

60. $|4x-2a|=|x+3a|$.

61. $\sqrt{|x|+1}-\sqrt{|x|}=a$.

62. $(x+1)|x-1|-a=0$.

63. $|x^2-5x+4|+a=0$.

64. $x|x+1|+a=0$.

65. $\sqrt{|5x-7|-27}=x-7$.

66. $\sqrt{5x-34}=|x-3|-4$.

Найти все значения параметра a, при которых выполняются следующие условия:

67. Уравнение $|x+2a-7|=a-x+1$ имеет положительные решения. Найти эти решения.

68. Уравнение $8+4a(x-2)=(x-|x|)x$ имеет ровно один корень. Найти этот корень.

69. Уравнение имеет два различных корня. Найти эти корн..

а) $x^2+x|x|=4(1+2ax-3a)$; б) $x^2+x|x|=2(3+2ax-4a)$;

в) $(x+2)^2=2a(|x|+x-2)$; г) $(x-2)^2=2a(|x|-x-2)$.

70. Уравнение $|x^2-1|=2x-x^2+a$ имеет единственное решение.

71. Уравнение $\left|\frac{(a-1)x-(2a-1)}{x-1}\right|+\left|x-|1-a|+\frac{1}{2}\right|=0$ имеет лишь положительные решения.

72. Уравнение $|x+a^3|+|x+1|=1-a^3$ имеет не меньше четырех различных целых решений.

73. Уравнение имеет два различных корня. Найти эти корни.

а) $|x^2-4x+3|=a(x-1)$; б) $x^2-x|x|+a(x+1)=2$;

в) $|x^2-x-2|=a(x+1)$; г) $x^2-x|x|+a(x+2)=8$.

74. Определить число решений уравнения $\sqrt{2|x|-x^2}=a$ в зависимости от параметра a.

75. Найти число решений уравнения $|x^2-6x+8|+|x^2-6x+5|=a$.

76. При каких значениях параметра a уравнение $|x-a|-|2x+2|=3$ имеет единственное решение?

Ответы:

1. $\left\{\frac{4}{5};6\right\}$. **2.** $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right]$. **3.** $\{1-\sqrt{3};\ 2-\sqrt{2}\}$. 4. $\{-5-\sqrt{19}\}$. **5.** $\left\{4;\ \frac{2}{3}\right\}$.

6. $\{-5\pm\sqrt{22}\}$. 7. $\{3\}$. **8.** $\left\{3;\ \frac{-3\pm\sqrt{65}}{2}\right\}$. **9.** $\left\{\frac{3}{2};\ \frac{\sqrt{113}-5}{4}\right\}$. **10.** $\left\{-\frac{11}{2};-\frac{5}{2};2\right\}$.

11. $\{-\sqrt{2};\sqrt{5}-1\}$. **12.** $\left\{2;-\frac{4}{3}\right\}$. **13.** $\{-1;-2\}$. **14.** $\{\pm(3+\sqrt{6});\ \pm1;\ \pm5\}$.

15. $\{\pm1;\ \pm6\}$. **16.** $\{1;8\}$. **17.** $\left\{-1;\ 1;\frac{7}{3};\frac{5}{3}\right\}$. **18.** $(-6;2)\cup(2;3]$. **19.** $\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

20. $\left(-\infty;\ \frac{2}{3}\right]$. **21.** $\{0;\ 2\}$. **22.** $\left(-\infty;\frac{11}{7}\right]$. **23.** $[-2;\ 3]$. **24.** $\left\{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$. **25.** $\{3\}$.

26. $\{0;\ 1-\sqrt{5}\}$. **27.** $\{0;\ 1\}$. **28.** $\{-2+\sqrt{5};\ 3\}$. **29.** $\left\{-2;\ \frac{2}{3}\right\}$. **30.** $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

31. $[3;\ +\infty)$. **32.** $\left\{\frac{5}{6}\right\}$. **33.** $\{0\}\cup[3;\ +\infty)$. **34.** $\left\{-\frac{1}{5};\ 1\right\}$. **35.** $\{-6;\ 2\}$.

36. $\{-2;\ 2/3\}$. **37.** $\{1\}$. **38.** $[6;\ +\infty)$. **39.** $\{-1;\ 0;\ 1\}$. **40.** $\{2;\ -3\}$.

41. $\{\pm 2;\ \pm\sqrt{14}\}$. **42.** $\{1;\ 3\}$. **43.** $\{\sqrt{5};-2-\sqrt{5}\}$. **44.** $\{-3;-1\}$. **45.** $\{1;7/5\}$.

46. $\{2+\sqrt{2};\ -2\pm\sqrt{2}\}$. **47.** $\{6;\ -1\}$. **48.** $\{1/6;\ 1/2;\ 3/2\}$. **49.** $\{\pm 1;\ -1-\sqrt{2}\}$.

50. $\{-1;\ 2\}$. **51.** $\{0;\ 12/5\}$. **52.** $\{0;\ \pm 2;\ \pm 4\}$. **53.** $\{3\}$. **54.** $\{2\}$. **55.** При $p=0$ $x\in\mathbb{R}$, при $p>0$ $x\le 1/p$, при $p<0$ $x\ge 1/p$. **56.** При $a<-2$ или $a>2$ $x=-3$, при $-2<a<2$ $x\in\left\{-\frac{10+3a}{a+2};\ -3\right\}$, при $a=-2$ $x\ge -3$, при $a=2$ $x\in[-4;\ -3]$. **57.** При $a<-1$ или $a>1$ $x=-3$, при $a\in(-1;\ 1)$ $x\in\left\{\frac{7-3a}{a+1};\ -3\right\}$, при $a=-1$ $x\in(-\infty;\ -3]$, при $a=1$ $x\in[-3;\ 2]$. **58.** При $a<-1$ или $a>1$ $x=1$, при $a\in(-1;\ 1)$ $x\in\left\{\frac{a+7}{a-1};\ 1\right\}$, при $a=-1$ $x\in[-3;\ 1]$, при $a=1$ $x\in\mathbb{R}$. **59.** При $a\ge 0$ $x\in\{3a;\ -5a\}$, при $a<0$ решений нет. **60.** $\left\{\frac{5a}{3};\ -\frac{a}{5}\right\}$. **61.** При $a\in(0;\ 1]$ $x\in\left\{\pm\frac{\left(1-a^2\right)^2}{4a^2}\right\}$, при $a\le 0$ или $a>1$ решений нет. **62.** При $a<0$ $x=-\sqrt{1-a}$, при $a=0$ $x\in\{\pm 1\}$, при $a\in(0;\ 1)$ $x\in\{\sqrt{1+a};\ \pm\sqrt{1-a}\}$, при $a=1$ $x\in\{0;\ \sqrt{2}\}$, при $a>1$ $x=\sqrt{1+a}$. **63.** При $a>0$ решений нет, при $a=0$ $x\in\{1;\ 4\}$; при $a\in\left(-\frac{9}{4};\ 0\right)$ $x\in\left\{\frac{5\pm\sqrt{9-4a}}{2};\ \frac{5\pm\sqrt{9+4a}}{2}\right\}$, при $a=-\frac{9}{4}$ $x\in\left\{\frac{5\pm 3\sqrt{2}}{2};\ \frac{5}{2}\right\}$, при $a\in\left(-\infty;\ -\frac{9}{4}\right)$ $x\in\left\{\frac{5\pm\sqrt{9-4a}}{2}\right\}$. **64.** При $a<0$

$x=\dfrac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}$, при $a=0$ $x\in\{-1;\ 0\}$, при $a\in\left(0;\ \dfrac{1}{4}\right)$

$x\in\left\{\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4a}}{2};\ \dfrac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}\right\}$, при $a=\dfrac{1}{4}$ $x\in\left\{-\dfrac{1}{2};\ \dfrac{-1-\sqrt{2}}{2}\right\}$,

при $a>\dfrac{1}{4}$ $x=\dfrac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}$. **65.** $\left\{\dfrac{19+\sqrt{29}}{2}\right\}$. **66.** $\left\{\dfrac{19+\sqrt{29}}{2}\right\}$.

67. $a\in(2;\ 8)$ $x=4-(a/2)$. **68.** При $a\in[0;\ 1)$ $x=2(a-1)$, при

$a\in[1;\ +\infty)$ $x=\dfrac{2(a-1)}{a}$. **69.** а) $a\in\left(0;\ \dfrac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$, при $a\in\left(0;\ \dfrac{1}{3}\right)$

$x\in\left\{\dfrac{3a-1}{2a},\ 2a+\sqrt{4a^2-6a+2}\right\}$, при $a\in\left[\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$

$x\in\left\{2a\pm\sqrt{4a^2-6a+2}\right\}$; б) при $a\in(0;1)\cup(3;+\infty)$, при $a\in\left(0;\dfrac{3}{4}\right)$

$x\in\left\{\dfrac{4a-3}{2a},\ a+\sqrt{a^2-4a+3}\right\}$, при $a\in\left[\dfrac{3}{4};1\right)\cup(3;+\infty)$

$x\in\left\{a\pm\sqrt{a^2-4a+3}\right\}$; в) $a\in(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$, при $a\in(-\infty;-1]$

$x\in\left\{2(a-1)+2\sqrt{a(a-3)};-2-2\sqrt{-a}\right\}$, при $a\in(-1;0)$ $x\in\left\{-2a\pm2\sqrt{-a}\right\}$,

при $a\in(3;+\infty]$ $x\in\left\{2(a-1)\pm2\sqrt{a(a-3)}\right\}$; г) $a\in(-\infty;0)$, при $a\in(-\infty;-1)$

$x\in\left\{2(a+1)-2\sqrt{a(a+1)};\ 2+2\sqrt{-a}\right\}$, при $a\in(-1;0]$ $x\in\left\{2\pm2\sqrt{-a}\right\}$.

70 $a=-1$. **71.** $a\in\left\{-1;\ \dfrac{9+\sqrt{41}}{2}\right\}$. **72.** $a\in\left(-\infty;\ -\sqrt[3]{2}\right]$. **73.** а) При $a<-2$

$x\in\{1;\ a+3\}$, при $a=0$ $x\in\{1;\ 3\}$, при $a\geq2$ $x\in\{1;\ a+3\}$; б) при

$a\in(-\infty;\ 0)$ $x\in\left\{-1;\dfrac{a-2}{2}\right\}$, при $a=2$ $x\in\{-1;\ 0\}$; в) при $a<-3$

$x\in\{-1;\ a+2\}$, при $a=0$ $x\in\{-1;\ 2\}$, при $a\geq3$ $x\in\{-1;\ a+2\}$;

г) при $a\in(0;\ 4)$ $x\in\left\{\dfrac{2(4-a)}{a};\ \dfrac{4-a}{2}\right\}$, при $a=4$ $x\in\left\{\dfrac{2(4-a)}{a};\ -2\right\}$, при

$a\in(4;8)\cup(8;+\infty)$ $x\in\left\{-2;\dfrac{4-a}{2}\right\}$. **74.** При $a\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$ – решений нет, при $a=0$ – три решения, при $a\in(0;1)$ – четыре решения, при $a=1$ – два решения. **75.** При $a<3$ решений нет, при $a=3$ $x\in[1;2]\cup[4;5]$ – бесконечно много решений, при $a\in(3;5)$ – четыре решения, при $a=5$ – три решения, при $a>5$ – два решения. **76.** $a\in\{-4;2\}$.

Группа II

ЗАДАНИЕ 1

Решить уравнения:

1. $|x-1|=3$. **2.** $|x|=-3x-5$. **3.** $x^2+3x+|x+3|=0$.

4. $|x-1|+|x-3|=2$. **5.** $|x-1|+|x-2|+|x-3|=2$.

ЗАДАНИЕ 2

Решить уравнения:

1. $|x-7|=2$. **2.** $(x^2-5x+6)^2-5|x^2-5x+6|+6=0$.

3. $|x^2-4x+3|=-(4+2\sqrt{3})x$. **4.** $|x-1|+|x-3|=3$.

5. $|x^2-4x+3|+|x^2-5x+6|=1$.

ЗАДАНИЕ 3

Решить уравнения:

1. $|3x-5|=|5-2x|$. **2.** $2x^2-5|x|+3=0$.

3. $\dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}=1$. **4.** $x^2-6x+|x-4|+8=0$.

5. Найти все корни уравнения $|x^2+x-1|=2x-1$, удовлетворяющие неравенству $x<\sqrt{3}/3$.

6. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases}2x+2(a-1)y=a-4,\\ 2|x+1|=ay+2\end{cases}$ имеет единственное решение. Найти это решение.

ЗАДАНИЕ 4

Решить уравнения:

1. $|x-2|=3|3-x|$. **2.** $x^2-4|x|+3=0$.

3. $(x^2-2|x|)(2|x|-2)-9\dfrac{2|x|-2}{x^2-2|x|}=0$. **4.** $(1+|x|)^4=2(1+x^4)$.

5. Найти наименьшее целое значение x, удовлетворяющее уравнению $|x-3|+2|x+1|=4$.

6. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений
$\begin{cases} ax+(a-1)y=2+4a, \\ 3|x|+2y=a-5 \end{cases}$ имеет единственное решение. Найти это решение.

О т в е т ы:

ЗАДАНИЕ 1. **1.** $\{4;2\}$. **2.** $\{-5/2\}$. **3.** $\{-1;-3\}$. **4.** $1\le x\le 3$. **5.** $\{2\}$.

ЗАДАНИЕ 2. **1.** $\{5;9\}$. **2.** $\left\{1;4;\frac{1}{2}\left(5-\sqrt{13}\right);\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{13}\right)\right\}$ **3.** $\{-\sqrt{3}\}$. **4.** $\{3{,}5;0{,}5\}$.
5. $\left\{2;5/2;\left(9+\sqrt{17}\right)/4\right\}$

ЗАДАНИЕ 3. **1.** $\{0;2\}$. **2.** $\left\{-1;-\frac{3}{2};1;\frac{3}{2}\right\}$. **3.** $\left\{-\frac{2}{3};\frac{1}{2};2\right\}$. **4.** $\{3;4\}$. **5.** $\left\{-\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right\}$.
6. $\left(\frac{4a-a^2}{2a-4};\frac{a-4}{a-2}\right)$ при $a\in\left[\frac{2}{3};3-\sqrt{5}\right]$; $\left(\frac{a^2-12a+8}{6a-4};\frac{a}{3a-2}\right)$ при $a\in\left(3-\sqrt{5};2\right]$.

ЗАДАНИЕ 4. **1.** $\{11/4;7/2\}$. **2.** $\{-3;-1;1;3\}$. **3.** $\{-3;-1;1;3\}$.
4. $\left\{-1-\sqrt{3}-\sqrt{3+2\sqrt{3}};-1-\sqrt{3}+\sqrt{3+2\sqrt{3}};1+\sqrt{3}-\sqrt{3+2\sqrt{3}};\right.$
$\left.1+\sqrt{3}+\sqrt{3+2\sqrt{3}}\right\}$. **5.** $\{-1\}$. **6.** $\left(0;1-2\sqrt{3}\right)$ при $a=7-4\sqrt{3}$; $\left(0;1+2\sqrt{3}\right)$ при $7+4\sqrt{3}$; $(6;-11)$ при $a=1$.

Группа III

Решить уравнения:

1. $|x+2|=2(3-x)$. **2.** $|3x-2|+x=11$.

3. $|x|-|x-2|=2$.

4. $4-5x=|5x-4|$

5. $|2x-3|=3-2x$.

6. $|5x^2-3|=2$.

7. $|9-x^2|=5$.

8. $(x-1)^2+|x-1|-2=0$.

9. $|7x-12|-|7x-11|=1$.

10. $4\sqrt{x+1}=|2x-1|+3$.

11. $12x-3x^2-\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}-\dfrac{|4-x|}{\sqrt{x-1}}+|4-x|=3x|4-x|-\dfrac{4}{\sqrt{x-1}}+4$.

12. $|x^2-9|+|x-2|=5$.

13. $||x-1|+2|=1$.

14. $|x|+x^3=0$.

15. $|x|-2|x+1|+3|x+2|=0$

16. $|4x-1|=(3x-1)^{-1}$.

17. $(x+1)^2+|x+1|-2=0$.

18. $(x+2)^2=2|x+2|+3$.

19. $|5x-13|-|6-5x|=7$.

20. $x^2+4|x-3|-7x+11=0$.

21. $x^2-4|x+1|+5x+3=0$.

22. $x^2-4x+|x-3|+3=0$.

23. $|x-3|+|x+2|-|x-4|=3$.

24. $\dfrac{4}{|x+1|-2}=|x+1|$

25. $\dfrac{3}{|x+3|-1}=|x+3|$.

О т в е т ы:

1. $\left\{\dfrac{4}{3}\right\}$. **2.** $\left\{-\dfrac{9}{2};\dfrac{13}{4}\right\}$. **3.** $\{x:x:x\geq 2\}$. **4.** $\left\{x\leq\dfrac{4}{5}\right\}$. **5.** $\left\{x:x\leq\dfrac{3}{2}\right\}$.

6. $\left\{-1;-\dfrac{1}{\sqrt{5}};\dfrac{1}{\sqrt{5}};1\right\}$. **7.** $\{-2;-\sqrt{14};2;\sqrt{14}\}$. **8.** $\{0;2\}$. **9.** $\left\{x:x\leq\dfrac{11}{7}\right\}$.

10. $\{0;3\}$. **11.** $\{x:1<x\leq 4\}$. **12.** $\left\{-3;2;\dfrac{-1+\sqrt{65}}{2}\right\}$. **13.** $\varnothing$. **14.** $\{-1;0\}$. **15.** $\{-2\}$.

16. $\left\{\frac{7}{12}\right\}$. 17. $\{0;-2\}$. 18. $\{-5;1\}$. 19. $\left\{x : x \le \frac{6}{5}\right\}$. 20. $\left\{\frac{11-\sqrt{29}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$

21. $\left\{\frac{-9-\sqrt{53}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$. 22. $\{2;3\}$. 23. $\{2;-6\}$. 24. $\{-2-\sqrt{5};\sqrt{5}\}$.

25. $\left\{\frac{\sqrt{13}-5}{2}; \frac{-7-\sqrt{13}}{2}\right\}$.

Системы уравнений с модулем

Группа I

Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases} y+x-1=0, \\ |y|-x-1=0. \end{cases}$
2. $\begin{cases} y+x-1=0, \\ |y|-|x|-1=0. \end{cases}$
3. $\begin{cases} |x-1|+|y-5|=1, \\ y=5+|x-1|. \end{cases}$
4. $\begin{cases} |x+y|=1, \\ |x|+|y|=1. \end{cases}$
5. $\begin{cases} |x|+y^2=5, \\ |x|+|y|=3. \end{cases}$
6. $\begin{cases} x^2-|xy|=2, \\ y^2-|xy|=-1. \end{cases}$
7. $\begin{cases} 3x-y=1, \\ |x-2y|=2. \end{cases}$
8. $\begin{cases} x|x+5y|-16y^2=5xy, \\ x^2y-y^3=15. \end{cases}$
9. $\begin{cases} 3y+x=2, \\ \left|x-\frac{1}{y}\right|=2. \end{cases}$
10. $\begin{cases} \frac{|x|}{y}-y=\frac{y-x}{y}+4x, \\ y^2+2x=2|x|-y+2. \end{cases}$
11. $\begin{cases} x^2+2|y|=2y-x+6, \\ xy-|y|=y+3x. \end{cases}$
12. $\begin{cases} 2|x-2|+3|y+1|=4, \\ 2x-y=3. \end{cases}$
13. $\begin{cases} |2x+3y|=5, \\ |2x-3y|=1. \end{cases}$
14. $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}}=\frac{5}{2}, \\ |x+y|=5. \end{cases}$
15. $\begin{cases} a^2|x|+y=a^2, \\ |x|+ay=1. \end{cases}$
16. $\begin{cases} a|x|-y=1, \\ x+a|y|=a. \end{cases}$
17. $\begin{cases} ax+y=|a|, \\ ax+ay=a^2. \end{cases}$
18. $\begin{cases} |a|x+a^2y=a, \\ ax-a^2y=a^2. \end{cases}$

Найти все значения параметра, при которых системы имеют единственное решение:

19. $\begin{cases} 2x + y = |y-2|, \\ x = a(y-3). \end{cases}$ 20. $\begin{cases} ax + 4y + |x| = 0, \\ x + y + a = 0. \end{cases}$ 21. $\begin{cases} 2x = y - |y|, \\ \dfrac{x+1}{y-1} = a. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dfrac{x-y}{|x+y|} = 1, \\ \dfrac{y+1}{x-1} = a. \end{cases}$ 23. $\begin{cases} \dfrac{y+1}{x+1} = a, \\ x + |x-1| + 2y = 3. \end{cases}$ 24. $\begin{cases} x + |x+2| + 2y = 0, \\ \dfrac{y}{x+3} = a. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dfrac{y+1}{x+1} = a, \\ x + |x| + 2y = 0. \end{cases}$ 26. $\begin{cases} 2x = |y| - y, \\ \dfrac{x-1}{y-1} = a. \end{cases}$ 27. $\begin{cases} 4ax + y - a = 2, \\ (x + |x|)(y + a) = 2. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x^2 + 4x + (y+a)^2 = 1, \\ \dfrac{y}{x} = \dfrac{11x}{x - |x|}. \end{cases}$ 29. $\begin{cases} \dfrac{2 - |x| - |x-2|}{2x} = 1, \\ (x+a)^2 + a^2 - 2 = 0. \end{cases}$

Найти все значения параметра, при которых системы имеют единственное решение. Указать это решение:

30. $\begin{cases} y = x - |x|, \\ (x+1)^2 + y = a. \end{cases}$ 31. $\begin{cases} x + |x| + (1-y)^2 = 0, \\ (x-a)^2 + a = y + 5. \end{cases}$

32. $\begin{cases} \dfrac{x}{|x+1| + |x| - 1} = \dfrac{1}{2}, \\ (x-a)^2 + a^2 - 2a = 0. \end{cases}$ 33. $\begin{cases} 2(x-a)^2 + y = 10 - a, \\ y + \left(\dfrac{x-10}{|x| - 10}\right)^2 = 1. \end{cases}$

34. $\begin{cases} \dfrac{x-20}{|x| - 20} = 1, \\ (x-a)^2 + a - 20 = 0. \end{cases}$ 35. $\begin{cases} \dfrac{y-1}{|x| - x} = 0, \\ (x-a)^2 + (y+a-1)^2 = 1. \end{cases}$

36. $\begin{cases} y = |x^2 - 6x + 8|, \\ \dfrac{y}{x-2} = a. \end{cases}$ 37. $\begin{cases} y = |x-2|, \\ ax - y + 1 = 0. \end{cases}$

38. $\begin{cases} y = \dfrac{x+|x|}{|x|}, \\ (x-2)^2 + a = y. \end{cases}$

39. $\begin{cases} x^2 + 2x + y^2 = 1, \\ \dfrac{|x|-x}{y-a} = 2. \end{cases}$

40. $\begin{cases} x + |x| + (y-5)^2 = 0, \\ (x-a)^2 + a = y + 15. \end{cases}$

41. $\begin{cases} y = \dfrac{|x|}{x}, \\ (x+2)^2 = y + a. \end{cases}$

42. $\begin{cases} y = \sqrt{x \cdot |x|}, \\ y + 2a + 2(x-a)^2 = x + 4. \end{cases}$

43. $\begin{cases} \dfrac{y+1}{|x|+x} = 0, \\ (x+a)^2 + (y-a)^2 = 1. \end{cases}$

Найти все значения параметра, при которых системы имеют два различных решения:

44. $\begin{cases} x = 4y - 2a - 2, \\ (|x| - x)(y-a) = 2. \end{cases}$

45. $\begin{cases} y = \dfrac{2x^2}{|x|-x}, \\ (x+2a)^2 + (y-a+1)^2 = 8. \end{cases}$

46. $\begin{cases} (x+a+2)^2 + (y+2a)^2 = 2, \\ y + |x| = 0. \end{cases}$

47. $\begin{cases} x^2 + (y-a)^2 = 8x + 9, \\ \dfrac{y}{2} = \dfrac{|x|}{x}. \end{cases}$

48. $\begin{cases} (x+2)^2 + (y+a)^2 = 8, \\ \dfrac{|y|+y}{|x|-x} = 1. \end{cases}$

49. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4x, \\ |2 - x + y| = 2a - x - y. \end{cases}$

50. $\begin{cases} 2y = x + |x|, \\ (x+1-a)^2 = 4(y-a). \end{cases}$

51. $\begin{cases} \dfrac{y}{x^2}(x - |x|) = 1, \\ x^2 + 10x = 4y + a. \end{cases}$

52. $\begin{cases} y = |x^2 - 4x + 3|, \\ \dfrac{y}{x-3} = a. \end{cases}$

53. $\begin{cases} x^2 - 8x + y^2 = 4, \\ \dfrac{y-a}{x} = \dfrac{x+|x|}{x}. \end{cases}$

54. $\begin{cases} y(x - |x|) = x^2, \\ 4y + a = 6x + x^2. \end{cases}$

55. $\begin{cases} \dfrac{x}{|x-2| + |x| - 2} = -\dfrac{1}{2}, \\ (x-a)^2 + a^2 + 2a = 0. \end{cases}$

56. $\begin{cases} \left|x^2-7x+6\right|+x^2+5x+6-12|x|=0, \\ x^2-2(a-2)x+a(a-4)=0. \end{cases}$

Найти все значения параметра, удовлетворяющие заданным условиям:

57. Система $\begin{cases} y=\dfrac{p}{2}+\dfrac{5x}{|x|-x} \\ 2y+3+(x+p)^2=0 \end{cases}$ имеет решение. Найти эти решения при каждом p.

58. Система $\begin{cases} 2y=|x|-x \\ y=a+\dfrac{(x-a+1)^2}{2} \end{cases}$ имеет решение.

59. Система $\begin{cases} x+3|y|+5=0 \\ (x-a)^2+y^2=4 \end{cases}$ имеет три решения.

60. Система $\begin{cases} 2|x|+|y|=1 \\ x^2+y^2=a \end{cases}$ имеет восемь решений.

61. Система $\begin{cases} \sqrt{|y+3|}=1-\sqrt{5|x|} \\ 16a-9-6y=25x^2+y^2 \end{cases}$ имеет четыре решения.

62. Система $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ |y|-x=a \end{cases}$ имеет три решения.

63. Система $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ |x|+y-a=0 \end{cases}$ имеет четыре решения.

Исследовать число решений системы:

64. $\begin{cases} |x|+|y|=1, \\ x^2+y^2=a^2 \end{cases}$ $a>0$.

65. $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ |x|=y-a. \end{cases}$

66. $\begin{cases} x^2+y^2+10x=0, \\ y=|x-a|. \end{cases}$

67. $\begin{cases} x^2+6x+(y-a)^2=16, \\ \dfrac{y}{2}=\dfrac{|x|}{x}. \end{cases}$

68. $\begin{cases} |x|+|y|=a, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$

Ответы:

1. $\{(0;\,1)\}$. **2.** $x\in(-\infty;\,0]$, $y=1-x$. **3.** $\left\{\left(\frac{1}{2};\,\frac{11}{2}\right);\left(\frac{3}{2};\,\frac{11}{2}\right)\right\}$.

4. $\{(t;1-t)\,|\,t\in[0;1]\}$, $\{(t;-1-t)\,|\,t\in[-1;0]\}$. **5.** $\{(1;2);(-1;-2);(-1;2);(1;-2)\}$.

6. $\{(2;\,1);\,(2;\,-1);\,(-2;\,-1);\,(-2;\,1)\}$. **7.** $\left\{(0;\,-1);\left(\frac{4}{5};\,\frac{7}{5}\right)\right\}$.

8. $\left\{(4;\,1);\,(-4;\,1);\left(-8\sqrt[3]{\frac{5}{21}};\,\sqrt[3]{\frac{5}{21}}\right);\left(-2\sqrt[3]{5};\,\sqrt[3]{5}\right)\right\}$. **9.** $\left\{(-1;\,1);\left(1;\,\frac{1}{3}\right)\right\}$.

10. $\left\{\left(\frac{1}{5};\,-2\right);\left(\frac{-\sqrt{3}-1}{4};\,-\sqrt{3}\right)\right\}$. **11.** $\left\{\left(-3;\,\frac{9}{5}\right);\left(0;\,-\frac{3}{2}\right)\right\}$.

12. $\left\{\left(\frac{3}{2};\,0\right);\left(\frac{3}{4};\,-\frac{3}{2}\right)\right\}$. **13.** $\left\{\left(\frac{3}{2};\,\frac{2}{3}\right);\left(-\frac{3}{2};\,-\frac{2}{3}\right);\,(1;\,1);\,(-1;\,-1)\right\}$.

14. $\{(4;\,1);\,(1;\,4);\,(-4;\,-1);\,(-1;\,-4)\}$.

15. При $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1;\,1\}$ $\{(1;\,0);\,(-1;\,0)\}$, при $a\in\{-1;\,1\}$ $\{(1-ay;\,y);\,(-1+ay;\,y)\,|\,y\in\mathbb{R}\}$. **16.** При $a=0$ $\{(0;\,-1)\}$, при $a=1$ $\{(x;\,x-1)\,|\,x\in[0;\,1]\}$, при $a=-1$ $\{(x;\,-x-1)\,|\,x\geq 0\}$, при $a>1$ $\left\{\left(\frac{2a}{1-a^2};\,\frac{a^2+1}{a^2-1}\right);\left(\frac{2a}{1+a^2};\,\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)\right\}$, при $a\in(-\infty;\,-1)\cup(-1;\,0)\cup(0;\,1)$ решений нет. **17.** При $a<0$ $\left\{\left(\frac{-2a}{a-1};\,\frac{a^2+a}{a-1}\right)\right\}$, при $a=0$ $\{(x;\,0)\,|\,x\in\mathbb{R}\}$, при $a\in(0;\,1)\cup(1;\,+\infty)$ $\{(0;\,a)\}$, при $a=1$ $\{(x;\,1-x)\,|\,x\in\mathbb{R}\}$. **18.** При $a>0$ $\left\{\left(\frac{a+1}{2};\,\frac{1-a}{2a}\right)\right\}$, при $a=0$ $\{(x;\,y)\,|\,x,y\in\mathbb{R}\}$, при $a=-1$ $\{(x;\,-1-x)\,|\,x\in\mathbb{R}\}$, при $a\in(-\infty;\,-1)\cup(-1;\,0)$ решений нет. **19.** $a\in(-\infty;\,-1]\cup[0;\,+\infty)$.

20. $a\in(-\infty;\,3]\cup[5;\,+\infty)$. **21.** $(-\infty;\,0]\cup[1;\,+\infty)$. **22.** $a\in(-\infty;\,-1)\cup(-1;\,0]$.

23. $a\in(-\infty;\,-1]\cup[0;\,+\infty)$. **24.** $a\in(-\infty;\,-1]\cup[0;\,+\infty)$.

25. $a \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$. **26.** $a \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

27. $a \in (-\infty; 0] \cup \{1\}$. **28.** $a \in \{22 + \sqrt{519{,}25}\} \cup (-1; 1]$. **29.** $(0; 1] \cup \{2\}$.

30. $a \in (1; 2)$; $\{(\sqrt{a} - 1; 0)\}$. **31.** $a \in (-3; 2]$; $\{(a - \sqrt{6-a}; 1)\}$.

32. $a \in (0; 1] \cup \{2\}$, $\{(a + \sqrt{2a - a^2})\}$. **33.** При $a \in \left[-\dfrac{5}{2}; 2\right)$ $\left\{\left(\dfrac{2a + \sqrt{20 - 2a}}{2}\right); 0\right\}$, при $a = \dfrac{19}{2}$ $\{(9; 0)\}$. **34.** При $a \in [-5; 4)$ $\{a + \sqrt{20 - a}\}$, при $a = 19$ $\{18\}$. **35.** $a \in \{-1\} \cup \left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $\left\{\left(a - \sqrt{1 - a^2}\right); 1\right\}$. **36.** При $a < -2$ $\{(a + 4; a^2 + 2a)\}$, при $a = 0$ $\{(4; 0)\}$.

37. При $a \in (-\infty; -1) \cup [1; +\infty)$ $\left\{\left(\dfrac{1}{a+1}; \dfrac{2a+1}{a+1}\right)\right\}$. **38.** $a \in [-4; -2] \cup \{2\}$, $\{(2 + \sqrt{2 - a}; 2)\}$. **39.** $a \in \{-3\} \cup [-1; 1)$, $\left\{\left(\dfrac{a - 1 - \sqrt{-a^2 - 2a + 3}}{2}; \dfrac{a + 1 + \sqrt{-a^2 - 2a + 3}}{2}\right)\right\}$. **40.** $a \in (-5; 4]$, $\{(a - \sqrt{20 - a}; 5)\}$. **41.** $a = -1$, $\{(-2; -1)\}$. **42.** $a \in [-2; 1) \cup \{2\}$, $\{(a + \sqrt{2 - a}; a + \sqrt{2 - a})\}$. **43.** При $a = -2$ $\{(2; -1)\}$, при $a \in [-1; 0)$ $\{(-a + \sqrt{-a^2 - 2a}; -1)\}$. **44.** $(-\infty; -1)$.

45. $(7/5; 3)$. **46.** $(0; 4)$. **47.** $\{-3\} \cup [-1; 1) \cup (5; 7)$. **48.** $(-6; -2)$.

49. $\{3\} \cup (1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$. **50.** $(-\infty; -1] \cup \{0\}$. **51.** $[0; +\infty)$. **52.** $(-2; 0)$

53. $(-18; -2) \cup (-2; 2)$. **54.** $\{-1\} \cup [0; +\infty)$. **55.** $(-2; -1)$.

56. $a \in \{1; 2\} \cup [5; 6]$. **57.** При $p \in (-3; 1] \cup \{3\}$ $\left\{\left(-p - \sqrt{-p + 3}; \dfrac{p - 5}{2}\right)\right\}$, при $p \in (1; 3)$ $\left\{\left(-p - \sqrt{-p + 3}; \dfrac{p - 5}{2}\right); \left(-p + \sqrt{-p + 3}; \dfrac{p - 5}{2}\right)\right\}$.

58. $a\in\left(-\infty;\,-\frac{3}{4}\right]$. **59.** $a=-7$. **60.** $a\in\left(\frac{\sqrt{5}}{5};\,\frac{1}{2}\right)$. **61.** $a\in\left\{\frac{1}{16};\,\frac{1}{128}\right\}$.

62. $a\in\left(1;\,\sqrt{2}\right)$. **63.** $a=\sqrt{2}$. **64.** При $a\in\left(0;\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup(1;\,+\infty)$ решений нет, при $a\in\left\{\frac{\sqrt{2}}{2};\,1\right\}$ – четыре решения, при $a\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\,1\right)$ – восемь решений.

65. При $a\in\left(-\infty;\,-3\sqrt{2}\right)\cup(3;\,+\infty)$ нет решений, при $a=3$ – одно решение, при $a\in\left\{-3\sqrt{2}\right\}\cup(-3;\,3)$ – два решения, при $a=-3$ – три решения, при $a\in\left(-3\sqrt{2};\,-3\right)$ – четыре решения. **66.** При $a\in\left(-\infty;\,-5-5\sqrt{2}\right)\cup\left(-5+5\sqrt{2};+\infty\right)$ – нет решений, при $a\in\left\{-5\pm5\sqrt{2}\right\}$ – одно решение, при $a\in\left(-5-5\sqrt{2};\,-5+5\sqrt{2}\right)$ – два решения. **67.** При $a\in[-6;-2]\cup(3;\,6)\cup\{-7\}$ – одно решение, при $a\in(-7;\,-6)\cup(-2;\,2]$ – два решения, при $a\in(2;\,3)$ – три решения, при $a\in(-\infty;\,-7)\cup[6;\,+\infty)$ – решений нет. **68.** При $a\in(-\infty;1)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$ – решений нет, $a\in\left\{1;\,\sqrt{2}\right\}$ – четыре решения, при $a\in\left(1;\,\sqrt{2}\right)$ – восемь решений.

Группа II

Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases}2u+v=7,\\ |u-v|=2.\end{cases}$

2. $\begin{cases}3u-v=1,\\ |u-2v|=2.\end{cases}$

3. $\begin{cases}y+x-1=0,\\ |y|-x-1=0.\end{cases}$

4. $\begin{cases}|x-1|+y=0,\\ 2x-y=1.\end{cases}$

5. $\begin{cases}|x|+2|y|=3,\\ 5y+7x=2.\end{cases}$

6. $\begin{cases}|x-1|+|y-2|=1,\\ y=3-|x-1|.\end{cases}$

7. $\begin{cases} y-2|x|+3=0, \\ |y|+x-3=0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} |xy-4|=8-y^2, \\ xy=2+x^2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} y^2-|xy|+2=0, \\ 8-x^2=(x+2y)^2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} |x+3|+|x-2|=5, \\ 818-135x\le 137x^2. \end{cases}$

11. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \left|y+\dfrac{1}{x}\right|+\left|\dfrac{13}{6}\right|+x-y=\dfrac{13}{6}+x+\dfrac{1}{x}, \\ x^2+y^2=\dfrac{97}{36}, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $x<0$, $y<0$.

12. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \left|x+\dfrac{1}{y}\right|+\left|\dfrac{10}{3}-x+y\right|=\dfrac{10}{3}+y+\dfrac{1}{y}, \\ x^2+y^2=\dfrac{82}{9} \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $x>0$, $y>0$.

Для каждого значения параметра a найти все x, удовлетворяющие условию:

13. $|x+3|-a|x-1|=4$.

14. $|x-2|+a|x+3|=5$.

15. $a|x+3|+2|x+4|=2$.

16. $3|x-2|-a|2x+3|=21/2$.

17. Найти все решения уравнения $1+x+|x^2-x-3|=0$, удовлетворяющие неравенству $x+\sqrt{14}/3>0$.

Найти все значения параметра a, при которых уравнение имеет единственный корень:

18. $|1-ax|=1+(1-2a)x+ax^2$.

19. $|(a+1)x-2|=(1+a)x^2-2ax+2$.

Найти все значения параметра a, при которых существует одно значение x, удовлетворяющее системе уравнений:

20. $\begin{cases} |x^2-5x+4|-9x^2-5x+4+10x|x|=0, \\ x^2-2(a-1)x+a(a-2)=0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \left|x^2-7x+6\right|+x^2+5x+6-12|x|=0, \\ x^2-2(a-2)x+a(a-4)=0. \end{cases}$

Найти все значения параметра a, при которых следующие уравнения имеют три различных корня. Найти эти корни:

22. $x-a=2\left|2|x|-a^2\right|$.

23. $x-a/2=4\left|4|x|-a^2\right|$.

24. $x-a/3=9\left|9|x|-a^2\right|$.

25. $x-a/2=2\left|2|x|-a^2\right|$.

Найти все значения параметра a, при которых уравнения имеют два различных корня:

26. $x|x+2a|+1-a=0$.

27. $x^2+4x-2|x-a|+2-a=0$.

28. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$\begin{cases} y(ax+1)+13x-a(1+y)=0, \\ x-yx+|2+y|=0 \end{cases}$ имеет решение.

Ответы:

1. $(3;1),\left(\frac{5}{3};\frac{11}{3}\right)$. **2.** $(0;-1),\left(\frac{4}{5};\frac{7}{5}\right)$. **3.** $(0;1)$. **4.** $(0;-1)$. **5.** $\left(-\frac{11}{19};\frac{23}{19}\right)$, $(1;-1)$. **6.** $(c;4-c)$, где $c\in[1;2]$; $(c;c+2)$, где $c\in[0;1]$. **7.** $(2;1),(0;-3),(-6;9)$. **8.** $(2;2\sqrt{2}),(-\sqrt{2};-2\sqrt{2})$. **9.** $(2\sqrt{2};-\sqrt{2}),(-2\sqrt{2};\sqrt{2})$. **10.** $x=2$, $-3\le x\le-\frac{409}{137}$. **11.** $\left(-\frac{3}{2};\frac{2}{3}\right),\left(-\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right)$. **12.** $\left(\frac{1}{3};-3\right),\left(3;-\frac{1}{3}\right)$. **13.** 1. $\{x:x>1\}$ при $a=1$; $\{x:-3\le x\le1\}$ при $a=-1$; $\left\{\frac{7+a}{a-1};1\right\}$ при $|a|<1$; $\{1\}$ при $|a|>1$. **14.** $\{x:x\le3\}$ при $a=-1$; $\{x:-3\le x\le2\}$ при $a=1,\{-3\}$ при $|a|>1$; $\left\{-3;\frac{7-3a}{a+1}\right\}$ при $|a|<1$. **15.** $\{x:-4\le x\le-3\}$ при $a=2;\{x:x\ge-3\}$ при $a=-2;\left\{-3;-\frac{3a+10}{2+a}\right\}$ при $|a|<2;\{-3\}$ при $|a|>2$. **16.** $\left\{x:x\le-\frac{3}{2}\right\}$ при $a=\frac{3}{2};\left\{x:-\frac{3}{2}\le x\le2\right\}$ при $a=-\frac{3}{2}$; $\left\{-\frac{3}{2}\right\}$ при $|a|>\frac{3}{2}$;

$\left\{-\frac{3}{2};\frac{6a+33}{6-4a}\right\}$ при $|a|<\frac{3}{2}$. **17.** $\{1-\sqrt{5}\}$ **18.** $\{0;1\}$. **19.** $\{-1;1\}$.

20. $a=-1, 1<a<3, 4<a\le 6$. **21.** $a=1, a=2, 5\le a\le 6$. **22.** $\left\{-2;\frac{6}{5};\frac{10}{3}\right\}$ при $a=-2$; $\left\{-\frac{1}{5};0;\frac{1}{3}\right\}$ при $a=-\frac{1}{2}$. **23.** $\left\{-1;\frac{15}{17};\frac{17}{15}\right\}$ при $a=-2$; $\left\{-\frac{1}{136};0;\frac{1}{120}\right\}$ при $a=-\frac{1}{8}$. **24.** $\left\{-1;\frac{41}{40};\frac{40}{41}\right\}$ при $a=-3$; $\left\{-\frac{1}{3321};0;\frac{1}{3240}\right\}$ при $a=-\frac{1}{27}$. **25.** $\left\{-\frac{1}{2};\frac{3}{10};\frac{5}{6}\right\}$ при $a=-1$; $\left\{-\frac{1}{20};0;\frac{1}{12}\right\}$ при $a=-\frac{1}{4}$. **26.** $a=1$, $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **27.** $a<-\frac{7}{13}$, $a>-2$.

28. $a<-10$, $a>\frac{1}{2}$.

Неравенства и системы неравенств с модулем

Группа I

Решить неравенства:

1. $|3x-5|>9x+1$. **2.** $|2x-5|\le x$. **3.** $2|x+1|>x+4$.

4. $|x^2-5x|<6$. **5.** $|x^3-1|\ge 1-x$. **6.** $\left|\frac{3x+1}{x-5}\right|\ge 1$.

7. $\left|\frac{2x-1}{x^2-3}\right|\ge 3$. **8.** $\frac{x^2-1}{|x|-1}>0$. **9.** $|x^2+6x+5|>5+x$.

10. $||x-1|-2|>1$. **11.** $\frac{x^2-|x|-12}{x-3}\ge 2x$. **12.** $\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right|\le 1$.

13. $\frac{|x+3|}{x^2+5x+6}>2$. **14.** $\frac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^2}}>0$. **15.** $|x^2-3x|+2x\ge 4$.

16. $|2x-1|-|x-4|>4$. **17.** $|x-1|+|x-2|\ge x+3$. **18.** $\frac{|x-2|}{|x-1|-1}<1$.

19. $|3x+4|>|2x+11|$. **20.** $|x+2|-|x-1|>x-\frac{3}{2}$. **21.** $|x+3|>|x|$.

22. $\left|1-\frac{|x|}{1+|x|}\right|>\frac{1}{2}$. **23.** $|3x+1|-|x+2|<1$. **24.** $|2x-1|-4>|x+1|$.

25. $|x-1|+4>|2x+1|$. **26.** $|x-6|>|x^2-5x+9|$. **27.** $\frac{|x-1|+10}{4|x-1|+3}>2$.

28. $\frac{|2-x|-x}{|x-3|-1}\le 2$. **29.** $(x-1)|12+x-x^2|\le 0$.

30. $(x+3)|14-2x|\le x^2-9$. **31.** $\sqrt{3+x}>|3-x|$.

32. $|x^2-9|+|16-x^2|\le 25$. **33.** $\sqrt{x^3+x^2-4x+1}\ge|x-2|$.

34. $\big||3x+1|+x+1\big|\ge 2$. **35.** $\big|x^2-|x^2+x|\big|>11$. **36.** $\frac{5-|x|}{x^2+|x|-2}\ge\frac{|x|-5}{x^2-1}$.

37. $\frac{|2x+7|-3x-4}{x+5-|5x-7|}\le 0$. **38.** $\big||x^3+x-3|-5\big|\le x^3-x+8$.

39. $\big||2x^2-x|-3\big|\le 2x^2+x+5$ **40.** $\big||x^3-x-1|-5\big|\ge x^3+x+8$.

41. $\sqrt{|x+1|+|x+5|}>\left|x+\frac{5}{2}\right|$. **42.** $\left|2-\sqrt{x+2}\right|>x-2$.

43. $\left|\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}\right|\le 1$. **44.** $\big|\,\big||x+1|+4\big|-5\big|\le 4$.

45. $\big||x^2-|x||-4\big|\le 2$. **46.** $\big||x^2-6|x||-4\big|\ge 4$.

47. $\frac{(x^2-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)}{|x-2|-4x+3}\ge 0$. **48.** $\frac{\left(\sqrt{1+2x^2}-1-x^2\right)\left(|2x+3|-|3x+2|\right)}{(x^2-5x+4)\left(\sqrt{x+5}+1-x\right)(x^{99}-1)}\le 0$.

49. Найти наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству $|x+1|+|x-4|>7$.

50. Найти все целые числа, удовлетворяющие условию:

а) $\frac{a^2-7|a|+10}{a^2-6a+9}<0$; б) $\frac{a^2+4a-5}{4-|a^2-5|}>0$.

Решить неравенства с параметрами:

51. $|x-2a|<4x-2$. **52.** $|5x-3|<|2x-a|$. **53.** $|x-a|\ge x$.

54. $|ax+b|<a$. **55.** $|x-a|+|x|+|x+a|\le b$. **56.** $|x-1|\sqrt{x+a}\le 0$.

57. $\dfrac{\sqrt{x-a}}{|x-2|}\geq 0$. **58.** $|x^2+a|\leq 0$. **59.** $|x|(x+a)\leq 0$.

60. $|x|(x-a)>0$. **61.** $x^2-2x+2^{|a|}>0$. **62.** $|1-|x||<a-x$.

63. $x^2-a|x+1|>0$. **64.** $ax^2+|x|+1>0$.

Найти все значения параметра, при котором выполняется заданное условие:

65. Неравенство $\left|\dfrac{x^2-px+1}{x^2+x+1}\right|<3$ верно для любого действительного значения x.

66. Неравенство $3-|x-a|>x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение.

67. Неравенство $2>|x+a|+x^2$ имеет хотя бы одно положительное решение.

68. Уравнение $x^2+1=\dfrac{x}{a}$ имеет различные корни x_1 и x_2, удовлетворяющие условию $|x_1^2-x_2^2|>\dfrac{1}{a}$.

Ответы:

1. $\left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right)$. **2.** $\left[\frac{5}{3};\ 5\right]$. **3.** $(-\infty;\ -2)\cup(2;\ +\infty)$. **4.** $(-1;\ 2)\cup(3;\ 6)$.

5. $(-\infty;\ -1]\cup[0;\ +\infty)$. **6.** $(-\infty;\ -3]\cup[1;\ 5)\cup(5;\ +\infty)$.

7. $\left[-\frac{1+\sqrt{31}}{3};\ -\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3};\ -\frac{4}{3}\right]\cup\left[\frac{-1+\sqrt{31}}{3};\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};\ 2\right]$. **8.** $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$.

9. $(-\infty;\ -5)\cup(-5;\ -2)\cup(0;\ +\infty)$. **10.** $(-\infty;\ -2)\cup(0;\ 2)\cup(4;\ +\infty)$.

11. $(-\infty;\ 3)$. **12.** $[0;\ +\infty)$. **13.** $\left(-2;\ -\frac{3}{2}\right)$. **14.** $(-1;\ 2)$.

15. $\left(-\infty;\ \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right]\cup[1;\ +\infty)$. **16.** $(-\infty;\ -7)\cup(3;\ +\infty)$. **7.** $(-\infty;\ 0]\cup[6;\ +\infty)$.

18. $(0;\ 2)$. **19.** $(-\infty;\ -3)\cup(7;\ +\infty)$. **20.** $\left(-\infty;\ \frac{9}{2}\right)$. **21.** $\left(-\frac{3}{2};\ +\infty\right)$.

22. $(-1;\ 1)$. **23.** $(-1;\ 1)$. **24.** $(-\infty;-2)\cup(6;\ +\infty)$. **25.** $(-6;\ 2)$. **26.** $(1;\ 3)$.

27. $\left(\frac{3}{7};\frac{11}{7}\right)$. **28.** $(-\infty;\,2)\cup\{3\}\cup(4;\,+\infty)$. **29.** $(-\infty;\,-1)\cup\{4\}$.

30. $(-\infty;\,-3]\cup[17/3;\,11]$. **31.** $(1;\,6)$. **32.** $[-5;\,5]$. **33.** $\left[\sqrt[3]{3};\,+\infty\right)$.

34. $(-\infty;\,-1]\cup[0;\,+\infty)$. **35.** $(-\infty;\,-11)\cup(11;\,+\infty)$. **36.** $[-5;\,-1)\cup(1;\,5]$.

37. $(-\infty;\,1/3)$. **38.** $\left[-\sqrt[3]{5};\,8\right]$. **39.** $[-4;\,+\infty)$. **40.** $\left(-\infty;\,-\sqrt[3]{6}\right]$.

41. $\left(-\frac{9}{2};\frac{2\sqrt{2}-3}{2}\right)$. **42.** $[-2;\,2)$. **43.** $[-2;\,+\infty)$. **44.** $[-6;\,4]$.

45. $[-3;\,-2]\cup[2;\,3]$. **46.** $\left(-\infty;-3-\sqrt{17}\right]\cup\{-6\}\cup$
$\cup[-4;-2]\cup\{0\}\cup[2;4]\cup\{6\}\cup\left[3+\sqrt{17};+\infty\right)$. **47.** $\{-1\}$.

48. $[-5;\,-1]\cup\{0\}\cup(1;\,4)\cup(4;\,+\infty)$. **49.** $\{6\}$. **50.** а) $\{-4;\,-3;\,4\}$; б) $\{-2;\,2\}$. **51.** При $a\le\frac{1}{4}$ $x\in\left(\frac{2-2a}{3};\,+\infty\right)$, при $a>\frac{1}{4}$ $x\in\left(\frac{2+2a}{5};\,+\infty\right)$. **52.** При $a<\frac{6}{5}$ $x\in\left(\frac{3+a}{7};\,\frac{3-a}{3}\right)$, при $a>\frac{6}{5}$ $x\in\left(\frac{3-a}{3};\,\frac{3+a}{7}\right)$, при $a=\frac{6}{5}$ нет решений. **53.** При $a\le 0$ $x\in\mathbb{R}$, при $a>0$ $x\in\left(-\infty;\,\frac{a}{2}\right)$. **54.** При $a\le 0$ решений нет, при $a>0$ $x\in\left(\frac{-b}{a-1};\frac{-b}{a+1}\right)$. **55.** При $2|a|\le b\le 3|a|$ $x\in\left[-b+2|a|;\,b-2|a|\right]$, при $b>3|a|$ $x\in\left[-\frac{b}{3};\,\frac{b}{3}\right]$, при $b<2|a|$ решений нет. **56.** При $a\le -1$ $x\in(-a;\,+\infty)$, при $a>-1$ $x\in(-a;\,1)\cup(1;\,+\infty)$. **57.** При $a<2$ $x\in[a;\,2)\cup(2;\,+\infty)$, при $a=2$ $x\in(2;\,+\infty)$, при $a>2$ $x\in[a;+\infty)$.

58. При $a\le 0$ $x\in\left\{\pm\sqrt{a}\right\}$, при $a>0$ решений нет. **59.** При $a>0$ $x\in\{0\}\cup(-\infty;\,-a]$, при $a\le 0$ $x\in(-\infty;\,-a]$. **60.** При $a<0$ $x\in(a;\,0)\cup(0;\,+\infty)$, при $a\ge 0$ $x\in(a;\,+\infty)$. **61.** При $a\ne 0$ $x\in\mathbb{R}$, при $a=0$ $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **62.** При $a\le -1$ решений нет, при $a\in(-1;\,1]$

$x \in \left(-\infty; \frac{a-1}{2}\right)$, **при** $a>1$ $x \in \left(-\infty; \frac{a+1}{2}\right)$. **63.** При $a=0$ $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, при $a<0$ $x \in \mathbb{R}$, при $a \in (0; 4)$ $x \in \left(-\infty; \frac{a-\sqrt{a^2+4a}}{2}\right) \cup \left(\frac{a+\sqrt{a^2+4a}}{2}; +\infty\right)$, при $a=4$ $x \in (-\infty; -2) \cup \left(-2; 2-\sqrt{2}\right) \cup$ $\cup \left(2+\sqrt{2}; +\infty\right)$, при $a \in (4; +\infty)$ $x \in \left(-\infty; \frac{-a-\sqrt{a^2-4a}}{2}\right) \cup \left(\frac{-a+\sqrt{a^2-4a}}{2}; \frac{a-\sqrt{a^2+4a}}{2}\right) \cup$ $\cup \left(\frac{a+\sqrt{a^2+4a}}{2}; +\infty\right)$. **64.** При $a \in \left[0; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$ $x \in \mathbb{R}$, **при** $a = \frac{1}{4}$ решений нет, при $a<0$ $x \in \left(-\infty; \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2a}\right) \cup$ $\cup \left(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2a}; \frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2a}\right) \cup \left(\frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2a}; +\infty\right)$. **65.** $(-5; 1)$.

66. $\left(-\frac{13}{4}; 3\right)$. **67.** $\left(-\frac{9}{4}; 2\right)$. **68.** $\left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

Группа II

ЗАДАНИЕ 1

Решить неравенства:

1. $0{,}3|x| - 1 \le \frac{6-|x|}{2}$.

2. $(|x|-3)(|x|+7) < 0$.

3. $(|x|-5)(|x|-7) \le 0$.

4. $2|x| - 4{,}5 \ge \frac{40-3|x|}{8}$.

5. $(|x|-17)(|x|+6) \ge 0$.

6. $(|x|-8)(|x|-2) > 0$.

7. $x^2 - 4x - 2|x-2| + 1 \le 0$.

8. $x^2 + 6x - 4|x+3| - 12 > 0$.

9. $x^2 - 8x - \frac{3}{|x-4|} + 18 \le 0$.

10. $x^2 + 10x - \frac{5}{|x+5|} + 4 > 0$.

11. $\left|\frac{x+4}{x+2}\right| \le 1$.

12. $\left|\frac{x-3}{x-5}\right| \ge 1$.

ЗАДАНИЕ 2

Решить неравенства:

1. $|3-x|<4$.

2. $|3x-5|\geq 10$.

3. $2|x+1|>x+4$.

4. $3|x-1|\leq x+3$.

5. $x^2-7x+12<|x-4|$.

6. $x^2-5x+9>|x-6|$.

7. $|x^2-4x|<5$.

8. $|x^2-x-6|>4$.

9. $|x^2+3x|\geq 2-x^2$.

10. $|x^2-6x+8|<5x-x^2$.

ЗАДАНИЕ 3

Решить неравенства:

1. $|2x-7|\leq 5$.

2. $|5-x|>\dfrac{1}{2}$

3. $|x-2|<2x-10$.

4. $|2x-1|\geq x-1$.

5. $x^2-x-2<|5x-3|$.

6. $2x^2-9x+9\geq|x-2|$.

7. $|x^2-x-3|<9$.

8. $|2x^2-9x+15|\geq 20$.

9. $|x^2-3x+2|>3x-x^2-2$.

10. $|x^2-1|<3x$.

ЗАДАНИЕ 4

Решить неравенства:

1. $\dfrac{|x+3|+x}{x+2}>1$.

2. $\dfrac{|x+2|-x}{x}<2$.

3. $\dfrac{2x-5}{|x-3|}>-1$.

4. $\dfrac{x^2-5x+6}{|x|+7}<0$.

5. $\dfrac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9}<0$.

6. $\left|\dfrac{2x-1}{x-1}\right|>2$.

7. $\left|\dfrac{x^2-3x-1}{x^2+x+1}\right|<3$.

8. $\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right|\geq 1$.

ЗАДАНИЕ 5

Решить неравенства:

1. $\dfrac{|4-x|}{x+6}<3$.

2. $\dfrac{x-2}{|x-2|}\geq 0$.

3. $\dfrac{1}{|x|-3}<\dfrac{1}{2}$.

4. $\dfrac{|x-3|}{x^2-5x+6}\geq 2$

5. $\dfrac{x^2-|x|-12}{x-3}\geq 2x$.

6. $\left|\dfrac{2}{x-4}\right|>1$.

7. $\left|\dfrac{x^2-1}{x+2}\right|<1$.

8. $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|\le 1$.

ЗАДАНИЕ 6

Решить неравенства:

1. $|13-2x|\ge|4x-9|$.

2. $|x+3|<3+|x|$.

3. $|x-2|>2+x-|3-x|$.

4. $|x|\ge\dfrac{2x}{|x-3|}$.

5. $\dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}\ge 1$.

6. $|7-2x|<|3x-7|+|x+2|$.

Решить системы:

7. $\begin{cases}|x|\ge 1,\\ |x-1|<3;\end{cases}$

8. $\begin{cases}|x^2+5x|<6,\\ |x+1|<2.\end{cases}$

ЗАДАНИЕ 7

Решить неравенства:

1. $|x+1|>|x-1|$.

2. $2|x|\le 4+|x+1|$.

3. $|2x+3|>|x|-4x-1$.

4. $\dfrac{4x-1}{|x-1|}\ge|x+1|$.

5. $\dfrac{|x^2-2x|+4}{x^2+|x+2|}\ge 1$.

6. $|5-x|<|2-x|+|2x-7|$.

Решить системы:

7. $\begin{cases}|x^2-4x|<5;\\ |x+1|<3;\end{cases}$

8. $\begin{cases}|x^2+5x|<6,\\ |x+1|\le 1.\end{cases}$

ЗАДАНИЕ 8

Решить неравенства:

1. $\dfrac{4}{|x+1|-2}\ge|x-1|$.

2. $|x^3-1|>1-x$.

3. $\left|\dfrac{3|x|+2}{|x|-1}\right|<3$.

Для всех значений a решить неравенства:

4. $|x-3a|-|x+a|<2a$.

5. $|x+2a|<\dfrac{8a^2}{|x-2a|}$.

ЗАДАНИЕ 9

Решить неравенства:

1. $\dfrac{4}{|x+3|-1} \geq |x+2|$.

2. $|x^3-1| \leq 1+x+x^2$

3. $\left|\dfrac{2-3|x|}{1+|x|}\right| > 1$.

Для всех значений a решить неравенства:

4. $|x-a|-2a > |x-3a|$.

5. $|x+2a|+|x-a| < 3x$.

Ответы:

ЗАДАНИЕ 1. **1.** $[-5;5]$. **2.** $(-3;3)$. **3.** $[-7;-5]\cup[5;7]$. **4.** $(-\infty;-4]\cup[4;+\infty)$.
5. $(-\infty;-17]\cup[17;+\infty)$. **6.** $(-\infty;-8)\cup(-2;2)\cup(8;+\infty)$. **7.** $[-1;5]$.
8. $(-\infty;-10)\cup(4;+\infty)$. **9.** $[3;4)\cup(4;5]$. **10.** $(-\infty;-6)\cup(-4;+\infty)$.
11. $(-\infty;-3]$. **12.** $[4;5)\cup(5;+\infty)$.

ЗАДАНИЕ 2. **1.** $(-1;7)$. **2.** $(-\infty;-5/3]\cup[5;+\infty)$. **3.** $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.
4. $[0;3]$. **5.** $(2;4)$. **6.** $(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$. **7.** $(-1;5)$.
8. $\left(-\infty;\dfrac{1-\sqrt{41}}{2}\right)\cup(-1;2)\cup\left(\dfrac{1+\sqrt{41}}{2};+\infty\right)$. **9.** $\left(-\infty;-\dfrac{2}{3}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.
10. $\left(\dfrac{11-\sqrt{57}}{4};\dfrac{11+\sqrt{57}}{4}\right)$.

ЗАДАНИЕ 3. **1.** $[1;6]$. **2.** $\left(-\infty;-\dfrac{9}{2}\right)\cup\left(\dfrac{11}{2};+\infty\right)$. **3.** $(8;+\infty)$. **4.** $(-\infty;+\infty)$.
5. $\left(-5;+3+2\sqrt{2}\right)$. **6.** $\left(-\infty;-\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{5+\sqrt{3}}{2};+\infty\right)$. **7.** $(-3;4)$.
8. $(-\infty;-1/2]\cup[5;+\infty)$. **9.** $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **10.** $\left[-1+\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right]$.

ЗАДАНИЕ 4. **1.** $(-5;-2)\cup(-1;+\infty)$. **2.** $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$. **3.** $(2;3)\cup(3;+\infty)$.
4. $(2;3)$. **5.** $(-5;-2)\cup(2;3)\cup(3;5)$. **6.** $(3/4;1)\cup(1;+\infty)$.
7. $(-\infty;-2)\cup(-1;+\infty)$. **8.** $(-\infty;-2)\cup(-2;-1)\cup(-1;0]$.

ЗАДАНИЕ 5. **1.** $(-\infty;-6)\cup(-7/2;+\infty)$. **2.** $(2;+\infty)$.
3. $(-\infty;-5)\cup(-3;3)\cup(5;+\infty)$. **4.** $[3/2;2]$. **5.** $(-\infty;3)$. **6.** $(2;4)\cup(4;6)$.
7. $\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$. **8.** $\left[0;\frac{8}{5}\right]\cup\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$.

ЗАДАНИЕ 6. **1.** $\left[-2;\frac{11}{3}\right]$. **2.** $(-\infty;0)$. **3.** $(-\infty;1)\cup(7;+\infty)$.
4. $(-\infty;1]\cup[5;+\infty)$. **5.** $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{2};2\right]$. **6.** $(-\infty;-2)\cup\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$.
7. $(-2;-1]\cup[1;4)$. **8.** $(-2;1)$.

ЗАДАНИЕ 7. **1.** $(0;+\infty)$. **2.** $[3;5]$. **3.** $\left(-\frac{4}{7};+\infty\right)$. **4.** $\left[-2+\sqrt{6};1\right)\cup(1;4]$.
5. $\left(-\infty;\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right]$. **6.** $(-\infty;2)\cup\left(\frac{7}{2};+\infty\right)$. **7.** $(-1;2)$. **8.** $(-2;0]$.

ЗАДАНИЕ 8. **1.** $\left[-1-2\sqrt{2};-3\right)\cup(1;3]$. **2.** $(-\infty;-1)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$.
3. $\left(-\frac{1}{6};\frac{1}{6}\right)$. **4.** $(-\infty;2a)$, если $a<0$; решения нет, если $a=0$; $(0;+\infty)$, если $a>0$. **5.** $\left(2\sqrt{3}a;2a\right)\cup\left(2a;-2\sqrt{3}a\right)$, если $a<0$; решений нет, если $a=0$; $\left(-2\sqrt{3}a;2a\right)\cup\left(2a;2\sqrt{3}a\right)$, если $a>0$.

ЗАДАНИЕ 9. **1.** $[-5;-4)\cup\left(-2;-2+\sqrt{3}\right]$. **2.** $[0;2]$.
3. $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$. **5.** $(-\infty;a)$, если $a<0$; решения нет, если $a\ge 0$; 2. $(-a;+\infty)$, если $a<0$; $(a;+\infty)$, если $a\ge 0$.

Группа III

Решить неравенства:

1. $|x-3|>-1$.
2. $|x^2+21x+34|<-1$.
3. $|5-8x|<11$.
4. $|2x+1|>5$.
5. $|2x-3|\le 4$.
6. $|5x-4|\ge 6$.

7. $x^2-5|x|+6<0$.

8. $x^2-|x|-2\ge 0$.

9. $|x^2+x|<5$.

10. $|x^2-4x|>1$.

11. $|x^2-5x|\le 6$.

12. $|-4x^2-6x-5|\ge 9$.

13. $|x^2-2x|<x$.

14. $|x^2-3x|+x-2<0$.

15. $3x^2-|x-3|>9x-2$.

16. $x^2+4\ge|3x+2|-7x$.

17. $x^2-|5x+8|>0$.

18. $3|x-1|+x^2-7>0$.

19. $|x-6|\ge x^2-5x+9$.

20. $|x^2-x-8|\le x$.

21. $|x^2-3|+2x+1\ge 0$.

22. $(1+x)^2\le|1-x^2|$.

23. $|x^2-2x-3|<3x-3$.

24. $|x^2+4x+3|>x+3$.

25. $|x^2-6x+8|\le 4-x$.

26. $|x^2-1|\ge x^2+1$.

27. $\left|\frac{2x-1}{x+2}\right|\le 4$.

28. $\left|\frac{x^2-2x+1}{x-3}\right|>1$.

29. $|2x-1|<|x+3|$.

30. $(|x-1|-3)(|x+2|-5)<0$.

31. $|x-1-x^2|\le|x^2-3x+4|$.

32. $|x^2+x-2|>\left|1+\frac{x}{5}\right|$.

33. $|x-1|-|x|+|2x+3|>2x+4$.

34. $\left|\frac{-5}{x+2}\right|<\left|\frac{10}{x-1}\right|$.

35. $||x-1|-5|\le 2$.

36. $|x-1|+|x+2|-|x-3|>4$.

37. $|x+2|+|x+1|+|x-4|\ge 9$.

38. $|x-1|-2|x-2|+3|x-3|\le 4$.

39. $|x-2|+|x-3|+|2x-8|<9$.

40. $|x-1|-|x+2|+3\ge|2x-5|-|3-x|$.

41. $|x-1|-|x-2|+|x+1|>|x+2|+|x|-3$.

42. $|x-1|-|x-2|+|x-3|\le 3+|x-4|+|x-5|$.

43. $|x+2|-|x+1|+|x|\le\frac{5}{2}+|x-1|+|x-2|$.

44. $\left|\frac{1}{x+2}\right|<\left|\frac{2}{x-1}\right|$.

45. $|x-1-x^2|\le|x^2-3x+4|$.

46. $\left|x-2x^2\right|>2x^2-x$.

47. $\left|x^2+6x+8\right|\le -x^2-6x-8$

48. $\left|x^2+x-20\right|\le x^2+x-20$.

49. $|x-3|>\left|x^2-3\right|$.

50. $\left|2x^2-x-10\right|>\left|x^3-8x-22\right|$.

51. $\left|x^2-5|x|+4\right|\ge\left|2x^2-3|x|+1\right|$.

52. $\dfrac{(1+x)(2+x)}{x^2-|x|-2}\ge -3x$.

53. $\dfrac{|2x-1|}{x^2+x-2}\ge 3$.

54. $\left|\left|x^2-3x+2\right|-1\right|>x-2$.

55. $\dfrac{\left|x^2-2x\right|-1-2x}{x^2-2+\left|x^2+3x\right|}\ge 0$.

56. $\left|x^2-|x|\right|<\dfrac{1}{4}$.

Решить системы:

57. $\begin{cases}|x|\ge x,\\ 2x-1>3;\end{cases}$

58. $\begin{cases}|x|\le -x,\\ |x+2|>1;\end{cases}$

59. $\begin{cases}|2x+5|\ge|7-4x|,\\ |x|<2|x-4|+x-2;\end{cases}$

60. $\begin{cases}|2x-4|-|3x+9|-|x-1|>-6;\\ \big||x+1|-|x-1|\big|<1;\end{cases}$

61. $\begin{cases}|2x-5|-|4x+7|\ge 0,\\ \left|x^2-3\right|+1+2x\ge 0;\end{cases}$

62. $\begin{cases}|2x+7|-|3x+5|>0,\\ \dfrac{|x+2|}{|x-1|}\ge 1;\end{cases}$

63. $\begin{cases}x^2-1>2|x-1|,\\ |1-3x|-|x+2|\le 2;\end{cases}$

64. $\begin{cases}x^2+2|x+3|-10<0,\\ \dfrac{\left|x^2-4x\right|+3}{x^2+|x-5|}\ge 1;\end{cases}$

65. $\begin{cases}\dfrac{2}{|x-2|}>\left|\dfrac{-3}{2x-1}\right|,\\ \left|x^3-x\right|\le x.\end{cases}$

Для всех значений параметра a решить неравенства:

66. $|1+x|\le ax$.

67. $|x-1|\ge ax$.

68. $|x-a|\ge x$.

69. $|x+a|\le x$.

70. $|ax| \ge 1 + x$.

71. $|x^2 - 1| \le ax$.

72. $|x^2 - 1| \ge a$.

73. $|x^2 + a| \ge x$.

74. $2|x - a| < 2ax - x^2 + 2$.

75. $|2x + a| > \frac{3a}{2} + |x - a|$.

76. $|x^2 - a^2| > 2a^2$.

77. $a + \frac{4a^2}{|x - 2a|} \ge 0$.

78. $|1 - |x|| < a - x$.

Ответы:

1. $(-\infty; +\infty)$. **2.** Решений нет. **3.** $(-3/4; 2)$. **4.** $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$. **5.** $\left[-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right]$.

6. $\left(-\infty; -\frac{2}{5}\right] \cup [2; +\infty)$. **7.** $(-3; -2) \cup (2; 3)$. **8.** $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

9. $\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}; \frac{\sqrt{21}-1}{2}\right)$. **10.** $(-\infty; 2-\sqrt{5}) \cup (2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}) \cup (2+\sqrt{5}; +\infty)$.

11. $[-1; 2] \cup [3; 6]$. **12.** $(-\infty; -2] \cup (1/2; +\infty)$. **13.** $(1; 3)$. **14.** $(1-\sqrt{3}; 2-\sqrt{2})$.

15. $\left(-\infty; \frac{4-\sqrt{19}}{3}\right) \cup \left(\frac{4+\sqrt{19}}{3}; +\infty\right)$. **16.** $(-\infty; -5-\sqrt{19}] \cup [\sqrt{2}-2; +\infty)$.

17. $\left(-\infty; \frac{5-\sqrt{57}}{2}\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{57}}{2}; +\infty\right)$. **18.** $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$. **19.** $[1; 3]$.

20. $[2\sqrt{2}; 4]$. **21.** $(-\infty; -1-\sqrt{3}] \cup [1-\sqrt{5}; +\infty)$. **22.** $(-\infty; 0]$. **23.** $(2; 5)$.

24. $(-\infty; -3) \cup (-3; -2) \cup (0; +\infty)$. **25.** $[1; 3] \cup \{4\}$. **26.** $\{0\}$.

27. $(-\infty; -9/2] \cup [-7/6; +\infty)$. **28.** $(-\infty; -1) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$. **29.** $(-2/3; 4)$.

30. $(-7; -2) \cup (3; 4)$. **31.** $(-\infty; 3/2]$.

32. $\left(-\infty; \frac{-2-\sqrt{79}}{5}\right) \cup \left(\frac{-3-\sqrt{34}}{5}; \frac{\sqrt{34}-3}{5}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{79}-2}{5}; +\infty\right)$.

33. $(-\infty; -3/2)$. **34.** $(-\infty; -5) \cup (1; +\infty)$. **35.** $[-6; -2] \cup [4; 8]$.

36. $(-\infty; -8) \cup (2; +\infty)$. **37.** $(-\infty; -8/3] \cup [2; +\infty)$. **38.** $[1; 5]$. **39.** $(1; 11/2)$.

40. $(-4; 0] \cup [2; 8/3]$. **41.** $(-3; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 3)$. **42.** $[0; 6]$.

43. $(-\infty;-5/2]\cup[-3/2;-1/2]\cup[1/2;3/2]\cup[5/2;+\infty)$.

44. $(-\infty;-5)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$. 45. $(-\infty;3/2]$. 46. $(0;1/2)$. 47. $[-4;-2]$.

48. $(-\infty;-5]\cup[4;+\infty)$. 49. $(-3;0)\cup(1;2)$.

50. $(-\infty;-4)\cup\left(-3;\dfrac{9-\sqrt{465}}{6}\right)\cup\left(\dfrac{9+\sqrt{465}}{6};+\infty\right)$. 51. $\left[-\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{3}\right]$.

52. $\left[\dfrac{2}{3};1\right]\cup(2;+\infty)$. 53. $(-\infty;-4)\cup\left(\dfrac{-5-\sqrt{109}}{6};-2\right)\cup\left(1;\dfrac{\sqrt{61}-1}{6}\right)$.

54. $\left(-\infty;1+\sqrt{2}\right)\cup(3;+\infty)$. 55. $\left(-\infty;-\dfrac{2}{3}\right)\cup\left[2-\sqrt{5};\dfrac{1}{2}\right)\cup\left[2+\sqrt{5};+\infty\right)$.

56. $\left(-\sqrt{2}-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$. 57. $(2;+\infty)$.

58. $(-\infty;-3)\cup(-1;0]$. 59. $\left[\dfrac{1}{3};3\right)\cup(5;6]$. 60. $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

61. $\left[-6;-1-\sqrt{3}\right]\cup\left[1-\sqrt{5};-\dfrac{1}{3}\right]$. 62. $\left[-\dfrac{1}{2};1\right)\cup(1;2)$. 63. $\left[1;\dfrac{5}{2}\right]$.

64. $\left(1-\sqrt{17};-\dfrac{2}{3}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2};\sqrt{5}-1\right)$. 65. $\left(\dfrac{8}{7};\sqrt{2}\right]$. 66. $\left(-\infty;\dfrac{1}{a-1}\right]$, если $a\le-1$; $\left[\dfrac{-1}{a+1};\dfrac{1}{a-1}\right]$, если $-1<a<0$; $\{-1\}$, если $a=0$; решений нет, если $0<a\le1$; $\left[\dfrac{1}{a-1};+\infty\right)$, если $a>1$. 67. $\left[\dfrac{1}{a+1};+\infty\right)$, если $a<-1$; $(-\infty;+\infty)$, если $-1\le a\le0$; $\left(-\infty;\dfrac{1}{1+a}\right]\cup\left[\dfrac{1}{1-a};+\infty\right)$, если $0<a\le1$; $\left(-\infty;\dfrac{1}{1+a}\right]$, если $a>1$. 68. $(-\infty;+\infty)$, если $a\le0$; $\left(-\infty;\dfrac{a}{2}\right]$, если $a>0$.

69. $[-a/2;+\infty)$, если $a\le0$; решений нет, если $a>0$. 70. $\{1\}$, (-1) если $a=0$; $\left(-\infty;\dfrac{-1}{1+|a|}\right]$, если $0<|a|\le1$; $\left(-\infty;\dfrac{-1}{1+|a|}\right]\cup\left[\dfrac{1}{|a|-1};+\infty\right)$, если $|a|>1$. 71. $\left[\dfrac{a-\sqrt{a^2+4}}{2};\dfrac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right]$, если $a<0$; $\{-1;1\}$, если $a=0$;

$\left[\dfrac{a-\sqrt{a^2+4}}{2};\dfrac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right]$, если $a>0$. **72.** $(-\infty;+\infty)$, если $a\le 0$; $\left(-\infty;-\sqrt{1+a}\right]\cup\left[-\sqrt{1+a};\sqrt{1+a}\right]\cup\left[\sqrt{1+a};+\infty\right)$, если $0<a<1$; $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right]\cup\{0\}\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right)$, если $a=1$; $\left(-\infty;-\sqrt{1+a}\right]\cup\left[\sqrt{1+a};+\infty\right)$, если $a>1$. **73.** $\left(-\infty;\dfrac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2};+\infty\right)$, если $a<-\dfrac{1}{4}$; $\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$, если $a=-\dfrac{1}{4}$; $(-\infty;+\infty)$, если $a>\dfrac{1}{4}$. **74.** $\left(a+1-\sqrt{a^2-1};a+1+\sqrt{a^2-1}\right)$, если $|a|>\sqrt{2}$; решений нет, если $|a|\le 2$. **75.** $\left(-\infty;-\dfrac{a}{2}\right)\cup\left(\dfrac{a}{2};+\infty\right)$, если $a>0$. **76.** $\left(-\infty;\sqrt{3}a\right)\cup\left[-\sqrt{3}a;+\infty\right)$, если $a<0$; $\left(-\infty;\sqrt{3}a\right)\cup\left(-\sqrt{3}a;+\infty\right)$, если $a\ge 0$. **77.** $[6a;2a)\cup(2a;-2a]$, если $a<0$; $(-\infty;2a)\cup(2a;+\infty)$, если $a\ge 0$. **78.** Решений нет, если $a<-1$, $\left(-\infty;\dfrac{a-1}{2}\right)$, если $-1<a\le 1$; $\left(\dfrac{a+1}{2};+\infty\right)$, если $a>1$.

Группа IV

Решить системы неравенств:

1. $\begin{cases}|x^2+5x|<6,\\ |x+1|\le 1.\end{cases}$

2. $\begin{cases}|x^2-4x|<5,\\ |x+1|<3.\end{cases}$

3. $\begin{cases}\left|x-\dfrac{4}{x}-2\right|\ge 1,\\ \dfrac{x^2-3|x-3|}{x^2-5x+6}\ge 1.\end{cases}$

4. $\begin{cases}|x-1|\le 2,\\ |x-4|\ge 5.\end{cases}$

5. $\begin{cases}2\left(\dfrac{x}{3}+2\right)\le 1+x,\\ |x-9|+|x-10|>x-2.\end{cases}$

6. $\begin{cases}|x-1|<9-2x,\\ |x-5|+|x-6|+|x-7|>15.\end{cases}$

7. $\begin{cases}y-|x-2y+1|=3,\\ |y|+|y-2|+(y-4)^2\le 5.\end{cases}$

8. Обозначим: $\max\{f(x); g(x)\}$ – наибольшее из значений функций $f(x)$ и $g(x)$ для данного x, а $\min\{f(x); g(x)\}$ – наименьшее. Найти все x, для которых выполняется соотношение:

а) $\min\{|x|; x^2+6x\} \geq 7$; б) $\max\{|x|; x^2-7x\} \leq 8$.

9. Найти все решения неравенства $\dfrac{12x-15}{2x^2+x} \leq 1$, не являющиеся одновременно решениями неравенства $(x-|2x-3|)(3-x) \leq 0$.

10. Найти все x, при которых определены левые и правые части обоих неравенств: $\dfrac{2}{2x^2-9x+15} \geq \dfrac{1}{x}$ и $\dfrac{|x-1|}{9-x^2} > 0$, но ни одно из двух неравенств не выполняется.

При каких значениях a системы не имеют решений:

11. $\begin{cases} x^2-9<0, \\ |x-4|<a. \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} 16-x^2>0, \\ |x-3|>a. \end{cases}$

Найти все значения a, при которых системы имеют единственное решение. Указать это решение:

13. $\begin{cases} |x-3| \leq a, \\ |x-2a| \leq 5. \end{cases}$ **14.** $\begin{cases} |x-1| \geq a, \\ |2x+a| \leq 3. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^2-7x-8 \leq 0, \\ |x-a| \leq 3. \end{cases}$ **16.** $\begin{cases} |x+a| \leq 2, \\ x^2+8x-9 \geq 0. \end{cases}$

17. Найти целочисленные решения системы $\begin{cases} |x^2-2x| < y+\dfrac{1}{2}, \\ y+|x-1|<2. \end{cases}$

Ответы:

1. $(-2; 0]$. **2.** $(-1; 2)$. **3.** $[15/8; 2)\cup(3; +\infty)$. **4.** $\{-1\}$. **5.** $(17; +\infty)$.
6. $(-\infty; 1)$. **7.** $\{(5; 3)\}$. **8.** а) $(-\infty; -7]\cup[7; +\infty)$; б) $x\in[-1; 8]$.
9. $(1; 3)\cup[5/2; +\infty)$. **10.** $\{1\}\cup(3; +\infty)$. **11.** $a\in(-\infty; 0)$. **12.** $a\in a[7; +\infty)$.
13. $a=8$, $x=11$. **14.** $a=5$, $x=-4$. **15.** $a=-4$, $x=-1$, $a=11$, $x=8$.
16. $a=11$, $x=-9$, $a=-3$, $x=1$. **17.** $\{(0; 0); (2; 0); (1; 1)\}$.

10. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА, СИСТЕМЫ

Иррациональные уравнения

Группа I

Решить уравнения:

1. $\sqrt{1+3x}=2x+1$.

2. $3x-\sqrt{18x+1}+1=0$.

3. $\sqrt{3+2x-x^2}=x^2-2x+3$.

4. $\sqrt{4+3x-x^2}=\sqrt{x+5}-3$.

5. $\sqrt{x+7}=\sqrt{3x+9}-\sqrt{x+2}$.

6. $\sqrt{x^2(x-1)}=|x|$.

7. $\sqrt[4]{x^2-2x+5}+\sqrt[4]{x^2-2x+1}=2$.

8. $x^2+\sqrt{x^2-9}=21$.

9. $\sqrt{8x-x^2-12}=x^2-8x+18$.

10. $\sqrt[3]{8+x}+\sqrt[3]{8-x}=1$.

11. $x^3+x+\sqrt[3]{x^3+x-2}=12$.

12. $\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1$.

13. $\sqrt[3]{x^2-2}=\sqrt{2-x^2}$.

14. $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3$.

15. $x\sqrt{x}+2=3\sqrt[4]{x^3}$.

16. $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}$.

17. $x^2\cdot\sqrt[3]{x^2}+8=6x\sqrt[3]{x}$.

18. $\dfrac{\sqrt{x^2+8x}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+7}=\dfrac{7}{\sqrt{x+1}}$.

19. $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=3$.

20. $\sqrt{3-x}+\sqrt[3]{5-\sqrt{2x-7}}=10$.

21. $18x^2-6x+12=5\sqrt{27x^3+8}$.

22. $3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2$.

23. $\sqrt[4]{(x+1)^2}-\sqrt[4]{(x-1)^2}=\dfrac{2}{3}\sqrt[4]{x^2-1}$.

24. $\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}}+\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}=4$.

25. $\sqrt{6x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2+3x+1}=-2x$.

26. $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1$.

27. $(x-2)\sqrt{x+\sqrt{x-4}}=\sqrt{x^2-x+4}$.

28. При всех значениях $a>3$ решить уравнение $\sqrt{2a-3\sqrt{x}}=\sqrt{x-2}$.

29. Определить число корней уравнения $\sqrt{2x+8}-a=\sqrt{2x+3}$ в зависимости от a.

Решить уравнения:

30. $\sqrt{x-a}=2x-1$.

31. $\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}=a$.

32. $\sqrt{x-4a+16}=2\sqrt{x-2a+4}-\sqrt{x}$.

33. $\sqrt[3]{(a+x)^2}+4\sqrt[3]{(a-x)^2}=5\sqrt[3]{a^2-x^2}$.

О т в е т ы:

1. $\left\{0;\ -\frac{1}{4}\right\}$. **2.** $\left\{0;\ \frac{4}{3}\right\}$. **3.** $\{1\}$. **4.** $\{4\}$. **5.** $\{2\}$. **6.** $\{0;\ 2\}$. **7.** $\{1\}$. **8.** $\left\{\pm 3\sqrt{2}\right\}$

9. $\{4\}$. **10.** $\left\{\pm 3\sqrt{21}\right\}$. **11.** $\{2\}$. **12.** $\{-109;\ 80\}$. **13.** $\left\{\pm\sqrt{2}\right\}$. **14.** $\{3\}$.

15. $\left\{2^{4/3};\ 1\right\}$. **16.** $\{15\}$. **17.** $\left\{2\sqrt{2};\ \sqrt[4]{2^3}\right\}$. **18.** $\{1\}$. **19.** $\{64\}$. **20.** Нет решений. **21.** $\left\{\frac{1\pm\sqrt{13}}{3}\right\}$. **22.** $\{-5;\ 0\}$. **23.** $\left\{\frac{17}{5}\right\}$. **24.** $\{2\}$. **25.** $\left\{-1;\ -\frac{1}{2}\right\}$.

26. $\{1;\ 2;\ 10\}$. **27.** $\{4\}$. **28.** $\left\{\frac{\left(3\sqrt{a}-\sqrt{a^2-8}\right)^2}{32}\right\}$. **29.** При $0<a\le\sqrt{5}$ корень; при $a\le 0$ и $a>\sqrt{5}$ корней нет. **30.** При $a<1/2$ $x\in\left\{\frac{5+\sqrt{9-16a}}{8}\right\}$; при $\frac{1}{2}\le a\le\frac{9}{16}$ $x\in\left\{\frac{5\pm\sqrt{9-16a}}{8}\right\}$; при $a>\frac{9}{16}$ нет решений. **31.** При $2\le a\le 2\sqrt{2}$ $x\in\left\{3\pm\frac{a\sqrt{8-a^2}}{2}\right\}$; при $a<2$ или $a>2\sqrt{2}$ решений нет. **32.** При $a\le 0$ или $a\ge 8$ $x\in\left\{a^2/4\right\}$; при $0<a<8$ решений нет. **33.** При $a=0$ $x\in\{0\}$; при $a\ne 0$ $x\in\left\{0;\frac{63a}{65}\right\}$.

Группа II

ЗАДАНИЕ 1

Доказать, что не имеют действительных корней уравнения:

1. $\sqrt{4x+7}+\sqrt{3-4x+x^2}+2=0$.

2. $2\sqrt{x^3-4x^2+1}+\sqrt{x^2(x+1)^3}=-5$.

3. $\sqrt{17+5\sqrt{4x^2-16}}+x^2\sqrt{7-x}=3$.

4. $\sqrt{x-6}+\sqrt{3-x}=4x-3x^2+1$.

5. $\sqrt{4-x^2}\sqrt{x^2-49}(x+4)=0$.

6. $\sqrt{100-x^2}+x^2-7x=\frac{x^2-10x}{\sqrt{x-10}}$.

Решить уравнения, вводя новое переменное $t=\sqrt{\alpha(x)}$:

7. $x-\sqrt{x}-6=0$.

8. $\sqrt{8-x}=2-x$.

9. $x+\sqrt{x-1}-3=0$.

10. $x^2-x+9+\sqrt{x^2-x+9}=12$.

11. $x^2-4x=3\sqrt{x^2-4x+20}-10$.

12. $\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}=1$.

13. $2\sqrt{x-1}-5=\dfrac{3}{\sqrt{x-1}}$.

ЗАДАНИЕ 2

Решить уравнения:

1. $\sqrt{7x+1}=2\sqrt{x+4}$.

2. $(x^2-1)\sqrt{2x-1}=0$.

3. $\sqrt{12-x}=x$.

4. $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4$.

5. $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}=2$.

6. $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=7$.

7. $\sqrt{2x+6}-\sqrt{x+1}=2$.

8. $\sqrt{x+5}-\sqrt{x}=1$.

9. $\sqrt{x+10}-\sqrt{x+3}=\sqrt{4x-23}$.

10. $\sqrt{11x+3}-\sqrt{2-x}=\sqrt{9x+7}-\sqrt{x-2}$.

ЗАДАНИЕ 3

Решить уравнения:

1. $\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x+19}=0$.

2. $(x^2-4)\sqrt{x+1}=0$.

3. $\sqrt{7-x}=x-1$.

4. $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$.

5. $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+4}=1$.

6. $2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}=2$.

7. $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=3$.

8. $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$.

9. $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=\sqrt{4x+9}$.

10. $\sqrt{6x+1}+\sqrt{4x+2}=\sqrt{8x}+\sqrt{2x+3}$.

ЗАДАНИЕ 4

Решить уравнения:

1. $\sqrt{5x+1}=x-1$.

2. $\dfrac{(x^2-4)(x-4)}{\sqrt{x^2-7x-8}}=0$.

3. $\sqrt{11x-2}+3\sqrt{x}=6$.

4. $\sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}=4$.

5. $\sqrt[3]{5+\sqrt{x^2+5}}=2$.

6. $\sqrt{4x-3}=\dfrac{3x-1}{\sqrt{3x-5}}$.

7. $\sqrt{x-9}+\sqrt{x}=\dfrac{36}{\sqrt{x-9}}$.

8. $\dfrac{\sqrt{x+7}}{\sqrt{x+2}}=\dfrac{3x-1}{\sqrt{3x-2}}$.

9. $\sqrt{8-x}-\sqrt{9+5x}-\sqrt{4-5x}+\sqrt{5+x}=0$.

ЗАДАНИЕ 5

Решить уравнения:

1. $\sqrt{5x+1}=1-x$.

2. $2\sqrt{3x+2}-\sqrt{6x}=2$.

3. $\dfrac{(x^2-49)(x+10)}{\sqrt{7x+8-x^2}}=0$.

4. $\sqrt{3x+1}+\sqrt{16-3x}=5$.

5. $\sqrt[3]{25+\sqrt{x^2+3}}=3$.

6. $\dfrac{x+3}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{3x+1}$.

7. $\dfrac{2x-8}{\sqrt{6-x}}+\sqrt{6-x}=3\sqrt{x-4}$.

8. $\dfrac{1}{\sqrt{3x+10}}+\dfrac{6}{\sqrt{(x+2)(3x+10)}}=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$.

9. $\sqrt{5x+1}-\sqrt{6x-2}-\sqrt{x+6}+\sqrt{2x+3}=0$.

Ответы:

ЗАДАНИЕ 1. 7. $\{9\}$. **8.** $\{-1\}$. **9.** $\{2\}$. **10.** $\{0;1\}$. **11.** $\{-1;5\}$. **12.** $\{4\}$. **13.** $\{10\}$.

ЗАДАНИЕ 2. **1.** $\{5\}$. **2.** $\{1/2;1\}$. **3.** $\{3\}$. **4.** $\{-1\}$. **5.** $\{4\}$. **6.** $\{6\}$. **7.** $\{-1;15\}$. **8.** $\{4\}$. **9.** $\{6\}$. **10.** $\{2\}$.

ЗАДАНИЕ 3. **1.** $\{10\}$. **2.** $\{-1;2\}$. **3.** $\{3\}$. **4.** $\{3\}$. **5.** $\{5\}$. **6.** $\{1\}$. **7.** $\{-1;2\}$. **8.** $\{20\}$. **9.** $\{4\}$. **10.** $\{1/2\}$.

ЗАДАНИЕ 4. **1.** $\{7\}$. **2.** $\{-2\}$. **3.** $\{1\}$. **4.** $\{-4;4\}$. **5.** $\{-2;2\}$. **6.** $\{7\}$. **7.** $\{25\}$. **8.** $\{2\}$. **9.** $\{-1/6;-1\}$.

ЗАДАНИЕ 5. **1.** $\{0\}$. **2.** $\{2/3\}$. **3.** $\{7\}$. **4.** $\{0;5\}$. **5.** $\{-1;1\}$. **6.** $\{5\}$. **7.** $\{22/5;5\}$. **8.** $\{62\}$. **9.** $\{5/4;3\}$.

Группа II

Решить уравнения:

1. $(9-x^2)\sqrt{2-x}=0$.

2. $\dfrac{\sqrt{6-x-x^2}}{2x-5}=\dfrac{\sqrt{6-x-x^2}}{x-2}$.

3. $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}=0$.

4. $\dfrac{\sqrt{x^2+x-12}}{x-3}=0$.

5. $2\sqrt{x+5}=x+2$.

6. $\sqrt{4-6x-x^2}=x+4$.

7. $\sqrt{x+2}=\sqrt{2x-5}$.

8. $\sqrt{x+7}-x+3=0$.

9. $\sqrt{x^2+8}=2x+1$.

10. $\sqrt{1+4x-x^2}=x-1$.

11. $\sqrt{2x^2+8x+7}-2=x$.

12. $\sqrt{2x^2+8x+1}-x=3$.

13. $x+\sqrt{2x^2-7x+5}=1$.

14. $x+\sqrt{2x^2-14x+13}=5$.

15. $x^2+11+\sqrt{x^2+11}=42$.

16. $x^2+13-2\sqrt{x^2+13}=35$.

17. $x^2-2\sqrt{x^2-24}=39$.

18. $x^2+2\sqrt{41-x^2}=26$.

19. $x\sqrt{36x+1261}=18x^2-17x$.

20. $(x+2)\sqrt{16x+33}=(x+2)(8x+5)$.

21. $3(4x+3)\sqrt{16x+17}=(4x+3)(8x-15)$.

22. $(x+1)\sqrt{16x+17}=(x+1)(8x-23)$.

23. $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x-2}=0$.

24. $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-5}-\sqrt{x-2}=0$.

25. $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x-3}-\sqrt{3x-11}=0$.

26. $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-3}=0$.

27. $\sqrt{\dfrac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}}+2x^2=1$.

28. $\left|x+\sqrt{1-x^2}\right|=\sqrt{2}\left(2x^2-1\right)$.

29. $\sqrt{6-x}=x$.

30. $1+\sqrt{2x+7}=x-3$.

31. $\sqrt{x-1}=a-1$.

32. $2\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}=1$.

33. $\dfrac{x-2}{\sqrt{2x-7}}=x-6$.

34. $\sqrt{x-1}\sqrt{x+4}=6$.

35. $\sqrt{1-x}\sqrt{x}=x$.

36. $\sqrt{x-1}\sqrt{2x+6}=x+3$.

37. $3\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}=7$.

38. $\sqrt{x-3}+6=5\sqrt[4]{x-3}$.

39. $(x+1)\sqrt{x^2+x-2}=2x+2$.

40. $(x-3)\sqrt{x^2+x-2}=2x-6$.

41. $(x+2)\sqrt{x^2-5x+4}=6x+12$.

42. $(x-1)\sqrt{x^2-x-20}=6x-6$.

43. $\sqrt{x}+\sqrt{x-5}=\sqrt{10-x}$.

44. $2\sqrt{x}+\sqrt{5-x}=\sqrt{x+21}$.

45. $2\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}-\sqrt{5x-10}=0$.

46. $3\sqrt{2x+1}-4\sqrt{x}-\sqrt{34x-135}=0$.

47. $\sqrt{8x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{7x+4}+\sqrt{2x-2}$.

48. $\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{x-\sqrt{1+x^2}}=-2$.

49. $\sqrt[3]{x^2+15}=2\sqrt[3]{x+1}$.

50. $\sqrt[3]{x^2-2x-3}=x+1$.

51. $\sqrt{7+\sqrt[3]{x^2+7}}=3$.

52. $\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}=2$.

53. $\sqrt[3]{76+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{76-\sqrt{x}}=8$.

54. $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{2-x}=\dfrac{2}{\sqrt{2-x}}$.

Найти все значения параметра a, при которых системы имеют два решения. Указать эти решения:

55. $\begin{cases} x=\sqrt{a-y-6}, \\ y^2-x^2=a(a+2x). \end{cases}$

56. $\begin{cases} \sqrt{x}=a-y, \\ x+y=7\sqrt{x}. \end{cases}$

Найти все значения параметра a, при которых системы имеют единственное решение:

57. $\begin{cases} y=2\sqrt{x-2}, \\ y=ax+1. \end{cases}$

58. $\begin{cases} y=2+a(3-x), \\ y=4\sqrt{1-x}. \end{cases}$

Найти все значения параметра a, при которых системы имеют одно решение. Указать это решение при каждом a:

59. $\begin{cases} x=\sqrt{y+a-4}, \\ x^2-y^2=a(2x-a). \end{cases}$

60. $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{a-2-y}}{x}+1=0, \\ y=x-a. \end{cases}$

Ответы:

1. $\{-3;2\}$. **2.** $\{-3\}$. **3.** $\{-1;2\}$. **4.** $\{-4\}$. **5.** $\{4\}$. **6.** $\{-1\}$. **7.** $\{7\}$.

8. $\left\{\dfrac{7+\sqrt{41}}{2}\right\}$. **9.** $\{1\}$. **10.** $\{3\}$. **11.** $\{-1\}$. **12.** $\{2\}$. **13.** $\{1\}$. **14.** $\{-2\}$. **15.** $\{-5;5\}$.

16. $\{-6;6\}$. **17.** $\{-7;7\}$. **18.** $\{-4;4\}$. **19.** $\{0;3\}$. **20.** $\{-2;3\}$. **21.** $\{-3/4;2\}$.

22. $\{-1;4\}$. **23.** $\{1\}$. **24.** $\{3\}$. **25.** $\{4\}$. **26.** $\{2\}$. **27.** $\left\{-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right\}$.

28. $\left\{\dfrac{-\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right\}$. **29.** $\{2\}$. **30.** $\{9\}$. **31.** $\{a^2-2a+2 \mid a\ge 1\}$. **32.** $\{2\}$.

33. $\{8\}$. **34.** $\{5\}$. **35.** $\{0;1/2\}$. **36.** $\{5\}$. **37.** $\{6\}$. **38.** $\{19;84\}$. **39.** $\{-3;2\}$.

40. $\{0;5\}$. **41.** $\{-7;8\}$. **42.** $\{-6;7\}$. **43.** $\{5\}$. **44.** $\{4\}$. **5.** $\{2\}$. **46.** $\{4\}$. **47.** $\{3\}$. **48.** $\{1\}$. **49.** $\{1;7\}$. **50.** $\{-1\}$. **51.** $\{-1;1\}$. **52.** $\{-1/2;1/2\}$. **53.** $\{2401\}$. **54.** $\varnothing$.
55. $a \in \left(\frac{23}{8};3\right]$, $\left(\frac{1+\sqrt{8a-23}}{2};\frac{-1-2a-\sqrt{8a-23}}{2}\right)$,
$\left(\frac{1-\sqrt{8a-23}}{2};\frac{-1-2a+\sqrt{8a-23}}{2}\right)$. **56.** $a \in [0;16)$,
$\left(32-a+8\sqrt{16-a};a-4-\sqrt{16-a}\right)$, $\left(32-a-8\sqrt{16-a};a-4+\sqrt{16-a}\right)$.
57. $\left[-\frac{1}{2};0\right]\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **58.** $[-1;0]\cup\{1\}$. **59.** $a \in [2;+\infty)$,
$\left(\frac{-1+\sqrt{8a-15}}{2};\frac{2a+1-\sqrt{8a-15}}{2}\right)$. **60.** $a \in \left\{\frac{7}{8}\right\}\cup(1;+\infty)$,
$\left(\frac{-1-\sqrt{8a-7}}{2};\frac{-1-2a-\sqrt{8a-7}}{2}\right)$.

Иррациональные неравенства

Группа I

Решить неравенства:

1. $\frac{\sqrt{5-2x}}{2x^2-3x-2}>0$. **2.** $\frac{\sqrt{1+2x}}{3x^2-2x-1}>0$. **3.** $\frac{\sqrt{5-2x}}{2x^2-3x-2}\ge 0$.

4. $\frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{x-2}\le 0$. 5. $\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x-2}<0$. 6. $\frac{x-1}{\sqrt{2+x-x^2}}<0$.

7. $\frac{x-1}{\sqrt{3+2x-x^2}}<0$. **8.** $\frac{x^2-13x+40}{\sqrt{7x-x^2-6}}\le 0$. 9. $\frac{x-\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}-6}>0$.

10. $\frac{x+2\sqrt{x}-3}{x-\sqrt{x}-6}>0$. **11.** $\frac{x+\sqrt{x}-12}{x+\sqrt{x}-6}\ge 0$. **12.** $\frac{\sqrt{2x-5\sqrt{x}+2}}{x-\sqrt{x}-6}<0$.

13. $\frac{\sqrt{3+2\sqrt{x}-x}}{2x-5\sqrt{x}-6}>0$. **14.** $\frac{\sqrt{5+4\sqrt{x}-x}}{3x-10\sqrt{x}+3}>0$. **15.** $\frac{\sqrt{12x-20\sqrt{x}+3}}{2x-3\sqrt{x}-5}<0$.

16. $\frac{x-6\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-1}>x-25$. **17.** $\frac{x+8\sqrt{x}-9}{\sqrt{x}-1}>x-21$.

18. $\sqrt{\dfrac{x-16}{x}}-\sqrt{\dfrac{x}{x-16}}<\dfrac{16}{15}$.

19. $\sqrt{\dfrac{1+x^2}{2x}}+1>\sqrt{\dfrac{8x}{1+x^2}}$.

20. $1+\sqrt{\dfrac{4+x^2}{x}}>6\sqrt{\dfrac{x}{4+x^2}}$.

21. $\dfrac{4x}{4+x^2}<\dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{x}{4+x^2}}$.

22. $\sqrt{1-x}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\geq 2$.

23. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-5}>\sqrt{5-x}$.

24. $\sqrt[3]{x-1}<\sqrt{1-x}$.

25. $3\sqrt{6+x-x^2}>4x-2$.

26. $x^2+\sqrt{x^2-3x+5}>3x+7$.

27. $\sqrt{x+2}>x$.

28. $\sqrt{3x^2+5x}<\sqrt{2}$.

29. $\sqrt[3]{x^3+2x^2-5x+3}<x$.

30. $\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1}\leq\sqrt{6-x}$.

31. $4\sqrt{x}>x-2$.

32. $(x+3)\sqrt{14-2x}\geq x^2-9$.

33. $(x-1)\sqrt{12+x-x^2}\leq 0$.

34. $(x+2)\sqrt{3x^2-x-2}>0$.

35. $(x-1)\sqrt{3+2x-x^2}<0$.

36. $\sqrt{5x-x^2-6}<3+2x$.

37. $\dfrac{x\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[5]{x^3}-1}+\dfrac{\sqrt[5]{x^3}-1}{\sqrt[5]{x}-1}\geq 16$.

38. $\dfrac{\sqrt{12x+x^2-x^3}}{2x+7}\geq\dfrac{\sqrt{12x+x^2-x^3}}{x+5}$.

39. $\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{2x-3}<2$.

40. $\sqrt{25-x^2}\leq\dfrac{12}{x}$.

41. $\dfrac{x-2}{2x+1}<\sqrt{3x+4}$.

42. $\sqrt{5x^2+10x+1}>7-x^2-2x$.

43. $\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}<3$.

44. $x\sqrt{10-x^2}>x^2-6$.

45. $\sqrt[6]{2x-4}+\sqrt[3]{x+6}\geq 2-\sqrt{2-x}$.

46. $\dfrac{\sqrt{x^2+x-6}+3x+13}{x+5}\geq 1$.

47. $\dfrac{6x}{x-2}-\sqrt{\dfrac{12x}{x-2}}-2\sqrt[4]{\dfrac{12x}{x-2}}>0$.

48. $\sqrt{4-\sqrt{-x-4}}<\sqrt{-x-3}$.

49. $\sqrt{3x-1}+\dfrac{2}{\sqrt{3x-1}}\geq\sqrt{5x+3}$.

50. $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}>a$.

51. $\sqrt{a^2+x^2}>x+a-1$.

52. $x-a>\sqrt{x+a^2}$.

53. $2x+2a>5\sqrt{ax}$.

Ответы:

1. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)\cup\left(2; \frac{5}{2}\right)$. **2.** $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right)\cup(1; +\infty)$. **3.** $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)\cup\left(2; \frac{5}{2}\right]$.

4. $[-1; 2)\cup\{3\}$. **5.** $(-2; 2)$. **6.** $(1; 2)$. **7.** $(-1; 1)$. **8.** $[5; 6)$. **9.** $[0; 4)\cup(9; +\infty)$.

10. $[0; 1)\cup(9; +\infty)$. **11.** $[0; 2)\cup[9; +\infty)$. **12.** $\left[0; \frac{1}{4}\right)\cup(4; 9)$. **13.** $[4; 9)$.

14. $(9; 25)$. **15.** $\left[0; \frac{1}{36}\right)\cup\left(\frac{9}{4}; \frac{25}{4}\right)$. **16.** $[0;1)\cup(1; 25)$. **17.** $[0;1)\cup(1; 36)$.

18. $(-\infty; -9)\cup(16; +\infty)$. **19.** $(0; 1)\cup(1; +\infty)$. **20.** $(0; 2)\cup(2; +\infty)$.

21. $[0; 2)\cup(2; +\infty)$. **22.** $(-\infty; 1)$. **23.** $\{5\}$. **24.** $(-\infty; 1)$. **25.** $[-2; 2)$.

26. $(-\infty; -1)\cup(4; +\infty)$. **27.** $[-2; 2)$. **28.** $\left(-2; -\frac{5}{3}\right)\cup\left(0; \frac{1}{3}\right)$. **29.** $\left(1; \frac{3}{2}\right)$.

30. $[1; 5]$. **31.** $[0; 36)$. **32.** $[-3; 5]$. **33.** $[-3; 1]\cup\{4\}$.

34. $(-2; -2/3)\cup(1; +\infty)$. **35.** $(-3; -1)$. **36.** $[2; 3]$. **37.** $[32; +\infty)$.

38. $(-\infty; -5)\cup\left(-\frac{7}{2}; -3\right]\cup\{0; 4\}$. **39.** $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right)\cup(2; +\infty)$.

40. $(0; 3]\cup[4; 5]$. **41.** $(-1/2; +\infty)$. **42.** $(-\infty; -3)\cup(1; +\infty)$.

43. $\left[-\frac{1}{2}; 0\right)\cup\left(0; \frac{1}{2}\right]$. **44.** $(-\sqrt{2}; 3)$. **45.** $\{2\}$. **46.** $(-5; -3]\cup[2; +\infty)$.

47. $(2; 8)$. **48.** $\left[-20; \frac{-15+\sqrt{13}}{2}\right)$. **49.** $\left(\frac{1}{3}; 1\right]$. **50.** При $a \le 0$ и $a \ge 4$ решений нет; при $a \in (0; 2)$ $x \in [-a; a]$; при $a = 2$ $x \in (-2; 2)$; при $a \in (2; 4)$ $x \in \left(\frac{-a\sqrt{a(4-a)}}{2}; \frac{a\sqrt{a(4-a)}}{2}\right)$. **51.** При $a > 1$ $x \in \left(-\infty; \frac{2a-1}{2a-2}\right)$; при $a \le 1$ $x \in \mathbb{R}$. **52.** При $a \le -1$ $x \in (0; +\infty)$; при $a \in (-1; -1/2]$ $x \in [-a^2; 2a+1)\cup(0; +\infty)$; при $a \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ $x \in [-a^2; 0)\cup(2a+1; +\infty)$; при $a \ge 0$ $x \in (2a+1; +\infty)$. **53.** При $a \ge 0$ $x \in \left(0; \frac{a}{4}\right)\cup(4a; +\infty)$; при $a < 0$ решений нет.

Группа II

ЗАДАНИЕ 1

Решить неравенства:

1. $x\sqrt{\dfrac{x+5}{x+6}}<0$.

2. $x\dfrac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+6}}<0$.

3. $(x+1)\sqrt{x+4}\sqrt{x+7}\le 0$.

4. $(x+1)\sqrt{(x+4)(x+7)}\le 0$.

5. $\sqrt{x^2(x-3)}\le 0$.

6. $|x|\sqrt{x-3}\le 0$.

Решить системы неравенств:

7. $\begin{cases}\dfrac{2}{2+\sqrt{4-x^2}}+\dfrac{1}{2-\sqrt{4-x^2}}>\dfrac{1}{x},\\ \sqrt{x-2}\sqrt{4-x^2}\le 0;\end{cases}$

8. $\begin{cases}\sqrt{x^4-2x^2+1}>1-x,\\ \sqrt{x^2-25}\sqrt{25-x^2}\ge 0.\end{cases}$

ЗАДАНИЕ 2

Решить неравенства:

1. $(x+3)\sqrt{\dfrac{6-x}{8-x}}\ge 0$.

2. $(x+3)\dfrac{\sqrt{6-x}}{\sqrt{8-x}}\ge 0$.

3. $(2+x)\sqrt{(4-x)(5-x)}\ge 0$.

4. $(2+x)\sqrt{4-x}\sqrt{5-x}\ge 0$.

5. $\sqrt{(x-1)^4(x+2)^2(x-7)}\ge 0$.

6. $(x+2)^2(x-1)^2\sqrt{x-7}\ge 0$.

Решить системы неравенств:

7. $\begin{cases}\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-x+1}>1,\\ \sqrt{(x-1)(x+3)}\sqrt{1-x^2}\ge 0.\end{cases}$

8. $\begin{cases}\sqrt{x^2-4x}>x-3,\\ \sqrt{-x-6}\sqrt{36-x^2}\le 0.\end{cases}$

ЗАДАНИЕ 3

Решить неравенства:

1. $\sqrt{x+7}<x$.

2. $\sqrt{9x-20}<x$.

3. $\sqrt{x^2+4x+4}<x+6$.

4. $\sqrt{2x+4}>x+3$.

5. $\sqrt{2x^2-3x-5}<x-1$.

6. $\sqrt{x^2-2x}>4-x$.

7. $\sqrt{\dfrac{2x^2+7x-4}{x+4}}<\dfrac{1}{2}$.

8. $3\sqrt{x}-\sqrt{x+3}>1$.

ЗАДАНИЕ 4

Решить неравенства:

1. $(x-3)\sqrt{x^2+x-2}\geq 0$.

2. $(x-3)\sqrt{x^2+4}\leq x^2-9$.

3. $\dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10}\leq\dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}$.

4. $\sqrt{x+4}>\sqrt{2-\sqrt{3+x}}$.

5. $\dfrac{9(4x^2-9)}{\sqrt{3x^2-3}}\leq 2x+3$.

6. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{x}<\dfrac{35}{12}$.

7. $\sqrt{x+6}>\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-5}$.

8. $\sqrt[4]{15+x}-\sqrt[4]{2-x}>1$.

ЗАДАНИЕ 5

Решить неравенства:

1. $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\geq 0$.

2. $(x+1)\sqrt{x^2+1}>x^2-1$.

3. $\dfrac{\sqrt{12-x-x^2}}{2x-7}\leq\dfrac{\sqrt{12-x-x^2}}{x-5}$.

4. $\sqrt{4-\sqrt{1-x}}-\sqrt{2-x}>0$.

5. $\dfrac{9x^2-4}{\sqrt{5x^2-1}}\leq 3x-2$.

6. $\sqrt{2x-1}>\sqrt{2x+15}-\dfrac{10}{\sqrt{2x-1}}$

7. $\sqrt{x+3}>\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-1}$

8. $\dfrac{6x}{x-2}-\sqrt{\dfrac{12}{x-2}}-2\sqrt[4]{\dfrac{12x}{x-2}}>0$.

ЗАДАНИЕ 6

Решить системы неравенств:

1. $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+5}{2x-1}}>2,\\ \dfrac{4-3x}{\sqrt{40-3x}}<\sqrt{3}.\end{cases}$

2. $\begin{cases}\sqrt{4x-x^2}<4-x,\\ \sqrt{x+2}>\sqrt{8-x^2}.\end{cases}$

При всех значениях a решить неравенства:

3. $a\sqrt{x+1}<1$.

4. $x+\sqrt{4-x^2}<a$.

ЗАДАНИЕ 7

Решить системы неравенств:

1. $\begin{cases}\sqrt{(x+2)(x-5)}>8-x,\\ \sqrt{4-\sqrt{-x-4}}>\sqrt{-x-3};\end{cases}$

2. $\begin{cases}\sqrt{2x^5+5x-6}>2-x,\\ \sqrt{2x+1}<\dfrac{2(x+2)}{2-x}.\end{cases}$

При всех значениях a решить неравенство:

3. $(a+1)\sqrt{2-x}<1$. **4.** $\sqrt{1-x^2}<x+a$.

5. $x+\sqrt{x^2-x}<a$. **6.** $2\sqrt{x+a}>x+1$.

Ответы:

ЗАДАНИЕ 1. **1.** $(-\infty;-6)\cup(-5;0)$. **2.** $(-5;0)$. **3.** $[-4;-1]$. **4.** $(-\infty;-7]\cup[-4;-1]$. **5.** $\{0;3\}$. **6.** $\{3\}$. **7.** $\{2\}$. **8.** $\{-5;5\}$.

ЗАДАНИЕ 2. **1.** $[-3;6]\cup(8;+\infty)$. **2.** $[-3;6]$. **3.** $[-2;4]\cup[5;+\infty)$. **4.** $[-2;4]$. **5.** $\{-2;1\}\cup[7;+\infty)$. **6.** $[7;+\infty)$. **7.** $\{1\}$. **8.** $\{-6\}$.

ЗАДАНИЕ 3. **1.** $\left(\frac{1+\sqrt{29}}{2};+\infty\right)$. **2.** $\left[\frac{20}{9};4\right)\cup(5;+\infty)$. **3.** $(-4;+\infty)$. **4.** $[-7;1)$. **5.** $[5/2;3)$. **6.** $(8/3;+\infty)$. **7.** $(-\infty;-4)\cup[1/2;8/7)$. **8.** $(1;+\infty)$.

ЗАДАНИЕ 4. **1.** $(3;+\infty)$. **2.** $[1/2;1)\cup(1;+\infty)$. **3.** $[-14;2)$. **4.** $(-\infty;74/13)$. **5.** $(-\infty;-2]\cup(2;+\infty)$. **6.** $(2/3;+\infty)$. **7.** $\left[-2-2\sqrt{6};-1\right)\cup\left[-2+2\sqrt{6};3\right]$. **8.** $(4;+\infty)$.

ЗАДАНИЕ 5. **1.** $\{-1\}\cup[2;+\infty)$. **2.** $[-1;+\infty)$. **3.** $\{-4\}\cup[2;3]$. **4.** $\left(\frac{-5+\sqrt{13}}{2};1\right]$. **5.** $\left[\frac{-2}{3};\frac{-\sqrt{5}}{5}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{5}}{5};\frac{5}{2}\right]$. **6.** $(0{,}5;+\infty)$. **7.** $[1;1{,}5)$. **8.** $(2;8)$.

ЗАДАНИЕ 6. **1.** $(2/3;9/7)$. **2.** $(2;3]$. **3.** $-1\le x<+\infty$ при $a\le 0$; $-1\le x<\frac{1}{a^2}$ при $a>0$. **4.** Решений нет при $a\le -2$; $-2\le x<\frac{a-\sqrt{8-a^2}}{2}$ при $-2<a\le 2$; $-2\le x<\frac{a-\sqrt{8-a^2}}{2}$ и $\frac{a+\sqrt{8+a^2}}{2}<x\le 2$ при $2<a\le 2\sqrt{2}$, $-2\le x\le 2$ при $a>2\sqrt{2}$.

ЗАДАНИЕ 7. **1.** $(74/13;6]$. **2.** $(1;2)$. **3.** $-\infty<x\le 2$ при $a\le -1$; $2-\frac{1}{(1+a^2)}<x\le 2$ при $a>-1$. **4.** Решений нет при $a\le -1$;

$\frac{-a+\sqrt{2-a^2}}{2} < x \le 1$ при $1 < a \le 1$; $-1 \le x < \frac{-a-\sqrt{2-a^2}}{2}$ и $\frac{-a+\sqrt{2-a^2}}{2} < x \le 1$ при $1 < a \le \sqrt{2}$; $-1 \le x \le 1$ при $a > \sqrt{2}$.

5. Решений нет при $a \le 0$; $\frac{a^2}{2a-1} < x \le 0$ при $0 < a < \frac{1}{2}$; $-\infty < x \le 0$ при $\frac{1}{2} \le a \le 1$; $-\infty < x \le 0$ и $1 \le x < \frac{a^2}{2a-1}$ при $a > 1$. **6.** Решений нет при $a \le 0$; $-1-2\sqrt{a} < x < 1+2\sqrt{a}$ при $0 < a \le 1$; $-a \le x < 1+2\sqrt{a}$ при $a > 1$.

Группа III

Решить неравенства:

1. $\sqrt{3x-8} < -2$. **2.** $\sqrt[3]{x+2} \le -5$. **3.** $\sqrt{2x+1} > -8$.

4. $\sqrt[4]{x-5} < 3$. **5.** $(x-12)\sqrt{x-3} \le 0$. **6.** $(x+10)\sqrt{x-4} < 0$.

7. $\sqrt{(x-6)(x-12)} < x-1$. **8.** $\sqrt{x-6}\sqrt{x-12} < x-1$.

9. $x\sqrt{1-x}\sqrt{1+x} < 0$. **10.** $x\sqrt{1-x^2} < 0$.

11. $(x-1)\sqrt{16-x^2} \le 0$. **12.** $\sqrt{(2x-5)^2} > 5$.

13. $\sqrt{9-24x+16x^2} \le 8$. **14.** $x < \sqrt{2-x}$.

15. $x+1 > \sqrt{2+x}$. **16.** $2x-3 < 2\sqrt{x^2-9}$.

17. $\sqrt{x^2} < x+1$. **18.** $x > \sqrt{24-5x}$.

19. $\sqrt{x^2-3x-18} < 4-x$. **20.** $\sqrt{(x+4)(x+3)} > 6-x$.

21. $\sqrt{x^2-5x-24} > x+2$. **22.** $x+4 < \sqrt{-x^2-8x-12}$.

23. $x-3 < \sqrt{x^2-4x}$. **24.** $x < \sqrt{x^2-x-110}$.

25. $x > \sqrt{x^2-x-12}$. **26.** $\sqrt{4-4x^3+x^6} > x-\sqrt[3]{2}$.

27. $\sqrt{x}-9\sqrt[4]{x}+18 \ge 0$. **28.** $\sqrt{\frac{x^3+8}{x}} > x-2$.

29. $\sqrt{\frac{1-x}{2x-5}} < 3$. **30.** $\sqrt{\frac{3x-1}{2-x}} > 1$.

31. $\sqrt{x+1} > \sqrt{x-1}$. **32.** $\sqrt{1-x} \le \sqrt[4]{5+x}$.

33. $\frac{x-1}{2}>\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{3}{4}}$.

34. $\sqrt{(x-3)(2-x)}<3+2x$.

35. $(x-2)\sqrt{x^2+1}>x^2+2$.

36. $\frac{\sqrt{12+x-x^2}}{x-11}\ge\frac{\sqrt{12+x-x^2}}{2x-9}$.

37. $\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5}\ge\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$.

38. $\frac{3-x}{\sqrt{15-x}}<1$.

39. $\frac{1}{\sqrt{3-x}}>\frac{1}{x-2}$.

40. $\frac{2-\sqrt{x+2}}{1-\sqrt{x+2}}\le 0$.

41. $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}<3$.

42. $\frac{3(4x^2-9)}{\sqrt{3x^2-3}}\le 2x+3$.

43. $\frac{9x^2-4}{\sqrt{5x^2-1}}\le 3x+2$.

44. $\sqrt{4-\sqrt{1-x}}-\sqrt{2-x}>0$.

45. $\sqrt{2-\sqrt{3+x}}-\sqrt{x+4}<0$.

46. $\sqrt{1-3x}-\sqrt{5+x}>1$.

47. $\sqrt{x-6}-\sqrt{10-x}\ge 1$.

48. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-5}\le\sqrt{x-3}$.

49. $\sqrt{7x-13}-\sqrt{3x-19}>\sqrt{5x-27}$.

50. $\sqrt{5+x}-\sqrt{-x-3}<1+\sqrt{(x+5)(-x-3)}$.

51. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}>\frac{3}{2}$.

52. $\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-x+1}<1$.

53. $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$.

54. $\sqrt{9-9/x}<x-\sqrt{x-9/x}$.

55. $\frac{x}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}}-\frac{x}{\sqrt{1-x}-\sqrt{x}}>\frac{2}{\sqrt{x}}$.

56. $\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\frac{5}{\sqrt{x-3}}$.

57. $\sqrt{x+1/x^2}+\sqrt{x-1/x^2}>2/x$.

Ответы:

1. $\varnothing$. **2.** $(-\infty;-127]$. **3.** $[-1/2;+\infty)$. **4.** $[5;86)$. **5.** $[3;12]$. **6.** $\varnothing$.
7. $(71/6;6]\cup[12;+\infty)$. **8.** $[12;+\infty)$. **9.** $(-1;0)$. **10.** $(-1;0)$. **11.** $[-4;1]\cup\{4\}$.
12. $(0;5)$. **13.** $\left[\frac{-5}{4};\frac{11}{4}\right]$. **14.** $(-\infty;1)$. **15.** $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2};+\infty\right)$.

16. $(-\infty;-3)\cup\left(\frac{15}{4};+\infty\right)$. **17.** $\left(\frac{-1}{2};+\infty\right)$. **18.** $\left(3;\frac{24}{5}\right]$. **19.** $(-\infty;-3]\cup\left[6;\frac{34}{5}\right)$.

20. $[24/19;+\infty)$. **21.** $(-\infty;-3]$. **22.** $\left[-6;-4+\sqrt{2}\right)$. **23.** $(-\infty;0]\cup(9/2;+\infty)$.

24. $(-\infty;-10]$. **25.** $[4;+\infty)$. **26.** $\left(-\infty;\sqrt[3]{2}\right)\cup\left(\sqrt[3]{2};+\infty\right)$. **27.** $[0;81]$.

28. $(-\infty;-2]\cup(0;+\infty)$. **29.** $[1;46/19)$. **30.** $(3/4;2)$. **31.** $[1;+\infty)$. **32.** $[-1;1]$.

33. $\left(2;4\sqrt{3}/3\right]$. **34.** $[2;3]$. **35.** $\varnothing$. **36.** $\{-3\}\cup[-2;4]$. **37.** $[-2;-1]\cup\{3\}$.

38. $(-1;15)$. **39.** $(-\infty;2)\cup\left((3+\sqrt{5})/3;3\right)$. **40.** $(-1;2]$. **41.** $[-0,5;0)\cup(0;0,5]$.

42. $[-1,5;-1]\cup(1,2]$. **43.** $\left[\frac{-2}{3};\frac{-\sqrt{5}}{5}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{5}}{5};\frac{5}{2}\right]$. **44.** $\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2};1\right]$.

45. $\left[-5;\frac{-9-\sqrt{61}}{8}\right)$. **46.** $\left[\frac{\left(16+\sqrt{17}\right)}{2};10\right]$. **47.** $\left[6;8-\frac{\sqrt{7}}{2}\right]\cup\left[8+\frac{\sqrt{7}}{2};10\right]$.

48. $[5;+\infty)$. **49.** $[19/3;9)$. **50.** $\left[-5;2\sqrt{\sqrt{5}-2}-4\right]$. **51.** $[1;+\infty)$.

52. $(-\infty;-2]\cup\left[-1;\frac{\sqrt{31}-1}{6}\right)$. **53.** $(-2;-1]\cup\left[\frac{-2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

54. $\left[3;\frac{1+\sqrt{37}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{37}}{2};+\infty\right)$. **55.** $(0,5;1)$. **56.** $(5;+\infty)$. **57.** $\left[\frac{\sqrt[3]{10}}{2};+\infty\right)$.

Иррациональные системы

Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=5,\\ x+y=13.\end{cases}$

2. $\begin{cases}x^3-\sqrt{y}=1,\\ 5x^6+2y-8x\sqrt[3]{y}=2.\end{cases}$

3. $\begin{cases}10\sqrt{xy}+3x-3y=58,\\ x-y=6.\end{cases}$

4. $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2x-1}{y+2}}+\sqrt{\dfrac{y+2}{2x-1}}=2,\\ x+y=12.\end{cases}$

5. $\begin{cases}x-y=\dfrac{7}{2}\left(\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy^2}\right),\\ \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3.\end{cases}$

6. $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{6x}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{6x}}=\dfrac{5}{2},\\ x(x+y)+\sqrt{x^2+xy+4}=52.\end{cases}$

7. $\begin{cases} x+y+\sqrt{x^2-y^2}=12, \\ y\sqrt{x^2-y^2}=12. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \sqrt{2x-y+11}-\sqrt{3x+y-9}=3, \\ \sqrt[4]{2x-y+11}+\sqrt[4]{3x+y-9}=3. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}}+\sqrt{x-\sqrt{y}}=2, \\ \sqrt{y+\sqrt{x}}-\sqrt{y-\sqrt{x}}=1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x+y=5, \\ \sqrt{\dfrac{x+1}{3-y}}+2\sqrt{\dfrac{x-2}{6-y}}=3. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=a, \\ \sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2-y^2}=a^2. \end{cases}$

При каких значениях параметра p системы имеют решение:

12. $\begin{cases} 2y=p(x+2)+1, \\ y=\sqrt{x}. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2p\sqrt{x}-x+2y=p^2, \\ \sqrt{x}+y=4-p. \end{cases}$

14. $\begin{cases} y-\dfrac{1}{2}=p(x+2), \\ y=\sqrt{x}. \end{cases}$

15. $\begin{cases} y=\sqrt{1-x}, \\ y=2+p(3-x). \end{cases}$

16. $\begin{cases} x=p+\sqrt{y}, \\ y^2-x^2-2x+4y+3=0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} (p+1)y^2-2py+p-9=0, \\ y=\sqrt{1-x}+2. \end{cases}$

При каких значениях параметра a система имеет единственное решение? Указать это решение при каждом значении a:

18. $\begin{cases} y=2+a(3-x), \\ y=4\sqrt{1-x}. \end{cases}$

19. $\begin{cases} y=2\sqrt{x-2}, \\ y=ax+1. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x=\sqrt{y+a-4}, \\ x^2-y^2=a(2x-a). \end{cases}$

21. $\begin{cases} (a-1)y^2-2(3a+1)y+9a=0, \\ y=-\sqrt{x-3}+2. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x-y+2=0, \\ y=4\sqrt{ax-2}. \end{cases}$

23. $\begin{cases} y=\sqrt{ax-2}, \\ x-2y+1=0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} y=\sqrt{2|x|-x}, \\ x=a(y-2). \end{cases}$

25. $\begin{cases} y=\sqrt{a-x-2}, \\ y-x=a. \end{cases}$

При каких значениях параметра k системы имеют два различных решения:

26. $\begin{cases} x-k=2\sqrt{y}, \\ y^2-x^2+2x+8y+15=0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} y=\sqrt{x^2-16}, \\ 5x-3y+k=0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x^2 - y^2 - 2x + 4y - 3 = 0, \\ x + \sqrt{y} = k. \end{cases}$ **29.** $\begin{cases} y = \sqrt{1-x}, \\ y = 2 + k(3-x). \end{cases}$

30. При каких значениях параметра m система

$\begin{cases} x = m + 2\sqrt{y}, \\ y^2 - x^2 + 2x + 10y + 24 = 0 \end{cases}$ имеет:
а) два различных решения;
б) единственное решение?

При каких значениях параметра m системы имеют: а) решение; б) единственное решение:

31. $\begin{cases} y = \sqrt{x^2 - 8x}, \\ 5x - 3y + m = 20. \end{cases}$ **32.** $\begin{cases} x + \sqrt{y} = 1, \\ m + 3 - \sqrt{y} = \dfrac{1}{2}(m - x)^2. \end{cases}$

33. $\begin{cases} y = \sqrt{(x-m)^2 - 9}, \\ 4y = 5x. \end{cases}$ **34.** $\begin{cases} y = 1 + \sqrt{x}, \\ y + \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x} + m\right)^2 = 5 + m. \end{cases}$

35. При каких значениях параметра a кривые $y = 1 + \dfrac{x^2}{a^3}$ и $y = 4\sqrt{x}$ имеют только одну общую точку?

О т в е т ы:

1. $\{(9;\ 4);\ (4;\ 9)\}$. **2.** $\left\{\left(\sqrt[3]{4};\ 9\right)\right\}$. **3.** $\{(5;\ 7)\}$. **4.** $\{(8;\ 2);\ (-2;\ -8)\}$.

5. $\{(216;\ 27);\ (-27;\ -216)\}$. **6.** $\left\{\left(\dfrac{\sqrt{30}}{4};\dfrac{23}{4}\sqrt{30}\right);\left(-\dfrac{\sqrt{30}}{4};\ -\dfrac{23}{4}\sqrt{30}\right);\right.$

6. $\left.\left(\sqrt{30};\dfrac{\sqrt{30}}{2}\right);\left(-\sqrt{30};-\dfrac{\sqrt{30}}{2}\right)\right\}$. **7.** $\{(5;\ 3);\ (5;\ 4)\}$. **8.** $\{(3;\ 1)\}$.

9. $\left\{\left(\dfrac{17}{12};\ \dfrac{5}{3}\right)\right\}$. **10.** $\{(3;\ 2)\}$. **11.** При $a \geq 0$ $\left\{\left(\dfrac{5}{8}a^2;\ a^2\sqrt{\dfrac{3}{8}}\right)\right\}$; при $a < 0$ $\left\{\left(\dfrac{5}{8}a^2;\ -a^2\sqrt{\dfrac{3}{8}}\right)\right\}$. **12.** $\left[-\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{2}\right]$. **13.** $\left[-4;\ \dfrac{9}{4}\right]$. **14.** $\left[-\dfrac{1}{4};\ \dfrac{1}{4}\right]$.

15. $\left[-1;\ \dfrac{-2+\sqrt{6}}{4}\right]$. **16.** $(-\infty;\ -3] \cup \left[\dfrac{3}{4};\ +\infty\right)$. **17.** $\left[-\dfrac{9}{8};\ 5\right]$. **18.** При

$a\in[-1;\,0)\cup\{1\}$ $\quad x=\dfrac{3a^2+2a-8+4\sqrt{4-2a-2a^2}}{a^2}$, $\quad y=\dfrac{8-4\sqrt{4-2a-2a^2}}{a}$;

при $a=0$ $\quad x=\dfrac{3}{4},\ y=2$. **19.** При $a\in\left[-\dfrac{1}{2};\,0\right)\cup\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ $\quad x=\dfrac{1-2\sqrt{1+a-2a^2}}{a^2}$,

$y=\dfrac{2-2\sqrt{1+a-2a^2}}{a}$; при $a=0$ $\quad x=\dfrac{9}{4},\ y=1$. **20.** При $a\in[2;\,+\infty)$

$x=\dfrac{-1+\sqrt{8a-15}}{2}$, $\quad y=\dfrac{2a+1-\sqrt{8a-15}}{2}$. **21.** При $a=-\dfrac{1}{15}$ $\quad x=4\dfrac{9}{16}$,

$y=-\dfrac{3}{4}$; при $a=8$ $\quad x=3$, $y=2$; при $a=1$ $\quad x=3\dfrac{49}{64}$, $y=\dfrac{9}{8}$; при

$a\in(1;\,8)$ $\quad x=\dfrac{4a^2+15a+13-2(a+3)\sqrt{15a+1}}{(a-1)^2}$, $\quad y=\dfrac{3a+1-\sqrt{15a+1}}{a-1}$.

22. $a\in(-\infty;\,-1]\cup\{1\}$ $\quad x=8a-2+4\sqrt{4a^2-2a-2}$, $y=8a+4\sqrt{4a^2-2a-2}$.

23. $a\in(-\infty;\,-2]\cup\{2\}$ $\quad x=2a-1+2\sqrt{a^2-a-2}$, $y=a+\sqrt{a^2-a-2}$.

24. При $a\in(0;\,8]$ $\quad x=\dfrac{a\sqrt{3a^2+24a}-2a^2-4a}{2}$, $\quad y=\dfrac{\sqrt{3a^2+24a}-3a}{2}$; при

$a\in\left(-\dfrac{8}{3};0\right)$ $\quad x=\dfrac{a^2-4a+a\sqrt{a^2-8a}}{2}$, $\quad y=\sqrt{\dfrac{a^2-4a+a\sqrt{a^2-8a}}{2}}$. **25.** При

$a\ge 1$ $\quad x=\dfrac{-1+\sqrt{8a-7}}{2}$, $\quad y=\dfrac{-2a-1+\sqrt{8a-7}}{2}$. **26.** $(4;\,5]$. **27.** $[-20;\,-16)$.

28. $\left[-1;\,1+\sqrt{2}\right)\cup\left(1+\sqrt{2};\,3\right)\cup\left\{3\dfrac{1}{4}\right\}$. **29.** $\left(0;\,\dfrac{-2+\sqrt{6}}{4}\right)$. **30.** а) $(5;\,6]$;

б) $(-\infty;\,-4]\cup\{5\}\cup(6;\,+\infty)$. **31.** а) $(-\infty;\,-16]\cup[20;\,+\infty)$;

б) $(-\infty;\,-20)\cup\{-16\}\cup[20;\,+\infty)$. **32.** а) $\left[-\dfrac{5}{4};\,5\right]$; б) $\left\{-\dfrac{5}{4}\right\}\cup(-1;\,5]$.

33. а) $\left(-\infty;\,-\dfrac{9}{5}\right]\cup[3;\,+\infty)$; б) $(-\infty;\,-3)\cup\left\{-\dfrac{9}{5}\right\}\cup[3;\,+\infty)$. **34.** а) $\left[-\dfrac{9}{4};\,4\right]$;

б) $\left\{-\dfrac{9}{4}\right\}\cup(-2;\,4]$. **35.** $a\in(-\infty;\,0)\cup\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$.

11. ТРИГОНОМЕТРИЯ

Основные понятия

Выразить в радианах углы:

1. $30°$; $45°$; $60°$; $90°$; $120°$; $160°$.

2. $17°$; $24°$; $315°$; $1000°$; $15°15'$.

3. $17°15'$; $10°5''$; $35'20''$.

Найти угловую величину дуги в градусах, если ее радианная мера равна:

4. $35'20''$. **5.** 2. **6.** 125. **7.** $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$. **8.** $\frac{2}{3}\pi$. **9.** $\frac{\pi}{12}$. **10.** 7π.

11. $\frac{5\pi}{2}$. **12.** $\cos 0{,}5\pi$. **13.** $-0{,}75\pi$. **14.** $\sin 90° + \cos 0° - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$.

В какой четверти заканчиваются углы:

15. $\pi/3$. **16.** 2. **17.** $125°$. **18.** $216°$. **19.** 7π. **20.** 0,80.

21. $\frac{21\pi}{4}$. **22.** 100. **23.** $-0{,}3$.

24. Зубчатое колесо, имеющее 56 зубьев, повернулось на 14 зубцов против часовой стрелки. Выразить в радианах угол поворота колеса.

25. Определить радианную меру дуги, длина и радиус которой равны соответственно 17 и 20 см.

26. Определить длину дуги окружности радиусом 25 см, если: а) радианная мера дуги равна 1,25 рад; б) градусная мера дуги равна $144°$.

27. Найти радианную меру угла сектора, длина дуги которого: а) втрое меньше периметра сектора; б) составляет половину периметра сектора.

28. Радиус сектора равен 5 см, а его площадь 75 $см^2$. Найти радианную меру дуги сектора.

29. Радианная мера дуги равна 2, а площадь сектора равна 256 $см^2$. Найти радиус сектора.

30. Радиус окружности равен 36 см. Найти периметр и площадь сектора, дуга которого содержит $7/9$ радиана.

Ответы:

24. $\pi/2$. **25.** 0,85. **26.** а) 31,25 см; б) 62,83 см. **27.** а) 1; б) 2. **28.** 6.
29. 16 см. **30.** 100 см.

Определить знак произведений:

1. $\sin 50° \cos 60° \sin 188° \cos 189°$. **2.** $\sin 210° \sin 465° \cos 465° \cos 540°$.

3. $\sin 365° \cos 725° \sin\alpha$, если $\cos\alpha > 0$.

Сравнить значения выражений:

4. $\sin 30^\circ$; $\cos 30^\circ$; $\cos 180^\circ$; $\sin 90^\circ$.

5. $\sin(-30^\circ)$; $\cos 60^\circ$; $\cos(-180^\circ)$; $\sin 270^\circ$; $\cos 180^\circ$.

6. $\sin 0^\circ$; $\cos 90^\circ$; $\cos 270^\circ$; $\sin 180^\circ$; $\sin 270^\circ$; $\cos 180^\circ$.

Упростить выражения:

7. $1-\sin^2 x$. **8.** $1-\cos^2 x$. **9.** $\sin^2 3x+\cos^2 3x-1$.

10. $\sin^2 x-1+\cos^2 x+(1-\sin x)(1+\sin x)$. **11.** $\dfrac{\cos^2 x}{1-\sin^2 x}$.

12. $2-\sin^2 6x-\cos^2 6x$. **13.** $2\sin^2 x+\cos^2 x-1+(1-\sin x)(1+\sin x)$.

Вычислить значение $\sin\alpha$, если:

14. $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, $0^\circ<\alpha<90^\circ$. **15.** $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$, $90^\circ<\alpha<180^\circ$.

16. $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, $270^\circ<\alpha<360^\circ$. **17.** $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, $-180^\circ<\alpha<0^\circ$.

18. $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, $\sin\alpha<0$. **19.** $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$, $\sin\alpha>0$.

Доказать тождества:

20. $\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. **21.** $\dfrac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}=1$.

22. $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha=\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

Ответы:

6. $\sin 270^\circ=\cos 180^\circ<\sin 0^\circ=\cos 90^\circ=\cos 270^\circ=\sin 180^\circ$.

Вычислить значения выражений:

1. $2\sin 30^\circ\cos 30^\circ\,\mathrm{tg}\,30^\circ\,\mathrm{ctg}\,30^\circ$. **2.** $\mathrm{tg}\,45^\circ\,\mathrm{ctg}\,45^\circ-1$.

3. $\sin(-30^\circ)\,\mathrm{ctg}\,30^\circ+\sin 60^\circ$. **4.** $\mathrm{tg}\,45^\circ\sin 60^\circ\,\mathrm{ctg}\,30^\circ-1{,}5$.

5. $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha-\sin 4\alpha+\sin 5\alpha+\sin 6\alpha$, при $\alpha=30^\circ$.

6. $\left(\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{3}\right)^2$, при $\alpha=90^\circ$. 7. $\dfrac{\sin^2 315^\circ\cos 300^\circ+\mathrm{tg}(-315^\circ)}{\sin(-120^\circ)\cos 150^\circ}$.

Определить знак произведения:

8. $\sin 100^\circ\cos 100^\circ\,\mathrm{tg}\,230^\circ\,\mathrm{ctg}\,320^\circ\,\mathrm{tg}\,3$.

9. $-\sin 50^\circ\,\mathrm{tg}\,170^\circ[-\cos(-100^\circ)]\,\mathrm{ctg}(-640^\circ)\sin 530^\circ$.

Ответы:

1. $\sqrt{3}/2$. **2.** 0. **3.** 0. **4.** 0. **5.** 2. 7. $5/3$. **8.** Положительно. **9.** Положительно.

Упростить выражения:

1. $\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}\operatorname{ctg}^2\alpha$. **2.** $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2+(\cos\alpha+\sin\alpha)^2-2$.

Вычислить:

3. $\cos 60^\circ+2\sin 30^\circ+\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 60^\circ-\operatorname{ctg}45^\circ$.

4. $3\cos 180^\circ+5\operatorname{ctg}270^\circ-2\operatorname{tg}0^\circ+3\operatorname{tg}180^\circ-\operatorname{tg}60^\circ$.

Вычислить значения остальных тригонометрических функций, если:

5. $\sin\alpha=0{,}6,\ \ 0^\circ<\alpha<90^\circ$. **6.** $\sin\alpha=-0{,}6,\ \ 270^\circ<\alpha<360^\circ$.

7. $\operatorname{tg}\alpha=2,\ \ 180^\circ<\alpha<270^\circ$. **8.** $\operatorname{ctg}\alpha=-3,\ \ 270^\circ<\alpha<360^\circ$.

9. Дано: $\sin\alpha+\cos\alpha=k$. Найти: а) $\sin\alpha\cos\alpha$; б) $\cos^3\alpha+\sin^3\alpha$; в) $\sin\alpha-\cos\alpha$. Определить k для каждого случая.

Ответы:

1. 1. **2.** 0. **3.** 2. **4.** $-\sqrt{3}(1+\sqrt{3})$. **5.** $\cos\alpha=0{,}8$, $\operatorname{tg}\alpha=0{,}75$, $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{4}{3}$.

7. $\sin\alpha=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha=-\dfrac{1}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha=0{,}5$. **9.** а) $\dfrac{k^2-1}{2}$; б) $\dfrac{k(3-k^2)}{2}$;

в) $\pm\sqrt{2-k^2}$.

Вычислить значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла α, если:

1. $\alpha=750^\circ$. **2.** $\alpha=810^\circ$. **3.** $\alpha=1260^\circ$.

4. $\alpha=390^\circ$. **5.** $\alpha=420^\circ$. **6.** $\alpha=540^\circ$.

Какой знак имеет:

7. $\sin 181^\circ$. **8.** $\cos 280^\circ$. **9.** $\operatorname{tg}175^\circ$.

10. $\operatorname{ctg}358^\circ$. **11.** $\cos(-116^\circ)$.

Ответы:

1. $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$; $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **2.** $\sin\alpha=1$; $\cos\alpha=0$. **3.** $\sin\alpha=0$; $\cos\alpha=-1$.

4. $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$; $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **5.** $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$. **6.** $\sin\alpha=0$; $\cos\alpha=-1$.

7, 9, 10, 11. Отрицательный. **8.** Положительный.

Основные тригонометрические формулы

Заменить тригонометрической функцией угла α:

1. $\sin^2(90°-\alpha)-\cos(180°-\alpha)+\operatorname{tg}^2(180°-\alpha)-\operatorname{ctg}(270°+\alpha)$.

2. $\dfrac{\cos(\alpha-90°)}{\sin(180°-\alpha)}+\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha-180°)\cos(180°+\alpha)\sin(270°+\alpha)}{\operatorname{tg}(270°+\alpha)}$.

3. $\sin^2(180°-\alpha)+\operatorname{tg}^2(180°+\alpha)\operatorname{tg}^2(270°+\alpha)+\sin(90°+\alpha)\cos(\alpha-360°)$.

О т в е т ы:

1. $2\cos\alpha$. **2.** $\cos^2\alpha$. **3.** 2.

Вычислить значения выражений:

1. $\cos 24°\cos 31°-\sin 24°\sin 31°-\cos 55°$.

2. $\sqrt{3}\cos\alpha-2\cos(\alpha-30°)+\sin\alpha$.

3. $\sin(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha=\dfrac{8}{17}$, $\cos\beta=\dfrac{4}{5}$, α и β – углы первой четверти.

4. $\cos(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha=\dfrac{8}{17}$, $\cos\beta=\dfrac{4}{5}$, α и β – углы первой четверти.

О т в е т ы:

1. 0. **2.** 0. **3.** 77/85. **4.** 36/85.

Упростить выражения:

1. Пусть $\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$ и $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Найти: а) $\sin 2\alpha$; б) $\cos 2\alpha$; в) $\operatorname{ctg} 2\alpha$.

2. Пусть $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{3}{4}$ и $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$. Найти: а) $\sin 2\alpha$; б) $\cos 2\alpha$; в) $\operatorname{ctg} 2\alpha$.

3. Пусть $\cos\alpha=-0{,}6$ и $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$. Найти: а) $\sin 2\alpha$; б) $\cos 2\alpha$; в) $\operatorname{tg} 2\alpha$.

О т в е т ы:

1. а) $-120/169$; б) $119/169$; в) $-119/120$. **2.** а) 0,96; б) 0,28; в) $7/24$.
3. а) 0,96; б) –0,28; в) $-24/7$.

Вычислить, не пользуясь таблицами:

1. $\cos^2 5°+\cos^2 1°-\cos 6°\cos 4°$. **2.** $\cos 20°\sin 50°\cos 80°$.

Преобразовать в сумму выражения:

3. $\sin 10°\cos 8°\cos 6°$ **4.** $\cos 3x\cos 5x\cos 7x$.

Ответы:

1. 1. **2.** 0,125. **3.** $\frac{1}{4}(\sin 24° + \sin 12° + \sin 8° - \sin 4°)$.

4. $\frac{1}{2}(\cos 15x + \cos 5x + \cos 9x + \cos x)$.

Представить в виде произведения:

1. $\sin 40° + \sin 16°$. **2.** $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x$. **3.** $\sin^2 x - \sin^2 y$.

4. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$.

Ответы:

1. $2\sin 28° \cos 12°$. **2.** $\frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x}$. **3.** $\sin(x+y)\sin(x-y)$.

4. $4\sin 2{,}5x \cos x \cos 0{,}5x$.

Вычислить без помощи таблиц и калькуляторов:

1. $\sin 15°$. **2.** $\operatorname{tg} 22{,}5°$. **3.** $\cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8}$.

Преобразовать выражения в произведения:

4. $1 + \sin\alpha + \cos\alpha$. **5.** $1 + \sin\alpha - \cos\alpha$.

Ответы:

1. $0{,}5\sqrt{2-\sqrt{3}}$. **2.** $\sqrt{2} - 1$. **3.** 1,5. **4.** $2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$.

5. $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Вычислить:

1. $\sin 4\alpha$, если $\operatorname{tg} 2\alpha = 3$. **2.** $\cos 4\alpha$, если $\operatorname{tg} 2\alpha = 8$.

3. $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 0{,}5$.

4. $\cos\alpha + \sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 3$. **5.** $\sin\alpha - \cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 3$.

6. Что больше: $\operatorname{tg} 2\alpha$ или $2\operatorname{tg}\alpha$, где $0° < \alpha < 90°$, $\alpha \neq 45°$? При каких значениях α имеет место равенство $\operatorname{tg} 2\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha$?

Ответы:

1. 0,6. **2.** $-63/65$. **3.** $4/5$; $3/5$; $4/3$; $3/4$. **4.** $-0{,}2$. **5.** 1,4.

6. $\operatorname{tg} 2\alpha > 2\operatorname{tg}\alpha$, если $0° < \alpha < 45°$; $\operatorname{tg} 2\alpha < 2\operatorname{tg}\alpha$, если $45° < \alpha < 90°$.

Тригонометрические функции и их свойства

Построить графики функций:

1. $y = \sin 2x$. **2.** $y = -\sin 2x$. **3.** $y = 1 - 0,5\sin 2x$.

4. $y = 1 - 2\sin 2x$. **5.** $y = 1 + 0,5\sin(2x + 60°)$.

6. $y = 1 - 0,5\cos(90° - (2x - 60°))$. **7.** $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$.

8. $y = |\cos x| / \cos x$. **9.** $y = \operatorname{tg} x \cos x$. **10.** $y = |\sin x|$.

11. $y = \dfrac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}$. **12.** $y = 2\sin x|\cos x|$. **13.** $y = \sin x + |\sin x|$.

14. $y = (\sin x - \cos x)^2$.

Ответы:

1 и **2.** Рис. 1. **3** и **4.** Рис. 2. **7.** Рис. 3. **8.** Рис. 4.

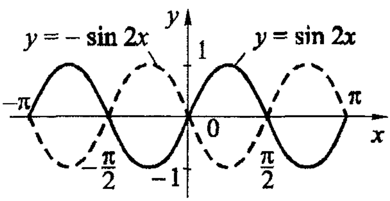


Рис. 1

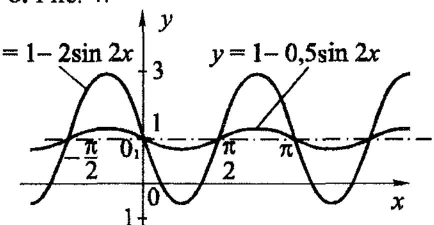


Рис. 2

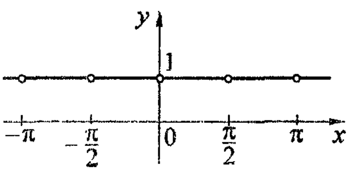


Рис. 3

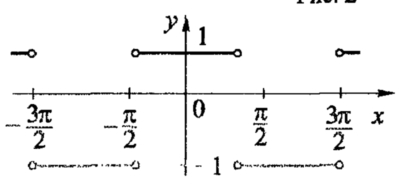


Рис. 4

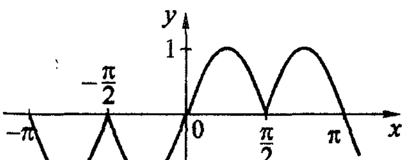


Рис. 5

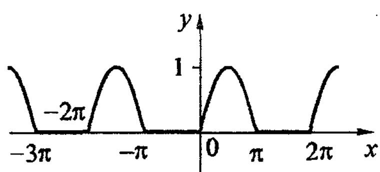


Рис. 6

9. График данной функции – синусоида с исключенными точками $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ \ k \in Z$. **11.** $y = \sin x\ \ x \neq \pi + 2\pi k$. **12.** Рис. 5. **13.** Рис. 6.

14. После упрощения $y = 1 - \sin 2x$.

Построить графики функций:

1. $y = \cos 2x$.

2. $y = -\cos 2x$.

3. $y = 1 - 0{,}5\cos(-2x)$.

4. $y = 1 - 2\cos 2x$.

5. $y = 1 + 0{,}5\cos(-2x + 60^\circ)$.

6. $y = 1 - 0{,}5\cos(2x + 60^\circ)$.

7. $y = \operatorname{ctg} x \left|\sin x\right|$.

8. $y = 4\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)$.

9. $y = \cos^2 x$.

10. $y = \sin^2 x$.

11. $y = \cos x + \sin x$.

О т в е т ы:

7. Рис. 7.

8. После понижения степеней и упрощения $y = 3 + \cos 4x$.

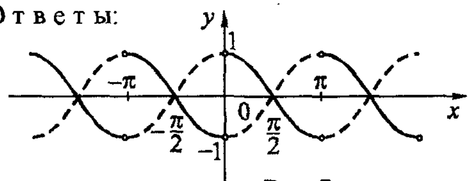


Рис. 7

Свойства обратных тригонометрических функций

Вычислить:

1. $\arcsin 0$.

2. $\arccos 0$.

3. $\arcsin 1$.

4. $\arccos 1$.

5. $\arcsin(-1)$.

6. $\arccos(-1)$.

7. $\arcsin\frac{1}{2}$.

8. $\arccos\frac{1}{2}$.

9. $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$.

10. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$.

11. $\arcsin\left(-\sqrt{2}/2\right) + \arccos\left(-\sqrt{2}/2\right)$.

Доказать равенства:

12. $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$.

13. $\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$.

14. $\sin(\arcsin x) = x$.

15. $\cos(\arccos x) = x$.

Найти область определения функций:

16. $y = \arcsin x$.

17. $y = \arcsin(x - 1)$.

18. $y = \arccos(2x - 1)$.

19. $y = \arcsin\frac{x-1}{2}$.

20. $y = \arcsin\frac{2}{x-1}$.

21. $y = \arccos\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

22. $y = \arcsin\left(x^2 - 2x\right)$.

23. $y = \arccos(x - 1)$.

Вычислить:

24. $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

25. $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right) + \arcsin\frac{4}{5}\right)$.

26. $\sin\left(2\arcsin\frac{1}{7}\right)$.

27. $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$.

28. $\arccos\left(\cos\frac{6\pi}{5}\right)$.

29. $\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{9}\right)$.

Ответы:

1. 0. **2.** $\frac{\pi}{2}$. **3.** $\frac{\pi}{2}$. **4.** 0. **5.** $-\frac{\pi}{2}$. **6.** π. **7.** $\frac{\pi}{6}$. **8.** $\frac{\pi}{3}$. **9.** $\frac{\pi}{3}$. **10.** $\frac{\pi}{6}$. **11.** $\frac{\pi}{2}$.
16. $[-1;1]$. **17.** $[0;2]$. **18.** $[0;1]$. **19.** $[-1;3]$. **20.** $(-\infty;\ -1]\cup[3;\ \infty)$.
21. $(-\infty;0{,}5]$. **22.** $\left[1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right]$. **23.** $[0;2]$. **24.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **25.** $\frac{63}{65}$. **26.** $\frac{8\sqrt{3}}{49}$
27. $-\frac{\pi}{7}$. **28.** $\frac{4\pi}{5}$. **29.** $\frac{7\pi}{18}$.

Вычислить:

1. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$.

2. $\mathrm{tg}\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)\right)$.

3. $\mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\mathrm{arctg}\,1+\arccos 0+\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

4. $\mathrm{tg}\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos(-0{,}5)+\mathrm{arctg}\,1\right)$.

5. $\mathrm{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arccos(-0{,}5)+\mathrm{arcctg}\,1\right)$.

6. $\sin(2\,\mathrm{arctg}\,3)$.

7. $\sin(\mathrm{arcctg}(-2))$.

8. $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,1+\mathrm{arctg}(-1))$.

9. $\mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}-\mathrm{arctg}\sqrt{3}\right)$.

10. $\mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\,0+\mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)\right)$.

11. $\mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\,0+\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$.

12. $\mathrm{tg}\left(2\,\mathrm{arctg}\,1+2\,\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$

13. $\mathrm{tg}\left(4\,\mathrm{arctg}(-1)+3\,\mathrm{arctg}\sqrt{3}\right)$. **14.** $\mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\frac{3}{8}\right)$.

15. $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,10)$. **16.** $\mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$. **17.** $\mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\left(-\frac{7}{8}\right)\right)$.

18. $\mathrm{ctg}\left(\mathrm{arctg}\frac{5}{4}\right)$. **19.** $\mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\mathrm{arctg}\frac{1}{4}\right)$. **20.** $\cos(\mathrm{arctg}\,x)$.

Сравнить числа:

21. $\mathrm{arctg}\frac{1}{3}$ и $\mathrm{arctg}\frac{1}{4}$. **22.** $\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)$ и $\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{4}\right)$.

23. $\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)$ и $\mathrm{arctg}\frac{2}{3}$. **24.** $\mathrm{arctg}(-3)$ и $\mathrm{arctg}(-2)$.

О т в е т ы:

1. $\frac{\pi}{6}$. **2.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **3.** -1. **4.** 1. **5.** $-2-\sqrt{3}$. **6.** $\frac{3}{5}$. 7. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **8.** 0. **9.** $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.
10. $-\sqrt{3}$. **11.** $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **12.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **13.** 0. **14.** $\frac{3}{8}$. **15.** 10. **16.** $-\frac{3}{5}$. **17.** $-\frac{7}{8}$.
18. $\frac{4}{5}$. **19.** $\frac{6}{7}$. **20.** $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Тригонометрические уравнения и неравенства

Тригонометрические уравнения

Решить уравнения:

1. $\cos^2 x+\sin^4 x=1$. 2. $2\cos^2\frac{x}{2}+\sin x=0$.

3. $\cos 9x+\cos 6x+\cos 3x=0$. **4.** $\sin 3x+\sin 7x=\sqrt{3}\cos 2x$.

5. $\cos x\cos 2x=\sin x\sin 4x$. **6.** $\sin x+\sqrt{3}(\cos x+1)=0$.

7. $\cos x+\sin 4x=\cos 7x$. **8.** $\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x=0$.

9. $\sin 2x-\sqrt{3}\cos x=0$. **10.** $\cos 3x-\cos x=\sqrt{3}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

11. $\cos x+\sin\left(9x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(5x-\pi)$.

12. $\sin 6x-\cos\left(4x+\frac{3\pi}{2}\right)=\sqrt{2}\sin\left(5x-\frac{\pi}{2}\right)$.

13. $\sin\frac{x}{2}=\sin 2x+2\sin x$.

14. $\cos^2 x+3\sin^2 x+5\cos x=0$.

15. $\sin^2 x-3\cos^2 x=4\sin x$.

16. $\cos 9x+\sin^2 2x=\cos^2 2x-\cos x$.

17. $(\sin x+\cos x)^2=\cos 2x$.

18. $\sqrt{3}\cos x=3\cos^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos^2 x$.

19. $\cos^3 x\sin x-\sin^3 x\cos x=\frac{1}{8}$.

20. $(1-2\sin x)\sin x=2\cos 2x-1$.

21. $(2\cos x-1)\cos x=2\cos 2x-1$.

22. $\sin 5x-\cos 3x=0$.

23. $\sin^4\frac{x}{2}-\cos^4\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$.

24. $1+\cos x+2\cos\frac{x}{2}=0$.

25. $2\cos x+\sin x=1+\sin 2x$.

26. $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+1=0$.

27. $\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}+1=\cos x$.

28. $\cos 2x=1+\sin x$.

29. $\cos^2 3x-\frac{1}{2}\cos 6x=\sin x$.

30. $\cos x=\frac{1}{2}\cos 6x+\sin^2 3x$.

31. $\sin 2x+\sin x=\cos x+\frac{1}{2}$.

32. $\sin x-\cos x=\frac{1}{\sin x}$.

33. $\sin^4\frac{x}{2}+\cos^4\frac{x}{2}=1-\frac{3}{2}\cos^2\frac{x}{2}$.

34. $\sin^4\frac{x}{3}+\cos^4\frac{x}{3}=1-2\sin^2\frac{x}{3}$.

35. $\sin^4 3x+\cos^4 3x=1+\sin^2 3x$.

36. $3\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2=2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

37. $\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1$.

38. $4\sin^3 x+4\sin^2 x-3\sin x-3=0$.

39. $\sin\frac{x}{2}\cos\alpha\cos\left(\alpha+\frac{x}{2}\right)+\sin\alpha\sin\left(\alpha+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

40. $\sin 2x\sin 5x\sin 7x+\cos 2x\cos\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)\cos 7x=\frac{1}{2}$.

41. $\sin x\cos 2x\cos 3x-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\sin 2x\sin 3x=\frac{1}{4}$.

42. $\cos^2 2x\sin 4x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\sin 2x\cos 4x=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

43. $\sin x\cos\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{4}-\cos x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

44. $1-\cos x+\cos 2x-\cos 3x=0$.

45. $\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$.

46. $1+\sin 3x=\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2$.

47. $\mathrm{tg}x-\sqrt{3}\mathrm{ctg}x+1=\sqrt{3}$.

48. $1-\cos 6x=\mathrm{tg}3x$.

49. $\mathrm{ctg}x=1+\sin x-\cos x$.

50. $\mathrm{tg}x=1-\sin x+\cos x$.

51. $2\cos x-\mathrm{ctg}\,x=0$.

52. $2\sin x-\mathrm{tg}\,x=0$.

53. $3+2\sin 2x=\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x$.

54. $3\,\mathrm{ctg}\,x-3\,\mathrm{tg}\,x+4\sin 2x=0$.

55. $\frac{\sqrt{3}}{3}+2\sin 2x=\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x$.

56. $\cos 5x+\sin 3x\cdot\sin 2x=0$.

57. $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$.

58. $2\sin^3 x=\cos x$.

59. $(1+\cos 4x)\sin 2x=\cos^2 2x$.

60. $\mathrm{ctg}\frac{x}{2}-\cos x=1$.

61. $\mathrm{ctg}^2 x-\mathrm{tg}^2 x=\frac{12}{\cos 2x}$.

62. $\mathrm{ctg}^2 x-\mathrm{tg}^2 x=8\,\mathrm{ctg}\,2x$.

63. $\mathrm{ctg}^2 x-\mathrm{tg}^2 x=16\cos 2x\,\mathrm{ctg}^2 2x$.

64. $\mathrm{tg}^2 x-\mathrm{ctg}^2 x=\frac{4\sqrt{3}}{\sin 2x}$.

65. $\mathrm{ctg}^2 x-\mathrm{tg}^2 x=8\,\mathrm{ctg}^2 2x$.

66. $8(\sin 2x-1)=3(\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x)$.

67. $\mathrm{tg}^4 x+\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{ctg}^4 x-\mathrm{ctg}^2 x=\frac{106}{9}$.

68. $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{2}$.

69. $\sin^2 2x-3\cos^4 x=\frac{1}{4}$.

70. $\sin^2 x-3\cos^2 x+\sqrt{3}\sin 2x-7\cos 2x=5$.

71. $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x+\sin^2 4x=2$.

72. $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x+\cos 5x=0$.

73. $\sin^4 2x+\cos^4 2x=\sin 2x\cdot\cos 2x$.

74. $(\cos x+\sin x)^2=1-\sin 4x$.

75. $\sqrt{6}\sin x+\sqrt{3\sin 2x}=0$.

76. $2\cos x+\sqrt{6\sin x}=0$.

77. $\sqrt{\sin x}+\sqrt[4]{12}\cos x=0$.

78. $\sqrt[4]{2}\sin x+\sqrt{\cos(x-\pi)}=0$.

79. $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\sqrt{3\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=0$.

80. $\sqrt{2\sqrt{3}}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\sqrt{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=0$.

81. $\sqrt{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}+\sqrt{2\sqrt{3}}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=0$.

82. $\sqrt{2}\sin x+\sqrt{1-\cos x}=0$.

83. $\sqrt{\frac{2}{3}}\cos x+\sqrt{1+\sin x}=0$.

84. $\left(2\cos^2 x-\cos x-1\right)\sqrt{\operatorname{ctg} x}=0$.

85. $\sqrt{4+3\cos x-\cos 2x}=\sqrt{6}\sin x$.

86. $\sqrt{4\sin x+\cos 2x+5}=2\sqrt{2}\cos x$.

87. $\sqrt{4\cos 2x-2\sin 2x}-2\cos x=0$.

88. $\sqrt{3+2\sin x-2\cos x}=\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x\right)$.

89. $\sqrt{\sin^4 x+\cos^4 x-\frac{3}{8}}+\sin x-\cos x=0$.

90. $\sqrt{\sin^4 x+\cos^4 x+\frac{3}{2}}+\sin x+\cos x=0$.

91. $\sqrt{12\sin x-\frac{9}{2}\cos 2x+\frac{17}{2}}=\frac{9}{8}+4\sin x+\frac{1}{2}\cos^2 x$.

92. $\sin|x|\sin x-\cos|x|\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

93. $2\cos 2x+\sqrt{3}\sin|x|+1=0$.

94. $|3+4\cos x-12\sin x|=4\cos x-3$.

95. $2\cos^2\left(x^2\right)+\sqrt{3}\sin\left(x^2\right)+1=0$.

96. $2\cos^2 x+1=5\sin|x|$.

97. $2\cos^2 x+3\sqrt{3}\sin|x|=5$.

98. $\cos\frac{\pi}{x}=\left|\frac{\pi}{2}-x\right|+\left|\frac{\pi}{2}+x\right|$.

99. $4\cos^2\left(\sqrt{x}\right)+4\sin\left(\sqrt{x}\right)=1$.

100. $\sqrt{3}\cos 2x+7\sin|x|=3\sqrt{3}$.

Найти корни уравнения, принадлежащие заданному промежутку (101–116):

101. $2\cos x+\sin x+\sin 2x+1=0;\ [\pi;\ 2\pi]$.

102. $\cos x+\cos 9x+\cos 5x=0;\ \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

103. $2\cos x+2\sin x+\sin 2x+2=0;\ [\pi;\ 2\pi]$.

104. $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=2\sqrt{2};\ [-\pi;\ 0]$.

105. $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+1=0;\ \left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$.

106. $\sin x + \cos x = \cos 2x;\ \left[\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right]$. **107.** $\sqrt{2}\sin\frac{x}{2} + 1 = \cos x;\ [-\pi;\ 0]$

108. $\cos 3x - \cos x = \sqrt{3}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right);\ \left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$.

109. $\sin 4x - \cos 2x = 0;\ [0;\ \pi]$.

110. $\sin 2x \cdot \operatorname{tg} 3x = 2\sin x \cdot \sin\left(x + \frac{23\pi}{2}\right);\ \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

111. $\sqrt{1 - \cos x} = \sin x;\ [\pi;\ 3\pi]$. **112.** $\sin 3x + \cos 7x = \cos x;\ \left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$.

113. $\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 8\operatorname{ctg} 2x;\ \left[-\frac{\pi}{2};\ -\pi\right]$.

114. $2\cos 2x - 1 = (2\cos 2x + 1)\operatorname{tg} x;\ [0;\ \pi]$.

115. $3 + 2\sin 2x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x;\ \left[-3\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right]$.

116. $8\cos^4 x = 2 + 3\cos 2x;\ \ [0; \pi]$.

Вычислить значения выражений:

117. $\arcsin\left(\sin\frac{11\pi}{7}\right)$. **118.** $\arccos\left(\cos\frac{22\pi}{5}\right)$.

119. $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{17\pi}{7}\right)$. **120.** $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{5}\right)$.

121. $\arcsin\left(\sin\frac{16\pi}{7}\right)$. **122.** $\arccos\left(\cos\frac{19\pi}{5}\right)$.

123. $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}\right)$. **124.** $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$.

125. $\operatorname{ctg}\left(2\arccos\frac{3}{5}\right)$. **126.** $\operatorname{tg}(2\operatorname{arcctg}(-2))$.

127. $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$. **128.** $\sin\left(2\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)\right)$.

129. $\sin\left(\arcsin\frac{3}{4} + \operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$.

130. Найти наименьшее значение функции и точки, в которых оно достигается:

а) $y = 3 + 2\sqrt{3}\cos x + \cos 2x$; б) $y = 2 - \cos x - \sin^2 x$.

Указать все значения параметра, при которых выполняется заданное условие:

131. Уравнение $\sin^2 x + 2a\sin x - a^2 + 4a + 6 = 0$ имеет решение.

132. Уравнение $\sin^2 x - \left(a^2 + 2a\right)\sin x + a^3 + a^2 = 0$ имеет решение.

133. Уравнение $\sin^2 x + a\sin x - a^2 + 1 = 0$ имеет решение.

134. Уравнения $\sin 2x + a = \sin x + 2a\cos x$ и

$2\cos 2x + a^2 = 5a\cos x - 2$ равносильны.

135. Уравнения $\sin^2 x = 1$ и $a\cos x = \sin 2x$ равносильны.

136. Уравнение имеет единственное решение.

а) $x^2 + \dfrac{6x}{\sqrt{\sin a}} + \dfrac{9\sqrt{3}}{\cos a} + 36 = 0$; б) $x^2 + \dfrac{2x}{\sqrt{\sin a}} + \dfrac{1}{\cos a} + 2\sqrt{2} = 0$.

Найти все значения параметра, при которых уравнения имеют один корень (на указанном множестве или, если оно не указано, то на всем множестве $\mathbb{R}$):

137. $(x-1)\arcsin(x-a) = 0$.

138. $\left(x^2 - 4x\right)\arcsin(x-a) = 0$.

139. $\left(a^2 - 5a + 6\right)\sin x = a - 3$ на $[0;\ 2\pi]$.

140. $\dfrac{(x-a)(x-1)}{\sin^2 x} = 0$.

141. $\cos x = x^2 + a$.

142. $\cos x + \cos ax = 2$.

Сколько корней имеют уравнения на указанном промежутке в зависимости от параметра a:

143. $\cos^2 x + \cos x = a$ на $[0;\ 2\pi]$.

144. $2\cos^2 x - \cos x = a$ на $[0;\ \pi]$.

145. $\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x = a$ на $\left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

146. $\sin^2 x - \sin x = a$ на $[0;\ 2\pi]$.

147. $\dfrac{\cos x - 1}{\cos x + 1} = a$ на $\left[-\dfrac{\pi}{2};\ 0\right]$.

148. При каких значениях a уравнение $\sin^2 x - 2(a-1)\sin x + a + 1 = 0$ имеет на отрезке $[0;\ 2\pi]$ ровно четыре различных решения?

При каких значениях a уравнение (I) следует из уравнения (II):

149. $\sin^2 x = 1$ (I); $a\sin x = 1$ (II).

150. $\sin 3x + \cos 5x - \cos 3x = a$ (I); $\sin x = a\sin x^2$ (II).

151. $\left(\sin x - a^2 + a\right)\left(\cos^2 x - 2a\right) = 0$ (I);

$\sin^2 x - \left(2a+1\right)\sin x + a^2 + a = 0$ (II).

Ответы:

(во всех ответах коэффициенты $k, n, m, l \in \mathbb{Z}$ кроме оговоренных).

1. $\frac{\pi n}{2}$. **2.** $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$. $\pi+2\pi k$. **3.** $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{6}$; $\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$. **4.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$; $(-1)^k\frac{\pi}{15}+\frac{\pi k}{5}$. **5.** $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$. **6.** $\pi+2\pi n$; $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$. **7.** $\frac{\pi n}{4}$; $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}$. **8.** $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $-\frac{\pi}{6}+\pi k$. **9.** $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k$. **10.** πn; $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$. **11.** $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}$; $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$. **12.** $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5}$; $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+\pi n$.

13. $2\pi k$; $\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi n$. **14.** $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$. **15.** $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$. **16.** $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}$; $\pm\frac{\pi}{15}+\frac{2\pi n}{5}$. **17.** πk; $-\frac{\pi}{4}+\pi n$. **18.** $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$. **19.** $(-1)^n\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4}$.

20. $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$; $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$. **21.** $2\pi n$. **22.** $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4}$; $\frac{\pi}{4}+\pi k$.

23. $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$. **24.** $\pi+2\pi k$; $2\pi+4\pi n$. **25.** $\frac{\pi}{2}+2\pi k$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$.

26. $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $-\frac{\pi}{6}+\pi n$. **27.** $2\pi k$; $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{2}+2\pi n$. **28.** πk; $(-1)^{n-1}\frac{\pi}{6}+\pi n$.

29. $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$. **30.** $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$. **31.** $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$. **32.** $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $-\frac{\pi}{4}+\pi n$. **33.** $\pi+2\pi k$; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$. **34.** $3\pi n$. **35.** $\frac{\pi n}{3}$. **36.** $\frac{11\pi}{12}+2\pi k$; $-\frac{5\pi}{12}+2\pi n$. **37.** $2\pi k$; $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$. **38.** $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$; $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$. **39.** $\frac{\pi}{2}+2\pi n$.

40. $\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5}$. **41.** $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$. **42.** $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{4}$. **43.** $(-1)^n\frac{\pi}{3}+2\pi n$.

44. $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $\frac{2\pi n}{3}$. **45.** $2\pi k$; $-\frac{\pi}{3}+2\pi n$. **46.** πk; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$. **47.** $\frac{\pi}{3}+\pi k$;

$-\frac{\pi}{4}+\pi n$. **48.** $\frac{\pi k}{3}$; $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$. **49.** $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$; $\frac{\pi}{4}+\pi n$. **50.** $\pi+2\pi k$; $\frac{\pi}{4}+\pi n$.

51. $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$. **52.** πk; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$. **53.** $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$.

54. $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$. **55.** $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$. **56.** $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$. **57.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$;

$\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$. **58.** $\frac{\pi}{4}+\pi k$. **59.** $(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$. **60.** $\pi+2\pi k$; $\frac{\pi}{2}+2\pi n$.

61. $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$. **62.** $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$. **63.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$; $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$.

64. $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$. **65.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$; $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$. **66.** $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$. **67.** $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$;

$\pm\arccos\frac{\sqrt{157}-6}{11}+\pi n$. **68.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$. **69.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$; $\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{6}{7}\right)+\pi k$.

70. $\frac{\pi}{3}+\pi n$; $-\mathrm{arctg}\frac{5\sqrt{3}}{3}+\pi k$. **71.** $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}$; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$; $\frac{\pi}{2}+\pi m$.

72. $\pm\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)+2\pi n$; $\pm\arccos\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)+2\pi m$; $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$.

73. $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$. **74.** $\frac{\pi n}{3}$; $\frac{\pi}{2}+\pi k$. **75.** πk; $\frac{5\pi}{4}+2\pi n$. **76.** $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$.

77. $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$. **78.** $-\frac{3\pi}{4}+2\pi n$. **79.** $-\frac{\pi}{3}+2\pi n$. **80.** $-\frac{\pi}{6}+2\pi n$. **81.** $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$.

82. $2\pi k$; $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n$. **83.** $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$; $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n$. **84.** $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n$; $\frac{\pi}{2}+\pi k$.

85. $\pi+2\pi n$; $\arccos\frac{1}{4}+2\pi k$. **86.** $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $\arcsin\frac{1}{3}+2\pi k$. **87.** $2\pi n$;

$-\frac{\pi}{4}+2\pi k$. **88.** $-\frac{\pi}{6}+2\pi n$; $\frac{\pi}{3}+2\pi k$. **89.** $\frac{\pi}{12}+2\pi n$; $-\frac{7\pi}{12}+2\pi k$. **90.** $\frac{5\pi}{4}+2\pi n$.

91. $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$. **92.** $\frac{5\pi}{12}+\pi n$; $\frac{7\pi}{12}+\pi k$ $n, k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. **93.** $(-1)^k\frac{\pi}{3}-\pi k$,

$k\in\mathbb{N}$; $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbb{N}$. **94.** $\frac{\pi}{6}+2\pi k$; $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+2\pi n$.

95. $\pm\sqrt{(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+\pi n}$, $n\in\mathbb{N}$. **96.** $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$; $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}-\pi n$,

$k, n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. **97.** $(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k$; $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}-\pi n$; $k, n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. **98.** Нет решений. **99.** $-\frac{\pi}{6}+2\pi n$; $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k$. **100.** $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}-\pi n$;

$(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}+\pi k$, $k, n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. **101.** $\left\{\frac{3\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}\right\}$.

102. $\left\{\frac{\pi}{10}; \frac{3\pi}{10}; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right\}$. **103.** $\left\{\pi; \frac{3\pi}{2}\right\}$. **104.** $\left\{-\frac{5\pi}{8}; -\frac{7\pi}{8}\right\}$. **105.** $\left\{\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right\}$.

106. $\left\{\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}; 2\pi\right\}$. **107.** $\left\{0; -\frac{\pi}{2}\right\}$. **108.** $\left\{0; -\frac{\pi}{6}; -\frac{\pi}{3}\right\}$.

109. $\left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}\right\}$. **110.** $\left\{-\frac{5\pi}{12}; -\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{4}\right\}$. **111.** $\left\{\frac{5\pi}{2}; 2\pi\right\}$.

112. $\left\{\frac{13\pi}{24}; \frac{2\pi}{3}; \frac{17\pi}{24}; \pi\right\}$. **113.** $\left\{-\frac{11\pi}{2}; -\frac{7\pi}{2}; -\frac{3\pi}{4}\right\}$. **114.** $\left\{\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}\right\}$.

115. $\left\{-\frac{23\pi}{12}; -\frac{35\pi}{12}; -\frac{19\pi}{12}; -\frac{31\pi}{12}\right\}$. **116.** $\left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right\}$. **117.** $-\frac{3\pi}{7}$.

118. $\frac{2\pi}{5}$. **119.** $\frac{3\pi}{7}$. **120.** $\frac{3\pi}{5}$. **121.** $\frac{2\pi}{7}$. **122.** $\frac{\pi}{5}$. **123.** $\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{6}}$. **124.** $\sqrt{5}$.

125. $-\frac{7}{24}$. **126.** $-\frac{4}{3}$. **127.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **128.** $\frac{24}{25}$. **129.** $\frac{3\left(4+\sqrt{7}\right)}{20}$. **130.** а) $y_{\min}=\frac{1}{2}$ при $x=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n$; б) $y_{\min}=\frac{3}{4}$ при $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$.

131. $a \in \left[1-2\sqrt{2};\ -1\right] \cup \left[1+2\sqrt{2};\ 7\right]$. **132.** $a \in \left[-\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ 1\right]$.

133. $\left[-2;\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\right] \cup \left[\frac{2}{\sqrt{5}};\ 2\right]$. **134.** $a=2$. **135.** $a \in (-\infty;\ -2] \cup [2;\ +\infty)$.

136. а) $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$; $\frac{\pi}{18}+2\pi k$; $\frac{13\pi}{18}+2\pi m$; б) $\frac{3\pi}{4}+2\pi n$; $\frac{\pi}{12}+2\pi k$.

137. $(-\infty;\ 0) \cup \{1\} \cup (2;\ +\infty)$. **138.** $(-\infty;\ -1) \cup \{0\} \cup (1;\ 3) \cup \{4\} \cup (5;\ +\infty)$.

139. $\{1\}$. **140.** $\{1\} \cup \{\pi k\}$. **141.** $\{1\}$. **142.** $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. **143.** При $a \in \left(-\infty;\ -\frac{1}{4}\right) \cup (2;\ +\infty)$ решений нет, при $a \in \left\{-\frac{1}{4}\right\} \cup (0;\ 2]$ – два решения, при $a=0$ – три решения, при $a \in \left(-\frac{1}{4};\ 0\right)$ – четыре решения.

144. При $a \in \left(-\infty;\ -\frac{1}{8}\right) \cup (3;\ +\infty)$ – решений нет, при $a \in \left\{-\frac{1}{8}\right\} \cup (1;\ 3]$ – одно решение, при $a \in \left(-\frac{1}{8};\ 1\right]$ – два решения. **145.** При $a \in (-\infty;\ -2) \cup (2;\ +\infty)$ – одно решение, при $a \in \{-2;\ 2\}$ – два решения, при $a \in (-2;\ 2)$ – три решения. **146.** При $a \in \left(-\infty;\ -\frac{1}{4}\right) \cup (2;\ +\infty)$ – решений нет, при $a=2$ – одно решение, при $a \in \left\{-\frac{1}{4}\right\} \cup (0;\ 2)$ – два решения, при $a \in \left(-\frac{1}{4};\ 0\right]$ – четыре решения. **147.** При $a \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$ – решений нет; при $a \in [-1;\ 0]$ – одно решение. **148.** Таких значений не существует. **149.** $[-1;\ 1]$. **150.** $a=0$; *указание*: заметьте, что $x=0$ – корень уравнения (II). **151.** $a \in (-\infty;\ -2) \cup \left\{0;\ \sqrt{2}-1\right\} \cup (1;\ +\infty)$.

Системы тригонометрических уравнений

Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases} \sin(x-y) = 2\sin x \sin y, \\ x+y = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = \dfrac{1}{2}, \\ x-y = \dfrac{4\pi}{3}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \sin(x+y) = 0, \\ \sin(x-y) = 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ \cos 2x - \cos 2y = 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \dfrac{1}{\cos y} = 2\sqrt[3]{34}, \\ \dfrac{1}{\cos y}\operatorname{tg} x = \sqrt[3]{34} - 5. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{4}, \\ \cos x \cos y = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 6\cos x + 4\cos y = 5, \\ 3\sin x + 2\sin y = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \cos 2x = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + y\right), \\ \cos 2y = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right). \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{(x^2 - 3\pi x)(x-y)}{(\cos x - 1)(\cos y + 1)} = 0, \\ \sin x \cos x = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \sin 3x - \sin y + 2\sin x = 0, \\ y^2 - 6xy + 5x^2 = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \operatorname{tg}\pi x + \operatorname{tg}\pi y = 1 - \operatorname{tg}\pi x \operatorname{tg}\pi y, \\ \sin x \cos y = \sin y \cos x. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \sin x + 2\sin y = \dfrac{3}{2}, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \cos(2x+3y) + \sin(x-y) = 2, \\ \cos(x+y) + \sin(x+3y) = -2. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \arcsin x + \arcsin y = \pi, \\ x^2 - y^2 = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \arcsin x + \arccos y = \pi, \\ x + y = 1. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \arcsin x + \operatorname{arctg} y = \dfrac{3\pi}{4}, \\ \arccos x + \operatorname{arctg} y = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

17. Найти все значения x, удовлетворяющие одновременно условиям: $\cos 13x = \cos x$, $\cos 2x + \sin 5x = 1$, $|x| < 3$.

Найти общие корни уравнений:

18. $\cos\pi x+2\sin\frac{14\pi}{x}-\frac{1}{2}=0$, $\sin\frac{\pi x}{2}-\cos\frac{14\pi}{x}-\sin\frac{14\pi}{x}+\frac{1}{2}=0$.

19. $\sin\frac{3\pi}{x}-\cos\frac{3\pi}{x}-2\cos 5\pi x=0$, $\sqrt{3}\sin 10\pi x-3\cos 10\pi x-\sin\frac{6\pi}{x}=0$.

Найти все значения параметра, при которых выполняется заданное условие (№№ 20–23):

20. Квадратичная функция $(\cos\alpha)\cdot x^2+(2\sin\alpha)\cdot x+\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{2}$ является квадратом линейной функции.

21. Квадратный трехчлен $(\cos\alpha)x^2+\left(2\sin^5\alpha-\sin 2\alpha\cos\alpha\right)x+\frac{1}{\sin 2x}$ имеет два одинаковых по модулю корня различных знаков.

22. Многочлен $y(x)$ является квадратом квадратного трехчлена относительно x:

а) $y(x)=x^4+2^{\cos\alpha}x^2+(\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha)x+2^{\cos\alpha}-1$;

б) $y(x)=x^4+2^{\operatorname{tg}\alpha}x^2+(\sin\alpha+\cos 2\alpha)x+2^{\operatorname{tg}\alpha-2}$.

23. Система $\begin{cases}\left(\operatorname{tg}x-\sqrt{3}\right)(x-a)=0,\\ 1\le x<2\end{cases}$ имеет единственное решение.

24. Решить систему $\begin{cases}\left(a^2-a\right)\sin\frac{x}{2}+2\cos y=a+5,\\ 3\sin\frac{x}{2}+\cos y=4.\end{cases}$

Ответы:

(во всех ответах коэффициенты k, m, $n\in Z$).

1. $\left\{\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2};\ \frac{5\pi}{8}-\frac{\pi n}{2}\right)\right\}$. **2.** $\left\{\left(\frac{7\pi}{6}+\pi n;\ -\frac{\pi}{6}+\pi k\right)\right\}$.

3. $\left\{\left(\frac{\pi}{2}(m+n);\ \frac{\pi}{2}(m-n)\right)\right\}$. **4.** $\left\{\left((-1)^m\frac{\pi}{6}+\pi m;\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)\right\}$.

5. $\left\{\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt[3]{34}\pm\sqrt{5}\right)+\pi k;\ \pm\arccos\frac{1}{\sqrt[3]{34}\pm 5}+2\pi n\right)\right\}$.

6. $\left\{\left(\pm\frac{\pi}{6}+\pi(k+n);\ \pm\frac{\pi}{6}+\pi(k-n)\right)\right\}$. **7.** $\left\{\left(\pm\arccos\frac{3}{4}+2\pi k;\ \mp\arccos\frac{1}{8}+2\pi n\right)\right\}$; *указание*: выразив $4\cos y = 5-6\cos x$, $4\sin y = -6\sin x$, почленно возводим эти уравнения в квадрат и складываем. **8.** $\left\{(\pi k;\ \pi n);\ \left(-\frac{\pi}{4}+\pi k;\ -\frac{\pi}{4}+\pi n\right);\ \left(\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)\right\}$. **9.** $x=3\pi$; $y\neq\pi+2\pi k$. **10.** $\left\{\left(\frac{\pi}{2}k;\ \frac{\pi}{2}k\right);\ \left(\frac{\pi}{2}n;\ \frac{5\pi}{2}n\right)\right\}$.

11. $\left\{\left(\frac{1}{8}+\frac{k}{2}+\frac{\pi}{2}n;\ \frac{1}{8}+\frac{k}{2}-\frac{\pi}{2}n\right)\right\}$. **12.** $\left\{\left((-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k;\ (-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n\right)\right\}$.

13. Решений нет. **14.** $\{(1;\ 1)\}$. **15.** $\{(1;\ 0)\}$. **16.** $\{(1;\ 1)\}$. **17.** $\left\{0;\ \frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\right\}$.

18. $\left\{-\frac{7}{3};\ \frac{1}{3}\right\}$; *указание*: выразим из второго уравнения $\sin\frac{\pi x}{2}$. Заменим в первом уравнении $\cos\pi x = 1-2\sin^2\frac{\pi x}{2}$ и подставим вместо $\sin\frac{\pi x}{2}$ найденное значение. После преобразований получим $\left(2\sin\frac{14\pi}{x}-1\right)\left(\cos\frac{14\pi}{x}-1\right)=0$. **19.** $\left\{\left(-\frac{2}{3};\ -\frac{1}{15};\ \frac{1}{3}\right)\right\}$; *указание*: на основании первого уравнения найдем $4\cos x^2 5\pi x = \left(\sin\frac{3\pi}{x}-\cos\frac{3\pi}{x}\right)^2$, откуда $\sin\frac{6\pi}{x} = -2\cos\pi x - 1$. Заменим во втором уравнении $\sin\frac{6\pi}{x}$. Получим уравнение $\cos\left(10\pi x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$. **20.** $\left\{-\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \mathrm{arctg}\frac{1}{2}+2\pi n\right\}$.

21. $\left\{\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{5}-2}{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{5}-2}{2}+\pi(2k+1)\right\}$.

22. а) $\{2\pi k\}$; б) $\{\pi+2\pi k\}$. **23.** $a\in(-\infty;\ 1)\cup\left\{\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2}\right\}\cup[2;\ +\infty)$.

24. При $a\in\{-1;\ 3\}$ $x=\pi+4\pi k$; $y=2\pi n$, при $a\notin\{-1;\ 3\}$ $\varnothing$.

Тригонометрические неравенства. Системы неравенств

Решить неравенства:

1. $\dfrac{\sin x-1}{2\sin x-1}<0$.

2. $\dfrac{5\sin x}{2\sin x+1}\le 2$.

3. $6\sin^2 x-7\sin x+2\ge 0$.

4. $2\cos^2 x+\cos x-1<0$.

5. $\sin^2 x-2\sin 2x+3\cos^2 x\ge 0$.

6. $\dfrac{1-4\sin^2 x}{\cos 2x+\cos x}\le 2$.

7. $\sin x\cdot\sin 2x<0$.

8. $\sin x+\sin 5x>2\sin 3x$.

9. $\sin 3x\cos x\le\sin 4x$.

10. $\cos x+\sin x\ge\cos 2x$.

11. $\sin x-\cos x\ge\sqrt{2}$.

12. $\sin x+4\sin 2x+5\sin 4x<10$.

13. $\arcsin x<\dfrac{\pi}{6}$.

14. $\sin x\arcsin x>0$.

15. $\log_{\sin^2 x}\cos x\le\dfrac{1}{2}$.

16. $\dfrac{3\arccos x-2\pi}{2\arcsin x-\pi}\le 0$.

Найти все решения неравенств на отрезке:

17. $\sin\dfrac{x}{x-1}>0$ на $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{4}{5}\right]$.

18. $\operatorname{tg}\left(x^2-4x\right)<0$ на $[0;3]$.

19. $\dfrac{\sin 3x}{3x-\pi}>0$ на $[-\pi;\pi]$.

20. $\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\left(\sin x-\dfrac{1}{2}\right)>0$ на $[0;2\pi]$.

21. $\dfrac{2\cos x+\sqrt{3}}{\operatorname{tg}x-2}>0$ на $[-\pi;\pi]$.

Решить системы:

22. $\begin{cases}2\cos 2x-4\cos x=1,\\ \sin x\ge 0.\end{cases}$

23. $\begin{cases}\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x,\\ \cos x<\dfrac{-1}{2}.\end{cases}$

24. $\begin{cases}\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)\sin x-\operatorname{tg}^2 x+1=0,\\ \operatorname{tg}x<0.\end{cases}$

25. $\begin{cases}2+\cos\dfrac{3}{2}x+\sqrt{3}\sin\dfrac{3}{2}x=4\sin^2\dfrac{x}{2},\\ \sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)>0.\end{cases}$

26. $\begin{cases} \cos\left(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{9}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{8}-\frac{3}{2}x\right), \\ \sin\frac{3}{2}x<0. \end{cases}$

27. При каких значениях a неравенство $\sin^2 x-2a\sin x+4a-3\geq 0$ выполняется при всех значениях x?

28. При каких значениях a неравенство $\sin^2 x-2(a-2)\sin x+a\leq 0$ не имеет решений на отрезке $[0;\ \pi]$?

29. При каких значениях a неравенство $\cos^2 x-2(a-3)\cos x+2a+9\geq 0$ выполняется на отрезке $[0;\ \pi/3]$?

30. Существуют ли такие значения параметров a и b, что при всех значениях x выполняются следующие неравенства:

а) $a\sin x+b\cos x>1$; б) $a\cos x-b\cos 2x>1$;

в) $a\sin^2 x+b\cos^2 x>1$?

Ответы:

(все коэффициенты $k,\ m,\ n\in Z$).

1. $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)$. **2.** $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{7\pi}{6}+2\pi k\right)$.

3. $\left[\arcsin\frac{2}{3}+2\pi k;\ \pi-\arcsin\frac{2}{3}+2\pi k\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{13\pi}{6}+2\pi k\right]$.

4. $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \pi+2\pi k\right)\cup\left(\pi+2\pi k;\ \frac{5\pi}{3}+2\pi k\right)$. **5.** $\left[\operatorname{arctg}3+\pi(k-1);\ \frac{\pi}{4}+\pi k\right]$.

6. $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)\cup\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\pi+2\pi k\right)\cup\left(\pi+2\pi k;\frac{4\pi}{3}+2\pi k\right]$.

7. $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \pi+2\pi k\right)\cup\left(\pi+2\pi k;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$. **8.** $\left[\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3};\ \frac{2\pi(k+1)}{3}\right]$.

9. $\left[-\pi+2\pi k;\ -\frac{5\pi}{6}+2\pi k\right]\cup\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ -\frac{\pi}{6}+2\pi k\right]\cup\left[2\pi k;\frac{\pi}{6}+2\pi k\right]\cup$

$\cup\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right]$. **10.** $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ -\frac{\pi}{4}+2\pi k\right]\cup\left[2\pi k;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi k\right]$.

11. $\left\{\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right\}$. **12.** $\mathbb{R}$. **13.** $\left[-1; \frac{1}{2}\right)$. **14.** $[-1; 0)\cup(0; 1]$.

15. $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi k; 2\pi k\right)\cup\left(2\pi k; \frac{\pi}{4}+2\pi k\right]$. **16.** $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$.

17. $\left[-\frac{1}{2}; 0\right)\cup\left(\frac{\pi}{\pi+1}; \frac{4}{5}\right]$. **18.** $\left(0; 2-\sqrt{4-\frac{\pi}{4}}\right)\cup\left(2-\sqrt{4-\pi}; 2+\sqrt{4-\pi}\right)$.

19. $\left(-\pi; -\frac{2\pi}{3}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{3}; 0\right)\cup\left(\frac{2\pi}{3}; \pi\right)$. **20.** $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$.

21. $\left[-\pi; -\frac{5\pi}{6}\right)\cup\left(-\pi+\operatorname{arctg}2; -\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\operatorname{arctg}2; \frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6}; \pi\right]$.

22. $\left\{\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right\}$. **23.** $\left\{\pi+2\pi k; \pi\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n\right\}$. **24.** $\left\{-\frac{\pi}{6}+2\pi k\right\}$.

25. $\left\{\frac{8\pi}{15}+4\pi k; \frac{4\pi}{3}+4\pi n; -\frac{4\pi}{15}+4\pi m\right\}$.

26. $\left\{\frac{3\pi}{4}+\frac{4\pi k}{3}; -\frac{\pi}{4}+4\pi n; -\frac{7\pi}{8}+\frac{4\pi m}{3}\right\}$. **27.** $a\in[1; +\infty)$. **28.** $a\in(0; 5)$.

29. $a\in\left[-12\frac{1}{4}; +\infty\right)$. **30.** а) Нет; б) нет; в) да: $\{(a; b)\,|\,a>1; b>1\}$.

12. ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ФУНКЦИЯХ

Классификация функций

1. Построить, если это возможно, композиции $f \circ g$ и $g \circ f$. (Укажите, где это необходимо, область определения.)

а) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$; $g(x)=\dfrac{1}{x}$. б) $f(x)=\sqrt{x}$; $g(x)=x^2+3$.

2. Представить данную функцию как композицию нескольких функций:

а) $y=\left(\sin^3(2x-1)-4\right)^7$; б) $y=\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\cos x}}}}}}$.

3. Какие из данных функций обратимы? Найти для них обратные, изобразить в одной системе координат графики прямой и обратной функций.

а) $y=x^2+6x$; б) $y=x^2+6x, x\geq -3$; в) $y=\dfrac{1}{x}$;

г) $y=\sin x$; д) $y=\sin x, x\in\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$; е) $y=\sqrt{1-3x}$;

ж) $y=\dfrac{x^2+5}{2-x^6}$; з) $y=|x-1|+|7-x|$.

О т в е т ы:

1. а) $f\circ g(x)=\dfrac{x}{1-2x}, x\neq 0$; $g\circ f(x)=x-2, x\neq 2$. б) $f\circ g(x)=\sqrt{x^2+3}$; $g\circ f(x)=x+3, x\geq 0$. **2.** а) $f(x)=2x-1$; $g(x)=\sin x$; $h(x)=x^3-4$; $p(x)=x^7$. $y=p(h(g(f(x))))$. б) $f(x)=\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$; $g(x)=\cos x$. $y=f(f(f(g(x))))$.

3. б) $y=\sqrt{x+9}-3$; в) $y=\dfrac{1}{x}$; д) $y=\pi-\arcsin x$; е) $y=\dfrac{1}{3}(1-x^2), x\geq 0$. (а, г, ж, з – не являются обратимыми. а, г, з – построить график или привести пример $f(x_1)=f(x_2), x_1\neq x_2$; ж – четная функция).

Общие свойства функций

Найти для данных функций промежутки монотонности, исследовать их на четность, нечетность, периодичность, ограниченность:

1. $y=x^3+x$. **2.** $y=5-4x-x^2$. **3.** $y=\cos(\pi x)+3$. **4.** $y=\dfrac{x-3}{x+1}$.

5. $y=|x-2|-|x+2|$. **6.** $y=\{2x+3\}$. **7.** $y=\dfrac{x^2+3}{x^2+2}$. **8.** $y=\dfrac{1}{x^2-8x+15}$.

9. Определить характер монотонности следующей сложной функции:

а) возрастающая от возрастающей от убывающей;

б) возрастающая от убывающей от убывающей от возрастающей от убывающей от убывающей;

10. Верно ли, что если внутренняя функция четная, то вся композиция четная? Верно ли такое же утверждение для нечетной внутренней функции?

11. Доказать, что функция $y=x^2$ не является периодической.

Найти основной период функций:

12. $y=\sqrt[5]{\operatorname{tg}\left(\dfrac{3x}{8}-1\right)-\sqrt{3}}$. **13.** $y=\sin^2 x\cdot\cos^2 x$.

14. $y=\sin\dfrac{x}{2}-2\cos^3\dfrac{x}{6}+\operatorname{tg}x$. **15.** $y=\{3x-\pi\}$.

Ответы:

1. Возрастает на R; нечетная, непериодическая; не ограничена. **2.** Возрастает на $(-\infty;-2]$, убывает на $[-2;+\infty)$; общего вида; непериодическая; ограничена сверху $(y\le 9)$. **3.** Возрастает на $[1+2k;2+2k]$, убывает на $[2k;1+2k]$, $k\in Z$; четная; $T=2$; ограничена $(y\in[2;4])$. **4.** Возрастает на $(-\infty;-1)$ и на $(-1;+\infty)$; общего вида; непериодическая; не ограничена. **5.** Постоянна на $(-\infty;-2]$ $(y=4)$ и на $[2;+\infty)$ $(y=-4)$, убывает на $[-2;2]$; нечетная; непериодическая; ограничена $(|y|\le 4)$. **6.** Возрастает на $\left[\dfrac{k}{3};\dfrac{k+1}{2}\right)$, $k\in Z$; общего вида; $T=1/2$; ограничена $(y\in[0;1))$. **7.** Возрастает на $(-\infty;0]$, убывает на $[0;+\infty)$; четная; непериодическая; ограничена $(y\in(1;3/2])$.

8. Возрастает на $(-\infty;3)$ и на $(3;4]$, убывает на $[4;5)$ и на $(5;+\infty)$; общего вида; непериодическая; не ограничена. **9.** а) убывающая; б) возрастающая. **10.** Да; не всегда. **12.** $8\pi/3$. **13.** $\pi/2$. **14.** 12π. **15.** $1/3$.

Метод математической индукции (от частного к общему)

Доказать, что:

1. Сумма кубов n первых натуральных чисел равна $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

$$\left(\sum_{m=1}^{n} m^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\right).$$

2. $\forall n \in N\ \ 2\cdot 2+3\cdot 5+\ldots+(n+1)(3n-1)=\dfrac{n(2n^2+5n+1)}{2}$

$$\left(\sum_{m=1}^{n}(m+1)(3m-1)=\frac{n(2n^2+5n+1)}{2}\right)$$

3. $\forall n \in N\setminus\{1\}\ \left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\dfrac{n+1}{2n}$. $\left(\prod\limits_{m=2}^{n}\left(1-\dfrac{1}{m^2}\right)=\dfrac{n+1}{2n}\right)$

4. $\forall n \in N\ \ 1+6+20+\ldots+(2n-1)\cdot 2^{n-1}=3+2^n(2n-3)$.

$$\left(\sum_{m=1}^{n}(2m-1)\cdot 2^{m-1}=3+2^n\cdot(2n-3)\right)$$

5. $\forall n \in N\ \ \dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{7}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{2n^2-1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n^2}{2n+1}$.

$$\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{2m^2-1}{(2m-1)(2m+1)}=\frac{n^2}{2n+1}\right)$$

6. $\forall n \in N\ \ \dfrac{1}{3}+\dfrac{7}{9}+\ldots+\dfrac{6n-5}{3^n}=2-\dfrac{3n+2}{3^n}$. $\left(\sum\limits_{m=1}^{n}\dfrac{6m-5}{3^m}=2-\dfrac{3n+2}{3^n}\right)$.

7. $\forall n \in N\ \ 9\cdot 3+17\cdot 27+\ldots+(8n+1)\cdot 3^{2n-1}=n\cdot 3^{2n+1}$.

$$\left(\sum_{m=1}^{n}(8m+1)\cdot 3^{2m-1}=n\cdot 3^{2n+1}\right)$$

8. $\forall n \in N\ \ 1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$. $\left(\sum\limits_{m=1}^{n} m\cdot m!=(n+1)!-1\right)$

9. $\forall n \in N\ \ (n^3+5n)\,\vdots\,6$.

10. $\forall n \in N\ \ (7^{2n}-1)\,\vdots\,24$.

11. $\forall n \in N\ \ (7^n+3n-1)\,\vdots\,9$

12. $\forall n \in N\ \ (6^n+20n+24)\,\vdots\,25$.

13. $\forall n \in N \ \left(75^n - 3^n + 2n\right) \vdots 4$.

14. $\forall n \in N,\ n \vdots 2 \ \left(4^n - 3^n - 7\right) \vdots 84$.

15. $\forall n \in N,\ \left(7^{n+2} + 8^{2n+1}\right) \vdots 19$.

16. $\forall n \in N,\ \left(10^{n+1} - 10(n+1) + n\right) \vdots 81$.

17. $\forall n \in N \ \left(6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n\right) \vdots 11$.

18. $\forall n \in N,\ \left(3^{2n} - 1\right) \vdots 2^{n+2}$.

19. $\forall n \in N,\ n > 3 \ \ 2^n > 2n + 7$.

20. $\forall n \in N,\ n \geq 3 \ \ 3^{n-1} > 2n^2 - n$.

21. $\forall n \in N,\ \ 3^n - 2n^2 \geq n$.

22. $\forall n \in N,\ \ 4^n \geq n^2 + 3^n$.

23. $\forall n \in N \setminus \{1\} \ \ \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$.

24. $\forall n \in N,\ n \geq 3 \ \ 3^{n-1} > 2^{\frac{1}{2}n(n-1)} - n!$.

Доказать формулу n-го члена, если последовательность задана рекуррентно:

25. $a_1 = 6$; $a_{n+1} = 2a_n - 3n + 2$; доказать: $a_n = 2^n + 3n + 1$.

26. $b_1 = 3$; $b_{n+1} = 7b_n + 3$; доказать: $b_n = 0{,}5\left(7^n - 1\right)$.

27. $c_1 = 29$; $c_2 = 85$; $c_{n+2} = 5c_{n+1} - 6c_n$; доказать: $c_n = 2^n + 3^{n+2}$.

28. $d_1 = 5$; $d_2 = 7$; $d_{n+1} - 2d_n + d_{n-1} = 0$; доказать: $d_n = 2n + 3$.

29. Последовательность (u_n) задана рекуррентно: $u_1 = 6$; $u_2 = 15$; $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$; доказать, что: а) все члены последовательности кратны 3; б) все члены последовательности с четными номерами кратны 15.

30. Известно, что $x + \dfrac{1}{x}$ – целое число. Доказать, что при любом натуральном n число $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ – тоже целое.

31. Банк имеет неограниченное количество трех- и пятирублевых купюр. Доказать, что он может выдать без сдачи любое количество рублей, начиная с восьми.

32. Доказать, что при любом $n \in N$ число $2^{4n-1} - 1$ оканчивается цифрой 7.

33. Доказать, что n различных прямых, лежащих в одной плоскости и имеющих общую точку, делят плоскость на $2n$ частей.

34. Доказать, что $\sqrt{4\sqrt{4+\sqrt{\sqrt{4+\ldots\sqrt{4}}}}} < 3$.

13. ПРОГРЕССИИ

1. Сумма второго, четвертого и шестого членов арифметической прогрессии равна 18, а их произведение равно -168. Найти первый член и разность прогрессии.

2. При каком значении разности арифметической прогрессии, седьмой член которой равен 3, произведение четвертого и девятого членов будет наибольшим?

3. 13-й член арифметической прогрессии равен 5. Найти сумму первых 25 ее членов.

4. Найти арифметическую прогрессию, в которой среднее арифметическое n первых членов равно $2n$.

5. Сумма первых 17 членов арифметической прогрессии равна 85, а сумма первых ее 21 члена равна 189. Сколько положительных трехзначных чисел содержится в этой прогрессии?

6. В арифметической прогрессии, разность которой отлична от 0, сумма первых $3n$ членов равна сумме следующих n членов. Найти отношение суммы первых $2n$ членов к сумме следующих $2n$ членов.

7. Седьмой член геометрической прогрессии равен 2. Найти произведение первых 13 ее членов.

8. Сумма третьего и пятого членов геометрической прогрессии равна 10, а сумма ее второго и четвертого членов равна 10/3. Найти четвертый член прогрессии.

9. Найти сумму членов геометрической прогрессии с 15 по 21 включительно, если сумма первых семи членов прогрессии равна 14, а сумма первых четырнадцати ее членов равна 18.

10. В геометрической прогрессии первый член равен $\sqrt{3}$, а пятый равен $\sqrt{243}$. Найти шестой член прогрессии.

11. В геометрической прогрессии с четным числом членов сумма всех ее членов в 3 раза больше суммы членов с нечетными номерами. Найти знаменатель прогрессии.

12. Между числом 3 и неизвестным числом вставлено еще одно число так, что все 3 числа образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Если средний член этой прогрессии уменьшить на 6, то получится геометрическая прогрессия. Найти неизвестное число.

13. Сумма первых 13 членов арифметической прогрессии равна 130. Известно, что четвертый, десятый и седьмой члены этой прогрессии,

взятые в указанном порядке, представляют собой три последовательных члена геометрической прогрессии. Найти первый член арифметической прогрессии.

14. Найти первый член и разность арифметической прогрессии, если известно, что сумма ее пяти первых членов с четными номерами равна 15, а сумма первых трех членов равна -3.

15. Найти сумму всех трехзначных чисел, делящихся на 5, но не делящихся на 7.

16. Доказать, что для любой арифметической прогрессии (a_n) значение данного выражения постоянно (если оно определено):

$$\left(\left(\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_8}\right):\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_8}\right)\right)^{-1}\cdot\frac{\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_9}}{\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_9}}.$$

17. В арифметической прогрессии, содержащей 9 членов, первый член равен 1, а сумма всех членов равна 369. Геометрическая прогрессия также имеет 9 членов, причем первый и последний ее члены совпадают с соответствующими членами данной арифметической прогрессии. Найти пятый член геометрической прогрессии.

18. В арифметической прогрессии первый член равен 100; первый отрицательный член прогрессии имеет номер 22. Какие целые значения может принимать разность прогрессии?

19. Пять различных чисел составляют арифметическую прогрессию. Если удалить ее второй и третий члены, то три оставшихся числа составят геометрическую прогрессию. Найти ее знаменатель.

20. Есть четыре числа. Первые три (по порядку) составляют геометрическую прогрессию, последние три (по порядку) – арифметическую прогрессию. Сумма крайних чисел равна 14, сумма средних равна 12. Найти эти 4 числа.

21. Найти 1523-й член геометрической прогрессии, 1511-й член которой равен -3, а 1571-й член равен -96.

22. Сумма всех членов арифметической прогрессии с номерами от 1995 до 2009 включительно равна 30. Найти сумму членов этой прогрессии с номерами 1987, 2000 и 2019.

23. Сумма 182-го и 190-го членов геометрической прогрессии равна -6, а сумма 194-го и 178-го членов равна $-11{,}5$. Найти 186-й член этой прогрессии и произведение 179-го и 193-го ее членов.

24. Сложив члены арифметической прогрессии с 23-го по 27-й включительно, наблюдательный отличник заметил, что полученное число совпадает со стоимостью трех порций мороженого, а если к 43-му члену этой прогрессии добавить все члены с 34-го по 37-й, то получится число, соответствующее стоимости 7 порций такого мороженого. А на сколько порций хватит суммы всех членов с 29-го по 33-й включительно?

25. В лаборатории стояла 10-литровая бутыль со спиртом (для протирки пробирок). 1 августа в лабораторию случайно заглянул дворник дядя Петя и догадался, что находится в бутыли. Он взял стакан (емкостью 0,25 л), отлил стакан содержимого бутыли, а затем долил в бутыль столько же воды из-под крана. Такую процедуру дядя Петя проводил и 30 следующих дней, пока занятий не было. Во сколько раз изменилась концентрация спирта к началу учебного года?

26. Сумма бесконечной геометрической прогрессии равна 7, а сумма квадратов всех ее членов равна 14. Найти два первых члена прогрессии.

27. Первый член бесконечной геометрической прогрессии на 8 больше второго, а сумма ее членов равна 18. Найти третий член прогрессии.

28. Найти сумму бесконечной геометрической прогрессии, про которую известно, что ее второй член равен 4, а отношение суммы квадратов ее членов к сумме членов равно $16/3$.

29. Сумма бесконечной геометрической прогрессии равна 9, а сумма квадратов ее членов равна 40,5. Найти сумму кубов членов этой прогрессии.

30. В квадрат со стороной 1 вписан круг, в него вписан квадрат, в этот квадрат опять круг и т.д. (до бесконечности). Найти сумму периметров всех квадратов и сумму площадей всех кругов.

31. В острый угол величины α вписана бесконечная последовательность окружностей, касающихся друг друга внешним образом. Радиус наибольшей из них равен R. Найти сумму длин всех окружностей.

32. 37-й, 43-й и 41-й члены арифметической прогрессии являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии. Найти отношение 18-го члена геометрической прогрессии к сумме всех последующих ее членов.

33. В прямой круговой конус помещена бесконечная последовательность шаров так, что первый шар касается основания конуса и всех его образующих, а каждый последующий шар касается предыдущего шара (внешним образом) и всех образующих конуса. Найти угол наклона образующей конуса к плоскости его основания, если известно, что объем конуса в $91/18$ раз больше суммы объемов всех шаров.

Ответы:

1. $a_1=-6,\ d=4$ или $a_1=18,\ d=-4$. **2.** $d=-\frac{1}{4}$. **3.** $S_{25}=125$. **4.** $a_1=2$, $d=4$. **5.** 450. **6.** $\frac{1}{5}$. **7.** $\Pi_{13}=8192$. **8.** $b_4=3$. **9.** $S_{15-21}=\frac{8}{7}$. **10.** $b_6=\pm 27$. **11.** $q=2$. **12.** 27. **13.** $a_1=10$ или $a_1=70$. **14.** $a_1=-2$, $d=1$. **15.** $S=84445$. **17.** $b_5=9$. **18.** $d=-5$. **19.** $q\in\left\{\frac{1}{3};\ -\frac{1}{4};\ -\frac{4}{3};\ -4;\ -\frac{3}{4};\ 3\right\}$. **20.** $(2;\ 4;\ 8;\ 12)$ или $\left(\frac{25}{2};\ \frac{15}{2};\ \frac{9}{2};\ \frac{3}{2}\right)$. **21.** $b_{1523}=-6$. **22.** $S=6$. **23.** $b_{186}=-\frac{9}{4}$; $b_{179}\cdot b_{193}=\frac{81}{16}$. **24.** 5. **25.** $\left(\frac{39}{40}\right)^{31}$. **26.** $b_1=\frac{28}{9}$; $b_2=\frac{140}{81}$. **27.** $b_3=\frac{4}{3}$.

28. $S=16$. **29.** $S_{b^3}=224\frac{4}{13}$. **30.** $S_{P_{кв}}=4\left(2+\sqrt{2}\right)$; $S_{S_{кр}}=\frac{\pi}{2}$.

31. $S_1=\dfrac{\pi R\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\sin\frac{\alpha}{2}}$. **32.** -4. **33.** $\mathrm{arctg}\frac{3}{4}$ (или $2\mathrm{arctg}\frac{1}{3}$).

14. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Найти область определения функций:

1. $y=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$. **2.** $y=\dfrac{1-x}{\sqrt[3]{3x-6}}$. **3.** $y=\sqrt[4]{\dfrac{|x-1|}{x^2-8}}$.

4. $y=\dfrac{2}{|x|-3}+\dfrac{1}{x}$. **5.** $y=\sqrt{x-1}+2\sqrt{1-x}+\sqrt{x^2+1}$.

6. $y=\dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$. **7.** $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-|x|}}$. **8.** $y=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}+\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

9. $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{10+9x-x^2}}$. **10.** $y=\sqrt{x^2-6x}+\sqrt{5x^2+2x}$.

Исследовать на четность и нечетность функции:

11. $y=x-2|x|$. **12.** $y=3x^2+4|x|-5$. **13.** $y=\dfrac{2x}{x^2+|x|+1}$.

14. $y=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}$. **15.** $y=\dfrac{|x|}{x}$.

Найти интервалы, на которых функции принимают положительные значения:

16. $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x+6}$. **17.** $y=\dfrac{1}{x-\sqrt{1-x}}$.

Найти интервалы, на которых функции принимают отрицательные значения:

18. $y=\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x-5}$. **19.** $y=\sqrt{10-x}-\sqrt{x-2}$.

Найти нули функций:

20. $y=\left|x^2-6|x|+5\right|$. **21.** $y=\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{2x(x-1)}-\sqrt{x^2-15x}$.

Найти промежутки монотонности функций:

22. $y=x^2-x$. **23.** $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **24.** $y=\dfrac{x}{2+\sqrt{x+1}}$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функций на указанных интервалах:

25. $y=x^2-4x+5$ на $(-\infty;+\infty)$.

26. $y=\dfrac{1}{x^2-6x+6}$ а) на $[-1;+\infty)$; б) на $[2;3,5]$.

Построить графики:

27. $y=-x^2+3x-2$. 28. $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$. 29. $y=\sqrt[3]{(x+2)^2}$.

30. $y=\dfrac{4}{\sqrt{|x|}}$. 31. $|y|=x-2$. 32. $y=\dfrac{1}{2}x^2-3|x|+2$.

33. $y=|x-1|+|x+3|$. 34. $y=|x^2-6x+5|$. 35. $y=\left|\dfrac{3-|x|}{|x|-1}\right|$

36. $y=(x+2)|3-x|$. 37. $y=\begin{cases}4 \text{ при } x\le 2,\\ x^2 \text{ при } x>2.\end{cases}$ 38. $y=\begin{cases}x \text{ при } x\le 0,\\ \dfrac{1}{x+1} \text{ при } x>0.\end{cases}$

39. $y=|-x^2+4x-1|$. 40. $y=-x^2+4|x|-1$. 41. $|y|=|-x^2+4x-1|$.

42. $y=|-x^2+4|x|-1|$. 43. $|y|=|-x^2+4|x|-1|$.

44. $y=(x-1)^2-2|x-1|-3$. 45. $y=\dfrac{x-3}{x+2}$. 46. $y=\left|\dfrac{x-3}{1-x}\right|$.

47. $|y|=\dfrac{x-5}{4-x}$. 48. $y=\dfrac{|x+4|-3}{|x+4|+2}$. 49. $|y|=5\sqrt{x+4}+1$.

50. $y=3-\sqrt{2|x+1|}$. 51. $y=\dfrac{2}{x^2+1}$. 52. $y=\dfrac{1}{x^2-1}$.

53. $y=x^2\cdot\dfrac{y-x}{|y-x|}$. 54. $|y-1|-|x-2|=4$.

55. $y=|2-x|+|x|-|x-5|$. 56. $y=||||2x-1|-1|-1|-1|$.

57. $|x-y|=1-\dfrac{|x+5|}{x+5}\cdot y$. 58. $y=||y-2|-1|$.

59. $|y-1|+|x+2|=4$. 60. $|2x+1|-|y-1|=2x+y$.

61. $||x|+2-|y||=|1+x|$. 62. $||y|-1|=||3-|x||-1|$.

63. $2(|x|+|y|)=x^2-y^2$. 64. $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$. 65. $y=2\sin 2x+1$.

66. $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

67. $y=\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

68. $y=3-\sin|0,5x|$.

69. $y=\frac{|\sin x|}{\sin x}\cdot\sqrt{x+1}$.

70. $y=\sqrt{|x|-2}\cdot\cos\pi x$.

71. $y=\frac{\cos\left(|x|+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin x}$.

72. $y=|\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{ctg}2x|$.

73. $y=\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}\cdot\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cdot\sin(\pi+x)}{\operatorname{ctg}(\pi-x)}$.

74. $y=x+\cos x$.

75. $y=\sin\frac{1}{x}$.

76. $y=|x|\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

77. $|y+3|=\sin\left(|x|+\frac{\pi}{3}\right)$.

78. $y=\frac{\sin|x|}{|\operatorname{tg}x|}$.

79. $y=\sqrt{1-\sin^2 x}\cdot\frac{\operatorname{ctg}2x\cdot(1+\operatorname{tg}2x)}{1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}$.

80. $y=\max\left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right);\operatorname{tg}|x|\right\}$.

81. $y=\sqrt{\cos^5 x-1}\cdot(x^3-2\pi x^2)$.

82. $\operatorname{ctg}x=\operatorname{ctg}y$.

83. $y=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(2x))$.

84. $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(2x))$.

85. $y=\arccos\left(|x-1|-\frac{1}{2}\right)$.

86. $y=\frac{1}{\sin x}$.

87. $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sin x}$.

88. $y=\frac{x^2+1}{\sin(\pi x)}$.

89. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x-2|-1-x}$

90. $|y|=4-2^{|x-2|}$.

91. $y=\log_{|x|-1}3$.

92. $|y|=2y\cdot\log_3\sqrt{x^2+y^2-6x+9}$.

93. $y=\operatorname{arctg}(2^x-1)$.

94. $y=2^{\frac{x^2-1}{x}}$.

95. $y=\min\left\{\lg|x|;2^{-|x|}\right\}$

96. $y=\lg\frac{1}{10-x^2}$.

97. $(|x|-|y|-4)(|x|+|y|-2)\geq 0$.

98. $(x^2-6|x|+y^2+8)xy\leq 0$.

99. $|y-x^2-4x-4|\leq 3$.

100. $\log_{x-y}(xy)>0$.

101. $(x^2+2x+y^2)(xy-1)\leq 0$.

102. $\frac{y-1+|x-1|}{y-x^2+2x}\leq 0$.

103. Графически решить уравнение $\pi\sin\left(|x|-\frac{\pi}{4}\right)=4\pi-4|x|$.

Решить при всех значениях параметра a:

104. $\frac{a-x^2}{(a-x-2)(a-x-6)}=0$.

105. $\frac{(x^2-2x+a^2-4a-11)(a-2)}{x-1}\le 0$.

106. $(ax-4)(x+a)(a-|x|)\ge 0$.

107. $\log_{x-2}(x^2-2x+a)\ge 2$.

108. $\begin{cases} x(x+1-a)(a-2+|x+1|)>0 \\ x^2+1=|a|. \end{cases}$

109. Найти все значения a, при которых неравенство $\frac{x-\frac{a}{4}}{x-2a}<0$ выполняется для всех $x\in[2;4]$.

Ответы:

1. $(-3;3)$. **2.** $x\ne 2$. **3.** $\left(-\infty;-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2};+\infty\right)\cup\{1\}$.

4. $(-\infty;-3)\cup(-3;0)\cup(0;3)\cup(3;+\infty)$. **5.** $\{1\}$. **6.** $(-\infty;0)$. **7.** $\varnothing$. **8.** $\varnothing$.

9. $(-1;1)\cup(2;10)$. **10.** $(-\infty;-0,4]\cup\{0\}\cup[6;+\infty)$. **11.** Общего вида.

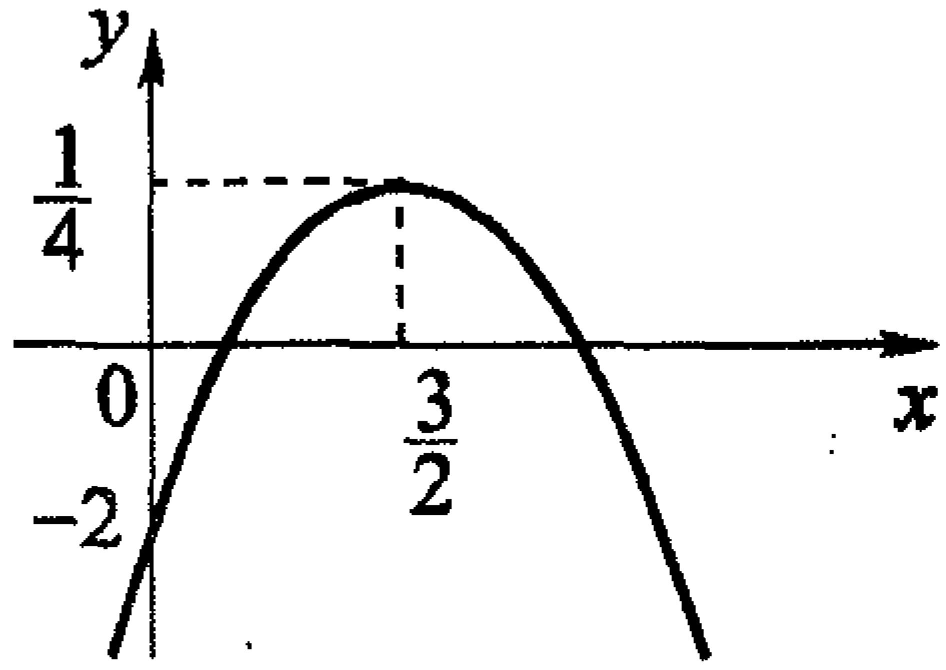
12. Четная. **13.** Нечетная. **14.** Общего вида. **15.** Нечетная.

16. $(-6;1)\cup(4;+\infty)$. **17.** $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};1\right)$. **18.** $(-\infty;-3)\cup(1;5)$. **19.** $(6;10]$.

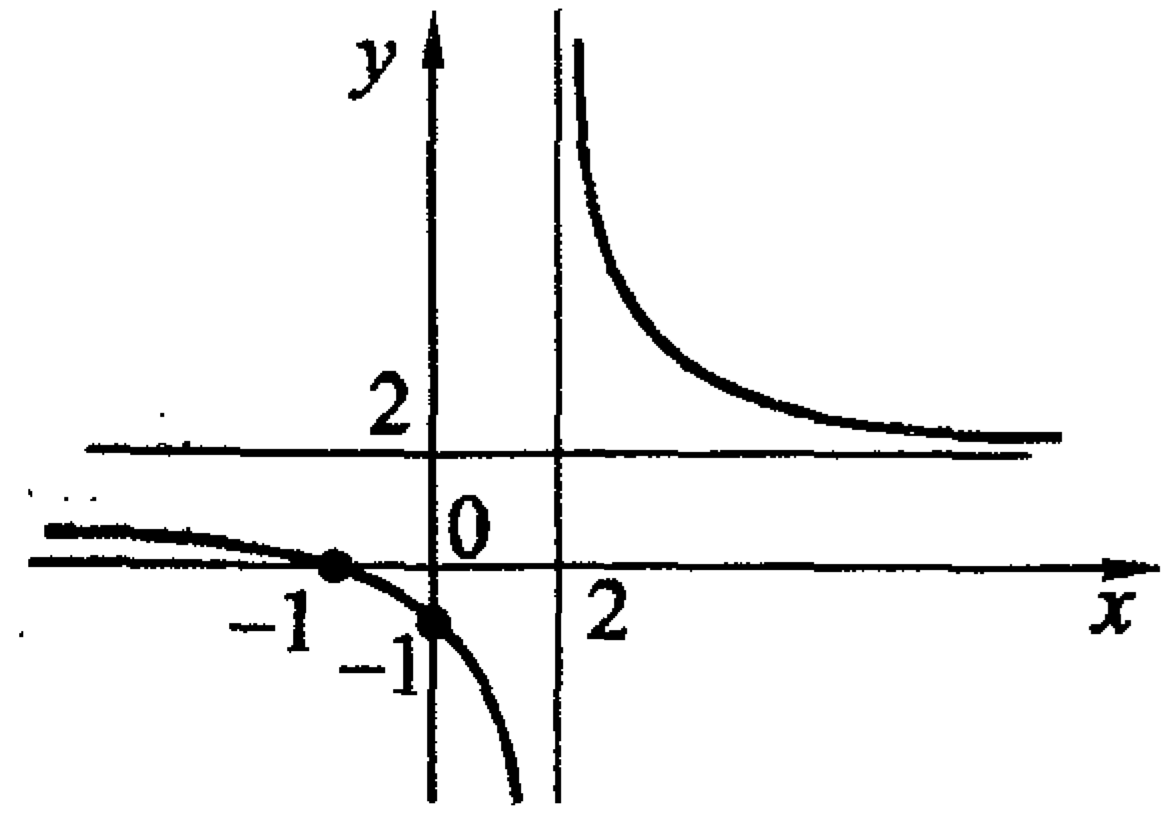
20. $\{\pm1;\pm5\}$. **21.** $\{-1;0\}$. **22.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]$ – промежуток убывания; $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$ – промежуток возрастания. **23.** $(-\infty;1)$; $(1;+\infty)$ – интервалы убывания.

24. $[-1;+\infty)$ – промежуток возрастания. **25.** Наименьшее значение функции равно 1, а наибольшего нет. **26.** а) ни наименьшего, ни наибольшего значения функции нет. б) наибольшее значение равно $-1/3$, наименьшее значение равно $-1/2$. **27 – 109.** См. рис.

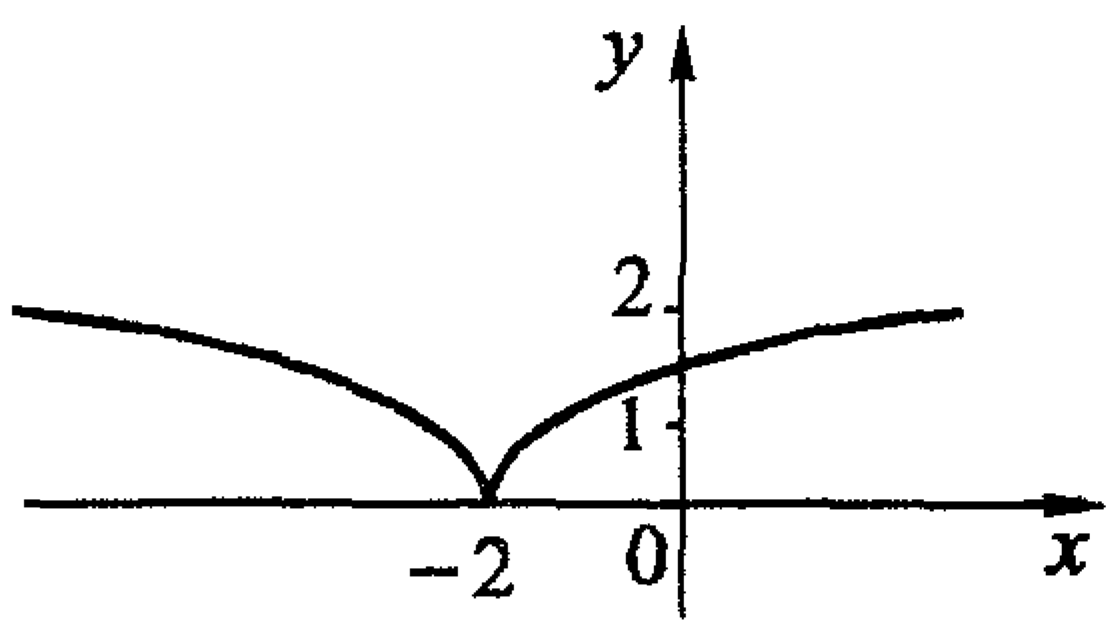
27. $y=-x^2+3x-2$



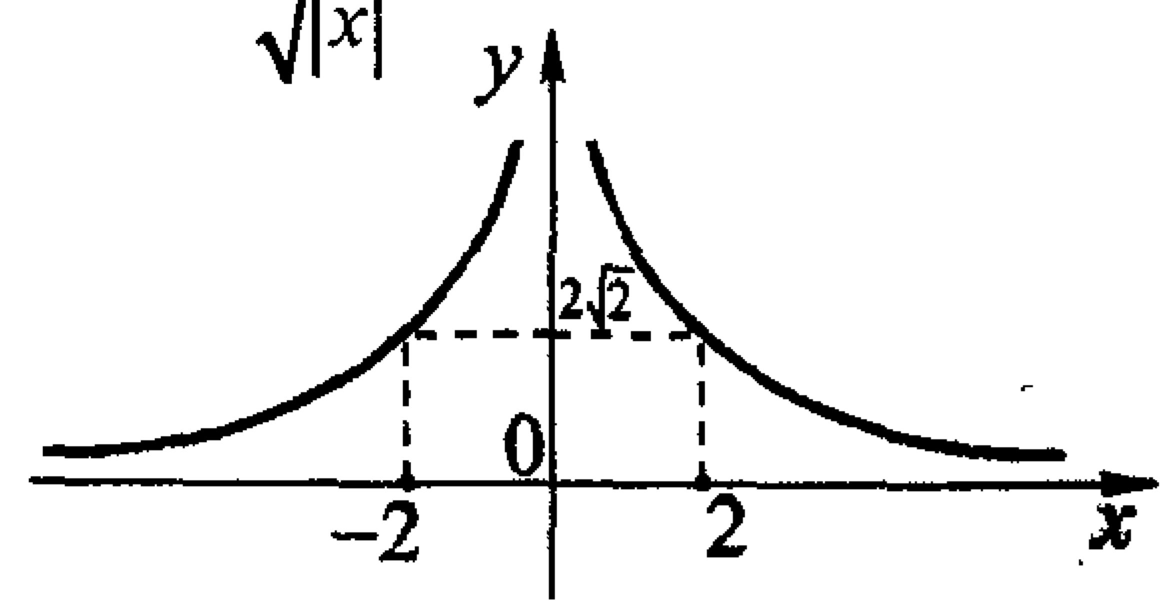
28. $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$



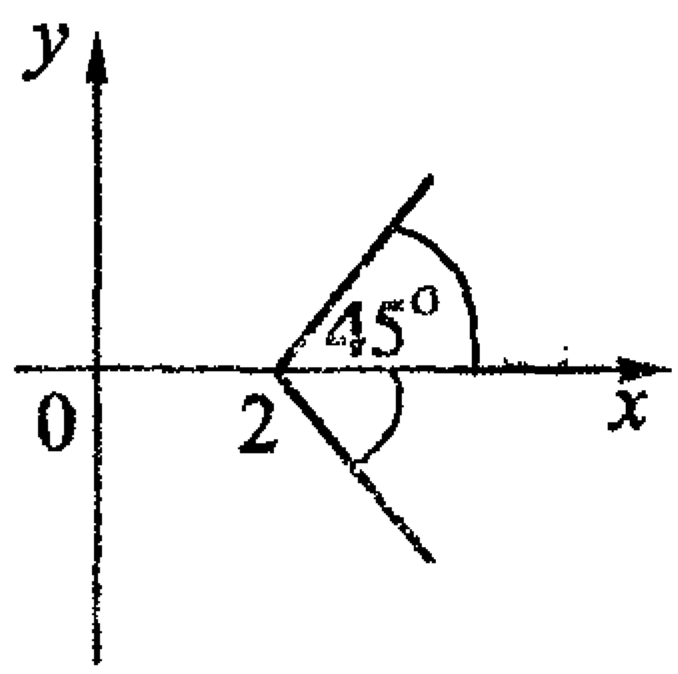
29. $y=\sqrt[3]{(x+2)^2}$



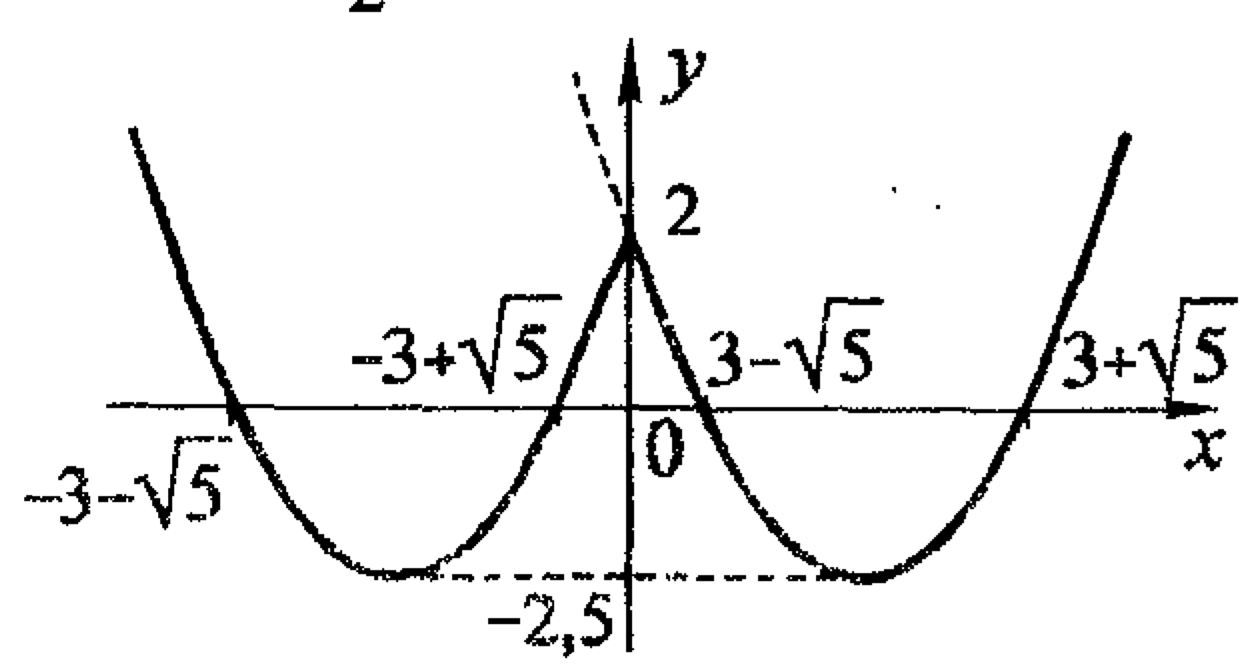
30. $y=\dfrac{4}{\sqrt{|x|}}$



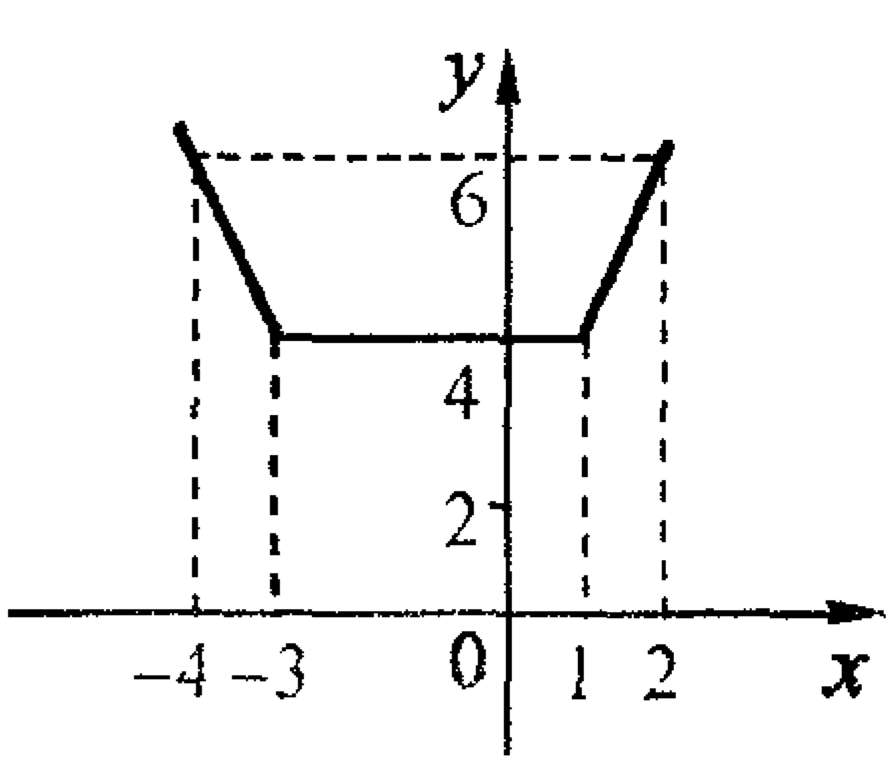
31. $|y|=x-2$



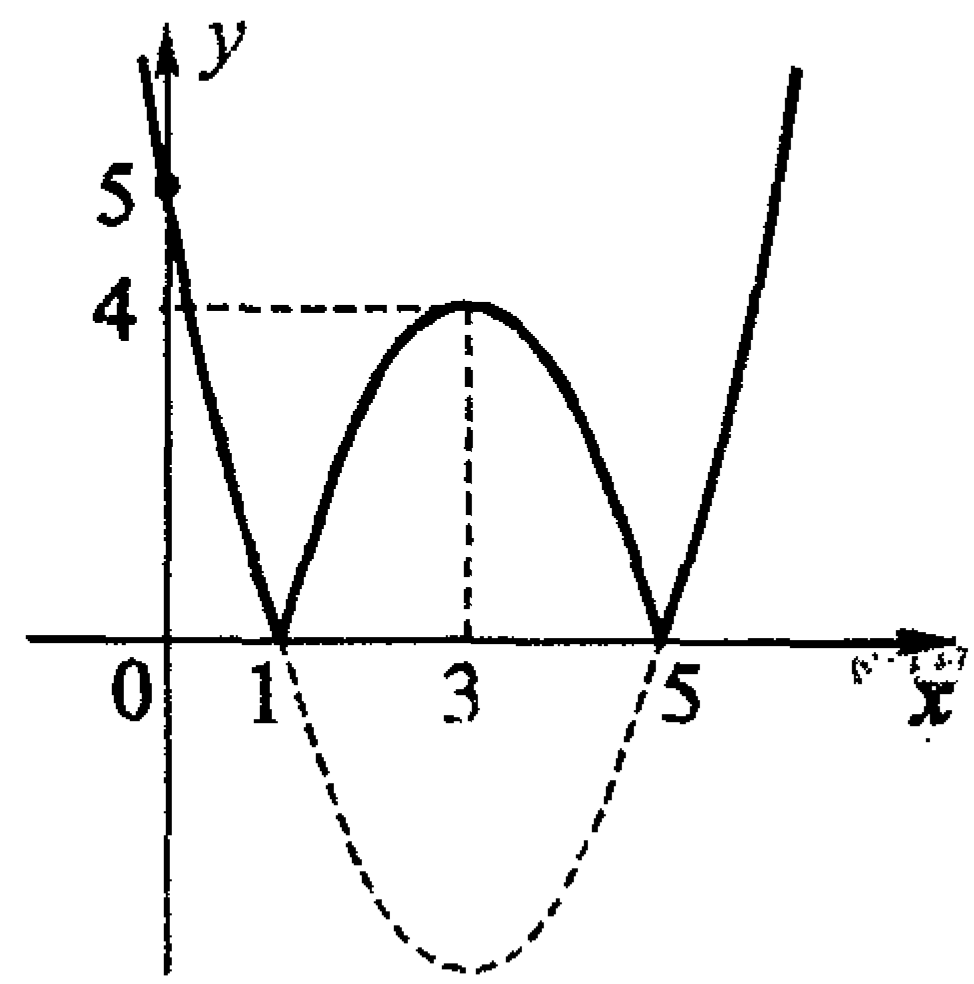
32. $y=\dfrac{1}{2}x^2-3|x|+2$



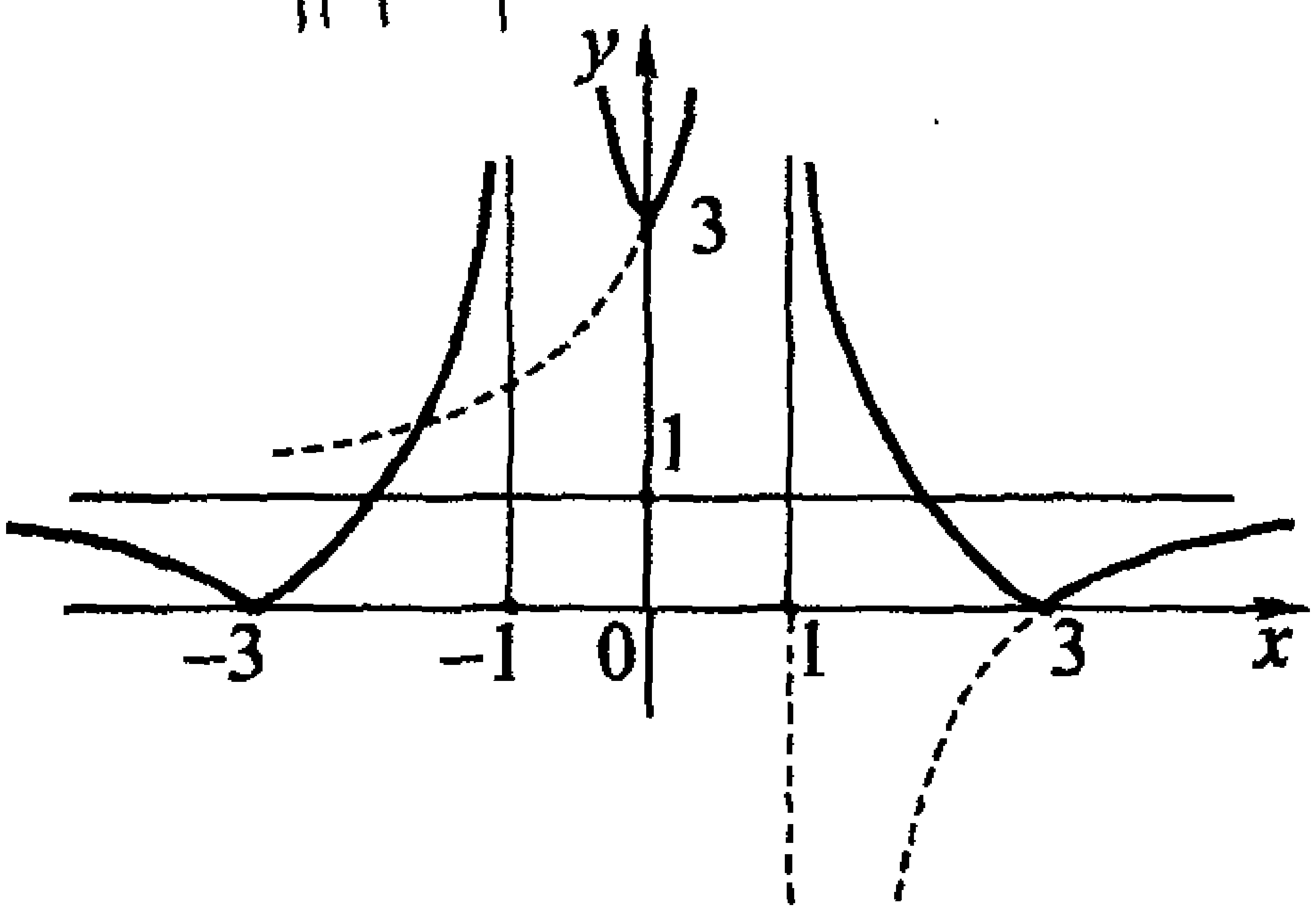
33. $y=|x-1|+|x+3|$



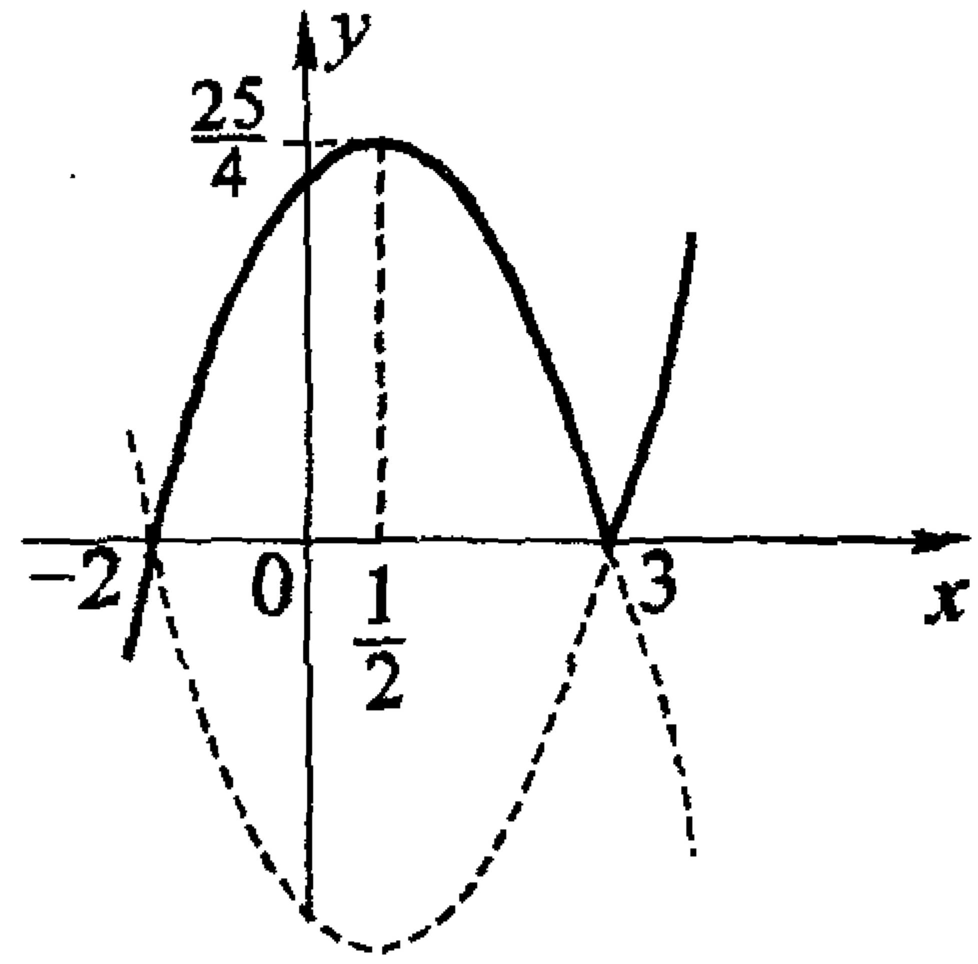
34. $y=|x^2-6x+5|$



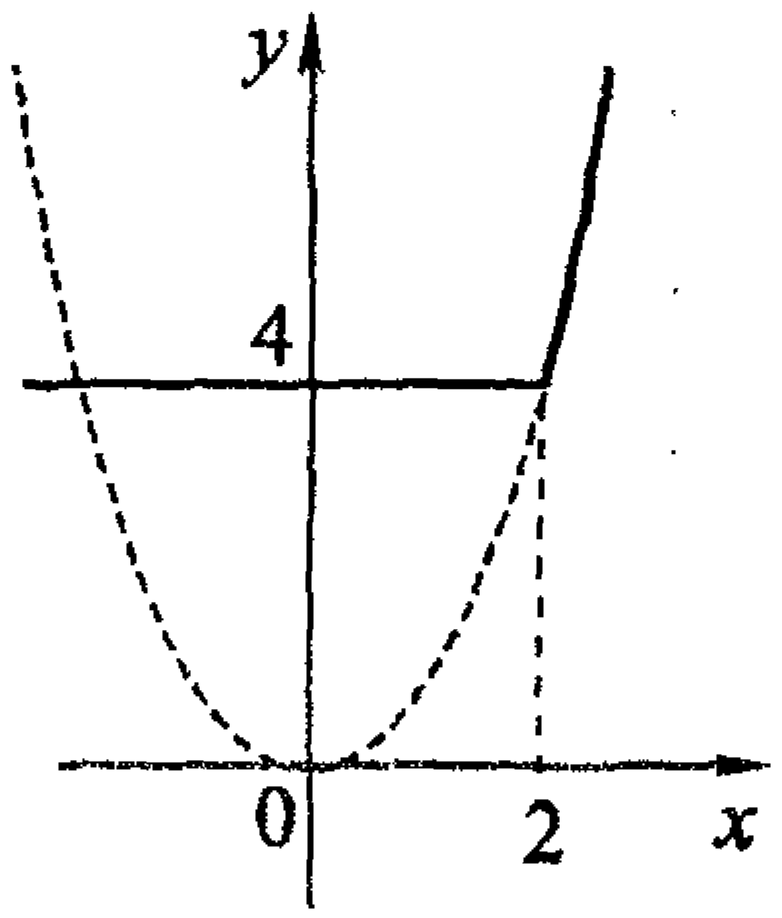
35. $y=\left|\dfrac{3-|x|}{|x|-1}\right|$



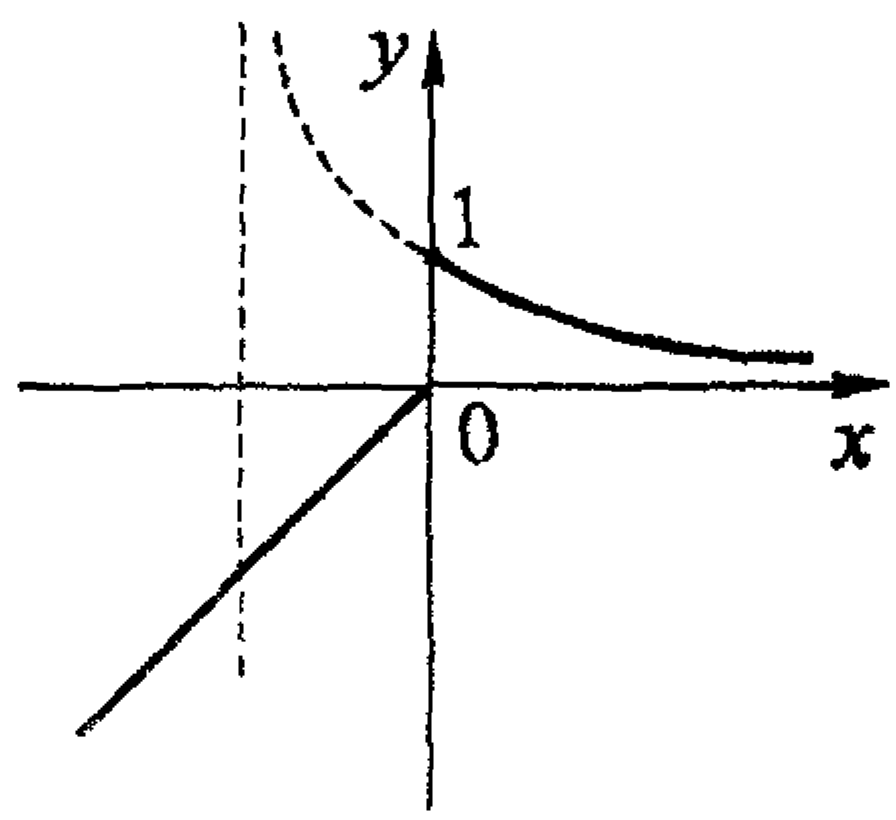
36. $y=(x+2)|3-x|$



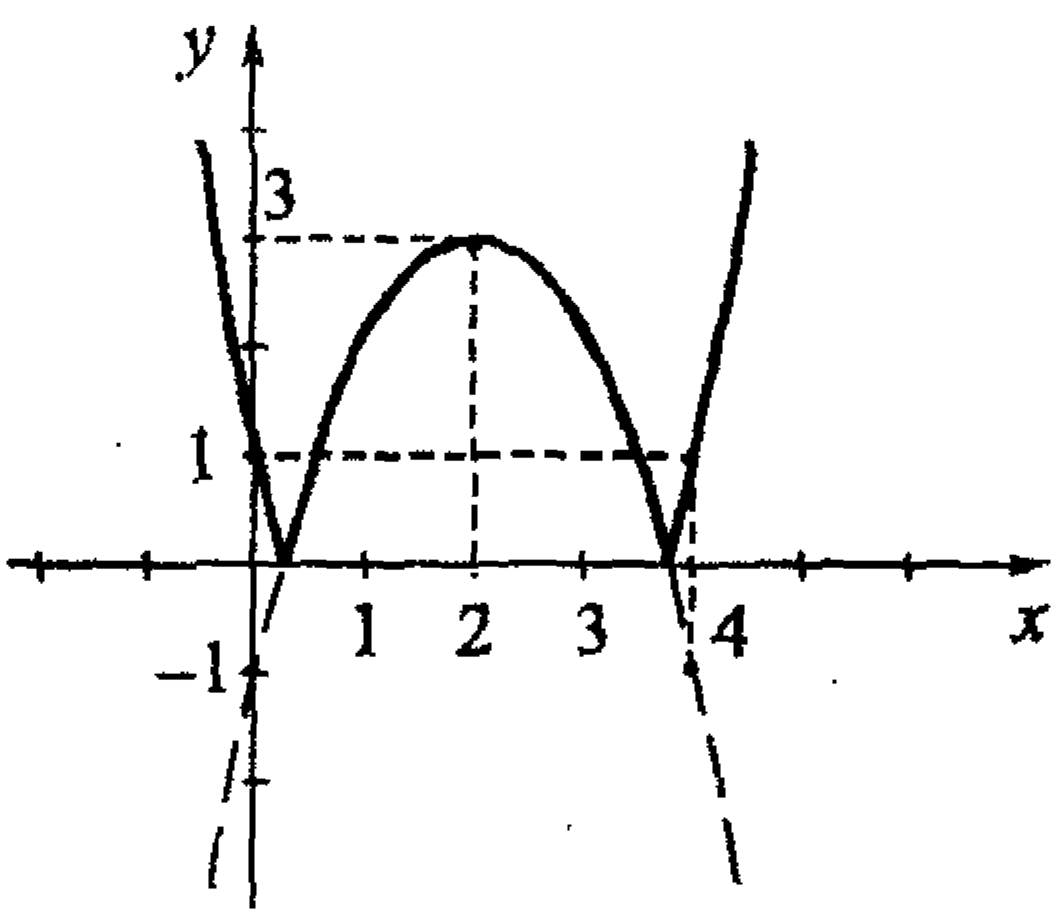
37. $y=\begin{cases} 4 \text{ при } x\le 2 \\ x^2 \text{ при } x>2 \end{cases}$



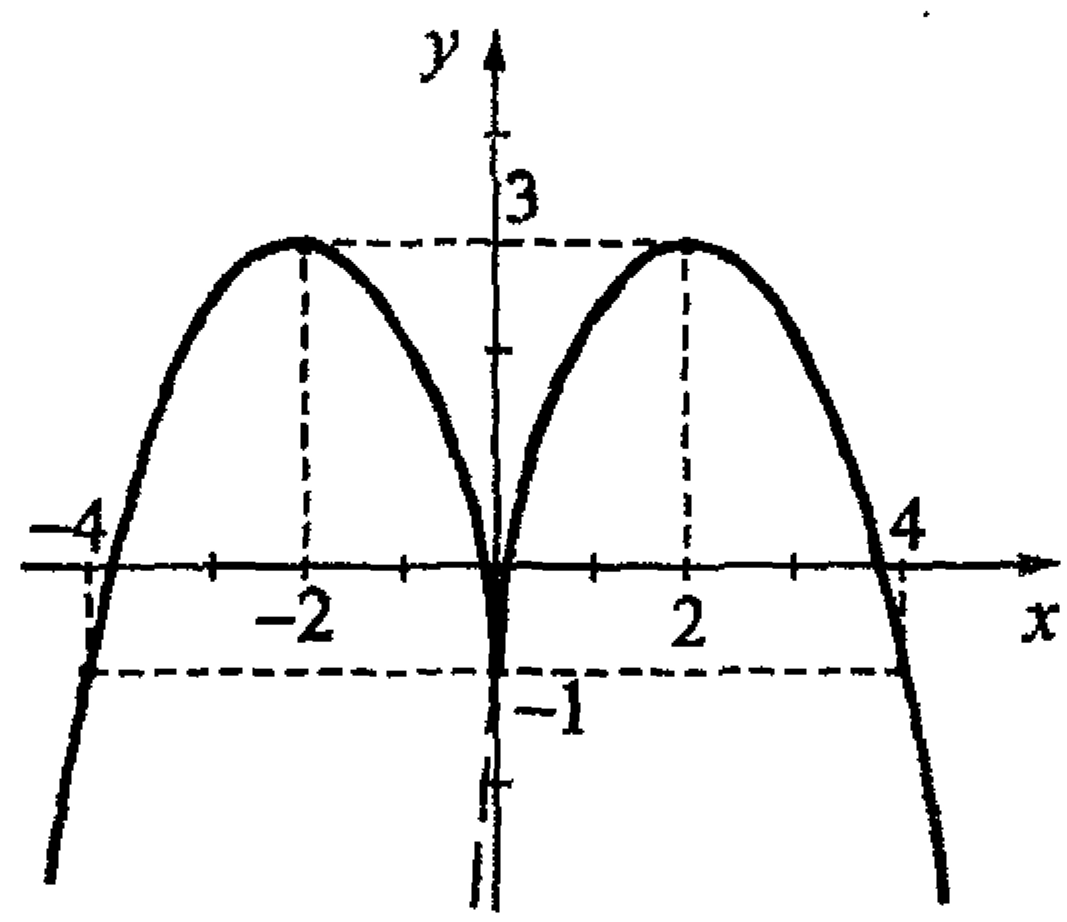
38. $y=\begin{cases} x \text{ при } x\le 0 \\ \dfrac{1}{x+1} \text{ при } x>0. \end{cases}$



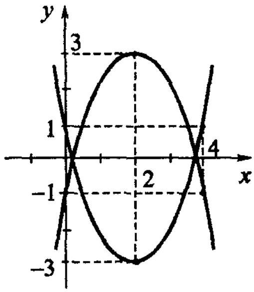
39. $y=|-x^2+4x-1|=|-(x-2)^2+3|$



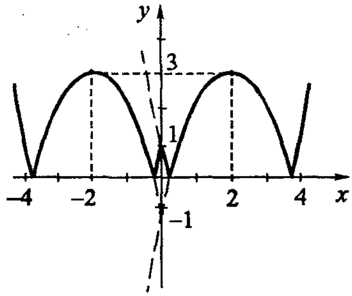
40. $y=-x^2+4|x|-1$



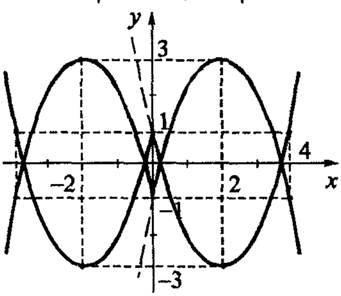
41. $|y| = |-x^2 + 4x - 1|$



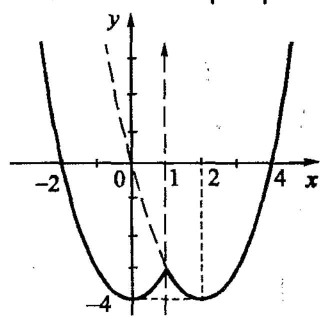
42. $y = |-x^2 + 4|x| - 1|$



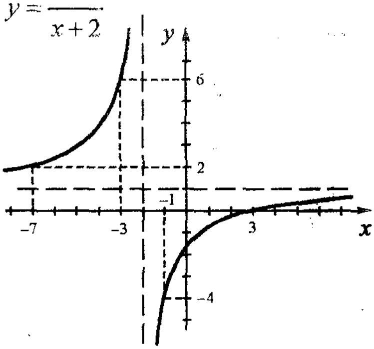
43. $|y| = |-x^2 + 4|x| - 1|$



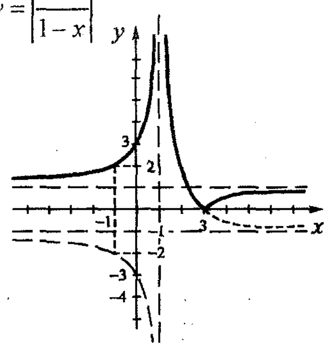
44. $y = (x-1)^2 - 2|x-1| - 3$



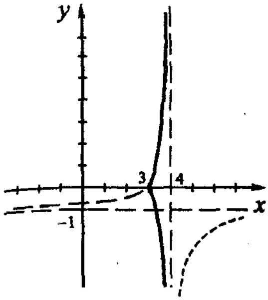
45 $y = \dfrac{x-3}{x+2}$



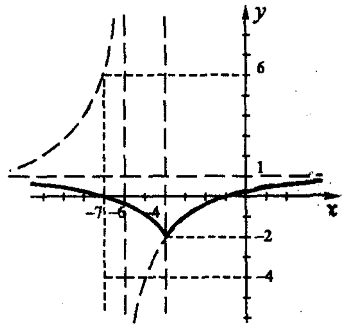
46. $y = \left|\dfrac{x-3}{1-x}\right|$



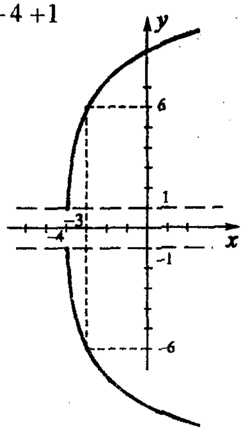
47. $|y| = \dfrac{x-5}{4-x}$



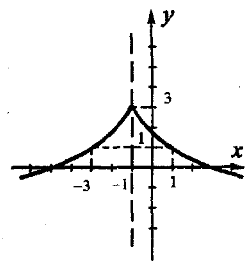
48. $y = \dfrac{|x+4|-3}{|x+4|+2}$



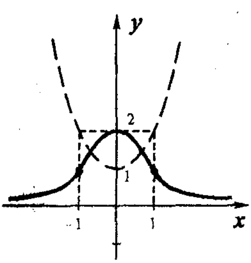
49. $|y| = 5\sqrt{x+4} + 1$



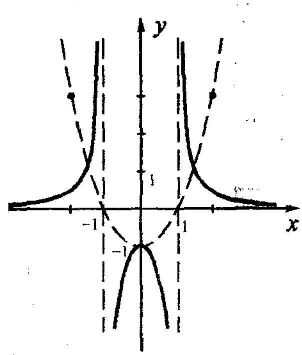
50. $y = 3 - \sqrt{2|x+1|}$



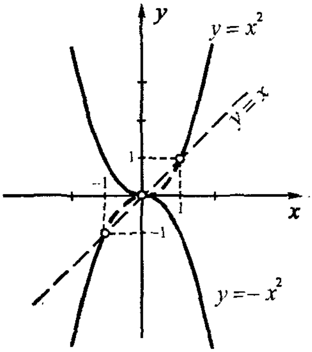
51. $y = \dfrac{2}{x^2+1}$



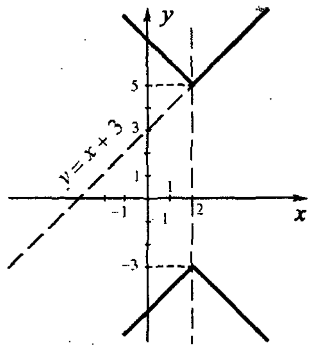
52. $y = \dfrac{1}{x^2-1}$



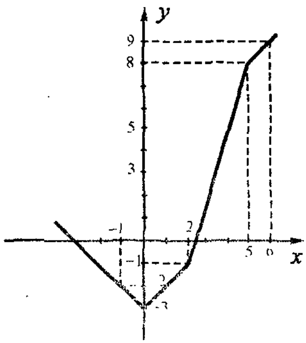
53. $y = x^2 \cdot \dfrac{y-x}{|y-x|}$



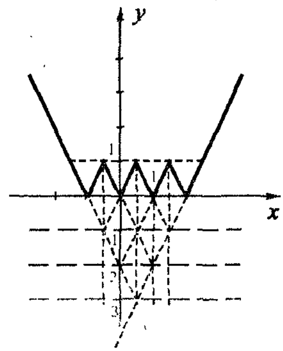
54. $|y-1| - |x-2| = 4$



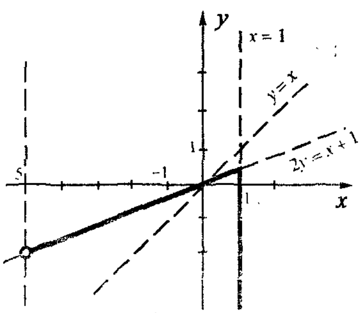
55. $y = |2-x| + |x| - |x-5|$



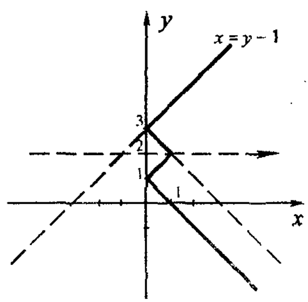
56. $y = ||||2x-1|-1|-1|-1|$



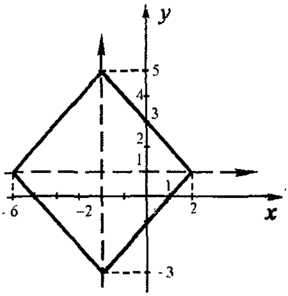
57. $|x-y| = 1 - \dfrac{|x+5|}{x+5} \cdot y$



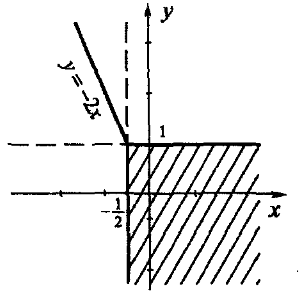
58. $y = ||y-2|-1|$



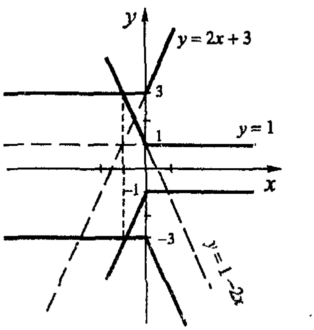
59. $|y-1|+|x+2|=4$



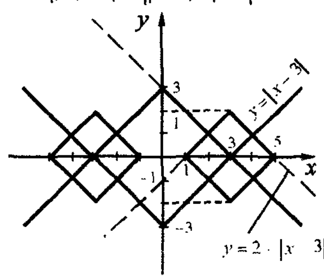
60. $|2x+1|-|y-1|=2x+y$



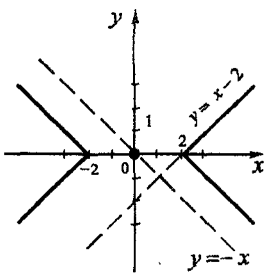
61. $\left||x|+2-|y|\right|=|1+x|$



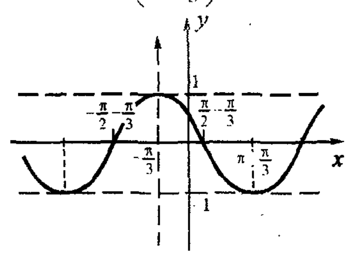
62. $\left||y|-1\right|=\left||3-|x||-1\right|$



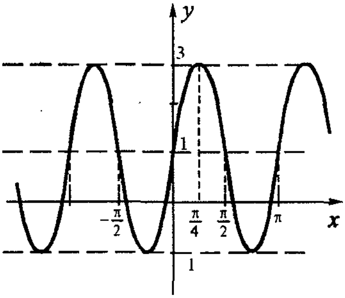
63. $2(|x|+|y|)=x^2-y^2$



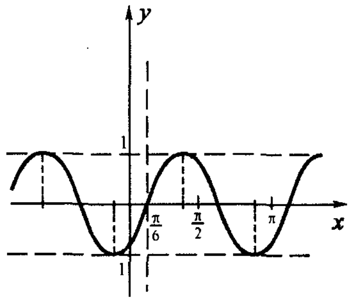
64. $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$



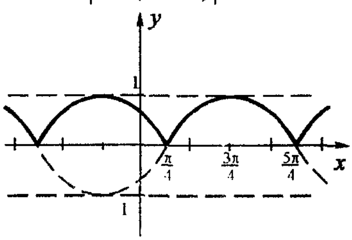
65. $y = 2\sin 2x + 1$



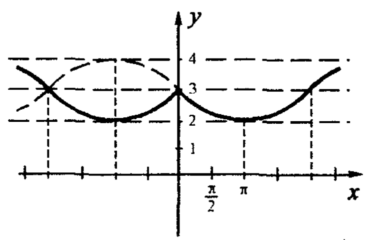
66. $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$



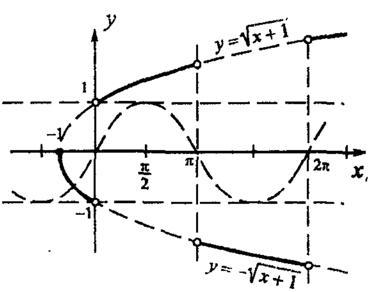
67. $y = \left|\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|$



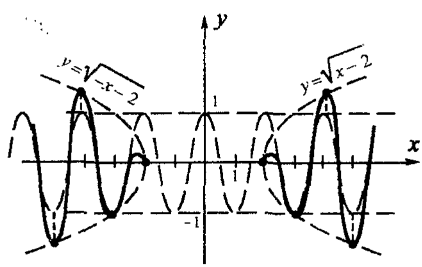
68. $y = 3 - \sin|0,5x|$



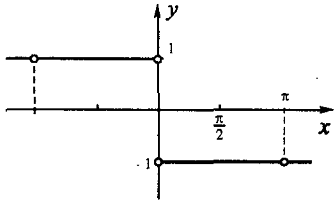
69. $y = \frac{|\sin x|}{\sin x} \cdot \sqrt{x+1}$



70. $y = \sqrt{|x| - 2} \cdot \cos \pi x$

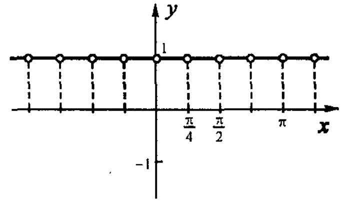


71. $y = \dfrac{\cos\left(|x| + \dfrac{\pi}{2}\right)}{\sin x} = -\dfrac{\sin|x|}{\sin x}$



72. $y = |\mathrm{tg}\,2x \cdot \mathrm{ctg}\,2x|$

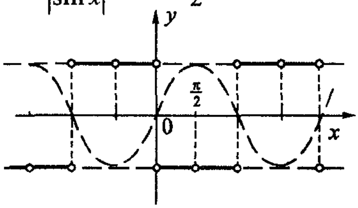
$y = 1,\ x \neq \dfrac{\pi k}{4},\ k \in Z$.



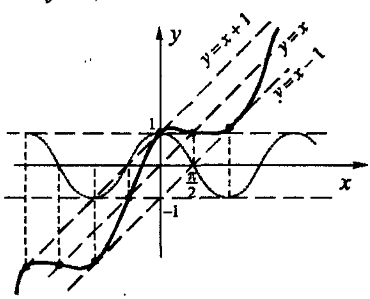
73.

$$y = \sqrt{1 + \mathrm{ctg}^2 x} \cdot \frac{\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) \cdot \sin(\pi + x)}{\mathrm{ctg}(\pi - x)} =$$

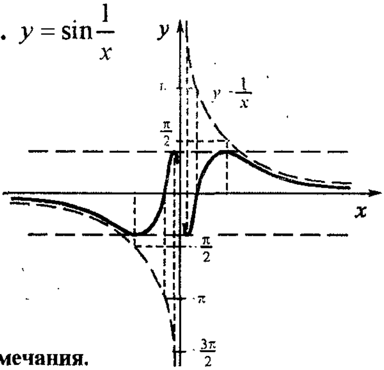
$$= -\frac{\sin x}{|\sin x|},\quad x \neq \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$$



74. $y = x + \cos x$



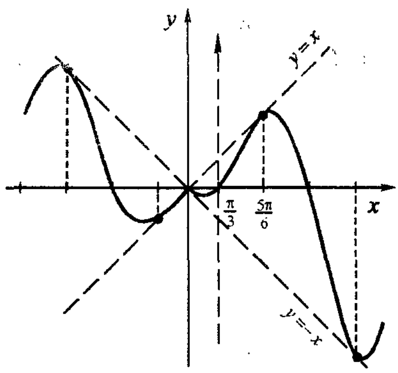
75. $y = \sin\dfrac{1}{x}$



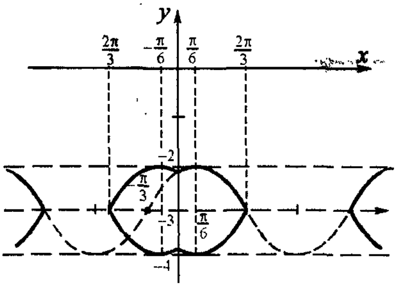
Замечания.

1. Полностью изобразить среднюю часть графика невозможно; при $x \to 0$ колебания учащаются.
2. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

76. $y = |x| \cdot \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

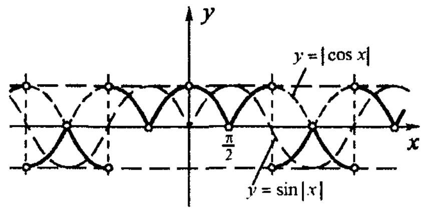


77. $|y+3|=\sin\left(|x|+\frac{\pi}{3}\right)$



78. $y=\frac{\sin|x|}{|\text{tg}x|}$

$\left(|y|=\frac{|\sin|x||}{|\text{tg}|x||}=|\cos x|,\ x\neq\frac{\pi k}{2}, k\in Z.\right)$



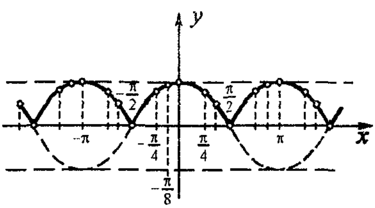
Замечание.
Знак определяем с помощью графика $y=\sin|x|$.

79.

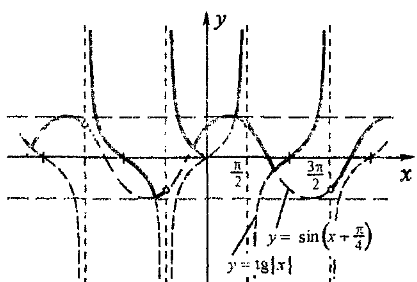
$$y=\sqrt{1-\sin^2 x}\cdot\frac{\text{ctg}2x\cdot(1+\text{tg}2x)}{1+\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}=$$

$=|\cos x|,\ x\neq\frac{\pi k}{4},\ x\neq-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},$

$n,k\in Z$

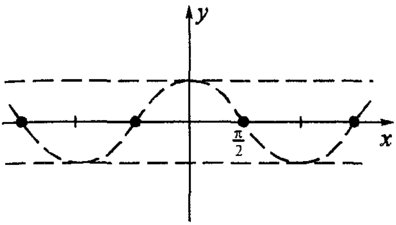


80. $y=\max\left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right);\text{tg}|x|\right\}$



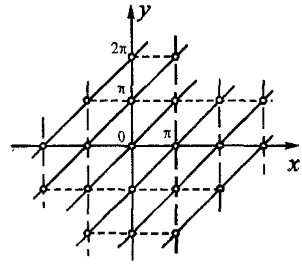
81. $y=\sqrt{\cos^5 x-1}\cdot(x^3-2\pi x^2)$

$\left(|\cos x|\le 1;\ \begin{cases}\cos x=1\\ y=0\end{cases}\right)$

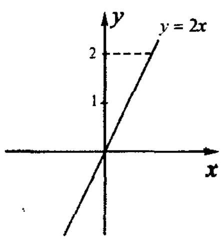


82. $\operatorname{ctg}x=\operatorname{ctg}y$;

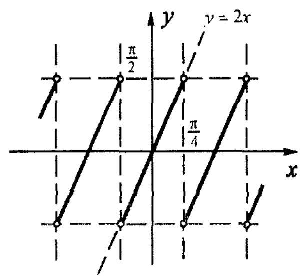
$\begin{cases}y=x+\pi k,\ k\in Z\\ x\ne \pi n,\ n\in Z.\end{cases}$



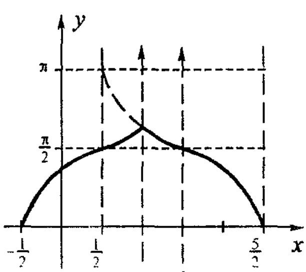
83. $y=\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(2x)\right)$



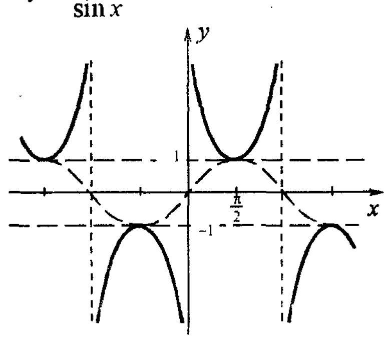
84. $y=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}(2x)\right)$



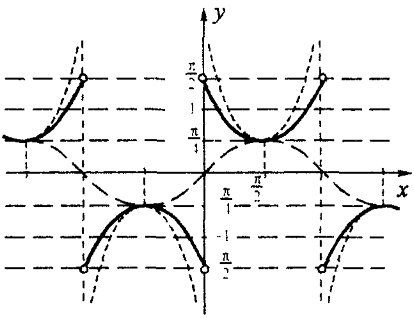
85. $y=\arccos\left(|x-1|-\frac{1}{2}\right)$



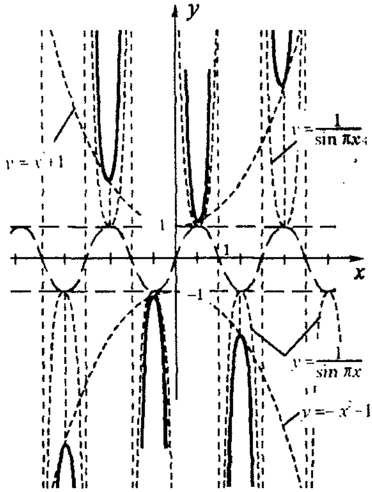
86. $y=\frac{1}{\sin x}$



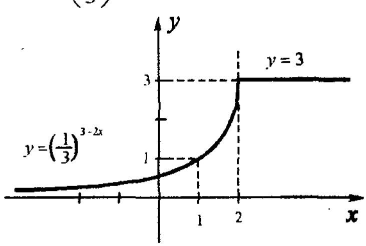
87. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sin x}$



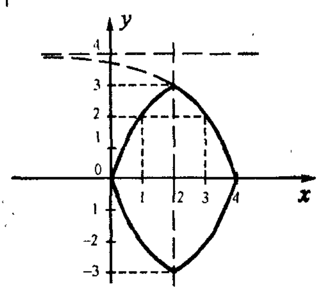
88. $y = \dfrac{x^2+1}{\sin(\pi x)}$



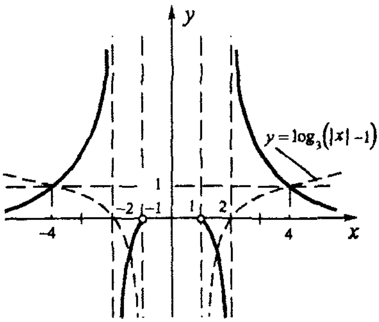
89. $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{|x-2|-1-x}$



90. $|y| = 4 - 2^{|x-2|}$

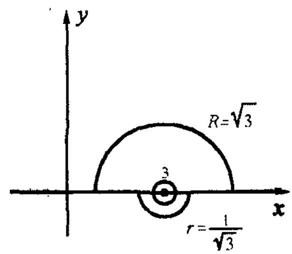


91. $y=\log_{|x|-1} 3=\dfrac{1}{\log_3(|x|-1)}$

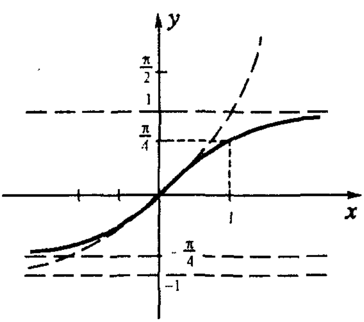


92. $|y|=2y\cdot\log_3\sqrt{x^2+y^2-6x+9}$

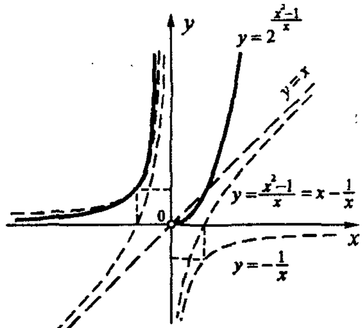
$$\left[\begin{array}{l} y=0 \quad (x-3)^2+y^2\neq 0 \\ \begin{cases} y>0 \\ (x-3)^2+y^2=3 \end{cases} \\ \begin{cases} y<0 \\ (x-3)^2+y^2=\dfrac{1}{3} \end{cases} \end{array}\right.$$



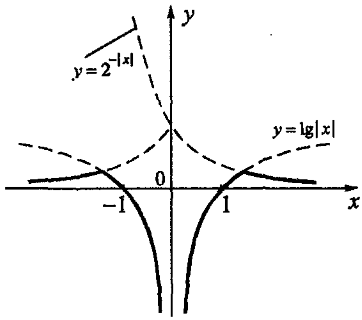
93. $y=\operatorname{arctg}(2^x-1)$



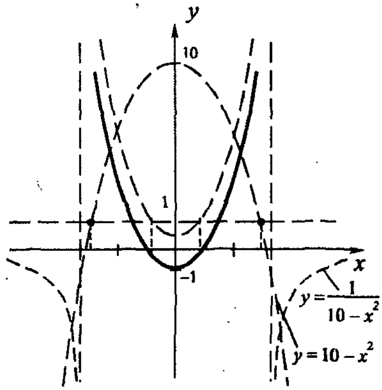
94. $y=2^{\frac{x^2-1}{x}}$



95. $y = \min\left\{\lg|x|; 2^{-|x|}\right\}$



96. $y = \lg\dfrac{1}{10 - x^2}$

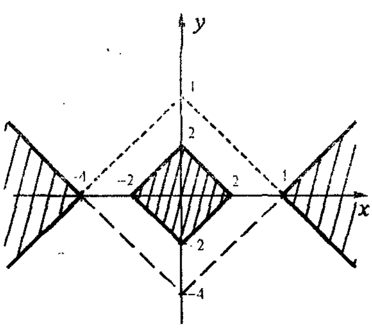


Замечание.

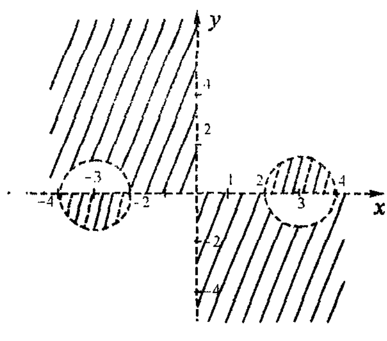
$\lg\dfrac{1}{10 - x^2} = -\lg(10 - x^2)$.

Попробуйте построить эскиз графика 2-м способом. Сравните.

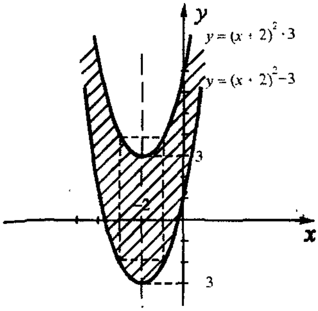
97. $(|x| - |y| - 4)(|x| + |y| - 2) \geq 0$



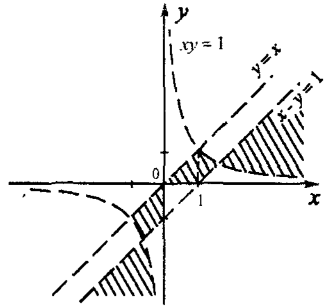
98. $(x^2 - 6|x| + y^2 + 8)xy < 0$



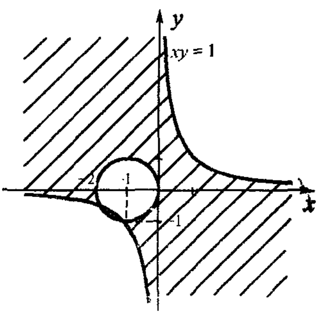
99. $\left|y-x^2-4x-4\right|\le 3$



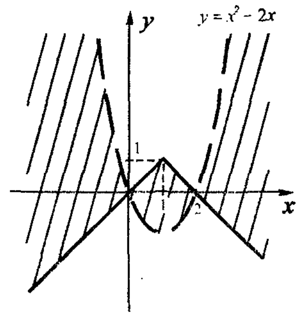
100. $\log_{x-y}(xy)>0$



101. $(x^2+2x+y^2)(xy-1)\le 0$



102. $\dfrac{y-1+|x-1|}{y-x^2+2x}\le 0$



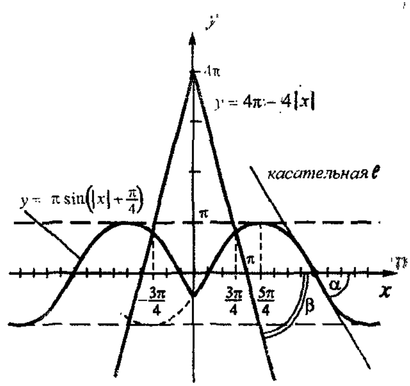
103. Графически решите уравнение: $\pi\sin\left(|x|-\dfrac{\pi}{4}\right)=4\pi-4|x|$

Замечание.
Проверкой убеждаемся, что

$x=\pm\dfrac{3\pi}{4}$ – решение.

Других решений нет, так как $\beta>\alpha$ (ℓ касательная в точке $9\pi/4$).

Ответ: $\pm\dfrac{3\pi}{4}$.



104. Решите уравнение

$$\frac{a-x^2}{(a-x-2)(a-x-6)}=0 \text{ при всех}$$

значениях параметра a

Ответ:

при $a\in(-\infty;0)\cup\{4\}$ решений нет;

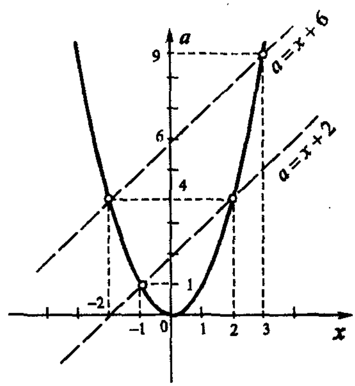
при $a=1$ $x=1$;

при $a=9$ $x=-3$;

при $a=0$ $x=0$;

при $a\in(0;1)\cup(1;4)\cup(4;9)\cup(9;+\infty)$

$x=\pm\sqrt{a}$.



105. Решите неравенство

$$\frac{(x^2-2x+a^2-4a-11)(a-2)}{x-1}\le 0$$

при всех значениях параметра a

Ответ:

при $a\in(-\infty;-2]$ $x\in(1;+\infty)$;

при $a\in(-2;2)$

$x\in\left[1-\sqrt{12-a^2+4a};1\right)\cup$

$\cup\left[1+\sqrt{12-a^2+4a};+\infty\right)$;

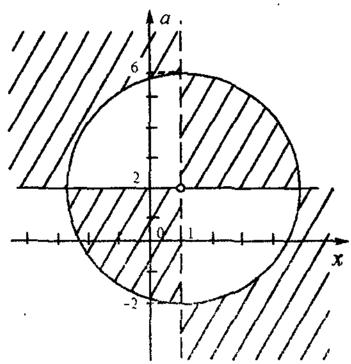
при $a=2$ $x\in\mathbb{R}/\{1\}$;

при $a\in(2;6)$

$x\in\left(-\infty;1-\sqrt{12-a^2+4a}\right]\cup$

$\cup\left(1;1+\sqrt{12-a^2+4a}\right]$;

при $a\in[6;+\infty)$ $x\in(-\infty;1)$.



106. Решите при всех значениях параметра a:

$(ax-4)(x+a)(a-|x|)\geq 0$

Ответ:

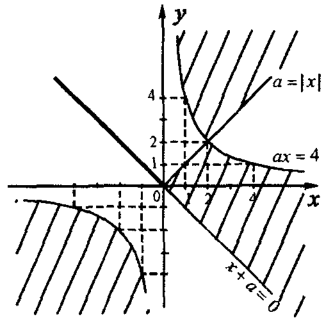
при $a<0$ $x\in\left(-\infty;\frac{4}{a}\right]\cup[-a;\infty)$;

при $a=0$ $x\in[0;+\infty)$;

при $a\in(0;2)$ $x\in\{-a\}\cup\left[a;\frac{4}{a}\right]$;

при $a=2$ $x\in\{\pm2\}$;

при $a>2$ $x\in\{-a\}\cup\left[\frac{4}{a};a\right]$.



107. Решите при всех значениях параметра a:

$\log_{x+2}(x^2-2x+a)\geq 2$

Ответ:

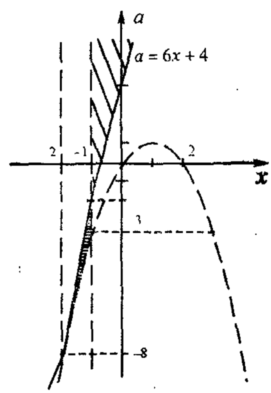
при $a\in(-\infty;-8]\cup\{-2\}$ $\varnothing$;

при $a\in(-8;-3)$

$x\in\left[\frac{a-4}{6};1-\sqrt{1-a}\right)$;

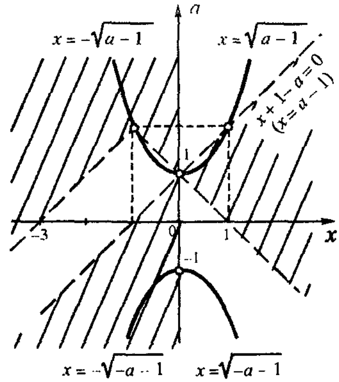
при $a\in[-3;-2)$ $x\in\left[\frac{a-4}{6};-1\right)$;

при $a\in(-2;\infty)$ $x\in\left(-1;\frac{a-4}{6}\right]$.



108. Решите при всех значениях параметра a:

$$\begin{cases} x(x+1-a)(a-2+|x+1|) > 0 \\ x^2+1=|a|. \end{cases}$$



Ответ:

при $a \in (-\infty;-1)$ $x=-\sqrt{-a-1}$;

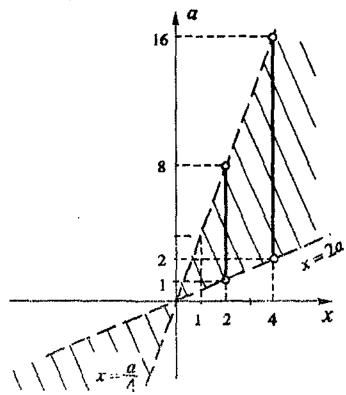
при $a \in [-1;1] \cup \{2\}$ $\varnothing$;

при $a \in (1;2)$ $x=\sqrt{a-1}$;

при $a \in (2;+\infty)$ $x=-\sqrt{a-1}$.

109. Найдите все a, при которых неравенство $\dfrac{x-\frac{a}{4}}{x-2a} < 0$ выполняется для всех $x \in [2;4]$

Ответ: $a \in (2;8)$.



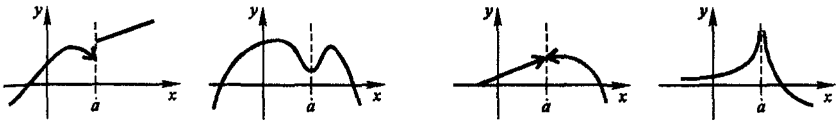
15. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Понятие предела и непрерывности. Свойства

Группа I

1. Имеет ли предел в точке $x=1$ функция $y=[x]$? А функция $y=\{x\}$?

2. Определить по графикам, имеет ли функция в точке a: (конечный) предел слева; (конечный) предел справа; (конечный) предел.



3. Имеет ли предел функция Дирихле ($D(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x\in Q;\\ 0, \text{ если } x\in R\setminus Q\end{cases}$)

а) в точке 1; б) в точке $\sqrt{3}$?

Ответы:

1. Нет; нет. **2.** Да, да, нет. Да, да, да. Да, да, да. Нет, нет, нет. **3.** а) Нет. б) Нет.

Группа II

Решить неравенства методом интервалов:

1. $\dfrac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(3+2x-x^2\right)}{(x^2-5x+6)|x+4|}\le 0$.

2. $\dfrac{x^2+3x-13}{(x+3)(x-2)}>2$.

3. $\dfrac{\sqrt{12-x-x^2}}{2x-7}\le\dfrac{\sqrt{12-x-x^2}}{x-5}$.

4. $\dfrac{\sqrt{x+5}-|x+3|}{x-3+4\sqrt{-x}}\ge 0$.

5. $\dfrac{3\sqrt{-2x-2}+x-3}{\sqrt{4x+40}-|x+7|}>0$.

6. $\dfrac{\left(2^{x-1}-4\right)\left(x^2-4x+3\right)}{4+3x-x^2}\le 0$.

7. (*в*) $\dfrac{(x+4)\left(3^{\frac{1}{x+1}}+0,3\right)}{x-3}\le 0$.

8. (*в*) $\dfrac{\log^2_{3-x}(x+0,5)}{x(1-x)}\le 0$

9. $(2\sin x-3)\operatorname{tg}x\ge 0$.

10. $(3\sin x-2)\operatorname{tg}x\ge 0$.

11. $\dfrac{2\sin x-\sqrt{2}}{1+2\cos x}\ge 0$.

12. $\sqrt{\pi^2-x^2}\cdot\cos x\ge 0$.

13. $\dfrac{2\sin 2x}{1+\cos 2x} \le \dfrac{1}{\cos x}$.

14. $\sin 3x \cdot \mathrm{tg} 2x(1+\sin x) < 0$.

15. (в) $(\mathrm{tg} x+1)\left(1+3^{\frac{x+1}{x^2-2x}}\right) > 0$.

16. $\dfrac{\mathrm{tg}\frac{t}{2}\sin(\pi t)}{\sqrt{2\pi^2-\pi t-t^2}} > 0$.

17. Доказать, что на отрезке $[0;1]$ уравнение $-3x^3-2x^2+2=0$ имеет корень. Найти его с точностью до 0,1.

18. Имеет ли уравнение $x^3-3x-1=0$ положительный корень? Почему?

Ответы:

1. $[-1;1]\cup(2;3)\cup(3;\infty)$. **2.** $(-3;\ 2)$. **3.** $\{-4\}\cup[2;3]$. **4.** $[-4;-1)\cup(-1;0]$.
5. $[-10;-9)\cup(-9;-3)$. **6.** $(-1;1]\cup\{3\}\cup(4;\infty)$. **7.** $[-4;-1)\cup(-1;3)$.
8. $(-0,5;0)\cup\{0,5\}\cup(1;2)\cup(2;3)$. **9.** $\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi n;\pi n\right]$, $n\in Z$.

10. $\left(-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;2\pi n\right]\cup\left[\arcsin\dfrac{2}{3}+2\pi n;\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup$
$\cup\left[-\arcsin\dfrac{2}{3}+\pi(1+2n);\pi(1+2n)\right]$, $n\in Z$.

11. $\left[\dfrac{\pi}{4}+2\pi n;\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n\right)\cup\left[\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n;\dfrac{4\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n\in Z$.

12. $\{\pm\pi\}\cup\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$. **13.** $\left(-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;\dfrac{\pi}{6}+2\pi n\right]\cup\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n\in Z$.

14. $\left(-\pi+2\pi n;-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n;-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup$
$\cup\left(-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n;-\dfrac{\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{4}+2\pi n;\dfrac{\pi}{3}+2\pi n\right)\cup$
$\cup\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n\right)\cup\left(\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n;\pi+2\pi n\right)$, $n\in Z$.

15. $\left(-\dfrac{\pi}{4};0\right)\cup\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{\pi}{4}+\pi n;\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in Z\setminus\{0\}$.

16. $(-6;-5)\cup(-5;-4)\cup(-\pi;-3)\cup(-2;-1)\cup(1;2)\cup(3;\pi)$. **17.** $x\approx 0,7$.

18. Да. По теореме о промежуточных значениях непрерывной функции. Например: $f(0)<0$; $f(2)>0$, где $f(x)=x^3-3x-1$.

Группа III

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[5]{x^4+x^2-1}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[7]{x}+1}$. **2.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x+5}{x+\sqrt{x}}$. **3.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+2)^3-8}{x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$. **5.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{10}-1}{x^{12}-1}$. **6.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$.

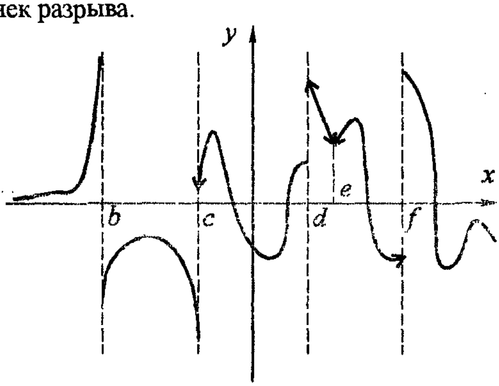
7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+x-3}}{x^2-4}$. **8.** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)$.

9. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right)$. **10.** $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$. **12.** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)\right)$.

13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4^{x-2}+3}{1+4^x-3^x}$. **14.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4^{x-2}+3}{1+4^x-3^x}$. **15.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4^{x-2}+3}{1+4^x-3^x}$.

16. Определить по графику промежутки непрерывности функции и характер точек разрыва.



Исследовать функции на непрерывность. Определить характер точек разрыва:

17. $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{5}{x}, & \text{если } x\le -1;\\ 6\,|x|, & \text{если } -1<x\le 1;\\ 6, & \text{если } x>1.\end{cases}$

18. $q(x)=\begin{cases}-3, & \text{если } x\ge 2;\\ 2-x^2, & \text{если } -1\le x<2;\\ \dfrac{2x+1}{x}, & \text{если } x<-1.\end{cases}$

19. $g(x)=\frac{\sqrt{x^4+5}}{x^2+4x}$.

20. $t(x)=\frac{\sin 3x}{\sin 4x}$.

21. (*в*) $p(x)=\lg(1+x)$.

22. (*в*) $q(x)=\frac{1}{\lg(1+x)}$.

23. (*в*) $l(x)=\lg(\mathrm{tg}x)$.

24. (*в*) $c(x)=\frac{1}{1-e^x}$.

Можно ли доопределить функции в точке a до непрерывности:

25. $f(x)=\frac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}}$, $a=81$.

26. $p(x)=x\mathrm{tg}x$, $a=\frac{\pi}{2}$.

27. $g(x)=x\mathrm{ctg}x$, $a=0$.

28. $m(x)=\frac{\cos 4x-1}{\arcsin^2 x}$, $a=0$.

При каких значениях параметров функции являются непрерывными:

29. $y=\begin{cases} x+1, \text{ если } x\le 1; \\ 2-ax^2, \text{ если } x>1. \end{cases}$

30. $y=\begin{cases} |x^2-5x+6|, \text{ если } x>2; \\ ax-b, \text{ если } x\le 2. \end{cases}$

31. $y=\begin{cases} -3\sin x, \text{ если } x\le -\frac{\pi}{2}; \\ a\sin x+b, \text{ если } -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}; \\ \cos x, \text{ если } x\ge \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

32. $y=\begin{cases} \frac{\sin(x-2)}{x-2}, \text{ если } x>2; \\ ax-5, \text{ если } x\le 2. \end{cases}$

33. $y=\begin{cases} a\mathrm{tg}(x+3)-1, \text{ если } x>2; \\ b\cos x-b, \text{ если } x\le 2. \end{cases}$

34. $y=\begin{cases} \frac{3^x-1}{x}, \text{ если } x>0; \\ x-b, \text{ если } x\le 0. \end{cases}$

35. При каких a $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-1)(3-x)(ax+2)}{5x^3-8x^2+4}=5$?

36. При каких a $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax^2-(a^2+2)x+2a}{ax^2+(a-2-a^2)x-(a^2-2a)}>0$?

37. Имеет ли предел на $+\infty$ следующая функция: $f(x)=\frac{x^2\cdot\sin x}{2x^2+x-1}$? Если да, то какой?

38. Приведите пример функции, имеющей бесконечное число точек разрыва.

Ответы:

1. $\frac{1}{3}$. **2.** 2. **3.** 12. **4.** 1. **5.** $\frac{5}{6}$. **6.** $\frac{49}{24}$. **7.** $-\frac{1}{8\sqrt{3}}$. **8.** $-\frac{5}{2}$ $(x \to +\infty)$, $+\infty (x \to -\infty)$. **9.** $\frac{1}{2}$ $(x \to +\infty)$, $-\infty$ $(x \to -\infty)$. **10.** $\frac{12}{5}$. **11.** $\frac{3}{2}$. **12.** $\frac{1}{2}$ $(x \to +\infty)$, $-\infty$ $(x \to -\infty)$. **13.** $\frac{13}{8}$. **14.** $\frac{1}{16}$. **15.** 3. **16.** Промежутки непрерывности: $(-\infty; b)$; $(b; c)$; $(c; d)$; $(d; e)$; $(e; f)$; $(f; \infty)$. Точки разрыва: b, c – 2-го рода; d, f – 1-го рода; e – точка устранимого разрыва. **17.** f непрерывна на $(-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$; -1 – точка разрыва 1-го рода. **18.** q непрерывна на $(-\infty; 2) \cup (2; \infty)$; 2 – точка разрыва 1-го рода. **19.** g непрерывна на $(-\infty; -4) \cup (-4; 0) \cup (0; \infty)$; -4; 0 – точки разрыва 2-го рода. **20.** t непрерывна на $R \setminus \left\{ \frac{\pi k}{4} | k \in Z \right\}$; $\frac{\pi k}{4}$, $k \neq 4p$; k, $p \in Z$ – точки разрыва 2-го рода; πp, $p \in Z$ – точки устранимого разрыва. **21.** p непрерывна на $(-1; \infty)$; -1 – точка разрыва 2-го рода. **22.** q непрерывна на $(-1; 0) \cup (0; \infty)$; -1; 0 – точки разрыва 2-го рода. **23.** l непрерывна на $\left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k \right), k \in Z$; $\frac{\pi n}{2}, n \in Z$ – точки разрыва 2-го рода. **24.** c непрерывна на $R \setminus \{0\}$; 0 – точка разрыва 2-го рода. **25.** f можно доопределить в точке 81 до непрерывности, числом $1/6$. **26.** p нельзя доопределить в точке $\pi/2$ до непрерывности (разрыв 2-го рода). **27.** g можно доопределить в точке 0 до непрерывности, числом 1. **28.** m можно доопределить в точке 0 до непрерывности, числом -8. **29.** $a = 0$. **30.** $b = 2a$. **31.** $a = -\frac{3}{2}$, $b = \frac{3}{2}$. **32.** $a = 3$. **33.** $b = -\ln 3$. **34.** $a = 0$, $b = \frac{1}{1 - \cos 2}$ (функцию нельзя доопределить до непрерывности при $a \neq 0$, так как при любых таких a и любых b есть точки разрыва $x = -3 + \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in N$). **35.** $a = -12{,}5$.

36. $a \in R$. **37.** Нет. **38.** Например, $f(x) = \operatorname{tg} x$, $f(x) = [x]$ (целая часть x).

16. АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Группа I

1. Может ли график функции пересекать свою асимптоту: а) вертикальную; б) горизонтальную; в) наклонную?
2. Может ли график функции иметь:
   а) 2 вертикальные и 3 горизонтальные асимптоты?
   б) 3 вертикальные и 2 горизонтальные асимптоты?
   в) 1 наклонную и 5 вертикальных асимптот?
   г) 2 горизонтальные и 1 наклонную асимптоту?
   д) ровно 315 асимптот?
   е) бесконечно много асимптот?
3. Верно ли, что рациональная функция имеет наклонную асимптоту тогда и только тогда, когда степень числителя на 1 больше степени знаменателя?
4. Верно ли, что рациональная функция не может иметь более одной наклонной (горизонтальной) асимптоты?
5. Приведите пример формулы, задающей функцию, график которой имеет две различные горизонтальные или наклонные асимптоты.
6. Приведите пример формулы, задающей функцию, график которой имеет любую одностороннюю асимптоту.
7. Приведите пример функции, у которой есть асимптота: а) $x=6$; б) $y=-3$; в) $y=8-x$.
8. Приведите пример функции, полный набор прямолинейных асимптот которой состоит из прямых:
   а) $x=1,\ x=2,\ x=3,\ y=5$;　б) $x=0,\ y=2x-7$;
   в) $y=10,\ y=-10,\ x=4$;　г) $y=1+x,\ y=1-x$.

Ответы:

1. Нет; да; да. 2. а) Нет; б) да; в) да; г) нет; д) да; е) да. 3. Да. 4. Да.
5. Например, $y=\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$, или $y=\dfrac{5^x+3^{-x}}{2\cdot 5^x-3^{-x}}$ .... 6. Например, $y=e^x$, или $y=\log_3 x$,... 7. Например: а) $y=\dfrac{1}{x-6}$.... б) $y=\dfrac{-3x+1}{x+9}$,... в) $y=8-x+\dfrac{1}{x^{315}}$,... 8. Например: а) $y=\dfrac{5x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)}$,... б) $y=2x-7+\dfrac{1}{x}$.... в) $y=\dfrac{10|x-4|}{x-4}$,... г) $y=1+|x|$....

Группа II

Найти полный набор асимптот графика функций:

1. $f(x)=\dfrac{3x}{x^2-3x-4}$. **2.** $g(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$. **3.** $d(x)=\dfrac{6x-1}{x+2}-x$.

4. $m(x)=\dfrac{2x^5-x^3+2}{x^4-3x^3}$. **5.** $k(x)=\dfrac{1}{x\cdot\sin\dfrac{1}{x}}$. **6.** $s(x)=\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}+1$.

7. (*в*) $c(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ **8.** (*в*) $v(x)=\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$.

Найти область определения, промежутки знакопостоянства и полный набор асимптот, построить эскиз графика функции:

9. $f(x)=x-\dfrac{2}{x+1}$. **10.** $g(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2-1}$. **11.** $h(x)=\dfrac{x^3}{x^2+4x-5}$.

12. $h(x)=\dfrac{(x-4)^2}{-x^2+3x-2}$. **13.** $u(x)=\dfrac{2x^3+3x}{x^2+3x+2}$. **14.** $r(x)=\dfrac{x^2-16}{x^3-x}$.

15. $k(x)=x\cdot\operatorname{arctg}x$. **16.** $j(x)=\arccos\dfrac{1}{x}$. **17.** (*в*) $q(x)=\dfrac{1}{1-e^x}$.

18. (*в*) $v(x)=\ln^3 x^2$. **19.** (в) $w(x)=\log_3\left(x^3-2x\right)$.

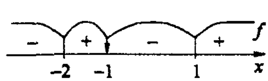
20. (*в*) $c(x)=2^{\cos(1/x)}$. **21.** (в) $m(x)=\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$.

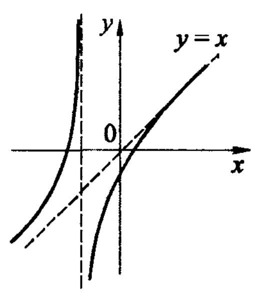
22. (в) $n(x)=x^{-7}e^x$.

Ответы:

1. $x=-1$; $x=4$; $y=0$. **2.** $y=x$; $y=-x$. **3.** $x=-2$; $y=-x+6$. **4.** $x=0$; $x=3$; $y=2x+6$. **5.** $x=\dfrac{1}{\pi k}$, $k\in Z\setminus\{0\}$; $y=1$. **6.** $y=1$. **7.** $x=1$. **8.** $x=0$ – правосторонняя вертикальная асимптота; $x=-1/e$ – левосторонняя вертикальная асимптота; $y=1$.

9.

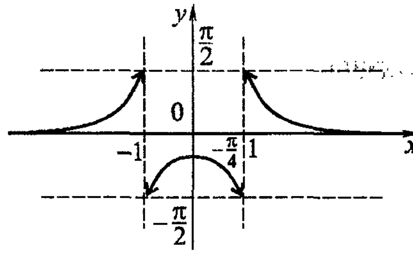




Асимптоты: $x=-1$; $y=x$.

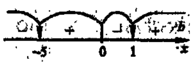
10.

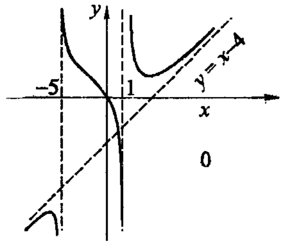
Асимптоты:
$y = 0$.



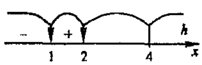
11.

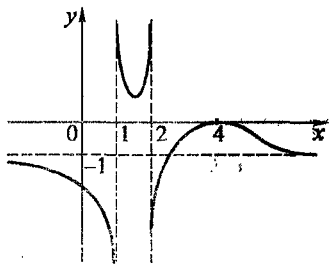
Асимптоты:
$x = -5$;
$x = 1$;
$y = x - 4$.





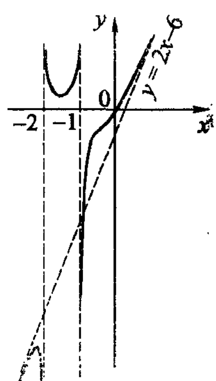
12.
Асимптоты:
$x = 1$;
$x = 2$;
$y = -1$.



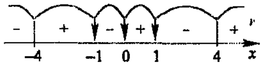


13.

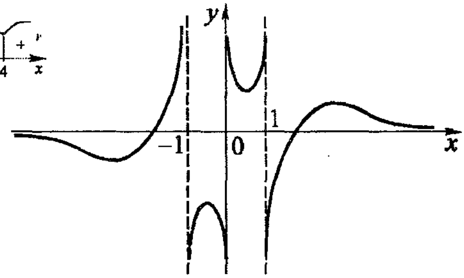
Асимптоты:
$x = -1$;
$x = -2$;
$y = 2x - 6$.



14.



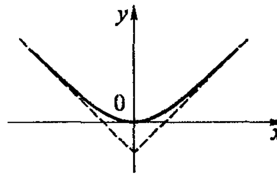
Асимптоты:
$x=-1$;
$x=0$;
$x=1$;
$y=0$.



15. $k(x)>0$ при $x\neq 0$; асимптоты:

правосторонняя наклонная $y=\dfrac{\pi x}{2}-1$;

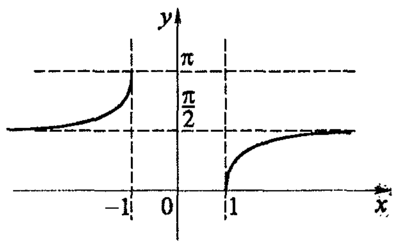
левосторонняя наклонная $y=-\dfrac{\pi x}{2}-1$.



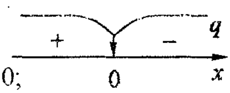
16. $j(x)\in[0;\pi]$;
$D_j=(-\infty;-1]\cup[1;\infty)$.

Асимптоты: $y=\dfrac{\pi}{2}$.

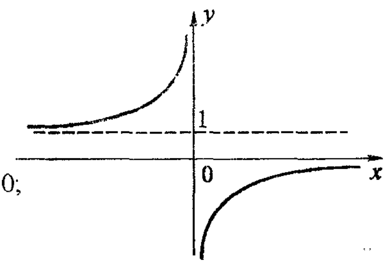
$j(-1)=\pi; j(1)=0$.



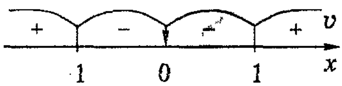
17.

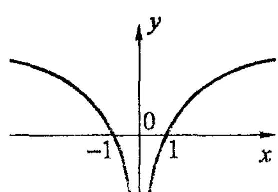


Асимптоты:
вертикальная $x=0$;
правосторонняя горизонтальная $y=0$;
левосторонняя горизонтальная $y=1$.

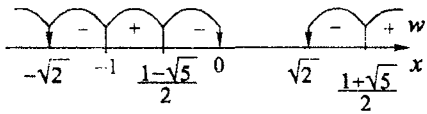


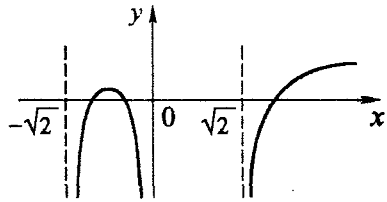
18.
Асимптоты: $x=0$.





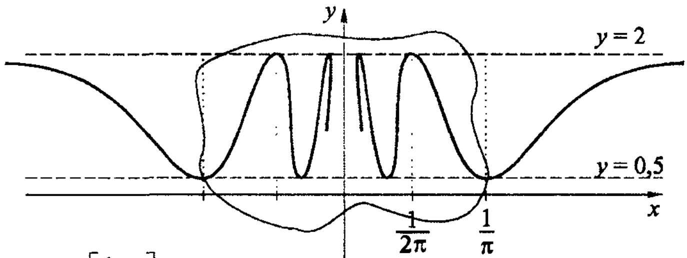
19.





Асимптоты: $x = -\sqrt{2}$;
$x = \sqrt{2}$ – правосторонние вертикальные;
$x = 0$ – левосторонняя вертикальная.

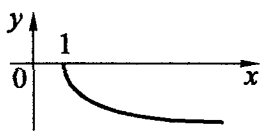
20.



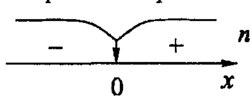
$\forall x \neq 0 \;\; c(x) \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$; $x = 0$ – точка разрыва 2-го рода (односторонних пределов нет); $y = 2$ – горизонтальная асимптота.

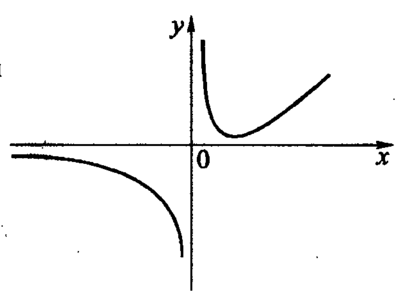
Полностью изобразить график невозможно, так как кривая асциллирует, т.е. график «гуляет в коридоре между $y = 0{,}5$ и $y = 2$», все чаще меняя направление при приближении к 0.

21. $D_m = [1; \infty)$;
$m < 0$ при $x > 1$; $m(1) = 0$.
Асимптот нет.



22.
$x = 0$ – вертикальная асимптота;
$y = 0$ – левосторонняя горизонтальная асимптота.





17. ПРОИЗВОДНАЯ. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

Понятие о производной, ее вычисление

Производные некоторых простейших функций:

$f(x)=x^{\alpha}$ $\qquad f'(x)=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$;

$f(x)=a^{x}$ $\qquad f'(x)=a^{x}\ln a$;

$f(x)=e^{x}$ $\qquad f'(x)=e^{x}$;

$f(x)=\log_a x$ $\qquad f'(x)=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$;

$f(x)=\ln x$ $\qquad f'(x)=\dfrac{1}{x}$;

$f(x)=\sin x$ $\qquad f'(x)=\cos x$;

$f(x)=\cos x$ $\qquad f'(x)=-\sin x$;

$f(x)=\mathrm{tg}x$ $\qquad f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$;

$f(x)=\mathrm{ctg}x$ $\qquad f'(x)=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

$f(x)=\arcsin x$ $\qquad f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$f(x)=\arccos x$ $\qquad f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$f(x)=\mathrm{arctg}x$ $\qquad f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$;

$f(x)=\mathrm{arcctg}x$ $\qquad f'(x)=-\dfrac{1}{1+x^2}$;

Правила вычисления производных с использованием табличных значений заключаются в следующем. Пусть c – постоянная; $u=u(x)$; $v=v(x)$ и $u_n=u_n(x)$ – дифференцируемые на некотором интервале $(a;b)$ функции, на этом же интервале справедливы формулы:

$$c'=0;\qquad (cu)'=cu';$$

$$(u_1+u_2+\ldots+u_n)'=u_1'+u_2'+\ldots+u_n';$$

$$(uv)'=u'v+uv';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2},\quad (v\neq 0).$$

Пример 1. Найти производную функции $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x - 9$.

Решение. $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 4$.

Пример 2. Найти производную функции $y = x^2 \sin x$.

Решение. $y' = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x$.

Пример 3. Найти производную функции $y = \dfrac{2x^2 - 1}{x + 3}$.

Решение. $y' = \dfrac{(2x^2 - 1)'(x+3) - (2x^2 - 1)(x+3)'}{(x+3)^2} =$

$$= \frac{4x(x+3) - (2x^2 - 1)\cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{4x^2 + 12x - 2x^2 + 1}{(x+3)^2} = \frac{2x^2 + 12x + 1}{(x+3)^2}.$$

Правило вычисления производной сложной функции заключается в следующем. Пусть $y = f(u)$, а $u = u(x)$, т.е. $y = f\big(u(x)\big)$ – сложная функция. Если функция $u = u(x)$ дифференцируема на некотором интервале $(a;b)$, а функция $y = f(u)$ – на соответствующем интервале $\big(u(a);u(b)\big)$, то сложная функция на этом же интервале $(a;b)$ имеет производную

$$y'(x) = f'(x) = f'_u(u)\, u'_x(x),$$

где индексы u и x у производных указывают, по какому аргументу вычисляются эти производные.

Пример 4. Найти производную функции $y(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$.

Решение. Полагая $u(x) = x^2 - 2x$, получим $y(u) = \sqrt{u}$, так как

$$y'_u(u) = \left(\sqrt{u}\right)'_u = \left(u^{1/2}\right)'_u = \frac{1}{2} u^{\left(\frac{1}{2} - 1\right)} = \frac{1}{2} u^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{u}}, \text{ то}$$

$$y'_x(x) = y'_u(u) \cdot u'_x(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'_x(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2x}} (x^2 - 2x)'_x =$$

$$= \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}}.$$

Ответ: $y'(x) = y'_x(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$.

Пример 5. Найти производную функции $f(x)=\sin^3 x^5$.

Решение.

$f'(x)=3\sin^2 x^5(\sin x^5)'=3\sin^2 x^5\cos x^5(x^5)'=3\sin^2 x^5\cos x^5 5x^4$.

Ответ: $f'(x)=15\sin^2 x^5\cos x^5 x^4$.

Пример 6. Решить неравенство $f'(x)+g'(x)\le 0$, если $f(x)=2x^3+12x^2$ и $g(x)=9x^2+72x$.

Решение. $f'(x)=6x^2+24x$; $g'(x)=18x+72$. Следовательно: $6x^2+24x+18x+72\le 0 \Rightarrow x^2+7x+12\le 0$.

Корни уравнения $x^2+7x+12=0$ $x_1=-4$, $x_2=-3$.

Методом интервалов получим:

Ответ: $x\in[-4;-3]$.

Задачи на вычисление производных

Найти по определению производные следующих функций:

7. $f(x)=x^3$.

8. $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a,b,c\in R)$.

9. $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

10. $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

11. Вывести формулу дифференцирования тройного произведения:

$$\boxed{(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'}$$

12. Доказать по индукции ту же формулу для n множителей:

$(f_1\cdot f_2\cdot\ldots f_n)'=f_1'\cdot f_2\cdot\ldots f_n+f_1\cdot f_2'\cdot f_3\cdot\ldots\cdot f_n+\ldots+f_1\cdot\ldots\cdot f_{n-1}\cdot f_n'$, т.е.

$$\boxed{\left(\prod_{k=1}^{n} f_k\right)'=\sum_{k=1}^{n}\left(f_k'\cdot\prod_{m=1}^{k-1} f_m\cdot\prod_{m=k+1}^{n} f_m\right)}$$

13. Вывести производную функций:

$y=\mathrm{tg}x$. $y=\mathrm{ctg}x$. $y=\arccos x$. $y=\mathrm{arctg}x$. $y=\mathrm{arcctg}x$.

$$\boxed{(\mathrm{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}\quad (=1+\mathrm{tg}^2 x)}$$

$$\boxed{(\mathrm{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}\quad (=-1-\mathrm{ctg}^2 x)}$$

$$\boxed{(\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\mathrm{arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Продифференцировать следующие функции (упрощать полученные выражения не требуется):

14. $f(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 5x - 8$.

15. $f(x) = x^7 - 3x^5 + 4x^3 - 2x$.

16. $y = x\cos x$.

17. $y = x^2 \log_3 x$.

18. $y = \dfrac{\sin x}{x^3}$.

19. $y = \dfrac{x^4 + 3x^2}{x}$.

20. $y = (2x+3)\left(\dfrac{1}{x^2} + 1 + x^2\right)$.

21. $y = \dfrac{2x^3 + x + 1}{1 - x}$.

22. $y = \sin x(1 + 2\sin x)(3 + 4\sin x)$.

23. $y = \dfrac{1 - \sin x}{x^2}$.

24. $y = \dfrac{2}{\sin x + 1}$.

25. $y = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 + 39$.

26. $y = \sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} + \sin^2 8x + \cos^2 8x$.

27. $y = \sqrt[5]{x^6} + \sqrt[4]{x^3}\left(x^8 + \sqrt{x}\right)$.

28. $y = \dfrac{(x^5 + 2x^3 - 1)(9 - x)}{(x+3)^2}$.

29. $y = \left(x^2 + \sqrt{x}\right)\left(x^3 + \sqrt[3]{x}\right)\left(x^4 + \sqrt[4]{x}\right)$

Найти производную функций:

30. $y = \dfrac{2x+1}{3x-2}$.

31. $y = \dfrac{x-3}{x^2+2}$.

32. $y = (3x-5)\sqrt{x}$.

33. $y = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x}}$.

34. $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$.

35. $y = \dfrac{(2x-1)^3}{(3x+1)^2}$.

36 $y = \sqrt{x^4 + 3x^3 - x^2 + 4x}$.

37 $y = \sqrt{x^2 \cdot \sin x}$.

38 $y = \sqrt{x^3 \cdot \ln x}$.

39. $y = \sqrt{\cos x^3}$.

40. $y = \log_5(\sin x^4)$.

41. $y = \sin\sqrt{\ln x}$.

42. $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^3 - 1}}{x^2}$.

43. $y = (x+1)^3\sqrt{2x-1}$.

44. $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$.

45. $y = \left(x + \sqrt[3]{x}\right)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$.

46. $y=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$. **47.** $y=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$. **48.** $y=\ln\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)$.

49. $y=\ln(\cos x)$. **50.** $y=\sqrt{\ln(\sin 2x)}$.

51. $y=x\sqrt{4-x^2}-\ln\left(4-x^2\right)$. **52.** $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\cos\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)$.

53. $y=\sin\left(\cos^2 x\right)$. **54.** $y=\sin(\sin(\sin x))$. **55.** $y=\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x}{\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x}$.

56. $y=\ln\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$. **57.** $y=\cos x^3$. **58.** $y=x^{\log_2 x}$.

59. $y=\arcsin\frac{x}{2}$. **60.** $y=\arccos\frac{1}{x}$. **61.** $y=\arcsin\left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right)$.

62. $y=\operatorname{arctg}x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x^3$. **63.** $y=\frac{\ln 3\cdot\sin x+\cos x}{3^x}$.

64. $y=\log_x e$.

Продифференцировать следующие функции (упрощать и находить области определения функции и производной (если они не пусты) не обязательно):

65. $y=(5x+1)^8\cdot(3-2x)^3$. **66.** $y=\sin^7 3x+\cos^9 2x$.

67. $y=\operatorname{tg}\left(\frac{2-x}{x^2}\right)$. **68.** $y=\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$. **69.** $y=\arcsin^6 x^7\cdot\sin^7 x^6$.

70. $y=\left(\arccos\left(x^2-1\right)+1\right)^7$. **71.** $y=\sqrt[3]{x^2-6x+7}-\sqrt[3]{x^2+6x-7}$.

72. $y=\frac{x^2-x}{(2x+3)^3}$. **73.** $y=\frac{\sin(\cos x)+\cos x}{\cos^3 x}$.

74. $y=\frac{\sin 4x}{\cos 5x-\cos 7x}$. **75.** $y=\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}-x\right)^3$.

76. $y=\sin x\cdot\cos\left(x^3+3x-6\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\sqrt{x}+2\right)$. **77.** $y=\frac{\sqrt{x^2+4x-9}}{2x+5}$

78. $y = \operatorname{arctg}^2(5x-6) + \dfrac{1}{(5x-6)^{10}}$.

79. $y = \dfrac{(x+5)^{70} \cdot (9-x)^{15}}{(6x+1)^{38}}$.

80. $y = \left(\sqrt{x + \left(\sqrt{x^2 + \left(\sqrt{x^3} + 3 \right)^3} + 2 \right)^2 + 1 + 315} \right)^{\cdot 2}$.

(*в*) Продифференцировать следующие функции (упрощать и находить области определения функции и производной (если они не пусты) не обязательно):

81. $y = 3^x - \arcsin x^2$. **82.** $y = \log_3\left(x^2+4\right)$. **83.** $y = \log_x 5$.

84. $y = 5^{x^2} \cdot e^{-x}$. **85.** $y = xe^{2x}$. **86.** $y = 5^{x^2 - x - 4} \cdot 2^{\frac{1}{x}}$.

87. $y = \log_2 \log_3 \log_4 x$. **88.** $y = (\arcsin 5^{-x} + 1)^3$. **89.** $y = \ln \dfrac{x^2-1}{x^2+1} \cdot \sqrt{x}$.

90. $y = (2x+5)^{x^2}$. **97.** $y = 3^{3^{3^x}}$. **92.** $y = \ln(\sin^n x \cdot \cos(nx))$.

93. $y = \dfrac{\log_2 x \cdot \log_3 x \cdot \log_4 x \cdot \log_5 x}{x}$. **94.** $y = \ln \sqrt{\operatorname{arctg} x \cdot x}$.

95. $y = e^x \sin x$. **96.** $y = \sin e^x$. **97.** $y = \operatorname{arctg}\left(e^{x^2}\right) \cdot \left(x^2 - 1\right)$.

98. $y = \sin^5 8x \cdot e^{\sin^5 8x}$. **99.** $y = \dfrac{e^{-5x}}{x^2+4}$. **100.** $y = x^{2^x}$.

Найти производную функций в точке:

101. $f(x) = x \cdot \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$. **102.** $f(x) = \dfrac{-\cos x}{1+\sin x}$, $x_0 = \dfrac{5\pi}{6}$.

103. $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$. **104.** $f(x) = \ln\dfrac{a-x}{a+x}$, $x_0 = 2a$.

105. $f(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$, $x_0 = -1$. **106.** $f(x) = x^3 + 3^x$, $x_0 = 1$.

107. $f(x) = x^x$, $x_0 = e$. **108.** $f(x) = x^{\operatorname{tg} x}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

109. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $x_0 = \dfrac{1}{64}$.

110. Дана функция $f(x)=\sin^2 2x$. Найти $\dfrac{f'(x)}{2\cos 2x}$.

111. Доказать тождество $f'(x)-2x\cdot f(x)+\frac{1}{3}f(0)-f'(0)=1$, если

$f(x)=3e^{x^2}$.

112. Решить уравнение $f'(x)=0$, если:

а) $f(x)=1-\sin(\pi+x)+2\cos\left(3\pi+\dfrac{x}{2}\right)$;

б) $f(x)=4x-\sin 2x+4\sqrt{2}\cos x$;

в) $f(x)=e^{2x-1}+2e^{1-2x}+7x-5$; г) $f(x)=\left(2-\sqrt{x+2}\right)^2$.

Решить неравенства:

113. $f'(x)>g'(x)$, если $f(x)=x^3+x-\sqrt{2}$, $g(x)=3x^2+x+\sqrt{2}$.

114. $f'(x)<g'(x)$, если $f(x)=\dfrac{2}{x}$, $g(x)=x-x^3$.

115. $f'(x)<\varphi'(x)$, если $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x}$ и $\varphi(x)=5x+\dfrac{1}{x}$.

116. $f'(x)>g'(x)$, если $f(x)=x^3+x-\sqrt{2}$ и $g(x)=3x^2+x+\sqrt{2}$.

117. $f'(x)>0$, если $f(x)=\sqrt{x^2-3x}$.

118. $f'(x)<0$, если $f(x)=\sqrt[3]{x^2}\cdot(x-5)$.

119. Даны функции $f(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{x^3+1}$ и $g(x)=x\cdot e^{-x}$. Показать, что $f'(2)$ является корнем уравнения $g'(x)=0$.

120. Дана функция $f(x)=e^{ax^2-bx+1}$. Найти a и b, если $f(1)=f(0)=f'(0)$.

121. Дана функция $f(x)=\ln\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}-5-\ln\dfrac{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$. Доказать, что

$f'(x)=\dfrac{3}{\cos x}$ $\forall x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ответы:

7. $3x^2$. **8.** $2ax+b$. **9.** $-\frac{1}{x^2}$. **10.** $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. **14.** $f'(x)=5x^4+8x^3-9x^2+5$.

15. $f'(x)=7x^6-15x^4+12x^2-2$. **16.** $y'=\cos x-x\sin x$.

17. $y'=2x\log_3 x+\frac{x}{\ln 3}$. **18.** $y'=\frac{\cos x\cdot x-3\cdot\sin x}{x^4}$. **19.** $y'=3x^2-3$.

20. $2\left(\frac{1}{x^2}+1+x^2\right)+(2x+3)\left(-\frac{2}{x^3}+2x\right)$.

21. $\frac{(6x+1)(1-x)+2x^3+x+1}{(1-x)^2}=\frac{2x^3-6x^2+6x+2}{(1-x)^2}$.

22. $\cos x(1+2\sin x)(3+4\sin x)+2\cos x\sin x(3+4\sin x)+$

$+4\cos x\sin x(1+2\sin x)=\cos x\left(24\sin^2 x+20\sin x+3\right)$.

23. $\frac{-x\cos x-2+2\sin x}{x^3}$. **24.** $-\frac{2\cos x}{(\sin x+1)^2}$. **25.** $2\left(x-\frac{1}{x^3}\right)$. **26.** $\frac{1}{2}\cos x$.

27. $\frac{6\sqrt[5]{x}}{5}+\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}\left(x^8+\sqrt{x}\right)+\sqrt[4]{x^3}\left(8x^7+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{6}{5}\sqrt[5]{x}+8\frac{3}{4}x^7\sqrt[4]{x^3}+\frac{5}{4}\sqrt[4]{x}$.

28. $\frac{(x+3)\left(\left(5x^4+6x^2\right)(9-x)-\left(x^5+2x^3-1\right)\right)-2\left(x^5+2x^3-1\right)(9-x)}{(x+3)^3}$.

29. $\left(2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(x^3+\sqrt[3]{x}\right)\left(x^4+\sqrt[4]{x}\right)+\left(x^2+\sqrt{x}\right)\left(3x^2+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)\left(x^4+\sqrt[4]{x}\right)+$

$+\left(x^2+\sqrt{x}\right)\left(x^3+\sqrt[3]{x}\right)\left(4x^3+\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}\right)$. **30.** $\frac{-7}{(3x-2)^2}$. **31.** $\frac{2+6x-x^2}{\left(x^2+2\right)^2}$.

32. $\frac{9x-5}{2\sqrt{x}}$. **33.** $\frac{2x-1}{2x\sqrt{x}}$. **34.** $\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$. **35.** $\frac{6(x+2)(2x-1)^2}{(3x+1)^3}$.

36. $y'=\frac{4x^3+9x^2-2x+4}{2\sqrt{x^4+3x^3-x^2+4x}}$. **37.** $y'=\frac{2\sin x+x\cdot\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$. **38.** $y'=\frac{3x\cdot\ln x+x}{2\sqrt{x\cdot\ln x}}$

39. $y'=-\frac{3x^2\cdot\sin x^3}{2\sqrt{\cos x^3}}$. **40.** $y'=\frac{4x^3\cos x^4}{\sin x^4\cdot\ln 5}$. **41.** $y'=\frac{\cos\sqrt{\ln x}}{2x\sqrt{\ln x}}$.

42. $\dfrac{2-x^3}{x^3\cdot\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}}$. 43. $\dfrac{(x+1)^2(7x-2)}{\sqrt{2x-1}}$. 44. $\dfrac{-3}{2\sqrt{(x+1)(x-2)^3}}$.

45. $\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^5}}\right)$. 46. $\dfrac{1}{8\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}}$. 47. $\dfrac{7}{8\sqrt[8]{x}}$.

48. $\dfrac{8}{(2x-1)(2x+3)}$. 49. $-\operatorname{tg}x$. 50. $\dfrac{\operatorname{ctg}2x}{\sqrt{\ln(\sin 2x)}}$.

51. $\dfrac{\left(4-2x^2\right)\sqrt{4-x^2}+2x}{4-x^2}$. 52. $\dfrac{1-2x\sqrt{x^2+1}\sin\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$.

53. $-\sin 2x\cdot\cos\left(\cos^2 x\right)$. 54. $\cos(\sin(\sin x))\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos x$. 55. $2\sin 2x$.

56. $\dfrac{2}{\sqrt{x^2-1}}$. 57. $-3x^2\sin x^3$. 58. $x^{\log_2 x-1}\cdot 2\log_2 x$. 59. $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

60. $\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$. 61. $\dfrac{-1}{\sqrt{1+2x-x^2}}$. 62. $\dfrac{1+x^4}{x+x^6}$. 63. $-\dfrac{1+\ln^2 3\sin x}{3^x}$.

64. $\dfrac{-(\log_x e)^2}{x}$. 42. $\dfrac{2-x^3}{x^3\cdot\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}}$. 43. $\dfrac{(x+1)^2(7x-2)}{\sqrt{2x-1}}$.

44. $\dfrac{-3}{2\sqrt{(x+1)(x-2)^3}}$. 45. $\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^5}}\right)$.

46. $\dfrac{1}{8\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}}$. 47. $\dfrac{7}{8\sqrt[8]{x}}$. 48. $\dfrac{8}{(2x-1)(2x+3)}$.

49. $-\operatorname{tg}x$. 50. $\dfrac{\operatorname{ctg}2x}{\sqrt{\ln(\sin 2x)}}$. 51. $\dfrac{\left(4-2x^2\right)\sqrt{4-x^2}+2x}{4-x^2}$.

52. $\dfrac{1-2x\sqrt{x^2+1}\sin\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$. 53. $-\sin 2x\cdot\cos\left(\cos^2 x\right)$.

54. $\cos(\sin(\sin x))\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos x$. 55. $2\sin 2x$. 56. $\dfrac{2}{\sqrt{x^2-1}}$.

57. $-3x^2\sin x^3$. **58.** $x^{\log_2 x-1}\cdot 2\log_2 x$. **59.** $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$. **60.** $\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$.

61. $\dfrac{-1}{\sqrt{1+2x-x^2}}$. **62.** $\dfrac{1+x^4}{x+x^6}$. **63.** $-\dfrac{1+\ln^2 3\sin x}{3^x}$. **64.** $\dfrac{-(\log_x e)^2}{x}$.

65. $8(5x+1)^7\cdot 5(3-2x)^3+3(3-2x)^2(-2)(5x+1)^8=$

$=2(5x+1)^7(3-2x)^2(-55x+57)$.

66. $7\sin^6 3x\cos 3x\cdot 3+9\cos^8 2x(-\sin 2x)\cdot 2=$

$=21\sin^6 3x\cos 3x-18\cos^8 2x\sin 2x$.

67 $\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{2-x}{x^2}}\cdot\left(-\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{x-4}{x^3\cos\dfrac{2-x}{x^2}}$.

68. $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{\left(\dfrac{1+x^3}{1-x^3}\right)^2}}\cdot\dfrac{3x^2(1-x^3)+3x^2(1+x^3)}{(1-x^3)^2}=\dfrac{2x^2}{(1-x^3)\sqrt[3]{(1-x^3)(1+x^3)^2}}$

69. $6\arcsin^5 x^7\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{14}}}\cdot 7x^6\cdot\sin^7 x^6+\arcsin^6 x^7\cdot 7\sin^6 x^6\cdot\cos x^6\cdot 6x^5=$

$=42\arcsin^5 x^7\cdot\sin^6 x^6\cdot x^5\left(\dfrac{x\sin x^6}{\sqrt{1-x^{14}}}+\arcsin x^7\cdot\cos x^6\right)$.

70. $7\left(\arccos\left(x^2-1\right)+1\right)^6\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(x^2-1\right)^2}}\right)2x=-\dfrac{14x\left(\arccos\left(x^2-1\right)+1\right)^6}{\sqrt{2x^2-x^4}}$.

71. $\dfrac{2x-6}{3\sqrt[3]{\left(x^2-6x+7\right)^2}}-\dfrac{2x+6}{3\sqrt[3]{\left(x^2+6x-7\right)^2}}$.

72. $\dfrac{(2x-1)(2x+3)^3-3(2x+3)^2\cdot 2\left(x^2-x\right)}{(2x+3)^6}=\dfrac{-2x^2+10x-3}{(2x+3)^4}$.

73. $\dfrac{\cos x\cdot\cos\cos x-3\sin\cos x-2\cos x}{\cos^4 x}(-\sin x)$.

74. $\dfrac{4\cos 4x(\cos 5x-\cos 7x)-\sin 4x(-5\sin 5x+7\sin 7x)}{(\cos 5x-\cos 7x)^2}$

75. $3\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}}-x\right)^2\left(\dfrac{4x}{(1-4x^2)\sqrt{1-4x^2}}-1\right)$.

76. $\cos x\cdot\cos(x^3+3x-6)\cdot\mathrm{tg}(\sqrt{x}+2)-\sin x\cdot\sin(x^3+3x-6)\cdot(3x^2+3)\times$

$\times\mathrm{tg}(\sqrt{x}+2)+\sin x\cdot\cos(x^3+3x-6)\cdot\dfrac{1}{\cos^2(\sqrt{x}+2)\cdot 2\sqrt{x}}$.

77. $\dfrac{\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x-9}}(2x+5)-2\sqrt{x^2+4x-9}}{(2x+5)^2}=\dfrac{2x^2+x+28}{(2x+5)^2\sqrt{x^2+4x-9}}$.

78. $\left(2\mathrm{arctg}(5x-6)\cdot\dfrac{1}{1+(5x-6)^2}-\dfrac{10}{(5x-6)^{11}}\right)5$.

79. $\dfrac{(9-x)^{14}(x+5)^{69}}{(6x+1)^{39}}\left(70(9-x)(6x+1)-15(x+5)(6x+1)-\right.$

$\left.-228(x+5)(9-x)\right)$. **80.** $\dfrac{-2}{\left(\sqrt{x+\left(\sqrt{x^2+\left(\sqrt{x^3}+3\right)^3}+2\right)^2+1}+315\right)^3}\times$

$\times\dfrac{1}{2\sqrt{x+\left(\sqrt{x^2+\left(\sqrt{x^3}+3\right)^3}+2\right)^2+1}}\times\left(1+2\left(\sqrt{x^2+\left(\sqrt{x^3}+3\right)^3}+2\right)\times\right.$

$\left.\left.\times\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+\left(\sqrt{x^3}+3\right)^3}}\left(2x+3\left(\sqrt{x^3}+3\right)^2\dfrac{3}{2}\sqrt{x}\right)\right)\right)\right)$. **81.** $3^x\ln 3-\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$.

82. $\dfrac{2x}{(x^2+4)\ln 3}$. **83.** $\dfrac{-\ln 5}{x\ln^2 x}$. **84.** $5^{x^2}e^{-x}(2x\ln 5-1)$. **85.** $e^{2x}(1+2x)$.

86. $5^{x^2-x+4}\cdot 2^{\frac{1}{x}}\left(\ln 5(2x-1)-\frac{\ln 2}{x^2}\right)$. **87.** $\frac{1}{\log_3\log_4 x\cdot\ln 2}\cdot\frac{1}{\log_4 x\cdot\ln 3}\cdot\frac{1}{x\ln 4}$.

88. $-3\left(\arcsin 5^{-x}+1\right)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{1+5^{-2x}}}\cdot 5^{-x}\ln 5$. **89.** $\frac{4x\sqrt{x}}{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

90. $(2x+5)^{x^2}\cdot\left(2x\ln(2x+5)+\frac{2x^2}{2x+5}\right)$. **91.** $3^{3^{3^x}}\cdot 3^{3^x}\cdot 3^x\cdot\ln^3 3$.

92. $\frac{n}{\sin^n x\cos(nx)}\left(\sin^{n-1}x\cdot\cos x\cdot\cos nx-\sin^n x\cdot\sin nx\right)$. **93.** $\frac{\ln^3 x(4-\ln x)}{x^2\ln 2\ln 3\ln 4\ln 5}$.

94. $\frac{1}{2\operatorname{arctg}x\left(1+x^2\right)}+\frac{1}{2x}$. **95.** $e^x(\sin x+\cos x)$. **96.** $e^x\cos e^x$.

97. $\frac{e^{x^2}\cdot 2x\left(x^2-1\right)}{1+e^{2x^2}}+2x\cdot\operatorname{arctg}e^{x^2}$. **98.** $40e^{\sin^5 8x}\left(1+\sin^5 8x\right)\sin^4 8x\cdot\cos 8x$.

99. $\frac{-e^{-5x}\left(5x^2+20+2x\right)}{\left(x^2+4\right)^2}$. **100.** $x^{2^x}\cdot 2^x\cdot\left(\ln 2\ln x+\frac{1}{x}\right)$. **101.** $\frac{\pi}{2}-1$. **102.** $\frac{2}{3}$.

103. $-\sqrt{2}$. **104.** $\frac{2}{3a}$. **105.** $\frac{-2e}{(e-1)^2}$. **106.** $3\ln 3e$. **107.** $2e^e$. **108.** $\frac{\pi}{2}\ln\frac{\pi}{4}+1$.

109. $-4105\frac{1}{3}$. **110.** $2\sin 2x$. **112.** а) $\left\{\pi+4\pi n;\ (-1)^{k-1}\frac{\pi}{3}+2\pi k\,\middle|\,n,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;

б) $\left\{(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n\,\middle|\,n\in\mathbb{Z}\right\}$; в) $\frac{1-\ln 2}{2}$; г) 2. **113.** $(-\infty;\ 0)\cup(2;\ +\infty)$.

114. $(-1;\ 0)\cup(0;\ 1)$. **115.** $x\in(-\infty;0)\cup(0;2,5)$. **116.** $x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$.

117. $(3;\ +\infty)$. **118.** $(0;\ 2)$.

Геометрический смысл производной. Касательная. Нормаль

Вычисление угла наклона касательной

Поскольку значение производной функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0 равно тангенсу угла α (между положительным направлением оси Ox и касательной, проведенной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0), т.е. $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, можно определить угол наклона касательной к оси Ox, вычислив значение производной в требуемой точке.

Пример **1.** Какой угол образует с осью Ox касательная к параболе $f(x) = x^2 - 5x + 7$ в точке $M(2,1)$?

Решение: Находим производную функции $f'(x) = 2x - 5$. Вычисляем значение производной в точке с абсциссой $x_0 = 2$: $f'(x_0) = f'(2) = -1$.

Следовательно, $\operatorname{tg}\alpha = -1$, а $\alpha = \dfrac{3}{4}\pi$.

Ответ: $\alpha = \dfrac{3}{4}\pi$.

Задачи

1. Под каким углом к оси Ox наклонена касательная, приведенная к кривой $y = 2x^3 - x$ в точке пересечения этой кривой с осью Oy?

Ответ: $\alpha = \dfrac{3}{4}\pi$.

2. К графику функции $y = 2x^2 - 1$, через точку с абсциссой $x_0 = 0{,}25$ проведена касательная. Какой угол образует эта касательная с осью Ox?

Ответ: $\alpha = \pi/4$.

3. Найти угол между касательными к графику функции $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$, приведенными в точках с абсциссами 0 и 1.

Ответ: $\alpha = \pi/4$.

Составление уравнения касательной к графику функции при заданной абсциссе точки касания

Пример **2.** Составить уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 - 7x^2 + 11$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Решение. Находим производную функции $f'(x)=3x^2-14x$. Вычисляем значение производной в точке с абсциссой $x_0=1$: $f'(x_0)=f'(1)=3-14=-11$, а также ординату точки касания $f(x_0)=f(1)=1-7+11=5$. Составляем уравнение касательной по формуле:

$$y-5=-11(x-1)\Rightarrow y=-11x+16.$$

Ответ: $y=-11x+16$.

Задачи

4. Составить уравнение касательной к графику заданной функции в точке с абсциссой x_0:

а) $y=x-x^2+6$; $x_0=1$. б) $f(x)=3x-7x^2+x^5$; $x_0=-1$.

в) $f(x)=4x^2-x^5+9$; $x_0=3$. г) $f(x)=x^4-6x+7$; $x_0=2$.

д) $f(x)=7x^2-3x^6+11$; $x_0=-1$.

Ответ: а) $y=7-x$; б) $y=22x+11$; в) $y=-381x+945$; г) $y=26x-41$; д) $y=4x+19$.

5. Найти координаты точки пересечения касательных, проведенных к графику функции $y=x(4-x)$ в точках с абсциссами $x_1=-1$ и $x_2=3$. Сделать рисунок.

Ответ: (1;7).

Составление уравнения касательной к графику функции, если абсцисса точки касания не задана в явном виде

В этом случае, на первом этапе решения, необходимо найти абсциссу x_0 точки касания, используя условия задачи. Дальнейшее решение может быть полностью аналогичным предложенному выше.

Пример 3. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^2-7x+3$, параллельной прямой $5x+y-3=0$.

Решение. Уравнение данной прямой может быть переписано в виде $y=-5x+3$, ее угловой коэффициент $k=-5$. Касательная будет параллельна данной прямой, если ее угловой коэффициент (определяемый как $f'(x_0)$) будет равен угловому коэффициенту прямой, т.е. $f'(x_0)=k$. Вычисляем производную $f'(x)=2x-7$ и $f'(x_0)=2x_0-7$. Касательная и прямая будут параллельны, если $2x_0-7=-5$, т.е. абсцисса точки касания $x_0=1$. Ординату точки касания можно вычислить только по уравнению функции, как $f(x_0)=f(1)=1-7+3=-3$.

Уравнение касательной получим, подставив известные теперь значения в формулу (1):

$y-(-3)=-5(x-1) \Rightarrow y=-5x+2$.

Ответ: $y=-5x+2$.

Пример **4.** Составить уравнения касательных, проведенных из точки $M(-1;-6)$ к графику функции $y=x^2-x+1$.

Решение. Прежде всего необходимо выяснить принадлежит ли заданная точка M графику функции? Для этого следует подставить координаты точки M в уравнение функции: если точка принадлежит графику – ее координаты превратят уравнение функции в тождество (и задача сведется к примеру 9, где x_0 равно абсциссе точки M), в противном случае точка графику функции не принадлежит.

Итак: $x=-1$, $y=-6$, получаем $-6 \neq (-1)^2-(-1)+1 \Rightarrow -6 \neq 3$, следовательно точка M не лежит на графике функции $y=x^2-x+1$. В первую очередь необходимо найти абсциссу точки касания.

Находим производную функции $y'=2x-1$. Вычисляем производную и функцию в точке с абсциссой x_0 (в настоящий момент численное значение x_0 нам неизвестно), поэтому получаем: $y'(x_0)=2x_0-1$ и $y(x_0)=x_0^2-x_0+1$.

Составляем уравнение касательной:

$$y-(x_0^2-x_0+1)=(2x_0-1)(x-x_0) \Rightarrow (2x_0-1)x-x_0^2+1.$$

Мы получили уравнение касательной в общем виде (с неизвестной абсциссой x_0 точки касания). Так как входящее в это уравнение x_0 произвольно, то, задав любое конкретное значение x_0, получим уравнение конкретной касательной.

Из всех касательных к графику функции $y(x)$ нам следует выбрать только те, которые проходят через заданную точку $M(-1;-6)$. Следовательно, координаты точки M, подставленные в обобщенное уравнение касательной вместо текущих координат x и y, преобразуют его в уравнение для определения искомого x_0:

$$-6=(2x_0-1)(-1)-x_0^2+1 \Rightarrow x_0^2+2x_0-8=0,$$

решив это уравнение получим $x_{01}=2$ и $x_{02}=-4$, т.е. данная функция имеет две касательные, удовлетворяющие заданному условию. Найдем их, подставив вычисленные x_0 в уравнение касательной:

для $x_{01}=2$: $y=(2*2-1)x-(2)^2+1 \Rightarrow y=3x-3$ и

для $x_{02}=-4$: $y=\left(2*(-4)-1\right)x-(-4)^2+1 \Rightarrow y=-9x-15$.

Ответ: $y=3x-3$ и $y=-9x-15$.

Пример **5.** Найти координаты точек пересечения с осью Ox тех касательных к графику функции $f(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$, которые образуют угол $\dfrac{3}{4}\pi$ с осью Ox.

Решение. Касательная образует с осью Ox заданный угол $\alpha=\dfrac{3}{4}\pi$, если ее угловой коэффициент $k=f'(x_0)$ будет равен $\operatorname{tg}\alpha$. Вычисляем производную $f'(x)=\dfrac{1\cdot(x-3)-(x+1)\cdot 1}{(x-3)^2}=-\dfrac{4}{(x-3)^2}$; затем приравниваем $f'(x_0)=-\dfrac{4}{(x_0-3)^2}$ тангенсу заданного угла, с учетом $\operatorname{tg}\dfrac{3}{4}\pi=-1$, получим: $-\dfrac{4}{(x_0-3)^2}=-1$. Решая это уравнение, получим $x_{01}=5$ и $x_{02}=1$, т.е. данная функция имеет две касательные (в точках с абсциссами 5 и 1), которые образуют угол $\dfrac{3}{4}\pi$ с осью Ox. Для составления уравнений касательных нам недостает лишь ординат точек касания, вычислим их: $f(x_{01})=f(5)=\dfrac{5+1}{5-3}=3$; $f(x_{02})=f(1)=\dfrac{1+1}{1-3}=-1$. Подставив все значения в уравнение касательной, с учетом $f'(x_{01})=f'(x_{02})=-1$, получим:

для $x_{01}=5$: $y-3=-1(x-5) \Rightarrow y_{кас}=-x+8$ и

для $x_{02}=1$: $y+1=-1(x-1) \Rightarrow y_{кас}=-x$.

Точки пересечения касательных с осью Ox имеют ординату $y=0$, для определения абсцисс подставим $y=0$ в уравнение соответствующей касательной: $0=-x+8 \Rightarrow x=8$ и $0=-x \Rightarrow x=0$.

Ответ: $(8;0)$ и $(0;0)$.

Пример **6.** Доказать, что касательные, проведенные из точки $C(1;-0,5)$ к параболе $y=0,5x^2$, перпендикулярны друг другу.

Решение. Поскольку точка C не принадлежит параболе (в чем легко убедиться, подставив координаты точки C в уравнение параболы), в первую очередь необходимо определить абсциссу точки касания, для чего используем способ, рассмотренный в примере 2:

Находим производную функции $y' = x$. Вычисляем производную и функцию в точке с абсциссой x_0 (в настоящий момент численное значение x_0 нам неизвестно), поэтому получаем: $y'(x_0) = x_0$ и $y(x_0) = 0,5x_0^2$.

Составляем уравнение касательной:

$$y - 0,5x_0^2 = x_0(x - x_0) \Rightarrow y = x_0 x - 0,5x_0^2.$$

Из всех касательных к параболе нас интересуют только те, которые проходят через заданную точку $C(1;-0,5)$, поэтому подставляем координаты точки C в уравнение касательной вместо текущих координат x и y и получаем уравнение для определения x_0:

$$-0,5 = x_0 \cdot 1 - 0,5x_0^2 \Rightarrow x_0^2 - 2x_0 - 1 = 0.$$

Решив это уравнение, получим $x_{01} = 1 + \sqrt{2}$ и $x_{02} = 1 - \sqrt{2}$, т.е. из точки C, как и следует из условия задачи, можно провести к заданной параболе две касательные. Собственно, сами уравнения касательных нас не интересуют, так как угол между прямыми определяется только угловыми коэффициентами этих прямых. Угловой коэффициент касательной – это значение производной функции в точке касания, т.е. $y'(x_0)$. Вычислим их: $y'(x_{01}) = 1 + \sqrt{2}$ и $y'(x_{02}) = 1 - \sqrt{2}$. Условие перпендикулярности двух прямых с угловыми коэффициентами k_1 и k_2: $k_1 \cdot k_2 = -1$, таким образом для наших касательных должно выполняться условие $y'(x_{01}) \cdot y'(x_{02}) = -1$. Проверим это: $y'(x_{01}) \cdot y'(x_{02}) = (1 + \sqrt{2}) \cdot (1 - \sqrt{2}) = 1 - 2 = -1$, что и требовалось доказать.

Задачи

6. Составить уравнения касательных к графику функции $f(x)$, параллельных данной прямой.

а) $f(x) = \dfrac{4}{x}$, $y = -4x$. б) $f(x) = 2x^3 - x$, $y = 5x + 6$.

Ответ: а) $y = 8 - 4x$ и $y = -8 - 4x$; б) $y = 5x - 4$ и $y = 5x + 4$.

7. Составить уравнение касательной к графику функции $y = -x^2 - 2$, параллельной прямой $y = 4x + 1$.

Ответ: $y = 4x + 2$.

8. Составить уравнения касательных, проведенных из точки $M(-4;-3)$ к графику функции $yx+4=0$.

Ответ: $y=0,25x-2$ и $y=2,25+6$.

9. Составить уравнения касательных, проведенных из точки $M(2;-2)$ к графику функции $y=x^2+x+1$.

Ответ: $y=11x-24$ и $y=-x$.

10. Составить уравнения касательных, проведенных из точки $M(2;-8)$ к графику функции $y=2/x$.

Ответ: $y=-2x-4$ и $y=-8x+8$.

11. Составить уравнение касательной к графику функции $y=e^x$, проходящей через начало координат.

Ответ: $y=ex$.

12. Составить уравнение касательной к графику функции $y=\ln x$, проходящей через начало координат.

Ответ: $y=x/e$.

13. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(0,5;2)$, касающейся графика функции $y=-0,5x^2+2$ и пересекающей в двух различных точках график функции $y=\sqrt{4-x^2}$.

Ответ: $y=-x+2,5$.

14. В каких точках касательная к графику функции $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ образует с осью абсцисс (Ox) угол 135°?

Ответ: $(0;-1)$ и $(4;3)$.

15. Написать координаты точек пересечения с осями координат тех касательных к графику функции $f(x)=\dfrac{2x-2}{x+1}$, у которых угловой коэффициент равен 4.

Ответ: $(0;-2)$, $(0,5;0)$, $(0;14)$, $(-3,5;0)$.

16. Определить координаты точек пересечения с осями координат тех касательных к графику функции $y=\frac{2x-3}{x+3}$, у которых угловой коэффициент равен 9.

Ответ: $(0;11)$, $(-11/9;0)$, $(0;47)$, $(-47/9;0)$.

17. Определить координаты точек пересечения осью Oy тех касательных к графику функции $y(x)=\frac{3x-1}{x+8}$, которые образуют угол $\frac{\pi}{4}$ с осью Ox.

Ответ: $(0;1)$ и $(0;21)$.

18. Доказать, что касательные, проведённые из точки $C(1;0,5)$ к параболе $y=-\frac{x^2}{2}$, перпендикулярны друг другу.

19. Доказать, что касательные, проведённые из точки $C(1;0,25)$ к параболе $y=-x^2$, перпендикулярны друг другу.

20. Доказать, что касательные, проведённые из точки $C(1;-0,25)$ к параболе $y=x^2$, перпендикулярны друг другу.

Вычисление площади треугольника, образованного касательными

На первом этапе необходимо составить уравнения касательных. Затем находим координаты точек, которые будут являться вершинами искомого треугольника – это могут быть точки пересечения касательных и собственно точки касания. На следующем этапе следует построить треугольник на координатной плоскости (если это не оговорено в условии задачи, то рисунок может быть схематичным) и, используя его, вычислить искомую площадь.

Пример 7. Вычислить площадь треугольника, ограниченного касательными к графику функции $f(x)=2+2x-x^2$ в точках с абсциссами 1 и 3 и прямой, соединяющей эти точки касания. Сделать чертеж.

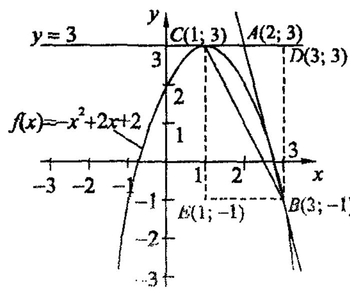
Решение. Составим уравнения касательных, используя формулу (1), для чего найдем производную функции $f'(x)=2-2x$. Вычислим значения производной при $x_{01}=1$ и $x_{02}=3$: $f'(x_{01})=f'(1)=2-2\cdot1=0$ и $f'(x_{02})=f'(3)=2-2\cdot3=-4$. Затем составим уравнения двух касательных:

для первой, в точке (обозначим ее C) с абсциссой $x_{01} = 1$ и ординатой $f(x_{01}) = f(1) = 2 + 2 \cdot 1 - 1^2 = 3$, получим $y - 3 = 0(x - 1) \Rightarrow y = 3$.

для второй, в точке (обозначим ее B) с абсциссой $x_{02} = 3$ и ординатой $f(x_{02}) = f(3) = 2 + 2 \cdot 3 - 3^2 = -1$, получим $y - (-1) = -4(x - 3) \Rightarrow$ $\Rightarrow y = -4x + 11$.

Найдем абсциссу точки (обозначим ее A) пересечения касательных, для чего приравняем правые части их уравнений: $-4x + 11 = 3 \Rightarrow x_A = 2$, ордината этой точки $y_A = 3$, в чем легко убедиться, подставив найденную абсциссу в любое из уравнений касательной.

Сделаем чертеж (в соответствии с требованием задачи). Параболу изобразим схематично. Чертим касательные – первую как прямую AC, вторую как прямую AB. Проводим линию BC, соединяющую точки касания. Полученный треугольник ABC – искомый. Учтем, что сторона AC горизонтальна, и, следовательно, ее длина определяется разностью абсцисс точек A и C, т.е. $AC = x_A - x_C = 2 - 1 = 1$. Тогда, приняв AC за основание треугольника, найдем высоту BD, опущенную из вершины B на прямую AC, как разность ординат точек D и B, т.е. $BD = y_D - y_B = 3 - (-1) = 4$. Площадь треугольника ABC найдем по формуле



$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 2.$$

Ответ: 2 кв. ед.

Пример 8. Вычислить площадь треугольника, образованного тремя касательными, проведенными к графику функции $y = 1 + x - \frac{1}{2}x^2$ в точках с абсциссами 2, -2 и 6.

Решение. Найдем производную функции $y' = 1 = x$. Составим уравнение касательной в точке с абсциссой $x_{01} = 2$:

$$y'(x_{01}) = y'(2) = 1 - 2 = -1;$$

$$y(x_{01}) = y(2) = 1 + 2 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 1 \Rightarrow y - 1 = -1(x - 2) \Rightarrow y = -x + 3.$$

Аналогично составим уравнение касательной в точке с абсциссой $x_{02} = -2$: $y'(x_{02}) = y'(2) = 1 - (-2) = 3$;

$$y(x_{02}) = y(-2) = 1 + (-2) - \frac{1}{2}\cdot(-2)^2 = -3 \Rightarrow y - (-3) = 3(x+2) \Rightarrow y = 3x + 3.$$

и в точке с абсциссой $x_{03} = 6$: $y'(x_{03}) = y'(6) = 1 - 6 = -5$;

$$y(x_{03}) = y(6) = 1 + 6 - \frac{1}{2}\cdot 6^2 = -11 \Rightarrow y - (-11) = -5(x-6) \Rightarrow y = -5x + 19.$$

Найдем координаты точек пересечения касательных – вершин искомого треугольника:

первой со второй (обозначим ее A):

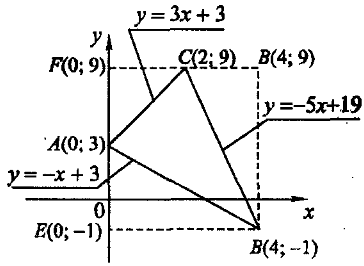
$-x + 3 = 3x + 3 \Rightarrow x_A = 0$, $y_A = 3\cdot 0 + 3 = 3$;

первой с третьей (обозначим ее B):

$-x + 3 = -5x + 19 \Rightarrow x_B = 4$, $y_B = -4 + 3 = -1$;

второй с третьей (обозначим ее C):

$3x + 3 = -5x + 19 \Rightarrow x_C = 2$, $y_C = 3\cdot 2 + 3 = 9$.



Так как в условии задачи не требуется сделать чертеж, сделаем схематичный рисунок, упрощающий дальнейшие вычисления. Поскольку в треугольнике ABC нет горизонтальных или вертикальных сторон, воспользуемся «универсальным» способом.

Опишем вокруг треугольника ABC прямоугольник $BEFD$, стороны которого FD и BE горизонтальны, а стороны FE и BD вертикальны. Тогда площадь треугольника ABC можно вычислить как разность площадей прямоугольника $BEFD$ и треугольников AFC, CDB и BEA, т.е. $S_{ABC} = S_{BEFD} - S_{AFC} - S_{BEA}$. Треугольники AFC, CDB и BEA – прямоугольные и их площадь вычисляется как полупроизведение их катетов. Катеты, как и стороны прямоугольника, вычисляются как разности соответствующих координат:

$FC = x_C - x_F = 2 - 0 = 2$; $CD = x_D - x_C = 4 - 2 = 2$;

$BE = x_B - x_E = 4 - 0 = 4$; $BD = y_D - y_B = 9 - (-1) = 10$;

$EA = y_A - y_E = 3 - (-1) = 4$; $AF = y_F - y_A = 9 - 3 = 6$.

Тогда $S_{ABC} = S_{BEFD} - S_{AFC} - S_{BEA} =$

$$= BE\cdot BD - \frac{1}{2}AF\cdot FC - \frac{1}{2}CD\cdot DB - \frac{1}{2}BE\cdot EA =$$

$$= 4\cdot 10 - \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 10 - \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4 = 16.$$

Ответ: 16 кв. ед.

Пример 9. Составить уравнения касательных, проведенных из точки $M(1;-3)$ к параболе $y=0{,}25x^2+x-2$. Найти площадь треугольника AMB, если A и B – точки касания.

Решение. Найдем производную функции $y'=0{,}5x+1$. Составим уравнение касательной к параболе в точке с абсциссой x_0, используя формулу (1):

$y'(x_0)=0{,}5x_0+1$; $y(x_0)=0{,}25x_0^2+x_0-2 \Rightarrow y-(0{,}25x_0^2+x_0-2)=$
$=(0{,}5x_0+1)(x-x_0)$.

Из всех касательных необходимо выбрать те, которые проходят через точку M. Для этого подставляем координаты точки M в уравнение касательной вместо x и y и получим уравнение для определения абсциссы точки x_0:

$-3-0{,}25x_0^2-x_0+2=(0{,}5x_0+1)(1-x_0) \Rightarrow x_0^2-2x_0-8=0 \Rightarrow x_{01}=4$ и $x_{02}=-2$.

Подставив найденные значения x_0 в обобщенное уравнение касательной, получим уравнения двух касательных, проведенных из точки M к заданной параболе:

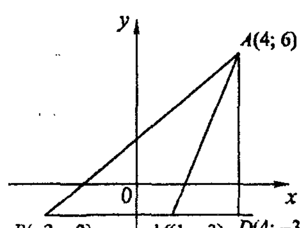
$$y=3x-6 \quad \text{и} \quad y=-3.$$

Так как в условии задачи не требуется сделать чертеж, сделаем схематичный рисунок, упрощающий дальнейшие вычисления, предварительно определив ординаты точек касания:

для первой (обозначим ее A) с абсциссой $x_{01}=4$, получим $y(x_{01})=y(4)=3\cdot4-6=6$;

для второй (обозначим ее B) с абсциссой $x_{02}=-2$, получим $y(x_{02})=y(-2)=-3$.

В треугольнике AMB сторона MB горизонтальна и, следовательно, ее длина определяется разностью абсцисс точек M и B, т.е. $MB=x_M-x_B=1-(-2)=3$. Тогда, приняв MB за основание треугольника, найдем высоту AD, опущенную из вершины A на прямую MB, как разность ординат точек A и D, т.е. $AD=y_A-y_D=6-(-3)=9$. Площадь треугольника AMB найдем по формуле



$$S=\frac{1}{2}MB\cdot AD=\frac{1}{2}\cdot3\cdot9=13{,}5.$$

Ответ: 13,5 кв. ед.

Задачи

21. Вычислить площадь треугольника, ограниченного касательными, проведенными к графику функции $y = 5 + 2x - x^2$, в точках с абсциссами 1 и 3 и прямой, соединяющей эти точки касания. Сделать чертеж.

Ответ: 2 кв. ед.

22. Вычислить площадь треугольника, образованного касательными, проведёнными к графику функции $y = 10 + x - 0,5x^2$, в точках с абсциссами 1 и 3 и прямой, соединяющей эти точки касания. Сделать чертеж.

Ответ: 1 кв. ед.

23. Вычислить площадь треугольника, образованного тремя касательными, проведенными к графику функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$ в точках с абсциссами 2, -2 и 6.

Ответ: 16 кв. ед.

24. Вычислить площадь треугольника, образованного тремя касательными, проведенными к графику функции $y = x^2 + 2x - 1$ в точках с абсциссами 4, -4 и 0.

Ответ: 32 кв. ед.

25. К гиперболе $y = \frac{4}{x}$ проведены касательные: из точки $M(2;2)$ и параллельно прямой $y = -4x$. Вычислить площади всех треугольников, образованных каждой из касательных с осями координат.

Ответ: 8, 8 и 8 кв. ед.

26. Составить уравнения касательных, проведенных из точки $M(3;5)$ к параболе $y = 4 + x - 0,25x^2$. Вычислить площадь треугольника AMB, если A и B – точки касания.

Ответ: $y = -x + 8$, $y = 5$ и $S = 0,5$ кв. ед.

27. Составить уравнения касательных, проведенных из точки $M(5;-3)$ к параболе $y = 0,25x^2 - x - 2$. Вычислить площадь треугольника AMB, если A и B – точки касания.

Ответ: $y = 3x - 18$, $y = -3$ и $S = 13.5$ кв. ед.

Уравнение общей касательной

Для графиков двух функций и, в частности, для двух парабол, может существовать общая касательная, т.е. прямая, касающаяся графика как одной, так и второй функции. Для получения уравнения такой общей касательной следует записать уравнение касательной в общем виде для каждой рассматриваемой функции, а затем выбрать из них совпадающие прямые, которые и будут являться общими касательными.

Пример **10.** Составить уравнение общей касательной к параболам $y = 3x - x^2 - 1$ и $y = 0,5x^2 - x + 2$.

Решение. Для упрощения рассуждений схематично построим заданные параболы, учитывая лишь то, что ветви одной их них направлены вверх, а ветви другой – вниз. Там же покажем общую касательную, касающуюся первой параболы в точке с абсциссой x_1 и второй – в точке с абсциссой x_2. Составим уравнение касательной к первой параболе в точке с абсциссой x_1:

$$y'(x) = 3 - 2x \Rightarrow y'(x_1) = 3 - 2x_1; \quad y(x_1) = 3x_1 - x_1^2 - 1;$$

$$y - 3x_1 + x_1^2 + 1 = (3 - 2x_1)(x - x_1) \Rightarrow y_{\text{кас}} = (3 - 2x_1)x + x_1^2 - 1.$$

Аналогично составим уравнение касательной ко второй параболе в точке с абсциссой x_2:

$$y'(x) = x - 1 \Rightarrow y'(x_2) = x_2 - 1; \quad y(x_2) = 0,5x_2^2 - x_2 + 2;$$

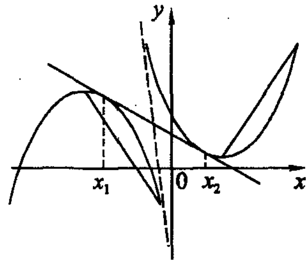
$$y - 0,5x_2^2 + x_2 - 2 = (x_2 - 1)(x - x_2) \Rightarrow y_{\text{кас}} = (x_2 - 1)x - 0,5x_2^2 + 2.$$

Из множеств всех касательных к первой и второй параболе следует выбрать совпадающие. Учитывая, что совпадают только те прямые, у которых одинаковы угловые коэффициенты и равны свободные члены, получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} 3 - 2x_1 = x_2 - 1 \\ x_1^2 - 1 = -0,5x_2^2 + 2, \end{cases}$$

решение которой позволит найти абсциссы точек касания общей касательной как с первой параболой: $x_{11} = 1$; $x_{12} = \dfrac{5}{3}$, так и со второй параболой: $x_{21} = 2$; $x_{22} = \dfrac{2}{3}$. Чтобы найти уравнение общей касательной, достаточно абсциссы точек касания с первой параболой подставить в уравнение ее касательной, получим для $x_{11}=1$: $y=(3-2\cdot 1)x+1^2-1 \Rightarrow y=x$ и

для $x_{12}=\frac{5}{3}$: $y=\left(3-2\cdot\frac{5}{3}\right)x+\left(\frac{5}{3}\right)^2-1 \Rightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{16}{9}$.



Система имеет два решения, следовательно, общих касательных у данных парабол тоже две. На рисунке вторая общая касательная показана штриховой линией. Абсциссы касания со второй параболой можно было вообще не вычислять в процессе решения системы, но еще лучше использовать их для самопроверки, подставив эти значения в уравнение касательной для второй параболы, так для $x_{21}=2$ получим:

$$y=(2-1)x-0,5(2)^2+2 \Rightarrow y=x$$

и для $x_{22}=\frac{2}{3}-x=\left(\frac{2}{3}-1\right)x-0,5\left(\frac{2}{3}\right)^2+2 \Rightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{16}{9}$.

Ответ: $y=x$ и $y=-\frac{1}{3}x+\frac{16}{9}$.

Задачи

28. Составить уравнение общей касательной к параболам:

а) $y=1+x+x^2$ и $y=3x-x^2$; б) $y=x^2+4x+8$ и $y=x^2+8x+4$;

в) $y=x^2-2x+5$ и $y=x^2+2x-11$.

Ответ: а) $y=3x$ и $y=x+1$; б) $y=8x+4$; в) $y=8x-20$.

Различные задачи

29. $f(x)=\frac{1}{x-3}$, $x_0=2$. **30.** $f(x)=\sqrt{2x}$, $x_0=2$.

31. $f(x)=\sin \pi x$, $x_0=2$.

32. $f(x)=\begin{cases}-x-1, & x<-1\\ \sqrt{1-x^2}, & |x|\le 1,\\ x-1, & x>1\end{cases}$ а) $x_0=0$, б) $x_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

33. Написать уравнение касательных к графику функции $y=x^2-2x$ в точках ее пересечения с осью абсцисс.

Написать уравнения касательной и нормали, проведенных к графику функции f в точке с абсциссой x_0:

34. $f(x) = \sin 2x,\ x_0 = \pi$. **35.** $f(x) = \operatorname{ctg} x^2,\ x_0 = \sqrt{\pi/2}$.

36. (*в*) $f(x) = \ln(2e - x),\ x_0 = e$.

37. (*в*) $f(x) = (1/2)\left(e^{x/2} + e^{-x/2}\right),\ x_0 = 2\ln 2$.

38 (*в*) $f(x) = e^{-x}\cos x,\ x_0 = 0$.

Написать уравнения касательных к кривой $y = f(x)$, проходящих через точку:

39. $f(x) = \sqrt{4 - 2x - x^2}$, $M(3;\ 0)$. **40.** $f(x) = x^2 - 4x$, $M(-2;\ 11)$.

Составить уравнения касательных к графику функции $y = f(x)$, параллельных прямой $y = l(x)$:

41. $f(x) = -x^2 - 2x$, $l(x) = 4x + 1$. **42.** $f(x) = x^2 - x + 1$, $l(x) = 3x - 1$.

43. $f(x) = x^3 - 2x^2$, $l(x) = -x + 3$.

44. На графике функции $y = x(x-4)^3$ найти точки, в которых касательная параллельна оси OX.

45. Написать уравнение касательной к графику функции $y = \dfrac{x}{x-1}$, перпендикулярной прямой $y = 4x + 3$.

46. Составить уравнения касательных, проведенных из заданной точки к заданной кривой: а) $M(2;\ -2)$, $y = x^2 + x + 1$; б) $M(2;\ -8)$, $y = \dfrac{2}{x}$; в) $M(-4;\ -3)$, $yx + 4 = 0$.

47. Касательная к графику функции $y = e^x$ проходит через начало координат. Составить уравнение этой касательной.

48. Касательная к графику функции $y = \ln x$ проходит через начало координат. Составить уравнение этой касательной.

49. Составить уравнения касательных, проведенных из точки $M(-5;3)$ к параболе $y = 0.25x^2 + x + 4$. Вычислить площадь треугольника AMB, если A и B - точки касания.

50. Составить уравнение касательных, проведенных из точки $M(5;5)$ к параболе $y=1+2x-0.25x^2$. Вычислить площадь треугольника ABM, если A и B – точки касания.

51. Найти угол между двумя касательными, проведенными из точки $(0;-2)$ к параболе $y=x^2$.

52. Под какими углами парабола $y=x^2+3x+2$ пересекает ось абсцисс?

53. В какой точке кривой $y^2=2x^3$ касательная перпендикулярна прямой $4x-3y+2=0$?

При каких значениях x касательные к графикам функций, проведенные в точках с абсциссой x, параллельны?

54. $y=x^3-x^2-x-4$ и $y=(2/3)x^3+2x$.

55. $y=3\cos 5x$ и $y=5\cos 3x+12$.

56. (*в*) В каких точках касательная к графику функции $f(x)=\ln(\sin x-\cos x)$ параллельна оси Ox?

57. Прямая $y=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{3}{32}$ является касательной к графику $y=\dfrac{1}{2}x^4-x$. Найти координаты точки касания.

58. Доказать, что касательные, проведенные из точки $C(1;-0,25)$ к параболе $y=x^2$, перпендикулярны друг другу.

59. Доказать, что при любом значении a существует касательная к графику $y=x^3-a^2x$, перпендикулярная к прямой $y=-x$.

60. Вычислить площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y=\sqrt{2x^2-4}$ в точке с абсциссой $x=2$.

61. Доказать, что площадь треугольника, ограниченного осями координат и произвольной касательной к графику функции $y=1/x$, равна 2.

62. При каких значениях a какие-либо из касательных, проведенных к графику функции $y=x^3-a^2x$ в точках пересечения этого графика с осью абсцисс, пересекаются под углом $45°$?

63. Составить уравнение параболы $y=x^2+bx+c$, касающейся прямой $y=x$ в точке $M(1;1)$.

64. Вычислить площадь треугольника, образованного касательными, проведенными к графику функции в точках с абсциссами:

а) $y = 2 + 2x - x^2$; $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 6$;

б) $y = x^2 + 2x - 1$; $x_1 = -4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$;

в) $y = x^2 - 2x + 2$; $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 6$.

65. Вычислить площадь треугольника, ограниченного касательными, проведенными к графику функции $y = f(x)$ в точках с заданными абсциссами и прямой, соединяющей эти точки касания:

а) $y = x^2 - 2x + 2$; $x_1 = 1$, $x_2 = 3$;

б) $y = 10 + x - \dfrac{x^2}{2}$; $x_1 = 1$, $x_2 = 3$;

в) $y = 3 + 2x - x^2$; $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

66. Составить уравнение касательной к графику функции $y = (2x-1)e^{2(1-x)}$ в точке ее максимума.

67. Вычислить площадь треугольника, ограниченного осью OX, прямой $x = 4$ и касательной к графику функции $y = x^2 - 2x + 4$ в точке с абсциссой $x_0 = 4$.

68. Вычислить площадь треугольника, ограниченного осью OX, прямой $x = 2$ и касательной к графику функции $y = x^2 + 2x - 2$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$. Сделать чертеж.

69. Вычислить площадь треугольника AMB, если A и B - точки пересечения с осью OX касательных, проведенных к графику функции $y = f(x)$ из точки M, если: а) $f(x) = \dfrac{16 - x^2}{8}$; $M(3, 4)$; б) $f(x) = \dfrac{9 - x^2}{6}$; $M(4; 3)$.

70. Найти все действительные значения параметра a, при которых график функции $y = a + 9x - \dfrac{x^3}{3}$ касается оси абсцисс.

71. При каких значениях параметра a график заданной функции касается заданной прямой?

а) $y = 1 - 2x + ax^2$ и $y = 2x - 3$; б) $y = a(x-2)^2$ и $2x + y = 0$;

в) $y = ax - x^2 - 2$ и $y = x - 1$; г) $y = a(x-1) - x^2$ и $x + y = 1$.

72. При каких значениях параметра p прямая $y+x=p$ является касательной к графику функции $y=x^2+(p-1)x$?

73. Из некоторой точки графика функции $y=\sqrt{x}$ касательная наклонена к оси абсцисс под углом $45°$. Вычислить площадь фигуры, ограниченной этой касательной и прямыми $y=0$, $x=1/4$.

74. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(1;3)$, касающейся графика $y=8\sqrt{x}-7$ и пересекающей в двух различных точках график $y=x^2+4x-1$.

75. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(1/2;2)$, касающейся графика $y=-\dfrac{x^2}{2}+2$ и пересекающей в двух различных точках график $y=\sqrt{4-x^2}$.

76. Вычислить площадь треугольника, отсекаемого от координатных осей касательной к кривой $y=2\sqrt{x-4}-\dfrac{8}{3}$, проведенной параллельно прямой $y=5+\dfrac{1}{3}x$.

77. В точке $M(1;8)$ к кривой $y=\sqrt{\left(5-x^{2/3}\right)^3}$ проведена касательная. Вычислить длину ее отрезка, заключенного между осями координат.

78. Найти точку пересечения касательной к графику функции $y=x^2+3$ в точке с абсциссой $x_0=-1$ и наклонной асимптоты графика функции $y=\dfrac{4x^2+8x+3}{2x+4}$.

79. При каких значениях a и b парабола $y=x^2+ax+b$ касается прямых $y=5x+1$ и $y=-x-2$?

80. При каких p из точки $B(p;-1)$ можно провести три различные касательные к графику функции $y=x^3-3x^2+3$?

Составить уравнения всех общих касательных к параболам:

81. $y=x^2+x-2$ и $y=-x^2+7x-11$.

82. $y=3x^2-5x-2$ и $y=2x^2-x-6$.

Написать уравнения общих касательных к графикам функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$:

83. $f(x)=x^2+2x,$ $g(x)=x^2-4x.$

84. $f(x)=x^2-5x+6,$ $g(x)=x^2+x+1.$

85. $f(x)=1+x-x^2,$ $g(x)=\frac{1}{2}(x^2+3).$

86. $f(x)=x^2+x-1,$ $g(x)=(x-1)(2-x).$

87. При каких значениях параметра p две параболы $y=x^2$ и $y=-x^2+px+p^2-2p-10$ могут иметь только одну общую касательную?

88. Составить уравнение касательной к графику $y=x^2-4x+2$, параллельной прямой $y=2x-11$. Найти расстояние между касательной и данной прямой.

89. Найти такие точки A (на графике функции $y=x^2+2x$) и B (на графике функции $y=2x-3$), расстояние между которыми наименьшее.

90. К графику функции $y=x^3-x^2-13x+4$ проведена касательная в той точке 2-й четверти, где угловой коэффициент равен 3. Найти точки пересечения этой касательной с координатными осями.

91. На графике функции $y=x^3-3x^2-7x+6$ найти все такие точки, что касательная к этому графику в искомых точках отсекает от положительной полуоси Ox вдвое меньший отрезок, чем от отрицательной полуоси Oy. Определить длины отсекаемых отрезков.

(*в*) Написать уравнение касательной к графику данной функции, образующей с осями координат равнобедренный прямоугольный треугольник:

92. $y=e^{2x}-x+3$.

93. $y=2\ln x-x-1$.

94. При каком значении a касательная к графику функции $y=a-x^2$ отсекает от первой четверти равнобедренный прямоугольный треугольник с площадью, равной $9/32$?

95. Найти все такие значения a, при которых касательная к графику функции $y=x^4-ax^2+3x+1$, проведенная в его точке с абсциссой 1, имеет с этим графиком ровно одну общую точку.

96. В каких точках касательная к графику функции $y=\frac{x+2}{x-2}$ образует с осью OX угол $135°$?

97. Какой угол с положительным направлением оси OX составляет касательная к графику функции $f(x)=\frac{3-x}{5+x}+\left(\frac{2}{9}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)x+5$ в точке с абсциссой $x_0=1$?

98. При каком значении параметра a касательные к графику функции $f(x)=x^3-a^2x$, проведенные в точках с абсциссами $x=0$ и $x=a$, перпендикулярны?

99. При каком значении параметра a касательные, проведенные из точки $M(2;\,3)$ к параболе $y=ax^2$, перпендикулярны?

100. На прямой $3x+4y=1$ найти точку, через которую проходят две перпендикулярные друг другу касательные к параболе $y=x^2$.

101. При каких значениях p прямая $y=x+1$ является касательной к графику функции $y=x^2+px+2$?

102. Прямая $y=8x-7$ параллельна касательной к кривой
$y=\frac{3^{x-1}}{\ln 3}+\frac{3^{1-x}}{\ln 3}+3$. Найти координаты точки касания.

103. Какой наименьший угол может составлять касательная к графику функции $y=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$ с положительным направлением оси абсцисс?

104. Составить уравнения двух параллельных касательных соответственно к графикам функций $y=\sin 2x-3x^3$ и $y=\frac{x^3}{3}+2x^2+6x$.

105. Показать, что у астроиды $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$ отрезок касательной, содержащийся между координатными осями, имеет постоянную величину, равную a.

106. Найти общие точки графика функции $y=x^4+4x^3-2x^2-11x+11$ и прямой $y=x+2$. В каких из них прямая является касательной к графику?

107. Составить уравнения всех тех касательных к графику функции $y=\sqrt{1-2x^2}$, каждая из которых вместе с осями координат ограничивает треугольник площадью $1/\sqrt{2}$.

108. Определить, под какими углами пересекаются графики функций:

а) $y=x^3-x$ и $y=x+4$; б) $y=x^3-x$ и $y=x^2-10$;

в) $y=\sin x$ и $y=\cos x$.

109. Составить уравнения двух параллельных друг другу касательных к гиперболе $y=1/x$, удаленных друг от друга на расстояние 1.

110. На прямой $y=2x-1$ найти все такие точки, что через каждую из них проходят ровно две касательные к графику функции $y=x^2$, а угол между этими касательными равен $\pi/4$.

111. Существует ли касательная к графику функции $y=x^2-x-|x|$, имеющая с ним ровно две общие точки? Если да, то напишите ее уравнение.

112. Написать уравнение прямой, касающейся графика функции $y=x^2-2|x-1|$ в двух точках.

113. Есть ли среди общих точек графиков функций $y=x^3-5x^2$ и $y=3-7x$ точки касания? Если да, указать их.

114. Является ли прямая $y=3x-2$ касательной к кубической параболе $y=x^3$ в какой-либо точке? Если да, то в какой?

115. Известно, что прямая $y=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{3}{32}$ является касательной к линии, заданной уравнением $y=0,5x^4-x$. Найти координаты точки касания.

116. Найти все отрицательные значения a, для каждого из которых касательные к параболе $y=(x-1)^2$, проведенные через точку оси Oy с ординатой a, высекают на оси Ox отрезок длиной 4.

117. Указать координаты всех точек оси Oy, имеющих положительные ординаты и обладающие тем свойством, что касательные, проведенные через каждую из таких точек к графику функции $y=-1/(x+1)$, высекают на оси абсцисс отрезок длины $3/2$.

118. В декартовой прямоугольной системе координат на плоскости заданы две параболы: $y = x^2 - 2x$; $y = -2x^2 + 18x - 41$. Найти минимальное значение расстояния между двумя точками, одна из которых принадлежит первой параболе, а другая – второй параболе.

119. (*в*) При каких значениях k кривые $f_1(x) = 2x^2$ и $f_2(x) = k\ln x$ имеют одну общую точку?

120. Найти все значения параметров a, b, c, таких, что существует прямая, касающаяся графика непрерывной функции

$$y = \begin{cases} x^2 + 10x + 8; & x \le -2, \\ ax^2 + bx + c; & -2 < x < 0, \\ x^2 + 2x; & x \ge 0 \end{cases}$$ ровно в трех точках.

Ответы:

29. $y = 1 - x$. **30.** $y = \frac{1}{2}x + 1$. **31.** $y = \pi(x - 2)$. **32.** а) $y = 1$; б) $y = \sqrt{2} - x$. **33.** $y = -2x$; $y = 2x - 4$. **34.** Касательная $y = 2x - 2\pi$; нормаль $y = -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}$. **35.** Касательная $y = -\sqrt{2\pi}x + \pi$; нормаль $y = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{2}$.

36. Касательная $y = -\frac{x}{e} + 2$; нормаль $y = xe + 1 - e^2$. **37.** Касательная $y = \frac{3x}{8} + \frac{5 - 3\ln 2}{4}$; нормаль $y = -\frac{8x}{3} + \frac{5}{4} + \frac{16\ln 2}{3}$. **38.** Касательная $y = 1 - x$; нормаль $y = x + 1$. **39.** $y = -\sqrt{5/11}(x - 3)$. **40.** $y = -6x - 1$; $y = -10x - 9$. **41.** $y = 4x + 2$. **42.** $y = 3x - 2$. **43.** $y = -x$; $y = -x + \frac{4}{27}$.

44. $A(1; -27)$; $B(4; 0)$. **45.** $y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$, $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$. **46.** а) $y = 11x - 24$; $y = -x$; б) $y = -2x - 4$; $y = -8x + 8$; в) $y = \frac{x}{4} - 2$; $y = \frac{9}{4}x + 6$. **47.** $y = ex$.

48. $y = \frac{x}{e}$. **49.** $y = 3$; $y = -3x - 12$; $S_{\Delta ABM} = 13{,}5$. **50.** $y = -x + 10$; $y = 5$; $S_{\Delta ABM} = 0.5$ (кв.ед.). **51.** $\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt{2}}{7}$. **52.** $45°$; $135°$. **53.** $\left(\frac{1}{8}; -\frac{1}{16}\right)$.

54. $x \in \{-1; 3\}$. **55.** $x \in \left\{\pi n; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{4} \mid n, m \in Z\right\}$.

56. $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$. **57.** $\left(\frac{1}{2};-\frac{15}{32}\right)$. **60.** $S=1$. **62.** $a=\pm\frac{\sqrt{\sqrt{17}\pm3}}{2}$.

63. $b=-1;\ c=1$. **64.** а) 32 кв.ед.; б) 32 кв.ед.; в) 32 кв.ед. **65.** а) 2 кв.ед.; б) 1 кв.ед.; в) 2 кв.ед.. **67.** 12 кв.ед.. **68.** 3 кв.ед. **69.** а) 31, 25; б) $41\frac{2}{3}$.

70. $a=\pm18$. **71.** а) $a=1$; б) $a=1/4$; в) $a\in\{3;-1\}$. **72.** $p\in\{0;-4\}$.

73. $S=\frac{9\sqrt{2}}{64}$. **74.** $y=2x+1$. **75.** $y=-x+2{,}5$. **76.** $S=1{,}5$. **77.** $5\sqrt{5}$.

78. $\left(\frac{1}{2};1\right)$. **79.** $a=3;b=2$. **80.** $p\in(-\infty;-1)\cup\left(\frac{5}{3};2\right)\cup(2;\infty)$. **81.** $y=x-2$; $y=7x-11$. **82.** $y=7x-14$. **83.** $y=-x-\frac{9}{4}$. **84.** $y=\frac{5-3x}{9}$.

85. $y=\frac{13-3x}{9}$; $y=x+1$. **86.** $y=x-1$; $y=3x-2$. **87.** $p\in\left\{-\frac{20}{9};\frac{36}{9}\right\}$.

88. $y=2x-7$; $\rho=\frac{4}{\sqrt{5}}$. **89.** $A(0;0);B\left(\frac{6}{5};-\frac{3}{5}\right)$. **90.** $(0;24);(-8;0)$.

91. $y=2x-21$; $l_x=10{,}5$; $l_y=21$. **92.** $y=x+4$. **93.** $y=x-3$. **94.** $a=1/2$.

95. $a<2$. **96.** $A(0;-1)$; $B(4;3)$. **97.** 150°. **98.** $a\in\left\{\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right\}$. **99.** $a=-\frac{1}{12}$.

100. $M\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{4}\right)$. **101.** $p\in\{-1;3\}$. **102.** $M\left(1;\frac{10}{\ln 3}+3\right)$. **103.** $\mathrm{arctg}\,4$.

104. $y=2x$; $y=2x-\frac{32}{3}$. **106.** Общие точки $(1;3)$, $(-3;-1)$ являются точками касания. **107.** $y=x\sqrt{2}+\sqrt{2}$; $y=-x\sqrt{2}+\sqrt{2}$. **108.** а) $\mathrm{arctg}\frac{5}{6}$; б) $\mathrm{arctg}\frac{15}{43}$; в) $\mathrm{arctg}2\sqrt{2}$. **109.** $y=\sqrt{63}-8\pm2\sqrt{8-\sqrt{63}}$ или $y=-\sqrt{63}-8\pm2\sqrt{8+\sqrt{63}}$.

110. $\left(-\frac{1}{4};-\frac{3}{2}\right);\left(\frac{7}{12};\frac{1}{6}\right)$. **111.** Да. $y=-x-\frac{1}{4}$. **112.** $y=2x-2$.

113. $A(1;-4)$. **114.** $B(1;1)$. **115.** $A\left(\frac{1}{2};-\frac{15}{32}\right)$. **116.** $a=-15$. **117.** $(0;8)$.

118. $\rho=\sqrt{5}$. **119.** $k\in(-\infty;0)\cup\{4e\}$. **120.** $(1;6;0)$.

18. ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНОЙ. МОНОТОННОСТЬ. ЭКСТРЕМУМ. ВЫПУКЛОСТЬ. ПЕРЕГИБ

Теорема: *Если функция $f(x)$ во всех точках некоторого интервала имеет неотрицательную производную $(f'(x) \geq 0)$, то она возрастает на этом интервале, а если производная неположительна, то функция убывает. Причем $f'(x)$ обращается в ноль лишь в конечном числе точек.*

Пример 1. Доказать, что функция $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ возрастает при всех $x \in R$.

Решение. Данная функция определена и имеет производную при всех действительных x $(x \in R)$. А именно

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = (x-1)^2.$$

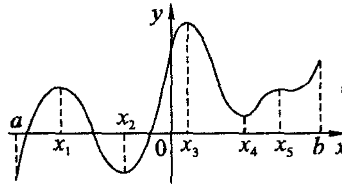
Очевидно, что при любом значении x выполняется неравенство $f'(x) \geq 0$, причем $f'(x) = 0$ лишь в одной точке (при $x = 1$). Следовательно, данная функция $f(x)$ возрастает при любых $x \in R$, что и требовалось доказать.

Промежутки, на которых функция возрастает или убывает, называются ее *промежутками монотонности*.

Точка x_0 называется *точкой минимума* функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что функция $f(x)$ определена в этой окрестности точки x_0, и для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности $f(x) > f(x_0)$. Проще говоря, если и слева и справа от точки x_0 значения функции больше, чем значение функции с самой точке x_0, то такая точка x_0 будет точкой минимума. Если же $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности, то точка x_0 называется *точкой максимума* функции $f(x)$. Следует отметить, что экстремум – понятие локальное (местное), то есть в принципе достаточно, чтобы слева и справа от точки x_0 было *по одной* точке, в которых значения функции меньше (или больше), чем значение функции в самой точке x_0, чтобы такая точка x_0 являлась точкой максимума (или минимума).

Точки минимума и максимума функции называются ее *точками экстремума*, а значение функции в этих точках – *экстремумами* данной функции.

Для функции, график которой представлен на рисунке, точки x_1 и x_3 являются точками максимума, а точки x_2 и x_4 – точками минимума. Точки a и b не являются точками экстремума этой функции, так как у них нет окрестностей, целиком входящих в область определения функции. Точка x_5 также не является точкой экстремума, поскольку слева от нее значения функции меньше $f(x_5)$, а справа – больше $f(x_5)$.



Промежуток $[x_1;x_2]$ является промежутком монотонности функции, а именно промежутком ее убывания, так же, как и промежуток $[x_3;x_4]$. Промежутки $[a;x_1]$; $[x_2;x_3]$; $[x_4;b]$ - промежутки возрастания функции.

На промежутках возрастания функции ее производная больше нуля, на промежутках убывания – меньше нуля, в точках экстремума и точке x_5 – равна нулю, т.е. в этих точках касательная к графику функции становится горизонтальной (угол наклона равен нулю). В точках экстремума дифференцируемой функции производная обязательно равна нулю – возникает *необходимое условие* существования экстремума.

Теорема Ферма: *Если точка x_0 является точкой экстремума дифференцируемой функции $f(x)$, то $f'(x_0)=0$.*

Следует обратить особое внимание на то, что это условие *необходимое*, но не *достаточное*, что не каждая точка, в которой производная дифференцируемой функции равна нулю, будет являться точкой экстремума. Например, для рассматриваемой функции (см. рис.) в точке x_5 производная обращается в ноль, но в этой точке функция не имеет экстремума: она возрастает на промежутке $(x_4;b)$. Аналогично, функция $f(x)=x^3$ имеет производную $f'(x)=3x^2$, которая обращается в ноль при $x=0$, но в этой точке функция не имеет экстремума: она возрастает на всей числовой оси, так как $3x^2 \geq 0$ при $x \in R$.

Если расширить класс рассматриваемых функций $f(x)$ и допустить, что в отдельных точках производная не существует, то, возможно, экстремум придется на какую-либо из таких точек. Например, функция $y=x^{2/3}$, очевидно, имеет минимум при $x=0$, в то время как ее производная в точке $y' = \frac{2}{3x^{1/3}}$ не существует. Однако одно лишь отсутствие производной не гарантирует наличия экстремума. Примером может служить функция $y = x^{1/3}$. Ее производная $y' = \frac{1}{3x^{2/3}}$ не существует в точке с абсциссой $x = 0$, но $x = 0$ не является точкой экстремума этой функции.

Из сказанного следует, что точки экстремума функции следует искать среди точек, в которых ее производная равна нулю или не существует. Такие точки называются *критическими точками* функции.

При исследовании функции на экстремум пользуются следующими *достаточными* условиями для точек максимума и минимума:

1. Точка x_0 является точкой максимума функции $f(x)$, если у точки x_0 существует такая окрестность, что в ней функция $f(x)$ непрерывна, $f'(x) > 0$ для $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ для $x > x_0$. Другими словами, если слева от точки x_0 функция возрастает, а справа от нее – убывает, то в точке x_0 функция имеет максимум.

2. Если же $f'(x) < 0$ для $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ для $x > x_0$, т.е., если слева функция убывает, а справа от точки x_0 возрастает, то x_0 – точка минимума.

Попробуйте по данному графику производной восстановить (конечно, с точностью до сдвига вверх-вниз) график функции:

1. 

2. 

3. Доказать, что функция а) $y = 2x + \sin x$; б) $y = x + \sin x$ возрастает на всей числовой оси.

4. Доказать, что функция $y = 0,2x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 5x$ возрастает на R.

5. Доказать, что функция $y = -0,2x^5 + 0,5x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$ убывает на R.

6. Найти переcсечение промежутка возрастания функции $f(x)=\dfrac{1+x}{\sqrt{x}}$ и области определения функции $g(x)=\dfrac{1}{\lg x-\lg(4-x)}$.

7. Доказать, что функция $y=x+\dfrac{1}{x^2+1}$ возрастает на всей числовой оси.

Найти промежутки убывания функций:

8. $f(x)=\sin 2x-x+5$.

9. $f(x)=\cos 2x+x-2$.

10. $f(x)=\operatorname{tg} x\cdot\sin x+2\cos x$.

11. $f(x)=\dfrac{3^{2x}}{2\ln 3}-\dfrac{9\cdot 3^x}{\ln 3}+14x-5$.

12. $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}^2 x+2\log_{\frac{1}{2}} x+60$.

Найти промежутки возрастания функций:

13. $f(x)=\sin^3 x+7$.

14. $f(x)=-\dfrac{1}{2}\cos 2x-\sin x+3$.

15. $f(x)=\dfrac{0,5^{2x}}{2\ln 0,5}-\dfrac{4\cdot 0,5^x}{\ln 0,5}+3x-2$.

16. $f(x)=\dfrac{3}{2}\lg^2 x+\lg^3 x$.

Найти промежутки монотонности, критические точки, точки экстремума и экстремумы следующих функций:

17. $y=\sqrt{x^4-4x^2}$.

18. $y=\sqrt{2x^3-15x^2+36x}$.

19. $y=\dfrac{1}{(x-2)^2(x-3)^2}$.

20. $y=2^{3x^5-10x^3+2}$.

21. $y=\sin\dfrac{1}{|x|^3-3x^2+5}$.

22. $y=-\sqrt{3}\cos x-\sin x$.

23. $y=\operatorname{tg} x\cdot\sin 2x$.

24. $y=\log_{0,7} x-\dfrac{x}{\ln 0,7}$.

25. $y=\begin{cases} x^2-4x, & x\ge 0,\\ x+\dfrac{1}{x}, & x<0.\end{cases}$

26. $y=\begin{cases} 1-\sqrt[3]{(x-1)^2}, & x\le 2,\\ x\sqrt[3]{1-x}+2, & x>2.\end{cases}$

27. $y=\begin{cases} x+2\sqrt{5-x}, & x\le 5,\\ 3x-x^3, & x>5.\end{cases}$

28. $y=\begin{cases} x-\dfrac{1}{2x^2}, & x\le 1,\ x\ne 0,\\ x^5-5x, & x>1.\end{cases}$

Найти все значения параметра, при которых выполняются заданные условия:

29. Функция $y=\frac{1}{3}x^3-ax+5$ возрастает на $\mathbb{R}$.

30. Функция $y=\frac{-x^3}{3}+\frac{mx^2}{2}-x+3$ убывает на $\mathbb{R}$.

31. Функция $y=x+\frac{a}{x}$ не имеет экстремумов.

32. Функция $y=x^3-ax^2+(3a-3)x+2$ возрастает на $[4;+\infty)$.

33. Функция $y=x^3-ax^2+(6a-1)x+3$ убывает на $[1;2]$.

34. Функция $y=x^3-ax^2+(2a-3)x+2$ возрастает на $[-2;-1]$.

35. Функция $y=x+\frac{a}{x}$ возрастает на $(2;+\infty)$.

36. Функция $y=(x-a)^2(x-2a+4)^3$ возрастает на $(0;1)$.

37. Функция $y=\begin{cases} x^3+3x-3, & x\le 1,\\ 2x+\frac{a}{x^2}, & 1<x<3,\\ 2x+a, & x\ge 3\end{cases}$ возрастает на $\mathbb{R}$.

38. Функция не имеет экстремумов:

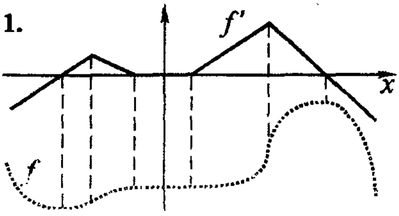
а) $y=a\cdot 8^x-\frac{5}{2}\cdot 4^x+\frac{15}{8}(a-1)\cdot 2^x+3$;

б) $y=a\cdot 8^x-(3a-2)\cdot 4^x-3(3a-2)\cdot 2^x-1$;

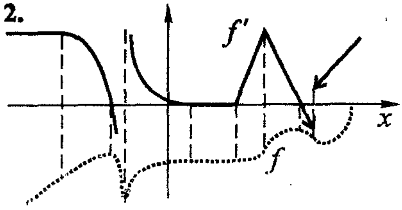
в) $y=(a^2-3a+2)\left(\cos^2\frac{x}{4}-\sin^2\frac{x}{4}\right)+(a-1)x+\sin 1$.

Ответы:

1.



2.



6. $[1;\,2)\cup(2;\,4)$. **8.** $\left[\frac{\pi}{6}+\pi k;\,\frac{5\pi}{6}+\pi k\right]$, $k\in\mathbb{Z}$. **9.** $\left[-\frac{7\pi}{12}+\pi k;\,\frac{\pi}{12}+\pi k\right]$, $k\in\mathbb{Z}$. **10.** $\left[-\pi+2\pi k;\,-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\,2\pi n\right]$, $n,\,k\in\mathbb{Z}$.

11 $[\log_3 2;\,\log_3 7]$. **12.** $(0;\,2]$. **13.** $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\,\frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$

14. $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi k;\,\frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, $\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\,\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n,\,k\in\mathbb{Z}$. **15.** $\left(-\infty;\,\log_{\frac{1}{2}}3\right]$, $[0;\,+\infty)$. **16.** $(0;\,1/10]$, $[1;\,+\infty)$. **17.** Функция возрастает на $\left[\sqrt[3]{4};\,+\infty\right)$ и убывает на $(-\infty;\,0]$. **18.** Функция возрастает на $[0;\,2]$ и $[3;\,+\infty)$, убывает на $[2;\,3]$. **19.** На $(-\infty;\,2)$ и $[2,5;\,3)$ возрастает, на $(2;\,2,5]$ и $(3;\,+\infty)$ убывает. **20.** На $\left(-\infty;\,-\sqrt{2}\right]$ и $\left[\sqrt{2};\,+\infty\right)$ возрастает, на $\left[-\sqrt{2};\,\sqrt{2}\right]$ убывает. **21.** На $(-\infty;\,-2]$ и $[0;\,2]$ возрастает, на $[-2;\,0]$ и $[2;\,+\infty)$ убывает.

22. Возрастает на каждом из промежутков $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi k;\,\frac{7\pi}{6}+2\pi k\right]$, $k\in\mathbb{Z}$, убывает на каждом из промежутков $\left[-\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\,\frac{13\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$.

23. Возрастает на каждом из промежутков вида $\left[\pi k;\,\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$, убывает на каждом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\,\pi k\right]$, $k\in\mathbb{Z}$. **24.** Возрастает на $(0;\,1]$, убывает на $[1;\,+\infty)$. **25.** Возрастает на $(-\infty;\,-1]$ и $[2;\,+\infty)$, убывает на $[-1;\,0)$ и $(0;\,2]$. **26.** Возрастает на $(-\infty;\,1]$, убывает на $[1;\,+\infty)$. **27.** Возрастает на $(-\infty;\,4]$ убывает на $[4;\,+\infty)$. **28.** Возрастает на $(-\infty;\,-1]$, $(0;\,1)$ и на $(1;\,+\infty)$, убывает на $[-1;\,0)$. **29.** $a\in(-\infty;\,0]$. **30.** $m\in[-2;\,2]$. **31.** $a\in(-\infty;\,0]$. **32.** $(-\infty;\,9]$. **33.** $(-\infty;\,-11/2]$. **34.** $[0;\,+\infty)$. **35.** $(-\infty;\,4]$.

36. $(-\infty;\,0]\cup\left[1\frac{6}{7};\,+\infty\right)$. **37.** $[0;\,1]$. **38.** а) $(-\infty;\,0]\cup\left[\frac{5}{3};\,+\infty\right)$; б) $\left[0;\,\frac{2}{3}\right]$; в) $(0;\,1)\cup(1;\,4)$.

19. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА

Пример. Исследовать на экстремум функцию $f(x) = x + \dfrac{1}{x-1}$ и построить ее график.

Решение. 1) Область определения функции $D(x) \in (-\infty; 1) \bigcup (1; +\infty)$.

2) Производная $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

3) Производная определена на всей области определения функции, т.е, при всех $x \in R$, кроме $x = 1$.

При этом $f'(x) = 0$ при $x = 0$ и $x = 2$; $f'(x)$ не существует при $x = 1$.

4) Рассмотрим точку $x = 1$. В этой точке не существует и сама функция $f(x)$, следовательно, точка $x = 1$ не является точкой экстремума, а является точкой разрыва. В этой точке функция имеет вертикальную асимптоту $x = 1$.

5) Рассмотрим точки $x = 0$ и $x = 2$. Выяснить знаки производной $f'(x)$ удобнее всего, решая неравенство $f'(x) < 0$: $1 - \dfrac{1}{(x-1)^2} < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2} < 0$. Решаем методом интервалов:

На интервале $x \in (0; 1) \bigcup (1; 2)$ функция убывает. Чтобы выяснить интервалы возрастания функции, не обязательно решать неравенство $f'(x) > 0$, ведь решая предыдущее неравенство методом интервалов, мы их уже определили на числовой оси: $x \in (-\infty; 0) \bigcup (2; +\infty)$. Результаты такого исследования знаков производной в области определения функции удобно представить в виде таблицы, добавив туда, для полноты картины, значения функции в точках экстремума и сделав выводы о поведении графика функции на обозначенных интервалах.

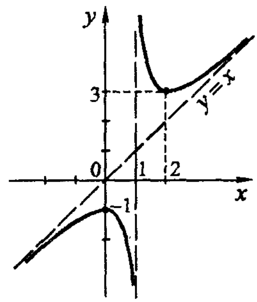
Таблица

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	Не сущ.	–	0	+
$f(x)$	$\uparrow$	–1	$\downarrow$	Не сущ.	$\downarrow$	3	$\uparrow$
$f(x)$	возрастает	max	убывает	Не сущ.	убывает	min	возрастает

6) Найдем точки пересечения графика функции с осями координат:

$$f(x)=0 \Rightarrow x+\frac{1}{x-1}=0 \Rightarrow x\in\varnothing.$$

7) Полученной информации достаточно для построения графика функции, но можно заметить, что при $x\to\pm\infty$ дробь $\frac{1}{x-1}\to 0$, следовательно, при очень больших положительных $x\to+\infty$ и очень больших (по модулю) отрицательных $x\to-\infty$ значениях аргумента график данной функции стремится к прямой $y=x$, которая называется в такой ситуации *наклонной асимптотой.*



8) Построим график данной функции.

Ответ: $f(x)_{\min}=f(2)=3$,

$f(x)_{\max}=f(0)=-1$.

Заметим, что эти значения не являются наибольшими и наименьшими значениями функции.

Провести полное исследование функции с построением эскиза графика:

1. $y=3+2x+4x^4$. **2.** $y=\frac{x+2}{x^3}$. **3.** $y=\frac{x}{(x-1)^2}$.

4. $y=\frac{x^3}{x^2+1}$. **5.** $y=(x-4)^2x^2$. **6.** $y=\frac{16}{x(4-x^2)}$.

7. $y=\frac{x^4}{1-x^3}$. **8.** $y=\frac{1-x^3}{x^4}$. **9.** $y=\frac{x^2-5}{x-3}$.

10. $y=\frac{x^3-2}{x^2}$. **11.** $y=\frac{x^2+1}{4-x^2}$. **12.** $y=\frac{(x+2)^3}{x^2}$.

13. $y=2x^2-\sqrt{x}$. **14.** $y=\sqrt{x^2+6x+8}$ **15.** $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$.

16. $y=\frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$. **17.** $y=\frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}}$. **18.** $y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}$

19. $y=\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+1}}$. **20.** $y=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$. **21.** $y=x-1-\frac{10}{x+2}$.

22. $y=\dfrac{\sqrt{x^2-2x-3}}{x-1}+2$

23. $y=x^2\sqrt{x+1}$.

24. $y=\sqrt{1-x}-\sqrt{x+2}$.

25. $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x+2}$.

26. $y=\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x-2)^2}$.

27. $y=\cos x-\dfrac{1}{2}\cos 2x$.

28. $y=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$.

29. $y=2x-\mathrm{tg}x$.

30.(в) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=chx$.

31.(в) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=shx$.

32.(в) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=thx$.

33. (в) $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

34. (в) $y=x\ln x$.

35. (в) $y=\dfrac{e^x}{x}$.

36. (в) $y=x^2e^{-x}$.

37. (в) $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

38. (в) $y=x^2\ln x$.

39. (в) $y=x\ln^2 x$.

40. (в) $y=(x+1)e^{2x}$.

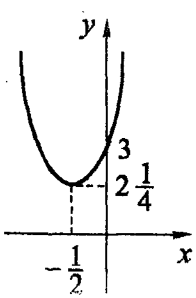
41. (в) $y=\dfrac{x}{\ln^2 x}$.

42. (в) $y=\dfrac{\ln x+1}{x}$.

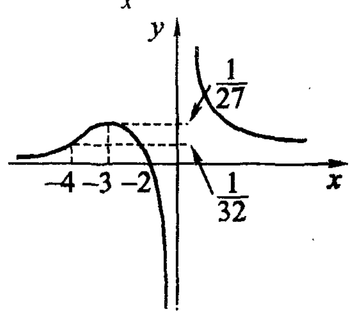
43. (в) $y=e^x\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

Ответы:

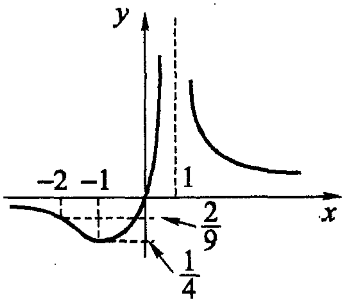
1. $y'=2(1+8x^3)$;
$y''=48x^2$.



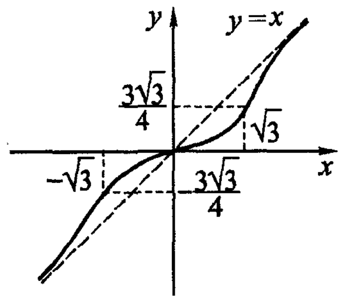
2. $y'=\dfrac{-2(x+3)}{x^4}$;
$y''=\dfrac{6(x+4)}{x^5}$.



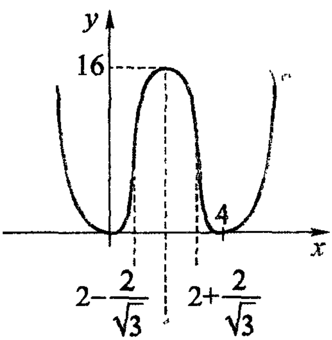
3. $y' = \dfrac{-(x+1)}{(x-1)^3}$; $y'' = \dfrac{2(x+2)}{(x-1)^4}$.



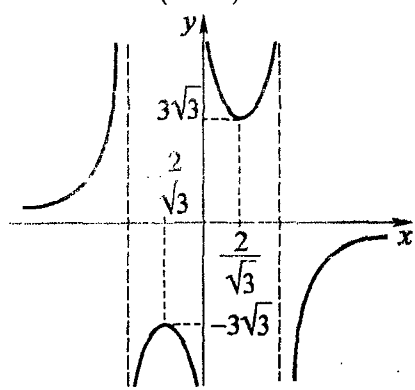
4. $y' = \dfrac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$; $y'' = \dfrac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$



5. $y' = 4x(x-2)(x-4)$;
$y'' = 4(3x^2 - 12x + 8)$.

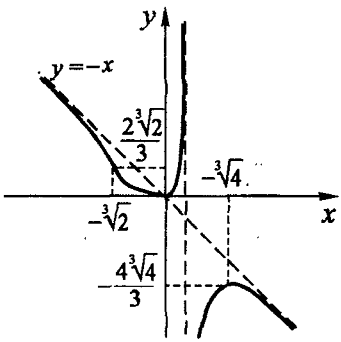


6. $y' = \dfrac{16(3x^2-4)}{x^2(x^2-4)^2}$;
$y'' = \dfrac{-64(3x^4-6x^2+8)}{x^3(x^2-4)^3}$.



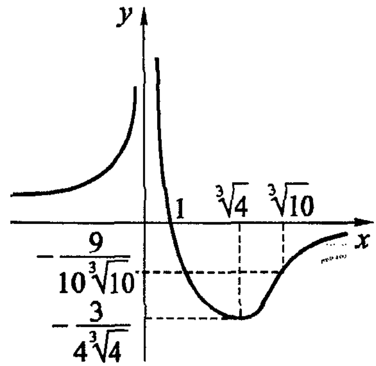
7. $y' = \dfrac{x^3\left(4-x^3\right)}{\left(x^3-1\right)^2}$;

$y'' = \dfrac{-6x^2\left(x^3+2\right)}{\left(x^3-1\right)^3}$.



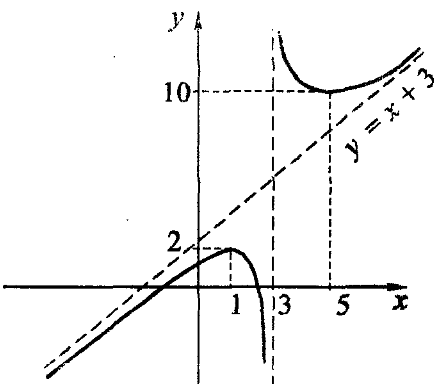
8. $y' = \dfrac{x^3-4}{x^5}$;

$y'' = \dfrac{2\left(10-x^3\right)}{x^6}$.



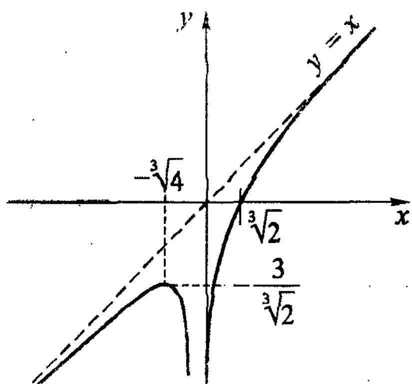
9. $y' = \dfrac{x^2-6x+5}{(x-3)^3}$;

$y'' = \dfrac{8}{(x-3)^3}$.



10. $y' = 1+\dfrac{4}{x^3}$;

$y'' = -\dfrac{12}{x^4}$.

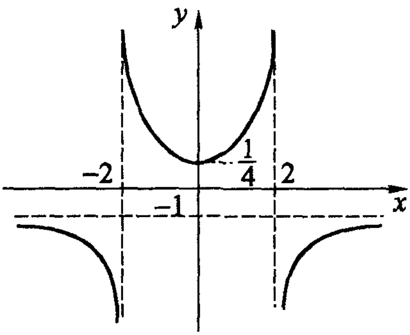


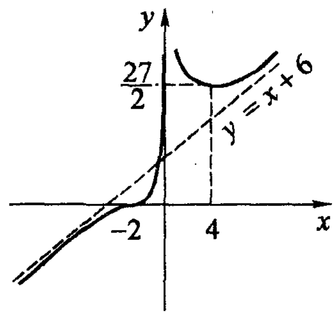
11. $y' = \dfrac{10x}{\left(x^2-4\right)^2}$;

$y'' = -10\dfrac{3x^2+4}{\left(x^2-4\right)^3}$.

12. $y' = \dfrac{(x+2)^2(x-4)}{x^3}$;

$y'' = \dfrac{24(x+2)}{x^4}$.



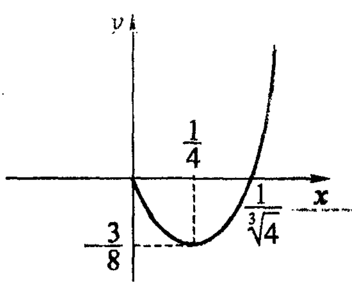


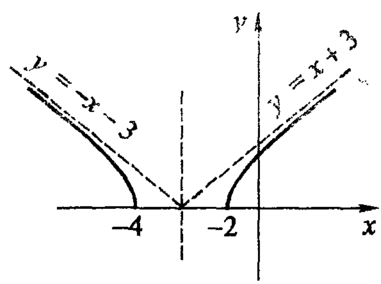
13. $y' = 4x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

$y'' = 4 + \dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$.

14. $y' = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+8}}$;

$y'' = \dfrac{-1}{\left(x^2+6x+8\right)\sqrt{x^2+6x+8}}$.

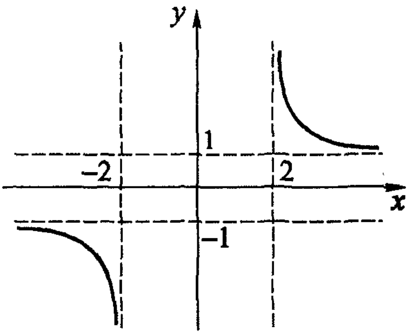




15.

$$y' = \frac{-4}{\left(x^2-4\right)\sqrt{x^2-4}};$$

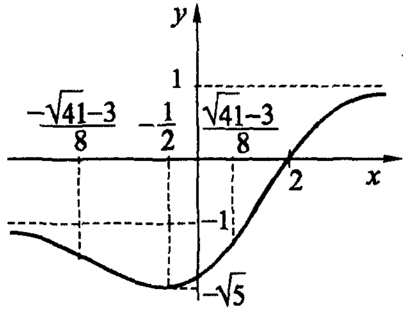
$$y'' = \frac{12x}{\left(x^2-4\right)^2\sqrt{x^2-4}}.$$



16.

$$y' = \frac{2x+1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}};$$

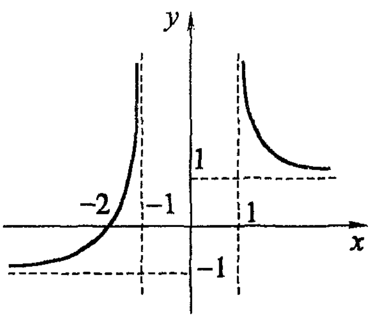
$$y'' = \frac{-4x^2-3x+2}{\left(x^2+1\right)^2\sqrt{x^2+1}}.$$



17.

$$y' = \frac{-2x-1}{\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-1}};$$

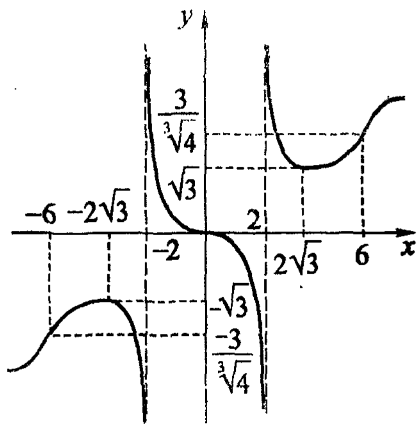
$$y'' = \frac{4x^2+3x+2}{\left(x^2-1\right)^2\sqrt{x^2-1}}.$$



18.

$$y' = \frac{x^2-12}{3\left(x^2-4\right)\sqrt[3]{x^2-4}};$$

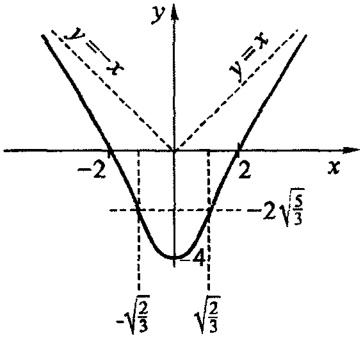
$$y'' = \frac{2x\left(36-x^2\right)}{9\left(x^2-4\right)^2\sqrt[3]{x^2-4}}.$$



19.

$$y' = \frac{x\left(x^2+6\right)}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}};$$

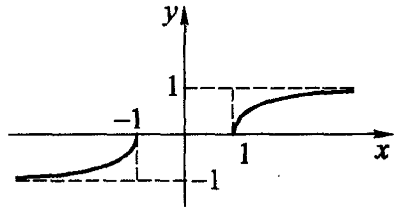
$$y'' = \frac{3\left(2-3x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2\sqrt{x^2+1}}.$$



20.

$$y' = \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}};$$

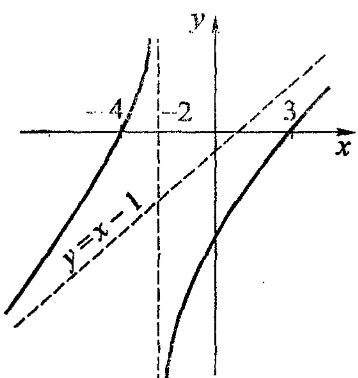
$$y'' = \frac{2-3x^2}{x^3\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-1}}.$$



21.

$$y' = 1+\frac{10}{(x+2)^2};$$

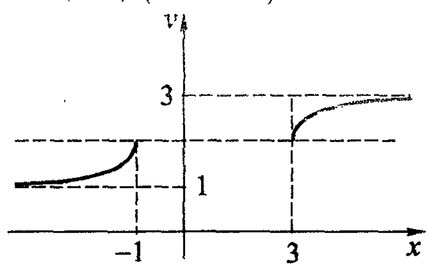
$$y'' = \frac{-20}{(x+2)^3}$$



22.

$$y' = \frac{4}{(x-1)^2\sqrt{x^2-2x-3}};$$

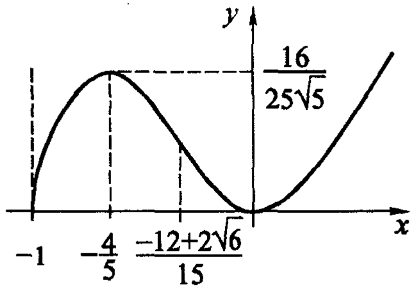
$$y'' = \frac{-4\left(3x^2-6x-5\right)}{(x-1)^3\left(x^2-2x-3\right)\sqrt{x^2-2x-3}}.$$



Замечание: $y-2 = \dfrac{\sqrt{(x-1)^2-4}}{x-1}$.

23. $y' = \dfrac{x(5x+4)}{2\sqrt{x+1}}$;

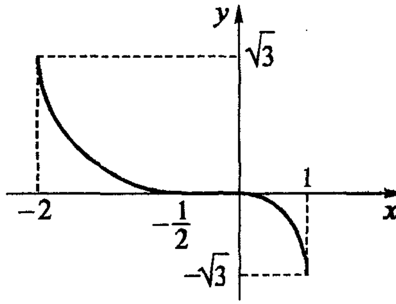
$y'' = \dfrac{15x^2+24x+8}{4(x+1)\sqrt{x+1}}$.



24.

$y' = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}\right)$;

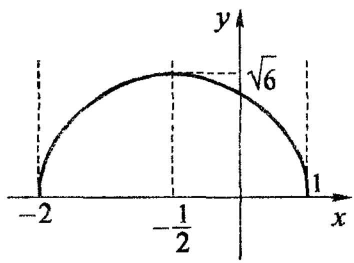
$y'' = -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x}} - \dfrac{1}{(x+2)\sqrt{x+2}}\right)$.



25.

$y' = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}\right)$;

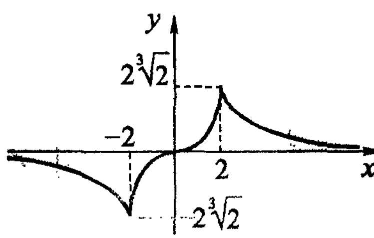
$y'' = -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x}} + \dfrac{1}{(x+2)\sqrt{x+2}}\right)$.



26.

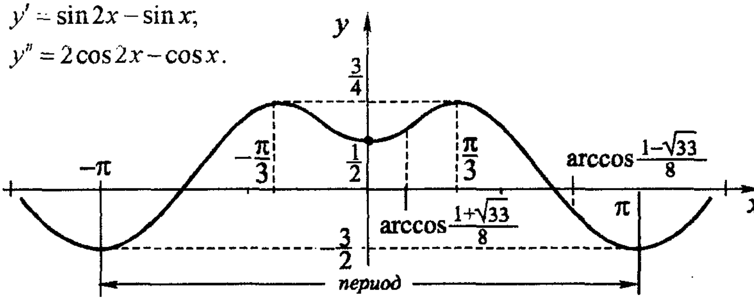
$y' = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+2}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-2}}\right)$;

$y'' = \dfrac{2}{9}\left(\dfrac{1}{(x-2)\sqrt[3]{x-2}} - \dfrac{1}{(x+2)\sqrt[3]{x+2}}\right)$.



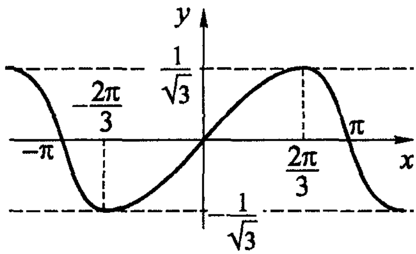
27. $y' = \sin 2x - \sin x;$

$y'' = 2\cos 2x - \cos x.$



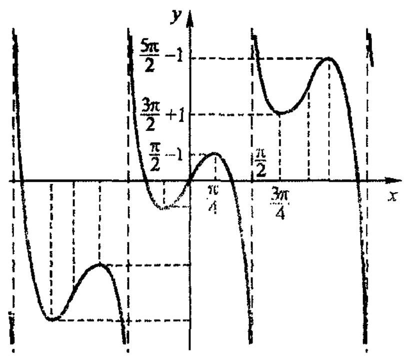
28. $y' = \dfrac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2};$

$y'' = \dfrac{2\sin x(\cos x - 1)}{(2+\cos x)^3}.$



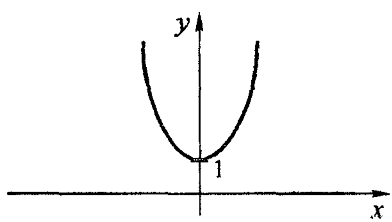
29. $y' = \dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x};$

$y'' = \dfrac{-\sin 2x}{\cos^4 x}.$



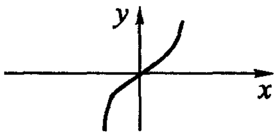
30. (*в*) $y' = shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2};$

$y'' = chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}.$



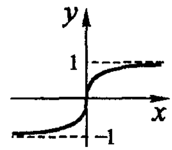
31. (*в*) $y' = chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$;

$y'' = shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.



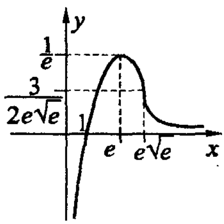
32. (*в*) $y' = \dfrac{4}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} = \dfrac{1}{ch^2 x}$;

$y'' = \dfrac{8\left(e^{-x} - e^x\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)^3} = \dfrac{-2shx}{ch^3 x}$.



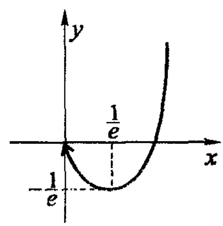
33. (*в*) $y' = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$;

$y'' = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$.



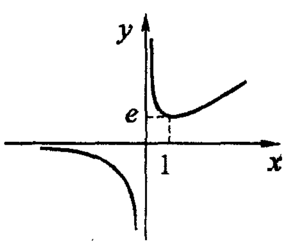
34. (*в*) $y' = \ln x + 1$;

$y'' = \dfrac{1}{x}$.



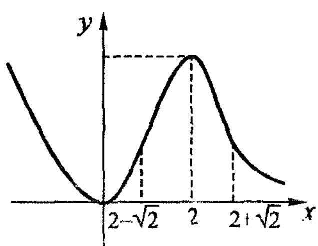
35. (*в*) $y' = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$;

$y'' = \dfrac{e^x\left(x^2 - 2x + 2\right)}{x^3}$.



36. (*в*) $y' = xe^{-x}(2 - x)$;

$y'' = e^{-x}\left(x^2 - 4x + 2\right)$.

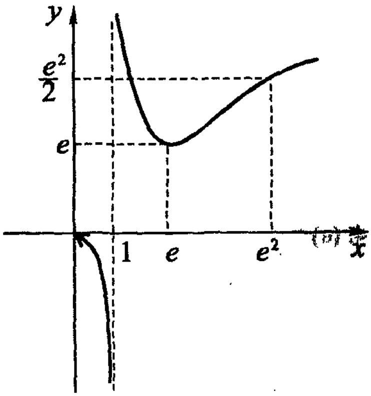


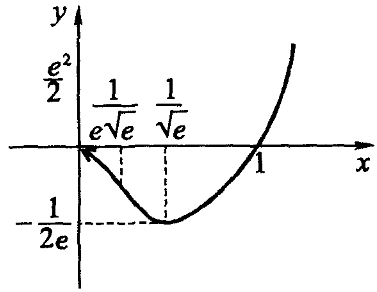
37. (*в*) $y' = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$;

$y'' = \dfrac{2 - \ln x}{x \ln^3 x}$.

38. (*в*) $y' = x(2\ln x + 1)$;

$y'' = 2\ln x + 3$.



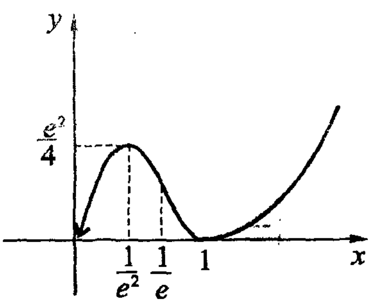


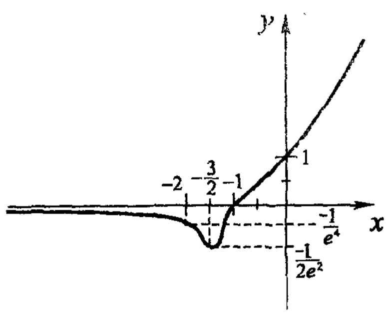
39. (*в*) $y' = \ln x(\ln x + 2)$;

$y'' = \dfrac{2(\ln x + 1)}{x}$.

40. (*в*) $y' = (2x + 3)e^{2x}$;

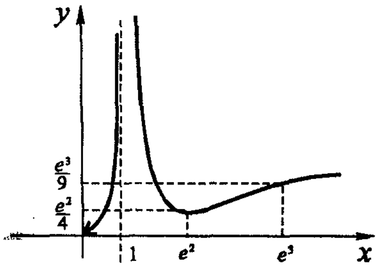
$y'' = 4e^{2x}(x + 2)$.





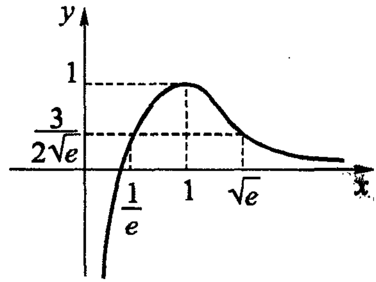
41. (*в*) $y' = \dfrac{\ln x - 2}{\ln^3 x}$;

$y'' = \dfrac{2(3 - \ln x)}{x \ln^4 x}$.



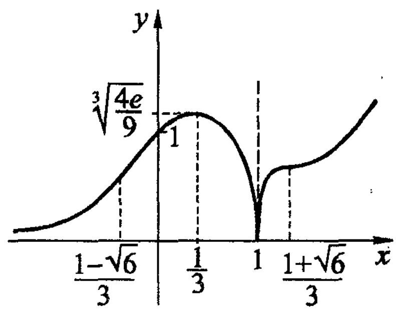
42. (*в*) $y' = \dfrac{-\ln x}{x^2}$;

$y'' = \dfrac{2\ln x - 1}{x^3}$.



43. (*в*) $y' = \dfrac{e^x(3x-1)}{3\sqrt[3]{x-1}}$;

$y'' = \dfrac{e^x(9x^2 - 6x - 5)}{9(x-1)\sqrt[3]{x-1}}$.



20. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ НА ПРОМЕЖУТКЕ

Существует следующий алгоритм определения наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$:

1. Найти $f'(x)$.

2. Найти точки, в которых $f'(x)=0$ или $f'(x)$ не существует, и выбрать те из них, которые принадлежат отрезку $[a;b]$.

3. Вычислить значения функции $f(x)$ в точках, выбранных в пункте 2, и на концах отрезка, т.е. в точках $x=a$ и $x=b$.

4. Выбрать из вычисленных значений наибольшее и наименьшее: они и будут искомыми величинами – наибольшим и наименьшим значениями функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Пример **1.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=4x^3-9x^2-12x$ на отрезке $[-1;1]$.

Решение. 1. Найдем производную функции: $f'(x)=12x^2-18x-12$.

2. Производная $f'(x)$ существует при всех x. Найдем точки, в которых $f'(x)=0$. Получим $12x^2-18x-12=0 \Rightarrow 2x^2-3x-2=0 \Rightarrow x_1=2$; $x_2=-0,5$. Отрезку $[-1;1]$ принадлежит только точка $x=-0,5$.

3. Вычислим значения функции в точках $x=-1$; $x=-0,5$ и $x=1$: $f(-1)=-4-9+12=-12$; $f(-0,5)=3,25$; $f(1)=-17$.

4. Выбираем из вычисленных значений функции наибольшее и наименьшее. Наибольшим является число 3,25, наименьшим – число -17.

Ответ: $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=f(-0,5)=3,25$; $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=f(1)=-17$

Пример **2.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^2-5|x|+4$ на отрезке $[-1;4]$.

Решение. Сначала необходимо раскрыть модуль, в результате чего получаем две функции: при $x\ge 0$ $f_1(x)=x^2-5x+4$ и при $x<0$ $f_2(x)=x^2+5x+4$. Таким образом, задача сводится к исследованию функции $f_1(x)=x^2-5x+4$ на отрезке $[0;4]$, а функции $f_2(x)=x^2+5x+4$ – на полуинтервале $[-1;0)$, и последующему выбору наибольшего и наименьшего значений из полученных для каждой функции.

Исследуем на наибольшее и наименьшее значение функцию $f_1(x)=x^2-5x+4$ на отрезке $[0;4]$:

1. Найдем производную функции: $f_1'(x)=2x-5$.

2. Производная $f_1'(x)$ существует при всех x. Найдем точки, в которых $f_1'(x)=0$. Получим $2x-5=0 \Rightarrow x=2,5$. Эта точка принадлежит отрезку $[0;4]$.

3. Вычислим значения функции $f_1(x)$ в точках $x=0$; $x=2,5$ и $x=4$: $f_1(0)=4$; $f_1(2,5)=-2,25$; $f_1(4)=0$.

Исследуем на наибольшее и наименьшее значение функцию $f_2(x)=x^2+5x+4$ на полуинтервале $[-1;0)$:

1. Найдем производную функции: $f_2'(x)=2x+5$.

2. Производная $f_2'(x)$ существует при всех x. Найдем точки, в которых $f_2'(x)=0$. Получим $2x+5=0 \Rightarrow x=-2,5$. Эта точка не принадлежит полуинтервалу $[-1;0)$.

3. Вычислим значение функции $f_2(x)$ в точке $x=-1$: $f_2(-1)=0$.

4. Выбираем из вычисленных значений функций наибольшее и наименьше. Наибольшим является число 4, наименьшим – число $-2,25$.

Ответ: $\max\limits_{[-1;4]} f(x)=f(0)=4$; $\min\limits_{[-1,1]} f(x)=f(2,5)=-2,25$.

Задачи

1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на заданном промежутке:

а) $f(x)=2x^3-9x^2+12x$, $[0;3]$; б) $f(x)=x^3-12x+9$, $[-3;3]$;

в) $f(x)=x^3+15x^2+72x+7$, $[-6;-1]$;

г) $f(x)=2x^3+21x^2+60x-9$, $[-5;0]$; д) $f(x)=x^5-20x^2$, $[-1;2]$;

е) $f(x)=-x^2+3|x|-2$, $[-2;1]$; ж) $f(x)=6x^2-13|x|+6$, $[-1;2]$;

з) $f(x)=\cos 3x-15\cos x+8$, $\left[\frac{\pi}{3};\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\max\limits_{[0;3]} f(x)=f(3)=9$; $\min\limits_{[0;3]} f(x)=f(0)=0$;

б) $\max\limits_{[-3;3]} f(x)=f(-2)=25$; $\min\limits_{[-3;3]} f(x)=f(2)=-7$;

в) $\max\limits_{[-6;-1]} f(x) = f(-1) = -51$; $\min\limits_{[-6;-1]} f(x) = f(-6) = -626$;

г) $\max\limits_{[-5;0]} f(x) = f(0) = -9$; $\min\limits_{[-5;0]} f(x) = f(-2) = -61$;

д) $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = f(0) = 0$; $\min\limits_{[-1;2]} f(x) = f(2) = -48$;

е) $\max\limits_{[-2;1]} f(x) = f(-1,5) = 0,25$; $\min\limits_{[-2;1]} f(x) = f(0) = -2$;

ж) $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = f(0) = 6$; $\min\limits_{[-1;2]} f(x) = f(13/12) = -25/24$;

з) $\max\limits_{\left[\frac{\pi}{3};\frac{3\pi}{2}\right]} f(x) = f(\pi) = 22$; $\min\limits_{\left[\frac{\pi}{3};\frac{3\pi}{2}\right]} f(x) = f(\pi/3) = -1/2$.

2. Найти наибольшее значение функции $f(x)$ на заданном промежутке:

а) $f(x) = 18x^2 + 8x^3 - 3x^4$, $x \in R$; б) $f(x) = -\dfrac{1}{(x^2-1)^2}$, $[-0,5;3]$;

в) $f(x) = 7 + 2x\ln 25 - 5^{x-1} - 5^{2-x}$, $x \in R$.

Ответ: а) $\max f(x) = f(3) = 135$; б) $\max\limits_{[-0,5;3]} f(x) = f(3) = -1/64$;

в) $\max f(x) = f(2) = 1 + 8\ln 5$.

3. Найти наименьшее значение функции $f(x) = x + \dfrac{4}{(x-2)^2}$ на отрезке $[0;5]$.

Ответ: $\max\limits_{[0,5]} f(x) = f(0) = 1$.

4. Найти точки минимума функции $y(x) = x^3 - 2x|x-2|$, заданной на отрезке $[0;3]$, и ее наибольшее значение на этом отрезке.

Ответ: $x = 2/3$ – точка минимума функции $y(x)$, заданной на отрезке $[0;3]$, $\max\limits_{[0;3]} y(x) = y(3) = 21$.

5. Найти точки максимума функции $y(x) = -5x^3 + x|x-1|$, заданной на отрезке $[0;2]$, и ее наименьшее значение на этом отрезке.

Ответ: $x = 1/5$ – точка максимума функции $y(x)$, заданной на отрезке $[0;2]$, $\min\limits_{[0;2]} y(x) = y(2) = -38$.

6. Найти модуль разности экстремумов функции $y(x) = x^3 + 3x^2 - 3x = 1$.

Ответ: $8\sqrt{2}$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции f на промежутке X, если они существуют:

7. $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 1$, $X = [-2; 6]$. **8.** $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$, $X = (-\infty; 1]$.

9. $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$, $X = (-\infty; 1]$.

10. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}$, $X_1 = [3; 4]$; $X_2 = [0; 4] \setminus \{2\}$; $X_3 = R \setminus \{\pm 2\}$.

11. $y = \left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$, $X_1 = [-2; 0]$; $X_2 = (-\infty; 0)$; $X_3 = R \setminus \{1\}$. $X_4 = [2; \infty)$

12. $y = \dfrac{x^2+2x+5}{x+1}$, $X = (0; \infty)$. **13.** $y = (x-2)^2\sqrt{x^2-4x+6}$, $X = [1; 4]$.

14. $y = 24x - \cos 12x - 3\sin 8x$, $X = \left[-\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{6}\right]$.

15. (*в*) $y = 2x^2 - \ln x$, $X = \left[e^{-1}; e\right]$. **16.** (*в*) $y = e^x\left(3x^2 - 7x + 7\right)$, $X = \left[0; \dfrac{2}{3}\right]$.

17. $y = 2x\sin 2x + \cos 2x$, $X = \left[-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на указанном промежутке (если они существуют):

18. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$ на $[-3; 3]$. **19.** $f(x) = x + \dfrac{2}{x}$ на $[1; 3]$.

20. $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2$ на $[-1; 2]$.

21. $f(x) = \cos 2x - 2\cos x$ на $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{4}\right]$.

22. $f(x) = 5^x - 4x$ на $[1; 2]$. **23.** $f(x) = \begin{cases} x^4 + 4x^3, & x \le -1 \\ x^3 - 6x^2, & x > -1 \end{cases}$ на $\mathbb{R}$.

24. $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ на $[-1; 1]$. **25.** $f(x) = \dfrac{2^x + 2^{-x}}{\ln 2}$ на $[-1; 2]$.

26. $f(x) = 2x^2 - 7|x| + 5$ на $[-1; 3]$. **27.** $f(x) = x^2\sqrt{3-x}$ на $[1; 3]$.

28. $f(x) = x^2 + |x-2|$ на $[-3; -1]$. **29.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x+2}$ на $[-2; 2]$.

30. $f(x)=0,7^{x^2+2x}$ на $\mathbb{R}$.

31. $f(x)=e^x\sin x$ на $\left[0;\ \dfrac{5\pi}{6}\right]$.

32. $f(x)=-\left|2x^3+15x^2+36x-30\right|$ на $[-3;\ 2]$.

33. Найти наименьшее значение функции $z=x^4+y^4+\dfrac{2}{x^2y^2}$.

34. Найти экстремумы, наибольшее и наименьшее значения (если они есть) функции $y=|x+1|-\sqrt{1-6x+9x^2}$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

35. $g(x)=2\sin 3x+16\sin^2 x$.

36. $h(x)=\cos 3x+8\cos^2 x$.

Найти множество значений функции:

37. $y=5\sin x-12\cos x$.

38. $y=5\sin x-12\cos 2x$.

39. $y=(\sin x+\cos x)^2$.

40. $y=\cos^2\dfrac{x}{2}\sin x$.

41. $y=15-3\cos x+\cos 3x$.

42. $y=\dfrac{1}{\sin x+4}-\dfrac{1}{\cos x-4}$.

43. $y=5\cos x-\cos 5x$.

44. При каких значениях a функция $y=-x^3+ax^2+a^2x+5$ возрастает на промежутке $[-6;2]$?

45. Найти все значения параметра a, при каждом из которых функция $y=a\sin 7x+8ax+\sin 4x-5x$ убывает и не имеет критических точек на всей числовой прямой.

46. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=-x^5+6\frac{2}{3}x^3+4\frac{1}{3}$$ на отрезке $[-1;2]$.

47. Для каждого значения параметра a найти наибольшее значение функции $y=1+ax-x^2$ на отрезке $[1;2]$.

48. При каком значении параметра a наименьшее значение функции $y=x^2-4ax-a^4$ будет наибольшим возможным?

49. Найти все значения параметра p, при которых функция

$y=\dfrac{x^3}{3}-px^2+(2-p)x+3$ имеет одну критическую точку, при этом не имеет экстремума.

50. (*в*) $f(x)=\dfrac{3^x+3^{2-x}}{\ln 3}+8x$. Найти $\max\limits_{[-1;2]} f(x)$. $\min\limits_{[-1;2]} f(x)$.

51. Найти при каждом действительном b наибольшее значение функции $y=-(\arcsin x)^2+(2b+1)\cdot\arcsin x+2-b-b^2$.

52. Найти наименьшее значение функции $f(x)=\operatorname{arcctg}(\cos 4x)+\operatorname{arctg}(\sin 7x)$, а также все значения x, при которых оно достигается.

53. Найти наибольшее значение функции $f(x)=\operatorname{arctg}(\sin 11x)+\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{3}\cos 2x\right)$, а также все значения x, при которых оно достигается.

54. Найти наибольшее значение функции $f(x)=x^4-6bx^2+b^2$ на отрезке $[-2;\ 1]$ в зависимости от параметра b.

55. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\sqrt{x(10-x)}$ в области ее определения.

56. Функция $f(x)=\dfrac{1}{x-c}$ определена на отрезке $[-1;\ 3]$. При каких значениях c наименьшее значение $f(x)$ на этом отрезке больше $-0{,}125$?

Найти все значения параметра, удовлетворяющие следующим условиям:

57. Наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=2x^3-3ax^2$ на отрезке $[-1;\ 1]$ достигается внутри него.

58. Наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^3-12x$ на отрезке $[0;\ a]$ достигается в правом конце.

59. Наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x+\dfrac{a}{x}$ на отрезке $[1;\ 2]$ достигается в правом конце.

60. Наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax$ на отрезке $\left[\dfrac{9}{10};\ 2\right]$ достигается внутри него.

61. Наименьшее значение функции $f(x)=x^2+\dfrac{2a}{x}$ на отрезке $[1; 2]$ больше 6.

62. Наибольшее значение функции $f(x)=(x-a)^2(x-3)$ на отрезке $[0; 4]$ не превосходит $4/27$.

63. Наименьшее значение функции $f(x)=2x^3-3ax^2+3a$ на отрезке $[0; 2]$ будет наибольшим.

64. Наибольшее значение функции $f(x)=ax+\dfrac{1}{x}$ $(a\ge 0)$ на отрезке $[-2; -1]$ будет наименьшим по модулю.

65. Найти наибольший член последовательности $a_n=\sqrt{n^2+30n}-2n$.

Найти наименьший член последовательности:

66. $a_n=\left(n^2-4n\right)(n+3)^3$.

67. $a_n=n^2+\dfrac{250}{n}$.

68. $a_n=n+\dfrac{37}{n}$.

69. $a_n=n^3-18n^2+3n+2$.

Найти все значения параметра, при которых выполняются следующие условия:

70. Критические точки функции $y=x^3-6x^2+9x+a$ и значение функции в точке $x=2$, взятые в некотором порядке, образуют геометрическую прогрессию.

71. Точка $x=3$ является точкой минимума функции $y=2x^3-6a^2x+3$, $a>0$.

72. На интервале $(1; 3)$ лежит ровно одна критическая точка функции

$$f(x)=\frac{x^3}{3}+(a+1)x^2-(2a+3)x+1.$$

73. На интервале $(-2; 3)$ есть не менее двух критических точек функции

$$f(x)=\frac{x^3}{3}+(2-a)x^2-2ax+3.$$

74. Точки экстремумов функции $f(x)=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-4$ лежат в промежутке $(-2; 4)$.

75. Все экстремумы функции $f(x)=\frac{5a^2}{3}x^3+2ax^2-9x+b$ положительны и максимум находится в точке $x_0=-5/9$.

76. Все экстремумы функции $f(x)=a^2x^3-0,5ax^2-2x-b$ положительны и минимум находится в точке $x_0=1/3$.

77. Функция $f(x)=\frac{a}{3}x^3+(a+2)x^2+(a-1)x+2$ имеет отрицательную точку минимума.

78. Функция $f(x)=2^{\frac{a(x+1)}{a^2+3a-x}}$, $a>0$ монотонно возрастает на промежутке $[1;4)$.

79. Функция $f(x)=(c-12)x^3+3(c-12)x^2+6x+7$ монотонно возрастает на $\mathbb{R}$.

80. Функция $f(x)=2e^x-me^{-x}+(1+2m)x-3$ монотонно возрастает на $\mathbb{R}$.

81. Функция $f(x)=bx^5-20x^3+5(b+9)x-7$ монотонна на $\mathbb{R}$.

82. Наименьшее значение функции
$f(x)=3x^4+4x^3(\cos\alpha-\sin\alpha)-3x^2\sin2\alpha$, $\alpha\in[0;\pi/2]$ на отрезке $x\in[-\sin\alpha;\cos\alpha]$ принимает наименьшее значение.

83. Наибольшее значение функции $f(x)=x^4-2x^2\sin^2\alpha-2(1+\cos\alpha)^3$ при $\frac{\pi}{4}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$ на отрезке $x\in[-(1+\cos\alpha);1+\cos\alpha]$ принимает наименьшее значение.

Ответы:

7. $\min\limits_X y=-73$; $\max\limits_X y=8$. **8.** $\max\limits_X y=1/2$; наименьшего значения нет.

9. $\min\limits_X y=0$; наибольшего значения нет. **10.** $\min\limits_{X_1} y=\sqrt{3}$; $\max\limits_{X_1} y=\frac{3}{\sqrt[3]{5}}$; на X_2 и на X_3 нет ни наибольшего, ни наименьшего значений, так как $\lim\limits_{x\to2\pm0} y=\pm\infty$. **11.** $\min\limits_X y=0$, $\max\limits_{X_1} y=1$; $\min\limits_{X_2} y=0$; наибольшего значения на X_2 нет; $\min\limits_{X_3} y=0$; наибольшего значения на X_3 нет; $\max\limits_{X_4} y=3$; наименьшего значения на X_4 нет. Задачу имеет смысл решать графически.

12. $\min\limits_X y = 4$; наибольшего значения на X_3 нет (неравенство Коши и предел на $+\infty$). **13.** $\min\limits_X y = 0$; $\max\limits_X y = 4\sqrt{6}$ (замена $t = (x-2)^2$ или $p = \sqrt{x^2 - 4x + 6}$ облегчает решение!) **14.** $\min\limits_X y = -4\pi - 1 - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$; $\max\limits_X y = 4\pi - 1 + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **15.** $\min\limits_X y = \dfrac{1}{2} + \ln 2$; $\max\limits_X y = 2e^2 - 1$.

16. $\min\limits_X y = 5e^{1/3}$; $\max\limits_X y = \dfrac{11}{3}e^{2/3}$. **17.** $\min\limits_X y = -\dfrac{3\pi}{2}$; $\max\limits_X y = \dfrac{\pi}{2}$.

18. $\min\limits_{[-3;\,3]} f(x) = -79$, $\max\limits_{[-3;\,3]} f(x) = 2$. **19.** $\min\limits_{[1;\,3]} f(x) = 2\sqrt{2}$, $\max\limits_{[1;\,3]} f(x) = 3\dfrac{2}{3}$.

20. $\min\limits_{[-1;\,2]} f(x) = 2$, $\max\limits_{[-1;\,2]} f(x) = 19$. **21.** $\min\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\,\frac{3\pi}{4}\right]} f(x) = -\dfrac{3}{2}$, $\max\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\,\frac{3\pi}{4}\right]} f(x) = \sqrt{2}$.

22. $\min\limits_{[1;\,2]} f(x) = 1$, $\max\limits_{[1;\,2]} f(x) = 17$. **23.** $\min f(x) = -32$, наибольшего значения нет. **24.** $\min\limits_{[-1;\,1]} f(x) = -16$, $\max\limits_{[-1;\,1]} f(x) = -9$. **25.** $\min\limits_{[-1;\,2]} f(x) = \dfrac{2}{\ln 2}$, $\max\limits_{[-1;\,2]} f(x) = \dfrac{17}{4\ln 2}$. **26.** $\min\limits_{[1;\,3]} f(x) = -\dfrac{9}{8}$, $\max\limits_{[1;\,3]} f(x) = 5$.

27. $\max\limits_{[1;\,3]} f(x) = \dfrac{144}{25}\sqrt{\dfrac{3}{5}}$, $\min\limits_{[1;\,3]} f(x) = 0$. **28.** $\max\limits_{[-3;\,-1]} f(x) = 14$, $\min\limits_{[-3;\,-1]} f(x) = 4$.

29. $\max\limits_{[-2;\,2]} f(x) = \dfrac{4}{7}$, $\min\limits_{[-2;\,2]} f(x) = -\dfrac{1}{8}$. **30.** $\max f(x) = \dfrac{10}{7}$, наименьшее значение не достигается. **31.** $\max\limits_{\left[0;\,\frac{5\pi}{6}\right]} f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$, $\min\limits_{\left[0;\,\frac{5\pi}{6}\right]} f(x) = 0$. **32.** $\max\limits_{[-3;\,2]} f(x) = 0$, $\min\limits_{[-3;\,2]} f(x) = -118$. **33.** 4. **34.** $\max\limits_X y = 4/3$; наименьшего значения нет.

35. $\min g(x) = -\dfrac{14}{27}$; $\max g(x) = 18$. **36.** $\min h(x) = -\dfrac{7}{27}$; $\max h(x) = 9$.

37. $[-13;13]$. **38.** $\left[-12\dfrac{25}{96};17\right]$. **39.** $[0;2]$. **40.** $\left[-\dfrac{3\sqrt{3}}{8};\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right]$.

41. $\left[15-2\sqrt{2};15+2\sqrt{2}\right]$. **42.** $\left[\dfrac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+1};\dfrac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-1}\right]$. **43.** $\left[-3\sqrt{3};3\sqrt{3}\right]$.

44. $a\in(-\infty;-6]\cup[18;\infty)$. **45.** $a\in\left(-\infty;\frac{1}{15}\right)$. **46.** $\min\limits_{[-1;2]} f=-1\frac{1}{3}$; $\max\limits_{[-1;2]} f=25\frac{2}{3}$.

47. При $a\le 2$ $\max\limits_{[1;2]} y=a$; при $2<a<4$ $\max\limits_{[1;2]} y=1+\frac{a^2}{4}$; при $a\ge 4$ $\max\limits_{[1;2]} y=2a-3$. **48.** $a=0$. **49.** $p\in\{1;-2\}$. **50.** $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=\frac{10}{\ln 3}+16$, $\min\limits_{[-1;2]} f(x)=\frac{10}{\ln 3}$. **51.** При $b\le-\frac{1+\pi}{2}$ $\max y=-\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}(2b+1)+2-b-b^2$; при $-\frac{\pi+1}{2}<b<\frac{\pi-1}{2}$ $\max y=2\frac{1}{4}$; при $b\ge\frac{\pi-1}{2}$ $\max y=-\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi}{2}(2b+1)+2-b-b^2$. **52.** 0 при $x=\frac{\pi}{2}+2\pi s,\ s\in Z$. **53.** $\frac{13\pi}{12}$ при $x=\frac{3\pi}{2}+2\pi p,\ p\in Z$. **54.** при $b\le\frac{2}{3}$ $\max\limits_{[-2;1]} f(x)=16-24b+b^2$, при $b>\frac{2}{3}$ $\max\limits_{[-2;1]} f(x)=b^2$. **55.** $\min\limits_{[0;10]} f(x)=0$; $\max\limits_{[0;10]} f(x)=5$. **56.** $(-\infty;-1)\cup(11;+\infty)$.

57. Таких значений не существует. **58.** $(0;2]$. **59.** $(-\infty;2]$. **60.** $\left[1\frac{2}{3};2\right)$.

61. $(2\sqrt{2};+\infty)$. **62.** $\left[4-\frac{2\sqrt{3}}{9};4\right]$. **63.** $a=1$. **64.** $a=0$. **65.** $a_2=4$.

66. $a_3=-108$. **67.** $a_5=75$. **68.** $a_6=12\frac{1}{6}$. **69.** $a_{12}=-826$. **70.** $a\in\left\{-\frac{4}{3};-\frac{8}{3}\right\}$.

71. $a=1$. **72.** $(-3;-2)$. **73.** $\left(2;\frac{21}{8}\right)$. **74.** $(-1;3)$. **75.** $a=-\frac{9}{5}$, $b>\frac{36}{5}$ или $a=\frac{81}{25}$, $b>\frac{400}{243}$. **76.** $a=-2$, $b<-\frac{11}{27}$ или $a=3$, $b<-\frac{1}{2}$. **77.** $a>1$.

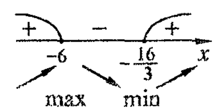
78. $a\in\left(0;\frac{\sqrt{13}-3}{2}\right)\cup[1;+\infty)$. **79.** $[12;14]$. **80.** $[0;+\infty)$.

81. $(-\infty;-9]\cup[3;+\infty)$. **82.** $\alpha\in\left\{\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{31}-7}{5};\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{31}-7}{5}\right\}$. **83.** $\frac{\pi}{3}$.

21. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Пример 1. Представить число 48 в виде суммы двух положительных чисел так, чтобы сумма куба одного из них и квадрата другого была наименьшей.

Решение. Пусть x и y искомые числа. Тогда, по первому условию, $x+y=48$ (1). Функция, по второму условию задачи, представляет собой сумму куба одного из них и квадрата другого, т.е. $f(x,y)=x^3+y^2$ (2). Чтобы получить функцию одного аргумента, выразим y через x в уравнении (1): $y=48-x$ и подставим в функцию (2). Получим функцию $f(x)=x^3+(48-x)^2$. Из условия задачи очевидно ограничение для переменной $x\in[0;48]$. Таким образом, необходимо найти значение $x\in[0;48]$, при котором функция $f(x)$ будет иметь наименьшее значение. Вычислим производную $f'(x)=3x^2-2(48-x)$, приравняем ее нулю $3x^2+2x-96=0$, и получим критические точки $x_1=-6$ и $x_2=16/3$. Значение $x=-6$ явно нам не подходит, но поскольку значение функции $f(x)$ в искомой точке нас в принципе не интересует, то можно, для начала, просто исследовать функцию $f(x)$ на экстремумы, определив интервалы возрастания и убывания, для чего решим неравенство $f'(x)>0 \Rightarrow 3x^2+2x-96>0$ методом интервалов и там же (на числовой оси) покажем возрастание, убывание функции и типы экстремумов.



Из рисунка следует, что функция имеет минимум именно при $x=16/3$, а при $x=0$ или $x=48$ функция имеет большие значения, которые нас не интересуют и, следовательно, можно их не вычислять. Искомое значение первого слагаемого $16/3$, второго $48-\frac{16}{3}=\frac{128}{3}$.

Ответ: $48=\frac{16}{3}+\frac{128}{3}$.

Задачи

1. Число 180 разбить на три слагаемых так, чтобы два из них относились, как 1:2, а произведение трех слагаемых было бы наибольшим.

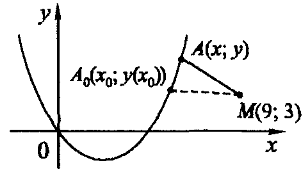
Ответ: $180=40+80+60$.

2. Число 18 разбить на такие два слагаемых, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

Ответ: $180=9+9$.

Задачи на экстремальные расстояния. Уравнение нормали к графику функции

Пример 2. На параболе $2y = x^2 - 6x$ найти точку, расстояние от которой до точки $M(9;3)$ будет наименьшим.



Решение. На рисунке схематично показана парабола и точка M, не лежащая на параболе, в чем легко убедиться, подставив координаты точки M в уравнение параболы – оно не превратится в тождество. Возьмем произвольную точку $A(x;y)$, лежащую на параболе. Нам необходимо найти такое положение точки A на параболе, чтобы длина отрезка AM была наименьшей. Решить задачу можно двумя способами:

I способ.

Выразим длину отрезка AM, используя координаты точек A и M: $AM = \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2}$. Координаты точки M даны по условию, абсциссу точки A считаем текущей, произвольной, т.е. x, ордината точки $A - y$ нам не известна, но поскольку точка A лежит на параболе, то она зависит от абсциссы x и определяется уравнением параболы, т.е. $y = \dfrac{x^2 - 6x}{2}$ (1). С учетом этого можем записать длину отрезка AM как функцию абсциссы x точки A:

$AM(x) = \sqrt{(x-9)^2 + \left(\dfrac{x^2 - 6x}{2} - 3\right)^2}$ (2). Вычисляем производную $AM'(x) = \dfrac{2(x-9) + 2(0,5x^2 - 3x - 3)(x-3)}{2\sqrt{(x-9)^2 + \left((x^2 - 6x)/2 - 3\right)^2}}$, приравняв ее нулю, найдем критические точки.

Следует отметить, что знаменатель производной в ноль не обращается, а числитель $x^3 - 9x^2 + 14x = 0$ при $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ и $x_3 = 7$. Для всех трех значений следует вычислить расстояние AM по формуле (2) и из них выбрать наименьшее. Итак, $AM(0) = \sqrt{90}$, $AM(2) = \sqrt{98}$ и $AM(7) = \sqrt{17}/2$. Очевидно, что $AM(7)$ является наименьшим, и искомая абсцисса точки A – $x = 7$. Вычисляем ординату точки A по формуле (1): $y = 3,5$.

Ответ: $A(7;3,5)$.

II способ.

Из понятия нормали и рисунка очевидно, что наименьшее расстояние от точки M до параболы будет по нормали A_0M, проведенной из точки M к параболе. Обозначим за x_0 абсциссу точки A_0 пересечения параболы и нормали, проведенной из точки M. Уравнение нормали к параболе в точке с абсциссой x_0 имеет вид: $y - y(x_0) = -\dfrac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$, где $y(x_0) = \dfrac{x_0^2}{2} - 3x_0$ – ордината точки A_0, а $y'(x_0) = x_0 - 3$ - значение производной от квадратной функции в точке A_0. Подставим вычисленные значения $y(x_0)$ и $y'(x_0)$ в уравнение нормали: $y - \dfrac{x_0^2}{2} + 3x_0 = -\dfrac{1}{x_0 - 3}(x - x_0)$. Из всех нормалей к данной параболе необходимо выбрать проходящие через точку M. Для этого в качестве текущих x и y подставим в уравнение нормали координаты точки M – получим уравнение для определения x_0:

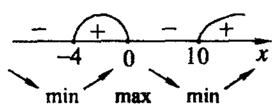
$$3 - \frac{x_0^2}{2} + 3x_0 = -\frac{1}{x_0 - 3}(9 - x_0) \Rightarrow x_0^3 - 9x_0^2 + 14x_0 = 0 .$$

Видно, что это уравнение аналогично полученному в первом способе, и дальнейшее решение совпадает с показанным ранее.

Сравнение двух рассмотренных способов показывает, что по трудоемкости они очень близки. Следует отметить, что решение первым способом можно несколько упростить, если в качестве исследуемой функции использовать не $AM(x)$, а ее квадрат, т.е. функцию $\varphi(x) = AM^2(x)$, точки экстремумов которой совпадают с искомыми.

Пример **3.** Составить уравнение окружности наименьшего радиуса с центром в точке $A(5;10)$, имеющей хотя бы одну общую точку с параболой $y = 0,125(x^2 - 4x)$.

Решение. Уравнение окружности с центром в точке $A(5;10)$ имеет вид: $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$, где x_A и y_A координаты точки A, R – радиус окружности. Координаты точки A известны, следовательно, задача заключается в определении радиуса R. Этот радиус будет наименьшим, если окружность лишь касается параболы, т.е. радиус наименьшей окружности должен быть равен наименьшему расстоянию от точки A до параболы и задача практически сводится в задаче в примере 2. Выбираем на параболе произвольную точку $B\left(x; 0.125(x^2-4x)\right)$. тогда расстояние AB можно записать как $AB(x)=\sqrt{(x-5)^2+\left(0.125(x^2-4x)-10\right)^2}$. Исследуем на экстремумы, как предлагалось в конце примера 2, функцию $\varphi(x)=AB^2(x)=(x-5)^2+\left(0{,}125(x^2-4x)-10\right)^2$. Вычисляем производную $\varphi'(x)=2(x-5)^2+2\left(0{,}125x^2-0{,}5x-10\right)(0{,}25x-0{,}5)$. приравниваем ее к нулю и получаем критические точки: $x_1=0$ и $x_2=-4$ и $x_3=10$. Теперь можно вычислить AB для найденных значений x и выбрать из них наименьший. Но можно предварительно определить интервалы возрастания и убывания функции $\varphi(x)$ и, тем самым, выяснить вид экстремума. Решаем неравенство $\varphi'(x)>0 \Rightarrow x^3-6x^2-40>0$ методом интервалов:



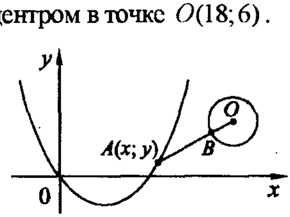
Точка максимума нас не интересует, определяем наименьшее: $AB^2(-4)=117$ и $AB^2(10)=125/4$. Наименьшим является последнее значение и, следовательно, искомое уравнение окружности:

$$(x-5)^2+(y-10)^2=\frac{125}{4}.$$

Ответ: $(x-5)^2+(y-10)^2=\dfrac{125}{4}$.

Пример **4.** Точка A лежит на графике функции $y=0{,}25(x^2-10x)$, точка B – на кривой $x^2+y^2-36x-12y+356=0$. Какое наименьшее значение может иметь длина отрезка AB?

Решение. Для пояснения воспользуемся рисунком, на котором схематично показаны парабола и окружность, поскольку уравнение данной кривой можно преобразовать следующим образом: $(x-18)^2+(y-6)^2=4$, таким образом – это окружность радиусом $R=2$ с центром в точке $O(18;6)$.



Если взять произвольную точку $A(x;y)$ на параболе и произвольную точку B на окружности, то можно записать длину отрезка AB, но она будет зависеть от двух переменных, не связанных между собой – абсцисс точек A и B. Поэтому произвольно можно выбрать лишь одну точку; пусть это будет точка A, лежащая на параболе. Для определения точки B воспользуемся следующими рассуждениями.

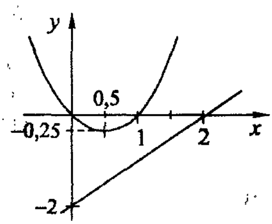
Наименьшее расстояние между кривыми – длина их общей нормали. Уравнение нормали к параболе можно записать (см. пример 2), но это достаточно трудоемко. Важнее в данной ситуации другое: нормаль к окружности является продолжением ее радиуса, так как из геометрии известно, что радиус окружности перпендикулярен касательной к окружности, проведенной через точку пересечения радиуса и окружности. Следовательно, можно найти наименьшее расстояние AO от центра окружности до параболы, поскольку искомое расстояние AB должно быть продолжением радиуса OB и меньше AO на радиус окружности $R = OB$.

Таким образом данная задача сводится к примеру 2 – нахождению наименьшего расстояния между известной точкой $O(18;6)$ и данной параболой.

Запишем функцию $f(x)$ как квадрат расстояния AO: $f(x) = AO^2(x) = (x-18)^2 + (0.25x^2 - 3x - 6)^2$, вычислим производную $f'(x) = 2(x-18) + 2(0.25x^2 - 3x - 6)(0.5x - 3)$, приравняем ее к нулю и определим критические точки: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ и $x_3 = 14$. Вычислим расстояние AO в этих точках: $AO(0) = \sqrt{360}$, $AO(4) = \sqrt{392}$ и $AO(14) = \sqrt{17}$. Наибольшее расстояние $AO = \sqrt{17}$, а наименьшее $AB = \sqrt{17} - 2$.

Ответ: $\sqrt{17} - 2$.

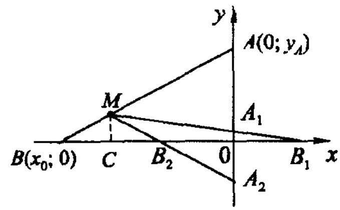
Пример 5. На кривой $y = x^2 - x$ найти точку, расстояние от которой до прямой $y = x - 2$ будет наименьшим. Сделать чертеж.



Решение. На первый взгляд задача аналогична рассмотренным в примерах 2 и 4, но это далеко не так. Если взять произвольную точку A на параболе и произвольную точку B на прямой, то возникнут трудности, рассмотренные в примере 4. Поэтому строим параболу и прямую (этот чертеж необходимо сделать по условию) и проанализируем задачу. Наименьшее расстояние от прямой до параболы будет равно длине их общей нормали (точнее – прямой, которая будет нормалью к параболе, одновременно являясь перпендикуляром к данной прямой). Как уже отмечалось, нормаль – это перпендикуляр к касательной, проведенной в точке пересечения нормали и кривой. Следовательно, искомый отрезок – это общий перпендикуляр к данной прямой и к касательной, проведенный к параболе в искомой точке. Таким образом, касательная к параболе в искомой точке должна быть параллельна данной прямой. Для определения координат такой точки на параболе нет надобности писать уравнение нормали или касательной, ведь угловой коэффициент касательной – это значение производной в искомой точке. Следовательно, значение производной в искомой точке должно быть равно угловому коэффициенту данной прямой, чтобы касательная была ей параллельна. Найдем производную данной параболы: $y' = 2x - 1$. Пусть абсцисса искомой точки – x_0. Значение производной в этой точке $y'(x_0) = 2x_0 - 1$. Угловой коэффициент данной прямой $k = 1$. Приравниваем их и получаем уравнение для определения абсциссы искомой точки: $2x_0 - 1 = 1 \Rightarrow x_0 = 1$. Ордината искомой точки $y(x_0) = y(1) = 1^2 - 1 = 0$.

Ответ: $(1;0)$.

Пример 6. Точки A и B расположены на координатных осях плоскости xOy. Какую наименьшую длину может иметь отрезок AB, если ему принадлежит точка $M(-8;1)$?



Решение. На рисунке показана данная точка M. В принципе, возможно различное положение точек A и B на осях координат. На рисунке они показаны как точки A и B, или A_1 и B_1, или A_2 и B_2. Но условию удовлетворяют только точки A и B, так как точка M принадлежит только отрезку AB и не принадлежит A_1B_1 и A_2B_2.

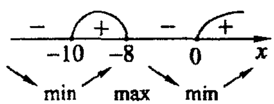
Пусть координаты точек A и B такие, как показано на рисунке. Тогда длина отрезка определяется по теореме Пифагора: $AB = \sqrt{x_B^2 + y_A^2}$. Чтобы получить AB как функцию одного аргумента, необходимо выразить ординату точки A через абсциссу точки B (или наоборот). Для этого рассмотрим треугольники ABO и MBC. Они подобны, так как MC параллельна AO.

Следовательно, $\dfrac{MC}{AO} = \dfrac{BC}{BO} \Rightarrow \dfrac{y_M}{y_A} = \dfrac{x_B - x_M}{x_B} \Rightarrow \dfrac{1}{y_A} = \dfrac{x_B + 8}{x_B} \Rightarrow y_A = \dfrac{x_B}{x_B + 8}$.

Теперь можно записать длину AB как функцию одного аргумента x_B, при этом индекс (B) можно опустить (других аргументов у этой функции теперь все равно нет) и исследовать ее на экстремумы: $AB(x) = \sqrt{\left(\dfrac{x}{x+8}\right)^2 + x^2}$.

$$AB'(x)=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{x+8}\right)^2+x^2}}\left(\frac{2x(x+8)^2-x^2\cdot(x+8)}{(x+8)^4}+2x\right).$$

$AB'(x)$ равна нулю при $x_1=0$ и $x_2=-10$ и не существует при $x_3=-8$. Из рисунка видно, что абсцисса точки B должна быть меньше -8, а ордината точки A – больше 1. Так что единственным подходящим решением является $x=-10$. Тем не менее, для проверки, можно исследовать знаки производной $AB'(x)$ и выяснить, действительно ли при $x=-10$ функция $AB(x)$ имеет минимум. Решим неравенство $AB'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{x\left((x+8)^3+8\right)}{(x+8)^3}>0$ методом интервалов.



Теперь вычислим $AB(-10)=5\sqrt{5}$.

Ответ: $5\sqrt{5}$.

Задачи

1. На параболе $4y=x^2-4x$ найти точку, расстояние от которой до точки $M(14;14)$ будет наименьшим.

Ответ: $(10;15)$.

2. На кривой $y=x^2+2x$ найти точку, расстояние от которой до точки $M(-5;2,5)$ будет наименьшим. Найти это расстояние. Сделать чертеж.

Ответ: $(-3;3)$; $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$.

3. На графике функции $y=\dfrac{1}{4\sqrt{2x}}$ указать точку, расстояние от которой до начала координат будет наименьшим. Вычислить его.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$; $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

4. Составить уравнение окружности наименьшего радиуса с центром в точке $A(9;3)$, имеющей хотя бы одну общую точку с параболой $y=0,5(x^2-6x)$.

Ответ: $(x-9)^2+(y-3)^2=\dfrac{17}{4}$.

5. Точка A лежит на графике функции $y = 0,5(x^2 - 2x)$, точка B – на кривой $x^2 + y^2 - 14x - 14y + 97 = 0$. Какое наименьшее значение может иметь длина отрезка AB?

Ответ: $\dfrac{\sqrt{17} - 2}{2}$.

6. Точка A лежит на графике функции $y = 0.125(x^2 - 12x)$, точка B – на кривой $x^2 + y^2 - 18x - 12y + 97 = 0$. Какое наименьшее значение может иметь длина отрезка AB?

Ответ: $\sqrt{5}/2$.

7. На кривой $y = 2x - x^2$ найти точку расстояние от которой до прямой $y = x + 1$ будет наименьшим. Сделать чертеж.

Ответ: $(0.5; 0.75)$.

8. На кривой $y = x^2 + x$ найти точку расстояние от которой до прямой $y = x - 1$ будет наименьшим. Сделать чертеж.

Ответ: $(0; 0)$.

9. Точки A и B расположены на координатных осях плоскости xOy. Какую наименьшую длину может иметь отрезок AB, если ему принадлежит точка $M(1; 8)$?

Ответ: $5\sqrt{5}$.

10. Точки A и B расположены на координатных осях плоскости xOy. Какую наименьшую длину может иметь отрезок AB, если он принадлежит касательной к графику функции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$?

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}$.

Примеры решения задач с экстремальным содержанием

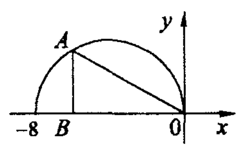
В таких задачах исследуемую на экстремум функцию необходимо записывать как площадь, периметр, длину диагонали или что-то иное, соотвстствующее условию задачи, зависящее от какой-либо переменной, чаще всего – координаты (абсциссы) искомой или характерной точки. Затем исследование на экстремум ведется по обычному алгоритму.

Пример 7. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольного треугольника, одна из вершин которого лежит в начале координат, вершина с прямым углом – на оси x, а третья – на графике функции $y=\sqrt{-8x-x^2}$?

Решение. Чтобы понять, о площади какого треугольника идет речь, необходимо начертить его, а для этого, хотя бы схематично, изобразить график заданной функции. Для начала необходимо выяснить область определения функции, которая, очевидно, является ограниченной. Для этого решим неравенство $-8x-x^2\geq 0 \Leftrightarrow x(x+8)\leq 0$.

Методом интервалов получим $x\in[-8;0]$.

Затем возведем левую и правую части функции в квадрат, оговорив предварительно, что $y\in[0;+\infty)$ и получим $y^2+x^2+8x=0\Rightarrow$ $\Rightarrow y^2+(x+4)^2=16$. Таким образом, график данной функции представляет собой полуокружность радиусом 4, с центром в точке $(-4;0)$, расположенную во второй четверти. На рисунке показан график такой функции и искомый треугольник AOB. Точка B лежит на оси Ox, ее координаты $(x;0)$, где x – переменная. Абсцисса точки A та же, что и у точки B, так как отрезок AB перпендикулярен OB по условию задачи. Ордината точки A определяется тем, что она лежит на графике заданной кривой, следовательно, координаты точки $A\left(x;\sqrt{-8x-x^2}\right)$.



Площадь прямоугольного треугольника AOB равна полупроизведению его катетов:

$$S(x)=\frac{1}{2}AB\cdot BO=\frac{1}{2}(y_A-y_B)(x_O-x_B)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{-8x-x^2}-0\right)(0-x)=$$

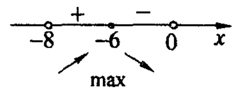
$$=-\frac{1}{2}x\sqrt{-8x-x^2}.$$

Исследуем на экстремумы функцию $S(x)$, для чего вычислим ее производную $S'(x)=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{-8x-x^2}+\frac{x}{2\sqrt{-8x-x^2}}(-8x-x^2)'\right)$ и найдем критические точки.

Производная $S'(x)$ определена для всех $x\in(-8;0)$, приравняв ее нулю, найдем критические точки: $S'(x)=0\Rightarrow x_1=0$ и $x_2=-6$. Очевидно, искомое значение $x=-6$, так как при $x=0$ площадь треугольника тоже равна нулю. Тем не менее, определим знаки производной на установленных интервалах и выясним тип экстремума для $x=-6$:

Как и предполагалось, наибольшее значение площадь треугольника будет иметь при $x=-6$. Осталось только вычислить это значение

$$S(-6)=-\frac{1}{2}(-6)\sqrt{-8(-6)-(-6)^2}=6\sqrt{3}.$$

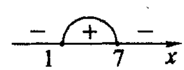


Ответ: $6\sqrt{3}$ кв. ед.

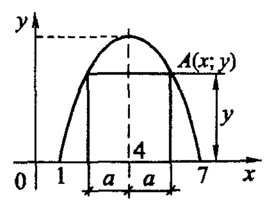
Пример **8.** Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольника, две вершины которого лежат на оси x, а две другие – на графике функции $y=(x-1)(7-x)$, $y\ge 0$?

Решение. Как и в предыдущем примере, чтобы понять, о площади какого прямоугольника идет речь, необходимо начертить его, а для этого построить график заданной функции, причем сделать это надо более тщательно, чем ранее, поскольку две вершины симметричного прямоугольника могут располагаться только на симметричной кривой. Область определения функции, для заданной области значений $y\ge 0$, вычисляется как решение неравенства $(x-1)(7-x)\ge 0$.

Методом интервалов получим $x\in[1;7]$.



Вершина параболы имеет координаты $(4;9)$. График заданной функции показан на рисунке. Осью симметрии графика параболы является вертикальная прямая, проходящая через вершину параболы, т.е. в данном случае – прямая $x=4$. Вершины прямоугольника, по условию, принадлежат графику параболы, следовательно, этот прямоугольник расположен симметрично относительно той же прямой $x=4$, что и парабола. Таким образом, если обозначить основание искомого прямоугольника через $2a$, то его площадь $S=2a\cdot y$, где



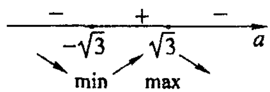
y – ордината вершины прямоугольника, лежащей на параболе, являющаяся также высотой этого прямоугольника (см. рис.). Полуширина прямоугольника a является переменной, как и ордината y; чтобы исследовать функцию S на экстремумы, необходимо записать ее как функцию одного аргумента. Здесь возможны два варианта: 1) выразить ординату y через полуширину a и тем самым представить площадь как функцию переменной a, или 2) выразить полуширину a через абсциссу x, и, так как ордината y параболы задана как функция x, представить площадь прямоугольника как функцию переменной x.

Рассмотрим оба варианта.

1) Абсцисса x точки A связана с полушириной прямоугольника a очевидным соотношением (см. рис.) $x = 4 + a$. следовательно. подставив это соотношение в уравнение параболы. получим:

$$y = (x-1)(7-x) = (4+a-1)(7-4-a) \Rightarrow y(a) =$$
$$= (3+a)(3-a) \Rightarrow y(a) = 9 - a^2.$$

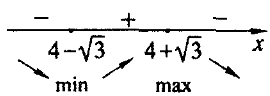
Подставив это выражение в формулу площади прямоугольника. получим ее как функцию переменной a: $S(a) = 2a(9-a^2) = 18a - 2a^3$. Вычислим ее производную по переменной a: $S'_a(a) = 18 - 6a^2$ и найдем критические точки $A'_a(a) = 0 \Rightarrow 18a - 2a^3 = 0 \Rightarrow a_1 = \sqrt{3}$ и $a_2 = -\sqrt{3}$. Определим знаки производной на установленных интервалах и выясним типы экстремумов.



Следовательно. наибольшее значение площади прямоугольника будет при $a = \sqrt{3}$.

Осталось его вычислить: $S\left(\sqrt{3}\right) = 18\sqrt{3} - 2\left(\sqrt{3}\right)^3 = 12\sqrt{3}$.

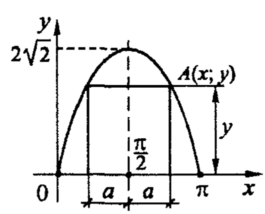
2) Второй вариант заключается в следующем: как уже отмечалось в первом варианте, $x = 4 + a \Rightarrow a = x - 4$. Тогда площадь прямоугольника можно записать как функцию абсциссы x: $S(x) = 2(x-4)(x-1)(7-x) =$ $= 2(x-4)(8x - x^2 - 7)$. Производная от площади (в этом варианте – по x) $S'_x(x) = 2\left((8x - x^2 - 7) + (x-4)(8-2x)\right) = 48x - 6x^2 - 78$ становится равной нулю при $x_1 = 4 + \sqrt{3}$ и $x_2 = 4 - \sqrt{3}$. Исследование знаков этой производной показывает (см. ниже), что площадь имеет максимум при $x = 4 + \sqrt{3}$ и он равен $S(4 + \sqrt{3}) = 12\sqrt{3}$.



Ответ: $12\sqrt{3}$ кв. ед.

Пример 9. Какой наибольший периметр может быть у прямоугольника, две вершины которого лежат на оси x, а две другие – на графике функции $y = 2\sqrt{2}\sin x$. $0 \le x \le \pi$?

Решение. Данная задача аналогична показанной в предыдущем примере, что особенно заметно на рисунке, где приведен график данной функции и показан прямоугольник. периметр которого нас интересует. Как и в предыдущем примере две вершины симметричного прямоугольника могут располагаться только на симметричной кривой. Осью симметрии графика функции является верти-



кальная прямая $x=\pi/2$. Вершины прямоугольника, по условию, принадлежат графику функции, следовательно, этот прямоугольник расположен симметрично относительно той же прямой $x=\pi/2$, что и график функции (см. рис.). Таким образом, если обозначить основание искомого прямоугольника через $2a$, то его периметр $P=2(2a+y)$, где y – ордината вершины прямоугольника, лежащей на параболе, являющаяся также высотой этого прямоугольника. Полуширина прямоугольника a является переменной, как и ордината y; чтобы исследовать периметр P на экстремумы, необходимо записать его как функцию одного аргумента. Здесь возможны те же два варианта, что и в предыдущем примере. Ограничимся одним из них. Выразим ординату y через полуширину a и, тем самым, представим периметр как функцию переменной a. Абсцисса x точки A связана с полушириной прямоугольника a очевидным соотношением (см. рис.) $x=\dfrac{\pi}{2}+a$, следовательно, подставив это соотношение в уравнение функции, получим: $y=2\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+a\right)=2\sqrt{2}\cos a$, с областью определения $a\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$. Подставив полученное выражение в формулу периметра прямоугольника, получим его как функцию переменной a: $P(a)=4(a+\sqrt{2}\cos a)$. Вычислим производную по переменной a: $P_a'(a)=4(1-\sqrt{2}\sin a)$ и найдем критические точки $P_a'(a)=0\Rightarrow 4(1-\sqrt{2}\sin a)=0\Rightarrow \sin a=1/\sqrt{2}\Rightarrow \quad \Rightarrow a=(-1)^n\dfrac{\pi}{4}+\pi n$. Из множества критических точек области определения функции $P(a)$ принадлежит лишь одна – $a=\pi/4$, следовательно, это и есть искомое значение, и нет необходимости определять тип экстремума в этой точке. Осталось вычислить наибольший периметр прямоугольника $P\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=4\left(\dfrac{\pi}{4}+\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4}\right)=\pi+4$.

Ответ: $(\pi+4)$.

Задачи

1. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольника $OABC$, если точка O – начало координат, точки A и C принадлежат различным осям координат, а точка B – графику функции $y=5x(x-4)^2$, $0\le x\le 4$?

Ответ: 80 кв. ед.

2. На графике функции $y = 16x - x^3$, $x \geq 0$; $y \geq 0$ найти такую точку A, чтобы площадь треугольника OAB была наибольшей, если точка O – начало координат, а точка B – проекция точки A на ось Ox. Найти эту площадь.

Ответ: $A\left(2\sqrt{2};16\sqrt{2}\right)$; 32 кв. ед.

3. На графике функции $y = \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 8$ найти такую точку A, чтобы площадь треугольника с вершинами A, $O(0;0)$ и $B(6;4)$ была наименьшей. Сделать чертеж. Найти эту площадь.

Ответ: $A(6;8)$; 12 кв. ед.

4. Какая наименьшая длина диагонали может быть у прямоугольника, две вершины которого лежат на оси x, а две другие – на графике функции $y = 0.5(9 - x^2)$, $y \geq 0$.

Ответ: $2\sqrt{5}$.

5. Какой наибольший периметр может иметь прямоугольник, две вершины которого лежат на оси Ox в заданном промежутке, а две другие – на графике функции, заданной уравнением $f(x) = 4\sin x$, $[0;\pi]$?

Ответ: $\left(4\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$.

6. Найти наибольший и наименьший периметры, которые могут быть у прямоугольника, две вершины которого лежат на оси x, а две другие – на графике функции $y = 4(1 + \sin x)$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$.

Ответ: $\max\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]} P\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} + 8 + 4\sqrt{3}$; $\min\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]} P\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{10\pi}{3} + 8 - 4\sqrt{3}$.

Другие экстремальные задачи

7. Найти число, которое превышало бы свой квадрат на максимальное значение.

8. Число 18 разбить на такие два слагаемые, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

9. Сумма квадратов двух положительных чисел равна 300. Подобрать эти числа так, чтобы произведение одного из них на квадрат другого было бы наибольшим.

10. Разбить число 27 на три положительных слагаемых так, чтобы два из них относились, как 1:2, а произведение трех слагаемых было бы наибольшим.

11. В арифметической прогрессии второй член равен 6. При каком значении разности прогрессии $d \le 2$ произведение первого, третьего и шестого членов прогрессии будет наименьшим?

12. На странице текст должен занимать $384\ см^2$. Верхние и нижние поля должны быть по 3 см, правое и левое – по 2 см. С точки зрения экономии бумаги, каковы должны быть наиболее выгодные размеры страницы?

13. На двух стройплощадках возводят два одноэтажных склада общей площадью $600\ м^2$. Стоимость постройки склада прямо пропорциональна квадрату его площади. Кроме того, известно, что строительство второго склада обходится на 40% дороже первого. Какой должна быть площадь каждого склада, чтобы стоимость строительства была наименьшей?

14. Из пункта A вышел пешеход. После того, как он прошел 6 км, из пункта A следом за ним выехал велосипедист со скоростью, на 9 км/ч большей, чем скорость пешехода. Когда велосипедист догнал пешехода, они повернули назад и вместе вернулись в пункт А со скоростью 4 км/ч. Какой должна была быть первоначальная скорость пешехода, чтобы время его прогулки было наименьшим?

15. В два различных сосуда налиты растворы соли: в первый 5 кг, во второй – 20 кг. При испарении воды процентное содержание соли в первом сосуде увеличилось в p раз, во втором – в q раз, причем известно, что $pq = 9$. Какое наибольшее количество воды могло испариться при этом из обоих сосудов вместе?

16. В прямоугольный треугольник с гипотенузой 24 см и углом $60°$ вписали прямоугольник, основание которого лежит на гипотенузе. Каковы должны быть длины сторон прямоугольника, чтобы его площадь была максимальной?

17. Вычислить стороны прямоугольника с периметром 72 см, имеющего наибольшую площадь.

18. Вычислить наибольшую площадь равнобедренного треугольника, вписанного в окружность радиуса R.

19. В равнобедренный треугольник вписан квадрат с диагональю $a\sqrt{2}$. Найти угол при основании треугольника, если известно, что площадь треугольника – наименьшая из возможных.

Составить уравнения окружности наименьшего радиуса с центром в точке A, имеющей хотя бы одну общую точку с параболой:

20. $y=\frac{1}{8}\left(x^2-4x\right)$, $A(5;\ 0)$. **21.** $y=\frac{x^2-6x}{2}$, $A(9;\ 3)$.

22. $y=\frac{1}{2}\left(2x-x^2\right)$. $A(7;\ -7)$.

На графике функции $y=f(x)$ найти точку, ближайшую к точке A:

23. $f(x)=x^2$, $A\left(2;\ \frac{1}{2}\right)$. **24.** $f(x)=\sqrt{x}$, $A(3;\ 6)$.

25. $f(x)=\frac{16}{\sqrt{3}\cdot x^3}-2$, $x>0$, $A(0;\ 2)$.

На линии, заданной в плоскости XOY уравнением, найти точку, расстояние от которой до заданной прямой будет наименьшим:

26. $\log_3(y+1)+\log_3(3-x)=1$ и $3x-4y-12=0$.

27. $\log_3(3+x)+\log_3(1-y)=1$ и $y=3(x+2)$.

28. $\log_2(x-4)+\log_2(2-y)=2$ и $y=\frac{1}{4}x+2$.

29. На графике функций $f(x)=6\sqrt{x}$ указать точку A, расстояние от которой до точки $M(25;\ 0)$ будет наименьшим. Определить это расстояние, выполнить чертеж.

30. На графике функции $y=3-1{,}5x^2$ указать точки, расстояние от которых до начала координат будет наименьшим. Вычислить это расстояние.

31. Найти такое значение x из отрезка $[1;\ 3]$, что точка с абсциссой x и ординатой $y=\sqrt{12-2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}}$ наиболее удалена от начала координат.

32. Точки A и B расположены на осях координат. Какую наименьшую длину может иметь отрезок AB, если ему принадлежит точка $M(1;\ 8)$?

33. На параболе $y=\dfrac{(x+4)^2}{8}$ найти точку, ближайшую к точке $M(2;0)$.

Определить расстояние между этими точками. Сделать чертеж.

34. Точка A лежит на графике функции $y=\dfrac{1}{8}\left(x^2-12x\right)$, точка B – на графике кривой $x^2+y^2-18x-12y+97=0$. Какую наименьшую длину может иметь отрезок AB?

Определить расстояние между параболой и прямой:

35. $y=x^2+x$, $y=x-1$.

36. $y=x^2$, $y=2x-2$.

37. $y=-x^2+x-2$, $y=2x+1$.

38. $y=x^2-8x+16$, $y=-2x+1$.

39. Определить расстояние между кривыми: а) $y=x^2+1$ и $y=\sqrt{x-1}$;

б) $y=2^x$ и $y=\log_2 x$.

40. В некоторой точке кривой $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ к ней проведена касательная. При каком значении абсциссы точки касания расстояние от начала координат до касательной будет наибольшим? Сделать чертеж и вычислить это расстояние.

41. Вычислить минимальную длину отрезка касательной к графику функции $y=f(x)$, заключенного между осями координат:

а) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$.

Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольного треугольника, одна из вершин которого лежит в начале координат, вершина прямого угла – на оси OX, а третья – на графике функции, заданной уравнением:

42. $y=12x-3x^3$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

43. $y=16x-2x^3$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

44. $y=5x(4-x)^2$, $0\le x\le 4$.

45. $y=(x-4)(15-2x)$, $y\ge 0$.

46. Какой наибольший периметр может иметь прямоугольник, две вершины которого лежат на оси OX в заданном промежутке, а две другие – на графике функции, заданной уравнением:

а) $f(x)=4\cos x$; $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$; б) $f(x)=4\sin x$; $[0;\pi]$.

47. На графике функции $y=0.25x^2-x+8$ указать точку A такую, что площадь треугольника AOB, где $O(0;0)$, $B(5;5)$ была бы наименьшей. Вычислить эту площадь.

48. Какая наименьшая площадь может быть у треугольника OAB, если его стороны OA и OB лежат на графике функции, а прямая AB проходит через точку М: а) $y=\dfrac{x-|x|}{2}$; $M(0;-1)$; б) $y=|x|-x$; $M(0;1)$?

49. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольника, координаты вершин которого удовлетворяют уравнению, а стороны параллельны осям координат:

а) $|y|=(x-1)(4-x)$; $1<x<4$; б) $|y|=(x-2)(8-x)$; $2<x<8$?

50. Из всех прямоугольников, у которых две вершины лежат на оси абсцисс, а две другие – на параболе $y=3-x^2$, выбран прямоугольник с наименьшей площадью. Вычислить эту площадь.

51. Криволинейная трапеция ограничена графиком функции $y=x^2$ и прямыми $y=0$, $x=1$ и $x=2$. В какой точке параболы надо провести к ней касательную, чтобы она отсекала от криволинейной трапеции обычную трапецию наибольшей площади?

52. В параболический сегмент, ограниченный параболой $y=9-x^2$ и осью OX вписать равнобедренную трапецию наибольшей площади, если одно основание трапеции совпадает с основанием параболического сегмента.

53. Криволинейная трапеция ограничена кривой $y=e^x$, прямыми $y=0$, $x=0$, $x=1$. В какой точке кривой $y=e^x$ $(0<x<1)$ надо провести касательную, чтобы она отсекала от криволинейной трапеции обычную трапецию наибольшей площади?

Многие стереометрические задачи, приведенные в заданиях для самостоятельного решения, формально относятся к задачам на экстремальные значения, но допускают красивое геометрическое решение без применения производной!

54. Число 180 разбить на три положительных слагаемых так, чтобы два из них относились как 1:2, а произведение трех слагаемых было наибольшим.

55. Одно из оснований равнобокой трапеции равно 10 м, другое в 4 раза больше боковой стороны. При какой длине боковой стороны площадь трапеции будет наибольшей?

56. Основание равнобедренного треугольника равно 4 см. Какой должна быть длина боковой стороны, чтобы отрезок, параллельный основанию и равный по длине боковой стороне треугольника, отсекал от него трапецию наибольшей возможной площади?

57. Найти расстояние от точки $A(5;-1)$ до параболы $y=x^2$ (наименьшее расстояние между точкой A и точкой параболы).

58. На каком наименьшем расстоянии от начала координат может находиться точка графика функции $y=\dfrac{5}{6x^2}-\dfrac{x}{3}$?

59. Найти расстояние точки $M\,(p;p)$ от параболы $y^2=2px$.

60. Какой наименьший периметр может быть у прямоугольника, две стороны которого лежат на координатных осях, а одна из вершин – на графике функции $y=x+\dfrac{8}{x}$?

61. Какая наименьшая сумма квадратов сторон может быть у прямоугольника, стороны которого параллельны осям координат, одна вершина совпадает с точкой $M(12;3)$, а противолежащая вершина находится на графике функции $y=x^2/6$?

62. Какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, у которого вершина острого угла лежит в начале координат, вершина другого – на графике функции $y=x+\dfrac{16}{x^2}$, $x>0$, а вершина прямого угла – на оси Ox?

63. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольника, две стороны которого лежат на координатных осях, а одна из вершин – на графике $y=(x-4)(15-2x)$, $y>0$?

64. Какая наименьшая площадь может быть у треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику $y=2x^2-6$?

65. Какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, гипотенуза которого лежит на касательной к графику функции $y=3+\dfrac{x^2}{4}$, катет – на оси Ox, а одна из вершин совпадает с точкой касания?

66. Рассматриваются все треугольники с вершиной $(5;0)$, две другие вершины каждого из них симметричны относительно начала координат и лежат на графике $y = x + \frac{4}{x}$. Найти наименьшую возможную площадь такого треугольника.

67. Вычислить площадь прямоугольника, две стороны которого лежат на координатных осях, одна из вершин – на графике функции $y = \frac{5}{x} + \frac{4x}{3}$, а диагональ имеет наименьшую длину.

68. Доказать, что прямая, не параллельная оси ординат, проходящая через начало координат, пересекает график функции $f(x) = 2x^2 + 2x - 0{,}125$ в двух различных точках. Каким должен быть угловой коэффициент прямой, чтобы расстояние между точками пересечения было наименьшим?

69. Вездеход, находящийся на пересеченной местности в 27 км от прямолинейной шоссейной дороги, должен доставить больного в ближайшую больницу, расположенную в населенном пункте на расстоянии 45 км по шоссе от ближайшей к вездеходу точки шоссе. Какой маршрут необходимо избрать водителю вездехода, чтобы время движения было наименьшим, если скорость, которую развивает вездеход на шоссе, равна 55 км/ч, а на пересеченной местности – 44 км/ч?

70. Какой наименьший и наибольший периметры могут быть у прямоугольника, две вершины которого лежат на оси Ox, а две – на графике функции $y = 2\sqrt{2}(1 + \sin x)$ $\left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]\right)$?

71. Какая наименьшая площадь может быть у треугольника OAB, если его стороны OA и OB лежат на графике функции $y = \frac{|x| - x}{2}$, а прямая AB проходит через точку $M(0;1)$?

72. На плоскости задана точка $M(1/2\,;\,1)$. Проходящая через точку прямая образует вместе с положительными полуосями координат некоторый треугольник. Какое наименьшее значение может принимать площадь этого треугольника?

73. Вычислить наименьшую площадь треугольника, ограниченного осью OX, прямой, параллельной оси OY и касательной к графику функции $y = \frac{x^2}{6} + 2$ в точке пересечения с этой прямой.

74. Центр одного круга, радиус которого меньше $a/2$, совпадает с серединой стороны квадрата $(a \times a)$; второй круг касается противолежащей стороны квадрата и первого круга, а центры кругов лежат на прямой, проходящей через центр квадрата. Какие значения может принимать площадь части квадрата, находящейся вне кругов?

75. В трапеции ABCD основания AB и CD имеют соответственно длины 2 и 5, высота равна 4. Вычислить наименьшую возможную сумму квадратов площадей частей, на которые трапеция разбивается прямой, проходящей через вершину A и пересекающей сторону CD.

76. При каких размерах коробка (с крышкой) с квадратным основанием и полной поверхностью S имеет наибольший объем?

77. $(в)$ Вычислить наибольший объем цилиндра, полная поверхность которого 2π.

78. $(в)$ Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак объемом V. Какими должны быть его размеры, чтобы на его изготовление ушло наименьшее количество материала?

79. В качестве домашнего задания по геометрии учащиеся 10-го класса делали модели многогранников. Вася получил задание: сделать из проволоки каркас правильной треугольной пирамиды, обозначив в нем плоское сечение, проходящее через середины четырех ребер пирамиды и имеющее площадь S. Вася решил сделать такую пирамиду, чтобы на ее изготовление (не считая сечения) пошло наименьшее количество проволоки. Определить: а) прав ли был Вася, сделав правильный тетраэдр; б) будет ли в этом случае наименьшей сумма квадратов длин всех ребер пирамиды?

80. Суточные расходы при плавании судна состоят из двух частей: постоянной, равной a руб., и переменной, возрастающей пропорционально кубу скорости (kv^3 руб.). При какой скорости v плавание судна будет наиболее экономичным?

81. На изготовление открытого контейнера объемом 10 м^3 в форме прямоугольного параллелепипеда, одна из боковых граней которого – квадрат, требуются уголки по длине всех ребер (12 ребер) и фанера на боковые стенки и пол. Цена уголков 1 у.е. за погонный метр. Цена фанеры – 4 у.е. за кв.м. Каковы должны быть размеры контейнера, чтобы расходы на материал были наименьшими?

82. Найти все значения параметра p $(p \in R)$, при которых
$\min\left(px+\left|x^2-4x+3\right|\right)>1$

83. Касательная к графику функции $y(x)=1/x^2$ такова, что абсцисса b точки касания принадлежит отрезку $[5;9]$. При каком значении b площадь треугольника, ограниченного этой касательной, осью Ox и вертикальной прямой $x=4$, будет наибольшей? Чему равна эта наибольшая площадь?

84. В основании треугольной пирамиды $SABC$ с высотой $\frac{1}{3}\sqrt{30}$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 8. Вершина S проектируется на основание пирамиды в точку, расположенную в середине ребра AB. Через вершину S проводятся сечения пирамиды плоскостями, параллельными ребру AB. Вычислить наибольшее возможное значение площади сечения.

85. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро $AD=2$, ребро $DD_1=3$, диагональ грани $BD=\sqrt{5}$. Точка M лежит в плоскости B_1AD_1. Какую наименьшую площадь может иметь треугольник MBD? На каком расстоянии находится точка M от основания $ABCD$ в этом случае?

86. Основанием пирамиды служит ромб со стороной 4 и углом $60°$, а все боковые грани наклонены к плоскости основания под углом $60°$. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку M, лежащую на одной из сторон ромба, и меньшее боковое ребро, не пересекающее эту сторону? На какие части делит сторону точка M, когда площадь сечения наименьшая?

87. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через вершину A, середину ребра A_1D_1 и центр грани D_1DCC_1 проведена плоскость. Из всех сечений куба, параллельных этой плоскости, найдите сечение с наибольшей площадью и определите его площадь, считая длину ребра равной a.

88. Прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=6$ и $AD=12$ служит основанием пирамиды $SABCD$, у которой грани SAB и SAD перпендикулярны плоскости основания и ребро $SD=13$. Через самое длинное боковое ребро пирамиды проведена плоскость так, что полученное сечение пирамиды имеет наименьший периметр. Вычислить площадь этого сечения.

89. ($в$) В сферу радиуса R вписана правильная треугольная пирамида, у которой высота составляет $8/13$ радиуса сферы. Какой наименьший периметр может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через апофему? Вычислить отношение объемов частей, на которые это сечение делит пирамиду.

90. Какой сектор следует вырезать из круга, чтобы из оставшейся части можно было свернуть воронку наибольшей вместимости?

91. ($в$) На графике функции $y=\frac{3}{\sqrt{2}}x\ln x$, где $x\in\left[e^{-1,5};\infty\right)$, найти такую точку M, что отрезок касательной к графику функции в этой точке, заключенный между точкой M и осью Oy, имеет наименьшую длину.

92. ($в$) В какой точке графика функции $y=e^{-|x|}$ следует провести касательную, чтобы площадь треугольника, ограниченного этой касательной и осями координат, была наибольшей?

93. К реке шириной a м построен под прямым углом канал шириной b м. Какой максимальной длины суда могут входить в этот канал?

94. ($в$) В сферу вписана правильная треугольная пирамида, у которой боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом $45°$, а радиус окружности, описанной около боковой грани, равен R. Между боковой гранью пирамиды и сферой расположен цилиндр, одно из оснований которого (ближнее к центру сферы) лежит в плоскости боковой грани, а окружность другого основания принадлежит сфере. При какой высоте цилиндра его объем будет наибольшим? Вычислить этот объем.

95. ($в$) В конус с высотой h и радиусом основания R вписана первая правильная треугольная призма так, что ее нижнее основание лежит в плоскости основания конуса, а вершины верхнего основания принадлежат боковой поверхности конуса. Вторая призма, подобная первой, расположена так, что вершины ее верхнего основания принадлежат боковой поверхности конуса, а ее нижнее основание лежит в плоскости верхнего основания первой призмы. Вычислить отношение высоты первой призмы к высоте конуса, при котором объем второй призмы принимает наибольшее значение.

96. ($в$) В правильную треугольную пирамиду вписаны два шара так, что первый касается основания пирамиды и ее боковых ребер, а второй шар касается внешним образом первого шара и боковых граней пирамиды. Радиус первого шара равен R. Вычислить радиус второго шара, если объем пирамиды при этих условиях является минимально возможным.

97. ($в$) В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом, тангенс которого равен $\sqrt{2}/5$. Через вершину S параллельно гипотенузе треугольника ABC проведена плоскость так, что площадь получившегося сечения имеет максимально возможное значение. Вычислить отношение, в котором эта плоскость делит объем пирамиды.

98. ($в$) В основании треугольной пирамиды лежит равносторонний треугольник ABC, одно боковое ребро TA перпендикулярно основанию. Пирамида вписана в сферу радиуса R. Угол между TB и медианой основания BF равен $60°$. Вычислить наименьшую площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через медиану основания AD.

99. ($в$) Правильная треугольная пирамида со стороной основания b вписана в сферу. Центр сферы делит высоту пирамиды в отношении $\sqrt{5}:1$, считая от вершины пирамиды. Одно из оснований правильной четырехугольной призмы лежит в плоскости основания пирамиды, а вершины другого основания призмы лежат на сфере, причем призма расположена вне пирамиды. Вычислить наибольшее значение объема призмы.

100. ($в$) В сферу радиуса R вписана правильная треугольная пирамида, у которой площадь боковой поверхности в $\sqrt{3}$ раз больше площади основания. Какой наименьший периметр может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через высоту основания? На какие части делит эта плоскость боковое ребро, которое она пересекает?

101. ($в$) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $(AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1)$ $AB = 2$, $BC = 1$, $BB_1 = 2$. Вычислить минимально возможное значение площади сферы, касающейся ребер AD и C_1D_1, при условии, что центр сферы принадлежит сечению параллелепипеда плоскостью, проходящей через ребро CD и составляющей с плоскостью $ABCD$ угол в $30°$.

102. (*в*) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $(AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1)$ $CD = 4$, $AD = 9/2$, $DD_1 = 9$. Вычислить минимально возможное значение объема шара, касающегося ребер CD и B_1C_1, при условии, что центр шара принадлежит сечению параллелепипеда плоскостью, проходящей через ребро C_1D_1 и составляющей с плоскостью $A_1B_1C_1D_1$ угол, равный $\operatorname{arctg}\left(\sqrt{5}/2\right)$.

103. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1\,(AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1)$ с ребром, равным $\sqrt{61}$. На продолжении ребер B_1C_1 и DC расположены точки P и Q соответственно, причем $PB_1 : PC_1 = 1:3$ и $QD : DC = 1:4$. Вычислить наименьшее значение радиуса шара с центром на отрезке PQ, касающегося ребра DD_1.

104. (*в*) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с высотой, не меньшей h, расположена полусфера радиуса $r = \sqrt{3}$ так, что ее касаются все боковые грани пирамиды, а центр полусферы лежит на основании ABC пирамиды. Вычислить наименьшее возможное значение объема пирамиды.

105. (*в*) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с высотой, не меньшей h, расположена полусфера радиуса $r = 1$ так, что ее касаются все боковые грани пирамиды, а центр полусферы лежит на основании ABC пирамиды. Вычислить наименьшее возможное значение полной поверхности пирамиды.

106. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребрами $AB = 6$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$ через его диагональ AC_1 проведена плоскость так, что полученное сечение имеет наименьшую сумму квадратов сторон. Вычислить площадь сечения и угол между секущей плоскостью и гранью $ABCD$.

Ответы:

7. $1/2$. **8.** 9; 9. **9.** 10; $10\sqrt{2}$. **10.** 6; 12; 9. **11.** -4. **12.** 30х20 см. **13** 350 м^2; 250 м^2. **14.** 6 км/ч. **15.** $8\frac{1}{3}$ кг. **16.** $3\sqrt{3}$ см, 12 см. **17.** 18 см, 18 см.

18. $\dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. **19.** $\operatorname{arctg} 2$. **20.** $(x-5)^2+(y-10)^2=\dfrac{125}{4}$.

21. $(x-9)^2+(y-3)^2=\frac{17}{4}$. **22.** $(x-7)^2+(y+7)^2=\frac{17}{4}$. **23.** $B(1;1)$.

24. $B(4;2)$. **25.** $B\left(2;\frac{2}{\sqrt{3}}-2\right)$. **26.** $A\left(1;\frac{1}{2}\right)$. **27.** $A(-2;2)$. **28.** $A(8;1)$.

29. $A\left(7;6\sqrt{7}\right)$, $AM=24$. **30.** $A_1\left(-\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$, $A_2\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$, $OA=\frac{\sqrt{17}}{3}$.

31. $x=2$. **32.** $5\sqrt{5}$. **33.** $A(0;2)$, $AM=2\sqrt{2}$. **34.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **35.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **36.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

37. $\frac{11}{4\sqrt{5}}$. **38.** $\frac{6}{\sqrt{5}}$. **39.** а) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; б) $\sqrt{2}\log_2\frac{e}{\log_2 e}$; *указание*: воспользуйтесь тем, что эти функции являются обратными друг другу, следовательно, их графики симметричны относительно прямой $y=x$, причем не пересекают ее. Тогда искомое расстояние будет равно расстоянию между касательными к кривым, параллельным прямой $y=x$. **40.** $x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, расстояние равно $\sqrt[6]{\frac{27}{128}}$. **41.** а) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}$. **42.** 6 кв.ед. **43.** 16 кв.ед. **44.** 40 кв.ед. **45.** 18 кв.ед. **46.** а) $2\left(2\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$; б) $2\left(2\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$. **47.** 10 кв.ед. **48.** а) 2 кв.ед.; б) 1 кв.ед. **49.** а) $3\sqrt{3}$ кв.ед.; б) $24\sqrt{3}$ кв.ед. **50.** 4 кв.ед. **51.** $M\left(\frac{3}{2};\frac{9}{4}\right)$.

52. Вершины трапеции имеют координаты: $A(-3;0)$; $B(-1;8)$; $C(1;8)$; $D(3;0)$. **53.** $A\left(\frac{1}{2};\sqrt{e}\right)$. **54.** 40; 80; 60. **55.** $3\frac{3}{4}$. **56.** $2\sqrt{2}$. **57.** $2\sqrt{5}$. **58.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

59. $\frac{p\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\sqrt{1+\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[3]{2}}$. **60.** 16. **61.** 90. **62.** 6. **63.** 36. **64.** 8. **65.** 8. **66.** 20.

67. 9. **68.** 1. **69.** Водитель должен ехать в направлении такой точки шоссе, которая расположена в 9 км от больницы со стороны приближения вездехода. **70.** $\min P=3\pi-4+4\sqrt{2}$; $\max P=\pi+4+4\sqrt{2}$. **71.** 2. **72.** 1.

73. $\frac{16}{3}$. **74.** $\left[a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right);a^2\left(1-\frac{\pi}{6}\right)\right]$. **75.** $103\frac{5}{9}$. **76.** Куб с ребром $\sqrt{\frac{S}{6}}$.

77. $\max V = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **78.** $R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$; $h = \sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}}$. **79.** Да. Да. **80.** $v = \sqrt[3]{\dfrac{a}{2k}}$.

81. Высота 2м; дно 2м × 2.5м. **82.** $p \in \left(1; 4 + 2\sqrt{2}\right)$. **83.** $b = 8$; $S = 1/8$.

84. $\max S = \dfrac{7\sqrt{35}}{3\sqrt{3}}$. $\boxed{85}$[*]. $\min S = \dfrac{3\sqrt{5}}{7}$; $\rho\left(M; (ABCD)\right) = \dfrac{12}{49}$.

$\boxed{86}$. $\min S = \dfrac{3\sqrt{13}}{2}$; отрезки стороны основания $1{,}5$ и $2{,}5$.

$\boxed{87}$. $\max S = \dfrac{a^2\sqrt{14}}{3}$. $\boxed{88}$. $S = \dfrac{15\sqrt{409}}{11}$. $\boxed{89}$. $\min P = \dfrac{R}{13}\left(10 + 2\sqrt{97}\right)$; отношение объемов $7:31$. **90.** Радианная мера вырезанного сектора $2\pi\left(1 - \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$.

91. $M\left(e^{-4/3}; -2\sqrt{2}e^{-4/3}\right)$. **92.** $\left(1; e^{-1}\right)$ или $\left(-1; e^{-1}\right)$.

93. $a\sqrt{1 + \sqrt[3]{\dfrac{b^2}{a^2}}} + b\sqrt{1 + \sqrt[3]{\dfrac{a^2}{b^2}}} = \left(a^{2/3} + b^{2/3}\right)^{3/2}$. **94.** $h = \dfrac{R}{3}$; $\max V = \dfrac{5\pi R^3}{27}$.

95. $\dfrac{1}{6}$. **96.** $r = \dfrac{R\left(\sqrt{33} - 1\right)}{16}$. **97.** 9:16. $\boxed{98}$. $\min S = \dfrac{\sqrt{3}R^2}{5\sqrt{2}}$.

99. $\max V = \dfrac{10b^3\sqrt{3}}{243}$. $\boxed{100}$. $P_{\min} = \dfrac{R\sqrt{10}}{\sqrt{3}} + R\sqrt{2}$; части бок. ребра $\dfrac{2R}{3\sqrt{3}}$ и $\dfrac{4R}{3\sqrt{3}}$. **101.** $\min S = 12\pi$. **102.** $\min V = 288\pi$. $\boxed{103}$. $\min R = 1$. **104.** Если $h \le \sqrt{3}$, то задача не имеет смысла. Если $\sqrt{3} < h \le 3$, то $\min V = \dfrac{27\sqrt{3}}{2}$. Если $h > 3$, то $\min V = \dfrac{3\sqrt{3}h^3}{h^2 - 3}$. **105.** Если $h \le 1$, то задача не имеет смысла. Если $1 < h \le 2$, то $\min S = 12\sqrt{3}$. Если $h > 2$, то $\min S = \dfrac{3\sqrt{3}h^2}{h - 1}$. $\boxed{106}$. $S = 7$; $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{13}}{6}$.

---

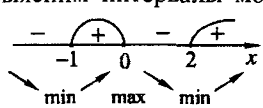
[*] Обведены номера задач, которые хорошо решаются геометрически.

Алгебраические (степенные) уравнения

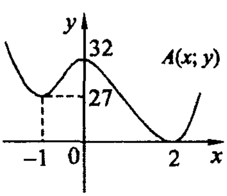
При решении уравнений достаточно часто возникает ситуация, когда обычное (аналитическое) решение невозможно, неочевидно или очень громоздко. В этом случае можно применить графическое решение, обозначив левую часть уравнения (правая часть – ноль) за некоторую функцию, например $f(x)$, и построив график этой функции. Тогда решениями исходного уравнения будут абсциссы точек пересечения графика функции с осью абсцисс (Ox) или касания с ней. Решить графически можно любое уравнение, основным недостатком этого метода является невозможность абсолютно точного построения графика и, как следствие, – приближенное решение уравнения. Исключением является ситуация, когда эти точки (пересечения или касания) являются характерными для графика функции, например, точками экстремума. Кроме того графическое решение, как правило, абсолютно точно позволяет выяснить число корней уравнения и область, в которой их следует искать.

Пример 1. Найти корень уравнения $3x^4-4x^3-12x^2+32=0$. Доказать, что он единственный.

Решение. В принципе, корень данного уравнения, если он целочисленный, можно найти подбором, но доказать, что он единственный, подбором, естественно, невозможно, как и найти иррациональный корень уравнения. Поэтому решим уравнение графически, обозначив его левую часть через функцию $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+32$ и построив ее график. Для этого исследуем функцию с помощью производной. Вычислим производную $f'(x)=12x^3-12x^2-24x$, найдем критические точки $f(x)=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow 12x^3-12x^2-24x=0 \Rightarrow x_1=0$, $x_2=2$ и $x_3=-1$. Определим знаки производной на установленных интервалах, выясним интервалы монотонности и типы экстремумов.



Найдем значения функции в точках экстремумов $f(-1)=27$, $f(2)=0$ и $f(0)=32$.



Таким образом, найден корень уравнения – это $x=2$. Для доказательства, что этот корень единственный, построим график функции $f(x)$, тем более, что исследование функции с помощью производной обеспечивает нас достаточной информацией для этого – см. рис. График зависимости левой части данного уравнения от переменной x однозначно доказывает, что уравнение имеет единственный корень при $x=2$, там, где зависимость имеет минимум, равный нулю, т.е. касается оси абсцисс.

Задачи

1. Найти корень уравнения. Доказать, что он единственный.

а) $3x^4+16x^3+18x^2+27=0$; б) $3x^4-16x^3+18x^2+27=0$;

в) $3x^4+4x^3-12x^2+32=0$.

Ответ: а) $\{-3\}$; б) $\{3\}$; в) $\{-2\}$.

Трансцендентные уравнения с тригонометрическими функциями

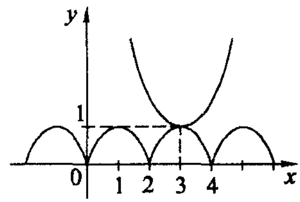
Трансцендентным уравнением вообще называют уравнение не сводящиеся к алгебраическому уравнению с помощью алгебраических преобразований, таких как: 1) прибавление к обеим частям уравнения одного и того же алгебраического выражения; 2) умножение обеих частей уравнения на одно и то же алгебраическое выражение; 3) возведение обеих частей уравнения в рациональную степень.

Простейшими трансцендентными уравнениями являются показательные, логарифмические и тригонометрические уравнения. В данном разделе мы рассмотрим трансцендентные уравнения, содержащие тригонометрические функции, которые, в принципе, нельзя решить аналитически. В этом случае наиболее приемлемым способом, как было показано в рассмотренном примере, является графическое решение, которое иногда может быть упрощено вследствие специфики тригонометрических функций, таких как периодичность и ограниченность.

В уравнениях, содержащих трансцендентные функции и алгебраические выражения, как правило, целесообразно предварительно сделать преобразования с целью уединения трансцендентного выражения в оной из частей уравнения (в левой или правой). Затем каждую из частей преобразованного уравнения рассматривают как самостоятельную функцию и строят их графики. Решениями исходного уравнения будут абсциссы точек пересечения графиков функций.

Пример 2. Решить уравнение $\sin^2\frac{\pi x}{2}=x^2-6x+10$.

Решение. В данном уравнении трансцендентное выражение уединено в левой части уравнения. Будем считать (обозначим) левую часть уравнения функцией $f(x)=\sin^2\frac{\pi x}{2}$, правую – функцией $f(x)=x^2-6x+10$. Построение графиков целесообразно начинать с более простой функции – в данном примере с параболы $\varphi(x)$. Абсциссу вершины параболы проще всего вычислить, взяв производную и приравняв ее нулю, т.е. как точки экстремума $\varphi'(x) = 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$. Ордината вершины параболы $\varphi(3) = 1$. Ветви параболы направлены вверх, следовательно, вершина параболы – минимум функции $\varphi(x)$. Но в левой части уравнения стоит ограниченная функция – ведь максимальное значение синуса равно единице, следовательно, либо точка максимума функции $f(x)$ совпадает с точкой минимума функции $\varphi(x)$ и уравнение имеет единственное решение $x = 3$, либо решений нет. Таким образом, в данной задаче можно не чертить графики функций, а просто вычислить значение функции $f(x)$ при $x = 3$: $f(3) = \sin^2 \frac{3\pi}{2} = (-1)^2 = 1$. Графики исследуемых функций касаются друг друга в единственной общей точке $(3;1)$ и данное уравнение имеет единственное решение $x = 3$. Для самопроверки можно нарисовать графики (см. рис.).



Ответ: $\{3\}$.

Пример 3. Решить уравнение $2|x-3| + x - 1 + 2\sin\frac{\pi x}{2} = 0$.

Решение. Поскольку в данном уравнении присутствует модуль, необходимо рассмотреть два варианта:

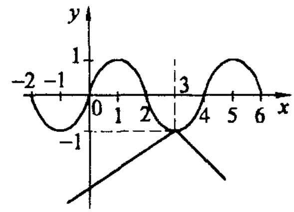
1) $x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$. Исходное уравнение при этом ограничении имеет вид $2x - 6 + x - 1 + 2\sin\frac{\pi x}{2} = 0 \Rightarrow \sin\frac{\pi x}{2} = \frac{7-3x}{2}$. Левую часть уравнения, содержащую трансцендентное выражение, будем считать функцией $f(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$, правую – функцией $\varphi(x) = \frac{7-3x}{2}$.

2) $x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3$. Исходное уравнение при этом ограничении имеет вид: $-2x + 6 + x - 1 + 2\sin\frac{\pi x}{2} = 0 \Rightarrow \sin\frac{\pi x}{2} = \frac{x-5}{2}$. Левая часть этого уравнения такая же, как и для $x \geq 3$, следовательно, функция $f(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$ определена для всех $x \in R$. Правую часть уравнения обозначим функцией $\psi(x) = \frac{x-5}{2}$.

Построение графиков начинаем с более простых функций, в данном примере – с прямых $\varphi(x)$ для $x \geq 3$ и $\psi(x)$ для $x < 3$. Затем начертим синусоиду, учитывая, что при $x = -2; 0; 2; 4; 6...$ $f(x) = \sin\frac{\pi x}{2} = 0$, при $x = 1; 5;...$ $f(x) = \sin\frac{\pi x}{2} = 1$, а при $x = -1; 3;...$ $f(x) = \sin\frac{\pi x}{2} = -1$.

Единственная общая точка синусоиды и ломанной прямой – $x = 3$ (см. рис.). Эта абсцисса и будет единственным решением исходного уравнения.

Ответ: $\{3\}$.



Задачи

Решить уравнения:

2. $\cos^2\frac{\pi x}{2} = x^2 - 4x + 5$.

Ответ: $\{2\}$.

3. $\sin\frac{\pi x}{2} = 6x - x^2 - 10$.

Ответ: $\{3\}$.

4. $2\left(x + |2x - 5|\right) = 1 + 4\sin \pi x$.

Ответ: $\{2{,}5\}$.

5. $2|x - 3| + x - 1 = 2\sin^2\frac{\pi x}{2}$.

Ответ: $\{3\}$.

Трансцендентные уравнения с логарифмической или показательной функциями

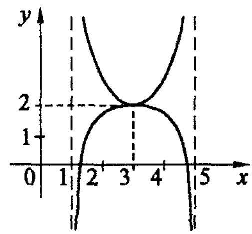
В данном разделе мы рассмотрим только те трансцендентные уравнения, содержащие логарифмические или показательные функции, которые, в принципе, нельзя решить аналитически. В этом случае наиболее приемлемым способом, как было показано в предыдущих примерах, является графическое решение.

В уравнениях, содержащих логарифмические или показательные функции и алгебраические выражения, как правило, целесообразно предварительно сделать преобразования с целью уединения трансцендентного выражения в одной из частей уравнения (в левой или правой). Затем каждую из частей преобразованного уравнения рассматривают как самостоятельную функцию и строят их графики. Решениями исходного уравнения будут абсциссы точек пересечения графиков функций.

Пример 4. Решить уравнение $\log_2(6x - x^2 - 5) = x^2 - 6x + 11$.

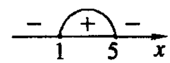
Решение. Для начала заметим, что данное уравнение можно преобразовать, используя определение логарифма, при этом получим уравнение также трансцендентное, но с показательной функцией: $2^{x^2 - 6x + 11} = 6x - x^2 - 5$. Полученное уравнение равносильно исходному. Решать его придется также графически, но в исходном уравнении функция, стоящая в левой части, имеет ограниченную область определения в отличие от функции, стоящей в левой части преобразованного уравнения. Таким образом, трансцендентное уравнение, содержащее логарифмическую функцию, в ряде случаев, может быть преобразовано в уравнение с показательной функцией, и обратно.

Считая такие преобразования, в общем, нецелесообразными, решим исходное уравнение. В нем трансцендентное выражение уединено в левой части уравнения. Будем считать левую часть уравнения функцией $f(x) = \log_2(6x - x^2 - 5)$, правую – функцией $\varphi(x) = x^2 - 6x + 11$. Построение графиков целесообразно начинать с более простой функции, в данном примере – с параболы $\varphi(x)$. Абсциссу вершины параболы проще всего вычислить, взяв производную и приравняв ее нулю, т.е. как точку экстремума $\varphi'(x) = 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$. Ордината вершины параболы $\varphi(3) = 2$. Ветви параболы направлены вверх, следовательно, вершина *параболы – минимум функции* $\varphi(x)$ (см. рис.).

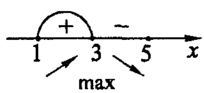


Для построения графика функции $f(x) = \log_2(6x - x^2 - 5)$ вычислим область определения, решив неравенство $6x - x^2 - 5 > 0$.

Методом интервалов получим:



Следовательно, $D(f) \in (1; 5)$. Затем исследуем функцию с помощью производной: $f'(x) = \dfrac{6 - 2x}{(6x - x^2 - 5)\ln 2}$. Критические точки: $x = 1$, $x = 3$ и $x = 5$. Определим интервалы знакопостоянства производной и тип экстремума, решив методом интервалов неравенство $\dfrac{6 - 2x}{(6x - x^2 - 5)\ln 2} > 0$:



Таким образом, функция $f(x)$ имеет один экстремум – это максимум в точке $x=3$. Значение этого максимума $f(3)=\log_2(18-9-5)=\log_2 4=2$ совпадает с минимумом параболы $\varphi(3)=2$, следовательно, решение уравнения найдено, это $x=3$. Таким образом, в данной задаче можно не чертить графики, но для иллюстрации решения задачи приведены графики обеих функций (см. рис.).

Ответ: $\{3\}$.

Задачи

Решить уравнения:

6. $\log_2(4x-x^2)=x^2-4x+6$.

Ответ: $\{2\}$.

7. $2^{x^2-2x-3}=3+2x-x^2$.

Ответ: $\{1\}$.

8. $e^{2x}-e^x=x$.

Ответ: $\{0\}$.

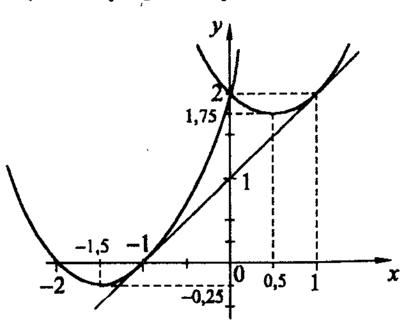
Задачи с параметром

Пример **5.** Определить, при каких значениях параметра p прямая $y=x+1$ является касательной к графику функции $y=x^2+px+2$. Сделать чертеж.

Решение. Поставленная задача может быть решена двумя, сугубо различными, способами.

Рассмотрим первый из них. Обозначив абсциссу точки касания через x_0, запишем уравнение касательной к данному семейству парабол. Вычислим значения функции и производной в точке с абсциссой x_0: $y=x_0^2+px_0+2$, $y'=2x+p \Rightarrow y'(x_0)=2x_0+p$ и составим уравнение:

$$y=(2x_0+p)(x-x_0)+x_0^2+px_0+2 \Rightarrow y=(2x_0+p)x-x_0^2+2.$$



Из всех касательных к данному семейству парабол следует выбрать те, которые совпадают с данной прямой, т.е. те касательные, у которых угловой коэффициент и ордината $y(0)$ равны соответствующим параметрам данной прямой. Приравняв соответствующие параметры, запишем систему двух уравнений с двумя неизвестными, решение которой даст как искомые значения параметра p, так и абсциссы точек касания данной прямой с параболами, которые будут получены из данного в задаче семейства парабол при найденных значениях параметра p:

$$\begin{cases} 2x_0 + p = 1 \\ 2 - x_0^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{01} = 1 \\ p = -1 \end{cases} \bigcup \begin{cases} x_{02} = -1 \\ p = 3. \end{cases}$$

Требуемые значения параметра p найдены, осталось лишь сделать чертеж.

Для этого запишем уравнения парабол, получаемых из данного семейства при $p = -1$ и $p = 3$, а именно $y = x^2 - x + 2$ и $y = x^2 + 3x + 2$. На рисунке показаны соответствующие параболы и данная прямая.

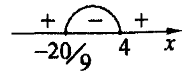
Второй способ решения позволяет вообще обойтись без вычисления производных и составления уравнения касательной. Проанализируем ситуацию, предложенную в задаче. Нам даны прямая и семейство парабол (каждое значение параметра p задает конкретную параболу и этого семейства). Если прямая и отдельная парабола из семейства касаются друг друга, то у них будет только одна общая точка, если общих точек две, то парабола и прямая пересекаются. Исходя из этих рассуждений, можно решить поставленную задачу. Найдем абсциссы точек пересечения данной прямой с семейством парабол. Поскольку у точек пересечения равны (совпадают) ординаты, т.е. равны левые части задающих выражений, то можно приравнять и правые части, в результате чего получим уравнение для нахождения абсцисс точек пересечения, содержащее параметр p: $x + 1 = x^2 + px + 2 \Rightarrow x^2 + (p-1)x + 1 = 0$. В зависимости от дискриминанта $D = (p-1)^2 - 4 \Rightarrow D = p^2 - 2p - 3$ полученное квадратное уравнение может иметь два различных корня ($D > 0$) или два одинаковых корня ($D = 0$). Два одинаковых корня дают абсциссу единственной общей точки прямой и параболы, т.е. точки касания. Найдем значения параметра p, при котором дискриминант равен нулю: $D = 0 \Rightarrow p^2 - 2p - 3 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow p_1 = -1$ и $p_2 = 3$. Для выполнения чертежа для найденных значений параметра p необходимо найти абсциссы точек касания, решив составленное ранее квадратное уравнение: для $p = -1$ получим $x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$; для $p = 3$ получим $x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -1$. Дальнейшие действия для построения графиков функций аналогичны изложенным в первом способе.

Ответ: $\{-1; 3\}$.

Пример 6. При каких значениях параметра p две параболы $y = x^2$ и $y = -x^2 + px + p^2 - 2p - 10$ могут иметь общую касательную.

Решение. Поставленная задача, как и в предыдущем примере, может быть решена двумя различными способами. Но вариант решения, аналогичный первому способу, изложенному в предыдущем примере (составление двух уравнений обобщенной касательной – к каждой из данных парабол, и определение значений параметра p, при которых эти касательные совпадают), будет очень громоздким и трудоемким. Рассмотрим только один способ, аналогичный второму из предыдущего примера, который в данном случае является более рациональным.

Проанализируем ситуацию, предложенную в задаче. Нам даны парабола и семейство парабол (каждое значение параметра p задает конкретную параболу и этого семейства). Ветви парабол из семейства направлены вниз, ветви отдельной параболы – вверх. Если параболы с разно направленными ветвями пересекаются, то общей касательной у них не будет, если они касаются друг друга, то у них будет только одна общая касательная, и, если эти параболы не имеют общих точек, то к ним можно провести две общие касательные. Если мы приравняем правые части данных функций, то получим уравнение для нахождения абсцисс точек пересечения парабол, содержащее параметр p: $x^2 = -x^2 + px + p^2 - 2p - 10 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2x^2 - px - p^2 + 2p + 10 = 0$. В зависимости от дискриминанта $D = p^2 - 8(-p^2 + 2p + 10) \Rightarrow D = 9p^2 - 16p - 80$ полученное квадратное уравнение может иметь два различных корня ($D > 0$), два одинаковых корня ($D = 0$) или не иметь корней вообще ($D < 0$). Данные в задаче параболы могут иметь общую касательную, если $D \le 0$. Таким образом, получаем неравенство, решение которого дает решение поставленной задачи: $9p^2 - 16p - 80 \le 0$. Найдя корни левой части неравенства и решая методом интервалов, получим:



Следовательно, $-20/9 \le p \le 4$.

Ответ: $p \in [-20/9; 4]$.

Задачи

Решить уравнения:

9. При каких значениях параметра p прямая $y = x + 1$ является касательной к графику функции $y = px - x^2$? Сделать чертеж.

Ответ: $\{-1; 3\}$.

10. При каких значениях параметра p прямая $x-y=1$ является касательной к графику функции $y=x^2+p(x-1)$? Сделать чертеж.

Ответ: $\{-1;3\}$.

11. При каких значениях параметра p прямая $y-x=p$ является касательной к графику функции $y=x^2+(p-1)x$? Сделать чертеж.

Ответ: $\{-1;3\}$.

12. При каких значениях параметра p две параболы: $y=x^2$ и $y=-x^2+px+p^2-4p-2$ могут иметь общую касательную?

Ответ: $p\in[-4/9;4]$.

13. При каких значениях параметра p две параболы: $y=x^2$ и $y=-x^2+px+p^2-5p+2$ могут иметь общую касательную?

Ответ: $p\in[4/9;4]$

14. При каких значениях параметра p две параболы: $y=x^2$ и $y=-x^2+px+p^2-4p-2$ могут иметь только одну общую касательную?

Ответ: $p\in\{-4/9;4\}$.

15. При каких значениях параметра p графики функций $y=x^2+2p+10$ и $y=-x^2+px+p^2$ имеют только одну общую точку? Найти ее.

Ответ: $p=4$, $(1;19)$; $p=-\dfrac{20}{9}$, $\left(-\dfrac{5}{9};\dfrac{475}{81}\right)$.

16. При каких значениях параметра p графики функций $y=x^2+4p+2$ и $y=-x^2+px+p^2$ имеют только одну общую точку? Найти ее.

Ответ: $p=4$, $(1;19)$; $p=-\dfrac{4}{9}$, $\left(-\dfrac{1}{9};\dfrac{19}{81}\right)$.

17. Доказать неравенства:

а) $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^7\le\dfrac{a^7+b^7}{2}$, $a>0,\ b>0$. б) $\left(\dfrac{2c+1}{4}\right)^3\le\dfrac{8c^3+1}{16}$, $c>0$.

18. Сравнить числа $\sqrt[10]{11}$ и $\sqrt[11]{12}$, не используя технических средств.

19. (*в*) Определить, в скольких точках функция $y=x^2e^{-x}$ принимает значение, равное 0,64.

20. (*в*) Определить, в скольких точках функция $y = x \cdot \ln^2 x$ принимает значение, равное 0,49.

21. (*в*) Доказать, что уравнение $3^x - 3x - 4 = 0$ не имеет корней на промежутке $[1;2]$.

22. Чем отличается решение уравнения $\frac{6}{2+x} = \sqrt[4]{10x+6}$ (1) с ответом 1 от решения уравнения $\frac{6}{2+x} = \sqrt[4]{x+15}$ (2) с тем же ответом?

23. (*в*) Доказать, что уравнение $\frac{x}{2} + \frac{8}{x} = \log_2\left(8x - x^2\right)$ имеет единственное решение.

Найти корень уравнения. Доказать, что он единственный:

24. $3x^4 + 16x^3 + 18x^2 + 27 = 0$.

25. $48x^4 + 32x^3 + 1 = 0$.

26. Доказать, что уравнение $x^6 - 6x^5 + 1 = 0$ имеет два корня.

Решить уравнения:

27. $\log_2\left(3 - 4x - 4x^2\right) = 4x^2 + 4x + 3$.

28. $\log_2\left(x^2 - 2x + 5\right) = 1 + 2x - x^2$.

29. $\sin^2 \frac{\pi x}{2} = x^2 + 2x + 2$.

30. $\sin\frac{\pi x}{2} = 6x - x^2 - 10$.

31. $\cos^2 \frac{\pi x}{2} = x^2 - 4x + 5$.

32. $\cos \pi x + x^2 - 6x + 10 = 0$.

33. $|x+5| + |x-1| = 6\sin\frac{\pi x}{2}$.

34. $\log_2\left(3 + 2x - x^2\right) = x^2 - 2x + 3$.

35. $\log_2\left(4x - x^2\right) = x^2 - 4x + 6$.

36. $e^{2x} - e^x = x$.

37. $-2|x-3| - x + 1 = 2\sin\frac{\pi x}{2}$.

38. $2|x-4| + x = 4\cos\frac{\pi x}{2}$.

39. $6x - x^2 - 5 = 2^{x^2 - 6x + 11}$.

40. $\log_2\left(x^2 - 2x + 5\right) = 2\sin\frac{\pi x}{2}$.

41. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$ в зависимости от a:

а) $f(x) = x^5 - 12{,}5x^3 + 32{,}5x$; б) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$; в) $f(x) = x^3 - 6x^2$?

42. Доказать, что при $|x| \le 2$ справедливы неравенства:

а) $3x^5 - 5x^3 - 30x < 40$.

б) $\left|3x - x^3\right| \le 2$.

Доказать неравенства:

43. $\left|x^3-3x\right|\le 2$ при $|x|\le 2$.

44. $3\sqrt[3]{x^2}-1\le 2x$.

45. $\cos x\ge 1-\dfrac{x^2}{2}$.

46. $\ln x>1-\dfrac{1}{x}$, при $x>1$.

47. Найти все значения a, при которых неравенство $\dfrac{8x^2-4x+3}{4x^2-2x+1}\le a$ является верным при всех действительных x.

48. Найти все значения параметра p, при которых неравенство $(4x-3)^2+p(4x-3)\left(x^2+1\right)+(2p+1)\left(x^2+1\right)^2>0$ верно для любого $x\in R$.

Решить уравнения:

49. (*в*) $\log_3\dfrac{\sqrt{2\left(2x^2+2x+1\right)}+2x+1}{\sqrt{x^2+9}+x}+5x+4=0$.

50. $5x\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}+1\right)+\dfrac{5(x-2)}{\sqrt{x^2-4x+8{,}5}}-4=0$.

51. Найти количество решений уравнения $\sqrt{x-2}-\sqrt{x-1}=kx+1$ в зависимости от значений параметра k.

52. (*в*) Верно ли неравенство $1-\dfrac{1}{x}\le \ln x$?

53. Верно ли неравенство $4x^4+2x>-1$? При каких значениях a уравнение $4x^4+2x=a$ имеет наибольшее количество решений?

54. Доказать, что при $x>0$ выполняется неравенство $\dfrac{1}{x}+4x^2\ge 3$. Существуют ли такие значения a, что $\dfrac{1}{x}+4x^2\ge a\quad \forall x\in R\setminus\{0\}$?

55. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $2>|x+a|+x^2$ имеет хотя бы одно положительное решение.

56. Исследовать на количество решений в зависимости от значений параметра a систему уравнений $\begin{cases} y=x+\dfrac{1}{x} \\ y-2=a(x-3) \end{cases}$

57. (*в*) Найти все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} \lg y = \lg\left(1 - \dfrac{4}{x}\right) \\ a(y - x) = 1 \end{cases}$ имеет единственное решение. Найти это решение при каждом a.

Найти все значения параметра p, при которых системы имеют единственное решение. Найти это решение при каждом p:

58. $\begin{cases} x + \sqrt{p - y - 6} = 0, \\ y + x + p = 0. \end{cases}$ **59.** $\begin{cases} x - \sqrt{p - y - 6} = 0, \\ y + x + p = 0. \end{cases}$

60. Найти все значения параметров, при которых система уравнений $\begin{cases} (y-1)^2 = x - |x|, \\ (x - p)^2 + 2p + y = 25 \end{cases}$ имеет два различных решения.

Найти количество решений систем уравнений в зависимости от параметра a:

61. $\begin{cases} x + |y| = 2\sqrt{x}, \\ \dfrac{y-2}{x-4} = a. \end{cases}$ **62.** $\begin{cases} y + |y| = 2\sqrt{x}, \\ \dfrac{y-2}{x+4} = a. \end{cases}$ **63.** $\begin{cases} y = |x^2 - 4x + 3|, \\ \dfrac{y}{x-3} = a. \end{cases}$

64. При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{2|x+2| + |x-4|}{x} = a(x+2)$ имеет хотя бы одно решение?

65. При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{2|x-2| + |x+4|}{x} = a(x+4)$ не имеет решений?

66. (*в*) При каких значениях параметра a уравнение $|\ln x| - ax = 0$ имеет три корня?

67. При каких значениях параметра a уравнение $\sin x \cdot \cos 2x \cdot \sin 3x = a$ имеет два корня на отрезке $[\pi/4; \pi/2]$?

Найти все значения параметра a, при которых системы имеют решение:

68. $\begin{cases} x = y^2 - 2y, \\ y^2 + x^2 + a^2 = 2y + 2ax. \end{cases}$ **69.** $\begin{cases} 2y = |x| - x, \\ y = a + 1 + \dfrac{(x-a)^2}{2}. \end{cases}$

70. Доказать, что $\operatorname{arctg} 0,02 < 0,02 + 0,000002(6)$.

71. $(в)$ Решить неравенство $2^{2x-1} - 2^{x-1}\left(2x^{1/2} + x\right) + x \cdot x^{1/2} \geq 0$.

Ответы:

17. Работает свойство выпуклости. **18.** Докажите, например, монотонность функции $y = x^{1/(x-1)}$ при $x > e$. **19.** В одной точке (не забудьте вычислить предел на $-\infty$). **20** В трех точках (не забудьте вычислить пределы в 0 справа и на $+\infty$). **21.** Рассмотрите функцию $f(x) = 3^x - 3x - 4$, докажите ее возрастание на $[1; 2]$ и найдите значение в точке 2. **22.** (1) ОДЗ – один промежуток, на нем левая часть убывает, правая – возрастает. $x = 1$ – единственное решение. (2) ОДЗ состоит из двух промежутков. На $[-15; -2)$ знаки частей уравнения различны, на $(-2; \infty)$ решение аналогично (1). **23.** На ОДЗ левая часть не меньше 4 (неравенство Коши или исследование на наименьшее значение с помощью производной), правая часть не больше 4 (выделяем полный квадрат в логарифмируемом выражении или берем производную). Важно, что в обеих частях равенство достигается в одной точке. Единственное решение – $x = 4$. **24.** $\{-3\}$.

25. $\{-1/2\}$. **27.** $\{-1/2\}$. **28.** $\{1\}$. **29.** $\{-1\}$. **30.** $\{3\}$. **31.** $\{2\}$. **32.** $\{3\}$.

33. $\{-3; 1\}$. **34.** $\{1\}$. **35.** $\{2\}$. **36.** $\{0\}$. **37.** $\{3\}$. **38.** $\{4\}$. **39.** $\{3\}$. **40.** $\{1\}$.

41. а) при $a \in (-\infty; -21) \cup (21; +\infty)$ – один корень, при $a \in \{-21; 21\}$ – два корня, при $a \in \left(-21; -6,5\sqrt{6,5}\right) \cup \left(6,5\sqrt{6,5}; 21\right)$ – три корня, при $a \in \left\{-6,5\sqrt{6,5}; 6,5\sqrt{6,5}\right\}$ – четыре корня, при $a \in \left(-6,5\sqrt{6,5}; 6,5\sqrt{6,5}\right)$ – пять корней; б) при $a \in (-\infty; 0) \cup (1/2; +\infty)$ – корней нет, при $a \in \{0; 1/2\}$ – один корень, при $a \in (0; 1/2)$ – два корня; в) при $a \in (-\infty; -32) \cup (0; +\infty)$ – один корень, при $a \in \{-32; 0\}$ – два корня, при $a \in (-32; 0)$ – три корня.

42. а) Исследуем левую часть на монотонность и экстремумы, находим ее наибольшее значение. Можно еще использовать нечетность функции. Аналогично п. а) доказываем ограниченность сверху числом 2 и снизу числом -2. Можно возвести неравенство в квадрат, а затем доказывать только ограниченность сверху. **47.** $a \geq 3\frac{1}{3}$. Указания к решению см. в тексте раздела. **48.** $p\in\left(4-2\sqrt{5};8.5\right)$. *Указание*: делим неравенство на **положительную** величину $\left(x^2+1\right)^2$; **исследуем** новую переменную $t=\dfrac{4x-3}{x^2+1}$ (находим, например, с помощью производной, множество ее значений), после чего решаем задачу. **49.** $-3/5$. *Указание*: приравниваем значения монотонной функции в точках x и $g(x)$. Найдите функцию, докажите ее монотонность, определите $g(x)$. Образец решения подобной задачи см. в тексте. **50.** $4/5$. Задача аналогична предыдущей. **51.** При $k\in(-\infty;-1)\cup[0;\infty)$ решений нет; при $k\in[-1;0)$ одно решение. *Указание*: исследуйте функцию из левой части уравнения и решайте задачу графически (вращайте прямую $y=kx+1$ вокруг точки $(0;1)$). Задача даже не требует нахождения касательной. Заметим, что сложность задачи заметно возрастет, если в правой части вместо $kx+1$ поставить выражение $kx+b$, где b – любое (фиксированное) число из промежутка $[-1;0)$. **52.** Неравенство верно при всех значениях x, для которых оно имеет смысл, т.е. $x>0$. *Указание*: выясните, ограничено ли сверху 0 множество значений разности левой и правой частей, исследовав функцию $f(x)=1-\dfrac{1}{x}-\ln x$. **53.** Неравенство верно при всех $x\in R$; наибольшее количество решений (два) уравнение имеет при $a>-3/4$ (не забудьте про пределы!). **54.** Такого значения a не существует, так как предел левой части неравенства в точке 0 слева равен $-\infty$.

55. $a\in(-2,25;2)$. **56.** При $a\in(0;8/9)$ решений нет; при $a\in\{0;8/9;1\}$ одно решение; при $a\in(-\infty;0)\cup(8/9;1)\cup(1;\infty)$ два решения. Задача очень хороша для решения различными способами с элементами графики и анализа, хотя может быть решена и другими способами. **57.** При $a\in\left[-\dfrac{1}{4};0\right)$ $x=\dfrac{a-1-\sqrt{-15a^2-2a+1}}{a}$, $y=\dfrac{a-\sqrt{-15a^2-2a+1}}{a}$; при $a=1/5$ $x=-4$, $y=1$. **Замечание**: при решении задачи проще выразить $1/a$, а не a, тем более, что по условию $a\neq 0$. **58.** При $p\geq 3$ $x=\dfrac{1-\sqrt{8p-23}}{2}$; $y=\dfrac{\sqrt{8p-23}-1-2p}{2}$. *Указание*: если решать задачу графически, то лучше в одном из уравнений исключить параметр, например, введя новую переменную $t = p - y - 6$, а обозначением $a = 6 - 2p$ система сводится к совсем простому виду $\begin{cases} x = -\sqrt{t} \\ x = t + a \end{cases}$.

59. При $p \in \left\{\frac{23}{8}\right\} \cup (3;\infty)$ $x = \frac{1 + \sqrt{8p - 23}}{2}$, $y = \frac{-\sqrt{8p-23} - 1 - 2p}{2}$.

60. $p \in [4;12)$. **Замечание**: полная свобода творчества! От решения иррационального неравенства (одного! какого?) до исследования функций и построения эскизов графиков $p(x)$. **61.** При $a \in (-\infty;0] \cup \{1/4\}$ решений нет; при $a \in \left(0;\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4};\infty\right)$ одно решение. **Замечание**: условие задачи «подсказывает» графическое решение с семейством прямых. Но можно решать задачу и через $a = a(y)$, и любым другим методом!

62. При $a \in \left(\frac{\sqrt{2}-1}{4};\infty\right)$ решений нет; при $a \in (-\infty;0] \cup \left\{\frac{\sqrt{2}-1}{4}\right\}$ одно решение; при $a \in \left(0;\frac{\sqrt{2}-1}{4}\right)$ два решения. **63.** $k \in \left(-\infty;\frac{-7-4\sqrt{3}}{2}\right] \cup (0;\infty)$.

Указание: самое быстрое – нарисовать графики. Будьте осторожны с выбором «граничных» значений параметра! Попробуйте решить и другим способом. **64.** $k \in \left(-\frac{5+2\sqrt{6}}{4};0\right]$. **65.** $a \in \left(0;\frac{1}{e}\right)$. **66.** $a \in \left(\frac{10-7\sqrt{7}}{108};0\right]$.

Указание: один из способов решения – удачно ввести новую переменную! Если не догадались: $t = \cos 2x$. **67.** $a \in [-2;1/4]$. *Указание*: здесь можно покатать окружность вдоль оси параболы, или же применить теорему о расположении корней квадратного трехчлена. **68.** $a \le -1/4$. *Указание*: задача решается либо «почти в одну картинку» (с касательной), либо с применением теорем о расположении корней квадратного трехчлена. **69.** При $a \in (0;2]$ решений нет; при $a \in (-\infty;-2] \cup \{0\} \cup (2;\infty)$ одно решение; при $a \in (-2;0)$ два решения. **70.** *Указание*: рассмотрите функцию $f(t) = \operatorname{arctg} t - t$ при $t \ge 0$. **71.** $[0;1/2] \cup [1;\infty)$. *Указание*: разложите левую часть на множители, докажите знакопостоянство одной из скобок, а при работе с другой вам поможет выпуклость!

23. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ И ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА, СИСТЕМЫ

Преобразование логарифмических выражений

Группа I

Вычислить:

1. $\dfrac{\log_3 12}{\log_{36} 3}-\dfrac{\log_3 4}{\log_{108} 3}$.

2. $\dfrac{1+2\log_3 2}{(1+\log_3 2)^2}+\log_6^2 2$.

3. $10^{-0,5\lg 2,25}$

4. $5^{\log_5 2+\log_5 3}$.

5. $\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{243}\right)^{\frac{3\cdot\log_4 19}{3\log_4 27}}}$

6. $\log_3\left(\dfrac{\sqrt[3]{81}\cdot\sqrt[6]{3}}{\sqrt[5]{27}}\right)$.

7. $\dfrac{2\lg 2+\lg 3}{\lg 48-\lg 4}$.

8. $-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}$.

9. $\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\log_7 6\cdot\log_8 7$.

10. $0,8\left(1+9^{\log_3 8}\right)^{\log_{65} 5}$.

11. $3^{2\cdot\frac{\log_3 4}{\log_4 3}}-9\cdot 4^{\frac{1}{\log_4 3}}+4^{1+\log_4 25}$.

12. $(\log_5 2+\log_2 5+2)(\log_5 2-\lg 2)\log_2 5-\log_5 2$.

13. $\dfrac{3\log_3^2 45-2(\log_3 45)\cdot(\log_3 5)-\log_3^2 5}{3\log_3 45+\log_3 5}$.

14. $\dfrac{1}{\log_2 n}+\dfrac{1}{\log_3 n}+\ldots+\dfrac{1}{\log_{1994} n}$, если $n=1994!$

15. 2^x+2^{-x}, если $4^x+4^{-x}=23$.

16. A, если $A=2^B$ и $B=3\log_8 9-4\log_{\frac{1}{16}}\dfrac{1}{6}$.

17. $\log_{ab}\dfrac{\sqrt{b}}{a}+\log_{\sqrt{ab}} b+\log_a\sqrt{b}$, если $\log_a b=c$; $(c\neq -1)$.

18. $\log_{abc} x$, если $\log_a x=2$, $\log_b x=3$, $\log_c x=6$.

Упростить:

19. $5^{\frac{3-\lg 5}{\lg 25}}$.

20. $a^{\frac{\lg\lg c}{\lg a}}$.

21. Доказать: $\log_3 12=\log_3 7\cdot\log_7 5\cdot\log_5 4+1$.

22. Пусть a и b – катеты прямоугольного треугольника, c – его гипотенуза, причем $a \neq 1$, $c-b \neq 1$, $c+b \neq 1$. Доказать, что $\dfrac{1}{\log_{c-b} a}+\dfrac{1}{\log_{c-b} a}=2$.

23. Определить знаки чисел:

$\alpha=\dfrac{\log_3 5-\log_5 3}{\log_{0,3} 4-\log_4 0,3}$; $\qquad\beta=\log_{1,7}\left(0,5\left(1-\log_7 3\right)\right)$.

Найти область определения функций:

24. $y=0.5^{\sqrt{4-x^2}-\frac{1}{x-1}}$.

25. $y=2^{\sqrt{\frac{2}{x-1}}\cdot\log_{x-3} x}$.

26. $y=\sqrt{1812^x-1945^x}$.

27. $y=\arccos\left(0,47^x\right)$.

28. $y=\sqrt{\dfrac{\log_6^{\,2}(x-1)}{\log_{\frac{1}{2}} 6\cdot\log_3 5}}$.

29. $y=\sqrt{\log_2 \sin x}+\dfrac{15}{x-\frac{\pi}{2}}$.

Ответы:

1. 2. **2.** 1. **3.** $2/3$. **4.** 6. **5.** $3^{-\frac{5}{2}}\cdot 19^{\frac{5}{54}}$. **6.** 0,9. **7.** 1. **8.** 3. **9.** $1/3$. **10.** 4. **11.** 100.

12. 1. **13.** 2. **14.** 1. **15.** 5. **16.** $\dfrac{3}{2}$. **17.** $\dfrac{c^2+6c-2}{2(c+1)}$. **18.** 1. **19.** $10\sqrt{2}$. **20.** $\lg c$.

23. $\alpha<0$; $\beta<0$. **24.** $[-2;\ 1)\cup(1;\ 2]$. **25.** $(3;\ 4)\cup(4;\ +\infty)$. **26.** $(-\infty;\ 0]$.

27. $[0;\ +\infty)$. **28.** $\{2\}$. **29.** $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

Группа II

ЗАДАНИЕ 1

1. Найти логарифмы чисел по основанию 3:

1, 3, 9, 81, $\dfrac{1}{3}$, $\sqrt{3}$, $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$, $27\sqrt{3}$, $\sqrt[7]{9}$.

2. Найти логарифмы чисел по основанию $1/2$:

1, $1/2$, $1/8$, 16, $\sqrt{2}$, $1/\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $1/4\sqrt[4]{2}$.

Найти все числа a, при которых справедливы равенства:

3. $\log_3 a=2$.

4. $\log_{1/3} a=4$.

5. $\log_{1/3} a=0$.

6. $\log_a 1=0$.

7. $\log_a(a+2)=2$.

8. $\log_3\left(a^2+1\right)=1$.

Установить, является ли отрицательным число:

9. $\log_{\sqrt{2}}\sqrt{3}$. **10.** $\log_{1/7}\left(1/\sqrt{45}\right)$. **11.** $\log_2 1{,}2$.

12. $\log_{1/\sqrt{2}} 4$. **13.** $\log_{1/\sqrt{3}}\sqrt{5}$. **14.** $\log_{100\sqrt{2}} 25$.

ЗАДАНИЕ 2

Упростить:

1. $3^{\log_3 2}$. **2.** $4^{\log_4 7}$. **3.** $(1/2)^{\log_{1/2} 5}$ **4.** $3^{2\log_3 4}$. **5.** $3^{-\log_3 2}$.

6. $(1/3)^{\log_3 5}$ **7.** $(1/4)^{\log_2 6}$ **8.** $(1/9)^{-2\log_3 7}$ **9.** $8^{1\cdot(-\log_3 2)}$.

Выразить $\lg A$ через логарифмы простых чисел:

10. $A = 3^3\cdot\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt[3]{5}\cdot 7}$. **11.** $A = \sqrt{\dfrac{7\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}}$. **12.** $A = 7^2\cdot\dfrac{\sqrt[5]{128}}{\sqrt[4]{2178}}$.

13. $A = 3^2\cdot\sqrt[7]{3^{1/4}\cdot 5^{2/3}}$. **14.** $A = \sqrt{\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{4}}}$. **15.** $A = \sqrt{\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\cdot 4^6}}}}$.

Вычислить:

16. $\log_6 2 + \log_6 3$, $\log_3 2 + \log_3\left(\dfrac{3}{2}\right)$, $\log_3 18 - \log_3 2$, $\log_4\left(\dfrac{1}{8}\right)$.

17. $\log_2 5 + \log_2\left(\dfrac{2}{5}\right)$, $\log_5 9 + \log_5\left(\dfrac{1}{9}\right)$, $\log_{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$, $\log_3\left(\dfrac{\sqrt{3}}{9}\right)$.

18. $\dfrac{\lg 4}{\lg 32}$, $\dfrac{2\lg 6}{\lg 12 + \lg 3}$, $\dfrac{\log_5 16 - \log_5 4}{\log_5 128}$, $\log_{1/4}\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-2}$.

19. $\left(\sqrt{3}\right)^{-\log_3 2}$, $10^{1-\lg 2}$, $6^{\log_6 3 - \log_6 4}$, $4^{\log_2 3 - \log_4 5}$.

20. $2^{2\log_2 5 + \frac{1}{2}\log_4 6}$. $\log_3\log_3\sqrt[3]{27}$, $\log_4\log_2\log_3 81$.

Перейти к основанию 2 и упростить полученное выражение:

21. $\log_4 2\sqrt{2}$. **22.** $\log_{4\sqrt{2}} 4$. **23.** $\log_{1/4}\left(\dfrac{1}{32}\right)$.

24. $\log_{\sqrt{2}} 8$. **25.** $\log_{1/2}\sqrt[3]{2}$. **26.** $\dfrac{1}{\log_3 2} + \dfrac{2}{\log_9 4} - \dfrac{3}{\log_{27} 8}$.

ЗАДАНИЕ 3

Известно, что $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$, $\lg 5 = c$. Выразить через a, b и c логарифмы по основанию 10 следующих чисел:

1. $\frac{1}{30}$. **2.** 24. **3.** $\frac{5}{6}$. **4.** $\frac{25}{216}$. **5.** 720.

6. 40. **7.** $\sqrt[3]{6}$. **8.** $\frac{1}{300}$.

Сравнить числа:

9. $\log_2 7$ и $\log_2 8$.

10. $\log_{1/3} 4$ и $\log_{1/3} 5$.

11. $\log_{1/7}\frac{4}{5}$ и $\log_{1/7}\frac{5}{6}$.

12. $\log_4 5$ и $\log_6 5$.

13. $\log_3 4$ и $\log_2 5$.

14. $\log_2 3$ и $\log_5 8$.

15. $\lg\sqrt[3]{10}$ и $\lg\sqrt{5}$.

16. $\lg\sqrt[4]{150}$ и $\lg\sqrt{12}$.

Доказать неравенства:

17. $\log_5 3 + \log_3 5 > 2$.

18. $\log_2 15 \cdot \log_{1/6} 2 \cdot \log_3 \frac{1}{6} > 2$.

Найти все значения x, при которых справедливы равенства:

19. $\log_2 x^2 = 2$.

20. $\log_{1/4} x^2 = 1$.

21. $\log_{1/2} x = \log_{1/2}(3-x)$.

22. $\log_2(x+1) = \log_2(2x-3)$.

23. $\log_{1/3} 3x + \log_{1/3} x = 3$.

24. $\log_4 x + \log_4(x+2) = \log_4 3x$.

25. $\lg x = 3\lg 2 + \frac{1}{3}\lg 4 - \lg 8$.

26. $\log_2(x+1)^2 = 1 - \log_2 3$.

Найти все значения x, при которых справедливы неравенства:

27. $\log_5 x < 1$.

28. $\log_{1/5} x > 1$.

29. $\log_3 x > 1$.

30. $\log_{1/3} x < 1$.

31. $\log_2 x^2 < 2$.

32. $\log_{1/3} x^2 > 0$.

33. $1 < \log_3 x^2 < 2$.

Ответы:

ЗАДАНИЕ 1. **1.** 0, 1, 2, 4, -1, $1/2$, $-3/2$, $7/2$, $2/7$. **2.** 0, 1, 3, -4, $-1/2$, $1/2$, $-3/2$, $9/4$. **3.** 9. **4.** $1/81$. **5.** 1. **6.** $a > 0$, $a \neq 1$. **7.** 2. **8.** $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$. В пп. **9**, **10**, **11**, **13**, **14** – положительные.

ЗАДАНИЕ 2. **1.** 2. **2.** 7. **3.** 5. **4.** 16. **5.** $1/2$. **6.** $1/5$. **7.** $1/36$. **8.** 2401.

9. $\frac{1}{27}$. **10.** $3\lg 3+\lg 2-\frac{1}{3}\lg 5-\lg 7$. **11.** $\frac{1}{2}\lg 7+\frac{1}{4}\lg 2-\frac{1}{2}\lg 3-\frac{1}{4}\lg 5$.

12. $\frac{23}{20}\lg 2+2\lg 7-\frac{1}{2}\lg 3-\frac{1}{2}\lg 11$. **13.** $\frac{57}{28}\lg 3+\frac{2}{21}\lg 5$. **14.** $\frac{1}{60}\lg 3$.

15. $\frac{-13}{8}\lg 2+\frac{1}{8}\lg 3$. **16.** 1, 1, 2, $-\frac{3}{2}$. **17.** 1, 0, -1, $-\frac{3}{2}$. **18.** $\frac{2}{5}$, 1, $\frac{2}{7}$, -4.

19. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 20. 12, $\frac{9}{5}$. **20.** $25\sqrt[4]{6}$, 0, $\frac{1}{2}$. **21.** $\frac{3}{4}$. **22.** $\frac{4}{5}$. **23.** $\frac{5}{2}$. **24.** 6. **25.** $-\frac{1}{3}$. **26.** 0.

ЗАДАНИЕ 3. **1.** $-1-b$. **2.** $3a+b$. **3.** $1-b-2a$. **4.** $2-3b-5a$.

5. $3a+2b+1$. **6.** $2a+1$. **7.** $\frac{a+b}{3}$. **8.** $-2-b$. **9.** $\log_2 8$. **10.** $\log_{1/3} 4$.

11. $\log_{1/7}\frac{4}{5}$. **12.** $\log_4 5$. **13.** $\log_2 5$. **14.** $\log_2 3$. **15.** $\lg\sqrt{5}$. **16.** $\lg\sqrt[4]{150}$.

19. 2, -2. **20.** $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$. **21.** $\frac{3}{2}$. **22.** 4. **23.** $\frac{1}{9}$. **24.** 1. **25.** $2^{2/3}$. **26.** $-1+\sqrt{\frac{2}{3}}$,

$-1-\sqrt{\frac{2}{3}}$. **27.** $0<x<5$. **28.** $0<x<\frac{1}{5}$. **29.** $x>3$. **30.** $x>\frac{1}{3}$. **31.** $-2<x<0$,

$0<x<2$. **32.** $-1<x<0$, $0<x<1$. **33.** $-3<x<-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}<x<3$.

Группа III

1. Найти логарифмы чисел по основанию 5:

$1,\ 5,\ 25,\ 625,\ 1/5,\ 1/25,\ 1/\sqrt{5},\ \sqrt{\sqrt{5}}\cdot 5^{1/2},\ 5^{1/3},\ \sqrt[4]{5\sqrt[3]{5}}$.

Установить, между какими последовательными целыми числами находится число:

2. $\log_2 3$. **3.** $\log_3 5$. **4.** $\log_3 11$. **5.** $\log_3(1/10)$. **6.** $\lg 248$.

Установить, является ли положительным число:

7. $\log_{\sqrt{3}}\sqrt{2}$, $\log_{1/7} 2$, $\log_{1/3}\frac{1}{5}$, $\log_3 4$, $\log_7 2{,}11$.

8. $\lg(0{,}02)^2$, $\lg\sqrt[5]{1{,}003}$, $\lg\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)$, $\log_2\left(\frac{2}{3}\right)^{-2/3}$.

9. $\log_3\left(\sqrt{7}-2\right)$, $\log_4\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)$, $\log_3\left(\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}\right)$, $\lg\lg 9$.

Упростить:

10. $10^{-0,5\lg 2,25}$, $10^{2\ \lg 2,5}$, $\left(\sqrt[3]{10}\right)^{\lg 27}$, $2^{\log_2 30-1}$.

11. $5^{\log_{,} 2+\log_{.} 3}$, $\left(\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)^{\lg 9\ \ 2}$, $(0{,}01)^{\lg 0{,}2-1.\,2}$.

12. $2^{4\log_{;} 3\ \cdot 1}$, $(1/3)^{\log_{,} 2\ \ 3}$, $(1/5)^{\log_{;}\ 4+2}+3$.

13. $\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{243}\right)^{3-\log_4 19\ (3\log_4 27)}}$

14. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{\left(\dfrac{1}{125}\right)^{2\cdot\ \log_3 17\ \left(2\log_3\sqrt[3]{25}\right)}}}$, $3^{\log_{\sqrt{27}} 17}+2^{1\ \log_7 4}$.

15. $\log^2_{\sqrt{2}}\dfrac{1}{4}$, $\log^3_{2\sqrt{2}} 8$, $-\log_5\log_3\sqrt{\sqrt[5]{9}}$.

16. $\dfrac{\lg 64}{\lg 48-\lg 3}$, $\dfrac{3\lg 2+\lg 3}{\lg 576}$, $\dfrac{\lg 12-\lg 3}{\lg 8}$.

17. $\dfrac{2\lg 2+\lg 3}{\lg 48-\lg 4}$, $\dfrac{2\lg 6-\lg 3}{\lg 144}$, $\dfrac{\lg 2+\lg 3}{\lg 3.6+1}$.

18. $\log_{\sqrt{6}} 3\cdot\log_3 36$, $\log_{\sqrt{3}} 8\cdot\log_4 81$.

19. $\log_2\sqrt{\dfrac{1}{5}}\cdot\log_{25}\sqrt[3]{2}$, $\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{5}}\sin\dfrac{\pi}{5}\cdot\log_{\sqrt{\sin(\pi/5)}} 5$.

20. $\lg 2+\lg 3+\lg 0{,}16$.

21. $\dfrac{1}{2}\log_{11} 5+\dfrac{1}{2}\log_{11} 3-\log_{11} 4{,}5$.

22. $\log_3 3+\log_3 1{,}4-\dfrac{1}{2}\log_3 16$.

23. $\log_{1/5} 7-\dfrac{1}{2}\log_{1/5} 1{,}2-3\log_{1/5} 2$.

Вычислить:

24. $\dfrac{\log_3 12}{\log_{36} 3}-\dfrac{\log_3 4}{\log_{108} 3}$.

25. $\lg 5\cdot\lg 20+(\lg 2)^2$.

26. $\dfrac{\log_5 250}{\log_{50} 5}-\dfrac{\log_5 10}{\log_{1250} 5}$.

27. $\dfrac{\log_2 24}{\log_{96} 2}-\dfrac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$.

28. $\dfrac{1+2\log_3 2}{(1+\log_3 2)^2}+\log^2_6 2$.

Сравнить числа:

29. $\lg\sqrt[3]{10}$ и $\lg 2$.

30. $\lg\dfrac{4}{19}$ и $\lg\dfrac{13}{21}$.

31. $\lg 1.05$ и $\lg(1.05)^{-2}$.

32. $1-2\lg 2+\lg 3$ и $2\lg 11$.

33. $\lg\left(2\sqrt{5}\right)$ и $\lg 4.5$.

34. $\lg\dfrac{31}{53}$ и $\lg 0.6$.

35. $\lg\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $\lg\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

36. $5\lg 5$ и $7\lg 2$.

Найти все значения x, для которых справедливы равенства:

37. $3=2^x$.

38. $2^x\cdot 3^{-x}=4$.

39. $2^{x-2}=5$.

40. $3\cdot 10^{1-x}=2$.

41. $2^{x-3}\cdot 10^x=7$.

42. $7^x\cdot 5^{x-2}=3^{2x-1}$.

43. $\sqrt{3^x}\cdot\sqrt{5^x}=15$.

44. $5^{\lg x}-3^{\lg x-1}=3^{\lg x+1}-5^{\lg x-1}$.

Вычислить:

45. $\lg\operatorname{tg}1^\circ\cdot\lg\operatorname{tg}2^\circ\cdot\ldots\cdot\lg\operatorname{tg}89^\circ$.

46. $\lg\sin 1^\circ\cdot\lg\sin 2^\circ\cdot\ldots\cdot\lg\sin 90^\circ$

47. $\lg\operatorname{tg}1^\circ+\lg\operatorname{tg}2^\circ+\ldots+\lg\operatorname{tg}89^\circ$.

48. $7^{\log_3 5}+3^{\log_5 7}-5^{\log_3 7}-7^{\log_5 3}$

Доказать неравенства:

49. $\log_{189}1323>\log_{63}147$.

50. $\log_{135}675<\log_{15}75$.

51. $\log_{135}675>\log_{15}60>\log_{60}480$

52. $\log_{20}80>\log_{80}640$.

Выразить через a и b:

53. $\log_4 20$, если $\lg 2=a$.

54. $\log_{49}32$, если $\log_2 14=a$.

55. $\log_{35}28$, если $\log_{14}7=a$, $\log_{14}5=b$.

56. $\log_{175}56$, если $\log_{14}7=a$, $\log_5 14=b$.

Решить уравнения:

57. $\log_2|x+1|=-1$.

58. $\log_2 x=\log_2\left(6-x^2\right)$.

59. $\log_x 2=3$.

60. $\log_2 x=-\log_4 x$.

61. $\log_3 x+\log_x 3=2$.

62. $\log_2\log_4\log_5 x=0$.

Решить неравенства:

63. $\log_2(x+3)<2$.

64. $\log_2\left(x^2-5x+5\right)>0$.

65. $\log_x 3>5$.

66. $\log_4 x+\log_8 x<0$.

67. $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x<2$.

68. $\dfrac{1}{\log_2 x}+\dfrac{1}{\log_2 x^2}>1$.

Решить системы уравнений:

69. $\begin{cases} \log_2 xy = 3, \\ \log_{1/2} \dfrac{x}{y} = 1. \end{cases}$ **70.** $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0, \\ \log_2(x+y) = \log_2 5. \end{cases}$

71. $\begin{cases} xy = 40, \\ \lg x \cdot \lg y = \lg 4. \end{cases}$

Ответы:

1. 0, 1, 2, 4, -1, -2, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{3}$. **2.** 1 и 2. **3.** 1 и 2. **4.** 2 и 3. **5.** (-3) и (-2). **6.** 2 и 3. **7.** Да, нет, да, да, да. **8.** Нет, да, нет, да. **9.** Нет, да, нет, нет. **10.** $\frac{2}{3}$, 40, 3, 15. **11.** 6, $\frac{10}{3}$, 250. **12.** $40\frac{1}{2}$, $\frac{27\sqrt{2}}{2}$, 3,02. **13.** $3^{5/2}19^{5/54}$. **14.** $5^{3/2}17^{-9/16}$, $17^{2/3}+7^{1/2}$. **15.** 16, 8, 1. **16.** $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$. **17.** 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$. **18.** 4, 12. **19.** $-\frac{1}{12}$, 2. **20.** Нет. **21.** Нет. **22.** Да. **23.** Нет. **24.** 2. **25.** 1. **26.** 2. **27.** 3. **28.** 1. **29.** $\lg\sqrt[3]{10} > \lg 2$. **30.** $\lg\frac{4}{19} < \lg\frac{13}{21}$.

31. $\lg(1{,}05) < \lg(1{,}05)^2$. **32.** $2\lg 11 > 1 - 2\lg 2 + \lg 3$. **33.** $\lg 4{,}5 > \lg 2\sqrt{5}$.

34. $\lg 0.6 > \lg\frac{31}{53}$. **35.** $\lg\frac{\sqrt{3}}{2} > \lg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$. **36.** $5\lg 5 > 7\lg 2$. **37.** $x = \log_2 3$.

38. $x = 2\log_{2/3} 2$. **39.** $x = -2 + \log_2 5$. **40.** $x = \lg 15$. **41.** $x = \log_{20}\frac{7}{8}$.

42. $x = \left(\log_{75}\frac{9}{35}\right)^{-1}$. **43.** $x = 2$. **44.** $x = 100$. **45.** 0. **46.** 0. **47.** 0. **48.** 0.

53. $\frac{a+1}{2a}$. **54.** $\frac{5}{2(a-1)}$. **55.** $\frac{2-a}{a+b}$. **56.** $\frac{(3-2a)b}{2+ab}$. **57.** $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{3}{2}$.

58. $x = 2$. **59.** $x = \sqrt[3]{2}$. **60.** $x = 1$. **61.** $x = 3$. **62.** $x = 625$. **63.** $-3 < x < 1$.

64. $x < 1$, $x > 4$. **65.** $1 < x < \sqrt[5]{3}$. **66.** $0 < x < 1$. **67.** $0 < x < 2^{12/11}$.

68. $1 < x < 2^{3/2}$. **69.** $(4;2)$, $(-4;-2)$. **70.** $(2;3)$, $(3;2)$. **71.** $(10;4)$, $(4;10)$.

Показательные уравнения

Группа I

Решить уравнения:

1. $2^{x+1}=3-4^x$.

2. $4^{x^2-2}-9\cdot2^{x^2-2}+8=0$.

3. $2\cdot4^{\sqrt{x}}-5\cdot2^{\sqrt{x}}+2=0$.

4. $2^{x^2-\frac{1}{3}}=\frac{32^x}{8\sqrt[3]{4}}$.

5. $\frac{2^x}{5^{x-1}}+3=\frac{5^x}{2^{x-1}}$.

6. $5^{\log_2 x}-3x^{\log_2 5}+2=0$.

7. $25^{x^2+0,5}-5^{x^2}=5^{x^2+3}-25$.

8. $81^x-16^x=\frac{5}{6}\cdot36^x$.

9. $5\cdot2^{2x-1}-21\cdot10^x=2\cdot5^{2x-1}$.

10. $5^{4^x-2\cdot9^x+6^x}=1$.

11. $4^{1-x}-6^x=2\cdot3^{2-2x}$.

12. $9^{x+\frac{1}{x}}+27=12\cdot3^{x-\frac{1}{x}}$.

13. $16^{\frac{2-x}{2x}}-5\cdot2^{\frac{2-x}{x}}+1=0$.

14. $8^{\frac{2}{x}}-2^{\frac{3x+3}{x}}+12=0$.

15. $9^{\cos x}+2\cdot3^{\cos x}=15$.

16. $4^{\operatorname{tg} x}+2^{\operatorname{tg} x}=6$.

17. $4^{\sin\frac{x}{2}}+2^{\sin\frac{x}{2}+1}=8$.

18. $4^{\log_2 x}=8+2\cdot8^{\frac{\log_2 x}{3}}$.

19. $9^{\log_3 x}+3^{1+\log_3 x}=18$.

20. $16^{\log_4 2x}=15x+4$.

21. $2^{1-4\log_4 x}=1+x$.

22. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4$.

23. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=2^x$.

24. $x^{\sqrt[3]{x^2}}=\left(\sqrt{x}\right)^x$.

25. $|x-1|^{\lg^2 x-\lg x^2}=|x-1|^3$.

26. $\pi^{\log_\pi 4x}=2^{3+\log_2 3}$.

27. $10^{\lg(x^2-4)}=36^{1-\log_6 3}+25^{-\log_5 6}$.

28. $x^{3\lg^3 x-\frac{2}{3}\lg x}=100\sqrt[3]{10}$.

29. $\left(\frac{1}{4}\right)^{|x|}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^{2x^2-8}-\left(\frac{27}{4}\right)^{|x|}=0$.

30. $2^{\sqrt{x}}=1-x^2$.

31. $\sqrt{\cos x}\cdot\left(2^{x^2}-16\right)=0$.

32. $|x-1|^{\lg x}=1$.

33. $\frac{6}{2^{1+\cos 2x}-1}=2^{\cos 2x}$.

34. $6x-x^2-5=2^{x^2-6x+11}$.

35. $3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3 x}=162$.

36. $2^{x^2-5x+6}=3^{x^2-6x+8}$.

37. $64\cdot9^x-84\cdot12^x+27\cdot16^x=0$.

38. $9^x+(x-13)\cdot3^x-9x+36=0$.

39. $7^{x-1}+7^{x-2}+7^{x-3}=5^{x-1}+5^{x-2}+5^{x-3}$.

40. $|x-3|^{\frac{x^2-8x+15}{x-2}}=1$.

41. $2^{|x-2|}-\left|2^{x-1}-1\right|=2^{x-1}$.

42. $\dfrac{4}{25^{-x}+8+16\cdot 25^{x}}-\dfrac{5^{x}}{1+4\cdot 25^{x}}+\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\dfrac{\sqrt{23}}{5}+0{,}01$.

43. $\left|\dfrac{1}{3}\cdot 3^{x}-2\right|=9^{x-1}$.

44. $\left|\cos x\right|^{\sin^2 x-1{,}5\sin x+0{,}5}=1$

45. $2^{x-2}+8^{x}=5\cdot 4^{x}$.

Найти все значения параметра, при которых уравнения имеют решение:

46. $4^{x}-a\cdot 2^{x}-a+3=0$.

47. $(a-1)\cdot 4^{x}-4\cdot 2^{x}+a+2=0$.

48. $(a+1)\cdot 4^{x}+4\cdot 6^{x}+(a-2)\cdot 9^{x}=0$.

49. $(a-3)\cdot 9^{x}-6^{x+1}+(a+5)\cdot 4^{x}=0$.

Найти все значения параметра, при которых уравнения не имеют решений:

50. $p-3=4^{x}-p\cdot 2^{x}$.

51. $(p-1)\cdot 9^{x}+2p\cdot 3^{x}+3p-2=0$.

52. $(10-p)\cdot 5^{2x-1}-2\cdot 5^{x+1}+6-p=0$.

53. $p\cdot 4^{x-1}-(3p+1)\cdot 2^{x}+p=0$.

54. Дана функция $f(x)=5^{x}+\dfrac{25}{5^{x}}$. При каком значении a функция $y=f(x+a)$ является четной?

55. Дана функция $f(x)=3^{x}-\dfrac{27}{3^{x}}$. При каком значении a функция $y=f(x+a)$ является нечетной?

56. При каком значении параметра уравнение $p\cdot 2^{x}+2^{-x}=5$ имеет единственное решение?

57. При каких значениях параметра уравнение $(a-1)\cdot 3^{2x}-(2a-1)\cdot 3^{x}-1=0$ имеет два различных корня?

58. При каких значениях a и b уравнение $0{,}25^{x}-2a\cdot 2^{-x}-4b+1=0$ имеет единственный корень?

59. Найти все значения параметра a, при которых функция $y=a\cdot 8^{x}-\dfrac{1}{2}(9a+1)\cdot 4^{x}+12a\cdot 2^{x}+1$ не имеет экстремумов.

60. Найти все значения параметра, при которых функция $y=a\cdot 8^{x}+\dfrac{3a+5}{2}\cdot 4^{x}+(6a+7)\cdot 2^{x}+2$ не имеет экстремумов.

Ответы:

1. $\{0\}$. **2.** $\{\pm 1\}$. **3.** $\{1\}$. **4.** $\{1;\ 4\}$. **5.** $\{1\}$. **6.** $\{1\}$. **7.** $\{\pm\sqrt{2}\}$. **8.** $\{1/2\}$. **9.** $\{-1\}$. **10.** $\{0\}$. **11.** $\{-2\}$. **12.** $\{1\}$. **13.** $\{1\}$. **14.** $\{3;\ 3\log_6 2\}$. **15.** $\{2\pi n | n \in \mathbb{Z}\}$.

16. $\left\{\frac{\pi}{4} + \pi n \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$. **17.** $\{\pi + 4\pi n | n \in \mathbb{Z}\}$. **18.** $\{4\}$. **19.** $\{3\}$. **20.** $\{4\}$. **21.** $\{1\}$.

22. $\{\pm 2\}$. **23.** $\{2\}$. **24.** $\{8;\ 1\}$. **25.** $\left\{\frac{1}{10};\ 2;\ 1000\right\}$. **26.** $\{6\}$. **27.** $\left\{\pm\frac{17}{6}\right\}$.

28. $\left\{10;\ \frac{1}{10}\right\}$. **29.** $\{\pm 4\}$. **30.** $\{0\}$. **31.** $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$. **32.** $\{2\}$. **33.** $\{\pi n | n \in \mathbb{Z}\}$.

34. $\{3\}$. **35.** $\left\{9;\ \frac{1}{9}\right\}$. **36.** $\left\{2;\ 4 + \log_{\frac{3}{2}} 2\right\}$. **37.** $\{1;\ 2\}$. **38.** $\{1;\ 2\}$.

39. $\left\{3 + \frac{\lg 31 - \lg 57}{\lg 1,4}\right\}$. **40.** $\{4;\ 5\}$. **41.** $\{-2\}$. **42.** Решений нет; *указание*: после замены $y = \frac{1}{5^{-x} + 4 \cdot 5^x}$ получаем $4y^2 - y + \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{\sqrt{23}}{5} - 0,01 = 0$. Корни этого уравнения разного знака, причем положительный корень больше $\frac{1}{4}$, а по замене $0 < y < \frac{1}{4}$. **43.** $\{1\}$. **44.** $\left\{(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.

45. $\{0;\ 2\}$. **46.** $[2;\ +\infty)$. **47.** $(-2;\ 2]$. **48.** $[-2;\ 2)$. **49.** $(-5;\ 4]$. **50.** $(-\infty;\ 2)$.

51. $(-\infty;\ 1/2) \cup [1;\ +\infty)$. **52.** $(-\infty;\ 5) \cup [10;\ +\infty)$. **53.** $(-\infty;\ 0] \cup (1;\ +\infty)$.

54. $a = 1$. **55.** $a = \frac{3}{2}$. **56.** $p \in (-\infty;\ 0] \cup \left\{\frac{25}{4}\right\}$. **57.** $a < -\frac{\sqrt{3}}{2}$. **58.** Либо $b > \frac{1}{4}$, a – любое число, либо $b = \frac{1}{4}$, $a > 0$, либо $b = \frac{1-a^2}{4}$, $a > 0$.

59. $(-\infty;\ 0] \cup \left[\frac{1}{3};\ +\infty\right)$. **60.** $\left(-\infty;\ \frac{25}{21}\right] \cup [0;\ +\infty)$.

Группа II

ЗАДАНИЕ 1

Решить уравнения:

1. $6^{3-x} = 216$.

2. $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$.

3. $7^{\log_7 \frac{x}{2}} = 5^{\log_5 0,75}$.

4. $3^{\log_3(6x)} = 2^{1-\log_2 7}$.

5. $11^{\log_{11}(70x)} = 10^{1-2\lg 7}$.

6. $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} = 2^{2-6\log_8 3}$.

7. $8^{\log_2 x} = 10^{1+\lg\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)}$.

8. $13^{\log_{13}\left(15x^2\right)} = 4^{\frac{1}{2}\log_2 3-3\log_8 5}$.

9. $4^{x^2-1\;4} = 100^{1\;4-\lg\sqrt[4]{5}}$.

10. $\frac{4}{5}\cdot 5^{x^2+1} = 10^{1-\lg tg(\pi/4)} + 25^{0,5\log_5 10}$

11. $2^x\cdot 5^x = 0,1\left(10^{x-1}\right)^5$.

12. $3^x\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3} = \left(\frac{1}{27}\right)^x$

13. $\left(\frac{3}{4}\right)^{x\;1}\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{8}{x}}} = \frac{9}{16}$.

14. $\left(15^{x^2\cdot x-2}\right)^{(x-4)} = 1$.

15. $2^{\sqrt{x-1}} = 16\sqrt{(0,25)^{5\;x/4}}$

16. $2^{x-1}\cdot 5^{x-1} = 0.001\cdot 10^{2x+5}$

17. $18^{2x}2^{\;2x}3^{x-1} = 3^{x\;1}$.

18. $\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^{\log_{\sqrt{2}}\cos x} = 1$.

19. $5^{x-4}-5^{x\;5} = 2\cdot 5^{x-6}+2\cdot 3^{x-4}$

20. $10^x+10^{x-1} = 0.11$.

ЗАДАНИЕ 2

Решить уравнения:

1. $2^{x+2} = 3-4^{x-1}$.

2. $4^{x^2\cdot 2}-9\cdot 2^{x^2\cdot 2}+8 = 0$.

3. $4^{\sqrt{x-2}}+16 = 10\cdot 2^{\sqrt{x-2}}$.

4. $\frac{2^x}{5^{x\;1}}+3 = \frac{5^x}{2^{x\;1}}$.

5. $2^{4(x-1)^2}-\frac{1}{2} = 2\cdot 4^{x(x-2)}$.

6. $4\cdot 2^{2x}-6^x = 18\cdot 3^{2x}$.

7. $2\cdot 9^x+4^{x-(1/2)} = 5\cdot 6^x$.

8. $9^{x+(1/x)}+27 = 4\cdot 3^{x+(1/x)+1}$

9. $4^{3x^2+x}-8 = 2\cdot 8^{x^2+(x/3)}$.

10. $16^{\log_4 2x} = 15x+4$.

11. $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x+\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10$.

12. $8\cdot 4^{1/x}+8\cdot 4^{-1/x}-54\cdot 2^{1/x}-54\cdot 2^{\;1/x} = -101$.

13. $3^x\cdot 8^{x/(x-1)} = 36$.

14. $3^{x-1}\cdot 4^{(x-1)/x} = \frac{2}{3}$.

15. $2^x+2^{|x|} = 2\sqrt{2}$.

16. $\left|4^{x-0,5}-6^x\right|-9^x = 0$.

Решить системы уравнений:

17. $\begin{cases} x^{x\cdot y} = y^{x-y}, \\ x^2 y = 1. \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} \sqrt[x]{x+y} = 2, \\ (x+y)\cdot 3^x = 6^7. \end{cases}$

19. Найти все значения параметра p, при которых уравнение

$(p-4)\cdot 9^x + (p+1)\cdot 3^x + 2p - 1 = 0$ не имеет решений.

20. Решить уравнение

$(a-1)4^x - 4\cdot 2^x + a + 2 = 0$.

ЗАДАНИЕ 3

Решить уравнения:

1. $10^x - 5^{x-1}2^{x-2} = 950$. **2.** $3^{x-2} + (0.3)^{1-x} - (0,1)^{(3-x)/2} = 99$.

3. $\sqrt{3^{x-54}} - 7\sqrt{3^{x-58}} = 162$. **4.** $\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_3\sqrt{x+1} - \frac{1}{2}\log_3\left(x^2-1\right)} = \sqrt{2(x-1)}$.

5. $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}} = 10$. **6.** $4^x - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$.

7. $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 7^x + 7^{x-1} + 7^{x-2}$. **8.** $(0,1)^{5x-8-x^2} = 100$.

Решить системы уравнений:

9. $\begin{cases} 10^{3-\lg(x+y)} = 250, \\ \sqrt{x-y} + \frac{1}{2}\sqrt{x+y} = \frac{26-y}{\sqrt{x-y}}. \end{cases}$ **10.** $\begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 12, \\ 64^{x-y} = 4\sqrt{2}. \end{cases}$

Найти все значения параметра a, при которых уравнения имеют одно решение:

11. $(a+1)\cdot 4^x + 8\cdot 6^x + (a-5)\cdot 9^x = 0$.

12. $(a-1)\cdot 16^x - 4\cdot 36^x + (a+23)\cdot 81^x = 0$.

Найти все значения параметра p, при которых уравнения имеют хотя бы одно решение:

13. $(p+1)\cdot 4x + 4\cdot 2^x + (p-2) = 0$. **14.** $(p-3)\cdot 9^x - 6\cdot 3^x + p + 5 = 0$.

Найти все значения параметра a, при которых уравнения не имеют решений:

15. $(4-a)\cdot 4^x - 5\cdot 2^x + \frac{5}{8}(1-a) = 0$. **16.** $a\cdot 4^{x+1} - (3a+1)\cdot 2^x + a = 0$.

Решить уравнения:

17. $4^{\sqrt{x}}+(a-1)\cdot 2^{\sqrt{x}+1}+5+a=0$. **18.** $9^{\sqrt{1/x}}+6(a+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{1+\sqrt{1/x}}+4=0$.

19. При каких значениях параметра a система уравнений имеет решение:

$$\begin{cases} x=\dfrac{|y|-y}{|y|+y}\cdot 3^x, \\ 3^x+y=a^2-4a+1. \end{cases}$$

20. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=1-4a, \\ \dfrac{10^x-10}{|10^x-10|}=\dfrac{y^3}{|y|}. \end{cases}$$

Ответы:

ЗАДАНИЕ 1. **1.** $\{0\}$. **2.** $\{1\}$. **3.** $\{1,5\}$. **4.** $\left\{\frac{1}{21}\right\}$. **5.** $\{7\}$. **6.** $\{0,5\}$. **7.** $\{\sqrt[3]{5}\}$.

8. $\{-\sqrt{5};\ \sqrt{5}\}$. **9.** $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$. **10.** $\{-1;1\}$. **11.** $\{1,5\}$. **12.** $\{-1\}$. **13.** $\{-1;4\}$.

14. $\{-2;1;4\}$. **15.** $\{24\}$. **16.** $\{-3\}$. **17.** $\{-0,5\}$. **18.** $\{2\pi k | k\in Z\}$. **19.** $\{6\}$.

20. $\{-1\}$.

ЗАДАНИЕ 2. **1.** $\{-1\}$. **2.** $\{-1;1\}$. **3.** $\{-1;7\}$. **4.** $\{1\}$. **5.** $\{1\}$. **6.** $\{-2\}$.

7. $\{-\log_{1,5}2;\log_{1,5}2\}$. **8.** $\{1\}$. **9.** $\left\{-1;\frac{2}{3}\right\}$. **10.** $\{4\}$. **11.** $\{-2;2\}$.

12. $\{-1;-0,5;0,5;1\}$. **13.** $\{-\log_3 6;2\}$. **14.** $\{0;2-\log_3 2\}$.

15. $\left\{\log_2\left(\sqrt{2}-1\right);\frac{1}{2}\right\}$. **16.** $\{0\}$. **17.** $\left\{(1;1),\left(\frac{\sqrt[3]{9}}{3};\sqrt[3]{9}\right)\right\}$. **18.** $\{(7;121)\}$.

19. $p\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup[4;+\infty)$. **20.** При $a\in(-2;1)\cup(1;2]$

$x=\log_2\dfrac{2\pm\sqrt{-a^2-a+6}}{a-1}$; при $a=1$ $x=\log_2\dfrac{3}{4}$.

ЗАДАНИЕ 3. **1.** $\{3\}$. **2.** $\{5\}$. **3.** $\{66\}$. **4.** $\{3\}$. **5.** $\{0{,}01;100\}$. **6.** $\{1{,}5\}$.

7. $\left\{2+\dfrac{\lg 7-\lg 57}{\lg 7-\lg 2}\right\}$. **8.** $\{2;3\}$. **9.** $\{(20;16)\}$. **10.** $\left\{\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{6}\right);\left(\dfrac{1}{6};\dfrac{1}{4}\right)\right\}$.

11. $a\in[-1;5)$. **12.** $(-2;1]$. **13.** $p\in[-2;1)\cup(1;3)$. **14.** $p\in(-3;2]$.

15. $a\in(-\infty;-2]\cup(1;+\infty)$. **16.** $a\in(-\infty;0]\cup(1;+\infty)$. **17.** При $a<-\dfrac{4}{3}$

$x=\log_2^2\left(1-a+\sqrt{(a+1)(a-4)}\right)$; при $a\in\left[-\dfrac{4}{3};-1\right]$

$x_{1,2}=\log_2^2\left(1-a\pm\sqrt{(a+1)(a-4)}\right)$; при $a>-1$ $x\in\varnothing$.

18. При $a<-\dfrac{7}{2}$ $x=\log_3^{-2}\left(-a-1+\sqrt{(a-1)(a+3)}\right)$; при $a\in\left[-\dfrac{7}{2};-3\right]$

$x_{1,2}=\log_3^{-2}\left(-a-1\pm\sqrt{(a-1)(a+3)}\right)$; при $a>-3$ $x\in\varnothing$.

19. $a\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$. **20.** При $a\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{4}\right)$ $x=-4a$, $y=1$;

при $a\in\left[-\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right]$ нет решений; при $a\in\left(\dfrac{1}{4};+\infty\right)$ $x=2-4a$, $y=-1$.

Группа III

Решить уравнения:

1. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\left(\dfrac{9}{8}\right)^x=\dfrac{27}{64}$.

2. $4^{x+1{,}5}+9^x=6^{x+1}$.

3. $3^{\log_2(\sin x+\cos x)}-4^{\log_2(\sin x-\cos x)}=0$.

4. $4^{2x-3}-3\cdot4^{x-2}-1=0$.

5. $3\cdot4^x+3\cdot4^{x+1}+4^{x-2}=62$.

6. $3^x-8\cdot3^{x/2}+15=0$.

7. $5^{x^2-15}=25^x$.

8. $5^{2x}-4\cdot5^x-5=0$.

9. $5^{2+\cos 2x}-26\cdot5^{\cos^2 x}+5=0$.

10. $8^x-4^x=2^x$.

11. $\left(\sqrt{7}\right)^{\left(x^2-x+3\right)/2}=7\sqrt[4]{7}$.

12. $6^{2x}-8\cdot6^x+12=0$.

13. $2^{x+2}-2^{2-x}-15=0$.

14. $\log_7\left(81\sqrt[3]{3^{x^2-8x}}\right)=0$

15. $\sqrt[x]{27^{2x-1}}=\sqrt{9^{2x-1}}$.

16. $2^{2x+1}+2^{x-2}=16$.

17. $3^{4\sqrt{x}} - 4\cdot 3^{2\sqrt{x}} + 3 = 0$.

18. $4^{x} + 2^{x-1} = 80$.

19. $9^{x} + 4^{x} = 2{,}5\cdot 6^{x}$.

20. $4^{x-1} + 4^{x} + 4^{x+1} = 84$

21. $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10\cdot 2^{\sqrt{x-2}}$.

22. $\log_8\left(4^{x^2-1} - 1\right) + \dfrac{2}{3} = \log_8\left(2^{x^2-2} - 7\right)$.

23. $\log_3\left(4^{x-1} - 9\right) - \log_3 5 = \log_3\left(2^{x-1} + 3\right) + \log_3 2$.

24. $6\cdot(0{,}75)^{2-2x-x^2} - (0{,}75)^{x^2+2x-2} = 25^{\log_{125}8} - 3$.

25. $3^{x^2+4x} = \dfrac{1}{25}$.

26. $5^{x^2\ \ 2x} = 128$.

27. $2^{\sqrt{\log_2 3}} = 3^{\sqrt{\log_9 4x-0{,}75}}$

28. $\left(\sqrt{x}\right)^{\log_{16}(9x)} = \left(\sqrt{9}\right)^{1/\log_3 2}$

29. $5^{\sqrt{(\log_3 x+\log_5 9)\log_5 3}} = 3^{\sqrt{\log_3 1{,}8}}$.

30. $7^{\log_{25}^2(5x)-1} - x^{\log_5 7} = 0$.

31. $4^{3x^2+x} - 8 = 2\cdot 8^{x^2+x/3}$.

32. $2^{4(x-1)^2} = \dfrac{1}{2} + 2\cdot 4^{x(x-2)}$.

33. $4^{-x+1/2} - 7\cdot 2^{-x} = 4$.

34. $9^{x+1} + 3^{x+2} - 18 = 0$.

35. $16^{x-1/2} = 15\cdot 4^{x} + 4$.

36. $25^{-x} + 5^{-x+1} = 50$.

37. $4^{\sqrt{3x^2-2x-1}} + 2 = 9\cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$.

38. $3^{2x^2+6x-9} + 4\cdot 15^{x^2+3x-5} = 3\cdot 5^{2x^2+6x\ \ 9}$.

39. $9\cdot 4^{\log_{1/2}\left(\sin^2 2x+\sin^2 x+39/16\right)} = 1$.

40. $|x-1|^{\lg^2 x\ \ \lg x^2} = |x-1|^3$.

41. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1-x^2\right)^{-\sin^2 x/(\sin x+1)}$.

42. $\left(4-x^2\right)^{-\cos^2 x/(1+\cos x)} = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

43. $3^{6x-3} = 2\left(27^{x-2/3}\right) + 1$.

44. $2^{6x} + 8^{x-2/3} - 5 = 0$.

45. $10^{1+x^2} - 10^{1-x^2} = 99$.

46. $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{3x} - \left(\dfrac{1}{8}\right)^{x-1} = 128$.

47. $64^{1/x} - 2^{3+3/x} + 12 = 0$.

48. $9^{1-(x-1)^2} - 12\cdot 3^{-(x-1)^2} + 1 = 0$.

49. $4^{1-(x+1)^2} - 3\cdot 2^{2-(x+1)^2} + 7 = 0$.

50. $5^{3x} + 9\cdot 5^{x} + 27\left(5^{-3x} + 5^{-x}\right) = 64$

51. $2^{4x} - 2^{3x+1} - 2^{2x} + 2^{x+1} + 1 = 0$.

52. $x^{x} + 139x^{-x} - 108x^{-2x} = 32$.

53. $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^{x} + \left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^{x} = \left(2\sqrt{2}\right)^{x}$.

54. $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{6\cdot x}}-\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^{6/x}}-\left(\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{2\;x}}-\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^{2/x}}\right)=3$.

Решить системы уравнений:

55. $\begin{cases} x+y=6, \\ y^{x^2\;7x+12}=1. \end{cases}$

56. $\begin{cases} 27^x=9^y, \\ \dfrac{81^x}{3^y}=243. \end{cases}$

57. $\begin{cases} 3^y\cdot\sqrt[x]{64}=36, \\ 5^y\cdot\sqrt[x]{512}=200. \end{cases}$

58. $\begin{cases} y^{1/x}=2, \\ y^x=16. \end{cases}$

59. $\begin{cases} 2^x(x+y)=10, \\ (x+y)^{1\;x}=5. \end{cases}$

60. $\begin{cases} 2^x3^y=24, \\ 2^y3^x=54. \end{cases}$

61. $\begin{cases} 3^x5^y=75, \\ 3^y5^x=45. \end{cases}$

62. $\begin{cases} x^y=y^x, \\ x^x=y^y, \\ x>0. \end{cases}$

63. $\begin{cases} x^y=y^x, \\ x^3=y^5, \\ x>0. \end{cases}$

64. $\begin{cases} x^{2y-1}=5, \\ x^{y\cdot 2}=3, \\ x>0. \end{cases}$

65. $\begin{cases} \sqrt{3^{2/x}}\sqrt{(1,5)^{2/y}}=0,25, \\ \dfrac{\sqrt{5^{2/x}}}{\sqrt{(0,2)^{2/y}}}=1. \end{cases}$

66. $\begin{cases} x^y=256, \\ 2\sqrt[y]{81^2}=3x. \end{cases}$

67. $\begin{cases} 2x+2^y=-1, \\ -20x+3,5\cdot 2^{y+1}=146. \end{cases}$

68. $\begin{cases} 3^x+3^y=28, \\ 3^{x+y}=27. \end{cases}$

69. $\begin{cases} xy=y^x, \\ x^3=y^2, \\ x>0. \end{cases}$

70. $\begin{cases} \sqrt[y]{4^x}=32\sqrt[x]{8^y}, \\ \sqrt[y]{3^2}=3\sqrt[x]{9^{1-y}}. \end{cases}$

71. $\begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77, \\ \sqrt{3^x} - 2^y = 7. \end{cases}$

72. $\begin{cases} x^{2y} = 16 + 6x^y, \\ x^{2y} + 5 = yx^y + 5y^2, \\ x > 0. \end{cases}$

73. $\begin{cases} 2^{2x-2y} + 2^{x-y} - 2 = 0, \\ 2^{2x+1} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2y-1} = 5. \end{cases}$

74. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $(p+1)\cdot 4^x + 2(p-1)\cdot 2^x + 3(p-1) = 0$ не имеет решений.

Найти все значения параметра p, при которых уравнения имеют хотя бы одно решение:

75. $(p-3)\cdot 4^x - 8\cdot 2^x + p + 3 = 0$.

76. $(p+5)\cdot 9^x + 6\cdot 3^x + p - 3 = 0$.

77. $(p-3)\cdot 4^x - 8\cdot 6^x + (p+3)\cdot 9^x = 0$.

78. $(p+5)\cdot 9^x + 6^{x-1} + (p-3)\cdot 4^x = 0$.

Решить уравнения с параметром:

79. $144^{|x|} - 2\cdot 12^{|x|} + a = 0$.

80. $\sqrt{a(2^x - 2) + 1} = 1 - 2^x$

Ответы:

1. $\{3\}$. **2.** $\{\log_{1,5} 2; \log_{1,5} 4\}$. **3.** $\left\{\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \,\middle|\, k \in Z\right\} \cup \{2\pi n \mid n \in Z\}$. **4.** $\{2\}$.

5. $\{0,5\}$. **6.** $\{2; \log_3 25\}$. **7.** $\{-3; 5\}$. **8.** $\{1\}$. **9.** $\{\pi k \mid k \in Z\}$. **10.** $\left\{\log_2 \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

11. $\{-1; 2\}$. **12.** $\{1; \log_6 2\}$. **13.** $\{2\}$. **14.** $\{2; 6\}$. **15.** $\{0,5; 3\}$. **16.** $\{1\}$. **17.** $\{0; 0,25\}$.

18. $\{3\}$. **19.** $\{-\log_{1,5} 2; \log_{1,5} 2\}$. **20.** $\{2\}$. **21.** $\{3; 11\}$. **22.** $\left\{-\sqrt{\log_2 3}; \sqrt{\log_2 3}\right\}$.

23. $\{1 + \log_2 13\}$. **24.** $\left\{-1 + \sqrt{3 + \log_{0,75} 2}; -1 - \sqrt{3 + \log_{0,75} 2}\right\}$.

25. $\left\{-2 - \sqrt{4 - 2\log_3 5}; -2 + \sqrt{4 - 2\log_3 5}\right\}$.

26. $\left\{1 + \sqrt{1 + 7\log_5 2}; 1 - \sqrt{1 + 7\log_5 2}\right\}$. **27.** $\{3\sqrt{3}\}$. **28.** $\left\{9; \dfrac{1}{81}\right\}$. **29.** $\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$.

30. $\{125; 0,2\}$. **31.** $\left\{-1; \dfrac{2}{3}\right\}$. **32.** $\{-1\}$. **33.** $\{-2\}$. **34.** $\{0\}$. **35.** $\{1\}$. **36.** $\{-1\}$.

37. $\left\{\frac{-1}{3};1\right\}$. **38.** $\{1;-4\}$. **39.** $\left\{(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi n\,\middle|\, n\in Z\right\}\cup$
$\cup\left\{(-1)^{n-1}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi l\,\middle|\, l\in Z\right\}$. **40.** $\{0{,}1;2;1000\}$. **41.** $\left\{0;-\frac{\pi}{6}\right\}$.

42. $\{-\sqrt{3};0;\sqrt{3}\}$ **43.** $\left\{\frac{2}{3}\right\}$. **44.** $\{0\}$. **45.** $\{-1;1\}$. **46.** $\left\{-\frac{4}{3}\right\}$. **47.** $\{3;\log_6 8\}$.

48. $\left\{1-\sqrt{1-\log_3\left(2-\sqrt{3}\right)};1+\sqrt{1-\log_3\left(2-\sqrt{3}\right)}\right\}$.

49. $\left\{-1-\sqrt{1-\log_2\left(3-\sqrt{2}\right)};-1+\sqrt{1-\log_2\left(3-\sqrt{2}\right)}\right\}$. **50.** $\{0;\log_5 3\}$.

51. $\left\{\log_2\left(1+\sqrt{5}\right)-1\right\}$. **52.** $\{1;2;3\}$. **53.** $\{2\}$. **54.** $\left\{\frac{\lg 2-\lg 3}{\lg\left(\sqrt{5}+1\right)-\lg 2}\right\}$.

55. $\{(3;3);(4;2);(5;1)\}$. **56.** $\{(2;3)\}$. **57.** $\{(3;2)\}$. **58.** $\left\{(2;4);\left(-2;\frac{1}{4}\right)\right\}$. **59.** $\{(1;4)\}$.

60. $\{(3;1)\}$. **61.** $\{(1;2)\}$. **62.** $\{(t;t)\,|\,t\in(0;+\infty)\}$. **63.** $\left\{(1;1);\left(\frac{25\sqrt{15}}{27};\frac{5\sqrt{15}}{9}\right)\right\}$.

64. $\left\{\left(\sqrt[5]{\frac{9}{5}};\frac{2\lg 5+\lg 3}{2\lg 3-\lg 5}\right)\right\}$. **65.** $\{(-0{,}5;0{,}5)\}$. **66.** $\{(2;8)\}$. **67.** $\{(-4{,}5;3)\}$.

68. $\{(0;3);(3;0)\}$. **69.** $\left\{(1;1);\left(\frac{5}{3};\frac{5\sqrt{15}}{9}\right)\right\}$. **70.** $\{(12;4)\}$. **71.** $\{(4;1)\}$.

72. $\left\{(2;3);\left(8^{-\frac{5}{23}};-\frac{23}{5}\right)\right\}$. **73.** $\{(0{,}5;0{,}5);(-0{,}5;-0{,}5)\}$.

74. $p\in(-\infty;-1)\cup[1;+\infty)$. **75.** $p\in(-5;-3)\cup(-3;3)\cup\{5\}$.

76. $p\in[-5;3)\cup\{-6\}$. **77.** $p\in(-5;-3)\cup(-3;3)\cup\{-5\}$.

78. $p\in[-5;3)\cup\{-6\}$. **79.** При $a\le 1$ $x=\pm\log_{12}\left(1+\sqrt{1-a}\right)$; при $a>1$ решений нет. **80.** При $a\in(-\infty;0]\cup(1;+\infty)$ решений нет; при $a\in(0;1]$ $x=\log_2 a$.

Показательные неравенства

Группа I

ЗАДАНИЕ 1

Решить неравенства:

1. $5^x > 3125$. **2.** $2^{4x} < 16$. **3.** $\left(\frac{1}{0{,}125}\right)^x \le 128$. **4.** $\left(\frac{1}{64}\right)^x > \sqrt{\frac{1}{8}}$.

5. $5^{\sqrt[x]{64}} \ge 625$. **6.** $512 - \frac{16}{\sqrt[4]{2^x}} \ge 0$. **7.** $\left(4\frac{1}{2}\right)^{3(x-7)/0,2} > (0{,}25 \cdot 81)^{x-1/2}$

8. $(2{,}56)^{4\sqrt{x}-1} < \left(\frac{125}{512}\right)^{\sqrt{x}-3}$ **9.** $(3{,}24)^{2\sqrt{x}-5} \ge \left(\frac{5}{9}\right)^{5\sqrt{x}+1}$

10. $4^{4(x+1)} - \sqrt[5]{16^{x+100}} \le 0$. **11.** $9^{5^x} \ge 59049$. **12.** $4^{7^x} < 16384$.

13. $2^{\sqrt{x-4}} \ge 0{,}015625 \cdot 4^{\sqrt{x+4}}$.

ЗАДАНИЕ 2

Решить неравенства:

1. $2^{3x-2} \ge 5^{x-2/3}$. **2.** $8^{x-3} < 3^{2x-6}$. **3.** $\frac{1}{8}6^{3x} - 2^{2x}3^{3x} \le 0$.

4. $6^{2x+4} - 3^{3x}2^{x+8} > 0$. **5.** $5^x 8^{(x-1)/x} - 500 \le 0$. **6.** $2^{x-3} - 2^x - 112 > 0$.

7. $3^{2x+3} + 3^{2x} - 30 < 0$. **8.** $7 \cdot 5^x - 5^{x+2} \ge -450$.

9. $2 \cdot 16^x - 2^{4x} - 4^{2x-2} \le 15$. **10.** $4^x - 3^{x-0,5} + 2^{2x-1} - 3^{x-0,5} > 0$.

11. $5 \cdot 2^{\sqrt{x}} - 3 \cdot 2^{\sqrt{x}-1} \le 56$. **12.** $5^{4x-3} - 4 \cdot 5^{4x-1} + 85^{4x+1} - 24505 < 0$.

13. $5^{x-3} - 5^{x-4} - 16 \cdot 5^{x-5} - 2^{x-3} > 0$.

14. $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x-2} - 6 \cdot 4^{x+1} + \frac{1}{2}9^{x+1} \le 0$. **15.** $\frac{6}{2^x - 1} > 2^x$.

16. $\frac{2^x + 8}{2^x - 1} > 2^x$. **17.** $\frac{1}{2^x + 3} < \frac{1}{2^{x+2} - 1}$. **18.** $\frac{1}{4^{\sqrt{x}} - 3 \cdot 2^{\sqrt{x}} + 2} < \frac{1}{6}$.

19. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $a \cdot 9^x + 4(a-1) \cdot 3^x + a > 1$ справедливо для всех $x \in \mathbb{R}$.

20. При каждом a указать, для каких x выполняется неравенство $a^2 - 2 \cdot 4^{x+1} - a \cdot 2^{x+1} > 0$.

ЗАДАНИЕ 3

Решить неравенства:

1. $5^{2x-3} - 2 \cdot 5^{x-2} > 3$. **2.** $9 \cdot 5^{2x-4} + 4 \cdot 5^{8-2x} < 325$.

3. $2\cdot 3^{x+1}-5\cdot 9^{x-2}\ge 81$.

4. $5\cdot 3^{x}-\dfrac{3456}{3^{x}}\le 7$.

5. $2^{4x}-50\cdot 4^{x}-896>0$.

6. $49^{x}-6\cdot 7^{x}+5<0$.

7. $5^{x}+\dfrac{125}{5^{x}}-30\le 0$.

8. $3\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{x}-7\cdot 2^{x/4}-20\ge 0$.

9. $2^{\sqrt{x}}-5\cdot 2^{0,5\sqrt{x}}<24$.

10. $\dfrac{2^{|x-1|}-1}{2^{x-1}+1}<2$.

11. $\left(\sqrt[5]{3}\right)^{x}+\left(\sqrt[10]{3}\right)^{x-10}>3(0,125)^{-0,(6)-0,(3)\log_2 7}$.

12. $3\cdot 4^{\sqrt[3]{x+17}-\sqrt[3]{x+16}}-7\cdot 2^{\sqrt[3]{x+17}-\sqrt[3]{x+16}}+2\ge 0$.

13. $4^{x-\sqrt{x^2-2}}-5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}<6$.

14. $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3^{2-\log_9 27}3^{\log_3 2+\log_{27}3}\ge 3$.

15. $3^{x-1}-\dfrac{15}{3^{x-1}}+3^{x-2}-\dfrac{23}{3^{x-2}}\le 0$.

16. $3\cdot 4^{\sqrt{2-x}}+3<10\cdot 2^{\sqrt{2-x}}$.

17. $3\cdot 4^{x}+2\cdot 9^{x}-5\cdot 6^{x}<0$.

18. $2\cdot 25^{x}-5\cdot 10^{x}+2\cdot 4^{x}\ge 0$.

19. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $4^{x}-a\cdot 2^{x}-a+3\le 0$ имеет хотя бы одно решение.

При каждом a указать, для каких x выполняются неравенства:

20. $4^{2x-1}\cdot a^{2}-65a\cdot 4^{x-1}+1>0$.

21. $a^{2}\cdot 4^{x+1}-33a\cdot 2^{x}+8>0$.

22. $16^{x+(1/2)}<9a\cdot 4^{x}+a^{2}$.

ЗАДАНИЕ 4

Решить неравенства:

1. $(0{,}13)^{x-149}-0{,}002197>0$.

2. $27-\left(0,(3)\right)^{6-x}\ge 0$.

3. $3^{0,01x^2-0,6x-2,5}\le 81\sqrt{3}$.

4. $5^{x-\sqrt{3x-5}}-125<0$.

5. $\left(3\cdot\left(3^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right)^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}}\le\dfrac{3}{\sqrt[10]{3}}$.

6. $\sqrt[1152]{(0,5)^{-x}}-2^{\frac{1}{68-x}}<0$.

7. $3\cdot 3^{\frac{1}{2(1-x)(2,5x+9,5)}}-9^{\frac{1}{(6-2x)(x-1)}}\ge 0$.

8. $\sqrt[12]{\left(\dfrac{17}{25}\right)^{9(x+2)}}\sqrt{36^{2x-1}}-216\sqrt{\left(\dfrac{25}{17}\right)^{-3x}}>0$.

9. $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{3x-7}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{7x-3}\ge 0$.

10. $3^{x-3}+\left(0,(3)\right)^{2-x}-\left(0,(1)\right)^{\frac{4-x}{2}}-99<0$.

11. $\sqrt[5]{\left(0,(1)\right)^{20-0,5x}}+2\sqrt[5]{3^{x-35}}-21\le 0$. **12.** $3^{4x-1}+3^{4x-2}+3^{4x+3}-9620<0$.

13. $81^{x}-7\cdot 9^{2x}+5\cdot 3^{4x-3}-8\frac{5}{27}\left(\frac{1}{243}\right)^{-1}\le 0$.

14. $3^{x}+3^{x-1}+3^{x-2}-7^{x}-7^{x-1}-7^{x-2}\ge 0$.

15. $27^{x}-12\cdot 3^{x}+48\cdot 3^{-x}-64\cdot\left(0,(3)\right)^{3x}-\frac{125}{27}>0$. **16.** $9^{\frac{1}{x}}+6^{\frac{1}{x}}-4^{\frac{1}{x}}\ge 0$.

Ответы:

ЗАДАНИЕ 1. **1.** $(5;+\infty)$. **2.** $(-\infty;1)$. **3.** $(-\infty;7/3]$. **4.** $(-\infty;1/4)$ **5.** $(0;3]$. **6.** $[-20;-\infty)$. **7.** $(8;+\infty)$. **8.** $[0;1)$. **9.** $[1;+\infty)$. **10.** $(-\infty;10]$. **11.** $[1;+\infty)$. **12.** $(-\infty;1)$. **13.** $[-4;32]$.

ЗАДАНИЕ 2. **1.** $[2/3;+\infty)$. **2.** $(3;+\infty)$. **3.** $(-\infty;3]$. **4.** $(4;+\infty)$. **5.** $(-\infty;-\log_5 2]\cup(0;3]$. **6.** $(-20;+\infty)$. **7.** $(-\infty;1/2)$. **8.** $(-\infty;2]$. **9.** $(-\infty;1]$. **10.** $(3/2;+\infty)$. **11.** $[0;16]$. **12.** $(-\infty;1)$. **13.** $(5;+\infty)$. **14.** $(-\infty;-1/2]$. **15.** $(0;\log_2 3)$. **16.** $(0;2)$ **17.** $\left(-2;\log_2\frac{4}{3}\right)$. **18.** $(0;1)\cup(4;+\infty)$. **19.** $a\ge 1$.

20. При $a<0$ $x<\log_2(-a)-1$; при $a=0$ решений нет; при $a>0$ $x<\log_2 a-2$.

ЗАДАНИЕ 3. **1.** $(2;+\infty)$. **2.** $\left(2+\frac{1-\lg 3}{\lg 5};3\right)$. **3.** $[4-\log_3 5;4]$. **4.** $(-\infty;3]$. **5.** $(3;+\infty)$. **6.** $(0;\log_7 5)$. **7.** $[1;2]$. **8.** $[8;+\infty)$. **9.** $[0;36)$. **10.** $(-2;+\infty)$. **11.** $(20;+\infty)$. **12.** $[-17;-16]$. **13.** $(-\infty;-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2};3/2)$. **14.** $(-\infty;-\sqrt{2}]\cup[-1;1]\cup[\sqrt{2};+\infty)$. **15.** $(-\infty;2+\log_3\sqrt{7}]$. **16.** $(2-\log_2^2 3;2]$. **17.** $(0;1)$. **18.** $(-\infty;-\log_{2,5}2]\cup[\log_{2,5}2;+\infty)$. **19.** $a\ge 2$. **20.** При $a\le 0$ $x\in R$; при $a>0$ $x\in\left(-\infty;\log_4\frac{1}{16a}\right)\cup\left(\log_4\frac{1}{a};+\infty\right)$. **21.** При $a\le 0$ $x\in R$; при $a>0$ $x\in(-\infty;-2-\log_2 a)\cup(3-\log_2 a;+\infty)$. **22.** При $a<0$

$x<\log_4\left(-\frac{a}{2}\right)$; при $a=0$ решений нет; при $a>0$ $x<\log_4\frac{3a}{4}$.

ЗАДАНИЕ 4. **1.** $(-\infty;152)$. **2.** $[9;+\infty)$. **3.** $[-10;70]$. **4.** $[5/3;7)$. **5.** $(0;1)\cup[25;+\infty)$. **6.** $(32;36)\cup(68;+\infty)$. **7.** $(-19/5;1)\cup(3;9]$. **8.** $(2;+\infty)$. **9.** $\left(\frac{10\lg 3-7\lg 7}{10\lg 3-3\lg 7};+\infty\right)$. **10.** $(-\infty;6)$. **11.** $(-\infty;45]$. **12.** $\left(-\infty;\frac{\lg 2+\lg 37-\lg 3}{4\lg 3}\right)$. **13.** $(-\infty;1]\cup[25;+\infty)$. **14.** $\left(-\infty;\frac{\log_5 7-\lg 13}{\lg 3-\lg 7}\right]$. **15.** $(1;+\infty)$. **16.** $\left(-\infty;\log_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\frac{3}{2}\right]\cup(0;+\infty)$.

Группа II

Решить неравенства:

1. $2^{x-1}>\left(\frac{1}{16}\right)^{1/x}$.

2. $5^{x-1}<\left(\frac{1}{25}\right)^{1/x}$.

3. $3^{|3x-4|}\le 9^{2x-2}$.

4. $5^{|4x-6|}\ge 25^{3x-4}$.

5. $3^{x+3}7^{x+3}\le 3^{2x}7^{2x}$.

6. $3^{2x+3}5^{2x+3}<3^{5x}5^{5x}$.

7. $2^{x+4}7^{x+4}>2^{3x}7^{3x}$.

8. $2^{x+2}5^{x+2}\ge 2^{3x}5^{3x}$.

9. $5^{x}-3^{x+1}\ge 2\left(5^{x-1}-3^{x-2}\right)$.

10. $7^{x}-2^{x-2}\le 5\cdot 7^{x-1}-2^{x-1}$.

11. $2^{x+3}-5^{x}<7\cdot 2^{x-2}-3\cdot 5^{x-1}$.

12. $3^{x+2}+7^{x}>4\cdot 7^{x-1}+34\cdot 3^{x-1}$.

13. $3^{x}-2^{x+4}\le 3^{x+1}-55\cdot 2^{x-1}$.

14. $6\cdot 5^{x+1}-5^{x+2}+6\cdot 5^{x}\ge 22$.

15. $3\cdot 2^{x+1}+5\cdot 2^{x}-2^{x+2}\le 21$.

16. $2^{2x+5}-3^{x+9/2}\le 3^{x+7/2}-4^{x+4}$.

17. $4^{-x+1/2}-7\cdot 2^{-x}-4<0$.

18. $16^{x+1/2}\le 15\cdot 4^{x}+4$.

19. $9^{x+1}+3^{x+2}-18>0$.

20. $25^{-x}-5^{-x+1}\ge 50$.

21. $9^{x}-2\cdot 3^{x}<3$.

22. $4^{x}-2^{x+1}\ge 3$.

23. $7^{-x}-3\cdot 7^{1+x}>4$.

24. $5^{x}-5^{3-x}\le 20$.

25. $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}\ge 2^{5-x}+9$.

26. $\frac{3}{2^{3-x}}\le 4^{x-4}-7$.

27. $\left(\frac{1}{6}\right)^{x-3} > 6^{5-2x} - 12$.

28. $5^{2x-3} < \frac{2}{5^{1-x}} + 15$.

29. $2^{x+3} + 6 \cdot 2^{x-1} - 33 > 0$.

30. $(2/9)^{x^2-x} \geq (20,25)^{2x-7}$.

31. $4(0,5)^{x(x+3)} < (0,25)^{2x}$.

32. $2^{2x-3} - 3 \cdot 2^{x-2} + 1 > 0$.

33. $4 \cdot 4^x > 7 \cdot 2^x + 2$.

34. $3^{2x+5} \leq 3^{x+2} + 2$

35. $5^{2x+1} + 6^{x+1} > 30 + 5^x 30^x$

36. $5^{x+1/2} - 9^x \geq 3^{2x-2} - 5^{x-1/2}$

37. $9^{\sqrt{x^2-3}} + 3 < 28 \cdot 3^{\sqrt{x^2-3}-1}$

38. $2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} \leq 1$

39. $2^{\sqrt{x^2-3x+3}} > 2^{\sqrt{x}}$

40. $3^{4x^2-3x+1/2} < (1/3)^{-40x^2}$.

41. $9 \cdot 4^{1/x} + 5 \cdot 6^{1/x} \leq 4 \cdot 9^{1/x}$

42. $5 \cdot 25^{1/x} + 3 \cdot 10^{1/x} \geq 2 \cdot 4^{1/x}$.

43. $\frac{11 \cdot 3^{x-1} - 31}{4 \cdot 9^x - 11 \cdot 3^{x-1} - 5} \geq 5$.

44. $\frac{4 - 7 \cdot 5^x}{5^{2x+1} - 12 \cdot 5^x + 4} \leq \frac{2}{3}$.

45. $\frac{9}{2^{x-2}} < \frac{10 + 4^{x-2}}{4}$.

46. $\frac{3^{2x}}{100^x} > 2(0,3)^x + 3$.

47. $\frac{24}{1 - 25^{-x}} \leq \frac{1}{5^{-x} - 6}$.

48. $\frac{2 \cdot 3^{x+3} - 5^{x+3}}{5 \cdot 3^x - 3 \cdot 5^x} < 1$.

49. $7^{x-x^2/8} < 7^{1-x}\left(\sqrt[8]{7}\right)^{x^2} + 6$.

50. $3 \cdot 4^{\sqrt{2-x}} + 3 < 10 \cdot 2^{\sqrt{2-x}}$.

51. $(2^x - 4)(x^2 - 2x - 3) > 0$.

52. $(\sqrt{2} + 1)^{(6x-6)/(x+1)} \leq (\sqrt{2} - 1)^{-x}$.

53. $(\sqrt{5} + 2)^{x-1} \geq (\sqrt{5} - 2)^{(x-1)/(x+1)}$.

54. $\sqrt{8 + 2^{\sqrt{3-x}+1} - 4^{\sqrt{3-x}}} + 2^{\sqrt{3-x}+1} > 5$

55. $4x + 8\sqrt{2 - x^2} > 4 + (x^2 - 2) \cdot 2^x + 2x \cdot 2^x \cdot \sqrt{2 - x^2}$.

56. $4x^2 + 3^{\sqrt{x}+1} + x3^{\sqrt{x}} < 2x^2 3^{\sqrt{x}} + 2x + 6$.

Решить системы уравнений и неравенств:

57. $\begin{cases} 2^{x+1} = 4y^2 + 1, \\ 2^x \leq 2y. \end{cases}$

58. $\begin{cases} 2^{x+1} = y^2 + 4, \\ 2^{x-1} \geq y. \end{cases}$

59. $\begin{cases} x + 2^{y+1} \geq 12, \\ 4x + 4^y \leq 32. \end{cases}$

Ответы:

1. $(0;+\infty)$. **2.** $(-\infty;0)$. **3.** $(-\infty;8/7]$. **4.** $[7/5;+\infty)$. **5.** $[3;+\infty)$. **6.** $(1;+\infty)$.
7. $(-\infty;2)$. **8.** $(-\infty;1]$. **9.** $[3;+\infty)$. **10.** $(-\infty;2]$. **11.** $(3;+\infty)$. **12.** $(-\infty;+\infty)$.
13. $(2;+\infty)$. **14.** $(-\infty;3]$. **15.** $[\log_5 2;+\infty)$. **16.** $(-\infty;\log_2 3]$. **17.** $(-\infty;-3/2]$.
18. $(-2;-\infty)$. **19.** $(-\infty;1]$. **20.** $(0;+\infty)$. **21.** $(-\infty;-1]$. **22.** $(-\infty;1)$.
23. $[\log_2 3;+\infty)$. **24.** $(-\infty;-1)$. **25.** $(-\infty;2]$. **26.** $(-\infty;2-2\log_2 3]$.
27. $[4+\log_2 7;+\infty)$. **28.** $(2-\log_6 2;+\infty)$. **29.** $(\log_2 3;+\infty)$. **30.** $[-7;2]$.
31. $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$. **32.** $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$. **33.** $(-\infty;1)$. **34.** $(-\infty;-2]$.
35. $\left(\log_5\frac{6}{2};\log_6 5\right)$. **36.** $\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$. **37.** $\left(-\sqrt{7};-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3};\sqrt{7}\right)$. **38.** $[0;1]$.
39. $[0;1)\cup(3;+\infty)$. **40.** $\left(-\infty;-\frac{1}{6}\right)\cup\left(\frac{1}{12};+\infty\right)$. **41.** $(-\infty;0)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right]$.
42. $[-1;0)\cup(0;+\infty)$. **43.** $\left(-\infty;\log_3\frac{1}{2}\right]\cup\left[\log_3\frac{3}{5};\log_3\frac{5}{3}\right)$.
44. $\left(\log_5\frac{2}{5};\log_5\frac{4}{5}\right]\cup[\log_5 2;+\infty)$. **45.** $(3;+\infty)$. **46.** $(-\infty;\log_{0,3} 3)$.
47. $(-\infty;-\log_5 6)\cup[-1;0)$. **48.** $\left(\log_{5/3}\frac{49}{122};1\right)$.
49. $\left(-\infty;4-2\sqrt{2}\right)\cup\left(4+2\sqrt{2};+\infty\right)$. **50.** $\left(2-\log_2^2 3;2\right]$. **51.** $(1;2)\cup(3;+\infty)$.
52. $(-\infty;-1)\cup[2;3]$. **53.** $(-1;2]\cup[3;+\infty)$. **54.** $[-1;3)$. **55.** $\left(-1;\sqrt{2}\right]$.
56. $\left[0;\log_3^2 2\right)\cup(3/2;+\infty)$. **57.** $\{(0;1/2)\}$. **58.** $\{(2;2)\}$. **59.** $\{(4;2)\}$.

Группа III

Решить неравенства:

1. $\dfrac{2^{-x}-1}{x-2}<0$. **2.** $3\cdot 2^x+1>2^{2-x}$. **3.** $2\cdot 81^{\sqrt{x}}-3\cdot 16^{\sqrt{x}}<36^{\sqrt{x}}$.

4. $\dfrac{6}{2^x-1}>2^x$. **5.** $\dfrac{2^x+8}{2^x-1}>2^x$. **6.** $\dfrac{1}{2^x+3}<\dfrac{1}{2^{x+2}-1}$.

7. $\dfrac{1}{4^{\sqrt{x}}-3\cdot 2^{\sqrt{x}}+2}<\dfrac{1}{6}$. **8.** $0,5^{4^{\sqrt{x}}+5\cdot 6^{\sqrt{x}-1}}<0,5^{9^{\sqrt{x}}}$.

9. $4^{1+\lg x}-6^{\lg x}-2\cdot 3^{2\cdot\lg x^2}>0$. **10.** $3^x+3^{x+1}+3^{x+2}-7^x-7^{x-1}-7^{x+2}>0$.

11. $3^{1-\sqrt{x}}\cdot 2^{\sqrt{x}-1}-3^{\sqrt{x}}\cdot 2^{1-\sqrt{x}}<1$. **12.** $2\cdot 9^{\sqrt{x}-1}+6^{\sqrt{x}-1}<3\cdot 4^{\sqrt{x}-1}$.

13. $2^{2\sqrt{x}}+21\cdot 10^{\sqrt{x}-1}>5^{2\sqrt{x}}$. **14.** $8\cdot 9^{\sqrt{x}}+6^{\sqrt{x}-1}<27\cdot 4^{\sqrt{x}}$.

15. $\dfrac{2}{2^{1-\cos x}-1}>2^{\cos x-1}$. **16.** $4^{\sin^2 x}<\dfrac{12}{4^{\sin^2 x}-1}$. **17.** $\dfrac{2}{2^{|\sin x|}-1}>2^{|\sin x|}$.

18. $4x^2+3\cdot 3^{\sqrt{x}}+x\cdot 3^{\sqrt{x}}<2x^2\cdot 3^{\sqrt{x}}+2x+6$.

19. $0.11^{\lg\frac{4x-1}{3x-2}}>1$. **20.** $3^{|x-2|}+3^{|x-1|}\geq 28$.

21. $\sqrt{3-9^{\sqrt{2-x}}+2\cdot 3^{\sqrt{2-x}}}+2\cdot 3^{\sqrt{2-x}}>4$. **22.** $\left|2^{4x^2-1}-5\right|\leq 3$.

23. $16^x+(x-6)\cdot 4^x+5>x$. **24.** $\left(x^2+x+1\right)^{\frac{x+5}{x+2}}\geq\left(x^2+x+1\right)^3$.

25. $\dfrac{15}{2-5^x}+5^x<0$. **26.** $\dfrac{5\cdot 3^{\sqrt{x}}+3}{9-3^{\sqrt{x}}}<3^{\sqrt{x}}$.

27. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $4^x-a\cdot 2^x-a+3\leq 0$ имеет хотя бы одно решение.

28. Найти все значения параметра a, при которых функция $y=a\cdot 4^x+(a+2)\cdot 2^x+2$ на отрезке $[0;1]$ принимает только неположительные значения.

Ответы:

1. $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$. **2.** $(0;+\infty)$. **3.** $[0;1/4)$. **4.** $(0;\log_2 3)$.

5. $(0;2)$. **6.** $\left(-2;\log_2\dfrac{4}{3}\right)$. **7.** $(0;1)\cup(4;+\infty)$. **8.** $[0;1)$. **9.** $(0;0{,}01)$.

10. $(1/4;3)$. **11.** $(1;+\infty)$. **12.** $[0;1)$. **13.** $[0;1)$. **14.** $[0;1)$.

15. $\mathbb{R}\setminus\{2\pi n \mid n\in\mathbb{Z}\}$. **16.** $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi n}{2}\middle| n\in\mathbb{Z}\right\}$. **17.** $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi n}{2}\middle| n\in\mathbb{Z}\right\}$.

18. $\left[0;\log_3{}^2 2\right)\cup\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$. **19.** $\left(-\infty;\log_{\frac{7}{3}}\dfrac{13}{57}\right)$. **20.** $(-\infty;-2]\cup[1;+\infty)$.

21. $[1;2)$. **22.** $\left[-1;-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2};1\right]$. **23.** $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$.

24. $(-2;-1]\cup[-1/2;0]$. **25.** $(-\infty;\log_5 2)\cup(1;+\infty)$. **26.** $(0;1)\cup(4;+\infty)$.

27. $[2;+\infty)$ **28.** $(-\infty;-2]$.

Логарифмические уравнения и системы

Группа I

ЗАДАНИЕ 1

Доказать, что не имеют решений уравнения:

1. $3\log_4\left(x^2+2x+1\right)+7\log_4(x+4)=5-\log_4\left(4x-x^2-4\right)$.

2. $\log_{1/9}\left(5+x^2+x\right)=\log_{1/9}\left(1-\left|x^2-4x+3\right|\right)$.

3. $\log_{\sqrt{11}}\left(\dfrac{1}{26}-\left|x^2-\sqrt{x+1}\right|\right)=\log_{\sqrt{11}}\left(8+|x|+\sqrt{x}\right)$.

4. $\log_{1/8}\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=\log_{1/8}\left(2-(x-3)^2\right)$.

5. $\log_6\left(13+|x+1|+|x-1|\right)=\log_6\left(13+\left|x^2-1\right|\right)$.

6. $\log_{1/5}\left(x-\sqrt{14-x}\right)=\log_{1/5}\left(x^2-7x+\log_2(x-20)\right)$.

7. $\log_{\sqrt{3}+\left|x^2-1\right|}\left(3-x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)=\log_{\sqrt{3}+\left|x^2-1\right|}\left(5+x^2-x\right)$.

8. $\log_{5/\left(6+x^2\right)}\left(13+4x^2-4x\right)=\log_{7+\sqrt{x}}\left(-2x-x^2\right)$.

Решить уравнения:

9. $\log_{1/\sqrt{6\sqrt{6}}}x^2=-\dfrac{2}{3}$.

10. $\log_{1/3}\log_{1/2}x=-1$.

11. $\log_3\log_8\log_2(x-5)=\log_3 2-1$.

12. $x(1-\lg 5)=\lg\left(2^x+x+4\right)$.

13. $\log_7\left(2x^2-5x+31\right)=2$.

14. $4\lg\sqrt{\dfrac{1}{x}}=2-5\sqrt{\lg x}$.

15. $\lg x^2+9\lg^2 x=40$.

16. $4^{\log x(1/3)-1}=0{,}5$.

17. $\log_5(x+20)\cdot\log_x\sqrt{5}=1$.

18. $\dfrac{\log_3\left(x^2-12x+39\right)-1}{\log_3(x-3)-1}=2$.

19. $\left(1-\log_3(7-4x)\right)\log_x 3=1$.

20. $2\lg\lg x=\lg(3-2\lg x)$.

ЗАДАНИЕ 2

Решить уравнения:

1. $\log_x\dfrac{\sqrt[5]{9}}{3}=-0{,}6$.

2. $\log_x\left(3-2\sqrt{2}\right)=2$.

3. $\log_{x-3} 7 = 3$.

4. $\log_{x^3-19} 2\sqrt{2} = \dfrac{1}{2}$.

5. $\log_3 \dfrac{x+1}{x} = \log_3 \dfrac{x}{2-x}$.

6. $\log_{1/3} \sqrt{2x-1} - \log_{1/3}(x-2) = 0$.

7. $\log_2 \dfrac{1}{|x-1|-1} = 1$.

8. $\log_3(x^2-6) = \log_3(3x-6)$.

9. $\log_{x+1}(x^2-3x+1) = 1$.

10. $\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}} = (2x-1)^{\log_{1/4}(1+7x-2x^2)}$.

11. $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}} = 10$.

12. $x^{2\lg^3 x - 1{,}5\lg x} = \sqrt{10}$.

13. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$.

14. $0{,}1x^{\lg x - 2} = 10^2$.

15. $\lg 10^{\lg(x^2+21)-1} - \lg x = 0$.

16. $\lg\sqrt{75 + 5^{\sqrt[3]{x-1}}} = 1$.

17. $\log_2\left|x^3 + 2x^2 - 4x - 4\right| = 2$.

18. $\log_{x^2+6x+8} \log_{2x^2+2x+3}(x^2-2x) = 0$.

19. $6 \cdot 2^{\lg x} - x^{\lg 2} = 20$.

20. $5^{\log_{\sqrt{10}} x} = 5 + 4 \cdot x^{\lg 5}$.

ЗАДАНИЕ 3

Решить уравнения:

1. $\dfrac{\lg x}{1-\lg 2} = 2$.

2. $\lg x + \lg(x+1) = \lg(5-6x) - \lg 2$.

3. $\lg(3x^2-17x+2) - \lg(x^2-6x+1) = \lg 2$.

4. $\lg 5 - 1 = \lg(x-3) - \dfrac{1}{2}\lg(3x+1)$.

5. $0{,}5\lg(2x-1) + \lg\sqrt{x-9} = 1$.

6. $\lg 3x - \dfrac{1}{2}\lg\left(8x - 15\dfrac{3}{4}\right) = \lg 30 - 1$.

7. $\dfrac{1}{2}\lg(x+30) + \lg\sqrt{x-30} = 1 + 2\lg 2$.

8. $\log_3(x-5) - \log_3 2 - \dfrac{1}{2}\log_3(3x-20) = 0$.

9. $\lg\sqrt[3]{2} - \lg\sqrt[3]{x^2-4x+15} = \dfrac{1}{3} - 0{,}3\lg(3x^2+4x+5)$.

10. $\lg\sqrt{2x-4} - \lg\sqrt{x+1} - \lg\sqrt{x+5} - \lg 2 = 0$.

11. $\lg(2x-3)^2 - \lg(3x-2)^2 = 2$.

12. $\frac{1}{2}\lg\left(x^2-10x+25\right)+\lg\left(x^2-6x+3\right)=2\lg(x-5)+\lg\sqrt{3}$.

13. $\lg^2 x-\lg x^4=\lg^2 5-4$.

14. $\frac{1-\lg^2 x^2}{\lg x-2\lg^2 x}=\lg x^4+5$.

15. $\frac{2}{7-\lg x}+\frac{9}{11+\lg x}=\frac{13}{12}$.

16. $\lg^2(100x)+\lg^2(10x)-14=\lg\frac{1}{x}$.

17. $3\lg x^2-\lg^2(-x)=9$.

18. $\lg^2(20x+10)+\lg\sqrt{8x+4}-\frac{5}{2}-\lg 2=0$.

19. $\frac{1+\lg(x-1)}{1-\lg^2(x-1)}+\frac{1}{1-\lg(x-1)}=1$.

20. $\lg^2 x+\lg x+1=\frac{7}{\lg x-1}$.

ЗАДАНИЕ 4

Решить уравнения:

1. $x^{\log_3 x-4}=\frac{1}{27}$.

2. $x^{\log_2 x}=4x$.

3. $x^{\log_4 x}=2^{3(\log_4 x+3)}$.

4. $x^{1-\frac{\lg x^2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{100}}$.

5. $\log_2 x+\log_8 x=8$.

6. $\log_{x^2}16+\log_{2x}64=3$.

7. $\log_x 2\cdot\log_{2x}2=\log_{4x}2$.

8. $\log_4 x+\log_{16}x+\log_2 x=7$.

9. $\log_{3x}\frac{3}{x}+\log_3^2 x=1$.

10. $\frac{\log_7(9-x)}{\log_7(4+x)}=\frac{2-\log_5 4}{\log_5(x+4)}-1$.

11. $\sqrt{\log_x\sqrt{3x}}\,\log_3 x=-1$.

12. $\log_{1/2}(x-1)-\log_2(x+1)-\log_{1/\sqrt{2}}(7-x)=1$.

13. $\log_7 x+\log_{1/x}\frac{1}{7}=\log_{1/7}^2\frac{1}{x}+\log_x^2 7-\frac{7}{4}$.

14. $5\log_{x/9}x+\log_{9/x}x^3+8\log_{9x^2}x^2=2$.

15. $\log_2 x\cdot\log_3 x=\log_3 x^3+\log_2 x^2-6$.

16. $\log_{3x+7}(5x+3)+\log_{5x+3}(3x+7)=2$.

17. $\log_4\log_2 x+\log_2\log_4 x=2$.

18. $\frac{\log_{4\sqrt{x}}2}{\log_{2x}2}+\log_{2x}2\cdot\log_{1/2}2x=0$.

19. $\log_{2x^2-1}\left(x^2-\frac{2}{3}\right)=2-\frac{1}{\log_3\left(2x^2-1\right)}$.

20. $(x-4)^2\log_4(x-1)-2\log_4(x-1)^2=(x-4)^2\log_{x-1}4-2\log_{x-1}16$.

ЗАДАНИЕ 5

Решить уравнения:

1. $\log_{\sqrt{x}}a\cdot\log_{a^2}\frac{a^2}{2a-x}=1$.

2. $\log_x\cdot m\cdot\log_{\sqrt{m}}\frac{m}{\sqrt{2m-x}}=1$.

3. $\log_{\sqrt{a}}\frac{\sqrt{2a-x}}{a}-\log_{1/a}x=0$.

4. $(3\log_a x-2)\log_{x^2}a=\log_{\sqrt{a}}x-3$.

5. $\log_a x+\log_{\sqrt{a}}x+\log_{\sqrt[3]{a^2}}x=27$.

6. $\log_a\sqrt{4+x}+3\log_{a^2}(4-x)-\log_{a^4}\left(16-x^2\right)^2=2$.

7. $\lg 2x+\lg(2-x)=\lg\lg p$.

При каких значениях a уравнения имеют два решения:

8. $\log_2\left(4^x-a\right)=x$.

9. $x+\log_{1/2}\left(4^x+a^3\right)=0$.

10. $x+\log_{1/3}\left(9^x-2a\right)=0$.

11. $\log_5\left(25^x+7a^3\right)=x$.

12. При каких значениях a уравнение $\log_{x-a}(x-2)=2$ имеет единственное решение?

При каких значениях a уравнения: а) не имеют решений; б) имеют одно решение; в) имеют два решения; г) не имеют больше двух решений:

13. $\log_2\left(x^2+1\right)=\log_2(x+a)$.

14. $\log_2\left(x^2-1\right)\log_2(x+a)$.

15. $\lg\frac{x}{x-1}=\lg(-x+a)$.

16. $\lg\left(x^2-|x|-2\right)=\lg\left(\frac{x}{2}-a\right)$.

17. $\ln\left(x|x-2|\right)=\ln\left(\frac{x}{2}+a\right)$.

18. $\lg\left|x^2-x-2\right|=\lg\left(\frac{x}{2}+a\right)$.

19. $\lg\left|\frac{x}{x-1}\right|=\lg(-x+a)$.

20. При каких значениях a уравнение $\log_{x-1}(x+a)=0{,}5$ имеет единственное решение?

ЗАДАНИЕ 6

Найти все значения параметра a, при которых системы уравнений имеют единственное решение. Указать это решение при каждом значении a:

1. $\begin{cases} \log_2(x+1)-\log_2(a-y)=2, \\ -xy+4=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \log_2(2-x)+\log_2(1-y)=2, \\ 4y=a-x. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \log_2(x-y)=1+\log_2(-x), \\ (x+a)^2+(y-a-3x)^2=1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \log_2(x+y)+2=\log_2(5x+3y), \\ y+4=x+2a+2(x-a)^2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} y=3x^2, \\ \lg(1+x)=\lg\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{y}{a}\right). \end{cases}$

6. $\begin{cases} \lg y=\lg\left(1-\dfrac{4}{x}\right), \\ (y-x)\cdot a=1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{\lg(x+y+1)}{\lg x}=1, \\ (x-a)^2+(y+a-5)(y+a)=0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 9y=(a-1)^2+9(x-a)^2, \\ y=\log_2\left(1+\dfrac{|x|}{x}\right). \end{cases}$

Указать все значения параметра a, при которых системы уравнений имеют два различных решения. Найти эти решения при каждом значении a:

9. $\begin{cases} \log_2(1-x)+\log_2 y=2, \\ y=a+4x. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \log_2 y-\log_2(x-a)=2, \\ xy+x+4=0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} y=\log_2\left(5+4\dfrac{|x-6|}{x-6}-\dfrac{|x+1|}{x+1}\right), \\ x^2-4x+(y-a)^2=21. \end{cases}$

12. $\begin{cases} y=\log_2\left(5+4\dfrac{|x-2|}{x-2}-\dfrac{|x+5|}{x+5}\right), \\ x^2+4x=21-(a-y)^2. \end{cases}$

Найти все значения параметра a, при которых системы уравнений имеют решение:

13. $\begin{cases} \log_2(1-x)+\log_2(1-y)=2, \\ y=a-x. \end{cases}$

14. $\begin{cases} y=x^2, \\ \lg(3-x)=\lg\left(1-\dfrac{y}{a}\right). \end{cases}$

15. $\begin{cases} x+\log_2(1-y)=2, \\ y=a+4\cdot 2^x. \end{cases}$

16. $\begin{cases} (x-a)^2=x-y-2a+24, \\ \dfrac{1-\log_{12} y}{1-\log_{12} x}=1. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = \dfrac{|y| - y}{|y| + y} \cdot 3^x, \\ 3^x + y = a^2 - 4a + 1. \end{cases}$

Указать все значения параметра a, при которых системы уравнений не имеют решений:

18. $\begin{cases} y + \log_2(x-1) = 2, \\ 2^y = a - 4x. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \log_2(y + a - 2) = \log_2(a + x) - 1, \\ y = 4\sqrt{1-x}. \end{cases}$

20. $\begin{cases} y - a = x^2, \\ \lg(3 + x) = \lg\dfrac{y}{a}. \end{cases}$

Ответы:

ЗАДАНИЕ 1. **9.** $\{-\sqrt[4]{6};\sqrt[4]{6}\}$. **10.** $\{0{,}125\}$. **11.** $\{21\}$. **12.** $\{-4\}$. **13.** $\{-2;4{,}5\}$. **14.** $\{10^4;10^{0{,}25}\}$. **15.** $\left\{100;10^{\frac{-20}{9}}\right\}$. **16.** $\left\{\frac{1}{9}\right\}$. **17.** $\{5\}$. **18.** $\{9\}$. **19.** $\left\{\frac{3}{4}\right\}$. **20.** $\{10\}$.

ЗАДАНИЕ 2. **1.** $\{3\}$. **2.** $\{\sqrt{2}-1\}$. **3.** $\{3+\sqrt[3]{7}\}$. **4.** $\{3\}$. **5.** $\left\{\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right\}$. **6.** $\{5\}$. **7.** $\{-0{,}5;2{,}5\}$. **8.** $\{3\}$. **9.** $\{4\}$. **10.** $\{1;0{,}25(\sqrt{41}+7)\}$. **11.** $\{0{,}01;100\}$. **12.** $\{0{,}1;10\}$. **13.** $\{1;4\}$. **14.** $\{0{,}1;1000\}$. **15.** $\{3;7\}$. **16.** $\{9\}$. **17.** $\{-1-\sqrt{5};-2;0;-1+\sqrt{5};2\}$. **18.** $\{-1\}$. **19.** $\{100\}$. **20.** $\{10\}$.

ЗАДАНИЕ 3. **1.** $\{25\}$. **2.** $\{0{,}5\sqrt{26}-4\}$. **3.** $\{0\}$. **4.** $\{5\}$. **5.** $\{13\}$. **6.** $\{3{,}5;4{,}5\}$. **7.** $\{50\}$. **8.** $\{7;15\}$. **9.** $\{5;7\}$. **10.** $\varnothing$. **11.** $\left\{\frac{17}{28};\frac{23}{32}\right\}$. **12.** $\{7\}$. **13.** $\{20;500\}$. **14.** $\{0{,}1;\sqrt[4]{10}\}$. **15.** $\{10;10^{19/13}\}$. **16.** $\left\{\frac{\sqrt{10}}{10^5};10\right\}$. **17.** $\{-1000\}$. **18.** $\{-0{,}4995;0{,}5(\sqrt{10}-1)\}$. **19.** $\varnothing$. **20.** $\{100\}$.

ЗАДАНИЕ 4. **1.** $\{3;27\}$. **2.** $\{0{,}5;4\}$. **3.** $\{1/8;64\}$. **4.** $\{0{,}1\sqrt{10};100\}$. **5.** $\{64\}$. **6.** $\{0{,}5\sqrt[3]{4};4\}$. **7.** $\{2^{-\sqrt{2}};2^{\sqrt{2}}\}$. **8.** $\{16\}$. **9.** $\{1/9;1;3\}$. **10.** $\{-1{,}4;3{,}4\}$. **11.** $\{1/9\}$.

12. $\{3\}$. **13.** $\{7;49\}$. **14.** $\{\sqrt{3};3\}$. **15.** $\{8;9\}$. **16.** $\{2\}$. **17.** $\{16\}$. **18.** $\{4\}$.
19. $\{-0{,}5\sqrt{3};0{,}5\sqrt{3}\}$. **20.** $\{1{,}25;5;6\}$.

ЗАДАНИЕ 5. **1.** a при $a>0$, $a\neq 0$. **2.** m при $m>0$, $m\neq 1$. **3.** a при $a>0$, $a\neq 1$. **4.** $1/a$, $\sqrt{a}$, a^2 при $a>0$, $a\neq 1$. **5.** a^6 при $a>0$, $a\neq 1$.
6. $x=4-a^2$ при $0<a<1$ и $1<a<2\sqrt{2}$. **7.** $1-\sqrt{1-0{,}5\lg p}$,

$1+\sqrt{1-0{,}5\lg p}$, где $1<p\leq 10$. **8.** $-\frac{1}{4}<a<0$. **9.** $0<a<\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$.

10. $-\frac{1}{8}<a<0$. **11.** $0<a<\frac{1}{\sqrt[3]{28}}$. **12.** $a=-\frac{7}{4}$, $a<-2$. **13.** а) При $a<\frac{3}{4}$;

б) при $a=\frac{3}{4}$; в) при $a>\frac{3}{4}$; г) нет таких a. **14.** а) При $a\leq -1$;
б) при $a\in(-1;1]$; в) при $a>1$; г) нет таких a. **15.** а) При $0\leq a<4$;
б) при $a<0$ и $a=4$; в) при $a>4$; г) нет таких a. **16.** а) При $a\leq -1$;
б) при $-1\leq a\leq 1$; в) при $a>1$; г) нет таких a. **17.** а) При $a\leq -1$;
б) при $a>\frac{21}{16}$; в) при $-1<a\leq 0$; г) $0<a<\frac{21}{16}$ – три решения.

18. а) При $a\leq -1$; б) $a\in\varnothing$; в) при $-1\leq a\leq\frac{1}{2}$, $\frac{33}{16}<a$; г) $\frac{1}{2}<a\leq\frac{33}{16}$ – четыре решения. **19.** а) При $a=0$; б) при $a<4$, $a\neq 0$; в) при $a=4$;
г) при $a>4$ – три решения. **20.** $a\in(-\infty;-1)\cup\left\{-\frac{3}{4}\right\}$.

ЗАДАНИЕ 6. **1.** $a\in(-\infty;-4)\cup\left\{\frac{9}{4}\right\}$ $x=\frac{4a-1+\sqrt{16a^2-8a-63}}{2}$.

2. $a=-2$ $x=-2$, $y=0$. **3.** $a\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\{1\}$ $x=-a-\sqrt{1-a^2}$,

$y=-3a-3\sqrt{1-a^2}$. **4.** $a\in(-2;1]\cup\{2\}$ $x=y=a+\sqrt{2-a}$. **5.** $a\in(9;8)$
$x=-3a+3\sqrt{a^2-8a}$, $y=3\left(-3a+3\sqrt{a^2-8a}\right)$. **6.** $a\in\left(-\frac{1}{4};0\right)\cup\left\{\frac{1}{5}\right\}$

$x=\frac{1}{2a}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a}-15}$, $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a}-15}$. **7.** $a\in\left[\frac{3}{2};2\right]\cup\left\{6;\frac{7}{2}\right\}$

$x=a+\sqrt{-a^2+7a-6}$, $y=-1$. **8.** $a\in\left(-\frac{4}{5};1\right]\cup\{4\}$ $x=a+\frac{\sqrt{8+2a-a^2}}{3}$,

$y=1$. **9.** $a\in(4;+\infty)$ $x=\frac{1}{2}-\frac{3a}{8}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+8a-48}$,

$y=2-\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+8a-48}$; $x=\frac{1}{2}-\frac{3a}{8}-\frac{1}{2}\sqrt{a^2+8a-48}$,

$y=2-\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{a^2+8a-48}$. **10.** $a\in\left(-4;-\frac{7}{4}\right)$ $x=-\frac{4}{y+1}$,

$y=\frac{-1-4a\pm\sqrt{16a^2-8a-63}}{2}$. **11.** $a\in(0;5)$ $x=2-\sqrt{-a^2+2a+24}$, $y=1$,

$x=2+\sqrt{-a^2+6a+16}$, $y=3$. **12.** $a\in(0;5)$ $x=2-\sqrt{-a^2+2a+24}$, $y=1$,

$x=2+\sqrt{-a^2+6a+16}$, $y=3$. **13.** $a\in(-\infty;-2]$. **14.** $a\in(-\infty;0)\cup(9;+\infty)$.

15. $a\in(-7;+\infty)$. **16.** $a\in(-6;12)$. **17.** $a\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$. **18.** $a\in(-\infty;12)$.

19. $a<-13$. **20.** $a\in[-9;0]$.

Группа II

Решить уравнения:

1. $3^{\log_6(x-7)}=\log_5 125$.

2. $2^{\log_6(-4x)}=\log_7 2401$.

3. $\log_x\left(8\sqrt[5]{0,25}\right)=\frac{13}{5}$.

4. $\log_x\left(36\sqrt[3]{36}\right)=\frac{8}{3}$.

5. $2^{3/\log_2 x}=\frac{1}{8}$.

6. $4^{1/\log_2 x}=2$.

7. $\frac{\lg\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\lg\sqrt[3]{x-40}}=3$.

8. $\frac{\lg\left(\sqrt[3]{3x+1}+4\right)-\lg x}{2-2\lg 2+\lg 0,015}=1$.

9. $\log_6(x+1)+\log_6(2x+1)=1$.

10. $\log_3 x+\log_3(x+2)=1$.

11. $\log_x 2+\log_2 x=2,5$.

12. $\log_4\left(x^2+3x-4\right)=\log_4\frac{x-1}{x+4}$.

13. $\log_2\sqrt[4]{2x^2+3x+2}=\log_4(2x)$.

14. $\log_2\left(x^2-3\right)-\log_2(6x-10)+1=0$.

15. $\log_{1-x}3-\log_{1-x}2=\frac{1}{2}$.

16. $\lg x-\frac{1}{2}\lg\left(x-\frac{1}{2}\right)=\lg\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\lg\left(x+\frac{1}{8}\right)$.

17. $\lg(x+2)-\lg 5=\frac{1}{2}\lg(x-4)$. 18. $\lg(20x)-0{,}5\lg(220x-117)=\lg 2$.

19. $\lg(x-150)+\log_{\sqrt{3}} 9=7-\lg(150-x)^2$.

20. $\lg x-\lg 3=\lg(x+2)-\lg\left(x^2-4\right)$.

21. $\lg\sqrt{x-3}-0{,}5\lg(x-1)^2+7^{1/(2\log_{81}7)}=5^{2/\log_8 5}-\lg\sqrt{x+2}$.

22. $\lg(x+5)-\lg(3x+25)=\lg(x-15)-\lg 17$.

23. $\lg\left(x+\sqrt{5}\right)+16^{2-\log_{\sqrt{2}}\left(2/\sqrt{3}\right)}=27^{2-3\log_3 2}-\lg\left(x-\sqrt{5}\right)$.

24. $5\lg x-\lg 288-3^{2-\log_9 27}=3\log(x/2)-0{,}5\cdot 3^{\log_3 2+\log_{27}3}$.

25. $\lg\sqrt{x-9}+\log_{25}\sqrt[18]{625}=1-\log_8\sqrt[3]{0{,}5}-0{,}5\lg(2x-1)$.

26. $\lg\left(3x^2+12x+19\right)-\lg(3x+4)+\log_{32}4=1-\log_{1/16}\sqrt[5]{256}$.

27. $\dfrac{2\lg 2+\lg(x-3)}{\lg(7x+1)+\lg(x-6)+\lg 3}=\log_{1/16}\dfrac{1}{4}$.

28. $\lg(3x-11)+\log_{\sqrt{2}}2048=25-\lg(x-27)$.

29. $\dfrac{\lg 8-\lg(x-5)}{\lg\sqrt{x+7}-\lg 2}=1-\dfrac{\log_3 12}{\log_{36}3}+\dfrac{\log_3 4}{\log_{108}3}$.

30. $\sqrt{\log_3 x^9}-4\log_9\sqrt{3x}=1$. 31. $\log_6\left(5+6^{-x}\right)=x+1$.

32. $\log_2\left(9-2^x\right)=3-x$. 33. $\log_2\left(2^x-3\right)+x=2$.

34. $\log_2\left(9^{x-1}+7\right)=2+\log_2\left(3^{x-1}+1\right)$. 35. $\lg\left(2^x+x-13\right)=x-x\lg 5$.

36. $\lg\left(3^x+x-17\right)=x\lg 30-x$.

37. $\lg\left(10^{3/x}-500\right)-3=\lg\left(3-1000^{(1-x)/x}\right)-2\lg 2$.

38. $\lg\left(0{,}2\sqrt{3^{x+2}}-50\right)-\lg\left(3^{x/2}+715\right)+1=0$.

39. $2\lg^2 x+\left(1-\sqrt{2}\right)\lg x^2=2\sqrt{2}$.

40. $\frac{4}{3}\log_3^2(5x-6)^3-\log_3(5x-6)^3\cdot\log_3 x^6=-6\log_3^2\frac{1}{x}$.

41. $2\lg(x+0{,}5)-\lg(x-1)=\lg(x+2{,}5)+\lg 2$.

42. $\lg\left(x+\frac{4}{3}\right)-\lg\left(x-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\lg(x+6)-\frac{1}{2}\lg x$.

43. $1+\lg\left(1+x^2-2x\right)-\lg\left(1+x^2\right)=2\lg(1-x)$.

44. $\lg\left(1+4x^2-4x\right)-\frac{1}{2}\lg\left(19+x^2\right)=\lg(1-2x)$.

45. $\frac{4}{3}\log_9 27\cdot\log_2(3-x)-\log_2(4x+9)=\frac{2}{\log_{49}16}-2$.

46. $\frac{\lg(x-9)}{6}=\frac{3}{\lg(x-9)^2}$.

47. $\log_{0,5}^2(4x)+\log_2\frac{x^2}{8}=8$.

48. $2\log_9^2 x=\log_3 x\cdot\log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right)$.

49. $\frac{\log_2(x-1)}{\log_2(x/2)}-2\log_2\sqrt{x}+\log_2^2 x=3$.

50. $\left|1-\log_{1/6}x\right|+2=\left|3-\log_{1/6}x\right|$.

51. $\left|4+\log_{1/7}x\right|=2+\left|2+\log_{1/7}x\right|$.

52. $2\log_3\frac{x^2}{27}-\frac{\log_3\frac{1}{x}}{\log_5\sqrt{x}}=2$.

53. $\log_{0,25}\left(x^2+2x-8\right)^2-\log_{0,5}\left(10+3x-x^2\right)=1$.

54. $\log_3\frac{1}{\sqrt{\log_3 x}}=\log_9\log_9\frac{x}{3}$.

55. $9^{\log_{1/3}(x+2)}=7^{\log_{1/7}\left(2x^2+3x+2\right)}$.

56. $2^{\sqrt{\log_2 3}}=3^{\sqrt{\log_9 4x-0,75}}$.

57. $\log_3\left(\sqrt{x}+\left|\sqrt{x}-1\right|\right)=\log_9\left(4\sqrt{x}-3+4\left|\sqrt{x}-1\right|\right)$.

58. $\frac{x}{18}=(2/3)^{\log_x 12}$.

59. $\log_2\left(x^2+7\right)=5+\log_2 x-\frac{6}{\log_2(x+7/x)}$.

60. $\log_{\left(1-2x^2\right)}x=\frac{1}{4}-\frac{3}{\log_2\left(1-2x^2\right)^4}$.

Решить системы уравнений:

61. $\begin{cases}\log_4 x-\log_2 y=0,\\ x^2-5y^2+4=0.\end{cases}$

62. $\begin{cases}\log_{\sqrt{3}}(x-y)=2,\\ \log_4 x-\log_x y=\frac{7}{6}.\end{cases}$

63. $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2{,}5, \\ xy = 27. \end{cases}$

64. $\begin{cases} 2\log_2 x - 3^y = 15, \\ 3^y \log_2 x - 2\log_2 x = 3^{y+1}. \end{cases}$

65. $\begin{cases} x\log_2 3 + \log_2 y = y + \log_2 x, \\ x\log_3 12 + \log_3 x = y + \log_3 y. \end{cases}$

66. $\begin{cases} \sqrt{y} + 2\lg x = 3, \\ y - 3\lg x^2 = 1. \end{cases}$

67. $\begin{cases} \log_2\left(x^2 + y^2\right) = 5, \\ 2\log_4 x + \log_2 y = 4. \end{cases}$

68. $\begin{cases} y^{1-0{,}4\log_x y} = x^{0{,}4}, \\ 1 + \log_x\left(1 - \dfrac{3y}{x}\right) = \log_x 4. \end{cases}$

69. $\begin{cases} y \cdot x^{\log_3 x} = x^{2{,}5}, \\ \log_4 y \cdot \log_y (y - 3x) = 1. \end{cases}$

70. $\begin{cases} \log_{|xy|}(x - y) = 1; \\ 2\log_5 |xy| \cdot \log_{|xy|}(x + y) = 1. \end{cases}$

71. $\begin{cases} x - y = 2\sqrt{3}, \\ \left(1 + 2\log_{|xy|} 2\right)\log_{x+y}|xy| = 1. \end{cases}$

72. $\begin{cases} 2\log_{1-x}(-xy - 2x + y + 2) + \log_{2+y}\left(x^2 - 2x + 1\right) = 6, \\ \log_{1-x}(y + 5) - \log_{2+y}(x + 4) = 1. \end{cases}$

Ответы:

1. $\{12\}$. **2.** $\{-9\}$. **3.** $\{2\}$. **4.** $\{6\}$. **5.** $\{0{,}5\}$. **6.** $\{4\}$. **7.** $\{48\}$. **8.** $\{40\}$. **9.** $\{1\}$. **10.** $\{1\}$; **11.** $\{\sqrt{2};4\}$. **12.** $\{-5\}$. **13.** $\{2\}$. **14.** $\{2\}$. **15.** $\{-1{,}25\}$. **16.** $\{1\}$. **17.** $\{8;13\}$. **18.** $\{0{,}9;1{,}3\}$. **19.** $\{160\}$. **20.** $\{3\}$. **21.** $\{7\}$. **22.** $\{20\}$. **23.** $\{\sqrt{6}\}$. **24.** $\{6\}$. **25.** $\{13\}$. **26.** $\{-1;7\}$. **27.** $\{9\}$. **28.** $\{37\}$. **29.** $\{29\}$. **30.** $\{3;81\}$. **31.** $\{0\}$. **32.** $\{0;3\}$. **33.** $\{2\}$. **34.** $\{1;2\}$. **35.** $\{13\}$. **36.** $\{17\}$. **37.** $\{1\}$. **38.** $\{10\}$. **39.** $\{0{,}1;10^{\sqrt{2}}\}$. **40.** $\left\{\dfrac{3}{2};1{,}44\right\}$. **41.** $\{1{,}5\}$. **42.** $\{2\}$. **43.** $\{3\}$. **44.** $\{-9\}$. **45.** $\{-0{,}5\}$. **46.** $\{9{,}001;1009\}$. **47.** $\left\{\dfrac{1}{128};2\right\}$. **48.** $\{1;4\}$. **49.** $\{0{,}5;4\}$. **50.** $\left[\dfrac{1}{6};+\infty\right)$. **51.** $(0;49]$. **52.** $\{1{,}8\sqrt{5}\}$. **53.** $\left\{\dfrac{\sqrt{313}-1}{6};\dfrac{\sqrt{73}-7}{2}\right\}$. **54.** $\{9\}$. **55.** $\{-1;2\}$. **56.** $\{3\sqrt{3}\}$. **57.** $[0;1]\cup\{4\}$. **58.** $\{5/3;15\}$. **59.** $\{1;7\}$. **60.** $\{-0{,}5;0{,}5\}$. **61.** $\{(1;1),(4;2)\}$. **62.** $\{(5;2)\}$.

63. $\{(3;9),\{9;3\}\}$. **64.** $\{(512;1)\}$. **65.** $\left\{\left(\frac{1}{2\log_2 3-1};\frac{2}{2\log_2 3-1}\right)\right\}$. **66.** $\{(\sqrt{10};4)\}$.

67. $\{(4;4)\}$. **68.** $\{(16;4)\}$. **69.** $\{(4;16)\}$. **70.** $\{(0{,}5(5+\sqrt{5});0{,}5(5-\sqrt{5}))\}$.

71. $\{(0{,}5(3+2\sqrt{3});0{,}5(3-2\sqrt{3}))\}$. **72.** $\{(-2;1)\}$.

Группа III

Решить уравнения:

1. $2\log_4(2^x-1)+x+\log_{\frac{1}{2}}3+\log_{\frac{\sqrt{6}}{6}}6=0$.

2. $\sqrt{2\log_8(-x)}-\log_8\sqrt{x^2}=0$.

3. $\lg^2(100x)+\lg^2(10x)+\lg^2 x=14$.

4. $\left(1+\log_3\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{x}\right)\right)\cdot\log_x 3=1$.

5. $\frac{\lg(3x^2-2)}{\lg(2x-1)}=2$.

6. $\frac{3+\log_2(3x-1)}{1+\log_2(4x-1)}=2$.

7. $\log_2\left(x+\frac{8}{3}\right)=-\log_2 x$.

8. $\log_3(x-2)=1-\log_3 x$.

9. $2\log_2 x=2-\log_2 3+\log_2(x+1)$.

10. $\log_3(5-x)+2\log_3(3-x)=1$.

11. $\frac{1-\log_3(x^2+3)}{1-\log_3(x+3)}=2$.

12. $\frac{\log_2(5x+6)}{1+\log_2(x-9)}=2$.

13. $\log_2^2\left(\frac{x}{2}\right)=\log_2\left(\frac{x^2}{4}\right)$.

14. $\log_5^2\left(\frac{x}{5}\right)+5=3\log_5 x$.

15. $\frac{\log_3(x^2-12x+39)-1}{\log_3(x-3)-1}=2$.

16. $(1-\log_3(7-4x))\log_x 3=1$.

17. $\left(\log_3\left(5-\frac{2}{x}\right)-1\right)\log_x 3=1$.

18. $2\lg\lg x=\lg(3-2\lg x)$.

19. $\log_2(2^x-2)=3-x$.

20. $\log_3\left(\frac{81}{82-3^{2x}}\right)=2x$.

21. $\log_2(4^x+1)=x+\log_2(2^{x+3}-6)$.

22. $\lg\lg(x-1)=\lg\lg(2x+1)-\lg 2$.

23. $\log_x(5x^2)(\log_5 x)^2=1$.

24. $\log_x(3x^2-3x+1)=2$.

25. $\log_2\left(\sqrt{1+x}-1\right)=\frac{1}{2}\log_2\left(3-\sqrt{1+x}\right)$.

26. $3+\log_{\sqrt{3}} x=\log_3(6x+1)$.

27. $\dfrac{\log_2(4x+36)}{1+\log_2(x-3)}=2$.

28. $\log_x\left(2x^2+12x-11\right)=2+\log_x 3$.

29. $1+\log_{\sqrt{2}} x=\log_2(3-x)$.

30. $2\log_x 27-3\log_{3x} x=1$.

31. $\sqrt{\log_x \sqrt{5x}}\cdot\log_5 x=1$.

32. $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}}=10$.

33. $1+\log_3\left(x^{x^2}\right)=x^2+\log_3 x$.

34. $25^{\lg x}=5+4x^{\lg 5}$.

35. $\lg\left(2^x+x-4\right)=x(1-\lg 5)$.

36. $1+2\log_{x+2} 5=\log_5(x+2)$.

37. $\log_a x-\log_{a^2} x-\log_{a^3} x=1, \quad a>0;\ a\neq 1$.

38. $(3\log_a x-2)\log_x^2 a=\log_{\sqrt{a}} x-3, \ a>0;\ a\neq 1$.

39. $\log_8\left(2\log_3\left(1+\log_2\left(1+3\log_2 x\right)\right)\right)=\frac{1}{3}$.

40. $\log_{x-1}\sqrt{x^2+2x}=\log_{x^2+2x-1}(5-2x)$.

41. $3\cdot 2^{\log_x(3x-2)}+2\cdot 3^{\log_x(3x-2)}-5\cdot 6^{\log_{x^2}(3x-2)}=0$.

42. $\log_{\operatorname{ctg} x}(3+2\cos 2x+2\cos 4x)=0$.

43. $\log_{\operatorname{tg} x}(\cos 2x-\cos 4x)=0$.

Найти все значения параметра, при которых выполняется указанное условие:

44. Уравнение $\lg(ax)=2\lg(x+1)$ имеет единственный корень.

45. Уравнение $\log_3\left(2+\dfrac{|x|}{x}\right)+(x-2)^2=a$ имеет два различных корня. Найти эти корни при каждом a.

46. Уравнение $\log_4\left(2-\dfrac{|x+2|}{x+2}\right)+\dfrac{|x|}{x}=(p-1-x)^2$ имеет два различных решения.

47. Уравнение $\log_4\left(2+\dfrac{|x-2|}{x-2}-\dfrac{|x|}{x}\right)+\dfrac{(x-3)^2}{2}=p$ имеет два различных решения.

48. Уравнение $\log_{\frac{1}{2}}\left(2-\frac{|x|}{x}-\frac{|x-2|}{x-2}\right)=(x-3)^2+a$ **имеет одно решение.**

Найти это решение.

49. Уравнение $\log_2\left(3+\frac{|x|}{x}\right)+(x-2)^2=a$ **имеет два различных корня.**

Найти эти корни при каждом значении a.

50. Корни уравнения

$(a-1)\log_3^2(x-2)-2(a+1)\log_3(x-2)+a-3=0$ **меньше 3.**

Ответы:

1. $\{2\}$. **2.** $\{-64;\ -1\}$. **3.** $\{10;\ 10^{-3}\}$. **4.** $\{3\}$. **5.** $\{3\}$. **6.** $\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **7.** $\left\{\frac{1}{3}\right\}$. **8.** $\{3\}$.

9. $\{2\}$. **10.** $\{2\}$. **11.** $\{3\}$. **12.** $\left\{13\frac{1}{4}\right\}$. **13.** $\{2;\ 8\}$. **14.** $\{25;\ 125\}$. **15.** $\{9\}$.

16. $\left\{\frac{3}{4}\right\}$. **17.** $\left\{\frac{2}{3}\right\}$. **18.** $\{10\}$. **19.** $\{2\}$. **20.** $\{0;\ 2\}$. **21.** $\{0\}$. **22.** $\{4\}$.

23. $\left\{\frac{1}{5};\ \sqrt{5}\right\}$. **24.** $\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **25.** $\{3\}$ **26.** $\left\{\frac{1}{3}\right\}$. **27.** $\{7\}$. **28.** $\{11\}$. **29.** $\{1\}$.

30. $\left\{\frac{1}{\sqrt[4]{27}};\ 9\right\}$. **31.** $\{5\}$. **32.** $\{0{,}01;\ 100\}$. **33.** $\{3;\ 1\}$. **34.** $\{10\}$. **35.** $\{4\}$.

36. $\left\{23;\ -\frac{9}{5}\right\}$. **37.** $\{a^6\}$. **38.** $\left\{\frac{1}{a};\ \sqrt{a};\ a^2\right\}$. **39.** $\{2\}$. **40.** $\{1\}$. **41.** $\{2\}$.

42. $\left\{\frac{\pi}{3}+\pi n \middle| n\in\mathbb{Z}\right\}$. **43.** $\left\{\frac{\pi}{6}+\pi n \middle| n\in\mathbb{Z}\right\}$. **44.** $(-\infty;\ 0)\cup\{4\}$.

45. $a\in(1;\ 4]\cup[5;\ +\infty)$, при $a\in(1;\ 4]$ $x\in\left\{2\pm\sqrt{a-1}\right\}$, при $a\in[5;\ +\infty)$ $x\in\left\{2+\sqrt{a-1};\ 2-\sqrt{a}\right\}$. **46.** $p\in(2;\ +\infty)$. **47.** $p\in\left(\frac{1}{2};\ 1\right)\cup(5;\ +\infty)$.

48. $a\in\{-10;\ -2;\ -1\}$, при $a=-10$ $x=6$, при $a=-2$ $x=4$, при $a=-1$ $x=3$. **49.** $a\in(2;\ 5]\cup[6;\ +\infty)$, при $a\in(2;\ 5]$ $x\in\left\{2\pm\sqrt{a-2}\right\}$, при $a\in[6;\ +\infty)$ $x\in\left\{2+\sqrt{a-2};\ 2-\sqrt{a-1}\right\}$. **50.** $a\in\left[\frac{1}{3};\ 1\right]$.

Логарифмические неравенства

Группа I

ЗАДАНИЕ 1

Решить неравенства:

1. $\log_2(2x-1)>-2$.

2. $\log_{1/3}(5x-1)\geq 0$.

3. $\log_3(6x+5)\leq\frac{1}{3}$.

4. $\log_{1/11}(2x+21)<-2$.

5. $\log_{1/2}\left(x^2-5x+6\right)>-1$.

6. $\lg\left(x^2-5x+7\right)<0$.

7. $\log_5\left(5x^2+6x+1\right)\leq 0$.

8. $\log_{1/2}\left(\frac{x^2}{6}-x+\frac{35}{24}\right)\geq 0$.

9. $\log_{1,5}\frac{2x-8}{x-2}<0$.

10. $\log_{1/3}\frac{2-3x}{x}\geq -1$.

11. $\log_{0.5}\frac{x-4}{x+3}\leq -2$.

12. $\log_{1/2}\frac{3x+1}{x+1}>-1$.

13. $\log_2\frac{7x+1}{x+2}\leq 3$.

14. $\log_{1/3}\frac{x^2+4x}{2x-3}<1$.

15. $\log_{0,5\sin p/4}\left(4x^2-16x+15\right)\geq -2$.

16. $\log_2\left(x^2-4x-5\right)\leq 4$.

17. $\log_{1/5}\left(\sqrt{x^2-1}-x+1\right)<0$.

18. $\log_2\left(2-x-\sqrt{x^2-1}\right)>1$.

19. $\lg\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|<0$.

ЗАДАНИЕ 2

Решить неравенства:

1. $\frac{\log_2(x+1)}{x-1}>0$.

2. $(x+1)\log_4(x+4)<0$.

3. $(x-3)\log_{1/7}(x+8)\geq 0$.

4. $\frac{\log_2(x-1)}{x-3}\leq 0$.

5. $\frac{1-\log_{0,5}(-x)}{\sqrt{2-6x}}<0$.

6. $\frac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1}\geq 0$.

7. $\sqrt{x^2-4}\left(\log_2(1-x)-3\right)<0$.

8. $\sqrt{\left(\frac{1}{2}-x\right)(x-4)}\log_2\frac{2x+\frac{1}{5}}{x+1}\leq 0$.

9. $\dfrac{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)}{\log_2|x-1|}>0$.

10. $\dfrac{x^2-4}{\log_{0,5}x^2-1}<0$.

11. $\dfrac{\log_6\left(x^2-2x+\frac{7}{16}\right)}{4x^2+12x+5}>0$.

12. $\dfrac{\log_2\left(3\cdot 2^{x-1}-1\right)}{x}\geq 0$.

13. $\sqrt{\log_2\dfrac{3x-1}{2-x}}<1$.

14. $5^{\log_2\left(x^2-5x+4,25\right)}<\dfrac{1}{25}$.

15. $\dfrac{\lg 7-\lg\left(-8x-x^2\right)}{\lg(x+3)}>0$.

16. $\left|\log_3(x-4)\right|<1$.

17. $\left|\log_{1/3}(x-2)\right|>1$.

18. При каких значениях p функция $f(x)\lg\left((4-p)x^2-5x+\dfrac{5-5p}{8}\right)$ определена для всех действительных значений x?

ЗАДАНИЕ 3

Решить неравенства:

1. $\log_3(1-2x)\geq\log_3(5x-2)$.

2. $\log_5(1-x)<\log_5(x+3)$.

3. $\log_2(3x+4)>\log_2(5-2x)$.

4. $\log_7(2-x)\leq\log_7(3x+6)$.

5. $\log_{1/3}(x+4)<\log_{1/3}\left(x^2+2x-2\right)$.

6. $\log_{1/5}\left(x^2-x-2\right)>\log_{1/5}\left(3-x^2+2x\right)$.

7. $\log_3\left(2x^2+3\right)<\log_3\left(x^2+6\right)$.

8. $\lg\left(x^2-3\right)\geq\lg(x+3)$.

9. $\log_{0,5}\left(x^2+1\right)\leq\log_{0,5}(2x-5)$.

10. $\log_{1/3}(8-x)>\log_{1/3}\dfrac{x+4}{2x-3}$.

11. $\log_3\log_4\dfrac{4x-1}{x+1}<\log_{1/3}\log_{1/4}\dfrac{x+1}{4x-1}$.

12. $\dfrac{\log_{1/7}(3x-8)-\log_{1/7}\left(x^2+4\right)}{\sqrt{10-x}}\geq 0$.

13. $\log_5\sqrt{x+7}>\log_5(x+1)$.

14. $\dfrac{1}{\log_2(x-1)}<\dfrac{1}{\log_2\sqrt{x+1}}$.

15. $\dfrac{1}{\log_{1/2}\sqrt{x+3}}\leq\dfrac{1}{\log_{1/2}(x+1)}$.

16. $\log_3\left(x^2-2\right)<\log_3\left(\dfrac{3}{2}|x|-1\right)$.

17. $\log_{1/3}\left(3-x^2\right)<\log_{1/3}(4|x|-2)$.

18. При каких значениях p функция $f(x)=\ln\left(2px+(p-1)x^2+3p-2\right)$ определена для всех положительных значений x?

ЗАДАНИЕ 4

Решить неравенства:

1. $\log_{1-x}(2,5x-1)\geq -2$.

2. $\log_x \dfrac{4x+5}{6-5x}<-1$.

3. $\log_x \dfrac{2x-1}{x-1}>1$.

4. $\log_{3x-2} x\leq 1$.

5. $\log_{2x-4,25} \dfrac{x^2-14x+51}{50}\leq 0$.

6. $\log_{x-1}\left(1+2x^4-x^6\right)>0$.

7. $\log_{x+2,5}\left(\dfrac{x-5}{2x-3}\right)^2>0$.

8. $\log_{0,2x}\left(x^2-8x+16\right)\geq 0$.

9. $\log_{x-1}\dfrac{2(x-2)(x-4)}{x+5}\geq 1$.

10. $\log_{1/x^2}\left(x^7+x^3-3\right)+3,5<0$.

11. $\log_{2x-x^2}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)>0$.

12. $\log_{(x^2-10x+31)/30}\left(5x-\dfrac{11}{20}\right)\leq 0$.

13. $\log_{|x|}(6x+27)>2$.

14. $\log_x|x-2|<1$.

15. $\log_{x^2}\dfrac{4x-5}{|x-2|}\geq\dfrac{1}{2}$.

16. $\log_{-4x^2+12x-8}|4x-5|>0$.

17. $\log_{(x^2-12x+30)/10}\left(\log_2\dfrac{2x}{5}\right)>0$.

18. $\log_{\log_2(0,5x)}\left(x^2-10x+22\right)>0$.

19. $\log_x\log_9\left(3^x-9\right)\leq 1$

20. $\log_{x^2+2x-3}\dfrac{|x+4|-|x|}{x-1}>0$.

Найти все значения параметра a, при которых неравенства выполняются при любом значении x:

21. $\log_{a(a+1)}\left(|x|+4\right)>1$.

22. $\log_{a/(a+1)}\left(x^2+2\right)>1$.

Ответы:

ЗАДАНИЕ 1. **1.** $\left(\dfrac{5}{8};+\infty\right)$. **2.** $\left(\dfrac{1}{5};\dfrac{2}{5}\right)$. **3.** $\left(-\dfrac{5}{6};\dfrac{\sqrt[3]{3}-5}{6}\right)$. **4.** $(50;+\infty)$.

5. $(1;2)\cup(3;4)$. **6.** $(2;3)$. **7.** $\left[-\dfrac{6}{5};-1\right)\cup\left(-\dfrac{1}{5};0\right]$. **8.** $\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right)\cup\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{11}{2}\right]$.

9. $(4;\ 6)$. **10.** $\left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]$. **11.** $\left[-\frac{16}{3};-3\right)$. **12.** $\left(-\frac{1}{3};1\right)$. **13.** $(-\infty;-15]\cup\left(-\frac{1}{7};+\infty\right)$.

14. $\left(-3;-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$. **15.** $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right]$. **16.** $[-3;\ -1)\cup(5;\ 7]$.

17. $(-\infty;\ -1)$. **18.** $(-\infty;\ -1)$. **19.** $(-\infty;\ -2)\cup(0;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$.

ЗАДАНИЕ 2. **1.** $(-1;\ 0)\cup(1;\ +\infty)$. **2.** $(-3;\ -1)$. **3.** $[-7;\ 3]$. **4.** $[2;\ 3)$.

5. $\left(-\frac{1}{2};0\right)$. **6.** $\{5\}\cup\left(4+\sqrt{2};\ +\infty\right)$. **7.** $(-7;\ -2)$. **8.** $\left[\frac{1}{2};\frac{4}{5}\right]\cup\{4\}$.

9. $\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup(2;3)$. **10.** $(-\infty;\ -2)\cup\left(-\sqrt{2};\ -1\right)\cup\left(1;\ \sqrt{2}\right)\cup(2;\ +\infty)$.

11. $\left(-\infty;\ -\frac{5}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{9}{4};\ +\infty\right)$. **12.** $\left(\log_2\frac{2}{3};\ 0\right)\cup\left(\log_2\frac{4}{3};\ +\infty\right)$.

13. $\left[\frac{3}{4};\ 1\right)$. **14.** $\left(1;\ \frac{5}{2}-\sqrt{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2}+\sqrt{2};\ 4\right)$. **15.** $(-3;\ -2)\cup(-1;\ 0)$.

16. $\left(\frac{13}{3};7\right)$. **17.** $\left(-2;\frac{7}{3}\right)\cup(5;+\infty)$. **18.** $p\in(-\infty;-1)$.

ЗАДАНИЕ 3. **1.** $\left(\frac{2}{5};\ \frac{3}{7}\right]$. **2.** $(-1;\ 1)$. **3.** $\left(\frac{1}{5};\ \frac{5}{2}\right)$. **4.** $[-1;\ 2)$. **5.** $\left(-3;\ -1-\sqrt{3}\right)\cup$

$\cup\left(-1+\sqrt{3};\ 2\right)$ **6.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$. **7.** $\left(-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\right)$. **8.** $(-3;\ -2]\cup[3;\ +\infty)$. **9.** $\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$.

10. $(1{,}5;\ 2)\cup(7;\ 8)$. **11.** $\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$. **12.** $\left(\frac{8}{3};10\right)$. **13.** $(-1;\ 2)$.

14. $(1;\ 2)\cup(3;\ +\infty)$. **15.** $(-1;\ 0)\cup[1;\ +\infty)$. **16.** $\left(-2;\ -\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};\ 2\right)$.

17. $\left(-\sqrt{3};\ -1\right)\cup\left(1;\ \sqrt{3}\right)$. **18.** $p\in(5;+\infty)$

ЗАДАНИЕ 4. **1.** $[0{,}5;\ 1)\cup[2;\ +\infty)$. **2.** $(0{,}5;\ 1)$. **3.** $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2};\ \frac{1}{2}\right)\cup\left(1;\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

4. $(2/3;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$. **5.** $\left(0{,}58;\ 7+4\sqrt{3}\right]$. **6.** $\left(1;\ \sqrt{2}\right)$.

7. $\left(-\frac{5}{2};\ -2\right)\cup\left(-\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};\ \frac{8}{3}\right)$. **8.** $[3;\ 4)\cup(4;\ 5)\cup(5;\ +\infty)$.

9. $\left[8-\sqrt{43};\ 2\right)\cup\left[8+\sqrt{43};\ +\infty\right)$. **10.** $\left(\sqrt[3]{3};\ +\infty\right)$. **11.** $(1,5;\ 2)$.

12. $\left[0,31;\ 5+2\sqrt{6}\right)$. **13.** $(-3;\ -1)\cup(1;\ 9)$. **14.** $(0;\ 1)\cup(1;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$.

15. $\left[\sqrt{6}-1;\ 2\right)\cup(2;\ 5]$. **16.** $\left(1;\ \frac{5}{4}\right)\cup\left(\frac{5}{4};\ \frac{3}{2}\right)$. **17.** $\left(2,5;\ 6-\sqrt{6}\right)\cup(10;\ +\infty)$.

18. $\left(3;\ 5-\sqrt{3}\right)\cup(7;\ +\infty)$. **19.** $(\log_3 10;\ +\infty)$. **20.** $\left(-1-\sqrt{5};\ -3\right)\cup\left(\sqrt{5}-1;\ 5\right)$.

21. $a\in\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2};\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$. **22.** $a\in(-\infty;-2)$.

Группа II

Решить неравенства:

1. $\log_2^2\frac{4x-3}{4-3x}>-\frac{1}{2}$.

2. $\log_{1/4}(2x+3)>\log_9 27$.

3. $\log_{1/(x-1)}0,4>0$.

4. $\log_{x+0,2}2<\log_x 4$.

5. $3^{\log_3\sqrt{x-1}}<3^{\log_3(x-6)}+3$.

6. $\log_{0,1}\left(x^2+x+2\right)>\log_{0,1}(x+3)$.

7. $\log_3(2-x)<\log_{1/3}(x+1)$.

8. $\log_{1/5}\left(x^2-6x+18\right)+2\log_5(x-4)<0$.

9. $\log_3\frac{2x+4}{x-2}<3$.

10. $\log_2\frac{2x+0,2}{x+1}<0$.

11. $\log_3\frac{x+1}{x}\le-2$.

12. $\log_{1/5}\left(\sqrt{1+x}-x\right)<2$.

13. $\sqrt{\log_2\frac{3-2x}{1-x}}<1$.

14. $\log_{\operatorname{tg}(\pi/8)}(2x+1)\ge\log_{\operatorname{tg}(\pi/8)}\left(x^2+1\right)$.

15. $\log_{\sin(\pi/6)}\left(x^2-4x+3\right)\ge-3$.

16. $2\log_3\left(2x^2+x-1\right)>\log_3 4$.

17. $\log_4\frac{2x-1}{x+1}<-\frac{1}{2}$.

18. $\log_{1/2}\log_8\frac{x^2-1}{x-2}<0$.

19. $\log_3\log_{9/16}\left(x^2-4x+3\right)\le0$

20. $\log_{4/3}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)+\log_{4/9}\frac{2}{3}\ge0$

21. $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{0,3}\log_3\frac{x-2}{x-4}}\le1$.

22. $\log_{1/3}\left(x^2-6\right)+\log_9 x^2\ge0$.

23. $\left|\log_2 x\right|\ge2$.

24. $\log_2\left(9^{x-1}+7\right)-2<\log_2\left(3^{x-1}+1\right)$.

25. $\log_{0,7}\left(1+x-\sqrt{x^2-4}\right)\le0$.

26. $\log_{1983}\left(x^2-1982x\right)<1$.

27. $\log_2\left|1+\frac{1}{x}\right|>1$.

28. $\log_2\log_3\frac{x-1}{x+1}<\log_{1/2}\log_{1/3}\frac{x+1}{x-1}$.

29. $\log_{1/3}\log_5\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)<\log_3\log_{1/5}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

30. $\log_3|3-4x|>2$.

31. $|\log_3 x|-\log_3 x-3<0$.

32. $|1-\log_{1983}x|+|\log_{1983}x-3|>4$.

33. $\log_3\frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}\ge 0$.

34. $\lg 10^{\lg(x^2-21)}>1+\lg x$.

35. $\log_{1/2}^2 x-\log_{1/2}x^2>\log_{1/2}^2 3-1$.

36. $\lg(10x)\cdot\log_2 x<2\log_2 10$.

37. $\log_2 x^7>\log_{1/2}^2 x+3\sqrt{\log_2^2 x+7\log_{1/2}\frac{x}{2}+3}$.

38. $1-\sqrt{1-8\log_{1/4}^2 x}<3\log_{1/4}x$.

39. $\sqrt{\log_{1/2}^2 x+4\log_2\sqrt{x}}<\sqrt{2}\left(4-\log_{16}x^4\right)$.

40. $\frac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1}\ge 0$.

41. $\frac{4x^2+12x+5}{\log_6\left(x^2-2x+\frac{7}{16}\right)}>0$.

42. $\frac{x-1}{\log_3(9-3^x)-3}\le 0$.

43. $\frac{1}{\log_3(x^2-7x+12)}<\frac{1}{\log_3 20}$.

44. $\frac{1}{\log_4\frac{x+1}{x+2}}<\frac{1}{\log_4(x+3)}$.

45. $\frac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x}\le\frac{1}{2}$.

46. $\frac{1}{\log_3(x+1)}<\frac{1}{2\log_9\sqrt{x^2+6x+9}}$.

47. $\frac{2\lg x+110}{\lg x+10}\ge 1$.

48. $\frac{\lg(4x^2+x)}{\lg(2x)}\ge 1$.

49. $\frac{\log_{0,25}\sqrt{x+1}}{\log_{0,25}(x-1)}\le 1$.

50. $2\log_5\sqrt{x}-2\ge\log_x\frac{1}{5}$.

51. $\log_{1/3}x>\log_x 3-\frac{5}{2}$.

52. $2\log_5 x-\log_x 125<1$.

53. $\log_{x/2}8+\log_{x/4}8<\frac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2-4}$.

54. $\log_5 x+\log_x \frac{x}{3}<(2-\log_3 x)\frac{\log_5 x}{\log_3 x}$.

55. $\log_{1/3}(x-1)-3\log_{x-1}\frac{1}{3}>\left|\log_{1/3}(x-1)\right|$.

56. $\log_2^4 x-\log_{1/2}^2\frac{x^3}{8}+9\log_2\frac{32}{x^2}<4\log_{1/2}^2 x$.

57. $\log_{(x+3)/(x-3)}4<2\left(\log_{1/2}(x-3)-\log_{\sqrt{2}/2}\sqrt{x+3}\right)$.

58. $\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}}\geq 2$.

59. $\left(\frac{x}{10}\right)^{\lg x-2}<100$.

60. $\log_x\log_2\left(4^x-6\right)\leq 1$.

61. $\log_x\frac{1}{7}+\log_{1/7}x>10\left|\log_{1/7}x\right|$.

62. $\log_{x-2}\frac{1}{5}\geq\log_{(x-3)/(x-5)}1$.

63. $\log_{3x-1}2x>1$.

64. $\log_{(x-1)^2}\frac{\sqrt{x^3-\frac{7}{2}}}{\sqrt{x-2}}\leq\frac{1}{2}$.

65. $\log_x 2\cdot\log_{2x}2>\log_{4x}2$.

66. $\log_{x^2}\log_{x/16}2>\frac{1}{\log_2 x-6}$.

67. $\log_{|x+6|}2\cdot\log_2\left(x^2-x-2\right)\geq 1$.

68. $\log_x 2x\leq\sqrt{\log_x 2x^3}$.

69. $\log_{2x+4}\left(x^2-x\right)>1$.

70. $\log_{3x+1}\left(x^2-4\right)>1$.

71. $\log_x\frac{2x+0,4}{5(1-x)}>0$.

72. $\log_{3x+5}\left(9x^2+8x+8\right)>2$.

73. $\log_{\sqrt{4-x^2}}\frac{1}{x}>1$.

74. $\log_{(25-x^2)/16}\frac{24-x^2-2x}{14}>1$.

При каких значениях параметра p функция $f(x)$ определена для всех действительных значений x:

75. $f(x)=\lg\left(2p-1+(p+1)x+(p-4)x^2\right)$.

76. $f(x)=\lg\left(3px+p\left(4+x^2\right)+x\right)$.

77. $f(x)=\lg\left((p+1)x^2-(p-1)(2x-3)\right)$.

Ответы:

1. $(3/4;\ 4/3)$. **2.** $(-3/2;\ -23/16)$. **3.** $(2;\ +\infty)$. **4.** $(1;\ +\infty)$. **5.** $(6;\ +\infty)$.

6. $\left(-\sqrt{5};\ -2\right)\cup\left(1;\ \sqrt{5}\right)$. **7.** $\left(-1;\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\ 2\right)$. **8.** $(4;\ +\infty)$.

9. $(-\infty;\ -2)\cup(58/25;\ +\infty)$. **10.** $(-0{,}1;\ 0{,}8)$. **11.** $[-9/8;\ -1)$. **12.** $[-1;\ 1{,}25)$.

13. $[2;\ +\infty)$. **14.** $(-0{,}5;\ 0]\cup[2;\ +\infty)$. **15.** $[-1;\ 1)\cup(3;\ 5]$. **16.** $(-2;3)$.

17. $(0{,}5;1)$. **18.** $(2;3)\cup(5;8)$. **19.** $\left(2-\sqrt{2};\ 3/4\right)\cup\left(13/14;\ 2+\sqrt{2}\right)$.

20. $[0;27/16]$. **21.** $[5;+\infty)$. **22.** $\left[-3;-\sqrt{6}\right)\cup\left(\sqrt{6};3\right]$. **23.** $(0;\ 0{,}25]\cup[4;+\infty)$.

24. $(1;\ 2)$. **25.** $[2;\ +\infty)$. **26.** $(-1;\ 0)\cup(1982;\ 1983)$. **27.** $(-1/3;\ 0)\cup(0;\ 1)$.

28. $(-\infty;\ -2)$. **29.** $(12/5;\ +\infty)$. **30.** $(-\infty;\ -1{,}5)\cup(3;\ +\infty)$. **31.** $\left(\sqrt{3}/9;\ +\infty\right)$.

32. $(0;\ 1)\cup\left(1983^4;\ +\infty\right)$. **33.** $(-\infty;\ -2/3]\cup[0{,}5;\ 2]$. **34.** $(0;\ 3)\cup(7;\ +\infty)$.

35. $(0;\ 1/6)\cup(1{,}5;\ +\infty)$. **36.** $(0{,}01;\ 10)$. **37.** $(2;\ 4]\cup[32;\ 64)$. **38.** $(0{,}75;\ 1)$.

39. $(0;0{,}25]\cup[1;4]$. **40.** $\{5\}\cup\left(4+\sqrt{2};+\infty\right)$. **41.** $(-\infty;-5/2)\cup(-9/4;-7/4)\cup$ $\cup\left(\dfrac{1}{4};+\infty\right)$. **42.** $\left[\log_3\dfrac{9}{10};\ 2\right)$. **43.** $\left(4;\ \dfrac{7+\sqrt{5}}{2}\right)$. **44.** $(-1;\ +\infty)$.

45. $(0;\ 0{,}5)\cup\left[\sqrt{2};\ +\infty\right)$. **46.** $(-1;\ 0)$. **47.** $\left(0;\ 10^{-100}\right]\cup\left(10^{-10};\ +\infty\right)$.

48. $[0;\ 0{,}25]\cup(0{,}5;\ +\infty)$. **49.** $(1;\ 2)\cup[3;\ +\infty)$. **50.** $(1;+\infty)$.

51. $(0;1)\cup\left(\sqrt{3};\ 9\right)$. **52.** $(0;0{,}2)\cup\left(1;5\sqrt{5}\right)$. **53.** $(0;2)\cup(4;+\infty)$.

54. $\left(0;\ \sqrt{5}/5\right)\cup(1;\ 3)$. **55.** $(2;\ 4)$. **56.** $(1/8;\ 1/4)\cup(4;\ 8)$. **57.** $(3;\ 9)$.

58. $(0;\ 0{,}25]\cup[4;\ +\infty)$. **59.** $\left(1;\ 10^3\right)$. **60.** $\left(\log_2\sqrt{7};\ \log_2 3\right]$. **61.** $\left(\dfrac{\sqrt[3]{49}}{7};\ 1\right)$.

62. $(2;\ 3)$. **63.** $(2/3;\ 1)$. **64.** $\varnothing$. **65.** $(0;\ 0{,}25)\cup\left(2^{-\sqrt{2}};\ 1/2\right)\cup\left(1;\ 2^{\sqrt{2}}\right)$.

66. $(0;\ 1)\cup(4;\ 8)\cup(16;\ 64)$. **67.** $(-\infty;\ -7)\cup(-5;\ -2]\cup[4;\ +\infty)$.

68. $(0;\ 1]\cup(2;\ +\infty)$. **69.** $(-1{,}5;\ -1)\cup(4;\ +\infty)$. **70.** $(5;\ +\infty)$. **71.** $(0;\ 23/25)$.

72. $(-4/3;\ -17/22)$. **73.** $\left(0;\ \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)\cup\left(\sqrt{3};\ \sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$. **74.** $(-3;\ 1)\cup(3;\ 4)$.

75. $p\in(5;+\infty)$. **76.** $p\in(-\infty;-1)$. **77.** $p\in(1;+\infty)$.

Группа III

Решить неравенства:

1. $\log_3(x-2) > 1-\log_3 x$.

2. $\log_{\frac{1}{2}} \log_2 \frac{1-2x}{1+x} > 0$.

3. $\log_4(x-2) < \frac{3}{2}-\log_4 x$.

4. $\frac{1}{\lg x-1} < \frac{1-\lg x}{2-\lg x}$.

5. $\log_{3-x} x \le -1$.

6. $\frac{\log_3(x-3)}{x-3,5} > 0$.

7. $(x+2)\lg x < 0$.

8. $\lg(x-1)+\lg(x-2) < \lg 6$.

9. $(x-1)\ln\frac{x+1}{x} > 0$.

10. $\frac{1}{1-\lg x}+\frac{1}{\lg x} < 1$.

11. $1+\frac{\log_3{}^2 x+2}{\log_3 x} > \log_3 x$.

12. $\log_{1/5}(2x+5) < \log_{1/5}(16-x^2)+\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$.

13. $\log_2(3-x)-\log_2\frac{\sin\frac{3\pi}{4}}{5-x} > \frac{1}{2}+\log_2(x+7)$.

14. $\log_4\left(2-\sqrt{x+3}\right) < 2\cos\frac{5\pi}{3}$.

15. $\sqrt{1-\log_2 x} < 2$.

16. $\log_2(2^x-1) < 1-x$.

17. $\frac{1-2^x}{\lg(3-x)} > 0$.

18. $\frac{\lg(5-2^{-x})}{1+x} > 0$.

19. $\log_{0,2}{}^2(x-1) > 4$.

20. $\log_2\log_2\frac{x-1}{2-x} > -1$.

21. $\log_2\left(x+\sqrt{x}-2\right) < 2$.

22. $\log_3(x^2-2) < \log_3\left(\frac{3}{2}|x|-1\right)$.

23. $\log_{\sin\frac{\pi}{3}}(x^2-3x+2) \ge 2$.

24. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{9}}\left(x^2-\frac{10x}{3}+1\right)} \le 1$.

25. $\log_2 x+\log_x 4 \le 3$.

26. $\log_x\sqrt{x+2} > 1$.

27. $\log_{x^2}(2+x) < 1$.

28. $\log_{|x|}\left(\sqrt{9-x^2}-x-1\right) \ge 1$.

29. $\log_x\log_2(4^x-12) \le 1$.

30. $\log_{-4x^2-12x-8}|4x-5| > 0$.

31. $\log_{\frac{3x}{x^2+1}}\left(x^2-2{,}5x+1\right)\ge 0$.

32. $\log_x\left(7x^2-9x+3\right)>2$.

33. $\log_x 2\cdot\log_{2x}2\cdot\log_2(4x)\ge 1$.

34. $\log_{3-x}\dfrac{1}{|x|}>1$.

35. $\dfrac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1}\ge 0$.

36. $\log_{3-2x}x^2\le 1$.

Найти область определения функций:

37. $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\log_3\dfrac{x+1}{x-1}}$.

38. $y=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2-x-12}}+\dfrac{1}{\log_8(x-4)}$.

39. $y=\lg\left(4-x^2\right)\sqrt{\dfrac{1+\lg^2 x}{\lg^2 x}-1}$.

40. $y=\log_{x-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}\right)$.

Ответы:

1. $(3;+\infty)$. **2.** $(-1/4;0)$. **3.** $(2;4)$. **4.** $(0;10)\cup(100;+\infty)$.

5. $\left(0;\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(2;\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$. **6.** $\left(3;\dfrac{7}{2}\right)\cup(4;+\infty)$. **7.** $(0;1)$. **8.** $(2;4)$.

9. $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **10.** $(0;1)\cup(10;+\infty)$. **11.** $(0;1/9)\cup(1;+\infty)$.

12. $(-1;4)$. **13.** $(-7;1)$. **14.** $[-3;1)$. **15.** $(1/8;2]$. **16.** $(0;1)$.

17. $(-\infty;0)\cup(2;3)$. **18.** $(-\log_2 5;-2)\cup(-1;+\infty)$. **19.** $(1;1{,}04)\cup(26;+\infty)$.

20. $\left(3-\sqrt{2};2\right)$. **21.** $(1;4)$. **22.** $\left(-2;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};2\right)$. **23.** $[0{,}5;1)\cup(2;2{,}5]$.

24. $[0;1/3)\cup(3;10/3]$. **25.** $(0;1)\cup[2;4]$. **26.** $(1;4)$. **27.** $(-2;-1)\cup(-1;0)\cup$ $\cup(0;1)\cup(2;+\infty)$. **28.** $\left[-2\sqrt{2};-1\right)\cup\left[\dfrac{-2+2\sqrt{11}}{5};1\right)$. **29.** $\left(\log_2\sqrt{13};2\right]$.

30. $\left(1;\dfrac{5}{4}\right)\cup\left(\dfrac{5}{4};\dfrac{3}{2}\right)$. **31.** $\left(0;\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left[\dfrac{5}{2};\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$. **32.** $\left(\dfrac{1}{2};1\right)\cup(1;+\infty)$.

33. $\left[2^{-\sqrt{2}};\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(1;2^{\sqrt{2}}\right]$. **34.** $\left(\dfrac{3-\sqrt{13}}{2};0\right)\cup\left(0;\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(2;\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

35. $\{5\}\cup\left(4+\sqrt{2};+\infty\right)$. **36.** $[-3;0)\cup(0;1)\cup(1;3/2)$. **37.** $[2;+\infty)$.

38. $(4;5)\cup(5;+\infty)$. **39.** $(1;2)$. **40.** $(1;2)\cup(2;3)$.

Системы уравнений

Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases} x+y=6, \\ y^{x^2-7x+12}=1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \left(\dfrac{3}{2}\right)^{x-y}-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-y}=\dfrac{65}{36}, \\ xy-x+y=118. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \log_y x-\log_x y=\dfrac{8}{3}, \\ xy=16. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^{\lg y}=2, \\ xy=20. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y}=2\sqrt{3}, \\ (x+y)\cdot 2^{y-x}=3. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \log_y x+\log_x y=2,5, \\ xy=27. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2^{x-y}-2\cdot 6^{x-y}-6^{-2y}=0, \\ 2^{-x-y}-2\cdot 3^{x+y}+3\cdot 9^x=0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^{2y^2-1}=5, \\ x^{y^2+2}=125. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \log_5\left(4^x+3^y\right)-\log_7\left(4^x-3^y\right)=1, \\ 16^x-9^y=175. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3^x\cdot 4^y=48, \\ 4^x\cdot 3^y=36. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 8^x=8y, \\ 2^{x+1}=y. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \log_x y+\log_y x=2, \\ x^2+y=12. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \lg\sqrt{(x+y)^2}=1, \\ \lg y-\lg|x|=\lg 2. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \log_x(3x+2y)=2, \\ \log_y(2x+3y)=2. \end{cases}$

Найти все значения параметра, при которых системы имеют решение:

15. $\begin{cases} \lg x=\lg\left(1-\dfrac{4}{y}\right), \\ x=a+4y. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x+y=3, \\ \lg y=\lg\left(1+\dfrac{x^2}{a}\right). \end{cases}$

17. $\begin{cases} y-a=x^2, \\ \lg(3+x)=\lg\dfrac{y}{a}. \end{cases}$

18. $\begin{cases} y=3x^2, \\ \lg(1+x)=\lg\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{y}{a}\right). \end{cases}$

19. $\begin{cases} \lg(1-y)=\lg(1-x), \\ y+a+2=\dfrac{1}{2}(a-x)^2. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \log_2(y+1)=\log_2(a-4x), \\ y=\dfrac{4}{x}. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \log_2(x+1)-\log_2(a-y)=2, \\ -xy+4=0. \end{cases}$ **22.** $\begin{cases} \log_2(y+a-2)=\log_2(a+x)-1, \\ y=2\sqrt{1-x}. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 1+\log_2(a-2-y)=\log_2(a-x), \\ y+2\sqrt{x}=1. \end{cases}$ **24.** $\begin{cases} y+\log_2(x+1)=2, \\ 2^y=a-4x. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x+\log_2(1-y)=2, \\ y=a+4\cdot 2^x. \end{cases}$ **26.** $\begin{cases} x=\dfrac{|y|-y}{|y|+y}\cdot 3^x, \\ 3^x+y=a^2-4a+1. \end{cases}$

При каких значениях a системы имеют единственное решение? Найти эти решения для каждого значения a:

27. $\begin{cases} 9y=(a-1)^2+9(x-a)^2, \\ y=\log_2\left(1+\dfrac{|x|}{x}\right). \end{cases}$ **28.** $\begin{cases} \log_2(x-y)=1+\log_2(-x), \\ (x+a)^2+(y-a-3x)^2=1. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 3(x-a)^2=8(x-y+2a-2), \\ \dfrac{\lg y}{\lg x}=1. \end{cases}$ **30.** $\begin{cases} \log_2(3x+y+a+1)=2+\log_2 x, \\ (x+a)^2+(y-x)^2=1. \end{cases}$

31. $\begin{cases} \lg y=\lg\left(1-\dfrac{4}{x}\right), \\ (y-x)a=1. \end{cases}$ **32.** $\begin{cases} \dfrac{\lg(x+y+1)}{\lg x}=1, \\ (x-a)^2+(y+a-5)(y+a)=0. \end{cases}$

33. $\begin{cases} y=\log_2\left(1+\dfrac{|x|}{x}\right), \\ (x-a)^2+(y-a)^2=1. \end{cases}$ **34.** $\begin{cases} 2+\log_2(x+y)=\log_2(5x+3y), \\ y+4=x+2a+2(x-a)^2. \end{cases}$

35. $\begin{cases} y=\log_2\left(5+4\dfrac{|x-1|}{x-1}-\dfrac{|x+6|}{x+6}\right), \\ x^2+6x+(y-a)^2=16. \end{cases}$ **36.** $\begin{cases} y=\log_2\left(5+4\dfrac{|x-5|}{x-5}-\dfrac{|x+2|}{x+2}\right), \\ x^2-2x+(y-a)^2=24. \end{cases}$

37. При каких значениях a система $\begin{cases} \log_2(x+1)-\log_2(a-y)=2, \\ -xy+4=0 \end{cases}$ не имеет решений?

При каких значениях параметра системы имеют два различных решения:

38. $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 4, \\ y = 4 + p(x-3). \end{cases}$

39. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x, \\ \lg(x - y - 1) = \lg(x + y - p). \end{cases}$

40. $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 2, \\ y = 1 + p(x-3). \end{cases}$

41. $\begin{cases} y = \log_2\left(5 + 4\dfrac{|x-5|}{x-5} - \dfrac{|x+2|}{x+2}\right), \\ x^2 - 2x + (y-p)^2 = 24. \end{cases}$

42. $\begin{cases} \log_x y = 1, \\ y = a + 5x - x^2. \end{cases}$

43. $\begin{cases} \log_2 y - \log_2(a - x) = 2, \\ y = \dfrac{x+4}{x}. \end{cases}$

При каких значениях параметра системы имеют два решения? Указать эти решения:

44. $\begin{cases} y - a = x^2, \\ \lg(3 + x) = \lg\dfrac{y}{a}. \end{cases}$

45. $\begin{cases} y = \log_2\left(5 + 4\dfrac{|x-6|}{x-6} - \dfrac{|x+1|}{x+1}\right), \\ x^2 - 4x + (y-a)^2 = 21. \end{cases}$

При каких значениях параметра системы имеют единственное решение:

46. $\begin{cases} \lg y = \lg\left(1 - \dfrac{4}{x}\right), \\ (y - x)a = 1. \end{cases}$

47. $\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ \log_2(4x + y + 3a) - \log_2(x + y) = 2. \end{cases}$

48. $\begin{cases} x + \log_2 y = 4, \\ y + 2^x = a + 4. \end{cases}$

49. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y, \\ \lg(x - y + 1) = \lg(x + y - a). \end{cases}$

50. $\begin{cases} 1 + \log_3(2y - x) = \log_3(5y - 4x), \\ 2(x-a)^2 + x + y = 2a + 4. \end{cases}$

51. $\begin{cases} \log_2(1 - 2x - y) = 1 + \log_2(-x), \\ (x + |a|)^2 + \left(y - \dfrac{|a| + a}{2}\right)^2 = 1. \end{cases}$

52. $\begin{cases} (x-a)^2 = 24(x - y + 2a - 18), \\ \dfrac{2 - \log_3 y}{2 - \log_3 x} = 1. \end{cases}$

53. Решить систему уравнений $\begin{cases} x + y = 1 - 4a, \\ \dfrac{|10^x - 10|}{10^x - 10} = \dfrac{y^3}{|y|} \end{cases}$ при каждом значении параметра a.

54. При каких значениях a неравенство $\log_{\frac{a}{a+1}}\left(x^2+2\right)>1$ верно при любом действительном x?

55. Найти все значения параметра a, при которых каждое решение неравенства $\log_{4-x}\left(2x^2-5x-3\right)\le 1$ будет решением неравенства $x^2+a^2x-2a^4\le 0$.

56. Найти все действительные a, для которых при всех $b<0$ в промежутке $(4;\ +\infty)$ существует решение уравнения

$$a\log_{\left(1-\frac{2}{x}\right)}4=\log_4\left(1-\frac{2}{x}\right)+b.$$

57. При каких значениях параметра a среди решений неравенства $\log_2(x-100)-\log_{\frac{1}{2}}\frac{|x-101|}{105-x}+\log_2\frac{|x-103|(105-x)}{(x-100)}>a$ содержится единственное целое число?

Ответы:

1. $\{(3;\ 3);\ (4;\ 2);\ (5;\ 1)\}$. **2.** $\{(12;\ 10);\ (-10;\ -12)\}$. **3.** $\left\{(8;\ 2);\left(\frac{1}{4};\ 64\right)\right\}$.

4. $\{(2;\ 10);\ (10;\ 2)\}$. **5.** $\{(7;\ 5)\}$. **6.** $\{(3;\ 9);\ (9;\ 3)\}$. **7.** $\left\{\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)\right\}$.

8. $\{(5;\ 1);\ (5;\ -1)\}$. **9.** $\{(2;\ 2)\}$. **10.** $\{(1;\ 2)\}$. **11.** $\{(2;\ 8)\}$. **12.** $\{(3;\ 3)\}$.

13. $\left\{\left(\frac{10}{3};\ \frac{20}{3}\right);\ (-10;\ 20)\right\}$. **14.** $\{(5;\ 5)\}$. **15.** $(-\infty;\ -16)\cup[9;\ +\infty)$.

16. $(-\infty\ -9)\cup(0;\ +\infty)$. **17.** $(-\infty;\ -9)\cup(0;\ +\infty)$. **18.** $(-\infty;\ 0)\cup(9;\ +\infty)$.

19. $\left[-\frac{5}{4};\ 5\right)$. **20.** $(-\infty;\ -16)\cup[9;\ +\infty)$. **21.** $(-\infty;\ -4)\cup\left[\frac{9}{4};\ +\infty\right)$.

22. $(0;\ 5]$. **23.** $(1;\ 6]$. **24.** $[4;\ +\infty)$. **25.** $(-\infty;\ -7]$. **26.** $(-\infty;\ 0)\cup(4;\ +\infty)$.

27. $a\in\left(-\frac{4}{5};\ 1\right]\cup\{4\}$ $x=a+\frac{\sqrt{8+2a-a^2}}{3}$, $y=1$. **28.** $a\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\{1\}$ $x=-a-\sqrt{1-a^2}$, $y=-3a-3\sqrt{1-a^2}$. **29.** $a\in\left[\frac{4}{3};\ 4\right]\cup\left\{\frac{19}{3}\right\}$,

$x=y=\dfrac{3a+2\sqrt{12a-12}}{3}$. **30.** $a\in\{-2\}\cup[-1;\,0)$, $x=-a+\sqrt{-a^2-2a}$, $y=-1+\sqrt{-a^2-2a}$. **31.** $a\in\left(-\dfrac{1}{4};\,0\right)\cup\left\{\dfrac{1}{5}\right\}$ $x=\dfrac{a-1-\sqrt{1-2a-15a^2}}{2a}$, $y=\dfrac{a+1-\sqrt{1-2a-15a^2}}{2a}$. **32.** $a\in\left[\dfrac{3}{2};\,2\right]\cup\left\{\dfrac{7}{2};\,6\right\}$ $x=a+\sqrt{-a^2+7a-6}$, $y=-1$. **33.** $a\in(0;\,1]\cup\{2\}$ $x=a+\sqrt{2a-a^2}$, $y=1$. **34.** $a\in(-2;\,1]\cup\{2\}$ $x=y=a+\sqrt{2-a}$. **35.** $a\in[-3;\,0]\cup[5;\,6)$, при $a\in[-3;\,0]$ $x=-3-\sqrt{-a^2+2a+24}$, $y=1$; при $a\in[5;\,6)$ $x=-3+\sqrt{-a^2+6a+16}$, $y=1$. **36.** $a\in(-3;\,0]\cup[5;\,6)$; при $a\in(-3;\,0]$ $x=1-\sqrt{-a^2+2a+24}$, $y=1$, при $a\in[5;\,6)$ $x=1+\sqrt{-a^2+6a+16}$, $y=3$. **37.** $\left[-4;\,\dfrac{9}{4}\right)$.

38. $(-\infty;\,-4)\cup\left(-\dfrac{4}{9};\,0\right)$. **39.** $\left(-1;\,1-\sqrt{2}\right)$. **40.** $(-\infty;\,-1)\cup\left(-\dfrac{1}{9};\,0\right)$.

41. $(0;\,5)$. **42.** $(-4;\,-3)\cup(-3;\,0)$. **43.** $\left(\dfrac{7}{4};\,+\infty\right)$. **44.** $a\in\left(-\dfrac{8}{9};\,9\right)$ $\left\{\left(\dfrac{3+\sqrt{9+8a}}{2};3a+\dfrac{9+9\sqrt{9+8a}}{2}\right);\left(\dfrac{3-\sqrt{9+8a}}{2};3a+\dfrac{9-9\sqrt{9+8a}}{2}\right)\right\}$.

45. $a\in(0;\,5)$ $\left\{\left(2-\sqrt{-a^2+2a+24};\,1\right);\left(2+\sqrt{-a^2+6a+16};\,3\right)\right\}$.

46. $\left(-\dfrac{1}{4};\,0\right)\cup\left\{\dfrac{1}{5}\right\}$. **47.** $(-1;\,0]$. **48.** $a\in\{4\}$. **49.** $\{-1\}\cup\left[1-\sqrt{2};\,1+\sqrt{2}\right)$.

50. $\{-2\}\cup[-1;\,2)$. **51.** $(-\infty;\,0)\cup(0;\,1]\cup\{2\}$. **52.** $[12;\,36]\cup\{57\}$. **53.** При $a\in\left(-\infty;\,-\dfrac{1}{4}\right)$ $x=-4a$, $y=1$; при $a\in\left(\dfrac{1}{4};\,+\infty\right)$ $x=2-4a$, $y=-1$; при $a\in\left[-\dfrac{1}{4};\,\dfrac{1}{4}\right]$ – решений нет. **54.** $a\in(-\infty;\,-2)$.

55. $a\in(-\infty;\,-2)\cup(2;\,+\infty)$. **56.** $\left(0;\,\dfrac{1}{4}\right)$. **57.** $[0;\,\log_2 3)$.

24. СТЕРЕОМЕТРИЯ

Сечения многогранников

1. В правильной четырехугольной призме сторона основания равна a. Через диагональ нижнего основания и вершину верхнего основания проведена плоскость, пересекающая две смежные боковые грани призмы по прямым, угол между которыми равен α. Вычислить объем призмы.

2. Через середину бокового ребра правильной треугольной пирамиды проведено сечение, параллельное двум скрещивающимся ребрам этой пирамиды. Вычислить площадь этого сечения, если сторона основания равна a, боковое ребро равно b.

3. Через каждую вершину единичного куба проведены плоскости, перпендикулярные одной и той же диагонали куба. На какие части делится диагональ этими плоскостями?

4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Построить сечение куба плоскостью и вычислить площадь сечения, если: а) плоскость проходит через вершины A и D_1 и середину ребра BB_1; б) плоскость проходит через вершину A и параллельна плоскости DBC_1; в) плоскость проходит через середины ребер AB, BB_1 и B_1C_1; г) плоскость проходит через точки K, L, M на ребрах AD, CC_1 и A_1B_1 соответственно, причем $AK : KD = CL : LC_1 = B_1M : MA_1 = 2:1$.

5. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через середины двух смежных ребер куба и наиболее удаленной от соединяющей их прямой вершину куба. Вычислить площадь сечения, если ребро куба равно a.

6. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рассечен на две части плоскостью, проходящей через вершину B, середину ребра B_1C_1 и точку M, лежащую на ребре AA_1 так, что $AM = 2A_1M$. Вычислить отношение объема части, содержащей точку B_1, к объему куба.

7. Через вершину B_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость, пересекающая ребра BC и AB и образующая с гранью $ABCD$ угол α, причем в сечении получен равнобедренный треугольник. Вычислить площадь сечения, если ребро куба равно a.

8. Дана правильная треугольная призма со стороной основания, равной 6 и боковым ребром, равным 5. Через сторону основания проведено сечение, образующее угол $45°$ с плоскостью основания. Вычислить площадь сечения.

9. Основанием пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм $ABCD$. Точки M, N, K делят ребра AS, BS и CS соответственно в отношении $AM : MS = 1:2$, $BN : NS = 1:3$, $CK : KS = 1:1$. В каком отношении плоскость MNK делит ребро SD?

10. Основанием пирамиды $SABCD$ служит прямоугольник $ABCD$, диагональ AC которого образует со стороной BC угол α, а с боковым ребром SC – угол β. Пирамида пересечена плоскостью, равноудаленной от всех вершин пирамиды. Вычислить площадь образовавшегося сечения, если известно, что все боковые ребра имеют длину ℓ.

11. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Построить *сечение призмы плоскостью, проходящей через середины ребер* AB, A_1C_1 и BB_1. В каком отношении плоскость сечения делит: а) ребро AC; б) ребро B_1C_1?

12. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$. В каком отношении делит ее объем плоскость, проходящая через середины ребер AD, BC и DS?

13. Дана правильная треугольная пирамида $DABC$. Известно, что $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$. Пирамиду пересекает плоскость, параллельная ребрам AD и BC и отстоящая на расстоянии d от ребра AD. Вычислить площадь сечения пирамиды этой плоскостью.

14. Правильную четырехугольную пирамиду пересекает плоскость, проходящая через вершину основания перпендикулярно противоположному боковому ребру. Площадь получившегося сечения в 2 раза меньше площади основания пирамиды. Вычислить отношение длины высоты пирамиды к длине бокового ребра.

15. В основании пирамиды $TABCD$ лежит трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$; $AD : BC = 2$). Через вершину T пирамиды проведена плоскость, параллельная прямой BC и пересекающая отрезок AB в точке M такой, что $AM : MB = 2$. Площадь полученного сечения равна S, а расстояние от ребра BC до плоскости сечения равно d. Вычислить объем пирамиды.

16. В треугольной пирамиде $SA_1A_2A_3$ на сторонах основания A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 выбраны соответственно точки K_1, K_2, K_3 так, что $A_1K_1 : K_1A_2 = A_2K_2 : K_2A_3 = A_3K_3 : K_3A_1 = 2$. Через середину ребра SA_1 параллельно плоскости основания пирамиды проведена плоскость π, которая пересекает отрезки SK_1, SK_2, SK_3 в точках L_1, L_2, L_3 соответственно. Треугольник $L_1L_2L_3$ принят за верхнее основание прямой призмы, а нижнее ее основание лежит в плоскости основания пирамиды. Вычислить объем призмы, если объем пирамиды $SA_1A_2A_3$ равен V.

17. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна 1. Объем пирамиды равен $\sqrt{2}/3$. Через сторону CD проведено сечение, которое делит пополам двугранный угол, образованный боковой гранью SCD и основанием. Вычислить площадь сечения.

18. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребра $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$. Пусть O – центр основания $ABCD$, O_1 – центр основания $A_1B_1C_1D_1$, S – точка, делящая отрезок OO_1 в отношении $1:3$. Вычислить площадь сечения параллелепипеда плоскостью, параллельной диагонали параллелепипеда AC_1, диагонали основания BD и проходящей через точку S.

19. В правильной треугольной пирамиде $SABC$, высота которой в 2 раза больше стороны основания, на боковых ребрах BS и CS взяты точки M и N так, что MN параллельна BC. Через прямую MN проходят плоскости α и β. Плоскость α перпендикулярна грани SBC и содержит точку A, плоскость β проходит через середину бокового ребра SA. Вычислить отношение площадей сечений пирамиды плоскостями β и α.

20. В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равносторонний треугольник ABC со стороной 2, боковые ребра равны 1. Точка K – середина ребра AB, точка L – середина ребра B_1C_1, точка M – середина ребра A_1B_1, точка N – середина ребра AC. Через прямые KL и MN проведены параллельные плоскости. Вычислить объем части призмы, содержащейся между этими плоскостями.

21. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник со сторонами $AB = 6$, $BC = 9$. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей AC и BD и равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Точки E и F лежат на ребрах AB и AD соответственно, $AE = 4$, $AF = 6$. Вычислить площадь пятиугольника, полученного при пересечении пирамиды плоскостью, проходящей через точки E и F и параллельной ребру AS.

22. В правильной четырехугольной пирамиде $TABCD$ проведены две параллельные друг другу плоскости, одна из которых проходит через вершину пирамиды T и середину стороны основания AB, а другая – через вершину основания D и середину бокового ребра TC. Расстояние между плоскостями равно $28/31$, а сторона основания равна 2. Вычислить объем пирамиды.

23. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На продолжениях ребер AB и BB_1 за точки A и B_1 соответственно взяты точки M и N так, что $AM = B_1N = \frac{1}{2}AB$. Где на ребре CC_1 должна находиться точка P для того, чтобы в сечении куба плоскостью, проходящей через точки M, N, и P, был пятиугольник?

24. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC. Середина D гипотенузы AB является основанием высоты пирамиды SD. Известно, что $SD = h$, $AC = b$, $BC = a$. Через середину высоты SD проведено сечение пирамиды плоскостью, параллельной ребрам AC и BS. Вычислить площадь сечения и угол между плоскостями сечения и основания.

25. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Плоскость, проходящая через точку A и касающаяся вписанного в куб шара, пересекает ребра A_1B_1 и A_1D_1 в точках K и N соответственно. Найти угол между плоскостями AC_1N и AC_1K.

26. Найти площадь сечения правильной четырехугольной пирамиды $TABCD$ плоскостью, проходящей через медиану BN боковой грани TBC и параллельной медиане AM боковой грани TAB, если высота пирамиды равна $\sqrt{5}$, а диагональ основания $ABCD$ равна 1.

27. Основанием пирамиды $TABC$ служит равносторонний треугольник со стороной, равной $4\sqrt{7}$, а ее высота проходит через середину стороны основания AB. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через боковое ребро TA, если известно, что прямая, проходящая через середину высоты пирамиды и середину стороны основания BC, параллельна секущей плоскости и находится от нее на расстоянии, равном 1.

Ответы:

1. $\frac{a^3\sqrt{\cos\alpha}}{\sqrt{2}\sin(\alpha/2)}$ куб.ед. **2.** $\frac{ab}{4}$ кв.ед. **3.** На три равные части длиной $\frac{\sqrt{3}}{3}$ каждая. **4.** а) $\frac{9a^2}{8}$ кв.ед.; б) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ кв.ед.; в) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$ кв.ед.; г) $\frac{13}{18}\sqrt{3}a^2$ кв.ед.

5. $\frac{7a^2\sqrt{17}}{24}$ кв.ед. **6.** $\frac{13}{108}$. **7.** $\frac{a^2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$ или $\frac{a^2}{2\sqrt{-\cos 2\alpha}}$ кв.ед. в зависимости от того, является угол $\angle B_1$ углом при вершине или при основании равнобедренного треугольника. **8.** $\frac{\sqrt{2}}{3}\left(90-25\sqrt{3}\right)$ кв.ед. **9.** $6:7$.

10. $\frac{1}{2}\ell^2\cos^2\beta\sin 2\alpha$, или $\frac{3}{4}\ell^2\cos\beta\cos\alpha\sqrt{1-\cos^2\beta\cos^2\alpha}$, или $\frac{3}{4}\ell^2\cos^2\beta\sin\alpha\sqrt{1-\cos^2\beta\sin^2\alpha}$ кв.ед. Искомое сечение должно быть параллельно или основанию пирамиды, или одной из боковых граней, и делит пополам пересекаемые им ребра. **11.** а) $1:5$; б) $3:1$. **12.** $1:1$.

13. $\frac{4ad\sqrt{5}-8\sqrt{2}d^2}{5}$ кв.ед. **14.** $\frac{1+\sqrt{33}}{8}$. **15.** $\frac{9}{4}Sd$ куб.ед. **16.** $\frac{1}{8}V$ куб.ед.

17. $S=\frac{8\sqrt{6}}{25}$ кв.ед. **18.** $\frac{7}{16}\sqrt{4a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$ кв.ед. **19.** $\frac{7\sqrt{39}}{36}$. **20.** $\frac{5\sqrt{3}}{12}$ куб.ед. **21.** $\frac{3}{2}\sqrt{183}$ кв.ед. **22.** $\frac{14}{9}$ куб.ед. **23.** Должна совпадать с точкой C.

24. $S=\frac{3b\sqrt{4h^2+a^2}}{32}$ кв.ед.; $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{2h}{a}$. **25.** $\frac{\pi}{3}$. **26.** $\frac{5}{8}$ кв.ед. **27.** $\frac{28\sqrt{3}}{3}$ кв.ед.

Угол между прямой и плоскостью. Угол между плоскостями

1. На ребре CD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ задана точка P – середина этого ребра. Найти углы между прямой A_1P и плоскостью: а) CDD_1; б) A_1BC; в) BC_1D.

2. В плоскости α проведены перпендикулярные прямые. Прямая ℓ образует с ними углы $45°$ и $60°$. Найти угол между прямой ℓ и плоскостью α.

3. В основании пирамиды $MABC$ лежит равнобедренный треугольник с прямым углом при вершине C. Каждое боковое ребро пирамиды наклонено к плоскости основания под углом $45°$. На ребре MC взята точка F – середина этого ребра. Найти углы, которые образует прямая AF с плоскостью: а) MOC, точка O которой является серединой ребра AB; б) MAB; в) MBC.

4. Диагональ боковой грани правильной треугольной призмы составляет угол $30°$ с плоскостью другой боковой грани и равна 6. Вычислить объем призмы.

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 4$; $AD = 3$; $AA_1 = 5$. Вычислить: а) угол между прямой BD_1 и плоскостью BCC_1 : б) угол между прямой BD и плоскостью ABC_1; в) угол между прямой BD и плоскостью ADC_1.

6. Найти плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды, если этот угол равен углу между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды.

7. Основание прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – ромб со стороной а и острым углом α. Меньшая диагональ параллелепипеда образует с основанием угол β. Определить площадь сечения параллелепипеда плоскостью ACB_1.

8. Основанием пирамиды $TABCD$ служит прямоугольник $ABCD$. Высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA, а боковое ребро TC наклонено к плоскости основания под углом $45°$. Плоскость, проходящая через ребро TC и параллельная диагонали BD, образует с высотой пирамиды угол $30°$, а расстояние между этой плоскостью и диагональю BD равно a. Вычислить объем пирамиды.

9. В сферу площадью S вписан прямоугольный параллелепипед. Вычислить площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через его диагональ, если эта плоскость образует угол $30°$ с одной диагональю основания, параллельна другой диагонали основания и наклонена к плоскости основания под углом $45°$.

10. В основании пирамиды лежит ромб. Высота пирамиды проходит через центр ромба. Боковая грань пирамиды образует углы α и β с диагоналями ромба. Найти угол наклона боковой грани к плоскости основания.

11. Угол при вершине осевого сечения конуса равен $150°$. Через вершину конуса проведено сечение, являющееся прямоугольным треугольником. Найдите угол между плоскостями сечения и основания.

12. В правильной шестиугольной пирамиде заданы угол α между соседними боковыми гранями и объем V шара, вписанного в пирамиду. Вычислить высоту пирамиды.

13. Основанием пирамиды служит параллелограмм $ABCD$ с углом $A = 60°$. Боковые грани наклонены к основанию пирамиды под углом α. Найти угол наклона ребра SA к плоскости основания.

14. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки P и Q – середины ребер DD_1 и A_1D_1 соответственно. Найти углы, которые образует плоскость ACP с плоскостью: а) ABC; б) ACD_1; в) ACQ.

15. Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ в 2 раза больше стороны ее основания. На ребрах AC и CC_1 призмы заданы соответственно точки P и Q – середины этих ребер. Найти угол между плоскостью BPQ и плоскостью: а) ACC_1; б) A_1BP; в) ABB_1.

16. Все плоские углы при вершине D пирамиды $ABCD$ – прямые, $AD = 1$, $BD = CD = \sqrt{2}$. Найти двугранные углы пирамиды.

17. Найти двугранные углы правильной четырехугольной пирамиды с плоским углом α при вершине.

18. В правильной четырехугольной пирамиде $TABCD$ со стороной основания a и плоским углом α при вершине проведено сечение через диагональ основания BD перпендикулярно боковому ребру SC. Найти угол между плоскостями сечения и основания.

19. В правильном тетраэдре $ABCD$ на ребре DC взяты точки N и M такие, что $DN = NM = MC$. Найти угол между плоскостями BAN и BAM.

20. Через сторону PQ нижнего основания правильной треугольной призмы $PQRP_1Q_1R_1$ проведена секущая плоскость, пересекающая ребро RR_1 и разбивающая призму на два многогранника. Отношение объема многогранника, одной из граней которого является нижнее основание призмы PQR к объему другого многогранника, одной из граней которой является грань PQQ_1P_1, равно q. Найти угол наклона секущей плоскости к плоскости нижнего основания, если известно, что угол между прямыми PQ_1 и RR_1 равен φ.

21. В сечении прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием плоскостью, не пересекающей оснований, получается ромб. Найти внутренние углы ромба, если двугранный угол между плоскостью сечения и плоскостью основания равен $30°$.

22. Вычислить объем правильной четырехугольной пирамиды, высота которой равна H, а двугранный угол при боковом ребре в 3 раза больше двугранного угла при ребре основания.

23. В основании пирамиды $SABCD$ с вершиной S лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с меньшим основанием $AB = a$ и острым углом α. Высота SO пирамиды равна h. Прямая AO пересекает сторону CD основания в точке K, являющейся ее серединой. Найти угол, образованный боковой гранью SBC с плоскостью основания, если $AO : OK = 8 : 1$ и $\angle AOB = 90°$.

24. Основанием пирамиды является правильный треугольник, одна из боковых граней перпендикулярна основанию, две другие наклонены к нему под углом α. Как наклонены к плоскости основания боковые ребра?

25. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$, $BC = 2$. Длины всех боковых ребер равны 3, точка M – середина AS. Через прямую BM параллельно диагонали основания AC проведена плоскость. Определить величину угла между этой плоскостью и плоскостью SAC.

О т в е т ы:

1. а) $\operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$; б) $\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{6}$; в) $\arcsin\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$. **2.** $30°$. **3.** а) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$; б) $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{5}}{5}$; в) $\arcsin\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **4.** $18\sqrt{2}$ куб.ед. **5.** а) $\arcsin\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$; б) $\arcsin\dfrac{3\sqrt{34}}{34}$; в) $\arcsin\dfrac{4\sqrt{41}}{41}$. **6.** $\arccos\dfrac{\sqrt{7}-1}{3}$. **7.** $\dfrac{1}{2}a^2\sin\alpha\cdot\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}$ или $a^2\sin\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\beta}$ кв.ед. в зависимости от того, **является** ли угол B ромба тупым или острым. **8.** $\dfrac{32\sqrt{3}}{9}a^3$ куб.ед. **9.** $\dfrac{S}{3\pi}$ кв.ед.

10. $\arcsin\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}$. **11.** $\arcsin\sqrt{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$. **12.** $\sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{1+3\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}}\right)$.

13. $\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$. **14.** а) $\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{3}$; б) $\arccos\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$; в) $\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **15.** а) $\dfrac{\pi}{2}$;

б) $\arccos\frac{7\sqrt{85}}{85}$; в) $\arccos\frac{\sqrt{15}}{5}$. **16.** Двугранные углы с ребрами DA, DB, DC – прямые, двугранные углы с ребрами AC и AB равны $\pi/3$, двугранный угол с ребром BC равен $\pi/4$. **17.** Угол между боковыми гранями и основанием равен $\arccos \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, угол между соседними боковыми гранями равен $2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$; угол между противолежащими боковыми гранями равен $2\arcsin \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **18.** $\arcsin\left(\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)$. **19.** $\arccos\frac{17}{19}$.

20. $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}q\operatorname{ctg}\varphi}{1+q}$. **21.** $2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\pi-2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$. **22.** $\frac{12}{7}H^3$ куб.ед.

23. $\operatorname{arctg}\left(\frac{9h}{a\left(5\sin\alpha+2\sqrt{5}\cos\alpha\right)}\right)$; *указание*: положим $OK=x$, тогда $AO=8x$, $BK=9x$. Выражая OB из треугольников ABO и KBO и приравнивая эти выражения, найдем $x=\frac{a}{12}$. Если $\angle OBA=\varphi$, то $\sin\varphi=\frac{2}{3}$, $\angle OBC=180°-(\alpha+\varphi)$ и расстояние от точки O до прямой BC равно $OB\sin(\alpha+\varphi)=\frac{a\sqrt{5}}{3}(\sin\alpha\cos\varphi+\cos\alpha\sin\varphi)$. **24.** $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$; $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$. **25.** $\operatorname{arctg}\sqrt{5}$.

Расстояние от точки до плоскости

1. Высота правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равна H, а сторона основания равна a. Вычислить расстояние от центра основания до плоскости SCD.

2. В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник ABC. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и равно b. Вычислить расстояние от вершины C до плоскости BAS, если угол между этой плоскостью и плоскостью основания равен α.

3. На ребрах AB и AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки P и Q – середины этих ребер. Считая ребро куба равным а, вычислить расстояния до плоскости C_1PQ от точек: а) C; б) A_1.

4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром а точки P, Q, R – середины ребер AB, AD и CC_1 соответственно. Вычислить расстояние до плоскости PQR от точек: а) A_1; б) B_1.

5. Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ в 2 раза больше стороны основания. Через точку P – середину ребра CC_1, проведено сечение перпендикулярно прямой BC_1. Считая $AB = 2$, вычислить расстояние до плоскости сечения от вершины: а) B; б) A; в) C.

6. В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ через точки B, C, A_1 проведено сечение, площадь которого равна S, а расстояние от плоскости сечения до вершины B_1 равно h. Вычислить объем призмы.

7. Точка M – середина ребра AD единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через середину B_1M перпендикулярно B_1M проводится плоскость α. Вычислить расстояние от центра куба до плоскости α.

8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребра $AB = 1$, $AD = 2$, $DD_1 = 3$. Точка M лежит в плоскости BDC_1. а) Какую наименьшую площадь может иметь треугольник AMD_1? На каком расстоянии от грани ADD_1A_1 находится при этом точка M? б) Вычислить расстояние от вершины A_1 до плоскости BDC_1.

9. В прямоугольном параллелепипеде с ребрами $AB = 1$, $AD = 2$ и $AA_1 = 3$ через его диагональ BD_1 проведена секущая плоскость. Определить наибольшее расстояние от этой плоскости до вершины D и вычислить для этого случая площадь сечения.

10. В основании пирамиды $PQRS$ лежит правильный треугольник QRS. Высота пирамиды, опущенная из вершины P, проходит через середину ребра RS. Известно, что $PQ = m$, $QR = n$. Пирамиду пересекает плоскость, параллельная ребрам PQ и RS. На каком расстоянии от вершины Q должна находиться эта плоскость, чтобы площадь сечения была наибольшей?

11. Основание пирамиды – равносторонний треугольник, а одно из боковых ребер перпендикулярно основанию. Высота наклонной боковой грани, проведенная из вершины пирамиды к стороне основания, равна h. Пирамида вписана в сферу единичного радиуса. Вычислить расстояние от центра сферы до наклонной боковой грани пирамиды. При каком значении h это расстояние будет наибольшим? Определить это наибольшее расстояние.

12. В правильной четырехугольной пирамиде $TABCD$ с высотой, равной 4 и стороной основания, равной 1, проведена плоскость, проходящая через медиану CM боковой грани TCD и параллельная апофеме TK боковой грани TAB. На каком расстоянии от этой плоскости находится центр основания пирамиды?

Ответы:

1. $\dfrac{Ha}{\sqrt{a^2+4H^2}}$. **2.** $b\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha$. **3.** а) $\dfrac{3a\sqrt{17}}{17}$; б) $\dfrac{4a\sqrt{17}}{17}$. **4.** а) $\dfrac{7a\sqrt{11}}{22}$; б) $\dfrac{5a\sqrt{11}}{22}$. **5.** а) $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$; б) $\sqrt{5}$; в) $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$. **6.** Sh куб.ед.. **7.** $\dfrac{1}{12}$.

8. а) $S_{\min}=\dfrac{3\sqrt{13}}{7}$ кв.ед.; $\dfrac{36}{49}$. б) $\dfrac{12}{7}$. **9.** $3\sqrt{\dfrac{5}{14}}$; $2\sqrt{\dfrac{14}{5}}$ кв.ед.

10. $\dfrac{h\sqrt{3}\sqrt{4m^2-3n^2}}{8m}$. **11.** $\rho=\dfrac{\sqrt{(4-h^2)(4h^2-9)}}{7h}$; $\rho_{\max}=\dfrac{1}{7}$ при $h=\sqrt{3}$. **12.** $\dfrac{4}{29}$.

Расстояние и угол между скрещивающимися прямыми

1. Дан единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка M – середина ребра BB_1. Вычислить расстояние и угол между прямыми: а) AB_1 и D_1B; б) A_1B и CM.

2. В правильном тетраэдре $ABCD$ с ребром 1 точки M, N, K – середины ребер AB, BC и CD соответственно. Вычислить расстояние и угол между прямыми: а) CM и DN; б) CM и BK.

3. На ребре CC_1 правильной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки E_1, E_2, E_3 такие, что $CE_1=E_1E_2=E_2E_3=E_3C_1$. Известно также, что $AB:AA_1=1:2$. Найти углы, которые прямая B_1D образует с прямыми: а) A_1E_1; б) A_1E_2; в) A_1E_3.

4. В основании пирамиды $SABC$ лежит равносторонний треугольник ABC со стороной $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и равно 2. Точки E и D являются серединами ребер BC и AB соответственно. Вычислить угол и расстояние между прямыми SE и CD.

5. Точки P и Q_1 – середины ребер AB и A_1C_1 правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$. Считая $AB : AA_1 = 1 : 2$, найти углы, которые прямая PQ_1 образует с прямыми AC и AB_1. Вычислить расстояние между прямыми PQ_1 и AC, если $AB = a$.

6. Высота MO правильной пирамиды $MABCD$ в 2 раза больше стороны основания. Точки P, Q, R – середины отрезков MC, AB и MO соответственно. Найти угол между прямой OP и прямой: а) MD; б) BR; в) DQ.

7. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной, равной 2. Боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания. На ребре SC выбрана точка L так, что $SC = 3SL$. Вычислить расстояние между прямой SA и прямой, проходящей через точку L и середину ребра BS.

8. В основании пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC. Боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания. Вычислить объем пирамиды, если угол между прямой SA и прямой, проходящей через точку C и середину ребра SB, равен $60°$, а расстояние между этими прямыми равно 2.

9. В правильном тетраэдре $ABCD$ отрезок NM соединяет середину ребра AC с центром грани BDC, а точка E – середина ребра AB. Найти угол между прямыми MN и DE.

10. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ со стороной основания $AB = a$ и боковым ребром $B_1B = b$ вычислить расстояние между прямыми A_1B и B_1C_1.

11. Сторона основания ABC правильной пирамиды $ABCD$ равна $8\sqrt{3}$, высота $DO = 6$. Точки A_1, B_1, C_1 – середины ребер AD, BD, CD соответственно. Найти угол и расстояние между прямыми BA_1 и AC_1.

12. Основание пирамиды $ABCD$ – треугольник ABC со сторонами $AB = 26$, $AC = 10$, $BC = 24$. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом $45°$. Вычислить расстояние между прямой, содержащей высоту пирамиды, и прямой: а) AC; б) BC.

13. В треугольной пирамиде $ABCD$ $AB = 8$, $CD = 12$, расстояние между прямыми AB и CD равно 6. Найти угол между этими прямыми, если объем пирамиды равен 48 куб.ед.

14. Основанием пирамиды $TABCD$ служит прямоугольник $ABCD$, диагональ которого равна $\sqrt{13}$. Высота пирамиды $TO = 1$ проходит через точку пересечения диагоналей основания, а расстояние между боковым ребром TB и диагональю основания AC равно $6/7$. Вычислить площадь боковой поверхности пирамиды.

15. В сферу вписана правильная треугольная пирамида, у которой центр сферы делит высоту в отношении $3:1$, а расстояние между апофемой и высотой основания, не пересекающей эту апофему, равно 2. Вычислить площадь сферы.

16. Основанием пирамиды $TABCD$ служит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 13$ и $AC = 39$, высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания, а расстояние между боковым ребром TB и диагональю основания AC равно 12. Вычислить радиус сферы, описанной около пирамиды.

17. Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с диагоналями его основания углы $30°$ и $60°$, а расстояние между боковым ребром и скрещивающейся с ним диагональю параллелепипеда равно ℓ. Вычислить площадь боковой поверхности параллелепипеда.

18. Основанием пирамиды $TABC$ служит прямоугольный треугольник ABC, площадь которого равна 3 (кв.ед.). Все боковые ребра пирамиды равны между собой, высота пирамиды равна 4, а расстояние между боковым ребром TA и медианой основания CD, проведенной к гипотенузе AB, равно $12/13$. Вычислить радиус сферы, описанной около пирамиды.

19. Основанием пирамиды $TABC$ является прямоугольный треугольник ABC, а все боковые ребра образуют с плоскостью основания углы $45°$. Расстояние между боковым ребром TB и медианой CD, проведенной к гипотенузе AB, равно $\sqrt{3}$, а угол между прямыми TB и CD равен $60°$. Вычислить площадь сферы, описанной около пирамиды.

20. В основании пирамиды $TABC$ – прямоугольный треугольник ABC, высота пирамиды совпадает с ребром TA и равна h. Боковое ребро TB образует с гипотенузой основания AB угол $30°$, а угол между TB и медианой основания CD равен $45°$. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через медиану CD и пересекающей ребро TB?

Ответы:

1. а) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ и $90°$; б) $\frac{1}{3}$ и $\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}$. **2.** а) $\sqrt{\frac{2}{35}}$ и $\arcsin\frac{\sqrt{35}}{6}$; б) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ и $\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}$. **3.** а) $\arccos\frac{\sqrt{102}}{17}$; б) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$; в) $\arccos\frac{\sqrt{6}}{9}$. **4.** $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

5. $\arccos\frac{\sqrt{17}}{34}$, $\arccos\frac{3\sqrt{85}}{34}$, $2a\sqrt{\frac{3}{67}}$. **6.** а) $\arccos\frac{8}{9}$; б) $\arccos\frac{4\sqrt{3}}{9}$; в) $\arccos\frac{\sqrt{10}}{30}$. **7.** $\sqrt{\frac{3}{7}}$. **8.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ куб.ед.. **9.** $\arccos\frac{5\sqrt{3}}{18}$. **10.** $\frac{ab\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2+4b^2}}$.

11. $\arccos\frac{47}{121}$ и $\frac{36}{\sqrt{259}}$. **12.** а) 1; б) 5. **13.** $30°$. **14.** $3\sqrt{2}+\sqrt{13}$ кв.ед.

15. 105π кв.ед. **16.** $R = 30\frac{1}{16}$. **17.** $4c^2\sqrt{3+\sqrt{6}}$ кв.ед. **18.** $R = \frac{13}{4}$.

19. $S = 36\pi$ кв.ед. **20.** $\frac{h^2\sqrt{3}}{16}$ кв.ед.

Экстремальные задачи

1. В основании прямой призмы лежит трапеция с основаниями 4 и 6. Диагональ боковой грани, содержащей большую боковую сторону трапеции, равна 4. Вычислить наибольший объем призмы.

2. Каким должен быть угол наклона образующей конуса к его основанию, чтобы отношение объема конуса к объему описанной около него шара было наибольшим?

3. Внутри правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания a и высотой h расположен прямоугольный параллелепипед наибольшего объема так, что четыре его вершины находятся в плоскости основания пирамиды, а другие четыре лежат на ее боковых ребрах. Вычислить боковое ребро параллелепипеда.

4. Центр основания правильной четырехугольной пирамиды удален от боковой грани на расстояние, равное m. При каком угле наклона боковых граней к плоскости основания площадь поверхности пирамиды будет наименьшей?

5. Из всех правильных треугольных призм, имеющих объем V, найти призму с наименьшей суммой длин всех ее ребер. Чему равна сторона основания этой призмы?

6. Основаниями правильной призмы служат квадраты. Одно из оснований призмы принадлежит большему кругу радиуса шара R, а вершины другого лежат на поверхности этого шара. Какой должна быть высота призмы, чтобы сумма длин всех ее ребер была наибольшей?

7. В правильной треугольной призме расстояние от центра основания до одной из вершин другого основания равно ℓ. При какой длине высоты призмы объем ее будет наибольшим? Вычислить это значение объема.

8. В сферу радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида. Какой должна быть высота пирамиды, чтобы ее объем был наибольшим? Вычислить это значение объема.

9. В конус с высотой H и радиусом основания R вписана правильная шестиугольная призма так, что одно ее основание лежит в плоскости основания конуса, а вершины другого принадлежат боковой поверхности конуса. Чему может быть равен наибольший объем такой призмы?

10. Правильная треугольная пирамида со стороной основания a вписана в сферу, причем центр сферы делит высоту пирамиды в отношении $\sqrt{5}:1$, считая от вершины. Верхнее основание правильной четырехугольной призмы лежит в плоскости основания пирамиды, а вершины ее нижнего основания принадлежат сфере. Какой должна быть высота призмы, чтобы ее объем был наибольшим? Вычислить это значение объема.

11. Высота H правильной четырехугольной пирамиды равна стороне основания. Нижнее основание правильной четырехугольной призмы принадлежит основанию пирамиды, а вершины верхнего основания лежат на медианах боковых граней пирамиды, проведенных из вершин основания к боковым ребрам пирамиды. Какой должна быть высота призмы, чтобы длина ее диагонали была наименьшей? Вычислить это значение длины диагонали.

12. Конус с углом α между образующей и высотой вписан в сферу радиуса R так, что его вершина находится в центре сферы, а окружность основания – на сфере. Все вершины нижнего основания правильной треугольной призмы (параллельного основанию конуса) лежат на сфере, а остальные ее вершины принадлежат боковой поверхности конуса. Какими должны быть высота и сторона основания призмы, чтобы площадь ее боковой поверхности была наибольшей? Вычислить это значение площади.

13. В шар вписана правильная четырехугольная пирамида, в пирамиду вписан цилиндр, одно из оснований которого лежит в плоскости основания пирамиды, а окружность другого основания касается всех боковых граней. Высота цилиндра и радиус его основания равны a. При какой высоте пирамиды объем шара будет наименьшим? Вычислить это значение объема.

14. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через вершину A, середину ребра A_1D_1 и центр грани DD_1C_1C проведена плоскость. Из всех сечений куба, параллельных этой плоскости, найти сечение наибольшей площади. Чему равна эта площадь, если ребро куба равно a?

15. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная пирамида, у которой апофема равна диаметру окружности, описанной около основания. Между сферой и пирамидой расположена правильная четырехугольная призма, одно из оснований которой лежит в плоскости боковой грани пирамиды, а вершины другого основания принадлежат сфере. Какой наибольший объем может иметь призма?

16. В прямоугольном параллелепипеде с ребрами $a=2$, $b=3$, $c=6$ через точку M, лежащую на одном из самых коротких ребер, и скрещивающуюся с этим ребром диагональ параллелепипеда проведена плоскость. Какую наименьшую площадь может иметь сечение параллелепипеда этой плоскостью? Вычислить длины сторон этого сечения.

17. Основанием пирамиды служит ромб со стороной $c=5$ и радиусом вписанной окружности $r=2,4$; высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба и равна его стороне. В пирамиду вписан прямоугольный параллелепипед, одна грань которого лежит в плоскости основания пирамиды, а вершины противолежащей грани принадлежат боковым граням пирамиды. Какой наибольший объем может иметь параллелепипед?

18. Основанием пирамиды $SABCD$ служит прямоугольник со сторонами $AB=4$ и $AD=12$. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину S, центр симметрии основания O и точку N, лежащую на ребре BC, если $SA=3$, $SB=5$, $SO=7$? На какие части делит точка N ребро BC в этом случае?

19. Правильная треугольная пирамида, вписанная в сферу радиуса R, пересекается плоскостью, проходящей через медианы боковой грани и основания, выходящие из одной вершины. При какой высоте пирамиды площадь сечения пирамиды этой плоскостью будет наибольшей?

20. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1'C_1$ служит равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами $AB=BC=3$, боковое ребро $BB_1=4$. Какую наименьшую площадь может иметь треугольник CBM, если точка M лежит на диагонали боковой грани AC_1? На какие части делит точка M диагональ AC_1 в этом случае?

21. В сферу радиуса R вписана пирамида, основанием которой служит прямоугольник с углом между диагоналями $45°$, и с высотой, проходящей через точку пересечения диагоналей. Какую наибольшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через одну из диагоналей основания и середину не пересекающего ее бокового ребра?

22. Через диагональ прямоугольного параллелепипеда и точку, лежащую на боковом ребре, не пересекающем эту диагональ, проведена плоскость так, чтобы площадь полученного сечения была наименьшей. Найти стороны основания параллелепипеда, если известно, что диагонали сечения равны 6 и $2\sqrt{3}$, а угол между ними $30°$.

23. В сферу радиуса R вписана пирамида $TABCD$, основанием которой служит прямоугольник $ABCD$. Высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA, а боковое ребро TC образует с диагоналями основания углы $30°$ и $60°$. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания AC?

24. В правильной треугольной пирамиде с боковым ребром ℓ, образующим с плоскостью основания угол $60°$, проведено сечение, параллельное одной из медиан боковой грани и боковому ребру, не пересекающему эту медиану. Какое наибольшее значение может иметь площадь такого сечения?

25. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AD_1=\sqrt{10}$, $A_1B=\sqrt{5}$ – диагонали граней с общим ребром AA_1. Какой наименьший радиус может иметь шар, касающийся обеих этих диагоналей?

26. В основании пирамиды – прямоугольник со сторонами a и b. Высота пирамиды h проходит через центр основания. Какую наименьшую площадь может иметь треугольник ACM, где M – точка на ребре TB?

27. В правильную треугольную пирамиду со стороной основания a и высотой h вписан цилиндр так, что одно из его оснований принадлежит основанию пирамиды, а окружность другого основания касается всех боковых граней пирамиды. Вычислить максимально возможный объем цилиндра.

28. В сферу радиуса R вписана пирамида, основание которой – прямоугольник с углом, равным $\arccos\sqrt{7/12}$, между диагоналями, а все боковые ребра равны между собой. Какую наибольшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания и середину бокового ребра, не пересекающего эту диагональ?

29. В сферу радиуса R вписана пирамида, основание которой – правильный треугольник. Одно из боковых ребер перпендикулярно основанию и равно $2R/15$. Между сферой и пирамидой расположена правильная треугольная призма, одно из оснований которой лежит в плоскости основания пирамиды, а вершины другого основания принадлежат сфере. Какой наибольший объем может иметь призма?

30. Внутри правильной треугольной пирамиды расположена прямая призма, в основании которой лежит ромб. Одна из граней призмы принадлежит основанию пирамиды, другая – боковой грани пирамиды. Какой наибольший объем может иметь призма, если сторона основания пирамиды равна 2, а ее высота равна $2\sqrt{2}$?

Ответы:

1. 30 куб.ед. **2.** $\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$. **3.** $\frac{h}{3}$. **4.** $\frac{\pi}{3}$. **5.** $\frac{(4V)^{1/3}}{\sqrt[6]{3}}$. **6.** $\frac{R}{3}$. **7.** $\frac{\ell\sqrt{3}}{3}$; $\frac{\ell^3}{2}$.

8. $\frac{4R}{3}$; $\frac{64R^3}{81}$ куб.ед. **9.** $\frac{2R^2H\sqrt{3}}{9}$ куб.ед. **10.** $\frac{a\sqrt{3}}{9}$; $\frac{10a^3\sqrt{3}}{243}$ куб.ед.

11. $\frac{H}{11}$; $H\sqrt{\frac{6}{11}}$. **12.** $\frac{R}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$; $R\sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2}$; $\frac{3\sqrt{3}R^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2}$ кв.ед. **13.** $3a$; $\frac{9a}{4}$ куб.ед. **14.** $\frac{a^2\sqrt{14}}{\sqrt{3}}$ кв.ед. **15.** $\frac{25R^3}{54}$ куб.ед. **16.** $\frac{42\sqrt{5}}{5}$ кв.ед.; $\frac{\sqrt{229}}{5}$; $\frac{2\sqrt{241}}{5}$. **17.** $\frac{64}{5}$ куб.ед. **18.** $\frac{42\sqrt{13}}{13}$ кв.ед.; $BN=\frac{102}{13}$; $NC=\frac{54}{13}$.

19. $\frac{\left(\sqrt{33}-3\right)R}{2}$. **20.** $\frac{18}{5}$ кв.ед.; $\frac{9\sqrt{34}}{25}$; $\frac{16\sqrt{34}}{25}$. **21.** $\frac{R^2\sqrt{2}}{2}$ кв.ед. **22.** 1; $\sqrt{3}$.

23. $\frac{R^2}{2}$ кв.ед. **24.** $\frac{\sqrt{15}\ell^2}{16}$ (кв.ед.). **25.** $\frac{6}{13}$. **26.** $\frac{abh\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{h^2\left(a^2+b^2\right)+a^2b^2}}$ кв.ед.

27. $\frac{\pi a^2h}{81}$ куб.ед. **28.** $\frac{10R^2}{7}\sqrt{\frac{5}{21}}$ кв.ед. **29.** $4\sqrt{3}\left(\frac{2R}{5}\right)^3$ куб.ед. **30.** $\frac{5\sqrt{6}}{36}$ куб.ед.

Разные задачи

1. Сторона основания правильного тетраэдра равна a. Определить радиус шара, касающегося боковых граней тетраэдра в точках, лежащих на сторонах основания.

2. В правильную четырехугольную пирамиду со стороной основания a и высотой H вписан шар. Второй шар касается первого шара и боковых граней пирамиды. Вычислить объем второго шара.

3. Вычислить объем треугольной пирамиды, у которой два противоположных ребра равны 8 и 24, а два остальные ребра имеют длину 14.

4. В правильной треугольной пирамиде боковые ребра равны b и образуют друг с другом прямые углы. Вычислить радиусы вписанного и описанного шаров.

5. В конус вписана пирамида, основанием которой служит прямоугольный треугольник. Боковая грань, проходящая через один из катетов, образует с плоскостью основания угол α. Вычислить объем пирамиды, если образующая конуса равна ℓ и наклонена к плоскости основания под углом β.

6. В правильную четырехугольную пирамиду, все ребра которой равны a, вписан куб так, что четыре его вершины находятся на апофемах и четыре – в плоскости основания. Вычислить объем куба.

7. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 6. Вычислить объем призмы, если известно, что в нее можно вписать шар.

8. Вычислить отношение объемов цилиндра и конуса, вписанного в один и тот же шар, если высота и цилиндра, и конуса равна радиусу шара.

9. В полушар радиуса $\sqrt{3/2}$ вписан куб так, что четыре его вершины лежат на основании полушара, а четыре другие вершины принадлежат сферической поверхности. Вычислить объем куба.

10. Центр сферы совпадает с центром основания конуса, а ее радиус равен радиусу основания конуса. Вычислить радиус окружности, по которой сфера пересекает поверхность конуса, если известны высота конуса H и угол при вершине осевого сечения α.

11. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник с боковыми сторонами, равными b, и углом α при вершине. Две боковые грани пирамиды, проходящие через равные стороны, перпендикулярны основанию, а третья составляет с ним тот же угол α. Вычислить радиус шара, вписанного в пирамиду.

12. В прямой круговой цил...
помещены три шара. Первый шар радиуса R лежит на нижнем основ...
цилиндра. Два других шара радиуса $R/2$ каждый, касаются друг друга, каждый из них касается первого шара и верхнего основания цилиндра. Вычислить высоту цилиндра.

13. В четырехугольную пирамиду $PABCD$, в основании которой лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с боковой стороной $AB = \ell$ и острым углом φ, вписан шар. Боковые грани APD и BPC – равнобедренные треугольники ($AP = PD$; $BP = PC$), образующие с основанием пирамиды один и тот же угол α. Вычислить радиус вписанного шара.

14. Ребро куба равно a. Вычислить объем прямого кругового цилиндра, вписанного в куб так, что его осью является диагональ ℓ куба, а окружности оснований касаются тех диагоналей граней куба, которые не имеют общих точек с диагональю ℓ.

15. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a, точка E – середина C_1D_1, точка F – середина B_1C_1. Вычислить радиус сферы, проходящей через точки A, C, E, F.

16. На основании правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания a и двугранным углом α при основании лежит шар, касающийся основания в его центре. Плоскость, проходящая через вершину пирамиды и середины двух смежных сторон основания, касается этого шара. Вычислить его радиус.

17. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a. Вычислить радиус сферы, вписанной в трехгранный угол, образованный гранями тетраэдра с вершиной в точке A, и касающейся плоскости, проведенной через середины ребер AB, AD, BC.

18. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, боковое ребро равно b. Вычислить радиус сферы, касающейся всех ребер пирамиды.

19. В правильную усеченную треугольную пирамиду с боковым ребром b можно поместить сферу, касающуюся всех ее граней, и сферу, касающуюся всех ребер. Вычислить стороны основания пирамиды.

20. Центр сферы, описанной около правильной четырехугольной пирамиды, находится на расстоянии a от боковой грани и на расстоянии b от бокового ребра. Вычислить радиус сферы.

21. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна b, а высота пирамиды равна $b\sqrt{2}$. Сфера, вписанная в пирамиду, касается грани ACD в точке K. Вычислить площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку K и ребро AB.

22. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равносторонний треугольник ABC со стороной a. Вершина A_1 проецируется в точку пересечения медиан треугольника ABC, ребро AA_1 составляет с плоскостью основания угол $45°$. Вычислить площадь боковой поверхности призмы.

23. В конус, боковая поверхность которого в k раз больше площади основания, вписан шар радиуса R. Вычислить объем конуса.

24. Все ребра пирамиды $SABC$ равны 1. Вершины A и B и середины ребер AS и CS лежат на поверхности шара. Вычислить его радиус.

25. Все ребра пирамиды $SABC$ равны 1. Первый шар с центром в точке O_1 касается плоскостей SAB и SAC в точках B и C, а второй шар с центром в точке O_2 касается плоскостей SAC и SBC в точках A и B. Вычислить объем пирамиды SBO_1O_2.

26. Шар радиуса 1 касается всех ребер треугольной пирамиды $SABC$. Центр шара O лежит внутри пирамиды на ее высоте SH на расстоянии $\sqrt{3}$ от вершины S. Вычислить высоту пирамиды.

27. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Шар касается ребер AB, BC, CD и AA_1 в их серединах. Вычислить его радиус.

28. Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен $45°$. В этом конусе расположены два шара единичного радиуса, касающиеся основания конуса в точках, симметричных относительно центра основания. Каждый из шаров касается боковой поверхности конуса и другого шара. Вычислить объем конуса.

29. В треугольной пирамиде длины двух непересекающихся ребер равны 12 и 4, а остальные ребра имеют длину 7. В пирамиду вписана сфера. Вычислить расстояние от центра сферы до ребра длины 12.

30. Основанием пирамиды $ABCD$ является прямоугольный треугольник ABC с острым углом $C = 30°$ и гипотенузой $BC = 2\sqrt{2}$. Ребра AD, BD и CD имеют равную длину. Сфера радиуса 1 касается ребер AD и BD, продолжения ребра CD за точку D и плоскости ABC. Вычислить величину отрезка касательной, проведенной из точки A к сфере.

31. В кубе с ребром 1 расположен конус так, что его вершина совпадает с вершиной куба. Три грани куба касаются боковой поверхности конуса, а вписанный в куб шар касается основания конуса. Вычислить объем конуса.

32. Три одинаковых конуса, радиусы основания которых равны r, а высоты $\frac{4}{3}r$, расположены по одну сторону от плоскости α, а их основания лежат в этой плоскости. Окружности оснований каждых двух из этих конусов касаются. Вычислить радиус шара, лежащего между конусами и касающегося как плоскости α, так и всех трех конусов.

33. Три шара радиуса r лежат на нижнем основании правильной треугольной призмы, причем каждый из них касается двух других шаров и двух боковых граней призмы. На этих шарах лежит четвертый шар, который касается всех боковых граней и верхнего основания призмы. Вычислить высоту призмы.

34. В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник со стороной a. Одно из боковых ребер тоже равно a, а два других равны b. Вычислить радиус сферы, описанной около пирамиды.

35. В правильный тетраэдр $ABCD$ вписан шар объема 1. Точка P является серединой высоты DE тетраэдра. Через точку P проведена плоскость α перпендикулярно высоте DE. Из всех точек, полученных при пересечении шара с плоскостью α, выбрана точка K, ближайшая к точке A. Вычислить расстояние от точки K до грани ABD.

36. Правильный треугольник со стороной а лежит в плоскости α. Средними линиями он разделен на четыре треугольника, и на трех из них, примыкающих к вершинам, по одну сторону от плоскости α, построены как на основаниях три правильные треугольные пирамиды высотой a. Найти радиус сферы, лежащей между пирамидами и касающейся как плоскости α, так и всех трех пирамид.

37. В правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром a вписана сфера. На ребре AC взята точка M так, что $MC = 2AM$, а на высоте SD – точка N так, что $ND = 2NS$. Прямая MN пересекает сферу в точках P и Q. Вычислить длину отрезка PQ.

38. Боковые ребра правильной треугольной пирамиды $SABC$ наклонены к плоскости основания под углом $45°$. Шар касается плоскости ABC в точке A и, кроме того, касается вписанного в пирамиду шара. Через центр первого шара и высоту BD основания проведена плоскость. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания.

39. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой BC. Сфера S_1 радиуса $\sqrt{23}-\sqrt{2}-3$ касается боковых граней AA_1B_1B и BB_1C_1C и нижнего основания ABC. Сфера S_2 с центром в точке C_1 касается сферы S_1 внешним образом. Известно, что $AB = AA_1$ и что радиус сферы S_1 в 2 раза меньше радиуса сферы S_2. Вычислить объем призмы.

40. Через центр шара проведены три попарно перпендикулярные плоскости, разделившие шар на восемь частей. В каждую из этих частей вписано по шару. Вычислить отношение объема одного из этих шаров к объему исходного шара.

41. Внутри куба с ребром a расположены два равных касающихся друг друга шара. При этом один шар касается трех граней куба, имеющих общую вершину, а другой касается трех оставшихся граней. Вычислить радиус этих шаров.

42. Осевое сечение конуса является правильным треугольником. Через ось конуса проведены две взаимно перпендикулярные плоскости. Два шара касаются этих плоскостей, плоскости основания конуса и его боковой поверхности, только один касается ее изнутри, а другой – снаружи. Вычислить отношение радиусов этих шаров.

43. Внутри треугольной пирамиды, все ребра которой равны a, расположены четыре равных шара. Каждый шар касается трех других, а также трех граней пирамиды. Вычислить радиусы этих шаров.

44. В конус вписана правильная шестиугольная призма так, что нижнее основание призмы лежит в плоскости основания конуса, а вершины верхнего основания принадлежат боковой поверхности конуса. Известно, что площадь полной поверхности призмы имеет наибольшее возможное значение. Вычислить объем призмы, если известно, что длина образующей конуса равна ℓ, а угол при вершине осевого сечения конуса равен α.

45. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник с катетами $AB = 2$, $AC = 4$. Боковые ребра пирамиды равны 4. На луче CA выбраны точки M, N так, что $CM = 1$, $CN = 6$ а на луче BS точки P, Q так, что $BP = 2$, $BQ = 5$. Вычислить объем пирамиды $MNPQ$.

46. Вершина конуса лежит в плоскости основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, а окружность основания конуса вписана в четырехугольник, полученный в сечении пирамиды плоскостью, проходящей через середины сторон AD и BC основания пирамиды и делящей ребро SC в отношении $3:1$, считая от вершины S. Вычислить отношение объема конуса к объему пирамиды.

47. Сфера радиуса 13 касается граней $ABCD$, A_1ADD_1 и A_1ABB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вторая сфера радиуса 5 касается граней $ABCD$, AA_1D_1D и CC_1D_1D куба и первой сферы. На ребре BC взята точка F, а на продолжении ребра DC за точку C – точка E так, что $CE = CD$. Плоскость C_1EF пересекает первую сферу по окружности, радиус которой в $2{,}6$ раза больше радиуса окружности, по которой эта плоскость пересекает вторую сферу. Найти отношение $BF : FC$.

48. В основании правильной треугольной призмы $ABCEFG$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 3, боковые ребра AE, BF и CG имеют длину 4. Вычислить радиус сферы, касающейся основания ABC, а также продолжений отрезков AF, BG и CE за точки A, B, C соответственно.

Ответы:

1. $\frac{a\sqrt{6}}{8}$. **2.** $\frac{\pi a^3\left(\sqrt{4H^2+a^2}-a\right)^9}{3072H^9}$ куб.ед. **3.** 192 куб.ед. **4.** $R=\frac{b\sqrt{3}}{2}$; $r=\frac{b}{3+\sqrt{3}}$. **5.** $\frac{2\ell^3\sin^2\beta\operatorname{ctg}\alpha}{3\sin\alpha}\sqrt{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}$ куб.ед. **6.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{32}$ куб.ед.

7. 54 куб.ед. **8.** $\frac{9}{4}$. **9.** 1 куб.ед. **10.** $H\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **11.** $b\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$.

12. $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}R$. **13.** $\frac{1}{2}\ell\sin\varphi\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **14.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{18}$ куб.ед. **15.** $\frac{a\sqrt{41}}{8}$.

16. $\frac{a\left(\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2\alpha}-1\right)}{4\operatorname{tg}\alpha}$. **17.** $\frac{a\left(\sqrt{3}-1\right)}{4\sqrt{2}}$. **18.** $\frac{a(2b-a)}{2\sqrt{3b^2-a^2}}$. **19.** $b\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$; $b\left(1-\sqrt{2/3}\right)$. **20.** $\frac{ab}{\sqrt{2a^2-b^2}}$. **21.** $\frac{\sqrt{219}}{36}b^2$ кв.ед. **22.** $\frac{1}{3}a^2\left(\sqrt{15}+\sqrt{6}\right)$ кв.ед.

23. $\frac{\pi R^3(k+1)^2}{3(k-1)}$ куб.ед. **24.** $\sqrt{\frac{11}{32}}$. **25.** $\frac{\sqrt{2}}{24}$ куб.ед. **26.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **27.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

28. $\frac{\pi}{3}\left(2+\sqrt{2}\right)^3$ куб.ед. **29.** $\frac{3\sqrt{13}}{\sqrt{13}+\sqrt{5}}$. **30.** $\sqrt{3}-1$. **31.** $\frac{\pi}{48}\left(\sqrt{3}-1\right)^2$ куб.ед.

32. $\frac{2}{3}r\left(2\sqrt{3}-3\right)$. **33.** $\frac{1}{3}r\left(6+\sqrt{3}+\sqrt{27+12\sqrt{3}}\right)$.

34. $\frac{1}{2}a^2\sqrt{4b^2-a^2}\left(4a^2b^2-a^4-b^4\right)^{-1/2}$. **35.** $\frac{\sqrt[3]{6/\pi}}{3}$. **36.** $\frac{a}{6}$. **37.** $\frac{2a\sqrt{11}}{33}$.

38. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}$. **39.** $8\left(10-7\sqrt{2}\right)$ куб.ед. **40.** $\frac{1}{10+6\sqrt{3}}$. **41.** $\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)a}{4}$.

42. $\frac{9+4\sqrt{6}}{5}$. **43.** $\frac{a\left(\sqrt{6}-1\right)}{10}$. **44.** При $\alpha<60^\circ$

$$V=\frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}l^3\cos^3\frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\sqrt{3}\right)}{\left(2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\sqrt{3}\right)^3}$$ куб.ед.; при $\alpha\geq 60^\circ$ решений нет.

45. $\frac{5\sqrt{11}}{4}$ куб.ед. **46.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{32}$. **47.** $\frac{183}{40}$. **48.** $\frac{9+10\sqrt{3}}{8}$.

25. ВАРИАНТЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ

Вариант 1

1. Двое рабочих одновременно приступили к выполнению одинакового задания. Когда первый рабочий выполнил половину задания, второму осталось изготовить 24 детали, а когда второй выполнил половину задания, первому осталось изготовить 15 деталей. Сколько деталей должны изготовить рабочие?

2. Решите уравнение $8(2-\sin 2x)=3(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)$.

3. Решите уравнение $x+\sqrt{x-9}=21$.

4. Решите неравенство $8\cdot 9^{\sqrt{x}}+6^{\sqrt{x}+1}<27\cdot 4^{\sqrt{x}}$.

5. На кривой $y=x^2+x$ найдите точку, расстояние от которой до точки $M(-1;1)$ будет наименьшим. Найдите это расстояние. Сделайте чертеж.

6. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \lg y=\lg\left(1-\dfrac{4}{x}\right), \\ (y-x)a=1 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите эти решения при каждом a.

7. В сферу радиуса R вписана пирамида $TABC$, основанием которой служит равносторонний треугольник ABC. Боковые грани, пересекающиеся по ребру TA, перпендикулярны основанию пирамиды, а третья боковая грань образует с основанием угол $60°$. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через сторону AC основания и пересекающей ребро TB?

Вариант 2

1. Два автомобиля, выехавшие одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу, встретились через 20 мин, после чего второй автомобиль прибыл в A на 0,5 часа позже, чем первый прибыл в B. Сколько времени потребовалось первому автомобилю на путь из A в B?

2. Решите уравнение $4\cos^2(x^2)+4\sin(x^2)=1$.

3. Решите уравнение $\log_2(x+1)=1+\log_2 3-\log_2 x$.

4. Решите неравенство $\sqrt{3x^2+5x}<\sqrt{2}$.

5. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольника, две стороны которого лежат на координатных осях, а одна из вершин – на графике функции $y=x(x-8)^2$, $(0<x<8)$?

6. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{y-1}{|x|-x}=0, \\ (x-a)^2+(y+a-1)^2=1 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите эти решения при каждом a.

7. В сферу радиуса R вписан прямоугольный параллелепипед, диагональ которого образует с диагоналями его основания углы 30° и 45°. Какую наименьшую площадь может иметь сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через его диагональ и точку, лежащую на боковом ребре, не пересекающем эту диагональ?

Вариант 3

1. Двое рабочих, работая вместе, могут закончить работу за 2 дня. Если сначала 2/3 работы выполнит один из них, а затем его сменит другой, то вся работа будет выполнена за 4 дня. За сколько дней каждый рабочий может выполнить всю эту работу?

2. Решите уравнение $\cos 3x - \cos x = \sqrt{3}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

3. Решите уравнение $3 \cdot 9^{\sqrt{x}} - 82 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 27 = 0$.

4. Решите неравенство $\log_x 2 < 2$.

5. На графике функции $y = 0{,}25x^2 - x + 8$ укажите такую точку A, чтобы площадь треугольника с вершинами A, $O(0;0)$, $B(5;5)$ была наименьшей. Найдите эту площадь.

6. При каких значениях параметра a уравнение

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(2 - \frac{|x|}{x} + \frac{|x-2|}{x-2}\right) = (x-3)^2 + a$$

имеет два различных корня? Найдите эти корни для каждого a.

7. В сферу радиуса R вписана пирамида $TABC$, у которой основанием служит равносторонний треугольник ABC. Высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA, а угол между боковым ребром TB и медианой основания BF равен 45°. Какую минимальную площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через медиану основания BF?

Вариант 4

1. Двое рабочих должны были изготовить по 45 деталей. Второй рабочий приступил к работе на 25 мин. позднее первого, по трети задания они выполнили к одному времени, и чтобы закончить работу вместе с первым, второй сделал за него 6 деталей. Сколько деталей в час изготавливал каждый рабочий?

2. Решите уравнение $\cos 2x + \cos 6x = \cos 4x$.

3. Решите уравнение $3^{1+\sqrt{x}} + 3^{2-\sqrt{x}} = 28$.

4. Решите неравенство $\log_x\left(9x^2 - 14x + 6\right) < 2$.

5. Какую наибольшую площадь может иметь прямоугольник, две стороны которого лежат на координатных осях, а одна из вершин – на графике функции $y = (6-x)^2\ (0 < x < 6)$?

6. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{|x+1| + |x| - 1}{2x} = 1, \\ (x-a)^2 + a^2 - 2a = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение? Найдите эти решения для каждого a.

7. В сферу, площадь которой равна 24π (кв.ед.), вписан прямоугольный параллелепипед, диагональ которого образует с диагональю его основания углы $45°$ и $60°$. Какая наименьшая площадь может быть у треугольника, сторона которого является диагональю параллелепипеда, а вершина лежит на диагонали основания, не пересекающей эту диагональ параллелепипеда?

Вариант 5

1. Два автомобиля, выехав одновременно из A в B навстречу друг другу, встретились через 15 мин, после чего второй автомобиль прибыл в A на 40 мин позже, чем первый прибыл в B. Сколько времени потребовалось первому на путь из A в B?

2. Решите уравнение $1+2\cos^2 x = 2\sqrt{2}\sin|x|$.

3. Решите уравнение $\log_6(x+1) = 1 - 2\cdot\log_{36} x$.

4. Решите неравенство $\sqrt{5x-3x^2} < \sqrt{2}$.

5. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольного треугольника, одна вершина которого совпадает с точкой $M(8;0)$, другая лежит на графике функции $y = 2x^2(8-x)$, $0 \le x \le 8$, а вершина прямого угла – на оси OX?

6. При каких значениях параметра a, система уравнений

$$\begin{cases} \lg(-x) = \lg(y-x-1), \\ (x-a)^2 + (y+a-1)^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение? Найдите эти решения при каждом a.

7. В сферу, площадь которой равна 64π (кв.ед.), вписана пирамида $TABCD$, у которой основанием служит прямоугольник $ABCD$. Высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA, а боковое ребро TC образует с диагоналями основания углы 30° и 45°. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания BD?

Вариант 6

1. Пешеход должен пройти 40 км. Пройдя четверть пути, он увеличил скорость движения на 1 км/ч и прошел весь путь за 7 ч. С какой скоростью пешеход начал движение?

2. Решите уравнение $\frac{\sqrt{3}}{3}+2\sin 2x=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$.

3. Решите уравнение $\frac{\lg(7x^2-8x+2)}{\lg x}=2$.

4. Найдите область определения функции $y=\sqrt{2x-5\sqrt{x}+2}$.

5. Укажите на графике функции $y=3-0{,}5x^2$ точки, расстояние от которых до начала координат будет наименьшим. Найдите это наименьшее расстояние.

6. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x-2y+1=0, \\ y=\sqrt{ax-2} \end{cases}$$

имеет единственное решение? Найдите эти решения при каждом a.

7. В сферу радиуса R вписана пирамида $TABC$, у которой основанием служит равносторонний треугольник ABC, а высота совпадает с боковым ребром TA. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через боковое ребро TB и пересекающей ребро AC, если высота пирамиды в полтора раза больше стороны основания?

Вариант 7

1. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 5 км, отправился пешеход. Через 24 мин из пункта A выехал велосипедист и обогнал пешехода в 3-х км от пункта A. Доехав до пункта B, велосипедист повернул обратно и в 1 км от пункта B встретил пешехода. С какими скоростями двигались пешеход и велосипедист?

2. Решите уравнение $3\cos^2 x + 7\sin^2 x = 8\sin x$.

3. Решите уравнение $\dfrac{\lg(3x^2+1)}{\lg(x+1)} = 2$.

4. Решите неравенство $3 \cdot 2^{\sqrt{x}} + 2^{4-\sqrt{x}} < 26$.

5. Решите уравнение $\dfrac{|\sin x|}{\sin x} + 1 = 2(x+3)^2$.

6. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x-20}{|x|-20} = 1, \\ (x-a)^2 + a - 20 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение? Найдите эти решения при каждом a.

7. Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с диагоналями его основания углы 30° и 60°, а расстояние между боковым ребром и диагональю параллелепипеда, не пересекающей это ребро, равно l. Какой наименьший периметр может иметь сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через его диагональ и точку, лежащую на боковом ребре, не пересекающем эту диагональ?

Вариант 8

1. Из пункта A в пункт B одновременно выехали два велосипедиста. Когда второй проехал половину пути, первому осталось проехать 45 км, а когда первый прибыл в пункт B, второму осталось проехать 24 км. Найдите расстояние между пунктами A и B.

2. Укажите все значения x, при которых функция $y = \sin^2 x + \sin x + 1$ принимает наименьшие и наибольшие значения. Найдите эти значения.

3. Решите уравнение $\log_2(3x+5) = 3 - \log_2(x+1)$.

4. Решите неравенство $2(x-1) < 3\sqrt{x}$.

5. Какая наименьшая площадь может быть у треугольника OAB, если его стороны OA и OB лежат на графике функции $y = \dfrac{|x|-x}{2}$, а прямая AB проходит через точку $M(0; 1)$?

6. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\lg(x+y+1)}{\lg x} = 1, \\ (x-a)^2 + (y+a-5)(y+a) = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

7. В сферу вписана пирамида $TABC$, основанием которой служит прямоугольный треугольник ABC, а высота пирамиды совпадает с ребром TA. Боковое ребро TB образует с гипотенузой основания AB угол 30°, угол между TB и медианой основания CD равен 60°, а расстояние между прямыми TB и CD равно l. Найдите площадь сферы.

Вариант 9

1. Один рабочий взялся выполнить заказ за 20 дней при условии, что в течение 6 дней ему будет помогать второй рабочий. Если бы этот заказ был поручен каждому рабочему отдельно, то для его выполнения первому потребовалось бы на 7 дней больше, чем второму. За сколько дней каждый из них может выполнить заказ?

2. Найдите все корни уравнения $\sin 4x - \sin 2x + \sqrt{2}\cos 3x = 0$, принадлежащие промежутку $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

3. Решите уравнение $2^{2+\sqrt{x}} + 2^{3-\sqrt{x}} = 33$.

4. Решите неравенство $\log_2 \frac{x}{2x-1} + \log_2(x+1) < 1$.

5. Какой наибольший периметр может быть у прямоугольника, две стороны которого лежат на координатных осях, а одна из вершин – на графике функции $y = -x^2 + 9x - 14$, ($y > 0$)?

6. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} 2(x-a)^2 + y = 10 - a, \\ y^2 + \left(\dfrac{x-10}{|x|-10}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение? Найдите эти решения при каждом a.

7. Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с диагоналями его основания углы 30° и 60°, а расстояние между боковым ребром и диагональю параллелепипеда, не пересекающей это ребро, равно l. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

Вариант 10

1. Для выполнения некоторого заказа предполагалось использовать одновременно два станка разной производительности в течение трех дней. Фактически заказ выполнял один рабочий, который 3/8 заказа сделал на станке с большей производительностью, а затем оставшуюся часть – на другом станке, затратив на выполнение всей работы 9 дней. За какое время можно выполнить этот заказ, работая на каждом из станков в отдельности?

2. Решите уравнение $\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)+\cos\left(4\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)\right)=0$.

3. Решите уравнение $6\cdot 2^{\lg x}+x^{\lg 2}=28$.

4. Решите неравенство $2^{x+1}<7+2^{2-x}$.

5. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольника, координаты вершин которого удовлетворяют уравнению $|y|=(x-1)(4-x)$ $(1<x<4)$, а стороны параллельны координатным осям?

6. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} y=\log_2\left(5+4\cdot\frac{|x-3|}{x-3}-\frac{|x+4|}{x+4}\right), \\ x^2+2x+(y-a)^2=24 \end{cases}$$

имеет единственное решение? Найдите эти решения при каждом a.

7. Основанием пирамиды $TABC$ служит прямоугольный треугольник ABC, площадь которого равна 3. Все боковые ребра пирамиды равны между собой, высота пирамиды равна 1, а расстояние между боковым ребром TA и медианой основания CD, проведенной к гипотенузе AB, равно 6/7. Найдите длины катетов треугольника ABC, считая, что $AC<BC$.

Вариант 11

1. Из пункта A в пункт B одновременно выехали два велосипедиста. Когда второй проехал половину пути, первому оставалось проехать до пункта B 14 км, а когда первый прибыл в пункт B, второй отставал от него на 10,5 км. Найдите расстояние между пунктами A и B.

2. Укажите все значения x, при которых функция $y=\cos^2 x+\sqrt{3}\cos x+1$ принимает наименьшие и наибольшие значения. Найдите эти значения.

3. Решите уравнение $\log_2(3x+8)=4-\log_2 x$.

4. Решите неравенство $x-4\sqrt{x}-12<0$.

5. Найдите площадь ΔAMB, если A и B – точки пересечения с осью OX касательных, проведенных к графику функции $y=\dfrac{9-x^2}{6}$ из точки $M(4;\ 3)$.

6. Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases}\log_2 y-\log_2(a-x)=1,\\ x(y+1)=8\end{cases}$$

имеет два различных решения.

7. В сферу радиуса R вписана пирамида $TABC$, основанием которой служит прямоугольный треугольник ABC, а высота пирамиды совпадает с ребром TA. Боковое ребро TB образует с высотой пирамиды угол 60°, а угол между TB и медианой основания CD, проведенной к гипотенузе AB, равен 45°. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через медиану CD и пересекающей ребро TB?

Вариант 12

1. Двое рабочих, работая вместе, выполнили заказ за 20 дней. За сколько дней выполнил бы заказ каждый из них в отдельности, если известно, что первый должен работать на 9 дней больше второго?

2. Найдите все корни уравнения $\sin 3x + \cos x + \sin x = 0$, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

3. Решите уравнение $\left(1 + \log_3\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{x}\right)\right) \cdot \log_x 3 = 1$.

4. Решите неравенство $\frac{8 - 7 \cdot 2^{\sqrt{x}}}{2 - 2^{\sqrt{x}}} < 2^{\sqrt{x}}$.

5. Какая наименьшая сумма квадратов сторон может быть у прямоугольника, стороны которого параллельны осям координат, одна вершина совпадает с точкой $M(-8;\ 2)$, а противолежащая вершина находится на графике функции $y = \frac{x^2}{4}$?

6. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y = |x - 2|, \\ ax - y + 1 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите эти решения при каждом a.

7. В сферу вписана правильная треугольная пирамида $TABC$, у которой центр сферы делит высоту в отношении $3:1$, а расстояние между медианой грани ATC и медианой CK основания ABC равно 2. Найдите площадь сферы.

Вариант 13

1. Поезд вышел из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 342 км. Через 1 ч навстречу ему из пункта B вышел второй поезд, проходивший в час на 9 км больше, чем первый. Определите скорость каждого поезда, если они встретились на расстоянии 162 км от пункта B.

2. Укажите все значения x, при которых функция $y = 2 + \sin x - \cos^2 x$ принимает наибольшее и наименьшее значения. Найдите эти значения функции.

3. Решите уравнение $3 \cdot 3^{\lg x} - x^{\lg 3} = 18$.

4. Решите неравенство $\log_3 \frac{3x}{3x+2} < 1$.

5. Трапеция $ABCD$ с основанием $AB = 2$, $CD = 5$ и $h = 4$ разбивается на две части прямой, проходящей через вершину A и пересекающей основание CD. Какое наименьшее значение может иметь сумма квадратов площадей этих частей?

6. Укажите все значения a, при которых уравнение

$\frac{21x - 19|x|}{x - |x|} = a + (x + a)^2$ имеет единственное решение.

Найдите эти решения для каждого значения a.

7. В правильной четырехугольной пирамиде $TABCD$ с высотой, равной 2/9, и стороной основания, равной $\sqrt{2}$, проведена плоскость, проходящая через медиану BM боковой грани TBC и параллельная апофеме TK боковой грани TAB. На каком расстоянии от этой плоскости находится апофема TK?

Вариант 14

1. Двумя насосами, работающими одновременно, можно выкачать воду из бака за 45 мин. Если 90% воды выкачать одним насосом, а затем оставшуюся часть другим, то вся работа займет 1 ч 12 мин. За какое время может выкачать воду каждый насос?

2. Решите уравнение $2\cdot 4^{1+\sin x}+4^{1-\sin x}=33$.

3. Решите уравнение $3^{1+\sqrt{x}}+27=82\sqrt{3^{\sqrt{x}}}$.

4. Решите неравенство $\dfrac{x^3+27}{x^2-9}>\dfrac{2x-9}{3}$.

5. Дано уравнение $\dfrac{x}{2}+\dfrac{8}{x}=\log_2(8x-x^2)$.

Найдите экстремумы функции, стоящей в левой части уравнения. Докажите, что уравнение имеет единственное решение. Найдите это решение.

6. При каких значениях *a*, система уравнений

$$\begin{cases} y=\log_2\left(2+\dfrac{|x|}{x}+\dfrac{|x-3|}{x-3}\right), \\ (x-3)^2+(y-a-1)^2=25 \end{cases}$$

имеет единственное решение? Найдите эти решения при каждом значении *a*.

7. В правильной четырехугольной пирамиде *TABCD* с высотой, равной 1, и стороной основания, равной $7/\sqrt{6}$, проведена плоскость, проходящая через апофему *TK* боковой грани *TAB* и параллельная медиане *BM* боковой грани *TBC*. На каком расстоянии от этой плоскости находится апофема *BM*?

Вариант 15

1. В зубчатой передаче меньшая из шестеренок делает в минуту на 90 оборотов больше, чем другая, а время, за которое каждая из них делает 9 оборотов, отличается на 1 с. Сколько оборотов делает каждая шестеренка в минуту?

2. Решите уравнение $\sqrt{2}\sin^2 x+\cos x=0$. Укажите его корни, лежащие в промежутке $\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

3. Решите неравенство $\log_x\left(64-112x+49x^2\right)<0$.

4. Решите неравенство $\frac{x+6\sqrt{x}-7}{\sqrt{x}-1}>x-13$.

5. На плоскости XOY прямые $y=2x$ и $x=-1$ пересекаются в точке B, а прямая, проходящая через точку $M(0;4)$, пересекает заданные прямые в точках A и C. При каком положительном значении абсциссы точки A площадь треугольника ABC будет наименьшей? Найдите эту площадь.

6. Определите все значения параметра a, при которых уравнение $(x-1)^2=a(|x|-x-1)$ имеет два различных корня. Укажите эти корни для каждого найденного значения a.

7. Основанием пирамиды $TABC$ служит равносторонний треугольник со стороной, равной 8, а ее высота проходит через середину стороны основания AB. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через боковое ребро TA, если известно, что прямая, проходящая через середину высоты пирамиды и середину стороны основания BC, параллельна секущей плоскости и находится от нее на расстоянии, равном 1.

Ответы к вариантам экзаменационных билетов

Вариант 1. **1.** По 40 дет. **2.** $x=(-1)^n\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi n}{2}, n\in Z$. **3.** $\{18\}$.

4. $x\in(0;1]$. **5.** $A\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{4}\right)$; $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$.

6. $a\in\left(-\dfrac{1}{4};\ 0\right)\cup\left\{\dfrac{1}{5}\right\}$ $x=\dfrac{a-1-\sqrt{1-2a-15a^2}}{2a}$,

$y=\dfrac{a+1-\sqrt{1-2a-15a^2}}{2a}$. **7.** $\dfrac{18}{43}R^2$ (кв.ед.).

Вариант 2. **1.** 0,5 ч. **2.** $x_{1,2}=\pm\sqrt{(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi k}$; $k\in\mathbb{N}$. **3.** $\{2\}$.

4. $x\in-\left(2;\ -\dfrac{5}{3}\right]\cup\left[0;\ \dfrac{1}{3}\right)$. **5.** 256 (кв.ед.).

6. $a\in\{1\}\cup\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $x=a-\sqrt{1-a^2}$, $y=1$.

7. R^2 (кв.ед.).

Вариант 3. **1.** 4 и 4 или 3 и 6 дн.

2. $\left\{\pi n;\ (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi k}{2}\right\}, n,k\in Z$. **3.** $x=9$.

4. $x\in(0;\ 1)\cup\left(\sqrt{2};\ \infty\right)$. **5.** $A(4;8)$, 10 (кв.ед.).

6. $a\in(-\infty;-10)\cup(-2;-1)$ $x=3\pm\sqrt{-a-1}$.

7. $\dfrac{3R^2}{11}$ (кв.ед.).

Вариант 4. **1.** 12 и 18 дет/ч. **2.** $\left\{\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{4};\ \pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k\right\}, n,k\in Z$.

3. $x=4$. **4.** $x\in\left(0;\ \dfrac{3}{4}\right)$. **5.** 32 (кв.ед.).

6. $a\in(0;\ 1]\cup\{2\}$ $x=a+\sqrt{2a-a^2}$. **7.** $\sqrt{6}$ (кв.ед.).

Вариант 5. **1.** 20 мин. **2.** $x=(-1)^n\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in[0;\ \infty)$,

$x=(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in(-\infty;\ 0]$ $(n,\ k\in Z)$.

3. $x=2$. **4.** $x\in\left[0;\ \dfrac{2}{3}\right)\cup\left(1;\ \dfrac{5}{3}\right]$. **5.** 256 (кв.ед.).

6. $a\in\{-1\}\cup\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $x=a-\sqrt{1-a^2}$, $y=1$.

7. $2\sqrt{6}$ (кв.ед.).

Вариант 6. **1.** 5 км/ч. **2.** $\left\{(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{2}\right\}$, $n\in Z$. **3.** $\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$.

4. $x\in\left[0;\ \dfrac{1}{4}\right]\cup[4;\ \infty)$. **5.** $A_1(-2;1)$, $A_2(2;1)$; $\sqrt{5}$.

6. $a\in(-\infty;-2]\cup\{2\}$ $x=(2a-1)+2\sqrt{a^2-a-2}$,

$y=a+\sqrt{a^2-a-2}$. **7.** $\dfrac{9\sqrt{13}}{43}R^2$ (кв.ед.).

Вариант 7. **1.** $\upsilon_п=5$ км/ч, $\upsilon_в=15$ км/ч. **2.** $(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$.

3. $\{1\}$. **4.** $x\in[0;\ 9)$. **5.** $x\in\{-4;\ -3\}$.

6. $a\in[-5;\ 4)\cup\{19\}$; при $a\in[-5;4)$

$x=a+\sqrt{20-a}$, при $a=19$ $x=18$.

7. $2l\sqrt{8+2\sqrt{6}}$.

Вариант 8. **1.** 120 км. **2.** $\max y(x)=y\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right)=3$,

$\min y(x)=y\left((-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi k\right)=\dfrac{3}{4}$. **3.** $\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$. **4.** $x\in[0;4)$.

5. 2 (кв.ед.). **6.** $a\in\left[\dfrac{3}{2};\ 2\right]\cup\{3,5;\ 6\}$.

7. $24\pi\ell^2$ (кв.ед.).

Вариант 9. **1.** 28 и 21 дн. **2.** $\left\{-\frac{5\pi}{6};\ -\frac{3\pi}{4};\ -\frac{\pi}{2}\right\}$. **3.** $\{9\}$.

4. $x\in(-1;\ 0)\cup(1;\ 2)$. **5.** 22. **6.** $a\in\left[-\frac{5}{2};\ 2\right)\cup\left\{\frac{19}{2}\right\}$;

при $a\in\left[-\frac{5}{2};\ 2\right)$ $x=\frac{2a+\sqrt{2(10-a)}}{2}$, $y=0$;

при $a=\frac{19}{2}$ $x=9$, $y=0$. **7.** $4l^2\sqrt{3+\sqrt{6}}$ (кв.ед.).

Вариант 10. **1.** 4 и 12 дн. **2.** $\left\{\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5};\ \frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3}\right\}$. **3.** $\{100\}$.

4. $x\in(-\infty;\ 2)$. **5.** $3\sqrt{3}$ (кв.ед.). **6.** $a\in(-3;0]\cup[5;6)$;

при $a\in(-3;0]$ $x=1-\sqrt{24+2a-a^2}$, $y=1$,

при $a\in[5;6)$ $x=-1+\sqrt{16+6a-a^2}$, $y=3$.

7. $AC=2$, $BC=3$.

Вариант 11. **1.** 42 км. **2.** $\max y(x)=y(2\pi n)=2+\sqrt{3}$;

$\min y(x)=y\left(\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)=\frac{1}{4}$. **3.** $\left\{\frac{4}{3}\right\}$. **4.** $x\in[0;\ 36)$.

5. 15 (кв.ед.). **6.** $a\in\left(\frac{7}{2};\ 8\right)$. 7. $\frac{R^2\sqrt{6}}{16}$ (кв.ед.).

Вариант 12. **1.** 45 и 36 дн. **2.** $\left\{\frac{\pi}{2};\ \frac{7\pi}{12};\ \frac{11\pi}{12}\right\}$. **3.** $\{3\}$.

4. $x\in(0;1)\cup(9;\infty)$. **5.** 40 (кв.ед.).

6. $a\in(-\infty;-1)\cup\left\{-\frac{1}{2}\right\}\cup[1;\infty)$;

при $a\in(-\infty;-1)\cup[1;\infty)$ $x=\frac{1}{a+1}$, $y=\frac{2a+1}{a+1}$;

при $a=-\frac{1}{2}$ $x=2$, $y=0$. **7.** 60π (кв.ед.).

Вариант 13. **1.** 45 и 54 км/ч. **2.** $\max y=y\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)=3$,

$\min y=y\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n\right)=\frac{3}{4}$. **3.** 100.

4. $x \in (-\infty;-1) \cup (0;\infty)$. 5. 98. 6. $a \in (-5;\ 4] \cup \{20\}$

$x = -a - \sqrt{20-a}$. 7. $\frac{4}{11}$ (кв.ед.).

Вариант 14. 1. Первый – за 1 ч, второй – за 3 ч.

2. $\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right\}$, $k \in Z$. 3. 36.

4. $x \in (-6;-3) \cup (-3;0) \cup (3;\infty)$.

5. $\min f(x) = f(4) = -4$, $\max f(x) = f(-4) = 4$, $x = 4$;

указание: $\begin{cases} x \in (0;\ 8), \\ f(x) \geq f(4) = 4, \Rightarrow\ f(4) = g(4). \\ g(x) \leq g(4) = 4 \end{cases}$

6. $a \in (-5;-4) \cup (-4;\ 4] \cup [5;\ 6)$;

при $a \in (-5;\ -4)$ $x = 3 - \sqrt{25 - a^2}$, $y = 1$,

при $a \in (-4;\ 4] \cup [5;\ 6)$ $x = 3 + \sqrt{24 + 2a - a^2}$,

$y = 2$. 7. $\frac{21}{13}$.

Вариант 15. 1. 180 об/мин и 270 об/мин.

2. $\left\{\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\left\{-\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}\right\}$.

3. $(0;1) \cup \left(1;\frac{9}{7}\right)$. 4. $[0;1) \cup (1;25)$.

5. $x = 1$, $S_{\min} = 1$ (кв.ед.).

6. $a \in (-\infty;1)$, при $a \in (-\infty;-1)$

$x_1 = 1 + \sqrt{-a}$, $x_2 = a + 1 - \sqrt{a^2 + a}$,

при $a \in [-1;\ 1)$ $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-a}$.

7. $\frac{32\sqrt{5}}{5}$ (кв.ед.).

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. ***Васильев А.В., Заз А.И.*** Математика. Сборник задач для поступающих в вузы с примерами решения экзаменационных билетов. – М.: Учебный центр «Ориентир» при МГТУ, 2001. – 106 с.

2. ***Галицкий М.Л. и др.*** Сборник задач по алгебре для 8–9 классов: учеб. пособие. – М.: Просвещение, 1992. – 271 с.

3. ***Говоров В.М и др.*** Сборник конкурсных задач по математике с методическими указаниями и решениями: учеб. пособие. – М.: Наука, 1986. – 384 с.

4. ***Горнштейн и др.*** Задачи с параметрами. – Киев: Евроиндекс, 1995. – 336 с.

5. ***Дорофеев Г.В. и др.*** Математика. Для поступающих в вузы. Пособие. – М.: Дрофа, 2000. – 560 с.

6. Задания для проведения письменного экзамена по математике в 9 кл. Пособие для учителя./Л.И. Звавич и др. – М.: Просвещение, 1996. – 96 с.

7. ***Зив Б.Г.*** Задачи по алгебре и началам анализа от простейших до более сложных. Учеб. пособие. – С-Пб.: Мир и семья, 1997. – 320 с.

8. ***Карп А.П.*** Сборник задач по алгебре и началам анализа. Учеб. пособие. – М.: Просвещение, 1995. – 176 с.

9. ***Кущенко В.С.*** Сборник конкурсных задач по математике с решениями. – Л.: Судостроение, 1966. – 591 с.

10. ***Литвиненко В.Н.*** Стереометрия в типовых задачах: книга для учителя. – М.: Школа-пресс, 1995. – 320 с. (Библиотека журнала «Математика в школе»).

11. Материалы вступительных экзаменов. Задачи по математике и физике. – М.: Бюро Квантум, 1993. – 320 с. (Приложение к журналу «Квант». Вып. 1).

12. ***Назаренко А.М., Назаренко Л.Д.*** Тысяча и один пример: равенства и неравенства. Пособие для абитуриентов. – Сумы: Слобожанщина, 1994. – 272 с.

13. ***Полонский Б.В. и др.*** Учимся решать задачи по геометрии. Учеб.-метод. пособие. – Киев: Магистр-S, 1996. – 256 с.

14. ***Потапов М.К. и др.*** Математика для абитуриентов. Учеб. пособие для поступающих в вузы и старшеклассников. – М.: Русское слово, 2001. – 352 с.

15. ***Родионов Е.М.*** Математика. Решение задач с параметрами. Пособие для поступающих в вузы. – М.: Учебный центр «Ориентир» при МГТУ, 2001. – 272 с.

16. ***Русанова О.В.*** Пособие по математике для поступающих в вузы. – М.: Учебный центр «Ориентир» при МГТУ, «Светоч Л», 1998. – 216 с.

17. ***Шарыгин И.Ф.*** Математика. 2200 задач по геометрии для школьников и поступающих в вузы. – М: Дрофа, 1999. – 304 с.

18. ***Шарыгин И.Ф., Гордин Р.К.*** Сборник задач по геометрии: 5 000 тысяч задач с ответами. – М.: Астрель. АСТ, 2001. – 400 с.

19. ***Шарыгин И.Ф.*** Факультативный курс по математике: решение задач. Учеб. пособие для 10 кл. средних школ. – М.: Просвещение, 1989. – 252 с.

20. ***Шарыгин И.Ф., Голубев В.И.*** Факультативный курс по математике: решение задач. Учеб. пособие для 11 кл. средних школ. – М.: Просвещение, 1991. – 384 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Ляпин Александр Александрович

Родионов Евгений Михайлович

Синякова Стелла Леонидовна

МАТЕМАТИКА

Сборник задач

Редактор Бойцова Н.Г.
Корректор Максимова О.К.
Художник Черных П.И.
Компьютерная верстка Семенов И.А.

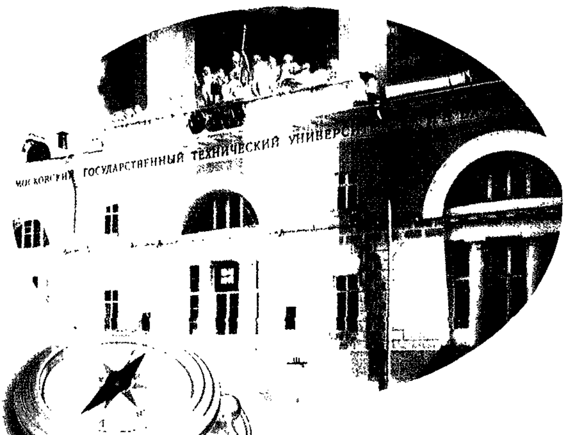
Подписано в печать 27.06.2006 г. Формат 60x84/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Таймс. Усл. печ. л. 24,5.

Учебный центр «Ориентир» при МГТУ им. Н.Э. Баумана
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

www.bmstu-orientir.ru

Учебный центр при МГТУ им. Н.Э.Баумана

МАТЕМАТИКА



ПОСОБИЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ВУЗЫ

СБОРНИК ЗАДАЧ